GROEP WISKUNDE

Afd. Algemene Wetenschappen

WISKUNDE I

SYLLABUS VAN HET COLLEGE

VAN

Prof. dr. J. J. SEIDEL

GEGEVEN IN HET

NAJAARSSEMESTER 1959/60

TYPEWERK VERZORGD DOOR MEJ. A. N. M. VAN DE GRIENDT

TECHNISCHE HOGESCHOOL
EINDHOVEN

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE I

Syllabus van het College van

Prof. Dr. J.J. Seidel

Gegeven in het Najaarssemester 1959/60

ENKELE NOTITIES
bij
WISKUNDE I

Het voor alle afdelingen (de latere 'faculteiten') bestemde 1e jaars wiskundeonderwijs aan de TH/TUE heeft, inhoudelijk, tussen 1956 en ±1980 een belangrijke ontwikkeling doorgemaakt. Aanvankelijk (Wiskunde I 1959/60) is de opzet nog puur 18e eeuws: Aanschouwelijk ambachtelijk geknutsel met grafieken, 'brokjes', 'infinitesimale aangroeïngen', etc. Het is dé manier waarop ingenieurs en natuurkundigen graag tegen wiskunde en, met name analyse, aankijken. Een mooie illustratie hiervan is de introductie van het getal e in § I.5. Het dictaat Wiskunde I (1959/1960) is t/m 1968 min of meer, op wat kleine herverkavelingen na, onveranderd in gebruik geweest.
De variant Wiskunde I (1969) bevat al enkele wat fundamentelere toevoegingen van 19e eeuwse snit, zoals een echte wiskundige definitie van de functie $x \mapsto e^x$.

JdG, Mei 2005.

I N H O U D

I N H O U D

L I T E R A T U U R

W.J.Smirnow, Lehrgang der höheren Mathematik, Teil I, Deutscher Verlag der Wissenschaften.

R.Courant, Differential and Integral Calculus, Volume I, Blackie and Son.

HOOFDSTUK I INLEIDING

§. 1 Getallen

N = verzameling der natuurlijke getallen : 1,2,3,... .
Bewerkingen: optellen en vermenigvuldigen.

$a, b \in N \Longrightarrow a + b \in N \text{ , } ab \in N$.

Verschil $a - b$ is het getal x zodat $b + x = a$. Dan $2 - 3 \notin N$.

Opdat aftrekken steeds mogelijk (opdat $b + x = a$ steeds oplosbaar) voeren wij in de negatieve getallen en het getal 0. Dan

G = verzameling der gehele getallen : pos., neg., 0.

In G is de bewerking delen niet steeds uitvoerbaar : $^2/_3 \notin G$.

Quotient $^a/b$ is het getal x zodat $bx = a$.

Opdat delen steeds mogelijk (opdat $bx = a$ steeds oplosbaar), behalve delen door 0, voeren wij in gebroken getallen (breuken). Dan

M = verzameling der meetbare (rationale) getallen.

$a, b \in M \Longrightarrow a + b, ab, a - b, {}^a/b \in M$.

Nog niet genoeg: $x^2 - 2 = 0$ is niet oplosbaar in M.

Bewijs: Stel $^p/q$ voldoet, p en q geheel, $^p/q$ onvereenvoudigbaar. Dan $p^2 = 2q^2$, p^2 even, p even, p^2 deelbaar door 4, q^2 even, q even, contradictie.

Toch hebben wij getallen als $\sqrt{2}$ en π nodig om de meetkunde te beschrijven. M vult de getallenrechte niet op. Voer in onmeetbare (irrationale) getallen (wortels, π), dan

R = verzameling der reële getallen: de getallen die corresponderen met de punten op de getallenrechte.

Nog zijn wij niet tevreden: $x^2 + 1 = 0$ niet oplosbaar in R.
Daarom wordt later ingevoerd

C = verzameling der complexe getallen : $a + bi$, a en b reëel,

i = complexe eenheid.
Wij werken voorlopig met R.

<u>Opmerking 1.</u> <u>Delen door 0 is niet gedefinieerd.</u>

Dit kan niet op zinvolle wijze geschieden, want stel $3/0 = c$, dan zou $3 = 0 \cdot 3/0 = 0 \cdot c = 0$ dus $3 = 0$. Onzin.

<u>Opmerking 2.</u> <u>Ordening.</u> Uit het beeld op de getallenrechte blijkt:

als $a, b \in R$, dan $a < b$ òf $a = b$ òf $a > b$

m.a.w. R is <u>geordend</u>.

$a \leqslant b$ betekent $a < b$ of $a = b$.

<u>Eigenschappen</u>:

$$a < b \Longrightarrow a + c < b + c$$
$$a < b,\ c > 0 \Longrightarrow ac < bc$$
$$a < b,\ c < 0 \Longrightarrow ac > bc\ .$$

<u>Opmerking 3.</u> <u>Absolute waarde</u> = <u>modulus</u>.

<u>Def</u> $|a| \begin{cases} = a & \text{als } a \geqslant 0 \\ = -a & \text{als } a < 0 \end{cases}$

<u>Vb</u> $|-5| = 5$, $|5| = 5$,

$|p-q| \begin{cases} = p-q & \text{als } p \geqslant q \\ = q-p & \text{als } p < q \end{cases}$

Op de getallenrechte stelt $|p-q|$ de afstand van p en q voor.

<u>Eigenschappen</u>:

$|a| \geqslant 0$, $|-a| = |a|$, $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

$$\left.\begin{array}{l} |a+b| \geqslant |a| - |b| \\ |a+b| \geqslant |b| - |a| \end{array}\right\} \Longrightarrow |a+b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$$

$|ab| = |a| \cdot |b|$, $|a|^2 = a^2$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ als $b \neq 0$.

<u>Stelling</u> $|a| > |b|$ is gelijkwaardig met $a^2 > b^2$.

<u>Bewijs</u>. Als $b = 0$, dan triviaal. Stel verder $b \neq 0$.

1) <u>Geg</u>. $|a| > |b|$ <u>Te bew</u>. $a^2 > b^2$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{geg.} \times |b| : & |a| \cdot |b| > |b|^2 \\ \text{geg.} \times |a| : & |a|^2 > |a| \cdot |b| \end{array}\right\} \Rightarrow |a|^2 > |b|^2 \Rightarrow a^2 > b^2$$

2) <u>Geg</u>. $a^2 > b^2$ <u>Te bew</u>. $|a| > |b|$.

Stel $|b| \geqslant |a|$, dan met 1) : $b^2 \geqslant a^2$, contradictie.

Vb.1 Los op $|x - 4| < |3 - \frac{1}{2}x|$

Met stelling: $(x - 4)^2 < (3 - \frac{1}{2}x)^2$

$$(\tfrac{1}{2}x - 1)(\tfrac{3}{2}x - 7) < 0$$

$$(x - 2)(3x - 14) < 0$$

dus $2 < x < {}^{14}/_{3}$.

Vb.2 Los op $|x - 1| > 2x + 1$

Pas op: de stelling is niet te gebruiken. Onderscheid :

Voor $x \geqslant 1$ staat er $x - 1 > 2x + 1$
$-2 > x$ levert geen oplossing.

Voor $x < 1$ staat er $1 - x > 2x + 1$
$0 > 3x$ levert oplossing $x < 0$.

Opmerking 4. $\sqrt{p}$ is het positieve reële getal, waarvan het kwadraat = p.
Uit deze definitie volgt, dat $\sqrt{x^2} = |x|$.

§.2 Functiebegrip

A. Constante en variabele grootheden bij de beschrijving van een verschijnsel.
Een constante is een letter die gedurende de beschouwing steeds hetzelfde getal voorstelt. Een variabele is een letter die verschillende getallen voorstelt.

Vb.1 Vrije val.

x = afgelegde weg en v = snelheid zijn variabelen
g = versnelling en m = massa zijn constanten.

Vb.2 Segment van een bol.

I = inhoud, h = hoogte van het segment.
r = straal van de bol.

Vb.3 Aantal millimeter regen dat per dag in 1957 valt.

a = aantal mm.
d = hoeveelste dag in 1957.

B. Geoorloofde waarden.

Uit de aard van het vraagstuk blijkt, dat sommige variabelen niet alle, doch slechts bepaalde waarden, de geoorloofde waarden aannemen.

Vb.1 : $x \geqslant 0$. Vb.2 : $0 \leqslant h \leqslant 2r$

Vb.3 : d geheel en $1 \leqslant d \leqslant 365$.

C. Een functie van de variabele x is een voorschrift, volgens hetwelk aan elke geoorloofde waarde van x één getal wordt toegevoegd. Wanneer de toegevoegde waarde door de variabele y wordt aangeduid, dan heet y een functie van x, notatie $y = f(x)$.

Vb.1 $v = f(x)$, namelijk $v = \sqrt{2gx}$.

Vb.2 $I = f(h)$, namelijk $I = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$.

Vb.3 $a = f(d)$, namelijk een tabel.

Opm.1 Uit Vb.3 blijkt dat een functie niet hetzelfde is als een formule.

Opm.2 x in Vb.1, h in Vb.2, d in Vb.3 heten onafhankelijk variabelen, v in Vb.1, I in Vb.2, a in Vb.3 heten afhankelijk variabelen.

Opm.3 Wanneer bij elke geoorloofde waarde van x meer dan één waarde van y behoort, dan heet y een meerwaardige functie van x, b.v. $y^2 = x$. Wij beperken ons voorlopig tot éénwaardige functies.

Opm.4 Als in $I = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$ zowel h als r variabel zijn, dan heet I een functie van twee variabelen.

D. De grafiek van een functie $y = f(x)$ is de meetkundige plaats van de punten, waarvan de coordinaten voldoen aan het voorschrift van de functie.

Vb.1 $y = \sqrt{x}$. Geoorloofd : $x \geqslant 0$.

Merk op dat de y-as in O aan de grafiek raakt omdat

$\tan \varphi = {}^y/x = {}^1/\sqrt{x}$ groot is als x dicht bij O.

Vb.2 $y = \log x$. Geoorloofd : $x > 0$.

Vb.3 $y = 2^x$. Geoorloofd : alle $x \in R$.

Vb.4 $y = \sqrt{1-x^2}$. Geoorloofd : $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Elk punt op de grafiek voldoet aan $y^2 = 1-x^2$, dus aan $x^2 + y^2 = 1$, een cirkel. De grafiek is slechts de halve cirkel daar $y \geqslant 0$.

Vb.5 $y = |x - 4|$. Geoorloofd : alle x.

Voor $x \geqslant 4$ staat er $y = x - 4$

Voor $x < 4$ staat er $y = 4 - x$.

Vb.6 $\left.\begin{array}{l} 0 < x \leqslant 1 : f(x) = {}^1/x \\ 1 < x \leqslant 2 : f(x) = 0 \end{array}\right\}$

Vb.7 y = grootste natuurlijke getal $\leqslant$ x. Geoorloofd : $x \geqslant 1$.

Vb.8 $\left.\begin{array}{l} f(x) = 1 \text{ als } x \text{ meetbaar} \\ f(x) = 0 \text{ als } x \text{ onmeetbaar} \end{array}\right\}$

E. Even en oneven functies.

f(x) heet even functie, als voor alle x geldt : $f(x) = f(-x)$

Vb. $x^2 - 3$, x^6 , cos x, sin x^2 , $x^2 - 2|x| + 3$.

f(x) heet oneven functie, als voor alle x geldt : $f(-x) = -f(x)$.

Vb. sin x, tan x, $x^5 - 6x^3 + {}^1/x$.

Opm. Er zijn vele functies die noch even, noch oneven zijn.

F. Monotonie.

f(x) heet monotoon stijgend voor $a < x < b$, als voor ieder paar getallen x_1 en x_2 tussen a en b geldt, dat

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) .$$

Vb.1 y = sin x is monotoon stijgend voor $0 < x < 90°$, ook voor $-90° < x < 90°$, maar niet voor $0 < x < 180°$.

Vb.2 $y = x^2$ is monotoon stijgend voor $x > 0$.

Vb.3 $y = 2^x$ is monotoon stijgend voor alle x.

f(x) heet monotoon dalend voor $a < x < b$, als voor elke x_1, x_2 geldt

$$a < x_1 < x_2 < b \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

G. Inverse functies.

Zij op $a \leqslant x \leqslant b$ gedefinieerd $y = f(x)$. Zij $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$.
Dan hoort bij elke x tussen a en b één y.

Laat nu $y = f(x)$ zo zijn, dat bovendien bij elke y tussen α en β één x hoort. (Neem bijvoorbeeld f(x) monotoon en zonder sprongen.) Dan is ook x een functie van y op $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$.

Het voorschrift is te krijgen door uit $y = f(x)$ de x op te lossen : $x = g(y)$.

Opm. f en g zijn verschillende functies, omdat zij verschillende voorschriften voorstellen, nl.

f : hoe kan men uit x de y verkrijgen,
g : hoe kan men uit y de x verkrijgen.

Functies f en g, die zo bijeenhoren, heten <u>inverse</u> functies.
Teneinde beide functies op hetzelfde coordinatenstelsel te kunnen tekenen verwisselen wij in $x = g(y)$ de x en de y, dan

$$y = g(x) \text{ op } \alpha \leqslant x \leqslant \beta .$$

Meetkundig betekent dit: spiegel de grafiek t.o.v. $y = x$.

Vb.1 $y = x^2$

Beperken wij ons tot $x \geqslant 0$, dan hoort ook bij elke $y \geqslant 0$ één x.

Los x op : $x = \sqrt{y}$ op $y \geqslant 0$.

Teneinde beide functies op hetzelfde coordinatenstelsel te tekenen: verwissel x en y, dan $y = \sqrt{x}$ op $x \geqslant 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \text{ op } x \geqslant 0 \\ y = \sqrt{x} \text{ op } x \geqslant 0 \end{array}\right\} \text{ zijn inverse functies.}$$

Vb.2 $y = x^3$

Voor alle x geldt : bij elke y hoort één x.

Los x op : $x = \sqrt[3]{y}$.

Op hetzelfde coordinatenstelsel getekend (verwissel x en y) :

$$y = \sqrt[3]{x} \text{ voor alle } x.$$

De functies $y = x^3$ en $y = \sqrt[3]{x}$ zijn inverse functies.

Vb.3 $y = 2^x$

Voor alle x geldt : bij elke $y > 0$ hoort één x.

Los x op : $x = {}^2\log y$.

Op hetzelfde coordinatenstelsel getekend (verwissel x en y) :

$$y = {}^2\log x \text{ op } x > 0.$$

$y = 2^x$ en $y = {}^2\log x$ zijn inverse functies.

H. <u>Goniometrische functies.</u>

Wij meten hoeken in <u>radialen</u>.

Eén radiaal is de hoek die zo groot is dat de lengte van de bijbehorende cirkelboog gelijk is aan de straal van de cirkel, dus

hoek	booglengte
1 radiaal	r
2π rad.	$2\pi r$

Dus $360° = 2\pi$, $180° = \pi$, $60° = \frac{\pi}{3}$, $45° = \frac{\pi}{4}$, $360°/2\pi = 57° = 1$ rad.

De grafieken van

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$

worden bekend verondersteld. De volgende ongelijkheden zijn meetkundig in te zien en vinden hun interpretatie in de grafieken :

1) voor $x > 0$ geldt $\sin x < x$

2) voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$ geldt $\tan x > x$

3) voor alle x geldt $1 - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

I. Cyclometrische functies.

Cyclometrische functies zijn de inversen van goniometrische functies.

1) $y = \sin x$ is monotoon op $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, en heeft daar de eigenschap dat bij elke y tussen -1 en 1 één x hoort.
Op $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ (niet op alle x!) kunnen wij dus spreken van de inverse functie van $y = \sin x$. Verwissel x en y (spiegel t.o.v. $y = x$) dan krijgt men de grafiek van y = inverse van $\sin x$.
Noem deze functie $y = \arcsin x$.
Geoorloofde waarden: $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Functiewaarden: $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2) $y = \cos x$ is monotoon op $0 \leqslant x \leqslant \pi$ en heeft daar de eigenschap, dat bij elke y tussen -1 en 1 één x hoort.
Op $0 \leqslant x \leqslant \pi$ kunnen we dus spreken van de inverse van $y = \cos x$.
Verwissel x en y (spiegel t.o.v. $x = y$), dan krijgt men de grafiek van y = inverse van $\cos x$.
Noem deze functie $y = \arccos x$.
Geoorloofde waarden: $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Functiewaarden: $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$.

3) $y = \tan x$ is monotoon op $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Daar hoort bij elke y één x, en bestaat de inverse.
Verwissel x en y, dan krijgt men de grafiek van y = inverse van $\tan x$.
Noem deze functie $y = \arctan x$.
Geoorloofd : alle x. Functiewaarden: $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$.

Vb.1 $\arcsin \frac{1}{2} = ?$ Stel $\arcsin \frac{1}{2} = p$, dan $\sin p = \frac{1}{2}$

dus $p = \frac{\pi}{6}$ (niet $p = \frac{5\pi}{6}$!)

Vb.2 $\arccos(-\frac{1}{2}) = ?$ Stel $\arccos(-\frac{1}{2}) = p$, dan $\cos p = -\frac{1}{2}$

dus $p = \frac{2\pi}{3}$ (niet $-\frac{2\pi}{3}$)

Vb.3 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Bewijs: Stel $\arcsin x = p$ en $\arccos x = q$, dan is

$x = \sin p$ met $-\frac{\pi}{2} \leqslant p \leqslant \frac{\pi}{2}$ en $x = \cos q$ met $0 \leqslant q \leqslant \pi$, of

$x = \sin p$ met $-\frac{\pi}{2} \leqslant p \leqslant \frac{\pi}{2}$ en $x = \sin(\frac{\pi}{2} - q)$ met $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - q \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Hieruit volgt $p = \frac{\pi}{2} - q$.

<u>Vb.4</u> $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = ?$
Stel $\arctan \frac{1}{2} = p$ en $\arctan \frac{1}{3} = q$, dan
$\tan p = \frac{1}{2}$ en $\tan q = \frac{1}{3}$, met $0 < p, q < \frac{\pi}{2}$.
Gevraagd wordt $p + q$. Nu is

$$\tan(p+q) = \frac{\tan p + \tan q}{1 - \tan p \tan q} = 1.$$

Omdat $0 < p+q < \pi$ volgt $p+q = \frac{\pi}{4}$.

<u>Vb.5</u> $\tan(\arctan x) = x$, maar
$\arctan(\tan x)$ hoeft niet $= x$.

§.3 Limieten van rijen.

A. Een <u>rij</u> $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ is een oneindige verzameling van getallen, die nummerbaar is.

Vb.1 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ $\qquad a_n = {}^1/n$

Vb.2 $1, 1, 1, 1, \ldots$ $\qquad a_n = 1$

Vb.3 $1, -1, 1, -1, \ldots$ $\qquad a_n = (-1)^{n+1}$

Vb.4 $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \ldots$ $\qquad a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$.

Als wij de laatste rij op de getallenrechte voorstellen, dan zien wij dat a_n het midden is van het lijnstuk van a_{n-1} tot 2,
Voldoende ver gaande in de rij komen wij willekeurig dicht bij 2.
Wil men b.v. dat

$$2 - a_n < \frac{1}{1000},$$

dan moet men n groot genoeg nemen, nl.

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{1000} \implies 2^{n-1} > 1000 \implies n > 10.$$

Bij $\varepsilon > 0$ bestaat dus een getal N zodat voor alle $n > N$ geldt :
$2 - a_n < \varepsilon$.
Men zegt dat hier $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

B. Definitie van limiet

De rij $a_1, a_2, \ldots$ heeft tot limiet a, als bij ieder positief getal ε een getal N kan worden gevonden zodanig, dat voor elke $n > N$ geldt

$$| a - a_n | < \varepsilon$$

Notatie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Populair gezegd: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ als $|a - a_n|$ op den duur zo klein is als ik zelf wil.

Vb.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, want om $1/n < \varepsilon$ te krijgen kan $n > 1/\varepsilon$ genomen worden.

Vb.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, want om $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ te krijgen neme men $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Vb.3 $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, want om $1 - 1 < \varepsilon$ te krijgen neme men $n \geqslant 1$.

Vb.4 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}$ bestaat niet. Evenmin $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$.

Vb.5 $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{3})^n = 0$, want om $(\frac{1}{3})^n < \varepsilon$ te krijgen moet $3^n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Hiertoe neme men $n > \dfrac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 3}$

C. Standaardlimieten

1) $p > 0$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

2) $|g| < 1$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} g^n = 0$

3) $a > 0$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Voor het bewijs gebruiken wij, behalve de definitie van limiet, de eigenschap

$$h > 0 \text{ dan } \underline{(1+h)^n} = 1 + nh + \ldots + h^n > 1 + nh > \underline{nh}$$

Opm. Met inductie kan men bewijzen dat zelfs geldt :

$$n > 1, \quad h > -1 \Longrightarrow (1+h)^n > 1 + nh.$$

Bewijs 1) Opdat $\frac{1}{n^p} < \varepsilon$

moet men $n^p > \frac{1}{\varepsilon}$ dus $n > \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}}$ nemen.

Er is dus een N, nl. $\frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}}$, zodat voor elke $n > N$ geldt $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Bewijs 2) Opdat $|g^n - 0| < \varepsilon$

moeten wij zorgen dat $|g|^n < \varepsilon$, dus $\left|\frac{1}{g}\right|^n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Daar $\left|\frac{1}{g}\right| > 1$ kunnen wij stellen $\left|\frac{1}{g}\right| = 1 + h,\ h > 0$.

De eis wordt dan $(1 + h)^n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Daartoe is voldoende $nh > \frac{1}{\varepsilon}$, dus $n > {}^1/h\varepsilon$.

Er is dus een N, nl. ${}^1/h\varepsilon$, zodat voor alle $n > N$ geldt $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Bewijs 3) Wij moeten zorgen dat

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$$

Beschouw eerst $a \geqslant 1$, dan staat er

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$$
$$a < (1 + \varepsilon)^n$$

Hiertoe is voldoende

$$a < n\varepsilon \quad \text{dus} \quad n > {}^a/\varepsilon.$$

Er is dus een N, nl. ${}^a/\varepsilon$, zodat voor alle $n > N$ geldt

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon.$$

Beschouw vervolgens $0 < a < 1$, dan staat er $1 - \sqrt[n]{a} < \varepsilon$.

Neem b zodat $ab = 1$, dan

$$1 - \sqrt[n]{a} = \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{\sqrt[n]{b}} < \sqrt[n]{b} - 1$$

en dit is volgens het voorgaande $< \varepsilon$ te krijgen.

D. Stellingen voor limieten van rijen.

Stelling $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab \\ \lim\limits_{n\to\infty} {}^{a_n}/_{b_n} = {}^{a}/_{b} \quad \text{mits } b \neq 0\end{array}\right.$

Bewijs van de eerste bewering. Neem $\varepsilon > 0$. Uit het gegeven volgt $|a - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ voor $n > N_1$ en $|b - b_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ voor $n > N_2$.

Dus geldt voor $n > \max(N_1, N_2)$

$|a+b-a_n-b_n| \leqslant |a - a_n| + |b - b_n| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$

Vb.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-4n+5}{2n^2-5n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-\frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{2-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}} = \frac{0}{2} = 0$

Vb.2 Worteltruc.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n-1} - \sqrt{n^2-n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-2}{\sqrt{n^2+n-1} + \sqrt{n^2-n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

Insluitstelling

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = k \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = k \\ \text{Voor alle } n \geqslant N : a_n \leqslant b_n \leqslant c_n\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = k.$$

Bewijs Neem $\varepsilon > 0$. Uit het gegeven volgt, dat

voor $n > N_1$ geldt $\quad -\varepsilon < a_n - k < \varepsilon$

voor $n > N$ geldt $\quad a_n - k \leqslant b_n - k$

Dus voor $n > \max(N, N_1)$: $\quad -\varepsilon < b_n - k$

Analoog voor $n > \max(N, N_2)$ $\quad b_n - k < \varepsilon$, dus voor $n > \max(N, N_1, N_2)$ $|b_n - k| < \varepsilon$.

Vb.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ volgt uit de insluitstelling

en $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$.

Vb.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 5^n} = 6$ volgt uit de insluitstelling

en $1 < \sqrt[n]{1 + (\frac{5}{6})^n} < \sqrt[n]{1 + 1}$.

E. Rijen die naar oneindig gaan.

Def $a_n \to \infty$ betekent dat bij elke K een N kan worden gevonden zodat voor elke $n \geqslant N$ geldt $a_n > K$.

Vb.1 $2^n \to \infty$ $\sqrt{n} \to \infty$

Vb.2 $(-1)^n$ heeft geen limiet, doch gaat niet naar oneindig.

§.4 Limieten van functies.

A. $\lim f(x)$ als $x \to \infty$.

Def $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ betekent dat bij elke $\varepsilon > 0$ een N te vinden is, zodanig dat voor alle $x > N$ geldt

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Def $x \to -\infty$ betekent $-x \to \infty$

Vraagstukken met $x \to -\infty$ zijn door substitutie $x = -t$ te herleiden tot vraagstukken met $t \to \infty$.

Vb.1 $$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1$$

omdat $\frac{1}{x^2} \to 0$ en $-\frac{1}{x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{x}$.

Vb.2 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+\sin x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{-t-\sin t}{\sqrt{t^2+1}} = -1.$

B. lim f(x) als $x \to a$.

Populair gezegd betekent de zin

$\lim f(x) = L$ als $x \to a$, dat f(x) en L weinig verschillen

als x maar voldoende dicht bij a ligt.

Bij gegeven $\varepsilon > 0$ zal dus het verschil van f(x) en L kleiner dan ε zijn voor alle x die dicht genoeg bij a liggen.

Def $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ als bij elke $\varepsilon > 0$ te vinden is een positief getal δ zodanig dat voor alle geoorloofde x, waarvoor $0 < |x-a| < \delta$, geldt dat $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Vb $\lim\limits_{x\to 1} (2 + \frac{1}{x}) = 3$, immers

zoek x zodat $|2 + \frac{1}{x} - 3| < \varepsilon$

$$|\frac{1}{x} - 1| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{1}{x} - 1 < \varepsilon$$

$$1-\varepsilon < \frac{1}{x} < 1+\varepsilon$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < x < \frac{1}{1-\varepsilon}$$

$$\frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon} < x - 1 < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

Kiezen wij nu $|x-1| < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, dan is

$$-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < x-1 < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \text{ dus zeker}$$

$$-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < x-1 < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

Bij elke ε is er dus een δ, nl. $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, zodat

$$|x-1| < \delta \implies |f(x) - 3| < \varepsilon.$$

Opm. De uitkomst is eenvoudig te verkrijgen door $x = 1$ te substitueren. Zie "continuiteit", onder C.

Evenals bij rijen gelden de volgende stellingen

Stelling $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = K \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = L\end{array}\right\} \implies \lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \begin{array}{c}+\\ \times\\ :\end{array} g(x)\right] = K \begin{array}{c}+\\ \times\\ :\end{array} L$

(het laatste mits $L \neq 0$)

Insluitstelling

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x) = K \\ \lim\limits_{x \to a} h(x) = K \\ \text{Voor } |x-a| < \delta : f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to a} g(x) \text{ bestaat en } = K$$

C. **Continuiteit.**

Def $f(x)$ is continu voor $x = a$, als $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Populair gezegd: de grafiek vertoont bij $x = a$ geen sprong.

Vb.1 $y = \frac{1}{x}$ is niet continu voor $x = 0$, want $f(0)$ niet gedefinieerd.
$y = \tan x$ is niet continu voor $x = \frac{\pi}{2}$.

Vb.2 $\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x < 1 : f(x) = x \\ 1 \leqslant x \leqslant 2 : f(x) = 0 \end{array}\right\}$ is niet continu voor $x = 1$,

want $f(1) = 0$ en $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ bestaat niet.

(N.B. Wel geldt $\lim\limits_{x \downarrow 1} f(x) = 0$ en $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x) = 1$)

Vb.3 $y = x$ is overal continu.
Te bewijzen is, dat $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Dit is triviaal, want om $|x - a| < \varepsilon$ te krijgen moet men $|x - a| < \varepsilon$ nemen.

Vb.4 $y = x^3$ is overal continu.
Te bewijzen is, dat $\lim\limits_{x \to a} x^3 = a^3$, of $\lim\limits_{x \to a} (x^3 - a^3) = 0$.
Neem voor het gemak $a > 0$. Wegens

$$|x^3 - a^3| = |x - a|\,|x^2 + ax + a^2|$$

volgt, als wij alvast $x < 2a$ nemen, dat

$$|x^3 - a^3| < 7a^2\,|x - a|$$

Als wij verder $|x - a| < \frac{\varepsilon}{7a^2}$ nemen, dan is $|x^3 - a^3| < \varepsilon$.
Hieruit volgt de bewering

Vb.5 $y = \sin x$ is overal continu.
Te bewijzen is, dat $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$. Uit

$$|\sin x - \sin a| = 2\,|\sin \tfrac{1}{2}(x - a)|\,|\cos \tfrac{1}{2}(x + a)| < |x - a|$$

zien wij, dat $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$ te krijgen is.

Opm. Merk op dat hier gebruik gemaakt is van $\sin h < h$, een ongelijkheid die uit een plaatje is bewezen.

Stelling De functies x^b, $\log x$, 2^x, de goniometrische en de cyclometrische zijn continu overal waar zij zijn gedefinieerd.

"Bewijs". Zie de grafiek van deze functies.
Een streng bewijs kan bij de huidige opzet niet worden gegeven.
De functies, die nu meetkundig of bij overlevering zijn gegeven, zouden dan beter moeten worden gedefinieerd.

Stelling Som, verschil, product, quotient van continue functies zijn weer continu.

Gevolg Alle "nette" formulefuncties zijn continu overal waar zij zijn gedefinieerd.

Vb.1 $f(x) = {}^{7}\log(\arcsin(x-2))$ is continu voor $2 < x \leqslant 3$ maar niet voor bv. $x = 4$ en $x = 2$, $x = 1$.

Vb.2 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-1}{x-1} = 7.$

Vb.3 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$. $x = 1$ is niet geoorloofd, dus de functie is niet continu voor $x = 1$.

Deel nu teller en noemer door $(x-1)$; dat mag omdat $x \neq 1$.
De opgave wordt dus

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

De laatste limiet is $\frac{3}{2}$, verkregen door $x = 1$ in te vullen in de nieuwe functie, die voor $x = 1$ continu is.

Vb.4 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\tan x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \sin x \cos^2 x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} 2 \cos^2 x = 2$

Voor de oorspronkelijke functie is $x = 0$ niet geoorloofd.
Na deling wordt een functie verkregen, die wel continu is voor $x = 0$.

Vb.5 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+7x-8}{x}$ bestaat niet. Duidelijk is

$$\left| \begin{array}{l} x \downarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \to \infty \\ x \uparrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \to -\infty \end{array} \right.$$

D. <u>Een standaardlimiet.</u> $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

<u>Bewijs</u>
Uit een meetkundige figuur lezen wij de volgende belangrijke ongelijkheid af

$$\sin x < x < \tan x \qquad (\text{voor } 0 < x < \tfrac{\pi}{2})$$

Hieruit volgt

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

welke ongelijkheid ook voor $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ geldt.

Uit de continuiteit van cos x voor x = 0 en uit de insluitstelling volgt het gevraagde.

<u>Vb.1</u> $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$

<u>Vb.2</u> $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \sin^2 \frac{1}{2}x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x} \right)^2 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

<u>Vb.3</u> $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x} + 1} \cdot \dfrac{1}{\sin 2x} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{2(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{4} .$$

<u>Vb.4</u> $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} \cdot x \sin \dfrac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$

omdat $\quad 0 \leqslant | x \sin \frac{1}{x} | \leqslant | x |$.

<u>Vb.5</u> $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x) \tan (\frac{\pi}{2} x)$. Substitueer $x - 1 = t$, dan

$$\lim_{t \to 0} - t \tan(\tfrac{\pi}{2}t+\tfrac{\pi}{2}) = \lim_{t \to 0} t \cot \tfrac{\pi}{2} t = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{2}\pi t}{\tan \frac{1}{2}\pi t} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} .$$

§.5. Enkele onbewezen stellingen.

A Stelling van Bolzano (1781-1848)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ continu op } a \leqslant x \leqslant b \\ f(a) < 0, \quad f(b) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{Er is een } \xi \text{ met } a < \xi < b \\ \text{waarvoor } f(\xi) = 0 \end{array}$$

De stelling is onjuist als f(x) niet continu is.

Vb.1 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ en $f(x) = \frac{1}{x}$.

Vb.2 $f(x) = -3$ op $0 \leqslant x \leqslant 1$.
$f(x) = 3$ op $1 < x \leqslant 2$.

Vb.3 Men kan een niet te rare oppervlakte door een horizontale lijn in twee gelijke delen verdelen. Immers zij x de hoogte van de rechte en zij y = de oppervlakte boven minus de oppervlakte onder de rechte.
Dan $y = f(x)$ en als deze functie continu is, dan is volgens Bolzano ergens $f(x) = 0$, omdat f (groot) < 0 en f(klein) > 0.

B Stelling van Weierstrass (1815-1897)

Als f(x) continu is op $a \leqslant x \leqslant b$, dan is er een ξ met $a \leqslant \xi \leqslant b$ waar f(x) maximaal
(ook een η met $a \leqslant \eta \leqslant b$ waar f(x) minimaal).

Opm.1 Het interval moet zijn eindpunten bevatten, anders is de stelling niet juist, zoals blijkt uit $f(x) = \frac{1}{x}$ op $0 < x \leqslant 1$.

Opm.2 De eis dat f(x) continu is behoort erbij, anders is de stelling niet juist, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld. Op $0 \leqslant x \leqslant 1$ is f(x) gedefinieerd door $f(x) = x$ als x irrationaal ; $f(x) = \frac{1}{2}$ als x rationaal.

Opm.3 $f(\xi)$ behoeft niet het enige maximum op $a \leqslant x \leqslant b$ te zijn. Ook kan het maximum best op de rand worden aangenomen.

Opm.4 Wij zullen de uitbreiding van deze stelling voor functies van meer dan één variabele vaak gebruiken.

Voorbeeld (zie Courant-Robbins, What is mathematics).

Een treinwagon, waarop een scharnierende staaf is bevestigd, voert een willekeurige maar van te voren bekende beweging op het traject AB uit. Als de staaf eenmaal horizontaal komt te liggen, blijft hij horizontaal liggen. Gevraagd wordt of er een beginstand in A van de staaf bestaat zodat de staaf B in verticale stand passeert.

Opl. Noem de hoek tussen staaf en verticaal in A, de beginstand, i en in B, de eindstand, φ. We nemen nu aan dat de functie $\varphi = \varphi(i)$ continu is. Uit het gegeven volgt

$$\varphi(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{en} \quad \varphi(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

Volgens Bolzano is er een i zodat $\varphi(i) = 0$.

C Hoofdstelling over rijen. Het getal e.

De rij $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ stijgt monotoon als $a_i \leqslant a_{i+1}$ voor alle i.

De rij $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ daalt monotoon als $a_i \geqslant a_{i+1}$ voor alle i.

De rij $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ is naar boven begrensd als er een getal M is zodat alle $a_i \leqslant M$. De rij is naar onder begrensd als er een getal K is zodat alle $a_i \geqslant K$.

Hoofdstelling: Elke rij, die monotoon stijgt en naar boven begrensd is, heeft een limiet. Elke rij, die monotoon daalt en naar onder begrensd is, heeft een limiet.

Vb.1 $1, -1, 1, -1, \ldots$ is niet monotoon stijgend, is wel begrensd, heeft geen limiet.

Vb.2 $1, 2, 3, 4, \ldots$ is niet begrensd, is wel monotoon, heeft geen limiet.

Vb.3 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ is begrensd en monotoon stijgend, dus heeft een limiet, nl. 1.

Vb.4 De rij $\sqrt[n]{a}$, met $a > 1$, is monotoon dalend en naar onder begrensd, dus heeft een limiet, nl. 1.

Vb.5 De rij $n(\sqrt[n]{a} - 1)$, met $a > 1$, is naar onder begrensd en monotoon dalend. Teneinde de monotonie te demonstreren tekenen wij de grafiek van $y = a^x$. Wij noemen deze functie de groeifunctie (evenredige groei, samengestelde interest), omdat $a^{x+1} = a\,a^x$. Door (0,1) trekken wij de koorden naar resp.

$(1,a)$; $(\frac{1}{2}, \sqrt{a})$; ... ; $(\frac{1}{n}, \sqrt[n]{a})$; ...

Op de verticaal door $E = (1,1)$ bepalen deze koorden de stukken

$A_1E = a - 1$; $A_2E = 2(\sqrt{a} - 1)$; ... ; $A_nE = n(\sqrt[n]{a} - 1)$; ...

De punten $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ naderen tot het snijpunt B van de verticaal met de raaklijn in (0,1). De rij $n(\sqrt[n]{a} - 1)$ daalt monotoon naar de limiet b. Dit getal b, de helling van de grafiek in (0,1), hangt op continue wijze af van a. Voor $a = 2$ blijkt $b < 1$ (benaderd $b = 0,7$). Voor $a = 4$ blijkt $b > 1$ (benaderd $b = 1,4$). Volgens de stelling van Bolzano is er een getal a, waarvoor de helling $b = 1$. Dit getal noemen wij het getal e (zie II.13).

Voor dit getal geldt

$$n(\sqrt[n]{e} - 1) > 1 \qquad \text{dus} \qquad e > (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Later zullen wij zelfs bewijzen dat

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n.$$

De rij

$$2 \;;\; \frac{9}{4} = 2.25 \;;\; \frac{64}{27} = 2.37 \;;\; 1.001^{1000} = 2.718$$

levert dan

$$e = 2.71828 \ldots$$

Kortom || <u>e is de waarde van a waarvoor de grafiek van a^x in (0,1) de helling = 1 heeft.</u>

<u>Vb.6</u> De rij bestaande uit de getallen

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \text{waarin } n! = 1.2.3.4.\ldots.n,$$

luidt:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = a_1 + \frac{1}{2!} = 2 + 0,5 = 2,5$$
$$a_3 = a_2 + \frac{1}{3!} = 2,5 + 0,16666 = 2,66666$$
$$a_4 = a_3 + \frac{1}{4!} = 2,66666 + 0,04166 = 2,70832$$
$$a_5 = a_4 + \frac{1}{5!} = 2,70832 + 0,00833 = 2,71665$$
$$a_6 = a_5 + \frac{1}{6!} = 2,71665 + 0,00138 = 2,71803.$$

Dat de rij monotoon stijgt, is triviaal.
Dat de rij begrensd is, volgt uit

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + 2\,[1 - (\frac{1}{2})^n] < 3.$$

Dus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ bestaat en = 2.718... . Later zal blijken dat deze limiet het getal e van Vb.5 is.

HOOFDSTUK II INFINITESIMAALREKENING

§.1 Oppervlakten

Zij $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, een montoon stijgende functie waarvan de grafiek geheel boven de x-as verloopt.
Gevraagd wordt de definitie en de berekening van de oppervlakte die wordt ingesloten door de x-as, de grafiek, en de rechten $x = a$ en $x = b$.
Bekend is dat de oppervlakte van een rechthoek gelijk is aan lengte maal breedte.
Neem 4 deelpunten en noem $a = x_0$, $b = x_5$. Dan is
Som opp. kleine rechthoeken =

$$s = (x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+(x_3-x_2)f(x_2)+(x_4-x_3)f(x_3)+(x_5-x_4)f(x_4)$$

Som opp. grote rechthoeken =

$$S = (x_1-x_0)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_2)+(x_3-x_2)f(x_3)+(x_4-x_3)f(x_4)+(x_5-x_4)f(x_5).$$

De te definieren oppervlakte moet een getal tussen s en S zijn.
De grenzen s en S worden nauwkeuriger als wij meer deelpunten nemen.
Neem nu n-1 deelpunten en schrijf

$$s = \sum_{i=1}^{n} (x_i-x_{i-1})f(x_{i-1}) \quad \text{en} \quad S = \sum_{i=1}^{n} (x_i-x_{i-1})f(x_i).$$

Wanneer nu bij steeds fijner wordende verdelingen ($n \to \infty$ en $x_i-x_{i-1} \to 0$) de limiet van s en de limiet van S bestaan en gelijk zijn, onafhankelijk van de wijze waarop de deelpunten worden gekozen, dan kan dit getal dienen als de definitie van oppervlakte.

Voorbeeld

Gevraagd de oppervlakte tussen de parabool $y = x^2$, de x-as en $x = b$.
Verdeel het lijnstuk $[0,b]$ in n stukken, elk ter lengte $^b/_n$. Dan

$$s = 0 + \frac{b}{n} \cdot (\frac{b}{n})^2 + \frac{b}{n} (\frac{2b}{n})^2 + \ldots + \frac{b}{n} (\frac{(n-1)b}{n})^2 =$$

$$= \frac{b^3}{n^3} [1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2]$$

$$S = \frac{b}{n} (\frac{b}{n})^2 + \frac{b}{n} (\frac{2b}{n})^2 + \ldots + \frac{b}{n} (\frac{nb}{n})^2 = \frac{b^3}{n^3} [1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2].$$

Ter bepaling van de som tussen haken passen wij een kunstgreep toe :

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
n^3 &= (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\
(n-1)^3 &= (n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
2^3 &= 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1 \\
\hline
(n+1)^3 &= 1 + 3\,[1^2 + 2^2 + \dots + n^2] + 3[1 + 2 + \dots + n] + n
\end{aligned}$$

$$1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$\text{Dus } S = \frac{b^3}{n^3}\left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) = b^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

$$s = \frac{b^3}{n^3}\left(\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) = b^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

$$\lim s = \lim S = \frac{b^3}{3}.$$

De gevraagde oppervlakte is dus $\frac{1}{3}b^3$.
Dit soort oppervlakteberekeningen voerde Archimedes reeds uit.

Opm.1 Wij gaven nog geen definitie van oppervlakte, omdat er nog correcties nodig zijn. Bij een niet-monotone functie is bijv.

$$s = (x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+(x_3-x_2)f(x_3)+(x_4-x_3)f(\xi)+(x_5-x_4)f(x_4).$$

Opm.2 Wanneer de oppervlakte zich onder de x-as bevindt, zijn s en S negatief, want $f(x_i) < 0$. Dan is dus de limiet gelijk aan minus de oppervlakte.

§.2 Bepaalde integraal

Nu volgt de precieze definitie :

Zij gegeven f(x) op het lijnstuk ab. Verdeel het lijnstuk door (n-1) deelpunten $x_o = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$.

Kies in elk stukje een punt ξ_i willekeurig tussen x_{i-1} en x_i.

Def

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ x_i - x_{i-1} \to o}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(\xi_i) = \int_a^b f(x)dx$$

als tenminste de limiet bestaat onafhankelijk van de wijze waarop de deelpunten zijn gekozen. De limiet heet dan de bepaalde integraal, van a naar b, van f(x) en wordt genoteerd met $\int_a^b f(x)dx$.

Stelling | Als f(x) continu is op $a \leqslant x \leqslant b$, dan bestaat $\int_a^b f(x)dx$.

Bewijs : Zie N.G.de Bruyn, Beknopt leerboek der differentiaal en integraalrekening, blz. 98 e.v.

De bepaalde integraal, die berust op het procédé van het nemen van een limiet van een som, is te gebruiken voor de gevraagde definitie van oppervlakte, maar ook voor zeer vele natuurkundige en technische begrippen.

Vb.1 Oppervlakte. Als de grafiek van f(x) geheel boven de x-as verloopt,

dan is de oppervlakte $= \int_a^b f(x)dx$.

Als de grafiek geheel onder de x-as, dan is de oppervlakte =

$$- \int_a^b f(x)dx.$$

Vb.2 Arbeid. De kracht op een stoffelijk punt varieert met de afgelegde rechte weg: $K = K(s)$. Dan is de arbeid, verricht bij beweging van A naar B

$$\lim \sum_{\text{van A naar B}} K(\sigma_i)\,(s_i - s_{i-1}) = \int_{s_A}^{s_B} K(s)ds$$

Vb.3 Potentiaal

Volgens Coulomb geldt
Veldsterkte op afstand r van puntlading Q =
= kracht van Q op positieve eenheid van lading = $\frac{Q.1}{r^2}$.

Het potentiaalverschil $V_B - V_A$ = de arbeid die ik moet verrichten om een positieve eenheid van lading van A naar B te brengen =

$$= -\lim \sum_{A \to B} \frac{Q}{(\rho_i)^2} (r_i - r_{i-1}) = -\int_{r(A)}^{r(B)} \frac{Q}{r^2} dr.$$

Vb.4 Volumen. Het volumen, verkregen door wenteling van de grafiek van f(x) om de x-as is

$$\lim \sum_{\text{van o tot a}} \pi f^2(\xi_i) [x_{i+1} - x_i] = \int_0^a \pi f^2(x) dx.$$

Vb.5 Massa, traagheidsmoment. De massadichtheid (massa per opp. eenheid) van een vlakke schijf G is gegeven als functie van de plaats : $\sigma = \sigma(x,y)$.

De totale massa $= \lim \sum_{\text{schijf}} \sigma(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \int_G \sigma \, dO$

Het traagheidsmoment $(\Sigma m_i r_i^2)$ van de schijf t.o.v. een as is

$$\lim \sum_{\text{schijf}} \sigma(\xi_i, \eta_i) \,.\, \Delta O \,.\, r^2 = \int_G \sigma r^2 dO$$

waarbij $\sigma = \sigma(x,y)$ en $r = r(x,y)$.

Vb.6 Massa, zwaartepunt. De massadichtheid (massa per vol. eenheid) van een lichaam L is gegeven als functie van de plaats $\sigma = \sigma(x,y,z)$.

De totale massa $= \lim \sum_{\text{lichaam}} \sigma(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k)$

$$= \int_L \sigma \, dV$$

Het zwaartepunt, dat voor een discreet aantal punten $P_i(x_i, y_i, z_i)$ met massa m_i de coordinaten heeft

$$Z = \left(\frac{\Sigma\, m_i x_i}{\Sigma\, m_i}, \frac{\Sigma\, m_i y_i}{\Sigma\, m_i}, \frac{\Sigma\, m_i z_i}{\Sigma\, m_i} \right)$$

wordt bij lichaam L met dichtheid σ :

$$Z = \left(\frac{\int_L \sigma\, x dV}{\int_L \sigma dV}, \frac{\int_L \sigma y dV}{\int_L \sigma dV}, \frac{\int_L \sigma z dV}{\int_L \sigma dV} \right)$$

<u>Eigenschappen</u> van $\int_a^b f(x)dx$, die volgen uit de definitie :

I $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

II $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

III $\int_a^a f(x)dx = 0$

IV $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

V $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$ als λ constant

Als λ en μ constant, da $\int_a^b [\lambda f+\mu g]dx = \lambda \int_a^b fdx + \mu \int_a^b gdx$.

VI $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

VII Als voor alle $a \leqslant x \leqslant b$ geldt $f(x) \leqslant g(x)$, dan
$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

VIII Als op $a \leqslant x \leqslant b$ geldt $f(x) \leqslant M$, dan $\int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$.

<u>Vb.1</u> $\int_a^b t^2 dt = \int_0^b t^2 dt + \int_a^0 t^2 dt = \int_0^b t^2 dt - \int_0^a t^2 dt = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$

Vb.2 $\int_a^b t\,dt = \frac{1}{2}(b - a)(b + a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$

Vb.3 $\int_a^b dt = b - a.$

Vb.4 $\int_a^b (t^2+pt+q)dt = \frac{1}{3}(b^3-a^3) + \frac{1}{2}p(b^2-a^2) + q(b-a).$

Na de differentiaalrekening zullen we kennis maken met een methode, waarmee bepaalde integralen sneller te berekenen zijn.

§.3 Raaklijnen

Gegeven is de grafiek van $y = f(x)$ met erop een punt P.

Gevraagd wordt de richting van de raaklijn in P, dus de berekening en de definitie van $\tan\alpha$.

Oplossing Zij Q een naburig punt op de grafiek en zij R het snijpunt van de rechte evenwijdig aan de x-as door P en de rechte evenwijdig aan de y-as door Q. Noem verder $x_p = a$, $x_Q = a + h$, $\angle QPR = \varphi$, dan is

$$\tan\varphi = \frac{1}{h}[\, f(a + h) - f(a) \,].$$

Aan het gevraagde is voldaan als wij nemen

$$\tan\alpha = \lim \tan\varphi = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Wanneer wij dit doen voor elk punt van de kromme, dan wordt de uitkomst zelf ook een functie van x, nl.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Vb.1 $y = x^3$. Dan $\tan\varphi = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h}$ en

$$\tan\alpha = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} = 3a^2.$$

Doen wij dat in elk punt, dan krijgen wij $3x^2$.

Vb.2 $y = \frac{1}{x}$. $\tan \varphi = \dfrac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h}$ en

$$\tan \alpha = \lim_{h \to o} \frac{-h}{ha(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$

Voor elk punt $x \neq 0$ krijgen wij $-\frac{1}{x^2}$. Voor $x = 0$ gaat het niet.

Vb.3 $y = |x|$. $\lim \tan \varphi = \lim \frac{|a+h|-|a|}{h} = \begin{cases} 1 \text{ als } a > 0 \\ -1 \text{ als } a < 0 \end{cases}$

terwijl $\lim\limits_{h \to o} \frac{|h|}{h}$ niet bestaat.

$$\text{Dus} \quad \tan \alpha = \begin{cases} 1 \text{ voor } x > 0 \\ ? \text{ voor } x = 0 \\ -1 \text{ voor } x < 0 \end{cases}$$

Opm.1 Uit de voorbeelden blijkt, dat $\tan \alpha$ en dus de raaklijn niet altijd bestaat.

Opm.2 De gevolgde procedure, het nemen van de lim. van een quotient komt behalve bij krommen met hun raaklijn herhaaldelijk voor in techniek en natuur.

Vb.1 Mechanica. Bij een beweging $s = f(t)$ is de gemiddelde snelheid over het tijdvak $[t_o, t_o+h]$ per definitie $\frac{1}{h}[f(t_o+h) - f(t_o)]$.

Snelheid ten tijde t_o $\underline{\underline{\text{Def}}}$ $\lim\limits_{h \to o} \dfrac{f(t_o+h)-f(t_o)}{h}$.

Bij eenparig versnelde beweging, $s = v_o t + \frac{1}{2} g t^2$, is

$$\text{snelheid} = \lim_{h \to o} \frac{v_o(t+h) + \frac{1}{2} g (t+h)^2 - v_o t - \frac{1}{2} g t^2}{h} = v_o + gt.$$

Vb.2 Uitzettingscoeff. van een staaf. Zij de lengte van een staaf bij nul graden $L(0)$ en bij T graden $L = L(T)$.

De mate van uitzetting bij temperatuur T wordt aangegeven door

$$\lim_{\tau \to o} \frac{L(T + \tau) - L(T)}{\tau}$$

Dit heeft de dimensie van lengte gedeeld door temperatuur.

De uitzettingscoeff. bij temperatuur T is

$$\alpha = \frac{1}{L(T)} \lim_{\tau \to 0} \frac{L(T+\tau) - L(T)}{\tau} .$$

Vb.3 <u>Vloeistof in een buis</u>. De druk p is een functie van de plaats in de buis: $p = p(x)$. Het drukverval langs de buis is de verandering van de druk per lengteeenheid $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{p(x+h) - p(x)}{h}$.

Vb.4 <u>Soortelijke warmte</u>. Als $Q(T)$ de warmte is, nodig om een eenheid van massa van temperatuur 0° op temperatuur T te brengen, dan is $Q(T_2) - Q(T_1)$ de warmte nodig om de temperatuur van T_1 op T_2 te brengen. De limiet van de gemiddeld benodigde warmte is de soortelijke warmte bij temperatuur T, en wordt gegeven door

$$\lim_{h \to 0} \frac{Q(T+\tau) - Q(T)}{\tau} .$$

In alle voorbeelden is aangenomen dat de limiet bestaat.

<u>Opm.3</u> Men is geinteresseerd in de mate van verandering in de buurt van een punt, omdat daardoor de functie in de buurt van een punt als een lineaire functie is te beschouwen.

§.4 <u>De afgeleide</u>

Thans volgen de precieze definities.

Gegeven zij $f(x)$ in de buurt van $x = a$.

Wij wensen $f(a+h) - f(a)$ te benaderen door een lineaire functie,

m.a.w. wij zoeken een getal A, zodat $f(a+h) - f(a)$ lijkt op Ah,

m.a.w. wij onderzoeken of $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ een lim. heeft.

<u>Def</u> Als $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ bestaat, dan heet

<u>$f(x)$ differentieerbaar voor $x = a$</u>,

en dan heet de limiet A de <u>afgeleide</u> voor $x = a$.

Def | Als deze afgeleide voor alle x in $a \leqslant x \leqslant b$ bestaat, dan heet $f(x)$ <u>differentieerbaar</u> in $a \leqslant x \leqslant b$.
De afgeleide is dan weer een functie van x, notatie $f'(x)$.
<u>Differentieren</u> is het bepalen van de afgeleide.

<u>Meetkundige interpretatie</u> : $f(x)$ differentieerbaar in $x = a$ betekent, dat de raaklijn voor $x = a$ bestaat en $\tan\alpha = f'(a)$.

Als $f'(a) > 0$, dan $\tan\alpha > 0$, dus $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
Als $f'(a) < 0$, dan $\tan\alpha < 0$, dus $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
Als $f'(a) = 0$, dan $\tan\alpha = 0$, dus $\alpha = 0$.

<u>Vb.1</u> $y = x^2$. Dan $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$.

<u>Vb.2</u> $y = c$. Dan $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c - c}{h} = 0$.

<u>Stelling</u> Als $f(x)$ differentieerbaar voor $x = a$, dan is $f(x)$ continu in $x = a$.

<u>Bewijs</u>
Wij moeten aantonen dat $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ dus dat $\lim\limits_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$.

Welnu,
$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot (x-a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

<u>Opm.</u> Er zijn functies die wel continu, maar niet differentieerbaar zijn voor $x = a$, dus men mag de stelling niet omkeren.

§.5 Techniek van het differentieren

A. Regels van Leibniz (1646-1716)

1 $y = f(x) = u(x) \pm v(x) \Longrightarrow y' = u'(x) \pm v'(x)$

Bewijs

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h} .$$

2 $y = u(x) \, . \, v(x) \Longrightarrow y' = uv' + u'v$

Bewijs

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} =$$

$$= \frac{u(x+h)v(x+h)-u(x+h)v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h} =$$

$$= u(x+h)\,\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\,\frac{u(x+h)-u(x)}{h} .$$

2' $y = c\,u(x) \Longrightarrow y' = c\,u'$ want $c' = 0$.

2'' $y = u(x)v(x)w(x) \Longrightarrow y' = uvw' + uv'w + u'vw$.

3 $y = \dfrac{u(x)}{v(x)} \Longrightarrow y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Bewijs uit $\frac{u}{v} \, . \, v = u$ volgt

$$\left(\frac{u}{v}\right)' v + \frac{u}{v} v' = u' \quad \text{dus} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} .$$

3' $y = \dfrac{1}{v(x)} \Longrightarrow y' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

4 Inverse functies. Beschouw $y = f(x)$ met inverse $x = \varphi(y)$.
Noem $f(x+h)-f(x) = k$ dan $f(x+h) = y+k$ dus $x+h = \varphi(y+k)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim \frac{k}{h} = \lim \frac{k}{x+h-x} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{k}{\varphi(y+k)-\varphi(y)} = \frac{1}{\varphi'(y)} \qquad \text{(afgeleide naar y).}$$

Het product der afgeleiden van de inversen $y = f(x)$ en $x = \varphi(y)$ is dus 1. Dit blijkt ook uit de figuur, want als $f'(x) = \tan\alpha$, $\varphi'(y) = \tan\beta$ en $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ dan is $\tan\alpha \tan\beta = 1$.

B. De elementaire functies.

5 $y = \sin x \Longrightarrow y' = \cos x$.

Bewijs

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{1}{2}h\cos(x+\frac{1}{2}h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\cos(x+\tfrac{1}{2}h) = 1.\cos x .$$

6 $y = \cos x \Longrightarrow y' = -\sin x$.

Bewijs

$$y' = \lim \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim \frac{-2\sin(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} = -\sin x .$$

7 $y = \tan x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ want $\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$.

8 $y = \operatorname{cotan} x \Longrightarrow y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

9 $y = \arcsin x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Bew. $y = \arcsin x$ en $x = \sin y$ (afgeleide $\cos y$) zijn inversen.

Dus $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10 $y = \arccos x \Longrightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ want $\arcsin = \frac{\pi}{2} - \arccos$.

11 $y = \arctan x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Bew. $\arctan x$ is inverse van $x = \tan y$ met afgeleide $\dfrac{1}{\cos^2 y}$,

dus $(\arctan x)' = \cos^2 y = \dfrac{1}{\sec^2 y} = \dfrac{1}{1+\tan^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

12 $y = x^a \Longrightarrow y' = ax^{a-1}$ (a willekeurig reëel maar constant).

Bewijs

1) a natuurlijk: $y = x^a = x.x\ldots x$ en $y' = x'.x\ldots x + \ldots + x.x\ldots x' =$
$= ax^{a-1}$.

2) $a = -n$: $y = \frac{1}{x^n}$ en $y' = -n\,x^{-n-1} = ax^{a-1}$.

3) $a = \frac{1}{n}$: $y = \sqrt[n]{x}$, de inverse van $x = y^n$ (afgeleide $n\,y^{n-1}$)
dus $y' = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n}\,y^{1-n} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1} = ax^{a-1}$.

4) $a = \frac{m}{n}$: $y = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$ en
$y' = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1} \cdot x^{\frac{1}{n}} \ldots x^{\frac{1}{n}} + \ldots + = \frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1} = ax^{a-1}$.

5) a reëel : wordt niet bewezen.

C. De kettingregel voor samengestelde functies.

Wij willen differentieren

$y = \varphi(u)$ met $u = \phi(x)$. Dan $y = \varphi[\,\phi(x)\,] = f(x)$.

$$y'(x) = \lim_{h\to o} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to o} \frac{\varphi[\,\phi(x+h)\,] - \varphi[\,\phi(x)\,]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to o} \frac{\varphi[\,\phi(x+h)\,] - \varphi[\,\phi(x)\,]}{\phi(x+h) - \phi(x)} \cdot \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}$$

en, als wij noemen $\phi(x+h) - \phi(x) = k$, dus $\phi(x+h) = u + k$

waarin dus uit $h \to o$ volgt $k \to o$ (als ϕ tenminste continu is) :

$$y'(x) = \lim_{k\to o} \frac{\varphi(u+k) - \varphi(u)}{k} \cdot \lim_{h\to o} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}\ , \text{ dus}$$

13 $y'(x) = \varphi'(u) \quad \phi'(x)$ waarbij de accenten doelen op differentieren naar x, naar u, naar x .

Vb.1 $y = (\sin x)^2$ dan $y' = 2\sin x \cdot \cos x$ (neem $u = \sin x$).

Vb.2 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$. $y' = -\frac{1}{2}\,(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

14 $y = e^x \Longrightarrow y' = e^x$.

De groeifunctie $y = a^x$ verloopt steiler naarmate a groter is. Voor één waarde van a, die wij op blz. I.18 het getal e noemden, zal de grafiek de y-as onder de helling 1 snijden. Voor de functie $y = e^x$ geldt dus $y'(0) = 1$.
De afgeleide voor willekeurige x volgt uit

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x\, y'(0) = e^x.$$

15 $y = \log x \Longrightarrow y' = \frac{1}{x}$.

De functie $y = \log x$, met grondtal e, onderscheidt zich van logarithmen met ander grondtal door eenvoudige eigenschappen. Immers uit
$x = e^{\log x} = e^y$ volgt $1 = e^y \cdot y'$, dus

$$y' = e^{-y} = \frac{1}{x}.$$

De helling van $y = \log x$ in $(1,0)$ is dus 1.

<u>Afspraak</u> | Voortaan zullen wij e als grondtal der logarithmen nemen, wanneer er niets bijstaat. De logarithmen met grondtal e heten <u>natuurlijke</u> of <u>neperiaanse logarithmen</u> naar Napier (1550-1617).

16 $y = a^x \Longrightarrow y' = a^x \cdot \log a$

Elke groeifunctie a^x is terug te brengen tot e^x. Immers

$$y = a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}.$$

Differentieren geeft

$$y' = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \cdot \log a.$$

Voor $x = 0$ vindt men dus $y'(0) = \log a$, de helling van a^x in $(0,1)$. Zie I.18.

17 $y = {}^a\log x \Longrightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \log a}$

immers $y = {}^a\log x = \frac{\log x}{\log a} = \log x \cdot {}^a\log e$.

<u>Opm</u>. Bij $a = 10$ is ${}^a\log e = 0.4343$, dus

$${}^{10}\log x = 0.4343 \log x \quad \text{en} \quad \log x = 2.3026\ {}^{10}\log x.$$

<u>Stelling</u> | $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ en $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$.

<u>Bewijs</u> Wij bewijzen de tweede formule, waaruit de eerste volgt. x is willekeurig maar vast.

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = \lim_{n\to\infty} e^{n \log(1 + \frac{x}{n})} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\log(1 + \frac{x}{n}) - \log 1}{x/n} \cdot x}$$

Stel $x/n = h$, dan staat er

$$\lim_{h\to o} e^{\frac{\log(1+h) - \log 1}{h} \cdot x} = e^{x \cdot \lim_{h\to o} \frac{\log(1+h) - \log 1}{h}} .$$

De limiet heeft de waarde 1, want hij is juist de afgeleide van de logarithme in het snijpunt met de as.

<u>Vb.1</u> $y = \cos x + \cos 30° \Longrightarrow y' = - \sin x.$

<u>Vb.2</u> $y = e^{\tan x} \Longrightarrow y' = e^{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

<u>Vb.3</u> $y = \log [\arctan (x^3)] \Longrightarrow y' = \frac{1}{\arctan x^3} \cdot \frac{1}{1+x^6} \cdot 3x^2$.

<u>Vb.4</u> $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{5}} \Longrightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{5}x^{-\frac{7}{5}}$.

<u>Vb.5</u> $y = \log [x + \sqrt{1+x^2}] \Longrightarrow y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot [1 + \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x] =$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} .$$

<u>Vb.6</u> $y = \log |x|$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Als } x > 0 \text{ dan } y = \log x \text{ met } y' = \frac{1}{x} \\ \text{Als } x < 0 \text{ dan } y = \log(-x) \text{ met } y' = \frac{1}{-x}.(-1)=\frac{1}{x} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y' = \frac{1}{x} \\ \text{voor } x \neq 0. \end{array}$$

<u>Vb.7</u> $y = x^x = e^{x \log x} \Longrightarrow y' = e^{x \log x} (1 + \log x).$

<u>Vb.8</u> $y = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, dan

$$y' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} \cdot \frac{1.\sqrt{1-x^2} - x.\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)}{1-x^2} =$$

$$= \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Opm. Dit antwoord krijgt men ook bij differentieren van $y = \arcsin x$.

Vb.9 1) In een conisch vat stroomt water met een constante snelheid.

Hoogte vat = b = 3m

straal bovencirkel = a = 4m

snelheid = s = $2m^3$ per minuut.

Gevraagd wordt de snelheid, waarmee de waterspiegel stijgt, als de hoogte van het water = h = 1m is.

2) Gegeven zijn a, b, s, en op een bepaald moment h.

Gevraagd wordt de stijgsnelheid, i.e. de afgeleide van de hoogte h op het bepaalde moment, en wel de afgeleide van h naar de tijd t.

Gevraagd is dus $\frac{dh}{dt}$ uit te drukken in a, b, s, h.

(Hier abstraheren wij van de numerieke waarden.)

3) $s = \frac{dV}{dt}$ met V = volume water ten tijde t.

De vraag is dus $\frac{dh}{dt}$ uit te drukken in a, b, $\frac{dV}{dt}$, h.

4) Nu zijn V en h onderling afhankelijk, V = V(h), nl.

$V = \frac{\pi x^2 h}{3}$ en $\frac{x}{h} = \frac{a}{b}$ dus $V = \frac{\pi a^2 h^3}{3b^2}$.

Differentieer naar t, dan

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi a^2 h^2}{b^2} \frac{dh}{dt}$$

en hiermee is $\frac{dh}{dt}$ uit te drukken in a, b, $\frac{dV}{dt}$ en h.

5) Vul de speciale waarden in :

$$2 = \frac{\pi.16.1}{9}\left(\frac{dh}{dt}\right)_1 \text{ dus } \left(\frac{dh}{dt}\right)_1 = \frac{9}{8\pi} \ ^m/min.$$

§.6 Extrema

Zij $f(x)$ gedefinieerd voor $a \leqslant x \leqslant b$. Zij c een getal met $a \leqslant c \leqslant b$.

Def | $f(x)$ bereikt een maximum voor $x = c$, als $f(c+h) - f(c) \leqslant 0$ voor alle geoorloofde h, mits klein genoeg.

dus als $f(c)$ groter is dan, of gelijk is aan de functiewaarden van naburige punten.

Stelling (Fermat, 1601-1665)

| $f(x)$ is op $a \leqslant x \leqslant b$ differentieerbaar en $f(x)$ is maximaal voor $x = c$, $(a < c < b)$. Dan is $f'(c) = 0$.

Bewijs

Uit $f(c+h) - f(c) \leqslant 0$ voor $h > 0$ en $h < 0$ volgt

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0, \ h > 0 \quad \text{en} \quad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \text{ voor } h < 0.$$

De limiet van het quotient bestaat, en is in beide gevallen $f'(c)$.

Dus $f'(c) \leqslant 0$ en $f'(c) \geqslant 0$, dus $f'(c) = 0$.

Opm. deze stelling geldt ook, als wij het woord maximum door het woord minimum vervangen.

Stelling van het gemiddelde

| Op $a \leqslant x \leqslant b$ is $f(x)$ differentieerbaar $\Longrightarrow$ Er is een ξ met $a < \xi < b$ zodat

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

| dus er is een punt ξ waar $\tan \alpha = \tan \varphi$.

Bewijs. Noem

$$g(x) = f(x) - \frac{x-a}{b-a} [f(b) - f(a)].$$

Dan

$$g(b) = f(a) \text{ en } g(a) = f(a) \text{ dus } g(b) = g(a) \text{ en}$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Als $g(x) =$ Constant, dan is overal $g'(x) = 0$. Als $g(x)$ niet constant is, dan is er (Weierstrass) een ξ met $a < \xi < b$, waarvoor een maximum

of een minimum van $g(x)$ optreedt. Volgens Fermat is dan $g'(\xi) = 0$.
Daar geldt dus:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} .$$

<u>Gevolg</u> | Als $f'(x) > 0$ voor alle $a < x < b$, dan is $f(x)$ monotoon stijgend op $a < x < b$.

<u>Bewijs</u>

Zou ooit $f(x_1) - f(x_2) \geqslant 0$ voor $a < x_1 < x_2 < b$, dan zou

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant 0 \quad \text{dus } f'(\xi) \leqslant 0, \quad \text{contradictie.}$$

<u>Gevolg</u> | Als $f'(x) < 0$ voor alle $a < x < b$, dan is $f(x)$ monotoon dalend op $a < x < b$.

<u>Gevolg</u> Als $f'(x) = 0$ voor alle $a < x < b$, dan is $f(x) =$ constant op $a < x < b$.

Vb.1 Schets de grafiek van $y = \dfrac{1 - x}{x^2}$.

Geoorloofd: alle $x \neq 0$.
Asymptoten: verticaal $x = 0$, horizontaal $y = 0$.

$y' = \dfrac{x-2}{x^3}$ dus

x			0			1				2		
y	+	+	?	+	+	0	-	-	-	$-\frac{1}{4}$	-	-
y'	+	+	?	-	-	-	-	-	-	0	+	+

Het punt $(2, -\frac{1}{4})$ is een minimum, daar $f(x)$ afneemt links van $x = 2$ en toeneemt rechts van $x = 2$.

Vb.2 Schets $y = (x-1)^2(x+1)^3$. Uit $y' = (x-1)(x+1)^2(5x-1)$ volgt

x			-1			$\frac{1}{5}$			1		
y	-	-	0	+	+	+	+	+	0	+	+
y'	+	+	0	+	+	0	-	-	0	+	+

Bij $x = -1$ treedt geen extreem op, bij $x = \frac{1}{5}$ een (relatief) maximum, bij $x = 1$ een (relatief) minimum.

Vb.3 Schets $y = x - 3\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^2}\,(\sqrt[3]{x} - 3)$.
Merk op dat steeds $y < x$ behalve voor $x = 0$.

$$y' = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} .$$

x	0 8 27
y	- - 0 - - - - - - 0 + +
y'	+ + ? - - 0 + + + + +

Vb.4 Gevraagd die kegel, met grondcirkel op een gegeven boloppervlak en top in het middelpunt van de bol, die de grootste inhoud heeft.
Opl. Neem de straal van de bol = 1. Neem de hoogte h van de kegel als onafhankelijk variabele, dan is

$I = \frac{1}{3} h \cdot \pi r^2 = \frac{1}{3}\pi h(1-h^2)$, geoorloofd: $0 \leqslant h \leqslant 1$.

$I' = \frac{1}{3}\pi - \pi h^2$. Voor $h = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ is I maximaal wegens

h	.	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	.
I'	+	0	-

Vb.5 Gegeven is de grafiek van $y = f(x)$.
Gevraagd de vergelijkingen van de raaklijn en de normaal in het punt $P(x_o, f(x_o))$ van de kromme.

Oplossing: De vergelijking van een willekeurige rechte door P is :

$$y - y_o = C(x - x_o).$$

De richtingscoefficient van de raaklijn in P is $\tan\alpha = f'(x_o)$, dus de raaklijn heeft de vergelijking

$$y - y_o = f'(x_o)(x - x_o).$$

De richtingscoefficient van de normaal in P is

$$\tan\beta = -{}^1/\tan\alpha = -{}^1/f'(x_o).$$

Vergelijking normaal: $y - y_o = -\frac{1}{f'(x_o)}(x - x_o)$

Opm. Blijkbaar zijn de rechten

$y = mx + n$ en $y = px + q$

loodrecht als $\boxed{mp = -1}$.

§.7 Differentialen

1. Eerst de formele definitie. Laat dx een willekeurig getal voorstellen.

Def De bij dx behorende differentiaal van $y = f(x)$, notatie dy of $d\,f(x)$, is
$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

Opm. Wij noemden het willekeurige getal dx, opdat de notatie ook klopt voor de functie $y = x$. Dan links dx en rechts $1.dx$. Dus dx is ook een differentiaal, nl. van $f(x) \equiv x$.

2. Nu de meetkundige interpretatie.

De helling in een punt van de grafiek van $y = f(x)$ wordt gegeven door
$$f'(x) = \frac{\text{stuk in y-richting}}{\text{stuk in x-richting}}.$$

Duid een willekeurig stuk in x-richting aan door dx(dus dx is een variabele), en duid het bijbehorende stuk in y-richting, zodat wij op de raaklijn terecht komen, aan met dy. Dan
$$dy = f'(x)dx.$$

Voorbeeld $y = x^2$, $y' = 2x$.

In $(1,1)$ is $dy = 2dx$. In $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ is $dy = -dx$.

Algemeen : $dy = 2xdx$.

3. Uit de definitie volgt $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. De afgeleide is dus het quotient van twee differentialen. Daarom heet $f'(x)$ ook wel een differentiaalquotient.

4. Het werken met differentialen vereenvoudigt de schrijfwijze : Volgens de regels van Leibniz is

$d(u+v) = (u+v)'dx = u'dx + v'dx = du + dv.$

$d(uv) = (uv)'dx = uv'dx + u'vdx = udv + vdu.$

De Kettingregel: $y = \varphi(u)$ en $u = \phi(x)$, dan $y' = \varphi'(u)\,\phi'(x)$ wordt

$dy = y'dx = \varphi'(u)\,.\,\phi'(x)dx = \varphi'(u)du.$

Samenvattend :

$d(u+v) = du + dv$

$d(uv) = udv + vdu$

$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

$dy = \varphi'(u)du$

§.8 Numerieke methoden

A. Methode van Newton ter benadering van wortels van vergelijkingen.

Wanneer de vergelijking $f(x) = 0$ niet exact opgelost kan worden, moeten numerieke methoden gebruikt worden, zoals de volgende :

Laat x_0 in de buurt van de wortel liggen.
De raaklijn in het punt $P(x_0, f(x_0))$ aan de grafiek van $y = f(x)$ snijdt de x-as in x_1. Onder zekere omstandigheden is dan x_1 een betere benadering van de wortel. De vergelijking van de raaklijn in P luidt $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Voor het snijpunt met x-as is $-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$
dus

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}.$$

Opm. x_1 geeft niet altijd een betere benadering.

Vb.1 $f(x) \equiv x^3 - 2x - 5 = 0.$

Voor $x_0 = 2$ is $f(x_0) = -1$. Dan $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \dfrac{-1}{3.2^2-2} = 2.$

Voor $x_1 = 2{,}1$ is $f(x_1) = 0{,}061$.
Volgens Newton is dan

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2{,}1 - \frac{0{,}061}{3.(2{,}1)^2-2} = 2{,}1 - 0{,}00543 = 2{,}09457.$$

Vb.2 $f(x) \equiv x^2 - a = 0.$

Zij x_0 een waarde die niet te veel van $\sqrt{a}$ afwijkt,
dan

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2-a}{2x_0} = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)}.$$

Zo is $\sqrt{2}$ te benaderen, nl. neem $a = 2$, dan $x^2 - 2 = 0$. Zij

$x_0 = 1$, dan $x_1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{1}) = 1.5$

$x_1 = 1{,}5$, dan $x_2 = \frac{1}{2}(1.5 + \frac{2}{1.5}) = \frac{1}{2}(1.5 + 1.3) = 1.4$

$x_2 = 1.4$, dan $x_3 = \frac{1}{2}(1.4 + \frac{2}{1.4}) = \frac{1}{2}(1.4 + 1.43) = 1.41$

$x_3 = 1.41$ dan $x_4 = \frac{1}{2}(1.41 + \frac{2}{1.41}) = \frac{1}{2}(1.41 + 1.418) = 1.414$ etc.

B. Methoden voor numeriek integreren.

Wij herinneren aan de definitie van het begrip bepaalde integraal, nl.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ x_i - x_{i-1} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(\xi_i).$$

Voor een enkel geval hebben wij deze integraal reeds uitgerekend, nl.

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3} b^3 \quad ; \quad \int_0^b x\, dx = \frac{1}{2} b^2 \quad ; \int_0^b dx = b$$

In de hierna volgende paragraaf 9 zullen wij de methode behandelen waarmee men de differentiaalrekening kan toepassen om bepaalde integralen uit te rekenen. Deze methode werkt echter niet in alle gevallen. Daarom laten wij voorafgaan een andere methode om bepaalde integralen weliswaar niet precies te berekenen, maar wel numeriek te benaderen. Er zijn 3 manieren om integralen numeriek te benaderen.

B.1 Uit de definitie.

Verdeel b-a in n gelijke stukken, en bereken de functiewaarden in elk deelpunt, dan is

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} [\, y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \,].$$

B.2 Trapeziumregel. Een betere benadering krijgt men, als men niet rechthoeken, maar trapezia als benadering gebruikt. Dan

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right]$$

$$\approx \frac{b-a}{2n} \left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n \right]$$

B.3 Regel van Simpson (1743)

Nu benaderen wij de kromme door stukjes parabool.

Hulpstelling | Voor de parabool $y = p(x)$ geldt

$$\int_0^{2h} p(x)dx = \frac{1}{3} h\, (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Bewijs Stel $p(x) \equiv ax^2 + bx + c$. Wij drukken de coefficienten a,b,c uit in y_0, y_1, y_2, h.

P_0 op parabool : $y_0 = c$

$$\begin{array}{lll|c|c} P_1 \text{ op parabool :} & y_1 - y_0 = ah^2 + bh & & -2 & 4 \\ P_2 \text{ op parabool :} & y_2 - y_0 = 4ah^2 + 2bh & & 1 & -1 \end{array}$$

Dus $2ah^2 = y_0 - 2y_1 + y_2$ en $2bh = -3y_0 + 4y_1 - y_2$

$$\int_0^{2h} p(x)dx = \int_0^{2h} (ax^2+bx+c)dx = a\int_0^{2h} x^2\,dx + b\int_0^{2h} xdx + c\int_0^{2h} dx =$$

$$= a \cdot \frac{1}{3}(2h)^3 + b \cdot \frac{1}{2}(2h)^2 + c \cdot 2h =$$

$$= \frac{1}{3} h \left[\, 8ah^2 + 6bh + 6c \,\right] =$$

$$= \frac{1}{3} h \left[\, 4(y_0 - 2y_1 + y_2) + 3(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + 6y_0 \,\right] =$$

$$= \frac{1}{3} h \left[\, y_0 + 4y_1 + y_2 \,\right].$$

Verdeel nu b-a in 2n stukken. De oppervlakte van elk der n paren benaderen wij door de oppervlakte, die ontstaat door de kromme te benaderen door een parabool. Dan

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3} h \left[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots \right]$$

$$\approx \frac{b-a}{6n} \left[\, y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) \right.$$

Dit is de regel van Simpson, die o.a. zijn toepassing vindt in de scheepsbouwkunde, bij berekening van de waterverplaatsing.

§.9 De hoofdstelling der integraalrekening.

Zij $f(t)$ continu. Wij definieerden

$$\int_a^b f(t)dt = \lim \sum (t_i - t_{i-1}) f(\tau_i).$$

Noem de bepaalde integraal $\int_a^x f(t)dt = O(x)$.

<u>Stelling</u> $O'(x) = f(x)$.

Wij geven het bewijs eerst met het plaatje, dan formeel.

<u>uit het plaatje</u>

opp.kleine rechthoek $\leqslant$ opp.strook $\leqslant$ opp.grote rechthoek

$$h.f(x) \leqslant O(x+h)-O(x) \leqslant hf(x+h)$$

$$f(x) \leqslant \frac{O(x+h)-O(x)}{h} \leqslant f(x+h)$$

Als $h \to o$, dan is daar f continu

$$\lim_{h\to o} \frac{O(x+h) - O(x)}{h} = f(x)$$

<u>formeel</u>

Zij op $x \leqslant t \leqslant x + h$
$\max (f(t)) = M$ en $\min (f(t)) = m$.

$$hm \leqslant \int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant h\,M$$

$$m \leqslant \frac{O(x+h) - O(x)}{h} \leqslant M$$

Laat $h \to o$, dan $m \to f(x)$ en
$M \to f(x)$.

<u>Opm</u>. Deze stelling vormt de brug tussen de integraal- en de differentiaal-rekening.

<u>Hoofdstelling</u> Als $\varphi(x)$ zo is, dat $\varphi'(x) = f(x)$, dan is

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

<u>Bewijs</u>

Noem $\int_a^x f(t)dt = O(x)$, dan is

$$O'(x) = f(x) \quad \text{en} \quad \varphi'(x) = f(x).$$

Dus

$$[\, O(x) - \varphi(x)\,]' = 0$$

$$O(x) = \varphi(x) + C.$$

Nu is $O(a) = 0$, dus $C = -\varphi(a)$. Dus $O(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$ en speciaal
$O(b) = \varphi(b) - \varphi(a)$

$$\int_a^b f(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Vb.1 $\int_0^\pi \sin x \, dx = ?$

Een functie φ zodat $\varphi' = \sin x$, is $-\cos x$

Dus $\int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_{x=0}^{x=\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2$

Vb.2 $\int_0^{1000} \frac{dx}{1+x^2} = ?$

Een functie φ met $\varphi' = \frac{1}{1+x^2}$ is $\arctan x$

dus $\int_0^{1000} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{x=0}^{x=1000} = \arctan 1000$

Opm. Hieruit zien wij, dat het ook mogelijk is te definieren

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N\to\infty} \arctan N = \frac{\pi}{2} .$$

Vb.3 $\int_1^2 \frac{dx}{x} = [\log x]_{x=1}^{x=2} = \log 2.$

§.10 De onbepaalde integraal

A. De hoofdstelling leidt tot het volgende probleem.

Als gegeven is een continue $y = f(x)$, zoek dan een functie $\varphi(x)$ zodat $\varphi'(x) = f(x)$, m.a.w. zodat $d\varphi(x) = f(x)dx$.

Wij vragen ons af

1. Heeft dit probleem steeds een oplossing (existentie).
2. Zo ja, heeft het probleem meer dan één oplossing (eenduidigheid).
3. Zo ja, hoe vind ik de oplossing.

Antwoord:

1. Ja, immers neem $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (= \lim \Sigma)$.

   Omdat $f(x)$ continu is, bestaat de limiet. Volgens paragraaf 9 is $\varphi'(x) = f(x)$. Er bestaat dus een oplossing.

2. Er is meer dan één oplossing, immers stel $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$ zijn oplossingen, dus $\varphi_1' = f$ en $\varphi_2' = f$.

   Dan
   $$0 = \varphi_1' - \varphi_2' = (\varphi_1 - \varphi_2)' \quad \text{dus } \varphi_1 - \varphi_2 = C \ ;$$
   dus $\varphi_1 = \varphi_2 + C$. Er zijn dus oneindig veel oplossingen die een constante verschillen. Ken ik één oplossing, dan ken ik ze alle.

Def | De onbepaalde integraal $\int f(x)dx$ stelt voor alle functies, waarvan $f(x)$ de afgeleide is, m.a.w. waarvan $f(x)dx$ de differentiaal is.

3. De in 1. aangegeven oplossing is meestal onbruikbaar, daar wij de $\lim \Sigma$ juist zoeken. Soms kunnen wij echter de onbepaalde integraal uitdrukken in elementaire functies. Als dat mogelijk is, kunnen wij via hoofdstelling de bepaalde integraal uitrekenen. Dit is o.a. het geval bij de volgende grondformules, die volgen uit de lijst van formules voor het differentieren.

B. Grondformules.

$\boxed{n \neq -1}$ $\quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad$ want $d(x^p) = p \cdot x^{p-1}dx$

$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C \qquad$ want $d(\log|x|) = \frac{dx}{x}$

$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + C \qquad \int e^x \, dx = e^x + C$

$\int \sin x = - \cos x + C \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log[x+\sqrt{x^2+a^2}]+C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log |x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$$

Opm. Hiermee zijn wij nog niet klaar, want $\int \log x \, dx$ staat niet in de lijst. Verifieer dat

$$\int \log x \, dx = x \log x - x + C$$

C. Eigenschappen.

1. $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$, λ = const.,
   immers stel $\int f(x)dx = \varphi(x)$, dan $d\varphi(x) = f(x)dx$ en $d\lambda\varphi(x) = \lambda f(x)dx$ dus $\int \lambda f(x)dx = \lambda\varphi(x) = \lambda \int f(x)dx$.

2. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

3. $\int f'(x)dx = f(x) + C$ want als $y = f(x)$ dan $dy = f'(x)dx$.

4. $\int d\, f(x) = f(x) + C$ want $\int dt = t + C$.

5. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

Vb.1 $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{7/2} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{9} x^{9/2} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$

Vb.2 Als $y = e^{\arcsin(\log x)}$ dan $y' = e^{\arcsin(\log x)} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\log^2 x}} \cdot \dfrac{1}{x}$.

Dus $\displaystyle\int \frac{e^{\arcsin(\log x)}}{x\sqrt{1-\log^2 x}}\, dx = e^{\arcsin(\log x)} + C.$

Wij behandelen twee methoden voor het integreren. Andere methoden volgen later.

D. Integratie door substitutie van nieuwe variabelen.

$\int f(y)dy$ is de functie, waarvan de differentiaal is $f(y)dy$.
Substitueren wij $y = y(x)$, dan $f[y(x)]\, y'(x)dy = f(y)dy$.
Hierven maken wij gebruik bij het integreren.

Vb.1 $\int \cos (x+4)\, dx =$ [subst. $x+4=y$, dan $dy = dx$]

$= \int \cos(x+4)d(x+4) = \sin(x+4) + C.$

Vb.2 $\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \log|x-1|+C$ [subst. $x-1=y$, dan $dy = dx$]

Vb.3 $\int \sin (2x + 3)dx =$ [subst. $2x+3=y$, dan $dy = 2dx$]

$= \frac{1}{2}\int \sin(2x+3)d(2x+3) = -\frac{1}{2} \cos(2x+3) + C.$

Vb.4 $\int \frac{\cos x\, dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{d \sin x}{1 + \sin^2 x} =$ [$\sin x = y$, $\cos x\, dx = dy$]

$= \arctan [\sin x] + C,$

Vb.5 $\int e^{-x^2} x\, dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2} d(-x^2) =$ [$-x^2 = y$, $-2xdx = dy$]

$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$

Vb.6 $\int \frac{\sqrt{3 + \log x}}{x} dx = \int (3 + \log x)^{\frac{1}{2}}\, d(\log x + 3) = \frac{2}{3}(3 + \log x)^{\frac{3}{2}} + C.$

Vb.7 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(1-x^2) = -\sqrt{1-x^2} + C.$

E. Methode der partiele integratie.

Als u(x) en v(x) twee functies van x zijn, dan is

$$u.v = \int d(uv) = \int (udv + vdu) = \int udv + \int vdu, \quad \text{dus}$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu} \; .$$

Deze formule is handig te gebruiken als $\int vdu$ eenvoudiger is dan $\int udv$. In het bijzonder is de formule bruikbaar, als u(x) een log of een cyclometrische functie is.

Vb.1 $\int \log x\, dx = x \log x - \int x d \log x = x \log x - \int dx = x \log x - x + C.$

Vb.2 $\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \log (1 + x^2) + C.$$

Vb.3 $\int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int x\, d \sin 2x = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x\, dx =$

$$= \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Vb.4 $\int e^x x^2 dx = \int x^2\, de^x = x^2 e^x - 2 \int e^x x\, dx$

$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$ daar $\int e^x x dx = \int x de^x = xe^x - e^x + C.$

Vb.5 $\int x \arctan x\, dx =$ (arctan isoleren, zie vb.2)

$$= \frac{1}{2} \int \arctan x\, dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

Opm. Later volgt een meer systematische behandeling van $\int f(x) dx$.

§.11 Differentiaalvergelijkingen

Een differentiaalvergelijking is een vergelijking waarin behalve de grootheden x en y ook de afgeleide y' van y naar x voorkomt, dus

$$y' = F(x,y) \quad \text{of} \quad \frac{dy}{dx} = F(x,y).$$

De vraag is, welke functies y(x) hieraan voldoen.

Een zeer eenvoudig type van differentiaalvergelijkingen kunnen wij nu baas, namelijk het type van de vorm

$$\frac{dy}{f(y)} = \frac{dx}{g(x)},$$

waarin dus de variabelen te scheiden zijn.

Voorbeeld 1 $\quad y' = \lambda y$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad ; \quad \frac{dy}{y} = \lambda dx.$$

Nu zijn de variabelen gescheiden. Integreer, dan

$$\begin{array}{lrcll} & \log |y| & = & \lambda x + D & \text{met } -\infty < D < \infty \\ & |y| & = & e^{\lambda x} \cdot e^{D} & 0 < e^{D} < \infty \\ & y & = & \pm e^{D} e^{\lambda x} & -\infty < \pm e^{D} < \infty \\ \text{of} & y & = & C e^{\lambda x} & -\infty < C < \infty \end{array}$$

Inderdaad voldoen deze oplossingen (voor elke C één oplossing) aan de oorspronkelijke vergelijking. Deze vergelijking komt zeer veel voor, nl.

a) De bevolking B van een land is een functie van de tijd. De aanname, dat de groei der bevolking evenredig is met de grootte van de bevolking, leidt tot de differentiaalvergelijking

$$B'(t) = \lambda B(t)$$

Oplossing: $\quad B(t) = C e^{\lambda t}$.

Wanneer B_o de bevolking ten tijde t = o is, dan

$$B(t) = B_o e^{\lambda t}.$$

b) Een kapitaal K staat uit tegen een constante rente van p% en is ten tijde t = o groot K_o. De kapitaalsvermeerdering ten tijde t is evenredig met het kapitaal ten tijde t :

$$\frac{dK}{dt} = \frac{p}{100} K.$$

De oplossing is : $K(t) = K_o \, e^{\frac{p}{100} t}$.

c) De ontleding, die een radioactieve stof ondergaat als straling wordt uitgezonden, heeft de eigenschap dat de snelheid van ontleding evenredig is met de aanwezige hoeveelheid. Als $y(t)$ de concentratie ten tijde t is, dan geldt dus

$$-\frac{dy}{dt} = \lambda y.$$

De oplossing is $y(t) = y_{(o)} e^{-\lambda t}$.

Voorbeeld 2 $\quad y' = -\frac{x}{y}$.

Dan $\quad 2ydy = -2x\,dx,\quad$ dus door integratie

$$y^2 = -x^2 + C.$$

De oplossing is dus $x^2 + y^2 = C$, een stelsel concentrische cirkels.

Voorbeeld 3 Gevraagd worden alle krommen met constante subnormaal = 1.

Daar het stuk tussen het snijpunt van de normaal in een punt met de X-as en het snijpunt van de verticaal in dat punt met de X-as gelijk is aan 1, volgt

$$y' = \tan \alpha = \frac{1}{y}$$

dus $yy' = 1$, of $ydy = dx$.

De oplossing is $y^2 = 2(x+C)$, een stelsel parabolen.

§.12 Bepaalde integralen

Met behulp van de hoofdstelling en de onbepaalde integralen kunnen wij nu eenvoudige bepaalde integralen oplossen.

Vb.1 Om $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$ te bepalen berekenen wij eerst

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\log|\cos x| + C.$$

$$\text{Dus } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = [-\log|\cos x|]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = -\log \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log 2.$$

Vb.2 Gevraagd wordt de oppervlakte te berekenen die wordt ingesloten tussen de grafieken van $y = x^2$ en $x = y^2$.
De snijpunten der krommen zijn (0,0) en (1,1).
De gevraagde oppervlakte is

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}.$$

Vb.3 Als f(x) een even functie is, dan geldt

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

immers

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^{-a} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx =$$

$$\text{(stel } x=-t) \qquad = +\int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

§.13 Oneigenlijke integralen

Vroeger is de stelling genoemd, dat de bepaalde integraal van een continue functie bestaat, nl.

Als f(x) continu is in $a \leqslant x \leqslant b$, dan bestaat $\int_a^b f(x)dx$.

Het volgende voorbeeld toont, dat de hoofdstelling niet mag worden toegepast, als de functie in een punt niet continu is.

VB $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2}$ is niet gelijk aan $\left[-\frac{1}{x} \right]_{x=-2}^{x=+1} = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.

De functie x^{-2} is niet continu voor $x = 0$.

Als de discontinuiteit optreedt aan de rand van het interval, kan men in sommige gevallen toch een bepaalde integraal definieren. Men spreekt dan van oneigenlijke integralen.

Zij f(x) continu in $a < x \leqslant b$.

Def $\int_a^b f(x)dx = \lim_{p \downarrow a} \int_p^b f(x)dx$ als deze limiet bestaat.

Vb.1 $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} \stackrel{Def}{=} \lim_{p \downarrow 0} \int_p^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{p \downarrow 0} \left[2\sqrt{x} \right]_p^2 = \lim_{p \downarrow 0} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{p}) = 2\sqrt{2}$.

Vb.2 $\int_0^2 \frac{dx}{x^2} \stackrel{Def}{=} \lim_{p \downarrow 0} \int_p^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{p \downarrow 0} \left[-\frac{1}{x} \right]_p^2 = \lim_{p \downarrow 0} (-\frac{1}{2} + \frac{1}{p})$ bestaat niet !

Een analoog geval doet zich voor als men wil proberen te integreren over een interval, dat zich naar het oneindige uitstrekt.

Def $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{N \to \infty} \int_a^N f(x)dx$ als deze limiet bestaat.

Vb.1 $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{N \to \infty} \int_1^N \frac{dx}{x} = \lim_{N \to \infty} \left[\log x \right]_1^N = \lim_{N \to \infty} \log N$ bestaat niet.

<u>Vb.2</u> Zij $\alpha \neq 1$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right)$$

De limiet bestaat als $\alpha > 1$ en is dan $= \frac{1}{\alpha-1}$.

De limiet bestaat niet als $\alpha \leq 1$.

HOOFDSTUK III VERVOLG DER DIFFERENTIAALREKENING

§.1 Volledige inductie

Gevraagd wordt te berekenen

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} .$$

Proberenderwijs zien wij dat de som der beide eerste termen $= \frac{2}{3}$, de som der eerste drie $= \frac{3}{4}$, der eerste vier $= \frac{4}{5}$.
Wij vermoeden dus dat

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} .$$

Het is duidelijk, dat de formule (*) juist is als $n = 1$.
Aannemende dat (*) juist is voor $n = k$, bewijzen wij dat (*) juist is voor $n = k + 1$. Als dit is gebeurd, weten wij dat (*) juist is voor elke natuurlijke n.

Geg. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$. Te bew. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k+1}{k+2}$.

Bew.

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{k} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Op grond van 't zoeven bewezene is (*), omdat hij juist is voor $n = 4$, ook juist voor $n = 5$, en dan ook voor $n = 6$, en dan ook voor $n = 7$, etc.

Vb.2 h is een getal > -1. Bewijs, dat $(1 + h)^n > 1 + nh$ voor $n > 1$ en geheel.

De bewering is juist voor $n = 2$.
Neem nu aan, dat de formule juist is voor $n = k$ en bewijs hem voor $n = k + 1$. Als dat is gebeurd, weten wij dat de formule voor alle natuurlijke n klopt.

<u>Geg.</u> $(1 + h)^k > 1 + kh.$ <u>Te bew.</u> $(1 + h)^{k+1} > 1 + (k + 1)h.$

<u>Bew.</u>

$$(1 + h)^{k+1} = (1 + h)(1 + h)^k \geqslant (1 + h)(1 + kh) =$$
$$= 1 + (k + 1)h + kh^2 > 1 + (k + 1)h.$$

§.2 <u>Het binomium van Newton</u>

<u>Def</u> $\boxed{n! = 1.2.3 \, . \, \ldots \, . \, (n-1)n}$ als n een natuurlijk getal is ; $0! = 1$.

<u>Def</u> $(n \geqslant k)$ $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2. \, \ldots \, . \, k} = \frac{(k+1)\ldots n}{1.2.3\ldots(n-k)}$.

<u>Vb.</u> $\binom{6}{2} = \frac{5.6}{1.2} = 15$; $\binom{6}{4} = 15$; $\binom{6}{0} = 1$; $\binom{6}{1} = 6$.

Eigenschappen : $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$ en (<u>Pascal</u>) $\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}$

<u>Bewijs</u> van Pascal :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!} =$$
$$= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k} .$$

Met behulp van de eigenschap van Pascal kunnen wij alle $\binom{n}{k}$ opschrijven (driehoek van Pascal).

<u>Stelling van Newton</u>. Voor natuurlijke n geldt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

Bewijs met vollédige inductie.

1) Voor $n = 1$ is de stelling juist, want $a + b = a^1 + b^1$.
2) Aannemende, dat de stelling geldt voor n, gaan wij hem bewijzen voor $(n+1)$.

Geg. zie III.2

Te bew. $(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \ldots + \binom{n+1}{n} ab^n + b^{n+1}$.

Bewijs. Wij vermenigvuldigen het gegeven met a, daarna met b, en tellen de resultaten op met gebruikmaking van de eigenschap van Pascal :

$$a(a+b)^n = a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{3} a^{n-2} b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^2 b^{n-1} + ab^n$$

$$b(a+b)^n = \qquad a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^3 + \ldots + \binom{n}{n-2}a^2 b^{n-1} + nab^n + b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + (n+1)\, a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \binom{n+1}{3}a^{n-2}b^3 + \ldots + \binom{n+1}{n-1}a^2 b^{n-1} + (n+1)ab^n + b^{n+1}.$$

De stelling van Newton geldt voor $n = 1$, dus ook voor $n = 2$, maar dan ook voor $n = 3$, etc., dus voor alle natuurlijke n.

Vb. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$.

§.3 Hogere afgeleiden

De afgeleide van $y = f(x)$ wordt genoteerd met y', of $\frac{dy}{dx}$, en is zelf weer een functie van x.

De tweede afgeleide y'', of $\frac{d^2y}{dx^2}$, is de afgeleide van de afgeleide: $y'' = (y')'$.

De derde afgeleide $y''' = (y'')'$. De n^e afgeleide wordt genoteerd met $y^{(n)}$ of $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Vb.1 Als een rechtlijnige beweging wordt gegeven door $x = x(t)$, dan is de snelheid ten tijde t: $v(t) = x'(t)$, en de versnelling: $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

Vb.2 Voor de harmonische trilling geldt: $x = a \sin \omega t$.

Dus $x' = a\omega \cos \omega t$ en $x'' = - a\omega^2 \sin \omega t = - \omega x$.
De versnelling is hier dus evenredig met de uitwijking, doch tegengesteld gericht.

Vb.3 $y = x^3$, dan $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''' = 6$, $y^{IV} = 0$, $y^{V} = 0$, etc., algemeen $y^{(n)} = 0$ voor $n \geqslant 4$.

Vb.4 $y = e^x$, dan $y' = e^x$, $y'' = e^x$, $y^{(n)} = e^x$.

Vb.5 $y = \log x$, dan

$$y' = \frac{1}{x}\ ;\ y'' = -x^{-2}\ ;\ y''' = (-1)(-2)x^{-3}\ ;\ y^{IV} = (-1)(-2)(-3)x^{-4}$$

en $y^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-(n-1))x^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$.

Vb.6 $y = \arcsin x$, dan

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ y'' = \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}\ ;\ y''' = \frac{1+2x^2}{(\sqrt{1-x^2})^5}\ .$$

Vooralsnog is weinig regelmaat te bespeuren.

Wij beschouwen de hogere afgeleiden van een product $u(x)v(x)$.

$(uv)' = u'v + uv'$
$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$
$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$.

Met inductie volgt de stelling van Leibniz :

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \binom{n}{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.$$

Vb.7 $y = \arcsin x$, dan $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dus $y'\sqrt{1-x^2} = 1$.

Differentieer nogmaals, dan

$$y''\sqrt{1-x^2} - \frac{xy'}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \text{dus} \quad y''(1-x^2) = xy'.$$

Wij passen links en rechts de stelling van Leibniz toe en differentieren n maal :

$$y^{(n+2)}(1-x^2) + ny^{(n+1)}(-2x) + \frac{n(n-1)}{2}y^{(n)}(-2) = xy^{(n+1)} + ny^{(n)}$$

$$y^{(n+2)}(1-x^2) = y^{(n+1)}(2n+1)x + n^2y^{(n)}.$$

Dit verband tussen de n^e, $(n+1)^e$ en $(n+2)^e$ afgeleiden van arcsin x heet een recurrente betrekking en stelt ons in staat alle afgeleiden te berekenen.

Speciaal geldt vóor x = 0 : $\quad y^{(n+2)}_{(o)} = n^2\, y^{(n)}(o)$

waaruit volgt dat $y^{(2n)}_{(o)} = 0$ en $y^{(9)}_{(o)} = 7^2.5^2.3^2.1^2$.

§.4 Meetkundige betekenis der tweede afgeleide

A. Teken van y".

Zij gegeven een kromme $y = f(x)$. De meetkundige betekenis van de eerste afgeleide in een punt P is de tan van de hoek α, die de raaklijn in P maakt met de positieve x-as. Als de eerste afgeleide positief is, dan is de functie toenemend. Als de tweede afgeleide positief is, dan is wegens $y'' = (y')'$ de eerste afgeleide toenemend, dus dan draait de raaklijn volgens $\circlearrowleft$; de kromme is hol naar boven. Als de tweede afgeleide negatief is, dan is de eerste afgeleide afnemend, dus de raaklijn draait volgens $\circlearrowright$, dus de kromme is bol naar boven.

$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	toenemend	extreem	afnemend
$f(x)$	hol = concaaf	buigpunt	bol = convex

Voorbeeld 1 $\quad y = x^3-9x \quad ; \quad y' = 3x^2-9 \quad ; \quad y'' = 6x.$

Bij $x = 0$ treedt een buigpunt op; voor $x > 0$ is de grafiek hol en voor $x < 0$ is hij bol.

B. Kromming

Als de eerste afgeleide groot is, dan is de kromme snel stijgend. Als de tweede afgeleide groot is, dan is wegens $y'' = (y')'$ de eerste afgeleide snel stijgend; de raaklijn draait dus snel; de grafiek is sterk "gekromd". Het begrip kromming dient echter nog te worden gedefinieerd.

Def | Het kromtemiddelpunt M, behorend bij een punt P van een kromme, is de limietstand van het snijpunt van de normalen in P en in een naburig punt Q van de kromme, wanneer Q tot P nadert.
De kromtestraal ρ in P is de afstand van P tot het kromtemiddelpunt.
De kromtecirkel van P is de cirkel (M,ρ).

Vb. De kromtecirkel van een punt van een cirkel is die cirkel zelf.

Wij leiden een formule af voor de kromtestraal in $P = (a, f(a))$ van de kromme $y = f(x)$. De vergelijking van de normaal in P is

$$[y - f(a)]\, f'(a) + x - a = 0$$

en van de normaal in $Q = (a + h, f(a + h))$.

$$[y - f(a + h)]\, f'(a + h) + x - a - h = 0.$$

Voor het snijpunt $S = (x_s, y_s)$ van beide normalen geldt

$$y_s[f'(a + h) - f'(a)] = h + f(a + h)\, f'(a + h) - f(a)\, f'(a).$$

Deel door h en neem de limiet voor $h \to o$, dan $S \to M$ en

$$y_M\, f''(a) = 1 + [f(a)\, f'(a)]' = 1 + [f'(a)]^2 + f(a)\, f''(a),$$

dus

$$y_M - f(a) = \frac{1 + [f'(a)]^2}{f''(a)} \quad \text{en}$$

$$x_M - a = - f'(a)\, [y_M - f(a)].$$

De kromtestraal $\rho = PM$ is

$$\sqrt{(x_M - a)^2 + (y_M - f(a))^2} = \frac{\{1 + [f'(a)]^2\}^{3/2}}{|f''(a)|}.$$

Als $f''(a) > 0$, dus als de kromme concaaf is in P, dan ligt het kromtemiddelpunt hoger dan P.
Als $f''(a) < 0$, dus als de kromme convex is in P, dan ligt het kromtemiddelpunt lager dan P.

In beide gevallen liggen de kromtecirkel en de kromme aan dezelfde kant van de raaklijn in P.

Als $f''(a) = 0$, dus als P buigpunt van de kromme is, dan verdwijnt het snijpunt S naar het oneindige.

<u>Def</u> De <u>kromming</u> K(P) van $y = f(x)$ in het punt P is het omgekeerde van de kromtestraal, dus

$$\boxed{K(P) = \frac{|f''(a)|}{\{1 + [f'(a)]^2\}^{3/2}}}$$

<u>Opm</u>. K(P) kan ook als volgt worden gedefinieerd. Zij φ de hoek tussen de raaklijn in P en de raaklijn in een naburig punt Q van de kromme.

Zij $\overset{\frown}{PQ}$ de lengte van het stuk kromme tussen P en Q. Dan is

$$K(P) = \left| \lim_{Q \to P} \frac{\varphi}{PQ} \right| .$$

Voorbeeld. y = log x. In welk punt is de kromming maximaal ?
Bereken daar de coordinaten van het kromtemiddelpunt.

Opl. $y = \log x$, $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$ dus $K = \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$.

$\frac{dK}{dx} = 0$ als $-(x^2+1)^{3/2} + x.\frac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}.2x = 0$, dus als $2x^2 - 1 = 0$,
$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dan $y = -\frac{1}{2}\log 2$ en $\rho = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Uit een figuur zien wij, dat voor het kromtemiddelpunt (ξ,η) geldt

$$\xi = x(P) + \rho \sin\varphi \quad \text{en} \quad \eta = y(P) - \rho\cos\varphi$$

waarin voor φ, de hoek van de raaklijn in P met de positieve x-as, geldt $\tan\varphi = y'(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Dus

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$$

$$\eta = -\frac{1}{2}\log 2 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\log 2 - \frac{3}{2} .$$

C. Osculeren.

Een kromme $y = f(x)$ wordt door de rechte $y = g(x) \equiv mx + n$ door het snijpunt P geraakt, als in P geldt $f'(x_0) = m$, dus als $f'(x_0) = g'(x_0)$ dus als in P hun eerste afgeleiden overeenstemmen.

Stelling | De kromme $y = f(x)$ en de kromtecirkel in P hebben de eigenschap, dat in P niet alleen hun eerste afgeleiden, maar ook hun tweede afgeleiden gelijk zijn. Men zegt dat de kromme en de cirkel in P osculeren.

Bewijs:
De kromme heeft vergelijking $y = f(x)$. Laat de vergelijking van de cirkelboog in de buurt van P zijn $y = g(x)$. Dan is $f(x_0) = g(x_0)$ en ook $f'(x_0) = g'(x_0)$ omdat kromme en cirkel in P dezelfde raaklijn hebben. Maar bovendien is de kromming in P dezelfde, dus

$$\frac{|f''(x_0)|}{[1+f'(x_0)^2]^{3/2}} = K(P) = \frac{|g''(x_0)|}{[1+g'(x_0)^2]^{3/2}}$$

Dus ook $|f''(x_o)| = |g''(x_o)|$. Omdat cirkel en kromme aan dezelfde kant van de raaklijn liggen, is dus $f''(x_o) = g''(x_o)$.

§.5 Impliciet gegeven functies

De cirkel met middelpunt $\mathcal{O}$ en straal a is de meetkundige plaats van de punten, waarvan de coordinaten voldoen aan

$$x^2 + y^2 = a^2 .$$

Men noemt deze vergelijking de vergelijking van de cirkel.
De vergelijking bestaat eigenlijk uit twee functies, nl.

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{en} \qquad y = -\sqrt{a^2 - x^2} .$$

De afgeleiden van deze functies zijn resp.,

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad \text{en} \qquad y' = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} .$$

Voor beide functies geldt dus

$$y' = -\frac{x}{y} .$$

De laatste formule is door een omweg verkregen. Deze omweg is bij het bepalen van de afgeleide der drie functies, die door de vergelijking

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

zijn gegeven, veel moeilijker omdat deze derdegraadsvergelijking in y niet gemakkelijk oplosbaar is. Wij zoeken nu een methode om, als de functies door een vergelijking zijn gegeven, toch de afgeleiden eenvoudig te bepalen.
Door $y = f(x)$ heet y expliciet als functie van x gegeven.
Door $F(x,y) = 0$ heet y impliciet als functie van x gegeven.

Methode: Denk uit $F(x,y) = 0$ opgelost $y = y(x)$.
Substitueer, dit in $F(x,y) = 0$, dan is

$$F\{x, y(x)\} = 0$$

een identiteit in x. Differentiatie naar x geeft een vergelijking, waaruit y' opgelost kan worden.

Vb.1 Cirkel $x^2 + y^2 = a^2$. Vul in en differentieer, dan

$$2x + 2yy' = 0 \qquad \text{dus} \qquad y' = -\frac{x}{y}.$$

Wij bepalen nog de tweede afgeleide door ons de uit $x^2 + y^2 = a^2$ opgelost gedachte $y = y(x)$ en $y'(x)$ weer in $x + yy' = 0$ te substitueren. Dan $1 + (y')^2 + yy'' = 0$.

Vullen wij de hier gevonden y'' in de formule voor de kromming in, dan blijkt inderdaad

$$K = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}} = \frac{1}{|y|\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{a} .$$

Vb.2 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

De methode toepassend vinden wij

$3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0$; $\quad y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$.

Blijkbaar is $y' = 0$, treden extrema op als $y = x^2$ dus, in verband met de oorspronkelijke vergelijking, voor $x^6 = 2x^3$, dus voor $x = 0$ en $x = \sqrt[3]{2}$.

Om te onderzoeken of het punt $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ maximum of minimum is, bepalen wij de tweede afgeleide in dat punt.
Dan differentieren wij

$$(x-y^2)y' = x^2-y$$
$$(x-y^2)y'' + (1-2yy')y' = 2x-y'.$$

Dus in $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ is $y'' = -2$; het punt is dus maximum.

Om de grafiek van de vergelijking te tekenen merken wij op dat er symmetrie t.o.v. $y = x$ bestaat.
Snijding met de rechte $y = -x + p$ levert

$$x^2(3p+3) - 3xp(p+1) + p^3 = 0.$$

Voor $p = -1$ is er geen snijpunt, voor $p = 0$ is O een dubbel snijpunt, terwijl uit

$$\text{Discriminant} = 3p^2(p+1)(3-p)$$

blijkt, dat slechts bij $-1 < p \leqslant 3$ snijpunten optreden.
De gevonden grafiek is het Folium van Descartes.

Voorbeeld 3 $\boxed{\text{Ellips}}$ $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

Wij bepalen de snijpunten met de assen en merken op dat er symmetrie bestaat t.o.v. de x-as en de y-as. Na impliciet differentieren volgt

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y} .$$

De grafiek is nu te tekenen.

A Raaklijn In $P(x_o,y_o)$ van de ellips is de vergelijking van de raaklijn

$$y - y_o = -\frac{b^2 x_o}{a^2 y_o}(x-x_o)$$

of
$$a^2 y_o(y-y_o) + b^2 x_o(x-x_o) = 0$$

$$a^2 yy_o + b^2 xx_o = a^2 y_o^2 + b^2 x_o^2$$

$$\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} = \frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2}$$

$$\boxed{\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} = 1}$$

B Brandpunten.

Zij $c^2 = a^2 - b^2$ en $F = (c,o)$ en $G = (-c,o)$, de brandpunten.

Stelling | De ellips is de meetkundige plaats van de punten X zodat $XF + XG = 2a$.

Bewijs $\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc$$

$$a^2(x^2+y^2+c^2-2xc) = a^4 + x^2c^2 - 2xca^2$$

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Opm. De methode om bij gegeven brandpunten en gegeven a de ellips te construeren heet de tuinmansconstructie.

C Stelling | De raaklijn in X aan de ellips deelt de nevenhoek van $\angle FXG$ doormidden.

Bewijs. Zij X op de ellips. Trek XF, XG en de bissectrice. Spiegel F t.o.v. de bissectrice, dan $G\overline{F} = GX + XF = 2a$; maar $GQ + QF = GQ + Q\overline{F} > G\overline{F} = 2a$ voor elke $Q \neq X$ op de bissectrice.
Dus de bissectrice is raaklijn.

D Toegevoegde middellijnen.

De richtingscoeff. van de raaklijn in P is $-\dfrac{b^2 x_o}{a^2 y_o} = m_1$.

De richtingscoeff. van de rechte OP is $y_o/x_o = m_2$. Dus

$$m_1\, m_2 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Trek nu OQ // raaklijn in P, dus met richtingscoefficient m_1.

Noem de richtingscoeff. van de raaklijn in Q: m_3, dan is $m_1 m_3 = -\dfrac{b^2}{a^2}$.

Conclusie: $m_2 = m_3$, de raaklijn in Q is evenwijdig aan OP.

Def. | Middellijnen, waarvan de richtingscoefficienten samenhangen volgens $\boxed{m_1 m_2 = -\dfrac{b^2}{a^2}}$ heten toegevoegde middellijnen.

Stelling | De middens M der koorden, die evenwijdig zijn aan een middellijn, liggen op de toegevoegde middellijn.

Bewijs. Zij P een punt van de ellips.

Trek een rechte evenwijdig OP en snijdt hem met de ellips

$$y = m_2 x + q \qquad \cap \qquad x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

levert: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{(m_2 x + q)^2}{b^2} = 1$, dus

$$x^2(m_2^2 a^2 + b^2) + 2m_2 xqa^2 + q^2 a^2 - a^2 b^2 = 0.$$

De wortels van deze vergelijking zijn de x-coordinaten van de snijpunten S en T. Nu is

$$x_M = \tfrac{1}{2}(x_S + x_T) = \frac{-m_2 qa^2}{m_2^2 a^2 + b^2} \qquad \text{en} \qquad y_M = m_2 x_M + q$$

$$\text{Dus} \quad \frac{y_M}{x_M} = m_2 + \frac{q}{x_M} = m_2 - \frac{m_2^2 a^2 + b^2}{m_2 a^2} = -\frac{b^2}{m_2 a^2} = m_1.$$

Voorbeeld 4 $\boxed{\text{Hyperbool}}$ $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$.

Wij vinden twee snijpunten met de x-as, geen snijpunten met de y-as, maar wel symmetrie t.o.v. x- en y-as.

Impliciet differentieren levert $y' = \dfrac{b^2 x}{a^2 y}$, zodat wij de grafiek ongeveer kunnen tekenen.

A. Asymptoten.

Snijden wij de hyperbool met de rechte $x = p$, dan krijgen wij, als $p > a$, twee snijpunten, P en P', met

$$y_p = \frac{b}{a}\sqrt{p^2 - a^2} \qquad \text{en} \qquad y_{p'} = -\frac{b}{a}\sqrt{p^2 - a^2}.$$

Hieruit volgt
$$-\frac{b}{a}p < y_{p'} < y_p < \frac{b}{a}p$$

dus de hyperbool ligt tussen de rechten

$$y = -\frac{b}{a}x \qquad \text{en} \qquad y = \frac{b}{a}x.$$

Noem de snijpunten van $x = p$ met deze rechten Q' en Q, dan is

$$y_{Q'} = -\frac{b}{a}p \qquad \text{en} \qquad y_Q = \frac{b}{a}p.$$

Dus $$\lim_{p\to\infty} PQ = \lim_{p\to\infty}(y_Q - y_P) = \lim_{p\to\infty}\frac{b}{a}[p - \sqrt{p^2-a^2}] =$$

$$= \lim_{p\to\infty}\frac{b}{a}\frac{a^2}{p + \sqrt{p^2-a^2}} = 0$$

en evenzo $\lim\limits_{p\to\infty} P'Q' = 0$.

De rechten
$$y = \pm\frac{b}{a}x$$
heten de asymptoten van de hyperbool.

B. Raaklijn

De raaklijn in $P(x_o,y_o)$ heeft richtingscoeff. $\dfrac{b^2x_o}{a^2y_o}$, dus heeft de vergelijking

$$y - y_o = \frac{b^2x_o}{a^2y_o}(x - x_o) \qquad \text{of} \qquad \frac{xx_o}{a^2} - \frac{yy_o}{b^2} = 1.$$

C. Brandpunten

Noem $c^2 = a^2 + b^2$ en $F = (c,o)$, $G = (-c,o)$ de brandpunten.

Stelling ‖ De hyperbool is de meetkundige plaats der punten X, zodat $|XF - XG| = 2a$.

Bewijs

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

D. Stelling

De raaklijn in X aan de hyperbool deelt de hoek $\angle$ FXG doormidden.

Opm. Er is ook een ellips die gaat door X en die F en G als brandpunt heeft. De ellips en de hyperbool snijden elkaar loodrecht.

E. De hyperbolen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ heten toegevoegde hyperbolen. Zij hebben dezelfde asymptoten en dezelfde c.

F. Toegevoegde middellijnen.

Zij P een punt van de hyperbool. De richtingscoefficient van OP is $m_2 = {}^{y_o}/x_o$.

De richtingscoeff. van de raaklijn in P is $m_1 = \frac{b^2 x_o}{a^2 y_o}$.

Dus $\boxed{m_1 m_2 = \frac{b^2}{a^2}}$. Middellijnen waarvan de richtingscoefficient zo samenhangen heten toegevoegde middellijnen.

De asymptoten zijn toegevoegd aan zichzelf.

De middens van de koorden van $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ die evenwijdig zijn aan een middellijn, en ook die bij $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, liggen op de toegevoegde middellijn.

Voorbeeld 5 $\boxed{\text{De parabool}}$ $\boxed{y^2 = 2px}$

Impliciet differentieren geeft $yy' = p$.

A Raaklijn. De raaklijn in $P = (x_o, y_o)$ op de parabool is

$$y - y_o = \frac{p}{y_o}(x - x_o) \quad \text{of} \quad \boxed{yy_o = p(x + x_o)}$$

B Noem $F = (\frac{1}{2}p, o)$ het brandpunt en rechte $x = -\frac{1}{2}p$ de richtlijn

Stelling | De parabool is de meetkundige plaats van de punten X zodat XF = afstand X tot richtlijn.

Bewijs

$$(x - \tfrac{1}{2}p)^2 + y^2 = (x + \tfrac{1}{2}p)^2$$

$$y^2 = 2px.$$

C | De raaklijn aan de parabool in P deelt de hoek tussen PF en rechte door P // x-as doormidden.

D | De middens M der koorden, die evenwijdig zijn met een gegeven rechte, vormen een rechte evenwijdig met de x-as.

Bewijs

Laat de gegeven rechte m als richtingscoefficient hebben.

Snijdt $y = mx + q$ met $y^2 = 2px$. Dan is :

$$my^2 = 2pmx = 2p(y - q)$$

$$my^2 - 2py + 2pq = 0$$

Dus $y_M = \frac{1}{2}(y_S + y_T) = \frac{p}{m}$ = constant t.o.v. q.

E Zij P een punt van de parabool $y^2 = 8x$. Zij S het snijpunt van de rechte OP en de loodlijn uit F op de raaklijn in P.
Gevraagd wordt de meetkundige plaats van S als P de parabool doorloopt.

Opl. Geef de plaats van P aan door een parameter λ :

$y_p = \lambda$, dan $x_p = \frac{\lambda^2}{2p}$. De raaklijn in P: $y\lambda = p(x + \frac{\lambda^2}{2p})$ en de loodlijn uit F:

$$y = -\frac{\lambda}{p}(x - \tfrac{1}{2}p). \qquad \text{Rechte OP:} \quad y = \frac{2p}{\lambda}x.$$

Elimineer λ, dan krijgen wij de meetkundige plaats

$$2x^2 + y^2 - 4x = 0 \quad \text{of} \quad (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \; ;$$

dit is de ellips met middelpunt (1,0) en a = 1, b = $\sqrt{2}$.

§.6 Parametervoorstelling van krommen

Wanneer wij een kromme voorstellen door $y = f(x)$, moeten wij ons beperken tot stukken van de kromme zodat bij elke x één y hoort. Vaak is het handiger de kromme op een andere manier voor te stellen, met een hulpgrootheid. In plaats van één der coordinaten in de andere uit te drukken, kunnen wij beide coordinaten x en y uitdrukken in een derde variabele, een parameter. Zo stellen

$$x = x(t) \quad \text{en} \quad y = y(t),$$

waarin de parameter t bepaalde waarden doorloopt, tezamen een kromme voor.

Vb.1
$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{array}\right\} , \quad 0 \leqslant t < 2\pi$$

is de parametervoorstelling van de cirkel met middelpunt $\mathcal{O}$ en straal a. Hier is de parameter een hoek.

Vb.2
$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \end{array}\right\} , \quad -\infty < t < \infty ,$$

is de parametervoorstelling van de rechte $x - 3y + 5 = 0$.

Vb.3 De ellips $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

kan worden voorgesteld door

$$x = a\cos t \quad , \quad y = b\sin t \quad , \quad 0 \leqslant t < 2\pi .$$

Meetkundig ziet men, dat t nu is de hoek tussen de positieve x-as en de verbindingsrechte van $\mathcal{O}$ met het snijpunt van de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ met de verticaal door het punt.

Opm. Uit de parametervoorstelling van de ellips volgt, dat de ellips uit de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ te krijgen is, door alle y-coordinaten met $\frac{b}{a}$ te vermenigvuldigen. Eveneens is de ellips uit $x^2 + y^2 = b^2$ te krijgen door alle x-coordinaten met $\frac{a}{b}$ te vermenigvuldigen. Dit geeft aanleiding tot een aantal constructies :

a) Constructie van punten van de ellips, als a en b zijn gegeven (vlagconstructie).
b) Constructie van snijpunten van de ellips, gegeven door a en b, met een gegeven rechte.
c) Constructie van de raaklijnen uit een gegeven punt aan de ellips, gegeven door a en b.

Laat een kromme enerzijds door $y = f(x)$ en anderzijds door parametervoorstelling $x = x(t)$, $y = y(t)$ zijn gegeven. Wij vragen $y' = \frac{dy}{dx}$ uit te drukken in $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ en $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$.

Opl.

Wij vinden $y = f(x)$ uit $x = x(t)$ en $y = y(t)$ door uit de eerste vergelijking op te lossen $t = t(x)$ en het resultaat in de tweede vergelijking in te vullen :

$$y = y\{t(x)\}.$$

Differentieer naar x, dan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}, \quad \text{en daar} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}} \quad \text{dus}$$

$$\boxed{y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}}$$

Voor punten met horizontale [verticale] raaklijn is dus $\dot{y} = 0$ $[\dot{x} = 0]$.

Hieruit vinden wij ook de tweede afgeleide :

$$y'' = \frac{d}{dx}\left[\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right] \times \frac{dt}{dx} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}} \quad \text{dus}$$

$$\boxed{y'' = \frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\ddot{x}}{(\dot{x})^3}}\ .$$

Voor de kromming volgt dan de formule

$$\boxed{K = \frac{|\ddot{y}\,\dot{x} - \ddot{x}\,\dot{y}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}}$$

Opm. Als $t \equiv x$, dan vinden wij de oorspronkelijke uitdrukking voor K weer terug. Wanneer de kromme gegeven is door $x = x(y)$, dan vinden wij (neem $y \equiv t$)

$$K = \frac{|-x''|}{[(x')^2+1]^{3/2}} \qquad \text{waar } x' = \frac{dx}{dy} \text{ betekent.}$$

Voorbeeld 1 Cycloïde. Een cirkel met straal a en middelpunt M rolt over de x-as. Beschouw de kromme die wordt beschreven door het punt, dat oorspronkelijk in O was. Neem als parameter de hoek t tussen de straal naar het betreffende punt P en de verticaal.

$x_p = OP' = OA - P'A = \widehat{PA} - P'A = at - a\sin t$

$y_p = PP' = AB = AM - MB = a - a\cos t.$

De parametervoorstelling voor de cycloïde luidt dus

$$\begin{aligned} x &= at - a\sin t & \qquad y &= a - a\cos t \\ \dot{x} &= a - a\cos t & \dot{y} &= a\sin t \\ \ddot{x} &= a\sin t & \ddot{y} &= a\cos t \end{aligned}$$

Dus

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a\sin t}{a - a\cos t} = \cot\left(\tfrac{1}{2}t\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right).$$

De raaklijn in P is dus gericht naar het hoogste punt van de cirkel die bij de stand P behoort. Wij vragen nog een uitdrukking voor de kromming K :

$$\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y} = a\cos t\,(a - a\cos t) - a^2\sin^2 t = a^2\cos t - a^2 = -a^2(1-\cos t)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t = 2a^2 - 2a^2\cos t = 2a^2(1-\cos t)$$

Dus

$$K = \frac{|-1|}{a.2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}} = \frac{1}{4a\sin\frac{1}{2}t}\,.$$

§.7 Poolcoordinaten

De plaats van een punt in het vlak is aan te geven door gewone coordinaten x,y, maar ook door poolcoordinaten.
Neem een vast punt $\mathcal{O}$, de <u>pool</u>, en een vaste halfrechte door $\mathcal{O}$ (de <u>poolas</u>).
Wij bepalen nu een punt door zijn <u>argument</u> φ, vanaf poolas tegen klok in gerekend, en zijn <u>voerstraal</u> $r \geqslant 0$.

Het verband met de oude coordinaten luidt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

<u>Opm</u>. Door r en φ wordt een punt bepaald, maar omgekeerd bepaalt een punt niet zijn φ, immers $P = (r,\varphi) = (r,\varphi + 2k\pi)$.

Voor een kromme beschikken wij reeds over de voorstellingen

$y = f(x) \qquad ; \qquad F(x,y) = 0 \qquad ; \qquad x = x(t),\ y = y(t).$

Een kromme wordt in poolcoordinaten gegeven door het verband

$$r = r(\varphi)\ .$$

Het verband van deze voorstelling in poolcoordinaten met de parametervoorstelling is duidelijk door

$$x = r(\varphi)\cos\varphi \quad ; \qquad y = r(\varphi)\sin\varphi$$

Vb.1 Spiraal van Archimedes: $r = \varphi$; $\varphi \geqslant 0$.

Vb.2 De logarithmische spiraal: $r = e^{\varphi}$; alle φ.
Voor $\varphi > 0$ is $r > 1$, voor $\varphi < 0$ is $r < 1$ en

$$\lim_{\varphi \to -\infty} r = 0.$$

Vb.3 De hyperbolische spiraal: $r = \frac{1}{\varphi}$; $\varphi > 0$.
Wegens $y = r\sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{\varphi}$ is het duidelijk, dat $y < 1$
en dat $\lim\limits_{\varphi \to 0} y = 1.$

Laat een kromme zijn gegeven zowel door $y = f(x)$ als door $r = r(\varphi)$.
Wij zoeken het verband tussen

$$y' = \frac{dy}{dx} \qquad \text{en} \qquad \dot r = \frac{dr}{d\varphi}\ .$$

$$\left.\begin{matrix} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} \dot x = \dot r\cos\varphi - r\sin\varphi \\ \dot y = \dot r\sin\varphi + r\cos\varphi \end{matrix}\right\} \Rightarrow y' = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{\dot r\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

De tweede afgeleide y" is als volgt te bepalen :

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{d\varphi}(y') \times \frac{d\varphi}{dx} =$$

$$= \frac{(\ddot r\sin\varphi + 2\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi)(\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi) - (\ddot r\cos\varphi - 2\dot r\sin\varphi - r\cos\varphi)(\dot r\sin\varphi + r\cos\varphi)}{(\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi)^2\ (\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi)}$$

$$= \frac{-\ddot r r + 2\dot r^2 + r^2}{(\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi)^3}, \quad \text{en er volgt} \quad K = \frac{|-\ddot r r + 2\dot r^2 + r^2|}{(\dot r^2 + r^2)^{3/2}}\ .$$

<u>Opm</u>. Uit de formule voor y' volgt na deling door $\dot{r}$ cos

$$y' = \tan\alpha = \frac{\tan\varphi + {}^{r}/_{\dot{r}}}{1 - \tan\varphi \cdot {}^{r}/_{\dot{r}}} \cdot$$

Anderzijds volgt, als μ de hoek tussen voerstraal en raaklijn voorstelt, dat

$$\tan\alpha = \tan(\varphi + \mu) = \frac{\tan\varphi + \tan\mu}{1 - \tan\varphi \cdot \tan\mu} \cdot$$

Hieruit volgt dat

$$\tan\mu = {}^{r}/_{\dot{r}} \;.$$

Voor de logarithmische spiraal is $\mu = \frac{\pi}{4}$ = constant.

<u>Vb.1</u> <u>Cardioïde</u>

a) Een cirkel met straal a en middelpunt N rolt over een andere cirkel met straal a en middelpunt M. Gevraagd wordt de kromme, die wordt beschreven door het punt P van de eerste cirkel, dat oorspronkelijk in O was. De tweede cirkel gaat door O en is vast. Als C het raakpunt is op zeker moment, dan is

$\overset{\frown}{CP} = \overset{\frown}{CO}$ dus $\angle M = \angle N$. Daar $NP = a = MO$ is $PO \,//\, MN$.

Dus $\frac{1}{2} r = a - a\cos\varphi$, waaruit $r = 2a(1 - \cos\varphi)$.

b) Om de vergelijking in x-y coordinaten te krijgen substitueren wij

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \qquad \cos\varphi = \frac{x}{r} \,, \quad \text{dus}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$x^2 + y^2 + 2ax = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x^2 + y^2 + 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

c) Wij zoeken de punten met horizontale(en verticale) raaklijn :

$x = r\cos\varphi = 2a(\cos\varphi - \cos^2\varphi)$

$y = r\sin\varphi = 2a(\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)$

$\dot{x} = 2a(-\sin\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi) = 2a\sin\varphi(2\cos\varphi - 1)$

$\dot{y} = 2a(\cos\varphi - \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2a(\cos\varphi - \cos 2\varphi)$

Dus $\dot{x} = 0$ als $\varphi = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$. Dan $r = 0, a, 4a, a$

$\dot{y} = 0$ als $\cos\varphi = \cos 2\varphi$, dus $\varphi = 2\varphi$ of $\varphi = 2\pi - 2\varphi$ of $\varphi = 4\pi - 2\varphi$

Dus $\varphi = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ en $r = 3a$ of $r = 0$.

d) In O is

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{\dot y}{\dot x} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\cos\varphi - \cos 2\varphi}{\sin\varphi(2\cos\varphi - 1)} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{2\sin\frac{3}{2}\varphi\sin\frac{1}{2}\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi(2\cos\varphi - 1)} = 0.$$

Verder volgt

$$K = \frac{-\ddot r\, r + 2\dot r^2 + r^2}{[\dot r^2 + r^2]^{3/2}} = \frac{3}{8a\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

dus de kromme is in O zeer gekromd, nl. met kromtestraal = 0.

Vb.2 Lemniscaat : $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Als φ =	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
dan r =	a	daalt	0		bestaat niet		0	stijgt	a

$$x = r\cos\varphi = a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\ ;\ \dot x = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}(-\sin\varphi\cos 2\varphi - \cos\varphi\sin 2\varphi) =$$

$$= \frac{-a\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$y = r\sin\varphi = a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi}\ ;\ \dot y = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}(\cos\varphi\cos 2\varphi - \sin\varphi\sin 2\varphi) =$$

$$= \frac{a\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Een horizontale raaklijn treedt op als $\dot y = 0$ dus als $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot y}{\dot x} = -\cot 3\varphi$ verklaart de raaklijn bij (a,0) en (0,0).

Opm. De vergelijking van de lemniscaat in de Cartesische coordinaten luidt, omdat

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi\ ,\qquad r^4 = a^2 r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

HOOFDSTUK IV FUNCTIES VAN MEER VARIABELEN

§ 1. Functies van één variabele, résumé.

A. $f(x)$ heet continu voor $x = a$ als $\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$.

Wij kunnen ook zeggen:

<u>Def</u> | $f(x)$ is <u>continu</u> voor $x = a$ als
$f(a+h) - f(a) = \rho$
waarbij $|\rho| < \varepsilon$ te krijgen is door $|h|$ klein genoeg te nemen.

B. $f(x)$ heet differentieerbaar voor $x = a$ (de raaklijn bestaat voor $x=a$), als

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ bestaat.}$$

Als de limiet bestaat, noemen wij hem $f'(a)$. Wij kunnen ook zeggen:

<u>Def</u> | $f(x)$ is <u>differentieerbaar</u> voor $x = a$ met afgeleide $f'(a)$ als

$$f(a + h) - f(a) = f'(a).\, h + \rho$$

waarbij $|\rho| < |h|.\, \varepsilon$ te krijgen is door $|h|$ klein genoeg te nemen.

immers uit deze definitie volgt dat

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a) + \frac{\rho}{h} \quad \text{met } \left|\frac{\rho}{h}\right| < \varepsilon \quad \text{te krijgen.}$$

C. Differentialen invoerende noemen wij

$$h = dx \qquad \text{en } df = dy = f'(a)dx$$

dus in verband met de nieuwe definitie:

$$f(a + dx) - f(a) = df + \rho \qquad \text{met } \left|\frac{\rho}{dx}\right| < \varepsilon \quad \text{te krijgen.}$$

df is dus een "goede" benadering voor de toename van $f(x)$.

§ 2. Functies van twee variabelen.

A. Def. Een functie van twee onafhankelijke variabelen, $z = f(x,y)$ is een voorschrift, dat aan elk geoorloofd paar (x,y) een getal toevoegt.

Vb 1. $z = x^2 y^3$

Vb 2. $z = \arctan {}^{y}/_{x}$. Hier (o,b) niet geoorloofd.

B. Grafiek. Aan elk geoorloofd punt (x,y) van het (x,y)- vlak is een waarde van z toegevoegd. Zet deze z-waarde af loodrecht op het (x,y)-vlak, dan vormt de meetkundige plaats der punten (x,y,z), waarvan de coordinaten voldoen aan het voorschrift, een oppervlak. Dit is de grafiek van de functie.

Vb 1. $z = 6 - 3x - 2y$. De grafiek is een vlak.

Vb 2. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. De grafiek is een halve bol.

Vaak is het handiger om een beeld van de grafiek te krijgen door een hoogtekaart te maken : bij elk punt (x,y) van het (x,y)-vlak schrijft men de bijbehorende hoogte.

Voorbeeld $z = \dfrac{y^2 - x}{y^2}$

Voor (a,o) is de functie niet gedefinieerd.
Voor $x = o$ is $z = 1$;
Voor $x = y^2$ is $z = o$;
Voor $x = -y^2$ is $z = 2$;
Voor $2x = y^2$ is $z = 1/2$;
Voor $x = 10y^2$ is $z = -9$;

C. Continuiteit

Def. $z = f(x,y)$ is continu in (a,b) als

$$|f(a + h, b + k) - f(a,b)| < \varepsilon$$

te krijgen is door h en k klein genoeg te nemen.

Vb 1. $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}$, $f(0,0) = 0$ is continu in 0, want

$$\left|f(h,k) - f(0,0)\right| = \left|\frac{h^3 k}{h^2 + k^2} - 0\right| = \frac{h^2}{h^2 + k^2}|hk| \leqslant |hk| < \varepsilon$$

door $|h| < \sqrt{\varepsilon}$ en $|k| < \sqrt{\varepsilon}$ te nemen.

Vb 2. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ is in $(0,0)$ niet continu te maken;

Dit blijkt uit de hoogtekaart.

Wij behandelen nu de algemene vraag:

Hoe, verandert f(x,y) als x en y veranderen ?

D. <u>Hoe verandert f(x,y) als één variabele constant is</u> ?

Als Q loopt langs y = b, dan doorloopt P de kromme z = f(x,b) in het vlak z'O'x'. De afgeleide van z = f(x,b) in P is

$$\tan\alpha = \lim_{h\to o} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} =$$

$$=(\text{notatie}) = f_x'(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a,b} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{a,b}$$

Dit is de <u>partiele afgeleide naar x</u> in (a,b). Bij het differentieren blijft y constant.

Als Q loopt langs x = a, dan doorloopt P in y" O" z" : z = f(a,y), die in P de afgeleide heeft

$$\tan\beta = \lim_{k\to o} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} =$$

$$=(\text{notatie}) = f_y'(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a,b} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{a,b}$$

genaamd de partiele afgeleide naar y in (a,b). Bij het differentieren blijft x constant.

<u>Vb 1</u>. $z = xy^2 + y^3$, dan $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2$ en $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 3y^2$.

<u>Vb 2</u>. $z = \arctan\frac{y}{x}$, dan $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}$ en $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$

Merk op, dat $\frac{\partial z}{\partial x}$ zelf weer een functie van x en y is !

Een continue functie behoeft niet partieel differentieerbaar te zijn.

<u>Vb</u>. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ met $f(0,0) = 0$

is continu in O, want

$$|f(h,k) - f(0,0)| \leqslant \sqrt{h^2+k^2} < \varepsilon\sqrt{\tfrac{1}{2}} < \varepsilon \text{ als } |h| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ en } |k| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

De functie is echter niet partieel differentieerbaar naar x in O, want

$$\lim_{h\to o} \frac{f(h,o)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to o} \frac{|h\sin\frac{1}{h}|}{h} \text{ bestaat niet.}$$

Een functie die in een punt partieel differentieerbaar naar x en naar y is, behoeft daar niet continu te zijn.

Vb. $f(x,0) = 1 = f(0,y)$ en $f(x,y) = 0$ als $x \neq 0$ en $y \neq 0$.

$f(x,y)$ is partieel differentieerbaar naar x en naar y in 0, want

$$\lim_{h \to o} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{1 - 1}{h} = 0$$

$f(x,y)$ is echter niet continu in 0.

E. Hoe verandert $f(x,y)$ als x en y onafhankelijk van elkaar veranderen ?

Laat Q op willekeurige wijze van (a,b) naar $(a + h, b + k)$ lopen. Teneinde de veranderingen der functiewaarden,

$$RT = f(a + h, b + k) - f(a,b),$$

te onderzoeken redeneren wij heuristisch als volgt:
Teken het vlak door de raaklijnen in P aan de krommen $z = f(x,b)$, $y = b$ en $z = f(a,y)$, $x = a$. Dan is

$$RS = h \tan\alpha + k \tan\beta = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P k.$$

Noem $ST = \rho$, dan moet, wil men van een raakvlak in de zin van meetkundige plaats van raaklijnen kunnen spreken, het verschil

$$\tan\angle TPR - \tan\angle SPR = \frac{RT - SR}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

klein zijn, als h en k klein zijn.

Def. $z = f(x,y)$ heet (totaal) differentieerbaar in (a,b) als

$$f(a + h, b + k) - f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a,b} h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a,b} k + \rho.$$

waar $|\rho| < \varepsilon \sqrt{h^2 + k^2}$ te krijgen is, door h en k voldoende klein te nemen.

Populair : $f(x,y)$ is differentieerbaar in (a,b) als de toename $f(a + h, b + k) - f(a,b)$ "goed" benaderd wordt door $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)k$.

Def. Noem $dx = h$ en $k = dy$ en

$$df = dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)} dy$$

de differentiaal in (a,b)

Gevolg Zij $f(x,y)$ differentieerbaar in (a,b). Dan is

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$ voor alle dx en dy gedefinieerd

(raakvlak !). Als dx en dy klein genoeg zijn (dus in de buurt van (a,b)), dan is df een "goede" benadering voor de toename van $f(x,y)$.

Vb. $z = x^2 + y^2$ dan $dz = 2xdx + 2ydy$ en in $(1,1)$: $dz = 2dx + 2dy$.

Gevolg De vergelijking van het raakvlak in $P = (x_o,y_o,z_o)$ aan de grafiek van $z = f(x,y)$ luidt

$$z - z_o = (x - x_o)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o + (y - y_o)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_o .$$

Stellingen

1) $f(x,y)$ differentieerbaar in (a,b), dan $f(x,y)$ continu in (a,b)
2) $f(x,y)$ differentieerbaar in (a,b), dan $f(x,y)$ partieel differentieerbaar (naar x èn naar y) in (a,b).

F. Hoe verandert $f(x,y)$ bij onderling afhankelijke variabelen ?

Stelling Als $z = f(x,y)$; $x = x(t)$; $y = y(t)$ differentieerbare functies zijn, dan geldt voor de afgeleide van $z = f\{x(t), y(t)\} = z(t)$ de volgende kettingregel

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} .$$

Bewijs

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\tau\to o} \frac{z(t+\tau) - z(t)}{\tau} = \lim_{\tau\to o} \frac{f\{x(t+\tau), y(t+\tau)\} - f\{x(t), y(t)\}}{\tau} =$$

$$= \lim_{\tau\to o} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\{x(t+\tau) - x(t)\} + \frac{\partial f}{\partial y}\{y(t+\tau) - y(t)\} + \rho}{\tau} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \lim_{\tau\to o} \frac{\rho}{\tau} .$$

Noem $x(t+\tau) - x(t) = h$ en $y(t+\tau) - y(t) = k$, dan

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{\rho}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \frac{\sqrt{h^2+k^2}}{\tau} = \frac{\rho}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \sqrt{\left\{\frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau}\right\}^2 + \left\{\frac{y(t+\tau) - y(t)}{\tau}\right\}^2}$$

dus $\lim\limits_{\tau\to o} \frac{\rho}{\tau} = 0 \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 0$, waarmee de stelling is bewezen.

Vermenigvuldigen wij de kettingregel met dt, dan is

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

dezelfde formule als onder E, echter met andere betekenis der differentialen, die hier differentialen zijn van functies van één variabele, nl. t.

Vb 1. $z = x\,e^y$ met $x = \sin t$ en $y = t^2$. Dan

$$\frac{dz}{dt} = e^y \cos t + x\,e^y\,2t = e^{t^2}\cos t + e^{t^2}\,2t\sin t.$$

Vb 2. $z = uv$ met $u = u(t)$ en $v = v(t)$. Dan

$$\frac{dz}{dt} = v\,\frac{du}{dt} + u\,\frac{dv}{dt} \quad \text{(Productregel bij differentieren)}$$

Teneinde het verschil tussen $\frac{dz}{dx}$ en $\frac{\partial z}{\partial x}$ te laten uitkomen, beschouwen wij een functie $z = f(x,y)$ waarbij $y = y(x)$.
Nu speelt x de rol van t in de stelling, nl.

$$\left.\begin{aligned} z &= f(x,y) \\ y &= y(x) \\ x &= x \end{aligned}\right\} \quad \text{dan } z = f[x,y(x)] \text{ en } \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Vb 3.

$$\left.\begin{aligned} z &= x + y^2 \\ \\ y &= \log x \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{Dan } \frac{\partial z}{\partial x} = 1, \text{ en in } (e,1) \text{ is } \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{e,1} = 1 \\ &\text{maar } \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{2\log x}{x}; \text{ in } (e,1) \text{ is} \left(\frac{dz}{dx}\right)_{e,1} = 1 + \frac{2}{e} \end{aligned}$$

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{e,1}$ is een maat voor de verandering op de doorsnede van $z = x + y^2$ met vlak $y = 1$

$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{e,1}$ is een maat voor de verandering op de doorsnede van $z = x + y^2$ met de cylinder $y = \log x$.

G. Hoe verandert $f(x,y)$ als x en y afhangen van twee onafhankelijk variabelen u en v ?

Zij $z = f(x,y)$ en $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Vul in, dan

$$z = f[x(u,v),\ y(u,v)] = F(u,v).$$

Neem v constant, en pas de kettingregel toe, dan

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Neem vervolgens u constant, dan volgt weer met de kettingregel

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v}$$

Daar $z = F(u,v)$ is per definitie

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv.$$

Vul de zojuist gevonden formules in, dan

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\right) = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Wij hebben aangetoond de volgende formule :

Als $z = f(x,y)$ dan $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}\,dy$

Deze formule is een definitie als x en y onafhankelijk variabel zijn. De formule is in F bewezen voor het geval dat x en y afhankelijk zijn van een parameter. Hierboven is de formule bewezen voor het geval dat x en y afhankelijk zijn van twee parameters.

Voorbeeld. Zij $z = f(x,y)$. Voer in poolcoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,

en bereken $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$

Opl. Pas de kettingregel toe op $z = f[x(r,\varphi), y(r,\varphi)]$, dan

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi\,; \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{\partial z}{\partial x}\,r\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\,r\cos\varphi\,.$$

Hieruit volgt

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2$$

H. Functies van drie variabelen

Voor $w = f(x,y,z)$ is de definitie der partiele afgeleiden

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$$

analoog aan die voor functies van twee variabelen. Nu moeten echter steeds twee variabelen constant worden gehouden.

$f(x,y,z)$ heet differentieerbaar in (a,b,c) als

$$f(a+h,b+k,c+l) - f(a,b,c) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b,c)} h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b,c)} k + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(a,b,c)} l + \rho$$

waarbij $|\rho| < \varepsilon\sqrt{h^2+k^2+l^2}$ te krijgen is door h,k,l voldoend klein te nemen.

Kettingregels:

1) Als $w = f(x,y,z)$ en $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, dan

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

2) Als $w = f(x,y,z)$ en $x = x(t,u)$, $y = y(t,u)$, $z = z(t,u)$, dan

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \text{ en } \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

3) Als $w = f(x,y,z)$ en $x = x(t,u,v)$, $y = y(t,u,v)$, $z = z(t,u,v)$, dan krijgen wij drie formules.

Voor de differentiaal geldt $dw = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ welke formule definitie is, als x,y,z onafhankelijk variabel, en stelling is in de gevallen 1), 2), 3).

§ 3. Impliciet gegeven functies.

A. $F(x,y) = 0$ Beschouw $y = y(x)$ en bereken $\frac{dy}{dx}$.
Door toepassing van de kettingregel op
$z = 0 = F(x,y)$, $x = x$, $y = y(x)$
volgt $0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$
waaruit $\frac{dy}{dx}$ kan worden berekend.

Voorbeeld $\log\sqrt{x^2 + y^2} - \arctan y/x = 0$.
Pas de kettingregel toe, dan

$$\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y/x^2}{1 + (y/x)^2} + \left[\frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{1/x}{1 + (y/x)^2}\right]\frac{dy}{dx} = 0$$

waaruit $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$.
Nogmaals differentieren levert $y'' = 2\frac{x^2 + y^2}{(x - y)^3}$

B. $F(x,y,z) = 0$ Beschouw $z = z(x,y)$ en bepaal $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$.
Door toepassing van de kettingregel op
$w = 0 = F(x,y,z)$, $x = x$, $y = y$, $z = z(x,y)$
volgt na partiele differentiatie

$$\left.\begin{aligned} &\text{naar } x:\quad 0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \\ &\text{naar } y:\quad 0 = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}\right\}$$

waaruit, indien
$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, de $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ kunnen worden berekend.

Voorbeeld. $x = e^y \sin z$. Gevraagd wordt te berekenen de uitdrukking

$$e^{2y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

Opl. Partieel differentieren levert op

naar x : $1 = e^y \cos z\,\frac{\partial z}{\partial x}$

naar y : $0 = e^y \sin z + e^y \cos z\,\frac{\partial z}{\partial y}$

Hieruit zijn $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ te berekenen. Substitutie levert als het gevraagde antwoord : 1.

C. $\left.\begin{array}{l} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{array}\right\}$ Beschouw $z = z(x)$ en $y = y(x)$ en bepaal y' en z'.

Differentiatie naar x levert de beide formules

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0$$

Waaruit y' en z' volgen.

Voorbeeld :

$x^2 + y^2 + z^2 = 5$ Gevraagd wordt te berekenen de waarden van
$xy + yz = 2$ $y'(x)$, $z'(x)$, $z''(x)$ voor $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$.

Opl.
Differentiatie naar x levert

$2x + 2yy' + 2zz' = 0$; $y + (x + z)y' + yz' = 0$
Voor $(x,y,z) = (0,1,2)$ wordt dit

$y'(0) + 2z'(0) = 0$; $1 + 2y'(0) + z'(0) = 0$

waaruit $y'(0) = -2/3$ en $z'(0) = 1/3$.

Differentieer nu nogmaals naar x, dan

$1 + (y')^2 + yy'' + (z')^2 + zz'' = 0$;

$y' + (x + z)y'' + (1 + z')y' + y'z' + yz'' = 0$

hetgeen voor $(x,y,z) = (0,1,2)$ wordt gereduceerd tot twee vergelijkingen voor $y''(0)$ en $z''(0)$, waaruit volgt $z''(0) = -{}^{44}/27$.

D. $\left.\begin{array}{l} F(x,y,z,t) = 0 \\ G(x,y,z,t) = 0 \end{array}\right\}$ Beschouw $z = z(x,y)$ en $t = t(x,y)$ en bereken $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}$.

Vier maal toepassing van de kettingregel geeft

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \ ; \ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \ ; \ \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

waaruit de gevraagde afgeleiden volgen.

Voorbeeld $xy + zt = 8$ en $x + y + z + t = 6$.
Beschouw x en y als onafhankelijk veranderlijke en bepaal $\frac{\partial z}{\partial x}$

Opl.
Partiele differentiatie naar x levert

$$y + z\frac{\partial t}{\partial x} + t\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad 1 + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

waaruit : $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z - y}{t - z}$

E. De algemene behandeling is nu duidelijk. Wij geven nog een Voorbeeld

$$\left.\begin{aligned} x + y &= t + u \\ x + y^2 &= -t + u^2 \\ x^2 + y^2 &= t^2 + u \end{aligned}\right\}$$ Beschouw x als onafhankelijk variabel en bereken $y'(x)$ voor $x = y = t = u = 0$.

Opl.: Uit

$$\left.\begin{aligned} 1 + y' &= t' + u' \\ 1 + 2yy' &= -t' + 2uu' \\ 2x + 2yy' &= 2tt' + u' \end{aligned}\right\}$$

volgt

$$\left.\begin{aligned} 1 + y' &= t' + u' \\ 1 &= -t' \\ 0 &= u' \end{aligned}\right\}$$ dus $y'(0) = -2$

§ 4. Hogere partiele afgeleiden.

A. Definitie

Als $z = f(x,y)$, dan zijn $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ zelf ook functies van x en y.

Def.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} \; ; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = z_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = z_{xy} \; ; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}$$

Voorbeeld $z = x^2 y^3$, dan $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3$ en $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2$. Dus

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3 \; ; \; \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 6xy^2 \; ; \; \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 6xy^2 \; ; \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2 y.$$

Merk op, dat $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$

Stelling | Als de eerste en tweede partiele afgeleiden van $f(x,y)$ bestaan en continu zijn in een omgeving van (a,b), dan geldt $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ in (a,b)

Bewijs:

Zij $U = f(a + h,\ b + k) - f(a + h,\ b) - f(a,b + k) + f(a,b)$

1) Zij $\varphi(x,y) = f(x + h,y) - f(x,y)$, dan $U = \varphi(a,b + k) - \varphi(a,b)$

Volgens de middelwaardestelling, 2x toegepast, is

$$U = k.\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b + \theta\, ,k) = k\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a + h,\ b + \theta_1 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b + \theta_1 k)\right] =$$

$$= k.h.\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a + \theta_2 h,\ b + \theta_1\, k).$$

2) Zij $\varphi(x,y) = f(x,y+k) - f(x,y)$, dan

$$U = \varphi(a+h,b) - \varphi(a,b)$$

Pas wederom tweemaal de middelwaardestelling toe, dan

$$U = h\,k\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(a+\theta_3 h,\ b+\theta_4 k)$$

3) Uit 1) en 2) volgt dus dat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a+\theta_2 h,\ b+\theta_1 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a+\theta_3 h,\ b+\theta_4 k)$$

Laat nu h en k tot nul naderen, dan volgt op grond van de continuiteit der gemengde tweede afgeleiden dat zij in (a,b) gelijk zijn.

Opmerking Dat deze stelling niet triviaal is, blijkt uit het Voorbeeld : Zij $f(x,y) = xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ en $f(0,0) = 0$

Dan $f_x(0,y) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} y\,\dfrac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = -y$

en dus $f_{y,x}(0,y) = -1$ en i.h.b. $f_{y,x}(0,0) = -1$

Echter $f_y(x,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} x\dfrac{x^2-k^2}{x^2+k^2} = x$

en dus $f_{x,y}(x,0) = 1$ en i.h.b. $f_{x,y}(0,0) = 1$.

In dit voorbeeld is dus $f_{y,x} \neq f_{x,y}$ in (0,0)

Analoog definieert men de derde partiele afgeleiden, ook van functies van meer dan twee variabelen.
Als is voldaan aan zekere voorwaarden, dan zijn weer gemengde partiele afgeleiden gelijk, b.v.

als $w = f(x,y,z)$ dan $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}$

B. Kettingregels. De kettingregels voor hogere partiele afgeleiden zijn zeer onoverzichtelijk en ingewikkeld. Zij kunnen echter op eenvoudige wijze in elk geval worden afgeleid door toepassing van de gewone kettingregel, als men maar steeds beseft dat partiele afgeleiden van alle variabelen afhangen.

1) Als $z = f(x,y)$ en $x = x(t)$, $y = y(t)$, dan $z = f[x(t),y(t)]$ en

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \text{en}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dt} \right] \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{d^2 y}{d t^2} +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{dy}{dt} \right] \frac{dy}{dt}$$

2) Als $z = f(x,y)$, $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, dan $z = f[x(u,v), y(u,v)]$

en $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u}$

Partiele differentiatie van deze formule en die voor $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ levert drie formules op, waarvan er één luidt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right] \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial v} \right] \frac{\partial y}{\partial u}$$

De hierna volgende voorbeelden 1 en 2 zijn aanloopjes tot de voorbeelden 3 en 4, die moeilijk zijn omdat de resultaten van paragraaf 3 en 4 gecombineerd moeten worden. Speciaal voorbeeld 3 is van belang voor de toepassingen.

Vb 1. Zij $z = f(x,y)$ met $x = u + v$, $y = u - v$. Gevraagd wordt $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.

Oplossing. $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}$ Differentieer nu naar v, dan

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot (-1) + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot 1 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot (-1) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Vb 2. Zij $z = f(x,y)$ met $x = u + v$, $y = u - v$. Gevraagd wordt $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ uit te drukken in z,u,v. Door voorbeeld 1 weten wij het antwoord reeds.

Oplossing. Vul x en y in, dan staat er

$$z = f[x(u,v),y(u,v)] = \varphi(u,v)$$

terwijl in het gegeven impliciet staat $u = u(x,y)$ en $v = v(x,y)$. In dit voorbeeld is namelijk $u = \frac{1}{2}(x + y)$, $v = \frac{1}{2}(x - y)$. Dus

$$z = \varphi(u,v) \text{ met } u = u(x,y) \text{ en } v = v(x,y).$$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial z}{\partial v}$ Evenzo

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial z}{\partial u} - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial z}{\partial v}$. Nogmaals differentieren geeft

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{1}{2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\,\frac{1}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

Aftrekken geeft het verwachte antwoord: $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$

Vb 3. Zij $z = f(x,y)$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Gevraagd wordt

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ uit te drukken in z, r, φ.

Oplossing $z = f[x(r,\varphi), y(r,\varphi)] = F(r,\varphi)$
terwijl impliciet gegeven zijn $r = r(x,y)$ en $\varphi = \varphi(x,y)$. Dus

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Wij bepalen nu eerst $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ door impliciet differentieren uit $x = r\cos\varphi$ en $y = r\sin\varphi$:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial r}{\partial x}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial r}{\partial x}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial r}{\partial y}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 1 &= \frac{\partial r}{\partial y}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}$$

Vul dit in, dan volgen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\,\frac{\sin\varphi}{r} \quad \text{en} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\,\frac{\cos\varphi}{r}$$

Differentieer nu nogmaals naar x (resp. naar y) en tel op, dan krijgt men tenslotte

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}$$

de operator van Laplace in poolcoordinaten, toegepast op z.

Vb 4. Zij $z = f(x,y)$ en $x = u^2 + v^2$, $y = u + v$. Gevraagd wordt

om $(2x - y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x}$ in z,u,v uit te drukken.

Oplossing $z = \varphi(u,v) = \varphi[u(x,y), v(x,y)]$. Wij zoeken eerst, teneinde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

te kunnen uitrekenen, $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $\frac{\partial v}{\partial x}$, die volgen uit

$$\left.\begin{aligned} x &= u^2 + v^2 \qquad \text{dus } 1 = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} \\ y &= u + v \qquad \text{dus } 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2(u-v)}$$

Dus $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2(u-v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ of $2(u-v)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}$.

Partiele differentiatie naar x levert

$$2(u-v)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 2\left[\frac{1}{2(u-v)} + \frac{1}{2(u-v)}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$4(u-v)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$(2x - y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right]$$

<u>Opmerking</u>

Generalisatie van voorbeeld 3 in de ruimte, namelijk voor bolcoordinaten:

$x = r\sin\theta\cos\varphi$; $y = r\sin\theta\sin\varphi$; $z = r\cos\theta$

levert voor de Laplace-operator:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

HOOFDSTUK V MEETKUNDE EN ALGEBRA

§.1 Vectoren in ruimte en vlak

A. Zij O een vast punt, genaamd de oorsprong. Een vector $\underline{a}$ is de pijl van O naar een punt A.
Twee vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ kunnen worden opgeteld: $\underline{a} + \underline{b}$. Een vector $\underline{a}$ kan met een reëel getal λ (een scalar) worden vermenigvuldigd: $\lambda\, \underline{a}$.
De volgende eigenschappen gelden :

Optelling: 1) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$. 2) $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$.

3) Er is één $\underline{x}$ zodat $\underline{a} + \underline{x} = \underline{a}$. Noem deze $\underline{o}$ (pijl van O naar O).

4) Er is één $\underline{x}$ zodat $\underline{a} + \underline{x} = \underline{o}$. Noem deze $-\underline{a}$ (tegengestelde van $\underline{a}$).

Opmerking: Er is één $\underline{x}$ zodat $\underline{a} + \underline{x} = \underline{b}$, namelijk $\underline{x} = \underline{b} + (-\underline{a})$. Noem deze $\underline{b} - \underline{a}$ (het verschil van $\underline{b}$ en $\underline{a}$).

Scalaire vermenigvuldiging:

1) $(\lambda\mu)\underline{a} = \lambda(\mu\underline{a})$

2) $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$

3) $(\lambda+\mu)\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a}$

4) $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$

B. Wij gebruiken de vectoren om meetkundige figuren en hun eigenschappen te beschrijven.

1) Een punt A wordt aangegeven door het uiteinde van de vector $\underline{a} = \vec{OA}$.

2) Een rechte l door O. Zij $\underline{v}$ een vector langs l. Dan is de rechte l de meetkundige plaats van de eindpunten der vectoren

$$\underline{x} = \lambda\underline{v} \quad , \quad -\infty < \lambda < \infty .$$

3) Een rechte l niet door O. Zij $\underline{v}$ een vector evenwijdig aan l en zij $\underline{a}$ een vector met eindpunt op l. Dan is de rechte l de meetkundige plaats van de eindpunten der vectoren

$$\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{v} \quad , \quad -\infty < \lambda < \infty .$$

De vector $\underline{v}$ heet een richtingsvector van de rechte.

4) Een vlak V door O. Laat $\underline{v}$ en $\underline{w}$ (niet langs één rechte) vectoren in het vlak zijn. Dan is het vlak V de meetkundige plaats van de eindpunten der vectoren

$$\underline{x} = \lambda\underline{v} + \mu\underline{w} \; , \; -\infty < \lambda \; , \; \mu < \infty .$$

5) <u>Een vlak V niet door O</u>. Laat $\underline{v}$ en $\underline{w}$ (niet langs één rechte) vectoren evenwijdig aan V zijn en zij $\underline{a}$ een vector met eindpunt in V. Dan is V de meetkundige plaats van de eindpunten der vectoren

$$\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{v} + \mu\underline{w}\ , \quad -\infty < \lambda\ ,\ \mu < \infty\ .$$

§.2 Coordinaten

A. <u>Het vlak, R_2</u>.

Neem door de oorsprong O twee onderling loodrechte assen, de x-as en de y-as. Een vector $\underline{a}$ wordt voorgesteld door zijn componenten a_1 en a_2, de van teken voorziene lengten van de projecties van $\underline{a}$ op de assen

Notatie:

$$\underline{a} = (a_1, a_2) \quad \text{of} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Vectoren langs de x-as: (p,o), langs de y-as: (o,q).
Als $\underline{a} = (a_1, a_2)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2)$ dan is

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2) \text{ en } \lambda\underline{a} = (\lambda a_1,\ \lambda a_2).$$

Men noemt de getallen a_1 en a_2 ook de coordinaten van het punt A, dat door de vector $\underline{a}$ wordt aangegeven. De rechte $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{v}$ wordt met coordinaten geschreven als

(1) $(x_1, x_2) = (a_1, a_2) + \lambda(v_1, v_2)$

of $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Dit zijn twee vergelijkingen. Eliminatie van λ geeft

(2) $px_1 + qx_2 + r = 0$ of $px + qy + r = 0$

(1) heet een parametervoorstelling, (2) een vergelijking van de rechte

<u>Voorbeeld (1)</u> Rechte $\underline{x} = (1,2) + \lambda(3,1)$.

Het punt (10,5) ligt erop, want

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{voor } \lambda = 3.$$

Het punt (-2,-1) ligt er niet op, want voor elke λ is

$$(-2,-1) \neq (1,2) + \lambda(3,1).$$

Het snijpunt met de x-as is te vinden uit

$$\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

immers uit de vergelijkingen volgt $\lambda = -2$, $p = -5$, dus het snijpunt met de x-as is (-5,0). Op analoge wijze vindt men dat 0, 5/3) het snijpunt met de y-as is.

De vergelijking van de rechte volgt na eliminatie van λ uit

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{array}\right\} \quad \text{We vinden } x - 3y + 5 = 0.$$

<u>Voorbeeld (2)</u> Een rechte is gegeven door de vergelijking $2x + y - 3 = 0$. Gevraagd wordt een parametervoorstelling. Stel $x = \lambda$, dan is $y = -2\lambda + 3$. Dus een parametervoorstelling is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

<u>Voorbeeld (3)</u> Dezelfde vraag bij $2x + 3y - 7 = 0$. Stel nu $x = 3\lambda$, dan $y = -2\lambda + {}^7/_3$, dus $\underline{x} = (0, {}^7/_3) + \lambda(3,-2)$.

B. <u>De ruimte R_3</u>

Neem door de oorsprong O drie onderling loodrechte assen: x-as, y-as en z-as. Een vector $\underline{a}$ wordt voorgesteld door zijn componenten (a_1, a_2, a_3), de van tekens voorziene lengten van de projecties van $\underline{a}$ op de assen. In het bijzonder is $\underline{o} = (0,0,0)$; $(p,0,0)$ is een vector langs de x-as; $(p,0,r)$ is een vector in het (x,z)-vlak.
Als $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, dan is

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) \text{ en } \lambda\underline{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

Een rechte, resp. een vlak, heeft parametervoorstelling

$$\underline{x} = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3), \text{ resp.}$$
$$\underline{x} = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(v_1, v_2, v_3) + \mu(w_1, w_2, w_3).$$

Een vlak wordt ook voorgesteld door een vergelijking

$$px_1 + qx_2 + rx_3 = s \quad \text{of} \quad px + qy + rz = s,$$

die verkregen wordt door uit de 3 vergelijkingen van de parametervoorstelling λ en μ te elimineren. Een rechte kan niet door één vergelijking worden voorgesteld.

<u>Voorbeeld 1.</u> Beschouw de rechte $\underline{x} = (1,1,1) + \lambda(0,1,2)$.
Het punt $(1,3,5)$ ligt op deze rechte, omdat $(1,3,5)$ voldoet aan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{voor } \lambda = 2.$$

Het snijpunt van de rechte met het (x,y)-vlak volgt uit

$$0 = z = 1 + 2\lambda, \ \lambda = -\frac{1}{2}$$

en is dus het punt $(1, \frac{1}{2}, 0)$.
Het snijpunt met het (y,z)-vlak zou moeten volgen uit $0 = x = 1 + \lambda 0$, dus bestaat niet; inderdaad blijkt uit beschouwing van de richtingsvector $(0,1,2)$ dat de rechte evenwijdig is met het (y,z)-vlak.
De rechte door $(7,0,3)$, die evenwijdig is met de gegeven rechte, heeft parametervoorstelling

$$\underline{x} = (7,0,3) + \lambda(0,1,2).$$

<u>Voorbeeld 2.</u> Beschouw het vlak $\underline{x} = (1,2,3) + \lambda(0,1,1) + \mu(1,0,-2)$ uitgeschreven

$$\begin{aligned} x &= 1 \quad + \mu \\ y &= 2 + \lambda \\ z &= 3 + \lambda - 2\mu \end{aligned}$$

Voor het snijpunt met de y-as moet $x = 0$ en $z = 0$, dus $\mu = -1$ en $\lambda = -5$. Dit snijpunt is dus $(0,-3,0)$.

De vergelijking van het vlak wordt verkregen door λ en μ te elimineren

$$2x - y + z = 3.$$

Voor elk punt van de snijlijn met het (x,y)-vlak moet $z = 0$, dus de vergelijking van deze snijlijn, beschouwd als rechte in het (x,y)-vlak, luidt $2x - y = 3$. In de ruimte stelt deze vergelijking voor het vlak door de snijlijn en evenwijdig aan de z-as.

<u>Voorbeeld 3.</u> Het snijpunt van de rechte uit voorbeeld 1. met het vlak uit voorbeeld 2. verkrijgt men door $\underline{x} = (1,1,1) + \lambda(0,1,2)$ in te vullen in de vergelijking van het vlak, $2x - y + z = 3$. Dan

$$2.1 - (1 + \lambda) + (1 + 2\lambda) = 3$$

dus $\lambda = 1$ en het gevraagde snijpunt is $(1,2,3)$.

<u>Voorbeeld 4.</u> Een vlak heeft vergelijking $2x - 4y + 3z = 12$. Gevraagd wordt een parametervoorstelling van het vlak. Stel $y = \lambda$ en $z = 2\mu$, dan is $x = 2\lambda - 3\mu + 6$, dus $\underline{x} = (6,0,0) + \lambda(2,1,0) + \mu(-3,0,2)$ voldoet.

<u>Voorbeeld 5.</u> Gegeven zijn twee vlakken,

$$x + y = 1 \quad \text{en} \quad 2x - y + z = 3.$$

Gevraagd wordt een parametervoorstelling van de snijlijn.
Stel $x = \lambda$, dan $y = -\lambda + 1$ en $z = -3\lambda + 4$, dus
$\underline{x} = (0,1,4) + \lambda(1,-1,-3)$ voldoet.

C. <u>Cartesische ruimten R_n</u>, (naar Cartesius = Descartes 1596-1650).

Een rijtje $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ van n reële getallen duiden wij kortweg aan door $\underline{a}$.
De Cartesische ruimte R_n is de verzameling van alle rijtjes, waarbij de som van twee rijtjes en het product van een rijtje met een getal wordt gedefinieerd als volgt:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \ldots,\ a_n + b_n) \text{ en } \lambda\underline{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Het is eenvoudig in te zien, dat voor deze som en scalaire vermenigvuldiging de eigenschappen van §.1 gelden.

R_1 is de getallenrechte, R_2 het gewone vlak, R_3 de gewone ruimte.

Naar analogie met deze cartesische ruimten van dimensie 1,2,3 kunnen wij ook in R_n, $n > 3$, een meetkundige terminologie invoeren.

Wij doen dit voor $n = 4$: $(0,0,0,0)$ heet de oorsprong O.

Alle $(a_1,0,0,0)$ vormen de x-as; alle $(0,a_2,0,0)$ de y-as ;
Alle $(0,0,a_3,0)$ de z-as; alle $(0,0,0,a_4)$ de t-as.
Alle $(a_1,a_2,0,0)$ vormen het (x,y)-vlak. Hiervoor is dus z=t=0.
Alle $(a_1,a_2,0,a_4)$ vormen de (x,y,t)-ruimte, waarvoor dus z=0.

De verzameling $\underline{x} = (a_1,a_2,a_3,a_4) + \lambda(v_1,v_2,v_3,v_4)$, met λ variabel, heet een rechte. De verzameling $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{v} + \mu\underline{w}$, met λ en μ variabel, heet een vlak. De verzameling $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{v} + \mu\underline{w} + \nu\underline{u}$, met λ,μ,ν variabel, heet een ruimte. Als wij uit de laatste (vier !) vergelijkingen de λ, μ,ν elimineren, dan krijgen wij de vergelijking van de ruimte:

$$ax + by + cz + dt = e.$$

Voorbeeld. Gevraagd wordt het snijpunt van de rechte door de eindpunten van $\underline{a} = (1,2,3,4)$ en $\underline{b} = (0,-1,2,2)$ met de (x,y,z)-ruimte (de "grondruimte").
Oplossing: De richtingsvector van de rechte is $\underline{a} - \underline{b}$, dus de parametervoorstelling is

$$\underline{x} = (1,2,3,4) + \lambda(1,3,1,2).$$

Snijding met $t = 0$ levert $4 + 2\lambda = 0$, dus $\lambda = -2$, dus het gevraagde snijpunt is $(-1,-4,1,0)$.
Opmerking. De genoemde rechte snijdt dus noch het (x,y)-vlak, noch het (x,z)-vlak, noch het (y,z)-vlak. In R_4 zijn een rechte en een vlak in het algemeen kruisend.

§.3 Afhankelijkheid

A. Een vector $\underline{v}$ heet een lineaire combinatie van de vectoren $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$, als

$$\underline{v} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} + \delta\underline{d}.$$

Voorbeelden
(4,5) is lin.comb. van (1,1) en (2,3)
(0,5) is lin.comb. van (1,2) en (4,3)
(0,1,2) is lin.comb. van (1,2,3) en (1,1,1)
(5,6,7,0) is lin.comb. van (1,2,3,4) en (1,1,1,-1)
(1,2) is lin.comb. van (3,6).

Drie vectoren $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$, zijn afhankelijk, als $\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} + \nu\underline{c} = \underline{0}$ voor zekere $(\lambda,\mu,\nu) \neq (0,0,0)$.
Drie vectoren $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$, zijn onafhankelijk, als zij niet afhankelijk zijn, dus als

$$\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} + \nu\underline{c} = \underline{0} \Longrightarrow \lambda=\mu=\nu=0.$$

Twee vectoren $\underline{a},\underline{b}$ zijn afhankelijk, als $\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} = \underline{0}$. voor zekere $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, en onafhankelijk als zij niet afhankelijk zijn.

Voorbeelden
(1,2,3), (1,1,1), (0,1,2) zijn afhankelijk,
(1,2), (4,8) zijn afhankelijk,
(1,2), (4,8), (6,1) zijn afhankelijk,
(1,0,0), (6,7,0), (1,2,3) zijn onafhankelijk,
(3,2), (1,1) zijn onafhankelijk.

B. De betekenis der zojuist ingevoerde begrippen voor de meetkunde blijkt uit de volgende opmerkingen:

1) Twee rechten zijn evenwijdig, als hun richtingsvectoren afhankelijk zijn.
2) Een vlak door O bestaat uit alle vectoren, die een lineaire combinatie zijn van twee vectoren (die onafhankelijk zijn).
3) De rechte $x = \underline{a} + \lambda \underline{u}$ is evenwijdig met het vlak $\underline{x} = \underline{b} + \mu \underline{v} + \nu \underline{w}$, als u een lin.comb. is van $\underline{v}$ en $\underline{w}$.
4) De eindpunten der vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ liggen op een rechte als $\underline{b} - \underline{a}$ en $\underline{c} - \underline{a}$ afhankelijk zijn.
5) De eindpunten der vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ liggen in een vlak, als $\underline{b} - \underline{a}$, $\underline{c} - \underline{a}$, $\underline{d} - \underline{a}$ afhankelijk zijn.

C. Stelling $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ zijn onafhankelijk dan en slechts dan als $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ onafhankelijk zijn.

Deze stelling bevat twee beweringen nl.

1) Gegeven: $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ onafhankelijk. Te bewijzen: $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ onafh.

Bewijs: Stel $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) + \mu \underline{b} + \nu \underline{c} = \underline{o}$
dan $\lambda \underline{a} + (\lambda + \mu)\underline{b} + \nu \underline{c} = \underline{o}$.

Uit het gegeven volgt dan $\lambda = o$, $\lambda + \mu = o$, $\nu = o$, dus $\lambda = \mu = \nu = o$.

2) Gegeven: $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ onafhankelijk. Te bew.: $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$, onafhankelijk.

Bewijs: Stel $\lambda \underline{a} + \mu \underline{b} + \nu \underline{c} = o$
dan $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) + (\mu - \lambda)\underline{b} + \nu \underline{c} = \underline{o}$.

Uit het gegeven: $\lambda = \mu - \lambda = \nu = o$ dus $\lambda = \mu = \nu = o$.

Stelling $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ zijn onafhankelijk dan en slechts dan als $\alpha \underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ onafhankelijk zijn ($\alpha \neq o$).

Door herhaalde toepassing van beide stellingen kan het onderzoek naar de afhankelijkheid van een stelsel vectoren herleid worden tot het onderzoek van een ander, eenvoudiger stelsel.
Het systematisch uitvoeren van dit procédé heet "vegen".

Voorbeeld 1.

Zijn $\underline{a} = (-1,1,1)$; $\underline{b} = (1,2,3)$; $\underline{c} = (5,1,3)$ afhankelijk ?
Schrijf de vectoren onder elkaar en veeg de tweede kolom schoon:

$\underline{a} = (-1,1,1)$	$\underline{a} = (-1,1,1)$
$\underline{b} = (1,2,3)$	$\underline{b} - 2\underline{a} = (3,0,1)$
$\underline{c} = (5,1,3)$	$\underline{c} - \underline{a} = (6,0,2)$

Nu blijkt $\underline{c} - \underline{a} = 2(\underline{b} - 2\underline{a})$, dus $3\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$.

De vectoren zijn afhankelijk.

Voorbeeld 2.

Zijn $\underline{a} = (1,2,3)$, $\underline{b} = (2,7,0)$, $\underline{c} = (1,2,-1)$ afhankelijk ?

$\underline{a} = (1,2,3)$	$\underline{a} + 3\underline{c} = (4,8,0)$	$\underline{a} + 3\underline{c} - 2\underline{b} = (0,-6,0)$
$\underline{b} = (2,7,0)$	$\underline{b} = (2,7,0)$	$\underline{b} = (2,7,0)$
$\underline{c} = (1,2,-1)$	$\underline{c} = (1,2,-1)$	$\underline{c} = (1,2,-1)$

De laatstgenoemde drie vectoren (en dus de gegeven drie) zijn onafhankelijk, want stel

$$\lambda\begin{pmatrix}0\\-6\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\7\\0\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad \text{dan } \nu=0,\ \mu=0,\ \lambda=0.$$

Voorbeeld 3.

Bewijs dat $\underline{a}=(7,8,0,0)$, $\underline{b}=(1,2,4,3)$, $\underline{c}=(1,-2,-4,-3)$ $\underline{d}=(0,0,4,3)$ afhankelijk zijn, m.a.w. bewijs dat deze vier vectoren van R_4 in een driedimensionale deelruimte liggen.

$\underline{a}=(7,8,0,0)$	$\underline{a}=(7,8,0,0)$	$\underline{a}+4\underline{c}+4\underline{d}=(11,0,0,0)$
$\underline{b}=(1,2,4,3)$	$\underline{b}-\underline{d}=(1,2,0,0)$	$\underline{b}+\underline{c}=(2,0,0,0)$
$\underline{c}=(1,-2,-4,-3)$	$\underline{c}+\underline{d}=(1,-2,0,0)$	$\underline{c}+\underline{d}=(1,-2,0,0)$
$\underline{d}=(0,0,4,3)$	$\underline{d}=(0,0,4,3)$	$\underline{d}=(0,0,4,3)$

Nu blijkt $2(\underline{a}+4\underline{c}+4\underline{d})=11(\underline{b}+\underline{c})$ dus $2\underline{a}-11\underline{b}-3\underline{c}+8\underline{d}=\underline{0}$.

§.4 Vectorruimten

A. Definitie:
Een vectorruimte V is een verzameling van dingen (genaamd vectoren), die kunnen worden opgeteld, en die kunnen worden vermenigvuldigd met een getal, en wel zo dat aan een aantal rekenregels is voldaan, m.a.w.

als $\underline{a}, \underline{b} \in V$, dan $\underline{a}+\underline{b}, \lambda\underline{a} \in V$ zodat geldt

1) $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$
2) $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$
3) Er is één $\underline{x}$ zodat $\underline{a}+\underline{x}=\underline{b}$
4) $(\lambda\mu)\underline{a}=\lambda(\mu\underline{a})$
5) $(\lambda+\mu)\underline{a}=\lambda\underline{a}+\mu\underline{a}$
6) $\lambda(\underline{a}+\underline{b})=\lambda\underline{a}+\lambda\underline{b}$
7) $1.\underline{a}=\underline{a}$

Vb.1 R_n is een vectorruimte.

Vb.2 Een verzameling van vectoren met eindpunt in een vlak niet door O is geen vectorruimte, want als $\underline{a}$ en $\underline{b}$ hun eindpunt in het vlak hebben, dan heeft $\underline{a}+\underline{b}$ dat niet.

Vb.3 Alle continue functies op $0 \leqslant t \leqslant 1$ vormen een vectorruimte, want als f en g continu zijn, dan is f + g en ook λf continu.

Vb.4 Alle veeltermen van de graad $\leqslant 7$ in één onbekende dus alle
$ax^7+bx^6+cx^5+dx^4+ex^3+fx^2+gx+h$.

Vb.5 Alle lineaire vormen in 5 variabelen, dus
$2x_1+3x_2-x_3+7x_4-x_5$ en dergelijke.

B. Definities:
1) $\underline{x}$ is lineaire combinatie van $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$, als $\underline{x}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\underline{a}_i$.

2) $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_m$ zijn afhankelijk, als er getallen $\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}, \beta_m$, niet alle o, bestaan zodat

$$\beta_1\underline{b}_1+\beta_2\underline{b}_2+\ldots+\beta_m\underline{b}_m=\underline{o}.$$

3) $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_m$ zijn onafhankelijk, als zij niet afhankelijk zijn.

4) De dimensie van V = dim V = het maximum aantal vectoren van V, dat onafhankelijk is.

Wij beperken ons tot vectorruimten met eindige dimensie.

Vb.1 dim $R_2 = 2$, want elk drietal vectoren in het vlak is afhankelijk.

Vb.2 dim $R_3 = 3$, want elk viertal vectoren in de ruimte is afhankelijk.

Vb.3 De dimensie van bovenstaand Vb.3 is niet eindig.

C. Basis.

Zij dim V = n en zij $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ een onafhankelijk stelsel.

Als $\underline{x}$ een willekeurige vector van V is, dan zijn de n+1 vectoren $\underline{x}, \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ afhankelijk, dus

$$\lambda \underline{x} + \alpha_1 \underline{e}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{e}_n = \underline{o}.$$

Nu is $\lambda \neq 0$ (waarom ?). Noem $-\frac{\alpha_i}{\lambda} = x_i$, dan $\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + \ldots + x_n \underline{e}_n$.

Elke vector is dus als lineaire combinatie van $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ te schrijven, en wel op één manier, want als ook

$$\underline{x} = y_1 \underline{e}_1 + \ldots + y_n \underline{e}_n \text{ , dan is}$$
$$\underline{o} = (x_1 - y_1)\underline{e}_1 + \ldots + (x_n - y_n)\underline{e}_n$$

en uit de onafhankelijkheid van $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ volgt $x_i = y_i$.

De vectoren $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ vormen een basis in de volgende zin

Definitie:
Een basis van een vectorruimte is een onafhankelijk stelsel vectoren, waarvan iedere vector een lineaire combinatie is.

Conclusie Elke vector $\underline{x}$ is op precies één manier te schrijven als lineaire combinatie van een basis:

$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + \ldots + x_n \underline{e}_n .$$

De getallen $(x_1, \ldots, x_n)$ heten de coordinaten van $\underline{x}$ t.o.v. de basis.

Vb.1 In R_3 is een basis: $\underline{e}_1 = (1,0,0)$; $\underline{e}_2 = (0,1,0)$; $\underline{e}_3 = (0,0,1)$.
(Elke vector is te schrijven als
$\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3$ ofwel $\underline{x} = x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2 + z\underline{e}_3$).

Vb.2 In R_2 is een basis: $\underline{e}_1 = (1,0)$; $\underline{e}_2 = (0,1)$.

Vb.3 De veeltermen met graad $\leqslant 3$, alle

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

vormen een vectorruimte met basis 1, x, x^2, x^3, en dimensie 4.

Vb.4 De lineaire vormen in 4 variabelen, alle ax + by + cz + dt, vormen een vectorruimte met basis x, y, z, t en dimensie 4.

We hebben al gezien: in een ruimte van dimensie n vormen n onafhankelijke vectoren steeds een basis. Omgekeerd geldt :

Stelling Elke basis van een vectorruimte van dimensie n bevat n elementen.

Bewijs Neem n onafhankelijke vectoren $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$. Stel $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_p$ is een basis, dan is $p \leqslant n$. Te bewijzen is $p = n$. Elke vector is lin.comb. van $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_p$, dus ook

$$\underline{e}_1 = \alpha_1 \underline{f}_1 + \ldots + \alpha_p \underline{f}_p .$$

Eén der $\alpha_i \neq 0$, b.v. $\alpha_1 \neq 0$, dus volgt na deling door α_1:

$$\underline{f}_1 = \beta_1 \underline{e}_1 + \beta_2 \underline{f}_2 + \ldots + \beta_p \underline{f}_p$$

en daar $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_p$ basis is, is elke vector lineaire combinatie van

$\underline{e}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_p$, dus o.a.

$$\underline{e}_2 = \gamma_1 \underline{e}_1 + \gamma_2 \underline{f}_2 + \ldots + \gamma_p \underline{f}_p .$$

Eén der $\gamma_2, \ldots, \gamma_p \neq 0$, b.v. $\gamma_2 \neq 0$, dus volgt

$$\underline{f}_2 = \delta_1 \underline{e}_1 + \delta_2 \underline{e}_2 + \delta_3 \underline{f}_3 + \ldots + \delta_p \underline{f}_p .$$

Dus elke vector is lineaire combinatie van

$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{f}_3, \ldots, \underline{f}_p$.

Zo voortgaande zien wij tenslotte dat elke vector lineaire combinatie is van

$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \ldots, \underline{e}_p$.

Zou nu $p < n$, dan zou ook $\underline{e}_{p+1}$ lineaire combinatie van deze vectoren zijn. Dit is onjuist dus $p = n$.

D. Deelruimten.

Zij V een vectorruimte met dim V = n. Zij $\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_r \in V$ onafh., dus $r \leqslant n$. Alle lin. comb. van deze vectoren, $\underline{x} = \lambda_1 \underline{g}_1 + \ldots + \lambda_r \underline{g}_r$ vormen weer een vectorruimte, genaamd een deelruimte van V, met basis $\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_r$ en dimensie r, immers als

$$\underline{x} = \lambda_1 \underline{g}_1 + \ldots + \lambda_r \underline{g}_r \text{ en } \underline{y} = \mu_1 \underline{g}_1 + \ldots + \mu_r \underline{g}_r \text{ , dan}$$

$$\underline{x} + \underline{y} = (\lambda_1 + \mu_1) \underline{g}_1 + \ldots + (\lambda_r + \mu_r) \underline{g}_r \text{ en } \alpha \underline{x} = \alpha\lambda_1 \underline{g}_1 + \ldots + \alpha\lambda_r \underline{g}_r ,$$

en de rekenregels gelden.

Vb.1 In R_3 is de verzameling $\underline{x} = \lambda \underline{u}$ een deelruimte van dimensie 1, en is de verzameling $\underline{x} = \lambda \underline{v} + \mu \underline{w}$ een deelruimte van dimensie 2. ($\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ vaste vectoren, λ, μ variabele getallen).

Vb.2 Een rechte in R_3, $\underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{v}$, die niet door O gaat, vormt geen deelruimte van R_3.

Vb.3 $\underline{a} = (3,2,3,5)$; $\underline{b} = (2,-1,4,7)$; $\underline{c} = (5,8,1,1)$; $\underline{d} = (6,11,0,-1)$ liggen in een deelruimte van R_4 met dimensie 2.

Bewijs

$$\begin{array}{ll} \underline{a} = (3,2,3,5) & \underline{a} - 3\underline{c} = (-12,-22,0,2) \\ \underline{b} = (2,-1,4,7) & \underline{b} - 4\underline{c} = (-18,-33,0,3) \\ \underline{c} = (5,8,1,1) & \underline{c} = (5,8,1,1) \\ \underline{d} = (6,11,0,-1) & \underline{d} = (6,11,0,-1) \end{array}$$

Blijkbaar is $\underline{a} - 3\underline{c} = -2\underline{d}$ en $\underline{b} - 4\underline{c} = -3\underline{d}$. De vectoren $\underline{c}$ en $\underline{d}$ vormen een basis van een deelruimte, waarin

$$\underline{a} = 3\underline{c} - 2\underline{d}, \qquad \underline{b} = 4\underline{c} - 2\underline{d} \text{ liggen.}$$

Dus $\underline{a}$ en $\underline{b}$ liggen in het vlak, dat door $\underline{c}$ en $\underline{d}$ wordt opgespannen.

Definitie: Men zegt dat een stelsel vectoren $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k\}$ een deelruimte W opspant, als W de deelruimte van de kleinste dimensie is, die $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ bevat.

In vb 1 spant $\underline{u}$ een R_1 op en spannen $\underline{v}$ en $\underline{w}$ een R_2 op.

In vb 3 spannen $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\}$ een R_2 op, hetzelfde vlak dat ook reeds door $\underline{c}$ en $\underline{d}$ alleen wordt opgespannen.

Definitie: Twee stelsels vectoren heten equivalent, als zij dezelfde deelruimte opspannen.

In vb 3 is het stelsel $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\}$ equivalent met het stelsel $\{\underline{a}-3\underline{c},\underline{b}-4\underline{c},\underline{c},\underline{d}\}$ en ook equivalent met het stelsel $\{\underline{c},\underline{d}\}$.
Wij schrijven $\{a,b,c,d\} \sim \{\underline{a}-3\underline{c},\underline{b}-4\underline{c},\underline{c},\underline{d}\} \sim \{\underline{c},\underline{d}\}$.

§.5 Lineaire vormen

Alle lineaire vormen in n variabelen, zoals

$L \equiv a_1x_1 + \dots + a_n x_n$ en $M \equiv b_1x_1 + \dots + b_n x_n$

vormen een vectorruimte want $L + M \equiv (a_1 + b_1)x_1 + \dots + (a_n + b_n)x_n$ en $\lambda L \equiv \lambda a_1x_1 + \dots + \lambda a_n x_n$ zijn weer lineaire vormen en de rekenregels gelden. Wij kunnen de theorie der vectorruimten, zoals afhankelijkheid, dus toepassen.

Vb
$$\begin{aligned} L_1 &\equiv 3x + 4y - z \\ L_2 &\equiv x + 5y + 2z \\ L_3 &\equiv 2x - y - 3z \end{aligned}$$
zijn afhankelijk, daar $L_1 = L_2 + L_3$.

De geldigheid van de volgende stelling stelt ons in staat tot het vegen:

Stelling L_1, L_2, L_3 onafhankelijk $\iff L_1 + L_2, L_2, L_3$ onafhankelijk,
$(\alpha \neq 0)$ $\iff \alpha L_1, L_2, L_3$ onafhankelijk.

Vb.1

De volgende twee stelsels lineaire vormen zijn òf beide afhankelijk, òf beide onafhankelijk. We zien gemakkelijk dat het tweede stelsel afhankelijk is, dus het eerste stelsel is ook afhankelijk.

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv -x + y + z \\ L_2 &\equiv x + 2y + 3z \\ L_3 &\equiv 5x + y + 3z \end{aligned} \quad \text{en} \quad \begin{aligned} L_1 &\equiv -x + y + z \\ L_2 - 2L_1 &\equiv 3x + z \\ L_3 - L_1 &\equiv 6x + 2z \end{aligned}$$

Wij zoeken nog een zo eenvoudig mogelijk stelsel lineaire vormen, dat met L_1, L_2, L_3 equivalent is. Daartoe noteren wij slechts de coefficienten der lineaire vormen :

$$\begin{matrix} (-1,1,1) \\ (1,2,3) \\ (5,1,3) \end{matrix} \text{ equiv. } \begin{matrix} (-1,1,1) \\ (3,0,1) \\ (6,0,2) \end{matrix} \text{ equiv. } \begin{matrix} (-1,1,1) \\ (3,0,1) \end{matrix} \text{ equiv. } \begin{matrix} (-4,1,0) \\ (3,0,1) \end{matrix}$$

Ons resultaat is dus het stelsel $\begin{matrix} -4x + y \\ 3x + z. \end{matrix}$

Opmerking. Een andere formulering van de vraag is: zoek een eenvoudige basis van de deelruimte, opgespannen door L_1, L_2, L_3.

Vb.2

Geef een eenvoudig stelsel vormen dat equivalent is met

$L_1 \equiv x + 2y + 3z$, $L_2 \equiv 2x + 7y$, $L_3 \equiv x + 2y - z$.

$$\begin{matrix} (1,2,3) \\ (2,7,0) \\ (1,2,-1) \end{matrix} \sim \begin{matrix} (4,8,0) \\ (2,7,0) \\ (1,2,-1) \end{matrix} \sim \begin{matrix} (0,-6,0) \\ (2,7,0) \\ (1,2,-1) \end{matrix} \sim \begin{matrix} (0,1,0) \\ (2,0,0) \\ (1,0,-1) \end{matrix} \sim \begin{matrix} (0,1,0) \\ (1,0,0) \\ (0,0,1) \end{matrix}$$

Dus het antwoord is: $M_1 \equiv y$, $M_2 \equiv x$, $M_3 \equiv z$.

Vb.3

Idem bij $\begin{matrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 \end{matrix}$

$$\begin{matrix} (2,1,3,1) \\ (1,2,-1,0) \\ (2,-4,9,2) \end{matrix} \sim \begin{matrix} (2,1,3,1) \\ (1,2,-1,0) \\ (-2,-6,3,0) \end{matrix} \sim \begin{matrix} (5,7,0,1) \\ (1,2,-1,0) \\ (1,0,0,0) \end{matrix} \sim \begin{matrix} (0,7,0,1) \\ (0,2,-1,0) \\ (1,0,0,0) \end{matrix}$$

Dus het antwoord is $\begin{matrix} 7x_2 + x_4 \\ -2x_2 + x_3 \\ x_1 \end{matrix}$

§.6 Homogene vergelijkingen

Beschouw k lineaire vergelijkingen met n onbekenden

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_n x_n = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_n x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_n x_n = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Wij merken het volgende op:

1) De linkerleden zijn elementen van de vectorruimte der lineaire vormen in n variabelen. Wij zullen de linkerleden aanduiden door rijtjes $(a_1, \dots, a_n)$ en noemen: de rijvectoren.

2) De oplossingen $(x_1, \dots, x_n)$ zijn vectoren van de vectorruimte R_n. De oplossingen vormen een deelruimte van R_n, want als $(x_1, \dots, x_n)$ en $(y_1, \dots, y_n)$ oplossing zijn, dan zijn ook $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ en $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ oplossing. De deelruimte gevormd door de oplossingen heet de oplossingsruimte.

3) Daar twee equivalente stelsels van lineaire vergelijkingen dezelfde oplossing bezitten, zullen wij een stelsel van lineaire vergelijkingen oplossen door het te vervangen door een eenvoudiger stelsel, waarvan de oplossingen direct duidelijk zijn.

Vb.1 $\left.\begin{array}{r} -x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 5x + y + 3z = 0 \end{array}\right\}$ is volgens §.5, vb.1 equivalent met $\left.\begin{array}{r} -4x + y \quad = 0 \\ 3x \quad + z = 0 \end{array}\right\}$

Stel $x = \lambda$, dan is $y = 4\lambda$ en $z = -3\lambda$. De oplossingsruimte is dus $\underline{x} = \lambda(1,4,-3)$.

Vb.2 $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 7y \quad = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{array}\right\}$ is volgens paragraaf 5, vb.2 equivalent met $y = 0$; $x = 0$; $z = 0$.

De oplossingsruimte is dus $\underline{x} = (0,0,0)$.

Vb.3 $\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \quad = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 0 \end{array}\right\}$ is volgens §.5, vb.3 equivalent met $\left.\begin{array}{r} 7x_2 \quad + x_4 = 0 \\ -2x_2 + x_3 \quad = 0 \\ x_1 \quad = 0 \end{array}\right\}$

Stel $x_2 = \lambda$, dan is $x_1 = 0$, $x_3 = 2\lambda$, $x_4 = -7\lambda$.

De oplossingsruimte is dus $\underline{x} = \lambda(0,1,2,-7)$.

Vb.4
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{matrix}(2,1,3,1)\\(1,2,-1,0)\\(1,-4,9,2)\end{matrix} \sim \begin{matrix}(2,1,3,1)\\(1,2,-1,0)\\(-3,-6,3,0)\end{matrix} \sim \begin{matrix}(2,1,3,1)\\(1,2,-1,0)\end{matrix} \sim \begin{matrix}(0,-3,5,1)\\(1,2,-1,0)\end{matrix}$$

Dus het stelsel is equivalent met
$$\left.\begin{aligned} -3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Stel $x_2 = \lambda$ en $x_3 = \mu$, dan $x_4 = 3\lambda - 5\mu$, $x_1 = -2\lambda + \mu$,
dus de oplossingsruimte is $\underline{x} = \lambda(-2,1,0,3) + \mu(1,0,1,-5)$.

Stelling Voor k homogene lineaire vergelijkingen met n onbekenden geldt : dim.(ruimte opgespannen door rijvectoren) + dim. oplossingsruimte = n.

Bewijs.

Door vegen (en, indien nodig, omnummeren van de x-en) is (1) te herleiden tot een stelsel van de vorm

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad & + \alpha_{j+1} x_{j+1} + \dots + \alpha_n x_n = 0 \\ x_2 \qquad & + \beta_{j+1} x_{j+1} + \dots + \beta_n x_n = 0 \\ \ddots \qquad & \vdots \; \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_j & + \delta_{j+1} x_{j+1} + \dots + \delta_n x_n = 0 \end{aligned}$$

Daar wij n-j der x-en willekeurig kunnen aannemen, heeft de oplossingsruimte dimensie n-j. De deelruimte opgespannen door de rijvectoren heeft dimensie j.

Voorbeeld. (Dimensieanalyse)

Bij een probleem spelen de volgende physische grootheden een rol : de snelheid v, de lengte l, de kracht k, de dichtheid ρ, de viscositeit μ.

Bewijs dat de coëfficient van Newton $N = \dfrac{k}{\rho v^2 l^2}$ en het getal van Reynolds $R = \dfrac{vl\rho}{\mu}$ een compleet stel van dimensieloze grootheden vormen.

Bewijs

De in het probleem optredende grootheden hebben t.o.v. de massa M, de lengte L, de tijd T de dimensies (in physische zin), die in het volgende schema zijn vermeld :

	v	l	k	ρ	μ
M	0	0	1	1	1
L	1	1	1	-3	-1
T	-1	0	-2	0	-1

De grootheid $v^{x_1} l^{x_2} k^{x_3} \rho^{x_4} \mu^{x_5}$ is een dimensieloze grootheid, als

$$\left.\begin{array}{rcl} x_3 + x_4 + x_5 &=& 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 &=& 0 \\ -x_1 - 2x_3 - x_5 &=& 0 \end{array}\right\}$$

Dit homogene stelsel heeft als oplossingsruimte

$$\underline{x} = \alpha(-2,-2,1,-1,0) + \beta(-1,-1,0,-1,1).$$

De grootheden $v^{-2}l^{-2}k\rho^{-1}$ en $\mu v^{-1} l^{-1}\rho^{-1}$ zijn dus dimensieloos, en alle andere dimensieloze grootheden zijn er combinaties van.

§.7 Inhomogene vergelijkingen

Beschouw k lineaire vergelijkingen met n onbekenden, waarvan de rechterleden niet alle 0 zijn, dus

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{array}\right\}$$

Kort geschreven $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i$; $i = 1, \dots, k$.

Het stelsel van homogene vergelijkingen, dat wordt verkregen door alle rechterleden door 0 te vervangen, is

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = 0.$$

Stelling Als $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ één oplossing van het inhomogene stelsel (1), en als $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \dots$ alle oplossingen van het homogene stelsel (2) voorstellen, dan stelt $\underline{\xi} + \lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \dots$ alle oplossingen van het inhomogene stelsel (1) voor.

Bewijs; Als $\underline{\xi}$ en $\underline{\eta}$ aan (1) voldoen, dan voldoet $\underline{\eta} - \underline{\xi}$ aan (2).

Opm. Het is zeer wel mogelijk dat het stelsel (1) geen enkele oplossing bezit. Een criterium hiervoor leren wij in de volgende paragraaf kennen.

Vb.1
$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &=& 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &=& 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 &=& 3 \end{array}\right\}$$

Wij vervangen dit stelsel door een equivalent stelsel door middel van vegen, waarbij wij de rechterleden meenemen.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&-1&1\\ 2&3&-2&3&1\\ 4&7&4&1&3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&-1&1\\ 0&-1&-8&5&-1\\ 0&-1&-8&5&-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&-13&9&-1\\ 0&1&8&-5&1 \end{array}\right)$$

Dus het stelsel is equivalent met

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 13x_3 + 9x_4 = -1 \\ x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 1 \end{array}\right\}$$

Stel $x_3 = \lambda$, $x_4 = \mu$, dan $x_1 = 13\lambda - 9\mu - 1$ en $x_2 = -8\lambda + 5\mu + 1$ dus de oplossingen zijn $\underline{x} = (-1,1,0,0) + \lambda(13,-8,1,0) + \mu(-9,5,0,1)$ hetgeen in R_4 voorstelt een vlak, niet door de oorsprong.

<u>Vb.2</u>

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&-1&1\\ 2&3&-2&3&1\\ 4&7&4&1&2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&-1&1\\ 0&-1&-8&5&-1\\ 0&-1&-8&5&-2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&-1&1\\ 0&-1&-8&5&-1\\ 0&0&0&0&-1 \end{array}\right)$$

Het stelsel is dus equivalent met een stelsel, waarvan de laatste vergelijking luidt: $0 = -1$. Het stelsel bezit dus géén oplossingen.

<u>Vb.3</u>

$$\left.\begin{array}{r} y + 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + y + z = 3 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0&1&2&1\\ 1&2&3&2\\ 3&1&1&3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0&1&2&1\\ 1&2&3&2\\ 0&-5&-8&-3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0&1&2&1\\ 1&0&-1&0\\ 0&0&2&2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0&1&0&-1\\ 1&0&0&1\\ 0&0&1&1 \end{array}\right)$$

dus de oplossing is $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$.

§.8 Matrices

Een matrix is een rechthoek van getallen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Men kan deze matrix op twee manieren opvatten:

1) Als m rijvectoren, die een deelruimte van R_n opspannen.
   Zij de dimensie van deze deelruimte = r.
2) Als n kolomvectoren, die een deelruimte van R_m opspannen.
   Zij de dimensie van deze deelruimte = k.

Stelling r = k.

Bewijs Beschouw het stelsel van homogene lineaire vergelijkingen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = 0 \;;\; i = 1, \ldots, m.$$

Volgens §.7 is de dimensie van de oplossingsruimte = n - r.
Schrijf nu de vergelijkingen als volgt op:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mk} \end{pmatrix} x_k + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wij weten, dat het maximum aantal onafhankelijke kolomvectoren k is. Stel dat de eerste k kolomvectoren onafhankelijk zijn en dat de overige kolomvectoren lineaire combinaties van de eerste k zijn. Dan zijn er al dadelijk n-k oplossingen in te zien, namelijk de coëfficienten, waarmee de overige kolomvectoren in de eerste k zijn uit te drukken. Dus de dimensie van de oplossingsruimte is $\geqslant$ n-k. Wij concluderen dat n-r $\geqslant$ n-k, dus k $\geqslant$ r. Met een analoge redenering voor de vergelijkingen,

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, x_j = 0 \;;\; i = 1, \ldots, n$$

bewijzen wij, dat ook r $\geqslant$ k. Dus r = k.

Def. De rang van een matrix is het maximum aantal onafhankelijke rijvectoren (kolomvectoren).

Voorbeeld.

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Wij beschouwen zowel een inhomogeen stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden, als het bijbehorende homogene stelsel.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \quad \text{en} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = 0 \;;\; i = 1, \ldots, m.$$

De matrices van deze stelsels zijn

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Duidelijk is dat rang B $\geqslant$ rang A.

<u>Stelling</u> Het stelsel

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \;;\; i = 1, \ldots, m$$

is oplosbaar dan en slechts dan als rang B = rang A.

<u>Bewijs</u> Noteer de kolomvectoren van B door $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b}$.
Het stelsel kan dan geschreven worden in de vorm

$$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \ldots + \underline{a}_n x_n = \underline{b}.$$

Er is dus een oplossing dan en slechts dan als $\underline{b}$ te schrijven als lin.comb. van de vectoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$.

§.9 Determinanten

$\boxed{R_2}$ Vraag: Druk de oppervlakte van het parallelogram, opgespannen door de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$, uit in de kentallen van deze vectoren.

Voer in

$$D(\underline{a},\underline{b}) = \begin{cases} + \text{ opp.parall.} & \text{als richting van } \underline{a} \text{ naar } \underline{b} \text{ is } \circlearrowleft \\ - \text{ opp.parall.} & \text{als richting van } \underline{a} \text{ naar } \underline{b} \text{ is } \circlearrowright \end{cases}$$

Eigenschappen:

1) $D(\lambda\underline{a},\underline{b}) = \lambda D(\underline{a},\underline{b})$
2) $D(\underline{a},\underline{b}) = -D(\underline{b},\underline{a})$
3) $D(\underline{a},\underline{b}+\underline{c}) = D(\underline{a},\underline{b}) + D(\underline{a},\underline{c})$
4) $D(\underline{a},\underline{b}) \neq 0$ als $\underline{a}$, $\underline{b}$ onafhankelijk.

Uit deze eigenschappen volgt dat $D(\underline{a},\underline{b}) = 0$ als $\underline{a}$, $\underline{b}$ afhankelijk.

Neem een basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ met

$$\underline{a} = a_1\,\underline{e}_1 + a_2\,\underline{e}_2 \,,\quad \underline{b} = b_1\,\underline{e}_1 + b_2\,\underline{e}_2 \,.$$

Uit de eigenschappen volgt

$$D(\underline{a},\underline{b}) = D(a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2,\, b_1\underline{e}_1 + b_2\underline{e}_2) =$$
$$= a_1 b_2 D(\underline{e}_1, \underline{e}_2) + a_2 b_1 D(\underline{e}_2\, \underline{e}_1) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, D(\underline{e}_1, \underline{e}_2).$$

$D(\underline{a}, \underline{b})$ heet een <u>2 × 2 determinant</u>. Ten opzichte van de basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ noteren wij hem met

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Zijn waarde is, als wij de grondmaat $D(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = 1$ nemen,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

Bij een andere basis, die ook grondmaat 1 heeft, krijgen wij hetzelfde getal als waarde.

$\boxed{R_3}$ Vraag: Druk inhoud parallelepipedum, opgespannen door $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, uit in de kentallen van deze vectoren.

Voer in

$$D(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = \begin{cases} + \text{ inhoud pedum} & \text{als orientatie = die van xyz} \\ - \text{ inhoud pedum} & \text{als orientatie = die van xzy} \end{cases}$$

Eigenschappen

1) $D(\lambda\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = \lambda D(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$
2) $D(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = -D(\underline{b},\underline{a},\underline{c}) = -D(\underline{c},\underline{b},\underline{a})$
3) $D(\underline{a},\underline{b},\underline{c}+\underline{d}) = D(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) + D(\underline{a},\underline{b},\underline{d})$
4) $D(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) \neq 0$ als $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ onafhankelijk.

Uit deze eigenschappen volgt dat $D(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = 0$ als $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ afhankelijk.

Neem basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ en zij t.o.v. deze basis

$\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$; $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$; $\underline{c} = (c_1,c_2,c_3)$.

Dan
$$D(a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2 + a_3\underline{e}_3,\ b_1\underline{e}_1 + b_2\underline{e}_2 + b_3\underline{e}_3,\ c_1\underline{e}_1 + c_2\underline{e}_2 + c_3\underline{e}_3) =$$
$$= (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1)\ D(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$$

$D(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$ heet $\underline{3 \times 3 \text{ determinant}}$. Ten opzichte van de basis $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3$ noteren wij hem met

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Zijn waarde is, bij grondmaat $D(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3) = 1$,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 + \\ - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

Dit is de regel van <u>Sarrus</u>.

<u>Opm.1</u> Merk op, dat dit

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

<u>Opm.2</u> De determinant heeft bij een andere basis dezelfde waarde, als de grondmaat maar 1 is.

<u>Vb.1</u>

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix} \end{array} = -4 - 6 + 3 + 9 + 2 - 4 = 0$$

Dit klopt, want $\underline{a} + 5\underline{b} - 2\underline{c} = 0$.

<u>Vb.2</u>

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a).$$

$\boxed{R_n}$ Teneinde het onbekende begrip inhoud te kunnen definieren zoeken wij een functie $D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ die voldoet aan de volgende axiomas:

1) $D(\lambda \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) = \lambda D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)$
2) $D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_i, \ldots, \underline{a}_j, \ldots, \underline{a}_n) = - D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_j, \ldots, \underline{a}_i, \ldots, \underline{a}_n)$
3) $D(\underline{b}+\underline{c}, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) = D(\underline{b}, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) + D(\underline{c}, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)$
4) $D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) \neq 0$ als $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ onafhankelijk.

Indien zulk een functie bestaat en eenduidig is, noemen wij hem <u>n × n determinant</u> en interpreteren wij hem als georienteerd volumen.
Gevolgen der axiomas:

5) $D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = 0$ als één der vectoren = 0.
6) $D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = 0$ als twee vectoren dezelfde.
7) $D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ blijft gelijk als wij bij één vector een lin.comb. van de overige optellen.
8) $D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = 0$ als $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ afhankelijk.

Neem in R_n een basis $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$. Zij

$$\underline{a}_1 = \sum_1^n a_{1,j(1)}\, \underline{e}_{j(1)}, \ \ldots, \ \underline{a}_n = \sum_1^n a_{n,j(n)}\, \underline{e}_{j(n)} .$$

Dan moet de gezochte

$$D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = \sum a_{1,j(1)}\, a_{2,j(2)} \cdots a_{n,j(n)}\, D(\underline{e}_{j(1)}, \ldots, \underline{e}_{j(n)}).$$

Als alle $j(i)$ ongelijk zijn, dan is $D(\underline{e}_{j(1)}, \ldots, \underline{e}_{j(n)})$ met 2) te maken tot $\pm D(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$. Als $j(i) = j(k)$ dan is de bijbehorende term 0.
Dus

$$D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = \lambda D(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n).$$

Wanneer wij nu nemen $D(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n) = 1$,
dan is de gezochte functie gedefinieerd. Men kan bewijzen dat hij voldoet aan de axiomas. De n × n determinant $D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$, genoteerd op de basis $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$, heeft dus de waarde

$$(*) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm\, a_{1,j(1)}\, a_{2,j(2)} \cdots a_{n,j(n)} .$$

De termen zijn positief als $(j(1), j(2), \ldots, j(n))$ in $(1,2,\ldots,n)$ is om te zetten door een even aantal verwisselingen, en negatief als deze omzetting door een oneven aantal verwisselingen geschiedt.

<u>Opm.1</u> De determinant heeft op alle bases dezelfde waarde, als de grondmaat der bases maar 1 is.

<u>Opm.2</u> Uit (*) volgt
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{1n} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Opm.3</u> Volgens (*) is een determinant te beschouwen als een getal D(A) dat toegevoegd is aan een vierkante matrix A.

<u>Vb.1</u>
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 30 - 6 = -35.$$

Anders, met eigenschap 7 (vegen),
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -35 \end{vmatrix} = -35.$$

<u>Vb.2</u> met eigenschap 7).
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

<u>Opm.</u> Eig.7 mag wegens opm.2) horizontaal en verticaal worden toegepast.

<u>Def.</u> De determinant van de matrix, die men krijgt door in
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{ij} & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$
de i^e rij en j^e kolom weg te laten, heet de bij a_{ij} behorende onderdeterminant en wordt genoteerd D_{ij}.

Stelling

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} D_{11} - a_{12} D_{12} + a_{13} D_{13} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n} D_{1n} .$$

Bewijs: Reken maar uit. Vergelijk opmerking 1 in R_3.

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4-1) - 2(-2-2) - 3(-1-1) = -5 + 8 + 6 = 9.$$

Anders, door eerst te vegen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 6 + 1 - 8) = 9.$$

§.10 Gebruik van determinanten bij matrices en vergelijkingen

A. Laat een matrix m rijen en n kolommen hebben. Door uit de matrix $m-p$ rijen en $n-p$ kolommen weg te laten, onstaat een vierkante matrix van p rijen en p kolommen.
De determinant van zo'n matrix heet een $p \times p$ onderdeterminant.

Stelling Als een matrix de rang r heeft, dan
1° zijn alle $p \times p$ onderdeterminanten met $p > r$ nul,
2° is er tenminste één $r \times r$ onderdeterminant ongelijk nul.

Bewijs Als $p > r$, dan is elk stel van p rijvectoren afhankelijk, dus ook de p rijvectoren van een $p \times p$ onderdeterminant zijn afhankelijk. Hieruit volgt 1°. Daar de rang r is, kunnen wij in de matrix een stel van r onafhankelijke rijvectoren vinden. Door vegen ziet men dat er een $r \times r$ determinant ongelijk aan nul is.

Opm. Uit het ongerijmde bewijst men het omgekeerde van deze stelling.

B. Beschouw n vergelijkingen met n onbekenden

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_2 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n \end{array}\right\}$$

of, geschreven met kolomvectoren,

(1) $\quad \underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_n x_n = \underline{b}$.

Uit de stelling van §.8 volgt, dat er een oplossing is als de coëfficiëntendeterminant

$$D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) \neq 0.$$

Op grond van (1) geldt

$$D(\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_n x_n, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n) = D(\underline{b}, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n).$$

Met eigenschappen van determinanten is dus

$$x_1 D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = D(\underline{b}, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n).$$

Dus

$$x_1 = \frac{D(\underline{b}, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n)}{D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n)}$$

Evenzo

$$x_i = \frac{D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{b}, \dots, \underline{a}_n)}{D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n)}$$

Dit is de <u>regel van Cramer</u>.

<u>Voorbeeld 1</u>.
$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 10 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -11 \end{array}\right\}$$

Men vindt

$D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3) = -5$; $D(\underline{b}, \underline{a}_2, \underline{a}_3) = -10$; $D(\underline{a}_1, \underline{b}, \underline{a}_3) = -15$;
$D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{b}) = 5$. Dus $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.

<u>Voorbeeld 2</u>.

$$\left.\begin{array}{l} G_{11} e_1 + G_{12} e_2 = j_1 \\ G_{21} e_1 + G_{22} e_2 = j_2 \end{array}\right\}$$ Wij lossen e_1 en e_2 op als functie van j_1 en j_2:

$$e_1 = \frac{\begin{vmatrix} j_1 & G_{12} \\ j_2 & G_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}} = \frac{j_1 G_{12} - j_2 G_{22}}{G_{11} G_{22} - G_{12} G_{21}} .$$

$$e_2 = \frac{\begin{vmatrix} G_{11} & j_1 \\ G_{21} & j_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-j_1 G_{21} + j_2 G_{11}}{G_{11} G_{22} - G_{12} G_{21}} .$$

C. Beschouw n homogene vergelijkingen met n onbekenden

(2) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = 0 \; ; \; i = 1, \ldots, n.$$

Uit de stelling van §.6 volgt dat de dimensie van de oplossingsruimte > 0 is als de rang van de matrix der coëfficienten $< n$ is.
Anders gezegd:
Stelling Het stelsel (2) heeft een van de nuloplossing verschillende oplossing, als de determinant der coëfficienten nul is.

Voorbeeld 1.

Het stelsel
$$2x_1 + ax_2 = 0$$
$$3x_1 + 5x_2 = 0$$
Heeft een oplossing $\neq (0,0)$ als $\begin{vmatrix} 2 & a \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$, dus als $a = 10/3$.

Voorbeeld 2.

Als in R_2 de drie rechten

(1)
$$p_1x + q_1y + r_1 = 0$$
$$p_2x + q_2y + r_2 = 0$$
$$p_3x + q_3y + r_3 = 0$$

een punt $x = a$, $y = b$ gemeen hebben, dan betekent dit dat de vergelijkingen

(2)
$$p_1x + q_1y + r_1t = 0$$
$$p_2x + q_2y + r_2t = 0$$
$$p_3x + q_3y + r_3t = 0$$

een oplossing $(x,y,t) = (a,b,1)$ hebben.
Dus moet dan

(3) $$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Is omgekeerd van de drie rechten (1) gegeven dat (3) geldt, dan hebben de vergelijkingen (2) een oplossingsvector $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Is hiervan $c \neq 0$ dan mogen we wel onderstellen dat $c = 1$ (immers voor elke λ is ook $\lambda(a,b,c)$ een oplossingsvector). Dit betekent dan dat de rechten het punt $x = a$, $y = b$ gemeen hebben.

Is echter $c = 0$ dan voldoet $(x,y) = (a,b) \neq (0,0)$ aan het stelsel vergelijkingen
$$\begin{cases} p_1x + q_1y = 0 \\ p_2x + q_2y = 0 \\ p_3x + q_3y = 0 \end{cases}$$

dus
$$\text{rang} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Dit betekent dat de rechten evenwijdig zijn en als ze verschillen hebben ze dan geen punt gemeen.

<u>Voorbeeld 3.</u>

In R_2 is de voorwaarde, dat de 3 punten
$A = (x_1, y_1)$; $B = (x_2, y_2)$; $C = (x_3, y_3)$ op één rechte liggen, de volgende

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Hieruit volgt, dat de vergelijking van de rechte door de punten $A = (x_1, y_1)$ en $B = (x_2, y_2)$ als volgt in determinantvorm kan worden geschreven

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

<u>Voorbeeld 4.</u>

In R_3 is de voorwaarde, dat 4 punten
$A = (x_1, y_1, z_1)$; $B = (x_2, y_2, z_2)$; $C = (x_3, y_3, z_3)$; $D = (x_4, y_4, z_4)$
in één vlak liggen, de volgende

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

HOOFDSTUK VI COMPLEXE GETALLEN

§ 1. Definitie.

De reële getallen hebben als meetkundige voorstelling de punten op de getallenrechte. In de verzameling der reële getallen is de vergelijking $x^2 + 7 = 0$ niet oplosbaar.

Neem een vectorruimte van dimensie 2. Neem als basis twee vectoren, die loodrecht op elkaar staan en lengte = 1 hebben, genaamd $\underline{1}$ en $\underline{i}$. Dan zijn de vectoren van de vectorruimte

$$\underline{a} = a_1\underline{1} + a_2\underline{i}$$

Deze vectoren heten complexe getallen, als zij een product hebben, dat weer een vector is, en dat als volgt is gedefinieerd :

Zij $\underline{a} = a_1\underline{1} + a_2\underline{i}$ en $\underline{b} = b_1\underline{1} + b_2\underline{i}$

Dan $\underline{1} \cdot \underline{1} = \underline{1}$; $\underline{1} \cdot \underline{i} = \underline{i} \cdot \underline{1} = \underline{i}$; $\underline{i} \cdot \underline{i} = -\underline{1}$

en $\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1\underline{1} + a_2\underline{i}).(b_1\underline{1} + b_2\underline{i}) = (a_1b_1 - a_2b_2)\underline{1} + (a_1b_2 + a_2b_1)\underline{i}$

Voorlopig zien wij nog niet, wat het product meetkundig betekent.
Wel zien wij dat, als $a_2 = b_2 = 0$, de productformule luidt :

$$a_1\underline{1} \cdot b_1\underline{1} = a_1b_1\underline{1}$$

Dus blijkt dat deze vermenigvuldiging, als men hem beperkt tot de vectoren op de horizontale rechte, overeenkomt met de vermenigvuldiging der reële getallen,
Maar ook

$$a_1\underline{1} + b_1\underline{1} = (a_1 + b_1)\underline{1}$$

dus ook de optelling van vectoren op de horizontale rechte komt overeen met die der reële getallen.
Een deel der complexe getallen, namelijk die op de horizontale as, vormt dus de getallenrechte met bijbehorende vermenigvuldiging en optelling.

<u>Afspraak</u> : Laat $\underline{1}$ weg en laat de streep onder i weg.
Dan zijn de complexe getallen : a + bi.
De verzameling der complexe getallen a + bi omvat dus de verzameling der reële getallen a.

<u>Vb 1.</u> $(4 + 3i) + (5 - 4i) = 9 - i$

<u>Vb 2.</u> $(2 + 3i)(1 - 2i) = 2 - i - 6.i^2 = 8 - i$

<u>Vb 3.</u> $(2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 + 3^2 = 13$

<u>Vb 4.</u> $\dfrac{4 + i}{2 - 3i} = \dfrac{(4 + i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \dfrac{8 + 14i - 3}{13} = \dfrac{5}{13} + \dfrac{14}{13}i$

<u>Vb 5.</u> $\dfrac{2 + 4i}{1 + i} = \dfrac{2(1 + 2i)(1 - i)}{1 + 1} = 3 + i$

<u>Vb 6.</u> $i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^{4k} = 1$ (k geheel).

Er is ook een getal met $z^2 = i$, nl.

$$\left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1 + 2i - 1}{2} = i.$$

<u>Def</u> Zij $z = a + ib$. Wij definieren van z het <u>reële deel</u> Re z, het <u>imaginaire deel</u> Im z, en de <u>modulus</u> $|z| = r$ als volgt :

$\mathrm{Re}\, z = a$; $\mathrm{Im}\, z = b$; $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Onder het <u>argument</u> $\arg z = \varphi$ verstaan wij de hoek(en) φ waarvoor geldt

$\mathrm{Re}\, z = r \cos \varphi$ en $\mathrm{Im}\, z = r \sin \varphi$.

<u>Opm.</u> Blijkbaar is arg 0 onbepaald. Voor $z \neq 0$ is het argument φ bepaald op een veelvoud van 2π na, dwz. φ argument is dan ook $\varphi + 2k\pi$. Als wij wensen dat elk complex getal, behalve 0, precies één argument heeft, dan maken wij de afspraak $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. Voorlopig hebben wij deze wens niet.

Uit de definities volgt

$$z = a + ib = \mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Een complex getal kan dus op twee manieren worden geschreven:

1) $\boxed{z = a + ib}$ 2) $\boxed{z = z(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$

Bij de eerste schrijfwijze wordt het complexe getal uitgedrukt met behulp van zijn projecties a en b op de assen, bij de tweede schrijfwijze door zijn grootte r en richting φ.

<u>Vb.</u> $z = 2-i$ heeft modulus $r = \sqrt{5}$ en argument $\varphi = -\arctan \frac{1}{2} + 2\kappa\pi$.

<u>Vb.</u> $\arg(-i) = \frac{3}{2}\pi$, $|-i| = 1$; $\arg 2 = 0$, $|2| = 2$.

$\arg(1+i) = \frac{1}{4}\pi$, $|1+i| = \sqrt{2}$; $\arg(-1) = \pi$, $|-1| = 1$.

<u>Stelling</u> | Voor modulus en argument gelden de volgende eigenschappen:

1) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

2) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ en $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

3) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ en $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

<u>Bewijs</u> 1) met de driehoeksongelijkheid.

<u>Bewijs</u> 2) Als $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ en $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, dan

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

<u>Bewijs</u> 3) analoog aan bewijs 2).

<u>Gevolg</u> Het is nu mogelijk om het getal $z_1 z_2$ te construeren als z_1 en z_2 zijn gegeven, immers

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \text{ en } \frac{|z_1 z_2|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{1}.$$

<u>Def</u> | Als $z = a + ib$ dan heet $\bar{z} = a - ib$ de <u>geconjugeerde</u> van z.

<u>Stelling</u> | Voor de geconjugeerde $\bar{z}$ van een complex getal z gelden de volgende eigenschappen

1) $z\,\bar{z} = |z|^2$ 2) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$

3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$ 4) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

5) $\bar{\bar{z}} = z$ 6) $z = \bar{z} \Longrightarrow z$ reëel

7) $\arg\bar{z} = -\arg z$ 8) $|\bar{z}| = |z|$.

Een complex getal werd gedefinieerd als een vector uit de oorsprong O. Het eindpunt van deze vector heet het <u>beeldpunt</u> van het complexe getal. Daar grootte en richting deze vector vastleggen, kunnen wij het complexe getal ook voorstellen door een <u>vrije vector</u>, gelijk gericht met en even groot als de van O uitgaande vector. Van vrije vectoren zijn dus slechts grootte en richting van belang.

<u>Stelling</u> | De vrije vector van het beeldpunt van z_1 naar het beeldpunt van z_2 stelt het complexe getal $z_2 - z_1$ voor.

<u>Vb.1</u> Drie vrije vectoren die een driehoek in dezelfde zin doorlopen hebben som nul.

<u>Vb.2</u> De meetkundige plaats der beeldpunten der complexe getallen z, waarvoor $|z| < 3$, is het inwendige van de cirkel (0,3).

<u>Vb.3</u> Wat is de meetkundige plaats der beeldpunten van z, waarvoor $|z + 2i| > 1$?

Dan moet de afstand van z tot -2i zijn > 1. De meetkundige plaats bestaat dus uit alle punten buiten de cirkel met straal 1 en middelpunt -2i.

Vb.4 Idem met $\operatorname{Im} z = -3$.

Vb.5 Idem met $\operatorname{Re} z > 2$.

Vb.6 Idem met $\operatorname{Re} z = |z - 1|$.
Dan moet de afstand van z tot de imaginaire as gelijk zijn aan de afstand van z tot 1. De meetkundige plaats is dus een parabool.

Vb.7 Idem met $|z + 3| = |z - i|$.
Dan moet de afstand van z tot -3 gelijk zijn aan de afstand van z tot i. De meetkundige plaats is dus de middelloodlijn van -3 en i.

Vb.8 Idem met $|z + 5| + |z + 3i| = 8$.
Dan moet de som van de afstanden van z tot -5 en tot -3i gelijk zijn aan 8. De meetkundige plaats is dus de ellips met brandpunten -5 en -3i en lange as 4.

Vb.9 Idem met $\frac{z-3}{z+i}$ is zuiver imaginair.
Dan moet $\arg(z - 3) - \arg(z + i) = \frac{\pi}{2}$ of $-\frac{\pi}{2}$.
De meetkundige plaats is de cirkel met middellijn van 3 tot -i.

§.2 e^z

Zij x een reële variabele. De functie e^x voldoet aan de betrekking

(*) $$f(x + x') = f(x)\, f(x')$$

Voor elke functie f(x), die aan deze betrekking voldoet, geldt

$$f(x) = [f(1)]^x$$

immers $f(2) = f^2(1)$; $f(3) = f(1)\, f(2) = f^3(1)$; ... ; $f(m) = f^m(1)$;

$f(0) = f(1)/f(1) = 1$; $f(-1) = f(0)/f(1) = f^{-1}(1)$;

$f(m/n) = f(1)^{m/n}$ want $f^n(m/n) = f(m) = f^m(1)$; etc.

Als nu f(1) reëel en $\neq 0$, dan is $f(1) = f^2(\frac{1}{2}) > 0$, dus dan bestaat er een reële constante a zodat $f(1) = e^a$. Conclusie:

> De enige functies, die aan (*) voldoen en waarvoor f(1) reëel en $\neq 0$, zijn de functies e^{ax}, a reëel constant.

Nu hebben wij nog een andere functie ontmoet die aan (*) voldoet, nl.

$$f(x) = \cos x + i \sin x.$$

Op grond van het bovenstaande geldt dus

$$\cos x + i \sin x = [\cos 1 + i \sin 1]^x \qquad (1 \text{ rad} = 57°)$$

Er is nu geen reële a waarvoor $e^a = \cos 1 + i \sin 1$. Verrassend is, dat geldt

(1) $$e^i = \cos 1 + i \sin 1,$$

wanneer wij onder e^i verstaan $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{i}{n})^n$, dus de lim. van de rij

$$1 + i;\ (1 + \tfrac{1}{2}i)^2 = \tfrac{3}{4} + i;\ (1 + \tfrac{1}{3}i)^3 = \tfrac{2}{3} + \tfrac{26}{27}i;\ (1 + \tfrac{i}{4})^4 = \tfrac{161}{256} + \tfrac{15}{16}i\ .$$

Schrijven wij nu e^{ix} voor $(e^i)^x$, dan is dus

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$ <u>formule van Euler</u>

<u>Bewijs</u> van (1):

$|1 + \frac{i}{n}|^n$ nadert tot 1 omdat

$$\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right)^n = \sqrt[2n]{(1 + \frac{1}{n^2})^{n^2}} < \sqrt[2n]{e}.$$

$\arg (1 + \frac{i}{n})^n$ nadert tot 1 omdat $\lim\limits_{n\to\infty} n \arctan \frac{1}{n} = 1$.

<u>Def</u> ‖ Als $z = x + iy$ dan $\boxed{e^z = e^x (\cos y + i \sin y)}$

Deze definitie is in overeenstemming met de formule van Euler.

Voor de aldus gedefinieerde e^z geldt weer een vermenigvuldigingsregel als (*), immers

<u>Stelling</u> $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\, e^{z_2}$.

<u>Bewijs</u> Zij $z_1 = x_1 + iy_1$ en $z_2 = x_2 + iy_2$, dan is

$$e^{z_1}\, e^{z_2} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1)\ e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) =$$
$$= e^{x_1+x_2}[\cos (y_1 + y_2) + i \sin (y_1 + y_2)].$$

De definitie heeft zeer belangrijke gevolgen:

1) Als $z = x + iy$, dan $\boxed{|e^z| = e^x}$ en $\boxed{\arg e^z = y}$

2) $\boxed{\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}$ en $\boxed{\sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}$

Bewijs: Uit de formule van Euler:

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ en $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$.

3) <u>De complexe getallen $e^{i\varphi}$ hebben hun beeldpunt op de eenheidscirkel</u> immers dit is het geval voor de getallen $\cos\varphi + i \sin\varphi$.

Zo is $e^{\frac{1}{2}\pi i} = i$; $e^{\pi i} = -1$; $e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$;

$e^{\frac{1}{4}\pi i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ en $e^{2\pi i} = 1 = e^{2k\pi i}$.

4) <u>Elk complex getal $z = x + iy$ is te schrijven als $z = r\, e^{i\varphi}$.</u>
Bit volgt direct uit de schrijfwijze $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ en Euler.

5) <u>Een complex getal vermenigvuldigen met $e^{i\varphi}$ betekent meetkundig: de vector draaien over φ.</u>

Bewijs: Zij $z_o = z_o\, e^{i\varphi_o}$ dan is $z_o\, e^{i\varphi} = r_o\, e^{i(\varphi + \varphi_o)}$.

<u>Vb 1.</u> Druk $\sin^3\varphi$ uit als som van sinussen van φ en veelvouden.
<u>opl.</u>

$$\sin^3\varphi = \left[\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right]^3 = \frac{1}{8i^3}\left[e^{3i\varphi} - 3e^{i\varphi} + 3e^{-i\varphi} - e^{-3i\varphi}\right] =$$

$$= \frac{-1}{4}\left[\frac{e^{3i\varphi} - e^{-3i\varphi}}{2i} - 3\,\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right] = -\frac{1}{4}(\sin 3\varphi - 3\sin\varphi)$$

Vb 2. Druk cos 3φ uit als som van machten van $\cos\varphi$.
opl.

$$\cos 3\varphi = \mathrm{Re}(e^{3i\varphi}) = \mathrm{Re}\left[(e^{i\varphi})^3\right] = \mathrm{Re}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 =$$

$$= \mathrm{Re}\left[\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi + 3i^2\cos\varphi\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi\right] =$$

$$= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

Vb 3. Wij zagen dat het beeldpunt van $z = e^{i\alpha}$, als α loopt van 0 tot 2π, in het complexe vlak de eenheidscirkel doorloopt. Welke baan beschrijft nu het beeldpunt van

$$z = e^{(p + iq)\alpha}$$

als α loopt van 0 tot ∞, en p en q reëel en vast zijn.

opl.
Daar $z = e^{p\alpha} . e^{iq\alpha}$ is $|z| = r = e^{p\alpha}$ en $\arg z = \varphi = q\alpha$

dus (elimineer α) $r = e^{p\varphi/q}$, de vergelijking in poolcoordinaten van een spiraal.

Vb 4. Wanneer z de eenheidscirkel doorloopt, welke baan beschrijft dan

$$w = \frac{1}{1 + z}$$

opl.
Wij kunnen stellen $z = e^{i\varphi}$ met $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Dan

$$w = \frac{1}{1 + e^{i\varphi}} = \frac{1}{1 + \cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{1 + \cos\varphi - i\sin\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{1 + \cos\varphi - i\sin\varphi}{2(1 + \cos\varphi)} = \frac{1}{2} - \frac{i\sin\varphi}{2(1 + \cos\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \tan\frac{1}{2}\varphi$$

Dus $\mathrm{Re}\, w = \frac{1}{2}$ en $\mathrm{Im}\, w = -\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}\varphi$

Dus als φ : 0 , $\frac{1}{2}\pi$, π , $\frac{3}{2}\pi$, 2π

dan is w : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $\frac{1}{2} - i\infty / \frac{1}{2} + i\infty$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $\frac{1}{2}$.

Vb 5. Bewijs dat, als z op de eenheidscirkel ligt,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0$$

opl.(Algebr.)

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{e^{i\varphi}+1}{e^{i\varphi}-1} = \frac{e^{\frac{1}{2}i\varphi} + e^{-\frac{1}{2}i\varphi}}{e^{\frac{1}{2}i\varphi} - e^{-\frac{1}{2}i\varphi}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}i\varphi} + e^{-\frac{1}{2}i\varphi}}{2} \cdot \frac{2i}{e^{\frac{1}{2}i\varphi} - e^{-\frac{1}{2}i\varphi}} \cdot \frac{1}{i} = -\, i \cot \frac{1}{2}\varphi .$$

opl.(Meetk.)

$$\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \arg(z+1) - \arg(z-1) = \pm\frac{\pi}{2} .$$

§ 3. Vergelijkingen

Wij bespreken vergelijkingen van de vorm

$$P(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n = 0 \quad (a_i, z \text{ complex})$$

Hoofdstelling van de algebra
De vergelijking $P(z) = 0$ van graad $n \geqslant 1$ heeft tenminste één wortel z_1.

De hoofdstelling wordt later bij de functietheorie (leer der functies van een complexe variabele) bewezen.

Opm. De hoofdstelling geldt niet voor de reële getallen, b.v.
$x^2 + 1 = 0$ heeft geen reële wortel.

De reststelling geldt ook voor polynomen $P(z)$, dus :

Als $P(z) = 0$ wortel z_1 heeft, dan is $P(z)$ deelbaar door $z - z_1$.

Deel, dan $P(z) = (z - z_1)Q(z)$; $Q(z)$ graad $n - 1$.

Maar volgens de hoofdstelling heeft ook $Q(z) = 0$ een wortel, dus $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)R(z)$. Zo voortgaande en goed tellende vinden wij :

Stelling Elke vergelijking $P(z) = 0$ van graad n heeft precies n wortels.

Stelling Als $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n = 0$ reële coefficienten a_i heeft, en als $z_0 = p + iq$ een wortel is, dan is ook $\bar{z}_0 = p - iq$ een wortel.

Bewijs

Vul in, dan is $a_0(p + iq)^n + a_1(p + iq)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(p + iq) + a_n = 0$.
Neem de toegevoegde complexe waarde links en rechts, dwz. vervang overal i door -i. Daar de a_k reëel zijn, staat er dan

$$a_0(p - iq)^n + a_1(p - iq)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(p - iq) + a_n = 0$$

dus p - iq is een wortel.

Voorbeeld $z^3 + 2z^2 + 2z + a = 0$.
Gegeven is, dat a reëel is en dat de vgl. een zuiver imaginaire wortel heeft. Gevraagd a en de wortels.

Op grond van de stelling ziet men dat de wortels moeten zijn van de gedaante $z = ip, -ip, q$ met p, q reëel.
De vergelijking moet dus luiden $(z^2 + p^2)(z - q) = 0$. Dus

$$z^3 - qz^2 + p^2 z - p^2 q = 0$$

moet identiek zijn met $z^3 + 2z^2 + 2z + a = 0$.
Hieruit volgt $q = -2$, $p^2 = 2$, $a = 4$. De wortels zijn dus -2, $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$.

Binomiaalvergelijking $z^n = c$ (n natuurlijk, c complex)

Methode:

Schrijf $c = r\,e^{i\varphi}$, dan staat er $z^n = r\,e^{i\varphi} = r\,e^{i\varphi + 2k\pi i}$.

Modulus: $|z^n| = |z|^n = r$ dus $|z| = \sqrt[n]{r}$.

Argument: $\arg z^n = n \arg z = \varphi + 2k\pi$ dus $\arg z = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$.

De oplossingen van de binomiaalvergelijking zijn dus

$$z = \sqrt[n]{r}\; e^{\frac{i(\varphi+2k\pi)}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{uitgeschreven}$$

$$\sqrt[n]{r}\; e^{\frac{i\varphi}{n}},\quad \sqrt[n]{r}\; e^{\frac{i(\varphi+2\pi)}{n}},\quad \sqrt[n]{r}\; e^{\frac{i(\varphi+4\pi)}{n}},\quad \dots,\quad \sqrt[n]{r}\; e^{\frac{i(\varphi+2(n-1)\pi)}{n}}$$

In het complexe vlak vormen deze wortels een regelmatige n-hoek, waarvan $\sqrt[n]{r}$ de straal van de omcirkel is.

Vb.1 Los op de vergelijking $z^4 = 2\sqrt{2}(1 + i)$

Opl. $z^4 = 4e^{\frac{\pi i}{4} + 2k\pi i}$ dus $|z| = \sqrt{2}$ en $4 \arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, dus

$\arg z = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$, met $k = 0, 1, 2, 3$.

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{16} i},\quad z_2 = \sqrt{2}\, e^{\frac{9}{16}\pi i},\quad z_3 = \sqrt{2}\, e^{\frac{17}{16}\pi i},\quad z_4 = \sqrt{2}\, e^{\frac{25}{16}\pi i}.$$

Vb 2. $(z + 2i)^3 = i$, dus $(z + 2i)^3 = e^{\frac{\pi i}{2}}$

dus $|z + 2i| = 1$ en $3 \arg (z + 2i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\arg (z + 2i) = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$. De wortels zijn dus $z + 2i = e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)i}$

$$z_1 = -2i + e^{\frac{\pi}{6}i} = -2i + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$$

$$z_2 = -2i + e^{\frac{5}{6}\pi i} = -2i - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$$

$$z_3 = -2i + e^{\frac{3}{2}\pi i} = -2i - i = -3i.$$

Vb 3. $z^2 - 6zi - 15 - 8i = 0$. Kwadraat afsplitsen geeft

$(z - 3i)^2 = 6 + 8i = 10\, e^{i \arctan 4/3 + 2k\pi i}$, dus de wortels zijn

$$z = 3i + \sqrt{10}\, e^{\frac{1}{2} i \arctan 4/3 + k\pi i} = 3i \pm \sqrt{10}\, e^{\frac{1}{2} i \arctan 4/3} =$$

$$= 3i \pm \sqrt{10}\,[\cos (\tfrac{1}{2} \arctan \tfrac{4}{3}) + i \sin (\tfrac{1}{2} \arctan \tfrac{4}{3})] =$$

$$= 3i \pm \sqrt{10}\left[\frac{2}{\sqrt{5}} + i\,\frac{1}{\sqrt{5}}\right] = 3i \pm (2 + i)\sqrt{2}.$$

Vb 4. $z^2 = -6 + 8i = 10\, e^{i(\pi - \arctan 4/3) + 2k\pi i}$, dus

$$z = \pm i\sqrt{10}\, e^{-\frac{1}{2} i \arctan 4/3} = \pm i\sqrt{10}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{i}{\sqrt{5}}\right) = \pm \sqrt{2}\,(2i + 1).$$

§ 4. Complexe functies van een reële variabele.

Opm. Een complexe functie van een complexe variabele z is een voorschrift, volgens hetwelk aan elke geoorloofde complexe z een complexe functiewaarde wordt toegevoegd.
Zo zijn $w = e^z$, $w = \frac{1}{1 + z}$, $w = \log z$, $w = \arctan z$, wat de twee laatste functies ook mogen betekenen, complexe functies van de complexe **variabele** z.
De zeer belangrijke theorie van deze functies wordt in semester 5 behandeld. **Nu** beperken wij ons tot

Def. Een complexe functie van een reële variabele x is een voorschrift volgens hetwelk aan elke geoorloofde reële x een complex getal wordt toegevoegd.

Vb. $f(x) \equiv (ix + 1)^3 = 1 - 3x^2 + i(3x - x^3)$

Algemeen kunnen wij schrijven $f(x) = u(x) + iv(x)$ met $u(x)$ en $v(x)$ reële functies.

Def. Een rij complexe getallen $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ heet convergent naar de limiet C, als bij elke $\varepsilon > 0$ een reëel getal N te vinden is, zodat voor $n > N$ geldt $|C - c_n| < \varepsilon$.

Vb $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} e^{in} = 0$, want $|0 - \frac{1}{n} e^{in}| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ als $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Vb $\lim\limits_{n \to \infty} e^{in}$ bestaat niet.

Stelling De rij $c_n = a_n + ib_n$ is convergent dan en slechts dan als de rij a_n en de rij b_n convergeren. In geval van convergentie geldt
$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + i \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Bewijs Zij $\lim a_n = A$ en $\lim b_n = B$, dan is

$$|A + iB - c_n| = |A - a_n + i(B - b_n)| <$$

$$< |A - a_n| + |B - b_n| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Omgekeerd, zij $|C - c_n| < \varepsilon$ en zij $C = A + iB$. Dan is

$$|A - a_n + i(B - b_n)| < \varepsilon$$

$$(A - a_n)^2 + (B - b_n)^2 < \varepsilon^2$$

dus $|A - a_n| < \varepsilon$ en $|B - b_n| < \varepsilon$
waaruit volgt dat de rijen a_n en b_n convergeren.

Voorbeeld $\frac{1}{n} e^{in} = \frac{1}{n} (\cos n + i \sin n)$.

Daar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ is $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} e^{in} = 0$.

Def. Bij de complexe functie $f(x)$ van een reële variabele x zeggen wij dat

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

als bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden is zodat voor alle geoorloofde x met $0 < |x-a| < \delta$ geldt dat $|f(x) - L| < \varepsilon$.

<u>Stelling</u> Zij $f(x) = u(x) + iv(x)$ en $L = M + iN$, met $u(x)$, $v(x)$, M, N reëel. Dan geldt dat
$\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan en slechts dan als
$\lim_{x \to a} u(x) = M$ en $\lim_{x \to a} v(x) = N$.

Het bewijs van deze stelling is analoog aan dat van de vorige stelling.

Blijkbaar kan men de limiet van een complexe functie van een reële variabele berekenen via de limieten van het reële en het imaginaire deel. Hetzelfde geldt voor de afgeleide en de integraal van een complexe functie van een reële variabele. Voor $f(x) = u(x) + iv(x)$, met $u(x)$ en $v(x)$ reëel, geldt dus :

1) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} u(x) + i \lim_{x \to a} v(x)$

2) $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$

3) $\int f(x)dx = \int u(x)dx + i \int v(x)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx$

<u>Voorbeeld</u>

$$\frac{d}{dx}(e^{ix}) = \frac{d}{dx}(\cos x + i \sin x) = - \sin x + i \cos x =$$
$$= i(\cos x + i \sin x) = i\, e^{ix}$$

Algemener geldt voor een complexe constante α

<u>Stelling</u> $\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}) = \alpha e^{\alpha x}$ en $\int e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C.$

<u>Bewijs</u>. Zij $\alpha = p + iq$, dan

$$\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}) = \frac{d}{dx} e^{(p+iq)x} = \frac{d}{dx} \left[e^{px}(\cos qx + i \sin q x)\right] =$$

$$= \frac{d}{dx} e^{px} \cos qx + i \frac{d}{dx}(e^{px} \sin qx) =$$

$$= pe^{px}(\cos qx + i \sin qx) + iqe^{px} (i \sin qx + \cos qx) =$$

$$= (p + iq)\, e^{(p+iq)x} = \alpha e^{\alpha x}.$$

<u>Voorbeeld</u>

$$\int e^{x} \cos x\, dx = \int e^{x} \operatorname{Re} e^{ix}\, dx = \operatorname{Re}\int e^{x} e^{ix}\, dx =$$

$$= \operatorname{Re}\int e^{(1+i)x}dx = \operatorname{Re} \frac{1}{1+i} e^{(1+i)x} + C =$$

$$= \frac{1}{2} e^x \operatorname{Re}(1 - i)e^{ix} + C = \frac{1}{2} e^x \operatorname{Re}(1 - i)(\cos x + i \sin x) + C =$$

$$= \frac{1}{2} e^x(\cos x + \sin x) + C.$$

<u>Def.</u> Een complexe vectorruimte is een verzameling dingen, genaamd vectoren, waarin is gedefinieerd een som $\underline{x} + \underline{y}$ en een scalair product $\lambda \underline{x}$ (λ complex) zodat de bekende rekenregels gelden.

Wij hebben steeds met reële getallen gewerkt, maar de gehele theorie geldt ook wanneer wij complexe getallen gebruiken.

<u>Vb</u> De lineaire vormen in 3 variabelen met complexe coëfficienten $az_1 + bz_2 + cz_3$ vormen een vectorruimte over de complexe getallen.

<u>Vb</u> De complexe functies $f(t)$ van de reële variabele t, dus $u(t) + iv(t)$ vormen een vectorruimte omdat $f(t) + g(t)$ en $(3 + 2i)f(t)$ weer complexe functies zijn.

§ 5. <u>Lineaire differentiaalvergelijkingen</u>.

Een differentiaalvergelijking

$$F[x,y,y',y'',y''',\ldots,y^{(n)}] = 0$$

is een vraag naar de functies $y = y(x)$ die, gesubstitueerd, de betrekking tot een identiteit in x maken. Het getal n heet de <u>orde</u> der D.V.

<u>Voorbeeld</u>. $y''' = x$

Wij zien, dat $y = \frac{1}{24} x^4$ voldoet, maar ook

$$y = \frac{1}{24} x^4 + \lambda x^2 + \mu x + \nu.$$

Er zijn dus ∞^3 veel oplossingen, dwz. er zijn 3 willekeurig te kiezen constanten.

<u>Def.</u> Een <u>lineaire differentiaalvergelijking</u> van de orde n is een D.V. van de soort

$$y^{(n)} + P(x)y^{(n-1)} + \ldots + Q(x)y'' + R(x)y' + S(x)y = T(x).$$

Als $T(x) \equiv 0$, dan heet de D.V. <u>homogeen</u>

Als $T(x) \not\equiv 0$, dan heet de D.V. <u>inhomogeen</u>.

<u>Vb</u> $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ De vergelijking van Bessel.

De oplossingen heten Besselfuncties en zijn van groot belang voor de techniek. In hogere semesters worden zij uitvoerig besproken.

Vb $y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0$, de vergelijking van van der Pol (1927), is een niet-lineaire differentiaalvgl.

Stelling | De oplossingen van een lineaire homogene differentiaalvergelijking van orde n vormen een vectorruimte.

Bewijs
Laat $y = f(x)$ en $y = g(x)$ oplossing zijn, dan is dus

$$f^{(n)}(x) + P(x)\, f^{(n-1)}(x) + \ldots + R(x)\, f'(x) + S(x)\, f(x) = 0$$
$$g^{(n)}(x) + P(x)\, g^{(n-1)}(x) + \ldots + R(x)\, g'(x) + S(x)\, g(x) = 0$$

Als λ en μ constanten zijn, dan volgt hieruit dat

$$[\lambda f(x) + \mu g(x)]^{(n)} + P(x)[\lambda f(x) + \mu g(x)]^{(n-1)} + \ldots + S(x)[\lambda f(x) + \mu g(x)] = 0.$$

Dus de functie $\lambda f(x) + \mu g(x)$ is ook een oplossing. Dit betekent dat de oplossingen een vectorruimte vormen.

Stelling | De dimensie van de in de vorige stelling genoemde vectorruimte is n.

Deze stelling, die uitdrukt dat elke oplossing $f(x)$ van een lineaire homogene differentiaalvergelijking van orde n te schrijven is als lineaire combinatie van n oplossingen:

$$f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x),$$

is geldig als de coëfficiënten $P(x)$, $Q(x)$, ..., $S(x)$ nette functies zijn. Dit wordt voor een speciaal geval in 8.8 bewezen.

Voorbeeld $y'' - 3y' + 2y = 0$.
Wij zien, dat $y = e^x$ en ook dat $y = e^{2x}$ voldoen.
Dus de algemene oplossing is

$$\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$$

Meetkundig gezien vormen de oplossingen een vlak door 0, opgespannen door $\underline{f}_1 \equiv e^x$ en $\underline{f}_2 \equiv e^{2x}$.

Stelling | Als $a(x)$ een oplossing is van de lineaire inhomogene D.V.
$y^{(n)} + P(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + R(x)\, y' + S(x)\, y = T(x)$
en als $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x)$
alle oplossingen van de bijbehorende lineaire homogene D.V.
$y^{(n)} + P(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + R(x)\, y' + S(x) y = 0$
zijn, dan zijn alle oplossingen van de lineaire inhomogene D.V. :
$a(x) + \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x)$

Bewijs Laat $g(x)$ een andere oplossing zijn van de lineaire inhomogene vergelijking, dan

$$g^{(n)}(x) + P(x)g^{(n-1)}(x) + \ldots + S(x)g(x) = T(x) \text{ en}$$

$$a^{(n)}(x) + P(x)a^{(n-1)}(x) + \ldots + S(x)a(x) = T(x).$$

Trek af, dan

$(g(x) - a(x))^{(n)} + P(x)(g(x) - a(x))^{(n-1)} + \ldots + S(x)(g(x) - a(x)) = 0$

dus $g(x) - a(x)$ is oplossing van de homogene D.V.

Maar alle oplossingen van de homogene D.V. zijn bekend, dus

$g(x) - a(x) = \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x)$, of

$g(x) = a(x) + \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x)$.

<u>Voorbeeld</u> $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$

De oplossingen van de bijbehorende homogene D.V. zijn

$$\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$$

Probeer nu een oplossing van de inhomogene vergelijking te vinden, nl. probeer $y = px + q$. Dan $y' = p$ en $y'' = 0$, dus moet

$$-3p + 2(px + q) \equiv 2x + 1$$

Dus $p = 1$ en $q = 2$, en $y = x + 2 + \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$ is de algemene oplossing van de inhomogene D.V.
Meetkundig stellen de oplossingen een niet door 0 gaand vlak $\underline{a} + \lambda_1 \underline{f}_1 + \lambda_2 \underline{f}_2$ voor, waarin $\underline{a} \equiv x + 2$; $\underline{f}_1 \equiv e^x$; $\underline{f}_2 \equiv e^{2x}$.

§ 6. Lineaire homogene D.V. met constante coëfficienten.

Het gaat erom een onafhankelijk stel oplossingen te vinden. Dit is eenvoudig bij orde 1.

$$y' - ay = 0 \qquad \text{met } a \text{ constant.}$$

<u>Opl.</u> e^{ax} voldoet. Dus de oplossing is λe^{ax}

<u>Methode bij orde $n > 1$</u> : $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$

Stel $y = e^{tx}$, t = constant, dan $t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n = 0$.

Dit is een vergelijking van de graad n in t en heet de <u>karakteristieke vergelijking</u>. Laat de wortels zijn $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$, dan zijn

$e^{t_1 x}, e^{t_2 x}, \ldots e^{t_n x}$ oplossingen der D.V.

Als alle wortels verschillend zijn, is dus de algemene oplossing

$$\lambda_1 e^{t_1 x} + \lambda_2 e^{t_2 x} + \ldots + \lambda_n e^{t_n x}$$

<u>Vb 1.</u> $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$ Stel $y = e^{tx}$, dan

$t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0$, dus $t = 1, -2, 3$, waaruit blijkt, dat

e^x, e^{-2x}, e^{3x} oplossingen zijn, dus dat $y = \lambda e^x + \mu e^{-2x} + \nu e^{3x}$ de algemene oplossing is.

<u>Vb 2.</u> $y''' - 8y = 0.$ Stel $y = e^{tx}$, dan
$t^3 - 8 = 0$ of $(t-2)(t^2 + 2t + 4) = 0$ met wortels
$t = 2$, $t = -1 + i\sqrt{3}$, $t = -1 - i\sqrt{3}$. Oplossingen zijn dus
e^{2x}, $e^{-x}\,e^{ix\sqrt{3}}$, $e^{-x}\,e^{-ix\sqrt{3}}$. Maar dan zijn ook
e^{2x}, $\frac{1}{2}\,e^{-x}\,(e^{ix\sqrt{3}} + e^{-ix\sqrt{3}})$, $\frac{1}{2i}\,e^{-x}\,(e^{ix\sqrt{3}} - e^{-ix\sqrt{3}})$

dus e^{2x}, $e^{-x}\cos x\sqrt{3}$, $e^{-x}\sin x\sqrt{3}$ oplossing.

De algemene oplossing is dus $y = \lambda e^{2x} + e^{-x}(\mu\cos x\sqrt{3} + \nu\sin x\sqrt{3})$.

<u>Vb 3.</u> $y'' - 4y' + 4y = 0$ Stel $y = e^{tx}$, dan

$t^2 - 4t + 4 = 0$, dus twee maal $t = 2$.
We vinden slechts één oplossing, nl. e^{2x}. Om de algemene oplossing op te schrijven hebben wij er nog een nodig. Om die te vinden stellen wij
$y = u(x)\,e^{2x}$. Vul in, dan is, daar
$y' = u'e^{2x} + 2ue^{2x}$ en $y'' = u''e^{2x} + 4u'e^{2x} + 4ue^{2x}$

$u'' + 4u' + 4u - 4(u' + 2u) + 4u = 0$ dus $u'' = 0$.
Hieraan voldoet $u = x$, dus
xe^{2x} is een andere oplossing en $\lambda e^{2x} + \mu xe^{2x}$ is de algemene oplossing.

Net als in dit voorbeeld kunnen wij algemeen bewijzen :

<u>Stelling</u> Als van de D.V.
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$
de karakteristieke vergelijking
$$t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n = 0$$
een k-voudige wortel τ heeft, dan zijn behalve $e^{\tau x}$ ook $xe^{\tau x}$, $x^2e^{\tau x}$, ... , $x^{k-1}\,e^{\tau x}$ oplossingen.

<u>Vb 4.</u> $y^{VI} + 3y'''' + 3y'' + y = 0$
De karakteristieke vergelijking is
$t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1 = 0 = (t^2 + 1)^3$

wortels zijn	$t = i$	$t = i$	$t = i$
	$t = -i$	$t = -i$	$t = -i$

Een basis voor de oplossingsruimte is
e^{ix}, e^{-ix}, xe^{ix}, xe^{-ix}, x^2e^{ix}, x^2e^{-ix}

Een andere basis is

$\cos x$, $\sin x$, $x\cos x$, $x\sin x$, $x^2\cos x$, $x^2\sin x$.

Dus de algemene oplossing is

$y = \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 x\cos x + \lambda_4 x\sin x + \lambda_5 x^2\cos x + \lambda_6 x^2 \sin x$

7. Lineaire inhomogene differentiaalvergelijkingen met constante coëfficienten.

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x)$

Wegens paragraaf 5 passen wij de volgende methode toe :

Methode : Los eerst de homogene differentiaalvergelijking op.
Zoek nu één oplossing van de inhomogene vergelijking.
Wij geven hiertoe geen vast systeem, maar wij zullen die éne oplossing vinden door proberen, waarbij wij door het rechterlid zullen worden geleid.

Voorbeeld 1 $\quad y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 3x$

Probeer als oplossing $y = ax + b$ met nader te bepalen a en b.

Dan moet $y' = a$, $y'' = y''' = 0$ dus

$$-5a + b(ax + b) \equiv 3x$$

waaruit $a = \frac{1}{2}$, $b = 5/12$, dus $y = \frac{1}{2}x + 5/12$ voldoet.

De algemene oplossing is dus

$y = \frac{1}{2}x + 5/12 + \lambda_1 e^{x} + \lambda_2 e^{-2x} + \lambda_3 e^{3x}$

Voorbeeld 2 $\quad y''' - 8y = 65 \sin x$. Probeer $y = a\sin x + b\cos x$,

dan $\quad (-a\cos x + b\sin x) - 8(a\sin x + b\cos x) \equiv 65\sin x$

dus $\quad -a - 8b = 0 \quad$ en $\quad b - 8a = 65$.

$b = 1$ en $a = -8$, dus $-8\sin x + \cos x$ is een oplossing.

De algemene oplossing is dus

$y = \lambda e^{2x} + e^{-x}(\mu\cos x\sqrt{3} + \nu\sin x\sqrt{3}) - 8\sin x + \cos x$.

Voorbeeld 3 $\quad y'' + 2y' = 6x^2$

De oplossingen van de homogene vergelijking zijn $\lambda e^{-2x} + \mu$.
De poging om een oplossing van de inhomogene vergelijking van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ te vinden mislukt.

Probeer echter $dx^3 + ex^2 + fx$, dan moet

$6dx + 2e + 2(3dx^2 + 2ex + f) \equiv 6x^2$

dus $d = 1$, $e = -\frac{3}{2}$, $f = \frac{3}{2}$. Dus $\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + x^3$ is een oplossing en

$\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + x^3 + \lambda e^{-2x} + \mu$ is de algemene oplossing.

Voorbeeld 4 $\quad y'' - y = 2e^{2x}$

De oplossingen van de homogene vergelijking zijn $\lambda e^{x} + \mu e^{-x}$

Probeer $y = ae^{2x}$, dan

$4ae^{2x} - ae^{2x} \equiv 2e^{2x}$ dus de algemene oplossing is

$y = \frac{2}{3} e^{2x} + \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$

Voorbeeld 5 $\quad y'' - y = 2e^{x}$

Nu mislukt de poging om een oplossing van de soort ae^{x} te krijgen, omdat die reeds aan de homogene vergelijking voldoet.

Probeer $y = axe^{x}$, dan blijkt $a = 1$, dus

$y = xe^{x} + \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$ is de algemene oplossing.

8. Trillingen

Wij beschouwen de tweede-orde D.V. in $x = x(t)$ met constante coëfficienten h en k, beide niet-negatief,

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = f(t).$$

A Voorbeelden

Voorbeeld 1. Mechanische trilling.
Beschouw een lichaam met massa m, dat een rechtlijnige beweging uitvoert onder werking van

1) een elastische kracht, gericht naar O, die wij evenredig aan de uitwijking x nemen : $-ex$
2) een wrijvingskracht, gericht naar O, die wij evenredig aan de snelheid nemen : $-w\dot{x}$
3) een uitwendige kracht : $f(t)$

Op grond van $k = ma$ volgt $m\ddot{x} = -ex - w\dot{x} + f(t)$.

Voorbeeld 2. Slinger.
Zij θ de hoek van uitwijking en ℓ de lengte van de slinger.
Langs de boog, waarvan de lengte $= \ell\theta$, geldt
ma = comp. zwaartekracht + wrijving + uitwendige kracht.

$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin\theta - w\dot{\theta} + f(t)$.

Als θ klein is, kan men wegens $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ nemen $\sin\theta \approx \theta$, dus dan krijgt men

$$m\ell\ddot{\theta} + w\dot{\theta} + mg\theta = f(t).$$

Voorbeeld 3. Electrisch circuit met capaciteit, smoorspoel, weerstand en uitwendige electromotorische kracht e(t).
Over de weerstand treedt op een spanningsval = Ri.
Over de capaciteit treedt op een

$$\text{spanningsval} = \frac{q}{c} = \frac{1}{c}\int i\,dt.$$

Door de smoorspoel wordt opgewekt een magnetische flux $\Phi = Li$, dus een

$$\text{inwendige e.m.k.} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}.$$

De som der e.m.k. is gelijk aan de som der spanningsvallen, dus
$e(t) - L\frac{di}{dt} = Ri + \frac{1}{c}\int i\,dt$, waaruit

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{c} = \frac{de}{dt}.$$

Dit zijn drie voorbeelden van de D.V.

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = f(t)$$

Als $f(t) \equiv 0$, dan spreken wij van een vrije beweging,
als $f(t) \not\equiv 0$, dan van een gedwongen beweging.
Het getal h heet de dempingscoëfficient.
Voor een vrije ongedempte beweging blijft er staan

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

de gewone harmonische trilling met oplossing

$$x = \lambda \sin kt + \mu \cos kt.$$

B Beginvoorwaarden.

In paragraaf 5 is meegedeeld, doch niet bewezen, dat de D.V.

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = f(t)$$

de algemene oplossing

$$x(t) = \lambda\varphi(t) + \mu\phi(t) + a(t)$$

met twee constanten bezit. Dit voor een ogenblik aanvaardend zien wij dat er precies één oplossing is, die de beginpositie x(o) = a en de beginsnelheid $\dot{x}(o) = b$ heeft.
Dit laatste resultaat zullen wij thans apart bewijzen.
Daarmee wordt het bewijs van de stelling van paragraaf 5 geleverd voor tweede-orde differentiaalvergelijkingen met constante niet-negatieve coëfficiënten.

Stelling Als $\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = f(t)$, met $h \geqslant 0$, oplossingen heeft dan is er precies één oplossing x(t) waarvoor x(o) en $\dot{x}(o)$ voorgeschreven waarden aannemen.

Bewijs Stel u(t) en v(t) zijn beide oplossingen met u(o) = v(o) = a en $\dot{u}(o) = \dot{v}(o) = b$.
Dan is $w(t) \equiv u(t) - v(t)$ oplossing van

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = 0 \text{ en } w(o) = 0 \text{ en } \dot{w}(o) = 0$$

Dus $\ddot{w} + 2h\dot{w} + k^2 w = 0$

$$2\dot{w}\ddot{w} + 4h\dot{w}^2 + 2k^2 w\dot{w} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{w}^2) + 4h\dot{w}^2 + \frac{d}{dt}(k^2 w^2) = 0$$

Integreer tussen 0 en τ, dan volgt

$$\dot{w}^2(\tau) - \dot{w}^2(0) + k^2 w^2(\tau) - k^2 w^2(0) + 4h \int_0^\tau \dot{w}^2 dt =$$

$$= \dot{w}^2(\tau) + k^2 w^2(\tau) + 4h \int_0^\tau \dot{w}^2 dt = 0$$

Maar links is, daar $h \geqslant 0$, niet negatief en rechts = 0, dus moet $w(\tau) = 0$ voor alle τ, dus $w(t) \equiv 0$, dus $u(t) \equiv v(t)$.

C <u>Vrije trillingen</u> $\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = 0$ Stel $x = e^{\alpha t}$

De karakteristieke vergelijking $\alpha^2 + 2h\alpha + k^2 = 0$ heeft complexe wortels als de discriminant

$$h^2 - k^2 < 0$$

Stel $h^2 - k^2 = -p^2$, dan zijn de wortels $-h \pm pi$, dus de oplossing is

$x(t) = e^{-ht}(\lambda \cos pt + \mu \sin pt)$

Zetten wij $\lambda = A \sin \varphi$ en $\mu = A \cos \varphi$, dan

$x(t) = Ae^{-ht} \sin (pt + \varphi)$

waarbij A als beginamplitude en φ als (begin)phase moet worden opgevat.

De karakteristieke vergelijking heeft reële wortels als $h^2 - k^2 > 0$

Stel $h^2 - k^2 = q^2$, dan zijn de wortels $-h \pm q$ (beide negatief) en de oplossing is

$$x(t) = \lambda e^{-(h-q)t} + \mu e^{-(h+q)t}$$

Duidelijk is dat deze oplossing niet periodiek is en dat $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.

De demping is zo groot, dat de elastische kracht geen trillingen meer veroorzaakt.
Wanneer tenslotte de wortels van de karakteristieke vergelijking gelijk zijn, dus wanneer

$h^2 - k^2 = 0$, dan is de oplossing

$x(t) = \lambda e^{-ht} + \mu te^{-ht} = e^{-ht}(\lambda + \mu t)$

Ook hier is geen periodieke beweging. Later zullen wij zien, dat ook hier $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$

D <u>Gedwongen trillingen</u> $\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = A_0 \sin \omega t$

Wij nemen dus een periodieke sinusvormige uitwendige kracht aan met positieve amplitude A_0 en frequentie ω.

Wij hebben één oplossing van deze inhomogene vergelijking nodig.
Probeer $x = a \sin \omega t + b \cos \omega t$, of liever probeer
$x = a \sin (\omega t + \delta)$, waarin

$a > 0$ en $-\frac{\pi}{2} < \delta \leqslant \frac{\pi}{2}$ nader te bepalen zijn.

Dan moet

$$-a\omega^2 \sin(\omega t + \delta) + 2ha\omega \cos(\omega t + \delta) + k^2 a \sin(\omega t + \delta) = A_o \sin \omega t.$$

$$a(k^2 - \omega^2) \sin(\omega t + \delta) + 2ha\omega \cos(\omega t + \delta) = A_o \sin \omega t$$

$$a(k^2 - \omega^2)(\sin \omega t \cos\delta + \cos \omega t \sin \delta) + 2ha\omega(\cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta) =$$
$$= A_o \sin \omega t$$

$$\sin \omega t[a(k^2 - \omega^2) \cos \delta - 2ah\omega \sin \delta - A_o] +$$
$$+ \cos \omega t[a(k^2 - \omega^2) \sin \delta + 2ha\omega \cos \delta] = 0$$

Stel beide coëfficienten nul, dan volgt

$\tan \delta = \dfrac{2h\omega}{\omega^2 - k^2}$ en (neem som van kwadraten)

$$a = \frac{A_o}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}$$

waardoor de éne oplossing van de inhomogene vergelijking is bepaald.
De algemene oplossing luidt, in het geval $h^2 - k^2 < 0$:

$$x(t) = a \sin(\omega t + \delta) + Ae^{-ht} \sin(pt + \varphi)$$

Na verloop van tijd is echter, wegens de e-macht, het tweede stuk klein geworden. De grootste bijdrage wordt geleverd door

$$x(t) = a \sin(\omega t + \delta) \quad \text{met} \quad \begin{cases} \tan \delta = \dfrac{2h\omega}{\omega^2 - k^2} \\ a = \dfrac{A_o}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} \end{cases}$$

Wij hebben dus t.o.v. de uitwendige kracht een phaseverschuiving δ.

De amplitude van de oplossing is maximaal, als

$(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2$ minimaal is, dus als $-2(k^2 - \omega^2) + 4h^2 = 0$

dus als $\omega^2 = k^2 - 2h^2$ Dan $a = \dfrac{A_o}{2h\sqrt{k^2 - h^2}}$

Men spreekt dan van <u>resonantie</u> tussen uitwendige kracht en het trillende systeem. De resonantie wordt catastrofaal, als $h = 0$ (geen demping) en $\omega = k$.

9. Hyperbolische functies.

In analogie met $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ en $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

definieren wij thans de functies

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \; ; \; \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \; ; \; \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

reële functies, gedefinieerd voor elke x.

Wij merken op, dat

$\cosh 0 = 1$; $\sinh 0 = 0$; $\tanh 0 = 0$

$\cosh(-x) = \cosh x$; $\sinh(-x) = -\sinh x$; $\tanh(-x) = -\tanh x$
(even) (oneven) (oneven)

Er gelden verder vele formules, b.v.

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $\qquad e^x = \cosh x + \sinh x$

en somformules die mooier, maar onbelangrijker zijn dan in de goniometrie, b.v.

$$\begin{cases} \cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \end{cases}$$

Voor differentieren geldt

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \; ; \; \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \; ; \; \frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

Wij merken nog op, dat $\cosh x > \sinh x$ voor alle x, dat

$$\lim_{x \to \infty} \tanh x = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{x \to \infty} \tanh x = -1,$$

en kunnen dan de grafiek tekenen.

Opm door $x = a \cosh t$ en $y = b \sinh t$ wordt een parametervoorstelling gegeven van de hyperbool

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Voorbeeld Beschouw een vrij hangende homogene ketting, die zich slechts onder invloed van zijn eigen gewicht bevindt. Welke kromme zal de hangende ketting volgen ?

Oplossing Zij $S(x)$ de spanning in P, en $S(x + h)$ die in Q
dan is

horiz.comp.: $S(x + h)\cos \alpha(x + h) - S(x)\cos \alpha(x) = 0$

vert. comp.: $S(x + h)\sin \alpha(x + h) - S(x)\sin \alpha(x) = \sigma \widehat{PQ}$

waarin σ = gewicht per lengteeenheid van de homogene ketting.

Dus

$$[S(x)\cos \alpha(x)]' = 0 \quad \text{en} \quad [S(x)\sin \alpha(x)]' = \sigma \lim_{h \to 0} \frac{\widehat{PQ}}{h} = \frac{\sigma}{\cos \alpha(x)}$$

Uit de eerste vergelijking volgt $S(x)\cos\alpha(x) = C$, ingevuld

$$\frac{d}{dx}[\,C\tan\alpha(x)] = \frac{\sigma}{\cos\alpha(x)} = \sigma\sqrt{1+\tan^2\alpha(x)}\,.$$

$$\frac{d\tan\alpha(x)}{\sqrt{1+\tan^2\alpha(x)}} = \frac{\sigma}{c}\,dx$$

$$\log\left[\tan\alpha(x) + \sqrt{1+\tan^2\alpha(x)}\right] = \frac{\sigma}{c}x + C'$$

$$\tan\alpha(x) + \sqrt{1+\tan^2\alpha(x)} = C''e^{\frac{\sigma}{c}x}$$ en daar $\alpha(-x) = -\alpha(x)$

$$-\tan\alpha(x) + \sqrt{1+\tan^2\alpha(x)} = C''e^{-\frac{\sigma}{c}x}$$

dus $\tan\alpha(x) = C''\sinh\frac{\sigma}{c}x$

$$\frac{dy}{dx} = C''\sinh\frac{\sigma}{c}x \qquad y = C'''\cosh\frac{\sigma}{c}x + C''''$$

Daarom heet de grafiek van cosh x wel de <u>kettinglijn</u>.