TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE I

Syllabus van het College voor Eerstejaarsstudenten

Najaarssemester 1969

226

Onderafdeling der Wiskunde

Wiskunde I

SYLLABUS VAN HET COLLEGE VOOR EERSTEJAARSSTUDENTEN

NAJAARSSEMESTER 1969

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT. NR. 226
PRIJS f 3,50

ENKELE NOTITIES

bij

WISKUNDE I

Het voor alle afdelingen (de latere 'faculteiten') bestemde 1e jaars wiskundeonderwijs aan de TH/TUE heeft, inhoudelijk, tussen 1956 en ±1980 een belangrijke ontwikkeling doorgemaakt. Aanvankelijk (Wiskunde I 1959/60) is de opzet nog puur 18e eeuws: Aanschouwelijk ambachtelijk geknutsel met grafieken, 'brokjes', 'infinitesimale aangroeïngen', etc. Het is dé manier waarop ingenieurs en natuurkundigen graag tegen wiskunde en, met name analyse, aankijken. Een mooie illustratie hiervan is de introductie van het getal e in § I.5. Het dictaat Wiskunde I (1959/1960) is t/m 1968 min of meer, op wat kleine herverkavelingen na, onveranderd in gebruik geweest.
De variant Wiskunde I (1969) bevat al enkele wat fundamentelere toevoegingen van 19e eeuwse snit, zoals een echte wiskundige definitie van de functie $x \mapsto e^x$.

JdG, Mei 2005.

I N H O U D

L I T E R A T U U R

W.I. Smirnow, Lehrgang der höheren Mathematik, Teil I, Deutscher Verlag der Wissenschaften.

R. Courant, Differential and Integral Calculus, Volume I, Blackie and Son.

HOOFDSTUK I   INLEIDING

§ 1. Getallen

N = verzameling der natuurlijke getallen: 1,2,3,... .
Bewerkingen: optellen en vermenigvuldigen.

a,b in N $\Rightarrow$ a + b in N, ab in N.
Voor "a + b in N" schrijft men ook "$a + b \in N$" (spreek uit: a + b is een element van N).
Verschil a - b is het getal x zodat b + x = a. Dan $2 - 3 \notin N$.

Opdat aftrekken steeds mogelijk is (opdat b + x = a steeds oplosbaar is) voeren wij in de negatieve getallen en het getal 0.

G = verzameling der gehele getallen: pos., neg., 0.
In G is de bewerking delen niet steeds uitvoerbaar: $\frac{2}{3} \notin G$.

Quotiënt $\frac{a}{b}$ is het getal x zodat bx = a.

Opdat delen steeds mogelijk is (opdat bx = a steeds oplosbaar is),behalve delen door 0, voeren wij in gebroken getallen (breuken).

M = verzameling der meetbare (rationale) getallen $\frac{p}{q}$ (p,q geheel, $q \neq 0$).

$a,b \in M \Rightarrow a + b,\ ab,\ a - b \in M$ en $\frac{a}{b} \in M$ voor $b \neq 0$.

Echter: $x^2 - 2 = 0$ is niet oplosbaar in M.
Bewijs: Stel $\frac{p}{q}$ voldoet, p en q geheel, $\frac{p}{q}$ onvereenvoudigbaar. Dan

$p^2 = 2q^2$, p^2 even, p even, p^2 deelbaar door 4, q^2 even, q even, contradictie.

Toch hebben wij getallen als $\sqrt{2}$ en π nodig om de meetkunde te beschrijven. M vult de getallenrechte niet op. Voer in onmeetbare (irrationale) getallen (wortels, π).

R = verzameling der reële getallen: de getallen die corresponderen met de punten op de getallenrechte.

Nog zijn we niet tevreden: $x^2 + 1 = 0$ is niet oplosbaar in R. Daarom wordt later ingevoerd

$\underline{C}$ = verzameling der <u>complexe</u> getallen: a + ib, a en b reëel, i = complexe eenheid.

Wij werken voorlopig met R.

<u>Opmerking 1</u>. <u>Delen door 0 is niet gedefinieerd</u>.

Dit kan niet op zinvolle wijze geschieden, want stel $\frac{3}{0} = c$, dan zou uit de definitie van een quotiënt op pag. I.1 volgen dat $3 = 0 \cdot c = 0$, dus $3 = 0$. Onzin.

<u>Opmerking 2</u>. <u>Ordening</u>.

Uit het beeld op de getallenrechte blijkt:

als $a,b \in R$, dan $a < b$ òf $a = b$ òf $a > b$

m.a.w. R is <u>geordend</u> (de complexe getallen zijn het <u>niet</u>).

$a \leqslant b$ betekent $a < b$ of $a = b$.

<u>Eigenschappen</u>:

$a < b \Rightarrow a + c < b + c$

$a < b,\ c > 0 \Rightarrow ac < bc$

$a < b,\ c < 0 \Rightarrow ac > bc$

$a < b,\ b < c \Rightarrow a < c$.

Uit de 2e en 3e eigenschap volgt $c^2 > 0$ voor $c \neq 0$.

<u>Opmerking 3</u>. <u>Absolute waarde</u> = <u>modulus</u>.

<u>Def</u>

$$|a| \begin{cases} = a & \text{als } a \geqslant 0 \\ = -a & \text{als } a < 0 \end{cases}$$

<u>Vb</u> $|-5| = 5,\ |5| = 5$,

$$|p-q| \begin{cases} = p - q & \text{als } p \geqslant q \\ = q - p & \text{als } p < q \ . \end{cases}$$

Op de getallenrechte stelt $|p - q|$ de afstand van p en q voor.

<u>Eigenschappen</u>:

$|a| \geqslant 0$, $|-a| = |a|$, $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

$$\left.\begin{array}{l} |a+b| \geqslant |a| - |b| \\ |a+b| \geqslant |b| - |a| \end{array}\right\} \Rightarrow |a+b| \geqslant \Big|\, |a| - |b| \,\Big|$$

$$|ab| = |a| \cdot |b| \ , \ |a|^2 = a^2 \ , \ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad \text{als } b \neq 0.$$

$|a| > |b|$ is gelijkwaardig met $a^2 > b^2$.

Opmerking 4. Als $p > 0$, dan is $\sqrt{p}$ het positieve reële getal, waarvan het kwadraat $= p$. Verder is $\sqrt{0} = 0$. Uit deze definitie volgt, dat $\sqrt{x^2} = |x|$.

Opmerking 5. Als a en b getallen zijn, $a < b$, dan kunnen we de verzameling der getallen x beschouwen die aan één der volgende voorwaarden voldoen

I	$a \leqslant x \leqslant b$	V	$a \leqslant x$
II	$a \leqslant x < b$	VI	$a < x$
III	$a < x \leqslant b$	VII	$x \leqslant b$
IV	$a < x < b$	VIII	$x < b$.

Elk van deze verzamelingen heet een interval. In de gevallen I, II, III, IV heet het interval begrensd, in de gevallen V, VI, VII, VIII onbegrensd, in de gevallen IV, VI, VIII open (randpunten behoren niet tot de verzameling) en in de gevallen I, V, VII gesloten (randpunten behoren wel tot de verzameling. Het interval II heet links gesloten, rechts open, analoog heet III links open, rechts gesloten.

Opmerking 6. Wij maken aanstonds gebruik van de symbolen ∞ en $-\infty$ (oneindig en min oneindig). Deze symbolen zijn geen getallen: er kan niet op fatsoenlijke wijze mee worden gerekend. Voor letters, die getallen voorstellen, mag dan ook nooit ∞ of $-\infty$ worden gesubstitueerd, tenzij het tegendeel uitdrukkelijk wordt vermeld.

§ 2. Functiebegrip

A. Constante en variabele grootheden bij de beschrijving van een (fysisch) verschijnsel.

Een constante is een grootheid die gedurende de beschouwing steeds hetzelfde getal voorstelt. Een variabele is een grootheid die verschillende getallen voorstelt.

Vb. 1 Vrije val

x = afgelegde weg en v = snelheid zijn variabelen

g = versnelling en m = massa zijn constanten.

Vb. 2 Segment van een bol

I = inhoud, h = hoogte van het segment zijn variabelen

r = straal van de bol is een constante.

Vb. 3 Aantal millimeter regen dat per dag in 1967 valt.

$\left.\begin{array}{l} a = \text{aantal mm} \\ d = \text{hoeveelste dag in 1967} \end{array}\right\}$ zijn beide variabelen.

B. Een functie van de variabele x is een voorschrift, volgens hetwelk

a) x bepaalde waarden mag aannemen

b) aan elk van deze waarden een getal wordt toegevoegd.

De verzameling van waarden die x volgens voorschrift mag aannemen (voorts geoorloofde waarden genoemd) heet definitieverzameling van de functie; men zegt ook dat de functie op deze verzameling gedefinieerd is.

Wanneer de toegevoegde waarde door de variabele y wordt aangeduid, dan heet y een functie van x; notatie $y = f(x)$.

Vb. 1 $v = f(x)$, namelijk $v = \sqrt{2gx}$.

Vb. 2 $I = f(h)$, namelijk $I = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.

Vb. 3 $a = f(d)$, namelijk een tabel.

Opm. 1 Uit Vb. 3 blijkt dat een functie niet hetzelfde is als een formule.

Opm. 2 x in Vb. 1, h in Vb. 2, d in Vb. 3 heten onafhankelijke variabelen, v in Vb. 1, I in Vb. 2, a in Vb. 3 heten afhankelijke variabelen.

Opm. 3 De definitieverzameling van een functie, die door een formule is gegeven, hoeft niet overeen te komen met de verzameling van waarden, voor welke de formule zinvol is. De formule $I = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ kan ook gebruikt worden om voor alle $h \in R$ een functie te definiëren.

Opm. 4 Als in $I = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ zowel h als r variabel zijn, dan heet I een functie van twee variabelen.

<u>Opm. 5</u> Aan het voorschrift dat een functie vastlegt kan een betekenis worden toegekend los van de betekenis van de erin voorkomende variabelen. Het voorschrift $y = x^2$ heeft betekenis zonder dat men behoeft te weten, wat door de letters x en y wordt voorgesteld: het is het voorschrift, dat aan ieder getal zijn kwadraat toevoegt. Deze opvatting van het functiebegrip stelt het voorschrift primair; de "variabelen" zijn dan slechts symbolen: of men $y = x^2$ of $v = u^2$ schrijft is onverschillig. In toepassingen der wiskunde zijn de variabelen primair; de functie legt er een verband tussen. In de notatie komt dit verschil van aanpak ook tot uitdrukking; begint men met variabelen x en y, dan spreekt men over de functie $y = f(x)$, stelt men de functie voorop, dan noemt men deze f. Wij doen hier geen keuze tussen beide opvattingen, maar gebruiken ze door elkaar.

C. <u>De grafiek van een functie $y = f(x)$</u> is de verzameling van de punten in het vlak, waarvan de coördinaten (x,y) voldoen aan het voorschrift van de functie.

<u>Vb. 1</u> $y = \sqrt{x}$. Geoorloofd: $x \geqslant 0$.
Merk op dat de y-as in O aan de grafiek raakt omdat $\tan\varphi = \frac{y}{x} = 1/\sqrt{x}$ willekeurig groot is als x dicht genoeg bij 0.

<u>Vb. 2</u> $y = \log x$. Geoorloofd: $x > 0$.

<u>Vb. 3</u> $y = 2^x$. Geoorloofd: alle $x \in R$.

<u>Vb. 4</u> $y = \sqrt{1 - x^2}$. Geoorloofd: $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
Elk punt op de grafiek voldoet aan $y^2 = 1 - x^2$, dus aan $x^2 + y^2 = 1$, een cirkel. De grafiek is slechts een halve cirkel daar $y \geqslant 0$.

<u>Vb. 5</u> $y = |x - 4|$. Geoorloofd: alle x.
Voor $x \geqslant 4$ staat er $y = x - 4$.
Voor $x < 4$ staat er $y = 4 - x$.

<u>Vb. 6</u> $\left.\begin{array}{l} 0 < x \leqslant 1 : f(x) = \frac{1}{x} \\ 1 < x \leqslant 2 : f(x) = 0 \end{array}\right\}$

<u>Vb. 7</u> y = grootste natuurlijke getal $\leqslant x$. Geoorloofd: $x \geqslant 1$.

<u>Vb. 8</u> $\left.\begin{array}{l} f(x) = 1 \text{ als } x \text{ meetbaar} \\ f(x) = 0 \text{ als } x \text{ onmeetbaar} \end{array}\right\}$

<u>Afspraak</u>: Als in het vervolg een functie door een formule gegeven is en als de definitieverzameling niet uitdrukkelijk vermeld is, zijn alle waar-

den geoorloofd voor welke de formule zinvol is.

D. Even en oneven functies

$f(x)$ heet even functie, als de definitieverzameling symmetrisch is t.o.v. 0 en als voor alle geoorloofde x geldt: $f(x) = f(-x)$.

Vb. $x^2 - 3$, x^6, $\cos x$, $\sin x^2$, $x^2 - 2|x| + 3$.

$f(x)$ heet oneven functie, als de definitieverzameling symmetrisch is t.o.v. 0 en als voor alle geoorloofde x geldt: $f(-x) = -f(x)$.

Vb. $\sin x$, $\tan x$, $x^5 - 6x^3 + \frac{1}{x}$.

Opm. Er zijn vele functies die noch even, noch oneven zijn. Voorbeelden zijn Vb. 1, 2, 3, 5, 6, 7 uit C.

E. Monotonie

$f(x)$ heet monotoon stijgend als voor ieder paar geoorloofde getallen x_1 en x_2 geldt, dat

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \; .$$

Vb. 1 $y = \sin x$ is voor $0 < x < 90^0$ monotoon stijgend, ook voor $-90^0 < x < 90^0$, maar niet voor $0 < x < 180^0$.

Vb. 2 $y = x^2$ is voor $x \geqslant 0$ monotoon stijgend.

Vb. 3 $y = 2^x$ is monotoon stijgend.

$f(x)$ heet monotoon dalend als voor ieder paar geoorloofde getallen x_1 en x_2 geldt, dat

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \; .$$

F. Samengestelde functie

$y = \sin x^2$ kan men verkrijgen door eerst $u = x^2$ te nemen en daarna $y = \sin u$: het is de samengestelde functie van de functies $u = x^2$ en $y = \sin u$.

Algemeen: $u = f(x)$ en $y = \varphi(u)$ leveren de samengestelde functie $y = \varphi(f(x))$.

G. Inverse functies

Een functie $y = f(x)$ voegt aan iedere geoorloofde waarde van x (bijvoorbeeld in het interval $a \leqslant x \leqslant b$) één waarde van y toe.

Laat nu $y = f(x)$ zo zijn, dat bovendien bij elke verkregen y één x hoort, waarvoor geldt $y = f(x)$. De functie f heet dan een-een-duidig. De verzameling van de verkregen y-waarden is dan te beschouwen als de definitieverzameling van een functie $x = g(y)$.

Voorbeeld: $y = x^2$ voor $0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b$, dan is het interval $a^2 \leqslant y \leqslant b^2$ geoorloofd voor y.

Het voorschrift, dat x als functie van y levert is te krijgen door uit $y = f(x)$ de x op te lossen: $x = g(y)$.
De functies f en g zijn verschillende functies, omdat zij verschillende voorschriften voorstellen, nl.

f: bij x de y te verkrijgen,

g: bij y de x te verkrijgen.

Functies f en g, die zo bijeenhoren, heten <u>inverse functies</u>. Wil men de grafieken van beide functies tekenen en schrijft men $y = f(x)$ en $x = g(y)$, dan zijn de grafieken van beide functies dezelfde, echter met dien verstande, dat bij f de x-as de as der onafhankelijke variabele en de y-as die der afhankelijke variabele voorstelt en bij g juist omgekeerd. Men is vaak gewend om bij de grafiek van een functie de as der onafhankelijke variabele horizontaal en die der afhankelijke variabele verticaal te tekenen. Doet men dit bij $x = g(y)$, dan tekent men de y-as horizontaal en de x-as verticaal. Noemt men tenslotte bij g de variabelen anders en schrijft men $y = g(x)$ dan kan men de grafieken van beide functies $y = f(x)$ en $y = g(x)$ weer in één figuur tekenen. De grafieken ontstaan dan uit elkaar door spiegelen in de lijn $y = x$.

De samengestelde functie van $u = f(x)$ en $y = g(u)$ is $y = x$ (<u>identieke functie</u>) als f en g elkaars inversen zijn. Analoog met verwisseling van f en g.

<u>Vb. 1</u> $y = x^2$.

Beperken wij ons tot $x \geqslant 0$, dan hoort ook bij elke $y \geqslant 0$ precies één x, namelijk $x = \sqrt{y}$.
Teneinde beide functies op hetzelfde coördinatenstelsel te tekenen: verwissel x en y, dan $y = \sqrt{x}$ op $x \geqslant 0$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \text{ op } x \geqslant 0 \\ y = \sqrt{x} \text{ op } x \geqslant 0 \end{array}\right\} \text{ zijn inverse functies.}$$

<u>Vb. 2</u> $y = x^3$.

Voor alle x geldt: bij elke y hoort één x.
Los x op: $x = \sqrt[3]{y}$.

Op hetzelfde coördinatenstelsel getekend (verwissel x en y):

$$y = \sqrt[3]{x} \qquad \text{voor alle } x.$$

De functies $y = x^3$ en $y = \sqrt[3]{x}$ zijn inverse functies.

Vb. 3 $y = 2^x$.

Voor alle x geldt: bij elke $y > 0$ hoort één x.

Los x op: $x = {}^2\log y$.

Op hetzelfde coördinatenstelsel getekend (verwissel x en y):

$$y = {}^2\log x \qquad \text{op } x > 0.$$

$y = 2^x$ en $y = {}^2\log x$ zijn inverse functies.

H. Veeltermen. Reststelling

$y = 3x^9 + x^7 - 1$ en $y = 2x + x^2 - 1$ zijn veeltermen of polynomen.

Algemeen:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n .$$

Dan is $f(0) = a_0$. Hieruit volgt:

1. Als $f(x)$ een veelterm is, dan is er een veelterm $\varphi(x)$, zodat $f(x) = f(0) + x\varphi(x)$.

Verder geldt:

2. Als $f(x)$ en $g(x)$ veeltermen zijn, dan is $f(g(x))$ weer een veelterm. (Voorbeeld: als a een constante is en $g(x) = x + a$, dan is $f(x + a)$ weer een veelterm.)

3. (Reststelling) Als $f(x)$ een veelterm is en a een constante, dan is er een veelterm $\psi(x)$, zodat

$$f(x) = f(a) + (x - a)\psi(x) .$$

Bewijs. 2. is evident. Om 3. te bewijzen stellen we $g(x) = f(x + a)$, dan is $g(x)$ een veelterm en $g(0) = f(a)$. Pas hierop 1. toe:

$$g(x) = g(0) + x\varphi_1(x).$$

Vervang x door $x - a$:

$$f(x) = g(x-a) = g(0) + (x-a)\varphi_1(x-a) = f(a) + (x-a)\psi(x) .$$

Gevolg. Als $f(x)$ een veelterm is en $f(a) = 0$, dan is $f(x)$ deelbaar door $x - a$.

I. Goniometrische functies

Wij meten hoeken in radialen.

Eén radiaal is de middelpuntshoek die zo groot is dat de lengte van de bijbehorende cirkelboog gelijk is aan de straal van de cirkel, dus

hoek	booglengte
1 radiaal	r
2π rad.	$2\pi r$

dus $360^0 = 2\pi$ rad., $180^0 = \pi$ rad., $60^0 = \frac{\pi}{3}$ rad.; $45^0 = \frac{\pi}{4}$ rad..
Voorts is 1 rad. $= 360^0/2\pi \approx 57^0$.

De grafieken van

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x, \quad y = \cot x$$

worden bekend verondersteld. De volgende ongelijkheden zijn meetkundig in te zien en vinden hun interpretatie in de grafieken:

1) voor $x > 0$ geldt $\sin x < x$, voor alle x geldt $|\sin x| \leq |x|$.
2) voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$ geldt $\tan x > x$.
3) voor alle x geldt $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1$; wegens 1) geldt namelijk $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \leq 2\,\frac{x^2}{4}$.

J. Cyclometrische functies

Cyclometrische functies zijn de inversen van goniometrische functies.

1) $y = \sin x$ is monotoon op $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, en heeft daar de eigenschap dat bij elke y tussen -1 en 1 één x hoort.
Op $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ (niet op alle x!) kunnen wij dus spreken van de inverse functie van $y = \sin x$. Verwissel x en y (spiegel t.o.v. $y = x$) dan krijgt men de grafiek van y = inverse van $\sin x$. Noem deze functie $y = \arcsin x$.
Geoorloofde waarden: $-1 \leq x \leq 1$. Functiewaarden: $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$.

2) $y = \cos x$ is monotoon op $0 \leq x \leq \pi$ en heeft daar de eigenschap, dat bij elke y tussen -1 en 1 één x hoort.
Op $0 \leq x \leq \pi$ kunnen we dus spreken van de inverse van $y = \cos x$. Verwissel x en y (spiegel t.o.v. $x = y$), dan krijgt men de grafiek van y = inverse van $\cos x$.
Noem deze functie $y = \arccos x$.
Geoorloofde waarden: $-1 \leq x \leq 1$. Functiewaarden: $0 \leq \arccos x \leq \pi$.

3) $y = \tan x$ is monotoon op $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Daar hoort bij elke y één x, en bestaat de inverse.

Verwissel x en y, dan krijgt men de grafiek van y = inverse van tan x.

Noem deze functie $\underline{y = \arctan x}$.

Geoorloofd: alle x. Functiewaarden: $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$.

Vb. 1 $\arcsin \frac{1}{2} = ?$ Stel $\arcsin \frac{1}{2} = p$, dan $\sin p = \frac{1}{2}$ en $-\frac{\pi}{2} \leqslant p \leqslant \frac{\pi}{2}$, dus $p = \frac{\pi}{6}$ (niet $p = \frac{5\pi}{6}$!).

Vb. 2 $\arccos(-\frac{1}{2}) = ?$ Stel $\arccos(-\frac{1}{2}) = p$, dan $\cos p = -\frac{1}{2}$ en $0 \leqslant p \leqslant \pi$, dus $p = \frac{2\pi}{3}$ (niet $-\frac{2\pi}{3}$).

Vb. 3 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Bewijs: Stel $\arcsin x = p$ en $\arccos x = q$, dan is

$x = \sin p$ en $-\frac{\pi}{2} \leqslant p \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$x = \cos q$ en $0 \leqslant q \leqslant \pi$ of anders geschreven

$x = \sin(\frac{\pi}{2} - q)$ en $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - q \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Hieruit volgt $p = \frac{\pi}{2} - q$.

Vb. 4 $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = ?$

Stel $\arctan \frac{1}{2} = p$ en $\arctan \frac{1}{3} = q$, dan

$\tan p = \frac{1}{2}$ en $\tan q = \frac{1}{3}$ en $0 < p < \frac{\pi}{2}$, $0 < q < \frac{\pi}{2}$.

Gevraagd wordt p + q. Nu is

$$\tan(p + q) = \frac{\tan p + \tan q}{1 - \tan p \tan q} = 1 .$$

Omdat $0 < p + q < \pi$ volgt $p + q = \frac{\pi}{4}$.

Vb. 5 $\tan(\arctan x) = x$, maar

$\arctan(\tan x)$ hoeft niet $= x$ (neem bijv. $x = \pi$, dan is $\arctan(\tan \pi) = \arctan 0 = 0 \neq \pi$).

§ 3. Limieten

A. Voorbeelden van rijen:

Vb. 1 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$.

Vb. 2 $1, 1, 1, 1, \ldots$.

Vb. 3 1, -1, 1, -1,... .

Vb. 4 $1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},\dots$.

Men kan de elementen van een rij nummeren met de getallen 1, 2, 3, 4,... . Noemt men het element op de n^e plaats a_n, dan wordt de rij:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots .$$

Om de rij vast te leggen moet men voor iedere plaats in de rij zeggen wat er staat. Deze plaats is aangegeven met een nummer: aan ieder natuurlijk getal n moet een getal a_n zijn toegevoegd. Dit leidt tot de volgende formele definitie:

Een rij is een functie, die gedefinieerd is op de verzameling der natuurlijke getallen.

Men schrijft de onafhankelijke variabele bij een rij gewoonlijk als index; dus niet $f(n)$, maar f_n of a_n.

In bovenstaande vier voorbeelden is resp. $a_n = \frac{1}{n}$,

$$a_n = 1,\ a_n = (-1)^{n+1},\ a_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} .$$

Als wij de rij van Vb. 4 op de getallenrechte voorstellen, dan zien wij dat a_n het midden is van het lijnstuk a_{n-1} tot 2.
Voldoende ver gaande in de rij komen wij willekeurig dicht bij 2. Wil men b.v. dat

$$2 - a_n < \frac{1}{1000} ,$$

dan moet men n groot genoeg nemen, nl.

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{1000}\text{, hetgeen zo is als } 2^{n-1} > 1000\text{, hetgeen zo is als } n > 10.$$

Bij elke $\varepsilon > 0$ bestaat dus een getal N zodat voor alle $n > N$ geldt:
$2 - a_n < \varepsilon$ (er geldt namelijk $2 - a_n = \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ als $2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon}$, en aan deze voorwaarde is voldaan als $n - 1 \geqslant N$ en $2^N > \frac{1}{\varepsilon}$ is).

Men zegt dat hier $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Op soortgelijke wijze komen wij bij de rij in Vb. 1 willekeurig dicht bij 0 en zeggen daarom, dat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, of ook $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Hetzelfde geldt voor de rij $1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0 .$$

B. In plaats van de functie $f(n) = \frac{1}{n}$ uitsluitend voor natuurlijke getallen n te beschouwen, kunnen wij ook $f(x) = \frac{1}{x}$ voor reële $x \neq 0$ nemen. Deze heeft de eigenschap, dat $f(x)$ willekeurig dicht bij 0 komt, als x groot genoeg is. Zo is

$$0 < \frac{1}{x} < \varepsilon \qquad \text{als } x > \frac{1}{\varepsilon} .$$

Men zegt nu ook $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

C. Alvorens een formele definitie te geven, beschouwen we nog een ander geval. Hierboven gingen wij het gedrag na van een rij a_n voor grote n en van een functie $f(x)$ voor grote x. We kunnen ook kijken naar het gedrag van een functie voor x in de buurt van een getal a.
Als voorbeeld nemen we $f(x) = \frac{1}{x}$ in de buurt van $x = 1$. Als x in de buurt van 1 ligt, dan ook $\frac{1}{x}$. Om dit te preciseren vragen we, voor welke waarden van x geldt

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| < \varepsilon \ ?$$

Dit is zo als

$$-\varepsilon < \frac{1}{x} - 1 < \varepsilon ,$$

$$1 - \varepsilon < \frac{1}{x} < 1 + \varepsilon .$$

Als $\varepsilon < 1$, dan

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < x < \frac{1}{1-\varepsilon} .$$

Dit is een open interval, dat het getal 1 bevat.
Als $\varepsilon \geqslant 1$, dan is

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < x$$

voldoende om te bewerkstelligen, dat

$$\left|1 - \frac{1}{x}\right| < \varepsilon .$$

Ook hier vinden we voor x een open interval, dat het getal 1 bevat. We noemen een dergelijk interval een omgeving van 1.

Definitie Als a een getal is, dan heet ieder open interval dat a bevat, een omgeving van a.

Ieder interval van de vorm $R < x$ heet een omgeving van ∞.

Ieder interval van de vorm $x < R$ heet een omgeving van $-\infty$.

Voorbeelden van omgevingen van het getal 3:

$-10 < x$; $-1 < x < 1000$; $2 < x < 3\frac{1}{3}$; $2{,}9995 < x < 3{,}03$; $2{,}96 < x < 3{,}04$.

Het laatste interval bestaat uit de getallen x, waarvoor $|x-3| < 0{,}04$.

Wij zullen zeggen dat $f(x)$ voor $x \to \alpha$ tot een limiet L nadert als

1) elke omgeving van α nog geoorloofde waarden $x \neq \alpha$ bevat (α heet dan verdichtingspunt van de definitieverzameling van f), en
2) men bij elke omgeving van L een omgeving van α kan kiezen zodat de waarden van f in alle geoorloofde punten uit deze omgeving van α, in de omgeving van L liggen.

Definitie $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$ betekent, dat in elke omgeving van α geoorloofde $x \neq \alpha$ liggen en dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een omgeving van α bestaat, zodat voor alle geoorloofde $x \neq \alpha$ in de omgeving geldt

$$|f(x) - L| < \varepsilon .$$

(Hierin mag α een getal, ∞ of $-\infty$ zijn.)

In deze definitie stelt x een getallenvariabele voor; als dus $\alpha = \infty$ of $-\infty$, is de voorwaarde, dat $x \neq \alpha$ is, overbodig. Ook als α een getal is, behoeft α geen geoorloofde waarde van x te zijn en als α dat wel is, behoeft $f(\alpha)$ niet $= L$ te zijn.

Voor het geval dat $\alpha = \infty$ levert bovenstaande definitie het volgende:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ betekent, dat in elke omgeving van ∞ geoorloofde x liggen en dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een getal R bestaat, zodat voor alle geoorloofde $x > R$ geldt

$$|f(x) - L| < \varepsilon .$$

Analoog voor $\alpha = -\infty$. Een speciaal geval van $\alpha = \infty$ is het limietbegrip voor rijen:

$\lim_{n \to \infty} a_n = a$ betekent, dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een getal N bestaat, zodat voor alle natuurlijke getallen $n > N$ geldt

$$|a_n - a| < \varepsilon .$$

Vb. 1 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, want om $\frac{1}{n} < \varepsilon$ te krijgen kan $n > \frac{1}{\varepsilon}$ genomen worden.

Vb. 2 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, want om $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ te krijgen neme men $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Vb. 3 $\lim_{n \to \infty} 1 = 1$, want om $|1 - 1| < \varepsilon$ te krijgen neme men $n \geq 1$.

Vb. 4 $\lim_{n \to \infty} \sqrt{n}$ bestaat niet. Evenmin $\lim_{n \to \infty} (-1)^n$ en $\lim_{x \to 0} \sqrt{-x^2}$.

Vb. 5 $\lim_{n \to \infty} (\frac{1}{3})^n = 0$, want om $(\frac{1}{3})^n < \varepsilon$ te krijgen moet $3^n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Hiertoe neme men $n > \dfrac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 3}$, want uit $n > \dfrac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 3}$ volgt $(\frac{1}{3})^n < \varepsilon$.

Vb. 6 $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, want om $\frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$ te krijgen neme men $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Vb. 7 $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$, want om $\left|\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right| < \varepsilon$ te krijgen neme men $x < -\frac{1}{\varepsilon^3}$.

Vb. 8 $\lim_{x \to 2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{5}{4}$. We proberen te voldoen aan

$$\left|1 + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{4}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{4 - x^2}{4x^2}\right| < \varepsilon$$

$$|x^2 - 4| < 4\varepsilon x^2 \qquad (x = 0 \text{ is niet geoorloofd!})$$

$$x^2(1 - 4\varepsilon) < 4 < x^2(1 + 4\varepsilon) .$$

Voor $\varepsilon < \frac{1}{4}$ is aan de voorwaarde te voldoen door

$$\frac{2}{\sqrt{1 + 4\varepsilon}} < x < \frac{2}{\sqrt{1 - 4\varepsilon}}$$

te kiezen.

Voor $\varepsilon \geqslant \frac{1}{4}$ is $\frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon}} < x$ voldoende.

In beide gevallen vinden we voor x een interval, dat het getal 2 bevat (een omgeving van 2).

Opm. De uitkomst is in dit voorbeeld eenvoudig te verkrijgen door $x = 2$ te substitueren. Zie "continuïteit" onder G.

D. Standaardlimieten

1) $p > 0$, dan $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^p} = 0$

2) $|g| < 1$, dan $\lim\limits_{n \to \infty} g^n = 0$

3) $a > 0$, dan $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Voor het bewijs gebruiken wij, behalve de definitie van limiet, de eigenschap

$$h > 0, \text{ dan } (1+h)^n = 1 + nh + \ldots + h^n \geqslant 1 + nh > nh \,.$$

Bewijs 1) Opdat $\frac{1}{x^p} < \varepsilon$, neme men $x^p > \frac{1}{\varepsilon}$, dus $x > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p}$.

Er is dus een R, nl. $R = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/p}$, zodat voor alle $x > R$ geldt $\left|\frac{1}{x^p} - 0\right| < \varepsilon$.

Bewijs 2) We willen, door n voldoende groot te nemen, zorgen dat

$|g^n - 0| < \varepsilon$, ofwel $\frac{1}{|g|^n} = \left(1 + \frac{1-|g|}{|g|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$ $(g \neq 0)$. Dit is zo als

$1 + n\frac{1-|g|}{|g|} > \frac{1}{\varepsilon}$, dus als $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{|g|}{1-|g|} = N$. Aldus is - voor elke $\varepsilon > 0$ - een getal N bepaald, zodat voor alle $n > N$ geldt $|g^n - 0| < \varepsilon$. Hoe kleiner ε en hoe dichter $|g|$ bij 1, hoe groter N. (Als $g = 0$, dan is $|g^n| < \varepsilon$ waar voor alle $n \geqslant 1$.)

Bewijs 3) Het voorgaande toont aan, dat we bij elke $\varepsilon > 0$ een getal N kunnen bepalen zodat voor alle $n > N$ geldt $\frac{1}{(1+\varepsilon)^n} < a < (1+\varepsilon)^n$ ofwel

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon \ ,$$

$$-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \ ,$$

dus $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$.

E. Stellingen over limieten

Stelling Stel f en g zijn gedefinieerd in een omgeving van α en

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \ ,$$

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = M \ .$$

Dan geldt

a) $\lim\limits_{x \to \alpha} \{f(x) + g(x)\} = L + M$

b) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)g(x) = LM$

c) $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{M}{L}$ (mits $L \neq 0$)

d) $\lim\limits_{x \to \alpha} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ (mits $f(x) \geqslant 0$) .

Bewijs Op grond van het gegeven geldt:
Bij iedere $\varepsilon_1 > 0$ bestaat er een omgeving U_1 van α, zodat voor alle $x \neq \alpha$ in U_1 geldt

$$|f(x) - L| < \varepsilon_1 \ .$$

Bij iedere $\varepsilon_2 > 0$ bestaat er een omgeving U_2 van α, zodat voor alle $x \neq \alpha$ in U_2 geldt

$$|g(x) - M| < \varepsilon_2 \ .$$

Als x zowel tot de ene als tot de andere omgeving van α behoort, gelden beide ongelijkheden. Hetgeen twee omgevingen U_1 en U_2 van α gemeen hebben (de zg. doorsnede van U_1 en U_2), is echter ook een omgeving van α.

a) Voor alle $x \neq \alpha$ in deze doorsnede geldt

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ .$$

Bij een willekeurige $\varepsilon > 0$ kan nu voor deze waarden van x tot

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

geconcludeerd worden, als $\varepsilon_1 > 0$ en $\varepsilon_2 > 0$ zo gekozen worden dat $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$, bijv. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\varepsilon$.

b) Voor alle $x \neq \alpha$ in de doorsnede van U_1 en U_2 geldt

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |(f(x) - L)(g(x) - M) + (f(x) - L)M + L(g(x) - M)| \leqslant \\ &\leqslant |f(x) - L||g(x) - M| + |f(x) - L||M| + |L||g(x) - M| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot |M| + |L| \cdot \varepsilon_2 \, . \end{aligned}$$

De laatste som is kleiner dan ε als ε_1 en ε_2 zo klein zijn gekozen dat elk der produkten $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_1|M|$ en $\varepsilon_2|L|$ kleiner dan $\frac{\varepsilon}{3}$ is.

c) Bij het bewijs maken wij gebruiken van twee opmerkingen:

1. Uit $|f(x) - L| < \varepsilon_1 < |L|$ volgt $|f(x)| > |L| - \varepsilon_1 > 0$, immers

   $0 < |L| - \varepsilon_1 = |L - f(x) + f(x)| - \varepsilon_1 \leqslant |L - f(x)| + |f(x)| - \varepsilon_1 < |f(x)|$.

2. Het is voldoende om $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$ (mits $L \neq 0$) te bewijzen en dan op $\frac{1}{f(x)}$ en $g(x)$ regel b) toe te passen.

   Van het begin af aan kiezen wij $\varepsilon_1 < |L|$. Voor alle $x \neq \alpha$ in U_1 geldt

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| = \frac{|L - f(x)|}{|f(x)| \cdot |L|} \leqslant \frac{\varepsilon_1}{(|L| - \varepsilon_1) \cdot |L|} \, .$$

   De laatste term is kleiner dan ε als ε_1 kleiner dan $\frac{|L|}{2}$ en $\varepsilon \cdot \frac{|L|^2}{2}$ wordt gekozen.

d) Omdat $f(x) \geqslant 0$, is ook $L \geqslant 0$. We beschouwen eerst $L > 0$. Dan is

$$|\sqrt{f(x)} - \sqrt{L}| = \frac{|f(x) - L|}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{L}} < \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{L}} \quad \text{voor } x \neq \alpha \text{ in } U_1 \text{ (als boven).}$$

Kiest men nu $\varepsilon_1 = \varepsilon\sqrt{L}$, dan is $|\sqrt{f(x)} - \sqrt{L}| < \varepsilon$ voor deze x. Als $L = 0$, dan kiezen we $\varepsilon_1 = \varepsilon^2$; uit $0 \leqslant f(x) < \varepsilon^2$ volgt dan $|\sqrt{f(x)}| < \varepsilon$.

In de volgende voorbeelden leidt eerst een omvorming van de uitdrukking en dan een toepassing van de stelling zowel tot de conclusie dat de limiet bestaat als ook tot zijn berekening.

<u>Vb. 1</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-4n+5}{2n^2-5n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}{2-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}} = \dfrac{0}{2} = 0$.

<u>Vb. 2</u> Worteltruc.

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n-1} - \sqrt{n^2-n+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-2}{\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2-n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{1+1} = 1 .$$

<u>Insluitstelling</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = L \\ \text{In een omgeving } U \text{ van } \alpha \text{ geldt voor } x \neq \alpha \\ \qquad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\alpha} g(x) = L .$$

<u>Bewijs</u> Kies $\varepsilon > 0$.

In een omgeving U_1 van α geldt voor $x \neq \alpha$ $\quad -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$.

In U geldt voor $x \neq \alpha$ $\quad f(x) - L \leqslant g(x) - L$.

In de doorsnede van U en U_1 geldt voor $x \neq \alpha$ $\quad -\varepsilon < g(x) - L$.

Analoog:

In de doorsnede van U en U_2 geldt voor $x \neq \alpha$ $\quad g(x) - L < \varepsilon$,

dus in de doorsnede van U, U_1 en U_2 geldt voor $x \neq \alpha$ $\quad |g(x) - L| < \varepsilon$.

<u>Vb. 3</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$ volgt uit de insluitstelling en $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

<u>Vb. 4</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n + 5^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 6 . \sqrt[n]{1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n} = 6$ volgt uit de insluitstelling en

$$1 < \sqrt[n]{1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n} < \sqrt[n]{1+1} .$$

<u>Vb. 5</u> $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + \frac{\sin x}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$ omdat $\dfrac{1}{x^2} \to 0$ en

$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Opm. $\lim\limits_{x \to -\infty}$ is door substitutie $x = -t$ te herleiden tot $\lim\limits_{t \to \infty}$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{t \to \infty} f(-t)$, want $x < -R$ correspondeert met $R < -x$,

dus met $R < t$, dus de omgeving $x < -R$ van $-\infty$ correspondeert met de omgeving $R < t$ van ∞.

Vb. 6 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + \sin x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{-t - \sin t}{\sqrt{t^2 + 1}} = -1$.

F. Functies die naar oneindig gaan

Def. $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \infty$ betekent dat in elke omgeving van α geoorloofde $x \neq \alpha$ liggen en dat er bij iedere K een omgeving van α bestaat, zodat voor alle geoorloofde $x \neq \alpha$ in die omgeving geldt

$$f(x) > K .$$

Analoog $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.

Vb. 1 $\lim\limits_{n \to \infty} 2^n = \infty$; $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n} = \infty$.

Vb. 2 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} = \infty$.

Vb. 3 $(-1)^n$ heeft geen limiet voor $n \to \infty$, doch gaat ook niet naar oneindig.

Vb. 4 $f(x) = \frac{1}{x}$ voor $x > 0$ geeft $f(x) \to \infty$ voor $x \to 0$. Men schrijft wel:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty .$$

Analoog $\lim\limits_{x \uparrow 0} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

G. Continuïteit

Ruw gesproken zullen wij een functie f in een punt a van haar definitieverzameling continu noemen, als de waarden $f(x)$ voor alle geoorloofde x in een geschikt gekozen omgeving van a dicht bij $f(a)$ komen te liggen.

Def. $f(x)$ is continu voor $x = a$, als a tot de definitieverzameling van f behoort en als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een omgeving van a bestaat, zodat voor alle geoorloofde x in die omgeving geldt

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Let wel, dat de restrictie $x \neq a$ nu niet optreedt, omdat voor $x = a$ automatisch aan de ongelijkheid is voldaan!

Een vergelijking met de definitie van limiet op pag. I.13 levert de

Stelling. Stel elke omgeving van a bevat geoorloofde waarden $x \neq a$ van de functie $f(x)$. De functie $f(x)$ is precies dan continu in a als $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a$

De betrekking $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ betekent daarbij, dat de volgende drie voorwaarden vervuld moeten zijn:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ bestaat (linkerlid is gedefinieerd).

2. a is een geoorloofde waarde (rechterlid is gedefinieerd).

3. Linkerlid = rechterlid.

Vb. 1 $y = \frac{1}{x}$ is niet continu voor $x = 0$, want $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ bestaat niet.

$y = \tan x$ is niet continu voor $x = \frac{\pi}{2}$.

Vb. 2 $\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x < 1 \ : \ f(x) = x \\ 1 \leqslant x \leqslant 2 \ : \ f(x) = 0 \end{array}\right\}$ is niet continu voor $x = 1$,

want $f(1) = 0$ en $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ bestaat niet.

(N.B. Wel geldt $\lim\limits_{x \downarrow 1} f(x) = 0$ en $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x) = 1$)

Def. Een functie, die continu is voor al haar geoorloofde waarden, heet continu.

Vb. 3 $y = x$ is continu.

Te bewijzen is, dat $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Dit is triviaal, want om $|x - a| < \varepsilon$ te krijgen moet men $|x - a| < \varepsilon$ nemen, hetgeen de omgeving $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ van a is.

Vb. 4 $y = x^3$ is continu.

Te bewijzen is, dat $\lim_{x \to a} x^3 = a^3$. Aan $|x^3 - a^3| < \varepsilon$ is voldaan,

als $\sqrt[3]{a^3 - \varepsilon} < x < \sqrt[3]{a^3 + \varepsilon}$, hetgeen een omgeving van a is. We geven ook nog een ander bewijs.

Neem voor het gemak $a > 0$. Wegens

$$|x^3 - a^3| = |x - a|\ |x^2 + ax + a^2|$$

volgt, als wij alvast $|x| < 2a$ nemen, dat

$$|x^3 - a^3| \leqslant 7a^2\ |x - a|\ .$$

Als wij verder $|x - a| < \dfrac{\varepsilon}{7a^2}$ nemen, dan is $|x^3 - a^3| < \varepsilon$.

Hieruit volgt de bewering.

Vb. 5 $y = \sin x$ is continu.

Te bewijzen is, dat $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$. Uit

$$|\sin x - \sin a| = 2|\sin \tfrac{1}{2}(x-a)|\ |\cos \tfrac{1}{2}(x+a)| \leqslant |x - a|$$

zien wij, dat $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$ als $|x - a| < \varepsilon$.

Opm. Merk op dat hier gebruik gemaakt is van $|\sin h| \leqslant |h|$, een ongelijkheid die uit een plaatje is bewezen.

Stelling De functies x^b, $\log x$, 2^x, de goniometrische en de cyclometrische functies zijn continu overal waar zij zijn gedefinieerd.

Een bewijs kan bij de huidige opzet niet worden gegeven. De functies, die nu meetkundig of bij overlevering zijn gegeven, zouden dan beter moeten worden gedefinieerd. (Schets de grafiek van deze functies.)

Stelling Stel $f(x)$ en $g(x)$ zijn continu voor $x = a$ en gedefinieerd in een omgeving van a. Dan zijn ook de volgende functies continu in a:

a) $f(x) + g(x)$;

b) $f(x) \cdot g(x)$;

c) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ (mits $f(a) \neq 0$);

d) $h(g(x))$ mits $h(y)$ continu is in $g(a)$ en gedefinieerd in een omgeving van $g(a)$.

Bewijs De bewijzen van a), b), c) verlopen analoog als op pag. I.16,17.
d) $|h(g(x)) - h(g(a))| < \varepsilon$ als $g(x)$ in een voldoend kleine omgeving van $g(a)$ ligt, d.w.z. als $|g(x) - g(a)| < \delta$. Aan deze laatste ongelijkheid is wegens de continuiteit van g weer voldaan als x in een voldoende kleine omgeving van a ligt.

Opm. Evenals d) bewijst men:
Stel $f(y)$ is continu voor $y = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ en gedefinieerd in een omgeving van $\lim\limits_{x \to a} g(x)$. Dan geldt

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) .$$

Vb. 6 $f(x) = 7^{\log(\arcsin(x-2))}$ is continu voor $2 < x \leqslant 3$.

Vb. 7 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 7$.

Vb. 8 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$. $x = 1$ is niet geoorloofd, dus de functie is niet continu voor $x = 1$.
Deel nu teller en noemer door $(x-1)$; dat mag omdat $x \neq 1$.
De opgave wordt dus

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} .$$

De laatste limiet is $\frac{3}{2}$, verkregen door $x = 1$ in te vullen in de nieuwe functie, die voor $x = 1$ continu is.

Vb. 9 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\tan x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \sin x \cos^2 x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} 2 \cos^2 x = 2.$

Voor de oorspronkelijke functie is $x = 0$ niet geoorloofd. Na deling wordt een functie verkregen, die wel continu is voor $x = 0$.

Vb.10 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 7x - 8}{x}$ bestaat niet.

Als $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ bestaat, maar a een getal is dat niet in de definitieverzameling van f ligt, kan men de functie <u>continu voortzetten</u> in a, d.w.z.

een functie definiëren door $g(x) = f(x)$ voor $x \neq a$ en $g(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Deze functie g is dan continu voor x = a en heet de <u>continue voortzetting van f in a</u>. Zo is (zie Vb. 8) de functie g gedefinieerd door

$$\left.\begin{array}{ll} g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} & \begin{array}{l}\text{voor } x \neq 1 \\ \text{en } x \neq -1\end{array} \\ g(1) = \dfrac{3}{2} & \end{array}\right\}$$

continu voor x = 1.

H. <u>Een standaardlimiet</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \; .$$

<u>Bewijs</u> Uit een meetkundige figuur lezen wij de volgende belangrijke ongelijkheid af

$$\sin x < x < \tan x \qquad (\text{voor } 0 < x < \tfrac{\pi}{2}) \; .$$

Hieruit volgt

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

welke ongelijkheid ook voor $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ geldt.
Uit de continuïteit van cos x voor x = 0 en uit de insluitstelling volgt het gevraagde.

<u>Vb. 1</u> $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 1.1 = 1 \; .$

<u>Vb. 2</u> $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \; .$

<u>Vb. 3</u> $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1} \cdot \frac{1}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{2(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{4}$

<u>Vb. 4</u> $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$

omdat $\; 0 \leqslant |x \sin \frac{1}{x}| \leqslant |x| \; .$

<u>Vb. 5</u> $\lim\limits_{x \to 1} (1-x)\tan(\frac{\pi}{2}x)$.

Substitueer $x - 1 = t$, dan

$$\lim_{t \to 0} -t\tan(\tfrac{\pi}{2}t + \tfrac{\pi}{2}) = \lim_{t \to 0} t\cot\tfrac{\pi}{2}t = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{2}\pi t}{\tan\frac{1}{2}\pi t} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} .$$

§ 4. <u>Enkele belangrijke stellingen</u>

A. In het vervolg baseren wij ons op de volgende eigenschap der reële getallen ("binaire fuik"):

Een oneindige rij gesloten intervallen, waarbij elk de linker of rechterhelft is van het voorafgaande, bevat precies één reëel getal.

B. <u>Stelling van Bolzano</u> (1781 - 1848)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ continu op } a \leq x \leq b \\ f(a) < 0,\ f(b) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Er is een } \xi \text{ met } a < \xi < b, \text{waarvoor } f(\xi) = 0 .$$

<u>Bewijs</u> Halveer $[a,b] = [a_1,b_1]$; neem, tenzij $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, voor $[a_2,b_2]$ de linkerhelft als $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$, de rechter als $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$. Pas deze procedure opnieuw op het interval $[a_2,b_2]$ toe, enzovoort.

Tenzij een van de waarden $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$ is, "gaat de fuik dicht" en binnen alle intervallen ligt één getal ξ. Ware $f(\xi) > 0$ dan zou $f(x)$ in een omgeving van ξ positief moeten zijn (analoog voor $f(\xi) < 0$), terwijl steeds $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$. Dus $f(\xi) = 0$.

In deze stelling kan de voorwaarde, dat $f(x)$ continu is, niet worden gemist.

<u>Vb. 1</u> $f(x) = -3$ op $0 \leq x \leq 1$.

$f(x) = 3$ op $1 < x \leq 2$.

<u>Vb. 2</u> $f(x) = \frac{1}{x}$ op $-1 \leq x < 0$ en $0 < x \leq 1$.

<u>Vb. 3</u> Men kan een niet te rare oppervlakte door een horizontale lijn in twee gelijke delen verdelen. Immers zij x de hoogte van de rechte en zij y = de oppervlakte boven minus de oppervlakte onder de

rechte. Dan $y = f(x)$ en als deze functie continu is, dan is volgens Bolzano ergens $f(x) = 0$, omdat $f(\text{groot}) < 0$ en $f(\text{klein}) > 0$.

C. Def. Een functie $f(x)$ heet begrensd op een interval I als er een getal M bestaat, zodat $|f(x)| \leq M$ voor alle geoorloofde x in I.

Een continue functie hoeft op zijn definitieverzameling niet begrensd te zijn; bijv. $y = \frac{1}{x}$ op het (niet gesloten!) interval $0 < x \leq 1$.

Stelling Als $f(x)$ continu is op $a \leq x \leq b$, dan is $f(x)$ daar begrensd.

Bewijs (uit het ongerijmde). Stel $f(x)$ is niet begrensd en halveer $[a,b] = [a_1,b_1]$. f kan niet op beide helften begrensd zijn. Neem als $[a_2,b_2]$ de linkerhelft als f daarop onbegrensd is, en anders de rechterhelft. Pas deze procedure opnieuw toe op $[a_2,b_2]$, enzovoort. De rij intervallen bevat één getal ξ. Dan is $f(\xi) - 1 < f(x) < f(\xi) + 1$ voor alle geoorloofde x in een voldoend kleine omgeving I van ξ en dus $f(x)$ begrensd op I. Anderzijds is voor voldoend grote n $[a_n,b_n]$ bevat in I en $f(x)$ onbegrensd op $[a_n,b_n]$. Deze tegenspraak toont aan dat de veronderstelling, dat $f(x)$ onbegrensd is, onhoudbaar is.

D. Hoofdstelling over rijen. Het getal e.

Een rij is een functie en daarom zijn de begrippen monotoon stijgend en monotoon dalend voor functies (zie § 2. E) ook op rijen van toepassing.

Een rij $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ heet monotoon stijgend, als uit $m < n$ volgt $\alpha_m < \alpha_n$. Klaarblijkelijk is hiervoor voldoende, dat $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ voor alle n.

Een rij $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ is monotoon stijgend, als $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ voor alle n.
Analoog:
Een rij $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ is monotoon dalend als $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ voor alle n.

Bij een monotoon stijgende rij wordt α_n steeds groter bij toenemende n.

Als we behalve groter worden ook gelijkblijven toelaten, spreken we van monotoon niet-dalend. Men kan dit voor willekeurige functies formuleren. Wij doen het alleen voor rijen:

Een rij $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ is monotoon niet-dalend, als $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ voor alle n.
Analoog:
Een rij $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ is monotoon niet-stijgend, als $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$ voor alle n.

Een rij $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$ is naar boven begrensd, als er een getal M bestaat, zodat $\alpha_n \leqslant M$ voor alle n.

Een rij $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ is <u>naar onder begrensd</u>, als er een getal K bestaat, zodat $\alpha_n \geqslant K$ voor alle n.

<u>Hoofdstelling</u> Elke monotoon niet-dalende rij $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, die naar boven begrensd is, heeft een limiet α, waarvoor geldt $\alpha \geqslant \alpha_n$ voor alle n.

Elke monotoon niet-stijgende rij $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, die naar onder begrensd is, heeft een limiet α, waarvoor geldt $\alpha \leqslant \alpha_n$ voor alle n.

Als de rij stijgend is geldt zelfs $\alpha > \alpha_n$ (immers $\alpha \geqslant \alpha_{n+1} > \alpha_n$).
Als de rij dalend is geldt zelfs $\alpha < \alpha_n$ (immers $\alpha \leqslant \alpha_{n+1} < \alpha_n$).

<u>Bewijs</u> Stel $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_k \leqslant \ldots \leqslant \beta$. Halveer $[\alpha_1, \beta] = [a_1, b_1]$. Neem voor $[a_2, b_2]$ de linkerhelft, tenzij een α_i in de rechterhelft ligt. $[a_2, b_2]$ bevat dan alle α_k vanaf een zekere index. Pas deze procedure opnieuw op $[a_2, b_2]$ toe, enzovoort. Dan ligt één punt α in alle intervallen. Zou nu een zekere $\alpha_i > \alpha$ zijn, dan zou elk interval $[a_n, b_n]$ behalve α ook een $\alpha_k \geqslant \alpha_i$ bevatten en $b_n - a_n \geqslant \alpha_k - \alpha \geqslant \alpha_i - \alpha = \rho > 0$ moeten zijn, ondanks het herhaalde halveren der intervallen. Dat kan niet. Dus zijn alle $\alpha_i \leqslant \alpha$
Maar voor een voldoend groot gekozen n geldt wel $\alpha - \varepsilon < a_n \leqslant \alpha$, hoe klein ε ook is , en daarom voor alle k vanaf een zekere index
$\alpha - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant \alpha_k \leqslant \alpha$. D.w.z. $\lim\limits_{k \to \infty} \alpha_k = \alpha$.

Het bewijs voor een monotoon niet-stijgende rij $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ is analoog.

<u>Vb. 1</u> 1, -1, 1, -1,... is niet monotoon, is wel begrensd, heeft geen limiet.

<u>Vb. 2</u> 1, 2, 3, 4,... is niet begrensd, is wel monotoon, heeft geen (eindige) limiet.

<u>Vb. 3</u> $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ is begrensd en monotoon stijgend, dus heeft een limiet, nl. 1.

<u>Vb. 4</u> De rij $\sqrt[n]{a}$, met $a > 1$, is monotoon dalend en naar onder begrensd, dus heeft een limiet, nl. 1.

Vb. 5 De rij $n(\sqrt[n]{a} - 1)$, met $a > 1$, is naar onder begrensd en monotoon dalend. Teneinde de monotonie te demonstreren tekenen wij de grafiek van $y = a^x$. Wij noemen deze functie de exponentiële functie of de groeifunctie (evenredige groei, samengestelde interest), omdat $a^{x+1} = aa^x$.

Door (0,1) trekken wij de koorden naar resp.
$(1,a)$; $(\frac{1}{2}, \sqrt{a})$;...; $(\frac{1}{n}, \sqrt[n]{a})$;... .

Op de verticaal door $E = (1,1)$ bepalen deze koorden de stukken
$A_1E = a - 1$; $A_2E = 2(\sqrt{a} - 1)$;...; $A_nE = n(\sqrt[n]{a} - 1)$;... .
De punten $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ naderen tot het snijpunt B van de verticaal met de raaklijn in (0,1). De rij $n(\sqrt[n]{a} - 1)$ daalt monotoon naar de limiet b. Dit getal b, de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in (0,1), hangt op continue en monotoon stijgende wijze af van a. Voor $a = 2$ blijkt $b < 1$ (benaderd $b = 0{,}7$). Voor $a = 4$ blijkt $b > 1$ (benaderd $b = 1{,}4$). Volgens de stelling van Bolzano is er een (en wegens de monotonie slechts een) getal a, waarvoor de helling $b = 1$. Dit getal noemen wij het getal e (zie appendix 1).

Voor dit getal geldt

$$n(\sqrt[n]{e} - 1) > 1 \quad \text{dus} \quad e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Later zullen wij zelfs bewijzen dat

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

De rij

$$2;\ \frac{9}{4} = 2.25;\ \frac{64}{27} = 2.37;\ 1.001^{1000} = 2.718$$

levert dan

$$e = 2.71828 \dots$$

Kortom ‖ e is de waarde van a waarvoor de grafiek van a^x in (0,1) een raaklijn met richtingscoëfficiënt = 1 heeft.

Vb. 6 De rij bestaande uit de getallen

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}, \text{ waarin } n! = 1.2.3.4.\dots.n,$$

luidt:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{2!} = 2 + 0,5 = 2,5$$

$$a_3 = a_2 + \frac{1}{3!} \approx 2,5 + 0,16667 = 2,66667$$

$$a_4 = a_3 + \frac{1}{4!} \approx 2,66667 + 0,04167 = 2,70834$$

$$a_5 = a_4 + \frac{1}{5!} \approx 2,70834 + 0,00833 = 2,71667$$

$$a_6 = a_5 + \frac{1}{6!} \approx 2,71667 + 0,00139 = 2,71806 \; .$$

Dat de rij monotoon stijgt, is triviaal.

Dat de rij begrensd is, volgt uit

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + 2[1 - (\tfrac{1}{2})^n] < 3 \; .$$

Dus $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ bestaat en $= 2,718\ldots$. Later zal blijken dat deze limiet het getal e van Vb. 5 is.

HOOFDSTUK II INFINITESIMAALREKENING

§ 1. Afgeleide

Def. Als $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ bestaat, dan heet $f(x)$ differentieerbaar voor $x = a$. De limiet heet de afgeleide voor $x = a$; notatie: $f'(a)$.
Als de afgeleide voor alle geoorloofde x bestaat, heet $f(x)$ differentieerbaar; de afgeleide $f'(x)$ is weer een functie van x.

Stelt men $x = a + h$, $h = x - a$, dan kan men voor de afgeleide ook schrijven:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \ . \tag{1}$$

Het bestaan van de afgeleide kan ook zo worden uitgedrukt, dat $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ als functie van h continu kan worden voortgezet voor $h = 0$.

We zeggen dat $f(x)$ lineair benaderbaar is voor $x = a$ indien er een constante A en een functie $\rho(h)$, gedefinieerd in een omgeving van $h = 0$, bestaan met de eigenschappen:

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + Ah + h\rho(h) \\ \\ \lim\limits_{h \to 0} \rho(h) = 0 \ . \end{cases} \tag{2}$$

De volgende stelling drukt uit dat lineaire benaderbaarheid gelijkwaardig is met differentieerbaarheid.

Stelling Als $f(x)$ lineair benaderbaar is voor $x = a$ door $f(a) + Ah$, dan is $f(x)$ differentieerbaar voor $x = a$ en $f'(a) = A$.
Als $f(x)$ differentieerbaar is voor $x = a$, dan is $f(x)$ lineair benaderbaar voor $x = a$ door $f(a) + f'(a)h$.

Bewijs Als (2) gegeven is, dan heeft $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A + \rho(h)$ een limiet voor $h \to 0$, nl. A.
Omgekeerd: bestaat (1) met waarde $f'(a)$, dan geldt:

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right) = 0 \ ,$$

terwijl:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)\right).$$

<u>Stelling</u> | Als $f(x)$ differentieerbaar is voor $x = a$, dan is $f(x)$ continu voor $x = a$.

<u>Bewijs</u> $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = \lim\limits_{h \to 0} [f(a)+hf'(a)+h\rho(h)] =$

$$= f(a)+0.f'(a)+0.0 = f(a) .$$

<u>Opm</u>. Er zijn functies, die wel continu, maar niet differentieerbaar zijn.

<u>Vb. 1</u> $f(x) = |x|$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|a+h| - |a|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{als } a > 0 \\ -1 & \text{als } a < 0 . \end{cases}$$

Als $a = 0$, dan bestaat $\lim\limits_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ niet; de functie is echter wel continu voor $x = 0$.

<u>Meetkundige interpretatie</u>:

1. $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \tan \varphi$ is de richtingscoëfficiënt van de koorde tussen de punten $(a,f(a))$ en $(x,f(x))$ van de grafiek.

   $f'(a) = \tan \alpha$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $(a,f(a))$ aan de grafiek.

   Als $f'(a) > 0$, dan $\tan \alpha > 0$, dus $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

   Als $f'(a) < 0$, dan $\tan \alpha < 0$, dus $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

   Als $f'(a) = 0$, dan $\tan \alpha = 0$, dus $\alpha = 0$.

2. De lineaire benadering van $f(x) = f(a+x-a)$ door $f(a)+(x-a)f'(a)$ is dus een benadering van de grafiek van $y = f(x)$ door de raaklijn in $(a,f(a))$ waarvan immers de vergelijking is: $y = f(a)+(x-a)f'(a)$.

   De afgeleide wordt ook in de definitie van zeer vele natuurkundige en technische begrippen gebruikt.

Vb. 2 Mechanica. Bij een beweging $s = f(t)$ is de gemiddelde snelheid over het tijdvak $[t_0, t_0 + h]$ per definitie $\frac{1}{h}[f(t_0 + h) - f(t_0)]$.

$$\text{Snelheid ten tijde } t_0 \overset{\text{def.}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} .$$

Bij eenparig versnelde beweging, $s = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$, is

$$\text{snelheid} = \lim_{h \to 0} \frac{v_0(t+h) + \frac{1}{2} g(t+h)^2 - v_0 t - \frac{1}{2} gt^2}{h} = v_0 + gt .$$

Vb. 3 Uitzettingscoëff. van een staaf. Zij de lengte van een staaf bij nul graden $L(0)$ en bij T graden $L = L(T)$.
De mate van uitzetting bij temperatuur T wordt aangegeven door

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{L(T+\tau) - L(T)}{\tau} ,$$

dit heeft de dimensie van lengte gedeeld door temperatuur.
De uitzettingscoëfficiënt bij temperatuur T is

$$\alpha = \frac{1}{L(T)} \lim_{\tau \to 0} \frac{L(T+\tau) - L(T)}{\tau} .$$

Vb. 4 Vloeistof in een buis. De druk p is een functie van de plaats in de buis: $p = p(x)$. Het drukverval langs de buis is de verandering van de

$$\text{druk per lengte-eenheid} = \lim_{h \to 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} .$$

Vb. 5 Soortelijke warmte. Als $Q(T)$ de warmte is, nodig om een eenheid van massa van temperatuur 0° op temperatuur T te brengen, dan is $Q(T_2) - Q(T_1)$ de warmte nodig om de temperatuur van T_1 op T_2 te brengen. De limiet van de gemiddelde benodigde warmte is de soortelijke warmte bij temperatuur T, en wordt gegeven door

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{Q(T+\tau) - Q(T)}{\tau} .$$

In alle voorbeelden is aangenomen dat de limiet bestaat.

§ 2. De techniek van het differentiëren

A. Regels van Leibniz (1646 - 1716)

Gegeven is dat $f(x)$ en $g(x)$ differentieerbaar zijn voor $x = a$, dus:

$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\rho(h)$ met $\rho(h) \to 0$ als $h \to 0$.

$g(a+h) = g(a) + hg'(a) + h\sigma(h)$ met $\sigma(h) \to 0$ als $h \to 0$.

Nu gelden de volgende regels:

1. $f(x) + g(x)$ heeft in $x = a$ de afgeleide $f'(a) + g'(a)$.

   Kortweg: $(f+g)' = f' + g'$.

   Bewijs: $f(a+h) + g(a+h) = f(a) + g(a) + h(f'(a) + g'(a)) + h\tau(h)$, met $\tau(h) = \rho(h) + \sigma(h)$ en dus $\tau(h) \to 0$ als $h \to 0$.

2. $f(x)g(x)$ heeft in $x = a$ de afgeleide $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

   Kortweg: $(fg)' = f'g + fg'$.

   Bewijs: $f(a+h)g(a+h) = f(a)g(a) + h(f'(a)g(a) + f(a)g'(a)) + h\tau(h)$, met $\tau(h) = h(f'(a) + \rho(h))(g'(a) + \sigma(h)) + \rho(h)g(a) + \sigma(h)f(a) \to 0$ als $h \to 0$.

   Gevolgen:

   $(cf)' = cf'$ (c constant), want $c' = 0$.

   $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ (λ en μ constant), in het bijzonder $(f-g)' = f' - g'$.

   $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.

3. $\dfrac{1}{f(x)}$ heeft, mits $f(a) \neq 0$, in $x = a$ de afgeleide $-\dfrac{f'(a)}{f^2(a)}$.

   Kortweg: $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$.

   Bewijs: $$\frac{1}{f(a+h)} = \frac{1}{f(a)} - \frac{hf'(a) + h\rho(h)}{f(a)f(a+h)} = \frac{1}{f(a)} - h\,\frac{f'(a)}{f^2(a)} + h\tau(h),$$

   met $$\tau(h) = \frac{hf'(a)(f'(a) + \rho(h)) - \rho(h)f(a)}{f^2(a)f(a+h)} \to 0 \text{ als } h \to 0 .$$

   (N.B. $f(a+h) \neq 0$ voor h in een omgeving van $h = 0$.)

   Gevolg:

   $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2} .$$

4. Kettingregel voor samengestelde functies

Gegeven: $f(x)$ is differentieerbaar voor $x = a$ en $\varphi(u)$ is differentiëerbaar voor $u = b = f(a)$. Dan geldt:
$\varphi(f(x))$ heeft in $x = a$ de afgeleide $\varphi'(b)f'(a)$.

Bewijs: Stel $\varphi(b+k) = \varphi(b) + k\varphi'(b) + k\sigma(k)$ met $\sigma(k) \to 0$ als $k \to 0$.
Nu is:
$\varphi(f(a+h)) = \varphi(b + hf'(a) + h\rho(h)) = \varphi(b) + h\varphi'(b)f'(a) + h\tau(h)$
met $\tau(h) = \varphi'(b)\rho(h) + (f'(a) + \rho(h))\sigma(hf'(a) + h\rho(h)) \to 0$ als $h \to 0$.

Voorbeeld Bij $\varphi(u) = u^3$ vindt men voor de afgeleide van
$\varphi(f(x)) = (f(x))^3$ in $x = a$: $3(f(a))^2 f'(a)$.

5. Inverse functie

Als $y = f(x)$ voor $a < x < b$ differentieerbaar is met $f'(x) \neq 0$ en een inverse functie $x = \varphi(y)$ heeft, dan is $\varphi(y)$ differentieerbaar met afgeleide

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} .$$

Bewijs: Voor x_0 met $a < x_0 < b$ geldt $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\rho(h)$.
Voor voldoend kleine h heeft $f'(x_0) + \rho(h)$ het teken van $f'(x_0)$.
Stel bijvoorbeeld $f'(x_0) + \rho(h) \geqslant c > 0$ als $|h| \leqslant \delta$, dan is

$$f(x_0 - \delta) < f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \delta).$$

Bij elke y_1 in $f(x_0 - \delta) < y_1 < f(x_0 + \delta)$ is er precies één x_1 met
$y_1 = f(x_1)$. Nu is voor zo'n y_1:
$y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = (x_1 - x_0)[f'(x_0) + \rho(x_1 - x_0)]$,
en $f'(x_0) + \rho(x_1 - x_0) \neq 0$.
Als nu $y_1 \to y_0$, dan gaat ook $\varphi(y_1) = x_1 \to x_0 = \varphi(y_0)$.
We hebben echter:

$$\frac{\varphi(y_1) - \varphi(y_0)}{y_1 - y_0} = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = \frac{1}{f'(x_0) + \rho(x_1 - x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)}$$

indien $y_1 \to y_0$.

Opm. Deze regel is in overeenstemming met de kettingregel:
$\varphi(f(x)) = x$ geeft $\varphi'(f(x))f'(x) = \frac{1}{f'(x)} \cdot f'(x) = 1$.

Ook de meetkundige betekenis is duidelijk: de raaklijn aan de grafiek in (x_0, y_0) maakt complementaire hoeken met x- en y-as,
$f'(x_0) = \tan\alpha$, $\varphi'(y_0) = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

B. De elementaire functies

6. $y = \sin x$; $y' = \cos x$.

7. $y = \cos x$; $y' = -\sin x$.

8. $y = \tan x$; $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, want $\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$.

9. $y = \cot x$; $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

10. $y = \arcsin x$; $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ voor $-1 < x < 1$.

Bewijs: $y = \arcsin x$ is inverse functie van $x = \sin y$ voor $-\frac{1}{2}\pi \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\pi$.

$y' = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ voor $-1 < x < 1$, omdat $\cos y > 0$

voor $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$.

11. $y = \arccos x$ $(-1 < x < 1)$; $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, want $\arccos x = \frac{1}{2}\pi - \arcsin x$.

12. $y = \arctan x$; $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Bewijs: $y = \arctan x$ is inverse functie van $x = \tan y$ voor $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$.

$y' = \cos^2 y = \dfrac{1}{1 + \tan^2 y} = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

13. $y = x^n$ (n geheel); $y' = nx^{n-1}$.

Bewijs:

a) $n > 0$, $y = x^n = x \cdot x \ldots x$;

$y' = x' \cdot x \ldots x + x \cdot x' \ldots x + \ldots + x \cdot x \ldots x' = nx^{n-1}$
(herhaalde toepassing van 2.)

b) $n < 0$, $n = -p$, $p > 0$, $x \neq 0$, $y = \dfrac{1}{x^p}$;

$y' = \dfrac{-px^{p-1}}{x^{2p}} = \dfrac{-p}{x^{p+1}} = nx^{n-1}$

(toepassing van 3.)

14. $y = e^x$; $y' = e^x$.

De groeifunctie (ook exponentiële functie genoemd) $y = a^x$ verloopt steiler naarmate a groter is. Voor één waarde van a, die wij op blz. I.27 het getal e noemden, zal de grafiek de y-as onder een hoek $\pi/4$ snijden. Voor de functie $y = e^x$ geldt dus $y'(0) = 1$.
De afgeleide voor willekeurige x volgt uit

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x y'(0) = e^x .$$

Deze eenvoudige regel maakt dat $y = {}^e\log x$ zich onderscheidt van logarithmen met ander grondtal door eenvoudige eigenschappen.

Afspraak | Voortaan zullen wij e als grondtal der logarithmen nemen, wanneer er niets bijstaat. De logarithmen met grondtal e heten natuurlijke of neperiaanse logarithmen naar Napier (1550 - 1617).

15. $y = \log x$; $y' = \frac{1}{x}$.

Bewijs: $y = \log x$ is de inverse functie van $x = e^y$, dus $y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$
(toepassing van 5.)

De afgeleide van $y = \log x$ voor $x = 1$ is dus 1; de grafiek snijdt de x-as onder een hoek $\pi/4$.

16. $y = a^x$; $y' = a^x . \log a$.
Elke groeifunctie a^x is terug te brengen tot e^x. Immers

$$y = a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a} .$$

Differentiëren geeft

$$y' = e^{x \log a} . \log a = a^x . \log a .$$

Voor $x = 0$ vindt men dus $y'(0) = \log a$. Zie I.27. Verder blijkt

$$\lim_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \log a.$$

17. $y = {}^a\log x$; $y' = \frac{1}{x . \log a}$.

Immers, $y = {}^a\log x = \frac{\log x}{\log a} = \log x . {}^a\log e$.

Opm. Bij $a = 10$ is ${}^a\log e = 0.4343\ldots$, dus

$${}^{10}\log x \approx 0.4343 \log x \quad \text{en} \quad \log x \approx 2.3026\ {}^{10}\log x ,$$

bijv. ${}^{10}\log 2 = 0.3010$; $\log 2 = 0.6931$.

18. $y = x^a$ ($x > 0$, a reëel, constant); $y' = ax^{a-1}$.

Er geldt

$$x^a = e^{a \log x} ,$$

dus

$$y' = e^{a \log x} \cdot \frac{a}{x} = ae^{a \log x}\, e^{-\log x} = ae^{(a-1)\log x} = ax^{a-1} .$$

(De regels 13 en 18 zijn gelijkluidend; het verschil is dat x^n voor $x < 0$ en gehele n wel gedefiniëerd is, terwijl dat voor x^a met $x < 0$ en a reëel in het algemeen niet het geval is.)

Stelling | $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ en $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Bewijs: Wij bewijzen de tweede formule, waaruit de eerste volgt. x is willekeurig maar vast.

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} e^{n \log(1 + \frac{x}{n})} = \lim_{n \to \infty} e^{\frac{\log(1 + \frac{x}{n}) - \log 1}{x/n} \cdot x} .$$

Stel $x/n = h$, dan komt er

$$\lim_{h \to 0} e^{\frac{\log(1+h) - \log 1}{h} \cdot x} = e^{x \cdot \lim\limits_{h \to 0} \frac{\log(1+h) - \log 1}{h}} .$$

De limiet heeft de waarde 1, want hij is juist de afgeleide van de logarithme voor $x = 1$.

Voorbeelden

Vb. 1 $y = \cos x + \cos \frac{\pi}{6}$; $y' = -\sin x$.

Vb. 2 $y = e^{\tan x}$; $y' = e^{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

Vb. 3 $y = \log[\arctan(x^3)]$; $y' = \frac{1}{\arctan x^3} \cdot \frac{1}{1 + x^6} \cdot 3x^2$.

Vb. 4 $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{5}}$; $y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{5} x^{-\frac{7}{5}}$.

Vb. 5 $y = \log[x + \sqrt{1+x^2}]$; $y' = \dfrac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot [1 + \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x] =$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \; \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \; .$$

Vb. 6 $y = \log|x|$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Als } x > 0 \text{ dan } y = \log x \text{ met } y' = \dfrac{1}{x} \\ \text{Als } x < 0 \text{ dan } y = \log(-x) \text{ met } y' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x} \end{array}\right\} y' = \frac{1}{x} \text{ voor } x \neq 0 \; .$$

Vb. 7 $y = x^x = e^{x \log x}$; $y' = e^{x \log x}(1 + \log x)$.

Vb. 8 $y = \arctan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, dan

$$y' = \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{1-x^2}} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)}{1-x^2} =$$

$$= \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; .$$

Opm. Dit antwoord krijgt men ook bij het differentiëren van
$y = \arcsin x$.

Vb. 9 1) In een conisch vat stroomt water met een constante snelheid.
Hoogte vat = b = 3 m
straal bovencirkel = a = 4 m
snelheid = s = 2 m^3 per minuut.
Gevraagd wordt de snelheid, waarmee de waterspiegel stijgt, op het moment dat de hoogte h van het water 1 m is.

2) Gegeven zijn a, b, s, en op een bepaald moment h.
Gevraagd wordt de stijgsnelheid, i.e. de afgeleide van de hoogte h op het bepaalde moment, en wel de afgeleide van h naar de tijd t.

Gevraagd is dus h'(t) uit te drukken in a, b, s, h.

3) s = V'(t) met V = volume water ten tijde t.

De vraag is dus h' uit te drukken in a, b, V', h.

4) Nu zijn V en h onderling afhankelijk, nl. als x de straal van de waterspiegel is:

$$V = \frac{\pi x^2 h}{3} \text{ en } \frac{x}{h} = \frac{a}{b} \text{ dus } V = \frac{\pi a^2 h^3}{3b^2} .$$

Differentieer naar t, dan

$$V' = \frac{\pi a^2 h^2}{b^2} h'$$

en hiermee is h' uit te drukken in a, b, V' en h.

5) Vul de speciale waarden in:

$$2 = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 1}{9} h' \text{ , dus } h' = \frac{9}{8\pi} \text{ m/min.}$$

§ 3. Extrema

Def. f(x) heeft een maximum voor x = c, als $f(x) \leqslant f(c)$ voor alle geoorloofde x.
f(x) heeft een locaal maximum voor x = c, als er een omgeving van c bestaat, zodat voor alle geoorloofde x in die omgeving geldt $f(x) \leqslant f(c)$.

Men drukt zich vaak slordig uit en zegt maximum, als men locaal maximum bedoelt. Tengevolge van deze slordigheid heeft men er soms behoefte aan om uit te drukken, dat een maximum "echt" is en niet alleen maar locaal; men spreekt dan van een globaal maximum.

Opm. 1 Analoge definities gelden voor minimum en locaal minimum.

Opm. 2 In plaats van locaal maximum zegt men ook wel relatief maximum, in plaats van globaal maximum absoluut maximum.

Stelling van Weierstrass (1815 - 1897)

Als f(x) continu is op $a \leqslant x \leqslant b$, dan is er een ξ met $a \leqslant \xi \leqslant b$ zodat $f(\xi) \geqslant f(y)$ voor elke y in $a \leqslant y \leqslant b$, m.a.w. f(x) is maximaal in ξ.
(Evenzo is er een η met $a \leqslant \eta \leqslant b$ waar f(x) minimaal is.)

<u>Bewijs</u>: We passen de stelling van de "binaire fuik" toe (blz. I.24). Verdeel het interval $a \leqslant x \leqslant b$ in twee helften (nl. $a \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$; $\frac{1}{2}(a+b) \leqslant x \leqslant b$). Ligt in de rechterhelft een punt waar de waarde van $f(x)$ groter is dan alle waarden van $f(x)$ in de linkerhelft, dan kiezen we de rechterhelft, anders kiezen we de linkerhelft. (Als $f(x)$ een maximum zou hebben in $x = \frac{1}{2}(a+b)$, kiezen we dus het linker interval.) We hebben zo een helft van het interval gekozen met de eigenschap dat $f(x)$ in deze helft waarden aanneemt, die $\geqslant$ zijn dan alle waarden buiten het gekozen deelinterval. Verdeel nu het gekozen interval in twee helften en kies volgens hetzelfde procédé een van de twee helften. Herhaal dit. We verkrijgen zo een fuik van intervallen met de eigenschap dat in elk interval punten liggen waar de waarde van $f(x) \geqslant$ is dan alle waarden buiten dat interval. De fuik trekt zich samen rond een punt waar de functie $f(x)$ een maximum heeft.

<u>Opm. 1</u> Het interval moet zijn eindpunten bevatten, anders behoeft er geen maximum te bestaan, zoals blijkt uit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ op $0 < x \leqslant 1$.

<u>Opm. 2</u> De eis dat $f(x)$ continu is behoort erbij, anders behoeft er geen maximum te bestaan, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld.
Op $0 \leqslant x \leqslant 1$ is $f(x)$ gedefinieerd door $f(x) = x$ als x irrationaal is; $f(x) = \frac{1}{2}$ als x rationaal is.
Ook de functie $g(x)$, gedefinieerd door $g(x) = x$ $(0 \leqslant x < 1)$; $g(1) = 0$ heeft op $0 \leqslant x \leqslant 1$ geen maximum.

<u>Opm. 3</u> ξ behoeft niet het enige getal op $a \leqslant x \leqslant b$ te zijn, waar $f(x)$ maximaal is. Ook kan het maximum op de rand worden aangenomen.

<u>Opm. 4</u> Wij zullen een uitbreiding van deze stelling voor functies van meer dan één variabele vaak gebruiken.

<u>Stelling</u> (Fermat, 1601 - 1665)

Stel $f(x)$ is voor $a < x < b$ differentieerbaar en $f(x)$ heeft een locaal maximum voor $x = c$, $(a < c < b)$. Dan is $f'(c) = 0$.

<u>Bewijs</u>: Uit $f(c+h) - f(c) \leqslant 0$ voor $h > 0$ en $h < 0$ volgt

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0 \text{ voor } h > 0 \quad \text{en} \quad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \text{ voor } h < 0.$$

De limiet van het quotiënt bestaat, en is in beide gevallen $f'(c)$. Dus $f'(c) \leqslant 0$ en $f'(c) \geqslant 0$, dus $f'(c) = 0$.

Opm. Een overeenkomstige stelling geldt voor een locaal minimum van $f(x)$.

Stelling van het gemiddelde

Als $f(x)$ continu is voor $a \leqslant x \leqslant b$ en differentieerbaar voor $a < x < b$, dan is er een ξ met $a < \xi < b$ zodat

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) .$$

Er bestaat dus een punt waar de raaklijn aan $y = f(x)$ evenwijdig is aan de koorde die $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$ verbindt.

(Er kunnen uiteraard meerdere punten bestaan met deze eigenschap!)

Bewijs: Noem

$$g(x) = f(x) - \frac{x - a}{b - a} [f(b) - f(a)] .$$

Dan

$$g(b) = f(a) \quad \text{en} \quad g(a) = f(a) \quad \text{dus } g(b) = g(a) \text{ en}$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Volgens Weierstrass is er een ξ, waar $g(x)$ een maximum en een η, waar $g(x)$ een minimum heeft. Als $\xi = \eta$, is $g(x)$ constant, dus $g'(x) = 0$ voor alle x. Als $g(x)$ niet constant is, volgt uit $g(a) = g(b)$, dat van ξ en η er minstens één $\neq a$ en $\neq b$ is, bijv. ξ. Volgens Fermat is dan $g'(\xi) = 0$. Daar geldt dus

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Gevolg | Als $f'(x) > 0$ voor alle x in een interval, dan is $f(x)$ monotoon stijgend in dat interval.

Bewijs: Stel dat $f(x)$ niet monotoon stijgend is, dan bestaan er x_1 en x_2 waarvoor $x_1 < x_2$ en $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, dus

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant 0 \text{ , dus er is een } \xi \text{ waarvoor } f'(\xi) \leqslant 0,$$

contradictie.

Gevolg | Als $f'(x) < 0$ voor alle x in een interval, dan is $f(x)$ monotoon dalend in dat interval.

<u>Gevolg</u> | Als $f'(x) = 0$ voor alle x in een interval, dan is $f(x)$ constant in dat interval.

<u>Gevolg</u> | Als $f(x)$ continu is voor $x = c$ en $f'(x)$ wisselt van teken in $x = c$, dan heeft $f(x)$ een extremum in $x = c$.

<u>Vb. 1</u> Schets de grafiek van $y = \dfrac{1-x}{x^2}$.

Geoorloofd: alle $x \neq 0$.

Asymptoten: verticaal $x = 0$, horizontaal $y = 0$, want $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-x}{x^2} = \infty$,

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1-x}{x^2} = 0$.

$y' = \dfrac{x-2}{x^3}$, dus

x	0	1	2
y	$+ + ? + + 0 - -$		$-\frac{1}{4} - -$
y'	$+ + ? - - - - -$		$0 + +$.

Voor $x = 2$ bereikt de functie een minimum, daar $f(x)$ afneemt voor $x < 2$ en toeneemt voor $x > 2$ en continu is voor $x = 2$.

<u>Vb. 2</u> Schets $y = (x-1)^2(x+1)^3$. Uit $y' = (x-1)(x+1)^2(5x-1)$ volgt

x	-1	$\frac{1}{5}$	1
y	$- - 0 + + + + + 0 + +$		
y'	$+ + 0 + + 0 - - 0 + +$.		

Bij $x = -1$ treedt geen extreem op, bij $x = \frac{1}{5}$ een locaal maximum (groot $\frac{3456}{3125} \approx 1{,}1$), bij $x = 1$ een locaal minimum.

<u>Vb. 3</u> Schets $y = x - 3\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^2}\,(\sqrt[3]{x} - 3)$.

Merk op dat steeds $y < x$ behalve voor $x = 0$.

$$y' = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} \qquad (x \neq 0) .$$

x	0	8	27

y - - 0 - - - - - - 0 + +

y' + + ? - - 0 + + + + + .

Voor $x = 0$ heeft $f(x)$ een extremum omdat $f'(x)$ daar van teken wisselt (hoewel $f'(0)$ niet gedefiniëerd is); voor $x = 0$ heeft $f(x)$ een maximum, voor $x = 8$ een minimum (grootte $= -4$).

Vb. 4 Gevraagd die kegel, met grondcirkel op een gegeven bolopperlvlak en top in het middelpunt van de bol, die de grootste inhoud heeft.

Opl. Neem de straal van de bol = 1. Neem de hoogte h van de kegel als onafhankelijke variabele, dan is

$I = \frac{1}{3} h \cdot \pi r^2 = \frac{1}{3} \pi h(1 - h^2)$, geoorloofd: $0 \leqslant h \leqslant 1$.

$I' = \frac{1}{3}\pi - \pi h^2$. Voor $h = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ is I maximaal wegens

h	.	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	.
I'	+	0	-

Vb. 5 Gegeven is de grafiek van $y = f(x)$.
Gevraagd de vergelijkingen van de raaklijn en de normaal in het punt $P(x_0, f(x_0))$ van de kromme. Schrijf: $f(x_0) = y_0$.

Opl. De vergelijking van een willekeurige rechte door P is:
$y - y_0 = C(x - x_0)$.
(De rechte $x = x_0$, die ook door P gaat beschouwen we verder niet; deze heeft in P de normaal $y = y_0$.)
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P is $\tan\alpha = f'(x_0)$, dus de raaklijn heeft de vergelijking

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) .$$

De richtingscoëfficiënt van de normaal in P is

$$\tan\beta = -1/\tan\alpha = -1/f'(x_0) .$$

Vergelijking normaal: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

We gebruiken nu onze kennis van de samenhang tussen het teken van de afgeleide en monotonie van een functie voor de berekening van enige standaardlimieten.

Beschouw $f(x) = x^p e^{-x}$ voor $x > 0$ ($p > 0$ constant).

$$f'(x) = px^{p-1}e^{-x} - x^p e^{-x} = x^{p-1}e^{-x}(p-x) .$$

Dus $f'(x) < 0$ voor $x > p$, dus $f(x)$ is monotoon dalend voor $x > p$.
Vervangt men p door 2p, dan vindt men

$x^{2p}e^{-x}$ monotoon dalend voor $x > 2p$ en continu voor $x = 2p$,

$x^{2p}e^{-x} \leqslant (2p)^{2p}e^{-2p}$ voor $x \geqslant 2p$,

$$0 < x^p e^{-x} \leqslant \frac{(2p)^{2p}e^{-2p}}{x^p} \quad \text{voor } x \geqslant 2p.$$

Laat nu $x \to \infty$. De insluitstelling levert dan:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0, \text{ hetgeen ook juist is voor } p \leqslant 0.$$

Beschouw nu $\dfrac{\log x}{x^q}$ ($q > 0$ constant) en stel $t = q \log x$, $x = e^{t/q}$

dan correspondeert $x \to \infty$ met $t \to \infty$ en

$$\frac{\log x}{x^q} = \frac{t}{qe^t} \text{ , dus } \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^q} = 0 .$$

We vinden als resultaat twee <u>standaardlimieten</u>

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0 \qquad (p \text{ constant})$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^p} = 0 \qquad (p \text{ constant} > 0) .$$

De functies $\log x$, x^p ($p > 0$ constant), e^x gaan alle naar ∞ voor $x \to \infty$, x^p gaat vlugger naar ∞, naarmate p groter is. Verder gaat $\log x$ langzaam naar ∞, x^p gaat vlugger, zelfs als p klein positief is; e^x gaat vlugger dan x^p, zelfs als p groot is.

§ 4. De methode van Newton

Dit is een methode voor de numerieke benadering van wortels van vergelijkingen. Wanneer de vergelijking $f(x) = 0$ niet exact opgelost kan worden, moeten numerieke methoden gebruikt worden, zoals de volgende:
Laat x_0 in de buurt van de wortel liggen.
De raaklijn in het punt $P(x_0, f(x_0))$ aan de grafiek van $y = f(x)$ snijdt de x-as in x_1. Onder zekere omstandigheden is dan x_1 een betere benadering van de wortel. De vergelijking van de raaklijn in P luidt $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Voor het snijpunt met x-as is: $-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$
dus

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}} \ .$$

Opm. x_1 geeft niet altijd een betere benadering.

Vb. 1 $f(x) \equiv x^3 - 2x - 5 = 0$.

Voor $x_0 = 2$ is $f(x_0) = -1$. Dan $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{-1}{3 \cdot 2^2 - 2} = 2{,}10$.

Voor $x_1 = 2{,}1$ is $f(x_1) = 0{,}061$.
Volgens Newton is dan

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2{,}1 - \frac{0{,}061}{3 \cdot (2{,}1)^2 - 2} = 2{,}1 - 0{,}00543 = 2{,}0946 \ .$$

We weten niet, hoe nauwkeurig de benadering is, hoeveel decimalen achter de komma we mogen opschrijven.

Vb. 2 $f(x) = x^2 - a = 0 \ (a > 0)$.
Zij $x_0 > 0$, dan

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2 - a}{2x_0} = \tfrac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) .$$

Uit x_1 vinden we x_2, enz. Algemeen

$$\boxed{x_n = \tfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)} \ .$$

Om $\sqrt{2}$ te benaderen, nemen we a = 2. Kies $x_0 = 1$.

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$x_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} \approx 1{,}42$$

$$x_3 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408} \approx 1{,}41422$$

$$x_4 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{577}{408} + \frac{816}{577}\right) = \frac{665857}{470832} \approx 1{,}41421356237 \text{ , enz.}$$

We proberen in dit geval iets over de "fout" $= x_n - \sqrt{2}$ te weten te komen:

$$x_n - \sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right) - \sqrt{2} = \frac{x_{n-1}^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,x_{n-1}}{2x_{n-1}} = \frac{(x_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2x_{n-1}} .$$

Hieruit volgt, dat $x_n - \sqrt{2} \geqslant 0$ (behalve eventueel voor $n = 0$); we benaderen $\sqrt{2}$ "van boven af". Hieruit volgt:

$$x_n - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\,(x_{n-1} - \sqrt{2})^2 \ ;$$

de fout is hoogstens gelijk aan het kwadraat van de vorige fout. Dit betekent, dat als in een bepaald stadium 5 decimalen achter de komma correct zijn, dit aantal bij de volgende stap 10 en bij de daarop volgende stap 20 is enz.

Om een idee van de te bereiken nauwkeurigheid te geven is hierboven het maximale aantal correcte decimalen opgeschreven, dat uit de betreffende benadering te halen is.

§ 5. Differentialen

1. Eerst de formele definitie. Laat dx een willekeurig getal voorstellen.

   Def. De bij dx behorende differentiaal van $y = f(x)$, notatie dy of $df(x)$, is

   $$\boxed{dy = f'(x)dx} \ .$$

   De bij dx behorende differentiaal is dus een functie van x. (In x_0 is de waarde $f'(x_0)dx$.)

Opm. Wij noemden het willekeurige getal dx, opdat de notatie ook klopt voor de functie $y = x$. Dan links dx en rechts $1 \, . \, dx$. Dus dx is ook een differentiaal, nl. van $f(x) \equiv x$.

2. Nu de meetkundige interpretatie

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt van de grafiek van $y = f(x)$ wordt gegeven door

$$f'(x) = \frac{\text{stuk in y-richting}}{\text{stuk in x-richting}} \, .$$

Duid een willekeurig stuk in x-richting aan door dx (dus dx is een variabele), en duid het bijbehorende stuk in y-richting, zodat wij op de raaklijn terecht komen, aan met dy. Dan

$$dy = f'(x)dx \, .$$

Voorbeeld $y = y^2$, $y' = 2x$.

In $(1,1)$ is $dy = 2dx$. In $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ is $dy = -dx$.
Algemeen: $dy = 2xdx$.

3. Het quotiënt $\frac{dy}{dx}$ is volgens de definitie gelijk aan $f'(x)$. Daarom heet $f'(x)$ ook wel een differentiaalquotiënt.

4. Het werken met differentialen vereenvoudigt de schrijfwijze:
Volgens de regels van Leibniz is
$d(u+v) = (u+v)'dx = u'dx + v'dx = du + dv.$
$d(uv) = (uv)'dx = uv'dx + u'vdx = udv + vdu.$

De Kettingregel: $y = \varphi(u)$ en $u = f(x)$, dan $y' = \varphi'(u)f'(x)$ wordt
$dy = y'dx = \varphi'(u) \, . \, f'(x)dx = \varphi'(u)du.$

Samenvattend:

$$d(u+v) = du + dv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

$$d(uv) = udv + vdu \qquad d\varphi(u) = \varphi'(u)du \, .$$

5. Opm. Het gebruik van differentialen is soms handig bij het stapsgewijs toepassen van de kettingregel in ingewikkelde gevallen.

Voorbeeld Als $f(x) = x\sqrt{1-x^3}$, dan $df = xd(\sqrt{1-x^3}) + \sqrt{1-x^3}dx$; vervolgens berekent men $d(\sqrt{1-x^3}) = \frac{1}{2}(1-x^3)^{-\frac{1}{2}} \, d(1-x^3)$, etc.

§ 6. De bepaalde integraal

Differentiaal- en integraalrekening behoren tot de stof van het eindexamen HBS en Gymnasium. Bij de behandeling wordt hiermee rekening gehouden door bij de bespreking van bekend veronderstelde onderwerpen uitvoerige toelichting achterwege te laten.

Zij gegeven een functie $f(x)$ op het begrensde gesloten interval $a \leq x \leq b$. We verdelen dit interval in m deelintervallen door de keuze van $(m-1)$ deelpunten $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$. Noem $x_0 = a$ en $x_m = b$, dan krijgen we een

<u>verdeling</u> D: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$.

Elk van de deelintervallen heeft een lengte, achtereenvolgens:

$$x_1 - x_0,\ x_2 - x_1, \ldots,\ x_m - x_{m-1} \ .$$

Het is de bedoeling deze lengtes straks klein te maken; deze lengtes kunnen echter verschillend zijn. Daarom beschouwen we het grootste onder de getallen, die deze lengtes voorstellen en noemen dat getal de <u>diameter</u> van de verdeling: $\delta(D)$. Als deze klein is, dan zijn alle lengtes klein.
Kort geschreven:

$$\delta(D) = \max_{1 \leq j \leq m} (x_j - x_{j-1}) \ .$$

We gaan de lengte van elk interval vermenigvuldigen met de functiewaarde $f(\xi)$ van de functie f voor een in dat interval gelegen waarde ξ van de variabele x. Dit moeten we voor elk interval doen en daartoe kiezen we een

<u>stel tussenpunten</u> R_D: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ met $x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j \quad (j = 1, \ldots, m)$.

Het product van lengte en functiewaarde gaan we optellen over alle intervallen:

$$S_{D,R_D} = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_m)(x_m - x_{m-1}) \ ,$$

korter geschreven:

$$S_{D,R_D} = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \ .$$

De sommen S_{D,R_D} heten Riemann-sommen. Neemt men elke $\xi_j \quad (j = 1, \ldots, n)$ zó dat $f(\xi_j)$ de maximale waarde van f op $x_{j-1} \leq x \leq x_j$ is, dan heet de bijbehorende Riemann-som: <u>bovensom</u> bij de verdeling D; (neemt men minimale waarden dan krijgt men een <u>benedensom</u>.) Kennelijk benedensom (D) $\leq S_{D,R_D} \leq$ bovensom (D)

voor elk stel tussenpunten R_D.
We willen nu de lengtes der deelintervallen steeds kleiner laten worden.
Daartoe beschouwen we een <u>rij verdelingen</u>:

$$D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$$

waarvoor geldt $\lim\limits_{n \to \infty} \delta(D_n) = 0$ en bij elk der verdelingen D_n een bijbehorend stel tussenpunten R_{D_n}. Als nu

$$\lim_{n \to \infty} S_{D_n, R_{D_n}}$$

bestaat voor iedere keuze van een rij verdelingen met bijbehorende stellen tussenpunten (mits $\lim\limits_{n \to \infty} \delta(D_n) = 0$), en deze limiet onafhankelijk is van de keuze van de verdelingen en tussenpunten, dan noemen we deze limiet de <u>bepaalde integraal</u> van f(x) over het interval $a \leq x \leq b$, en noteren deze:

$$\int_a^b f(x)dx \, .$$

In dit geval heet f(x) <u>integreerbaar</u> over het interval $a \leq x \leq b$.

<u>Opm. 1</u> Men kan bewijzen, dat als de limiet voor <u>iedere</u> rij verdelingen met tussenpunten gekozen als boven bestaat, deze limiet vanzelf voor iedere dergelijke rij dezelfde is.

<u>Opm. 2</u> Bij verschillende verdelingen mag het aantal m der deelintervallen uiteraard verschillend zijn. Het is trouwens duidelijk, dat als de diameter klein is, het aantal deelintervallen groot moet zijn.

Zelfs voor eenvoudige functies is het lastig te verifiëren, dat ze aan bovenstaande definitie van integreerbaarheid voldoen. Zonder bewijs vermelden we, dat functies die niet begrensd zijn, niet integreerbaar zijn. We behelpen ons met de volgende stelling.

<u>Stelling</u> Als f(x) continu is voor $a \leq x \leq b$, dan bestaat $\int_a^b f(x)dx$.

We bewijzen deze stelling hier niet.

Als we de definitie en bovenstaande stelling gebruiken kunnen we voor het berekenen van de bepaalde integraal van een continue functie ermee volstaan één rij verdelingen met bijbehorende tussenpunten te beschouwen.

<u>Voorbeeld</u> Bepaal $\int_a^b x^m dx$ met $0 \leqslant a < b$, m is een natuurlijk getal.

Verdeel het interval $a \leqslant x \leqslant b$ in n gelijke stukken; dus $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $x_2 = a + 2\,\frac{b-a}{n}, \ldots, x_n = a + n\,\frac{b-a}{n} = b$. De diameter van deze verdeling is $\frac{b-a}{n}$. Tussen x_{j-1} en x_j kiezen we het tussenpunt ξ_j zó dat

$\xi_j^m = \frac{1}{m+1}\,(x_j^m + x_j^{m-1}\,x_{j-1} + \ldots + x_{j-1}^m)$.

Nu is $S_{D,R_D} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^m (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{m+1} - x_{j-1}^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{m+1}\,(b^{m+1} - a^{m+1})$.

De waarde van deze S_{D,R_D} is dus onafhankelijk van n. Laat $n \to \infty$. We vinden

$$\int_a^b x^m dx = \frac{1}{m+1}\,(b^{m+1} - a^{m+1}).$$

<u>Opm</u>. Dit resultaat blijft geldig als we de restrictie $a \geqslant 0$ laten vallen.

De integraal $\int_a^b f(x)dx$ kan worden geïnterpreteerd als een oppervlakte.

Stel $f(x) \geqslant 0$ voor alle x, d.w.z. de grafiek van f(x) verloopt geheel boven de x-as. Dan is de in de approximatiesom van de integraal voorkomende term $f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$ gelijk aan de oppervlakte van een rechthoek met als basis het lijnstuk tussen x_{j-1} en x_j op de x-as en als hoogte de ordinaat van het punt van de grafiek behorende bij $x = \xi_j$. Door optellen over alle intervallen krijgen we een benadering van de oppervlakte van het gedeelte van het vlak tussen grafiek en x-as. De benadering ontstaat door net te doen alsof op elk deelinterval de functie constant $= f(\xi_j)$ is. We trachten de benadering te verbeteren door de intervallen te verkleinen en limietovergang toe te passen. Zo vinden we:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{oppervlakte van het gedeelte van het vlak tussen de grafiek van } f(x)\text{, de x-as en de lijnen } x = a \text{ en } x = b.$$

Zo is de oppervlakte van het gedeelte van het vlak tussen de parabool $y = x^2$, x-as en $x = b$ gelijk aan $\frac{1}{3}b^3$. Dit soort oppervlakteberekeningen voerde Archimedes reeds uit.

Als $f(x) \leqslant 0$, dan is de oppervlakte $= - \int_a^b f(x)dx$.

De bepaalde integraal is behalve voor de definitie van oppervlakte ook te gebruiken voor de definitie van zeer veel natuurkundige en technische begrippen.

Vb. 1 Arbeid. De kracht op een stoffelijk punt varieert met de afgelegde rechte weg: $K = K(s)$. Dan is de arbeid, verricht bij de beweging van A naar B

$$\lim \sum_{\text{van A naar B}} K(\sigma_i)(s_i - s_{i-1}) = \int_{s_A}^{s_B} K(s)ds\ .$$

Vb. 2 Potentiaal

Volgens Coulomb geldt:

Veldsterkte op afstand r van puntlading Q =

= kracht van Q op positieve eenheid van lading $= \frac{Q\,.\,1}{r^2}$.

Het potentiaalverschil $V_B - V_A$ = de arbeid die ik moet verrichten om een positieve eenheid van lading van A naar B te brengen =

$$= - \lim \sum_{A \to B} \frac{Q}{(\rho_i)^2}(r_i - r_{i-1}) = - \int_{r(A)}^{r(B)} \frac{Q}{r^2}\,dr\ .$$

Vb. 3 Volumen. Het volumen, verkregen door wenteling van de grafiek van $f(x)$ om de x-as is

$$\lim \sum_{\text{van 0 tot a}} \pi f^2(\xi_i)[x_i - x_{i-1}] = \int_0^a \pi f^2(x)dx\ .$$

Eigenschappen van $\int_a^b f(x)dx$.

I. Tot nu toe hebben we $\int_a^b f(x)dx$ alleen gedefinieerd voor $a \leq x \leq b$, waarbij $a < b$.

We definiëren nu voor $a > b$: $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$ (rechterlid is bekend, want $b < a$).

Verder $\int_a^a f(x)dx = 0$. Dan geldt:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \quad \text{(ongeacht welke van a en b de grootste is).}$$

Het nut van deze afspraken zal hieronder blijken.

II. $$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

We beschouwen eerst het geval $a < b < c$. Discussie over het bestaan der integralen laten we achterwege. Dan is de gelijkheid gemakkelijk te verkrijgen door een rij verdelingen van het interval $a \leq x \leq c$ te beschouwen, die alle het punt b als deelpunt bevatten. Ter behandeling van andere liggingen der getallen a, b en c schrijven we de gelijkheid in een andere vorm:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0.$$

Door een andere rangschikking der termen en eventuele verwisseling der integratiegrenzen komen we terug op het reeds besproken geval, als de getallen a, b en c verschillend zijn. Als er gelijke onder de getallen a, b en c zijn is de gevraagde gelijkheid direct duidelijk.

III. $$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \text{ als } \lambda \text{ constant is.}$$

Als $a < b$, dan volgt dit gemakkelijk uit de integraaldefinitie; het geval $a > b$ volgt daarna door grenzenverwisseling en het geval $a = b$ is triviaal.
Uit deze gelijkheden volgt:
Als λ en μ constanten zijn, dan geldt

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx .$$

IV. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt .$$

De integraal is een getal, dat niet afhangt van de "benoeming" van de variabele in f.

V. Als voor alle $a \leqslant x \leqslant b$ geldt $f(x) \leqslant g(x)$, dan

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx \qquad (a \leqslant b) .$$

Dit volgt direct uit de integraaldefinitie.

Waarschuwing: deze ongelijkheid geldt alleen voor $a \leqslant b$ en mag niet worden toegepast als $a > b$.

VI. Voor constante K geldt $\int_a^b Kdx = K \int_a^b dx = K(b-a)$. Door toepassing van V vinden we:
Als voor alle $a \leqslant x \leqslant b$ geldt $f(x) \leqslant K$, dan

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant K(b-a) \qquad (a \leqslant b) .$$

Als voor alle $a \leq x \leq b$ geldt $L \leq f(x)$, dan

$$L(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \qquad (a \leq b)\ .$$

Als voor alle $a \leq x \leq b$ geldt $|f(x)| \leq M$, dan $-M \leq f(x) \leq M$, dus

$$-M(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \qquad (a \leq b)\ ,$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M|b-a|\ .$$

De laatste ongelijkheid geldt ook als $a > b$.

Vb. 4 $\displaystyle\int_a^b (x^2 + px + q)dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) + \frac{1}{2}p(b^2 - a^2) + q(b-a).$

§ 7. Enkele numerieke integratiemethoden

De definitie van een bepaalde integraal geeft meestal geen handelbare methode om integralen uit te rekenen. In de hierna volgende paragraaf zullen wij een methode behandelen om de differentiaalrekening toe te passen ter berekening van bepaalde integralen. Deze methode werkt echter niet in alle gevallen. Numerieke benadering van bepaalde integralen valt te verkrijgen door de approximatiesommen uit de definitie als benadering te gebruiken. Dit is de eerste methode van de hieronder behandelde 3 manieren om integralen numeriek te benaderen.

Uit de definitie

Verdeel $b-a$ in n gelijke stukken, en bereken de functiewaarden in het linker deelpunt $(y_j = f(x_j))$, dan is

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right]\ .$$

Trapeziumregel

Een betere benadering krijgt men, als men niet rechthoeken, maar trapezia als benadering gebruikt. Dan

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right]$$

$$\approx \frac{b-a}{2n}\left[y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n\right].$$

Regel van Simpson (1743)

Nu benaderen wij de kromme door stukjes parabool.

Hulpstelling | Voor de parabool $y = p(x)$ geldt

$$\int_0^{2h} p(x)dx = \frac{1}{3}h(y_0+4y_1+y_2).$$

Bewijs Stel $p(x) \equiv ax^2+bx+c$. Wij drukken de coëfficiënten a,b,c uit in y_0, y_1, y_2, h.

P_0 op parabool: $y_0 = c$

P_1 op parabool:	$y_1 - y_0 = ah^2 + bh$	-2	4
P_2 op parabool:	$y_2 - y_0 = 4ah^2 + 2bh$	1	-1

Dus $2ah^2 = y_0 - 2y_1 + y_2$ en $2bh = -3y_0 + 4y_1 - y_2$.

$$\int_0^{2h} p(x)dx = \int_0^{2h}(ax^2+bx+c)dx = a\int_0^{2h}x^2dx + b\int_0^{2h}xdx + c\int_0^{2h}dx =$$

$$= a\cdot\frac{1}{3}(2h)^3 + b\cdot\frac{1}{2}(2h)^2 + c\cdot 2h =$$

$$= \frac{1}{3}h[8ah^2+6bh+6c] =$$

$$= \frac{1}{3}h[4(y_0-2y_1+y_2)+3(-3y_0+4y_1-y_2)+6y_0] =$$

$$= \frac{1}{3}h[y_0+4y_1+y_2].$$

Verdeel nu $b-a$ in $2n$ stukken. De oppervlakte van elk der n paren benaderen wij door de oppervlakte, die ontstaat door de kromme te benaderen door een parabool. Dan

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3} h[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots]$$

$$\approx \frac{b-a}{6n} [y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})] \; .$$

Dit is de regel van Simpson, die o.a. zijn toepassing vindt in de scheepsbouwkunde bij berekening van de waterverplaatsing.

§ 8. De hoofdstelling der integraalrekening

Zij $f(t)$ integreerbaar voor $a \leqslant t \leqslant b$. Voor $a \leqslant x \leqslant b$ definiëren we

$$O(x) = \int_a^x f(t)dt \; .$$

Stelling $O(x)$ is continu.

Bewijs Omdat iedere integreerbare functie begrensd is, bestaat er een $M > 0$, zodat $|f(t)| \leqslant M$ voor $a \leqslant t \leqslant b$. We kiezen een c met $a \leqslant c \leqslant b$ en bewijzen de continuïteit voor $x = c$:

$$|O(x) - O(c)| = \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt \right| = \left| \int_c^x f(t)dt \right| \leqslant M|x - c|$$

en dit is $< \varepsilon$ voor $|x - c| < \varepsilon/M$.

Stelling | Als $f(t)$ continu is voor $t = c$, dan is $O(x)$ differentieerbaar voor $x = c$ met afgeleide $f(c)$.

Bewijs

$$\left| \frac{O(x) - O(c)}{x - c} - f(c) \right| = \left| \frac{\int_c^x f(t)dt}{x - c} - f(c) \right| = \left| \frac{\int_c^x [f(t) - f(c)]dt}{x - c} \right| \; .$$

Omdat $f(t)$ continu is voor $t = c$, bestaat er bij iedere $\varepsilon_1 > 0$ een omgeving van c zodat voor alle t in die omgeving geldt $|f(t) - f(c)| < \varepsilon_1$. Als x in die omgeving ligt en t tussen c en x ligt, dan ligt t ook in die omgeving.

Dan geldt

$$\frac{\left|\int_c^x [f(t) - f(c)]dt\right|}{x - c} \leqslant \frac{1}{|x - c|} \cdot \varepsilon_1 |x - c| = \varepsilon_1 .$$

Bij $\varepsilon > 0$ kiezen we $\varepsilon_1 < \varepsilon$, dan is voor x in de bijbehorende omgeving
$\left|\frac{O(x) - O(c)}{x - c} - f(c)\right| < \varepsilon$, dus $O'(c) = f(c)$.

Gevolg Als $f(t)$ continu is, dan is $O'(x) = f(x)$.

Opm. Deze stelling vormt de brug tussen de integraal- en de differentiaalrekening.

Hoofdstelling Als voor $a \leqslant x \leqslant b$ geldt, dat $\varphi'(x) = f(x)$ en $f(x)$ continu is, dan is

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a) .$$

Bewijs

Noem $\int_a^x f(t)dt = O(x)$, dan is $O'(x) = f(x)$ en $\varphi'(x) = f(x)$.

Dus $[O(x) - \varphi(x)]' = 0$

$O(x) = \varphi(x) + C$.

Nu is $O(a) = 0$, dus $C = -\varphi(a)$.

Dus $O(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$ en speciaal

$O(b) = \varphi(b) - \varphi(a)$,

dus

$$\int_a^b f(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a) .$$

Opm. Deze formule geldt ook als $a \geqslant b$.

Vb. 1 $\int_0^\pi \sin x \, dx = ?$

Een functie φ zodat $\varphi'(x) = \sin x$, is $\varphi(x) = -\cos x$.

Dus $\int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_{x=0}^{x=\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$

Vb. 2 $\int_0^{1000} \frac{dx}{1+x^2} = ?$

Een functie φ met $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ is $\varphi(x) = \arctan x$,

dus $\int_0^{1000} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{x=0}^{x=1000} = \arctan 1000.$

Opm. Hieruit zien wij, dat het ook mogelijk is te definiëren

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N \to \infty} \int_0^N \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N \to \infty} \arctan N = \frac{\pi}{2} .$$

Vb. 3 $\int_1^2 \frac{dx}{x} = [\log x]_{x=1}^{x=2} = \log 2 .$

§ 9. De onbepaalde integraal

A. De hoofdstelling leidt tot het volgende probleem.

Als gegeven is een continue $y = f(x)$, zoek dan een functie $\varphi(x)$ zodat $\varphi'(x) = f(x)$, m.a.w. $d\varphi(x) = f(x)dx$.

Wij vragen ons af

1. Heeft dit probleem steeds een oplossing (existentie).
2. Zo ja, heeft het probleem meer dan één oplossing (eenduidigheid).
3. Zo ja, hoe vind ik de oplossing.

Antwoord:

1. Ja, immers neem $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

   Omdat f(x) continu is, bestaat de integraal. Volgens paragraaf 8 is $\varphi'(x) = f(x)$. Er bestaat dus een oplossing.

2. Er is meer dan één oplossing, immers met $\varphi(x)$ is ook $\varphi(x) + C$ (C constante) een oplossing, want uit $\varphi' = f$ volgt $(\varphi + C)' = f$. Daarmee zijn echter ook alle oplossingen gevonden, want stel dat $\varphi_1(x)$ een oplossing is, dan is $(\varphi_1 - \varphi)' = f - f = 0$, dus $\varphi_1(x) - \varphi(x) = C$, $\varphi_1(x) = \varphi(x) + C$. Er zijn oneindig veel oplossingen, die een constante verschillen. Kent men één oplossing, dan kent men ze alle.

Def. | De onbepaalde integraal $\int f(x)dx$ stelt voor alle functies, waarvan f(x) de afgeleide is, m.a.w. waarvan f(x)dx de differentiaal is.

3. De in 1. aangegeven oplossing is meestal onbruikbaar, daar wij de bepaalde integraal juist zoeken en deze moeilijk rechtstreeks kunnen bepalen. Soms kunnen wij echter de onbepaalde integraal uitdrukken in elementaire functies. Als dat mogelijk is, kunnen wij via de hoofdstelling de bepaalde integraal uitrekenen.
   Dit is o.a. het geval bij de volgende grondformules, die volgen uit de lijst van formules voor het differentiëren.

B. Grondformules

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad (a \neq -1) \qquad \text{want } d(x^p) = p \cdot x^{p-1}dx$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C \qquad \text{want } d(\log|x|) = \frac{dx}{x}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x \, dx = - \cos x + C \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log[x + \sqrt{x^2+a^2}] + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

Opm. Hiermee zijn we nog niet klaar, want bijv. $\int \log x \, dx$ staat niet in de lijst. Verifieer dat

$$\int \log x \, dx = x \log x - x + C \ .$$

C. Eigenschappen

1. $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$, λ = constante $\neq 0$.

2. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

3. $\int f'(x)dx = f(x) + C$ want als $y = f(x)$ dan $dy = f'(x)dx$.

4. $\int d\, f(x) = f(x) + C$ want $\int df(x)$ is iedere functie, waarvan $df(x)$ de differentiaal is, dat is $f(x) + C$.

5. $d \int f(x)dx = f(x)dx$ of $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

Vb. 1 $\int \frac{x^4+1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{7/2} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{9} x^{9/2} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$

Vb. 2 Als $y = e^{\arcsin(\log x)}$ dan $y' = e^{\arcsin(\log x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\log^2 x}} \cdot \frac{1}{x}$.

Dus $\int \frac{e^{\arcsin(\log x)}}{x\sqrt{1-\log^2 x}}\,dx = e^{\arcsin(\log x)} + C.$

Wij behandelen twee methoden voor het integreren. Andere methoden volgen later.

D. Integratie door substitutie van nieuwe variabelen

Gevraagd $\int f(x)dx$. Stel $f(x)$ is te schrijven in de vorm $f(x) = \varphi(\psi(x)) \cdot \psi'(x)$.
Als $u = \psi(x)$, dan is $du = \psi'(x)dx$ en $f(x)dx = \varphi(u)du$. Stel nu, dat we $\int \varphi(u)du$ kunnen vinden, d.w.z. een $\Phi(u)$, waarvoor $\Phi'(u) = \varphi(u)$, dan is

$$\int f(x)dx = \Phi(\psi(x)) + C .$$

Controle: Afgeleide van $\Phi(\psi(x))$ is $\Phi'(u) \cdot \psi'(x) = \varphi(u) \cdot \psi'(x) =$

$$= \varphi(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = f(x).$$

Vb. 1 $\int \cos(x+4)dx = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(x+4) + C$

[subst. $x+4 = u$, dan $du = dx$].

Vb. 2 $\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{du}{u} = \log|u| + C = \log|x-1| + C$

[subst. $x-1 = u$, dan $du = dx$].

Vb. 3 $\int \sin(2x+3)dx = \frac{1}{2}\int \sin u\,du = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C$

[subst. $2x+3 = u$, dan $du = 2dx$].

Vb. 4 $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{d\sin x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan[\sin x] + C$

[$\sin x = u$, $\cos x\,dx = du$].

Vb. 5 $\int e^{-x^2} x\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$

$[-x^2 = u,\ -2xdx = du].$

Vb. 6 $\int \frac{\sqrt{3 + \log x}}{x}\,dx = \int (3 + \log x)^{\frac{1}{2}}\, d(3 + \log x) = \frac{2}{3}(3 + \log x)^{3/2} + C.$

Vb. 7 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = -\sqrt{1-x^2} + C.$

E. Methode der partiële integratie

Als $u(x)$ en $v(x)$ twee functies van x zijn, dan is

$$u\,.\,v + C = \int d(uv) = \int (udv + vdu) = \int udv + \int vdu, \text{ dus}$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}\ .$$

Deze formule is handig te gebruiken als $\int vdu$ eenvoudiger is dan $\int udv$.

In het bijzonder is de formule bruikbaar, als $u(x)$ een log of een cyclometrische functie is.

Vb. 1 $\int \log x\,dx = x\log x - \int x d\log x = x \log x - \int dx = x\log x - x + C.$

Vb. 2 $\int \arctan x dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$

Vb. 3 $\int x\cos 2xdx = \frac{1}{2}\int x\, d\sin 2x = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx =$

$= \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$

Vb. 4 $\int e^x x^2 dx = \int x^2 de^x = x^2e^x - 2\int e^x x\, dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C,$

daar $\int e^x x dx = \int x de^x = xe^x - e^x + C.$

Vb. 5 $\int x \arctan x\, dx =$ (arctan isoleren, zie vb. 2)

$$= \tfrac{1}{2}\int \arctan x\, dx^2 = \tfrac{1}{2} x^2 \arctan x - \tfrac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \tfrac{1}{2} x^2 \arctan x - \tfrac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{2} \arctan x + C.$$

Opm. Later volgt een meer systematische behandeling van $\int f(x)dx$.

§ 10. Differentiaalvergelijkingen

Een differentiaalvergelijking is een vergelijking waarin behalve de grootheden x en y ook tenminste één afgeleide van y naar x voorkomt. Dikwijls is oplossen naar y' mogelijk; dan komt er:

$$y' = F(x,y) \quad \text{of} \quad \frac{dy}{dx} = F(x,y) .$$

De vraag is, welke functies $y(x)$ hieraan voldoen.

Een zeer eenvoudige situatie ontstaat er als $F(x,y) = \frac{f(x)}{g(y)}$; dit geeft

$$g(y)y' = f(x) \qquad \text{(scheiding der variabelen)} .$$

Laat nu $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ en $g(y) = \frac{dG(y)}{dy}$, dan betekent de gelijkheid der afgeleiden naar x dat $G(y) = F(x)$ + constante.

Vb. 1 $y' = -\frac{x}{y}$.

Dan $2ydy = -2x\, dx$, dus door integratie

$$y^2 = -x^2 + C.$$

De oplossing is dus $x^2 + y^2 = C$ (met $C \geq 0$), een stelsel concentrische cirkels.

Vb. 2 $y' = \lambda y$. $y = 0$ is een oplossing. Schrijf

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \;;\; \frac{dy}{y} = \lambda dx \;.$$

Nu zijn de variabelen gescheiden. Integreer, dan

$$\begin{array}{llll} \log|y| & = \lambda x + D & \text{met} & -\infty < D < \infty \\ |y| & = e^{\lambda x} \cdot e^{D} & & 0 < e^{D} < \infty \\ y & = \pm\, e^{D} e^{\lambda x} & & -\infty < \pm\, e^{D} < \infty \\ y & = C\, e^{\lambda x} & & -\infty < C < \infty \;. \end{array}$$

Inderdaad voldoen deze oplossingen (voor elke C één oplossing) aan de oorspronkelijke vergelijking. Deze vergelijking komt zeer veel voor.

a) De bevolking B van een land is een functie van de tijd. De aanname, dat de groei der bevolking evenredig is met de grootte van de bevolking, leidt tot de differentiaalvergelijking

$$B'(t) = \lambda B(t) \;.$$

Oplossing: $B(t) = C\, e^{\lambda t}$.

Wanneer B_0 de bevolking ten tijde $t = 0$ is, dan

$$B(t) = B_0 e^{\lambda t} \;.$$

b) De ontleding, die een radioactieve stof ondergaat als straling wordt uitgezonden, heeft de eigenschap dat de snelheid van ontleding evenredig is met de aanwezige hoeveelheid. Als $y(t)$ de hoeveelheid radioactieve stof ten tijde t is, dan geldt dus

$$-\frac{dy}{dt} = \lambda y \;.$$

De oplossing is $y(t) = y(0)e^{-\lambda t}$.

De halfwaarde tijd $T_{\frac{1}{2}}$ berekent men uit $y(T_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\, y(0)$. Dus
$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{\frac{1}{2}}}$; $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log 2}{\lambda}$.

c) Een kapitaal K staat uit tegen een constante rente van p% en is ten tijde $t = 0$ groot K_0. De kapitaalsvermeerdering ten tijde t is evenredig met het kapitaal ten tijde t:

$$\frac{dK}{dt} = \mu K \;.$$

De oplossing is $K(t) = K_0 e^{\mu t}$.

$$K(1) - K(0) = K_0(e^{\mu} - 1) = K_0 \cdot \frac{p}{100} ,$$

$$\frac{p}{100} = e^{\mu} - 1, \ \mu = \log(1 + \frac{p}{100}) .$$

Vb. 3 $y' = -\frac{1}{y}$ heeft als oplossing:

$$y^2 = -2x + D \qquad (1)$$

$y' = y$ heeft als oplossing (voorbeeld 2)

$$y = C e^x \qquad (2)$$

Alle krommen uit (2) snijden alle parabolen uit (1) loodrecht. Men zegt dat zulke families van krommen elkaars orthogonale trajectoriën zijn.

§ 11. Bepaalde integralen

Met behulp van de hoofdstelling en de onbepaalde integralen kunnen wij nu eenvoudige bepaalde integralen oplossen.

Vb. 1 Om $\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$ te bepalen berekenen wij eerst

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\log|\cos x| + C .$$

Dus $\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = [-\log|\cos x|]_{x=0}^{x=\pi/4} = -\log \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2} \log 2.$

Vb. 2 Gevraagd wordt de oppervlakte te berekenen die wordt ingesloten tussen de grafieken van $y = x^2$ en $x = y^2$.
De snijpunten der krommen zijn (0,0) en (1,1).
De gevraagde oppervlakte is

$$\int_0^1 \sqrt{x} \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} .$$

Opm. 1 Als f(x) een even functie is, dan geldt

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \; .$$

Als f(x) een oneven functie is, dan geldt

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \; .$$

Opm. 2 Past men de substitutiemethode toe bij het berekenen van bepaalde integralen, dan is het vaak handig ook de grenzen van de nieuwe veranderlijke in te vullen.

Vb. 3 $$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx \underset{(u\,=\,\tan x)}{=} \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}u^3\Big]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{3} \; .$$

Vb. 1 $$\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx \underset{(u\,=\,\cos x)}{=} -\int_1^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{du}{u} = \int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1} \frac{du}{u} = \log|u|\Big]_{u=\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{u=1} =$$

$$= -\log\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\log 2 \; .$$

§ 12. Oneigenlijke integralen

Vroeger is de stelling genoemd, dat een integreerbare functie begrensd is. Niet-begrensde functies zijn dus niet integreerbaar.

Zo is $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2}$ niet gelijk aan $\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=-2}^{x=+1} = -1-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$, want $\frac{1}{x^2}$ is niet begrensd op het interval $-2 \leqslant x \leqslant 1$. De toepassing van de hoofdstelling is trouwens ook niet gerechtvaardigd. De hoofdstelling mag op $\int_a^b f(x)dx$ alleen worden toegepast als f(x) continu is voor $a \leqslant x \leqslant b$. Nu is $\frac{1}{x^2}$ op het interval $-2 \leqslant x \leqslant 1$ in één punt, nl. x = 0, niet gedefinieerd, laat staan continu; de functie kan ook niet in $x = 0$ continu worden voortgezet. De integraal $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2}$ bestaat niet, omdat de functie onbegrensd is. We kunnen het integraalbegrip echter wat uitbreiden, zodat het ook nog op sommige onbegrensde functies kan worden toegepast.

Def. Stel $f(x)$ gedefinieerd voor $a \leqslant x < b$ en voor iedere keuze van p met $a < p < b$ geldt, dat $f(x)$ integreerbaar is voor $a \leqslant x \leqslant p$.
We definiëren de oneigenlijke integraal van $f(x)$ over het interval $a \leqslant x \leqslant b$ als

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{p \uparrow b} \int_a^p f(x)dx,$$ mits deze limiet bestaat.

Opm. 1 De integraal $\int_a^p$ in het rechterlid is een bepaalde integraal in de zin van paragraaf 1.

Opm. 2 In de definitie wordt niet geëist, dat $f(x)$ onbegrensd is. De definitie mag ook op begrensde functies worden toegepast.

Opm. 3 De voorwaarde dat voor iedere keuze van p met $a < p < b$ geldt, dat $f(x)$ integreerbaar is voor $a \leqslant x \leqslant p$, is automatisch vervuld als $f(x)$ continu is voor $a \leqslant x < b$.

Opm. 4 De keuze van dezelfde notatie voor een oneigenlijke integraal als voor de vroeger gedefinieerde (eigenlijke) integraal houdt het gevaar in, dat twee verschillende dingen met dezelfde notatie worden aangeduid. Dit blijkt echter niet het geval te zijn. Als namelijk $f(x)$ (eigenlijk) integreerbaar is voor $a \leqslant x \leqslant b$, dan is volgens de eerste stelling van § 8. de functie $O(x) = \int_a^x f(t)dt$ continu, dus voor de (eigenlijke) integraal $\int_a^b f(x)dx$ geldt $\int_a^b f(x)dx =$

$$= \lim_{p \uparrow b} \int_a^p f(x)dx,$$ zodat het geen verschil maakt of men $\int_a^b f(x)dx$ als eigenlijke of als oneigenlijke integraal opvat.

<u>Vb. 1</u> $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{p \uparrow 1} \int_0^p \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{p \uparrow 1} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_{x=0}^{x=p} = \lim_{p \uparrow 1} \left[-2\sqrt{1-p}+2\right] = 2 \,.$$

De hierboven gegeven definitie heeft betrekking op het geval, dat de integreerbaarheid der functie verstoord is bij het rechtereindpunt van het interval. Een geheel analoge definitie kan worden gegeven, als dit bij het linkereindpunt van het interval het geval is. We geven niet de volledige formulering, maar alleen de formule:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{p \downarrow a} \int_p^b f(x)dx,$$ mits de limiet bestaat.

<u>Vb. 2</u> $$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{p \downarrow 0} \int_p^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{p \downarrow 0} \left[2\sqrt{x}\right]_p^2 = \lim_{p \downarrow 0} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{p}) = 2\sqrt{2} \,.$$

<u>Vb. 3</u> $$\int_0^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{p \downarrow 0} \int_p^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{p \downarrow 0} \left[-\frac{1}{x}\right]_p^2 = \lim_{p \downarrow 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{p}\right)$$ bestaat niet!

De voorbeelden suggereren de vraag voor welke positieve exponenten α de oneigenlijke integraal $\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha}$ bestaat $(a > 0)$:

<u>Vb. 4</u> $$\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{p \downarrow 0} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_p^a = \lim_{p \downarrow 0} \frac{1}{1-\alpha} (a^{1-\alpha} - p^{1-\alpha}) \,.$$

Deze limiet bestaat als $\alpha < 1$ en bestaat niet als $\alpha > 1$. Voor $\alpha = 1$ krijgen we

$$\int_0^a \frac{dx}{x} = \lim_{p \downarrow 0} \left[\log|x|\right]_p^a = \lim_{p \downarrow 0} (\log a - \log p)$$ bestaat niet.

Ook kan de integreerbaarheid van de functie verstoord zijn in een punt binnen het interval; dan splitsen we het integratie-interval.

<u>Vb. 5</u> $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{p \uparrow 0} \int_{-1}^{p} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{q \downarrow 0} \int_{q}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} =$$

$$= \lim_{p \uparrow 0} \left[\frac{3}{2} x^{2/3}\right]_{x=-1}^{x=p} + \lim_{q \downarrow 0} \left[\frac{3}{2} x^{2/3}\right]_{x=q}^{x=1} = \lim_{p \uparrow 0} \left(\frac{3}{2} p^{2/3} - \frac{3}{2}\right) + \lim_{q \downarrow 0} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} q^{2/3}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0 .$$

<u>Vb. 6</u> $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x}$. We splitsen de integraal in $\int_{-2}^{0}$ en $\int_{0}^{1}$. Ze bestaan geen van beide als oneigenlijke integraal.

Soms is de integreerbaarheid meer dan eens verstoord. Ook in dat geval splitsen we het integratie-interval in stukken.

<u>Vb. 7</u> $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{p \downarrow -1} \int_{p}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \lim_{q \uparrow 1} \int_{0}^{q} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \lim_{p \downarrow -1} (-\arcsin p) + \lim_{q \uparrow 1} (\arcsin q) = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi = \pi .$$

Tenslotte kunnen we nog proberen te integreren over een interval, dat zich naar het oneindige uitstrekt.

<u>Def</u>. Stel $f(x)$ gedefinieerd voor $a \leqslant x$ en voor iedere keuze van $R > a$ geldt, dat $f(x)$ integreerbaar is voor $a \leqslant x \leqslant R$. We definiëren de <u>oneigenlijke integraal</u> van $f(x)$ over het interval $a \leqslant x$ als

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \to \infty} \int_{a}^{R} f(x)dx, \text{ mits deze limiet bestaat.}$$

Op analoge wijze definieert men $\int_{-\infty}^{a}$ en $\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{\infty}$.

<u>Vb. 8</u> Zij $a > 0$.

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{R \to \infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_a^R = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{1-\alpha} (R^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) .$$

Deze limiet bestaat als $\alpha > 1$ en bestaat niet als $\alpha < 1$. Voor $\alpha = 1$ krijgen we

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{R \to \infty} [\log|x|]_a^R = \lim_{R \to \infty} (\log R - \log a),$$ en deze bestaat niet.

HOOFDSTUK III VERVOLG DER DIFFERENTIAALREKENING

§ 1. Volledige inductie

Vb. 1 Beschouw de som

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 .$$

Wij zullen bewijzen dat voor elk natuurlijk getal n geldt

(1) $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) .$$

(2) Men gaat gemakkelijk na dat formule (1) juist is voor $n = 1$.
Uitgaande van de veronderstelling dat (1) juist is voor $n = k$, berekenen we $\sum_{i=1}^{k+1} i^2$. We vinden

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{1}{6} (k+1)(k+2)(2k+3)$$

Deze uitkomst blijkt in overeenstemming te zijn met (1), m.a.w.: uit de veronderstelling dat formule (1) juist is voor $n = k$, volgt dat (1) juist is voor $n = k+1$. Hieruit en uit (2) volgt nu dat (1) juist is voor $n = 2$. Herhaalde toepassing van deze argumentatie geeft dat formule (1) geldt voor $n = 3$, voor $n = 4$, etc. Zo kan men bewijzen dat (1) juist is voor elke $n \geq 1$. Dit is een voorbeeld van de bewijsmethode der volledige inductie.

Vb. 2 h is een getal ≥ -1. Bewijs, dat $(1+h)^n \geq 1 + nh$ voor n natuurlijk.

De bewering is juist voor $n = 1$.
Neem nu aan, dat de formule juist is voor $n = k$ en bewijs haar voor $n = k+1$. Als dat is gebeurd, weten wij dat de formule voor alle natuurlijke n klopt.

Geg. $(1+h)^k \geq 1 + kh$. Te bew. $(1+h)^{k+1} \geq 1 + (k+1)h$.

Bew. $(1+h)^{k+1} = (1+h)(1+h)^k \geq (1+h)(1+kh) = 1 + (k+1)h + kh^2 \geq 1 + (k+1)h$.

§ 2. Het binomium van Newton

Def. $\boxed{n! = 1.2.3\ .\ \ldots\ .\ (n-1)n}$ als n een natuurlijk getal is; $0! = 1$.
Spreek uit: n faculteit.

Def. $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$, ($\alpha$ willekeurig; $k = 1,2,3,\ldots$)

$\binom{\alpha}{0} = 1$. (Spreek uit: α over k).

In het bijzonder is

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (n \geqslant k \geqslant 0,\ n \text{ en } k \text{ beide geheel}).$$

Eigenschappen: $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$ en (Pascal) $\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}$.

Bewijs van Pascal:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}.$$

Met behulp van de eigenschap van Pascal kunnen wij alle $\binom{n}{k}$ opschrijven (driehoek van Pascal).

Stelling van Newton. Voor natuurlijke n geldt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Bewijs met volledige inductie.

1) Voor $n=1$ is de stelling juist, want $a+b = a^1 + b^1$.

2) Aannemende, dat de stelling geldt voor n, gaan wij haar bewijzen voor $(n+1)$.

Geg. zie boven.

Te bew. $(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \ldots + \binom{n+1}{n} a b^n + b^{n+1}$.

Bewijs Wij vermenigvuldigen het gegeven met a, daarna met b, en tellen de resultaten op met gebruikmaking van de eigenschap van Pascal:

$$a(a+b)^n = a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-2}b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^2b^{n-1} + ab^n$$

$$b(a+b)^n = \qquad a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^3 + \ldots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-1} + nab^n + b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + (n+1)a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \binom{n+1}{3}a^{n-2}b^3 + \ldots + \binom{n+1}{n-1}a^2b^{n-1} + (n+1)ab^n + b^{n+1} \; .$$

De stelling van Newton geldt voor $n = 1$, dus ook voor $n = 2$, maar dan ook voor $n = 3$, etc., dus voor alle natuurlijke n.

Vb. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Opm. Op grond van de stelling van Newton noemt men $\binom{n}{k}$ een binomiaalcoëfficiënt.

§ 3. Hogere afgeleiden

De afgeleide van $y = f(x)$ wordt genoteerd met y', of $\frac{dy}{dx}$, en is zelf weer een functie van x.

De tweede afgeleide y'', of $\frac{d^2y}{dx^2}$, is de afgeleide van de afgeleide: $y'' = (y')'$.

De derde afgeleide $y''' = (y'')'$. De n^e afgeleide wordt genoteerd met $y^{(n)}$ of $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Vb. 1 Als een rechtlijnige beweging wordt gegeven door $x = x(t)$, dan is de snelheid ten tijde t: $v(t) = x'(t)$, en de versnelling: $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

Vb. 2 Voor de harmonische trilling geldt: $x = a \sin \omega t$.
Dus $x' = a\omega \cos\omega t$ en $x'' = -a\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x$.
De versnelling is hier dus evenredig met de uitwijking, doch tegengesteld gericht.

Vb. 3 $y = x^3$, dan $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''' = 6$, $y^{IV} = 0$, $y^{V} = 0$, etc., algemeen $y^{(n)} = 0$ voor $n \geqslant 4$.

Vb. 4 $y = e^x$, dan $y' = e^x$, $y'' = e^x$, $y^{(n)} = e^x$.

Vb. 5 $y = \log x$, dan

$$y' = \frac{1}{x}\ ;\ y'' = -x^{-2};\ y''' = (-1)(-2)x^{-3};\ y^{IV} = (-1)(-2)(-3)x^{-4}$$

en $y^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-(n-1))x^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$.

Vb. 6 $y = \arcsin x$, dan

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ y'' = \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}\ ;\ y''' = \frac{1+2x^2}{(\sqrt{1-x^2})^5}\ .$$

Vooralsnog is weinig regelmaat te bespeuren.
Wij beschouwen de hogere afgeleiden van een product $u(x)v(x)$.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''\ .$$

Met volledige inductie volgt de stelling van Leibniz:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \binom{n}{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}\ .$$

Vb. 7 $y = \arcsin x$, dan $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dus $y'\sqrt{1-x^2} = 1$.

Differentieer nogmaals, dan

$$y''\sqrt{1-x^2} - \frac{xy'}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \text{dus} \quad y''(1-x^2) = xy'\ .$$

Wij passen links en rechts de stelling van Leibniz toe en differentiëren n maal:

$$y^{(n+2)}(1-x^2) + ny^{(n+1)}(-2x) + \frac{n(n-1)}{2}y^{(n)}(-2) = xy^{(n+1)} + ny^{(n)}$$

$$(1-x^2)y^{(n+2)} = (2n+1)xy^{(n+1)} + n^2y^{(n)}\ .$$

Dit verband tussen de n^e, $(n+1)^e$ en $(n+2)^e$ afgeleide van arcsin x heet een recurrente betrekking en stelt ons in staat alle afgeleiden te berekenen.

Speciaal geldt voor $x = 0$: $y^{(n+2)}(0) = n^2y^{(n)}(0)$

waaruit volgt dat $y^{(2n)}(0) = 0$ en $y^{(9)}(0) = 7^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2$.

§ 4. Parametervoorstelling van krommen

Wanneer wij een kromme voorstellen door $y = f(x)$, moeten wij ons beperken tot stukken van de kromme zodat bij elke x één y hoort. Vaak is het handiger de kromme op een andere manier voor te stellen, met een hulpgrootheid. In plaats van één der coördinaten in de andere uit te drukken, kunnen wij beide coördinaten x en y uitdrukken in een derde variabele, een parameter. Zo stellen

$$x = x(t) \quad \text{en} \quad y = y(t) \ ,$$

waarin de parameter t bepaalde waarden doorloopt, tezamen een kromme voor.

Vb. 1 $\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{array}\right\} , \quad 0 \leqslant t < 2\pi \ , \quad (a > 0) \ ,$

is een parametervoorstelling van de cirkel met middelpunt O en straal a.

Vb. 2 $\left.\begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \end{array}\right\} , \quad -\infty < t < \infty \ ,$

is een parametervoorstelling van de rechte $x - 3y + 5 = 0$.

Vb. 3 De ellips $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

kan worden voorgesteld door

$$x = a\cos t \quad , \quad y = b\sin t \quad , \quad 0 \leqslant t < 2\pi \ .$$

Meetkundig ziet men, dat t nu is de hoek tussen de positieve x-as en de verbindingsrechte van O met het snijpunt van de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ met de verticaal door het punt.

Opm. Uit de parametervoorstelling van de ellips volgt, dat de ellips uit de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ te krijgen is, door alle y-coördinaten met $\frac{b}{a}$ te vermenigvuldigen. Eveneens is de ellips uit $x^2 + y^2 = b^2$ te krijgen door alle x-coördinaten met $\frac{a}{b}$ te vermenigvuldigen.

Laat een kromme enerzijds door $y = f(x)$ en anderzijds door een parametervoorstelling $x = x(t)$, $y = y(t)$ zijn gegeven. Wij vragen $y' = \frac{dy}{dx}$ uit te drukken in $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ en $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$.

Opl.

Wij vinden $y = f(x)$ uit $x = x(t)$ en $y = y(t)$ door uit de eerste vergelijking op te lossen $t = t(x)$ en het resultaat in de tweede vergelijking in te vullen:

$$y = y\{t(x)\} .$$

Differentieer naar x, dan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad \text{en daar} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}} \quad \text{dus}$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} .$$

Voor punten met horizontale [verticale] raaklijn is dus $\dot{y} = 0$ $[\dot{x} = 0]$.
Hieruit vinden wij ook de tweede afgeleide:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left[\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right] \times \frac{dt}{dx} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}} \quad \text{dus}$$

$$y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x})^3} .$$

Voorbeeld 1 Cycloïde. Een cirkel met straal a en middelpunt M rolt over de x-as. Beschouw de kromme die wordt beschreven door het punt, dat oorspronkelijk in O was. Neem als parameter de hoek t tussen de straal naar het betreffende punt P en de verticaal.

$x_p = OP' = OA - P'A = \overset{\frown}{PA} - P'A = at - a \sin t$ (P' is de projectie van P en A de projectie van M op de x-as)

$y_P = P'P = AB = AM - BM = a - a \cos t$ (B is de projectie van P op MA).

Deze parametervoorstelling voor de cycloïde luidt dus

$$x = at - a \sin t \qquad y = a - a \cos t$$

$$\dot{x} = a - a \cos t \qquad \dot{y} = a \sin t$$

$$\ddot{x} = a \sin t \qquad \ddot{y} = a \cos t .$$

Dus

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a \sin t}{a - a \cos t} = \cot(\tfrac{1}{2} t) = \tan(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{t}{2}) .$$

De raaklijn in P is dus gericht naar het hoogste punt van de cirkel die bij de stand P behoort.

§ 5. Poolcoördinaten

De plaats van een punt in het vlak is aan te geven door gewone coördinaten x,y, maar ook door poolcoördinaten.
Neem een vast punt O, de pool, en een vaste halfrechte door O(de poolas).
Wij bepalen nu een punt door zijn argument φ, vanaf poolas tegen klok in gerekend, en zijn voerstraal $r \geqslant 0$.

Kiest men de poolas als positieve x-as en de voerstraal behorend bij $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ als positieve y-as, dan luidt het verband tussen rechthoekige coördinaten (x,y) en poolcoördinaten (r,φ):

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}.$$

Opm. Door r en φ wordt een punt bepaald, maar omgekeerd bepaalt een punt niet zijn φ, immers (r,φ) en $(r,\varphi + 2k\pi)$ behoren bij hetzelfde punt. Van de oorsprong is φ zelfs geheel onbepaald.

Een kromme kan in poolcoördinaten worden gegeven door het verband

$$r = r(\varphi) \; .$$

Hier fungeert φ als parameter. Deze levert in rechthoekige coördinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\varphi)\cos\varphi \\ y &= r(\varphi)\sin\varphi \end{aligned}\right\}.$$

Vb. 1 Spiraal van Archimedes: $r = \varphi$; $\varphi \geqslant 0$.

Vb. 2 De logarithmische spiraal: $r = e^{\varphi}$; alle φ.

Voor $\varphi > 0$ is $r > 1$, voor $\varphi < 0$ is $r < 1$ en $\lim\limits_{\varphi \to -\infty} r = 0$.

Vb. 3 De hyperbolische spiraal: $r = \dfrac{1}{\varphi}$; $\varphi > 0$.

Wegens $y = r\sin\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$ is het duidelijk, dat $y < 1$ en dat $\lim\limits_{\varphi \to 0} y = 1$.

Laat een kromme zijn gegeven zowel door $y = f(x)$ als door $r = r(\varphi)$.
Wij zoeken het verband tussen

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{en} \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \; .$$

$$\left.\begin{array}{l} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi} .$$

De tweede afgeleide y" is als volgt te bepalen:

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{d\varphi}(y') \times \frac{d\varphi}{dx} .$$

Na enig rekenwerk volgt

$$y'' = \frac{r^2 + 2(\dot{r})^2 - r\ddot{r}}{(\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi)^3} .$$

Opm. Uit de formule voor y' volgt na deling door $\dot{r}\cos\varphi$

$$y' = \tan\alpha = \frac{\tan\varphi + r/\dot{r}}{1 - \tan\varphi \, . \, r/\dot{r}} .$$

Anderzijds volgt, als μ de hoek tussen voerstraal en raaklijn voorstelt, dat

$$\tan\alpha = \tan(\varphi + \mu) = \frac{\tan\varphi + \tan\mu}{1 - \tan\varphi \, . \, \tan\mu} .$$

Hieruit volgt dat

$$\tan\mu = r/\dot{r} .$$

Voor de logarithmische spiraal is $\mu = \frac{\pi}{4}$ = constant.

Vb. 1 Cardioïde

a) Een cirkel met straal a ($a > 0$) en middelpunt N rolt over een andere cirkel met straal a en middelpunt M. Gevraagd wordt de kromme, die wordt beschreven door het punt P van de eerste cirkel, dat oorspronkelijk in O was. De tweede cirkel gaat door O en is vast.
Als C het raakpunt is op zeker moment, dan is
$\overset{\frown}{CP} = \overset{\frown}{CO}$ dus $\angle$ CMO = $\angle$ CNP. Daar NP = a = MO is PO // MN.
Kies als poolas door O het verlengde van MO. Dan is

$a - \frac{1}{2} r = a\cos\varphi$, dus $r = 2a(1 - \cos\varphi)$.

b) Om de vergelijking in (x,y)-coördinaten te krijgen substitueren wij
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $(x,y) \neq (0,0)$, dus

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$x^2 + y^2 + 2ax = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(x^2 + y^2 + 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

Opm. Ga na dat door kwadratering geen nieuwe punten zijn ingevoerd!

c) Wij zoeken de punten met horizontale (en verticale) raaklijn:

$$x = r\cos\varphi = 2a\,(\cos\varphi - \cos^2\varphi)$$

$$y = r\sin\varphi = 2a\,(\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)$$

$$\dot{x} = 2a\,(-\sin\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi) = 2a\,(2\cos\varphi - 1)\sin\varphi$$

$$\dot{y} = 2a\,(\cos\varphi - \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2a\,(\cos\varphi - \cos 2\varphi).$$

Dus $\dot{x} = 0$ als $\varphi = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$. Dan $r = 0, a, 4a, a$

$\dot{y} = 0$ als $\cos\varphi = \cos 2\varphi$, dus $\varphi = 2\varphi$ of $\varphi = 2\pi - 2\varphi$ of $\varphi = 4\pi - 2\varphi$.

Dus $\varphi = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ en $r = 0, 3a, 3a$.

d) In O is

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{\cos\varphi - \cos 2\varphi}{\sin\varphi(2\cos\varphi - 1)} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{2\sin\frac{3}{2}\varphi\,\sin\frac{1}{2}\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi\,\cos\frac{1}{2}\varphi(2\cos\varphi - 1)} = 0$$

Vb. 2 Lemniscaat: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Als $\varphi = 0$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
dan $r = a$	daalt	0	bestaat niet	0	stijgt a

$$x = r\cos\varphi = a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi};\quad \dot{x} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}(-\sin\varphi\cos 2\varphi - \cos\varphi\sin 2\varphi) =$$

$$= \frac{-a\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$y = r\sin\varphi = a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi};\quad \dot{y} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}(\cos\varphi\cos 2\varphi - \sin\varphi\sin 2\varphi) =$$

$$= \frac{a\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Een horizontale raaklijn treedt op als $\dot{y} = 0$, dus als $\varphi = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\cot 3\varphi$ verklaart de raaklijnen in $(a,0)$, $(0,0)$ en $(-a,0)$.

Opm. De vergelijking van de lemniscaat in de Cartesische coördinaten luidt, omdat

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi, \quad r^4 = a^2r^2\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$
$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)\ .$$

§ 6. Functies van twee variabelen

A. Def. Een functie van twee onafhankelijke variabelen, $z = f(x,y)$ is een voorschrift, dat aan elk geoorloofd paar (x,y) een getal toevoegt.

Vb. 1 $z = x^2y^3$.

Vb. 2 $z = \arctan y/x$. Hier $(0,b)$ niet geoorloofd.

B. Grafiek. Aan elk geoorloofd punt (x,y) van het (x,y)-vlak is een waarde van z toegevoegd. Zet deze z-waarde af loodrecht op het (x,y)-vlak, dan vormt de verzameling der punten (x,y,z), waarvan de coördinaten voldoen aan het voorschrift, een oppervlak.
Dit is de *grafiek van de functie*.

Vb. 1 $z = 6 - 3x - 2y$. De grafiek is een vlak.

Vb. 2 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. De grafiek is een halve bol.

Vaak is het handiger om een beeld van de grafiek te krijgen door een hoogtekaart te maken: bij elk punt (x,y) van het (x,y)-vlak schrijft men de bijbehorende hoogte.

Voorbeeld 1 $z = \dfrac{2y}{1 + x^2 + y^2}$.

Voorbeeld 2 $z = \dfrac{y^2 - x}{y^2}$.

Voor $(a,0)$ is de functie niet gedefinieerd.
Voor $x = 0$ is $z = 1$;
Voor $x = y^2$ is $z = 0$;
Voor $x = -y^2$ is $z = 2$;

Voor $2x = y^2$ is $z = \frac{1}{2}$;
Voor $x = 10y^2$ is $z = -9$.

C. Continuïteit. Ter voorbereiding van de definitie van continuïteit breiden we het begrip omgeving uit tot twee variabelen (overgang van rechte lijn naar plat vlak).

Def. Als U een omgeving van a is en V een omgeving van b, dan is de verzameling der punten (x,y), waarvoor $x \in U$ en $y \in V$, een omgeving van (a,b).

Voorbeeld Stel $\alpha_1 < a < \alpha_2$, $\beta_1 < b < \beta_2$, dan vormen de punten (x,y), waarvoor

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 < x < \alpha_2 \\ \beta_1 < y < \beta_2 \end{array}\right\},$$

een omgeving van (a,b). Meetkundig is dit een rechthoek met zijden evenwijdig aan de x-as en de y-as, waarbinnen het punt (a,b) ligt.

Def. $f(x,y)$ is continu in (a,b), als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een omgeving van (a,b) bestaat, zodat voor alle geoorloofde (x,y) in die omgeving geldt

$$|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon .$$

Vb. 1
$$\left.\begin{array}{ll} f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{voor } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 & \end{array}\right\}.$$

Deze functie is continu in $(0,0)$, want voor $(x,y) \neq (0,0)$ geldt

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}\,|xy| \leqslant |xy| .$$

Om dit $< \varepsilon$ te krijgen, kan men bijv. $|x| < \varepsilon$ en $|y| < 1$ kiezen, hetgeen een omgeving van $(0,0)$ levert. (Andere mogelijkheid: $|x| < \sqrt{\varepsilon}$, $|y| < \sqrt{\varepsilon}$).

Vb. 2 $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ voor $(x,y) \neq (0,0)$ is in $(0,0)$ niet continu voort te zetten; dit blijkt uit de hoogtekaart.

Wij behandelen nu de algemene vraag:

Hoe verandert $f(x,y)$ als x en y veranderen?

D. Hoe verandert $f(x,y)$ als één variabele constant is?

Laat $P(a,b,f(a,b))$ een punt van de grafiek zijn en Q de projectie van P op het (x,y)-vlak. Als Q loopt langs $y = b$, dan doorloopt P de kromme $z = f(x,b)$ in het vlak $x'O'z'$. De afgeleide van $z = f(x,b)$ in P is

$$\tan\alpha = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} =$$

$$= (\text{notatie}) = f_x(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(a,b)} .$$

Dit is de partiële afgeleide naar x in (a,b). Bij het differentiëren blijft y constant.

Als Q loopt langs $x = a$, dan doorloopt P in $y''O''z''$: $z = f(a,y)$, die in P de afgeleide heeft

$$\tan\beta = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k} =$$

$$= (\text{notatie}) = f_y(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(a,b)}$$

genaamd de partiële afgeleide naar y in (a,b). Bij het differentiëren blijft x constant.

Vb. 1 $z = xy^2 + y^3$, dan $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2$ en $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 3y^2$.

Vb. 2 $z = \arctan\frac{y}{x}$, dan $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}$ en $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$.

Merk op, dat $\frac{\partial z}{\partial x}$ zelf weer een functie van x en y is!

Een continue functie behoeft niet partieel differentieerbaar te zijn.

Vb. 3 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ is continu in $(0,0)$, want

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \sqrt{x^2+y^2},$$

hetgeen $< \varepsilon$ te krijgen is, bijv. door $|x| < \frac{1}{2}\varepsilon$, $|y| < \frac{1}{2}\varepsilon$ te kiezen. De functie is echter niet partieel differentieerbaar naar x in (0,0), want

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \quad \text{bestaat niet.}$$

Een functie die in een punt partieel differentieerbaar naar x en y is, behoeft daar niet continu te zijn.

Vb. 4 $f(x,0) = 1 = f(0,y)$ en $f(x,y) = 0$ als $x \neq 0$ en $y \neq 0$.
$f(x,y)$ is partieel differentieerbaar naar x en naar y in (0,0), want

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0 \quad \text{en analoog voor } \frac{\partial f}{\partial y}.$$

$f(x,y)$ is echter niet continu in (0,0).

E. Hoe verandert $f(x,y)$ als x en y onafhankelijk van elkaar veranderen?

Laat P het punt $(a,b,f(a,b))$ en T het punt $(a+h,b+k,f(a+h,b+k))$ van de grafiek zijn, Q de projectie van T op het (x,y)-vlak en R de projectie van P op QT.
Teneinde de veranderingen der functiewaarden,

$$RT = f(a+h,b+k) - f(a,b),$$

voor verschillende waarden van h en k te onderzoeken, gaan we als volgt te werk:
Breng het vlak aan door de raaklijnen in P aan de krommen $z = f(x,b)$, $y = b$ en $z = f(a,y)$, $x = a$ en laat S het snijpunt zijn van dit vlak met QT.
Dan is

$$RS = h \tan\alpha + k \tan\beta = h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P + k\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P = Ah + Bk.$$

Wil men nu van een raakvlak aan het oppervlak kunnen spreken, dan moet het verschil

$$\tan\angle TPR - \tan\angle SPR = \frac{RT - RS}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{ST}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

klein zijn, als $|h|$ en $|k|$ klein zijn.

Def. $f(x,y)$ heet differentieerbaar in (a,b), als er constanten A en B en een functie $\rho(h,k)$ bestaan, zodat $\rho(0,0) = 0$, $\rho(h,k)$ continu is in $(0,0)$ en

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\,\rho(h,k).$$

Stelling $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)}$, $B = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)}$.

Bewijs Neem $k = 0$, dan is voor $h \neq 0$:

$$\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = A + \frac{|h|}{h}\rho(h,0) \text{ ,}$$

waaruit $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)}$ direct volgt. $B = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)}$ gaat analoog.

Populair: $f(x,y)$ is differentieerbaar in (a,b) als de toename $f(a+h,b+k) - f(a,b)$ "goed" benaderd wordt door $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)}h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)}k$.

Def. Noem $h = dx$ en $k = dy$ en
$$df = dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)}dy$$
de differentiaal in (a,b).

Gevolg Zij $f(x,y)$ differentieerbaar in (a,b). Dan is $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)}dy$ voor alle dx en dy gedefinieerd (raakvlak!). Als dx en dy klein genoeg zijn (dus in de buurt van (a,b)), dan is df een "goede" benadering voor de toename van $f(x,y)$.

Vb. $z = x^2 + y^2$ dan $dz = 2xdx + 2ydy$ en in $(1,1)$: $dz = 2dx + 2dy$.

Gevolg De vergelijking van het raakvlak in $P = (x_0, y_0, z_0)$ aan de grafiek van $z = f(x,y)$ luidt

$$z - z_0 = (x - x_0)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + (y - y_0)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 .$$

Uit de definitie volgt direct:

Stelling Als $f(x,y)$ differentieerbaar is in (a,b), dan is $f(x,y)$ continu in (a,b).

<u>Stelling</u> Als $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ in een omgeving van (a,b) bestaan en in (a,b) continu zijn, dan is f(x,y) differentieerbaar in (a,b).

<u>Bewijs</u> Aangezien $\frac{\partial f}{\partial x}$ in een omgeving van (a,b) bestaat en in (a,b) continu is, volgt dat in een dergelijke omgeving geldt

$$f(a+h,b+k) - f(a,b+k) = hf_x(a+\theta_1 h,b+k) = hf_x(a,b) + h\rho(h,k) ;$$

$|\rho(h,k)| < \varepsilon$, als h en k voldoende klein worden gekozen. Uit de voorwaarden van de stelling volgt eveneens dat in een omgeving van (a,b) geldt

$$f(a,b+k) - f(a,b) = kf_y(a,b+\theta_2 k) = kf_y(a,b) + k\tau(k) ,$$

waarbij $|\tau(k)| < \varepsilon$ als k voldoende klein is.
Nu volgt

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b)+hf_x(a,b) + kf_y(a,b) + h\rho(h,k) + k\tau(k) = \\ &= f(a,b)+hf_x(a,b) + kf_y(a,b) + \sqrt{h^2 + k^2}\,\sigma(h,k) \end{aligned}$$

met

$$\sigma(h,k) = \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\,\rho(h,k) + \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\,\tau(k) \to 0 \quad \text{als } \sqrt{h^2+k^2} \to 0 .$$

Dus is de functie f(x,y) differentieerbaar in het punt (a,b).

<u>Opm</u>. Uit deze stelling volgt, dat functies met continue partiële afgeleiden differentieerbaar zijn.

F. <u>Hoe verandert f(x,y) bij onderling afhankelijke variabelen</u>?

<u>Stelling</u> Als $z = f(x,y)$, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ differentieerbare functies zijn, dan is

$z = f(\varphi(t),\psi(t)) = z(t)$

ook differentieerbaar en voor de afgeleide geldt de volgende kettingregel

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f_x \cdot \varphi'(t) + f_y \cdot \psi'(t)$$

<u>Bewijs</u> Wij bewijzen de differentieerbaarheid voor $t = a$. Aangezien $\varphi(t)$ en $\psi(t)$ differentieerbare functies zijn, geldt in een omgeving van $t = a$

$$f(\varphi(a+h),\psi(a+h)) = f(\varphi(a) + h\varphi'(a) + h\rho(h),\psi(a) + h\psi'(a) + h\sigma(h))$$

met $\lim_{h\to 0} \rho(h) = 0$, $\lim_{h\to 0} \sigma(h) = 0$.

Volgens de voorwaarden van de stelling is $z = f(x,y)$ een differentieerbare functie. We kunnen dus schrijven

$$f(\varphi(a+h),\psi(a+h)) = f(\varphi(a),\psi(a)) + \{h\varphi'(a)+h\rho(h)\} \,.\, f_x(\varphi(a),\psi(a)) +$$

$$+ \{h\psi'(a)+h\sigma(h)\} \,.\, f_y(\varphi(a),\psi(a)) + \sqrt{[h\varphi'(a)+h\rho(h)]^2 + [h\psi'(a)+h\sigma(h)]^2}\,\tau(..,..) =$$

$$= f(\varphi(a),\psi(a)) + h\{f_x(\varphi(a),\psi(a))\varphi'(a) + f_y(\varphi(a),\psi(a))\psi'(a)\} + h\nu(h)$$

met

$$\nu(h) = \rho(h)f_x(\varphi(a),\psi(a)) + \sigma(h)f_y(\varphi(a),\psi(a)) + \frac{|h|}{h}\sqrt{[\varphi'(a)+\rho(h)]^2 + [\psi'(a)+\sigma(h)]^2}\,\tau(h) .$$

Omdat

$\lim_{h\to 0} \tau(h) = 0$, $\lim_{h\to 0} \rho(h) = 0$ en $\lim_{h\to 0} \sigma(h) = 0$, volgt $\lim_{h\to 0} \nu(h) = 0$.

Dus is $z = f(\varphi(t),\psi(t))$ een differentieerbare functie voor $t = a$ met afgeleide $f_x(\varphi(a),\psi(a)) \,.\, \varphi'(a) + f_y(\varphi(a),\psi(a)) \,.\, \psi'(a)$.

Wij zien dat $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Dit is dezelfde formule als onder E, echter met andere betekenis der differentialen, die hier differentialen zijn van functies van één variabele, nl. t.

<u>Vb. 1</u> $z = xe^y$ met $x = \sin t$ en $y = t^2$. Dan

$$\frac{dz}{dt} = e^y \cos t + xe^y\, 2t = e^{t^2} \cos t + e^{t^2}\, 2t \sin t.$$

<u>Vb. 2</u> $z = uv$ met $u = u(t)$ en $v = v(t)$. Dan

$$\frac{dz}{dt} = v\frac{du}{dt} + u\frac{dv}{dt}$$ (productregel bij differentiëren).

Teneinde het verschil tussen $\frac{dz}{dx}$ en $\frac{\partial z}{\partial x}$ te laten uitkomen, beschouwen wij een functie $z = f(x,y)$ waarbij $y = y(x)$.

Nu speelt x de rol van t in de stelling, nl.

$$\left.\begin{array}{l} z = f(x,y) \\ y = y(x) \\ x = x \end{array}\right\} \text{ dan } z = f[x,y(x)] \text{ en } \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} .$$

<u>Vb. 3</u>

$$\left.\begin{array}{l} z = x + y^2 \\ \\ y = \log x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{dan } \frac{\partial z}{\partial x} = 1, \text{ en in } (e,1) \text{ is } \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(e,1)} = 1, \\ \\ \text{maar } \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{2 \log x}{x} \text{ ; in } (e,1) \text{ is } \left(\frac{dz}{dx}\right)_{(e,1)} = 1 + \frac{2}{e} . \end{array}$$

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(e,1)}$ is een maat voor de verandering op de doorsnede van $z = x + y^2$ met vlak $y = 1$

$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{(x=e)}$ is een maat voor de verandering op de doorsnede van $z = x + y^2$ met de cilinder $y = \log x$.

G. <u>Hoe verandert f(x,y) als x en y afhangen van twee onafhankelijk variabelen u en v?</u>

Zij $z = f(x,y)$ en $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Vul in, dan

$$z = f[x(u,v), y(u,v)] = F(u,v) .$$

Ook hier geldt, dat als $f(x,y)$, $x(u,v)$ en $y(u,v)$ differentieerbaar zijn, ook de samengestelde functie $F(u,v)$ differentieerbaar is. Het bewijs, dat analoog is met het vorige bewijs, geven we niet. Nemen we de differentieerbaarheid aan, dan kunnen de partiële afgeleiden uit de in het vorige geval opgestelde kettingregel worden gevonden.

Neem v constant, en pas de kettingregel toe, dan

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} .$$

Neem vervolgens u constant, dan volgt weer met de kettingregel

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} .$$

Daar $z = F(u,v)$ is per definitie

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv\ .$$

Vul de zojuist gevonden formules in, dan

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\right) = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\ .$$

Wij hebben aangetoond de volgende formule:

Als $z = f(x,y)$ dan $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$.

Deze formule is een definitie als x en y onafhankelijk variabel zijn. De formule is in F bewezen voor het geval dat x en y afhankelijk zijn van één parameter. Hierboven is de formule bewezen voor het geval dat x en y afhankelijk zijn van twee parameters.

Voorbeeld Zij $z = f(x,y)$. Voer in poolcoördinaten $x = r\cos\varphi$,
$y = r\sin\varphi$,

en bereken $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$.

Opl. Pas de kettingregel toe op $z = f[x(r,\varphi),\, y(r,\varphi)]$, dan

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi;\quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{\partial z}{\partial x}\,r\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\,r\cos\varphi\ .$$

Hieruit volgt

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\ .$$

H. Functies van drie variabelen

Voor $w = f(x,y,z)$ is de definitie der partiële afgeleiden

$$\frac{\partial w}{\partial x}\,,\ \frac{\partial w}{\partial y}\,,\ \frac{\partial w}{\partial z}$$

analoog aan die voor functies van twee variabelen. Nu moeten echter steeds twee variabelen constant worden gehouden.

$f(x,y,z)$ heet differentieerbaar in (a,b,c) als

$f(a+h,b+k,c+\ell) - f(a,b,c) = Ah + Bk + C\ell + \sqrt{h^2+k^2+\ell^2}\,\rho(h,k,\ell)$, waarbij $\rho(0,0,0) = 0$ en $\rho(h,k,\ell)$ continu is in $(0,0,0)$.

Dan is $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b,c)}$, $B = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b,c)}$, $C = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(a,b,c)}$.

Kettingregels:

1) Als $w = f(x,y,z)$ en $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, dan

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} .$$

2) Als $w = f(x,y,z)$ en $x = x(t,u)$, $y = y(t,u)$, $z = z(t,u)$, dan

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \text{ en } \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} .$$

§ 7. Impliciet gegeven functies

A. $F(x,y) = 0$.

Voorbeeld De cirkel met middelpunt (0,0) en straal a is de verzameling van de punten, waarvan de coördinaten voldoen aan

$$x^2 + y^2 = a \quad .$$

Men noemt deze vergelijking de vergelijking van de cirkel.
De vergelijking komt overeen met twee functies, nl.

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{en} \quad y = -\sqrt{a^2 - x^2} .$$

De afgeleiden van deze functies zijn resp.

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{en} \quad y' = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} .$$

Voor beide functies geldt dus

$$y' = -\frac{x}{y} .$$

De laatste formule is door een omweg verkregen. Deze omweg is bij het bepalen van de afgeleide der drie functies, die door de vergelijking

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

zijn gegeven, veel moeilijker omdat deze derdegraadsvergelijking in y niet gemakkelijk oplosbaar is. Wij zoeken nu een methode om, als de functies door een vergelijking zijn gegeven, toch de afgeleiden eenvoudig te bepalen.

Door $F(x,y) = 0$ heet y impliciet als functie van x gegeven. Wij kunnen ons hieruit $y = y(x)$ opgelost denken en $\frac{dy}{dx}$ als volgt berekenen.
Door toepassing van de kettingregel op $z = 0 = F(x,y)$, $x = x$, $y = y(x)$ volgt

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

waaruit $\frac{dy}{dx}$ kan worden berekend. In feite komt het erop neer dat wij de uit $F(x,y) = 0$ opgelost gedachte $y = y(x)$.weer substitueren en de verkregen identiteit in x

$$F\{x,y(x)\} = 0$$

naar x differentiëren. Uit de verkregen vergelijking kan dan y' worden opgelost.

Voorbeeld 1 De cirkel $x^2 + y^2 = a^2$.
Denk hieruit opgelost $y = y(x)$, vul in en differentieer:

$$2x + 2yy' = 0 \quad \text{dus} \quad y' = -\frac{x}{y}\,.$$

Wij bepalen nog de tweede afgeleide door de ons uit $x^2 + y^2 = a^2$ opgelost gedachte $y(x)$ en $y'(x)$ te substitueren in $x + yy' = 0$ en te differentiëren:

$$1 + (y')^2 + yy'' = 0 \quad \text{dus} \quad y'' = -\frac{a^2}{y^3}\,.$$

Voorbeeld 2 (logarithmische spiraal). $\log\sqrt{x^2 + y^2} - \arctan y/x = 0$.
Denk opgelost $y = y(x)$, vul in en differentieer:

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} - \frac{xy' - y}{[1 + (\frac{y}{x})^2]x^2} = 0 \quad \text{dus} \quad y' = \frac{x+y}{x-y}\,.$$

Nogmaals differentiëren geeft

$$y'' = 2\,\frac{x^2 + y^2}{(x-y)^3}\,.$$

Voorbeeld 3 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.
De methode toepassend vinden wij $3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0$; $y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$.

Blijkbaar kunnen extrema optreden als $y = x^2$, dus in verband met de oorspronkelijke vergelijking, voor $x^6 = 2x^3$, dus voor $x = 0$ en $x = \sqrt[3]{2}$.

Het punt $(0,0)$ is een bijzonder punt, omdat daar ook $y^2 - x = 0$. Om het gedrag in $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ na te gaan, bepalen we ook de tweede afgeleide.

$$(x - y^2)y' = x^2 - y,$$

$$(x - y^2)y'' + (1 - 2yy')y' = 2x - y',$$

dus in $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ is $y'' = -2$, dus y' monotoon dalend en $= 0$, dus y maximaal.

Om de grafiek van de vergelijking te tekenen merken wij op dat er symmetrie t.o.v. $y = x$ bestaat. Snijding met de rechte $y = -x+p$ levert

$$x^2(3p+3) - 3xp(p+1) + p^3 = 0 .$$

Voor $p = -1$ is er geen snijpunt, voor $p = 0$ is $(0,0)$ een dubbel snijpunt, terwijl uit

$$\text{Discriminant} = 3p^2(p+1)(3-p)$$

blijkt, dat slechts bij $-1 < p \leqslant 3$ snijpunten optreden.

De gevonden grafiek is het Folium van Descartes.

B. $\underline{F(x,y,z) = 0}$. Beschouw $z = z(x,y)$ en bepaal $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Door toepassing van de kettingregel op $w = 0 = F(x,y,z)$, $x = x$, $y = y$, $z = z(x,y)$ volgt na partiële differentiatie

$$\left.\begin{aligned} &\text{naar } x\text{: } 0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \\ &\text{naar } y\text{: } 0 = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}\right\}$$

waaruit, indien $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, de $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ kunnen worden berekend.

Voorbeeld $x = e^y \sin z$. Gevraagd wordt te berekenen de uitdrukking

$$e^{2y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 .$$

Opl. Partieel differentiëren levert op

$$\text{naar } x\text{: } 1 = e^y \cos z \,\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\text{naar } y\text{: } 0 = e^y \sin z + e^y \cos z \,\frac{\partial z}{\partial y} .$$

Hieruit zijn $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ te berekenen. Substitutie levert als het gevraagde antwoord: 1.

C. $\left.\begin{array}{l} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{array}\right\}$ Beschouw $z = z(x)$ en $y = y(x)$ en bepaal y' en z'.

Differentiatie naar x levert de beide formules

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 ,$$

waaruit y' en z' volgen.

Voorbeeld

$x^2 + y^2 + z^2 = 5$ Gevraagd wordt te berekenen de waarden van

$xy + yz = 2$ $y'(x)$, $z'(x)$, $z''(x)$ voor $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$.

Opl. Differentiatie naar x levert

$2x + 2yy' + 2zz' = 0$; $y + (x + z)y' + yz' = 0$.

Voor $(x,y,z) = (0,1,2)$ wordt dit

$y'(0) + 2z'(0) = 0$; $1 + 2y'(0) + z'(0) = 0$

waaruit $y'(0) = -2/3$ en $z'(0) = 1/3$.

Differentieer nu nogmaals naar x, dan

$1 + (y')^2 + yy'' + (z')^2 + zz'' = 0;$

$y' + (x + z)y'' + (1 + z')y' + y'z' + yz'' = 0$

hetgeen voor $(x,y,z) = (0,1,2)$ wordt gereduceerd tot twee vergelijkingen voor $y''(0)$ en $z''(0)$, waaruit volgt $z''(0) = -44/27$.

D. $\left.\begin{array}{l} F(x,y,z,t) = 0 \\ G(x,y,z,t) = 0 \end{array}\right\}$ Beschouw $z = z(x,y)$ en $t = t(x,y)$ en bereken $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}$.

Vier maal toepassing van de kettingregel geeft

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \; ; \; \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \; ; \; \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

waaruit de gevraagde afgeleiden volgen.

<u>Voorbeeld</u> $xy + zt = 8$ en $x + y + z + t = 6$.
Beschouw x en y als onafhankelijk veranderlijke en bepaal $\frac{\partial z}{\partial x}$.

<u>Opl</u>. Partiële differentiatie naar x levert

$$y + z\frac{\partial t}{\partial x} + t\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad 1 + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

waaruit:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z-y}{t-z}.$$

E. De algemene behandeling is nu duidelijk. Wij geven nog een
<u>Voorbeeld</u>

$$\left.\begin{aligned} x + y &= t + u \\ x + y^2 &= -t + u^2 \\ x^2 + y^2 &= t^2 + u \end{aligned}\right\}$$

Beschouw x als onafhankelijk variabel en bereken $y'(x)$ voor $x = y = t = u = 0$.

<u>Opl</u>. Uit volgt

$$\left.\begin{aligned} 1 + y' &= t' + u' \\ 1 + 2yy' &= -t' + 2uu' \\ 2x + 2yy' &= 2tt' + u' \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 1 + y'(0) &= t'(0) + u'(0) \\ 1 &= -t'(0) \\ 0 &= u'(0) \end{aligned}\right\} \text{dus } y'(0) = -2.$$

§ 8. <u>Hogere partiële afgeleiden</u>

A. <u>Definitie</u>

Als $z = f(x,y)$, dan zijn $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ zelf ook functies van x en y.

<u>Def</u>. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}$; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{xy}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{yx} \; ; \; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}.$$

<u>Voorbeeld</u> $z = x^2y^3$, dan $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3$ en $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2$. Dus

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3 \; ; \; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6xy^2 \; ; \; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2 \; ; \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2y.$$

Merk op, dat $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

<u>Stelling</u> Als $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ bestaan in een omgeving van (a,b) en continu zijn in (a,b), dan geldt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ in } (a,b).$$

<u>Bewijs</u>

We passen de stelling van het gemiddelde der differentiaalrekening toe (zie hoofdstuk II, § 3.), die zegt, dat als $g(t)$ differentieerbaar is voor $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, er een τ bestaat met $\alpha < \tau < \beta$, waarvoor

$$g'(\tau) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} .$$

Stellen we $h = \beta - \alpha$ en $\theta = \frac{\tau - \alpha}{\beta - \alpha}$, dan is $\beta = \alpha + h$ en $\tau = \alpha + \theta h$.

We kunnen dan ook zeggen, dat er een θ bestaat met $0 < \theta < 1$, zodat

$$g(\alpha + h) - g(\alpha) = hg'(\alpha + \theta h) .$$

Bij deze formulering behoeft h niet positief te zijn.

Zij $U = f(a + h,b + k) - f(a + h,b) - f(a,b + k) + f(a,b)$.

1) Zij $\varphi(x,y) = f(x + h,y) - f(x,y)$, dan $U = \varphi(a,b + k) - \varphi(a,b)$.

Volgens de stelling van het gemiddelde, twee maal toegepast, is

$$U = k \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b + \theta_1 k) = k\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a + h,b + \theta_1 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b + \theta_1 k)\right] =$$

$$= k \cdot h \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta_2 h,b + \theta_1 k) \quad \text{met } 0 < \theta_1 < 1 \text{ en } 0 < \theta_2 < 1 .$$

2) Zij $\psi(x,y) = f(x,y + k) - f(x,y)$, dan

$U = \psi(a + h,b) - \psi(a,b)$.

Pas wederom tweemaal de stelling van het gemiddelde toe, dan

$$U = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \theta_3 h,b + \theta_4 k) \quad \text{met } 0 < \theta_3 < 1 \text{ en } 0 < \theta_4 < 1 .$$

3) Uit 1) en 2) volgt dus dat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta_2 h,b + \theta_1 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + \theta_3 h,b + \theta_4 k) .$$

Laat nu h en k tot nul naderen, dan volgt op grond van de continuïteit der gemengde tweede afgeleiden dat zij in (a,b) gelijk zijn.

Opm. Dat de voorwaarde betreffende de continuïteit in deze stelling niet gemist kan worden, blijkt uit het volgende.

Voorbeeld Zij

$$\left.\begin{array}{ll} f(x,y) = xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{voor } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 & \end{array}\right\}$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} .$$

$$f_y(h,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(h,k) - f(h,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{f(h,k)}{k} =$$

$$\left.\begin{array}{l} (\text{voor } h \neq 0) = \lim\limits_{k \to 0} h\,\dfrac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} = h \\ (\text{voor } h = 0) = \lim\limits_{k \to 0} 0 = 0 \end{array}\right\} f_y(h,0) = h .$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} 1 = 1 .$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} .$$

$$f_x(0,k) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,k) - f(0,k)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,k)}{h} =$$

$$\left.\begin{array}{l} (\text{voor } k \neq 0) = \lim\limits_{h \to 0} k\,\dfrac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} = -k \\ (\text{voor } k = 0) = \lim\limits_{h \to 0} 0 = 0 \end{array}\right\} f_x(0,k) = -k .$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k \to 0} -1 = -1 .$$

In dit voorbeeld is dus $f_{yx} \neq f_{xy}$ in $(0,0)$.

Analoog definieert men de derde partiële afgeleiden, ook van functies van meer dan twee variabelen.

Als is voldaan aan zekere voorwaarden, dan zijn weer gemengde partiële afgeleiden gelijk, b.v.

als $w = f(x,y,z)$ dan $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial x}$.

Als het tegendeel niet uitdrukkelijk wordt vermeld, nemen we voortaan aan, dat van de door ons beschouwde functies de gemengde partiële afgeleiden die door verwisseling van differentiatievolgorde uit elkaar ontstaan inderdaad gelijk zijn.

B. Kettingregels

De kettingregels voor hogere afgeleiden kunnen in elk afzonderlijk geval worden afgeleid door toepassing van de gewone kettingregel, als men maar steeds beseft dat partiële afgeleiden van alle variabelen afhangen.

1) Als $z = f(x,y)$ en $x = x(t)$, $y = y(t)$, dan $z = f[x(t),y(t)]$ en

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \text{en}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{dy}{dt}\right]\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2 y}{dt^2} + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}\right]\frac{dy}{dt} .$$

2) Als $z = f(x,y)$, $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, dan $z = f[x(u,v),y(u,v)]$ en

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} .$$

Partiële differentiatie van deze formule en die voor $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ levert drie formules op, waarvan er één luidt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial v}\right]\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right]\frac{\partial y}{\partial u} .$$

De hierna volgende voorbeelden 1 en 2 zijn aanloopjes tot de voorbeelden 3 en 4, waarin de resultaten van paragraaf 8 en 9 gecombineerd worden. Speciaal voorbeeld 3 is van belang voor de toepassingen.

Vb. 1 Zij $z = f(x,y)$ met $x = u + v$, $y = u - v$. Gevraagd wordt $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$.

Opl. $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$. Differentieer nu naar v, dan

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \cdot (-1) + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot 1 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot (-1) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} .$$

Vb. 2 Zij $z = f(x,y)$ met $x = u + v$, $y = u - v$. Gevraagd wordt $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ uit te drukken in z,u,v. Door voorbeeld 1 weten wij het antwoord reeds.

Opl. Vul x en y in, dan staat er

$$z = f[x(u,v),y(u,v)] = \varphi(u,v)$$

terwijl in het gegeven impliciet staat $u = u(x,y)$ en $v = v(x,y)$. In dit voorbeeld is namelijk $u = \frac{1}{2}(x+y)$, $v = \frac{1}{2}(x-y)$. Dus $z = \varphi(u,v)$ met $u = u(x,y)$ en $v = v(x,y)$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial v}$. Evenzo $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial v}$.

Nogmaals differentiëren geeft

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{1}{2}\right] .$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] .$$

Aftrekken geeft het verwachte antwoord: $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.

Vb. 3 Zij $z = f(x,y)$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Gevraagd wordt $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ uit te drukken in z,r,φ.

Opl. $z = f[x(r,\varphi), y(r,\varphi)] = F(r,\varphi)$

terwijl impliciet gegeven zijn $r = r(x,y)$ en $\varphi = \varphi(x,y)$. Dus

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} .$$

We bepalen nu eerst $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ door impliciet differentiëren uit $x = r \cos \varphi$ en $y = r \sin \varphi$:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial r}{\partial x}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial r}{\partial x}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial r}{\partial y}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ 1 &= \frac{\partial r}{\partial y}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}\,.$$

Vul dit in, dan volgen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial\varphi}\,\frac{\sin\varphi}{r} \quad \text{en} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\,\frac{\cos\varphi}{r}\,.$$

Differentieer nu nogmaals naar x (resp. naar y) en tel op, dan krijgt men tenslotte

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}$$

de <u>operator van Laplace</u> in poolcoördinaten, toegepast op z.

<u>Vb. 4</u> Zij $z = f(x,y)$ en $x = u^2 + v^2$, $y = u + v$. Gevraagd wordt om

$$(2x - y^2)\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} \text{ in } z,u,v \text{ uit te drukken.}$$

<u>Opl</u>. $z = \varphi(u,v) = \varphi[u(x,y),v(x,y)]$. Wij zoeken eerst, teneinde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

te kunnen uitrekenen, $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $\frac{\partial v}{\partial x}$, die volgen uit

$$\left.\begin{aligned} x = u^2 + v^2, &\text{ dus } \quad 1 = 2u\,\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\,\frac{\partial v}{\partial x} \\ y = u + v\ \ , &\text{ dus } \quad 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2(u-v)}\,.$$

Dus $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2(u-v)}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ of $2(u-v)\,\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}$.

Partiële differentiatie naar x levert

$$2(u-v)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 2\left[\frac{1}{2(u-v)} + \frac{1}{2(u-v)}\right] = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$4(u-v)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$(2x - y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right].$$

<u>Opmerking</u>

Generalisatie van voorbeeld 3 in de ruimte, namelijk voor bolcoördinaten.

Neem als coördinaten van het punt $P = (x,y,z)$:

ρ = afstand OP,

θ = hoek tussen OP en positieve z-as,

φ = hoek tussen OQ en positieve x-as, waarin Q de projectie van P op het (x,y)-vlak is.

Dan geldt:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z &= \rho \cos\theta \end{aligned}\right\}.$$

Voor de Laplace-operator berekent men:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\cot\theta}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

HOOFDSTUK IV MEETKUNDE EN ALGEBRA

§ 1. Vectoren in ruimte en vlak

A. Zij O een vast punt, genaamd de oorsprong. Een vector $\underline{a}$ is de pijl van O naar een punt A.

Twee vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ kunnen worden opgeteld: $\underline{a} + \underline{b}$. Een vector $\underline{a}$ kan met een reëel getal λ (een scalar) worden vermenigvuldigd: $\lambda\underline{a}$.

De volgende eigenschappen gelden:

Optelling: 1) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$.

2) $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$.

3) Er is één $\underline{x}$ zodat $\underline{a} + \underline{x} = \underline{a}$. Noem deze $\underline{O}$ (pijl van O naar O).

4) Bij iedere $\underline{a}$ is er één $\underline{x}$ zodat $\underline{a} + \underline{x} = \underline{O}$. Noem deze $-\underline{a}$ (tegengestelde van $\underline{a}$).

Opmerking: Bij iedere $\underline{a}$ en $\underline{b}$ is er één $\underline{x}$ zodat $\underline{a} + \underline{x} = \underline{b}$, namelijk $\underline{x} = \underline{b} + (-\underline{a})$. Noem deze $\underline{b} - \underline{a}$ (het verschil van $\underline{b}$ en $\underline{a}$).

Scalaire vermenigvuldiging:

1) $(\lambda\mu)\underline{a} = \lambda(\mu\underline{a})$

2) $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$

3) $(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a}$

4) $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$.

B. Wij gebruiken de vectoren om meetkundige figuren en hun eigenschappen te beschrijven.

1) Een punt A wordt aangegeven door het uiteinde van de vector $\underline{a} = \vec{OA}$.

2) Een rechte ℓ door O. Zij $\underline{v}$ een vector langs ℓ. Dan is de rechte ℓ de verzameling van de eindpunten der vectoren

$$\underline{x} = \lambda\underline{v}\ , \quad -\infty < \lambda < \infty\ .$$

3) Een rechte ℓ niet door O. Zij $\underline{v}$ een vector evenwijdig aan ℓ en zij $\underline{a}$ een vector met eindpunt op ℓ. Dan is de rechte ℓ de verzameling van de eindpunten der vectoren

$$\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{v}\ , \quad -\infty < \lambda < \infty\ .$$

De vector $\underline{v}$ heet een richtingsvector van de rechte, de vector $\underline{a}$ heet een steunvector van de rechte.

4) Een vlak V door O. Laat $\underline{v}$ en $\underline{w}$ (niet langs één rechte) vectoren in het vlak zijn. Dan is het vlak V de verzameling van de eindpunten der vectoren

$$\underline{x} = \lambda\underline{v} + \mu\underline{w}\ , \quad -\infty < \lambda < \infty\ , \ -\infty < \mu < \infty\ .$$

5) Een vlak V niet door O. Laat $\underline{v}$ en $\underline{w}$ (niet langs één rechte) vectoren evenwijdig aan V zijn en zij $\underline{a}$ een vector met eindpunt in V. Dan is V de verzameling van de eindpunten der vectoren

$$\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{v} + \mu\underline{w}, \quad -\infty < \lambda < \infty\ , \ -\infty < \mu < \infty\ .$$

$\underline{v}$ en $\underline{w}$ heten richtingsvectoren en $\underline{a}$ een steunvector van het vlak.

§ 2. Coördinaten

A. Het vlak, R_2

Neem in het platte vlak door de oorsprong twee onderling loodrechte assen, de x-as en de y-as. Elk van deze assen maken we door de keuze van een schaal tot een getallenrechte met de oorsprong als getal 0: elk punt van de rechte correspondeert met een reëel getal en omgekeerd. Bij een vector $\underline{a}$ behoren nu twee componenten a_1 en a_2, de getallen die corresponderen met de projecties van het eindpunt van $\underline{a}$ op de x-as, resp. de y-as. Zo correspondeert met iedere vector $\underline{a}$ een getallenpaar (a_1, a_2) en omgekeerd met ieder getallenpaar een vector. De verzameling der getallenparen noemen we R_2. Op grond van deze correspondentie schrijven we eenvoudig

$$\underline{a} = (a_1, a_2) \quad \text{of} \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Vectoren langs de x-as: $(p,0)$, langs de y-as: $(0,q)$.
Als $\underline{a} = (a_1, a_2)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2)$ dan is

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1\ ,\ a_2 + b_2) \text{ en } \lambda\underline{a} = (\lambda a_1\ ,\ \lambda a_2)\ .$$

Men noemt de getallen a_1 en a_2 ook de coördinaten van het punt A, dat door de vector $\underline{a}$ wordt aangegeven. Men bedenke hierbij, dat de betrekking tussen een punt A en zijn coördinaten (a_1, a_2) afhangt van de keuze van de x-as en de y-as en van de schaal op deze assen. Voorlopig denken we ons hiervoor een vaste keuze gedaan en maken we geen verschil tussen R_2 en het platte vlak. De rechte $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{v}$ wordt met coördinaten geschreven als

(1) $(x_1,x_2) = (a_1,a_2) + \lambda(v_1,v_2)$

of

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} .$$

Dit zijn twee vergelijkingen. Eliminatie van λ geeft

(2) $px_1 + qx_2 + r = 0$ of $px + qy + r = 0$.

(1) heet een *parametervoorstelling*, (2) een *vergelijking van de rechte*.

Voorbeeld (1) Rechte $\underline{x} = (1,2) + \lambda(3,1)$.

Het punt (10,5) ligt erop, want

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{voor } \lambda = 3.$$

Het punt (-2,-1) ligt er niet op, want voor elke λ is

$$(-2,-1) \neq (1,2) + \lambda(3,1) \ .$$

Het snijpunt met de x-as is te vinden uit

$$\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

immers uit de vergelijkingen volgt $\lambda = -2$, $p = -5$, dus het snijpunt met de x-as is (-5,0). Op analoge wijze vindt men dat (0, 5/3) het snijpunt met de y-as is.

De vergelijking van de rechte volgt na eliminatie van λ uit

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + 3\lambda \\ y &= 2 + \lambda \end{aligned}\right\} . \quad \text{We vinden } x - 3y + 5 = 0.$$

Voorbeeld (2) Een rechte is gegeven door de vergelijking $2x + y - 3 = 0$.

Gevraagd wordt een parametervoorstelling.

Stel $x = \lambda$, dan is $y = -2\lambda + 3$. Dus een parametervoorstelling is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Voorbeeld (3) Dezelfde vraag bij $2x + 3y - 7 = 0$. Stel nu $x = 3\lambda$, dan $y = -2\lambda + 7/3$, dus $\underline{x} = (0, 7/3) + \lambda(3,-2)$.

B. De ruimte, R_3

Neem in de ruimte door de oorsprong drie onderling loodrechte assen, de x-as, de y-as en de z-as. Elk van deze assen wordt door een schaal tot een getallenrechte met de oorsprong als getal 0 gemaakt en wel zo dat de positieve x-as, y-as en z-as georiënteerd zijn als resp. duim, wijsvinger en middelvinger van een rechterhand (rechts coördinatenstelsel).
Een vector $\underline{a}$ heeft nu drie componenten (a_1,a_2,a_3), de getallen die bij de projecties van het eindpunt op x-as, y-as en z-as behoren.

In het bijzonder is $\underline{0} = (0,0,0)$; $(p,0,0)$ is een vector langs de x-as; $(p,0,r)$ is een vector in het (x,z)-vlak.
Als $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$ en $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$, dan is

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \text{ en } \lambda\underline{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) .$$

Ook hier noemt men (a_1,a_2,a_3) coördinaten van het punt A dat bij de vector $\underline{a}$ behoort. We maken geen verschil tussen R_3 en de ruimte, hetgeen ook hier de keuze van een vast assenstelsel inhoudt.
Een rechte, resp. een vlak, heeft parametervoorstelling

$$\underline{x} = (a_1,a_2,a_3) + \lambda(v_1,v_2,v_3), \text{ resp.}$$

$$\underline{x} = (a_1,a_2,a_3) + \lambda(v_1,v_2,v_3) + \mu(w_1,w_2,w_3) .$$

Een vlak wordt ook voorgesteld door een vergelijking

$$px_1 + qx_2 + rx_3 = s \quad \text{of} \quad px + qy + rz = s ,$$

die verkregen wordt door uit de 3 vergelijkingen van de parametervoorstelling λ en μ te elimineren. Een rechte kan niet door één vergelijking worden voorgesteld.

Voorbeeld 1 Beschouw de rechte $\underline{x} = (1,1,1) + \lambda(0,1,2)$.
Het punt $(1,3,5)$ ligt op deze rechte, omdat $(1,3,5)$ voldoet aan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{voor } \lambda = 2 .$$

Het snijpunt van de rechte met het (x,y)-vlak volgt uit

$$0 = z = 1 + 2\lambda, \ \lambda = -\tfrac{1}{2}$$

en is dus het punt $(1, \frac{1}{2}, 0)$.

Het snijpunt met het (y,z)-vlak zou moeten volgen uit $0 = x = 1 + \lambda 0$, dus bestaat niet; inderdaad blijkt uit beschouwing van de richtingsvector $(0,1,2)$ dat de rechte evenwijdig is met het (y,z)-vlak.
De rechte door $(7,0,3)$, die evenwijdig is met de gegeven rechte, heeft parametervoorstelling

$$\underline{x} = (7,0,3) + \lambda(0,1,2) .$$

<u>Voorbeeld 2</u> Beschouw het vlak $\underline{x} = (1,2,3) + \lambda(0,1,1) + \mu(1,0,-2)$, uitgeschreven

$$\begin{aligned} x &= 1 \phantom{{}+\lambda} + \mu \\ y &= 2 + \lambda \\ z &= 3 + \lambda - 2\mu . \end{aligned}$$

Voor het snijpunt met de y-as moet $x = 0$ en $z = 0$, dus $\mu = -1$ en $\lambda = -5$. Dit snijpunt is dus $(0,-3,0)$.

De vergelijking van het vlak wordt verkregen door λ en μ te elimineren

$$2x - y + z = 3 .$$

Voor elk punt van de snijlijn met het (x,y)-vlak moet $z = 0$, dus de vergelijking van deze snijlijn, beschouwd als rechte in het (x,y)-vlak, luidt $2x - y = 3$. In de ruimte stelt deze vergelijking voor het vlak door de snijlijn en evenwijdig aan de z-as.

<u>Voorbeeld 3</u> Het snijpunt van de rechte uit voorbeeld 1 met het vlak uit voorbeeld 2 verkrijgt men door $\underline{x} = (1,1,1) + \lambda(0,1,2)$ in te vullen in de vergelijking van het vlak, $2x - y + z = 3$. Dan

$$2.1 - (1 + \lambda) + (1 + 2\lambda) = 3,$$

dus $\lambda = 1$ en het gevraagde snijpunt is $(1,2,3)$.

<u>Voorbeeld 4</u> Een vlak heeft vergelijking $2x - 4y + 3z = 12$.
Gevraagd wordt een parametervoorstelling van het vlak. Stel $y = \lambda$ en $z = 2\mu$, dan is $x = 2\lambda - 3\mu + 6$, dus $\underline{x} = (6,0,0) + \lambda(2,1,0) + \mu(-3,0,2)$ voldoet.

<u>Voorbeeld 5</u> Gegeven zijn twee vlakken,

$$x + y = 1 \quad \text{en} \quad 2x - y + z = 3 .$$

Gevraagd wordt een parametervoorstelling van de snijlijn.
Stel $x = \lambda$, dan $y = -\lambda + 1$ en $z = -3\lambda + 4$, dus

$$\underline{x} = (0,1,4) + \lambda(1,-1,-3) \text{ voldoet.}$$

C. Cartesische ruimten R_n , (naar Cartesius = Descartes 1596-1650).

Een rijtje $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ van n reële getallen duiden wij kortweg aan door $\underline{a}$.
De Cartesische ruimte R_n is de verzameling van alle rijtjes, waarbij de som van twee rijtjes en het product van een rijtje met een getal wordt gedefinieerd als volgt:

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \text{ en } \lambda\underline{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) .$$

Het is eenvoudig in te zien, dat voor deze som en scalaire vermenigvuldiging de eigenschappen van § 1. gelden.

R_1 is de getallenrechte, R_2 het gewone vlak, R_3 de gewone ruimte.

Naar analogie met deze cartesische ruimten van dimensie 1,2,3 kunnen wij ook in R_n, $n > 3$, een meetkundige terminologie invoeren.

Wij doen dit voor $n = 4$: $(0,0,0,0)$ heet de oorsprong O.

Alle $(a_1,0,0,0)$ vormen de x-as; alle $(0,a_2,0,0)$ de y-as;
alle $(0,0,a_3,0)$ de z-as; alle $(0,0,0,a_4)$ de t-as.
Alle $(a_1,a_2,0,0)$ vormen het (x,y)-vlak. Hiervoor is dus $z = t = 0$.
Alle $(a_1,a_2,0,a_4)$ vormen de (x,y,t)-ruimte, waarvoor dus $z = 0$.

De verzameling $\underline{x} = (a_1,a_2,a_3,a_4) + \lambda(v_1,v_2,v_3,v_4)$, met λ variabel, heet een rechte. De verzameling $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{v} + \mu\underline{w}$, met λ en μ variabel, heet een vlak. De verzameling $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{v} + \mu\underline{w} + \nu\underline{u}$, met λ,μ,ν variabel, heet een ruimte. Als wij uit de laatste (vier!) vergelijkingen de λ,μ,ν elimineren, dan krijgen wij de vergelijking van de ruimte:

$$ax + by + cz + dt = e .$$

Voorbeeld Gevraagd wordt het snijpunt van de rechte door $\underline{a} = (1,2,3,4)$ en $\underline{b} = (0,-1,2,2)$ met de (x,y,z)-ruimte (de „grondruimte").
Oplossing: Een richtingsvector van de rechte is $\underline{a} - \underline{b}$, dus een parametervoorstelling is

$$\underline{x} = (1,2,3,4) + \lambda(1,3,1,2) .$$

Snijden met $t = 0$ levert $4 + 2\lambda = 0$, dus $\lambda = -2$, dus het gevraagde snijpunt is $(-1,-4,1,0)$.

Opmerking De genoemde rechte snijdt dus noch het (x,y)-vlak, noch het (x,z)-vlak, noch het (y,z)-vlak. In R_4 zijn een rechte en een vlak in het algemeen kruisend, twee vlakken in R_4 snijden elkaar in het algemeen in één punt.

§ 3. Afhankelijkheid

A. Een vector $\underline{v}$ heet een lineaire combinatie van de vectoren $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$, als

$$\underline{v} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} + \delta\underline{d} \ .$$

Voorbeelden

$(4,5)$ is lin.comb. van $(1,1)$ en $(2,3)$
$(0,5)$ is lin.comb. van $(1,2)$ en $(4,3)$
$(0,1,2)$ is lin.comb. van $(1,2,3)$ en $(1,1,1)$
$(5,6,7,0)$ is lin.comb. van $(1,2,3,4)$ en $(1,1,1,-1)$
$(1,2)$ is lin.comb. van $(3,6)$.

Drie vectoren $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$, zijn afhankelijk, als $\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} + \nu\underline{c} = \underline{0}$ voor zekere $(\lambda,\mu,\nu) \neq (0,0,0)$.
Drie vectoren $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$, zijn onafhankelijk, als zij niet afhankelijk zijn, dus als

$$\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} + \nu\underline{c} = \underline{0} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0 \ .$$

Twee vectoren $\underline{a},\underline{b}$, zijn afhankelijk, als $\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} = \underline{0}$ voor zekere $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, en onafhankelijk als zij niet afhankelijk zijn.

Voorbeelden

$(1,2,3)$, $(1,1,1)$, $(0,1,2)$ zijn afhankelijk,
$(1,2)$, $(4,8)$ zijn afhankelijk,
$(1,2)$, $(4,8)$, $(6,1)$ zijn afhankelijk,
$(1,0,0)$, $(6,7,0)$, $(1,2,3)$ zijn onafhankelijk,
$(3,2)$, $(1,1)$ zijn onafhankelijk.

B. De betekenis der zojuist ingevoerde begrippen voor de meetkunde blijkt uit de volgende opmerkingen:

1) Twee rechten zijn evenwijdig of samenvallend, als hun richtingsvectoren afhankelijk zijn.
2) Een vlak door O bestaat uit alle vectoren, die een lineaire combinatie zijn van twee onafhankelijke vectoren.
3) De rechte $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{u}$ is evenwijdig met of ligt in het vlak $\underline{x} = \underline{b} + \mu\underline{v} + \nu\underline{w}$, als $\underline{u}$ een lin.comb. is van $\underline{v}$ en $\underline{w}$.
4) De eindpunten der vectoren $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ liggen op een rechte als $\underline{b} - \underline{a}$ en $\underline{c} - \underline{a}$ afhankelijk zijn.
5) De eindpunten der vectoren $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ liggen in een vlak, als $\underline{b} - \underline{a}$, $\underline{c} - \underline{a}$, $\underline{d} - \underline{a}$ afhankelijk zijn.

C. Stelling $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ zijn onafhankelijk dan en slechts dan als $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ onafhankelijk zijn.

Deze stelling bevat twee beweringen nl.

1) Gegeven: $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ onafhankelijk. Te bewijzen: $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ onafhankelijk.

Bewijs: Stel $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) + \mu\underline{b} + \nu\underline{c} = \underline{0}$
dan $\lambda\underline{a} + (\lambda + \mu)\underline{b} + \nu\underline{c} = \underline{0}$.

Uit het gegeven volgt dan $\lambda = 0$, $\lambda + \mu = 0$, $\nu = 0$, dus $\lambda = \mu = \nu = 0$.

2) Gegeven: $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ onafhankelijk. Te bewijzen: $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$, onafhankelijk.

Bewijs: Stel $\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} + \nu\underline{c} = \underline{0}$
dan $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) + (\mu - \lambda)\underline{b} + \nu\underline{c} = \underline{0}$.

Uit het gegeven: $\lambda = \mu - \lambda = \nu = 0$, dus $\lambda = \mu = \nu = 0$.

Stelling $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ zijn onafhankelijk dan en slechts dan als $\alpha\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ onafhankelijk zijn $(\alpha \neq 0)$.
Door herhaalde toepassing van beide stellingen kan het onderzoek naar de afhankelijkheid van een stelsel vectoren herleid worden tot het onderzoek van een ander, eenvoudiger stelsel.
Het systematisch uitvoeren van dit procédé heet „vegen".

Voorbeeld 1 Zijn $\underline{a} = (-1,1,1)$; $\underline{b} = (1,2,3)$; $\underline{c} = (5,1,3)$ afhankelijk?
Schrijf de vectoren onder elkaar en veeg de tweede kolom schoon:

$$\begin{array}{ll} \underline{a} = (-1,1,1) & \qquad \underline{a} = (-1,1,1) \\ \underline{b} = (1,2,3) & \qquad \underline{b} - 2\underline{a} = (3,0,1) \\ \underline{c} = (5,1,3) & \qquad \underline{c} - \underline{a} = (6,0,2)\ . \end{array}$$

Nu blijkt $\underline{c} - \underline{a} = 2(\underline{b} - 2\underline{a})$, dus $3\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$.
De vectoren zijn afhankelijk.

Voorbeeld 2 Zijn $\underline{a} = (1,2,3)$, $\underline{b} = (2,7,0)$, $\underline{c} = (1,2,-1)$ afhankelijk?

$$\begin{array}{lll}
\underline{a} = (1,2,3) & \underline{a} + 3\underline{c} = (4,8,0) & \underline{a} + 3\underline{c} - 2\underline{b} = (0,-6,0) \\
\underline{b} = (2,7,0) & \underline{b} = (2,7,0) & \underline{b} = (2,7,0) \\
\underline{c} = (1,2,-1) & \underline{c} = (1,2,-1) & \underline{c} = (1,2,-1)\ .
\end{array}$$

De laatstgenoemde drie vectoren (en dus de gegeven drie) zijn onafhankelijk, want stel

$$\lambda\begin{pmatrix}0\\-6\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{dan } \nu = 0,\ \mu = 0,\ \lambda = 0.$$

Voorbeeld 3 Bewijs dat $\underline{a} = (7,8,0,0)$, $\underline{b} = (1,2,4,3)$, $\underline{c} = (1,-2,-4,-3)$, $\underline{d} = (0,0,4,3)$ afhankelijk zijn.

$$\begin{array}{lll}
\underline{a} = (7,8,0,0) & \underline{a} = (7,8,0,0) & \underline{a} + 4\underline{c} + 4\underline{d} = (11,0,0,0) \\
\underline{b} = (1,2,4,3) & \underline{b} - \underline{d} = (1,2,0,0) & \underline{b} + \underline{c} = (2,0,0,0) \\
\underline{c} = (1,-2,-4,-3) & \underline{c} + \underline{d} = (1,-2,0,0) & \underline{c} + \underline{d} = (1,-2,0,0) \\
\underline{d} = (0,0,4,3) & \underline{d} = (0,0,4,3) & \underline{d} = (0,0,4,3)\ .
\end{array}$$

Nu blijkt $2(\underline{a} + 4\underline{c} + 4\underline{d}) = 11(\underline{b} + \underline{c})$ dus $2\underline{a} - 11\underline{b} - 3\underline{c} + 8\underline{d} = \underline{0}$.

§ 4. Vectorruimten

A. Definitie

Een vectorruimte V is een verzameling van dingen (genaamd vectoren), die kunnen worden opgeteld, en die kunnen worden vermenigvuldigd met een getal, in die zin dat als $\underline{a}, \underline{b} \in V$, dan $\underline{a} + \underline{b}, \lambda\underline{a} \in V$ (λ getal) en wel zo dat aan de volgende rekenregels is voldaan:

1) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$
2) $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$
3) Bij iedere $\underline{a}$ en $\underline{b}$ is er één $\underline{x}$ zodat $\underline{a} + \underline{x} = \underline{b}$
4) $(\lambda\mu)\underline{a} = \lambda(\mu\underline{a})$
5) $(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a}$
6) $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$
7) $1.\underline{a} = \underline{a}$.

Vb. 1 R_n is een vectorruimte.

Vb. 2 Een verzameling van vectoren met eindpunt in een vlak niet door O is geen vectorruimte, want als $\underline{a}$ en $\underline{b}$ hun eindpunt in het vlak hebben, dan heeft $\underline{a} + \underline{b}$ dat niet.

Vb. 3 Alle continue functies op $0 \leq t \leq 1$ vormen een vectorruimte, want als f en g continu zijn, dan is $f + g$ en ook λf continu en de rekenregels zijn vervuld.

Vb. 4 Alle veeltermen van de graad ≤ 7 in één variabele, dus alle $ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h$.

Vb. 5 Alle lineaire vormen in 5 variabelen (vorm = homogene veelterm), dus $2x_1 + 3x_2 - x_3 + 7x_4 - x_5$ en dergelijke.

B. Definities

1) $\underline{x}$ is lineaire combinatie van $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$, als $\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{a}_i$.

2) $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_m$ zijn afhankelijk, als er getallen $\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}, \beta_m$, niet alle 0, bestaan zodat

$$\beta_1 \underline{b}_1 + \beta_2 \underline{b}_2 + \ldots + \beta_m \underline{b}_m = \underline{0}.$$

3) $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_m$ zijn onafhankelijk, als zij niet afhankelijk zijn.

4) De dimensie van V = dim V = het maximale aantal vectoren van V, dat onafhankelijk is; als zo'n maximaal aantal niet bestaat, zeggen we dat de dimensie van V oneindig is.

5) Een basis van V is een stel onafhankelijke vectoren, waarvan iedere vector uit V een lineaire combinatie is.

Vb. 1 dim $R_2 = 2$, want elk drietal vectoren in het vlak is afhankelijk. Ieder tweetal onafhankelijke vectoren vormt een basis van R_2.

Vb. 2 dim $R_3 = 3$, want elk viertal vectoren in de ruimte is afhankelijk. Ieder drietal onafhankelijke vectoren vormt een basis van R_3.

Vb. 3 De dimensie van de in bovenstaand Vb. 3 gegeven vectorruimte is oneindig.

Wij beperken ons verder tot vectorruimten met eindige dimensie.

C. Coördinaten

Zij dim V = n en zij $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ een onafhankelijk stelsel. Als $\underline{x}$ een willekeurige vector van V is, dan zijn de n + 1 vectoren $\underline{x}, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ afhankelijk, dus

$$\lambda\underline{x} + \alpha_1\underline{e}_1 + \dots + \alpha_n\underline{e}_n = \underline{0} \text{ , niet alle coëff.} = 0 .$$

Nu is $\lambda \neq 0$ (waarom?). Noem $-\frac{\alpha_i}{\lambda} = x_i$, dan $\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + \dots + x_n\underline{e}_n$.

Elke vector is dus als lineaire combinatie van $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ te schrijven, en wel op *één manier*, want als ook

$$\underline{x} = y_1\underline{e}_1 + \dots + y_n\underline{e}_n \text{ , dan is}$$

$$\underline{0} = (x_1 - y_1)\underline{e}_1 + \dots + (x_n - y_n)\underline{e}_n$$

en uit de onafhankelijkheid van $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ volgt $x_i = y_i$.

De vectoren $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ vormen dus een basis van V.

Conclusie 1 Als $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ een basis van V is, dan is elke vector $\underline{x}$ van V op één en slechts één manier te schrijven als lineaire combinatie van zo'n basis:

$$\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + \dots + x_n\underline{e}_n .$$

De getallen $(x_1, \dots, x_n)$ heten de coördinaten of de componenten van $\underline{x}$ t.o.v. deze basis.

Conclusie 2 In een vectorruimte van dimensie n vormt ieder stelsel van n onafhankelijke vectoren een basis (en zo'n stelsel bestaat).

Vb. 1 In R_3 is een basis: $\underline{e}_1 = (1,0,0)$; $\underline{e}_2 = (0,1,0)$; $\underline{e}_3 = (0,0,1)$.
(Elke vector is te schrijven als
$\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3$ ofwel $\underline{x} = x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2 + z\underline{e}_3$) .

Vb. 2 In R_2 is een basis: $\underline{e}_1 = (1,0)$; $\underline{e}_2 = (0,1)$.

Vb. 3 De veeltermen met graad ≤ 3, alle

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \text{ ,}$$

vormen een vectorruimte met basis 1, x, x^2, x^3.

Vb. 4 De lineaire vormen in 4 variabelen, alle $ax + by + cz + dt$, vormen een vectorruimte met basis x, y, z, t.

We hebben al gezien: in een ruimte van dimensie n vormen n onafhankelijke vectoren steeds een basis. Omgekeerd geldt:

Stelling Als in een vectorruimte V een basis van p elementen bestaat, dan is $\dim V = p$.

Bewijs Stel $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_p$ is een basis; $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ onafhankelijk en $n > p$. Elke vector is lineaire combinatie van $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_p$, dus ook

$$\underline{e}_1 = \alpha_1 \underline{f}_1 + \ldots + \alpha_p \underline{f}_p \; .$$

Eén der $\alpha_i \neq 0$, b.v. $\alpha_1 \neq 0$, dus volgt na deling door α_1:

$$\underline{f}_1 = \beta_1 \underline{e}_1 + \beta_2 \underline{f}_2 + \ldots + \beta_p \underline{f}_p$$

en daar $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_p$ basis is, is elke vector lineaire combinatie van

$$\underline{e}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_p \text{ , dus o.a.}$$

$$\underline{e}_2 = \gamma_1 \underline{e}_1 + \gamma_2 \underline{f}_2 + \ldots + \gamma_p \underline{f}_p \; .$$

Eén der $\gamma_2, \ldots, \gamma_p \neq 0$, b.v. $\gamma_2 \neq 0$, dus volgt

$$\underline{f}_2 = \delta_1 \underline{e}_1 + \delta_2 \underline{e}_2 + \delta_3 \underline{f}_3 + \ldots + \delta_p \underline{f}_p \; .$$

Dus elke vector is lineaire combinatie van

$$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{f}_3, \ldots, \underline{f}_p \; .$$

Zo voortgaande zien wij tenslotte dat elke vector lineaire combinatie is van

$$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \ldots, \underline{e}_p \; .$$

Omdat $n > p$, vinden we, dat $\underline{e}_{p+1}$ lineaire combinatie is van $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_p$, in strijd met de onafhankelijkheid van $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$. Een stel onafhankelijke vectoren kan dus ten hoogste uit p stuks bestaan; er is een onafhankelijk stelsel, dat uit p stuks bestaat, nl. $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_p$. Dus $\dim V = p$.

Gevolg Elke basis van een vectorruimte van dimensie n bevat n vectoren. Hieruit volgt, dat dim R_n = n op grond van de basis

$$\underline{e}_1 = (1,0,\dots,0)$$
$$\underline{e}_2 = (0,1,\dots,0)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\underline{e}_n = (0,0,\dots,1)\ .$$

Verder is in bovenstaande voorbeelden 3 en 4 de dimensie 4.

D. Deelruimten

Def. Een verzameling W van vectoren van een vectorruimte V heet een deelruimte van V als
uit $\underline{x} \in W$ en $\underline{y} \in W$ volgt $\underline{x} + \underline{y} \in W$ en
uit $\underline{x} \in W$ en α een getal volgt $\alpha\underline{x} \in W$.

Dit betekent, dat W ook een vectorruimte is t.o.v. de optelling en de vermenigvuldiging met een scalar van V (de rekenregels zijn automatisch vervuld).

Een deelruimte kan men bijv. als volgt verkrijgen:
Neem vectoren $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_r$ in V (eventueel afhankelijk). Laat D bestaan uit alle $\underline{x} = \lambda_1\underline{a}_1 + \dots + \lambda_r\underline{a}_r$ met willekeurige $\lambda_1,\dots,\lambda_r$, dus uit alle lineaire combinaties van $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_r$. Dan is D een deelruimte van V:

$$\left.\begin{array}{l}\underline{x} = \lambda_1\underline{a}_1 + \dots + \lambda_r\underline{a}_r \\ \underline{y} = \mu_1\underline{a}_1 + \dots + \mu_r\underline{a}_r\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\underline{x} + \underline{y} = (\lambda_1 + \mu_1)\underline{a}_1 + \dots + (\lambda_r + \mu_r)\underline{a}_r \\ \alpha\underline{x} = (\alpha\lambda_1)\underline{a}_1 + \dots + (\alpha\lambda_r)\underline{a}_r\ .\end{array}$$

Het is duidelijk, dat D de kleinste deelruimte van V is, die de vectoren $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_r$ bevat. Men zegt, dat D opgespannen wordt door $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_r$.
Als $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_r$ onafhankelijk zijn, vormen ze een basis van D en is dim D = r.

Vb. 1 In R_3 is de verzameling $\underline{x} = \lambda\underline{u}$ ($\underline{u}$ vaste vector $\neq \underline{0}$) een deelruimte van dimensie 1 en de verzameling $\underline{x} = \lambda\underline{v} + \mu\underline{w}$ ($\underline{v}$ en $\underline{w}$ vaste, onafhankelijke vectoren) een deelruimte van dimensie 2.

Vb. 2 Een rechte in R_3, $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{v}$, die niet door O gaat, vormt geen deelruimte van R_3.

Vb. 3 $\underline{a} = (3,2,3,5)$; $\underline{b} = (2,-1,4,7)$; $\underline{c} = (5,8,1,1,)$; $\underline{d} = (6,11,0,-1)$ liggen in een deelruimte van R_4 met dimensie 2.

Bewijs

$$\begin{aligned} \underline{a} &= (3,2,3,5) & \underline{a} - 3\underline{c} &= (-12,-22,0,2) \\ \underline{b} &= (2,-1,4,7) & \underline{b} - 4\underline{c} &= (-18,-33,0,3) \\ \underline{c} &= (5,8,1,1) & \underline{c} &= (5,8,1,1) \\ \underline{d} &= (6,11,0,-1) & \underline{d} &= (6,11,0,-1)\ . \end{aligned}$$

Blijkbaar is $\underline{a} - 3\underline{c} = -2\underline{d}$ en $\underline{b} - 4\underline{c} = -3\underline{d}$. De vectoren $\underline{c}$ en $\underline{d}$ vormen een basis van een deelruimte, waarin

$\underline{a} = 3\underline{c} - 2\underline{d}$, $\underline{b} = 4\underline{c} - 3\underline{d}$ liggen.

Dus $\underline{a}$ en $\underline{b}$ liggen in het vlak, dat door $\underline{c}$ en $\underline{d}$ wordt opgespannen.

Definitie Twee stelsels vectoren heten equivalent, als zij dezelfde deelruimte opspannen.

In vb. 3 is het stelsel $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\}$ equivalent met het stelsel $\{\underline{a}-3\underline{c},\underline{b}-4\underline{c},\underline{c},\underline{d}\}$ en ook equivalent met het stelsel $\{\underline{c},\underline{d}\}$.
Wij schrijven $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\} \sim \{\underline{a}-3\underline{c},\underline{b}-4\underline{c},\underline{c},\underline{d}\} \sim \{\underline{c},\underline{d}\}$.

Stelling | Twee stelsels vectoren, die door vegen uit elkaar zijn ontstaan, zijn equivalent.

Bewijs Dit volgt direct uit $\underline{a} = (\underline{a}+\underline{b}) + (-1)\underline{b}$ en $\underline{a} = \frac{1}{\alpha}(\alpha\,\underline{a})$.

Stelling | Als D opgespannen is door $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_r$, dan is dim D = maximale aantal lineair onafhankelijke onder de vectoren $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_r$.

Bewijs Stel dit maximale aantal = k. Door de nummering zo nodig te veranderen kunnen we bereiken, dat $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k$ onafhankelijk zijn. Als $j > k$, dan zijn $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k$, $\underline{a}_j$ afhankelijk dus

$$\lambda_1\underline{a}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{a}_k + \mu\underline{a}_j = \underline{0} \text{ met } \lambda_1,\ldots,\lambda_k, \mu \text{ niet alle} = 0.$$

Nu zou $\mu = 0$ leiden tot afhankelijkheid van $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k$, dus $\mu \neq 0$, dus $\underline{a}_j$ is een lineaire combinatie van $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k$ voor $j = k+1,\ldots,r$, dus $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k$ spannen D op en zijn onafhankelijk, dus dim D = k.

§ 5. Lineaire vormen

Alle lineaire vormen in n variabelen, zoals

$$L \equiv a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \text{ en } M \equiv b_1x_1 + \ldots + b_nx_n$$

vormen een vectorruimte want $L + M \equiv (a_1 + b_1)x_1 + \ldots + (a_n + b_n)x_n$ en $\lambda L \equiv \lambda a_1x_1 + \ldots + \lambda a_nx_n$ zijn weer lineaire vormen en de rekenregels gelden. Wij kunnen de theorie der vectorruimten, zoals afhankelijkheid, dus toepassen.

Vb. $L_1 \equiv 3x + 4y - z$
$L_2 \equiv x + 5y + 2z$ zijn afhankelijk, daar $L_1 = L_2 + L_3$.
$L_3 \equiv 2x - y - 3z$

De geldigheid van de volgende stelling stelt ons in staat tot het vegen:

Stelling L_1, L_2, L_3 onafhankelijk $\Leftrightarrow L_1 + L_2, L_2, L_3$ onafhankelijk,
$\Leftrightarrow \alpha L_1, L_2, L_3$ onafhankelijk. $(\alpha \neq 0)$

Vb. 1 De volgende twee stelsels lineaire vormen zijn òf beide afhankelijk, òf beide onafhankelijk. We zien gemakkelijk dat het tweede stelsel afhankelijk is, dus het eerste stelsel is ook afhankelijk.

$$\begin{array}{ll} L_1 \equiv -x + y + z & L_1 \equiv -x + y + z \\ L_2 \equiv x + 2y + 3z \quad \text{en} & L_2 - 2L_1 \equiv 3x + z \\ L_3 \equiv 5x + y + 3z & L_3 - L_1 \equiv 6x + 2z \,. \end{array}$$

Wij zoeken nog een zo eenvoudig mogelijk stelsel lineaire vormen, dat met L_1, L_2, L_3 equivalent is. Daartoe noteren wij slechts de coëfficiënten der lineaire vormen:

$$\begin{array}{ccccccc} (-1,1,1) & & (-1,1,1) & & (-1,1,1) & & (-4,1,0) \\ (1,2,3) & \text{equiv.} & (3,0,1) & \text{equiv.} & (3,0,1) & \text{equiv.} & (3,0,1) \\ (5,1,3) & & (6,0,2) & & & & \end{array}$$

Ons resultaat is dus het stelsel $-4x + y$
$3x + z$.

Opm. Een andere formulering van de vraag is: zoek een eenvoudige basis van de deelruimte, opgespannen door L_1, L_2, L_3.

Vb. 2 Geef een eenvoudig stelsel vormen dat equivalent is met
$L_1 \equiv x + 2y + 3z$, $L_2 \equiv 2x + 7y$, $L_3 \equiv x + 2y - z$.

$$\begin{matrix}(1,2,3) & & (4,8,0) & & (0,-6,0) & & (0,1,0) & & (0,1,0)\\ (2,7,0) & \sim & (2,7,0) & \sim & (2,7,0) & \sim & (2,0,0) & \sim & (1,0,0)\\ (1,2,-1) & & (1,2,-1) & & (1,2,-1) & & (1,0,-1) & & (0,0,1)\end{matrix}.$$

Dus het antwoord is: $M_1 \equiv y$, $M_2 \equiv x$, $M_3 \equiv z$.

Vb. 3 Idem bij
$$\begin{matrix}2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4\\ x_1 + 2x_2 - x_3\\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4\end{matrix}.$$

$$\begin{matrix}(2,1,3,1) & & (2,1,3,1) & & (5,7,0,1) & & (0,7,0,1)\\ (1,2,-1,0) & \sim & (1,2,-1,0) & \sim & (1,2,-1,0) & \sim & (0,2,-1,0)\\ (2,-4,9,2) & & (-2,-6,3,0) & & (1,0,0,0) & & (1,0,0,0)\end{matrix}.$$

Dus het antwoord is:
$$\begin{matrix} & 7x_2 & & + x_4\\ & -2x_2 & + x_3 & \\ x_1 & & & \end{matrix}.$$

§ 6. Homogene vergelijkingen

Beschouw k lineaire vergelijkingen met n onbekenden

$$(1)\qquad \left.\begin{matrix}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0\end{matrix}\right\}$$

Wij merken het volgende op:

1) De linkerleden zijn elementen van de vectorruimte der lineaire vormen in n variabelen. Wij zullen de linkerleden aanduiden door rijtjes $(a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sn})$ en noemen: de rijvectoren

2) De oplossingen $(x_1, \dots, x_n)$ zijn vectoren van de vectorruimte R_n. De oplossingen vormen een deelruimte van R_n, want als $(u_1, \dots, u_n)$ en $(v_1, \dots, v_n)$ oplossingen zijn, dan zijn ook $(u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$ en $(\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)$ oplossingen. De deelruimte gevormd door de oplossingen heet de oplossingsruimte.

3) De linkerleden zijn elementen $L_1,\dots,L_k$ van de ruimte der lineaire vormen in n veranderlijken. Als $\{L_1,\dots,L_k\}$ equivalent is met $\{M_1,\dots,M_\ell\}$, dan noemen we de bijbehorende stelsels vergelijkingen ook equivalent. Het is makkelijk in te zien dat equivalente stelsels vergelijkingen dezelfde oplossingsruimte hebben. We vinden de oplossingsruimte door het stelsel te vervangen door een eenvoudiger equivalent stelsel, waarvan de oplossingen gemakkelijk kunnen worden aangegeven.

<u>Vb. 1</u> $\left.\begin{array}{rl} -x+y+z&=0\\ x+2y+3z&=0\\ 5x+y+3z&=0\end{array}\right\}$ is volgens § 5., vb. 1 equivalent met $\left.\begin{array}{rl} -4x+y&=0\\ 3x+z&=0\end{array}\right\}$

Stel $x=\lambda$, dan is $y=4\lambda$ en $z=-3\lambda$. De oplossingsruimte is dus $\underline{x}=\lambda(1,4,-3)$.

<u>Vb. 2</u> $\left.\begin{array}{rl} x+2y+3z&=0\\ 2x+7y&=0\\ x+2y-z&=0\end{array}\right\}$ is volgens § 5., vb. 2 equivalent met $y=0;\ x=0;\ z=0.$

De oplossingsruimte is dus $\underline{x}=(0,0,0)$.

<u>Vb. 3</u> $\left.\begin{array}{rl} 2x_1+x_2+3x_3+x_4&=0\\ x_1+2x_2-x_3&=0\\ 2x_1-4x_2+9x_3+2x_4&=0\end{array}\right\}$ is volgens § 5., vb. 3 equivalent met $\left.\begin{array}{rl} 7x_2+x_4&=0\\ -2x_2+x_3&=0\\ x_1&=0\end{array}\right\}$

Stel $x_2=\lambda$, dan is $x_1=0$, $x_3=2\lambda$, $x_4=-7\lambda$.
De oplossingsruimte is dus $\underline{x}=\lambda(0,1,2,-7)$.

<u>Vb. 4</u> $\left.\begin{array}{rl} 2x_1+x_2+3x_3+x_4&=0\\ x_1+2x_2-x_3&=0\\ x_1-4x_2+9x_3+2x_4&=0\end{array}\right\}$

$$\begin{array}{c}(2,1,3,1)\\(1,2,-1,0)\\(1,-4,9,2)\end{array}\sim\begin{array}{c}(2,1,3,1)\\(1,2,-1,0)\\(-3,-6,3,0)\end{array}\sim\begin{array}{c}(2,1,3,1)\\(1,2,-1,0)\end{array}\sim\begin{array}{c}(0,-3,5,1)\\(1,2,-1,0)\end{array}$$

Dus het stelsel is equivalent met $\left.\begin{array}{rl} -3x_2+5x_3+x_4&=0\\ x_1+2x_2-x_3&=0\end{array}\right\}$

Stel $x_2=\lambda$ en $x_3=\mu$, dan $x_4=3\lambda-5\mu$, $x_1=-2\lambda+\mu$,
dus de oplossingsruimte is $\underline{x}=\lambda(-2,1,0,3)+\mu(1,0,1,-5)$.

Stelling Voor k homogene lineaire vergelijkingen met n onbekenden geldt: dim. (ruimte opgespannen door rijvectoren) + dim. oplossingsruimte = n.

Bewijs Door vegen (en, indien nodig, omnummeren van de x-en en weglaten van vergelijkingen van de vorm $0x_1 + \ldots + 0x_n = 0$) is (1) te herleiden tot een stelsel van de vorm

$$\begin{array}{llll} x_1 & & & + \alpha_{j+1}x_{j+1} + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \\ & x_2 & & + \beta_{j+1}x_{j+1} + \ldots + \beta_n x_n = 0 \\ & \cdot & & \cdot \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & \cdot & \cdot \\ & & x_j & + \delta_{j+1}x_{j+1} + \ldots + \delta_n x_n = 0 \end{array}$$

Daar wij n-j der x-en willekeurig kunnen aannemen, heeft de oplossingsruimte dimensie n-j. De deelruimte opgespannen door de rijvectoren heeft dimensie j.

Voorbeeld (Dimensieanalyse)

Bij een probleem spelen de volgende fysische grootheden een rol: de snelheid v, de lengte ℓ, de kracht k, de dichtheid ρ, de viscositeit μ.

Bewijs dat de coëfficiënt van Newton $N = \dfrac{k}{\rho v^2 \ell^2}$ en het getal van Reynolds $R = \dfrac{v\ell\rho}{\mu}$ een compleet stel van dimensieloze grootheden vormen.

Bewijs De in het probleem optredende grootheden hebben t.o.v. de massa M, de lengte L, de tijd T de dimensies (in fysische zin), die in het volgende schema zijn vermeld:

	v	ℓ	k	ρ	μ
M	0	0	1	1	1
L	1	1	1	-3	-1
T	-1	0	-2	0	-1

De grootheid $v^{x_1}\ell^{x_2}k^{x_3}\rho^{x_4}\mu^{x_5}$ is een dimensieloze grootheid, als

$$\left.\begin{array}{rl} x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 &= 0 \\ -x_1 - 2x_3 - x_5 &= 0 \end{array}\right\}$$

Dit homogene stelsel heeft als oplossingsruimte

$$\underline{x} = \alpha(-2,-2,1,-1,0) + \beta(-1,-1,0,-1,1) .$$

De grootheden $v^{-2}\ell^{-2}k\rho^{-1}$ en $v^{-1}\ell^{-1}\rho^{-1}\mu$ zijn dus dimensieloos, en alle andere dimensieloze grootheden zijn er combinaties van.

§ 7. Inhomogene vergelijkingen

Beschouw k lineaire vergelijkingen met n onbekenden, waarvan de rechterleden niet alle 0 zijn, dus

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{array}\right\}$$

Kort geschreven $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$; $i = 1,\ldots,k$.

Het stelsel van homogene vergelijkingen, dat wordt verkregen door alle rechterleden door 0 te vervangen, is

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 .$$

Stelling Als $\underline{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ een oplossing van het inhomogene stelsel (1) is, en als $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \ldots$ alle oplossingen van het homogene stelsel (2) voorstellen, dan stellen $\underline{\xi} + \lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \ldots$ alle oplossingen van het inhomogene stelsel (1) voor.

Bewijs $\underline{\xi} + \lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \ldots$ is een oplossing: vul maar in, dan levert $\underline{\xi}$ in het linkerlid $\underline{b}$ en $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \ldots$ in het linkerlid $\underline{0}$.
$\underline{\xi} + \lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \ldots$ levert alle oplossingen: stel $\underline{\eta}$ is een oplossing, dan is $\underline{\eta} - \underline{\xi}$ een oplossing van (2), dus te schrijven in de vorm $\lambda\underline{u} + \mu\underline{v} + \ldots$.

Opm. Het is zeer wel mogelijk dat het stelsel (1) geen enkele oplossing bezit. Een criterium hiervoor leren wij in de volgende paragraaf kennen.

Vb. 1
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \end{array}\right\}$$

Wij vervangen dit stelsel door een equivalent stelsel door middel van vegen, waarbij wij de rechterleden meenemen.

$$\begin{pmatrix} 1,2,3,-1 & | & 1 \\ 2,3,-2,3 & | & 1 \\ 4,7,4,1 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1,2,3,-1 & | & 1 \\ 0,-1,-8,5 & | & -1 \\ 0,-1,-8,5 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1,0,-13,9 & | & -1 \\ 0,1,8,-5 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Dus het stelsel is equivalent met

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \quad - 13x_3 + 9x_4 = -1 \\ \quad x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 1 \end{array}\right\}$$

Stel $x_3 = \lambda$, $x_4 = \mu$, dan $x_1 = 13\lambda - 9\mu - 1$ en $x_2 = -8\lambda + 5\mu + 1$, dus de oplossingen zijn $\underline{x} = (-1,1,0,0) + \lambda(13,-8,1,0) + \mu(-9,5,0,1)$ hetgeen in R_4 voorstelt een vlak, niet door de oorsprong.

Vb. 2
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1,2,3,-1 & | & 1 \\ 2,3,-2,3 & | & 1 \\ 4,7,4,1 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1,2,3,-1 & | & 1 \\ 0,-1,-8,5 & | & -1 \\ 0,-1,-8,5 & | & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1,2,3,-1 & | & 1 \\ 0,-1,-8,5 & | & -1 \\ 0,0,0,0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Het stelsel is dus equivalent met een stelsel, waarvan de laatste vergelijking luidt: 0 = -1. Het stelsel bezit dus geen oplossingen.

Vb. 3

$$\left.\begin{array}{r} y + 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + y + z = 3 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -8 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

dus de oplossing is $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$.

§ 8. Matrices

Een matrix is een rechthoek van getallen

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

Men kan deze matrix op twee manieren opvatten:

1) Als m rijvectoren, die een deelruimte van R_n opspannen.
   Zij de dimensie van deze deelruimte = r.
2) Als n kolomvectoren, die een deelruimte van R_m opspannen.
   Zij de dimensie van deze deelruimte = k.

Stelling $r = k$.

Bewijs Beschouw het stelsel van homogene lineaire vergelijkingen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0;\ i = 1,\ldots,m.$$

Volgens § 6. is de dimensie van de oplossingsruimte = $n - r$.
Schrijf nu de vergelijkingen als volgt op:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mk} \end{pmatrix} x_k + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wij weten, dat het maximale aantal onafhankelijke kolomvectoren k is (zie de laatste stelling van § 4).
Stel dat de eerste k kolomvectoren onafhankelijk zijn en dat de overige kolomvectoren lineaire combinaties van de eerste k zijn. Dan zijn er al dadelijk n-k onafhankelijke oplossingen in te zien, namelijk de coëfficiënten, waarmee de overige kolomvectoren in de eerste k zijn uit te drukken. Dus de dimensie van de oplossingsruimte is $\geq$ n-k. Wij concluderen dat n-r $\geq$ n-k, dus k $\geq$ r. Met een analoge redenering voor de vergelijkingen

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji}x_j = 0; \; i = 1,\ldots,n$$

bewijzen wij, dat ook r $\geq$ k. Dus r = k.

<u>Def</u>. De <u>rang</u> van een matrix is het maximale aantal onafhankelijke rijvectoren (kolomvectoren).

<u>Voorbeeld</u>

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 .$$

Wij beschouwen zowel een inhomogeen stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden, als het bijbehorende homogene stelsel.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \text{en} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0; \; i = 1,\ldots,m.$$

De matrices van deze stelsels zijn

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Duidelijk is dat rang B $\geq$ rang A.

Stelling Het stelsel

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \, ; \; i = 1,\dots,m$$

is oplosbaar dan en slechts dan als rang B = rang A.

Bewijs Noteer de kolomvectoren van B door $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n$, $\underline{b}$.
Het stelsel kan dan geschreven worden in de vorm

$$\underline{a}_1x_1 + \underline{a}_2x_2 + \dots + \underline{a}_nx_n = \underline{b} \, .$$

Er is dus een oplossing dan en slechts dan als $\underline{b}$ te schrijven is als lin.comb. van de vectoren $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n$.

§ 9. Determinanten

$\boxed{R_2}$ Vraag: Druk de oppervlakte van het parallellogram, opgespannen door de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$, uit in de componenten van deze vectoren.

Voer in

$$D(\underline{a},\underline{b}) = \begin{cases} + \text{ opp.parall.} & \text{als richting van } \underline{a} \text{ naar } \underline{b} \text{ is } \circlearrowleft \\ - \text{ opp.parall.} & \text{als richting van } \underline{a} \text{ naar } \underline{b} \text{ is } \circlearrowright . \end{cases}$$

Eigenschappen:

1) $D(\lambda\underline{a},\underline{b}) = \lambda D(\underline{a},\underline{b})$

2) $D(\underline{a},\underline{b}) = -D(\underline{b},\underline{a})$

3) $D(\underline{a},\underline{b}+\underline{c}) = D(\underline{a},\underline{b}) + D(\underline{a},\underline{c})$

4) $D(\underline{a},\underline{b}) \neq 0$ als $\underline{a}$, $\underline{b}$ onafhankelijk zijn.

Uit deze eigenschappen volgt dat $D(\underline{a},\underline{b}) = 0$ als $\underline{a}$, $\underline{b}$ afhankelijk zijn.
Neem een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ met

$$\underline{a} = a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2 , \; \underline{b} = b_1\underline{e}_1 + b_2\underline{e}_2 \, .$$

Uit de eigenschappen volgt

$$D(\underline{a},\underline{b}) = D(a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2 , \, b_1\underline{e}_1 + b_2\underline{e}_2) =$$
$$= a_1b_2D(\underline{e}_1 , \underline{e}_2) + a_2b_1D(\underline{e}_2,\underline{e}_1) = (a_1b_2 - a_2b_1)D(\underline{e}_1 , \underline{e}_2) \, .$$

$D(\underline{a},\underline{b})$ heet een 2 x 2 determinant. T.o.v. een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ met grondmaat $D(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = 1$ noteren we de determinant.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \ .$$

$\boxed{R_3}$ Vraag: Druk de inhoud van het parallellepipedum, opgespannen door $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, uit in de componenten van deze vectoren.

Voer in

$$D(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = \begin{cases} + \text{ inhoud pedum} & \text{als oriëntatie = die van xyz, dus rechts is} \\ - \text{ inhoud pedum} & \text{als oriëntatie = die van xzy, dus links is.} \end{cases}$$

Eigenschappen:

1) $D(\lambda\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = \lambda D(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$

2) $D(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = -D(\underline{b},\underline{a},\underline{c}) = -D(\underline{c},\underline{b},\underline{a})$

3) $D(\underline{a},\underline{b},\underline{c}+\underline{d}) = D(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) + D(\underline{a},\underline{b},\underline{d})$

4) $D(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) \neq 0$ als $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ onafhankelijk zijn.

Uit deze eigenschappen volgt dat $D(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = 0$ als $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ afhankelijk zijn.
Neem basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ en zij t.o.v. deze basis

$$\underline{a} = (a_1,a_2,a_3);\ \underline{b} = (b_1,b_2,b_3);\ \underline{c} = (c_1,c_2,c_3) \ .$$

Dan

$$D(a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2 + a_3\underline{e}_3,\ b_1\underline{e}_1 + b_2\underline{e}_2 + b_3\underline{e}_3,\ c_1\underline{e}_1 + c_2\underline{e}_2 + c_3\underline{e}_3) =$$

$$= (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1)D(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3) \ .$$

$D(\underline{a},\underline{b},\underline{c})$ heet een 3 x 3 determinant. T.o.v. een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ met grondmaat $D(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3) = 1$ noteren we de determinant:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \ .$$

Dit is de regel van Sarrus.

Opm. 1 Merk op, dat dit

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} .$$

Opm. 2 De determinant heeft bij een andere basis dezelfde waarde, als de grondmaat maar 1 is.

Vb. 1

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix} \end{array} = -4 - 6 + 3 + 9 + 2 - 4 = 0 .$$

Dit klopt, want $\underline{a} + 5\underline{b} - 2\underline{c} = \underline{0}$.

Vb. 2

$$\begin{matrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{matrix} = -(a-b)(b-c)(c-a) .$$

$\boxed{R_n}$ Teneinde het onbekende begrip inhoud te kunnen definiëren zoeken wij een functie $D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ die voldoet aan de volgende axioma's:

1) $D(\lambda\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) = \lambda D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$

2) $D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_i, \ldots, \underline{a}_j, \ldots, \underline{a}_n) = - D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_j, \ldots, \underline{a}_i, \ldots, \underline{a}_n)$

3) $D(\underline{b} + \underline{c}, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) = D(\underline{b}, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) + D(\underline{c}, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)$

4) $D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) \neq 0$ als $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ onafhankelijk zijn.

Als D aan deze axioma's voldoet, dan ook αD voor iedere $\alpha \neq 0$. We zullen straks zien, dat dit de enige onbepaaldheid is. Er bestaat een functie, die aan de axioma's voldoet; dit tonen we niet aan. We noemen zo'n functie een <u>n × n determinant</u> en interpreteren haar als een georiënteerd volume.

Gevolgen der axioma's:

5) $D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = 0$ als één der vectoren $= \underline{0}$

6) $D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = 0$ als twee vectoren dezelfde zijn.

7) $D(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ blijft gelijk als wij bij één vector een lin.comb. van de overige optellen.

8) $D(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n) = 0$ als $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n$ afhankelijk zijn.

Neem in R_n een basis $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$. Zij

$$\underline{a}_1 = \sum_{j(1)=1}^{n} a_{j(1),1}\,\underline{e}_{j(1)}\,,\ldots,\underline{a}_n = \sum_{j(n)=1}^{n} a_{j(n),n}\,\underline{e}_{j(n)}\,.$$

Dan geldt

$$D(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n) = \Sigma\, a_{j(1),1}\, a_{j(2),2} \cdots a_{j(n),n}\, D(\underline{e}_{j(1)},\ldots,\underline{e}_{j(n)}).$$

Als alle $j(i)$ ongelijk zijn, dan is $D(\underline{e}_{j(1)},\ldots,\underline{e}_{j(n)})$ met 2) te maken tot $\pm D(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$. Als $j(i) = j(k)$ dan is de bijbehorende term 0.
Dus

$$D(\underline{a}_1,\ldots \underline{a}_n) = \lambda D(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)\ .$$

Omdat λ niet van de waarde van $D(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$ afhangt, blijkt hieruit, dat $D(\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n)$ op een vaste factor na vastgelegd is, en geheel vastligt door keuze van $D(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n)$. Hierover maken we de volgende afspraak.

Neem de natuurlijke basis in R_n:

$$\underline{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$$
$$\underline{e}_2 = (0,1,\ldots,0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\underline{e}_n = (0,0,\ldots,1)\ ,$$

dan is $(x_1,\ldots,x_n) = x_1\underline{e}_1 + \ldots + x_n\underline{e}_n$. Voor deze basis spreken we af, dat $D(\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n) = 1$. We vinden dan voor de waarde van de determinant

$$(*)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{j(1),1}\, a_{j(2),2} \cdots a_{j(n),n}\ .$$

De termen hebben het +teken als$(j(1),j(2),\ldots,j(n))$ in $(1,2,\ldots,n)$ is om te zetten door een even aantal verwisselingen, en het -teken als deze omzetting door een oneven aantal verwisselingen geschiedt.

Opm. 1 De determinant heeft op alle bases dezelfde waarde, als de grondmaat der bases maar 1 is.

Opm. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{1n} & \cdot & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Opm. 3 Volgens (*) is een determinant te beschouwen als een getal det A dat toegevoegd is aan een vierkante matrix A.

Opm. 4 det A $\neq$ 0 dan en slechts dan als rang A = n.

Vb. 1

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 30 - 6 = -35 .$$

Anders, met eigenschap 7 (vegen),

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -35 \end{vmatrix} = -35 .$$

Vb. 2 met eigenschap 7).

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 .$$

<u>Opm.</u> Eig. 7) mag wegens opm. 2) horizontaal en verticaal worden toegepast.

<u>Def.</u> De determinant van de matrix, die men krijgt door in

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{ij} & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

de i^e rij en j^e kolom weg te laten, heet de bij a_{ij} behorende onderdeterminant en wordt genoteerd D_{ij}.

<u>Stelling</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} + \ldots + (-1)^{n+1}\, a_{1n}D_{1n} .$$

Bewijs: Reken maar uit. Vergelijk opmerking 1 in R_3.

<u>Voorbeeld</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4-1) - 2(-2-2) - 3(-1-1) = -5 + 8 + 6 = 9.$$

Anders, door eerst te vegen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 6 + 1 - 8) = 9.$$

§ 10. Gebruik van determinanten bij matrices en vergelijkingen

A. Laat een matrix m rijen en n kolommen hebben. Door uit de matrix m-p rijen en n-p kolommen weg te laten, ontstaat een vierkante matrix van p rijen en p kolommen; men noemt zo'n matrix een deelmatrix. De determinant van zo'n matrix heet een $p \times p$ onderdeterminant.

Stelling Als een matrix de rang r heeft, dan
1. zijn alle $p \times p$ onderdeterminanten met $p > r$ nul,
2. is er tenminste één $r \times r$ onderdeterminant ongelijk nul.

Bewijs Als $p > r$, dan is elk stel van p rijvectoren afhankelijk, dus ook de p rijvectoren van een $p \times p$ onderdeterminant zijn afhankelijk. Hieruit volgt 1 . Daar de rang r is, kunnen wij in de matrix een stel van r onafhankelijke rijvectoren vinden.
Schrap nu de overige rijen, dan ontstaat een matrix van rang r, die dus r onafhankelijke kolomvectoren heeft. Schrap nu de overige kolommen, dan ontstaat een matrix met r rijen en r kolommen van rang r, die een determinant $\neq 0$ heeft.

Opm. Uit het ongerijmde bewijst men het omgekeerde van deze stelling.

B. Beschouw n vergelijkingen met n onbekenden

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}$$

of, geschreven met kolomvectoren,

(1) $\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_n x_n = \underline{b}$.

Stel dat de coëfficiëntendeterminant

$$D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) \neq 0 ,$$

dan zijn $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ onafhankelijk, dus een basis van R_n. Hieruit volgt, dat (1) één oplossing heeft.

Op grond van (1) geldt

$$D(\underline{a}_1x_1 + \underline{a}_2x_2 + \dots + \underline{a}_nx_n, \underline{a}_2,\underline{a}_3,\dots,\underline{a}_n) = D(\underline{b},\underline{a}_2,\underline{a}_3,\dots,\underline{a}_n) .$$

Met eigenschappen van determinanten is dus

$$x_1 D(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\dots,\underline{a}_n) = D(\underline{b},\underline{a}_2,\underline{a}_3,\dots,\underline{a}_n) .$$

Dus

$$x_1 = \frac{D(\underline{b}\ ,\underline{a}_2,\underline{a}_3,\dots,\underline{a}_n)}{D(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3,\dots,\underline{a}_n)} .$$

Evenzo

$$x_i = \frac{D(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\dots,\ \underline{b}\ ,\dots,\underline{a}_n)}{D(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\dots,\underline{a}_i,\dots,\underline{a}_n)} .$$

Dit is de <u>regel van Cramer</u>.

<u>Voorbeeld 1</u>

$$\left.\begin{array}{rl} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 10 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -11 \end{array}\right\}$$

Men vindt

$D(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3) = -5$; $D(\underline{b},\underline{a}_2,\underline{a}_3) = -10$; $D(\underline{a}_1,\underline{b},\underline{a}_3) = -15$; $D(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{b}) = 5$.
Dus $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.

<u>Voorbeeld 2</u>

$$\left.\begin{array}{l} G_{11}e_1 + G_{12}e_2 = j_1 \\ G_{21}e_1 + G_{22}e_2 = j_2 \end{array}\right\}$$ Wij lossen e_1 en e_2 op als functie van j_1 en j_2:

$$e_1 = \frac{\begin{vmatrix} j_1 & G_{12} \\ j_2 & G_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}} = \frac{j_1G_{22} - j_2G_{12}}{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}} .$$

$$e_2 = \frac{\begin{vmatrix} G_{11} & j_1 \\ G_{21} & j_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-j_1 G_{21} + j_2 G_{11}}{G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}} .$$

C. Beschouw n homogene vergelijkingen met n onbekenden

(2) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0; \; i = 1,\ldots,n.$$

Uit de stelling van § 6. volgt dat de dimensie van de oplossingsruimte > 0 is als de rang van de matrix der coëfficiënten $< n$ is.
Anders gezegd:

<u>Stelling</u> Het stelsel (2) heeft dan en slechts dan een van de nuloplossing verschillende oplossing, als de determinant der coëfficiënten nul is.

<u>Voorbeeld 1</u>

Het stelsel
$$\begin{aligned} 2x_1 + ax_2 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$
heeft een oplossing $\neq (0,0)$ als $\begin{vmatrix} 2 & a \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$, dus als $a = 10/3$.

<u>Voorbeeld 2</u>

Als in R_2 de drie rechten

(1) $$\begin{aligned} p_1x + q_1y + r_1 &= 0 \\ p_2x + q_2y + r_2 &= 0 \\ p_3x + q_3y + r_3 &= 0 \end{aligned}$$

een punt $x = a$, $y = b$ gemeen hebben, dan betekent dit dat de vergelijkingen

(2) $$\begin{aligned} p_1x + q_1y + r_1t &= 0 \\ p_2x + q_2y + r_2t &= 0 \\ p_3x + q_3y + r_3t &= 0 \end{aligned}$$

een oplossing $(x,y,t) = (a,b,1)$ hebben.

Dus moet dan

(3) $$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Is omgekeerd van de drie rechten (1) gegeven dat (3) geldt, dan hebben de vergelijkingen (2) een oplossingsvector $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Is hiervan $c \neq 0$, dan mogen we wel veronderstellen dat $c = 1$ (immers voor elke λ is ook $\lambda(a,b,c)$ een oplossingsvector). Dit betekent dan dat de rechten het punt $x = a$, $y = b$ gemeen hebben.

Is echter $c = 0$, dan voldoet $(x,y) = (a,b) \neq (0,0)$ aan het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} p_1x + q_1y = 0 \\ p_2x + q_2y = 0 \\ p_3x + q_3y = 0 \, , \end{cases}$$

dus

$$\text{rang} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{pmatrix} = 1 \, .$$

Dit betekent dat de rechten evenwijdig zijn en als ze verschillen hebben ze dan geen punt gemeen.

Voorbeeld 3

In R_2 is de voorwaarde, dat de 3 punten $A = (x_1,y_1)$; $B = (x_2,y_2)$; $C = (x_3,y_3)$ op één rechte liggen, de volgende:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Hieruit volgt, dat de vergelijking van de rechte door de punten $A = (x_1,y_1)$ en $B = (x_2,y_2)$ als volgt in determinantvorm kan worden geschreven

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Voorbeeld 4

In R_3 is de voorwaarde, dat 4 punten
$A = (x_1, y_1, z_1)$; $B = (x_2, y_2, z_2)$; $C = (x_3, y_3, z_3)$; $D = (x_4, y_4, z_4)$
in één vlak liggen, de volgende:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

HOOFDSTUK V COMPLEXE GETALLEN

§ 1. Definitie

De reële getallen hebben als meetkundige voorstelling de punten op de getallenrechte. In de verzameling der reële getallen is de vergelijking $x^2 + 7 = 0$ niet oplosbaar.

We gaan nu uit van het platte vlak, opgevat als een vectorruimte met een basis, bestaande uit twee vectoren $(1,0)$ en $(0,1)$, die we $\underline{1}$ en $\underline{i}$ noemen. Een vector $\underline{a}$ kunnen we schrijven

$$\underline{a} = a_1\underline{1} + a_2\underline{i} \ .$$

We gaan voor deze vectoren een product definiëren, dat weer een vector is.

Zij $\underline{a} = a_1\underline{1} + a_2\underline{i}$ en $\underline{b} = b_1\underline{1} + b_2\underline{i}$. We eisen nu dat $\underline{1} \cdot \underline{1} = \underline{1}$; $\underline{1} \cdot \underline{i} = \underline{i} \cdot \underline{1} = \underline{i}$; $\underline{i} \cdot \underline{i} = -\underline{1}$ en worden daardoor geleid om te definiëren

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1\underline{1} + a_2\underline{i}) \cdot (b_1\underline{1} + b_2\underline{i}) = (a_1b_1 - a_2b_2)\underline{1} + (a_1b_2 + a_2b_1)\underline{i} \ .$$

Het zo gedefinieerde product voldoet o.a. aan de volgende rekenregels, die voor het product van reële getallen wel bekend zijn:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a} \ ,$$

$$(\underline{a} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{c}) \ ,$$

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}$$

(ga na!). Door de invoering van dit product hebben we deze vectoren tot <u>complexe getallen</u> gemaakt. Voorlopig zien wij nog niet, wat het product meetkundig betekent.

Wel zien wij dat, als $a_2 = b_2 = 0$, de productformule luidt:

$$a_1\underline{1} \cdot b_1\underline{1} = a_1b_1\underline{1} \ .$$

Dus blijkt dat deze vermenigvuldiging, als men haar beperkt tot de vectoren op de horizontale rechte (d.w.z. de rechte, waarop de vector $\underline{1}$ ligt), overeenkomt met de vermenigvuldiging der reële getallen.

Maar ook

$$a_1\underline{1} + b_1\underline{1} = (a_1 + b_1)\underline{1}$$

dus ook de optelling van vectoren op de horizontale rechte komt overeen met die der reële getallen.

Een deel der complexe getallen, namelijk die op de horizontale as, vormt dus de getallenrechte met bijbehorende vermenigvuldiging en optelling.

Afspraak: Laat $\underline{1}$ weg en laat de streep onder i weg.
Dan zijn de complexe getallen: $a + bi$.
De verzameling der complexe getallen $a + bi$ omvat dus de verzameling der reële getallen a.
De coördinaatas, die de reële getallen bevat, noemen we de reële as, de coördinaatas die het getal i bevat de imaginaire as.

Het product $\lambda(a+bi)$ kunnen we nu echter op twee manieren opvatten, nl. als de vermenigvuldiging van de vector $a+bi$ met de scalar λ of als vermenigvuldiging van de twee complexe getallen $\lambda = \lambda + 0i$ en $a+bi$. Het kan geen kwaad, want de uitkomst is in beide gevallen $\lambda a + \lambda bi$.

Vb. 1 $(4+3i) + (5-4i) = 9-i$.

Vb. 2 $(2+3i)(1-2i) = 2-i-6.i^2 = 8-i$.

Vb. 3 $(2+3i)(2-3i) = 2^2+3^2 = 13$.

Vb. 4 $\dfrac{4+i}{2-3i} = \dfrac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{8+14i-3}{13} = \dfrac{5}{13} + \dfrac{14}{13}i$.

Vb. 5 $\dfrac{2+4i}{1+i} = \dfrac{2(1+2i)(1-i)}{1+1} = 3+i$.

Vb. 6 $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^{4k} = 1$ (k geheel).
Er is ook een getal met $z^2 = i$, nl.

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1+2i-1}{2} = i .$$

Def. Zij $z = a+ib$. Wij definiëren van z het reële deel Re z, het imaginaire deel Im z, en de modulus $|z| = r$ als volgt:

$\operatorname{Re} z = a$; $\operatorname{Im} z = b$; $|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}$.

Onder het argument $\arg z = \varphi$ verstaan wij de hoek(en) φ waarvoor geldt:

$\operatorname{Re} z = r\cos\varphi$ en $\operatorname{Im} z = r\sin\varphi$.

Als $\operatorname{Re} z = 0$ heet z zuiver imaginair.

Opm. Blijkbaar is arg 0 onbepaald. Voor $z \neq 0$ is het argument φ bepaald op een veelvoud van 2π na, d.w.z. als φ argument is dan ook $\varphi + 2k\pi$. In de complexe functietheorie maakt men de afspraak $-\pi < \arg z \leq \pi$ om te bereiken dat elk complex getal, behalve 0, precies één argument heeft. In dit dictaat maken wij deze afspraak niet.

Uit de definities volgt

$$z = a + ib = \mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) .$$

Een complex getal kan dus op twee manieren worden geschreven:

1) $\boxed{z = a + ib}$ 2) $\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$

Bij de eerste schrijfwijze wordt het complexe getal uitgedrukt met behulp van zijn projecties a en b op de assen, bij de tweede schrijfwijze door zijn modulus r en argument φ.

Vb. $z = 2 - i$ heeft modulus $r = \sqrt{5}$ en argument $\varphi = -\arctan\frac{1}{2} + 2k\pi$.
Denk erom dat arctan tussen $-\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$ ligt!
$z = -2 + i$ heeft modulus $r = \sqrt{5}$ en argument $\varphi = -\arctan\frac{1}{2} + \pi + 2k\pi$.

Vb. $\arg(-i) = \frac{3}{2}\pi$, $|-i| = 1$; $\arg 2 = 0$, $|2| = 2$.

$\arg(1 + i) = \frac{1}{4}\pi$, $|1 + i| = \sqrt{2}$; $\arg(-1) = \pi$, $|-1| = 1$.

Stelling Voor modulus en argument gelden de volgende eigenschappen:

1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

2) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ en $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

3) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ en $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

Bewijs 1) met de driehoeksongelijkheid.

Bewijs 2) Als $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ en $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, dan

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)]$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Bewijs 3) analoog aan bewijs 2), of uit 2) door te stellen $z_1 = z_2 \cdot \dfrac{z_1}{z_2}$.

Gevolg Het is nu mogelijk om het getal z_1z_2 te construeren als z_1 en z_2 zijn gegeven, immers

$$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \text{ en } \frac{|z_1z_2|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{1}.$$

Def. Als $z = a + ib$ dan heet $\bar{z} = a - ib$ de geconjugeerde van z.

Stelling Voor de geconjugeerde $\bar{z}$ van een complex getal z gelden de volgende eigenschappen

1) $z\,\bar{z} = |z|^2$ 2) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$

3) $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$ 4) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

5) $\bar{\bar{z}} = z$ 6) $\bar{z} = z \Leftrightarrow z$ reëel

7) $\arg \bar{z} = -\arg z$ 8) $|\bar{z}| = |z|$.

Een complex getal werd gedefinieerd als een vector uit de oorsprong O. Het eindpunt van deze vector heet het beeldpunt van het complexe getal. Daar grootte en richting deze vector vastleggen, kunnen wij het complexe getal ook voorstellen door een vrije vector, gelijk gericht met en even groot als de van O uitgaande vector. Van vrije vectoren zijn dus slechts grootte en richting van belang.

Stelling De vrije vector van het beeldpunt van z_1 naar het beeldpunt van z_2 stelt het complexe getal $z_2 - z_1$ voor, de afstand van de beeldpunten van z_1 en z_2 is $|z_2 - z_1|$.

Vb. 1 Drie vrije vectoren die een driehoek in dezelfde zin doorlopen hebben som nul.

Vb. 2 De verzameling der beeldpunten der complexe getallen z, waarvoor $|z| < 3$, is het inwendige van de cirkel $(0,3)$.

Vb. 3 Wat is de verzameling der beeldpunten van z, waarvoor $|z + 2i| > 1$? Dan moet de afstand van z tot $-2i$ groter dan 1 zijn. De verzameling bestaat dus uit alle punten buiten de cirkel met straal 1 en middelpunt $-2i$.

Vb. 4 Idem met $\mathrm{Im}\,z = -3$.

<u>Vb. 5</u> Idem met Re $z > 2$.

<u>Vb. 6</u> Idem met Re $z = |z - 1|$.
Dan moet de afstand van z tot de imaginaire as gelijk zijn aàn de afstand van z tot 1. De verzameling is dus een parabool.

<u>Vb. 7</u> Idem met $|z + 3| = |z - i|$.
Dan moet de afstand van z tot -3 gelijk zijn aan de afstand van z tot i. De verzameling is dus de middelloodlijn van -3 en i.

<u>Vb. 8</u> Idem met $|z + 5| + |z + 3i| = 8$.
Dan moet de som van de afstanden van z tot -5 en tot $-3i$ gelijk zijn aan 8. De verzameling is dus de ellips met brandpunten -5 en $-3i$ en lange as 8.

<u>Vb. 9</u> Idem met $\frac{z-3}{z+i}$ is zuiver imaginair.
Dan moet $\arg(z - 3) - \arg(z + i) = \frac{\pi}{2}$ of $-\frac{\pi}{2}$.
De meetkundige plaats is de cirkel met middellijn van 3 tot $-i$ met uitzondering van het punt $-i$.

§ 2. <u>e^z</u>

<u>Def.</u> Een rij complexe getallen $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ heeft de limiet c ($\lim_{n\to\infty} c_n = c$), als bij elke reëele $\varepsilon > 0$ een reëel getal N bestaat, zodat voor alle natuurlijke getallen $n > N$ geldt $|c_n - c| < \varepsilon$.

<u>Vb. 1</u> $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ voor $|z| < 1$, want $|z^n - 0| = |z|^n < \varepsilon$ als n voldoende groot is.

<u>Vb. 2</u> $\lim_{n\to\infty} z^n$ bestaat niet voor $|z| > 1$ omdat $|z^n| = |z|^n \to \infty$.

<u>Stelling</u> De rij $c_n = a_n + ib_n$ (a_n en b_n reëel) heeft de limiet $c = a + ib$ (a en b reëel) dan en slechts dan, als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

<u>Bewijs</u> Stel $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dan geldt

$$|c_n - c| = |a_n - a + i(b_n - b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| \,.$$

Het linkerlid is kleiner dan ε als bijv. $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ en $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Omgekeerd, stel $\lim\limits_{n\to\infty} = c$. Dan geldt

$$(a_n - a)^2 \leqslant (a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 = |c_n - c|^2 ,$$

dus $|a_n - a| \leqslant |c_n - c| < \varepsilon$ (en analoog $|b_n - b| < \varepsilon$) als n voldoende groot is.

Analoog kunnen we de betrekking $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ beschrijven met behulp van modulus en argument.

<u>Stelling</u> De rij $c_n = r_n(\cos\varphi_n + i \sin\varphi_n)$ heeft de limiet $c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq$ dan en slechts dan als

$$(*) \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} r_n = r \neq 0 , \\ \lim\limits_{n\to\infty} \cos\varphi_n = \cos\varphi , \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sin\varphi_n = \sin\varphi . \end{cases}$$

<u>Bewijs</u> Stel $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c \neq 0$ en schrijf $c_n = a_n + ib_n$, $c = a + ib$ (a_n, b_n, a, b reëel). Wegens de voorafgaande stelling geldt dan

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = r \neq 0 ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \cos\varphi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{r_n} = \frac{a}{r} = \cos\varphi ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin\varphi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{r_n} = \frac{b}{r} = \sin\varphi .$$

Omgekeerd volgt uit (*)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r_n \cos\varphi_n = r\cos\varphi = a ,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} r_n \sin\varphi_n = r\sin\varphi = b$$

en dus $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

Vb. 3 $c_n = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi}{n} + i \sin\frac{\varphi}{n})$ $(c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0,\text{const.})$,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1 \,.\, (\cos 0 + i \sin 0) = 1 .$$

(Merk op dat voor alle n geldt $(c_n)^n = c$, dus c_n is een n-de machtswortel uit het complexe getal c).

Vb. 4 $c_n = \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n$ (x reëel $\neq 0$) ,

$$r_n = |c_n| = \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^n} = \sqrt[2n]{\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}} \leqslant \sqrt[2n]{e^{(x^2)}} ,$$

$$\varphi_n = \arg c_n = n \,.\, \arctan\frac{x}{n} = x \,.\, \frac{n}{x}\arctan\frac{x}{n} ,$$

$$\lim r_n = 1 \quad (\text{wegens } 1 \leqslant r_n \leqslant \sqrt[2n]{e^{(x^2)}}) ,$$

$$\lim \varphi_n = x \,.\, \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x}\arctan\frac{x}{n} = x ,$$

dus

$$\lim_{n\to\infty} \cos\varphi_n = \cos x ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin\varphi_n = \sin x ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n = \cos x + i \sin x .$$

Gaan we nu uit van de bekende formule

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{voor reële } x,$$

dan definiëren we op grond van voorbeeld 4 voor reële x

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x} \qquad (\underline{\text{formule van Euler}}).$$

In overeenstemming hiermee definiëren we nu e^z voor complexe z.

<u>Def.</u> Als $z = x + iy$ (x en y reëel) dan $\boxed{e^z = e^x(\cos y + i \sin y)}$.

Evenals voor de reële exponentiële functie e^x geldt voor de aldus gedefinieerde e^z de

<u>Stelling</u> $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

<u>Bewijs</u> Zij $z_1 = x_1 + iy_1$ en $z_2 = x_2 + iy_2$, dan is

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)\, e^{x_2}(\cos y_2 + \sin y_2) =$$

$$= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] .$$

De definitie heeft zeer belangrijke gevolgen:

1) Als $z = x + iy$ (x en y reëel) dan $\boxed{|e^z| = e^x}$ en $\boxed{\arg e^z = y}$.

2) $\boxed{\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}$ en $\boxed{\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}$.

Bewijs: Uit de formule van Euler:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi \quad \text{en} \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \sin\varphi .$$

3) <u>De complexe getallen $e^{i\varphi}$ hebben hun beeldpunt op de eenheidscirkel $|z| = 1$</u>, immers dit is het geval voor de getallen $\cos\varphi + i \sin\varphi$.

Zo is $e^{\frac{1}{2}\pi i} = i$; $e^{\pi i} = -1$; $e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$;

$$e^{\frac{1}{4}\pi i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \quad \text{en} \quad e^{2\pi i} = 1 = e^{2k\pi i} .$$

4) <u>Elk complex getal $z = x + iy$ is te schrijven als $z = r\,e^{i\varphi}$</u>.
Dit volgt direct uit de schrijfwijze $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ en uit de formule van Euler.

5) <u>Een complex getal vermenigvuldigen met $e^{i\varphi}$ betekent meetkundig: de vector draaien over φ</u>.

Bewijs: Zij $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ dan is $z_0 e^{i\varphi} = r_0 e^{i(\varphi + \varphi_0)}$.

Vb. 1 Druk $\sin^3\varphi$ uit als som van sinussen van φ en veelvouden.

opl.

$$\sin^3\varphi = \left[\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right]^3 = \frac{1}{8i^3}\,[e^{3i\varphi} - 3e^{i\varphi} + 3e^{-i\varphi} - e^{-3i\varphi}] =$$

$$= \frac{-1}{4}\left[\frac{e^{3i\varphi} - e^{-3i\varphi}}{2i} - 3\,\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right] = -\tfrac{1}{4}(\sin 3\varphi - 3\sin\varphi) .$$

Vb. 2 Druk $\cos 3\varphi$ uit als som van machten van $\cos\varphi$.

opl.

$$\cos 3\varphi = \mathrm{Re}(e^{3i\varphi}) = \mathrm{Re}[(e^{i\varphi})^3] = \mathrm{Re}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 =$$

$$= \mathrm{Re}[\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi.\sin\varphi + 3i^2\cos\varphi\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi] =$$

$$= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi .$$

Vb. 3 Wij zagen dat het beeldpunt van $z = e^{i\alpha}$, als α loopt van 0 tot 2π, in het complexe vlak de eenheidscirkel doorloopt.
Welke baan beschrijft nu het beeldpunt van

$$z = e^{(p + iq)\alpha}$$

als α loopt van 0 tot ∞, en p en $q \neq 0$ reëel en vast zijn?

opl.

Daar $z = e^{p\alpha} . e^{iq\alpha}$ is $|z| = r = e^{p\alpha}$ en $\arg z = \varphi = q\alpha$

dus (elimineer α) $r = e^{p\varphi/q}$, de vergelijking in poolcoördinaten van een spiraal.

Vb. 4 Wanneer z de eenheidscirkel doorloopt, welke baan beschrijft dan

$$w = \frac{1}{1+z} \;?$$

opl.

Wij kunnen stellen $z = e^{i\varphi}$ met $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Dan

$$w = \frac{1}{1 + e^{i\varphi}} = \frac{1}{1 + \cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{1 + \cos\varphi - i\sin\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{1 + \cos\varphi - i\sin\varphi}{2(1 + \cos\varphi)} = \frac{1}{2} - \frac{i\sin\varphi}{2(1 + \cos\varphi)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,i\tan\frac{1}{2}\varphi .$$

Dus $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$ en $\operatorname{Im} w = -\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}\varphi$.

Dus als φ: 0 , $\frac{1}{2}\pi$, π , $\frac{3}{2}\pi$, 2π

dan is w : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$, $\frac{1}{2} - i\infty$ / $\frac{1}{2} + i\infty$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$, $\frac{1}{2}$

$\varphi = \pi$, $z = -1$ is uitgezonderd.

Vb. 5 Bewijs dat, als z op de eenheidscirkel ligt,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0 .$$

opl. (Algebr.)

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{e^{i\varphi} + 1}{e^{i\varphi} - 1} \quad \frac{e^{\frac{1}{2} i\varphi} + e^{-\frac{1}{2} i\varphi}}{e^{\frac{1}{2} i\varphi} - e^{-\frac{1}{2} i\varphi}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2} i\varphi} + e^{-\frac{1}{2} i\varphi}}{2} \cdot \frac{2i}{e^{\frac{1}{2} i\varphi} - e^{-\frac{1}{2} i\varphi}} \cdot \frac{1}{i} = -i \cot\frac{1}{2}\varphi .$$

opl. (Meetk.)

$$\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \arg(z+1) - \arg(z-1) = \pm\frac{\pi}{2} .$$

§ 3. Vergelijkingen

Wij bespreken vergelijkingen van de vorm

$$P(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (a_i, \text{ z complex, } a_0 \neq 0).$$

Hoofdstelling van de algebra

De vergelijking $P(z) = 0$ van graad $n \geqslant 1$ heeft tenminste één wortel z_1.

De hoofdstelling wordt later bij de functietheorie (leer der functies van een complexe variabele) bewezen.

Opm. Vergelijkingen met reële coëfficiënten behoeven geen reële wortels te hebben, bijv. $x^2 + 1 = 0$ heeft geen reële wortel.

De reststelling geldt ook voor polynomen $P(z)$, dus:

Als $P(z) = 0$ wortel z_1 heeft, dan is $P(z)$ deelbaar door $z - z_1$.

Deel, dan $P(z) = (z - z\ )Q(z)$, $Q(z)$ graad $n - 1$.

Maar volgens de hoofdstelling heeft ook $Q(z) = 0$ een wortel, dus $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)R(z)$. Zo voortgaande vinden wij:

Stelling Iedere veelterm van de graad n met complexe coëfficiënten is product van n veeltermen van de graad 1:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = a_0(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)\ .$$

Opm. De $z_1, \ldots, z_n$ behoeven niet verschillend te zijn.

Gevolg Een vergelijking van de graad n heeft niet meer dan n wortels.

Men zegt wel eens wat onnauwkeurig, dat een vergelijking van de graad n precies n wortels heeft. Hiermee is bedoeld, dat de getallen, die meermalen onder $z_1, \ldots, z_n$ voorkomen, ook meervoudig worden geteld.

Stelling Als $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$ reële coëfficiënten a_i heeft, en als $z_0 = p + iq$ een wortel is, dan is ook $\bar{z}_0 = p - iq$ een wortel.

Bewijs

Vul in, dan is $a_0(p+iq)^n + a_1(p+iq)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(p+iq) + a_n = 0$.
Neem de toegevoegde complexe waarde links en rechts, d.w.z. vervang overal i door - i. Daar de a_k reëel zijn, staat er dan

$$a_0(p - iq)^n + a_1(p - iq)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(p - iq) + a_n = 0\ ,$$

dus $p - iq$ is een wortel.

Voorbeeld $z^3 + 2z^2 + 2z + a = 0$.
Gegeven is, dat a reëel is en dat de vgl. een zuiver imaginaire wortel $\neq 0$ heeft. Gevraagd a en de wortels.

Op grond van de stelling ziet men dat de wortels moeten zijn van de gedaante $z = ip, - ip, q$ met p, q reëel en $p \neq 0$.

De vergelijking moet dus luiden $(z^2 + p^2)(z - q) = 0$. Dus

$$z^3 - qz^2 + p^2 z - p^2 q = 0$$

moet identiek zijn met $z^3 + 2z^2 + 2z + a = 0$.
Hieruit volgt $q = -2$, $p^2 = 2$, $a = 4$. De wortels zijn dus -2, $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$.

<u>Binomiaalvergelijking</u> $z^n = c$ (n natuurlijk, c complex)

<u>Methode</u>:

Schrijf $c = r\,e^{i\varphi}$, dan staat er $z^n = r\,e^{i\varphi} = r\,e^{i\varphi + 2k\pi i}$.

Modulus: $|z^n| = |z|^n = r$ dus $|z| = \sqrt[n]{r}$.

Argument: $\arg z^n = n \arg z = \varphi + 2k\pi$ dus $\arg z = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$.

De oplossingen van de binomiaalvergelijking zijn dus

$z = \sqrt[n]{r}\,e^{\frac{i(\varphi + 2k\pi)}{n}}$, $k = 0,1,2,\ldots,n-1$, uitgeschreven $\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{i\varphi}{n}}$, $\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{i(\varphi + 2\pi)}{n}}$,

$\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{i(\varphi + 4\pi)}{n}}$,..., $\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{i(\varphi + 2(n-1)\pi)}{n}}$.

In het complexe vlak vormen deze wortels een regelmatige n-hoek, waarvan $\sqrt[n]{r}$ de straal van de omschreven cirkel is.

<u>Vb. 1</u> Los op de vergelijking $z^4 = 2\sqrt{2}(1 + i)$

<u>Opl</u>. $z^4 = 4e^{\frac{\pi i}{4} + 2k\pi i}$ dus $|z| = \sqrt{2}$ en $4 \arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, dus $\arg z = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$,
met $k = 0,1,2,3$.

$z_1 = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{16} i}$, $z_2 = \sqrt{2}\,e^{\frac{9}{16}\pi i}$, $z_3 = \sqrt{2}\,e^{\frac{17}{16}\pi i}$, $z_4 = \sqrt{2}\,e^{\frac{25}{16}\pi i}$.

<u>Vb. 2</u> $(z + 2i)^3 = i$, dus $(z + 2i)^3 = e^{\frac{\pi i}{2}}$

dus $|z + 2i| = 1$ en $3 \arg(z + 2i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\arg(z + 2i) = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$. De wortels zijn dus $z + 2i = e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)i}$

$z_1 = -2i + e^{\frac{\pi}{6} i} = -2i + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} i = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} i$

$z_2 = -2i + e^{\frac{5}{6}\pi i} = -2i - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} i = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} i$

$z_3 = -2i + e^{\frac{3}{2}\pi i} = -2i - i = -3i$.

<u>Vb. 3</u> $z^2 - 6zi - 15 - 8i = 0$. Kwadraat afsplitsen geeft

$(z - 3i)^2 = 6 + 8i = 10\, e^{i \arctan 4/3 + 2k\pi i}$, dus de wortels zijn

$$z = 3i + \sqrt{10}\, e^{\frac{1}{2} i \arctan 4/3 + k\pi i} = 3i \pm \sqrt{10}\, e^{\frac{1}{2} i \arctan 4/3} =$$

$$= 3i \pm \sqrt{10}\, [\cos(\tfrac{1}{2} \arctan \tfrac{4}{3}) + i \sin(\tfrac{1}{2} \arctan \tfrac{4}{3})] =$$

$$= 3i \pm \sqrt{10} \left[\frac{2}{\sqrt{5}} + i \frac{1}{\sqrt{5}}\right] = 3i \pm (2 + i)\sqrt{2}\ .$$

<u>Vb. 4</u> $z^2 = -6 + 8i = 10\, e^{i(\pi - \arctan 4/3) + 2k\pi i}$, dus

$$z = \pm i\sqrt{10}\, e^{-\frac{1}{2} i \arctan 4/3} = \pm i\sqrt{10} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{i}{\sqrt{5}}\right) = \pm \sqrt{2}(2i + 1)\ .$$

§ 4. <u>Complexe functies van een reële variabele</u>

<u>Opm</u>. Een complexe functie van een complexe variabele z is een voorschrift, volgens hetwelk aan elke geoorloofde complexe z een complexe functiewaarde wordt toegevoegd.

Zo zijn $w = e^z$, $w = \frac{1}{1+z}$ (voor $z \neq -1$) complexe functies van de complexe variabele z.

De zeer belangrijke theorie van deze functies wordt in semester 5 behandeld. Nu beperken wij ons tot

<u>Def</u>. Een <u>complexe functie</u> van een <u>reële variabele</u> x is een voorschrift volgens hetwelk aan elke geoorloofde reële x een complex getal wordt toegevoegd.

<u>Vb</u>. $f(x) = (ix + 1)^3 = 1 - 3x^2 + i(3x - x^3)$.

Algemeen kunnen wij schrijven $f(x) = u(x) + iv(x)$ met $u(x)$ en $v(x)$ reële functies.

<u>Def</u>. Bij de complexe functie $f(x)$ van een reële veranderlijke x zeggen wij dat

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L\ ,$$

als elke omgeving van α geoorloofde waarden $x \neq \alpha$ bevat en als bij iedere reële $\varepsilon > 0$ een omgeving van α bestaat, zodat voor alle geoorloofde $x \neq \alpha$ in die omgeving geldt dat

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

(hierin is α een reëel getal, ∞ of $-\infty$).

In het speciale geval van een rij van complexe getallen komt deze definitie overeen met de in § 2 gegeven definitie. Op een analoge manier waarop de eerste stelling van § 2 werd aangetoond, kan men de volgende stelling bewijzen.

<u>Stelling</u> Zij $f(x) = u(x) + iv(x)$ en $L = M + iN$ met $u(x), v(x), M, N$ reëel. Dan geldt dat

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L$$

dan en slechts dan als

$$\lim_{x \to \alpha} u(x) = M \quad \text{en} \quad \lim_{x \to \alpha} v(x) = N .$$

Blijkbaar kan men de limiet van een complexe functie van een reële variabele berekenen via de limieten van het reële en het imaginaire deel. Hetzelfde geldt voor de afgeleide en de integraal van een complexe functie van een reële variabele. Voor $f(x) = u(x) + iv(x)$, met $u(x)$ en $v(x)$ reëel, geldt dus:

1) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} u(x) + i \lim\limits_{x \to \alpha} v(x)$

2) $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$

3) $\int f(x)dx = \int u(x)dx + i\int v(x)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i \int_a^b v(x)dx$.

<u>Voorbeeld</u>

$$\frac{d}{dx}(e^{ix}) = \frac{d}{dx}(\cos x + i \sin x) = -\sin x + i \cos x = i(\cos x + i \sin x) = i\, e^{ix} .$$

Algemener geldt voor een complexe constante α

<u>Stelling</u> $\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}) = \alpha e^{\alpha x}$ en $\int e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C \qquad (\alpha \neq 0)$.

Bewijs Zij $\alpha = p + iq$, dan

$$\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}) = \frac{d}{dx} e^{(p+iq)x} = \frac{d}{dx}[e^{px}(\cos qx + i \sin qx)] =$$

$$= \frac{d}{dx}(e^{px} \cos qx) + i \frac{d}{dx}(e^{px} \sin qx) =$$

$$= pe^{px}(\cos qx + i \sin qx) + iqe^{px}(i \sin qx + \cos qx) =$$

$$= (p + iq)e^{(p+iq)x} = \alpha e^{\alpha x} .$$

Voorbeeld

$$\int e^x \cos x \, dx = \int e^x \operatorname{Re} e^{ix} dx = \operatorname{Re}\int e^x e^{ix} dx =$$

$$= \operatorname{Re}\int e^{(1+i)x} dx = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+i} e^{(1+i)x} + C\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2} e^x \operatorname{Re}(1-i)e^{ix} + D = \tfrac{1}{2} e^x \operatorname{Re}(1-i)(\cos x + i \sin x) + D =$$

$$= \tfrac{1}{2} e^x(\cos x + \sin x) + D .$$

(C is een complexe constante en $D = \operatorname{Re} C$.)

Def. Een complexe vectorruimte is een verzameling dingen, genaamd vectoren, waarin is gedefinieerd een som $\underline{x} + \underline{y}$ en een scalair product $\lambda\underline{x}$ (λ complex) zodat de bekende rekenregels gelden.

Wij hebben steeds met reële getallen gewerkt, maar de gehele theorie geldt ook wanneer wij complexe getallen gebruiken.

Vb. De lineaire vormen in 3 variabelen met complexe coëfficiënten $az_1 + bz_2 + cz_3$ vormen een vectorruimte over de complexe getallen.

Vb. De complexe functies $f(t)$ van de reële variabele t, dus $u(t) + iv(t)$ vormen een vectorruimte omdat $f(t) + g(t)$ en $(a + ib)f(t)$ weer complexe functies zijn.

§ 5. Hyperbolische functies

In analogie met $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ en $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ definiëren wij thans de functies

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \; ; \; \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \; ; \; \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} \; ;$$

dit zijn reële functies, gedefinieerd voor elke x.

Wij merken op, dat

$\cosh 0 = 1$; $\sinh 0 = 0$; $\tanh 0 = 0$

$\cosh(-x) = \cosh x$; $\sinh(-x) = -\sinh x$; $\tanh(-x) = -\tanh x$.
(even) (oneven) (oneven)

Er gelden verder vele formules, b.v.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad e^x = \cosh x + \sinh x$$

en somformules die mooier, maar onbelangrijker zijn dan in de goniometrie, b.v.

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \; .$$

Voor differentiëren geldt

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \; ; \; \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \; ; \; \frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} \; .$$

Wij merken nog op, dat $\cosh x > \sinh x$ voor alle x, dat

$$\lim_{x \to \infty} \tanh x = \lim_{x \to \infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1 \; ,$$

en kunnen dan de grafiek tekenen.

Opm. Door $x = a \cosh t$ en $y = b \sinh t$ wordt een parametervoorstelling gegeven van een tak van de hyperbool

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \; .$$

Opm. Als x van $-\infty$ tot $+\infty$ loopt, doorloopt $\sinh x$ monotoon stijgend alle reële getallen. De omkeerfunctie vindt men uit

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} ,$$

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 ,$$

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \qquad (\text{omdat } e^x > 0) ,$$

$$x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad \text{voor alle reële } y .$$

De afgeleide der omkeerfunctie is

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} .$$

Voorbeeld (Kettinglijn).

Beschouw een vrij hangende homogene ketting, die zich slechts onder invloed van zijn eigen gewicht bevindt. Welke kromme zal de hangende ketting volgen?

Opl. Zij $S(x)$ de spanning in P, en $S(x + h)$ die in Q, dan is

horiz.comp.: $S(x + h)\cos \alpha(x + h) - S(x)\cos \alpha(x) = 0$

vert.comp. : $S(x + h)\sin \alpha(x + h) - S(x)\sin \alpha(x) = \sigma\, \widehat{PQ}$

waarin σ = gewicht per lengteeenheid van de homogene ketting.

Dus

$$[S(x)\cos \alpha(x)]' = 0 \text{ en } [S(x)\sin \alpha(x)]' = \sigma \lim_{h \to 0} \frac{\widehat{PQ}}{h} = \frac{\sigma}{\cos \alpha(x)} .$$

Uit de eerste vergelijking volgt $S(x)\cos \alpha(x) = c$, ingevuld in de tweede

$$\frac{d}{dx} [c \tan \alpha(x)] = \frac{\sigma}{\cos \alpha(x)} = \sigma\sqrt{1 + \tan^2\alpha(x)} ,$$

$$\frac{d \tan \alpha(x)}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha(x)}} = \frac{\sigma}{c}\, dx ,$$

$$\log[\tan \alpha(x) + \sqrt{1 + \tan^2\alpha(x)}] = \frac{\sigma}{c} x + C = \frac{\sigma}{c} (x - a) .$$

Op grond van de zojuist gemaakte opmerking volgt nu dat

$$\tan \alpha(x) = \sinh \frac{\sigma}{c} (x - a) = \frac{dy}{dx} ,$$

$$y = \frac{c}{\sigma} \cosh \frac{\sigma}{c} (x - a) + A .$$

Daarom heet de grafiek van cosh x wel de kettinglijn.

Voorbeeld (Hangbrug).

Beschouw een kabel met verwaarloosbaar gewicht en een daaraan opgehangen wegdek met gewicht σ per horizontaal gemeten lengteeenheid. Welke kromme zal de kabel volgen?

Opl. Ontbinding van de spanning $S(x)$ in zijn horizontale en verticale component levert weer

$$S(x+h)\cos\alpha(x+h) - S(x)\cos\alpha(x) = 0 \,,$$

$$S(x+h)\sin\alpha(x+h) - S(x)\sin\alpha(x) = \sigma h \,.$$

Dus $[S(x)\cos\alpha(x)]' = 0$ en $[S(x)\sin\alpha(x)]' = \sigma$. Uit de eerste vergelijking volgt $S(x)\cos\alpha(x) = c$, uit de tweede daarna

$$\frac{d}{dx}[c\tan\alpha(x)] = \sigma \,,$$

$$y' = \tan\alpha(x) = \frac{\sigma}{c}x + C = \frac{\sigma}{c}(x-a) \,,$$

$$y = \frac{\sigma}{2c}(x-a)^2 + b \,.$$

Dit is de vergelijking van een parabool met verticale as.

Appendix 1: Over de invoering van het getal e en de exponentiële functie e^x.

In hoofdstuk I gingen we er van uit dat groeifuncties en hun eigenschappen reeds bekend zijn. De invoering van het getal e in I. § 4.D vb. 5 hing van deze eigenschappen af. We geven nu een invoering van e en e^x, waarbij geen gebruik gemaakt wordt van groeifuncties.

Stelling 1 $\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, aangenomen dat $n > -x \neq 0$.

Bewijs

Schrijf $u = 1 + \frac{x}{n+1}$, $v = 1 + \frac{x}{n}$,

dan is $v > 0$, $u > 0$, $u \neq v$ en

$$n(v-u) = n\left(\frac{x}{n} - \frac{x}{n+1}\right) = n \cdot \frac{x}{n(n+1)} = \frac{x}{n+1} = u-1 ,$$

dus

$$\begin{aligned} u^{n+1} - v^n &= u(u^n - v^n) + v^n(u-1) = \\ &= u(u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \ldots + v^{n-1}) + v^n \cdot n \cdot (v-u) = \\ &= (u-v)(u^n + u^{n-1}v + \ldots + uv^{n-1} - nv^n) = \\ &= (u-v)^2(u^{n-1} + 2u^{n-2}v + \ldots + nv^{n-1}) > 0 . \end{aligned}$$

Stelling 2 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = 1.$

Bewijs

Voor $n > |x| \neq 0$ is $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n$ wegens stelling 1 monotoon stijgend, maar naar boven begrensd door 1, dus

$$1 \geqslant \ell = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n > 0$$

$$\ell^n > \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} .$$

Als $\ell < 1$, dan zou ℓ^n monotoon naar 0 dalen, terwijl $\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}$ volgens stelling 1 monotoon stijgt. Dus $\ell = 1$.

Stelling 3 Voor alle x bestaat

$$e(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0$$

en er geldt

$$\lim_{x \to 0} \frac{e(x) - 1}{x} = 1 ,$$

$$e(-x) = \frac{1}{e(x)} .$$

Bewijs Voor $n > |x|$ geldt, zoals uit het bewijs van stelling 2 volgt,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} .$$

Omdat voor $n \to \infty$ de linker term stijgt en de rechter term daalt,is de monotone rij $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ begrensd en heeft zij een limiet $e(x) > 0$. In het bijzonder geldt voor $0 < |x| < 1$ en $n = 1$

$$1 + x \leqslant e(x) \leqslant \frac{1}{1 - x} ,$$

$$x \leqslant e(x) - 1 \leqslant \frac{x}{1 - x} ,$$

$$1 \leqslant \frac{e(x) - 1}{x} \leqslant \frac{1}{1 - x} \qquad \text{voor } 1 > x > 0 ,$$

$$1 \geqslant \frac{e(x) - 1}{x} \geqslant \frac{1}{1 - x} \qquad \text{voor } -1 < x < 0 ,$$

dus volgens de insluitstelling

$$\lim_{x \to 0} \frac{e(x) - 1}{x} = 1 .$$

Tenslotte geldt volgens stelling 2

$$1 = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n =$$

$$= e(x) \, . \, e(-x) .$$

Stelling 4 De functie $e(x)$ is continu en voldoet aan de „functionaalvergelijking"

$$e(x+y) = e(x) \cdot e(y) \ .$$

Bewijs Uit

$$p^n - q^n = (p-q)(p^{n-1} + p^{n-2}q + \ldots + q^{n-1})$$

concluderen wij zowel voor $p > q \geqslant 0$ als ook voor $q > p \geqslant 0$

$$nq^{n-1}(p-q) \leqslant p^n - q^n \leqslant np^{n-1}(p-q) \ .$$

Voor $p = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right)$ en $q = 1 + \frac{x+y}{n}$ impliceert dit

$$\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{xy}{n} \leqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n \leqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{y}{n}\right)^{n-1} \frac{xy}{n}$$

Toepassing van de insluitstelling levert in de limiet

$$e(x) \cdot e(y) - e(x+y) = 0 \ .$$

Continuïteit van $e(x)$ volgt nu uit

$$|e(x) - e(a)| = e(a)|e(x-a) - 1| \ ;$$

volgens stelling 3 is het rechterlid namelijk kleiner dan $2|x-a| \cdot e(a)$ als $|x-a|$ maar voldoende klein is.

Als wij het getal e definiëren door $e := e(1)$, dan geldt voor willekeurige natuurlijke getallen m en n

$$e = e(1) = e(n \cdot \tfrac{1}{n}) = [e(\tfrac{1}{n})]^n \ , \text{ dus } e(\tfrac{1}{n}) = \sqrt[n]{e} \ ,$$

$$e(\tfrac{m}{n}) = e(m \cdot \tfrac{1}{n}) = [e(\tfrac{1}{n})]^m \ , \text{ dus } e(\tfrac{m}{n}) = e^{\frac{m}{n}} \ ,$$

$$e(-\tfrac{m}{n}) = \frac{1}{e(\frac{m}{n})} = e^{-\frac{m}{n}} \ .$$

Voor elk rationaal getal a is daarom $e(a)$ hetzelfde als e^a, en als a_n een rij rationale getallen met limiet x doorloopt, volgt uit de continuïteit van $e(x)$

$$e(x) = \lim_{n \to \infty} e(a_n) = \lim_{n \to \infty} e^{a_n} \ .$$

Deze betrekking definieert pas goed het getal e^x ($= e(x)$) en daarmede de groeifunctie e^x.

Appendix 2: De kromtestraal.

A. Teken van y''

Zij gegeven een kromme $y = f(x)$. De meetkundige betekenis van de eerste afgeleide in een punt P is de tangens van de hoek α, die de raaklijn in P maakt met de positieve x-as. Als de eerste afgeleide positief is, dan is de functie toenemend. Als de tweede afgeleide positief is, dan is wegens $y'' = (y')'$ de eerste afgeleide toenemend, dus dan draait de raaklijn volgens $\circlearrowleft$; de kromme is hol naar boven. Als de tweede afgeleide negatief is, dan is de eerste afgeleide afnemend, dus de raaklijn draait volgens $\circlearrowright$, dus de kromme is bol naar boven.

$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	toenemend	extreem	afnemend
$f(x)$	hol = concaaf	buigpunt	bol = convex

Voorbeeld 1 $\quad y = x^3 - 9x$; $y' = 3x^2 - 9$; $y'' = 6x$.

Bij $x = 0$ treedt een buigpunt op; voor $x > 0$ is de grafiek hol en voor $x < 0$ is hij bol.

B. Kromming

Als de eerste afgeleide groot is, dan is de kromme snel stijgend. Als de tweede afgeleide groot is, dan is wegens $y'' = (y')'$ de eerste afgeleide snel stijgend; de raaklijn draait dus snel; de grafiek is sterk "gekromd". Het begrip kromming dient echter nog te worden gedefinieerd.

Def. Het kromtemiddelpunt M, behorend bij een punt P van een kromme, is de limietstand van het snijpunt van de normalen in P en in een naburig punt Q van de kromme, wanneer Q tot P nadert.
De kromtestraal ρ in P is de afstand van P tot het kromtemiddelpunt.
De kromtecirkel van P is de cirkel (M,ρ).

Vb. De kromtecirkel van een punt van een cirkel is die cirkel zelf.

Wij leiden een formule af voor de kromtestraal in $P = (a, f(a))$ van de kromme $y = f(x)$. De vergelijking van de normaal in P is

$$[y - f(a)]f'(a) + x - a = 0$$

en van de normaal in $Q = (a + h,\ f(a + h))$

$$[y - f(a + h)]f'(a + h) + x - a - h = 0\ .$$

Voor het snijpunt $S = (x_S, y_S)$ van beide normalen geldt

$$y_S[f'(a + h) - f'(a)] = h + f(a + h)f'(a + h) - f(a)f'(a)\ .$$

Deel door h en neem de limiet voor $h \to 0$, dan $S \to M$ en

$$y_M f''(a) = 1 + [f(x)f'(x)]'_{(x=a)} = 1 + [f'(a)]^2 + f(a)f''(a)\ ,$$

dus

$$y_M - f(a) = \frac{1 + [f'(a)]^2}{f''(a)} \qquad \text{en}$$

$$x_M - a = - f'(a)[y_M - f(a)]\ .$$

De kromtestraal $\rho = PM$ is

$$\sqrt{(x_M - a)^2 + (y_M - f(a))^2} = \frac{\{1 + [f'(a)]^2\}^{3/2}}{|f''(a)|}\ .$$

Als $f''(a) > 0$, dus als de kromme concaaf is in P, dan ligt het kromtemiddelpunt hoger dan P.

Als $f''(a) < 0$, dus als de kromme convex is in P, dan ligt het kromtemiddelpunt lager dan P.

In beide gevallen liggen de kromtecirkel en de kromme aan dezelfde kant van de raaklijn in P.

Als $f''(a) = 0$, dus zeker als P buigpunt van de kromme is, dan verdwijnt het snijpunt S naar het oneindige.

Def. De kromming $K(P)$ van $y = f(x)$ in het punt P is het omgekeerde van de kromtestraal, dus

$$\boxed{K(P) = \frac{|f''(a)|}{\{1 + [f'(a)]^2\}^{3/2}}}$$

Opm. $K(P)$ kan ook als volgt worden gedefinieerd. Zij φ de hoek tussen de raaklijn in P en de raaklijn in een naburig punt Q van de kromme. Zij $\widehat{PQ}$ de lengte van het stuk kromme tussen P en Q. Dan is

$$K(P) = \left| \lim_{Q \to P} \frac{\varphi}{\widehat{PQ}} \right|.$$

Voorbeeld $y = \log x$. In welk punt P is de kromming maximaal? Bereken daar de coördinaten van het kromtemiddelpunt.

Opl. $y = \log x$, $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$, dus $K = \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$.

$\frac{dK}{dx} = 0$ als $-(x^2+1)^{3/2} + x \cdot \frac{3}{2}(x^2+1)^{1/2} \cdot 2x = 0$, dus als $2x^2 - 1 = 0$,

$x_P = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dan $y_P = -\frac{1}{2}\log 2$ en $\rho = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Uit een figuur zien wij, dat voor het kromtemiddelpunt (ξ,η) geldt

$$\xi = x_P + \rho \sin\varphi \quad \text{en} \quad \eta = y_P - \rho\cos\varphi$$

waarin voor φ, de hoek van de raaklijn in P met de positieve x-as, geldt $\tan\varphi = y'(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Dus

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2},$$

$$\eta = -\frac{1}{2}\log 2 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\log 2 - \frac{3}{2}.$$

C. Osculeren

Een kromme $y = f(x)$ wordt door de rechte $y = g(x) \equiv mx + n$ door het snijpunt $P = (x_0, f(x_0))$ geraakt, als in P geldt $f'(x_0) = m$, dus als $f'(x_0) = g'(x_0)$, dus als in P hun eerste afgeleiden overeenstemmen.

Stelling $y = f(x)$ en de functie die de kromtecirkel in P voorstelt hebben de eigenschap, dat in P niet alleen hun eerste afgeleiden, maar ook hun tweede afgeleiden gelijk zijn. Men zegt dat de kromme en de cirkel in P osculeren.

Bewijs

De kromme heeft vergelijking $y = f(x)$. Laat de vergelijking van de cirkelboog in de buurt van $P = (x_0, f(x_0))$ zijn $y = g(x)$. Dan is $f(x_0) = g(x_0)$ en ook $f'(x_0) = g'(x_0)$, omdat kromme en cirkel in P dezelfde raaklijn hebben. Maar bovendien is de kromming in P dezelfde, dus

$$\frac{|f''(x_0)|}{\{1+[f'(x_0)]^2\}^{3/2}} = K(P) = \frac{|g''(x_0)|}{\{1+[g'(x_0)]^2\}^{3/2}}.$$

Dus ook $|f''(x_0)| = |g''(x_0)|$. Omdat cirkel en kromme aan dezelfde kant van de raaklijn liggen, is dus $f''(x_0) = g''(x_0)$.