TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Examen- en Tentamenopgaven (1957-1968)

Wiskunde I

Met antwoorden en oplossingen

Onderafdeling der Wiskunde

EXAMEN en TENTAMEN OPGAVEN

Wiskunde I
met antwoorden en oplossingen (1960-1968)

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT. NR. 236
PRIJS *f* 2,--

ENKELE BIBLIOGRAFISCHE OPMERKINGEN

bij

Examen en Tentamen Opgaven (1957-1968) van WISKUNDE I

De hier gebundelde Examen en Tentamen Opgaven zijn een compilatie van de, achtereenvolgens, onder gelijkluidende titels verschenen opgavenverzamelingen over de jaren 1957-1966 en de jaren 1960-1968.

JdG, 9 Mei 2005.

Inhoudsbeschrijving
Examen en Tentamen Opgaven Wiskunde I
(1957-1968)

(Inhoudsbeschrijving is van 9 Mei 2005, JdG)

Examen en tentamen opgaven Wiskunde I.

In dit tentamenboek (samengesteld door een commissie uit de onderafdeling der wiskunde) zijn opgenomen alle wiskunde I tentamens uit de laatste tien jaren, te weten:

- de tentamens uit 1957 t/m 1961 met antwoorden
- de tentamens uit 1962 t/m 1966 met uitgewerkte oplossingen.

Van de opzet van het vroegere sommenboek "Examen en tentamen opgaven - Wiskunde I en II met oplossingen - Deel I en II" is in zoverre afgeweken dat de tentamenstof niet rubrieksgewijs maar per tentamen chronologisch wordt besproken en het tweede gedeelte (aanwijzingen) in de nieuwe opzet is weggelaten.

Voor studenten, die oefenstof zoeken voor een bepaald onderdeel van Wiskunde I, is het boek toegankelijker gemaakt door toevoeging van een tabel (achteraan in dit boek), die de indeling van de collegestof geeft over de besproken tentamens.

Ieder tentamen is aangegeven met een code:
een letter (P, I, respectievelijk voor proef- en deeltentamen) en
een cijfercombinatie voor de maand en het jaar waarin het tentamen plaats vond.

Proeftentamen Wiskunde I op dinsdag 12 november 1957 (2 uren).

1. a) Bewijs de volgende stelling:
   Als $f(x)$ differentieerbaar is voor $x = a$, dan is $f(x)$ continu voor $x = a$.

   b) Differentieer en werk uit:

$$f(x) = 2x \arctan x - \log(1 + x^2) .$$

2. Bereken de volgende limieten

   a) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{5^n . 7 + 3^n}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin 2x}$.

3. Bereken de volgende integralen

   a) $\int x \log(1 - x^2)dx$; b) $\int \dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

4. Beschouw op $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ de functies

$$y = \sin x \quad \text{en} \quad y = \tfrac{1}{2} \tan x .$$

   a) Teken in één figuur de grafiek van beide functies (alleen de tekening wordt gevraagd).

   b) Bereken de tangens van de hoeken, waaronder de beide grafieken snijden.

   c) Bereken de oppervlakte van het gebied dat door beide grafieken wordt ingesloten.

5. Schets op $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ de grafiek van $y = \arcsin(\sin x)$.
   Geef een korte toelichting.

Antwoorden Proeftentamen november 1957.

1. a) Zie dictaat.

   b) $f'(x) = 2 \arctan x$.

2. a) 5 (insluitstelling toepassen).

   b) $\frac{1}{4}$.

3. a) $\frac{1}{2}(x^2 - 1)\log(1 - x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C$.

   b) $2 \arctan \sqrt{x} + C$.

4. b) Bij O: $\tan \varphi_0 = \frac{1}{3}$; bij $S = (\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$: $\tan \varphi_S = \frac{3}{4}$.

   c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2$.

5. Voor $-\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ resp. $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$

   : $y = -\pi - x$, $y = x$ resp. $y = \pi - x$.

Tentamen Wiskunde I op maandag 13 januari 1958.

1. Gegeven is $f(x) = \arctan \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

   a) Bepaal de afgeleide van f(x).

   b) Bepaal $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ en $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   c) Schets de grafiek van f(x).

   d) Bewijs, zonder de integraal uit te rekenen, dat

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^1 f(x)dx < \arctan\sqrt{2} .$$

2. a) Een punt $P = (x_0,y_0)$ ligt op de hyperbool $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

   Bewijs dat de vergelijking van de raaklijn in P aan de hyperbool luidt

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 .$$

   b) Los op het stelsel

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 6 \\ 5x - 8y + 11z = 17 \\ 6x - 8y + 10z = 14 \\ 3x - 5y + 7z = 11 \end{cases} .$$

   c) In R_2 zijn gegeven de punten

$$O = (0,0) \; ; \; A = (-2,1) \; ; \; B = (-1,4) \; ; \; C = (3,3) .$$

   Bereken de oppervlakte van de vierhoek OABC.
   Aanwijzing: gebruik determinanten.

3. a) Door de vergelijking $z^3 + 3xz - 3y = 0$ wordt z impliciet als functie van x en y gegeven.
   Bereken

$$2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3 - z^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) .$$

   b) Gegeven is $z = f(x,y)$. Door $x = u - v$ en $y = u + v$ worden z, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ functies van u en v.

Gevraagd wordt

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\right]$$

uit te drukken in de hogere partiële afgeleiden van z naar x en y.

4. a) Zij V een vectorruimte van dimensie 4. Zij $\underline{e}$, $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$, een onafhankelijk stelsel vectoren van V.
Bewijs, dat elke vector van V als lineaire combinatie van $\underline{e}$, $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ te schrijven is, en dat dit slechts op één manier mogelijk is.

b) Bereken

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^8}\left[0^7 + 1^7 + 2^7 + 3^7 + \ldots + (n-1)^7\right] .$$

Aanwijzing: Denk aan de definitie van het begrip "bepaalde integraal".

<u>Antwoorden Tentamen januari 1958.</u>

1. a) $\dfrac{1-x}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

   b) $\pi/4$ resp. $-\pi/4$.

2. b) $\underline{x} = (-1,0,2) + \lambda(1,2,1)$.

   c) 11.

3. a) 0 .

   b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

4. b) $\frac{1}{8}$.

Examen /tentamen Wiskunde I op maandag 16 juni 1958.

1. Gegeven is de functie $f(x) = \frac{(x-1)^2(x-3)}{(x-2)^3}$.

   a) Welke asymptoten heeft de grafiek van de functie?
   b) Bepaal $f'(x)$.
   c) Bepaal de extremen.
   d) Schets de grafiek.

2. a) Gegeven zijn de vlakken U: $\underline{x} = (0,1,2) + \lambda(1,0,2) + \mu(0,2,1)$ en
   V: $\underline{x} = (0,1,2) + \rho(2,0,0) + \sigma(0,1,0)$.

   Bepaal een parametervoorstelling van de snijlijn.

   b) Los op:

$$\begin{aligned} x + y + z - 2u + v &= 0 \\ x - 2y + z + u + 3v &= 0 \\ 2x + y + 2z - 3u - 2v &= 0 \\ 5x - y + 5z - 4u + v &= 0 \; . \end{aligned}$$

   Welk verband bestaat er bij een stelsel homogene lineaire vergelijkingen tussen aantal (n) onbekenden, rang (r) van de coëfficiëntenmatrix en dimensie (d) van de oplossingsruimte? Controleer dit verband bij deze opgave.

   c) Bepaal x zodanig, dat de inhoud van het parallelepipedum opgespannen door de vectoren $\underline{a} = (1,2,3)$, $\underline{b} = (0,1,2)$ en $\underline{c} = (2,0,x)$ groter is dan 3.

3. De functie $f(x)$ is gegeven door $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan \frac{n}{1+nx}$ voor $x \geq 0$.

   a) Is $f(x)$ continu in het punt $x = 0$?
   b) Bepaal de oppervlakte begrensd door x-as, y-as, de grafiek van $f(x)$ en de rechte $x = 1$.

4. a) Gegeven zijn 2 betrekkingen tussen x, y, z en t :

$$x^3 + y^2t + z + t^3 - 2 = 0$$

$$xz + yt^2 - t - 1 = 0 \; .$$

   Hierdoor zijn z en t als functies van x en y bepaald: $z = z(x,y)$ en $t = t(x,y)$. Nu stelt $z = z(x,y)$ een oppervlak voor. Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan dit oppervlak in het punt $(x,y,z) = (1,1,1)$.

b) Gegeven is $z = f(x,y)$, $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$.

Druk $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\partial z}{\partial u}$ uit in x,y en de partiële afgeleiden van z naar x en y.

Antwoorden Tentamen juni 1958.

1. a) $y = 1$ (voor $x \to \infty$ en $x \to -\infty$).
   $x = 2$ (voor $x \uparrow 2$ en $x \downarrow 2$: $y \to \infty$ resp. $y \to -\infty$) .

   b) $f'(x) = -\frac{(x-1)(x-5)}{(x-2)^4}$ voor $x \neq 2$.

   c) $f(1) = 0$ locaal minimum, $f(5) = \frac{32}{27}$ locaal maximum.

2. a) $\underline{x} = (0,1,2) + \rho(2,-8,0)$.

   b) $\lambda(-1,0,1,0,0) + \mu(1,1,0,1,0)$
   $n = r + d$; $d = 2$, $r = 3$, $n = 5$.

   c) $x > 1$ of $x < -5$.

3. a) $f(0) = \frac{\pi}{2}$; $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ voor $x \neq 0$; continu in $x = 0$.

   b) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.

4. a) $z - 1 = -2(x - 1)$.

   b) $z_{xx}x^2 - 2z_{xy}xy + z_{yy}y^2$ (als $z_{xy} = z_{yx}$).

Proeftentamen Wiskunde I op maandag 3 november 1958 (2 uren).

1. a) Bewijs de volgende stelling:

<u>Gegeven:</u> $f(x)$ is differentieerbaar op $a \leqslant x \leqslant b$;

c is een getal, zodat $a < c < b$;

$f(x)$ is minimaal voor $x = c$.

<u>Te bewijzen:</u> $f'(c) = 0$.

b) Gegeven: $f(0) = 0$

$$f(x) = x \log(2 + \sin \frac{1}{x}) \qquad x \neq 0 .$$

Is $f(x)$ continu in $x = 0$?

Is $f(x)$ differentieerbaar in $x = 0$?

Motiveer Uw antwoorden.

2. Gegeven: $f(x) = 3x^4 - 8|x|(2x^2 + 3) + 30x^2 + 12$.

a) Bepaal de extrema.

b) Toon aan dat $f(x)$ altijd positief is.

c) Teken de grafiek.

3. Integreer:

a) $$\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}\, dx .$$

b) $$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} x \arcsin(x^2)\, dx .$$

4. Bereken de volgende limieten:

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x} .$$

b) $$\lim_{x \to \infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) .$$

Antwoorden Proeftentamen november 1958.

1\. a) Zie dictaat.

b) Continu maar niet differentieerbaar in $x = 0$.

2\. a) Locaal maximum 12, bij $x = 0$.
Globale minima 4, bij $x = -2$ en $x = 2$.

b) Zie a).

3\. a) $\log(1+\sin^2 x) + C$.

b) $\frac{\pi}{24} + \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 2)$.

4\. a) 1 .

b) 1 .

Tentamen Wiskunde I op zaterdag 17 januari 1959.

1. a) Gegeven is de functie

$$f(x) = x\sqrt{x(x-5)^2} \qquad \text{voor } x \geqslant 0 .$$

Bepaal alle extrema en schets de grafiek.

b) Bereken

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\sin x} - \sin x}\, dx .$$

2. a) De kromming in een punt van de kromme $y = f(x)$ kan worden berekend met de formule

$$K = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}} .$$

Leid hieruit af de formule voor de kromming, indien de kromme wordt gegeven in parametervoorstelling $x = x(t)$, $y = y(t)$.

b) Gegeven is in parametervoorstelling de kromme

$$x = \frac{t}{1+t^3} , \qquad y = \frac{t^2}{1+t^3} .$$

Stel de vergelijking op van de raaklijn in het met $t = 1$ corresponderende punt van de kromme.

3. a) Door
$$\begin{cases} x + y + z + u + v = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = 10 \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 + v^3 = 0 \end{cases}$$

worden z, u en v gegeven als functies van x en y. Bereken $\frac{\partial z}{\partial x}$ in het punt $(x,y,z,u,v) = (0,2,1,-1,-2)$.

b) In de functie $z = z(x,y)$ worden door

$$x = u(1-v^2) , \quad y = uv$$

nieuwe variabelen ingevoerd. Druk $u^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ uit in x,y en de partiële afgeleiden van z naar x en y.

4. a) Gegeven het punt $P = (1,2,1)$ en de rechte

$$\ell : \quad \underline{x} = (6,1,3) + \lambda(1,2,3) .$$

Gevraagd een parametervoorstelling van het vlak door P en ℓ.
Bewijs dat dit vlak evenwijdig is aan het vlak

$$\underline{x} = \rho(-7,8,5) + \sigma(1,-9,-10) .$$

b) Van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 1 \end{aligned}$$

is gegeven

1° $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$,

2° De determinant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ is nul.

Is dit stelsel oplosbaar? Beredeneer Uw antwoord.

Antwoorden Tentamen januari 1959.

1. a) Globale minima 0 bij $x = 0$ en $x = 5$.
   Locaal maximum $6\sqrt{3}$ bij $x = 3$.

   b) 2 .

2. a) $K = \dfrac{|\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$.

   b) $x + y = 1$.

3. a) $-\dfrac{1}{3}$.

   b) $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

   (aangenomen is dat $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$).

4. a) $\underline{x} = (6,1,3) + \lambda(1,2,3) + \mu(5,-1,2)$.
   Zowel $(-7,8,5)$ als $(1,-9,-10)$ is een lineaire combinatie van $(1,2,3)$ en $(5,-1,2)$.

   b) rang A < 3, rang B = 3 want $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.
   Het stelsel is dus onoplosbaar.

Examen/tentamen Wiskunde I op vrijdag 12 juni 1959.

1. a) In de functie $z = z(x,y)$ worden door

$$x = e^{6u+3v} \quad , \quad y = e^{3u+6v}$$

nieuwe variabelen ingevoerd. Druk

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - 2\frac{\partial z}{\partial u} - 2\frac{\partial z}{\partial v}$$

uit in x,y en de partiële afgeleiden van z naar x en y.

b) Tussen x, y, z, t bestaan de betrekkingen

$$x^2 + y + yz + \sin(z+t) = 0$$
$$y^2 + z^2 + xz - \cos(zt) = 0 .$$

Beschouw z en t als functies van de onafhankelijke variabelen x en y.

Bereken $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ in het punt

$$x = 1,\ y = -1,\ z = 0,\ t = \pi .$$

2. a) Gegeven zijn de vlakken

$$U : 2x + y + 2z = 7$$
$$V : x + y - z = -2$$
$$W : \underline{x} = (1,2,0) + \lambda(0,1,2) + \mu(2,0,1) .$$

Door hun snijpunt gaat een vlak evenwijdig aan de rechten

$$\ell : \underline{x} = (0,1,2) + \rho(3,1,2) \quad \text{en} \quad m : \underline{x} = (2,0,1) + \sigma(2,1,3) .$$

Bepaal dit vlak in parametervoorstelling.

b) Van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{matrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{matrix} \quad \text{is} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Geef de formule voor de oplossing van x volgens de regel van Cramer. Leid deze formule af.

3. a) Bepaal $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \tan x}{\sqrt{\cos x + \tan x} - \sqrt{\cos x + \sin x}}$.

b) De integraal

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\alpha \sin x\,dx}{1-\sin^2\alpha \sin^2 x}$$

hangt af van α. Bepaal de waarde

1) als $\alpha = 0$;

2) als $0 < \alpha < \pi/2$.

4. Gegeven

$$y = x^3 - 4x^2 + 2|x| \quad .$$

a) Bepaal de x-coördinaat van elk extreem;

b) schets de grafiek;

c) bepaal de vergelijking van de raaklijn in $(2,-4)$;

d) toon aan, dat deze raaklijn de kromme nog in een tweede punt raakt.

Antwoorden Tentamen juni 1959.

1. a) $18x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 45xy \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 18 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

b) 2.

2. a) $\underline{x}=(-3,5,4) + \rho(3,1,2) + \sigma(2,1,3)$.

b) $x = \dfrac{D(\underline{b},\underline{a}_2,\underline{a}_3)}{D(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3)}$, $y = \dfrac{D(\underline{a}_1,\underline{b},\underline{a}_3)}{D(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3)}$, $z = \dfrac{D(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{b})}{D(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3)}$.

Zie dictaat.

3. a) 4.

b) Als $\alpha = 0$: 1 ;

als $0 < \alpha < \pi/2$: $\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}$.

4. a) Locale maxima bij $x = \dfrac{4-\sqrt{22}}{3}$ en $x = \dfrac{4-\sqrt{10}}{3}$;

locale minima bij $x = 0$ en $x = \dfrac{4+\sqrt{10}}{3}$.

c) $2x + y = 0$.

d) Tweede raakpunt $(0,0)$.

Proeftentamen Wiskunde I op maandag 2 november 1959 (2 uren).

1. Gegeven f(x) is continu voor alle x.
   Voor $x \neq 0$ is deze functie gedefinieerd door:

$$f(x) = \frac{\sin(x\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} \; .$$

   a) Bereken f(0).
   b) Bereken f'(x).

2. $$f(x) = e^{\arctan x}(x^3 - 3x^2 + x - 3).$$

   a) Bepaal de snijpunten van de grafiek van f(x) met de assen.
   b) Voor welke x is de functie extreem?
   c) Schets de grafiek.

3. Bereken de volgende integralen.

   a) $$\int \tan x \,.\, \log|\cos x|\,dx \; .$$

   b) $$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\right)dx \; .$$

4. f(x) is gedefinieerd door:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1} + \sqrt[n]{\left|\sin \frac{\pi}{2} x\right|}}{x^{2n} + \sqrt[n]{\left|\cos \frac{\pi}{2} x\right|}} \; .$$

   Maak een grafiek van f(x).

<u>Antwoorden Proeftentamen november 1959.</u>

1. a) 0 .

   b) Voor $x \neq 0$: $$f'(x) = \frac{4x\sqrt[3]{x}\cos(x\sqrt[3]{x}) - \sin(x\sqrt[3]{x})}{3x\sqrt[3]{x}} \; ;$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h\sqrt[3]{h}) - 0}{h\sqrt[3]{h}} = 1 \; .$$

2. a) (3,0), (0,-3) ;

b) $f(-\frac{1}{3}) = -(100/27)e^{-\arctan 1/3}$ locaal maximum ,

$f(2) = -5\,e^{\arctan 2}$ locaal minimum .

3. a) $-\frac{1}{2}\log^2|\cos x| + C$.

b) $\log\frac{4}{\pi} - \log \lim\limits_{\delta \downarrow 0} \frac{\delta}{\arctan \delta} = \log\frac{4}{\pi}$.

4. Voor $|x| > 1 : f(x) = x$; voor $0 < |x| < 1 : f(x) = 1$;

$f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(-1) = 0$.

Examen en tentamen opgaven Wiskunde I

In dit tentamenboek zijn opgenomen alle wiskunde I tentamens:
uit 1960 t/m 1963 met antwoorden, respectievelijk
uit 1964 t/m 1968 met uitgewerkte oplossingen.

Voor studenten, die oefenstof zoeken voor een bepaald onderdeel van Wiskunde I, is het boek toegankelijker gemaakt door toevoeging van een tabel (achteraan in dit boek), die de indeling van de collegestof geeft over de besproken tentamens.

Ieder tentamen is aangegeven met een code:
een letter (P, I, respectievelijk voor proef- en deeltentamen) en
een cijfercombinatie voor de maand en het jaar waarin het tentamen plaats vond.

Tentamen Wiskunde I op maandag 11 januari 1960.

1) a) Gegeven is de functie

$$f(x) = |\sin x| e^{-2|\sin x|} .$$

1) Bepaal alle extrema in het interval $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2) Schets de grafiek voor $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

b) Bereken de integraal $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$.

2. a) Gegeven zijn de vlakken

$$V : x + 2y = 3$$

en $$W : x + y + z = 6 .$$

Bepaal de vergelijking van het vlak U, dat evenwijdig is met de snijlijn ℓ van V en W en gaat door de punten A(1,-5,2) en B(-2,-3,4).

b) Gegeven is in parametervoorstelling de kromme: [1]

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t + 1 \\ y(t) = t^2 + 4t + 1 . \end{cases}$$

1) Bepaal de punten met horizontale resp. verticale raaklijn.

2) Bepaal m zodanig dat de lijn $y = x + m$ de kromme loodrecht snijdt, en bepaal dat snijpunt.

3. a) Los het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\begin{cases} 3x - y + z + 5u = 7 \\ \quad\;\; 2y - 3z + 4u = 6 \\ 6x \quad\;\; - z + 3u = 9 . \end{cases}$$

b) Gegeven zijn de vier vectoren

$$\underline{a}_1 , \underline{a}_2 , \underline{a}_3 \text{ en } \underline{a}_4 \text{ in } R_4 .$$

1) Noem de vier axioma's voor de definitie van de determinant $D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4)$ van de vier gegeven vectoren.

2) Bewijs uit de axioma's dat deze determinant gelijk is aan nul als $\underline{a}_1 = \underline{a}_2$.

[1] Opgave gewijzigd; de oorspronkelijke betrof kromming en kromtemiddelpunt.

4. a) Gegeven is de functie $z = f(x,y)$. Door de betrekkingen

$$x = \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{2}v^2$$
$$y = uv$$

worden nieuwe onafhankelijke variabelen u en v ingevoerd.

Druk $\dfrac{1}{u^2+v^2}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$ uit in x en y en de partiële afgeleiden van z naar x en y.

b) Door de vergelijking

$$x^2 + y^2 - z^2 - 4zx + 2y + 1 = 0$$

is een oppervlak gegeven.

1) Bewijs dat de rechte

$$\ell : \ \underline{x} = (0,-1,0) + \lambda(1,2,1)$$

geheel op het oppervlak ligt.

2) Bewijs dat alle punten van ℓ hetzelfde raakvlak bezitten. Bepaal de vergelijking van dit raakvlak.

Antwoorden Tentamen januari 1960.

1. a) Globale minima $f(x) = 0$ bij $x = 0, \pi, 2\pi$;

globale maxima $f(x) = \dfrac{1}{2e}$ bij $x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$;

locale minima $f(x) = \dfrac{1}{e^2}$ bij $x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$.

b) $-\dfrac{x}{\sin x} + \log\left|\tan \dfrac{x}{2}\right| + C$.

2. a) $y - z + 7 = 0$.

b) 1) $(3,-3)$ resp. $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$

2) $m = -\frac{15}{4}$; $(\frac{21}{16}, -\frac{39}{16})$.

3. a) $\underline{x} = (0,-8,-6,1) + \lambda(1,9,6,0)$.

b) Zie dictaat.

4. a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. b) 1) Elk punt $P(\lambda, -1+2\lambda, \lambda)$ voldoet aan de vergelijking.

2) $x - 2y + 3z = 2$.

Examen/tentamen Wiskunde I op maandag 13 juni 1960.

1. a) Bereken
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x-\cos^2 x+\cos^3 x}{\sqrt{1+x^4}-\sqrt{1-x^4}} .$$

b) Bepaal een parametervoorstelling van de snijlijn van twee vlakken V en W, als

$$V : 2x + y - 3z = -8$$
$$W : \underline{x} = (-1,2,3) + \lambda(2,1,2) + \mu(-2,2,1)$$

2. a) Los op het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} -ax + 2y - z &= 0 \\ 3x - y - 2z &= 5a \\ 3x - 4y + z &= 2a \end{aligned}$$

voor alle waarden van a.

b) Gegeven is het oppervlak O: $x^2 + y^2 + 2xz = 1$.
Bereken het raakvlak aan O in een willekeurig punt $P(x_0,y_0,z_0)$.
Hoe moet P gekozen worden, opdat dit raakvlak de lijn ℓ: $x = (0,0,1) + \lambda(1,1,-1)$ geheel bevat?

3. a) Bereken
$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\log^2 x}} .$$

b) Gegeven is de functie $f(x) = (2-2x-x^2)e^{|x|-1}$.
Bereken de uiterste waarde(n).
Bereken de buigpunten, voorzover aanwezig.
Schets de grafiek van f(x).

4. a) Gegeven $z = f(x,y)$.
We voeren nieuwe variabelen u en v in door de betrekkingen

$$u = x + y$$
$$v = x^2 + y^2 .$$

Druk nu $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ uit in u,v, en de partiële afgeleiden van z naar u en v.

4. b) Van de functie $f(x)$ is gegeven:

$$f(x) = \sin x \qquad \text{als } x \leq 0$$
$$f''(x) = \cos x \qquad \text{als } x > 0$$

$f(x)$ is differentieerbaar voor $x = 0$.

Bereken $f(x)$ voor positieve waarden van x.

Antwoorden Tentamen juni 1960.

1. a) $\frac{1}{2}$.

   b) $\underline{x} = (-7,0,-2) + \alpha(4,1,3)$.

2. a) Als $a \neq 1$: $\underline{x} = (0,-a,-2a)$;

   als $a = 1$: $\underline{x} = (0,-1,-2) + \lambda(1,1,1)$.

   b) $z - z_0 = -\frac{x_0 + z_0}{x_0}(x - x_0) - \frac{y_0}{x_0}(y - y_0) \qquad (x_0 \neq 0)$;

   te herleiden tot $x_0x + y_0y + x_0z + z_0x = 1$.

   Speciale keuzen voor P: $P_1 = (1,2,-2)$, $P_2 = (1,0,0)$.

3. a) $\log(1 + \sqrt{2})$.

   b) $f(-2) = 2e$ globaal maximum;

   $(1 - \sqrt{5}, (4\sqrt{5} - 6)e^{\sqrt{5}})$ buigpunt.

4. a) $2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4u\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 4\frac{\partial z}{\partial v} + 4v\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

   b) Voor $x > 0$: $f'(x) = \sin x + C$, $f(x) = -\cos x + Cx + D$, waarin $D = 1$ opdat $\lim_{h \downarrow 0} f(h) = f(0) = 0$ en $C = 1$ opdat $\lim_{h \downarrow 0} \frac{-\cos h + Ch + 1 - 0}{h} = f'(0) =$

   $= \lim_{h \uparrow 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h} = 1$.

Proeftentamen Wiskunde I op vrijdag 11 november 1960 (2 uren).

1. a) Ga na voor welke waarden van x de volgende twee functies gedefinieerd zijn en bepaal de afgeleiden van deze functies.

   I. $\arcsin \sqrt{x} + \arctan \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$

   II. $x^{\log x} . \sin x$.

   b) Een functie f is gegeven door

$$f(x) = x^2 + ax + b \qquad \text{als } x < 0 ,$$

$$f(x) = x^3 + x + 1 \qquad \text{als } x \geqslant 0 .$$

   Als gegeven is dat f een overal differentieerbare functie is, bepaal dan a en b. (Toelichten!)

2. Bewijs met behulp van de definitie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+1} = \tfrac{1}{2} .$$

3. Zij $\quad f(x) = \frac{x-1}{x^2} e^{-|x-1|}$.

   Teken een grafiek van deze functie en geef een toelichting daarop.

4. a) Bepaal $\int \log(1+x^2)dx$.

   b) Bereken

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x+1} \right\} dx .$$

<u>Antwoorden Proeftentamen november 1960.</u>

1. a) I $\quad 0 < x \leqslant 1$; $f'(x) = 0$ voor $0 < x < 1$, $f'(1) = 0$.

   II $\quad 0 < x$; $f'(x) = x^{\log x}\{2\,\frac{\sin x \log x}{x} + \cos x\}$.

   b) $b = \lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = f(0) = 1$.

$$a = \lim_{h \uparrow 0} \frac{(h^2 + ah + 1) - 1}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{(h^3 + h + 1) - 1}{h} = 1 .$$

2. Bij iedere $\varepsilon > 0$ kan men bijbehorende $N(\varepsilon)$ vinden zó dat $\left| \frac{n^2 + 1}{2n^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ voor alle $n > N$; bijvoorbeeld $N = 1/2\sqrt{\varepsilon}$.

3. Beide assen asymptoot; $f'(1) = 1$; $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)e^{1-\sqrt{2}}$ globaal maximum.

4. a) $x \log(1 + x^2) - 2x + 2 \arctan x + C$.

b) $\lim_{N \to \infty} \log \frac{N + \sqrt{N^2 + 1}}{N + 1} = \log 2$.

Examen/tentamen Wiskunde I op maandag 16 januari 1961.

1. a) Op het interval $-1 \leq x \leq 4$ $(x \neq \frac{5}{3})$ is gegeven de functie $f(x) = \dfrac{3x^2+3x-8}{3x-5}$.
   Bepaal de uiterste waarden van $f(x)$.

   b) Bereken
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(1-\cos 2x)} \quad .$$

   c) Bereken
$$\int_0^{\sqrt{3}} 3(x^2+1)\arctan x \, dx \quad .$$

2. a) $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ vormen een basis van de vectorruimte R. Wat betekent dit?

   b) Bereken de volgende determinant:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 1 \end{vmatrix} \quad .$$

   c) Aan welke voorwaarden moeten λ, μ, ν, ρ voldoen opdat de vectoren $\underline{e}_1 + \mu\underline{e}_2$, $\underline{e}_2 + \nu\underline{e}_3$, $\underline{e}_3 + \rho\underline{e}_4$, $\underline{e}_4 + \lambda\underline{e}_1$ ook een basis van R vormen? Licht Uw antwoord toe.

3. a) Gegeven is de kromme met parametervoorstelling:
$$\begin{aligned} x &= 2\cot\theta \\ y &= 2\sin^2\theta \end{aligned} \qquad 0 < \theta < \pi \quad .$$
   Bereken de waarde van $\dfrac{|\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$ (de kromming) in het hoogste punt van de kromme.

   b) z is een functie van x en y; $x = \dfrac{u}{v}$; $y = v^2$. Waarin gaat $2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial x}$ over als z als functie van u en v wordt beschouwd?

4. a) Los op:
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 5 \; ; \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 7 \; ; \\ 7x_1 + x_2 - 11x_3 - 3x_4 &= 0 \; . \end{aligned}$$

   b) z is als functie van x en y gegeven door $xz^3 - 3yz + x = 0$.

   1) Bewijs: $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. $\qquad (\alpha)$

2) Waarin gaat betrekking (α) over als men op poolcoördinaten overgaat ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$)?

3) Hoe kunt U het onder 2) verkregen resultaat direct inzien?

Antwoorden Tentamen januari 1961.

1. a) $f(-1) = 1$ globaal minimum; $f(1/3) = 5/3$ locaal maximum;
   $f(3) = 7$ locaal minimum; $f(4) = 52/7$ globaal maximum.

   b) $\frac{1}{4}$.

   c) $2\pi\sqrt{3} - 1\frac{1}{2} - 2 \log 2$.

2. a) Dit betekent dat iedere vector van R een lineaire combinatie is van $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ en $\underline{e}_4$, en dat deze 4 vectoren onafhankelijk zijn.

   b) $1 - \lambda\mu\nu\rho$.

   c) $\lambda\mu\nu\rho \neq 1$, dan zijn $\underline{e}_1 + \mu\underline{e}_2$, $\underline{e}_2 + \nu\underline{e}_3$, $\underline{e}_3 + \rho\underline{e}_4$, $\underline{e}_4 + \lambda\underline{e}_1$ namelijk onafhankelijk, dus ook een basis van R.

3. a) 1.

   b) $uv \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + v^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$.

4. a) $\underline{x} = (-1,7,0,0) + \lambda(3,-10,1,0) + \mu(1,-4,0,1)$.

   b) 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z^3+1}{3(y - xz^2)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-z}{y - xz^2}$.

   2) $\dfrac{\partial z}{\partial r} = 0$.

   3) $z^3 - 3(\tan \varphi)z + 1 = 0$ d.w.z. z is functie van φ alleen.

Tentamen Wiskunde I op dinsdag 13 juni 1961.

1. Bepaal $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x \arctan x}$.

2. De functie f is voor $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\cos x}{(x+1)^n + 1} .$$

Maak een grafiek van f, en ga na of f continu is voor x = 0.

3. Bereken $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x \,.\, \tan x \,.\, e^{1/\sin x}}$.

4. Een vlakke kromme is in parametervoorstelling gegeven door:

$$\begin{cases} x = a \tan u \\ y = \dfrac{2a}{\cos u} \end{cases} \qquad (a > 0,\ |u| < \tfrac{\pi}{2}) .$$

Toon aan dat dit een tak van een hyperbool is en bepaal $\dfrac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$ (de kromming) in het punt $P(a\sqrt{3}, 4a)$.

5. U is een functie van de rechthoekige coördinaten x en y.

Druk $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ in poolcoördinaten uit.

6. Gegeven is de boog $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ $(0 \leqslant t \leqslant 8)$. De eindpunten van deze boog heten A en C. Op de boog ligt het punt B, waarvoor $t = 5$. Bepaal D op de boog zodanig, dat het volume van de piramide ABCD maximaal is.

Antwoorden Tentamen juni 1961.

1. $-\frac{1}{2}$.

2. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{voor } -\frac{\pi}{2} \leqslant x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{voor } x = 0 \\ 0 & \text{voor } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

f is noch links- noch rechts-continu voor x = 0.

3. $\lim_{\delta \downarrow 0} (e^{-1} - e^{-1/\sin \delta}) = e^{-1}$.

4. $-x^2 + \frac{1}{4} y^2 = a^2$ en $y > 0$ (wegens $|u| < \frac{\pi}{2}$) .

$\frac{1}{32a}$.

5. $\frac{\sin 2\varphi}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\cos 2\varphi}{r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)$.

6. D = (2,4,8) .

Proeftentamen Wiskunde I op donderdag 9 november 1961 (2 uren).

1. a) Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{2n}+2^{3n}}$.

   b) Bepaal $\lim\limits_{x\uparrow 1} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$.

2. a) Bepaal de afgeleide van $(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$.

   b) Bewijs met de definitie van het begrip limiet:

   Als $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, dan is $\lim\limits_{x\to\infty} f(\frac{1}{2}x) = 1$.

3. $$f(x) = \frac{4|x-1|^{3/2}}{x^3-3x^2+6x-4} \qquad \text{voor } x \neq 1,\ f(1) = 0 .$$

   Teken de grafiek van $f(x)$. Geef daarbij aandacht aan asymptoten, nulpunten, extrema, raaklijnen in bijzondere punten.

4. Zij e het grondtal der natuurlijke logarithmen.

   We definiëren $I(p) = \int\limits_p^e \log x\,dx$ voor $0 < p \leqslant 1$.

   a) Bereken $I(p)$ en toon aan dat $I(p) > 0$ is.

   b) Bewijs dat $\lim\limits_{n\to\infty} I(\frac{1}{n})$ bestaat.

   (Aanwijzing: het in a) bewezene gebruiken.)

<u>Antwoorden Proeftentamen november 1961.</u>

1. a) 9 .

   b) $\sqrt{2}$.

2. a) $\frac{1}{4}\sqrt{x}^{(\sqrt{x}-1)}(2+\log x)$.

   b) Bij iedere $\varepsilon > 0$ kan men bijbehorende $N(\varepsilon)$ vinden zodat $|f(x)-1| < \varepsilon$ voor alle $x > N(\varepsilon)$; dus is $|f(\frac{1}{2}x)-1| < \varepsilon$ voor alle $x > N^*(\varepsilon) = 2N(\varepsilon)$.

3. $x \geqslant 1$: de raaklijn in $(1,0)$ is verticaal; de x-as asymptoot; $f(2) = 1$ globaal maximum.
   $x \leqslant 1$: de grafiek ontstaat uit het deel voor $x \geqslant 1$ door puntspiegeling t.o.v. $(1,0)$.

4. a) $I(p) = p - p \log p = p(1 + \log \frac{1}{p}) > 0$.

   b) $I(\frac{1}{n}) > I(\frac{1}{n+1})$; de rij $I(\frac{1}{n})$ daalt, maar blijft > 0 .

Examen/tentamen Wiskunde I op vrijdag 19 januari 1962.

1. a) $$f(x) = \arctan(x^2 - 2x) .$$

Teken de grafiek van f(x).

b) Bepaal $\int_0^2 (x-1)f(x)dx$ als f(x) dezelfde betekenis heeft als boven.

c) Bepaal $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x^2)}{1 - \cos x}$.

2. a) Toon aan dat de kromming van de orthogonale hyperbool $y^2 - x^2 = 1$ in een punt (x_0, y_0) gelijk is aan $\frac{1}{r_0^3}$ als r_0 de afstand van (x_0, y_0) tot 0 voorstelt.

b) Gegeven is

$$f(t) = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & t & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} .$$

Bepaal f'(t).

3. a) Bepaal een parametervoorstelling van lijn ℓ als:

ℓ ligt in V: $\underline{x} = (2,3,1) + \rho(1,1,2) + \sigma(3,1,4)$,

ℓ is evenwijdig aan het XOY-vlak,

ℓ snijdt m: $\underline{x} = (1,1,4) + \mu(2,1,1)$.

b) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vormen een afhankelijk stelsel vectoren,

$\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ een onafhankelijk stelsel.

Bewijs dat $\underline{d}$ een lineaire combinatie is van $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$.

4. z is een functie van x en y; $x = r \tan \varphi$, $y = \frac{r}{\cos \varphi}$.

Beschouw z als functie van r en φ. Druk nu $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ uit in de partiële afgeleiden van z naar r en φ. (Alle voorkomende afgeleiden zijn continu.)

Antwoorden Tentamen januari 1962

1. a) $f(1) = -\frac{\pi}{4}$ is een globaal minimum; $f(x)$ daalt monotoon voor $x < 1$, stijgt monotoon voor $x > 1$; de lijn $y = \frac{\pi}{2}$ is horizontale asymptoot.

   b) 0.

   c) 2.

2. a) In (x_0, y_0) is $y_0' = \frac{x_0}{y_0}$; $y_0'' = \frac{1}{y_0^3}$; daarmee vindt men (de formule voor de kromming behoort niet meer tot de stof:

$$k = \frac{y_0''}{(1 + y_0'^2)^{3/2}} = \frac{1}{r_0^3} \quad .$$

   b) 21 .

3. a) $\underline{x} = (3,2,5) + \lambda(1,-1,0)$.

   b) Er bestaan getallen α, β, γ, δ, niet alle nul, zó dat $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} + \delta\underline{d} = \underline{0}$; hierin is $\delta \neq 0$ (waarom?); dus $\underline{d} = -\frac{\alpha}{\delta}\underline{a} - \frac{\beta}{\delta}\underline{b} - \frac{\gamma}{\delta}\underline{c}$ d.i. een lineaire combinatie van $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$.

4. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\tan^2\varphi - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\varphi}\tan\varphi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}\frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\tan\varphi \quad .$$

Examen/tentamen Wiskunde I op woensdag 13 juni 1962.

1. a) Bepaal $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - (\arcsin x)^2}}{x \sin x}$.

   b) Bereken $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2^{\sin x} . \sin 2x\, dx$.

2. Gegeven voor $-1 \leqslant x \leqslant 2$ de functies $f_1(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{e^x}$ en $f_2(x) = |x(x-1)|$.

   a) Bepaal van beide functies de nulpunten en extrema.

   b) Teken in één figuur de grafieken van beide functies.

   c) Bewijs dat de functie $f_1(x) - f_2(x)$ in het interval $0 < x < 1$ minstens één extreme waarde heeft (niet uitrekenen!).

3. Van het stelsel vergelijkingen

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0 \end{cases}$$

is gegeven dat $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$.

Verder zijn gegeven de vectoren $\underline{p} = (1,0,1,-2)$, $\underline{q} = (2,1,3,5)$ en $\underline{r} = (1,5,2,-7)$.

   a) Bepaal de rang van de coëfficiëntenmatrix van (1) als gegeven is dat $\underline{p}$ en $\underline{q}$ oplossingen van (1) zijn.

   b) Is $\underline{r}$ oplossing van (1)? Beredeneer uw antwoord.

   c) Geef de algemene oplossing van (1).

4. Door de vergelijkingen

$$\begin{cases} xy + xz = 0 \\ 2xt^2 + ye^t = 1 \\ 3xy + yt + t^2 = 12 \end{cases}$$

zijn x, y en z als functies van t gegeven.

Bereken $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ voor $t = 0$.

Examen/tentamen Wiskunde I op woensdag 13 juni 1962.

1. a) Bepaal $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - (\arcsin x)^2}}{x \sin x}$.

   b) Bereken
$$\int_0^{\pi/2} 2^{\sin x} . \sin 2x \, dx \; .$$

2. Gegeven voor $-1 \leqslant x \leqslant 2$ de functies $f_1(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{e^x}$ en $f_2(x) = |x(x-1)|$.

   a) Bepaal van beide functies de nulpunten en extrema.

   b) Teken in één figuur de grafieken van beide functies.

   c) Bewijs dat de functie $f_1(x) - f_2(x)$ in het interval $0 < x < 1$ minstens één extreme waarde heeft (niet uitrekenen!).

3. Van het stelsel vergelijkingen

$$(1) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

is gegeven dat $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$.

Verder zijn gegeven de vectoren $\underline{p} = (1,0,1,-2)$, $\underline{q} = (2,1,3,5)$ en $\underline{r} = (1,5,2,-7)$.

   a) Bepaal de rang van de coëfficiëntenmatrix van (1) als gegeven is dat $\underline{p}$ en $\underline{q}$ oplossingen van (1) zijn.

   b) Is $\underline{r}$ oplossing van (1)? Beredeneer uw antwoord.

   c) Geef de algemene oplossing van (1).

4. Door de vergelijkingen

$$\begin{cases} xy + xz = 0 \\ 2xt^2 + ye^t = 1 \\ 3xy + yt + t^2 = 12 \end{cases}$$

zijn x, y en z als functies van t gegeven.

Bereken $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ voor $t = 0$.

Examen/tentamen Wiskunde I op woensdag 13 juni 1962.

1. a) Bepaal $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-(\arcsin x)^2}}{x \sin x}$.

   b) Bereken

$$\int_0^{\pi/2} 2^{\sin x} \cdot \sin 2x \, dx \; .$$

2. Gegeven voor $-1 \leqslant x \leqslant 2$ de functies $f_1(x) = \dfrac{x^3+x^2+3x+3}{e^x}$ en $f_2(x) = |x(x-1)|$.

   a) Bepaal van beide functies de nulpunten en extrema.

   b) Teken in één figuur de grafieken van beide functies.

   c) Bewijs dat de functie $f_1(x) - f_2(x)$ in het interval $0 < x < 1$ minstens één extreme waarde heeft (niet uitrekenen!).

3. Van het stelsel vergelijkingen

$$(1) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

is gegeven dat $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$.

Verder zijn gegeven de vectoren $\underline{p} = (1,0,1,-2)$, $\underline{q} = (2,1,3,5)$ en $\underline{r} = (1,5,2,-7)$.

   a) Bepaal de rang van de coëfficiëntenmatrix van (1) als gegeven is dat $\underline{p}$ en $\underline{q}$ oplossingen van (1) zijn.

   b) Is $\underline{r}$ oplossing van (1)? Beredeneer uw antwoord.

   c) Geef de algemene oplossing van (1).

4. Door de vergelijkingen

$$\begin{cases} xy + xz = 0 \\ 2xt^2 + ye^t = 1 \\ 3xy + yt + t^2 = 12 \end{cases}$$

zijn x, y en z als functies van t gegeven.

Bereken $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ voor $t = 0$.

5. Een kromme K is in poolcoördinaten gegeven door

$$(r^2 - \cos\varphi)\cos\varphi = 1 \qquad (-\tfrac{\pi}{2} < \varphi < \tfrac{\pi}{2}).$$

a) Bepaal het punt (de punten) van K waarin de raaklijn aan K loodrecht op de lijn $\varphi = 0$ staat.

b) Bepaal in het (de) onder a) genoemde punt(en) de kromtestraal.

Antwoorden Tentamen juni 1962

1. a) $\frac{1}{2}$.

b) $\dfrac{4}{\log 2} - \dfrac{2}{(\log 2)^2}$.

2. a) $f_1(x)$: nulpunt $x = -1$; $f_1(0) = 3$ globaal maximum; $f_1(-1) = 0$ globaal randminimum; $f_1(2) = 21e^{-2}$ locaal randminimum.
$f_2(x)$: nulpunten $x = 0$, $x = 1$; zijn globale minima; $f_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ locaal maximum; globale maxima $= 2$ bij $x = -1$ en $x = 2$.

c) $f_1(0) - f_2(0) = 3$, $f_1(1) - f_2(1) = \frac{8}{e} > 2{,}9$; f_1 daalt in $0 < x < 1$ monotoon; dus $f_1(\frac{1}{2}) - f_2(\frac{1}{2}) < 2{,}75$. De functie moet dus tussen 0 en 1 minstens één minimum hebben.

3. a) rang $A = 2$.

b) $\underline{p}$, $\underline{q}$ en $\underline{r}$ zijn onafhankelijk; dus kan $\underline{r}$ niet behoren tot de tweedimensionale oplossingsruimte.

c) $\underline{x} = \alpha\underline{p} + \beta\underline{q}$.

4. $\ddot{z}_0 = 15$.

5. a) Alleen het punt $\varphi = 0$, $r = \sqrt{2}$ voldoet.

b) $\rho = \dfrac{r^2 + r'^2}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$ geeft in $\varphi = 0$, $r = \sqrt{2}$: $\rho = \sqrt{2}$.

Proeftentamen Wiskunde I op zaterdag 3 november 1962.

De vragen moeten gemotiveerd worden beantwoord.

1. a) Bereken
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x \sin x}{1 - x^2} .$$

   b) Voor welke waarden van x geldt de volgende ongelijkheid:
$$\arccos x \geqslant \arcsin x .$$

2. De functie f is gedefinieerd door
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x \log \dfrac{\arcsin x}{x} \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} .$$

   a) Bepaal het definitiegebied van de functie f.

   b) Bewijs dat f continu is voor $x = 0$.

   c) Bepaal $f'(x)$ voor $x \neq 0$.

   d) Bereken $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

   e) Bepaal $f'(0)$.

3. a) Bereken
$$\int \arccos x \, . \, dx$$

   b) Bereken
$$\int_0^\infty \frac{dx}{2(x+1)\sqrt{x}} .$$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 8}{|x| - 3}$; teken de grafiek van $f(x)$.

Antwoorden Proeftentamen november 1962

1. a) Met de insluitstelling vindt men: -1.

   b) $-1 < x < \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

2. a) $-1 < x < 1$.

   b) $\lim\limits_{x \to 0} x \log \dfrac{\arcsin x}{x} = 0.0 = 0 = f(0)$.

   c) $f'(x) = \log \dfrac{\arcsin x}{x} + \dfrac{x}{\arcsin x} \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{\arcsin x}{x} \right\}$.

   d) $\log 1 + 1(1-1) = 0$.

   e) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h} \log \dfrac{\arcsin h}{h} = 1.0 = 0$.

3. a) $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

   b) $\dfrac{\pi}{2}$.

4. $f(x)$ is een even functie.
   $x = 3$ is verticale asymptoot.
   $f(2) = 4$ locaal maximum; $f(4) = 8$ locaal minimum. $f(-2)$ en $f(-4)$ evenzo;
   $f(0) = \frac{8}{3}$ locaal minimum. Voor $x > 0$ is $f(x) = x + 3 + \dfrac{1}{x-3}$, dus $y = x+3$
   is een scheve asymptoot; het spiegelbeeld daarvan t.o.v. $x = 0$ eveneens.

Examen/tentamen Wiskunde I op dinsdag 15 januari 1963.

1. Gegeven is de functie $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{4}{|x|} - 3$ voor $x \neq 0$.

De functie $g(x)$ wordt gedefinieerd door

$$g(x) = \int_2^x f(t)dt$$

voor alle x waarvoor de integraal in het rechterlid bestaat.

a) Voor welke x is $g(x)$ gedefinieerd?

b) Bewijs dat $g(x)$ voor die waarden van x een monotoon stijgende functie is.

c) Bepaal het nulpunt van $g(x)$.

2. a) Gegeven is: $w = (u^2 + v^2)^{u^2 - v^2}$

Bereken: $\frac{1}{4uvw}\left(v\frac{\partial w}{\partial u} + u\frac{\partial w}{\partial v}\right)$.

b) z is als functie van u en v gegeven door

$$z = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} \quad .$$

Voorts is $x = u + v$ en $y = \frac{1}{u} - \frac{1}{v}$.

Beschouw z als functie van x en y en druk $\frac{\partial z}{\partial x}$ uit in u en v.

3. a) Los op:
$$\left.\begin{aligned} x + 4y + 2z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 1 \\ 3x - 6y + 4z &= 2 \\ x - 5y + z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad .$$

b) In R_4 zijn gegeven

een lijn ℓ : $\underline{x} = \underline{a} + \alpha\underline{u}$

een vlak V : $\underline{x} = \underline{b} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{w}$

bovendien is de determinant $D(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a} - \underline{b}) = 0$.

Onderzoek of ℓ en V punten gemeen hebben

1e: als de door $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ opgespannen deelruimte de dimensie 3 heeft.

2e: als de door $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ opgespannen deelruimte de dimensie 2 heeft.

4. a) Welke complexe getallen z voldoen aan

$$\arg \frac{z-i}{z-1} = \frac{\pi}{2} \; .$$

b) Bereken de complexe getallen z_1 en z_2 uit

$$|z_1| = |z_2| = 1$$

$$z_1 + z_2 + 1 = 0$$

<u>Antwoorden Tentamen januari 1963</u>

1. a) Voor alle $x > 0$.

b) $g'(x) = f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{4}{x} - 3$ $(x > 0)$ heeft bij $x = 2$ het minimum 0; dus $g'(x) > 0$ $(x \neq 2)$.

c) $x = 2$.

2. a) $\dfrac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}$.

b) $\dfrac{4u^2v^2(u-v)}{(u^2+v^2)^3}$.

3. a) $\underline{x} = (2,0,-1) + \lambda(14,1,-9)$.

b) Als $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ onafhankelijk zijn, dan moet $\underline{a} - \underline{b}$ een lineaire combinatie van $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ zijn; d.w.z. ℓ en V één punt gemeen.
Als $\underline{u}$ een lineaire combinatie is van $\underline{v}$ en $\underline{w}$ (onafhankelijk!), dan ligt ℓ òf geheel in V òf geheel buiten V.

4. a) $x^2 + y^2 - x - y = 0$, $1 - x - y > 0$, d.w.z. de cirkel met middellijn van $z = 1$ naar $z = i$, voor zover hij onder deze middellijn ligt.

b) $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i \sqrt{3}$.

Examen/tentamen Wiskunde I op vrijdag 7 juni 1963.

1. Teken de grafiek van $f(x) = \frac{\log|1-x|}{(1-x)}$ en bereken

$$\int_0^{1-e} \frac{\log|1-x|}{(1-x)}\,dx \ .$$

2. Gegeven: $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{voor } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \ . \end{cases}$

a) Is $f(x,y)$ continu in het punt $(0,0)$?

b) Teken in het vierkant $\left.\begin{array}{l} -\pi \leqslant x \leqslant \pi \\ -\pi \leqslant y \leqslant \pi \end{array}\right\}$,

waaruit het punt $(0,0)$ weggelaten is, de punten waarvoor $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

3. Gegeven: $V(p)$: $\underline{x} = (1,0,2) + \lambda(1,-1,0) + \mu(3,1,p)$

ℓ: $\underline{x} = (-1,-1,0) + \rho(1,2,2)$

m: $\underline{x} = (2,1,2) + \sigma(2,-3,4)$.

a) Bewijs, dat $V(p)$ voor iedere waarde van p een vlak (en geen lijn) voorstelt.

b) Bewijs, dat er één waarde van p is, zodat ℓ in $V(p)$ ligt; bepaal de vergelijking van dat vlak.

c) Bewijs, dat er geen waarde van p is, zodat m in $V(p)$ ligt.

4. a) Los op $z^6 + z^3 = -1$.

b) Een punt z doorloopt in het complexe vlak de kromme $|z| = 1$ voor $0 \leqslant \arg z < \frac{\pi}{2}$.

Welke baan beschrijft $w = \frac{iz^2 + z + i}{z^2 + 1}$?

Antwoorden Tentamen juni 1963

1. $-\frac{1}{2}$.

2. a) $|f(h,k)-f(0,0)| = \frac{|\sin hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \sqrt{h^2+k^2}$, dus $|f(h,k)-f(0,0)| < \varepsilon$ als $\sqrt{h^2+k^2} < \varepsilon$; dus $f(x,y)$ continu.

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ op beide assen (exclusief $(0,0)$), op de gedeelten der hyperbolen $xy = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3$, binnen $(\pm\pi, \pm\pi)$ en op de cirkel om $(0,0)$ met straal $\sqrt[4]{3}$.

3. a) $\alpha(1,-1,0) + \beta(3,1,p) = \underline{0}$ alléén als $\alpha = \beta = 0$; onafhankelijk.

b) $p = \frac{8}{3}$, $2x + 2y - 3z = -4$.

c) $(2,1,2) - (1,0,2) = (1,1,0)$ resp. $(1,-1,0)$ en $(2,-3,4)$ zijn onafhankelijk.

4. a) $z = e^{2/9\,\pi k i}$ met $k = 1,2,4,5,7,8$.

b) w begint in $\frac{1}{2}+i$ en loopt parallel met de positieve reële as.

Proeftentamen Wiskunde I op zaterdag 9 november 1963.

1. Bepaal de afgeleide van $(\log x)^{\log x}$ $\quad x > 1$.

2. Bereken $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\right) dx$.

3. Teken een grafiek van $y = \log\{x(1-|x|)\}$.
Bepaal asymptoten, nulpunt(en), uiterste waarde(n), en het gedrag voor grote $|x|$.

4. Bereken $\displaystyle\int_0^3 \arctan\sqrt{x}\,dx$.

5. Een functie f is gegeven door

$$f(x) = 2e - e^{1+x} \qquad x < 0$$
$$f(x) = e^{1-x} \qquad x \geqslant 0 .$$

a) Bewijs dat f continu is voor $x = 0$.
b) Bewijs dat f differentieerbaar is voor $x = 0$.

<u>Antwoorden Proeftentamen november 1963</u>

1. $\frac{1}{x}(\log x)^{\log x}(1+\log\log x)$.

2. $\log 3$.

3. Verticale asymptoten bij $x = 0, 1, -1$; nulpunt $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$; locaal maximum $-2\log 2$ bij $x = \frac{1}{2}$. Voor grote waarden van $|x| = -x$ ligt y dichtbij $2\log|x|$.

4. $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$.

5. a) f is rechts differentieerbaar en dus rechts continu; links continu:
$\lim\limits_{x\uparrow 0}(2e - e^{1+x}) = e = f(0)$.

b) rechtse afgeleide $(-e^{1-x})_{x=0} = -e$.
linkse afgeleide $\lim\limits_{x\uparrow 0}\frac{f(x)-e}{x} = \lim\limits_{x\uparrow 0}\frac{e-e^{1+x}}{x} = -e$ (= rechts).

Examen/tentamen Wiskunde I op vrijdag 10 januari 1964.

1. a) Bepaal de extremen van $y = \arccos \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

   b) Men stelt $\displaystyle\int_x^{-\pi/2} \cot u \, du = g(x)$.

   Voor welke waarden van x is hierdoor de functie $g(x)$ gedefinieerd?
   Schets voor deze waarden van x de grafiek van $g(x)$.

2. z is gegeven als functie van x en y; door $x = uv$ en $y = u+v$ is z ook op te vatten als functie van u en v.

   Druk $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ uit in u, v en partiële afgeleiden van z naar u en v.

3. a) Bepaal de meetkundige plaats van de beeldpunten van de complexe getallen waarvoor

$$\mathrm{Re}\{(1+i)z^2\} = |z^2| \quad . \qquad (1)$$

   b) Bepaal de meetkundige plaats van de beeldpunten van de complexe getallen waarvoor

$$\arg \frac{z-2}{z} = -\frac{\pi}{2} \quad . \qquad (2)$$

   c) Bepaal de complexe getallen die zowel aan (1) als aan (2) voldoen.

4. Het stelsel vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl}
-3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\
-x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2a \\
3x_1 & & & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 10+a \\
13x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & - & 3x_4 & = & 20
\end{array}\right\}$$

   is oplosbaar.
   Bepaal a en de oplossingen.

5. Gegeven zijn in R_3 de vlakken

$$\begin{array}{ll}
U_1: & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\
U_2: & a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\
U_3: & a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad .
\end{array}$$

De vectoren $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$ en $\underline{c} = (c_1,c_2,c_3)$ spannen in R_3 een tweedimensionale deelruimte op waartoe $\underline{d} = (d_1,d_2,d_3)$ niet behoort.

Bewijs

a) U_1, U_2, en U_3 bezitten geen gemeenschappelijk punt.

b) U_1, U_2, en U_3 hebben paarsgewijze tenminste twee snijlijnen, en deze zijn evenwijdig.

. Oplossingen Tentamen januari 1964.

1\. a) $$y = \arccos \sqrt{1-x^2} \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} .$$

Opmerking: y' is niet gedefinieerd voor $x = 0, \pm 1$.

$$0 < x < 1 : \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0 , \quad \lim_{x \downarrow 0} y' = 1 , \quad y' \to \infty \text{ als } x \to 1$$

$$-1 < x < 0 : \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0 , \quad \lim_{x \uparrow 0} y' = -1, \quad y' \to -\infty \text{ als } x \to -1 .$$

y is een continue functie van x dus, gezien het tekenverloop van de afgeleide functie:

$$y_{min} = y(0) = 0 , \quad y_{max} = y(\pm 1) = \frac{\pi}{2} .$$

Voor $x = 0$ treedt een "knik" op met raaklijnen $y = \pm x$.

Voor $x = \pm 1$ zijn de raaklijnen verticaal.

Het kan ook zonder differentiaalrekening, en wel als volgt:

$$y = \arccos \sqrt{1-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases} .$$

Omdat $\sqrt{1-x^2} \geq 0$ zal de waarde van y voldoen aan $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Nu berekenen we $\sin y = +\sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-(1-x^2)} = |x|$.

Derhalve volgt

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin y = |x| \end{array}\right\} \Rightarrow y = \arcsin|x|$$

met als grafiek een omgekeerde sinterklaasmijter.

1\. b) $$g(x) = \int_x^{-\pi/2} \cot u \, du = \int_x^{-\pi/2} \frac{d \sin u}{\sin u} = \log|\sin u| \Big|_x^{-\pi/2} = -\log|\sin x| \quad .$$

We hebben toegepast de hoofdstelling van de integraalrekening. Hiervoor moet de integrand cot u in het hele integratievak continu zijn, dus $-\pi < x < 0$. We kunnen nu ook in dit speciale geval schrijven $g(x) = \log \frac{-1}{\sin x}$, een functie met minimumwaarde $g(-\frac{\pi}{2}) = 0$ en verticale asymptoten $x = 0$, $x = -\pi$.

Opmerking: Zonder te differentiëren moet U kunnen beredeneren dat $g'(x) = -\cot x$. Hoe?

2\. $$\left.\begin{aligned} x &= uv \\ y &= u+v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Oplossing } u = u(x,y),\ v = v(x,y) \\ \text{substitueren}\end{array} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &\equiv u(x,y)v(x,y) \\ y &\equiv u(x,y) + v(x,y) \end{aligned}\right. \quad .$$

Nu gaan we differentiëren naar x :

$$\left.\begin{aligned} 1 &\equiv v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 &\equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{u-v} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{u-v} \quad .$$

Nu is $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{u-v}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) .$$

Voor het berekenen van de tweede afgeleide $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ moeten we bedenken dat het rechterlid van de laatste formule een functie van u en v is; zeg $g(u,v)$. Dan is $\frac{\partial}{\partial x}(g(u,v)) = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$, derhalve:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{u-v}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right)\right\}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{u-v}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right)\right\}\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \left\{\frac{1}{(u-v)^2}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) - \frac{1}{u-v}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right)\right\}\frac{-1}{u-v} +$$

$$+ \left\{\frac{-1}{(u-v)^2}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) - \frac{1}{u-v}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\right\}\frac{1}{u-v} =$$

$$= \frac{-2}{(u-v)^3}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{1}{(u-v)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) .$$

Opmerking: Als we veronderstellen dat $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$ beide continu zijn, mogen we deze termen identificeren.

3. a) Stel $z = x + iy$ (x, y reëel), dan is $|z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2$, $(1+i)z^2 = (1+i)(x^2 - y^2 + 2ixy)$. Uitwerken geeft

$$\mathrm{Re}\{(1+i)z^2\} = x^2 - y^2 - 2xy ,$$

zodat (1) overgaat in

$$x^2 - y^2 - 2xy = x^2 + y^2 \Rightarrow 2y(x+y) = 0 ,$$

waarmee correspondeert het paar rechten $y = 0$, $y = -x$.

b) Meetkundig: $z - 2$ correspondeert met de vector van 2 naar z; z met die van 0 naar z. $\arg(\frac{z-2}{z}) = \arg(z-2) - \arg z = -\frac{\pi}{2}$, dus genoemde vectoren staan loodrecht op elkaar. z ligt dus op een cirkel met $[0,2]$ als middellijn. Echter: niet de hele cirkel voldoet, maar slechts het gedeelte onder de reële as $(y < 0)$. Ga dit na met argumentbeschouwingen.

c) Aan (1) en (2) samen voldoet slechts één punt: $z = 1 - i$.

4. We gaan vegen met de coëfficiëntenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 2a \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 10+a \\ 13 & -4 & 5 & -3 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & 4-4a \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 2a \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 10+a \\ 9 & 0 & 9 & 5 & 20+8a \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & 4-4a \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 4-2a \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 22-11a \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 56-28a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12-6a \end{array}\right) \Rightarrow$$

Het stelsel is strijdig, tenzij $a = 2$.

$$a = 2: \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} x_1 + x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} .$$

Stel $x_1 = \lambda \Rightarrow \underline{x} = (0,0,4,0) + \lambda(1,2,-1,0)$.

5. Noteer de door $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ opgespannen ruimte met $L(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$.

a) $\underline{d} \notin L(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$, dus er bestaat geen lineaire combinatie $x\underline{a} + y\underline{b} + z\underline{c}$ die $\underline{d}$ oplevert, m.a.w. $x\underline{a} + y\underline{b} + z\underline{c} = \underline{d}$ is niet oplosbaar $\Rightarrow U_1$, U_2 en U_3 hebben geen gemeenschappelijk punt.

b) Blijkbaar is de opgave als volgt te lezen:
Minstens twee van de drie mogelijke snijlijnen van telkens twee der vlakken U_1, U_2, U_3 bestaan en deze zijn evenwijdig.

I Stereometrische oplossing: De snijfiguur van drie vlakken die geen gemeenschappelijk punt hebben, en welke niet onderling evenwijdig zijn bestaat uit drie (eventueel twee) evenwijdige lijnen. (Dat U_1, U_2 en U_3 onderling niet evenwijdig zijn volgt uit $\dim L(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = 2$.)

II Algebraïsche oplossing: Beschouw vlakken $U_i' \parallel U_i$ $(i = 1,2,3)$ door $\underline{0}$

$$\begin{aligned} U_1' &: a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ U_2' &: a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ U_3' &: a_3x + b_3y + c_3z = 0 . \end{aligned}$$

Omdat de coëfficiëntenmatrix van dit stelsel homogene vergelijkingen de rang 2 (= $\dim L(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$) heeft, is de oplossingsruimte 1-dimensionaal: $\underline{x} = \lambda(p,q,r)$. Nu zijn er twee mogelijkheden:

A. U_1', U_2' en U_3' alle verschillend d.w.z. elk tweetal heeft precies de lijn $\underline{x} = \lambda(p,q,r)$ gemeen. Dan hebben U_1, U_2, U_3 paarsgewijs drie lijnen gemeen, alle evenwijdig met $\underline{x} = \lambda(p,q,r)$.

B. Twee der vlakken, b.v. U_1' en U_2' vallen samen, en U_3' snijdt U_1' en U_2' volgens $\underline{x} = \lambda(p,q,r)$. Dan zijn U_1 en U_2 evenwijdig, en hebben ze met U_3 snijlijnen, die parallel lopen met $\underline{x} = \lambda(p,q,r)$.

Examen/tentamen Wiskunde I op vrijdag 5 juni 1964.

1. Gegeven: $z = f(x,y)$

   $x = u - v$

   $y = u^2 + v^2$.

   Druk $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ uit in x en y en afgeleiden van z naar x en y (men mag aannemen $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$).

2. Bereken $\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x}\right)dx$.

3. Gegeven de functie

   $$f(x) = |\tan x|e^{-4|x|} \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} .$$

   a) Bepaal alle extrema.

   b) Schets de grafiek.

4. Gegeven het stelsel

   $$\begin{aligned} x + y + az &= 0 \\ ax - 2y + 4z &= 0 \\ 2x - 3y + 2z &= 0 . \end{aligned}$$

   Bepaal voor alle reële waarden van a de oplossing(en).

5. Bereken

   $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(\sqrt{5\pi - 4x} - \sqrt{\pi + 4x})\arcsin(\frac{\pi}{2} - x)}{(\pi - 2x)\cot x} .$$

6. Voor welke complexe z geldt

   $$\log|e^{z^2}| < |z|^2 - 2 .$$

   Teken in het complexe z-vlak het bijbehorende gebied.

Oplossingen Tentamen juni 1964

1. We beschouwen z als functie van u en v via x en y, $z = f\{x(u,v),y(u,v)\}$; dan geeft de kettingregel, in verband met $x = u - v$, $y = u^2 + v^2$:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}(-1) + \frac{\partial z}{\partial y}2v \quad .$$

Hierin zijn $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ weer op te vatten als functies van u en v via x en y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial u}\right)(-1) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right)2v + \frac{\partial z}{\partial y}\,0$$

$$= -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,1 - \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\,2u + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,2v + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,4uv \quad .$$

We mogen aannemen dat $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. Dit maakt het gemakkelijk de verkregen uitdrukking expliciet in x en y uit te drukken; immers

$$-2u + 2v = -2x \quad \text{en} \quad 4uv = 2(y - x^2) \quad .$$

We vinden dus

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + (2y - 2x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad .$$

2. $$\int_1^\infty\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x}\right)dx = \lim_{\substack{N\to\infty\\ p\downarrow 1}}\int_p^N\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x}\right)dx = \lim_{\substack{N\to\infty\\ p\downarrow 1}}\left[\log|x+\sqrt{x^2-1}| - \log x\right]_p^N =$$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty\\ p\downarrow 1}}\left(\log\frac{N+\sqrt{N^2-1}}{N} - \log\frac{p+\sqrt{p^2-1}}{p}\right) = \lim_{N\to\infty}\log(1+\sqrt{1-1/N^2}) - \lim_{p\downarrow 1}\log\frac{p+\sqrt{p^2-1}}{p} =$$

$= \log 2 - \log 1 = \log 2$.

Opmerking. Men denke eraan dat

$$\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \quad \text{en} \quad \int_1^\infty\frac{1}{x}\,dx \quad \text{niet bestaan.}$$

3. De functie heeft voor $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ één nulpunt, nl. $x = 0$, en is verder positief. Omdat $f(x)$ even is, heeft de grafiek de y-as tot as van spiegeling. In (0,0) vertoont de grafiek een knik, want de rechterafgeleide is daar:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\tan h}{h} e^{-4h} = 1 \qquad \text{(linkerafgeleide dus } -1\text{)} .$$

Voor $x > 0$ geldt

$$f'(x) = \frac{1 - 4 \sin x \cos x}{\cos^2 x} e^{-4x} = \frac{1 - 2 \sin 2x}{\cos^2 x} e^{-4x} .$$

Dit wisselt van teken bij $x = \frac{\pi}{12}$ (pos. $\to$ neg.) en bij $x = \frac{5\pi}{12}$ (neg. $\to$ pos.); daar heeft $f(x)$ dus een maximum $\tan \frac{\pi}{12} e^{-\pi/3}$ resp. een minimum $\tan \frac{5\pi}{12} e^{-5\pi/3}$.
Het minimum 0 bij $x = 0$ is globaal. De twee andere minima bij $x = \pm \frac{5\pi}{12}$ zijn locaal, evenals de twee maxima bij $x = \pm \frac{\pi}{12}$.
Voor $x \to \frac{\pi}{2}$ gaat $f(x) \to \infty$. Dus $x = \frac{\pi}{2}$ (en $x = -\frac{\pi}{2}$) is een verticale asymptoot.

4. We vereenvoudigen het stelsel door vegen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a+2 & 0 & 2a+4 \\ 5 & 0 & 3a+2 \end{pmatrix} .$$

De tweede rij bevat de factor $a + 2$; als $a = -2$ dan valt dus één vergelijking weg en blijft er staan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{d.i.} \quad \begin{matrix} -3x + 2y = 0 \\ 5x - 4z = 0 \end{matrix} .$$

Stel $x = 4\lambda$; dan volgt $y = 6\lambda$, $z = 5\lambda$.
De oplossing is dus

$$\underline{x} = \lambda(4,6,5) \qquad \text{als} \quad a = -2 .$$

Als daarentegen $a \neq -2$, dan volgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 3a+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & a-2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3a-8 \end{pmatrix} .$$

Als $a = \frac{8}{3}$ dan blijft over

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{d.i.} \quad \begin{matrix} y + \frac{2}{3} z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{matrix}$$

Stel $z = 3\mu$ dan volgt $y = -2\mu$, $x = -6\mu$:

$$\underline{x} = \mu(-6,-2,3) \qquad \text{als} \quad a = \frac{8}{3} .$$

Als $a \neq \frac{8}{3}$ (en $\neq -2$) dan volgt uit $(3a-8)z = 0$ dat $z = 0$; daarmee vinden we $x = y = 0$:

$$\underline{x} = (0,0,0) \qquad \text{als} \qquad a \neq \frac{8}{3}, \neq -2 \ .$$

Opmerking;
Men kan ook beginnen met de determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a+2 & 0 & 2a+4 \\ 5 & 0 & 3a+2 \end{vmatrix} = -(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3a+2 \end{vmatrix} = -(a+2)(3a-8) \ .$$

Hieruit blijkt dat er geen andere oplossing is dan de nuloplossing $x = y = z = 0$, tenzij $a = -2$ of $a = \frac{8}{3}$. Voor deze waarden van a lost men het stelsel apart op (zie boven).

5. Stel $x = \frac{\pi}{2} + y$ dan vinden we voor de limiet

$$\lim_{y \to 0} \frac{(\sqrt{3\pi - 4y} - \sqrt{3\pi + 4y})\arcsin(-y)}{-2y \cot(\frac{\pi}{2} + y)} =$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{-8y}{\sqrt{3\pi - 4y} + \sqrt{3\pi + 4y}} \cdot \frac{\arcsin y}{2y \tan(-y)} =$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{4}{2\sqrt{3\pi}} \cdot \frac{y}{\tan y} \cdot \frac{\arcsin y}{y} = \frac{2}{\sqrt{3\pi}} \ .$$

6. Stel $z = x + iy$, dan is

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

en

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \ ,$$

dus

$$|e^{z^2}| = |e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i \sin 2xy)| = e^{x^2-y^2} \ .$$

De vergelijking gaat dus over in

$$x^2 - y^2 < x^2 + y^2 - 2$$

$$1 < y^2$$

Dus $\qquad y > 1 \quad \text{of} \quad y < -1$.

Het bijbehorende gebied bestaat dus uit twee delen: de punten met $y = \text{Im } z > 1$, en die met $y = \text{Im } z < -1$.

Proeftentamen Wiskunde I op zaterdag 7 november 1964.

1. Bereken: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{2+\frac{1}{n}} - \sqrt{2-\frac{1}{n}}}{\sin \frac{1}{n}}$.

2. Differentieer:

a) $y = x^{\sqrt{\log x}}$.

b) $y = \dfrac{\sqrt{\arctan x}}{1 + \arctan x}$.

3. De functie $f(x)$ is voor $-\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 2$ gedefinieerd door:

$$f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2|x| + 6 \quad .$$

Bepaal de extrema en schets de grafiek.

4. Bereken

a) $\int x^2 \cos x \, dx$.

b) $\int_0^{\pi/2} \sqrt[4]{1 + \cot^2 x} \cos x \, dx$.

(Is dit een eigenlijke of oneigenlijke integraal?)

5. $$f(x) = x\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{|x|}{x} \quad .$$

Gevraagd:

a) Wat is het definitiegebied van $f(x)$?

b) Bestaat $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

c) Is het mogelijk $f(x)$ continu te maken voor $x = 0$?

Motiveer Uw antwoorden!

Oplossingen Proeftentamen november 1964

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{2-\frac{1}{n}}}{\sin\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{\sin\frac{1}{n}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right)} = 2\,\frac{1}{2\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \ .$$

2. a) $$y' = \left(e^{\log x.\sqrt{\log x}}\right)' = e^{(\log x)^{3/2}} \cdot \tfrac{3}{2}(\log x)^{1/2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{2}\, x^{\sqrt{\log x}-1} \cdot \sqrt{\log x}$$

b) Stel arctan $x = u$, zodat $y = \frac{\sqrt{u}}{1+u}$. Dan is volgens de kettingregel

$$y' = \frac{\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}(1+u)-u^{\frac{1}{2}}}{(1+u)^2}\,u' = \frac{\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}}{(1+u)^2}\,u' = \frac{1-u}{2\sqrt{u}(1+u)^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \ .$$

3. We beschouwen $f(x)$ eerst in het interval $0 \leqslant x \leqslant 2$:

$$f(x) = x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 - 2x + 6 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 5x - 2 = (x+2)(3x-1) \ .$$

Bij $x = \frac{1}{3}$ wisselt $f'(x)$ van teken nl. neg $\to$ pos ; dus heeft $f(x)$ daar een minimum, en wel $5\frac{35}{54}$.
Daarna stijgt $f(x)$ tot 20 bij $x = 2$; $f(x)$ is steeds positief. Bij $x = 0$ is de rechter afgeleide $\lim_{h\downarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = -2$.
Vervolgens beschouwen we $f(x)$ in het interval $-\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 0$

$$f(x) = x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 + 2x + 6 \qquad -\tfrac{5}{2} \leqslant x \leqslant 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 5x + 2 = (3x+2)(x+1) \ .$$

Tekenwisselingen van $f'(x)$ zijn er bij $x = -1$, nl. pos $\to$ neg , en bij $x = -\frac{2}{3}$, nl. neg $\to$ pos. Dus heeft $f(x)$ bij $x = -1$ een (locaal) maximum nl. $5\frac{1}{2}$ en bij $x = -\frac{2}{3}$ een minimum nl. $5\frac{13}{27}$. Bij $x = -\frac{5}{2}$ bereikt $f(x)$ een randminimum nl. 1. Ook in dit interval is $f(x)$ dus steeds positief.
Bij $x = 0$ is de linker afgeleide $\lim_{h\uparrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 2$. Hier heeft $f(x)$ blijkbaar een knik; er wordt een locaal maximum, $f(0) = 6$, bereikt.

Gegevens voor de grafiek

x	$-\frac{5}{2}$		-1		$-\frac{2}{3}$		0		$\frac{1}{3}$		2
$f(x)$	1		$5\frac{1}{2}$		$5\frac{13}{27}$		6		$5\frac{35}{54}$		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	¦	$-$	0	$+$	

4\. a) $\int x^2\cos x\,dx = \int x^2 d\sin x = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx =$

$x^2\sin x + 2\int x\,d\cos x = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int\cos x\,dx =$

$x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$.

b) $\int_0^{\pi/2} \sqrt[4]{1+\cot^2 x}\cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ is een oneigenlijke integraal omdat de integrand voor $x = 0$ niet gedefinieerd is. Per definitie wordt onder de integraal verstaan:

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\int_\delta^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \lim_{\delta\downarrow 0}\int_\delta^{\pi/2}\frac{d\sin x}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{\delta\downarrow 0}\Big[2\sqrt{\sin x}\Big]_\delta^{\pi/2} =$$

$$2 - \lim_{\delta\downarrow 0} 2\sqrt{\sin\delta} = 2 .$$

5\. a) In $f(x) = x\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{|x|}{x}$ kan men $x = 0$ niet substitueren, en evenmin waarden van x die $\frac{1}{x^2} - 1 < 0$ maken.

Dus is het definitiegebied: alle x waarvoor $|x| \leq 1$ behalve $x = 0$.

b) $f(x) = \frac{x}{|x|}(\sqrt{1-x^2} - 1)$ want $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}$. Hieruit blijkt dat

$$-(1 - \sqrt{1-x^2}) \leq f(x) \leq 1 - \sqrt{1-x^2} , \qquad 0 < |x| \leq 1$$

Voor $x \to 0$ gaan linker- en rechterlid naar 0; volgens de insluitstelling is dus $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

c) Blijkens het resultaat van b) kan $f(x)$ continu worden gemaakt voor $x = 0$; nl. door te stellen

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0 .$$

Examen/tentamen Wiskunde I op dinsdag 12 januari 1965.

1. a) Teken de grafiek van

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} + 2^{2n+1}}{3x^{2n} + 2^{2n}} .$$

b) Bereken:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3} \cos \frac{1}{1+x}\, dx .$$

2. a) Gegeven: $y = (\arcsin x)^2$.
Stel een recurrente betrekking op voor $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$ en bereken daarmede $y^{(4)}(0)$.

b) Gegeven: $x = \cos u \cdot \sin v$

$y = \sin u \cdot \cos v$

$z = 2u + 3v$.

Beschouw z als functie van x en y en druk $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ uit in u en v.

3. a) In een vectorruimte V van dim 4 zijn $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$ onafhankelijke vectoren. Bewijs, dat elke vector van V éénduidig als een lineaire combinatie van $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$ te schrijven is.

b) Los op voor alle reële waarden van de parameter a

$$\begin{cases} x + 2y + az = 3 \\ 2x + 3y + (a+1)z = 5 \\ 2x + y + (a+2)z = 3 \end{cases} .$$

4. a) De vergelijking

$$z^3 + (-1+3i)z^2 + (a-3i)z + 2 = 0 \qquad \text{(a reëel)}$$

heeft een reële wortel p.
Bepaal p, a en de andere wortels van de vergelijking.

b) In het complexe vlak doorloopt z de halve cirkel van -i tot i die gaat door 1. Bepaal de baan die w doorloopt als:

$$w = e^{\frac{1}{z+1}} .$$

Oplossingen Tentamen januari 1965.

1. a) We vinden direct

$$f(0) = 2\ , \quad f(2) = f(-2) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(1+2)}{2^{2n}(3+1)} = \frac{3}{4}\ .$$

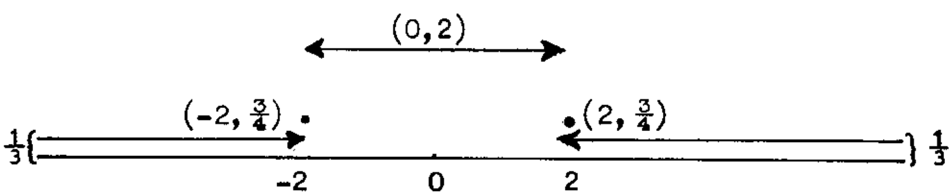
Verder volgt voor elke x tussen -2 en 2:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + 2}{3\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + 1} = \frac{0+2}{0+1} = 2\ .$$

Als daarentegen $|x| > 2$, dan is

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}{3 + \left(\frac{2}{x}\right)^{2n}} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}\ .$$

De grafiek van f(x) is dus



b) $$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3} \cos \frac{1}{1+x}\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{1}{(1+x)^3} \cos \frac{1}{1+x}\, dx\ .$$

We berekenen eerst de onbepaalde integraal

$$\int \frac{1}{(1+x)^3} \cos \frac{1}{1+x}\, dx = -\int \frac{1}{1+x} \cos \frac{1}{1+x}\, d\, \frac{1}{1+x}\ .$$

Dit wordt, als we $\frac{1}{1+x} = u$ stellen

$$-\int u \cos u\, du = -\int u\, d \sin u = -u \sin u + \int \sin u\, du = -u \sin u - \cos u + C\ .$$

Voor de oorspronkelijke integraal vinden we dus

$$\lim_{N\to\infty} \left[-\frac{1}{1+x} \sin \frac{1}{1+x} - \cos \frac{1}{1+x} \right]_0^N =$$

$$\lim_{N\to\infty} \left(-\frac{1}{1+N} \sin \frac{1}{1+N} - \cos \frac{1}{1+N} \right) - (-\sin 1 - \cos 1) = -1 + \sin 1 + \cos 1$$

2\. a) Uit $y' = 2 \arcsin x.(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ vinden we

$$y'' = 2(1-x^2)^{-1} - \arcsin x.(1-x^2)^{-3/2}(-2x) \;, \quad \text{dus}$$

$$* \qquad y'' = (2+y'x)(1-x^2)^{-1} \;.$$

Hiermee is y'' uitgedrukt in y' en door $n-2$ maal te differentiëren zouden we $y^{(n)}$ kunnen uitdrukken in de lagere afgeleiden. De term $(1-x^2)^{-1}$ maakt dit echter ingewikkeld. We gaan daarom uit van

$$y''(1-x^2) = 2 + y'x \;.$$

Door dit $n-2$-voudig te differentiëren met de regel van Leibniz vinden we

$$y^{(n)}(1-x^2) + \binom{n-2}{1} y^{(n-1)}(-2x) + \binom{n-2}{2} y^{(n-2)}(-2) =$$

$$y^{(n-1)}x + \binom{n-2}{1} y^{(n-2)}.1$$

Dit geeft de volgende uitdrukking van $y^{(n)}$ in $y^{(n-1)}$ en $y^{(n-2)}$

$$y^{(n)}(1-x^2) = (2n-3)y^{(n-1)}x + (n-2)^2 y^{(n-2)} \qquad n > 2 \;.$$

Elk van deze afgeleiden is een functie van x. De waarden die deze functies aannemen voor $x = 0$ laten zich gemakkelijk bepalen door in de betrekking $x = 0$ te stellen. Er komt dan:

$$y^{(n)}_{x=0} = (n-2)^2 y^{(n-2)}_{x=0} \;.$$

In het bijzonder vinden we $y^{(4)}(0) = 2^2 y''(0) = 2^2 2 = 8$ ($y''(0) = 2$ volgt uit *).

b) Met de kettingregel vinden we

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial x} \;; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial y} + 3\frac{\partial v}{\partial y} \;.$$

In de gegeven betrekkingen tussen x, y, u en v kunnen we u en v als functies van x en y opvatten; dat geeft, identiek in x en y :

$$x \equiv \cos u(x,y) \sin v(x,y) \qquad y \equiv \sin u(x,y) \cos v(x,y) \;.$$

Differentiatie geeft

$$1 = -\sin u \sin v \frac{\partial u}{\partial x} + \cos u \cos v \frac{\partial v}{\partial x} \qquad 0 = -\sin u \sin v \frac{\partial u}{\partial y} + \cos u \cos v \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$0 = \cos u \cos v \frac{\partial u}{\partial x} - \sin u \sin v \frac{\partial v}{\partial x} \qquad 1 = \cos u \cos v \frac{\partial u}{\partial y} - \sin u \sin v \frac{\partial v}{\partial y} \;.$$

Oplossing: stellen we $\sin^2 u \sin^2 v - \cos^2 u \cos^2 v = D$, dan komt er

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\sin u \sin v}{D}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\cos u \cos v}{D}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\cos u \cos v}{D}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-\sin u \sin v}{D}$$

Dus $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2 \sin u \sin v + 3 \cos u \cos v}{\cos^2 u \cos^2 v - \sin^2 u \sin^2 v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2 \cos u \cos v + 3 \sin u \sin v}{\cos^2 u \cos^2 v - \sin^2 u \sin^2 v}$$

3. a) Als $\underline{x}$ een vector in de ruimte V is, dan kunnen $\underline{x}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$ niet onafhankelijk zijn, want de dimensie van V (d.i. het maximum aantal onafhankelijke vectoren) is 4. Er bestaan dus getallen ξ, α, β, γ, δ - niet alle 0 - zó dat

$$\xi\underline{x} + \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} + \delta\underline{d} = \underline{0} \quad .$$

Hierin kan ξ niet 0 zijn; want was $\xi = 0$ dan zou er een betrekking tussen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$, met α, β, γ, δ niet alle 0, bestaan. Dat kan niet, want $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ zijn onafhankelijk. Als we door ξ delen en $-\alpha/\xi = \alpha'$ enz. stellen, dan komt er

$$\underline{x} = \alpha'\underline{a} + \beta'\underline{b} + \gamma'\underline{c} + \delta'\underline{d} \quad .$$

Bestond hiernaast een andere lineaire combinatie voor $\underline{x}$

$$\underline{x} = \alpha''\underline{a} + \beta''\underline{b} + \gamma''\underline{c} + \delta''\underline{d}$$

dan zou volgen

$$(\alpha'-\alpha'')\underline{a} + (\beta'-\beta'')\underline{b} + (\gamma'-\gamma'')\underline{c} + (\delta'-\delta'')\underline{d} = \underline{0} \quad ,$$

in strijd met de onafhankelijkheid van $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$.
$\underline{x}$ is dus éénduidig als lineaire combinatie van $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$ te schrijven.

b) We vereenvoudigen het stelsel door vegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 2 & 3 & a+1 & 5 \\ 2 & 1 & a+2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & -1 & 1-a & -1 \\ 0 & -3 & 2-a & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-a & 1 \\ 0 & -1 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 2a-1 & 0 \end{array}\right)$$

Als $2a-1 \neq 0$ dan volgt direct $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$.
Als $2a-1 = 0$, dus $a = \frac{1}{2}$, dan wordt het stelsel

$$\begin{aligned} x + 1\tfrac{1}{2}z &= 1 \\ -y + \tfrac{1}{2}z &= -1 \end{aligned} \qquad \text{waaruit met } z = 2\lambda \text{ volgt}$$

$$(x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(-3,1,2) \quad .$$

4. a) Uit $p^3 + (-1+3i)p^2 + (a-3i)p + 2 = 0$ (a en p reëel) volgt dat $3ip^2 - 3ip = 0$, dus $p^2 - p = 0$. Omdat p kennelijk niet 0 kan zijn, blijft alleen de mogelijkheid $p = 1$. Dit geeft $a = -2$.
We vinden nu voor de vergelijking

$$z^3 + (-1+3i)z^2 - (2+3i)z + 2 = (z-1)(z^2+3iz-2) = 0 \quad .$$

De twee overige wortels vinden we door kwadraat afsplitsen

$$(z+\tfrac{3}{2}i)^2 = 2 + (\tfrac{3}{2}i)^2 = -\tfrac{1}{4} = (\tfrac{i}{2})^2$$

Dit geeft

$$z_1 = -\tfrac{3}{2}i + \tfrac{i}{2} = -i \quad , \quad z_2 = -\tfrac{3}{2}i - \tfrac{i}{2} = -2i \; .$$

Men kan deze oplossingen ook gemakkelijk vinden door te "zien" dat

$$z^2 + 3iz - 2 = (z+i)(z+2i) \quad .$$

b) Voor z kunnen we schrijven $z = e^{i\varphi}$ waarbij φ loopt van $-\frac{\pi}{2}$ naar $\frac{\pi}{2}$.
Dit geeft voor w

$$w = e^{1/(e^{i\varphi}+1)} = e^{e^{-\frac{1}{2}i\varphi}/2\cos\frac{1}{2}\varphi} = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\tan\frac{\varphi}{2}} \; .$$

Hieruit blijkt dat

$$|w| = e^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \arg w = -\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{\varphi}{2} \; .$$

Dus doorloopt w een cirkelboog met straal $e^{\frac{1}{2}}$, in negatieve richting, vanaf het punt met argument $-\frac{1}{2}\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ naar dat met argument $-\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$.

Examen/tentamen Wiskunde I op dinsdag 8 juni 1965

1. Bepaal de extrema van

$$f(x) = x^{2/3}(x-1)^4 \qquad\qquad -2 \leqslant x \leqslant 2.$$

2. Bereken

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \quad .$$

3. Bereken

$$\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{(1-x)^2}\, dx \quad .$$

4. Teken de grafiek van

$$\begin{cases} x = \log(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases} \qquad\qquad -\infty < t < \infty \quad .$$

5. De functie z van x en y is gegeven door $z = \{f(x) + g(y)\}e^{ax+by}$ (a en b constant). Bepaal a en b zo dat

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z$$

identiek nul is voor alle differentieerbare functies f en g.

6. Voor welke waarde(n) van a hebben de drie vlakken

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 \qquad\quad + ax_3 = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$$

een gemeenschappelijke snijlijn? Bepaal een parametervoorstelling van deze snijlijn.

7. Bepaal alle complexe waarden van z, die voldoen aan de beide vergelijkingen

$$\begin{cases} |z-1| = 1 \\ |z-1-\frac{1}{2}\sqrt{2}| + |z-1+\frac{1}{2}\sqrt{2}| = 2 \end{cases}$$

en licht Uw oplossing toe met een figuur.

Oplossingen tentamen juni 1965.

1. Nulpunten: 0 en 1; $f(x) \geq 0$ in $|x| \leq 2$.

$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} (x-1)^3 (7x-1)$, $x \neq 0$.

$f(x)$ is niet differentieerbaar voor $x = 0$:

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \to \infty$ als $x \downarrow 0$ resp. $\to -\infty$ als $x \uparrow 0$.

In $x = 0$: verticale raaklijn èn tekenwisseling van $f'(x)$.

$f'(x) < 0$ als $-2 \leq x < 0$, $\frac{1}{7} < x < 1$

$f'(x) > 0$ als $0 < x < \frac{1}{7}$, $1 < x \leq 2$

$f'(x) = 0$ als $x = \frac{1}{7}$, $x = 1$.

Globale minima 0 voor $x = 0$ en $x = 1$.

Lokaal maximum $6^4 \cdot 7^{-\frac{14}{3}}$ voor $x = \frac{1}{7}$.

Randmaximum, lokaal, $\sqrt[3]{4}$ voor $x = 2$

Randmaximum, globaal, $81\sqrt[3]{4}$ voor $x = -2$.

2. $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{\log \cos x}{\sin^2 x}}$.

Stellen we $\frac{\log \cos x}{\sin^2 x} = u$ en $\lim_{x \to 0} u = \ell$, dan gaat met $u \to \ell$ ook $e^u \to e^\ell$ (continuïteit van e^u); te bepalen dus e^ℓ.

Nu is $\ell = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1-\sin^2 x)}{2 \sin^2 x} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{\log(1-y)}{2y} = \frac{1}{2} \lim_{y \downarrow 0} \frac{\log(1-y) - \log 1}{y - 0} =$

$$= \tfrac{1}{2}\,[\log(1-y)']_{y=0} = \tfrac{1}{2}\Big[\frac{-1}{1-y}\Big]_{y=0} = -\tfrac{1}{2} \quad .$$

De gevraagde limiet is dus $e^{-\frac{1}{2}}$.

3. $$\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{(1-x)^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-x}|1-x|\,dx = \lim_{N\to\infty}\Big(\int_0^1 e^{-x}(1-x)dx + \int_1^N e^{-x}(x-1)dx\Big).$$

$$\int_0^1 e^{-x}(1-x)dx = -\int_0^1 (1-x)de^{-x} = [-(1-x)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}d(1-x) = 1 + [e^{-x}]_0^1 = e^{-1}$$

$$\int_1^N e^{-x}(x-1)dx = \int_1^N xe^{-x}dx - \int_1^N e^{-x}dx = -\int_1^N xde^{-x} - \int_1^N e^{-x}dx$$

$$= [-xe^{-x}]_1^N = -Ne^{-N} + e^{-1} \quad .$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{(1-x)^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}(2e^{-1} - Ne^{-N}) = \frac{2}{e} \quad .$$

4. Beschouw x als functie van y.

Omdat $y(t) = -y(-t)$ en $x(t) = x(-t)$ is x een even functie van y: de x-as is as van symmetrie.

$x = \log(1+t^2) \geq 0$ en $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = -\frac{\pi}{2}$

$\dot{x} = \dfrac{2t}{1+t^2}$ en $\dot{y} = \dfrac{1}{1+t^2}$. Dus is $\dfrac{dx}{dy} = 2t = 2\tan y$.

Omdat $\frac{dx}{dy}$ van teken wisselt in $y = 0$ en $x(0) = 0$, $(\frac{dx}{dy})_0 = 0$ raakt de grafiek in de oorsprong aan de y-as (x wordt niet negatief).

$y = \frac{\pi}{2}$ en $y = -\frac{\pi}{2}$ zijn asymptoten.

y heeft geen extreme waarde.

x heeft het minimum 0.

5. $\frac{\partial z}{\partial x} = \{f'(x) + af(x) + ag(y)\}e^{ax+by}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \{g'(y) + bf(x) + bg(y)\}e^{ax+by}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \{bf'(x) + ag'(y) + abf(x) + abg(y)\}e^{ax+by}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = \{(b-1)f'(x) + (a-1)g'(y) + (ab-a-b+1)(f(x) + g(y))\}e^{ax+by}$.

Opdat $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z$ identiek nul is voor alle differentieerbare functies f en g is nodig en voldoende dat

$$b-1 = 0, \; a-1 = 0, \; ab-a-b+1 = 0.$$

Deze drie vergelijkingen hebben één oplossing: $a = b = 1$.

6. Vervang door te vegen de drie vergelijkingen door een eenvoudiger, equivalent stelsel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 2a+9 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Opdat de drie vlakken een gemeenschappelijke snijlijn hebben is nodig en voldoende dat de rang van de coëfficiëntenmatrix gelijk is aan twee (de dimensie van de oplossingsruimte moet 1 zijn). Dit is het geval als $2a+9 = 0$.

Dus $a = -9/2$.

De vergelijkingen
$$\begin{aligned} -2x \quad\quad + 9z &= 0 \\ 2y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

hebben als oplossing de rechte $\underline{x} = \lambda(9,-5,2)$.

7. De verzameling van punten in het complexe vlak die voldoen aan de vergelijking $|z-1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}| + |z-1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}| = 2$ is een ellips met brandpunten $1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ en $1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

Het middelpunt van deze ellips is 1.

Voor de snijpunten van deze ellips met de reële as geldt

$$|x-1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}| + |x-1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}| = 2 \quad .$$

Voor het snijpunt met de reële as links van F_1 geldt:

$$1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}-x+1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}-x = 2, \quad \text{of wel } x = 0.$$

Voor het snijpunt met de reële as rechts van F_2 geldt:

$$x-1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+x-1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 2, \quad \text{of wel } x = 2.$$

Deze punten liggen ook op de cirkel $|x-1| = 1$ en zijn de enige gemeenschappelijke punten van de ellips en die cirkel, want de verticale as van de ellips is korter dan de horizontale waar immers de brandpunten op liggen.

De oplossing van de vergelijkingen is dus $z_1 = 0$, $z_2 = 2$.

Opmerking. Men kan dit algebraïsch als volgt vinden.

Blijkens $|z-1| = 1$ is $z = 1+e^{i\varphi}$; invullen in de tweede vergelijking geeft

$$|e^{i\varphi}-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}| + |e^{i\varphi}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}| = 2$$

d.i. $$\sqrt{\tfrac{3}{2}-\sqrt{2}\cos\varphi} + \sqrt{\tfrac{3}{2}+\sqrt{2}\cos\varphi} = 2 \quad .$$

Kwadrateren geeft

$$3 + 2\sqrt{\tfrac{9}{4}-2\cos^2\varphi} = 4$$

dus $$\sqrt{9-8\cos^2\varphi} = 1, \ \cos\varphi = \pm 1, \ \varphi = 0 \text{ of } \pi .$$

Dit geeft weer $z = 2$ resp. 0.

Proeftentamen Wiskunde I op zaterdag 13 november 1965.

1. Bereken

$$\lim_{x \to 0} \log\left(\frac{(x+2) - \sqrt{x^2+2x+4}}{\sin x}\right) .$$

2. Differentieer de volgende functies:

a) $y = \log(\tan x + \sqrt{1+\tan^2 x})$

b) $y = \arctan\sqrt{\dfrac{1+e^x}{1+e^{-x}}}$

en herleid de uitkomsten tot eenvoudige gedaanten.

3. De functie $f(x)$ is gedefinieerd als volgt:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{a}\cos x & \text{als } x < 0 \\ \dfrac{1}{x-a} & \text{als } 0 \leqslant x < 2,\ x \neq a \\ 2 - e^{x-2} & \text{als } x \geqslant 2 \end{cases}$$

(a is een constante $\neq 0$).

a) Bepaal voor $a = 3$ de discontinuïteitspunten van $f(x)$.

b) Kan a zó bepaald worden, dat $f(x)$ continu is voor alle waarden van x?

c) Bepaal a zó dat $f(x)$ differentieerbaar is in $x = 2$.

4. Bereken

a) $\int e^{x^2} x^3\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$.

Waarom is de tweede integraal oneigenlijk?

5. De functie is voor alle x gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{x|x| - 2|x| - 4x + 5}{x^2 - 6x + 15} .$$

Bepaal de extrema en teken de grafiek.

Oplossingen Proeftentamen november 1965

1. $$\lim_{x \to 0} \log \frac{x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x + 4}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \log \frac{2x}{(x+2+\sqrt{x^2+2x+4})\sin x} =$$

$$\log \lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+4}} \cdot \frac{x}{\sin x} \right) = \log(\tfrac{1}{2} \cdot 1) = -\log 2 .$$

2. a) $$\frac{d}{dx} \log(\tan x + \sqrt{1+\tan^2 x}) = \frac{1}{\tan x + \sqrt{1+\tan^2 x}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \, \frac{1}{\cos^2 x} \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{|\cos x|}{\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}} \, \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{|\cos x|} .$$

b) $$\frac{d}{dx} \arctan \sqrt{\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}} = \frac{d}{dx} \arctan e^{\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x} .$$

3. a) Als $a = 3$, dan is $f(x)$ discontinu voor $x = 2$ want

$$f(2) = 2 - e^0 = 1$$

maar $$\lim_{x \uparrow 2} f(x) = \lim_{x \uparrow 2} \frac{1}{x-3} = -1 .$$

Elders is $f(x)$ overal continu; ook voor $x = 0$ want

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x-3} = \left(\frac{1}{x-3}\right)_{x=0} = f(0) = \lim_{x \uparrow 0} \left(-\frac{1}{3} \cos x\right) = \lim_{x \uparrow 0} f(x) .$$

b) Voor $x = 2$ is $\lim_{x \uparrow 2} f(x) = \lim_{x \uparrow 2} \frac{1}{x-a} = \frac{1}{2-a}$. Dit is alleen dan gelijk aan

$f(2) = 1$, als $a = 1$. In dat geval heeft $f(x)$ echter een discontinuïteit bij $x = 1$.

Het is onmogelijk a zó te bepalen dat $f(x)$ continu is voor alle waarden van x.

c) Zojuist bleek dat $f(x)$ discontinu is in $x = 2$ als $a \neq 1$; dus zeker niet differentieerbaar.

Als $a = 1$ dan blijken de beide limieten

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \quad \text{en} \quad \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

te bestaan en gelijk te zijn; we vinden nl.

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{2 - e^h - 1}{h} = -1 \quad \text{en} \quad \lim_{h \uparrow 0} \left(\frac{1}{2+h-1} - 1\right)/h = \lim_{h \uparrow 0} \frac{-1}{1+h} = -1 \quad .$$

Voor $a = 1$ is $f(x)$ dus differentieerbaar in $x = 2$.

4. a) $$\int e^{x^2} x^3 dx = \tfrac{1}{2} \int x^2 de^{x^2} = \tfrac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx =$$

$$\tfrac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \tfrac{1}{2} \int de^{x^2} = \tfrac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x^2} + C \quad .$$

b) In $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$ is de integrand voor $x = 0$ niet gedefinieerd.

De integraal is dus oneigenlijk en per definitie gelijk aan

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^{\pi/2} \frac{d \sin x}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{\delta \downarrow 0} [2\sqrt{\sin x}]_\delta^{\pi/2} =$$

$$2 - \lim_{\delta \downarrow 0} 2\sqrt{\sin \delta} = 2.$$

5) Voor $x \geq 0$ is $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 6x + 15} = \dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2 + 6}$.

We vinden dus nulpunten in $x = 1$ en $x = 5$; een horizontale asymptoot: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$; geen verticale (de noemer is definiet positief).

Door te schrijven

$$f(x) = 1 - \frac{10}{(x-3)^2 + 6}$$

zien we dat $f(x)$ bij $x=3$ een minimum heeft nl. $-\frac{2}{3}$, tussen 0 en 3 daalt, en vanaf 3 stijgt.

Voor $x \leqslant 0$ is $f(x) = \dfrac{-x^2-2x+5}{x^2-6x+15} = \dfrac{-(x+1-\sqrt{6})(x+1+\sqrt{6})}{x^2-6x+15}$.

Dit geeft een nulpunt in $x=-1-\sqrt{6}$ en een horizontale asymptoot: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

$f'(x) = \dfrac{8x(x-5)}{(x^2-6x+15)^2}$ is (voor $x \leqslant 0$) overal positief behalve bij $x=0$; $f(x)$ is dus stijgend tot $f(0) = \frac{1}{3}$; aldaar heeft de grafiek een knik met naar links een horizontale raaklijn (de rechter afgeleide in $x=0$ is $-\frac{4}{15}$).

Extremen van $f(x)$ zijn dus:

bij $x=3$ een locaal minimum nl. $-\frac{2}{3}$

bij $x=0$ een licaal maximum nl. $\frac{1}{3}$.

Gegevens voor de grafiek:

x	$-\infty \leftarrow$	$-1-\sqrt{6}$	0		1	3	5	$\to \infty$
$f(x)$	$-1 \leftarrow$	0	$\frac{1}{3}$		0	$-\frac{2}{3}$	0	$\to 1$
$f'(x)$	$0 \leftarrow$	$+$	$\to 0$	$-\frac{4}{15} \leftarrow$	$-$	0	$+$	$\to 0$

Examen/tentamen Wiskunde I op maandag 10 januari 1966.

1. a) Bereken

$$\int_0^{2\pi} |x-\pi|\cos^2 x \, dx \quad .$$

b) Bepaal $\lim_{x\to\infty} (2x+5)\log \frac{x-1}{x+1}$.

2. a) Gegeven zijn de lijnen

ℓ : $\underline{x} = (1,2,3) + \lambda(1,0,1)$,

m : de snijlijn van de vlakken $2x + y + z = 0$ en $2x + y - z = 0$,

n : gaande door de punten $A(0,2,5)$ en $B(1,4,6)$.

Gevraagd een parametervoorstelling van de lijn die ℓ en m snijdt en evenwijdig is aan n.

b) Gegeven: de vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ zijn onafhankelijk.
Bewijs : de vectoren $\underline{a} + \underline{b} + 2\underline{c}$, $2\underline{a} + \underline{c}$, $3\underline{b} + 4\underline{c}$ zijn ook onafhankelijk.

3. a) Gegeven het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned}
2x - y - 2z + u &= 3 \\
x - ay - (a+2)z + u &= 1 \\
x - y - 3z + u &= 1 \\
4x + (a-1)y + 4az + u &= 8 \quad .
\end{aligned}$$

1) Voor welke waarde(n) van a is het stelsel onoplosbaar?

2) Geef voor de overige waarden van a de oplossingen.

b) Bepaal alle wortels van de vergelijking

$$z^2(i + z^2) = -6$$

en schrijf deze in de vorm $a + bi$, a en b reëel.

4. a) z is een functie van x en y; $x = e^u + e^v$, $y = e^u - e^v$.
Men beschouwt nu z als functie van u en v.

Waarin gaat dan $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ over? (Alle voorkomende afgeleiden zijn continu.)

4. b) Waarin gaat

$$y^2\frac{d^2y}{dx^2}+3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-3x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0$$

over, als men y in plaats van x als onafhankelijke veranderlijke beschouwt?

Oplossingen Tentamen januari 1966

1. a) $$\int_0^{2\pi}|x-\pi|\cos^2x\,dx=\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos^2x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}(x-\pi)\cos^2x\,dx\ .$$

Door in de tweede integraal $x-\pi=y$ te stellen gaat deze over in

$$\int_0^{\pi}y(-\cos y)^2dy=\int_0^{\pi}y\cos^2y\,dy\ .$$

De oorspronkelijke integraal wordt dus

$$\int_0^{\pi}\pi\cos^2x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(\cos 2x+1)dx=\frac{\pi}{2}\left[\tfrac{1}{2}\sin 2x+x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}\ .$$

b) $$\lim_{x\to\infty}(2x+5)\log\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}(2x+5)\log\left(1-\frac{2}{x+1}\right)\ .$$

We stellen $\frac{2}{x+1}=h$, zodat $x=\frac{2-h}{h}$. De limiet wordt dan

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{4+3h}{h}\log(1-h)=4\lim_{h\downarrow 0}\frac{\log(1-h)}{h}=-4\lim_{h\downarrow 0}\frac{\log(1-h)-\log 1}{-h}=-4\ ,$$

want $\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)-\log 1}{h}=\left(\frac{1}{x}\right)_{x=1}$, de afgeleide van log x in x = 1.

2. De lijn n heeft de richtingsvector (1,4,6) - (0,2,5) = (1,2,1). Elke lijn die deze richtingsvector heeft en ℓ snijdt ligt in het vlak

$$\underline{x}=(1,2,3)+\lambda(1,0,1)+\mu(1,2,1)\ .$$

d.i. $x=1+\lambda+\mu\ ,\quad y=2+2\mu\ ,\quad z=3+\lambda+\mu\ .$

Het snijpunt van dit vlak met de lijn m vinden we door λ en μ zo te bepalen dat aan $2x+y+z=0$ en $2x+y-z=0$ wordt voldaan:

$$2 + 2\lambda + 2\mu + 2 + 2\mu + 3 + \lambda + \mu = 7 + 3\lambda + 5\mu = 0$$

$$2 + 2\lambda + 2\mu + 2 + 2\mu - 3 - \lambda - \mu = 1 + \lambda + 3\mu = 0 \quad .$$

Dit geeft $\lambda = -4$, $\mu = 1$; het snijpunt is dus $(-2,4,0)$. We kunnen dus $(-2,4,0)$ als steunvector nemen voor de lijn $//n$, die ℓ en m snijdt; de parametervoorstelling wordt dan

$$\underline{x} = (-2,4,0) + \rho(1,2,1) \; .$$

b) Te bewijzen dat aan

$$\lambda(\underline{a} + \underline{b} + 2\underline{c}) + \mu(2\underline{a} + \underline{c}) + \nu(3\underline{b} + 4\underline{c}) = 0$$

slechts wordt voldaan als λ, μ en ν alle 0 zijn.
We herleiden de betrekking tot

$$(\lambda + 2\mu)\underline{a} + (\lambda + 3\nu)\underline{b} + (2\lambda + \mu + 4\nu)\underline{c} = \underline{0} \quad .$$

Omdat $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ volgens het gegeven onafhankelijk zijn wordt hieraan slechts voldaan als

$$\lambda + 2\mu = 0 \; , \quad \lambda + 3\nu = 0 \; , \quad 2\lambda + \mu + 4\nu = 0 \quad .$$

Hieruit volgt direct: $2\mu = 3\nu$ en $-3\mu + 4\nu = 0$, dus $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\lambda = 0$; q.e.d.

3. a) We vereenvoudigen het stelsel door vegen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -a & -a-2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & a-1 & 4a & 1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1-a & -a & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & a & 4a+2 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & a & 4a & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Als $a = 1$, dan blijft slechts over

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{d.i.} \quad \begin{array}{r} u = 0 \\ x + z = 2 \\ y + 4z = 1 \end{array} \quad .$$

Stelt men $z = \lambda$, dan volgt $y = 1 - 4\lambda$, $x = 2 - \lambda$, samengevat

$$(x,y,z,u) = (2,1,0,0) + \lambda(-1,-4,1,0) \; .$$

Als $a \neq 1$, dan kunnen we in de tweede regel delen door $1 - a$:

Door de gegeven uitdrukkingen voor x en y in u en v, zijn laatstgenoemden bepaald als functies van x en y: u(x,y) en v(x,y). Teneinde $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ en $\frac{\partial v}{\partial y}$ te vinden differentiëren we de identiteiten

$$x \equiv e^{u(x,y)} + e^{v(x,y)} , \qquad y \equiv e^{u(x,y)} - e^{v(x,y)} ;$$

Dit geeft

$$1 = e^u \frac{\partial u}{\partial x} + e^v \frac{\partial v}{\partial x} \qquad\qquad 0 = e^u \frac{\partial u}{\partial y} + e^v \frac{\partial v}{\partial y}$$

resp.

$$0 = e^u \frac{\partial u}{\partial x} - e^v \frac{\partial v}{\partial x} \qquad\qquad 1 = e^u \frac{\partial u}{\partial y} - e^v \frac{\partial v}{\partial y} .$$

Waaruit volgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tfrac{1}{2} e^{-u} , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \tfrac{1}{2} e^{-v} \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \tfrac{1}{2} e^{-u} , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\tfrac{1}{2} e^{-v} .$$

Dit substituerend hebben we

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} e^{-u} + \tfrac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v} e^{-v} \; ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} e^{-u} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v} e^{-v} .$$

Evenals z worden $\frac{\partial z}{\partial u}$ en $\frac{\partial z}{\partial v}$ beschouwd als functies van u en v; dus via u en v als functies van x en y:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial x}\right) e^{-u} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} e^{-u} \frac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x}\right) e^{-v} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v} e^{-v} \frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \tfrac{1}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} e^{-2u} + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} e^{-u-v} + \tfrac{1}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} e^{-2v} - \tfrac{1}{4} \frac{\partial z}{\partial u} e^{-2u} - \tfrac{1}{4} \frac{\partial z}{\partial v} e^{-2v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial y}\right) e^{-u} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial u} e^{-u} \frac{\partial u}{\partial y} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y}\right) e^{-v} + \tfrac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial v} e^{-v} \frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= \tfrac{1}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} e^{-2u} - \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} e^{-u-v} + \tfrac{1}{4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} e^{-2v} - \tfrac{1}{4} \frac{\partial z}{\partial u} e^{-2u} - \tfrac{1}{4} \frac{\partial z}{\partial v} e^{-2v} .$$

Dus $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} e^{-u-v} .$$

Uit het gegeven dat alle voorkomende afgeleiden continu zijn volgt dat $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$, wat we in het bovenstaande hebben gebruikt.

Opmerking.

Men kan het verkregen resultaat in dit bijzondere geval gemakkelijk controleren; nl. op de volgende manier:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & a & 4a & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3a & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d.i.} \quad \begin{aligned} -3z + u &= -1 \\ y + z &= 0 \\ x + z &= 2 \\ 3az &= 1 \end{aligned} .$$

1) Als $a = 0$ dan is de laatste vergelijking, en dus het hele stelsel, vals.

2) Voor $a \neq 0$ (en $\neq 1$, zie boven), vindt men

$$z = \frac{1}{3a}, \quad x = 2 - \frac{1}{3a}, \quad y = -\frac{1}{3a}, \quad u = \frac{1}{a} - 1 .$$

b) Stel $z^2 = w$ dan geldt hiervoor

$$w^2 + iw = -6 \text{ d.i. } (w + \tfrac{1}{2}i)^2 = -6\tfrac{1}{4} = 6\tfrac{1}{4}e^{\pi i + 2k\pi i} .$$

Dus $\quad w + \frac{1}{2}i = 2\frac{1}{2}\, e^{\frac{1}{2}\pi i + k\pi i} \quad k = 0,1$; d.i. $w + \frac{1}{2}i = \pm 2\frac{1}{2}i$ dus

$$w_1 = 2i, \quad w_2 = -3i .$$

Dit geeft

1) $\quad z^2 = 2i = 2e^{\frac{\pi i}{2} + 2m\pi i}$,

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4} + m\pi i} \qquad m = 0,1$$

d.i. $\quad z_1 = \sqrt{2}\,\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = 1 + i \qquad$ resp.

$$z_2 = -\sqrt{2}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}} = -1 - i .$$

2) $\quad z^2 = -3i = 3e^{-\frac{\pi i}{2} + 2n\pi i}$

$$z = \sqrt{3}e^{-\frac{\pi i}{4} + n\pi i} \qquad n = 0,1$$

d.i. $\quad z_3 = \sqrt{3}\,\dfrac{1-i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} - i\sqrt{\dfrac{3}{2}} \qquad$ resp.

$$z_4 = -\sqrt{3}\,\frac{1-i}{\sqrt{2}} = -\sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{3}{2}} .$$

4. a) Met de kettingregel vinden we

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} .$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)e^u$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right)e^u$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}e^v - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}e^v + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}e^v - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}e^v\right)e^u$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)e^{u+v} \quad .$$

b) Naar bekend geldt, als men y als onafhankelijk veranderlijke beschouwt:

$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \qquad \left(\text{mits } \frac{dy}{dx} \neq 0\right) \quad .$$

Met de kettingregel vinden we

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} \quad .$$

Als we de gegeven betrekking door $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ delen (als $\frac{dy}{dx} = 0$ staat er een trivialiteit), dan komt er dus

$$-y^2\frac{d^2x}{dy^2} + 3y\frac{dx}{dy} - 3x = 0 \quad ,$$

waarin y de onafhankelijk veranderlijke is.

Examen/tentamen Wiskunde I op maandag 6 juni 1966.

1. a) Bepaal de afgeleide van

$$(1+x^2)\arctan x + |x-2| \quad .$$

b) Bereken

$$\lim_{u\to 1} u^{\frac{u}{u^2-1}} \quad .$$

2. Bereken: $\int x\cos^3 x\,dx$.

3. Gegeven zijn $z = f(x,y)$ en $x = e^u\cos v$, $y = e^u\sin v$.
Beschouw nu z als een functie van u en v en druk daarna $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial z}{\partial u}$ uit in x, y en de eerste en tweede afgeleiden van z naar x en y.

4. Stel de voorwaarde(n) op waaraan a, b en c moeten voldoen, opdat onderstaand stelsel vergelijkingen precies één oplossing heeft.
Bereken vervolgens deze oplossing.

$$\begin{aligned} x + ay + bcz &= a^2 \\ x + by + caz &= b^2 \\ x + cy + abz &= c^2 \ . \end{aligned}$$

5. Bereken de wortels van de vergelijking:

$$e^{z^2} + 1 = 0 \quad . \quad (z \text{ complex}) \ .$$

<u>Oplossingen Tentamen juni 1966.</u>

1. a) De functie $(1+x^2)\arctan x$ is differentieerbaar voor iedere waarde van x; we vinden

$$\frac{d}{dx}\{(1+x^2)\arctan x\} = 2x\arctan x + \frac{1+x^2}{1+x^2}$$

$$= 2x\arctan x + 1$$

De functie $|x-2|$ is differentieerbaar als $x \neq 2$.

Als $x > 2$: $\frac{d}{dx}|x-2| = \frac{d}{dx}(x-2) = 1$.

Als $x < 2$: $\frac{d}{dx}|x-2| = \frac{d}{dx}(2-x) = -1$.

We vinden voor de afgeleide van $(1+x^2)\arctan x + |x-2|$

als $x > 2$: $2x \arctan x + 2$

als $x < 2$: $2x \arctan x$.

Voor $x = 2$ is de functie niet differentieerbaar.

b) $$L = \lim_{u\to 1} u^{\frac{u}{u^2-1}} = \lim_{u\to 1} e^{\frac{u}{u^2-1}\log u} .$$

Substitueer $u = t+1$, dan geldt

$$L = \lim_{t\to 0} e^{\frac{t+1}{(t+2)t}\log(t+1)}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to 0} \frac{t+1}{t+2} \frac{\log(t+1)-\log 1}{t}}$$

$$= e^{\lim\limits_{t\to 0} \frac{t+1}{t+2} \lim\limits_{t\to 0} \frac{\log(1+t)-\log 1}{t}} .$$

In deze uitdrukking is de eerste limiet $\frac{1}{2}$; de tweede is de afgeleide van $\log x$ voor $x = 1$, dus gelijk aan 1.
Hieruit volgt: $L = \sqrt{e}$.

2. $$I = \int x \cos^3 x \, dx = \int x(1-\sin^2 x) d \sin x .$$

$$I_1 = \int x \, d \sin x = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C_1 .$$

$$I_2 = \int x \sin^2 x \, d \sin x = \frac{1}{3}\int x \, d \sin^3 x = \frac{1}{3} x \sin^3 x - \frac{1}{3}\int \sin^3 x \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} x \sin^3 x + \frac{1}{3}\int (1-\cos^2 x) d \cos x =$$

$$= \frac{1}{3} x \sin^3 x + \frac{1}{3}\int d \cos x - \frac{1}{3}\int \cos^2 x \, d \cos x =$$

$$= \frac{1}{3} x \sin^3 x + \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{9}\cos^3 x + C .$$

$$I = I_1 - I_2 = x \sin x + \frac{2}{3}\cos x - \frac{1}{3} x \sin^3 x + \frac{1}{9}\cos^3 x + C .$$

3. We berekenen met de kettingregel eerst $\frac{\partial z}{\partial u}$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad .$$

Uit het gegeven volgt

$$\frac{\partial x}{\partial u} = e^u \cos v = x$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = e^u \sin v = y \quad ,$$

dus
$$\frac{\partial z}{\partial u} = x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} \quad .$$

Deze uitdrukking wordt nu weer met behulp van de kettingregel naar u gedifferentieerd:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y}\right\}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y}\right\}\frac{\partial y}{\partial u} =$$

$$= \left\{\frac{\partial z}{\partial x} + x\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right\} x + \left\{x\,\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + y\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\} y =$$

$$= x^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) + y^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} \quad .$$

Hieruit volgt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial z}{\partial u} = x^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) + y^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Nemen we aan dat $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, dan is

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial z}{\partial u} = x^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad .$$

4. Een principieel wel juiste methode is op te merken dat het stelsel dan en slechts dan precies één oplossing heeft als de determinant van de coëfficiëntenmatrix ongelijk aan nul is, en vervolgens de oplossing met de regel van Cramer te bepalen.

Zoals meestal is het gebruik van de regel van Cramer nogal omslachtig. Eenvoudiger is het stelsel door vegen op te lossen.

$$\begin{pmatrix} 1, & a, & bc & ; & a^2 \\ 1, & b, & ca & ; & b^2 \\ 1, & c, & ab & ; & c^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & a, & bc & ; & a^2 \\ 0, & b-a, & c(a-b) & ; & (b+a)(b-a) \\ 0, & c-a, & b(a-c) & ; & (c+a)(c-a) \end{pmatrix} \quad .$$

Als a = b of a = c, dan valt een vergelijking weg en vinden we twee lineaire vergelijkingen met drie onbekenden, waarvoor in dit geval altijd meer dan één oplossing wordt verkregen. We mogen dus aannemen $a \neq b$ en $a \neq c$; het stelsel is dan equivalent met

$$\begin{pmatrix} 1 & a & bc & ; & a^2 \\ 0 & 1 & -c & ; & b+a \\ 0 & 1 & -b & ; & c+a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & bc & ; & a^2 \\ 0 & 1 & -c & ; & b+a \\ 0 & 0 & c-b & ; & c-b \end{pmatrix} .$$

Als c = b, dan valt de laatste vergelijking weg en vinden we meer dan een oplossing; we mogen dus aannemen $b \neq c$.
Het stelsel is dan equivalent met

$$\begin{aligned} x + ay + bcz &= a^2 \\ y - cz &= b+a \\ z &= 1 \quad . \end{aligned}$$

Hieruit berekenen we direct de oplossing:

$$z = 1$$

$$y = a + b + c$$

$$x = a^2 - bc - a(a+b+c)$$

$$= -ab - bc - ca \quad .$$

Samenvattend: er is één oplossing dan en slechts dan als $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$.
In dit geval is de oplossing

$$x = -ab - bc - ca$$

$$y = a + b + c$$

$$z = 1 \quad .$$

5. Uit $e^{z^2} = -1 = e^{i\pi + k.2\pi i}$ volgt

$$z^2 = i\pi + k.2\pi i \qquad \text{met } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

We onderscheiden nu twee gevallen

a) $k \geq 0$. Dan is

$$|z^2| = (2k+1)\pi$$

$$\arg z^2 = \frac{\pi}{2}$$

zodat $\quad |z| = \sqrt{(2k+1)\pi}$

en $\quad \arg z = \frac{\pi}{4}$ of $\frac{5\pi}{4}$.

In dit geval zijn de oplossingen

$$z = \sqrt{(2k+1)\pi}\, e^{\frac{\pi}{4}i} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$z = \sqrt{(2k+1)\pi}\, e^{\frac{5\pi}{4}i} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

b) $k < 0$. Dan is

$$|z^2| = (-1-2k)\pi$$

$$\arg z^2 = \frac{3\pi}{2} \;.$$

zodat $\quad |z| = \sqrt{(-2k-1)\pi}$

$$\arg z = \frac{3\pi}{4} \quad \text{of} \quad \frac{7\pi}{4} \;.$$

Substitueren we $k = -t$, dan vinden we als oplossingen

$$z = \sqrt{(2t-1)\pi}\, e^{\frac{3\pi}{4}i} \qquad t = 1,2,\ldots$$

$$z = \sqrt{(2t-1)\pi}\, e^{\frac{7\pi}{4}i} \qquad t = 1,2,\ldots \;.$$

Hiermee zijn alle oplossingen gevonden.

Anders: Stel $z = x + iy$, dan is $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$.

Dus $\quad e^{x^2-y^2+2xyi} = e^{\pi i + 2k\pi i} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Dit geeft $x^2 - y^2 = 0$, $\quad 2xy = (2k+1)\pi$.

Dus

1) als $y = x$

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 = (2k+1)\pi \;, \quad x = \pm\sqrt{(k+\frac{1}{2})\pi} \\ z = \pm(1+i) \quad (k+\frac{1}{2})\pi \end{array}\right\} \quad k = 0,1,2,3,\ldots$$

2) als $y = -x$

$$\left.\begin{array}{l} -2x^2 = (2k+1)\pi \;, \quad x = \pm\sqrt{(-k-\frac{1}{2})\pi} \\ z = \pm(1-i)\sqrt{(-k-\frac{1}{2})\pi} \;. \end{array}\right\} \quad k = -1,-2,-3,\ldots$$

Proeftentamen Wiskunde I op zaterdag 5 november 1966

1. a) Bepaal de afgeleide van arccos $\sqrt{1-x^2}$ voor $-1 < x < 0$.

   b) Bereken
$$\int_2^\infty \left(\frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right) dx \quad .$$

2. Teken de grafiek van de functie f die voor $0 \leq x \leq 2\pi$, $x \neq \pi$ gedefinieerd is door
$$f(x) = \frac{e^{x-\pi}}{1+\cos x} \quad .$$
Bepaal in het bijzonder de eventueel aanwezige extrema en asymptoten.

3. Bepaal $\int 2x(\arctan x)^2 dx$.

4. Bewijs met behulp van de limiet-definitie
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-n} = 0 \quad .$$

5. Gegeven is de functie $f(x) = xe^{|x|}$.
Bereken $f'(0)$.
Bewijs dat $f'(x)$ continu is voor $x = 0$.

<u>Oplossingen Proeftentamen november 1966</u>

1. a)
$$\frac{d}{dx} \arccos \sqrt{1-x^2} = \frac{-1}{\sqrt{1-1+x^2}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad .$$
N.b.: altijd geldt $\sqrt{x^2} = |x| \geq 0$.

Hier is gegeven: $-1 < x < 0$; dus $|x| = -x$.

b)
$$I = \int_2^\infty \left(\frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right) dx \quad -$$
De integraal is oneigenlijk in twee opzichten:

1) de bovengrens is ∞ .

2) de integrand bestaat niet voor $x = 2$.

$$I = \lim_{\substack{N\to\infty \\ a\downarrow 2}} \int_a^N \left(\frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right) dx =$$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ a\downarrow 2}} \left[\log\sqrt{x^2+4} - \log(x+\sqrt{x^2-4})\right]_{x=a}^{x=N} =$$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ a\downarrow 2}} \left(\log\frac{\sqrt{N^2+4}}{N+\sqrt{N^2-4}} - \log\frac{\sqrt{a^2+4}}{a+\sqrt{a^2-4}}\right) = \log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2 = -\frac{3}{2}\log 2 \ .$$

2. $$f(x) = \frac{e^{x-\pi}}{1+\cos x} \ , \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi \ , \quad x \neq \pi \ .$$

(i) Geen nulpunten.
Immers, de teller is positief; de noemer is positief en $\leqslant 2$ voor alle geoorloofde waarden van x.

(ii) Verticale asymptoot $x = \pi$.
Immers $f(x) \to \infty$ voor $x \to \pi$.

(iii) Extrema.

$$f'(x) = \frac{e^{x-\pi}(1+\cos x+\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{e^{x-\pi}(\cos\frac{1}{2}x+\sin\frac{1}{2}x)}{2\cos^3\frac{1}{2}x} \ .$$

Het enige nulpunt van $f'(x)$ is $x = \frac{3\pi}{2}$.

x	0		π	$\frac{3\pi}{2}$		2π
f'(x)		+ + + + + + + + +		- - - 0 + + +		
f(x)		stijgend		dalend	stijgend	

f'(x) is evenals f(x) niet gedefinieerd voor $x = \pi$.

$f'(x) \to \infty$ voor $x \uparrow \pi$, $f'(x) \to -\infty$ voor $x \downarrow \pi$.

Uit het tekenverloop van $f'(x)$ volgt dat $f(x)$ minima bezit in $x = \frac{3\pi}{2}$ en in $x = 0$ en een maximum in $x = 2\pi$.
Omdat $f(x) \to \infty$ voor $x \to \pi$, is $f(2\pi) = \frac{1}{2}e^{\pi}$ een relatief maximum.
Vergelijking van $f(0) = \frac{1}{2}e^{-\pi}$ en $f(\frac{3\pi}{2}) = e^{\pi/2}$ toont dat $f(0)$ een absoluut minimum en $f(\frac{3\pi}{2})$ een relatief minimum is.

3. Door partiële integratie moeten we de "arctan x" zien kwijt te raken.

$$\int 2x(\arctan x)^2 dx = \int (\arctan x)^2 d(x^2) =$$

$$= x^2(\arctan x)^2 - 2\int x^2 \cdot \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx$$

$$= x^2(\arctan x)^2 - 2\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \arctan x\, dx =$$

$$= x^2(\arctan x)^2 - 2\int \arctan x\, dx + 2\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx \quad .$$

Op de tweede term passen we weer partiële integratie toe; de integraal wordt:

$$x^2(\arctan x)^2 - 2x \arctan x + 2\int \frac{x}{1+x^2}\, dx + 2\int \arctan x\, d(\arctan x) =$$

$$= x^2(\arctan x)^2 - 2x \arctan x + \log(1+x^2) + (\arctan x)^2 + C =$$

$$= (x^2+1)(\arctan x)^2 - 2x \arctan x + \log(1+x^2) + C \quad .$$

4. We moeten aantonen dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een (van ε afhangend) getal N kan worden bepaald zó dat

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2-n} - 0 \right| < \varepsilon \qquad \text{voor alle } n > N \quad .$$

We kunnen een dergelijk getal N in dit geval als volgt rechtstreeks bepalen:

$$(1) \qquad \left| \frac{(-1)^n}{n^2-n} - 0 \right| = \frac{1}{n^2-n} < \varepsilon \qquad (n > 1)$$

als $\quad n^2 - n > \frac{1}{\varepsilon} \qquad$ d.i. als $\quad (n-\frac{1}{2})^2 > \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{4}$

dus als $\quad n > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{4}}$.

En omgekeerd: als n hieraan voldoet dan is kennelijk aan (1) voldaan. We hebben dus aangetoond dat een getal N als gevraagd inderdaad bestaat nl.

$$N = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{4}} \quad .$$

Opmerking. Bij de definitie van de limiet van een rij wordt niet gesproken van "het" getal N maar van "een" (beter 'n) getal N. Vaak kan men door "ruwer" rekenen het bestaan van 'n N gemakkelijk aantonen. Zo kan men hier als volgt rekenen:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2-n} - 0\right| = \frac{1}{n^2-n} < \frac{1}{n} \qquad \text{voor } n > 2 \quad .$$

Met $n > \frac{1}{\varepsilon}$ is dus aan (1) voldaan. Wel moet men tevens letten op de neveneis $n > 2$. Daarmee rekening houdend hebben we aangetoond dat $N = \max(\frac{1}{\varepsilon}, 3)$ aan de in de definitie gestelde eis voldoet.

5. Uit het gegevene volgt dat

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x} & , \quad x > 0 \\ xe^{-x} & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} \quad .$$

Voor $x = 0$ moeten we de afgeleide rechtstreeks volgens de definitie berekenen

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{xe^{|x|}}{x} = 1 \quad .$$

Voor $x > 0$ en $x < 0$ kunnen we de regels voor het differentiëren toepassen:

Als $x > 0$, dan: $f'(x) = (x+1)e^{x}$

Als $x < 0$, dan: $f'(x) = (-x+1)e^{-x}$

$$\lim_{x \downarrow 0} f'(x) = \lim_{x \downarrow 0} (x+1)e^{x} = 1$$

$$\lim_{x \uparrow 0} f'(x) = \lim_{x \uparrow 0} (-x+1)e^{-x} = 1$$

Dus $\quad \lim_{x \to 0} f'(x) = 1 = f'(0) \quad ,$

zodat $\quad f'(x) \quad$ continu is voor $\quad x = 0$

Examen/tentamen Wiskunde I op maandag 16 januari 1967

1. De functie $f(x)$ wordt gedefinieerd door

$$f(x) = (1-\cos x)\sin\frac{1}{x}\ , \qquad x \neq 0$$
$$f(0) = 0\ .$$

a) Toon aan dat $f(x)$ continu is in $x=0$.

b) Bepaal $f'(x)$ voor die waarden van x, waarvoor $f'(x)$ bestaat.

2. a) Bereken $\int x^2 \log(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

b) Bewijs dat de volgende vlakken evenwijdig zijn en niet samenvallen:

$$\alpha : \underline{x} = (1,0,0,0) + \lambda(2,7,-2,9) + \mu(2,1,-2,-1)$$
$$\beta : \underline{x} = \nu(3,3,-3,1) + \rho(1,2,-1,2)\ .$$

3. Door de betrekkingen

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ x - y - z = -1 \\ y^2 - t^2 = 3 \end{cases}$$

is z vastgelegd als functie van t.

Bereken $\dfrac{d^2z}{dt^2}$ in $(x,y,z,t) = (1,2,0,1)$.

4. a) Bepaal die complexe getallen z met $|z| = 1$ zodanig dat $|e^{z^2}|$ minimaal is.

b) Teken in het complexe vlak die punten z, die voldoen aan

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z^2+z+1}{z+1}\right) > 0\ .$$

<u>Oplossingen Tentamen januari 1967</u>

1. a) We moeten aantonen dat $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ bestaat en dat $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$$\left.\begin{aligned} &|f(x)| = |1-\cos x|\,\left|\sin\frac{1}{x}\right|, \quad x \neq 0 \\ &\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1 \end{aligned}\right\} \text{ dus } 0 \leq |f(x)| \leq |1-\cos x|\ .$$

Nu is $\lim\limits_{x\to 0}|1-\cos x| = \lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x) = 0$,

dus volgens de insluitstelling is $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)| = 0$ en dus $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$;
dus is $f(x)$ continu in $x=0$.

b) Voor $x \neq 0$ is $f(x) = (1-\cos x)\sin\frac{1}{x}$ en is dus

$$f'(x) = \sin x \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}(1-\cos x)\cos\frac{1}{x} \; .$$

Per definitie is $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ als deze limiet bestaat.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{(1-\cos x)\sin\frac{1}{x}}{x} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{x}}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}\right)^2 x\sin\frac{1}{x} \; .$$

Nu is $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}\right)^2 = 1$ en $0 \leq |x\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$;

dus is volgens de insluitstelling $\lim\limits_{x\to 0}|x\sin\frac{1}{x}| = 0$ dus $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

Hieruit volgt: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1.0 = 0$; dus is $f'(0) = 0$.

2. a) $$\int x^2\log(x+\sqrt{1+x^2})dx = \int\log(x+\sqrt{1+x^2})d(\tfrac{1}{3}x^3) =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \int\frac{1}{3}x^3 d\log(x+\sqrt{1+x^2}) =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{6}\int\frac{x^2\,dx^2}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{6}\int\frac{(x^2+1-1)}{\sqrt{1+x^2}}d(x^2+1) =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{6}\int\sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2) + \frac{1}{6}\int\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \log(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}\,2(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \log(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{9}(1+x^2)\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2} + C \,.$$

b) Om evenwijdigheid aan te tonen, bewijzen we dat elk der beide richtingsvectoren van α een lineaire combinatie is van de richtingsvectoren van β. Omdat de richtingsvectoren van β onafhankelijk zijn, is het voldoende aan te tonen, dat de rang van het stelsel, gevormd door de richtingsvectoren van α en β, gelijk is aan 2:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & 9 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 2 \,.$$

α en β zijn dus inderdaad evenwijdig.

Om aan te tonen, dat de vlakken niet samenvallen, bewijzen we dat het vlak β niet door $(1,0,0,0)$ gaat, d.w.z. dat er geen ν en ρ bestaat zodanig dat:

$$(1,0.0.0) = \nu(3,3,-3,1) + \rho(1,2,-1,2)$$

of

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 3\nu + \rho \\ 0 &= 3\nu + 2\rho \\ 0 &= -3\nu - \rho \\ 0 &= \nu + 2\rho \end{aligned}\right\}$$

de eerste en derde vergelijking zijn strijdig, dus gaat β niet door $(1,0,0,0)$. De vlakken α en β zijn dus evenwijdig en vallen niet samen.

3. x, y en z zijn als functies van t bepaald. Impliciet differentiëren naar t levert:

$$\left.\begin{aligned} &2x\frac{dx}{dt} + 2z\frac{dz}{dt} = 0 \\ &\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} = 0 \\ &2y\frac{dy}{dt} - 2t = 0 \,. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

Nu berekenen we $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ en $\frac{dz}{dt}$ in $(1,2,0,1)$.

$$\left.\begin{aligned}
&1\,\frac{dx}{dt} + 0\,\frac{dz}{dt} = 0\\
&\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} = 0\\
&2\,\frac{dy}{dt} - 1 = 0\,.
\end{aligned}\right\}$$

dus: $\frac{dx}{dt} = 0\,,\quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\,,\quad \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{2}$ in het punt (1,2,0,1).

Door de identiteiten van het stelsel I nogmaals naar t te differentiëren vinden we:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x\,\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + z\,\frac{d^2z}{dt^2} = 0\\
&\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2z}{dt^2} = 0\\
&\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y\,\frac{d^2y}{dt^2} - 1 = 0\,.
\end{aligned}\right\}\quad \text{(II)}$$

Om de waarden van $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ en $\frac{d^2z}{dt^2}$ in het punt (1,2,0,1) te berekenen, substitueren we in II de waarden voor (x,y,z,t) en de berekende waarden van $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ en $\frac{dz}{dt}$. We vinden dan:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{4} = 0\\
&\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2z}{dt^2} = 0\\
&\frac{1}{4} + 2\,\frac{d^2y}{dt^2} - 1 = 0\,;
\end{aligned}\right\}$$

hieruit volgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{5}{8}\,.$$

4. a) $|z| = 1$ dus $z = e^{i\varphi}$ en $z^2 = e^{2i\varphi} = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$. Dus

$$|e^{z^2}| = |e^{\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi}| = e^{\cos 2\varphi}\ .$$

Dit getal is minimaal als $\cos 2\varphi$ minimaal is, dus als $\cos 2\varphi = -1$; dus

$$\text{of}\quad \left.\begin{array}{l} 2\varphi = \pi \\ 2\varphi = -\pi\ . \end{array}\right\}$$

De gevraagde getallen zijn dus:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\ . \end{array}\right\}$$

b) $\dfrac{z^2+z+1}{z+1} = 1 + \dfrac{z^2}{z+1}$; dus $\operatorname{Im} \dfrac{z^2+z+1}{z+1} = \operatorname{Im} \dfrac{z^2}{z+1}$. Stel nu: $z = x + iy$ dan is

$$\operatorname{Im} \frac{z^2}{z+1} = \operatorname{Im}\left(\frac{x^2-y^2+2ixy}{x+1+iy}\right) = \operatorname{Im} \frac{(x^2-y^2+2ixy)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2} =$$

$$= \frac{2xy(x+1)-y(x^2-y^2)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{y(x^2+2x+y^2)}{(x+1)^2+y^2}\ .$$

De waarde $z = -1$ is dus al direct uitgezonderd.

De gevraagde punten zijn dus die punten $z = x + iy$, waarvoor geldt:

$$\left.\begin{array}{l} y > 0 \\ (x+1)^2 + y^2 > 1 \end{array}\right\} \quad \text{of} \quad \left.\begin{array}{l} y < 0 \\ (x+1)^2 + y^2 < 1 \end{array}\right\}.$$

De gevraagde punten z liggen dus buiten de cirkel C met middelpunt $z = -1$ en straal 1, als $\operatorname{Im} z > 0$ en binnen de cirkel C, als $\operatorname{Im} z < 0$.

Punten met $\operatorname{Im} z = 0$ en punten op C hebben de gevraagde eigenschap niet.

Examen/tentamen Wiskunde I op maandag 5 juni 1967

1. a) Bereken: $\int x^8 \arctan x^3 dx$.

   b) Welke complexe getallen z voldoen aan $e^{iz} = 1+i$?

2. Gegeven: $z = z(x,y)$

$$x = e^{-u} + e^{-v}$$
$$y = e^{-u} - e^{-v} .$$

   Druk $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ uit in u, v en partiële afgeleiden van z naar u en v.

3. Gegeven: $f(x) = \arccos(2x^2 - 1) - 2 \arccos x$.

   a) Bepaal de geoorloofde waarden van x.
   b) Bepaal de afgeleide.
   c) Schets de grafiek.

4. Voor welke reële waarden der parameters a en b is onderstaand stelsel oplosbaar? Bepaal de oplossingen.

$$\begin{cases} x + by + z = 1 \\ ax + y + bz = 1 \\ x + ay + z = 1 . \end{cases}$$

<u>Oplossingen Tentamen juni 1967</u>

1. a) Stel $x^3 = u$; $du = 3x^2 dx$.

$$I = \frac{1}{3}\int u^2 \arctan u \, du = \frac{1}{9} u^3 \arctan u - \frac{1}{9}\int \frac{u^3}{1+u^2} du .$$

   Nu is $\displaystyle\int \frac{u^3}{1+u^2} du = \int\left(u - \frac{u}{1+u^2}\right) du = \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$.

   Dus $\displaystyle I = \frac{1}{9} x^9 \arctan x^3 - \frac{1}{18} x^6 + \frac{1}{18}\ln(x^6+1) + C^*$.

   b) Stel $z = x+iy$; $iz = -y+ix$; $e^{iz} = e^{-y}e^{ix} = \sqrt{2}\, e^{(\frac{1}{4}+2k)\pi i}$;

$$e^{-y} = \sqrt{2} = e^{+\frac{1}{2}\ln 2} ;\; y = -\tfrac{1}{2}\ln 2 ;\; z = (\tfrac{1}{4}+2k)\pi - \tfrac{1}{2} i \ln 2 ,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

2. We zien z als functie van x en y via u en v:

$$z = z[u(x,y),v(x,y)] \ , \quad z_x = z_u u_x + z_v v_x \ ,$$

waarin we u_x en v_x bepalen uit

$$1 = -e^{-u}u_x - e^{-v}v_x \ ; \quad u_x = -\tfrac{1}{2}e^{u}$$

$$0 = -e^{-u}u_x + e^{-v}v_x \ ; \quad v_x = -\tfrac{1}{2}e^{v} \ .$$

We hebben nu

$$z_x = -\tfrac{1}{2}z_u e^{u} - \tfrac{1}{2}z_v e^{v} \ ;$$

dus

$$z_{xx} = -\tfrac{1}{2}[(z_{uu}e^{u} + z_u e^{u} + z_{vu}e^{v})u_x + (z_{uv}e^{u} + z_{vv}e^{v} + z_v e^{v})v_x] \ ;$$

$$z_{xx} = \tfrac{1}{4}[z_{uu}e^{2u} + z_u e^{2u} + 2z_{uv}e^{u+v} + z_{vv}e^{2v} + z_v e^{2v}] \quad \text{als} \quad z_{uv} = z_{vu} \ .$$

3. a) $|2x^2 - 1| \leq 1$ èn $|x| \leq 1$ geeft $|x| \leq 1$.

b) $$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}}\,4x + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ \dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}} & -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$f'(1) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \ ; \quad f'(0) \text{ bestaat niet (zie c)).}$$

c) $f(x)$ is constant $= 0$ voor $0 \leq x \leq 1$.
$f(x) = 4 \arcsin x$ voor $-1 \leq x \leq 0$.

In (0,0) heeft de raaklijn aan de linkse tak van de grafiek de helling 4 (de hoek in de grafiek duidelijk tekenen!).

4. De determinant van het stelsel is

$$\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2 \ .$$

Het stelsel is dus altijd oplosbaar als $a \neq b$. Men vindt dan (door vegen of met de regel van Cramer)

$$x = \frac{b-1}{b-a} \ , \quad y = 0 \ , \quad z = \frac{a-1}{a-b} \ .$$

Het geval a = b moet apart worden bekeken:

$$x + ay + z = 1$$
$$ax + y + az = 1 ,$$

of equivalent daarmee

$$x + ay + z = 1$$
$$(1-a^2)y = 1-a .$$

Dit is strijdig als a = -1. Bij a = 1 blijft slechts over $x+y+z = 1$, of als we $y = \lambda$ en $z = \mu$ stellen

$$\underline{x} = (1,0,0) + \lambda(-1,1,0) + \mu(-1,0,1) .$$

Bij alle overige a volgt $y = 1/(1+a)$, $x+z = 1/(1+a)$ dus

$$\underline{x} = (\frac{1}{1+a} , \frac{1}{1+a} , 0) + \nu(-1,0,1) .$$

Proeftentamen Wiskunde I op zaterdag 11 november 1967

1. a) Bereken $\lim\limits_{x\to 0} (\sin \frac{1}{x}) \log \frac{\arcsin x}{x}$.

   b) Differentieer $y = \arctan \frac{2x}{1-x^2}$.

2. a) Bepaal $\int \frac{2x \arctan x^2}{1+x^4}\,dx$.

   b) Bereken $\int_0^\infty \left(\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+4}{x+3}\right)dx$.

3. De functie f(x) is gedefinieerd als volgt:

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & x \leqslant 0 \\ \frac{x}{x-1} & 0 < x < 1 \\ \frac{-3x+1}{x} & x \geqslant 1 . \end{cases}$$

   a) Voor welke x is f(x) discontinu?
   b) Bepaal de asymptoten.
   c) Bepaal de extrema.
   d) Schets de grafiek.

4. Bepaal voor $x \geqslant 0$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x}{1+x^n} \arctan x .$$

Bereken vervolgens $\int_0^\infty f(x)\,dx$.

Oplossingen Proeftentamen november 1967

1. a) Als $x \neq 0$ geldt

$$- \left|\log \frac{\arcsin x}{x}\right| \leqslant \sin\frac{1}{x}\log\frac{\arcsin x}{x} \leqslant \left|\log\frac{\arcsin x}{x}\right| .$$

Omdat

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$$

en $\log x$ continu is voor $x = 1$, geldt

$$\lim_{x\to 0}\log\frac{\arcsin x}{x} = \log\left(\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\right) = \log 1 = 0 .$$

Met de insluitstelling volgt dan dat

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\log\frac{\arcsin x}{x} = 0 .$$

Opmerking: Mits men duidelijk maakt dat $\log\frac{\arcsin x}{x} > 0$, kan men de absoluut-strepen weglaten.

b) $$\frac{d}{dx}\left(\arctan\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\left(\frac{2-2x^2+4x^2}{(1-x^2)^2}\right) = \frac{2}{1+x^2} .$$

Opmerking: Voor $x = \pm 1$ is $\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ discontinu; voor $|x| < 1$ gelijk aan $2\arctan x$.

2. a) $$\int\frac{2x\arctan x^2}{1+x^4}\,dx = \int\frac{\arctan x^2\, d(x^2)}{1+x^4} =$$

$$= \int\arctan x^2\, d(\arctan x^2) = \tfrac{1}{2}\arctan^2 x^2 + C .$$

b) $$\int_0^\infty\left(\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+4}{x+3}\right)dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N\left(\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+4}{x+3}\right)dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_0^N\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx = \lim_{N\to\infty}\left[\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right|\right]_0^N =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\log\frac{N+1}{N+3}+\log 3\right) = \log 3 .$$

3. a) $f(x)$ is continu voor $-\infty < x < 0$, $0 < x < 1$ en $1 < x < \infty$. Bij $x = 0$ en $x = 1$ is discontinuïteit mogelijk.

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} xe^x = 0 \,,$$

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{x-1} = 0 \,,$$

$$f(0) = 0 \,,$$

m.a.w. $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Dus $f(x)$ is continu in $x = 0$.
Als $x \uparrow 1$ dan $f(x) \to -\infty$, dus $f(x)$ is discontinu in $x = 1$.

b) $f(x) \to -\infty$ als $x \uparrow 1$, dus de grafiek van $y = f(x)$ heeft een verticale asymptoot $x = 1$; dit is ook de enige verticale asymptoot omdat $f(x)$ voor alle $x \neq 1$ continu is.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{-3x+1}{x} = -3$; horizontale asymptoot $y = -3$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} xe^x = -\lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^t} = 0$; horizontale asymptoot $y = 0$.

c) $x < 0$.

$f'(x) = e^x(1+x)$; $f'(x) \to 1$ als $x \uparrow 0$; $f'(x) = 0$ voor $x = -1$.

$0 < x < 1$.

$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$; $f'(x) \to -1$ als $x \downarrow 0$.

$1 < x$.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f'(x) \to -1$ als $x \downarrow 1$.

		-1			0			$+1$	
$f'(x)$	neg	0	pos	$\to 1$	$-1 \leftarrow$	neg		$-1 \leftarrow$	neg
$f(x)$	neg	$-e^{-1}$	neg		0	neg	$\to -\infty$	$f(1) = -2$	neg

Aan de hand van dit overzicht kunnen we concluderen, dat $f(x)$ de volgende extrema heeft:
een lokaal minimum $-e^{-1}$ in $x = -1$,

een globaal maximum 0 in $x = 0$,
een lokaal maximum -2 in $x = 1$ (dit is niet een rand-maximum, want $f(x)$ is te weerszijden van $x = 1$ gedefinieerd; dat $f(x) \to -\infty$ als $x \uparrow 1$ doet niet terzake).

4. Voor $0 \leq x < 1$ geldt dat $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, dus

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x}{1+x^n} \arctan x = (1-x)\arctan x \,.$$

$f(1) = 0$.
Voor $1 < x$ geldt $\lim\limits_{n\to\infty} x^{-n} = 0$, dus

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x}{1+x^n} \arctan x = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{-n}(1-x)}{x^{-n}+1} \arctan x = 0 \,.$$

Samenvattend kunnen we schrijven

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)\arctan x & (0 \leq x \leq 1) \,, \\ 0 & (x \geq 1) \,. \end{cases}$$

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^N f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \lim_{N\to\infty} \int_1^N 0.dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x)\arctan x\, dx = \int_0^1 \arctan x\, d(x - \tfrac{1}{2}x^2) =$$

$$= \Big[(x-\tfrac{1}{2}x^2)\arctan x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x-\frac{1}{2}x^2}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \int_0^1 \left(-\tfrac{1}{2} + \frac{x}{1+x^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\Big[\log(1+x^2)\Big]_0^1 - \tfrac{1}{2}\Big[\arctan x\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2}(1 - \log 2) \,.$$

Examen/tentamen Wiskunde I op dinsdag 16 januari 1968

1. a) Bepaal de extrema en schets de grafiek van de functie $f(x)$ als

$$f(x) = (x^2 - 3x + 3)e^{1-|x|} \qquad (-\infty < x < +\infty) .$$

b) Bereken de limieten

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+5x+2} - x}{\sqrt{x^2+2x+1} - x} \quad \text{en} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+5x+2} - x}{\sqrt{x^2+2x+1} - x} .$$

2. a) Gegeven: $y = x + \arctan x$.
Leid een recurrente betrekking af tussen $y^{(n+1)}$, $y^{(n)}$ en $y^{(n-1)}$ voor $n \geq 3$.

b) Bepaal de oplossing van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} ax + 2y = 2+a \\ 3x + (a-1)y = 2+a \end{cases}$$

voor die reële waarden van a, waarvoor het stelsel oplosbaar is.

3. a) u en v zijn gedefinieerd als functies van x en y door

$$\begin{cases} v^2 = x^2 + y^2 \\ uv = x + y . \end{cases}$$

Bewijs:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0 .$$

b) Gegeven het oppervlak $S: z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ en de punten $P(0,0,-1)$ en $Q(1,1,0)$.
Bepaal de vergelijking van de raakvlakken aan S die P en Q beide bevatten.

4. Gegeven: $w = \frac{z-i}{z+i}$ (z complex).

a) Als het beeldpunt van z binnen het eerste kwadrant ligt, dan ligt het beeldpunt van w binnen de eenheidscirkel onder de reële as. Bewijs dit.

b) Welke baan moet het beeldpunt van z beschrijven opdat het beeldpunt van w rechtlijnig van 0 naar $-i$ loopt?

Oplossingen Tentamen 16 januari 1968

1\. a) $x \geq 0 \quad f(x) = (x^2 - 3x + 3)e^{1-x}$

$x \leq 0 \quad f(x) = (x^2 - 3x + 3)e^{1+x}$

$x > 0 \quad f'(x) = (-x^2 + 5x - 6)e^{1-x} = -(x-2)(x-3)e^{1-x}$

$x < 0 \quad f'(x) = (x^2 - x)e^{1+x} = x(x-1)e^{1+x}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{-1+x}} + \lim_{x\to\infty} \frac{-3x}{e^{-1+x}} + \lim_{x\to\infty} \frac{3}{e^{-1+x}} = 0 .$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2 + 3t + 3}{e^{-1+t}} = 0 .$$

x	$-\infty \leftarrow$				0				2			3			$\rightarrow +\infty$
f(x)	0 ←	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	→ 0
f'(x)		+	+	+	?	−	−	−	0	+	+	0	−	−	

max in $x = 0$: $f(0) = 3e$ globaal (want $3e > 3e^{-2}$)
min in $x = 2$: $f(2) = e^{-1}$ locaal (want bijv. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$)
max in $x = 3$: $f(3) = 3e^{-2}$ locaal.

Merk op: in $x = 0$ is f niet differentieerbaar (duidelijke hoek tekenen)

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\downarrow 0} e(x-3)e^{-x} + \lim_{x\downarrow 0} 3e\,\frac{e^{-x} - 1}{x} = -3e - 3e = -6e$$

$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\uparrow 0} e(x-3)e^{x} + \lim_{x\uparrow 0} 3e\,\frac{e^{x} - 1}{x} = -3e + 3e = 0 .$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 2} - x}{\sqrt{x^2 + 2x + 1} - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5x + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 5x + 2} + x)}{(x + 1 - x)(\sqrt{x^2 + 5x + 2} + x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x + 2}{\sqrt{x^2 + 5x + 2} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = \frac{5}{2} .$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 2} - x}{\sqrt{x^2 + 2x + 1} - x} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t^2 - 5t + 2} + t}{t - 1 + t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{5}{t} + \frac{2}{t^2}} + 1}{2 - \frac{1}{t}} = 1 .$$

2\. a) $y = x + \arctan x \qquad y' = 1 + \dfrac{1}{1 + x^2}$

$y'(1 + x^2) = 2 + x^2 \qquad (2 + x^2)^{(n)} = 0$ mits $n \geq 3$.

Differentieer met Leibniz n maal:

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + \binom{n}{1}2xy^{(n)} + \binom{n}{2}2y^{(n-1)} = 0$$

of

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0 \quad \text{voor } n \geqslant 3 .$$

b)
$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 2 & a+2 \\ 3 & a-1 & a+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 6-a^2+a & 3a+6-a^2-2a \\ 3 & a-1 & a+2 \end{array}\right)$$

$$-a^2 + a + 6 = -(a-3)(a+2) .$$

Mits $a \neq 3$ en $a \neq -2$ is het gegeven stelsel vergelijkingen equivalent met

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 3 & a-1 & a+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{x} = (1,1) .$$

Voor $a = 3$ staat er

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{x} = (\tfrac{5}{3}, 0) + \lambda(2,-3) .$$

Voor $a = -2$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{x} = \lambda(1,1) .$$

Opmerking: Het gegeven stelsel is niet equivalent met

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 2 & a+2 \\ 3a & a^2-a & a^2+2a \end{array}\right) .$$

3. a)
$$v^2 = x^2 + y^2$$
$$uv = x + y .$$

Differentieer naar x:

$$\left.\begin{array}{l} v\dfrac{\partial v}{\partial x} = x \\[2ex] v\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{v} - \frac{xu}{v^2} ;$$

differentieer naar y:

$$\left.\begin{array}{l} v\dfrac{\partial v}{\partial y} = y \\[2ex] v\dfrac{\partial u}{\partial y} + u\dfrac{\partial v}{\partial y} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{v} - \frac{yu}{v^2} .$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x+y}{v} - \frac{u(x^2+y^2)}{v} = u - u = 0 .$$

b) Vergelijking raakvlak aan S in het (op S gelegen) punt (x_0, y_0, z_0):

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)$$

of

$$z - z_0 = x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) \qquad (2z_0 = x_0^2 + y_0^2)$$

$$z + z_0 = x_0 x + y_0 y .$$

$$\left.\begin{array}{lll} P(0,0,-1) \text{ ligt in dit vlak:} & -1 + z_0 & = 0 \\ Q(1,1,0) \text{ ligt in dit vlak:} & 0 + z_0 & = x_0 + y_0 \\ (x_0, y_0, z_0) \text{ ligt op S} & 2z_0 & = x_0^2 + y_0^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} x_0 + y_0 & = 1 \\ 2x_0 y_0 & = -1 \\ (x_0 - y_0)^2 & = 3 . \end{array}$$

A
$$\left.\begin{array}{l} x_0 + y_0 = 1 \\ x_0 - y_0 = \sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_0 = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \\ y_0 = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \end{array}$$

Raakvlak: $\underline{z + 1 = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})x + \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3})y}$.

B
$$\left.\begin{array}{l} x_0 + y_0 = 1 \\ x_0 - y_0 = -\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_0 = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \\ y_0 = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \end{array}$$

Raakvlak: $\underline{z + 1 = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3})x + \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})y}$.

4. a) Meetkundig:

Het beeldpunt van z ligt <u>binnen</u> het 1e kwadrant (niet op reële of imaginaire as); dus

$$\arg(z - i) < \arg(z + i)$$

of

$$\arg w < 0 . \qquad (1)$$

Hiermede is nog niet bewezen dat $\text{Im } w < 0$. Daartoe moet ook zijn voldaan aan $\arg w > -\pi$. Dit is inderdaad het geval:

$$\left.\begin{array}{r} -\frac{\pi}{2} < \arg(z-i) < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \arg(z+i) < \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -\pi < \arg(z-i) - \arg(z+i) < \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ en } (2) \rightarrow -\pi < \arg w < 0 . \qquad (3)$$

Ook volgt uit het gegeven $|z+i| > |z-i|$, dus

$$\frac{|z-i|}{|z+i|} = |w| < 1 \,. \tag{4}$$

Met (3) en (4) is het gestelde bewezen.

Algebraïsch:

Met $z = x + iy$ $(x > 0,\ y > 0)$ volgt

$$\left.\begin{array}{l} w = \dfrac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} \cdot \dfrac{x-i(y+1)}{x-i(y+1)} = \dfrac{x^2+y^2-1-2xi}{x^2+(y+1)^2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x > 0 \end{array}\right\} \ \operatorname{Im} w < 0 \,.$$

$$\left.\begin{array}{l} |w| = \dfrac{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}} \\ \qquad\qquad y > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |w| < 1 \,.$$

b) Meetkundig:

Opdat $\arg w = -\frac{\pi}{2}$ dient het beeldpunt van z te liggen op de verzameling der punten van waaruit de beeldpunten van i en $-i$ onder een rechte hoek worden gezien; die verzameling is de eenheidscirkel. Dus $z = e^{i\varphi}$.

Bij $\varphi = \frac{\pi}{2}$ of $z = i$ hoort $w = 0$

Bij $\varphi = 0$ of $z = 1$ hoort $w = \dfrac{1-i}{1+i} = -\dfrac{2i}{2} = -i$.

Zoals i.v.m. a) duidelijk is, geldt: Als $z = e^{i\varphi}$ en φ neemt af van $\frac{\pi}{2}$ tot 0, dan beschrijft het beeldpunt van $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ de rechtlijnige baan van 0 naar $-i$.

Algebraïsch:

$$\left.\begin{array}{l} w = \dfrac{x^2+y^2-1-2xi}{x^2+(y+1)^2} \\ \operatorname{Re} w = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2-1 = 0 \ \text{ of } \ z = e^{i\varphi} \,.$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \ \text{ of } \ x = 0 \Rightarrow w = 0$$

$$\varphi = 0 \ \text{ of } \ x = 1,\ y = 0 \Rightarrow w = -i \,.$$

Voor φ dalend van $\frac{\pi}{2}$ naar 0 gaat $w = \dfrac{-2i\cos\varphi}{2\sin\varphi + 2}$ inderdaad rechtlijnig van 0 naar $-i$.

Examen/tentamen Wiskunde I op woensdag 5 juni 1968.

1. Bepaal de volgende limieten:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+3x)}{(x-\sqrt{x^2+1})\sin \pi x}$; c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+2x+10}-x)\sin x}{x}$.

2. Gegeven:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{1+e^{1/x}} & (x \neq 0) \\ \alpha & (x = 0) \end{cases}$$

f is continu.

Gevraagd:

a) Bereken α.

b) Bepaal de afgeleide voor $x \neq 0$.

c) Is $f(x)$ voor $x = 0$ differentieerbaar?

3. Gegeven $z = z(x,y)$. Door substitutie van $\begin{cases} x = \dfrac{1}{u \cos v} \\ y = \tan v \end{cases}$ kan men z opvatten als een functie van u en v. Druk zowel $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ als $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ uit in x en y en partiële afgeleiden van z naar x en y.

4. a) Bereken de oneigenlijke integralen

$$\int_0^\infty e^{-t} \cos at\, dt \quad \text{en} \quad \int_0^\infty e^{-t} \sin at\, dt \, .$$

b) Los op voor alle reële waarden van a:

$$\begin{cases} x + ay = (1+a^2)^{-1} \, , \\ ax + y = a(1+a^2)^{-1} \, . \end{cases}$$

5. a) Bepaal en schets in het complexe vlak de verzameling van de punten z waarvoor geldt:

$$|z+1| + |z-1| = 10 \, .$$

b) Bepaal en schets in het complexe vlak de verzameling van de punten z waarvoor geldt:

$$\begin{cases} 0 < \arg z < \pi/2 \,, \\ \arg(z+1) + \arg(z-1) = \pi/2 \,. \end{cases}$$

Oplossingen Tentamen 5 juni 1968

1. a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} 2\,\frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim_{y\to 0} 2\,\frac{e^{y}-1}{y} = 2\left(\frac{de^{y}}{dy}\right)_{y=0} = 2.e^{0} = 2 \,.$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x)}{(x-\sqrt{x^2+1})\sin \pi x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}} \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x)}{\sin \pi x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}} \lim_{x\to 0} \frac{\pi x}{\sin \pi x} \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x)-\log 1}{3x} \frac{3}{\pi} =$$

$$= -1.1.\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)-\log 1}{y} \frac{3}{\pi} = -\left(\frac{d\log(1+y)}{dy}\right)_{y=0} \frac{3}{\pi} = -\frac{3}{\pi} \,.$$

c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x+10}-x)\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x+10}-x) \,.$$

Volgens insluitingsstelling,

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad , \quad \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \,,$$

geldt: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Met behulp van de worteltruc tonen we aan:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x+10}-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+10}{\sqrt{x^2+2x+10}+x} = 1 \,,$$

zodat de gevraagde limiet 0 is.

2. a)

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{4x}{1+e^{1/x}} = \lim_{y\to\infty} \frac{4y^{-1}}{1+e^{y}} = \lim_{y\to\infty} \frac{4y^{-1}e^{-y}}{1+e^{-y}} = 0 \,.$$

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{4x}{1+e^{1/x}} = \lim_{y\to\infty} -\frac{4y^{-1}}{1+e^{-y}} = 0 \,.$$

Wil f continu zijn, dan moet $\alpha = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

b) Als $x \neq 0$, dan

$$f'(x) = \frac{4(1+e^{1/x}) - (e^{1/x} \cdot - \frac{1}{x^2})4x}{(1+e^{1/x})^2} = \frac{4x + 4e^{1/x}(x+1)}{x(1+e^{1/x})^2} .$$

c) $$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{4}{1+e^{1/x}} = \lim_{y \to \infty} \frac{4}{1+e^{y}} = \lim_{y \to \infty} \frac{4e^{-y}}{1+e^{-y}} = 0 .$$

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{4}{1+e^{1/x}} = \lim_{y \to \infty} \frac{4}{1+e^{-y}} = 4 .$$

Omdat $\lim_{x \uparrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ is $f(x)$ voor $x = 0$ niet differentieerbaar.

3. $z = z\{x(u,v), y(u,v)\}$, $x = \frac{1}{u \cos v}$, $y = \tan v$.

z hangt af van u en v via x en y: $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$.

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\sin v}{u \cos^2 v} = \frac{\tan v}{u \cos v} = xy , \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{\cos^2 v} = \tan^2 v + 1 = y^2 + 1 .$$

Dus

$$\frac{\partial z}{\partial v} = xy \frac{\partial z}{\partial x} + (y^2+1)\frac{\partial z}{\partial y} .$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(xy \frac{\partial z}{\partial x} + (y^2+1)\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial x}{\partial v} y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) +$$

$$+ 2y \frac{\partial y \partial z}{\partial v \partial y} + (y^2+1)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial x}{\partial v} y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x} +$$

$$+ xy\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial v}\right) + 2y \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial y} + (y^2+1)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right) =$$

$$= xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x(y^2+1)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\left(xy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (y^2+1)\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) + 2y(y^2+1)\frac{\partial z}{\partial y} +$$

$$+ (y^2+1)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} xy + (y^2+1)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) .$$

Dit wordt, aangenomen dat $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

$$x^2y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy(y^2+1)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (y^2+1)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x(2y^2+1)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y(y^2+1)\frac{\partial z}{\partial y} .$$

4. a) $$\int_0^\infty e^{-t}\cos at\,dt = \mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-t(1-ia)}dt = \mathrm{Re}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-t(1-ia)}dt =$$

$$= \mathrm{Re}\lim_{p\to\infty}\left[-\frac{1}{1-ia}e^{-t(1-ia)}\right]_0^p = \mathrm{Re}\lim_{p\to\infty}\left[\frac{1}{1-ia}-\frac{1}{1-ia}e^{-p(1-ia)}\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\frac{1}{1-ia} = \mathrm{Re}\frac{1+ia}{1+a^2} = \frac{1}{1+a^2}$$

omdat

$$\lim_{p\to\infty}\left|\frac{1}{1-ia}e^{-p(1-ia)}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\lim_{p\to\infty}e^{-p} = 0 .$$

$$\int_0^\infty e^{-t}\sin at\,dt = \mathrm{Im}\int_0^\infty e^{-t(1-ia)}dt = \mathrm{Im}\frac{1+ia}{1+a^2} = \frac{a}{1+a^2} .$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & a & \dfrac{1}{1+a^2} \\ a & 1 & \dfrac{a}{1+a^2}\end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & \dfrac{1}{1+a^2} \\ 0 & 1-a^2 & 0\end{array}\right) \underset{a\neq\pm 1}{\overset{\text{als}}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & \dfrac{1}{1+a^2} \\ 0 & 1 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \dfrac{1}{1+a^2} \\ 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Oplossingen: als $a \neq \pm 1$: $\quad x = \left(\dfrac{1}{1+a^2}, 0\right)$;

als $a = +1$: $\quad x + y = \frac{1}{2}$, dus $\underline{x} = (\frac{1}{2},0) + \lambda(1,-1)$;

als $a = -1$: $\quad x - y = \frac{1}{2}$, dus $\underline{x} = (\frac{1}{2},0) + \mu(1,1)$.

5. a) $|z+1| + |z-1| = 10$. Noem $z = x+iy$.

$$|x+1+iy| + |x-1+iy| = \sqrt{(x+1)^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 10 .$$

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} = 10 - \sqrt{(x-1)^2+y^2} .$$

Dus

$$(x+1)^2 + y^2 = 100 + (x-1)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x-1)^2+y^2} .$$

Of

$$4x - 100 = -20\sqrt{(x-1)^2+y^2} , \quad x - 25 = -5\sqrt{(x-1)^2+y^2} .$$

$$x^2 - 50x + 625 = 25(x-1)^2 + 25y^2 .$$

De verzameling is dus de ellips: $24x^2 + 25y^2 = 600$; $(1,0)$ en $(-1,0)$ zijn de brandpunten; grote as en kleine as zijn resp. 5 en $\sqrt{24}$.

b) $\arg(z+1) + \arg(z-1) = \arg(z^2-1) = \frac{\pi}{2}$. Dus $\mathrm{Re}(z^2-1) = 0$ en $\mathrm{Im}(z^2-1) > 0$.

Stel $z = x+iy$, dan $z^2-1 = x^2-y^2-1+2ixy$. Dus $xy > 0$ en $x^2-y^2 = 1$.

Omdat $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ volgt $x > 0$ en $y > 0$.

Conclusie: de verzameling is het N.O. deel van de hyperbool $x^2-y^2 = 1$, zonder het punt $(1,0)$.

<u>Indeling van de stof over de tentamens</u>

Tentamen	limiet	functie	afgeleide	grafiek	onbep. $\int$	bep. $\int$	vervolg dif.rek.	vectorr. meetk.	lin. verg. determ.	complex
I 1.60				1a	1b		4a,b	2a	3a,b	
I 6.60	1a	4b		3b		3a	2b, 4a	1b	2a	
P 11.60	2	1b	1a	3	4a	4b				
I 1.61	1b		1a			1c	3b, 4b	2a,c	2b, 4a	
I 6.61	1	2				3	5		6	
P 11.61	1a,b 2b		2a	3		4a,b				
I 1.62	1c			1a		1b	4	3a,b	2b	
I 6.62	1a			2		1b	4, 5a		3	
P 11.62	1a	1b, 2		4	3a	3b				
I 1.63		1					2a,b	3b	3a	4a,b
I 6.63				1		1	2	3		4a,b
P 11.63		5	1	3		2, 4				
I 1.64		1					2	5	4	3
I 6.64	5			3		2	1		4	6
P 11.64	1	5	2a,b	3	4a	4b				
I 1.65	1a	1a				1b	2a,b	3a	3b	4a,b
I 6.65	2		1	4		3	5		6	7
P 11.65	1	3	2a,b	5	4a	4b				
I 1.66	1b					1a	4a,b	2a,b	3a	3b
I 6.66	1b		1a		2		3		4	5
P 11.66	4	5	1a	2	3	1b				
I 1.67		1a	1b		2a		3	2b		4a,b
I 6.67		3a	3b	3c	1a		2		4	1b
P 11.67	1a	4	1b	3	2a	2b, 4				
I 1.68	1b			1a			2a, 3a	3b	2b	4a,b
I 6.68	1a,b,c	2a	2b,c			4a	3		4b	5a,b