TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij de Colleges

Wiskunde I en II

September 1968

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij de colleges
Wiskunde I en II

SEPTEMBER 1968

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT. NR. 203
PRIJS f 2,--

ENKELE NOTITIES

bij

Vraagstukken bij de colleges Wiskunde I en II

Deze opgavenverzameling voor alle 1e jaarsstudenten is vanaf het ontstaan van de THE/TUE tot ca 1971 in gebruik geweest.Aanvankelijk als losse afleveringen. Later gebundeld.
De toegevoegde antwoorden bij de vraagstukken dateren van September 1969.

JdG, 5 Mei 2005.

Inhoudsbeschrijving Vraagstukken Wiskunde I:

Inhoudsbeschrijving Vraagstukken Wiskunde II:

Antwoorden bij de Vraagstukken

(Deze pagina dateert van 5 Mei 2005, JdG)

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Oefeningen Semester I

Aangeraden oefenstof Wiskunde I

Diktaat: Examen en tentamenopgaven (met oplossingen) I
Verkrijgbaar bij de pedel C.H.B.

Boekje : W.J.H. Salet. Vraagstukken over Analyse en Algebra I
Verkrijgbaar bij de boekhandel.

Verdere oefenstof vindt U in de centrale bibliotheek bijv.

Berman : A collection of problems on a course of mathematical analysis.

Smirnov: A course of higher mathematics Volume I
Elementary Calculus.

Het griekse alfabet:

hoofdletters	kl.letters	naam	hoofdletters	kl.letters	naam
A	α	alpha	N	ν	nu
B	β	bêta	Ξ	ξ	ksi
Γ	γ	gamma	O	o	omikron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ε	epsilon	P	ρ	rho
Z	ζ	zêta	Σ	σ	sigma
H	η	êta	T	τ	tau
Θ	θ	thêta	Y	υ	upsilon
I	ι	iôta	Φ	φ	phi
K	κ	kappa	X	χ	chi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	mu	Ω	ω	omega

Los de volgende ongelijkheden op.

1. $\frac{(x-2)(|x|-1)}{x+3} > 0$.

2. $|x^2-4x| \leqslant x$.

3. $|x-3| + 2 > \frac{x}{2} + 5$.

4. $|x+7| < |x| - 5$.

5. $|-x^2+1| \leqslant 2x + 2$.

6. $|x^2+1| \leqslant 2x$.

7. $x^2 + 9|x| - 10 < 0$.

8. Op de getallenrechte liggen de punten A, B en C resp. op de afstanden 1, 2 en 6 rechts van de oorsprong.
Voor welke punten P op de getallenrechte geldt: $PA + PB \leqslant PC$?

Bepaal de afgeleiden van de volgende functies en breng deze zo mogelijk in een eenvoudige vorm.

9. a) $f(x) = (x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 12x + 24$; b) $f(x) = \frac{2x\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2}}{5x^2}$.

10. a) $f(x) = \frac{\sin(x^3)\cos^3 x}{3}$; b) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

11. Bepaal de scherpe hoek tussen de krommen $y = \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$ en $y = x^3$ in het van de oorsprong verschillende snijpunt.

12. Bepaal de scherpe hoek waaronder de grafieken van $y = \sqrt[3]{x}$ en $y = x^2$ elkaar snijden in het van de oorsprong verschillende snijpunt.

13. Bepaal de scherpe hoek waaronder de krommen $y = x$ en $y = x^2 - x + 1$ elkaar snijden.

14. Bewijs, dat de totale oppervlakte O van een cilindrische blikken bus (deksel + bodem + zijwand) bij gegeven inhoud I minimaal is, als de hoogte gelijk is aan de diameter. Druk in dat geval O in I uit.

15. In het platte vlak liggen twee punten P en Q aan dezelfde kant van de rechte ℓ. Een deeltje beweegt zich rechtlijnig en met constante snelheid v van P naar een punt R op ℓ en vandaar op dezelfde wijze naar Q.
Bewijs, dat de tijd, die het deeltje nodig heeft om Q te bereiken, minimaal is, als R zo op ℓ ligt, dat de hoeken, die PR en RQ met de loodlijn in R op ℓ maken, gelijk zijn. (1e wet van Snellius.)

16. Uit een metalen plaatje van 16 bij 21 cm moet een bakje worden gemaakt op de volgende manier: Uit de 4 hoeken knipt men even grote vierkanten; de randen, die men zo overhoudt, zet men om; daarne soldeert men de naden dicht. Druk de inhoud van het bakje uit in de hoogte x. Hoe hoog moet de rand worden genomen om een maximale inhoud te krijgen?

17. Welke functies worden voorgesteld door

a) $\int \sin\frac{x}{b}\,dx$, $b \neq 0$;   b) $\int (x+1)^4\,dx$;   c) $\int \frac{\sin(\tan x)dx}{\cos^2 x}$;

d) $\int 5x^4 \cos(\pi + x^5)dx$;   e) $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2(x^3)}$.

18. Bereken de oppervlakte van het deel van het vlak, dat wordt begrensd door de krommen

$$y = (x-3)^2(x+1) \quad \text{en} \quad y = x+1 .$$

<u>Analoge vraagstukken</u>

Salet I, hoofdstuk I, § 4, nrs. 9, 10, 27, 28.
§ 6, nrs. 2, 3, 9, 10, 12, 14.

1. Bepaal a zo, dat $x^3 - ax^2 + x + 6$ deelbaar is door $x+1$.
   Ontbind daarna de vorm in factoren.

2. Bepaal a zo, dat $x+1$ een factor is van $x^3 - 3x^2 + (a+1)x - a + 1$.
   Ontbind daarna de veelterm in factoren.

3. Los op: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

4. Los op: $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$.

5. Bepaal de rest bij deling van $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 24$ door $x^2 + 5x + 6$ zonder de deling uit te voeren.

6. Bepaal de rest bij deling van $x^{10} - 17x^6 + 15x^2 + 3x + 6$ door $x^2 - x - 2$, zonder de deling uit te voeren.

7. Teken de grafiek van

$$f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 6 .$$

8. Teken de grafiek van

$$f(x) = x^3 - x^2 + 12 .$$

9. Teken de grafiek van

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 7 .$$

10. Teken in één figuur de grafieken van

$$x^3,\ x^{1/3},\ x^4 \text{ en } x^{1/4} \qquad \text{voor } 0 \leqslant x \leqslant \tfrac{3}{2} .$$

11. Bepaal (in radialen)
    a) $\arcsin(-\frac{1}{2}\sqrt{3})$;   b) $\arctan(\sqrt{3})$.

12. Bepaal (in radialen)
    a) $\arccos(-\frac{1}{2}\sqrt{3})$;   b) $\arctan(-\frac{1}{3}\sqrt{3})$.

13. Teken de grafiek van

$$\arctan(\tan x) , \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi , \quad x \neq \pm\frac{\pi}{2} .$$

14. Teken de grafiek van

$$\arccos(\cos x)\ , \quad -2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi\ .$$

15. Bereken: $\arctan 7 + \arcsin 4/5$.

16. Is er een getal y te vinden, waarvoor geldt: $\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin y$?
Zo ja, bepaal deze y.

17. Bewijs, dat voor $-1 < y$ geldt:

$$\arctan y + \arctan \frac{1-y}{1+y} = \frac{\pi}{4}\ .$$

18. Toon aan, dat $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ voor alle x.

Analoge vraagstukken

Salet I, hoofdstuk I, § 7, nrs. 12.3°, 14.6°, 15.3°.

1. Bewijs met de definitie van limiet, dat $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+4} = 0$.

2. Bewijs met de definitie van limiet, dat $\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2+1}{2n^2} = -\frac{1}{2}$.

Bepaal:

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+7}{n^3}$.

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{1968-2n+n^2}{1969-n+2n^2}$.

5. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n+(-1)^n}{n^2+4}$.

6. $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n^3)}{\sqrt{n}+1}$.

7. $\lim_{n\to\infty} \cos \pi n$; $\lim_{n\to\infty} \sin \pi n$.

8. $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+2n+4} - \sqrt{n^2-3n+7})$.

9. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, waarin $a_n = 2^n+1$.

10. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$.

11. $\lim_{x\to 0} \frac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$.

12. $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+4x-5}{x-1}$.

13. $\lim_{x\to 1} \frac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$.

14. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+4x-5}{x-1}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

16. $\lim\limits_{x\to \infty} \{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\}\sqrt{x}$.

17. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

18. $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+3x}+2+x)$.

19. $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+3x+2}+x)$.

20. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{4-x^2}-\sqrt{2+x^2}}{x-1}$.

21. Teken de grafiek van $f(x) = \lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{x^{n+1}}{x^n+2}$.

22. Teken de grafiek van

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}\sin\frac{\pi}{2}x + x^2}{x^{2n}+1} .$$

Bepaal:

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 5x}{x^2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\tan x \sin x - \cos 2x}{x^2}$.

25. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$.

26. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\arccos x}{x} - \frac{\pi}{2x}\right)$.

27. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\tan \frac{\pi}{4} x - \cot \frac{\pi}{4} x}{x - 1}$.

28. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx}{\tan x}$.

29. $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$.

30. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1 - 2 \sin \frac{\pi x}{6}}{1 - x}$.

<u>Analoge vraagstukken</u>

Salet I, hoofdstuk III, § 2, nrs. 14, 15, 17, 18, 21, 22, 24.
hoofdstuk IV, § 2, nrs. 1, 2, 4.1°, 7.1°, 8.1°, 9.1°, 10.2°, 11, 13, 14.

Overzicht van differentiaalquotiënten

$f(x)$	x^{α}	$\log\|x\|$	${}^{g}\log\|x\|$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$f'(x)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \log g}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	e^x	g^x	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$	$\operatorname{arccot} x$
$f'(x)$	e^x	$g^x \log g$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Bepaal de afgeleiden van de volgende functies en breng deze zo mogelijk in een eenvoudige vorm.

1. a) $f(x) = \log|x + \sqrt{x^2 - a^2}|$; b) $f(x) = bx\sqrt{a^2 - b^2x^2} + a^2 \arcsin \frac{b}{a} x \quad (a > 0)$.

2. a) $f(x) = \sqrt[x]{x}$; b) $f(x) = \frac{x^{87}}{87^x}$.

3. a) $f(x) = (1+x)^{1/x}$; b) $f(x) = 2^{x(\log x)^{-1}}$.

4. $f(x) = \frac{1}{2} e^x (x \sin x - x \cos x + \cos x)$.

5. a) $f(x) = \frac{2}{3} \arctan x + \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{1-x^2}$; b) $f(x) = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

6. a) $f(x) = \log|\cos x - \frac{1}{\cos x}|$; b) $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$.

7. a) $f(x) = \log|\tan \frac{x}{2}|$; b) $f(x) = \log \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$.

8. a) $f(x) = c \arccos \frac{c-x}{c} - \sqrt{2cx - x^2} \quad (c \neq 0)$; b) $f(x) = x^{\log x}$.

9. a) $f(x) = 10^{x^2-1}$; b) $f(x) = \arctan(\arcsin \sqrt{x})$.

10. De functie $f(x)$ is gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x && \text{voor } -\tfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0\,, \\ f(x) &= 3x - 5 && \text{voor } 0 < x \leqslant 2\,, \\ f(x) &= 1 && \text{voor } 2 < x \leqslant 3\,, \\ f(x) &= x^2 - 6x + 9 && \text{voor } 3 < x\,. \end{aligned}$$

Teken de grafiek van $f(x)$. Voor welke waarde(n) van x is deze functie discontinu?

11. Teken de grafiek van de functie $f(x)$, die als volgt is gedefinieerd:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 && \text{voor } -2 \leqslant x < 0\,, \\ f(x) &= \cos \frac{\pi x}{2} && \text{voor } 0 \leqslant x < 1\,, \\ f(x) &= 3x - 2 && \text{voor } 1 \leqslant x < 2\,, \\ f(x) &= x^2 && \text{voor } 2 \leqslant x\,. \end{aligned}$$

Voor welke waarde(n) van x is deze functie discontinu?

12. Gegeven: $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}$ voor $x \neq 1$ en $x \neq -2$.

Kan $f(x)$ in $x = 1$ en/of $x = -2$ continu worden voortgezet?

13. Voor $x \neq 0$ en $x \neq -2$ is $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x} + \dfrac{1}{2x + 4}$.

Is het mogelijk $f(x)$ in $x = 0$ en/of $x = -2$ continu voort te zetten?
Zo ja, door toekenning van welke functiewaarde(n)?

14. Voor welke waarde(n) van a is:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1} + ax^2}{|x|^n + 2}$$

continu voor alle x en voor welke vertoont de functie discontinuïteiten?
Bepaal deze discontinuïteiten.

15. Op het interval $-1 \leqslant x \leqslant 1$ is $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} - \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{(1 + x^2)^n}$.

Is $f(x)$ continu?
Bestaat er een x, waarvoor $f(x)$ maximaal is?

16. Gegeven:

$$f(x) = x^3 \cos \frac{1}{x} \quad \text{voor } x \neq 0 .$$
$$f(0) = 0 .$$

Bewijs, dat $f(x)$ differentieerbaar is in $x = 0$ en dat $f'(x)$ continu is voor $x = 0$.

17. Gegeven:

$$f(x) = \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\sin x}\right) \quad \text{voor } x \neq 0 .$$
$$f(0) = 0 .$$

Bewijs, dat $f(x)$ differentieerbaar is in $x = 0$ en dat $f'(x)$ continu is voor $x = 0$.

Analoge vraagstukken

Salet I, hoofdstuk IV, § 3, nrs. 1, 2, 5, 9.
hoofdstuk V, § 1.

In verband met de wenselijkheid de techniek van het differentiëren volkomen te beheersen verdient het aanbeveling zeer veel differentiatievraagstukken te maken.
Men vindt deze in grote getale in: Salet I, hoofdstuk V, § 1.

Bij het tekenen van een grafiek kan men aandacht schenken aan:

1) definitieverzameling van de functie,
2) nulpunten,
3) discontinuïteiten, in het bijzonder verticale asymptoten,
4) extrema,
5) gedrag voor grote x, in het bijzonder horizontale asymptoten,
6) gedrag in punten waarin f(x) niet differentieerbaar is.

Teken de grafiek van

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$, $x \geqslant 0$ (bepaal ook de raaklijn in $x = 0$).

2. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$ en $g(x) = \dfrac{e^x}{x^2+\frac{3}{4}}$ in één figuur.

3. $f(x) = x - \sqrt[4]{8|x|}$.

4. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ en $g(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ in één figuur. Bewijs, dat g(x) even is.

5. $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

6. $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-3}$.

7. $f(x) = \sin 2x + 3 \sin \frac{2}{3}x$, $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

8. $f(x) = \cos x \cos 2x$ op het interval $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

9. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{9}{1+\cos x}$.

10. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1} e^x$.

11. $f(x) = -x \log x$, $x > 0$.

12. $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

13. $\arccos \sqrt{1-x^2}$, $|x| \leqslant 1$.

14. Bepaal de extrema van de functie f(x) gedefinieerd in opgave 4.10.

15. Bepaal de extrema van de functie f(c) gedefinieerd in opgave 4.11.

Overzicht van grondformules

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C , \quad n \neq -1 ; \qquad \int e^x dx = e^x + C .$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C ; \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C .$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C ; \qquad \int \sin x \, dx = -\cos x + C .$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C ; \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C .$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C ; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C .$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C ; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C .$$

1. a) $\int x e^{cx^2} dx$; b) $\int \frac{dx}{ax+b}$; c) $\int e^{ax} dx$;

   d) $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$; e) $\int \frac{x\,dx}{(ax^2+1)^2}$;

   f) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$; g) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $(a > 0)$;

   h) $\int \frac{x\,dx}{\tan(x^2)}$; i) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$.

2. a) $\int_0^{\pi/2} e^{\sin t \cos t} \cos 2t \, dt$; b) $\int_0^1 \arcsin x \, dx$.

3. a) $\int_0^1 \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx$; b) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx$.

4. a) $\int_1^e \log x\,dx$; b) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)dx$.

5. $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$; b) $\int_{1/e}^{e} \frac{dx}{x(\log^2 x+1)}$.

6. a) $\int_0^{\infty} e^{x-e^x}dx$; b) $\int_0^{\infty} (\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+a})dx$, $a > 0$.

7. a) $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$; b) $\int_0^{\infty} x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}dx$.

8. $\int_0^{\pi/2} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x})dx$.

9. $\int_0^{\pi/2} (\frac{1}{x} - \cot x)dx$.

10. Schets de figuur ingesloten door de krommen $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ en $y = \frac{x^2}{2a}$ en bereken de oppervlakte ervan ($a > 0$).

11. $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \arcsin x\,dx$.

12. $\int_1^{e^2} x\log^3 x\,dx$.

<u>Analoge vraagstukken</u>

Salet I, hoofdstuk VI, § 1, nrs. 5, 13, 18, 22, 28, 32, 49, 51, 66, 78.
§ 2, nrs. 12, 21.
§ 7, nrs. 25, 32, 41.
§ 8, nrs. 1, 3, 5.

1. Bewijs door volledige inductie, dat

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

en $$1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

2. Bewijs door volledige inductie, dat

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$$

en $$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2) =$$
$$= n(n+1)(n+2)(n+3)/4.$$

3. Druk de tweede afgeleide van $y = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ uit in $\sin x$.
Toon aan, dat $y^{(4)} = 81y$.

4. Gegeven: $y = \log (ae^x + be^{-x})$, a en b constant.
Bereken: $(y')^2 + y''$.

5. Bepaal de n-de afgeleide van $y = \dfrac{4x^2 + 2x + 1}{2x + 1}$.

6. Bepaal de n-de afgeleide van $y = \dfrac{6x^2 + 5x + 1}{3x - 2}$.

7. Toon aan, dat de n-de afgeleide van $\dfrac{1}{1 - x^2}$ is:

$$\frac{1}{2} n! \{(1-x)^{-n-1} - (-1-x)^{-n-1}\}.$$

8. Gegeven is: $y = \log (x + \sqrt{x^2+1})$.
Leid een recurrente betrekking af tussen $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$ en $y^{(n-2)}$ voor $n \geq 2$.

9. Gegeven $y = \arctan x$. Toon aan $(1+x^2)y' = 1$.
Leid daaruit een recurrente betrekking af voor $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$ $(n \geq 2)$.

10. Bepaal het buigpunt van $y = \arccos x$ en de buigpunten van $y = e^{-x^2/2}$.

11. Teken de grafiek van $f(x) = e^{-x} \sin x$ in het interval $0 \leq x \leq \pi$ en bepaal eventuele buigpunten.

12. Een cirkel met middelpunt M en straal 2 rolt over de x-as.
   a) Geef een parametervoorstelling van de kromme beschreven door het punt dat oorspronkelijk midden tussen M en O lag (dus in $(0,1)$).
   b) Bepaal van deze kromme de buigpunten.

13. Een kromme is in parametervoorstelling gegeven door

$$x = a \cos \varphi;\ y = b \sin \varphi;\ a > b > 0.$$

Gevraagd worden de punten waarvan de afstand tot O extreem is.

14. Teken de kromme die in poolcoördinaten gegeven wordt door $r^2 = 4\varphi$. Bepaal het snijpunt met de eenheidscirkel en de scherpe hoek die cirkel en kromme in dat punt met elkaar maken.

15. Bepaal de vergelijking in x, y-coördinaten van de kromme die in poolcoördinaten gegeven wordt door $r = (1 - \cos \varphi)^{-1}$, $0 < \varphi < 2\pi$. Druk de hoek tussen voerstraal en raaklijn van deze kromme uit in φ.

<u>Analoge vraagstukken</u>

Salet I, hoofdstuk I, § 1, nr. 7.
§ 2, nr. 7.
hoofdstuk V, § 2, nrs. 3, 9, 14, 20.

1. Gegeven: $z = \frac{2x}{1+y}$, $y \neq -1$.

   a) Bewijs dat $\lim\limits_{x \to 0} z$ bestaat als $y = px - 1$, voor elke constante $p \neq 0$.

   b) Kan $z = \frac{2x}{1+y}$ in $(0,-1)$ continu voortgezet worden?

2. $f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$ voor $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

   Bewijs dat $f(x,y)$ continu is in $(0,0)$.

3. Gegeven: $f(x,y) = 0$ voor $x \neq 0$ en $y \neq 0$;
   $f(x,0) = x \sin \frac{1}{x}$ voor $x \neq 0$;
   $f(0,y) = y$.

   a) Is $f(x,y)$ continu in $(0,0)$?

   b) Bestaan de partiële afgeleiden van $f(x,y)$ in $(0,0)$?

4. Bepaal de partiële afgeleiden van

   a) $z = \arctan \frac{x}{y}$; b) $z = (x+y)^{x-2y}$.

5. Bepaal de partiële afgeleiden van

   a) $z = x^y$; b) $z = xye^{x+2y}$.

6. $z = e^y \arcsin(x-y)$. Toon aan dat $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

7. Gegeven: $z = \frac{x}{x^2+y^2}$.

   Bewijs: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -z$.

8. $z = x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}$. Bewijs dat $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

9. Gegeven $z = f(\frac{x}{y})$. Toon aan: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

10. Bepaal de (totale) differentiaal van de functie

$$f(x,y) = \log \tan \frac{x}{y} \text{ in het punt } (\tfrac{\pi}{8}, \tfrac{1}{2}).$$

11. Bepaal de (totale) differentiaal van de functie $f(x,y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ in het punt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

12. Bepaal de vergelijking van het raakvlak in het punt (1,2,2) aan het oppervlak $z = \sqrt[3]{12-xy^2}$.

13. Bewijs dat het raakvlak in het punt (-2,1,-13) aan het oppervlak $z = 15x + 4y^2x^2 + 3y^2 + xy^4$ evenwijdig is aan de x-as.

14. Gegeven is $z = \sin x \sin y$ voor $0 \leq x < \pi$; $0 \leq y < \pi$.
    a) Bepaal de vergelijking van het raakvlak in het punt (x_0, y_0, z_0).
    b) Bepaal (x_0, y_0, z_0) zo dat het raakvlak evenwijdig is aan het xy-vlak.

15. Gegeven: $z = x^2 - 6xy + 5y^2 + 2x + 2y$.
    a) Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan dit oppervlak in het punt (x_0, y_0, z_0).
    b) Bepaal (x_0, y_0, z_0) zo dat dit raakvlak evenwijdig is aan het xy-vlak.

16. Gegeven is: $y^3 = 6x^2 + 2$. Hierdoor is y als functie van x vastgelegd. Bepaal van deze functie het extreem en de buigpunten; teken ook de grafiek.

17. Gegeven is: $y^3 + 3x^2 - 6xy = 0$.
    Bepaal de punten op de kromme waar
    1) de raaklijn evenwijdig is aan de x-as;
    2) de raaklijn evenwijdig is aan de y-as.
    N.B. Het punt (0,0) wordt buiten beschouwing gelaten.

18. Gegeven is $\sqrt{x^2 - y^2} = \arcsin \frac{y}{x}$. Bereken $\frac{dy}{dx}$ in de snijpunten van de kromme met de rechte $y = \frac{1}{2}x$.

1. Gegeven: $z = xe^{xy}$, $x = \log t$, $y = \sin t$. Bepaal $\frac{dz}{dt}$.

2. Gegeven: $z = x \arcsin(x^2 + y^2)$, $x = e^t$, $y = \tan t$. Bepaal $\frac{dz}{dt}$.

3. Gegeven: $z = x^y$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Druk $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$ en $\frac{\partial z}{\partial r}$ uit in x en y.

4. u is een functie van $x = \frac{\cos \varphi}{r}$ en $y = \frac{\sin \varphi}{r}$. Druk $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ uit in x en y en de partiële afgeleiden van u naar x en naar y.

5. $x = \cos u \sin v$
   $y = \sin u \cos v$
   $z = 2u + 3v$

   Beschouw z als functie van x en y en druk $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ uit in u en v.

6. Gegeven: $u = \log\{(x-a)^2 + (y-b)^2\}$.

   Toon aan dat $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

7. Gegeven: $u = \{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\}^{-\frac{1}{2}}$.

   Toon aan dat $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

8. Door $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ en $x + y + z = 1$ zijn y en z als functies van x gegeven; druk $\frac{dy}{dx}$ uit in x en y, $\frac{dz}{dx}$ in x en z.

9. Gegeven: $x + y + z = 1$; $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Beschouw x als onafhankelijk veranderlijke en bereken $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ en $\frac{d^2z}{dx^2}$ voor $(x,y,z) = (4,-3,0)$.

10. Gegeven is $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{27} = 1$. Beschouw z als functie van x en y. Bepaal $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ en daarna de vergelijking van het raakvlak in het punt $(-2,1,-3)$.

11. Door $ze^x = te^y$ en $-2x + 2y + z + 2t = 3$ zijn z en t gegeven als functies van x en y, Bepaal in $(x,y) = (0,0)$ de waarde van $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$ en $\frac{\partial t}{\partial y}$.

12. Op het oppervlak $x^3 - 2x^2y - 3z + 4y = 0$ ligt het punt (1,1,1).
Bepaal in dat punt $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

13. Gegeven: $x + y + z + u = 5$; $xyzu = 2$.
Beschouw x en y als onafhankelijk veranderlijken en bepaal $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ in het punt (1,1,1,2).

14. Gegeven: $e^{xy} - z^2 - \arctan xy = 0$.
Bepaal $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ in het punt (0,0,-1).

15. Gegeven: $xu + yz = 2$; $xz + yu = 3$.
Beschouw z en u als functies van x en y en bepaal $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ in het punt (0,1,2,3).

16. Gegeven: $xy + zt = 3$; $x + y + z + t = 5$.
Beschouw x en y als onafhankelijk veranderlijken en bepaal $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ in het punt $(x,y,z,t) = (1,1,2,1)$.

17. Gegeven: $xy + xz + xt + yz + yt + zt = 0$; $x + y^4 + z + t = 4$.
Beschouw x en y als onafhanelijk veranderlijken en druk $\frac{\partial t}{\partial x}$ uit in x, y, z en t.

18. Gegeven: $xy + y^2 = 2z + z^2$. Beschouw x en y als de onafhankelijk veranderlijken en druk $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ uit in x en y.

19. Gegeven: $z = f(x,y)$. Verder zij $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.
Druk $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ uit in z, u, v en de partiële afgeleiden van z naar u en v.

20. Gegeven: $z = f(u,v)$ en $x = uv$, $y = u + \frac{1}{v}$. Druk $y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ uit in u, v en de partiële afgeleiden van z naar u en v.

21. Gegeven: $z = f(u,v)$; $x = \log \sqrt{u^2 + v^2}$; $y = \arctan \frac{u}{v}$.
Druk $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ uit in u, v en de partiële afgeleiden van 1e en 2e orde van z naar u en v.

22. Gegeven: $x = a\,\frac{uv+1}{u+v}$, $y = b\,\frac{u-v}{u+v}$, $z = c\,\frac{uv-1}{u+v}$, $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

Door hieruit u en v geëlimineerd te denken, kan men z als functie van x en y beschouwen: $z = f(x,y)$. Druk de partiële afgeleiden van de 1e orde van z naar x en naar y uit in u en v (pas III.17G. toe) en druk daarna $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ uit in x, y en z.

23. Gegeven: y is een functie van x. Men voert nieuwe veranderlijken z en t in door de betrekkingen:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$$
$$x + y + z + t = 0 .$$

Druk $\frac{dy}{dx}$ uit in $\frac{dz}{dt}$, x, y, z en t.

Antwoord: $\frac{dy}{dx} = \frac{(t-x) + \frac{dz}{dt}(z-x)}{(y-t) + \frac{dz}{dt}(y-z)}$.

1. Op de zijde AB van Δ OAB ligt een punt P tussen A en B zo, dat AP : PB = $\lambda : \mu$. Druk de vector $\underline{OP}$ met behulp van λ en μ uit in de vectoren $\underline{OA}$ en $\underline{OB}$.

2. Bij het parallelogram OABC (OB en AC diagonalen) wordt BC met zichzelf verlengd tot BD. Druk $\underline{OD}$ uit in $\underline{OA}$ en $\underline{OB}$.

3. Ligt het punt $A(3,-2\sqrt{2})$ op de rechte $\underline{x} = (1,\sqrt{2}) + \lambda(-\sqrt{2},3)$?
Bepaal de coördinaten van de snijpunten van deze rechte met de assen.

4. Bewijs dat het punt A(3,4) ligt op de rechte $\underline{x} = (1,5) + \lambda(2,-1)$.
In welke punten snijdt deze rechte de assen?

5. Bepaal het snijpunt van de rechten $\underline{x} = (2,1) + \lambda(1,3)$ en $\underline{x} = (0,3) + \mu(1,1)$.

6. Bepaal het snijpunt van de rechten $\underline{x} = (9,0) + \lambda(7,8)$ en $\underline{x} = (0,8) + \mu(8,9)$.

7. Geef een parametervoorstelling van de rechte, die de volgende vergelijking heeft: $4x + 3y - 2 = 0$.

8. Geef een parametervoorstelling van de rechte, die de volgende vergelijking heeft: $3x + 4y - 5 = 0$.

9. Geef een parametervoorstelling van de rechte door A(-1,1,4) en B(1,2,3).
Waar snijdt deze rechte het XY-vlak?

10. Geef een parametervoorstelling van de rechte door A(1,2,3) en B(2,4,3).
Bepaal het snijpunt met het XZ-vlak.

11. Geef een parametervoorstelling van het vlak α, waarvan de vergelijking luidt: $2x + 3y + 4z = 7$.

12. Geef een parametervoorstelling van het vlak α, dat gaat door het punt A = (1,2,1) en evenwijdig is aan de rechten $\underline{x} = (-6,2,0) + \lambda(1,1,1)$ en $\underline{x} = (5,1,3) + \mu(6,2,1)$.

13. Bepaal een parametervoorstelling van het vlak door O en de rechte $\underline{x} = (1,-1,0) + \lambda(2,1,1)$.

14. Geef een parametervoorstelling van het vlak door A(0,1,1) en de rechte $\underline{x} = (1,2,1) + \lambda(2,1,2)$. Bepaal ook de vergelijking van dit vlak.

15. Bepaal het snijpunt van de rechte l, die door de punten A(1,2,3) en B(4,5,-3) gaat, met het vlak, dat wordt gegeven door de vergelijking $2x - y + 3z = 4$.

16. Bepaal het snijpunt van de lijn door A(1,0,-1) en B(2,3,4) met het vlak $\underline{x} = (1,0,3) + \lambda(1,4,5) + \mu(1,3,3)$.

17. Gegeven het punt A(1,1,2) en de lijn m, voorgesteld door $\underline{x} = (0,0,1) + \lambda(1,0,0)$. Bepaal een parametervoorstelling van de lijn ℓ door A, die m en de Y-as snijdt.

18. Toon aan dat elk der beide volgende drietallen punten op één rechte liggen:

a) A(6,1,-3), B(0,-2,3) en C(10,3,-7);

b) A(5,3,4), B(8,5,2) en C(2,1,6).

19. Schrijf $\underline{v}$ als lineaire combinatie van $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$.
$\underline{v} = (6,17,16)$; $\underline{a} = (1,4,5)$; $\underline{b} = (2,5,4)$; $\underline{c} = (1,2,0)$.

20. Schrijf $\underline{v} = (-1,4,7)$ als lineaire combinatie van $\underline{a} = (1,-2,3)$, $\underline{b} = (4,-3,1)$, $\underline{c} = (3,-2,5)$.

21. Schrijf $\underline{v} = (5,-2,3)$ als lineaire combinatie van $\underline{a} = (1,2,3)$, $\underline{b} = (2,1,1)$, $\underline{c} = (1,0,1)$.

22. Bewijs dat elk der volgende stelsels vectoren onafhankelijk is:

1) (1,3); (2,5).
2) (1,2,3); (1,1,4); (1,3,5).
3) (1,1,1,0); (1,2,1,2); (0,1,3,-1); (1,-1,2,1).
4) (1,2,3,1,2); (1,1,4,3,2); (1,3,5,1,3).

23. Bewijs dat elk der volgende stelsels vectoren afhankelijk is:

1) $\underline{a} = (2,1,5)$; $\underline{b} = (3,2,1)$; $\underline{c} = (1,0,9)$; $\underline{d} = (1,2,17)$.
2) $\underline{a} = (3,1,2,-1)$; $\underline{b} = (2,-1,1,1)$; $\underline{c} = (5,5,4,-5)$; $\underline{d} = (-2,-9,-3,9)$.
3) $\underline{a} = (1,1,1)$; $\underline{b} = (1,2,4)$; $\underline{c} = (1,3,7)$.

24. Onderzoek of de volgende stelsels vectoren afhankelijk of onafhankelijk zijn:

1) $\underline{a} = (1,2,3)$; $\underline{b} = (3,2,1)$; $\underline{c} = (-3,2,7)$.
2) $\underline{a} = (1,-1,4,2)$; $\underline{b} = (2,0,2,1)$; $\underline{c} = (7,-3,16,8)$.
3) $\underline{a} = (4,5,2)$; $\underline{b} = (1,8,2)$; $\underline{c} = (14,4,1)$.

25. Onderzoek of de volgende stelsels vectoren afhankelijk of onafhankelijk zijn:

1) $\underline{a} = (2,3,4)$; $\underline{b} = (5,2,1)$; $\underline{c} = (-4,5,10)$.
2) $\underline{a} = (4,-3,5)$; $\underline{b} = (2,-4,7)$; $\underline{c} = (10,5,3)$.
3) $\underline{a} = (2,4,-1,-1)$; $\underline{b} = (1,5,1,-2)$; $\underline{c} = (-1,3,3,-2)$.

26. Onderzoek of de eindpunten van de volgende viertallen vectoren in één vlak liggen:

1) (3,2,18) , (1,-2,4), (5,0,2) , en (2,-3,-4).

2) (-4,-2,3), (1,3,-2), (0,3,-2), en (5,-2,0) .

27. Toon aan dat het vlak $\underline{x} = (-3,4,-1) + \lambda(1,2,-1) + \mu(3,1,-1)$ door 0 gaat.

28. Bewijs dat het vlak $\underline{x} = (0,2,5) + \lambda(1,5,-2) + \mu(1,7,3)$ door de oorsprong gaat.

29. Bewijs dat de rechte $\underline{x} = (0,7,6) + \lambda(-1,1,1)$ evenwijdig is aan het vlak $\underline{x} = (6,1,2) + \alpha(1,2,3) + \beta(5,1,3)$.

30. Bewijs dat de rechte $\underline{x} = (1,0,20) + \lambda(2,1,3)$ evenwijdig is aan het vlak U: $x + y - z = 1$.

31. Bewijs dat de vlakken $\underline{x} = \lambda(1,2,4) + \mu(2,1,3)$ en $\underline{x} = (1,1,0) + \rho(-1,1,1) + \sigma(3,0,2)$ evenwijdig zijn.

32. Gegeven zijn de vectoren:

$\underline{a} = (1,3,0,3)$; $\underline{b} = (2,-1,-2,1)$; $\underline{c} = (0,7,2,5)$; $\underline{d} = (5,1,-4,5)$.

Onderzoek de afhankelijkheid van de volgende stelsels vectoren:

1) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$; 2) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{d}$; 3) $\underline{a}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$.

Bepaal verder een basis voor de deelruimte opgespannen door $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$.

33. Gegeven zijn de vectoren:

$\underline{a} = (1,2,3,-1)$; $\underline{b} = (2,3,4,0)$; $\underline{c} = (1,-1,2,1)$; $\underline{d} = (1,-4,1,3)$.

Onderzoek de afhankelijkheid van de volgende stelsels vectoren:

1) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$; 2) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{d}$; 3) $\underline{a}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$.

Bepaal verder een basis voor de deelruimte, opgespannen door $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$.

34. Gegeven zijn de vectoren: $\underline{a} = (8,0,-9,8)$, $\underline{b} = (12,-10,6,6)$, $\underline{c} = (4,7,-6,-8)$, $\underline{d} = (8,-7,3,6)$ en $\underline{e} = (0,-3,12,-10)$.

Bepaal de dimensie en een eenvoudige basis van de door $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ en $\underline{e}$ opgespannen deelruimte.

35. De vectoren $\underline{a} = (3,-2,3,1)$; $\underline{b} = (2,1,-2,-1)$; $\underline{c} = (1,1,2,3)$, spannen een vectorruimte U op.

a) Bepaal de dimensie van U.

b) Behoort $\underline{d} = (1,4,3,1)$ tot U ?

c) Behoort $\underline{e} = (-4,2,1,3)$ tot U ?

36. De vectoren $\underline{a} = (1,2,3,4)$, $\underline{b} = (2,-1,0,2)$ en $\underline{c} = (4,-3,-1,-1)$ spannen een vectorruimte U op.

a) Bepaal de dimensie van U.

b) Behoort $\underline{d} = (-4,1,-2,10)$ tot U ?

c) Behoort $\underline{e} = (3,1,2,1)$ tot U ?

37. Gegeven zijn de vectoren: $\underline{a} = (3,-1,4,7)$, $\underline{b} = (1,-3,2,5)$, $\underline{c} = (2,6,1,-2)$, $\underline{d} = (5,3,2,-1)$ en $\underline{e} = (0,4,-1,-4)$.

Bepaal van elk der volgende vectorruimten de dimensie en een basis.

1) U_1 opgespannen door $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$.

2) U_2 opgespannen door $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{d}$.

3) U_3 opgespannen door $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{e}$.

Geef ook een voorbeeld van een vector die niet in U_2 ligt.

Geef van elk der volgende stelsels homogene vergelijkingen de oplossing in vectorvoorstelling en controleer telkens de relatie:
dim. oplossingsruimte + dim. ruimte der rijvectoren = aantal onbekenden.

1. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 7x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 7x_4 &= 0 \\ -5x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= 0. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0. \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 13x_1 + 14x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -7x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 11x_1 + 13x_2 - 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 - 9x_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Los de volgende stelsels inhomogene vergelijkingen op.

10. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 6x_1 - x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 7x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -4 \\ 2x_1 - x_2 \phantom{{}+ 3x_3} + x_4 &= 3\,. \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 \phantom{{}- 3x_2} - x_3 + 7x_4 &= 3\,. \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 3\,. \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+ 5x_2} + 2x_3 &= 1 \\ - x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 &= 7\,. \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 \phantom{{}+ 2x_3 + 3x_4} - 8x_5 &= 3 \\ - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 0\,. \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} x + 2y \phantom{{}- 2z} &= 0 \\ x + 4y - 2z &= 4 \\ 2x \phantom{{}+ 4y} + 4z &= -8 \\ 3x \phantom{{}+ 4y} + 6z &= -12 \\ -2x - 8y + 4z &= -8\,. \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 4x_3 &= 2 \\ x_2 + ax_3 &= -1 . \end{aligned}$$

Voor welke waarde(n) van a heeft dit stelsel één of meer oplossingen? Bepaal deze oplossingen.

18. $$\begin{aligned} x + y &= 2a + 2 \\ 2ax + y &= 3 \\ (3a - 1)x + ay &= 7a - 2 . \end{aligned}$$

Voor welke waarde(n) van a heeft dit stelsel een of meer oplossingen? Bepaal deze oplossingen.

19. $$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= a + 2 \\ x - y + az &= (a + 1)^2 \\ ax + y + z &= a + 1 \end{aligned}$$

Voor welke waarde(n) van a heeft dit stelsel een of meer oplossingen? Bepaal deze oplossingen.

20. Schrijf een matrix op van 3 rijen en 4 kolommen, die
1) rang 0 heeft;
2) rang 1 heeft.

21. Bepaal de rang van de beide volgende matrices:

1) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -3 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} .$$

22. Bepaal de rang van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} .$$

23. Bepaal de rang van de volgende matrices:

1) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

24. De rang van de volgende matrix is 2, bepaal a.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ -1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & a \end{pmatrix}.$$

25.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & a \\ 5 & b & 13 \end{pmatrix}$$

Bepaal a en b zo, dat de rang van deze matrix 2 is.

26. Voor welke waarde a heeft de volgende matrix de rang 2 ?

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

27. Van een stelsel homogene vergelijkingen is de coëfficiëntenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2a-2 \\ 2a & 1 & -3 \\ 3a-1 & a & -7a+2 \end{pmatrix}.$$

Voor welke a is de dimensie van de oplossingsruimte 0 resp. 1, 2, 3 ?

28. Gegeven: $x_i = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} y_j$; $y_j = \sum_{k=1}^{2} a_{kj} z_k$, waarin $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bereken de matrix $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ uit de relatie $x_i = \sum_{k=1}^{2} c_{ik} z_k$.

1. Bereken:

a) $\begin{vmatrix} 0 & -718 & +29 \\ 718 & 0 & 384 \\ -29 & -384 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 8 \\ 9 & 11 & 5 \\ 8 & 8 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 7 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

2. Bereken de volgende determinanten

a) $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 11 & 3 & -4 & 5 \\ -13 & -4 & 5 & -6 \\ 18 & 5 & -5 & 7 \\ 8 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

3. Bereken:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 6 & 2 \\ 7 & 10 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

4. Bereken de volgende determinanten

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

5. Los x op uit: $\begin{vmatrix} 2 & x-2 & 4 \\ 1 & x-1 & 2 \\ 2 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = 0$.

6. Los x op uit: $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$.

7. a) Gegeven: A(2,1), B(4,2), C(3,5).
   Bepaal de oppervlakte van Δ ABC.
   b) Gegeven: P(1,2,3), Q(4,5,6), R(7,8,15).
   Bepaal de inhoud van het viervlak OPQR.

8. Bepaal de inhoud van het tetraeder ABCD.
   A(1,2,-1); B(-2,0,3); C(-3,4,-4); D(2,1,0).

9. Bepaal de inhoud van het tetraeder ABCD.
A(2,3,4); B(-2,4,8); C(1,1,5); D(0,2,6).

10. Bepaal de inhoud van het tetraeder ABCD.
A(1,6,7); B(3,9,11); C(4,8,2); D(2,1,8).

11. Los met behulp van de regel van Cramer y op uit:

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 6 \\ 3x - 2y + 7z &= 14 \\ x + 3y - 3z &= -4\,. \end{aligned}$$

12. Los met behulp van de regel van Cramer x op uit

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 2z &= 6 \\ 4x + 6y + 3z &= 6 \\ 2x + 3y + z &= 1\,. \end{aligned}$$

13. Los met de regel van Cramer x_3 op uit

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_3 &= 8\,. \end{aligned}$$

14. Onderzoek of de volgende vlakken door één punt gaan:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z - 6 &= 0 \\ x - y + 4z - 4 &= 0 \\ 7x + 5y - 3z - 9 &= 0 \\ -x + 7y - 9z + 4 &= 0\,. \end{aligned}$$

15. Onderzoek of de volgende vlakken door één punt gaan:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 5x + 3y + z - 8 &= 0 \\ 2x + 4y - 3z + 10 &= 0 \\ 6x + y + z + 5 &= 0\,. \end{aligned}$$

16. Onderzoek of de volgende vlakken door één punt gaan:

$$\begin{aligned} x + y + z - 1 &= 0 \\ 2x + 3y + 4z - 1 &= 0 \\ 4x + 2y + 3z + 6 &= 0 \\ 3x + 4y + 2z - 14 &= 0\,. \end{aligned}$$

17. Teken in het complexe vlak de beeldpunten van de getallen

$$z_1 = -3\,;\quad z_2 = 2i\,;\quad z_3 = 1+i\,;\quad z_4 = -\sqrt{3} - i$$

en schrijf deze getallen in de vorm $re^{i\varphi}$ $(-\pi \leqslant \varphi < \pi,\ r > 0)$.

18. $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = -2$. Teken de getallen z_1, z_2 en $z_1 + z_2$ in het complexe vlak. Schrijf elk van deze drie getallen in de vorm $re^{i\varphi}$ met $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, $r > 0$.

19. Teken de beeldpunten van de getallen

$$2e^{\frac{1}{6}\pi i}\ ;\quad \sqrt{2}\,e^{\frac{1}{4}\pi i}\ ;\quad 2\sqrt{3}\,e^{\frac{5}{6}\pi i}\ ;\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,e^{-\frac{3}{4}\pi i}$$

en schrijf deze getallen in de vorm $a + bi$ (a en b reëel).

20. $z_1 = \frac{2}{3}e^{\frac{3}{4}\pi i}$, $z_2 = 2e^{-\frac{11}{12}\pi i}$. Teken de getallen z_1, z_2, $z_1^{-1}z_2$ en $\overline{z_2}\,\overline{z_1}^{-1}$ in het complexe vlak. Schrijf de laatste twee getallen in de vorm $a + bi$.

21. Teken in het complexe vlak het beeldpunt van een getal z.
Construeer dan de beeldpunten van de getallen $z + 2$, $-2z$, $\frac{1}{z}$, $z - 2i$, iz, $\overline{z}$, $-i\overline{z}$.

22. Teken het beeldpunt van een complex getal z.
Construeer daarna de beeldpunten der getallen $z\,e^{-\frac{1}{2}\pi i}$, $3z\,e^{\frac{7}{6}\pi i}$, $z\,e^{\frac{2}{3}\pi i}$.

1. Geef in het complexe vlak aan waar de punten z liggen die voldoen aan de beide ongelijkheden

$$|z+1-i|^2 \leqslant 2 \quad \text{en} \quad \tfrac{1}{2}\pi \leqslant \arg z \leqslant \tfrac{3}{4}\pi \ .$$

2. Hetzelfde voor de punten z, die voldoen aan

$$\arg \frac{z+i}{z-1} = \frac{\pi}{2} \ .$$

3. Bepaal de meetkundige plaats van de beeldpunten der getallen z, die voldoen aan één der volgende voorwaarden:

a) $|z-3i| = |4+2i-z|$;

b) $\arg \dfrac{z-1}{z+1} = \dfrac{\pi}{2}$;

c) $\operatorname{Im} \dfrac{z-3}{z+2i} = 0$.

4. Waar liggen de punten z die voldoen aan

a) $\left|\dfrac{z\bar{z}}{(1-z)^2}\right| = 1$? b) $\dfrac{z\bar{z}}{(1-z)^2} = 1$?

5. z doorloopt de eenheidscirkel in positieve zin, te beginnen bij $z = -1$.

Welke baan beschrijft $w = 2e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot (z-i+2)$?

6. z is het complexe getal $e^{i\alpha}$, α reëel.

a) Toon aan, dat $w = \dfrac{z^2-z+1}{2z}$ reëel is.

b) Beschrijf nauwkeurig de baan, die het beeldpunt van w doorloopt, als arg z toeneemt van 0 tot 2π.

7. z doorloopt de eenheidscirkel. Welke baan beschrijft $w = \dfrac{z-i}{z+1}$?
Schrijf arg w en $|w|$ als functies van $\varphi = \arg z$ $(-\pi \leqslant \varphi < \pi)$.

8. Stel a is een complex getal, r en p reëel, r positief.
Laat zien dat de meetkundige plaats van de beeldpunten van de complexe getallen z die voldoen aan de vergelijking

$$(z+a)(\bar{z}+\bar{a}) = r^2$$

een cirkel is.
Leid de betrekking af waaraan p en a moeten voldoen opdat hetzelfde geldt voor de vergelijking $z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + p = 0$.

9. Los op: $(z-i)^4 = -1$ en teken de beeldpunten van de wortels van deze vergelijking.

10. Dezelfde vragen voor de vergelijking

$$z^{10} + z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0 .$$

11. Los op: $(z+2-i)^6 = i$ en teken de beeldpunten van de wortels van deze vergelijking.

12. Dezelfde vragen voor de vergelijking

$$z^{11} + z^{10} + \ldots + z^2 + z + 1 = 0 .$$

13. Schrijf de som $\sum_{m=k}^{p} \cos 2m\varphi$ met behulp van complexe getallen als een product.

14. Schrijf de som $\sum_{m=k}^{p} \sin 2m\varphi$ met behulp van complexe getallen als een product.

15. Bepaal $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{e^{i \tan x}}{\cos^2 x}\, dx$.

16. Bereken $\displaystyle\int_2^{\infty} \cos \pi x \, e^{-\pi x\sqrt{2}}\, dx$.

17. Bepaal $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-bx} \sin ax \, dx \quad (b > 0)$.

<u>Analoge vraagstukken</u>

Salet I, Hoofdstuk II, § 3 nrs. 1, 2, 6, 7, 8.
§ 4 nrs. 4, 6, 7.
§ 5 nrs. 4, 9, 11.

1. Gegeven is de differentiaalvergelijking:

$$xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0.$$

a) Toon aan dat $y = x^2 e^x$ voldoet.
b) Zoek nog een oplossing.
c) Schrijf nu de algemene oplossing op.

2. Gegeven is de differentiaalvergelijking:

$$x^2y'' - xy' + y = 0.$$

a) Toon aan dat $y = x \log x$ voldoet.
b) Zoek nog een oplossing.
c) Geef de algemene oplossing.
d) Bepaal de oplossing waarvoor geldt

$$y(1) = 1 \quad \text{en} \quad y'(1) = 2.$$

3. $y = f(x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$y'' + y = 2y'.$$

Verder is gegeven: $f(0) = 3$; $f'(0) = 1$.
Bepaal $f(x)$.

4. Los op: $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$

Bepaal alle reële oplossingen van

5. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$

6. $y^{(4)} - y' = 0.$

7. $y''' - 2y' + 4y = 0.$

8. $y' - y - x - 1 = 0.$

9. $y'' + 5y' + 6y = e^x.$

10. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = \sin x$.

11. $y'' + m^2y = a \cos mx + b \sin mx$, voor alle reële a, b en m.

12. $y^{(4)} - 2y'' + y = 24\,x\,e^x$.

13. $y'' - 4y' + 5y = \sin x$.

14. $y' - 4y = e^{4x} + e^{-4x}$.

15. $y'' - 3y' + 2y = x^2 e^{3x}$.

16. $y'' + y = x \sin x$.

17. a) In een bak van 60 L met een oplossing van de concentratie $x(t)$ voert men 1 L water per sec. toe en 1 L oplossing per sec. af. Laat $x(0) = c$; bepaal $x(t)$.
b) De bak wordt tevoren in twee delen van 30 L verdeeld door een schot met een opening (toevoer in het ene deel, afvoer uit het andere); de concentraties zijn er $y(t)$ en $z(t)$. Laat $y(0) = z(0) = c$; bepaal $y(t)$ en $z(t)$.

Analoge vraagstukken

Salet I, hoofdstuk IX, § 4, nrs. 1, 3-6.
§ 5, nrs. 1-16.
Salet II, hoofdstuk XIII, § 1, nrs. 1-11.

Bewijs met de definitie van convergentie van een reeks dat de reeks waarvan de algemene term in de volgende opgaven gegeven wordt, convergent is en bepaal de som.

1. $u_n = \int_n^{n+1} e^{-x}\, dx, \qquad n \geq 1.$

2. $u_n = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^3}, \qquad n \geq 1.$

3. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \cos\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right), \qquad n \geq 1.$

4. $u_n = \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}, \qquad n \geq 1.$

5. $u_n = (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}, \qquad n \geq 1.$

6. $u_n = \frac{1}{n(n+3)}, \qquad n \geq 1.$

Onderzoek met de vergelijkingsstelling of de volgende reeksen convergent of divergent zijn.

7. $1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{3}{2^5} + \dots .$

8. $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \dots$ met a_n geheel en $0 \leq a_n \leq 9$.

(Dit is een decimale breuk.)

9. $\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{1}{n+\frac{1}{n}} + \dots .$

10. $\frac{1}{2.1^2} + \frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{4.3^2} + \frac{1}{5.4^2} + \dots .$

Onderzoek met de vergelijkingsstelling of de volgende reeksen convergent of divergent zijn.

11. $(1+3) + (1+\frac{3}{2})^2 + (1+\frac{3}{3})^3 + (1+\frac{3}{4})^4 + \dots$.

12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{n(n^2-1)}}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^p}$ (voor elke p).

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\{2 + (-1)^n\}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1000}{(2n-1)^2}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{1}{n})$.

20. $\sum\limits_{n=1000}^{\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n}}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+3n+2}}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+1}{n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-100n^2+n}{n^4+n^3-8n^2+1}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2-n+1}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n})$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\log n}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} n \arctan \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \arctan \sqrt{n}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, e^{-n}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \cos \frac{1}{n}$ voor alle reële waarden van p.

Onderzoek met Cauchy/d'Alembert de convergentie van

32. $\sum_{n=1}^{\infty} n^p p^n$ voor de verschillende waarden van $p > 0$.

Onderzoek met Cauchy/d'Alembert de convergentie van

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$.

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{10^n}$.

35. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{100-n}$.

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n}$.

38. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 2n)e^{-n}$.

Onderzoek of de volgende reeksen convergent zijn en zo ja, of zij absoluut of relatief convergent zijn.

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{\sqrt{2n+1}}$.

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$.

41. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$.

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2} . (\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1})$.

43. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \pi n}{n}$.

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log\,(e^n + e^{-n})}$.

1. Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeksen

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^{2n}}{n!}$. c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n(n+1)}}{3^{2n^2+2n}}$.

2. Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeksen

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^{3n}}{n^n}$. c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n \sin n \frac{\pi}{4}$.

3. Bepaal van de volgende machtreeksen
   1) de convergentiestraal;
   2) het gedrag in de randpunten;
   3) de som voor die waarden van x waarvoor de reeks convergeert.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3)x^n$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}$.

4. Bepaal van de volgende machtreeksen
   1) de convergentiestraal;
   2) het gedrag in de randpunten;
   3) de som voor die waarden van x waarvoor de reeks convergeert (alleen in de gevallen b) en c)).

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!(n+2)}$.

5. Onderzoek de convergentie en bepaal de som van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^n \cos x}{n} .$$

6. Onderzoek voor welke x de volgende reeksen convergeren

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x}{x+1}\right)^{n-1}$. c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n(x-x^2)}}{\log(n+1)}$.

7. Onderzoek voor welke x de volgende reeksen convergeren

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(2+x)^{2n+1}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \arctan \frac{1}{n}$.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x+2}{x^2 \log n}$.

8. Bepaal van de volgende reeksen
   1) de convergentiestraal;
   2) het gedrag in de randpunten.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (3^n - e^n)x^n$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - n)x^n$

9. Bepaal van de volgende reeksen
   1) het convergentiegebied;
   2) het gedrag in de randpunten.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{n^2} x^n$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^n + 2^n} x^n$.

Analoge vraagstukken.

Salet I, Hoofdstuk VIII, § 3: 1, 4(1°, 2°, 5°),
5(1°, 3°, 6°),
6(1°, 3°),
7, 12.
§ 4: 1(2°, 4°), 6.

1. Geef met behulp van de standaardreeksen de reeksontwikkelingen tot aan de term met x^7 van de functies

a) $\dfrac{\sin x}{x(1+x^2)}$; b) $\log \cos x$.

2. Geef met behulp van de standaardreeksen de reeksontwikkelingen van de functies

a) $\dfrac{\cos x}{1+x^2}$ tot aan de term met x^7. b) $\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ tot aan de term met x^5.

3. Bepaal eveneens met behulp van de standaardreeksen de Taylorreeks van de functies

a) $\cos x$ rond $x = \frac{\pi}{3}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ rond $x = 2$.

4. Bepaal eveneens met behulp van de standaardreeksen de Taylorreeks van de functies

a) $\sqrt{x}$ rond $x = 1$; b) $\sin x$ rond $x = \frac{\pi}{4}$.

5. Bepaal met behulp van reeksontwikkelingen

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{\tan x - x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\log(1-x)}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x+x^2} - e^x - x^2}{x^3}$.

6. Bepaal met behulp van reeksontwikkelingen

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x) - x}{\cos x - 1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)(2x^2 - 1 + \cos 2x)}{6 \sin x - 6x + x^3}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log \dfrac{\arctan x}{x} + \dfrac{1}{3} x \sinh x}{x^4}$.

7. Onderzoek de volgende reeksen op convergentie

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cosh \frac{1}{n}\right); \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(2 + \frac{1}{n}\right) - \log 2 - \frac{1}{4n}\right).$$

8. Onderzoek de volgende reeksen op convergentie

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right); \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{1/n} - 1\right); \quad a > 1.$$

9. Voor welke complexe waarden van z convergeert de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z - 1}{z + i}\right)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \qquad ?$$

10. Voor welke complexe waarden van z convergeert de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, e^{nz^2} \qquad ?$$

11. Voor de berekening van sinh 1 worden 3 termen van de reeksontwikkeling gebruikt. Geef een schatting van de gemaakte fout volgens de methode van de meetkundige reeks (zie collegesyllabus VII.24).

12. Hoeveel termen van de reeksontwikkeling van e^x moet men minstens nemen om $e^{1/10}$ in 4 decimalen nauwkeurig te berekenen? Gebruik hiervoor één van de methoden die in de collegesyllabus op blz. VII.24 zijn aangegeven.

13. Bereken $\cos \frac{1}{10}$ in 4 decimalen nauwkeurig en schat de fout met één der in 12 genoemde methoden.

14. Bereken sinh $\frac{1}{20}$ in 6 decimalen nauwkeurig.

15. Bereken log $\frac{2}{3}$ met behulp van de reeksontwikkeling voor log $\frac{1-x}{1+x}$; breek de reeksontwikkeling af na de 3e term en bepaal van log $\frac{2}{3}$ een zo groot mogelijk aantal decimalen.

16. Bereken $\int_0^{1/10} e^{-t^2}dt$ in 8 decimalen nauwkeurig door e^{-t^2} in een machtreeks te ontwikkelen.

<u>Analoge vraagstukken</u>

Salet I, Hoofdstuk VIII, § 3: 8, 9(1°, 2°, 4°);
§ 4: 7, 11, 29;
§ 5: 13.

1. Bepaal de afstand van de punten $(2,1,3)$ en $(-1,2,4)$.

2. Bepaal de afstand van de punten $(-1,1,-3)$ en $(-3,-2,3)$.

3. Bepaal de scherpe hoek, die de volgende rechten met elkaar maken:

$$\underline{x} = (7,1,-2) + \lambda(2,-1,-3) \text{ en } \underline{x} = (0,4,5) + \mu(1,3,2).$$

4. Bepaal de scherpe hoek, die de volgende rechten met elkaar maken:

$$\underline{x} = (2,-3,4) + \lambda(1,2,3) \text{ en } \underline{x} = (5,1,-3) + \mu(-2,3,1).$$

5. Bepaal de afstand van het punt $(3,-1,5)$ tot de rechte

$$\underline{x} = (0,-1,2) + \lambda(2,2,1).$$

6. De rechte ℓ is gegeven door: $\underline{x} = (2,1,12) + \lambda(2,-3,6)$.
Bepaal de afstand van $(2,1,12)$ tot het snijpunt van ℓ met het xy-vlak.

7. Gegeven is

$$\ell : \underline{x} = (3,2,5) + \lambda(0,2,-1) \;;$$
$$m : \underline{x} = (4,-3,-1) + \mu(3,-4,1) \;.$$

Bepaal de afstand van ℓ en m en een parametervoorstelling van de rechte n, die ℓ en m loodrecht snijdt.

8. Gegeven is

$$\ell : \underline{x} = (-1,3,6) + \lambda(6,1,-2) \;;$$
$$m : \underline{x} = (0,-4,-3) + \mu(3,2,-2) \;.$$

Bepaal de afstand van ℓ en m en een parametervoorstelling van de rechte n, die ℓ en m loodrecht snijdt.

9. Bepaal de scherpe hoek tussen

a) de rechten $2x + 3y - 7 = 0$ en $x - 5y + 4 = 0$;
b) de vlakken $5x + 3y - 8z = 13$ en $13x - 2y - 11z = 5$.

10. Bepaal de scherpe hoek tussen

a) de rechten $3x - 4y - 13 = 0$ en $x + 7y + 4 = 0$;

b) de vlakken $2x + 2y - z = 5$ en $x - z = 4$.

11. Bepaal de vergelijking van het vlak U door het punt P(2,3,4) en loodrecht op de rechte:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 5 \ ; \\ x - 2y - 2z = -1 \ . \end{cases}$$

12. Bepaal de vergelijking van het vlak U door het punt P = (1,2,-1) en loodrecht op de rechte ℓ :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \ ; \\ x - y + 2z = 2. \end{cases}$$

13. Bepaal de parametervoorstelling van de projectie van de rechte $\ell : \underline{x} = (-3,7,-1) + \lambda(3,-3,1)$ op het vlak U met vergelijking $3x - 2y + 2z = 9$.

14. Gegeven het vlak V : $x + 3y - 4z + 5 = 0$ en de punten A(2,2,3) en B(4,2,1). Gevraagd de vergelijking van het vlak W door AB en loodrecht op V.

15. Bepaal in R_5 de afstand van het punt (2,1,-3,1,-2) tot het hypervlak waarvan de vergelijking is

$$7x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 5x_5 - 8 = 0.$$

16. Bepaal in R_5 de afstand van het punt (1,2,3,-2,-1) tot het hypervlak waarvan de vergelijking is:

$$4x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 - 2x_5 + 8 = 0.$$

17. Gegeven is de bol $x^2 + y^2 + z^2 - 8z + 7 = 0$.

Gevraagd worden: a) het raakvlak in (2,-2,3);

b) de raakvlakken evenwijdig aan het vlak $4x - 8y + z = 31$.

18. Bepaal de raakvlakken aan de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, die gaan door de rechte $\underline{x} = (1,1,5) + \lambda(-2,1,2)$.

19. Schrijf de vergelijking van de bol $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 16y + 8z + 59 = 0$ in de vorm $(\underline{x} - \underline{a}, \underline{x} - \underline{a}) = r^2$. Wat is het poolvlak van $P(-2, \frac{1}{3}, -4)$ t.o.v. deze bol?
Bepaal de punten Q op de bol zodanig dat PQ raaklijn aan de bol is en loodrecht op de x-as staat.

20. Bepaal de bol die O tot middelpunt heeft en die zodanig is dat de punten $A = (1,-2,3)$ en $B = (-1,1,4)$ in elkaars poolvlak liggen.

21. Bewijs dat de vectoren $\underline{a} = (2,14,5)$ en $\underline{b} = (-11,-2,10)$ gelijke lengte hebben en loodrecht op elkaar staan. Bereken een vector $\underline{c}$ met de eigenschappen $\underline{c} \perp \underline{a}$ en $\underline{c} \perp \underline{b}$, $|\underline{c}| = 15$.

22. Gegeven de punten $A(2,14,5)$, $B(-10,2,11)$, $C(2,-1,2)$ en $D(-14,7,-14)$. Bewijs dat ABCD een orthocentrisch viervlak is (een viervlak waarvan elk paar overstaande ribben loodrecht op elkaar staan).

23. Bereken de afstand tussen de lijnen

$$\underline{x} = (2,1,0) + \lambda(1,2,3) \;;$$

en

$$\underline{x} = (2,-4,-7) + \mu(-2,1,1).$$

24. Idem voor $\underline{x} = (-1,2,0) + \lambda(1,-1,2)$;

$$\underline{x} = (2,1,1) + \mu(1,-1,2) .$$

25. Bepaal de scherpe hoek tussen de vlakken

$$U : x + y + 2z = 3 \;;$$
$$V : 2x - y + z = 4 .$$

26. Bepaal de vergelijking van het vlak V, dat gaat door de punten $A(3,-6,3)$ en $B(1,-6,0)$ en dat loodrecht staat op het vlak

$$U : 2x - 3y + 6z + 7 = 0.$$

27. Bepaal de parametervoorstelling van de projectie van de rechte
$\ell : \underline{x} = (3,-10,6) + \lambda(4,-9,7)$ op het vlak $U : x - 5y + 3z = 1$.

28. Gegeven de punten $A(2,1,0)$, $B(2,3,6)$ en $C(-2,3,6)$.
Bepaal de sinus van de hoek tussen OC en vlak OAB.

29. Gegeven zijn de punten $O(0,0)$, $A(3,4)$ en $B(3,-6)$ in R_2.
Bepaal de vergelijking van
1) de cirkel door O met A als middelpunt;
2) de omgeschreven cirkel van Δ ABO;
3) de cirkel door B, die in O aan de X-as raakt.

30. Gegeven is de cirkel $x^2 + y^2 = 25$.
Bepaal de vergelijking van
1) de raaklijn in het punt $(3,-4)$;
2) de raaklijnen evenwijdig aan de rechte $4x + 3y = 0$;
3) de poollijn van het punt $(-5,15)$;
4) de raaklijnen uit het punt $(-5,15)$.

31. Door de rechten $x - 4y = 12$, $x - y = 4$, $x + 4y = 4$ wordt in R_2 een Δ ABC ingesloten. Bepaal de vergelijking van de cirkel waarvan Δ ABC pooldriehoek is; d.w.z. ieder hoekpunt van Δ ABC heeft als poollijn t.o.v. de gevraagde cirkel de overstaande zijde uit Δ ABC.
M is het middelpunt van deze cirkel. Bewijs $MA \perp BC$.

1. Bepaal de rechten die liggen op het oppervlak $z = xy$ en evenwijdig zijn aan het vlak $2x - 3y + z = 0$.

2. Op het oppervlak $z = x^2 - y^2$ worden gevraagd:
   a) de beide stelsels rechten;
   b) de (twee) rechten evenwijdig met het vlak $x + y + z = 0$ en hun snijpunt;
   c) welke rechten zijn evenwijdig met het vlak $x + y = 0$?

3. Gegeven is het oppervlak: $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.
   Gevraagd: a) de beide rechten op het oppervlak door $(1,0,0)$;
   b) twee andere rechten, eveneens op het oppervlak en evenwijdig met deze twee rechten.

4. Bepaal de aard van het volgende oppervlak:

$$x^2 - 6x - 8z - \tfrac{1}{4}y^2 + y - 8 = 0.$$

5. Onderzoek de aard van het oppervlak

$$ax^2 + (1+a)y^2 - az^2 = a - 1$$

voor alle reële waarden van a.

6. Laat zien, dat $x^2 - 4x - 4y^2 - 8y - z^2 = 8$ een tweebladige hyperboloïde voorstelt.

7. Bepaal de vergelijking van de kegel met $(1,0,0)$ als top en

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \\ z = \tan\tfrac{1}{2}\varphi \end{cases}$$

als richtkromme.

8. Een kegeloppervlak heeft O(0,0,0) tot top en tot richtkromme de doorsnijding van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ met de hyperbolische cylinder $xy = 1$.
Bepaal de vergelijking van het oppervlak.

9. a) Bepaal de vergelijking van de kegel met top (0,0,2) en richtkromme

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ \quad z = 1. \end{cases}$$

b) Bepaal de orthogonale projectie op het XOY-vlak van de doorsnede der kegel met het vlak $z = x + 3$.

10. Bepaal de vergelijking van de kegel met O als top en als richtkromme

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t \\ z = t^2 - 1. \end{cases}$$

11. Bepaal de vergelijking van de kegel met top (1,-1,0) en als richtkromme de snijkromme van de oppervlakken

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y + 1 = 0 \;;$$
$$x^2 - 2x + z^2 - 3 = 0 \,.$$

12. Bepaal de rechte cirkel-cylinder met als richtkromme de cirkel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \;; \quad 2x + y - z = 1.$$

13. Van een cylinderoppervlak maakt de as gelijke hoeken met de positieve coördinaatassen; de doorsnede met het XOY-vlak is de hyperbool $xy = 1$.
Bepaal de vergelijking van het oppervlak.

14. Bepaal de vergelijking van de cylinder waarvan de beschrijvenden loodrecht staan op vlak $x + y + z = 0$ en waarvan de richtkromme is

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

15. De rechte ℓ : $\underline{x} = (0,-3,0) + \lambda(1,2,0)$ wordt gewenteld om rechte
m : $\underline{x} = \mu(1,1,1)$.
Bepaal de vergelijking van het omwentelingsoppervlak.

16. Bepaal de vergelijking van het omwentelingsoppervlak dat ontstaat als men de x-as wentelt om de lijn $y - 2x = z - 1 = 0$.
Bepaal de rechte lijnen door $(1,0,0)$, die op het oppervlak liggen.

17. Men laat de lijn ℓ met parametervoorstelling $\underline{x} = (1,0,0) + \lambda(0,1,-1)$ wentelen om de lijn m met parametervoorstelling $\underline{x} = \mu(0,0,1)$.
a) Bepaal de vergelijking van het door ℓ beschreven oppervlak.
b) Bepaal de standen van ℓ, waarbij hij de rechte

$\underline{x} = (0,0,1) + \nu(1,1,0)$ snijdt.

(Opm.: ℓ doorloopt juist één stelsel rechten op het oppervlak.)

18. Bepaal de omhullingskegel van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ met top $(2,1,3)$.

19. Bewijs: a) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \underline{0}$
b) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{a} = 0$.

20. Bewijs dat voor een vaste vector $\underline{a}$ geldt:

$$\operatorname{grad}(\underline{a}, \underline{x}) = \underline{a} \ ; \quad \operatorname{div}(\underline{a} \times \underline{x}) = 0 \ ; \quad \operatorname{rot}(\underline{a} \times \underline{x}) = 2\underline{a} .$$

1. Elke vector in R_2 wordt over een hoek $-\frac{5\pi}{6}$ gedraaid. Toon aan dat dit een lineaire afbeelding is en bepaal de matrix van die afbeelding.

2. Elke vector in R_2 wordt over een hoek $+\frac{2\pi}{3}$ gedraaid. Toon aan dat dit een lineaire afbeelding is en bepaal de matrix van die afbeelding.

3. Elke vector in R_2 wordt geprojecteerd op de rechte $y = 3x$. Bepaal van deze lineaire afbeelding de rang, de matrix, de nulruimte en de beeldruimte.

4. Elke vector in R_2 wordt geprojecteerd op de rechte $y = -2x$. Bepaal van deze lineaire afbeelding de rang, de matrix, de nulruimte en de beeldruimte.

5. Van de lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is gegeven dat
   $A(1,0,0) = (6,9,2)$; $A(0,1,0) = (-7,6,-6)$; $A(0,0,1) = (-6,2,9)$.
   a) Bepaal de matrix.
   b) Druk de componenten van $\underline{x}' = A\underline{x}$ uit in die van $\underline{x}$.
   c) Bewijs dat $\underline{x}'$ elf maal zo lang is als $\underline{x}$.

6. Van de lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is gegeven dat
   $A(1,0,0) = (1,2,-2)$; $A(0,1,0) = (2,1,2)$; $A(0,0,1) = (2,-2,-1)$.
   a) Bepaal de matrix.
   b) Druk de componenten van $\underline{x}' = A\underline{x}$ uit in die van $\underline{x}$.
   c) Bewijs dat $\underline{x}'$ drie maal zo lang is als $\underline{x}$.

7. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Bewijs dat de beeldvectoren van de transformatie $\underline{x} \rightarrow A\underline{x}$ drie maal zo lang zijn als de oorspronkelijke en dat de hoek tussen $A\underline{x}$ en $A\underline{y}$ dezelfde is als die tussen $\underline{x}$ en $\underline{y}$.

8. De lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is gegeven door
$A(1,0,0) = (1,2,4)$; $A(0,1,0) = (-1,3,-5)$; $A(0,0,1) = (5,0,22)$.
Bepaal:
a) de rang van deze afbeelding;
b) de dimensie en een basis van de beeldruimte;
c) de dimensie en een basis van de nulruimte;
d) de betrekking tussen deze beide dimensies;
e) de vector(en) waarvan $(3,-4,14)$ het beeld is.

9. De lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is gegeven door
$A(1,0,0) = (5,2,-4)$; $A(0,1,0) = (1,5,-3)$; $A(0,0,1) = (7,-11,1)$.
Bepaal:
a) de rang van deze afbeelding;
b) de dimensie en een basis van de beeldruimte;
c) de dimensie en een basis van de nulruimte;
d) de betrekking tussen deze beide dimensies;
e) de vector(en) waarvan $(13,-4,-6)$ het beeld is.

10. Van de lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is gegeven:
$A(2,1,1) = (7,6,7)$; $A(1,0,2) = (1,15,10)$; $A(-1,2,2) = (-1,7,4)$.
Bepaal:
a) de matrix van A;
b) de beeldruimte;
c) de nulruimte;
d) de vector(en) waarvan het beeld $(4,5,13)$ is.

11. Van de lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is gegeven:
$A(1,2,3) = A(2,3,1) = A(2,1,3) = (6,-36,30)$.
Zelfde vragen als in 10.

12. A is een spiegeling in R_3 t.o.v. het vlak $2x - y + 3z = 0$.
Bepaal de matrix van A.

13. A is een draaiing in R_3 om de as: $\rho(1,1,1)$ en als draaiingshoek π rad.
Bepaal de matrix van A.

14. Bepaal de producten AB en BA van de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Bepaal de producten AB en BA van de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

16. Bepaal de producten AB en BA van de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

17. Bepaal de 16e macht van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

18. Bepaal de 12e macht van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

19. Bepaal van de volgende matrix de inverse op 2 manieren nl. met vegen en met Cramer.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

20. Bepaal van de volgende matrix de inverse op 2 manieren nl. met vegen en met Cramer.

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Bepaal van de onderstaande matrices de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren.

$$\text{a)}\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 6 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Bepaal van de matrix uit opgave 20-12. de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren.
Verklaar het antwoord meetkundig.

3. Bepaal van de matrix uit opgave 20-13. de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren.
Verklaar het antwoord meetkundig.

Ga na of de volgende matrices orthogonaal zijn, en zo ja, direct of gespiegeld, en bepaal tevens de reële eigenwaarde(n).

4. a) $$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3}\sqrt{5} & -\frac{2}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$ b) $$\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 8 & 12 & -9 \\ 12 & 1 & 12 \\ 9 & -12 & -8 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. a) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ b) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{-5}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$$ c) $$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Bepaal λ, u, v en w, zo dat de volgende matrix gespiegeld orthogonaal is:

$$\lambda\begin{pmatrix} u & 4 & 7 \\ v & -8 & 4 \\ w & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

7. Zij A een draaiing over π rad. om de lijn $\ell = \lambda(1,2,0)$; B een spiegeling t.o.v. het vlak $z = 0$.
Bepaal eigenvectoren en eigenwaarden van AB.

8. Zij D een draaiing om de as $\lambda(1,1,1)$, waarvoor geldt:
$D(1,0,0) = (0,0,\gamma)$.
a) Bepaal γ.
b) Bepaal de matrix van D.
c) Laat zien dat de matrix van D orthogonaal is.
d) Bepaal zonder berekening reële eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren.
e) Bepaal D^3.

9. Zij $\underline{a}$ een vaste vector in R_3 en de afbeelding A gedefinieerd door

$$A\underline{x} = (x + y + z)\underline{a} \; ; \quad \underline{x} = (x,y,z).$$

Bewijs:
a) A is een lineaire afbeelding.
b) Bepaal eigenvectoren en eigenwaarden.
c) Kunt U bij gegeven $\underline{a}$ A^{-1} bepalen? Motiveer Uw antwoord.

10. Ga na of de lineaire afbeelding met matrix

$$-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & -3 & -6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

een draaiing is. Zo ja, bepaal de as en de hoek van de draaiing.

11. Ga na of de lineaire afbeelding met matrix

$$\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 10 & 15 & -6 \\ -6 & 10 & 15 \\ 15 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

een draaiing is. Zo ja, bepaal de as en de hoek van de draaiing.

1. Bepaal:

a) $\int \sin^3 x \, dx$; b) $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}} dx$; c) $\int \frac{2x \, dx}{(1+x^4) \arctan x^2}$.

2. Bereken:

a) $\int \tan^2 x \, dx$; b) $\int x \cos^3 x \, dx$; c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} dx$.

3. Bereken:

a) $\int \tan^3 x \, dx$; b) $\int x^2 \cosh x \, dx$; c) $\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}} dx$.

4. Bepaal:

a) $\int \cos^3 x \, dx$; b) $\int \frac{dx}{\sinh x}$; c) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} dx$.

5. Gegeven is: $I_{m,n} = \int x^m (1-x)^n \, dx$.

Leid een betrekking af tussen $I_{m+1,n-1}$ en $I_{m,n}$.

6. Leid een reductieformule af voor $I_n = \int x^n \sin x \, dx$.

7. a) Leid een reductieformule af voor de integraal

$$I_n = \int x (\log x)^n \, dx.$$

b) Bereken met behulp van die betrekking I_3.

8. Leid een reductieformule af voor

$$I_n = \int x^n \cos x \, dx.$$

9. $I_n = \int e^{-x^2} x^n \, dx.$

Leid voor $n \geqslant 2$ een reductieformule af tussen I_n en I_{n-2} en bereken hiermee $\int_0^\infty x^9 e^{-x^2} dx.$

10. Bereken $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^5}$ met behulp van een reductieformule voor $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}$.

Bepaal:

11. $\int \frac{dy}{(2y^2+2y+1)^2}$.

12. $\int \frac{x^3}{(x+1)(x^2-4)} dx.$

13. $\int \frac{dy}{(y^2+2y+3)^4}$.

14. $\int \frac{x^4-6x^2-2x+15}{x^3+2x^2-5x-6} dx.$

15. $\int \frac{dx}{(x^2-1)(x-1)}$.

16. $\int \frac{x^3+4x^2-x+3}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx.$

17. $\int \frac{x^5-2}{x^4-2x^3}\,dx.$

18. $\int \frac{x^2+9x+29}{(x-4)(x^2+2x+3)}\,dx.$

19. $\int \frac{x^3dx}{(x^2+1)^2}.$

20. $\int \frac{dx}{x^4-1}.$

<u>Analoge vraagstukken</u>

Salet I, Hoofdstuk IV § 3: nrs. 1 t/m 22.
§ 6: nrs. 4, 17, 46 t/m 51.

1. Bepaal:

a) $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \cos^4 x \, dx.$ b) $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x \cos^6 x \, dx.$

2. Bepaal:

a) $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x \, dx.$ b) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^5 x \, dx.$

3. Bepaal:

a) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$ b) $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos x(1 - \cos x)}.$ c) $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos x(1 + \sin x)}.$

4. Bepaal:

a) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$ b) $\int (1 + \tan x)^2 dx.$ c) $\int \frac{\sin \frac{1}{2} x}{3 + 4 \cos \frac{1}{2} x} \, dx.$

5. Bepaal:

a) $\int \frac{dx}{2 - \sin x}.$ b) $\int \frac{dx}{1 + \tan x}.$

6. Bepaal:

a) $\int \frac{dx}{2 + \cos x}.$ b) $\int \frac{\sin x \cos x}{\cos 2x - \sin 2x} \, dx.$

Bereken de volgende onbepaalde en bepaalde integralen.

7. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$, waarin $x < -2$.

8. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$

9. $\int \sin x \sqrt{\frac{1-\cos x}{2+\cos x}}\,dx.$

10. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{(x^2+2x+2)}}.$

11. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2-x+1}}.$

12. $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{(1+x^2)^{5/2}}.$

13. $\int_{-5}^1 \frac{dx}{(x+7)\sqrt{5-4x-x^2}}.$

14. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$

15. $\int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t\sqrt{1-t^2}}\,dt.$

16. $\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^2-1}-x}{x^2-1}\,dx.$

<u>Analoge vraagstukken</u>

Salet I, Hoofdstuk IV, §4: 1 t/m 18;
§6: 5, 10, 11, 13, 16, 18, 20, 27 t/m 34, 38, 39, 42, 55 t/m 60, 69, 70;
§7: 55 t/m 58, 64;
§8: 30, 57, 59.

1. Bereken met een herhaalde integraal de inhoud van het afgeknotte prisma dat wordt ingesloten door de vlakken $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$ en $z=x+2y$.

2. Bereken de inhoud van het lichaam ingesloten door $x=0$, $y=2$, $z=0$, $x=y^2$, $z=xy$.

3. Bereken de inhoud van het lichaam begrensd door $y=x$, $y=2x$, $y=2$, $z=0$ en $z=(y-x)(2x+y)$.

4. Bereken $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, als G een cirkelsector voorstelt met middelpunt (0,0) en hoekpunten (1,2) en (2,1).

5. Bereken $\iint\limits_G \frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^2}$, als G het halfvlak $x \geqslant 0$ is, waaruit de cirkelschijf met middelpunt $(\frac{1}{2},0)$ en straal $\frac{1}{2}$ is verwijderd.

6. Bereken $\int\limits_0^1 \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} \int\limits_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. Bereken $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 ye^{xy} \cos xy\, dx$.

8. Bereken $\int\limits_0^1 dy \int\limits_1^{y^2} y \frac{\sin x}{x} dx$.

9. L is het lichaam dat ontstaat door de kromme $x=\sqrt{1-z}$, $y=0$ om de z-as te wentelen. C is de cylinder met $x=0$, $y=\frac{1}{2}$ als as en met straal $\frac{1}{2}$. Bereken de delen van L binnen en buiten C, boven het xy-vlak.

10. In het xy-vlak wordt de schijf $(x^2+y^2)^2 \leqslant xy$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ belegd met massa, met dichtheid xy. Bereken de totale massa.

11. Bereken de inhoud van het lichaam bepaald door

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1,\ x+y+z \leq 3.$$

12. Bereken de inhoud van het lichaam bepaald door

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1,\ z \geq 0,\ xy \geq z.$$

13. Bepaal:

$$\int_{-1}^{1} (3x^2-1) \int_{|x|}^{1} \frac{\log y}{y+1}\, dy\, dx.$$

14. $$\int_0^a dx \int_{x/2}^{x} y^2 e^{y^2} dy + \int_a^{2a} dx \int_{x/2}^{a} y^2 e^{y^2} dy.$$

Schrijf in ieder der volgende opgaven 15 t/m 22 het volume als dubbelintegraal, druk de dubbelintegraal op 2 manieren uit in een herhaalde integraal en bereken een der twee integralen.

15. Het volume begrensd door de vlakken $z = 2y$, $z = 0$ en de rechte cylinder waarvan het grondvlak is het in het 1e kwadrant van het XOY vlak gelegen gebied $9 \leq x^2 \leq 36 - y^2$.

16. Het volume in het 1e octant begrensd door $z = x+y$ en de rechte cylinder met richtkromme $z = 0$, $4x^2+9y^2 = 36$.

17. Het volume begrensd door $y = z^2$, $z = 0$ en de rechte cylinder met als grondvlak in het XOY vlak het door de krommen $y = 0$ en $x^2+9y = 9$ begrensde gebied.

18. Het volume waarvoor geldt $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, en dat voorts begrensd wordt door de cylinder $x^2 = 4 - z$ en het vlak $4x+3y = 12$.

19. Het volume waarvoor $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ en voorts begrensd door $z = 9 - x^2$, $x = 3 - y^2$.

20. Het volume begrensd door $x = 0$, $x = y\sqrt{3}$, $9(x^2 + y^2) + 4z^2 = 36$ en in het eerste octant gelegen.

21. Het volume dat binnen de cylinder $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ èn binnen de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ ligt.

22. Het volume binnen de cylinder $x^2 + y^2 = 2ay$, het vlak $z = 0$ en de kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ gelegen.

23. Bepaal de massa van een in het 1e kwadrant gelegen schijf, die wordt begrensd door de krommen $r = a$, $r = a(1 - \cos\theta)$ en $\theta = 0$ in de volgende gevallen:
a) de dichtheid is 1;
b) de dichtheid is $\sin\theta$.

24. Bepaal de oppervlakte van de doorsnede van de cirkelschijven, begrensd door $r = a\sin\theta$ en $r = 2a\cos\theta$.

25. Bereken:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty xy\, e^{-(x^2+y^2+2xy\cos\alpha)}\, dy \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant \tfrac{\pi}{2}).$$

1. Bepaal $\iiint\limits_G (x^4 + y^4 + z^4)z\,dx\,dy\,dz$ waarin G gegeven wordt door $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

2. Bepaal $\iiint\limits_G x^2y^2z^2 dx\,dy\,dz$ waarin G gegeven wordt door $-1 \leqslant x \leqslant 1,\ -2 \leqslant y \leqslant 2,\ -3 \leqslant z \leqslant 3$.

3. Bepaal de massa van het viervlak begrensd door $x = 0$, $z = 0$, $z - y = 0$ en $x + y = 1$, waarin de massadichtheid $\frac{1}{x+y+1}$ is.

4. Bepaal de massa van de afgeknotte pyramide begrensd door de vlakken $y = 1$, $y = 2$, $z = 0$, $x = y$, $z = x$ waarin de dichtheid is

$$\frac{1}{x^2+y^2}.$$

5. Bepaal $\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$ waarin G gegeven wordt door $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

6. Bepaal $\iiint\limits_G e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx\,dy\,dz$, waarin G het gehele eerste octant voorstelt.

7. Bepaal $\iiint\limits_G (x^2+y^2+z)dx\,dy\,dz$, waarin G het gedeelte van het eerste octant is bepaald door $z \leqslant y^2$ en $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

8. Bepaal het zwaartepunt van een homogeen lichaam in het eerste octant begrensd door de oppervlakken $x = 0$, $y = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + k^2z^2 = 1$ met $k > 1$.
Aanwijzing: gebruik cylindercoördinaten.

9. Bepaal de oppervlakte van het gebied gelegen binnen de kromme

$$x^4 + y^4 = a^2(x^2 - y^2).$$

10. Bepaal de lengte van de doorsnijdingskromme van de parabolische cylinder $2x - y^2 = 0$ met het vlak $x + z = 3$ voor zover deze boven het xy-vlak ligt.

11. Bepaal de lengte van één winding van de schroeflijn die op de cylinder $x^2 + y^2 = r^2$ ligt en spoed $2\pi h$ heeft.

12. Bepaal de lengte van de kromme die in bolcoördinaten wordt gegeven door $\rho = 1$, $\varphi = \log \tan \frac{\theta}{2}$, $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

13. Bepaal de lengte van de kromme $y = \cosh x$ $(-1 \leq x \leq 1)$.

14. Bepaal de lengte van de boog van de kromme

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi) \\ y &= a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \end{aligned}\right\} \quad \text{bepaald door } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

15. Bepaal de lengte van de kromme die wordt gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{aligned} x &= \tan t \\ y &= \cot t \\ z &= \sqrt{2}\log\tan t \end{aligned}$$

tussen de punten die respectievelijk corresponderen met

$$t = \frac{\pi}{6} \quad \text{en} \quad t = \frac{\pi}{3}.$$

16. De strophoïde bepaald door de vergelijking $x(x^2 + y^2) = a(y^2 - x^2)$ heeft $x = a$ als asymptoot. Bepaal de oppervlakte ingesloten door kromme en asymptoot, voor zover gelegen in eerste en vierde kwadrant.

17. Binnen een bol met middelpunt $(0,0,\frac{1}{2})$, straal $\frac{1}{2}$ is een massaverdeling aangebracht met dichtheid z.

Bereken: a) de totale massa;
b) het zwaartepunt;
c) het traagheidsmoment t.o.v. de z-as.

18. Bereken $\iiint_G y^2 z \, dx\, dy\, dz$ waarin G het in het eerste octant gelegen gebied is binnen de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en binnen de cylinder $x^2 + y^2 - x = 0$.

19. Bereken $\iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)^{-2} dx\, dy\, dz$ over het deel G van de ruimte, waarvoor $z \geqslant 1$.

20. Bereken de massa van het deel van het eerste octant begrensd door de oppervlakken $y = x^2$, $y = 1$, $z = xy$ en met massadichtheid xyz.

21. Bepaal de lengte van de kromme $y = \log \cos x$, gemeten tussen de punten $(-\frac{\pi}{4}, -\log\sqrt{2})$ en $(\frac{\pi}{4}, -\log\sqrt{2})$.

22. Door de vergelijkingen
$$x = t\sqrt{5}$$
$$y = t^2 - 2t$$
$$z = t^2\sqrt{3}$$
is een ruimtekromme in parametervorm gegeven.
Bereken de lengte van de kromme tussen de punten $t = \frac{1}{4}$ en $t = \frac{5}{4}$.

23. a) Bepaal $\iint_G \frac{dx\, dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$

met G: de rechterlus van de kromme $(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$ (lemniscaat).

b) Dezelfde integraal met G: het (oneindige) gebied rechts van de rechtertak der hyperbool $x^2 - y^2 = 1$.

1. Een kegel heeft de oorsprong als top en als richtlijn $z = 2a$, $r = a\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$. Bepaal de oppervlakte van de kegel tussen top en richtlijn.

2. Bepaal de oppervlakte van het deel van de hyperbolische paraboloïde $xy = z$ dat binnen de cylinder $x^2 + y^2 = 1$ ligt.

3. Bepaal de oppervlakte beschreven door PQ als $P = (0,0,1)$ terwijl Q de kromme $z = 0$, $2y = x^2$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ doorloopt.

4. Bepaal de oppervlakte van dat deel van de paraboloïde $2az = x^2 - y^2$ waarvan de projectie op het xy-vlak binnen de kromme $r = a\sqrt{\cos\varphi}$ valt.

5. Bepaal de oppervlakte van het oppervlak $3z = x^2 - y^2$, binnen de cylinder $x^2 + y^2 = 4$.

6. Bepaal de oppervlakte van het deel der cylinder $y^2 + z^2 = 36$, waarvoor $z \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant 3 - x$ en $0 \leqslant x \leqslant 3$.

7. Bepaal de oppervlakte van het gedeelte van de bol $(\underline{x},\underline{x}) = a^2$, dat wordt afgesneden door de cylinder $x^2 + y^2 = ax$.

8. Bepaal de oppervlakte van het gedeelte van de kegel $z^2 = x^2 + y^2$ binnen de cylinder $x^2 + y^2 = 2ay$.

9. Bepaal de oppervlakte van de bol B binnen en buiten de kegel K.

$$B:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$K:\ z^2 = x^2 + (y-1)^2 .$$

10. Bepaal de oppervlakte van het deel van het bolopppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, afgesneden door de cylinder $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

11. Bereken de inhoud van het lichaam, dat begrensd wordt door het vlak $z = 0$ en de oppervlakken:

$$a^3 z = x^4 + y^4$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

12. Bepaal de oppervlakte van het deel van het kegelvlak $2xz - y^2 = 0$, gelegen tussen de top en het vlak $x + z = 1$.

Bepaal de oppervlakte $(a > 0,\ b > 0)$ van:

13. Het gedeelte van de cylinder $z^2 = 8x$ binnen het prismaächtige lichaam, begrensd door $y = 0$, $x = 1$ en de cylinder $x^2 = 4y$.

14. Het gedeelte van de cylinder $y^2 + z^2 = a^2$ binnen de cylinder $x^2 = a(y+a)$.

15. Het gedeelte van de cylinder $y^2 + z^2 = a^2$ waarvoor $z \geq 0$ en $0 \leq x \leq y \leq a$.

16. Het gedeelte van het platte vlak door de punten $(0,0,0)$, $(a,0,b)$, $(0,b,a)$ dat in het eerste octant en binnen de cylinder $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ligt.

17. Het gedeelte van de paraboloïde $4z = x^2 + y^2$ dat ligt binnen de cylinder waarvan de beschrijvenden evenwijdig aan de z-as zijn, en de richtkromme is $r^2 = 4 \cos 2\varphi$ in het XOY-vlak.

18. Het gedeelte van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, dat binnen het prisma P ligt; P wordt begrensd door de vlakken $y = 0$, $x = y$, $x = a\sqrt{2}$, $z = -2a$, $z = 2a$.

19. a) Bepaal de oppervlakte van de hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, tussen $z = 0$ en $z = 1$.

b) Bepaal de ronde oppervlakte van het lichaam dat ontstaat als het deel van het x-y-vlak, ingesloten door $y^2 - 4y + 4x = 0$ en de y-as, om de y-as wentelt.

Serie 1

1. $x < -3$; $-1 < x < 1$; $x > 2$.

2. $x = 0$; $3 \leqslant x \leqslant 5$.

3. $x < 0$; $x > 12$.

4. $x < -6$.

5. $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

6. $x = 1$.

7. $-1 < x < 1$.

8. De punten P met $|PO| \leqslant 3$.

9. a) $3x^2$. b) $\frac{1}{5}(4x^{-7/3} + x^{-3/2})$.

10. a) $x^2 \cos(x^3) \cos^3 x - \sin(x^3) \cos^2 x \sin x$.

b) $\frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})$.

11. $\pi/4$.

12. $\pi/4$.

13. 0.

14. $O = 3\sqrt[3]{2\pi\ I^2}$

15. 3.

17. a) $-b \cos \frac{x}{b} + C$. b) $\frac{1}{5}(x + 1)^5 + C$.

c) $-\cos(\tan x) + C$. d) $-\sin x^5 + C$.

e) $\frac{1}{3} \tan(x^3) + C$.

18. $O_{-1,2} = \frac{63}{4}$; $O_{2,4} = \frac{16}{3}$.

Serie 2

1. $a = 4$; $(x+1)(x-2)(x-3)$.

2. $a = 2$; $(x+1)(x-1)(x-3)$.

3. $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$.

4. $x = 2$; $x = -2$; $x = -3$.

5. $-230x - 300$.

6. $2x + 4$.

7. Nulpunten: $-1-\sqrt{7}$; 1; $-1+\sqrt{7}$;

   Maximum: $f(-2) = 18$;

   Minimum: $f(4/3) = -\frac{14}{27}$.

8. Nulpunt: $x = -2$;

   Maximum: $f(0) = 12$;

   Minimum: $f(\frac{2}{3}) = \frac{320}{27}$.

9. Nulpunt: 1;

   Buigpunt: $f(-1) = -8$.

11. a) $-\pi/3$. b) $\pi/3$.

12. a) $5\pi/6$. b) $\pi/6$.

15. $\frac{3\pi}{4}$.

16. ja; $y = \frac{56}{65}$.

Serie 3

3. 0.

4. $\frac{1}{2}$.

5. 0.

6. 0.

7. bestaat niet; 0.

8. $\frac{5}{2}$.

9. 2.

10. 3.

11. $\frac{3}{2}$.

12. 5.

13. 1.

14. 7.

15. $\frac{1}{2}$.

16. 2

17. 1; -1.

18. $\frac{1}{2}$.

19. $-\frac{3}{2}$.

20. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

21. $f(x) = 0$ als $|x| < 1$;

$f(x) = x$ als $|x| > 1$;

$f(1) = 1/3$;

$f(-1)$ bestaat niet.

22. $f(x) = x^2$ als $|x| < 1$;

$f(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$ als $|x| > 1$;

$f(1) = 1$;

$f(-1) = 0$.

23. 8.

24. 3.

25. $\sqrt{2}$.

26. -1.

27. π.

28. $\frac{1}{2}n(n+1)$.

29. 1.

30. $\frac{\pi}{6}\sqrt{3}$.

<u>Serie 4</u>

1. a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$. b) $2b\sqrt{a^2-b^2x^2}$.

2. a) $\dfrac{\sqrt[x]{x}\,(1-\log x)}{x^2}$. b) $\dfrac{x^{86}}{87^x}(87-x\log 87)$.

3. a) $(1+x)^{\frac{1}{x}-2}\left(\log(1+x)+\dfrac{x}{x+1}\right)$. b) $2^{x(\log x)^{-1}}\cdot\log 2\,(\log x)^{-2}(\log x$

4. $xe^x\sin x$.

5. a) $\dfrac{1+x^4}{1+x^6}$. b) $\dfrac{1}{1+x^2}$ als $x>0$; $\dfrac{-1}{1+x^2}$ als $x<0$.

6. a) $\dfrac{1+\cos^2 x}{\sin x\cos x}$. b) $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ als $x>0$; $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ als $x<0$.

7. a) $\dfrac{1}{\sin x}$. b) $\dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$.

8. a) $\frac{|c| - c + x}{\sqrt{2cx-x^2}}$. b) $x^{\log x-1}\ 2 \log x$.

9. a) $10^{x^2-1}\ 2x \log 10$. b) $\frac{1}{(1+\arcsin\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

10. $x = 0$; $x = 3$.

11. $x = 0$; $x = 1$.

12. continu voortzetbaar in $x = 1$; $g(1) = \frac{4}{3}$.

13. continu voortzetbaar in $x = -2$; $g(-2) = -\frac{1}{4}$.

14. $a = 2$; voor $a \neq 2$ discontinu in 1 en -1.

15. discontinu in $x = 0$; neen.

Serie 5

1. nulpunt: 1;

   minimum: $f(0) = 0$;

   maximum: $f(\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$;

   verticale raaklijn in $x = 0$.

2. geen nulpunten, geen snijpunten;

   buigpunt met hor. raaklijn: $f(1) = \frac{1}{2}e$;

   maximum: $g(\frac{1}{2}) = \sqrt{e}$;

   minimum: $g(\frac{3}{2}) = \frac{1}{3}e\sqrt{e}$.

3. nulpunten: 0; 2;

   maximum: $f(0) = 0$;

   minimum: $f((\frac{1}{2})^{5/3}) = (\frac{1}{2})^{1/3}\ ((\frac{1}{2})^{4/3}-1)$;

   vert.raaklijn in 0.

4. geen nulpunten; geen snijpunten;

maximum: $g(0) = \frac{1}{4}$;

hor.asymptoten: f: $y = 1$ en $y = 0$;

g: $y = 0$.

5. nulpunten: 0;

maximum: $f(\sqrt{\tfrac{1}{2}}) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$;

minimum: $f(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}) = \dfrac{-2}{3\sqrt{3}}$;

hor.asymptoot: $y = 0$.

6. geen nulpunten;

maximum: $f(1) = 2^{4/3}$;

vert.raaklijn in -1 en 3, $f(-1) = f(3) = 4^{1/3}$;

hor.asymptoot: $y = 0$.

7. nulpunten: $-\frac{3}{2}\pi$; 0; $\frac{3}{2}\pi$;

maxima: $f(-\frac{3}{2}\pi) = 0$; $f(-\frac{3}{4}\pi) = -2$; $f(\frac{3}{8}\pi) = f(\frac{9}{8}\pi) = 2\sqrt{2}$;

minima: $f(-\frac{9}{8}\pi) = f(-\frac{3}{8}\pi) = 2\sqrt{2}$; $f(\frac{3}{4}\pi) = 2$; $f(\frac{3}{2}\pi) = 0$.

8. nulpunten: $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$;

maxima: $f(0) = 1$; $f(\pi - \alpha) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{6}}$; $f(\pi + \alpha) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{6}}$; $f(2\pi) = 1$;

minima: $f(\alpha) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{6}}$; $f(\pi) = -1$; $f(2\pi - \alpha) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{6}}$.

(Hierin is $\alpha = \arccos\sqrt{\frac{1}{6}}$).

9. nulpunten: $\pm \arccos \frac{1}{8} + 2k\pi$.

maxima: $f(2k\pi) = -3\frac{1}{2}$; $f(\pm \arccos(-\frac{1}{4}) + 2k\pi) = -16$;

minima: $f(\pm \arccos(\frac{1}{2}) + 2k\pi) = -4$;

vert.asymptoten: $x = (k + \frac{1}{2})\pi$; $x = (2k + 1)\pi$;

f periodiek.

10. geen nulpunten;

minimum: $f(2^{2/3}) = \frac{2(2^{1/3}+1)}{2^{2/3}-1}\, e^{2^{2/3}}$;

vert.asymptoot: $x = 1$.

11. nulpunt: 1;

maximum: $f(1/e) = \frac{1}{e}$.

12. nulpunt: 0;

maximum: $f(1) = \pi/2$;

minimum: $f(-1) = -\pi/2$;

hor.asymptoot: $y = 0$.

13. nulpunt: 0;

maxima: $f(1) = f(-1) = \pi/2$;

minimum: $f(0) = 0$;

vert.raaklijnen in 1 en -1.

14. maxima: $f(0) = 0$; $f(x) = 1$ voor $2 \leqslant x \leqslant 3$;

minima: $f(\frac{-\pi}{2}) = -1$; $f(x) = 1$ voor $2 < x < 3$.

15. maxima: $f(-2) = 4$; $f(0) = 1$.

<u>Serie 6</u>

1. a) $\frac{e^{cx^2}}{2c} + C_1$ $(c \neq 0)$; $\frac{1}{2}x^2 + C_1$ $(c = 0)$.

b) $\frac{1}{a} \log |ax+b| + C$ $(a \neq 0)$; $\frac{x}{b} + C$ $(a = 0)$.

c) $\frac{1}{a} e^{ax} + C$ $(a \neq 0)$; $x + C$ $(a = 0)$. d) $-\log|\cos x| + C$.

e) $-\frac{1}{2a}\frac{1}{ax^2+1}+C$ $(a \neq 0)$; $\frac{1}{2}x^2$ $(a = 0)$.

f) $\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$ $(a \neq 0)$; $-\frac{1}{x}+C$ $(a = 0)$.

g) $\arcsin\frac{x}{a}+C$. h) $\frac{1}{2}\log|\sin x^2|+C$. i) $\log(e^x+1)+C$.

2. a) 0. b) $\pi/2 - 1$.

3. a) $e^{\pi/4}-1$. b) $\frac{\pi^2}{4}-2$.

4. a) 1. b) 0.

5. a) 1. b) $\pi/2$.

6. a) $1/e$. b) $\log a$.

7. a) 1. b) 1.

8. $\log \pi/4$.

9. $\log \pi/2$.

10. $a^2(\pi/2 - \frac{1}{3})$.

11. $\frac{\pi}{144}+\frac{1}{8}\sqrt{3}-\frac{2}{9}$.

12. $\frac{17e^4+3}{8}$.

Serie 7

3. $y'' = -27 \sin x + 36 \sin^3 x$.

4. 1.

5. $y' = 2 - 2(2x+1)^{-2}$;

$$y^{(n)} = (-2)^n n!\,(2x+1)^{-n-1} \qquad (n \geq 2).$$

6. $y' = 2 - 3.7\,(3x-2)^{-2}$;

$$y^{(n)} = (-3)^n n!\,7(3x-2)^{-n-1} \qquad (n \geq 2).$$

8. $(x^2+1)y^{(n)} + x(2n-3)y^{(n-1)} + (n-2)^2y^{(n-2)} = 0 \qquad (n \geq 2).$

9. $(x^2+1)y^{(n)} + 2x(n-1)y^{(n-1)} + (n-1)(n-2)y^{(n-2)} = 0 \qquad (n \geq 2).$

10. $(0,\pi/2);\ (1,e^{-\frac{1}{2}}),\ (-1,e^{-\frac{1}{2}}).$

11. nulpunten: $0;\ \pi;$

maximum: $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{-\pi/4};$

minima: $f(0) = f(\pi) = 0;$

buigpunt: $f(\frac{\pi}{2}) = e^{-\pi/2}.$

12. a) $x = 2t - \sin t$, $y = 2 - \cos t$. b) $t = \pm\pi/3 + 2k\pi;\ x = \pm(\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}) + 4k\pi$, $y = 1\frac{1}{2}$

13. maximaal in $(a,0)$ en $(-a,0)$;

minimaal in $(0,b)$ en $(0,-b)$.

14. $(1,1/4)$; arctan 2.

15. $y^2 = 2x + 1;\ \mu = \frac{1}{2}\varphi + k\pi.$

Serie 8

1. b) neen.

3. a) ja; b) $\frac{\partial f}{\partial x}$ bestaat niet; $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ in $(0,0)$.

4. a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$, b) $\frac{\partial z}{\partial x} = (x+y)^{x-2y}\left(\log(x+y) + \frac{x-2y}{x+y}\right)$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2}$. $\frac{\partial z}{\partial y} = (x+y)^{x-2y}\left(-2\log(x+y) + \frac{x-2y}{x+4}\right)$.

5. a) $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$, b) $\frac{\partial z}{\partial x} = y(x+1)e^{x+2y}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \log x$. $\frac{\partial z}{\partial y} = x(2y+1)e^{x+2y}$.

10. $4dx - \pi dy.$

11. $4/5\,dx + 9/10\,dy$.

12. $x + y + 3z = 9$.

14. a) $z - z_0 = (x - x_0)\cos x_0 \sin y_0 + (y - y_0)\sin x_0 \cos y_0$.

b) $(0,0,0)$ en $(\pi/2,\pi/2,1)$.

15. a) $z - z_0 = (x - x_0)(2x_0 - 6y_0 + 2) + (y - y_0)(-6x_0 + 10y_0 + 2)$.

b) $(2,1,3)$.

16. minimum: $f(0) = \sqrt[3]{2}$; buigpunten $(-1,2)$ en $(1,2)$.

17. 1) $(3,3)$. 2) $(\frac{32}{9}, \frac{8}{3})$.

Serie 9

1. $t^{\sin t-1}(1 + \sin t \log t + t \cos t \log^2 t)$.

2. $z(t) + \frac{2e^t}{\sqrt{1-(e^{2t}+\tan^2 t)^2}}(e^{2t} + \frac{\sin t}{\cos^3 t})$.

3. $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = x^{y-1}(x^2 \log x - y^2)$, $\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{yx^y}{\sqrt{x^2+y^2}}(1 + \log x)$.

4. $x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}$.

5. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2A+3B}{B^2-A^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2B+3A}{B^2-A^2}$,

met $A = \sin u \sin v$, $B = \cos u \cos v$.

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y+1}{x+2y-1}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{-2x-z+1}{x+2z-1}$.

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{7}{3}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{74}{27}$.

10. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{9}{4}\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -9\frac{y}{z}$; $3x - 6y + 2z = -18$.

11. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial t}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial t}{\partial y} = -1$.

12. $-4/3$.

13. -2.

14. 0.

15. 6.

16. 1.

17. $\frac{x-z}{z-t}$.

18. $\frac{1}{4} z_{uu} + \frac{1}{4u} z_u - \frac{v^2}{4u^2} z_{vv} - \frac{v}{4u^2} z_v$ (als $z_{uv} = z_{vu}$).

19. $\frac{1}{v^4} z_{uu} - \frac{2}{v^3} z_u + \frac{2}{v^2} z_{uv} + z_{vv}$ (als $z_{uv} = z_{vu}$).

20. $uv\, z_{uu} + (v^2 - u^2) z_{uv} - uv\, z_{vv} + v z_u - u z_v$ (als $z_{uv} = z_{vu}$).

21. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c(uv+1)}{a(uv-1)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c(u-v)}{b(uv-1)}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c^2 x}{a^2 z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c^2 y}{b^2 z}$.

Serie 10

1. $\frac{\mu}{\lambda+\mu} \underline{OA} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \underline{OB}$.

2. $\underline{OB} - 2\underline{OA}$.

3. ja; $(\frac{5}{3}, 0)$; $(0, \frac{5}{2}\sqrt{2})$.

4. $(11,0)$; $(0,5\frac{1}{2})$.

5. $(4,7)$.

6. $(1024,1160)$.

7. $(\frac{1}{2},0) + \lambda(3,-4)$.

8. $(0,\frac{5}{4}) + \lambda(4,-3)$.

9. $(1,2,3) + \lambda(2,1,-1)$; $(7,5,0)$.

10. $(1,2,3) + \lambda(1,2,0)$; $(0,0,3)$.

11. $(\frac{7}{2},0,0) + \lambda(-3,2,0) + \mu(-2,0,1)$.

12. $(1,2,1) + \sigma(1,1,1) + \tau(6,2,1)$.

13. $\sigma(1,-1,0) + \tau(2,1,1)$.

14. $(0,1,1) + \sigma(1,1,0) + \tau(2,1,2)$; $-2x + 2y + z = 3$.

15. $(2,3,1)$.

16. $(3,6,9)$.

17. $(1,1,2) + \mu(1,2,2)$.

19. $\frac{4}{3}\underline{a} + \frac{7}{3}\underline{b}$.

20. $-2\underline{a} - 2\underline{b} + 3\underline{c}$.

21. $-\underline{a} + 6\underline{c}$.

24. 1) afhankelijk. 2) afhankelijk. 3) onafhankelijk.

25. 1) afhankelijk. 2) onafhankelijk. 3) afhankelijk.

26. 1) ja. 2) nee.

32. 1) afhankelijk. 2) afhankelijk. 3) afhankelijk; $\{\underline{a},\underline{b}\}$.

33. 1) onafhankelijk. 2) onafhankelijk. 3) afhankelijk; $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c}\}$.

34. 3; $\{(0,0,3,-4), (0,1,0,-2), (2,0,0,-1)\}$.

35. 3; nee; ja.

36. 3; ja; nee.

37. 1) 2; $\{\underline{a},\underline{b}\}$. 2) 3; $\{\underline{a},\underline{b},\underline{d}\}$. 3) 2; $\{\underline{a},\underline{b}\}$.

<u>Serie 11</u>

1. $\lambda(7,-7,4,5)$.

2. $\lambda(1,0,1,0) + \mu(1,0,0,-1)$.

3. $(0,0,0)$.

4. $(0,0,0)$.

5. $\lambda(-3,1,0,2)$.

6. $(0,0)$.

7. $\lambda(-2,1,1)$.

8. $\lambda(2,-1,3)$.

9. $\lambda(3,1,-5,0) + \mu(0,1,0,1)$.

10. strijdig.

11. $(2,1,-1,0) + \lambda(1,1,1,-1)$.

12. $(3,1,0,0) + \lambda(1,2,1,0) + \mu(7,5,0,-1)$.

13. $(1,-1,1)$.

14. $(1,1,0) + \lambda(-2,1,1)$.

15. strijdig.

16. $(0,0,-2) + \lambda(-2,1,1)$.

17. oplossingen voor alle a;
$a = 0$: $(1,-1,0) + \lambda(2,0,1)$;
$a \neq 0$: $(1,-1,0)$.

18. oplossingen voor $a = 3$ en $a = \frac{1}{2}$;
$a = 3$: $(-1,9)$; $a = \frac{1}{2}$: $(0,3) + \lambda(1,-1)$.

19. oplossingen voor $a \neq 2$;
$a = -1$: $(0,1,-1) + \lambda(1,-4,5)$
$a \neq -1$, $a \neq 2$: $\frac{1}{a-2}(-1,1,a^2-3)$.

21. 1) 3. 2) 4.

22. 2.

23. 1) 2. 2) 3.

24. 0.

25. a = 8; b = 6.

26. -1.

27. dim = 0 als $a \neq 3$ en $a \neq \frac{1}{2}$;
dim = 1 als a = 3;
dim = 2 als $a = \frac{1}{2}$;
dim = 3 voor geen enkele a.

28. $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

<u>Serie 12</u>

1. a) 0. b) -216. c) -45.

2. a) 1. b) 0.

3. a) 73. b) -8.

4. a) 1. b) 484.

5. x = 0; x = 1.

6. x = -5; x = 2; x = 3.

7. a). $3\frac{1}{2}$. b) 3.

8. 3/2.

9. 0.

10. 23.

11. 2.

12. 6.

13. 1.

14. nee.

15. ja.

16. ja.

17. $z_1 = 3e^{-\pi i}$; $z_2 = 2e^{\pi i/2}$; $z_3 = \sqrt{2}\ e^{\pi i/4}$; $z_4 = 2e^{-\frac{5\pi i}{6}}$.

18. $z_1 = 2e^{-\frac{2}{3}\pi i}$; $z_2 = 2e^{\pi i}$; $z_1 + z_2 = 2\sqrt{3}e^{-\frac{5\pi i}{6}}$.

19. $\sqrt{3} + i$; $1 + i$; $-3 + i\sqrt{3}$; $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

20. $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\ i$; $\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\ i$.

Serie 13

6. b) $w = \cos(\arg z) - \frac{1}{2}$.

7. $\arg w = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} \text{ als } \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \\ -\frac{\pi}{4} \text{ als } -\pi < \varphi < \pi/2 \end{cases}$,

$|w| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ |1 - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}|$.

8. $|a|^2 \geqslant p$.

9. $i + e^{\frac{\pi i}{4}(1 + 2k)}$, $k = 0,1,2,3$.

10. $e^{\frac{k\pi i}{6}}$, $k = 1,2,3,4,5,7,8,9,10,11$.

11. $2 - i + e^{\frac{\pi i}{12}(1 + 4k)}$ $k = 0,1,2,3,4,5$.

12. $e^{\frac{k\pi i}{6}}$ $k = 1,2,\ldots,11$.

13. $\dfrac{\sin(p-k+1)\varphi\ \cos(p+k)\varphi}{\sin\varphi}$.

14. $\dfrac{\sin(p-k+1)\varphi\ \sin(p+k)\varphi}{\sin\varphi}$.

15. $i(1 - e^{i})$.

16. $\frac{\sqrt{2}}{3\pi} e^{-2\pi\sqrt{2}}$.

17. $\frac{a}{a^2+b^2}$.

Serie 14

1. A. b) e^x.

   c) $\lambda e^x + \mu x^2 e^x$.

2. B. b) x.

   c) $\lambda x \log x + \mu x$.

   d) $x(\log x + 1)$.

3. A. $3e^x - 2xe^x$.

4. B. $ae^x + be^{2x} + ce^{3x}$.

5. B. $a \cos x + b \sin x + cx \cos x + dx \sin x$; a,b,c,d reëel.

6. A. $a + be^x + ce^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{1}{2} x\sqrt{3} + de^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{1}{2} x\sqrt{3}$; a,b,c,d reëel.

7. B. $ae^{-2x} + be^x \cos x + ce^x \sin x$; a,b,c reëel.

8. A. $- x - 2 + ae^x$; a reëel.

9. A. $\frac{1}{12} e^x + ae^{-2x} + be^{-3x}$; a,b reëel.

10. A. $\frac{1}{50} (3 \cos x + 4 \sin x) + ae^x + be^{-2x} + ce^{3x}$; a,b,c reëel.

11. A. $m = 0$: $\frac{1}{2} ax^2 + cx + d$; c,d reëel.

    $m \neq 0$: $(\lambda - \frac{bx}{2m})\cos mx + (\mu + \frac{ax}{2m})\sin mx$; λ,μ reëel.

12. A. $e^x(x^3 - 3x^2 + ax + b) + e^{-x}(cx + d)$; a,b,c,d reëel.

13. B. $\frac{1}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x + ae^{2x} \cos x + be^{2x} \sin x$; a,b reëel.

14. B. $xe^{4x} - \frac{1}{8} e^{-4x} + ae^{4x}$; a reëel.

15. B. $(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4})e^{3x} + ae^x + be^{2x}$; a,b reëel.

16. B. $\frac{1}{4}x \sin x - \frac{1}{4}x^2 \cos x + a \cos x + b \sin x$; a,b reëel.

17. $x(t) = ce^{-\frac{1}{60}t}$; $y(t) = ce^{-\frac{1}{30}t}$, $z(t) = ce^{-\frac{1}{30}t} + \frac{c}{30}te^{-\frac{1}{30}t}$.

Serie 15

1. A. $\frac{1}{e}$.
2. B. $\frac{1}{2}$.
3. * $\frac{1}{2}\sin 2$.
4. * 2.
5. A. 1.
6. B. $\frac{11}{18}$.
7. A. convergent.
8. B. convergent.
9. * divergent.
10. B. convergent.
11. B. divergent.
12. A. convergent.
13. B. $p > 2$ convergent.
    $p \leq 2$ divergent.
14. A. convergent.
15. * convergent.
16. A. convergent.
17. A. divergent.
18. B. convergent.
19. A. convergent.
20. * divergent.
21. A. divergent.
22. B. divergent.
23. * divergent.
24. A. divergent.
25. B. convergent.
26. B. divergent.
27. * convergent.
28. * divergent.
29. * convergent.
30. B. divergent.
31. * $p \leq 1$ divergent.
    $p > 1$ convergent.
32. * $0 < p < 1$ convergent.
    $p \geq 1$ divergent.
33. A. divergent.
34. A. divergent.
35. * convergent.
36. A. convergent.
37. B. convergent.
38. B. convergent.
39. B. relatief convergent.
40. * relatief convergent.
41. A. relatief convergent.
42. A. relatief convergent.
43. * divergent.
44. B. relatief convergent.

Serie 16

1. A. a) 0. b) $e^{-\frac{1}{2}}$. c) 9.

2. B. a) 0. b) $e^{\frac{1}{3}}$. c) 1.

3. B. a) 1) 1.
2) $x = 1$, $x = -1$ divergent.
3) $\dfrac{2(3x^2 - 8x + 6)}{(1-x)^3}$.

b) 1) 1.
2) $x = 1$, $x = -1$ divergent.
3) $\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{x}\log(1-x)$.

4. A. a) 1) 1.
2) $x = 1$, $x = -1$ abs. conv.
(3) $\frac{1}{2}(1+x^2)\cdot\arctan x - \frac{x}{2})$.

b) 1) 1.
2) $x = 1$, $x = -1$ divergent.
3) $\dfrac{x}{1-x} - \log(1-x)$.

c) 1) ∞
3) $1 - \frac{1}{2}x^2 + (x-1)e^x$.

5. * convergent voor alle x; $S(x) = -\cos x \log(1-\sin x)$; $S(\frac{\pi}{2}) = 0$.

6. A. a) $|x| > 1$. b) $x > -\frac{1}{2}$. c) $x < 0$ of $x > 1$.

7. B. a) $-3 < x < -1$. b) $x > 0$. c) $x = -2$ conv.; $\left.\begin{array}{l} x \neq -2 \\ x \neq 0 \end{array}\right\}$ divergent

8. B. a) 1) $\frac{1}{3}$.
2) $x = \frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{3}$ divergent.

b) 1) 1.
2) $x = 1$; $x = -1$ divergent.

9. A. a) 1) $\frac{1}{3}$.
2) $x = \frac{1}{3}$; $x = -\frac{1}{3}$ abs. conv.

b) 1) $\frac{3}{e}$.
2) $x = \frac{3}{e}$; $x = -\frac{3}{e}$ divergent.

Serie 17

1. A. a) $1 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{47}{40}x^4 - \frac{5923}{5040}x^6 + \dots$.

b) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + \dots$.

2\. B. a) $1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{37}{24}x^4 - \frac{1111}{720}x^6 + \dots$.

b) $x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 - \dots$.

3\. B. a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{3})^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{3!}(x - \frac{\pi}{3})^3 + \dots$.

b) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^2\sqrt{2}}\,\frac{(x-2)^2}{2!} + \dots$.

4\. A. a) $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \dots$.

b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\{1 + \frac{x - \frac{\pi}{4}}{1!} - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2!} - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^3}{3!} + \dots\}$.

5\. A. a) $-\frac{1}{2}$. b) -1. c) 1.

6\. B. a) 1. b) $\frac{40}{3}$. c) $\frac{1}{5}$.

7\. B. a) convergent. b) divergent.

8\. A. a) convergent. b) divergent.

9\. A. $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) > 0$.

10\. B. $-\mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z) < +\mathrm{Re}(z)$.

11\. B. fout $< \frac{1}{7!}\cdot\frac{72}{71} = \frac{1}{4970} < 0{,}21 . 10^{-3}$.

12\. A. vier termen.

13\. A. 0,9950.

14\. * 0,050021.

15\. * -0,40546.

16\. B. 0,09966766.

Serie 18

1. A. $\sqrt{11}$.

2. B. 7.

3. B. $\frac{\pi}{3}$.

4. A. $\frac{\pi}{3}$.

5. B. 3.

6. A. 14.

7. A. 7; $(3,4,4) + \tau(2,3,6)$.

8. B. 11; $(5,4,4) + \tau(2,6,9)$.

9. B. a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{6}$.

10. A. a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{4}$.

11. B. $6x + 5y - 2z = 19$.

12. A. $x + 3y + z = 6$.

13. A. $(3,1,1) + \lambda(0,1,1)$.

14. B. $x + y + z = 7$.

15. B. 2.

16. A. 2.

17. A. a) $2x - 2y - z = 5$.

b) $4x - 8y + z = 4 \pm 27$.

18. A. $2x + 2y + z = 9$;

$x - 2y + 2z = 9$.

19. B. $y + 5 = 0$;

$(-2,-5,0)$ en $(-2,-5,-8)$.

20. B. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

*21. $\underline{c} = \pm(10,-5,10)$.

*22.

*23. 0.

*24. $\sqrt{5}$.

*25. $\frac{\pi}{3}$.

*26. $3x - 2y - 2z = 15$.

*27. $(1,0,0) + \lambda(2,1,1)$.

*28. $-\frac{12}{49}$.

*29. 1) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$;

2) $(2x-11)^2 + (2y+2)^2 = 125$;

3) $16x^2 + (4y+15)^2 = 225$.

*30. 1) $3x - 4y = 25$;

2) $4x + 3y = \pm 25$;

3) $x - 3y = -5$;

4) $x = -5$ en $3y + 4x = 25$.

*31. $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

Serie 19

1. A. $(0,-2,0) + \lambda(1,0,-2)$

$(3,0,0) + \mu(0,1,3)$.

*2. a) $\mathrm{I}\begin{cases}\alpha = x - y \\ z = \alpha(x+y)\end{cases}$; $\mathrm{II}\begin{cases}\beta = x + y \\ z = \beta(x-y)\end{cases}$.

b) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0) + \lambda(1,1,-2)$ en $\mu(1,-1,0)$;

$s = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$;

c) stelsel II.

3. B. a) $(1,0,0) + \lambda(0,1,\pm 1)$;

b) $(-1,0,0) + \lambda(0,1,\pm 1)$.

4. B. $(x-3)^2 - \dfrac{(y-2)^2}{2^2} = 8(z+2)$ hyperbolische paraboloïde.

*5.

$a < -1$	eenbladige hyperboloïde;
$a = -1$	hyperbolische cylinder;
$-1 < a < 0$	tweebladige hyperboloïde;
$a = 0$	geen oplossingen;
$0 < a < 1$	tweebladige hyperboloïde;
$a = 1$	kegel;
$1 < a$	eenbladige hyperboloïde.

6. A.

7. A. $(x-1)^2 + y^2 = 2yz$.

8. A. $x^2 + y^2 + z^2 = 4xy$.

*9. a) $x^2 - y^2 = (z-2)^2$ b) $\begin{cases} y^2 + 2x + 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$

10. B. $x^2 - y^2 - z^2 = 0$.

11. B. $3(x-1)^2 + 4(y+1)^2 - z^2 = 0$.

12. B. $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 4xz + 2yz = 23.$

13. A. $(x-z)(y-z) = 1.$

*14. $2x^2 - 6xy + 6y^2 - 6yz + 2xz + 2z^2 = 2.$

*15. $4(x^2+y^2+z^2) - 10(xy+xz+yz) + 6(x+y+z) = 18.$

16. B. $4xy + 3y^2 - z^2 + 2z = 0$

$$\begin{cases}\lambda(1,0,0)\\(1,0,0) + \mu(-1,-4,8).\end{cases}$$

17. A. a) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

b) $(0,1,0) + \mu(1,0,1)$
$(0,-1,0) + \lambda(1,0,-1).$

*18. A. $4(x-2)(y-1) + 12(x-2)(z-3) + 6(y-1)(z-3) =$
$= 9(x-2)^2 + 12(y-1)^2 + 4(z-3)^2.$

19. A.

20. B.

Serie 20

1. B. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$

2. A. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

3. A. $1;\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix};\quad y = -\frac{1}{3}x;\quad y = 3x.$

4. B. $1;\ \begin{pmatrix} 0.2 & -0.4 \\ -0.4 & 0.8 \end{pmatrix};\quad y = \frac{1}{2}x;\quad y = -2x.$

5. B. a) $\begin{pmatrix} 6 & -7 & -6 \\ 9 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & 9 \end{pmatrix}$.

6. A. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

*7.

8. A. a) 2; b) 2, $A\underline{e}_1$ en $A\underline{e}_2$; c) 1, $\lambda(-3,2,1)$; e) $(1,-2,0) + \lambda(-3,2,1)$.

9. B. a) 2; b) 2, $A\underline{e}_1$ en $A\underline{e}_2$; c) 1, $\lambda(2,-3,-1)$; e) $(1,1,1) + \lambda(2,-3,-1)$.

*10. a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; b) 2, $\mu(7,6,7) + \rho(1,15,10)$;

c) $\lambda(1,-2,-1)$; d) geen origineel.

*11. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & -6 & -6 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$; b) $\mu(1,-6,5)$;

c) $x + y + z = 0$; d) geen origineel.

12. A. $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

13. B. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

*14. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 0 & 30 & 30 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 25 \\ 0 & 0 & 0 \\ 15 & 15 & 25 \end{pmatrix}$.

15. A. $AB = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 6 & -5 & 1 \\ 13 & 2 & -7 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

16\. B. $$AB = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 16 \end{pmatrix} \; ; \; BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 8 & 16 \\ -2 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

17\. B. $A^{16} = I.$

18\. A. $A^{12} = I.$

19\. B. $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

20\. B. $$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -5 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Serie 21

1\. A. a) $\lambda = -3 \rightarrow \rho(-1,2,2)$
$\quad = +9 \quad \tau(-2,-2,1)$
$\quad = -6 \quad \sigma(-2,1,-2)$

B. b) $\lambda = -1 \rightarrow \rho(1,2,2)$
$\quad = 2 \quad \tau(2,1,-2)$
$\quad = 5 \quad \sigma(2,-2,1).$

2\. A. $\lambda = +1\,;\; \sigma(1,2,0) + \tau(0,3,1)$
$\lambda = -1\,;\; \rho(2,-1,3).$

3\. B. $\lambda = +1\,;\; \rho(1,1,1)$

$\lambda = -1\,;\; \tau(1,-1,0) + \sigma(0,1,-1).$

4\. B. a) gespiegeld orthogonaal;
b) direct orthogonaal;
c) niet orthogonaal.

*5. a) direct orthogonaal;
b) gespiegeld orthogonaal;
c) niet orthogonaal.

6. B. $\lambda = -1/9 \quad (u,v,w) = (4,1,8)$
of $\lambda = +1/9 \quad (u,v,w) = (-4,-1,-8)$.

7. A. $\lambda = +1$ ev.: $\mu(0,0,1) + \tau(1,2,0)$
$\lambda = -1$ ev.: $\sigma(2,-1,0)$.

8. A. a) $\gamma = 1$;

b) $$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

d) $\lambda = 1$ ev.: $\mu(1,1,1)$;

e) $D^3 = I$.

9. A.

10. A. Bij $\lambda = 1 \rightarrow \rho(1,1,1) \quad \varphi = \arccos\frac{1}{7}$.

11. B. Bij $\lambda = 1 \rightarrow \rho(1,1,1) \quad \varphi = \text{arcoss}\,\frac{11}{38}$.

Serie 22

1. A. a) $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$; b) $3 \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C, \ |x| < 1$;

c) $\log(\arctan x^2) + C$.

*2. a) $\tan x - x + C$; b) $x \sin x + \frac{2}{3}\cos x - \frac{1}{3} x \sin^3 x + \frac{1}{9}\cos^3 x + C$;

c) $-\log(\arccos x) + C$.

3. a) $\frac{1}{2\cos^2 x} + \log|\cos x| + C$; b) $(x^2 + 2)\sin h\, x - 2x \cosh x + C$;

c) $-\frac{2}{3}\arccos^{3/2} x + C$.

4. B. a) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$; b) $\log|\tanh\frac{x}{2}| + C$;

c) $\sqrt{x^2 - 4} - 2\log|x + \sqrt{x^2 - 4}| + C$.

5. B. $\dfrac{x^{m+1}\,(1-x)^n}{m+1} + \dfrac{n}{m+1}\, I_{m+1,n-1} = I_{m,n}$.

6. B. $I_n = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1)I_{n-2}$.

7. A. $I_n = \frac{1}{2}x^2 \log^n x - \frac{n}{2} I_{n-1}$; $\frac{1}{8}x^2 (4 \log^3 x - 6 \log^2 x + 6 \log x - 3) + C$.

8. A. $I_n = x^{n-1}(x \sin x + n \cos x) - n(n-1)I_{n-2}$.

*9. $I_n = -\frac{1}{2}x^{n-1} e^{-x^2} + \dfrac{n-1}{2} I_{n-2}$; 12.

*10. $\dfrac{7!!}{8!!}\dfrac{\pi}{2}$.

11. A. $\arctan(2y+1) + \dfrac{2y+1}{1+(2y+1)^2} + C$.

12. A. $x + \frac{1}{3} \log|x+1| + \frac{2}{3} \log|x-2| - 2 \log|x+2| + C$.

13. B. $\dfrac{1}{12}\dfrac{y+1}{(y^2+2y+3)^3} + \dfrac{5}{96}\dfrac{y+1}{(y^2+2y+3)^2} + \dfrac{5}{128}\dfrac{y+1}{y^2+2y+3} + \dfrac{5}{256}\sqrt{2}\arctan\dfrac{y+1}{\sqrt{2}} +$

14. B. $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 \log|x+1| + \frac{1}{5} \log|x-2| + \frac{24}{5} \log|x+3| + C$.

15. B. $-\frac{1}{4} \log|x-1| + \frac{1}{4} \log|x+1| - \dfrac{1}{2(x-1)} + C$.

16. B. $\log|x-2| - \frac{1}{2} \log(x^2+1) - \arctan x - \dfrac{1}{2(x^2+1)} + C$.

17. A. $\frac{1}{2}.x^2 + 2x + \frac{1}{4} \log|x| - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{15}{4} \log|x-2| + C$.

18. A. $3 \log|x-4| - \log(x^2+2x+3) - \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \arctan\dfrac{x+1}{\sqrt{2}} + C$.

19. A. $\frac{1}{2} \log(x^2+1) + \dfrac{1}{2(x^2+1)} + C$.

20. B. $\frac{1}{4} \log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2} \arctan x + C$.

<u>Serie 23</u>

1. A. a) $\dfrac{7\pi}{2048}$; b) $\dfrac{16}{3003}$.

2. B. a) $\dfrac{63\pi}{512}$; b) $\dfrac{1}{60}$.

3. B. a) $-\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C$; b) $\log\left|\frac{1-\cos x}{\cos x}\right| + C$;

c) $\frac{1}{4}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + \frac{1}{2(1+\sin x)} + C$.

4. A. a) $\frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \tan x + C$; b) $\tan x - 2\log|\cos x| + C$;

c) $-\frac{1}{2}\log|3+4\cos\frac{1}{2}x| + C$.

5. A. a) $\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{2\tan\frac{1}{2}x-1}{\sqrt{3}} + C$; b) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\log(1+\sin 2x) + C$.

6. B. a) $\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C$; b) $-\frac{1}{16}\log(1-\sin 4x) - \frac{x}{4} + C$.

7. B. $2\sqrt{\frac{x+2}{x+1}} + C$.

8. B. $\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-1}{\sqrt{x^2+2x+2}+1} + C = \log\left|\frac{2+x-\sqrt{x^2+2x+2}}{-x+\sqrt{x^2+2x+2}}\right| + C$.

9. A. $3\arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{2+\cos x}} - \sqrt{(2+\cos x)(1-\cos x)} + C$.

10. A. $\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-x-3-\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+2x+2}-x-3+\sqrt{5}}\right| + C$.

11. B. $\sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\log(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}) + C$.

12. B. $-\frac{7\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

13. B. $\frac{\pi}{4}$.

14. A. $\sqrt{x^2+2x+2} + 2\log(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C$.

15. A. $\log 2$.

16. A. $\log 2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$.

Serie 24

1. A. $\frac{1}{2}$.

2. A. $\frac{16}{3}$.

3. B. $\frac{7}{6}$.

4. B. $\frac{5}{3}\sqrt{5}\ \arctan\frac{3}{4}$.

5. B. $\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$.

6. B. 1.

7. A. $\frac{1}{2}(e\sin 1 - 1)$.

8. A. $\frac{1}{2}(\cos 1 - 1)$.

9. B. $\frac{5}{32}\pi$; $\frac{11}{32}\pi$.

10. B. $\frac{1}{48}$.

11. A. $\frac{3\pi}{4} - \frac{2}{3}$.

12. A. π.

13. A. $\frac{5}{18}$.

14. B. $\frac{1}{2}(e^{a^2}(a^2 - 1) + 1)$.

*15. 45.

*16. 10.

*17. $\frac{3\pi}{4}$.

*18. 16.

*19. $\frac{486}{35}\sqrt{3}$.

*20. $\frac{4\pi}{3}$.

*21. $\frac{16|a|^3}{9}(3\pi - 4)$.

*22. $\frac{32|a|^3}{9}$.

*23. a) $(1 - \frac{\pi}{8})a^2$; b) $\frac{1}{6}a^2$.

*24. $\frac{a^2}{4}(2\pi - 2 - 3\arctan 2)$.

*25. $\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{4\sin^3\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$

$\frac{1}{12}$ $(\alpha = 0)$.

Serie 25

1. A. 0.

2. B. 64.

3. B. $\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4}$.

4. A. $\frac{1}{2}\log 2$.

5. A. $\pi(\frac{\pi}{2} - 1)$.

6. B. $\frac{\pi}{6}$.

7. B. $\frac{11\pi}{192}$.

8. A. $\frac{3}{8}(1, 1, \frac{k+1}{k})$.

9. B. $a^2\sqrt{2}\log(1 + \sqrt{2})$.

10. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{12.13} + \log(\sqrt{12} + \sqrt{13})$.

11. B. $2\pi\sqrt{r^2 + h^2}$.

12. B. $\frac{\pi}{2}\sqrt{2}$.

13. A. $e - \frac{1}{e}$.

14. A. $\frac{\pi^2 |a|}{8}$.

15. A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

16. A. $\frac{a^2}{2}(4 + \pi)$.

*17. a) $\frac{\pi}{12}$; b) $(0,0,\frac{3}{5})$; c) $\frac{\pi}{120}$.

*18. $\frac{7\pi}{3.2^{10}}$

*19. π.

*20. $\frac{1}{48}$.

*21. $2 \log(\sqrt{2} + 1)$.

*22. $\sqrt{6} + \log(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

*23. a) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$; b) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Serie 26

1. A. $\frac{a^2}{2}(\frac{\pi^3}{24} + \pi)$.

2. B. $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.

3. B. $\frac{7}{6}$.

4. A. $\frac{a^2}{9}(20 - 3\pi)$.

5. A. $\frac{49}{9}\pi$.

6. B. $3\pi + 18\sqrt{3} - 36$.

7. B. $2a^2(\pi - 2)$.

8. A. $2\pi a^2\sqrt{2}$.

9. A. $2\pi + 4$ buiten, $2\pi - 4$ binnen.

10. A. $2a^2(\pi + 4 - 4\sqrt{2})$.

11. B. $\frac{\pi|b|(a^4 + b^4)}{8a^2}$.

12. B. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

*13. $\frac{1}{8}\log(2 + \sqrt{3})$.

*14. $8a^2\sqrt{2}$.

*15. a^2.

*16. $\frac{\pi}{4}\sqrt{a^4 + b^4 + a^2b^2}$.

*17. $\frac{4}{9}(20 - 3\pi)$.

*18. $\frac{\pi a^2}{2}(\sqrt{2} - 1)$.

*19. a) $\pi\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\log(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

b) $\pi\sqrt{2} + 5\pi \log(\sqrt{2} + 1)$.