

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE II

Syllabus van het College voor

Eerstejaarsstudenten

Voorjaarssemester 1963

Wiskunde II

Onderafdeling der Wiskunde

Afd. Algemene Wetenschappen

Wiskunde II

SYLLABUS VAN HET COLLEGE
VOOR
EERSTEJAARSSTUDENTEN
VOORJAARSSEMESTER 1963

TYPEWERK VERZORGD DOOR MEJ. A. N. M. VAN DE GRIENDT



TECHNISCHE HOGESCHOOL
EINDHOVEN

Groep Wiskunde

Afd. Algemene Wetenschappen

WISKUNDE II

Syllabus van het college

voor

eerstejaarsstudenten

voorjaarssemester 1963

Technische Hogeschool Eindhoven

Hoofdstuk VI	<u>Lineaire differentiaalvergelijkingen</u>	VI.1 t/m	VI.9
§.1	Inleiding		VI.1
§.2	Lineaire homogene D.V. met constante coëfficiënten		VI.3
§.3	Lineaire inhomogene D.V. met constante coëfficiënten		VI.5
§.4	Trillingen		VI.6
Hoofdstuk VII	<u>Reeksen</u>	VII.1 t/m	VII.28
§.1	Convergentie en divergentie		VII.1
§.2	Reeksen met uitsluitend positieve termen		VII.3
§.3	Reeksen met zowel positieve als negatieve termen		VII.7
§.4	Machtreeksen		VII.12
§.5	Reeksontwikkeling		VII.16
§.6	Numerieke berekeningen		VII.24
§.7	Complexe machtreeksen		VII.26
Hoofdstuk VIII	<u>Metrische meetkunde</u>	VIII.1 t/m	VIII.24
§.1	Inwendig product		VIII.1
§.2	Normalen		VIII.5
§.3	Methoden der kleinste kwadraten		VIII.10
§.4	Cirkel, bol, hyperbol		VIII.12
§.5	Oppervlakken en ruimtekrommen		VIII.15
§.6	Meetkundige plaatsen		VIII.18
§.7	Vectorproduct in R		VIII.21
Hoofdstuk IX	<u>Lineaire afbeeldingen</u>	IX.1 t/m	IX.21
§.1	Inleiding		IX.1
§.2	Definities		IX.2
§.3	Voorstelling door matrices		IX.5
§.4	Vierkante matrices		IX.11
§.5	Orthogonale matrices		IX.17
Hoofdstuk X	<u>Onbepaalde integralen</u>	X.1 t/m	X.18
§.1	Herhaling		X.1
§.2	Rationale integrand		X.5
§.3	Goniometrische integralen, transcendente integrand		X.10
§.4	Wortels in de integrand		X.15
Hoofdstuk XI	<u>Bepaalde integralen</u>	XI.1 t/m	XI.23
§.1	Brokken en repen		XI.1
§.2	Meervoudige integraal, definitie		XI.4
§.3	Herhaalde integralen, dubbelintegralen		XI.8
§.4	Drievoudige integralen		XI.12
§.5	Vlakke oppervlakten		XI.16
§.6	Gebogen lengten en oppervlakten		XI.18
§.7	De errorfunctie		XI.21

HOOFDSTUK VI LINEAIRE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

§.1 Inleiding

Een differentiaalvergelijking

$$F[x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}] = 0$$

is een vraag naar de functies $y = y(x)$ die, gesubstitueerd, de betrekking tot een identiteit in x maken. Het getal n heet de orde der D.V.

Voorbeeld $y''' = x$

Wij zien, dat $y = \frac{1}{24} x^4$ voldoet, maar ook

$$y = \frac{1}{24} x^4 + \lambda x^2 + \mu x + \nu.$$

Er zijn dus ∞^3 veel oplossingen, dwz. er zijn 3 willekeurig te kiezen constanten.

Def. Een lineaire differentiaalvergelijking van de orde n is een D.V. van de soort

$$y^{(n)} + P(x) y^{(n-1)} + \dots + Q(x) y'' + R(x) y' + S(x) y = T(x).$$

Als $T(x) \equiv 0$, dan heet de D.V. homogeen.

Als $T(x) \neq 0$, dan heet de D.V. inhomogeen.

Vb $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0$. De vergelijking van Bessel.

De oplossingen heten Besselfuncties en zijn van groot belang voor de techniek. In hogere semesters worden zij uitvoerig besproken.

Vb $y'' - \mu(1 - y^2) y' + y = 0$, de vergelijking van Van der Pol (1927), is een niet-lineaire differentiaalvlg.

Stelling De oplossingen van een lineaire homogene differentiaalvergelijking van orde n vormen een vectorruimte.

Bewijs

Laat $y = f(x)$ en $y = g(x)$ oplossing zijn, dan is dus

$$f^{(n)}(x) + P(x) f^{(n-1)}(x) + \dots + R(x) f'(x) + S(x) f(x) = 0$$

$$g^{(n)}(x) + P(x) g^{(n-1)}(x) + \dots + R(x) g'(x) + S(x) g(x) = 0.$$

Als λ en μ constanten zijn, dan volgt hieruit dat

$$[\lambda f(x) + \mu g(x)]^{(n)} + P(x)[\lambda f(x) + \mu g(x)]^{(n-1)} + \dots + S(x)[\lambda f(x) + \mu g(x)] = 0.$$

Dus de functie $\lambda f(x) + \mu g(x)$ is ook een oplossing. Dit betekent dat de oplossingen een vectorruimte vormen.

Stelling | De dimensie van de in de vorige stelling genoemde vectorruimte is n .

Deze stelling, die uitdrukt dat elke oplossing $f(x)$ van een lineaire homogene differentiaalvergelijking van orde n te schrijven is als lineaire combinatie van n oplossingen:

$$f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_n f_n(x),$$

is geldig als de coëfficiënten $P(x)$, $Q(x)$, ..., $S(x)$ nette functies zijn. Dit wordt voor een speciaal geval in §.8 bewezen.

Voorbeeld $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Wij zien, dat $y = e^x$ en ook dat $y = e^{2x}$ voldoen.
Dus de algemene oplossing is

$$\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}.$$

Meetkundig gezien vormen de oplossingen een vlak door 0, opgespannen door $\underline{f}_1 \equiv e^x$ en $\underline{f}_2 \equiv e^{2x}$.

Stelling | Als $a(x)$ een oplossing is van de lineaire inhomogene D.V.
 $y^{(n)} + P(x) y^{(n-1)} + \dots + R(x) y' + S(x) y = T(x)$
 en als $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_n f_n(x)$
 alle oplossingen van de bijbehorende lineaire homogene D.V.
 $y^{(n)} + P(x) y^{(n-1)} + \dots + R(x) y' + S(x) y = 0$
 zijn, dan zijn alle oplossingen van de lineaire inhomogene D.V.:
 $a(x) + \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_n f_n(x)$.

Bewijs

Laat $g(x)$ een andere oplossing zijn van de lineaire inhomogene vergelijking dan

$$g^{(n)}(x) + P(x) g^{(n-1)}(x) + \dots + S(x) g(x) = T(x) \text{ en}$$

$$a^{(n)}(x) + P(x) a^{(n-1)}(x) + \dots + S(x) a(x) = T(x).$$

Trek af, dan

$$(g(x) - a(x))^{(n)} + P(x)(g(x) - a(x))^{(n-1)} + \dots + S(x)(g(x) - a(x)) = 0$$

dus $g(x) - a(x)$ is oplossing van de homogene D.V.

Maar alle oplossingen van de homogene D.V. zijn bekend, dus

$$g(x) - a(x) = \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x), \text{ of}$$

$$g(x) = a(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x).$$

Voorbeeld $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$

De oplossingen van de bijbehorende homogene D.V. zijn

$$\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$$

Probeer nu een oplossing van de inhomogene vergelijking te vinden, nl. probeer $y = px + q$. Dan $y' = p$ en $y'' = 0$, dus moet

$$-3p + 2(px + q) \equiv 2x + 1$$

Dus $p = 1$ en $q = 2$, en $y = x + 2 + \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$ is de algemene oplossing van de inhomogene D.V.

Meetkundig stellen de oplossingen een niet door 0 gaand vlak $\underline{a} + \lambda_1 \underline{f}_1 + \lambda_2 \underline{f}_2$ voor, waarin $\underline{a} \equiv x + 2$; $\underline{f}_1 \equiv e^x$; $\underline{f}_2 \equiv e^{2x}$.

§ 2. Lineaire homogene D.V. met constante coëfficiënten.

Het gaat erom een onafhankelijk stel oplossingen te vinden. Dit is eenvoudig bij orde 1.

$$y' - ay = 0 \quad \text{met } a \text{ constant.}$$

Opl. e^{ax} voldoet. Dus de oplossing is λe^{ax}

Methode bij orde $n > 1$: $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$

Stel $y = e^{tx}$, $t = \text{constant}$, dan $t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n = 0$.

Dit is een vergelijking van de graad n in t en heet de karakteristieke vergelijking. Laat de wortels zijn $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, dan zijn

$$e^{t_1 x}, e^{t_2 x}, \dots, e^{t_n x} \quad \text{oplossingen der D.V.}$$

Als alle wortels verschillend zijn, is dus de algemene oplossing

$$\lambda_1 e^{t_1 x} + \lambda_2 e^{t_2 x} + \dots + \lambda_n e^{t_n x}$$

Vb 1. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$ Stel $y = e^{tx}$, dan

$t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0$, dus $t = 1, -2, 3$, waaruit blijkt, dat

e^x, e^{-2x}, e^{3x} oplossingen zijn, dus dat $y = \lambda e^x + \mu e^{-2x} + \nu e^{3x}$ de algemene oplossing is.

Vb 2. $y''' - 8y = 0$. Stel $y = e^{tx}$, dan
 $t^3 - 8 = 0$ of $(t - 2)(t^2 + 2t + 4) = 0$ met wortels
 $t = 2$, $t = -1 + i\sqrt{3}$, $t = -1 - i\sqrt{3}$. Oplossingen zijn dus
 e^{2x} , $e^{-x} e^{ix\sqrt{3}}$, $e^{-x} e^{-ix\sqrt{3}}$. Maar dan zijn ook
 e^{2x} , $\frac{1}{2} e^{-x} (e^{ix\sqrt{3}} + e^{-ix\sqrt{3}})$, $\frac{1}{2i} e^{-x} (e^{ix\sqrt{3}} - e^{-ix\sqrt{3}})$,
 dus e^{2x} , $e^{-x} \cos x\sqrt{3}$, $e^{-x} \sin x\sqrt{3}$ oplossing.
 De algemene oplossing is dus $y = \lambda e^{2x} + e^{-x} (\mu \cos x\sqrt{3} + \nu \sin x\sqrt{3})$.

Vb 3. $y'' - 4y' + 4y = 0$ Stel $y = e^{tx}$, dan
 $t^2 - 4t + 4 = 0$, dus twee maal $t = 2$.
 We vinden slechts één oplossing, nl. e^{2x} . Om de algemene
 oplossing op te schrijven hebben wij er nog een nodig. Om die
 te vinden stellen wij $y = u(x) e^{2x}$. Vul in, dan is, daar
 $y' = u'e^{2x} + 2ue^{2x}$ en $y'' = u''e^{2x} + 4u'e^{2x} + 4ue^{2x}$
 $u'' + 4u' + 4u - 4(u' + 2u) + 4u = 0$ dus $u'' = 0$.
 Hieraan voldoet $u = x$, dus
 xe^{2x} is een andere oplossing en $\lambda e^{2x} + \mu xe^{2x}$ is de algemene
 oplossing.

Net als in dit voorbeeld kunnen wij algemeen bewijzen :

Stelling | Als van de D.V.
 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$
 de karakteristieke vergelijking
 $t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n = 0$
 een k -voudige wortel τ heeft, dan zijn behalve $e^{\tau x}$
 ook $x e^{\tau x}$, $x^2 e^{\tau x}$, ..., $x^{k-1} e^{\tau x}$ oplossingen.

Vb 4. $y^{VI} + 3y'''' + 3y'' + y = 0$
 De karakteristieke vergelijking is
 $t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1 = 0 = (t^2 + 1)^3$
 wortels zijn $t = i$ $t = i$ $t = i$
 $t = -i$ $t = -i$ $t = -i$

Een basis voor de oplossingsruimte is
 e^{ix} , e^{-ix} , xe^{ix} , xe^{-ix} , x^2e^{ix} , x^2e^{-ix}

Een andere basis is

$\cos x$, $\sin x$, $x \cos x$, $x \sin x$, $x^2 \cos x$, $x^2 \sin x$.

Dus de algemene oplossing is

$$y = \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 x \cos x + \lambda_4 x \sin x + \lambda_5 x^2 \cos x + \lambda_6 x^2 \sin x$$

3. Lineaire inhomogene differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

Wegens paragraaf 5 passen wij de volgende methode toe :

Methode : Los eerst de homogene differentiaalvergelijking op.
 Zoek nu één oplossing van de inhomogene vergelijking.
 Wij geven hiertoe geen vast systeem, maar wij zullen die éne oplossing vinden door proberen, waarbij wij door het rechterlid zullen worden geleid.

Voorbeeld 1 $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 3x$

Probeer als oplossing $y = ax + b$ met nader te bepalen a en b .

Dan moet $y' = a$, $y'' = y''' = 0$ dus

$$-5a + b(ax + b) \equiv 3x$$

waaruit $a = \frac{1}{2}$, $b = 5/12$, dus $y = \frac{1}{2}x + 5/12$ voldoet.

De algemene oplossing is dus

$$y = \frac{1}{2}x + 5/12 + \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-2x} + \lambda_3 e^{3x}$$

Voorbeeld 2 $y''' - 8y = 65 \sin x$. Probeer $y = a \sin x + b \cos x$,

dan $(-a \cos x + b \sin x) - 8(a \sin x + b \cos x) \equiv 65 \sin x$

dus $-a - 8b = 0$ en $b - 8a = 65$.

$b = 1$ en $a = -8$, dus $-8 \sin x + \cos x$ is een oplossing.

De algemene oplossing is dus

$$y = \lambda e^{2x} + e^{-x} (\mu \cos x \sqrt{3} + \nu \sin x \sqrt{3}) - 8 \sin x + \cos x.$$

Voorbeeld 3 $y'' + 2y' = 6x^2$

De oplossingen van de homogene vergelijking zijn $\lambda e^{-2x} + \mu$.

De poging om een oplossing van de inhomogene vergelijking van de vorm

$y = ax^2 + bx + c$ te vinden mislukt.

Probeer echter $dx^3 + ex^2 + fx$, dan moet

$$6dx + 2e + 2(3dx^2 + 2ex + f) \equiv 6x^2$$

dus $d = 1$, $e = -\frac{3}{2}$, $f = \frac{3}{2}$. Dus $\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + x^3$ is een oplossing en

$\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + x^3 + \lambda e^{-2x} + \mu$ is de algemene oplossing.

Voorbeeld 4 $y'' - y = 2e^{2x}$

De oplossingen van de homogene vergelijking zijn $\lambda e^x + \mu e^{-x}$

Probeer $y = ae^{2x}$, dan

$$4ae^{2x} - ae^{2x} \equiv 2e^{2x} \quad \text{dus de algemene oplossing is}$$

$$y = \frac{2}{3}e^{2x} + \lambda e^x + \mu e^{-x}$$

Voorbeeld 5 $y'' - y = 2e^x$

Nu mislukt de poging om een oplossing van de soort ae^x te krijgen, omdat die reeds aan de homogene vergelijking voldoet.

Probeer $y = axe^x$, dan blijkt $a = 1$, dus

$$y = xe^x + \lambda e^x + \mu e^{-x} \quad \text{is de algemene oplossing.}$$

4. Trillingen

Wij beschouwen de tweede-orde D.V. in $x = x(t)$ met constante coëfficiënten h en k , beide niet-negatief,

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = f(t).$$

A Voorbeelden

Voorbeeld 1. Mechanische trilling.

Beschouw een lichaam met massa m , dat een rechtlijnige beweging uitvoert onder werking van

- 1) een elastische kracht, gericht naar 0, die wij evenredig aan de uitwijking x nemen : $-ex$
- 2) een wrijvingskracht, gericht naar 0, die wij evenredig aan de snelheid nemen : $-wx$

3) een uitwendige kracht : $f(t)$

Op grond van $k = ma$ volgt $m\ddot{x} = -ex - wx + f(t)$.

Voorbeeld 2. Slinger.

Zij θ de hoek van uitwijking en ℓ de lengte van de slinger.

Langs de boog, waarvan de lengte $= \ell\theta$, geldt

$ma = \text{comp. zwaartekracht} + \text{wrijving} + \text{uitwendige kracht.}$

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - w\dot{\theta} + f(t).$$

Als θ klein is, kan men wegens $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ nemen $\sin \theta \approx \theta$,

dus dan krijgt men

$$m\ell\ddot{\theta} + w\dot{\theta} + mg\theta = f(t).$$

Voorbeeld 3. Electrisch circuit met capaciteit, smoorspoel, weerstand en uitwendige electromotorische kracht $e(t)$.

Over de weerstand treedt op een spanningsval $= Ri$.

Over de capaciteit treedt op een

$$\text{spanningsval} = \frac{q}{c} = \frac{1}{c} \int idt.$$

Door de smoorspoel wordt opgewekt een magnetische flux $\Phi = Li$, dus een

$$\text{inwendige e.m.k.} = - \frac{d\Phi}{dt} = - L \frac{di}{dt}.$$

De som der e.m.k. is gelijk aan de som der spanningsvallen, dus

$$e(t) - L \frac{di}{dt} = Ri + \frac{1}{c} \int idt, \text{ waaruit}$$

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{c} = \frac{de}{dt}.$$

Dit zijn drie voorbeelden van de D.V.

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = f(t)$$

Als $f(t) \equiv 0$, dan spreken wij van een vrije beweging,

als $f(t) \neq 0$, dan van een gedwongen beweging.

Het getal h heet de dempingscoëfficiënt.

Voor een vrije ongedempte beweging blijft er staan

$$\ddot{x} + k^2x = 0,$$

de gewone harmonische trilling met oplossing

$$x = \lambda \sin kt + \mu \cos kt.$$

B Beginvoorwaarden.

In paragraaf 1 is meegedeeld, doch niet bewezen, dat de D.V.

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = f(t)$$

de algemene oplossing

$$x(t) = \lambda\varphi(t) + \mu\psi(t) + a(t)$$

met twee constanten bezigt. Dit voor een ogenblik aanvaardend zien wij dat er precies één oplossing is, die de beginpositie $x(0) = a$ en de beginsnelheid $\dot{x}(0) = b$ heeft.

Dit laatste resultaat zullen wij thans apart bewijzen.

Daarmee wordt het bewijs van de stelling van paragraaf 1 geleverd voor tweede-orde differentiaalvergelijkingen met constante niet-negatieve coëfficiënten.

Stelling Als $\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = f(t)$, met $h \geq 0$, oplossingen heeft dan is er precies één oplossing $x(t)$ waarvoor $x(0)$ en $\dot{x}(0)$ voorgeschreven waarden aannemen.

Bewijs Stel $u(t)$ en $v(t)$ zijn beide oplossingen met $u(0) = v(0) = a$ en $\dot{u}(0) = \dot{v}(0) = b$.

Dan is $w(t) \equiv u(t) - v(t)$ oplossing van

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0 \text{ en } w(0) = 0 \text{ en } \dot{w}(0) = 0$$

$$\text{Dus } \ddot{w} + 2h\dot{w} + k^2w = 0$$

$$2\dot{w}\ddot{w} + 4h\dot{w}^2 + 2k^2w\dot{w} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{w}^2) + 4h\dot{w}^2 + \frac{d}{dt}(k^2w^2) = 0$$

Integreer tussen 0 en τ , dan volgt

$$\begin{aligned} \dot{w}^2(\tau) - \dot{w}^2(0) + k^2w^2(\tau) - k^2w^2(0) + 4h \int_0^\tau \dot{w}^2 dt &= \\ = \dot{w}^2(\tau) + k^2w^2(\tau) + 4h \int_0^\tau \dot{w}^2 dt &= 0 \end{aligned}$$

Maar links is, daar $h \geq 0$, niet negatief en rechts = 0, dus moet $w(\tau) = 0$ voor alle τ , dus $w(t) \equiv 0$, dus $u(t) \equiv v(t)$.

C Vrije trillingen $\ddot{x} + 2hx + k^2x = 0$ Stel $x = e^{at}$

De karakteristieke vergelijking $a^2 + 2ha + k^2 = 0$ heeft complexe wortels als de discriminant

$$h^2 - k^2 < 0$$

Stel $h^2 - k^2 = -p^2$, dan zijn de wortels $-h \pm pi$, dus de oplossing is $x(t) = e^{-ht}(\lambda \cos pt + \mu \sin pt)$

Zetten wij $\lambda = A \sin \varphi$ en $\mu = A \cos \varphi$, dan

$$x(t) = Ae^{-ht} \sin(pt + \varphi)$$

waarbij A als beginamplitude en φ als (begin)phase moet worden opgevat.

De karakteristieke vergelijking heeft reële wortels als $h^2 - k^2 > 0$

Stel $h^2 - k^2 = q^2$, dan zijn de wortels $-h \pm q$ (beide negatief) en de oplossing is

$$x(t) = \lambda e^{-(h-q)t} + \mu e^{-(h+q)t}$$

Duidelijk is dat deze oplossing niet periodiek is en dat $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

De demping is zo groot, dat de elastische kracht geen trillingen meer veroorzaakt.

Wanneer tenslotte de wortels van de karakteristieke vergelijking gelijk zijn, dus wanneer

$$h^2 - k^2 = 0, \text{ dan is de oplossing}$$

$$x(t) = \lambda e^{-ht} + \mu t e^{-ht} = e^{-ht}(\lambda + \mu t)$$

Ook hier is geen periodieke beweging. Later zullen wij zien, dat ook hier $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

D Gedwongen trillingen $\ddot{x} + 2hx + k^2x = A_0 \sin \omega t$

Wij nemen dus een periodieke sinusvormige uitwendige kracht aan met positieve amplitude A_0 en frequentie ω .

Wij hebben één oplossing van deze inhomogene vergelijking nodig.

Probeer $x = a \sin \omega t + b \cos \omega t$, of liever probeer

$$x = a \sin(\omega t + \delta), \text{ waarin}$$

$a > 0$ en $-\frac{\pi}{2} < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ nader te bepalen zijn.

Dan moet

$$- a\omega^2 \sin(\omega t + \delta) + 2h\omega \cos(\omega t + \delta) + k^2 a \sin(\omega t + \delta) = A_0 \sin \omega t.$$

$$a(k^2 - \omega^2) \sin(\omega t + \delta) + 2h\omega \cos(\omega t + \delta) = A_0 \sin \omega t$$

$$a(k^2 - \omega^2)(\sin \omega t \cos \delta + \cos \omega t \sin \delta) + 2h\omega (\cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta) = A_0 \sin \omega t$$

$$\sin \omega t [a(k^2 - \omega^2) \cos \delta - 2h\omega \sin \delta - A_0] + \\ + \cos \omega t [a(k^2 - \omega^2) \sin \delta + 2h\omega \cos \delta] = 0$$

Stel beide coëfficiënten nul, dan volgt

$$\tan \delta = \frac{2h\omega}{\omega^2 - k^2} \quad \text{en (neem som van kwadraten)}$$

$$a = \frac{A_0}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}}$$

waardoor de éne oplossing van de inhomogene vergelijking is bepaald.

De algemene oplossing luidt, in het geval $h^2 - k^2 < 0$:

$$x(t) = a \sin(\omega t + \delta) + Ae^{-ht} \sin(pt + \varphi)$$

Na verloop van tijd is echter, wegens de e-macht, het tweede stuk klein geworden. De grootste bijdrage wordt geleverd door

$$x(t) = a \sin(\omega t + \delta) \quad \text{met} \quad \begin{cases} \tan \delta = \frac{2h\omega}{\omega^2 - k^2} \\ a = \frac{A_0}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} \end{cases}$$

Wij hebben dus t.o.v. de uitwendige kracht een phaseverschuiving δ .

De amplitude van de oplossing is maximaal, als

$$(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2 \quad \text{minimaal is, dus als} \quad -2(k^2 - \omega^2) + 4h^2 = 0 \\ \text{dus als} \quad \omega^2 = k^2 - 2h^2 \quad \text{Dan} \quad a = \frac{A_0}{2h\sqrt{k^2 - h^2}}$$

Men spreekt dan van resonantie tussen uitwendige kracht en het trillende systeem. De resonantie wordt catastrofaal, als $h = 0$ (geen damping) en $\omega = k$.

HOOFDSTUK VII REEKSEN§.1 Convergentie en divergentie.

Eindig veel getallen hebben een som : $u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Oneindig veel getallen $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ kunnen wij niet optellen.

Vorm de rij

$$s_1 = u_1; s_2 = u_1 + u_2; s_3 = u_1 + u_2 + u_3; \text{ etc., dus algemeen}$$

$$s_n = \sum_{i=1}^n u_i = n\text{-de partiële som} = \text{som der eerste } n \text{ termen.}$$

Def. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ bestaat en gelijk is aan S , dan heet de oneindige reeks $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ convergent met som S .
Als $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ niet bestaat, dan heet de reeks divergent, en dan heeft hij geen som.

Vb.1 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 \dots; u_n = n; s_n = \frac{1}{2}n(n+1) \rightarrow \infty$,
dus de reeks is divergent.

Vb.2 $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots; u_n = (-1)^{n+1}; s_n$ is afwisselend
0 en 1, dus de reeks is divergent.

Vb.3 $1 + r + r^2 + r^3 + \dots; u_n = r^{n-1}; s_n = \frac{1-r^n}{1-r}$ voor $r \neq 1$.
Als $|r| < 1$ dan is de reeks convergent met $S = \frac{1}{1-r}$.
Als $|r| \geq 1$ dan is de reeks divergent.

Vb.4 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots; u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ en
 $s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$;
wegens $s_n \rightarrow \infty$ is de reeks divergent.

Vb.5 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots; u_n = \frac{1}{n}$, de harmcnische reeks.

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\qquad \qquad \qquad > \frac{1}{2} \qquad \qquad \qquad > \frac{1}{2} \qquad \qquad \qquad > \frac{1}{2}$$

$$\text{dus } s_1 = 1; s_2 = 1 + \frac{1}{2}; s_4 > 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}; s_8 > 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}; \\ s_{16} > 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}; \text{ etc.}$$

$$\text{Algemeen } s_{2^k} > 1 + k \cdot \frac{1}{2}.$$

Hieruit volgt dat $s_n \rightarrow \infty$, dus dat de reeks divergeert. Zo is bijvoorbeeld $s_n > 1000$, als wij $k > 2000$ nemen, dus als wij 2^{2000} termen nemen.

$$\text{Vb.6 } \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} + \dots; u_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right] \\ s_n = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right] = \\ = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right]. \text{ Dus } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{3}{4}.$$

De reeks is convergent met som $\frac{3}{4}$.

Stelling: Als de reeks $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ convergent is, dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Bewijs: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S; \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = S, \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$

Opm. Het omgekeerde van de stelling geldt niet (zie vb.4 en 5).

Notatie: Kortheidshalve noteren wij de reeks $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ door $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Dit is dus een symbool voor de reeks. Het opschrijven van dit symbool behoeft niet te betekenen dat de reeks een som heeft.

Vb.6 De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ heeft som $S = \frac{3}{4}$.

Vb.5 De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent, heeft geen som.

§.2 Reeksen met uitsluitend positieve termen.

Stelling: Een reeks met positieve termen is convergent dan en slechts dan als de rij der partiële sommen begrensd is.

Bewijs

Daar alle u_i positief zijn, is de rij der partiële sommen

$$s_1 = u_1; s_2 = u_1 + u_2; s_3 = u_1 + u_2 + u_3; s_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4; \dots$$

een monotoon stijgende rij. Er kunnen nu twee gevallen optreden, n^o.

- a) deze rij is begrensd, dwz. alle $s_n < G$. Op grond van een oude stelling (hoofdstuk I, pag.17) bestaat dan $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$; de reeks is dan convergent.
- b) deze rij is niet begrensd. Dan gaat s_n naar oneindig, dus de reeks is divergent.

Vergelijkingsstelling voor reeksen met positieve termen.

1. Als $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ convergent is en als vanaf zekere N geldt $u_n \leq C v_n$,
dan is $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergent.

2. Als $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ divergent is en als vanaf zekere N geldt $u_n \geq C v_n$, $C > 0$,
dan is $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ divergent.

Bewijs 1.

$$u_1 + \dots + u_n = u_1 + \dots + u_N + u_{N+1} + \dots + u_n \leq \\ \leq u_1 + \dots + u_N + C(v_{N+1} + \dots + v_n) < u_1 + \dots + u_N + CS = \text{constant.}$$

De partiële sommen zijn begrensd, dus $\sum u_n$ is convergent.

Bewijs 2.

$$u_1 + \dots + u_n = u_1 + \dots + u_N + u_{N+1} + \dots + u_n \geq \\ \geq u_1 + \dots + u_N + C(v_{N+1} + \dots + v_n), \text{ wat elke grens overschrijdt.}$$

Dus $\sum u_n$ is divergent.

Stelling | 1. Als $p < 1$, dan is $\sum \frac{1}{n^p}$ divergent.
2. Als $p > 1$, dan is $\sum \frac{1}{n^p}$ convergent.

Bewijs 1.

Als $p \leq 1$, dan is $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$. Daar $\sum \frac{1}{n}$ divergent is, volgt met de vergelijkingstelling de bewering.

Bewijs 2.

Zij $p > 1$. Wij tekenen de grafiek van $y = \frac{1}{x^p}$. Dan

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{(n-1)^p} + \frac{1}{n^p} < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^p} = 1 + \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_1^n =$$

$$= 1 - \frac{1}{1-p} + \frac{1}{1-p} \frac{1}{n^{p-1}} < 1 + \frac{1}{p-1}, \text{ dus } s_n \text{ begrensd, dus de reeks}$$

is convergent.

Wij kunnen bij vele reeksen tot convergentie of divergentie besluiten met behulp van de vergelijkingstelling en de

Standaardreeksen

$$\left\| \begin{array}{ll} p > 1 : \sum \frac{1}{n^p} \text{ convergent} & p \leq 1 : \sum \frac{1}{n^p} \text{ divergent} \\ |q| < 1 : \sum q^n \text{ convergent} & |q| \geq 1 : \sum q^n \text{ divergent.} \end{array} \right.$$

Vb.1 Onderzoek $\sum \tan \frac{1}{n^2}$. Merk op, dat $\tan \frac{1}{n^2} = \frac{\tan \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n^2}$.

Nu is $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$, dus vanaf zekere n is $\frac{\tan \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} < 2$.

Vanaf die n is dus $\tan \frac{1}{n^2} < 2 \cdot \frac{1}{n^2}$ } $\sum \tan \frac{1}{n^2}$ convergent.
 Tevens is $\sum \frac{1}{n^2}$ convergent

Vb.2 Onderzoek $\sum \sin \frac{1}{n}$. Merk op: $\sin \frac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n}$.

Nu is $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$, dus vanaf zekere n is $\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} > \frac{1}{2}$.

Vanaf die n is dus $\sin \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ } $\sum \sin \frac{1}{n}$ divergent.
 Tevens is $\sum \frac{1}{n}$ divergent

Vb.3 Onderzoek $\Sigma \arctan e^{-n}$. Merk op: $\arctan e^{-n} = \frac{\arctan e^{-n}}{e^{-n}} e^{-n}$.

Nu is $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan e^{-n}}{e^{-n}} = 1$, dus vanaf zekere n is $\frac{\arctan e^{-n}}{e^{-n}} < 2$.

Vanaf die n is dus $\arctan e^{-n} < 2 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^n$ } $\Sigma \arctan e^{-n}$ convergent.
 tevens is $\Sigma \left(\frac{1}{e}\right)^n$ convergent

Vb.4 Het onderzoek van $\Sigma \sin \frac{1}{n^2}$ kan geschieden met de methode van voorbeeld 1, maar ook als volgt:

Bekend is dat $\sin \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Daar $\Sigma \frac{1}{n^2}$ convergeert is ook $\Sigma \sin \frac{1}{n^2}$ convergent.

Tenslotte behandelen wij nog twee criteria voor convergentie, waarvan de toepasbaarheid soms tegenvalt.

criterium van Cauchy voor reeksen met positieve termen.

1. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell < 1$, dan is Σu_n convergent.
2. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell > 1$, dan is Σu_n divergent.

Bewijs 1.

Uit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell < 1$ volgt, dat vanaf zekere n geldt $\sqrt[n]{u_n} < \frac{1 + \ell}{2}$,

dus $u_n < q^n$ met $q = \frac{1 + \ell}{2} < 1$. Daar Σq^n convergent is, is ook Σu_n convergent.

Bewijs 2.

Uit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell > 1$ volgt, dat vanaf zekere n geldt $\sqrt[n]{u_n} > 1$,

dus $u_n > 1$, dus niet $u_n \rightarrow 0$. De reeks is divergent.

criterium van d'Alembert voor reeksen met positieve termen.

1. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$, dan is $\sum u_n$ convergent.
2. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1$, dan is $\sum u_n$ divergent.

Bewijs 1.

Volgens het gegeven is voor $n > N$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q \text{ met } q = \frac{1 + \ell}{2} < 1, \text{ dus } u_{N+1} < q u_N = q^{N+1} \cdot \frac{u_N}{q}$$

$$\text{en } u_{N+2} < q u_{N+1} < q^{N+2} \cdot \frac{u_N}{q} \text{ dus algemeen voor } n > N \text{ is}$$

$$u_n < q u_{n-1} < q^n \frac{u_N}{q}, \text{ dus } u_n < C q^n \text{ waaruit de convergentie volgt.}$$

Bewijs 2.

Voor $n > N$ is dus $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, dus $u_{n+1} > u_n$.

De termen naderen dus niet tot 0. De reeks divergeert.

Vb.1 Onderzoek $\sum \frac{87^n}{n!}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{87}{n+1} = 0$.

Volgens d'Alembert is de reeks dus convergent.

Vb.2 Onderzoek $\sum \frac{1}{(\log n)^n}$. Daar $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0$,

is volgens Cauchy de reeks convergent.

Vb.3 Onderzoek $\sum \frac{1}{1+n^2}$. Daar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ is d'Alembert niet van

toepassing, evenmin Cauchy. Met vergelijken blijkt eenvoudig, dat de reeks convergent is.

Vb.4 Zelfs $\sum \frac{1}{n}$ is noch met d'Alembert, noch met Cauchy te beslissen.

Wij weten echter reeds dat deze reeks divergeert.

Om het vertrouwen te herwinnen:

Vb.5 Onderzoek $\sum \frac{n!}{n^n}$.

Volgens d'Alembert is wegens

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

de reeks convergent.

Opm. Wij herhalen nog eens, dat de stellingen van §.2 slechts gelden voor reeksen met uitsluitend positieve termen.

§.3 Reeksen met zowel positieve als negatieve termen.

A. Per definitie komt het convergentie-onderzoek van een reeks neer op het onderzoek van de limiet van $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n$.

De resultaten van de vorige paragraaf zijn, wanneer het reeksen met niet-uitsluitend positieve termen betreft, niet van toepassing.

Zij

$$P_n = \text{som der positieve termen in } s_n, \text{ en} \\ -N_n = \text{som der negatieve termen in } s_n. \text{ Dan is } s_n = P_n - N_n.$$

Beschouw nu de beide limieten $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n$.

Wanneer beide limieten bestaan, dan bestaat ook $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ en is

de reeks convergent.

Wanneer één der limieten niet, en de andere wel bestaat, dan bestaat $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ niet en is de reeks divergent.

Wanneer echter beide limieten niet bestaan, is er over het bestaan van $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ nog niets te zeggen. In dit laatste geval is het convergentie-onderzoek moeilijk, behalve in het hieronder genoemde geval C.

B. Stelling | Als de reeks van de absolute waarden der termen convergent is, dan is de reeks zelf ook convergent.

Gegeven: $\sum |u_n|$ convergent.

Te bewijzen: $\sum u_n$ convergent.

Bewijs.

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = P_n - N_n \text{ met } P_n \geq 0, N_n \geq 0.$$

$$\text{Dus } |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| = P_n + N_n.$$

Daar $\sum |u_i|$ convergent is, en positieve termen heeft, volgt op grond van de eerste stelling van paragraaf 2, dat de rij $P_n + N_n$ begrensd is. Maar dan is, omdat P_n en N_n positief zijn, zowel P_n als N_n begrensd. Dus bestaan de beide limieten $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n$. Maar dan bestaat ook $\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n - N_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ dus de reeks $\sum u_i$ is convergent.

Def. Een reeks $\sum u_i$ heet absoluut convergent, als de reeks der absolute waarden $\sum |u_i|$ convergent is.

Gevolg: Een absoluut convergente reeks is convergent.

Vb.1 $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \dots$

Daar $\sum \frac{1}{n^2}$ convergent is, is deze reeks absoluut convergent, dus convergent.

Vb.2 Voor welke x is $\sum \frac{x^n}{n!}$ convergent ?

Wij onderzoeken eerste $\sum \frac{|x|^n}{n!}$. Daar dit een reeks met positieve termen is, mogen wij d'Alembert erop toepassen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Dus $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ is convergent voor alle x . De oorspronkelijke reeks is dus eveneens convergent voor alle x .

Vb.3 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$

Daar $\sum \frac{1}{n}$ divergent is, is de reeks niet absoluut convergent. Wij kunnen over de convergentie nog geen uitspraak doen.

C. Def. Een alternerende reeks is een reeks, waarvan de termen afwisselend positief en negatief zijn. Dus $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots$ met $a_i \geq 0$.

Stelling | Als een reeks $\sum (-1)^n a_n$

- 1) alternerend is,
- 2) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \dots$,
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,

dan is de reeks convergent.

m.a.w. | Een alternerende reeks, waarvan de absolute waarden van de termen monotoon afnemen en tot nul naderen, is convergent.

Bewijs.

$s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 - a_2$, $s_3 = a_1 - a_2 + a_3$, $s_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$, etc.

De getallen $s_2, s_4, s_6, \dots, s_{2n}$ nemen toe, zijn begrensd (nl. $\leq a_1$), dus $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$ bestaat.

De getallen $s_1, s_3, s_5, \dots, s_{2n+1}$ nemen af, zijn begrensd (nl. ≥ 0), dus $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1}$ bestaat.

Nu is $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = 0$, dus $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$.

De reeks is convergent.

De vier volgende reeksen zijn alle convergent op grond van de stelling. Zij zijn echter niet absoluut convergent.

Vb.1 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

Vb.2 $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots$

Vb.3 $1 - \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} - \frac{1}{\log 4} + \dots$

Vb.4 De reeks $\arctan 1 - \frac{1}{2} \arctan 2 + \frac{1}{3} \arctan 3 - \dots =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \arctan n}{n} \text{ is alternerend.}$$

Wegens $\arctan n < \frac{1}{2} \pi$ naderen de termen tot 0.

Om te onderzoeken of de termen, in absolute waarde genomen, monotoon dalen beschouwen wij

$$\left(\frac{\arctan x}{x} \right)' = \frac{1}{x^2} \left[\frac{x}{1+x^2} - \arctan x \right].$$

Vanaf zekere x is deze uitdrukking negatief. Hieruit volgt de monotonie, en dus de convergentie van de reeks.

$$\text{Vb.5} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{\sqrt{3} - 1} + \frac{1}{\sqrt{4} + 1} - \frac{1}{\sqrt{5} - 1} + \dots$$

Deze reeks is alternerend, de termen naderen tot nul, maar er is geen monotonie. Toch kunnen wij in dit geval wegens

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n [\sqrt{n} - (-1)^n]}{n-1} = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$$

tot een beslissing komen. Daar

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1} \text{ convergent en } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \text{ divergent is, is de}$$

oorspronkelijke reeks divergent.

Stelling | Zij S de som van een alternerende reeks waarvan de absolute waarden der termen monotoon naar 0 naderen. Dan is de fout bij afbreken na de n^e term kleiner dan de eerstvolgende term.

Bewijs.

Voor de alternerende reeks

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - a_n + a_{n+1} - a_{n+2} + \dots$$

bestaat de som S en geldt voor a_1 :

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq a_{n+2} \geq \dots$$

Dus

$$|S - s_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \dots \leq a_{n+1}.$$

D. Def. | Een reeks $\sum u_i$ heet relatief convergent als $\sum u_i$ convergent, maar $\sum |u_i|$ divergent is.

Voorbeeld:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \text{ is relatief convergent.}$$

Als men bij een relatief convergente reeks de termen in een andere volgorde neemt, dan behoeft de som van de nieuwe reeks niet dezelfde te zijn als die van de oude reeks. Zelfs kan de nieuwe reeks divergent zijn. Wij lichten dit toe aan een voorbeeld en bewijzen vervolgens dat bij een absoluut convergente reeks dergelijke moeilijkheden zich niet voordoen.

Voorbeeld:

De reeks $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ is convergent met een som S , waarvoor op grond van de tweede stelling onder C geldt

$$1 - \frac{1}{2} < S < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Beschouw nu de reeks

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

die dezelfde termen heeft als de harmonische reeks, echter in andere volgorde. Merk op, dat de som van de eerste drie termen positief is, de som van de volgende drie termen ook, algemeen dat

$$\frac{1}{4p-3} + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2p} = \frac{8p-3}{2p(4p-3)(4p-1)} > 0.$$

Onze reeks is convergent met een som S' , die dus beslist groter is dan $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$. Wij concluderen dat $S < S'$ dus dat de nieuwe reeks een andere som heeft dan de oorspronkelijke.

Stelling Als de reeks $\sum u_i$ absoluut convergent is met som S dan is de reeks, die er uit ontstaat door de termen in een andere volgorde te nemen, eveneens absoluut convergent met dezelfde som S .

Bewijs.

Schrijf voor de partiële sommen van $\sum u_i$ weer

$$s_m = P_m - N_m.$$

Omdat $\sum u_i$ absoluut convergeert, bestaan zowel $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m$ als $\lim_{m \rightarrow \infty} N_m$ en geldt voor de som S van $\sum u_i$

$$S = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m - \lim_{m \rightarrow \infty} N_m.$$

De nieuwe reeks van dooreengegooide termen heeft andere partiële sommen s'_n , die wij weer in positief en negatief deel splitsen volgens

$$s'_n = P'_n - N'_n.$$

De termen uit P'_n komen voor onder die van P_m , voor m groot genoeg;

dus $P'_n \leq P_m$, waaruit $\lim_{n \rightarrow \infty} P'_n \leq \lim_{m \rightarrow \infty} P_m$.

De termen uit P_m komen ook voor onder die van P'_k , voor k groot genoeg; dus $P_m \leq P'_k$, waaruit $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m \leq \lim_{k \rightarrow \infty} P'_k$. Wij concluderen

$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P'_n$ en evenzo $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n = \lim_{n \rightarrow \infty} N'_n$, dus

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n$.

§.4 Machtreeksen.

A. Een oneindige reeks heet een machtreeks in x , als hij luidt

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

dus als $u_n = a_n x^n$, a_n onafhankelijk van x .

Wij vragen ons af voor welke x deze reeks convergeert resp. divergeert.

Stelling | Als een machtreeks convergent is voor $x = \xi$, dan is hij absoluut convergent voor alle x met $|x| < |\xi|$.

Bewijs

Daar $\sum a_n \xi^n$ convergent is, geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \xi^n = 0$, dus vanaf zekere n :

$$|a_n \xi^n| < 1.$$

Nu geldt

$$|a_n x^n| = |a_n \xi^n| \cdot \left| \frac{x}{\xi} \right|^n < \left| \frac{x}{\xi} \right|^n$$

en daar voor alle x met $|x| < |\xi|$ de reeks $\sum \left| \frac{x}{\xi} \right|^n$ convergent is, is ook $\sum |a_n x^n|$ convergent, d.w.z. de oorspronkelijke reeks is absoluut convergent.

Gevolg | Er zijn twee mogelijkheden, namelijk

- 1) de machtreeks is convergent voor alle x ,
- 2) er is een getal R zodat de machtreeks convergeert voor alle $|x| < R$ en divergeert voor alle $|x| > R$.

Dit getal R heet de convergentiestraal van de machtreeks.

Soms kunnen wij direct zien welke waarde R heeft; soms kunnen wij R vinden door toepassing van de criteria van Cauchy of d'Alembert op de reeks der absolute waarden.

Vb.1 $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

Hier is $R = 1$, want er is convergentie voor $|x| < 1$ en divergentie voor $|x| > 1$. Voor $x = 1$ en voor $x = -1$ is de reeks divergent.

Vb.2 $1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$

Toepassing van d'Alembert op $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n^2}$ levert, daar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{|x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x|,$$

dat er convergentie is voor $|x| < 1$ en divergentie voor $|x| > 1$. De convergentiestraal is dus 1. Voor $x = 1$ en voor $x = -1$ is de reeks convergent.

Vb.3 $\frac{1}{2}x + \left(\frac{2}{3}\right)^4 x^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 x^3 + \dots$

Toepassing van Cauchy op $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} |x|^n$ levert, daar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |x| = \frac{|x|}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|x|}{e},$$

dat er convergentie voor $|x| < e$ en divergentie voor $|x| > e$ optreedt, dus dat $R = e$. Voor $|x| = e$ is de reeks divergent omdat dan

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} e^n = \left[\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right]^n > \left(\frac{e}{e}\right)^n = 1.$$

Vb.4 $1 + x + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + \dots + x^{n^2} + \dots$

We zien direct dat $R = 1$, omdat voor $|x| \geq 1$ divergentie optreedt (de n^e term gaat niet naar nul) en voor $|x| < 1$ convergentie optreedt wegens

$$|x^{n^2}| \leq |x^n|.$$

B. Laat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergentiestraal R hebben, dan is voor elke $|x| < R$ de reeks convergent met een som, die een functie van x is.

Wij schrijven voortaan kortheidshalve voor $|x| < R$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s(x).$$

Wij moeten ons echter steeds realiseren, dat deze formule betekent

dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tot som $s(x)$ heeft.

Voorbeeld $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$ voor $|x| < 1$.

Stelling

[Het differentiëren en integreren van een reeks binnen het convergentiegebied]

Als voor $|x| < R$ geldt

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots = s(x)$$

dan geldt voor $|x| < R$ ook

$$\left| \begin{array}{l} a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots = s'(x) \\ \text{en } a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \dots + \frac{1}{n+1}a_nx^{n+1} + \dots = \int_0^x s(t) dt, \end{array} \right.$$

Deze stelling wordt in semester V bewezen.

Toepassing van de stelling op de meetkundige reeks levert

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ voor } |x| < 1$$

en ook

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = \int \frac{dx}{1-x} = - \int \frac{d(1-x)}{1-x} = - \log(1-x)$$

of, als wij x door $-x$ vervangen:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \text{ voor } |x| < 1.$$

Een reeks zoekend voor $\arctan x$ gaan wij uit van

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \dots \text{ voor } |x| < 1.$$

Na integratie volgt

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots \text{ voor } |x| < 1.$$

De zojuist afgeleide formules noemt men de reeksontwikkelingen van $\log(1+x)$ en $\arctan x$. Binnenkort ontmoeten wij nog meer reeksontwikkelingen. Wij zullen de formules

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \end{array} \right\} \text{ voor } |x| < 1,$$

als standaardformules gebruiken voor numerieke berekeningen en voor het bepalen van de som van een aantal reeksen.

Vb.1 Benadering van π .

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} \right) - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} \right) + \dots, \end{aligned}$$

dus $\pi = 3,14159265358979323846264338327950288\dots$

$$\begin{aligned} \text{Vb.2} \quad 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} - \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \dots &= \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} - \dots \right] = 2 \arctan \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vb.3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \sin^2 \frac{n\pi}{3} \text{ heeft convergentiestraal } 1.$$

Bepaal de som voor $|x| < 1$.

Oplossing. Schrijf uit, dan staat er

$$\begin{aligned} &\frac{3}{4} \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8} + \dots \right] = \\ &= \frac{3}{4} \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \dots - \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^9}{9} \dots \right] = \\ &= \frac{3}{4} \left[-\log(1-x) + \frac{1}{3} \log(1-x^3) \right] = \frac{1}{4} \log \frac{(1-x^3)}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Vb.4 Bepaal de som voor $|x| < 1$ van de reeks

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \frac{x^4}{4 \cdot 5} + \dots$$

Oplossing. Ga uit van

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = -\log(1-x).$$

Integratie levert

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \dots &= -\int \log(1-x) dx = \\ &= -x \log(1-x) + x + \log(1-x). \end{aligned}$$

De gevraagde som is dus voor $x \neq 0$ en $|x| < 1$:

$$-\log(1-x) + 1 + \frac{\log(1-x)}{x}, \text{ en nul voor } x = 0.$$

Vb.5 Voor praktische berekening van logaritmen is de reeksontwikkeling van $\log(1+x)$ niet geschikt, wegens langzame convergentie. Door aftrekking van

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$$

volgt, steeds voor $|x| < 1$,

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \dots$$

Zet $x = \frac{1}{2y+1}$, dan volgt voor $y > 0$ de formule

$$\log(y+1) = \log y + 2 \left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{(2y+1)^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2y+1)^5} + \dots \right]$$

die beter hanteerbaar is.

§.5 Reeksontwikkeling.

A. Zij $f(x)$ een veelterm, dus bv. $f(x) = p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4$.

Dan

$$\begin{aligned} f(a+h) &= p_0 (a+h)^4 + p_1 (a+h)^3 + p_2 (a+h)^2 + p_3 (a+h) + p_4 = \\ &= p_0 (a^4 + 4a^3 h + 6a^2 h^2 + 4ah^3 + h^4) + p_1 (a^3 + 3a^2 h + 3ah^2 + h^3) + \\ &\quad + p_2 (a^2 + 2ah + h^2) + p_3 (a+h) + p_4 = \\ &= p_0 a^4 + p_1 a^3 + p_2 a^2 + p_3 a + p_4 + h(4p_0 a^3 + 3p_1 a^2 + 2p_2 a + p_3) + \\ &\quad + h^2(6p_0 a^2 + 3p_1 a + p_2) + h^3(4p_0 a + p_1) + h^4 p_0 = \\ &= f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \frac{h^4}{4!} f''''(a). \end{aligned}$$

Stelling | Als $f(x)$ een veelterm is van graad $\leq n$, dan geldt
 $f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$,
de formule van Taylor voor veeltermen.

Bewijs

Daar $f(a+h)$ een veelterm van graad $\leq n$ in h is, stellen wij

$$f(a+h) = F_0 + F_1 h + F_2 h^2 + \dots + F_n h^n.$$

Neem $h = 0$: $f(a) = F_0$.

Diff.naar h : $f'(a+h) = F_1 + 2F_2 h + \dots + nF_n h^{n-1}$.

Neem $h = 0$, dan $f'(a) = F_1$.

Diff.naar h : $f''(a+h) = 2F_2 + 3 \cdot 2 \cdot F_3 h + \dots + n(n-1)F_n h^{n-2}$.

Neem $h = 0$, dan $f''(a) = 2F_2$.

Diff.naar h : $f'''(a+h) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot F_3 + \dots + n(n-1)(n-2)F_n h^{n-2}$.

Neem $h = 0$, dan $f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot F_3 \dots$ etc.

Opm.1 Toepassing van de formule van Taylor op de veelterm $f(x) \equiv x^n$ levert juist het binomium van Newton.

Opm.2 Voor willekeurige $f(x)$, dus bv. e^x , $\sin x$, $\arctan x$, veelterm van graad $> n$, geldt bovenstaande formule van Taylor niet. Wanneer wij voor willekeurige $f(x)$ schrijven

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n,$$

dan betekent deze formule slechts de definitie van R_n , genaamd de restterm, die afhankelijk is van a , h , n en de functie.

Opm.3 Misschien is voor sommige functies $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

Wanneer dat zo is, dan is de reeks

$$f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

convergent met som $f(a+h)$, omdat dan de limiet der partiële sommen gelijk is aan $f(a+h)$. Wij gaan nu eerst een uitdrukking voor R_n opstellen, teneinde $\lim R_n$ voor diverse functies te kunnen onderzoeken.

B. Stel de restterm $R_n = h^{n+1} P$, dus stel

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + h^{n+1} P.$$

Wij berekenen P . Beschouw de hulpfunctie

$$\varphi(x) \equiv f(a+x) + \frac{h-x}{1!} f'(a+x) + \dots + \frac{(h-x)^n}{n!} f^{(n)}(a+x) + (h-x)^{n+1} P.$$

Dan is $\varphi(h) = f(a+h) = \varphi(0)$, dus volgens de stelling van het gemiddelde *) is $\varphi'(\theta h) = 0$ voor zekere $0 < \theta < 1$. Nu is

*) Wij gebruiken de reeds in II,6 bewezen

Stelling van het gemiddelde: Als $f(x)$ differentieerbaar is in

$a \leq x \leq a+h$, dan is

$f(a+h) = f(a) + h f'(a+\theta h)$ voor zekere

$0 < \theta < 1$.

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= f'(a+x) + \frac{h-x}{1!} f''(a+x) + \dots + \frac{(h-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+x) + \frac{(h-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+x) + \\ &\quad - f'(a+x) - \frac{h-x}{1!} f''(a+x) - \dots - \frac{(h-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+x) - (n+1)(h-x)^n P = \\ &= \frac{(h-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+x) - (n+1)(h-x)^n P. \end{aligned}$$

Vul in $x = \theta h$, dan blijkt

$$P = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h), \text{ dus}$$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

de formule van Taylor voor willekeurige functies.

Opm. Deze formule is een uitbreiding van de stelling van het gemiddelde, die men krijgt door $n = 0$ te nemen.

C. Schrijf in de formule van Taylor $a = 0$ en $h = x$, dan krijgt men de formule van Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

die wij thans op verschillende functies gaan toepassen.

$$\boxed{\text{I } f(x) \equiv e^x}$$

Met $f^{(i)}(x) = e^x$ volgt voor de formule van Maclaurin:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Voorbeeld $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} e^{\theta}$ ($n = 4$; $x = 1$)

dus $e \approx 2 \frac{17}{24}$ en de gemaakte fout $= \frac{1}{120} e^{\theta} < \frac{1}{120} e < \frac{3}{120} = \frac{1}{40}$.

Met behulp van de formule van Maclaurin kunnen wij thans de reeksontwikkeling van e^x vinden, nl.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Bewijs. Om aan te tonen dat de reeks $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ de som e^x heeft,

moeten wij bewijzen dat $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^x - s_n) = 0$, waarin s_n de som van de eerste n termen voorstelt.

Welnu, volgens Maclaurin is

$$|e^x - s_n| = e^{\theta x} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ en het rechterlid nadert tot nul}$$

$$\text{omdat } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Dit laatste volgt uit het reeds vroeger bewezen feit dat de reeks $\sum \frac{x^n}{n!}$ convergent is.

Opm. De formule van Maclaurin voor e^x geeft meer informatie dan de reeksontwikkeling van e^x .

$$\text{II } f(x) \equiv \sin x.$$

$$f'(x) = \cos x; f''(x) = -\sin x; f'''(x) = -\cos x; f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f'(0) = 1; f''(0) = 0; f'''(0) = -1; f^{(4)}(0) = 0.$$

De formule van Maclaurin wordt dus:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \cos \theta x.$$

Voorbeeld $\sin 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{\cos \theta}{5040} \approx \frac{101}{120}$ met $|f_{\text{out}}| < \frac{1}{5040}$.

De reeksontwikkeling voor $\sin x$, $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ kan weer uit de formule van Maclaurin worden bewezen.

$$\text{III } f(x) \equiv \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x; f''(x) = -\cos x; f'''(x) = \sin x; f^{(4)}(x) = \cos x.$$

$$f'(0) = 0; f''(0) = -1; f'''(0) = 0; f^{(4)}(0) = 1.$$

De formule van Maclaurin luidt

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \cos \theta x.$$

en de reeksontwikkeling luidt

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

IV $f(x) = (1+x)^m$, m willekeurig constant.

Neem eerst m niet natuurlijk. Dan

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}; f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}; \dots$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1) \dots (m-n+1)(1+x)^{m-n}; \dots$$

$$f(0) = 1; f'(0) = m; f''(0) = m(m-1); \dots; f^{(n)}(0) = m(m-1) \dots (m-n+1)$$

De formule van Maclaurin geeft dus

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + R_n.$$

Men kan bewijzen (deels met de door ons gebruikte restterm, deels met een verfijnde vorm ervan), dat voor $|x| < 1$ geldt $\lim R_n = 0$.

De reeksontwikkeling luidt dus

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots \quad \text{voor } |x| < 1.$$

Als m natuurlijk is, dan geldt dezelfde formule met dien verstande dat slechts de eerste $m+1$ termen $\neq 0$ zijn.

Wij beschikken thans over de volgende reeksontwikkelingen:

$$\left. \begin{array}{l} 1) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ 2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ 3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ 4) \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ 5) \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \\ 6) (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{voor alle } x \\ \text{voor } |x| < 1 \end{array}$$

Vb.1 Ontwikkel in een machtreeks $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Volgens formule 6, met $m = -\frac{1}{2}$, en $x \leftrightarrow -x^2$, is

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \frac{x^4}{2!} - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) \frac{x^6}{3!} + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^8 + \dots \end{aligned}$$

Vb.2 Zoek een reeksontwikkeling voor arc sin x. Integreer daartoe de reeks van voorbeeld 1, dan

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots \quad \text{voor } |x| < 1.$$

Vb.3 In eerste benadering is

$$(1+x)^m \approx 1 + mx, \text{ bv. } \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2} x.$$

Vb.4 Ontwikkel $\frac{1}{4+x^2}$.

$$\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4[1+(\frac{x}{2})^2]} = \frac{1}{4} (1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{64} + \dots).$$

Deze ontwikkeling geldt voor $|x| < 2$.

Vb.5 Ontwikkel $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{x^5} + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{x^7} + \dots$$

Deze formule geldt voor $x > 1$.

Vb.6 Ontwikkel $\frac{e^x}{2+x}$.

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{2+x} &= \frac{1}{2} e^x \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} (1+x+\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots) (1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \dots) = \\ &= \frac{1}{2} (1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24} + \dots). \end{aligned}$$

Deze ontwikkeling geldt voor $|x| < 2$.

Vb.7 Ontwikkel cosh x.

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \\ &= \frac{1}{2}[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots] = \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Evenzo } \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Deze ontwikkelingen gelden voor alle x.

- D. Onder C schreven wij functies als machtreeks in x met behulp van de formule van Taylor voor $a = 0$. De ontwikkeling van $f(x)$ als reeks in machten van $(x-a)$ verkrijgen wij als volgt. De formule van Taylor, waarin $a+h = x$ gesteld, luidt

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Voor die waarden van x , waarvoor de restterm tot 0 nadert voor $n \rightarrow \infty$, heeft $f(x)$ dus de volgende eenduidige ontwikkeling als Taylorreeks rond a

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

Voorbeeld De Taylorreeks van e^x rond $x = \log 2$ luidt

$$e^x = 2 + \frac{2}{1!}(x - \log 2) + \frac{2}{2!}(x - \log 2)^2 + \dots + \frac{2}{n!}(x - \log 2)^n + \dots$$

en is geldig voor alle x . Deze formule is ook te verkrijgen door $x - \log 2 = t$ te stellen en de gewone machtreeksontwikkeling voor e^t op te schrijven.

- E. Wij kunnen de gevonden reeksontwikkelingen met vrucht toepassen bij het berekenen van limieten.

Vb.1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7}{e^x} = 0$, want $\frac{x^7}{e^x} = \frac{x^7}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots} < \frac{x^7}{\frac{1}{8!}x^8} = \frac{8!}{x} \rightarrow 0$.

Vb.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$, want

$$\frac{\log x}{\sqrt{x}} = \frac{\log x}{\frac{1}{2} \log x} = \frac{\log x}{1 + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{4 \cdot 2!} \log^2 x + \dots} < \frac{\log x}{\frac{1}{8} \log^2 x} = \frac{8}{\log x} \rightarrow 0.$$

Standaardlimieten:

$$\left\| \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0 \text{ en } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \text{ voor } \alpha > 0. \right.$$

Populair gezegd: $\log x$ nadert langzaam tot oneindig, x^α vlugger en e^x nog veel vlugger.

Bewijs 1.

Voor $p \leq 0$ is de bewering triviaal. Stel $p > 0$ en neem $x > 1$.
Zij q een natuurlijk getal $\geq p$. Nu is

$$e^x > \frac{x^{q+1}}{(q+1)!}, \text{ dus } \frac{x^p}{e^x} \leq \frac{x^q}{e^x} < \frac{(q+1)!}{x} \rightarrow 0.$$

Bewijs 2.

Stel $\alpha \log x = t$, dan is, daar $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\alpha e^t} = 0.$$

$$\text{Vb.3 } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\log x}{x}} = e^0 = 1.$$

$$\text{Vb.4 } \lim_{x \downarrow 0} x \log x. \text{ Wij stellen } x = \frac{1}{t}, \text{ dan } = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{\log t}{t} = 0.$$

$$\text{Vb.5 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots = 1.$$

$$\text{Vb.6 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{x}{2!} + \dots = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Vb.7 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^3 - \sin(x^3)]^4}{[1 - \cos(x^2)]^9} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^3 - x^3 + \frac{x^9}{3!} - \frac{x^{15}}{5!} + \dots]^4}{[1 - 1 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^8}{4!} + \dots]^9} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\frac{1}{3!} - \frac{x^6}{5!} + \dots]^4}{[\frac{1}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots]^9} = \left(\frac{1}{6}\right)^4 : \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{2^5}{3^4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vb.8 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x \arctan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots}{x(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + \dots}{x(x - \frac{x^3}{3} + \dots)} \quad \text{bestaat niet.} \end{aligned}$$

§.6 Numerieke berekeningen.

Wanneer wij een getal als som van een convergente reeks kunnen schrijven, geeft een partiële som een numerieke benadering voor dat getal. Er zijn drie manieren om de gemaakte fout te schatten:

- Gebruik de restterm uit de formule van Maclaurin.
- Vergroot de fout tot er een meetkundige reeks ontstaat.
- Wanneer het een alternerende reeks betreft, waarvan de termen in absolute waarde monotoon naar nul naderen, dan is de fout bij afbreken kleiner dan de absolute waarde van de eerste weggelaten term.

Vb.1 Bereken e met een fout van ten hoogste 10^{-4} .

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

Nu moet n zo zijn dat $\frac{e^\theta}{(n+1)!} < 10^{-4}$. Daar $e^\theta < e < 3$, is hieraan

voldaan als $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}$, dus als $(n+1)! > 30.000$, dus als $n = 7$.

Hieruit volgt dat bij

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = 2,71822$$

ten hoogste een fout van 0,0001 kan zijn gemaakt.

Vb.2 Bereken $\log 0,9$.

$$\log \frac{9}{10} = \log(1 - \frac{1}{10}) = - \left[\frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^2} + \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{4 \cdot 10^4} + \dots \right].$$

Wanneer wij na de tweede term afbreken, dan

$$\log 0,9 \approx - \frac{1}{10} - \frac{1}{200} = - 0,105, \text{ terwijl voor de fout geldt:}$$

$$\begin{aligned} |\text{fout}| &= \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{4 \cdot 10^4} + \frac{1}{5 \cdot 10^5} + \dots < \frac{1}{3} \left[\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{3 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{2700}. \end{aligned}$$

Vb.3 $\arctan \frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{5 \cdot 10^5} - \frac{1}{7 \cdot 10^7} + \dots$

Wanneer wij afbreken na de derde term, dan is de fout in absolute waarde $< \frac{1}{7 \cdot 10^7}$.

$$\begin{aligned} \text{Vb.4} \quad \sqrt[3]{9} &= \sqrt[3]{8+1} = 2\sqrt[3]{1 + \frac{1}{8}} = \\ &= 2\left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \dots\right]. \end{aligned}$$

De fout bij afbreken na de derde term is kleiner dan de vierde term.

Def. $f(x)$ in p decimalen nauwkeurig berekenen betekent zorgen dat

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^p}.$$

Vb.1 Bereken $\sin \frac{1}{10}$ in 2 decimalen nauwkeurig:

$$\sin \frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \frac{1}{5! 10^5} + \dots + \frac{1}{n! 10^n} + \dots$$

Opdat de $|\text{fout}| \leq \frac{1}{200}$ kunnen wij al na de eerste term afbreken, dus $\sin 0,1 \approx 0,10$.

Wanneer wij $\sin 0,1$ in 5 decimalen nauwkeurig willen berekenen, moet de $|\text{fout}| \leq \frac{1}{2 \cdot 10^5}$, dus moeten wij bij de 2de term afbreken:

$$\sin 0,1 \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} = 0,09983.$$

Vb.2 Bereken e in 2 decimalen nauwkeurig. Dan moet

$$|\text{fout}| = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{200}.$$

Hieraan is voldaan voor $n = 5$, dus

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2,72.$$

Opm. Een schatting van de fout, die scherper is dan $\frac{3}{(n+1)!}$, verkrijgt men door methode b) toe te passen.

Dan

$$\begin{aligned} |\text{fout}| &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots < \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots\right] = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}. \end{aligned}$$

§.7 Complexe machtreeksen.

De reeks $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ met complexe termen heet convergent met som S , als voor de partiële sommen $s_n = u_1 + \dots + u_n$ geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$.

Een complexe reeks heet absoluut convergent, als de (reële) reeks der moduli convergeert.

Stelling Een absoluut convergente complexe reeks is convergent.

Bewijs.

Stel $u_n = v_n + iw_n$ met v_n, w_n reëel. Dan is $|u_n| = \sqrt{v_n^2 + w_n^2}$, dus

$$|u_n| \geq |v_n| \text{ en } |u_n| \geq |w_n|.$$

$$\text{Uit } |v_1| + \dots + |v_n| \leq |u_1| + \dots + |u_n|,$$

$$|w_1| + \dots + |w_n| \leq |u_1| + \dots + |u_n|,$$

en het bestaan van $\lim (|u_1| + \dots + |u_n|)$ volgt, dat de reële reeksen

Σv_n en Σw_n absoluut convergent, dus convergent zijn. Maar dan is wegens

$u_1 + \dots + u_n = v_1 + \dots + v_n + i(w_1 + \dots + w_n)$ ook de complexe reeks

Σu_n convergent.

Opmerking. Als Σu_n convergent is, dan is $\lim u_n = 0$.

Voorbeeld. $\Sigma \frac{1}{n^2} e^{in}$ is convergent omdat $\Sigma \frac{1}{n^2}$ convergeert.

Voorbeeld. Σe^{in} is divergent omdat u_n niet naar 0 gaat.

Een complexe machtreeks is een reeks van de vorm

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \text{ met complexe } a_i \text{ en } z.$$

Stelling Wanneer $a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3 + \dots$ convergent is,

dan is voor alle z met $|z| < |\zeta|$ de reeks

$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ absoluut convergent, dus convergent.

Bewijs.

$$|a_n z^n| = |a_n \zeta^n| \cdot \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = |a_n \zeta^n| \cdot \left|\frac{z}{\zeta}\right|^n < C \cdot \left|\frac{z}{\zeta}\right|^n.$$

Daar volgens het gegeven de reële meetkundige reeks $\Sigma \left|\frac{z}{\zeta}\right|^n$ convergeert, zal ook $\Sigma |a_n z^n|$ convergeren, dus is $\Sigma a_n z^n$ absoluut convergent.

Gevolg. Als $\sum a_n z^n$ convergeert voor een complex getal ζ , dan convergeert de reeks voor alle complexe getallen z , die binnen de cirkel om 0 met straal $|\zeta|$ liggen.

Vb.1 $\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \dots$ convergeert voor $z = -1$. Dus convergeert de reeks voor alle complexe z die binnen de eenheidscirkel liggen.

Vb.2 $z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$ convergeert voor alle complexe z , omdat de reeks voor alle reële waarden van z convergeert.

Voor een machtreeks $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ zijn er nu twee mogelijkheden:

- de reeks is convergent voor alle complexe z ,
- er zijn complexe waarden van z , waarvoor de reeks divergeert. In dit geval bestaat er een positief getal R zodat de machtreeks convergeert voor z met $|z| < R$ en divergeert voor $|z| > R$. Dit getal R heet de convergentiestraal van de machtreeks, en de machtreeks is dus convergent binnen de cirkel om 0 met straal R en divergent buiten deze cirkel. Deze cirkel heet de convergentiecirkel van de machtreeks.

Voorbeeld $z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$ convergeert voor alle z .

Voorbeeld $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$ heeft convergentiestraal $R = 1$.

Wij kunnen thans inzien hoe complexe functies van een complexe variabele z met behulp van reeksontwikkelingen kunnen worden gedefinieerd. De tot nu toe niet gedefinieerde functie $\sin z$ zal voor reële z overeen moeten stemmen met de reeds bekende functie $\sin x$, waarvan wij de reële reeksontwikkeling kennen. Daar de overeenkomstige complexe machtreeks voor alle complexe waarden van z convergeert, ligt het voor de hand om te definiëren:

$$\left. \begin{aligned} \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots, \\ e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \end{aligned} \right\} \text{ voor alle complexe } z.$$

Opm. De laatste definitie stemt overeen met de in hoofdstuk VI gegeven definitie. Wij demonstreren dit door de formule van Euler te controleren:

$$\begin{aligned} \cos \varphi + i \sin \varphi &= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots\right) = \\ &= 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \dots = e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

De tot nu toe niet gedefinieerde functie $\arctan z$ zal voor reële z overeen moeten stemmen met de reeds bekende functie $\arctan x$, waarvan wij voor $|x| < 1$ de reële reeksontwikkeling kennen. Daar de overeenkomstige complexe machtreeks convergeert voor alle complexe z binnen de eenheidscirkel, ligt het voor de hand om te definiëren:

$$\left. \begin{aligned} \arctan z &= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots, \\ \log(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots, \\ (1+z)^m &= 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \dots \end{aligned} \right\} \text{voor } |z| < 1.$$

(m reëel)

Opm. Deze definities krijgen pas inhoud, wanneer men heeft bewezen, dat de complexe functies van een complexe variabele z eigenschappen bezitten, die analoog zijn aan eigenschappen van de overeenkomstige reële functies. Dit is stof voor de theorie der complexe functies, te behandelen in semester V.

HOOFDSTUK VIII METRISCHE MEETKUNDE

§.1 Inwendig product.

Voorbeeld. \underline{k} en \underline{s} zijn vectoren vanuit O. Als een stoffelijk punt onder werking van een constante kracht \underline{k} een rechte weg \underline{s} aflegt dan is de arbeid die door de kracht over de weg wordt verricht

$$|\underline{k}| \cdot |\underline{s}| \cdot \cos \alpha$$

waarin $|\underline{k}|$ en $|\underline{s}|$ de grootte van kracht en weg en α de hoek ertussen voorstelt. Wij drukken de arbeid uit in de coördinaten van \underline{k} en \underline{s} t.o.v. een rechthoekig coördinatenstelsel, daarbij gebruik makend van de stelling van Pythagoras en de cosinusregel :

$$\text{Arbeid} = |\underline{k}| \cdot |\underline{s}| \cos \alpha = \frac{1}{2} \left[|\underline{s}|^2 + |\underline{k}|^2 - |\underline{k} - \underline{s}|^2 \right] =$$

$$\begin{aligned} \text{in } R_2 &= \frac{1}{2} \left[s_1^2 + s_2^2 + k_1^2 + k_2^2 - (k_1 - s_1)^2 - (k_2 - s_2)^2 \right] = \\ &= k_1 s_1 + k_2 s_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{in } R_3 &= \frac{1}{2} \left[s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - (k_1 - s_1)^2 - (k_2 - s_2)^2 - (k_3 - s_3)^2 \right] = \\ &= k_1 s_1 + k_2 s_2 + k_3 s_3. \end{aligned}$$

De gevonden uitdrukkingen legaliseren de volgende definitie

Def. Het inwendig product $(\underline{a}, \underline{b})$ van twee vectoren \underline{a} en \underline{b} is een reëel getal, dat als volgt wordt gedefinieerd :

$$\text{In } R_2 : (\underline{a}, \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\text{In } R_3 : (\underline{a}, \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\text{In } R_n : (\underline{a}, \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Eigenschappen van het inwendig product.

- 1) $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$; 2) $(\underline{a}, \underline{b+c}) = (\underline{a}, \underline{b}) + (\underline{a}, \underline{c})$
 3) $(\lambda \underline{a}, \underline{b}) = \lambda(\underline{a}, \underline{b})$; 4) $(\underline{a}, \underline{a}) > 0$ als $\underline{a} \neq \underline{0}$
 5) $(\underline{0}, \underline{0}) = 0$; 6) $(\underline{a}, \underline{b})^2 \leq (\underline{a}, \underline{a})(\underline{b}, \underline{b})$

De eerste vijf eigenschappen zijn triviaal. Eigenschap 6), de ongelijkheid van Schwarz, wordt als volgt bewezen :

Als $\underline{a} = \underline{0}$, dan is eigenschap 6 triviaal. Als $\underline{a} \neq \underline{0}$, dan heeft de voor alle λ geldende formule

$$0 \leq (\lambda \underline{a} + \underline{b}, \lambda \underline{a} + \underline{b}) = \lambda^2 (\underline{a}, \underline{a}) + 2\lambda(\underline{a}, \underline{b}) + (\underline{b}, \underline{b})$$

tengevolge dat de discriminant van de kwadratische vorm in het rechter lid niet positief is. Dus

$$(\underline{a}, \underline{b})^2 \leq (\underline{a}, \underline{a})(\underline{b}, \underline{b}).$$

Stelling In R_2 en R_3 geldt bij een rechthoekig coördinatenstelsel voor de bekende begrippen lengte $|\underline{a}|$ van een vector \underline{a} en hoek φ tussen twee vectoren \underline{a} en \underline{b}

$$|\underline{a}| = \sqrt{(\underline{a}, \underline{a})} \quad \text{en} \quad \cos \varphi = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{\sqrt{(\underline{a}, \underline{a})(\underline{b}, \underline{b})}}$$

Voorts zijn \underline{a} en \underline{b} loodrecht als $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$.

Bewijs. Met de stelling van Pythagoras en de cosinusregel.

Def. In R_n worden de begrippen lengte $|\underline{a}|$ van \underline{a} en hoek φ tussen \underline{a} en \underline{b} gedefinieerd door

$$|\underline{a}| = \sqrt{(\underline{a}, \underline{a})} \quad \text{en} \quad \cos \varphi = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{\sqrt{(\underline{a}, \underline{a})(\underline{b}, \underline{b})}}$$

Voorts heten \underline{a} en \underline{b} loodrecht als $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$.

Opm. Wegens de ongelijkheid van Schwarz is

$$-1 \leq \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{\sqrt{(\underline{a}, \underline{a})(\underline{b}, \underline{b})}} \leq 1$$

en kan de middelste vorm inderdaad als cosinus worden geïnterpreteerd.

Vb.1 De afstand van $A = (1, -2, 0)$ en $B = (3, 1, 4)$ is de lengte van de vector $(-2, -3, -4)$ dus is $\sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$.

Vb.2 De rechten
 $\underline{x} = (7, 1, 6) + \lambda(1, -2, -1)$ en
 $\underline{x} = (3, -1, 2) + \mu(-1, 2, -5)$
 zijn loodrecht omdat het inwendig product van hun richtingsvectoren nul is.

Vb.3 Voor de hoek, die de vector $(2, 2, 1)$ maakt met de y-as, geldt

$$\cos \varphi = \frac{2}{3}.$$

Vb.4 Gegeven zijn het punt $P = (-1, 2, 3)$ en de rechte
 $l : \underline{x} = (-1, 14, -3) + \lambda(-1, 2, -2).$

Gevraagd wordt de afstand van P tot l.

Opl. De verbindingsrechte van P met een willekeurig punt op l heeft als richtingsvector

$$(-1, 14, -3) + \lambda(-1, 2, -2) - (-1, 2, 3) \equiv (-\lambda, 12+2\lambda, -6-2\lambda).$$

Deze verbindingsrechte en l zijn loodrecht als het inwendig product van hun richtingsvectoren nul is, dus als

$$(-1) \cdot (-\lambda) + 2(12+2\lambda) - 2(-6-2\lambda) = 0$$

dus als $\lambda = -4$. De projectie Q van P op l is dus

$(-1, 14, -3) - 4(-1, 2, -2) \equiv (3, 6, 5)$. De afstand van $Q = (3, 6, 5)$ en $P = (-1, 2, 3)$, de gevraagde afstand, is dus

$$\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6.$$

Verder is van de loodlijn PQ op l een parametervoorstelling

$$\underline{x} = (-1, 2, 3) + \mu(4, 4, 2).$$

Vb.5 Bepaal de afstand van de rechten

$$l : \underline{x} = (0, 1, 0) + \lambda(2, 1, 1) \text{ en}$$

$$m : \underline{x} = (0, -1, 3) + \mu(1, 2, 1).$$

Opl. Neem op l een willekeurig punt $L = (2\lambda, \lambda+1, \lambda)$ en op m een willekeurig punt $M = (\mu, 2\mu-1, \mu+3)$. De verbindingsrechte LM waarvan de richtingsvector is

$$(2\lambda - \mu, \lambda - 2\mu + 2, \lambda - \mu - 3)$$

is loodrecht op l en op m indien

$$2(2\lambda - \mu) + (\lambda - 2\mu + 2) + (\lambda - \mu - 3) = 0 \quad \text{en}$$

$$(2\lambda - \mu) + 2(\lambda - 2\mu + 2) + (\lambda - \mu - 3) = 0.$$

Hieraan is voldaan voor $\lambda = 1, \mu = 1$. Het punt $(2,2,1)$ op l en het punt $(1,1,4)$ op m hebben dus de eigenschap dat hun verbindingsvector $(1,1,-3)$ loodrecht op l en op m is. De afstand van l en m is dus

$$\sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}.$$

Vb.6 Gevraagd alle vectoren die gelijke hoeken maken met $\underline{a} = (2,2,1)$ en $\underline{b} = (4,0,3)$.

Opl. De vector $\underline{x} = (x,y,z)$ voldoet, indien

$$\frac{(\underline{a}, \underline{x})}{\sqrt{(\underline{a}, \underline{a})(\underline{x}, \underline{x})}} = \frac{(\underline{b}, \underline{x})}{\sqrt{(\underline{b}, \underline{b})(\underline{x}, \underline{x})}}, \text{ dus als}$$

$$\frac{2x + 2y + z}{3} = \frac{4x + 3z}{5}, \text{ dus als } x - 5y + 2z = 0.$$

Dit is de vergelijking van de meetkundige plaats van de eindpunten van de gevraagde vectoren : de vergelijking van het bissectricevlak van \underline{a} en \underline{b} .

Vb.7 Gevraagd alle vectoren in R_2 , die loodrecht op $(1,2)$ staan.

Opl. De vector $\underline{x} = (x,y)$ voldoet, indien $x + 2y = 0$.

Dit is de vergelijking van de meetkundige plaats van de eindpunten van de gevraagde vectoren : de vergelijking van de loodlijn in O op $(1,2)$.

Vb.8 Gevraagd alle vectoren in R_3 , die loodrecht op $(1,2,3)$ staan.

Opl. $\underline{x} = (x,y,z)$ voldoet, indien

$$x + 2y + 3z = 0,$$

de vergelijking van het loodvlak in O op $(1,2,3)$.

Vb.9 Gevraagd alle vectoren in R_4 , die loodrecht op $(1,2,3,4)$ staan.

Opl. $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ voldoet, indien

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0,$$

de vergelijking van de deelruimte van dimensie 3, die in O loodrecht op $(1,2,3,4)$ staat.

Vb.10 De beide vlakken in R_4

$$\underline{x} = \lambda(1,2,3,4) + \mu(2,0,1,-3) \quad \text{en}$$

$$\underline{x} = \rho(2,5,-4,0) + \sigma(0,-13,6,2)$$

hebben de eigenschap, dat elke vector uit het ene vlak loodrecht staat op elke vector uit het andere vlak. Men noemt zulke deelruimten orthogonaal. 3.

Vb.11 Bereken de zijden en de hoeken van de driehoek in R_3 ,

gevormd door de punten

$$A = (3,-1,1,4,6), \quad B = (4,0,-2,6,7), \quad C = (5,1,3,4,8).$$

De zijden AB en AC hebben richtingsvectoren

$$(1,1,-3,2,1) \quad \text{en} \quad (2,2,2,0,2)$$

dus $\cos \alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2} \pi$. De lengten van AB en AC zijn beide 4.

Hiermee zijn alle elementen bekend.

§.2 Normalen.

A. Rechten in R_2 hebben twee voorstellingen, namelijk

$$\text{met een parameter} \quad : \quad \underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{y} \quad (1)$$

$$\text{door een vergelijking} \quad : \quad px + qy + s = 0 \quad (2)$$

Uit (1) op (2) komen wij door λ te elimineren. Uit (2) op (1) komen wij door te stellen $x = q\lambda$, dan $y = -p\lambda - s/q$, dus

$$\underline{x} = \lambda(q, -p) + (0, -s/q).$$

Blijkbaar staat de richtingsvector loodrecht op (p, q) , waarmee bewezen is het eerste deel van de

Stelling De rechte $px + qy + s = 0$ staat loodrecht op de vector (p, q) . Omgekeerd heeft een rechte loodrecht op \underline{b} een vergelijking, waarin de coëfficiënten van x en y juist de componenten van \underline{b} zijn.

Bewijs Laat \underline{a} zijn eindpunt hebben op de rechte loodrecht op \underline{b} . Dan is deze rechte meetkundige plaats van uiteinden van vectoren \underline{x} , waarvoor geldt

$$\begin{aligned} (\underline{x} - \underline{a}, \underline{b}) &= 0 \\ (\underline{x}, \underline{b}) &= (\underline{a}, \underline{b}) = \text{constant} \\ b_1 x + b_2 y &= \text{constant}. \end{aligned}$$

Hiermee is ook het omgekeerde bewezen.

De bij de rechte $px + qy + s = 0$ behorende zogenaamde

normaalvergelijking: $\frac{px + qy + s}{\sqrt{p^2 + q^2}} = 0,$

levert gegevens omtrent buiten de rechte gelegen punten, zoals blijkt uit de

Stelling De afstand van (x_0, y_0) tot de rechte $px + qy + s = 0$ is

$$\left| \frac{px_0 + qy_0 + s}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right|.$$

Bewijs: zie onder C.

Opm. De zogenaamde normaalvectoren

$$\left(\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right) \quad \text{en} \quad \left(\frac{-p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \frac{-q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right)$$

staan loodrecht op de rechte en hebben lengte = 1. De afstand van hun eindpunten tot de rechte is resp.

$$\left| 1 + \frac{s}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right| \quad \text{en} \quad \left| 1 - \frac{s}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right|.$$

Vb.1 Gevraagd de afstand van $C = (1, -3)$ tot de rechte door $A = (-2, 3)$ en $B = (2, 0)$.

Opl. De rechte AB heeft vergelijking $3x + 4y = 6$, dus in normaalvorm

$$\frac{3x + 4y - 6}{5} = 0.$$

De gevraagde afstand is dus 3.

Vb.2 Gevraagd de bissectrices van de rechten

$$ax + by + c = 0 \quad \text{en} \quad px + qy + s = 0.$$

Opl. De voorwaarde, dat het punt (x, y) dezelfde afstand heeft tot beide rechten, luidt

$$\left| \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{px + qy + s}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right|,$$

hetgeen uitgeschreven de vergelijking der bissectrices levert.

B. Vlakken in R_3 , hebben twee voorstellingen, namelijk

$$\text{met parameters} \quad : \quad \underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{v} + \mu \underline{w} \quad (1)$$

$$\text{door een vergelijking: } px + qy + rz + s = 0 \quad (2)$$

Wij komen uit (1) op (2) door λ en μ te elimineren. Wij komen uit (2) op (1) door te stellen $x = r\lambda$, $y = r\mu$, dan is $z = -p\lambda - q\mu - s/r$, dus

$$\underline{x} = \lambda(r, 0, -p) + \mu(0, r, -q) + (0, 0, -s/r).$$

Blijkbaar staan de richtingsvectoren loodrecht op (p, q, r) , waarmee bewezen is het eerste deel van de

Stelling Het vlak $px + qy + rz + s = 0$ staat loodrecht op (p, q, r) . Omgekeerd heeft een vlak loodrecht op \underline{b} een vergelijking, waarin de coëfficiënten van x , y , en z juist de componenten van \underline{b} zijn.

Bewijs Laat \underline{a} zijn eindpunt hebben in het vlak loodrecht op \underline{b} . Dan is dat vlak de meetkundige plaats van de uiteinden der \underline{x} waarvoor

$$\begin{aligned} (\underline{x} - \underline{a}, \underline{b}) &= 0 \\ (\underline{x}, \underline{b}) &= \text{Constant} \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z &= C. \end{aligned}$$

De bij het vlak $px + qy + rz + s = 0$ behorende zogenaamde

$$\text{normaalvergelijking:} \quad \frac{px + qy + rz + s}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = 0$$

levert gegevens omtrent buiten het vlak gelegen punten:

Stelling De afstand van (x_0, y_0, z_0) tot het vlak $px + qy + rz + s = 0$ is

$$\frac{|px_0 + qy_0 + rz_0 + s|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Bewijs: zie onder C.

Opm. De z.g. normaalvectoren

$$\left(\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \right) \quad \text{en} \quad \left(\frac{-p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \frac{-q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \frac{-r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \right)$$

staan loodrecht op het vlak en hebben lengte = 1.

Vb.1 De rechte door $P = (1, 2, 3)$ en loodrecht op het vlak $7x - y + z = 3$ is

$$\underline{x} = (1, 2, 3) + \lambda(7, -1, 1).$$

Vb.2 Het vlak door $P = (3, 2, 1)$ en loodrecht op de rechte $\underline{x} = (7, 8, 9) + \lambda(2, -1, 4)$ heeft tot vergelijking

$$\begin{aligned} 2(x-3) - (y-2) + 4(z-1) &= 0 \\ 2x - y + 4z - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Vb.3 Gevraagd de hoek tussen de rechte l en het vlak V :

$$l: \underline{x} = (1, 2, 3) + \lambda(1, 1, \sqrt{6}); \quad V: x - y + z = 12.$$

De gevraagde hoek φ is het complement van de hoek tussen de vectoren $(1, 1, \sqrt{6})$ en $(1, -1, 1)$, dus

$$\sin \varphi = \frac{1 - 1 + \sqrt{6}}{\sqrt{8} \sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

Vb.4 Gevraagd de oppervlakte van de driehoek, gevormd door de punten $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 3, 1)$ en $C = (1, 4, 2)$.

Wij verschuiven de driehoek tot A in O valt:

$$O = A^* = (0, 0, 0), \quad B^* = (-1, 2, 1), \quad C^* = (0, 3, 2).$$

De vergelijking van het vlak door OB^*C^* is

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x + 2y - 3z = 0.$$

Als nu I de inhoud aanduidt van het pedum, dat wordt opgespannen door OB^* , OC^* en de normaalvector $(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}})$ op het vlak, dan is

$$\text{Opp. } ABC = \text{Opp. } OB^*C^* = \frac{1}{2} I = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{\sqrt{14}} = \frac{1}{2} \sqrt{14}.$$

C. Een hypervlak in R_n is de verzameling van alle vectoren, die voldoen aan een lineaire vergelijking

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + C = 0,$$

anders geschreven

$$(\underline{a}, \underline{x}) + C = 0.$$

De vector \underline{a} is loodrecht op elke rechte in het hypervlak, immers als \underline{y} en \underline{z} in het hypervlak liggen, dan is

$$(\underline{a}, \underline{y}) + C = 0 \quad \text{en} \quad (\underline{a}, \underline{z}) + C = 0, \quad \text{dus} \quad (\underline{a}, \underline{y} - \underline{z}) = 0,$$

dus \underline{a} staat loodrecht op de rechte door de uiteinden van \underline{y} en \underline{z} .

Met normaalvergelijking van het hypervlak bedoelen wij de vergelijking

$$\frac{(\underline{a}, \underline{x}) + C}{\sqrt{(\underline{a}, \underline{a})}} = 0$$

en met de normaalvectoren (die lengte 1 hebben) de vectoren

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{(\underline{a}, \underline{a})}} \underline{a}.$$

Stelling De afstand van een punt $P = \underline{p}$ tot het hypervlak $(\underline{a}, \underline{x}) + C = 0$ is

$$\left| \frac{(\underline{a}, \underline{p}) + C}{\sqrt{(\underline{a}, \underline{a})}} \right|$$

Bewijs De loodlijn uit P op het hypervlak heeft parameterverstelling

$$\underline{x} = \underline{p} + \lambda \underline{a}$$

Wij bepalen het snijpunt Q met het hypervlak. Dan

$$\begin{aligned} (\underline{a}, \underline{p} + \lambda \underline{a}) + C &= 0 \\ \lambda &= - \frac{(\underline{a}, \underline{p}) + C}{(\underline{a}, \underline{a})} \end{aligned}$$

Dus Q is het eindpunt van de vector

$$\underline{p} - \frac{(\underline{a}, \underline{p}) + C}{(\underline{a}, \underline{a})} \underline{a}$$

De afstand PQ is de lengte van de vector

$$\frac{(\underline{a}, \underline{p}) + C}{(\underline{a}, \underline{a})} \underline{a}$$

en dit levert juist het beweerde antwoord.

Opm. Specialisatie voor $n=2$ en $n=3$ geeft het bewijs van de stellingen die onder A en B werden genoemd.

§.3 Methode der kleinste kwadraten.

- A. Wij wensen een getal λ te vinden dat de waarnemingsuitkomsten a_1, a_2, \dots, a_n van een zelfde experiment zo goed mogelijk benadert. Met "zo goed mogelijk" bedoelen wij dat λ zodanig moet zijn, dat de som van de kwadraten der afwijkingen minimaal is, dus dat

$$(a_1 - \lambda)^2 + (a_2 - \lambda)^2 + \dots + (a_n - \lambda)^2$$

minimaal is. Beschouw $(a_1, \dots, a_n) = \underline{a}$ en $(1, 1, \dots, 1) = \underline{e}$ als vectoren van R_n . Wij moeten λ dus zo kiezen, dat de lengte van de vector $\underline{a} - \lambda \underline{e}$ minimaal is. Beschouwing van de door \underline{a} en \underline{e} opgespannen deelruimte leert, dat dit het geval is als $\underline{a} - \lambda \underline{e}$ loodrecht op \underline{e} staat, dus als

$$(\underline{a} - \lambda \underline{e}, \underline{e}) = 0$$

$$(\underline{a}, \underline{e}) = \lambda (\underline{e}, \underline{e})$$

$$\lambda = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

dus als λ het gemiddelde der waarnemingsuitkomsten is.

- B. Laat in R_2 gegeven zijn een aantal punten

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n),$$

dus een aantal paren van waarnemingsuitkomsten. Wij wensen een rechte $y = \lambda x + \mu$ te vinden, die zich zo goed mogelijk aan de gegeven punten aanpast. Met "zo goed mogelijk" bedoelen wij, dat λ en μ zodanig moeten zijn, dat de som van de kwadraten der verticale afwijkingen minimaal is, dus dat

$$[b_1 - (\lambda a_1 + \mu)]^2 + \dots + [b_n - (\lambda a_n + \mu)]^2$$

minimaal is. Beschouw $(a_1, \dots, a_n) = \underline{a}$, $(b_1, \dots, b_n) = \underline{b}$ en $(1, \dots, 1) = \underline{e}$ als vectoren van R_n . Wij moeten λ en μ dus zo kiezen, dat de lengte van de vector $\underline{b} - \lambda \underline{a} - \mu \underline{e}$ minimaal is. Beschouwing van de door \underline{a} , \underline{b} en \underline{e} opgespannen R_3 leert, dat dit het geval is als $\underline{b} - \lambda \underline{a} - \mu \underline{e}$ loodrecht op \underline{e} en op \underline{a} staat. Dit levert twee vergelijkingen

$$(\underline{b}, \underline{e}) - \lambda (\underline{a}, \underline{e}) - \mu (\underline{e}, \underline{e}) = 0$$

$$(\underline{b}, \underline{a}) - \lambda (\underline{a}, \underline{a}) - \mu (\underline{e}, \underline{a}) = 0$$

Hieruit zijn λ en μ te berekenen. De gevonden rechte $y = \lambda x + \mu$ heet de regressierechte van y naar x, die bij de gegeven waarnemingspunten hoort. De gebruikte methode is de zogenaamde methode van de kleinste kwadraten.

Voorbeeld

$(a_i, b_i) = (0,1); (2,2); (4,2); (6,5); (8,4)$, dus $n = 5$.

Wij berekenen achtereenvolgens

<u>a</u>	<u>b</u>	<u>e</u>	<u>(a,a)</u>	<u>(a,b)</u>
0	1	1	0	0
2	2	1	4	4
4	2	1	16	8
6	5	1	36	30
<u>8</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	<u>64</u>	<u>32</u>
20	14	5	120	74

De vergelijkingen worden

$$\begin{aligned} 20\lambda + 5\mu &= 14 \\ 120\lambda + 20\mu &= 74 \end{aligned} \quad \text{dus } \lambda = \frac{9}{20}, \mu = 1$$

De gevraagde rechte heeft dus de vergelijking

$$y = \frac{9}{20}x + 1.$$

C. Laat in R_2 weer gegeven zijn een aantal punten

$$(a_1, b_1); (a_2, b_2); \dots; (a_n, b_n).$$

Men kan nu ook vragen naar de kwadratische functie

$y = \lambda x^2 + \mu x + \nu$, die "zo goed mogelijk" bij deze punten past. Bij dit probleem van kwadratische regressie kan dezelfde methode worden toegepast. λ, μ, ν moeten zodanig zijn, dat de volgende som van kwadraten minimaal is

$$[b_1 - (\lambda a_1^2 + \mu a_1 + \nu)]^2 + \dots + [b_n - (\lambda a_n^2 + \mu a_n + \nu)]^2.$$

Dit is het geval wanneer in de deelruimte R_1 , opgespannen door

$$\begin{aligned} \underline{b} &= (b_1, \dots, b_n) \\ \underline{aa} &= (a_1^2, \dots, a_n^2) \\ \underline{a} &= (a_1, \dots, a_n) \\ \underline{e} &= (1, \dots, 1) \end{aligned}$$

de vector $\underline{b} - \lambda \underline{aa} - \mu \underline{a} - \nu \underline{e}$ loodrecht is op \underline{aa} , \underline{a} en \underline{e} .

Dit geeft drie vergelijkingen voor λ, μ, ν en de regressieparabool is gevonden.

Opmerking 1 In plaats van de parabool $\lambda x^2 + \mu x + \nu$ kunnen ook andere functies worden genomen. Bijvoorbeeld kan men vragen naar de functie $\lambda \sin x + \mu \cos x + \nu e^x$ die zo goed mogelijk bij een aantal gegeven punten past.

Opm.2 Een andere uitbreiding is het zoeken van een functie
 (b.v. $z = \lambda x^2 + \mu xy + \nu y^2 + \rho x + \sigma y + \tau$) die zo goed mogelijk
 past bij de punten
 (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) , ..., (a_n, b_n, c_n) in R_3 .

Voorbeeld

Gevraagd de regressieparabool van de punten

$(a_1, b_1) = (-3, 1.1); (-2, 1.3); (-1, 1.6); (0, 2.45); (1, 2.4); (2, 3.4); (3, 4.1)$.

Wij berekenen achtereenvolgens

<u>a</u>	<u>b</u>	<u>e</u>	<u>aa</u>	<u>(a,a)</u>	<u>(a,b)</u>	<u>(aa,a)</u>	<u>(aa,b)</u>	<u>(aa,aa)</u>
-3	1.1	1	9	9	-3.3	-27	9.9	81
-2	1.3	1	4	4	-2.6	-8	5.2	16
-1	1.6	1	1	1	-1.6	-1	1.6	1
0	2.45	1	0	0	0	0	0	0
1	2.4	1	1	1	2.4	1	2.4	1
2	3.4	1	4	4	6.8	8	13.6	16
<u>3</u>	<u>4.1</u>	<u>1</u>	<u>9</u>	<u>9</u>	<u>12.3</u>	<u>27</u>	<u>36.9</u>	<u>81</u>
0	16.35	7	28	28	14.0	0	69.6	196

De eis, dat $\underline{b} - \lambda \underline{aa} - \mu \underline{a} - \nu \underline{e}$ loodrecht is op \underline{aa} , \underline{a} , \underline{e} levert

$$\begin{aligned} 69.6 - 196\lambda - 28\nu &= 0 \\ 14 - 28\mu &= 0 \\ 16.35 - 28\lambda - 7\nu &= 0 \end{aligned} \quad \text{dus } \mu = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{20}, \nu = 2,13.$$

De regressieparabool is dus $y = \frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{2}x + 2,13$.

§.4 Cirkel, bol, hyperbol.

In R_2 is een cirkel de meetkundige plaats der punten $(x_1, x_2) \equiv (x, y)$, die tot een gegeven punt $M = (a_1, a_2) \equiv (a, b)$ een gegeven afstand r hebben, dus die voldoen aan

$$(\underline{x} - \underline{a}, \underline{x} - \underline{a}) = r^2,$$

uitgeschreven $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

of $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$

Vb.1 $3x^2 + 3y^2 + 6x - 2y = 0$

is de vergelijking van een cirkel, immers

$$x^2 + y^2 + 2x - \frac{2}{3}y = 0 \quad \text{of} \quad (x + 1)^2 + (y - \frac{1}{3})^2 = \frac{10}{9}$$

stelt een cirkel voor met middelpunt $(-1, \frac{1}{3})$ en straal $\frac{1}{3} \sqrt{10}$.

Vb.2 De cirkel $(\underline{x}, \underline{x}) = 25$ wordt door de rechte $\underline{x} = (1, 3) + \lambda(2, 1)$ gesneden in twee punten. Substitutie levert immers

$$(1 + 2\lambda)^2 + (3 + \lambda)^2 = 25, \quad \text{waaruit } \lambda = -3, \lambda = 1$$

De snijpunten zijn dus $(-5, 0)$ en $(3, 4)$.

In R_3 , is een bol de meetkundige plaats der punten

$(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$, die tot een gegeven punt $M = (a_1, a_2, a_3) \equiv (a, b, c)$ een gegeven afstand r hebben, dus waarvoor

$$(\underline{x} - \underline{a}, \underline{x} - \underline{a}) = r^2,$$

uitgeschreven $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$.

Vb.3 De bol met $M = (12, 6, -5)$ en $r = 13$, dus met vergelijking

$$(x - 12)^2 + (y - 6)^2 + (z + 5)^2 = 169$$

snijdt het xOy -vlak volgens de cirkel, die in R_2 de vergelijking

$$(x - 12)^2 + (y - 6)^2 + 5^2 = 169$$

heeft, dus die middelpunt $(12, 6, 0)$ en straal 12 heeft.

In R_n is een hyperbol de meetkundige plaats der punten (x_1, x_2, \dots, x_n) , die tot $M = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de afstand r hebben, dus waarvoor

$$(\underline{x} - \underline{a}, \underline{x} - \underline{a}) = r^2,$$

uitgeschreven $(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = r^2$.

Opmerking De hierna volgende stellingen en bewijzen blijven van kracht als men de woorden "vlak" door "rechte" en "bol" door "cirkel" vervangt. Evenzo als men "vlak" door "hypervlak" en "bol" door "hyperbol" vervangt.

Stelling Het raakvlak in een punt P van de bol $(\underline{x} - \underline{a}, \underline{x} - \underline{a}) = r^2$ heeft de vergelijking

$$(\underline{x} - \underline{a}, \underline{p} - \underline{a}) = r^2$$

Bewijs. De richtingsvector van de rechte door P en het middelpunt van de bol is $\underline{p} - \underline{a}$. Het raakvlak staat hier loodrecht op en gaat door P , dus heeft vergelijking

$$\begin{aligned}(\underline{x} - \underline{p}, \underline{p} - \underline{a}) &= 0 \\(\underline{x} - \underline{a} + \underline{a} - \underline{p}, \underline{p} - \underline{a}) &= 0 \\(\underline{x} - \underline{a}, \underline{p} - \underline{a}) + (\underline{a} - \underline{p}, \underline{p} - \underline{a}) &= 0.\end{aligned}$$

Daar P op de bol ligt is $(\underline{p} - \underline{a}, \underline{p} - \underline{a}) = r^2$, dus de vergelijking van het raakvlak is $(\underline{x} - \underline{a}, \underline{p} - \underline{a}) - r^2 = 0$.

Stelling Zij P een vast punt buiten de bol $(\underline{x} - \underline{a}, \underline{x} - \underline{a}) = r^2$. Alle raakpunten van door P gaande raakvlakken aan de bol liggen in het vlak

$$(\underline{x} - \underline{a}, \underline{p} - \underline{a}) = r^2.$$

Bewijs. Het raakvlak in een punt Q op de bol heeft tot vergelijking $(\underline{x} - \underline{a}, \underline{q} - \underline{a}) = r^2$. Hierop ligt P indien $(\underline{p} - \underline{a}, \underline{q} - \underline{a}) = r^2$.

Alle raakpunten Q voldoen dus aan de vergelijking $(\underline{p} - \underline{a}, \underline{x} - \underline{a}) = r^2$.

Def. Het poolvlak van P t.o.v. de bol $(\underline{x} - \underline{a}, \underline{x} - \underline{a}) = r^2$ is het vlak met vergelijking

$$(\underline{x} - \underline{a}, \underline{p} - \underline{a}) = r^2.$$

Als P op de bol ligt, is het poolvlak het raakvlak in P .

Als P buiten de bol ligt, is het poolvlak het vlak door de raakpunten van de raakvlakken door P . De betekenis van het poolvlak van een binnen de bol gelegen punt blijkt uit de volgende stelling.

Stelling Als Q op het poolvlak van P ligt, dan ligt P op het poolvlak van Q .

Bewijs. Het poolvlak van P is $(\underline{x} - \underline{a}, \underline{p} - \underline{a}) = r^2$. Hierop ligt Q indien geldt $(\underline{q} - \underline{a}, \underline{p} - \underline{a}) = r^2$. De voorwaarde dat P op het poolvlak van Q ligt luidt $(\underline{p} - \underline{a}, \underline{q} - \underline{a}) = r^2$. Beide voorwaarden zijn dezelfde.

Vb.4 Gevraagd het poolvlak van $P = (5, 2, 4)$ t.o.v. de bol $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 1 = 0$. De vergelijking van de bol is te schrijven als $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$ dus de vergelijking van het poolvlak luidt $4(x - 1) + 0(y - 2) + 4z = 4$ of $x + z = 2$.

Vb.5 Gevraagd de raaklijnen uit $P = (0, 10)$ aan de cirkel met $M = (5, 0)$ en $r = 5$. De cirkel heeft vergelijking $(x - 5)^2 + y^2 = 25$, dus de poollijn van $(0, 10)$ luidt $x - 2y = 0$. De snijpunten van de poollijn met de cirkel blijken te zijn $(0, 0)$ en $(8, 4)$. De gevraagde raaklijnen zijn de rechten $x = 0$ en $3x + 4y = 40$.

Vb.6 Gevraagd de cirkel om O , waarvoor $P = (1, 3)$ en $Q = (2, 1)$ op elkaars poollijn liggen. Stel de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$, dan moet $1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = r^2$, dus de gevraagde cirkel is $x^2 + y^2 = 5$. De poollijnen zijn $x + 3y = 5$ en $2x + y = 5$.

§.5 Oppervlakken en ruimtekrommen.

Wij maken kennis met de voornaamste typen tweedegraads oppervlakken in hun meest eenvoudige gedaante.

1. Ellipsoïde: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

De doorsnijding met elk der drie coördinaatvlakken is een ellips.

2. Eenbladige hyperboloïde: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

De doorsnijding met het xOz -vlak en met het yOz -vlak is een hyperbool die met het xOy -vlak is een ellips. Op het oppervlak liggen twee stelsels rechten, immers schrijf

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}, \text{ of } \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Zij α een reëel getal. Dan is de snijlijn van de beide vlakken

$$(1) \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right) \text{ en } \alpha\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}$$

een rechte, die geheel op het oppervlak ligt, omdat elke (x, y, z) , die aan beide vergelijkingen (1) voldoet, ook aan de vergelijking der eenbladige hyperboloïde voldoet. Voor elke α stelt (1) dus een rechte op het oppervlak voor.

Op het oppervlak ligt , behalve het stelsel rechten (1), ook het stelsel

$$(2) \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \beta(1 - \frac{y}{b}) \quad \text{en} \quad \beta(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = 1 + \frac{y}{b}.$$

Opm. Twee rechten van hetzelfde stelsel snijden niet. Twee rechten van verschillende stelsels snijden elkaar.

Opm. De voorstellingen (1) en (2) zijn niet geheel volledig . De snijlijn van de vlakken

$$1 + \frac{y}{b} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$$

is niet vermeld, doch ligt wel op het oppervlak. Men krijgt een volledige voorstelling der beide op het oppervlak gelegen stelsels rechten door telkens twee parameters te gebruiken, waarvan dan slechts de verhouding belangrijk is, dus

$$(1)' \quad \alpha_1(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \alpha_2(1 + \frac{y}{b}) \quad \text{en} \quad \alpha_2(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = \alpha_1(1 - \frac{y}{b})$$

$$(2)' \quad \beta_1(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \beta_2(1 - \frac{y}{b}) \quad \text{en} \quad \beta_2(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = \beta_1(1 + \frac{y}{b}).$$

Voorbeeld: Gevraagd de rechten evenwijdig aan het yOz -vlak op

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 - z^2 = 1.$$

$$\text{Stelsel (1): } x + z = \alpha(1 + \frac{1}{2}y) \quad \text{en} \quad \alpha(x - z) = 1 - \frac{1}{2}y.$$

$$\text{Stelsel (2): } x + z = \beta(1 - \frac{1}{2}y) \quad \text{en} \quad \beta(x - z) = 1 + \frac{1}{2}y.$$

Wij schrijven de rechten van stelsel (2) in parametervorm, door $y = 2\mu$ te stellen. Dan

$$x = \frac{1 + \beta^2}{2\beta} + \frac{1 - \beta^2}{2\beta} \mu, \quad z = \frac{\beta^2 - 1}{2\beta} - \frac{\beta^2 + 1}{2\beta} \mu.$$

De richtingsvector van deze rechte is dus

$$\frac{1 - \beta^2}{2\beta}, \quad 2, \quad - \frac{\beta^2 + 1}{2\beta}.$$

De rechte van het stelsel (2) is evenwijdig aan het yOz -vlak, dus is loodrecht $(1,0,0)$, als $\beta = 1$ of $\beta = -1$.

De gevraagde rechten van stelsel (2) zijn dus

$$\underline{x} = (1, 2\mu, -\mu) \quad \text{en} \quad \underline{x} = (-1, 2\mu, \mu).$$

Evenzo berekent men de gevraagde rechten van stelsel (1):

$$\underline{x} = (1, 2\lambda, \lambda) \quad \text{en} \quad \underline{x} = (-1, 2\lambda, -\lambda).$$

$$3. \quad \underline{\text{Tweebladige hyperboloïde}} \quad - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Dit oppervlak bevat geen rechten.

4. Elliptische paraboloiden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

Snijding met $z = c$ geeft een ellips als $c > 0$, de oorsprong als $c = 0$, geen reële snijkromme als $c < 0$. Snijding met het xOz -vlak en yOz -vlak geeft een parabool. Dit oppervlak bevat geen rechten.

5. Hyperbolische paraboloiden $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

Snijding met het xOz -vlak en het yOz -vlak geeft een parabool, snijding met $z = c \neq 0$ geeft een hyperbool, snijding met $z = 0$ geeft twee rechten. Op het oppervlak liggen weer twee stelsels rechten, namelijk

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \alpha z \\ a(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 2 \end{cases} \quad \text{en} \quad (2) \quad \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \beta z \\ \beta(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 2 \end{cases}$$

Vb. Gevraagd de rechten op $xy = z$ die door $(1,1,1)$ gaan. De stelsels luiden

$$(1) \quad x = \frac{1}{\alpha}; \quad y = \alpha z \quad \text{en} \quad (2) \quad y = \frac{1}{\beta}; \quad x = \beta z.$$

Door $(1,1,1)$ gaan de exemplaren met $\alpha = 1$ en $\beta = 1$. Dit zijn de rechten $\underline{x} = (1, \lambda, \lambda)$ en $\underline{x} = (\mu, 1, \mu)$.

6. Kegel met top O $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

Als (x,y,z) erop, dan ook $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

7. Cylinder evenwijdig z-as $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Tenslotte merken wij op dat een ruimtekromme kan worden gegeven in parametervoorstelling

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda), \quad z = z(\lambda)$$

of als snijfiguur van twee oppervlakken.

Vb. $x + z = 0$; $y^2 = 2x$ is de parabool, die de doorsnede is van het loodrecht op xOz staande vlak $x + z = 0$ met de loodrecht op xOy staande parabolische cylinder $y^2 = 2x$. Een parametervoorstelling van de kromme is $\underline{x} = (2\lambda^2, 2\lambda, -2\lambda^2)$.

Vb. $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, $z = h\varphi$, met a en h constant, φ variabel, is de parametervoorstelling van een schroeflijn, die geheel op de cylinder $x^2 + y^2 = a^2$ ligt en die spoed $2\pi h$ heeft. Wanneer a en φ onafhankelijk van elkaar variëren, dan ontstaat het zogenaamde rechte schroefoppervlak. Als $a = k\varphi$ dan krijgen wij de conische schroeflijn, die op het rechte schroefoppervlak ligt.

§.6 Meetkundige plaatsen.

A. Kegels

Een kegel is de meetkundige plaats der rechten, die door een gegeven punt (de top) gaan en die een gegeven kromme (de richtkromme) snijden. Men vindt de vergelijking van de kegel, door de voorwaarde op te stellen dat een willekeurige rechte door de top een snijpunt heeft met de richtkromme.

Vb.1 Gevraagd de kegel met top O en richtkromme $\underline{x} = (\alpha, \alpha^2, \alpha^3)$.
Wij zoeken de voorwaarde opdat de rechte

$$(1) \quad x = \lambda u, \quad y = \lambda v, \quad z = \lambda w$$

de richtkromme snijdt, dus een verband tussen u , v en w .
De voorwaarde is dat

$$\lambda u = \alpha, \quad \lambda v = \alpha^2, \quad \lambda w = \alpha^3$$

een oplossing hebben. Elimineer λ en α , dan krijgen wij

$$uw = v^2,$$

welke voorwaarde in verband met (1) leidt tot de vergelijking van de gevraagde kegel: $xz = y^2$. Men krijgt een meetkundig beeld van de kegel, die de x -as en de z -as bevat, door hem te snijden met het vlak $x + z = 2$.

Vb.2 Gevraagd de kegel met top $T = (2, 0, 1)$ en richtkromme $x = 0, y^2 + z^2 = 1$. De voorwaarde opdat een rechte door T

$$(1) \quad x = 2 + \lambda u, \quad y = \lambda v, \quad z = 1 + \lambda w$$

de richtkromme snijdt is

$$2 + \lambda u = 0, \quad (\lambda v)^2 + (1 + \lambda w)^2 = 1$$

waaruit na eliminatie van λ als verband tussen u , v , w volgt

$$\left(\frac{2v}{u}\right)^2 + \left(1 - \frac{2w}{u}\right)^2 = 1$$

$$\text{of} \quad 4v^2 + (u - 2w)^2 = u^2.$$

In verband met (1) leidt deze voorwaarde tot de vergelijking

$$4y^2 + [(x - 2) - 2(z - 1)]^2 = (x - 2)^2$$

$$\text{of} \quad 4y^2 + (x - 2z)^2 = (x - 2)^2$$

van de gevraagde kegel. Deze kegel snijdt het xOy -vlak volgens de parabool $y^2 + x - 1 = 0$.

Vb.3 Gevraagd de kegel met top $(2,1,3)$ die de bol $(\underline{x}, \underline{x}) = 1$ omhult.
De voorwaarde opdat een rechte door de top

$$(1) \quad x = 2 + \lambda u, \quad y = \lambda v, \quad z = 3 + \lambda w$$

de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ raakt is dat de vergelijking

$$(2 + \lambda u)^2 + (1 + \lambda v)^2 + (3 + \lambda w)^2 = 1$$

twee gelijke wortels λ heeft. Dus moet van

$$\lambda^2 (u^2 + v^2 + w^2) + 2\lambda(2u + v + 3w) + 13 = 0$$

de discriminant nul zijn:

$$(2u + v + 3w)^2 - 13(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Dit verband tussen u, v, w levert in verband met (1) de vergelijking van de gevraagde kegel.

B. Cylinders

Een cylinder is de meetkundige plaats der rechten die evenwijdig zijn met een gegeven rechte en die een gegeven kromme (de richtkromme) snijden. Men vindt de vergelijking van de cylinder door de voorwaarde op te stellen dat een willekeurige rechte evenwijdig aan de gegeven richting een snijpunt heeft met de richtkromme.

Vb.4 Gevraagd de cylinder evenwijdig aan $\underline{x} = \lambda(1,2,1)$ met richtkromme $z = 1, xy = 1$.
Laat (x_0, y_0, z_0) op de richtkromme liggen, dus

$$(1) \quad z_0 = 1, \quad x_0 y_0 = 1.$$

Een rechte door (x_0, y_0, z_0) met gegeven richting is

$$(2) \quad x = x_0 + \lambda, \quad y = y_0 + 2\lambda, \quad z = z_0 + \lambda.$$

De vergelijking van de cylinder wordt verkregen door uit (1) en (2) de λ, x_0, y_0, z_0 te elimineren. Dit levert

$$\lambda = z - 1, \quad x_0 = x - z + 1, \quad y_0 = y - 2z + 2 \quad \text{dus}$$

$$(x - z + 1)(y - 2z + 2) = 1.$$

De doorsnede met het xOy -vlak is $(x + 1)(y + 2) = 1$.

C. Omwentelingsoppervlakken

Een gegeven kromme wentelt om een gegeven as. Men vindt de vergelijking van het verkregen omwentelingsoppervlak door voor een willekeurig punt P van de te wentelen kromme op te stellen

a) de vergelijking van het vlak waarin P wentelt, dat dus loodrecht op de as is;

b) de vergelijking van de bol door P met een handig middelpunt op de as.

Vb.5 Wentel $\underline{x} = (0,1,0) + \lambda(1,0,1)$ om de as $\underline{x} = (3,0,0) + \mu(0,1,1)$.
Neem $P = (\lambda, 1, \lambda)$ op de te wentelen rechte. De wentelcirkel van P beschrijven wij door

a) het vlak door P loodrecht op de as is

$$(y - 1) + (z - \lambda) = 0$$

b) de bol met $M = (3,0,0)$ door P is

$$(x - 3)^2 + y^2 + z^2 = (\lambda - 3)^2 + 1^2 + \lambda^2.$$

Elimineer λ uit a) en b), dan is de vergelijking van het omwentelingsvlak

$$(x - 3)^2 + y^2 + z^2 = (y + z - 4)^2 + 1 + (y + z - 1)^2.$$

Vb.6 Wentel de parabool $z = x^2$, $y = x + 1$ om de z -as. Een parameter-
voorstelling van de parabool is $P = (\lambda, \lambda + 1, \lambda^2)$. Het vlak door
 P loodrecht op de as is $z = \lambda^2$. De bol om O door P is

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 + (\lambda + 1)^2 + \lambda^4.$$

Elimineer λ , dan

$$(x^2 + y^2 - 2z - 1)^2 = 4z.$$

Vb.7 Wentel de in het yOz -vlak gelegen kromme $z = f(y)$ om de z -as.
Een punt op de kromme is $P = (0, \lambda, f(\lambda))$. Het vlak loodrecht op
de z -as $z = f(\lambda)$ en de bol $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 + f^2(\lambda)$ leveren als
vergelijking van het omwentelingsoppervlak

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Vb.8 Wenteling van de in het yOz -vlak gelegen cirkel

$$(y - a)^2 + z^2 = b^2$$

om de z -as levert de torus

$$[\sqrt{x^2 + y^2} - a]^2 + z^2 = b^2.$$

§.7 Vectorproduct in R_3 .

$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ zijn vectoren in R_3 . De componenten van hun lineaire combinaties $\underline{x} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b}$ voldoen, zoals na eliminatie van λ en μ blijkt, aan

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{dus aan}$$

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2)x_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)x_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)x_3 = 0,$$

de vergelijking van het door \underline{a} en \underline{b} opgespannen vlak. Blijkbaar staat de vector

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

loodrecht op dit vlak. Wij noemen deze vector het vectorproduct $\underline{a} \times \underline{b}$. Van deze vector, die loodrecht op \underline{a} en op \underline{b} staat, bepalen wij de lengte. Daartoe merken wij op dat de determinant

$$\begin{aligned} D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_2 & b_2 & a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_3 & b_3 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{vmatrix} = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \end{aligned}$$

positief is en in waarde gelijk is aan het kwadraat van de lengte van $\underline{a} \times \underline{b}$. Uit het positief zijn blijkt dat de orientatie van $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}$ die van x, y, z is. Verder heeft het parallelepipedum, dat wordt opgespannen door $\underline{a}, \underline{b}$ en de daarop loodrechte $\underline{a} \times \underline{b}$, de inhoud $|\underline{a} \times \underline{b}|^2$, dus

$$|\underline{a} \times \underline{b}|^2 = |\underline{a} \times \underline{b}| \cdot \text{opp. parallelogram opgespannen door } \underline{a} \text{ en } \underline{b}$$

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = \text{opp. parallelogram} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin \varphi(\underline{a}, \underline{b}).$$

Hiermee is bewezen de

Stelling Het vectorproduct van \underline{a} en \underline{b} , dat gedefinieerd is door

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

is een vector die

1. loodrecht staat op \underline{a} en \underline{b} ,
2. met \underline{a} en \underline{b} is georiënteerd als x, y, z ,
3. in lengte gelijk is aan de oppervlakte van het door \underline{a} en \underline{b} opgespannen parallelogram.

Vb.1 De momentvector \underline{m} t.o.v. de oorsprong van een kracht \underline{k} , die werkt in een punt $A = \underline{a}$ wordt gedefinieerd door

$$\underline{m} = \underline{a} \times \underline{k}.$$

Deze momentvector heeft lengte $|\underline{a}| \cdot |\underline{k}| \cdot \sin \varphi$ en dit is juist het product van de lengte van \underline{k} en de afstand van 0 tot de werklijn van \underline{k} .

Vb.2 Een lichaam roteert om een as met constante hoeksnelheid ω . Wanneer de hoeksnelheidsvector wordt voorgesteld door de vector $\underline{\omega}$ langs de as, in positieve zin t.o.v. de rotatie, en met lengte ω , dan is de snelheidsvector \underline{v} in een punt $A = \underline{a}$ juist

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{a}$$

immers niet slechts de richting van \underline{v} klopt, maar ook de lengte $|\underline{v}| = \omega \cdot |\underline{a}| \sin \varphi$.

Vb.3 $(1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1)$
 $(1,0,0) \times (0,0,1) = -(0,1,0)$
 $(1,0,0) \times (1,0,0) = (0,0,0).$

Eigenschappen van het vectorproduct :

$$1. \underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a} \qquad 2. \underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}.$$

Bewijs: uit de definitie.

$$3. (\underline{a}, \underline{b} \times \underline{c}) = D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}).$$

Bewijs: links is $a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$ en dit is juist de determinant. Meetkundig is de eigenschap in te zien door beschouwing van het pedum met als grondvlak het door \underline{b} en \underline{c} opgespannen parallellogram en met als derde zijde \underline{a} . Dan is $(\underline{a}, \underline{b} \times \underline{c})$ het product van de lengte van \underline{a} , de oppervlakte van het grondvlak, en de cosinus van de hoek tussen \underline{a} en de normaal op het grondvlak. Dit is juist de inhoud van het pedum.

$$4. \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a}, \underline{c}) \cdot \underline{b} - (\underline{a}, \underline{b}) \cdot \underline{c}.$$

Bewijs: $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$ staat loodrecht op $\underline{b} \times \underline{c}$, die zelf loodrecht op het vlak van \underline{b} en \underline{c} staat. Daarom is reeds te verwachten dat $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$ een vector in het vlak van \underline{b} en \underline{c} is. De eerste component van $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$ is

$$\begin{aligned} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) &= \\ = b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) &= \\ = b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) &= \\ = b_1(\underline{a}, \underline{c}) - c_1(\underline{a}, \underline{b}). \end{aligned}$$

Op analoge wijze berekent men de andere componenten.

Gevolgen. Uit eigenschap 3 volgt

$$\begin{aligned}(\underline{a}, \underline{b} \times \underline{c}) &= (\underline{b}, \underline{c} \times \underline{a}) = (\underline{c}, \underline{a} \times \underline{b}) = \\ &= -(\underline{a}, \underline{c} \times \underline{b}) = -(\underline{b}, \underline{a} \times \underline{c}) = -(\underline{c}, \underline{a} \times \underline{b})\end{aligned}$$

Uit eigenschap 4. en 1. volgt

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = -\underline{a} \times (\underline{c} \times \underline{b}) = -(\underline{b} \times \underline{c}) \times \underline{a}.$$

Met de vier genoemde eigenschappen kunnen wij inwendige en uitwendige producten van meer dan drie vectoren berekenen.

Voorbeeld

$$\begin{aligned}(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \times \underline{d}) &= (\underline{c}, \underline{d} \times (\underline{a} \times \underline{b})) = \\ &= (\underline{c}, (\underline{d}, \underline{b})\underline{a} - (\underline{d}, \underline{a})\underline{b}) = (\underline{a}, \underline{c})(\underline{b}, \underline{d}) - (\underline{b}, \underline{c})(\underline{a}, \underline{d}).\end{aligned}$$

Opmerking:

De bovengenoemde eigenschappen spelen een belangrijke rol in de vectoranalyse. Men werkt daar met de symbolische vector

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \text{ de nablaoperator,}$$

met behulp waarvan de volgende grootheden kunnen worden gedefinieerd.

1. Als $\varphi(x, y, z)$ een functie van drie variabelen is, dan wordt de gradient van φ gedefinieerd door

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Beschouw het stelsel oppervlakken $\varphi(x, y, z) = C$.
De differentiaal is

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0,$$

dus $\text{grad } \varphi$ in een punt P is een vector die loodrecht staat op het raakvlak aan het door P gaande oppervlak $\varphi = C$. De lengte van $\text{grad } \varphi$ is een maat voor de toename van $\varphi(x, y, z)$ in de buurt van P.

2. Als $\underline{a}(x, y, z) = (a_1(x, y, z), a_2(x, y, z), a_3(x, y, z))$ een veld van vectoren is, namelijk in elk punt $P(x, y, z)$ één vector \underline{a} , dan wordt de divergentie van \underline{a} gedefinieerd door

$$\text{div } \underline{a} = (\nabla, \underline{a}) = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}.$$

Beschouw het vectorveld $\underline{a}(x,y,z)$ als de flux (snelheidsvector maal de dichtheid als functie van de plaats) van een stroom water, gas, warmte of electriciteit. Het totale verlies aan substantie per tijdseenheid bij stroming door een brok $\Delta x \Delta y \Delta z$ is dan

$$\Delta x \Delta y \Delta z \operatorname{div} \underline{a}.$$

3. Als $\underline{b}(x,y,z) = (b_1, b_2, b_3)$ een veld van vectoren is, dan wordt de rotatie van \underline{b} gedefinieerd door

$$\operatorname{rot} \underline{b} = \nabla \times \underline{b} = \left(\frac{\partial b_3}{\partial y} - \frac{\partial b_2}{\partial z}, \frac{\partial b_1}{\partial z} - \frac{\partial b_3}{\partial x}, \frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y} \right).$$

Beschouw $\underline{b}(x,y,z)$ als de flux van een stroom. Dan geeft de vector $\operatorname{rot} \underline{b}$ de rotatie van de stroming rond de vector \underline{b} aan.

HOOFDSTUK IX LINEAIRE AFBEELDINGEN

§.1 Inleiding

Een functie $y = mx + n$ is op te vatten als een afbeelding van de gehele x -as op de gehele y -as. Bij

$$(1) \quad y = mx$$

gaat bovendien het nulpunt van de x -as over in het nulpunt van de y -as. Een lineaire functie

$$(2) \quad z = ax + by$$

is op te vatten als een afbeelding van het gehele (x,y) -vlak op de gehele z -as, waarbij bovendien de oorsprong van het (x,y) -vlak overgaat in het nulpunt van de z -as. Ook door

$$(3) \quad \begin{aligned} u &= ax + by \\ v &= cx + dy \end{aligned}$$

wordt een afbeelding gegeven waarbij de O van het (x,y) -vlak overgaat in de O van het (u,v) -vlak.

(1), (2), (3) hebben een eigenschap gemeen, die kenmerkend is voor het lineaire karakter van de afbeeldingen. Bij (3) luidt deze eigenschap:

Als (x_1, y_1) wordt afgebeeld op (u_1, v_1) en als (x_2, y_2) wordt afgebeeld op (u_2, v_2) , dan wordt $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ afgebeeld op $(u_1 + u_2, v_1 + v_2)$ en $(7x_1, 7y_1)$ op $(7u_1, 7v_1)$.

$$\text{Vb.1} \quad \begin{aligned} u &= 2x + y \\ v &= 3x + 2y \end{aligned} \quad \text{dan} \quad \begin{aligned} x &= 2u - v \\ y &= -3u + 2v \end{aligned}$$

Elke (x,y) wordt afgebeeld op één (u,v) en elke (u,v) is beeld van één (x,y) . Het gehele (x,y) -vlak wordt lineair afgebeeld op het gehele (u,v) -vlak.

$$\text{Vb.2} \quad \begin{aligned} u &= 2x + y \\ v &= 4x + 2y \end{aligned}$$

Nu wordt wel elke (x,y) afgebeeld op één (u,v) , maar bv. $(u,v) = (1,3)$ is geen beeld van een (x,y) . Het gehele (x,y) -vlak wordt afgebeeld op de rechte $v = 2u$ van het (u,v) -vlak. Deze rechte heet de beeldruimte van de lineaire afbeelding. De punten van de rechte $2x + y = 0$ worden afgebeeld op de oorsprong van het (u,v) -vlak. De rechte $2x + y = 0$ heet de nulruimte van de lineaire afbeelding.

$$\text{In vb.1 is } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{en in vb.2 is } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Blijkbaar speelt bij een lineaire afbeelding

$$\begin{aligned} u &= ax + by \\ v &= cx + dy \end{aligned} \quad \text{de matrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

een rol. Inderdaad is de rang van deze matrix beslissend voor de vraag,

of de beeldruimte het gehele (u,v) -vlak dan wel een lineaire deelruimte daarvan is, en voorts voor de vraag of de nulruimte wordt gevormd door de oorsprong van het (x,y) -vlak dan wel door een rechte door 0.

Vb.3 Beschouw twee lineaire afbeeldingen

$$\begin{array}{lcl} u = 2x + y & & p = 2u - v \\ v = 3x + 2y & \text{en} & q = -u + v \end{array}$$

Door de eerste afbeelding A wordt het gehele (x,y) -vlak afgebeeld op het gehele (u,v) -vlak, terwijl door de tweede afbeelding B het gehele (u,v) -vlak wordt afgebeeld op het gehele (p,q) -vlak. Substitueren wij u en v, dan krijgen we

$$\begin{array}{l} p = x \\ q = x + y. \end{array}$$

Dit is een lineaire afbeelding van het gehele (x,y) -vlak op het gehele (p,q) -vlak, genaamd het product BA van beide eerst genoemde afbeeldingen.

Vb.4 Door $y = 2x + 3$ wordt geen lineaire afbeelding van de x-as op de y-as gegeven. Evenmin door $y = x^3$.

§.2 Definities

Def Een lineaire afbeelding A van een vectorruimte R in een vectorruimte S is een voorschrift, waardoor aan elke vector \underline{x} van R wordt toegevoegd een vector $A\underline{x}$ van S, en wel op lineaire wijze, dwz. zo dat $A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = A\underline{x}_1 + A\underline{x}_2$ en $A(\lambda\underline{x}) = \lambda A\underline{x}$ geldt voor alle $\underline{x}, \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in R$ en alle getallen λ .

Vb.1

$$\begin{array}{l} u = 2x + y \\ v = x + y \\ w = \frac{1}{2}x \end{array}$$

stelt voor een lineaire afbeelding van het (x,y) -vlak in de (u,v,w) -ruimte, namelijk op het daarin gelegen vlak $u - v = 2w$. Zo geldt

$$A(0,1) = (1,1,0) \quad ; \quad A(1,1) = (3,2,\frac{1}{2}) \quad ; \quad A(1,2) = (4,3,\frac{1}{2})$$

Inderdaad is

$$A(1,2) = A [(0,1) + (1,1)] = A(0,1) + A(1,1).$$

Vb.2 Draai alle punten van R_2 om de oorsprong over de hoek $\frac{1}{2}\pi$.

Deze draaiing is een lineaire afbeelding D van R_2 op zichzelf, omdat de som van twee gedraaide vectoren gelijk is aan de gedraaide somvector. Blijkbaar is $D(x,y) = (-y,x)$.

Vb.3 Een draaiing van R_2 om O over de hoek φ is eveneens een lineaire afbeelding D van R_2 op zichzelf. Teneinde het verband tussen \underline{x} en de gedraaide $D\underline{x}$ te vinden interpreteren we \underline{x} en $D\underline{x}$ als complexe getallen. Dan is $D\underline{x}$ het product (in de zin der complexe getallen) van \underline{x} en $e^{i\varphi}$, dus

$$\begin{aligned} D\underline{x} &= (x + iy)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + i(x \sin \varphi + y \cos \varphi). \end{aligned}$$

De coördinaten (x^*, y^*) van $D\underline{x}$ hangen dus met de coördinaten (x, y) van \underline{x} samen volgens

$$\begin{cases} x^* = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y^* = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$$

Vb.4 Projecteer alle punten van R_3 op een vlak α . Deze projectie is een lineaire afbeelding P van R_3 in zichzelf, want de projectie van een somvector is de som van de projecties der vectoren. Wanneer wij het coördinatenstelsel in R_3 zo nemen, dat het (x, y) -vlak samenvalt met α , en de z -as daar loodrecht op staat, dan is $P(x, y, z) = (x, y, 0)$.

Vb.5 Zij R de vectorruimte van alle differentieerbare reële functies van één variabele en zij S de vectorruimte van alle reële functies van één variabele. Dan is R deel van S . De afbeelding A , die aan elke differentieerbare functie zijn afgeleide toevoegt, nl.

$$A f(x) = f'(x),$$

is een lineaire afbeelding van R in S omdat

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x) \quad \text{en} \quad (\lambda f)' = \lambda f'.$$

Vb.6 Zij R de vectorruimte van alle in $a \leq x \leq b$ continue functies, dan is de afbeelding A die aan elke $f(x)$ uit R toevoegt het getal

$$A f = \int_a^b f(x) dx$$

een lineaire afbeelding van R in R_1 , omdat

$$\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx \quad \text{en} \quad \int_a^b \lambda f dx = \lambda \int_a^b f dx.$$

Zij A een lineaire afbeelding van vectorruimte R in vectorruimte S

Def De beeldruimte van A is de verzameling van de vectoren van S , die beeld zijn van een vector in R .

De nulruimte van A is de verzameling van de vectoren van R , die worden afgebeeld op de nulvector van S .

Stelling Beeldruimte en nulruimte zijn lineaire deelruimten.

Bewijs 1 Als $\underline{x}, \underline{y} \in R$, dan $A\underline{x}, A\underline{y} \in S$. Wegens

$$A\underline{x} + A\underline{y} = A(\underline{x} + \underline{y}) \quad \text{en} \quad \lambda A\underline{x} = A(\lambda \underline{x})$$

behoren ook $A\underline{x} + A\underline{y}$ en $\lambda A\underline{x}$ tot de beeldruimte, die dus lineaire deelruimte van S is.

Bewijs 2 Als $A\underline{x} = \underline{0} = A\underline{y}$ dan is ook

$$A(\underline{x} + \underline{y}) = \underline{0} \quad \text{en} \quad A(\lambda \underline{x}) = \underline{0}$$

dus de nulruimte is lineaire deelruimte van R .

In de voorbeelden zijn beeldruimte B en nulruimte N :

- Vb.1 B : vlak $u - v = 2w$ van R_3 ; N : oorsprong van R_2
 Vb.2 en 3 B : gehele R_2 ; N : oorsprong van R_2
 Vb.4 B : het (x,y) -vlak ; N : z -as
 Vb.5 B : alle afgeleiden ; N : alle constante functies
 Vb.6 B : gehele getallenrechte ; N : alle f met $\int_a^b f \, dx = 0$.

Laat R, S, T drie vectorruimten zijn.

Def Het product BA van twee lineaire afbeeldingen

$$A: R \rightarrow S \quad \text{en} \quad B: S \rightarrow T$$

is de afbeelding $BA: R \rightarrow T$, die wordt gedefinieerd door

$$\underline{x} \in R \rightarrow B(A\underline{x}) \in T$$

Het product BA is weer een lineaire afbeelding, want

$$BA(\underline{x} + \underline{y}) = B(A(\underline{x} + \underline{y})) = B(A\underline{x} + A\underline{y}) = BA\underline{x} + BA\underline{y} \quad \text{en}$$

$$BA(\lambda \underline{x}) = B(A(\lambda \underline{x})) = B(\lambda A\underline{x}) = \lambda BA\underline{x}.$$

Opm BA is alleen gedefinieerd als A een afbeelding is in dezelfde ruimte S , waarvan B een afbeelding is.

Opm R, S, T kunnen dezelfde ruimten zijn.

Opm AB en BA behoeven niet gelijk te zijn.

Vb.1 Zij $A: R_2 \rightarrow R_2$ een draaiing om O over hoek α .

Zij $B: R_2 \rightarrow R_2$ een draaiing om O over hoek β , dan is BA een draaiing om O over hoek $\alpha + \beta$. In dit voorbeeld is $BA = AB$.

Vb.2 Zij A de projectie van de punten van R_2 op de rechte $y = x$.
Zij B de projectie van de punten van R_2 op de x-as. Dan is $BA \neq AB$.

Vb.3 Zij A de draaiing in R_2 over $\frac{\pi}{2}$ om de x-as. Zij B de draaiing
in R_2 over $\frac{\pi}{2}$ om de y-as. Dan is $BA \neq AB$.

§.3 Voorstelling door matrices

Voorbeeld. Het (x,y) -vlak wordt door een lineaire afbeelding A afgebeeld
op de (u,v,w) -ruimte. Wanneer men weet, dat

$$A(1,0) = (a,b,c) \quad \text{en} \quad A(0,1) = (d,e,f)$$

dan kan men ook van een willekeurige vector (x,y) het beeld bepalen,
immers

$$\begin{aligned} A(x,y) &= A\{x(1,0) + y(0,1)\} = x A(1,0) + y A(0,1) = \\ &= x(a,b,c) + y(d,e,f) = (ax + dy, bx + ey, cx + fy). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= ax + dy \\ v &= bx + ey \\ w &= cx + fy. \end{aligned}$$

$$\text{De matrix} \quad \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix},$$

waarvan de kolomvectoren juist de beelden van de basisvectoren van het
 (x,y) -vlak zijn, geeft dus alle informatie omtrent de lineaire afbeel-
ding.

Wij beperken ons in het vervolg tot vectorruimten van eindige dimensie.
Zij A een lineaire afbeelding van de vectorruimte R met dimensie n in
de vectorruimte S met dim m. Zij $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ een basis van R. De
beelden $A\underline{e}_1, \dots, A\underline{e}_n$ liggen in S en zijn dus lineair uit te drukken
in een basis $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m$ van S, bijvoorbeeld als volgt:

$$\begin{array}{cccc} A\underline{e}_1 & A\underline{e}_2 & \dots & A\underline{e}_n \\ \parallel & \parallel & & \parallel \\ \left(\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{array} \right) & \dots & \left(\begin{array}{c} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{array} \right) \end{array},$$

$$\text{kort} \quad A\underline{e}_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \underline{f}_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Het beeld van een willekeurige vector uit R

$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n$$

is wegens het lineaire karakter van A eenvoudig in deze kolommen uit te drukken:

$$\underline{Ax} = x_1 \underline{Ae}_1 + \dots + x_n \underline{Ae}_n.$$

In coördinaten geschreven: als

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \text{ en } \underline{Ax} = (y_1, \dots, y_m), \text{ dan is}$$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ y_2 = a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ y_m = a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \end{cases} \text{ Dus } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

geeft bij vaste basiskeuze in R en S alle informatie over A . Deze matrix heet daarom de, bij de vaste basiskeuze behorende, matrix van de lineaire afbeelding A . Aangezien wij in het vervolg steeds vaste bases zullen gebruiken, duiden wij deze matrix ook aan met de letter A . De rang van de matrix is juist de dimensie van de beeldruimte, die immers wordt opgespannen door $\underline{Ae}_1, \dots, \underline{Ae}_n$ (de kolomvectoren van de matrix). Deze rang hangt daarom niet af van de basiskeuze van R en S , en heet de rang van de lineaire afbeelding.

Stelling | Voor een lineaire afbeelding van een n -dimensionale vectorruimte R in een vectorruimte S geldt
dim. beeldruimte + dim. nulruimte = n .

Bewijs De vectoren \underline{x} , die op de vector $\underline{0}$ worden afgebeeld, zijn juist de oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} 0 &= a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 &= a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \end{aligned}$$

Toepassing van de stellingen van blz. V, 13 en V, 16:
dim. (ruimte opgespannen door kolomvectoren) + dim. oplossingsruimte = n ,
levert het gestelde.

Vb.1 Als $A(1,0,0) = (1,1,0)$; $A(0,1,0) = (2,1,-1)$; $A(0,0,1) = (1,2,3)$,
dan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ dus } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = y_2 \\ -x_2 + 3x_3 = y_3 \end{cases}$$

Duidelijk is

$$A(2,-3,0) = 2A(1,0,0) - 3A(0,1,0) = 2(1,1,0) - 3(2,1,-1) = (-4,-1,3).$$

Om de vector te vinden die wordt afgebeeld op $(5,10,13)$ moeten wij 3 vergelijkingen met 3 onbekenden oplossen. Antwoord: $(3,-1,4)$ want

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & 3 & 13 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & 3 & 13 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Vb.2 De matrix van de lineaire afbeelding A , die wordt bepaald door $A(1,1,0) = (1,2,0)$; $A(2,-1,1) = (6,4,5)$; $A(1,0,1) = (3,4,3)$, vinden wij door eerst met vegen de beelden van de basisvectoren te bepalen:

$$\begin{aligned} (1,1,0) &\rightarrow (1,2,0) & (1,1,0) &\rightarrow (1,2,0) & (1,1,0) &\rightarrow (1,2,0) \\ (2,-1,1) &\rightarrow (6,4,5) & \sim (3,0,1) &\rightarrow (7,6,5) & \sim (2,0,0) &\rightarrow (4,2,2) & \sim \\ (1,0,1) &\rightarrow (3,4,3) & (1,0,1) &\rightarrow (3,4,3) & (1,0,1) &\rightarrow (3,4,3) & \sim \\ & & (0,1,0) &\rightarrow (-1,1,-1) & \text{dus } A = & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ & & (1,0,0) &\rightarrow (2,1,1) & & & \\ & & (0,0,1) &\rightarrow (1,3,2) & & & \end{aligned}$$

Vb.3 Zij $A: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_3$ met $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) De nulruimte bestaat uit alle oplossingen van $A\underline{x} = \underline{0}$, dus wegens

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{van } \begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

De nulruimte is dus de rechte $\underline{x} = \lambda(-1,-1,2)$.

b) De beeldruimte is de ruimte die wordt opgespannen door de kolomvectoren

$$\begin{array}{ccc} (2,1,1) & (2,1,1) & (0,1,3) \\ (8,3,1) & \text{dus door } (2,0,-2) & \text{dus door } (1,0,-1) \\ (5,2,1) & (1,0,-1) & \end{array}$$

De beeldruimte is dus het vlak

$$\underline{x} = \rho(0,1,3) + \sigma(1,0,-1), \quad \text{met vergelijking } x - 3y + z = 0.$$

c) Om de vectoren te bepalen, die op $(6,2,0)$ worden afgebeeld moeten 3 vergelijkingen met 3 onbekenden worden opgelost, nl.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Antwoord: $\underline{x} = (-1, 1, 0) + \lambda(-1, -1, 2)$.

Vb.4 De afbeelding $R_3 \rightarrow R_3$, waarbij elke vector in zichzelf overgaat, heet de identiteit I en heeft de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vb.5 Een vierpool is een elektrisch netwerk met twee ingangsklemmen 1 en 1' en twee uitgangsklemmen 2 en 2', zodat de bijbehorende spanningen en stromen e_1, j_1 en e_2, j_2 samenhangen volgens

$$\begin{cases} e_2 = A_{11} e_1 + A_{12} j_1 \\ j_2 = A_{21} e_1 + A_{22} j_1 \end{cases} \quad \text{met coëfficiëntenmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Wanneer wij twee vierpolen achter elkaar schakelen, dan geldt

$$\begin{cases} e_2 = A_{11} e_1 + A_{12} j_1 \\ j_2 = A_{21} e_1 + A_{22} j_1 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} e_3 = B_{11} e_2 + B_{12} j_2 \\ j_3 = B_{21} e_2 + B_{22} j_2 \end{cases} \quad \text{dus}$$

$$\begin{cases} e_3 = (B_{11} A_{11} + B_{12} A_{21}) e_1 + (B_{11} A_{12} + B_{12} A_{22}) j_1 \\ j_3 = (B_{21} A_{11} + B_{22} A_{21}) e_1 + (B_{21} A_{12} + B_{22} A_{22}) j_1 \end{cases}$$

Het samengestelde netwerk is dus equivalent met een vierpool met een coëfficiëntenmatrix, die wij het product van de oorspronkelijke matrices noemen, en wel

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} A_{11} + B_{12} A_{21} & B_{11} A_{12} + B_{12} A_{22} \\ B_{21} A_{11} + B_{22} A_{21} & B_{21} A_{12} + B_{22} A_{22} \end{pmatrix}$$

Merk op dat elk element van de productmatrix het inwendig product is van de overeenkomstige rij van de eerste en kolom van de tweede matrix.

Vermenigvuldigen van matrices

Zij A een matrix met p rijen en m kolommen. Beschouw A als p rijvectoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_p$ in R_m .

Zij B een matrix met m rijen en n kolommen. Beschouw B als n kolomvectoren $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ in R_m .

In R_m is het inwendig product van \underline{a}_i en \underline{b}_j :

$$(\underline{a}_i, \underline{b}_j) = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{im} b_{mj}.$$

Wij definiëren het product AB der matrices A en B als volgt:

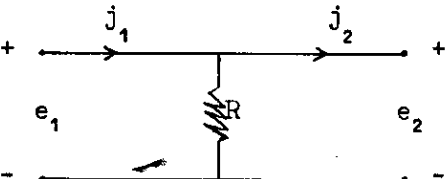
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdot & \cdot & a_{pm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdot & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdot & c_{pn} \end{pmatrix}$$

met $c_{ij} = (\underline{a}_i, \underline{b}_j)$.

Vb.1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 4 \\ -7 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Vb.2



De matrix van nevenstaande vierpool is wegens

$$\begin{matrix} e_2 = e_1 \\ j_2 = -\frac{1}{R} e_1 + j_1 \end{matrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

Twee parallel geschakelde weerstanden R_1 en R_2 zijn op te vatten als twee dergelijke in serie geschakelde vierpolen, dus zijn equivalent met een weerstand R waarvoor $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, omdat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} & 1 \end{pmatrix}$$

Stelling | Als de lin.afbeelding $B: R \rightarrow S$ matrix B heeft en de lin.afbeelding $A: S \rightarrow T$ matrix A heeft, dan heeft de productafb. $AB: R \rightarrow T$ de matrix A.B.

Bewijs Laat R, S, T de volgende bases hebben:

$$R: \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n ; S: \underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m ; T: \underline{g}_1, \dots, \underline{g}_p.$$

Zij verder

$$B \underline{e}_j = \sum_{k=1}^m b_{kj} \underline{f}_k \quad \text{en} \quad A \underline{f}_k = \sum_{i=1}^p a_{ik} \underline{g}_i, \quad \text{dan}$$

$$\begin{aligned} AB \underline{e}_j &= A \left(\sum_{k=1}^m b_{kj} \underline{f}_k \right) = \sum_{k=1}^m b_{kj} A \underline{f}_k = \sum_{k=1}^m b_{kj} \sum_{i=1}^p a_{ik} \underline{g}_i = \\ &= \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \right) \underline{g}_i. \end{aligned}$$

De matrix van de productafbeelding AB bestaat dus uit getallen

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

en is dus per definitie het product van A en B .

Vb.1 Zij $A: R_2 \rightarrow R_2$ een draaiing over hoek α en $B: R_2 \rightarrow R_2$ een draaiing over hoek β . Dan is de matrix van de productafbeelding:

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Vb.2 Zij A de projectie van R_2 op de rechte $y = x$ en zij B de projectie van R_2 op de x -as. Dan geldt

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vb.3 Zij A de draaiing in R_3 over $\frac{\pi}{2}$ om de x -as en zij B de draaiing over $\frac{\pi}{2}$ om de y -as. Dan is $AB \neq BA$ met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def De getransponeerde matrix A^T van een matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \cdot & \cdot & a_{pm} \end{pmatrix} \quad \text{is} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{p1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & \cdot & \cdot & a_{pm} \end{pmatrix}$$

A^T ontstaat dus uit A door in A rijen en kolommen van rol te doen verwisselen.

Stelling $(AB)^T = B^T A^T$

Bewijs Transpositie doet de rijvectoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$ van A overgaan in de kolomvectoren van A^T , en doet de kolomvectoren $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ van B overgaan in de rijvectoren van B^T . De elementen van het product $B^T A^T$ zijn de getallen $(\underline{b}_i, \underline{a}_j)$, die gelijk zijn aan $(\underline{a}_j, \underline{b}_i)$, de getransponeerden van de elementen $(\underline{a}_i, \underline{b}_j)$ van AB .

§.4 Vierkante matrices

Wij beperken ons verder tot lineaire afbeeldingen van R in of op S waarbij R en S ruimten van dezelfde dimensie zijn. De bij een basiskeuze behorende matrix van de lineaire afbeelding is dan een matrix met evenveel rijen als kolommen. De meest eenvoudige lineaire afbeelding van dit type is de identiteit I , die elk element op zichzelf afbeeldt. De bijbehorende vierkante matrix heeft alle elementen = 0 behalve de elementen op de hoofddiagonaal, die = 1 zijn.

Def De lineaire afbeelding $A: R_n \rightarrow S_n$ heet regulier als de gehele S_n beeldruimte is, en singulier als slechts een echte deelruimte van S_n beeldruimte is.

Stelling | Een lineaire afbeelding is regulier dan en slechts dan als de determinant van de matrix ongelijk nul is.

Bewijs De beeldruimte is de gehele S_n dan en slechts dan als de beelden van de basisvectoren van R_n een basis van S_n vormen, dus als de rang van de matrix n is, dus als de determinant van deze matrix $\neq 0$.

Opm. De absolute waarde van genoemde determinant is juist de inhoud van het pedum, opgespannen door de beelden van de basisvectoren van R .

Bij een reguliere lineaire afbeelding $A: R_n \rightarrow S_n$ is elke $\underline{y} \in S_n$ beeld en wel van precies één vector $\underline{x} \in R_n$. Immers als $\underline{y} = A\underline{x}$ en $\underline{y} = A\underline{x}'$, dan $0 = A(\underline{x} - \underline{x}')$. Daar \dim . beeldruimte = n is is \dim . nulruimte = 0 en dus is $\underline{x} = \underline{x}'$.

Def De afbeelding $\underline{y} \in S_n \rightarrow \underline{x} \in R_n$ heet de inverse afbeelding van de reguliere lineaire afbeelding $A: \underline{x} \rightarrow \underline{y} = A\underline{x}$ en wordt genoteerd door $A^{-1}: S_n \rightarrow R_n$. Bij reguliere A betekent $\underline{y} = A\underline{x}$ dus hetzelfde als $\underline{x} = A^{-1} \underline{y}$. Bij singuliere A is de inverse niet gedefinieerd.

Stelling De inverse afbeelding van een reguliere lineaire afbeelding is weer lineair en regulier.
Bovendien geldt $A A^{-1} = A^{-1} A = I$ (identiteit).

Bewijs Als $\underline{x}_1 = A^{-1} \underline{y}_1$, $\underline{x}_2 = A^{-1} \underline{y}_2$, $\underline{x}_3 = A^{-1} (\underline{y}_1 + \underline{y}_2)$,
m.a.w. als $\underline{y}_1 = A \underline{x}_1$, $\underline{y}_2 = A \underline{x}_2$, $\underline{y}_1 + \underline{y}_2 = A \underline{x}_3$,
dan is $A \underline{x}_1 + A \underline{x}_2 = A \underline{x}_3$, dus $A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = A \underline{x}_3$.

Wegens de regulariteit van A volgt $\underline{x}_1 + \underline{x}_2 = \underline{x}_3$, m.a.w.

$A^{-1} \underline{y}_1 + A^{-1} \underline{y}_2 = A^{-1} (\underline{y}_1 + \underline{y}_2)$. De inverse is dus een lineaire afbeelding. Daar de gehele R_n beeldruimte is van A^{-1} is de inverse ook regulier.

Tenslotte is de productafbeelding van

$A: \underline{x} \in R_n \rightarrow \underline{y} = A\underline{x} \in S_n$ en $A^{-1}: \underline{y} \in S_n \rightarrow \underline{x} = A^{-1} \underline{y} \in R_n$

niet anders dan de afbeelding, die aan elke vector van R_n deze zelfde vector toevoegt.

Vb.1 Gegeven $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Gevraagd A^{-1} .

Opl. Bekend is $A(1,0,0) = (1,1,1)$; $A(0,1,0) = (2,3,2)$; $A(0,0,1) = (3,5,4)$.

Dus $A^{-1}(1,1,1) = (1,0,0)$ $A^{-1}(2,3,2) = (0,1,0)$ $A^{-1}(3,5,4) = (0,0,1)$
 $A^{-1}(1,1,1) = (1,0,0)$ $A^{-1}(2,3,2) = (0,1,0) \sim A^{-1}(0,1,0) = (-2,1,0)$ $A^{-1}(3,5,4) = (0,0,1) \sim A^{-1}(0,0,1) = (-3,0,1)$
 $A^{-1}(1,0,0) = (2,1,-1)$ $A^{-1}(0,1,0) = (-2,1,0)$ $A^{-1}(0,0,1) = (1,-2,1)$

Dus $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Inderdaad is $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vb.2 De inverse van een draaiing over α is een draaiing over $(-\alpha)$

want $\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Door de lineaire afbeelding A wordt \underline{x} afgebeeld op $\underline{y} = A\underline{x}$. In coördinaten geschreven:

$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n$
 $y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n$
 \dots
 $y_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n$ met $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Wij geven de kolommen van A aan door $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$.

Dan is de determinant van A

$$D = D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) \neq 0.$$

De matrix van de inverse afbeelding krijgen wij door x_1, \dots, x_n uit te drukken in y_1, \dots, y_n . Volgens de regel van Cramer (zie V, 22) is

$$x_1 = \frac{D(\underline{y}, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)}{D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)}, \dots, x_n = \frac{D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}, \underline{y})}{D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}, \underline{a}_n)}.$$

Wij ontwikkelen (zie V.21) de tellers naar de kolom \underline{y} . Als D_{ij} de bij a_{ij} behorende onderdeterminant (zie V.20) is, dan is

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{D_{11}}{D} y_1 - \frac{D_{21}}{D} y_2 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{D_{n1}}{D} y_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n &= (-1)^{n+1} \frac{D_{1n}}{D} y_1 + (-1)^{n+2} \frac{D_{2n}}{D} y_2 + \dots + (-1)^{2n} \frac{D_{nn}}{D} y_n \end{aligned}$$

De elementen b_{ij} van de matrix van de inverse afbeelding A^{-1} zijn dus

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{D_{ji}}{D}.$$

Om de inverse van een matrix A te vinden moeten wij dus

- 1) van elk element a_{ij} de onderdeterminant D_{ij} bepalen,
- 2) elke D_{ij} vermenigvuldigen met $(-1)^{i+j}$,
- 3) delen door D,
- 4) spiegelen t.o.v. de hoofddiagonaal.

Vb.1 De onderdeterminanten van de elementen van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{zijn} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Det A = 1, dus de $(-1)^{i+j} D_{ij}/D$ zijn

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \text{dus} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Inderdaad blijkt $A^{-1}A = I$.

$$\text{Vb.2} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{22}/D & -a_{12}/D \\ -a_{21}/D & a_{11}/D \end{pmatrix} \quad \text{met} \\ D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Stelling | Voor vierkante matrices A en B geldt
det (AB) = det A . det B.

Bewijs Laat a_{ij} de elementen van A en b_{ij} die van B zijn. De kolomvectors van A duiden wij aan door $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$. Het product AB, waarvan de elementen zijn

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

heeft als kolomvectors de vectoren

$$\sum_{k=1}^n b_{k1} \underline{a}_k ; \sum_{k=1}^n b_{k2} \underline{a}_k ; \dots ; \sum_{k=1}^n b_{kn} \underline{a}_k.$$

Dus

$$\text{Det (AB)} = D \left(\sum_{k=1}^n b_{k1} \underline{a}_k, \dots, \sum_{k=1}^n b_{kn} \underline{a}_k \right).$$

Volgens de grondregels voor het rekenen met determinanten kan deze determinant worden geschreven als de som van een aantal termen, waarbij de b_{ij} naar buiten zijn gebracht. Termen, waarin twee gelijke \underline{a}_k voorkomen, zijn nul. De andere termen kunnen alle door verwisseling van kolommen worden omgezet in $D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = \det A$. Zodoende geldt

$$\det (AB) = \varphi(B) \cdot \det A,$$

waarin $\varphi(B)$ een veelterm is in de getallen b_{ij} . De verkregen omvorming hangt niet af van de speciale gedaante van de matrices A en B, dus φ is een vaste veelterm, onafhankelijk van de speciale keuze van A en B. Kiezen wij nu voor A speciaal de eenheidsmatrix (waarvan de determinant = 1), dan geldt $\det B = \varphi(B)$ waaruit de te bewijzen formule direct volgt.

Opm. Deze stelling kan meetkundig worden bewezen met behulp van de op blz. 11 gemaakte opmerking.

Gevolg Voor reguliere A geldt $\det (A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Stelling | Het product van twee reguliere lineaire afbeeldingen is weer regulier en $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Bewijs Wegens $\text{Det (AB)} = \det A \cdot \det B$ is het linkerlid niet nul als de factoren van het rechterlid niet nul zijn. Verder volgt uit

$$A B B^{-1} A^{-1} = A I A^{-1} = A A^{-1} = I \\ B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}.$$

Eigenwaarden en eigenvectoren

Het komt vaak voor, dat een vergelijking of een stelsel vergelijkingen oplossingen heeft die oninteressant zijn, behalve in het geval dat een in de vergelijking optredende parameter een speciale waarde aanneemt. Dan spreekt men van eigenwaarden van de parameter en van eigenoplossingen van de vergelijking(en).

$$\text{Vb.1} \quad \begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ 2x + y = \lambda y \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ 2x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Voor haast alle λ is er slechts de oninteressante oplossing $x = y = 0$. Maar in twee gevallen zijn er andere oplossingen, namelijk als $\lambda = 3$ dan $\underline{x} = \rho(1,1)$, en als $\lambda = -1$ dan $\underline{x} = \sigma(1,-1)$.

Het vraagstuk is ook als volgt te interpreteren: Welke vectoren worden door de lineaire afbeelding $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ afgebeeld op veelvouden van

zichzelf? Het antwoord is dan:

(ρ, ρ) gaat over in zijn 3-voud, $(\sigma, -\sigma)$ in zijn tegengestelde.

Vb.2 Een trillende snaar, die is vastgemaakt bij $x = 0$ en bij $x = \ell$ kan slechts in staande trilling

$$u(x) = C \sin 2\pi\lambda x$$

verkeren wanneer $2\pi\lambda\ell = n\pi$, dus wanneer voor zijn golflengte λ geldt $\lambda = 2\ell/n$, n natuurlijk. De staande trilling is oplossing van de differentiaalvergelijking

$$-\frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = \lambda^2 u(x) \quad \text{met } u(\ell) = u(0) = 0,$$

die te beschouwen is als

$$\text{lineaire afbeelding van } u(x) = \text{veelvoud van } u(x).$$

Vb.3 In de quantenmechanica wordt de toestand van een deeltje beschreven door een staande golf

$$\phi(\underline{x}, t) = \varphi(\underline{x}) \cdot \cos 2\pi vt$$

waarbij $\varphi(\underline{x})$ voldoet aan de Schrödingervergelijking

$$H\varphi = \lambda\varphi, \quad H \text{ is zekere lineaire afbeelding.}$$

De vergelijking heeft slechts voor zekere λ een oplossing. Deze waarden van λ zijn te interpreteren als de mogelijke energietoestanden van het deeltje.

Zij gegeven de lineaire afbeelding $A: R_n \rightarrow R_n$. Wij vragen naar die vectoren van R_n , die worden afgebeeld op een veelvoud van zichzelf.

Def Een vector $\underline{x} \neq 0$ heet eigenvector van de lineaire afbeelding A, als er een getal λ bestaat zodat $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$. Het getal λ heet een eigenwaarde van A behorende bij de eigenvector \underline{x} .

In matrixtaal vragen wij naar oplossingen \underline{x} van het stelsel

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{array} \right\} \text{ dus } \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Deze homogene vergelijkingen hebben slechts dan een oplossing $\neq 0$ wanneer

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

De wortels van deze z.g. karakteristieke vergelijking zijn de eigenwaarden van A.

Vb.1 De karakteristieke vergelijking van de lineaire afbeelding met matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{is} \quad \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

De eigenwaarden van A zijn de wortels van

$$(2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0 \quad \text{dus} \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5.$$

$$\text{Uit } \begin{array}{l} 2x + y = x \\ 3x + 4y = y \end{array} \quad \text{en} \quad \begin{array}{l} 2x + y = 5x \\ 3x + 4y = 5y \end{array}$$

berekenen wij de eigenvectoren. Het blijkt dat $(\rho, -\rho)$ door A op zichzelf worden afgebeeld, terwijl $(3\sigma, \sigma)$ overgaan in hun 5-voud.

Vb.2 De karakteristieke vergelijking van

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{is} \quad \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 1 \\ 0 & -1 - \lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (1-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) + 4 + 1 + \lambda - 2(1-\lambda) &= 0 \\ -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda &= 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 4. \end{aligned}$$

De bijbehorende eigenvectoren zijn:

$$\lambda_1 = 0 : \quad \underline{x} = \rho(-5, 2, 1), \quad \text{de nulruimte!},$$

$$\lambda_2 = -1 : \quad \underline{x} = \sigma(1, -1, 0),$$

$$\lambda_3 = 4 : \quad \underline{x} = \tau(3, 2, 5).$$

Thans volgen nog enige stellingen over eigenwaarden van lineaire afbeeldingen van R_3 in zichzelf:

Stelling | Het product van de eigenwaarden van een lineaire afbeelding $A: R_3 \rightarrow R_3$ is gelijk aan de determinant van A .

Bewijs. De karakteristieke vergelijking van A luidt

$$\text{Det}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + \det A = 0$$

Op grond van de worteleigenschappen is dus

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det A.$$

Stelling | Elke lineaire afbeelding $A: R_3 \rightarrow R_3$ heeft tenminste één reële eigenvector.

Bewijs. De karakteristieke vergelijking van A is een vergelijking van graad 3 met reële coëfficiënten, die of 3 reële wortels, of één reële en twee toegevoegd complexe wortels heeft. Er is dus tenminste één reële eigenwaarde; deze voert tot reële eigenvectoren.

§.5 Orthogonale matrices

Def.1 Een lineaire afbeelding $A: R_n \rightarrow R_n$ heet orthogonaal, als voor elke $\underline{x} \in R_n$ geldt dat $A\underline{x}$ en \underline{x} even lang zijn.

Vb.1 Een draaiing $: R_2 \rightarrow R_2$ is een orthogonale afbeelding

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

stelt een draaiing over $\varphi = \arccos \frac{4}{5}$ voor. Inderdaad is

$$(A\underline{x}, A\underline{x}) = \left(\frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2\right)^2 + \left(\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2\right)^2 = x_1^2 + x_2^2 = (\underline{x}, \underline{x}).$$

Vb.2 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ is geen orthogonale afbeelding, want de lengte van $A\underline{x}$ is vijfmaal de lengte van \underline{x} .

Def.2 Een vierkante matrix A heet orthogonaal, als geldt
 $A^{-1} = A^T$, m.a.w. $A A^T = A^T A = I$.

Stelling De definities van orthogonaliteit zijn gelijkwaardig.

Bewijs 1 → 2. Laat $|A\underline{x}| = |\underline{x}|$ voor elke $\underline{x} \in R_n$. Wegens

$$(\underline{x} + \underline{x}', \underline{x} + \underline{x}') = (\underline{x}, \underline{x}) + (\underline{x}', \underline{x}') + 2(\underline{x}, \underline{x}')$$

dus
$$|\underline{x} + \underline{x}'|^2 - |\underline{x}|^2 - |\underline{x}'|^2 = 2(\underline{x}, \underline{x}')$$

geldt voor elk tweetal vectoren $\underline{x}, \underline{x}' \in R_n$ dat

$$(\underline{x}, \underline{x}') = (A\underline{x}, A\underline{x}').$$

In het bijzonder hebben de basisvectoren

$$\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \underline{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

beelden $A \underline{e}_i$ waarvoor geldt

$$(A \underline{e}_i, A \underline{e}_j) = 1 \text{ als } i = j \text{ en } = 0 \text{ als } i \neq j.$$

Daar deze beelden juist de kolomvectoren van de matrix A zijn volgt dus dat

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I$$

Bewijs 2 → 1. Wanneer $A^T A = I$ dan leest men voor de kolomvectoren $A \underline{e}_i$ van A af dat ze loodrecht op elkaar staan en lengte 1 hebben. Voor

$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n \quad \text{en} \quad A\underline{x} = x_1 A \underline{e}_1 + \dots + x_n A \underline{e}_n$$

volgt dus dat

$$(\underline{x}, \underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{en} \quad (A\underline{x}, A\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

de lengten van \underline{x} en $A\underline{x}$ zijn dus gelijk.

Vb.3

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

is orthogonaal, daar alle kolomvectoren lengte 1 hebben en loodrecht op elkaar staan. Wij bepalen nog de eigenvectoren:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 2 - 3\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 2 - 3\lambda & 2 \\ 2 & -2 & 1 - 3\lambda \end{vmatrix}$$

$$3\lambda^3 - 5\lambda^2 + 5\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda - 1)(3\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0.$$

De enige reële eigenwaarde is $\lambda = 1$. De eigenvectoren zijn $\rho(1, 1, 0)$. Deze vectoren blijven na de orthogonale afbeelding op hun plaats. Daar de hoek tussen $(1, 1, 0)$ en een willekeurige \underline{x} gelijk is aan de hoek tussen $(1, 1, 0)$ en $A\underline{x}$ is de orthogonale afbeelding een draaiing om $(1, 1, 0)$.

Vb.4
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

is orthogonaal. De eigenwaarden volgen uit

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{en zijn } \lambda = 1 \text{ en } \lambda = -1.$$

De bij $\lambda = 1$ behorende eigenvectoren liggen op de rechte $x = y\sqrt{3}$ en blijven op hun plaats. De bij $\lambda = -1$ behorende eigenvectoren liggen op de rechte $x\sqrt{3} + y = 0$ en gaan over in hun tegengestelde. De orthogonale afbeelding is dus een spiegeling t.o.v. de rechte $x = y\sqrt{3}$.

Stelling | Het product van twee orthogonale afbeeldingen is weer orthogonaal.

Bewijs $A: R_n \rightarrow R_n$ en $B: R_n \rightarrow R_n$ orthogonaal zijn, dan

$$A^{-1} = A^T \quad \text{en} \quad B^{-1} = B^T.$$

Wegens de reeds bewezen eigenschappen

$$(AB)^T = B^T A^T \quad \text{en} \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

volgt dat ook $(AB)^{-1} = (AB)^T$.

Stelling | De determinant van een orthogonale matrix heeft de waarde +1 of -1.

Bewijs Wegens definitie geldt voor een orthogonale A

$$A^T A = I.$$

Daar de getransponeerde dezelfde determinant heeft als de matrix zelf, volgt dat

$$[\text{Det } A]^2 = 1$$

waaruit het gestelde volgt.

Orthogonale matrices met determinant +1 heten direct orthogonaal, die met determinant -1 heten gespiegeld orthogonaal. Deze namen vinden hun rechtvaardiging in de volgende stelling.

Stelling | De enige orthogonale afbeeldingen van R_2 op R_2 zijn draaiingen om de oorsprong en spiegelingen aan een rechte.

Bewijs De matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

is orthogonaal als

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0.$$

Stel $d = \lambda a$, dan geeft de derde betrekking $b = -\lambda c$ en dan geven de beide eerste betrekkingen $\lambda^2 = 1$. Onze matrix wordt dus

Voor $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ met $a^2 + c^2 = 1$ en $\det = 1$.
Stel $a = \cos \varphi$, $c = \sin \varphi$, dan
 $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$, een draaiing om O over hoek φ .

Voor $\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$ met $a^2 + c^2 = 1$ en $\det = -1$.
Stel $a = \cos \varphi$ en $c = \sin \varphi$, dan
 $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$, een spiegeling aan de rechte met drager $(\cos \frac{1}{2}\varphi, \sin \frac{1}{2}\varphi)$.

Stelling | Elke directe orthogonale lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_3$ is een draaiing om een as.

Bewijs. Voor de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ van A geldt:

$$(1) \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det A = 1.$$

(2) Tenminste één der eigenwaarden, zeg λ_1 , is reëel terwijl dan λ_2 en λ_3 óf beide reëel óf toegevoegd complex zijn. In het laatste geval is $\lambda_2 \lambda_3$ positief.

(3) Uit de orthogonaliteit van A volgt voor reële eigenwaarde λ en bijbehorende eigenvectoren \underline{x}

$$\underline{Ax} = \lambda \underline{x} \quad \text{en} \quad (\underline{Ax}, \underline{Ax}) = (\underline{x}, \underline{x})$$

$$\text{dus} \quad \lambda^2 (\underline{x}, \underline{x}) = (\underline{x}, \underline{x}) \quad \text{waaruit} \quad \lambda^2 = 1.$$

De reële eigenwaarden zijn dus $+1$ of -1 .

Uit (1), (2), (3) volgt dat er tenminste één eigenwaarde $= 1$ is. Dit betekent dat er tenminste één eigenvector \underline{a} is, die door A op zichzelf wordt afgebeeld.

Aangezien bij een orthogonale afbeelding voor elk tweetal vectoren \underline{a} en \underline{y} geldt

$$(\underline{a}, \underline{y}) = (A \underline{a}, A \underline{y})$$

maakt de eigenvector \underline{a} gelijke hoeken met een vector \underline{y} en met diens beeld $A \underline{y}$. De afbeelding A is dus een draaiing met als as de rechte door \underline{a} .

HOOFDSTUK IXONBEPAALENDE INTEGRALLEN§.1 Herhaling.

$\int f(x)dx$ stelt voor alle functies, waarvan $f(x)$ de afgeleide is, d.w.z. alle functies, waarvan $f(x)dx$ de differentiaal is.

A. Grondformules :

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1 ; \int \frac{dx}{x} = \log |x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log a} \cdot a^x + C ; \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C ; \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C ; \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C ; \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C ; \int \frac{dx}{\sin x} = \log|\tan \frac{1}{2}x| + C$$

Vb.1.

$$\int \sin(a+bx)dx = \frac{1}{b} \int \sin(a+bx) d(a+bx) = -\frac{1}{b} \cos(a+bx) + C.$$

Vb.2.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+4}} dx = \int \frac{d(e^x+4)}{\sqrt{e^x+4}} = 2\sqrt{e^x+4} + C.$$

Vb.3.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d(x + \frac{\pi}{2})}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \log |\tan \frac{1}{2} (x + \frac{\pi}{2})| + C.$$

Vb.4.

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Vb.5.

$$\int \tanh x \, dx = \int \frac{d \cosh x}{\cosh x} = \log \cosh x + C.$$

B. Partiële integratie : $\int u \, dv = uv - \int v \, du.$

Vb.1.

$$\begin{aligned} \int \arcsin x \, dx &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Vb.2.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} \, dx &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \, dx + \arcsin x \\ \text{dus } \int \sqrt{1-x^2} \, dx &= \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C. \end{aligned}$$

Vb.3.

$$I = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} \int \cos bx \, de^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

$$J = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a} \int \sin bx \, de^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

Dus $I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I$, dus

$$I = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C.$$

$$J = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C.$$

Zo is, voor $a > 0$,

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{-a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \right]_0^N = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Vb.4.

Voor $n \neq -1$ is

$$\begin{aligned} \int x^n \log x \, dx &= \frac{1}{n+1} \int \log x \, d x^{n+1} = \frac{x^{n+1} \log x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx = \\ &= \frac{x^{n+1} \log x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C. \end{aligned}$$

Vb.5.

Bereken $\int e^{-x} x^n \, dx$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int e^{-x} x^n \, dx = - \int x^n \, de^{-x} = -x^n e^{-x} + n \int e^{-x} x^{n-1} \, dx = \\ &= -x^n e^{-x} + n I_{n-1}. \end{aligned}$$

Dit is een reductieformule voor I_n .

Bij voorbeeld is

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-x^N e^{-x} \right]_0^N + n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = \\ &= n(n-1) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-2} dx = n! \end{aligned}$$

Vb.6.

Bereken $\int (1+x^2)^{-n} dx = J_n$.

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = J_n - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \\ &= J_n - \frac{1}{2} \int \frac{x d(1+x^2)}{(1+x^2)^{n+1}} = J_n + \frac{1}{2n} \int x d \frac{1}{(1+x^2)^n} = \\ &= J_n + \frac{x}{2n(1+x^2)^n} - \frac{1}{2n} J_n = \frac{2n-1}{2n} J_n + \frac{x}{2n(1+x^2)^n} \end{aligned}$$

een reductieformule voor de integraal, die ons in staat stelt om J_{n+1} te berekenen, daar J_1 bekend is. Zo is

$$J_2 = \frac{1}{2} J_1 + \frac{x}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C.$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3}{4} J_2 + \frac{x}{4(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{3}{8} \arctan x + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{x}{4(x^2+1)^2} + C. \end{aligned}$$

§.2 Rationale integrand.A. Vb.1.

$$\begin{aligned}
\int \frac{(7x-1)dx}{x^2-2x+5} &= \frac{7}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx + 6 \int \frac{dx}{x^2-2x+5} = \\
&= \frac{7}{2} \int \frac{d(x^2-2x+5)}{x^2-2x+5} + 6 \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \\
&= \frac{7}{2} \log |x^2-2x+5| + 3 \int \frac{d\frac{1}{2}(x-1)}{[\frac{1}{2}(x-1)]^2+1} = \\
&= \frac{7}{2} \log |x^2-2x+5| + 3 \arctan \frac{1}{2}(x-1) + C.
\end{aligned}$$

Vb.2.

$$\begin{aligned}
\int \frac{(7x-1)dx}{(x^2-2x+5)^2} &= \frac{7}{2} \int \frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2} dx + 6 \int \frac{dx}{[(x-1)^2+4]^2} = \\
&= \frac{7}{2} \int \frac{d(x^2-2x+5)}{(x^2-2x+5)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{d\frac{1}{2}(x-1)}{[(\frac{x-1}{2})^2+1]^2} = \\
&= -\frac{7}{2(x^2-2x+5)} + \frac{3}{4} \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \quad \text{waar } t = \frac{1}{2}(x-1).
\end{aligned}$$

Voor de laatste integraal verwijzen wij naar paragraaf 1.

Uitkomst: $\frac{3}{8} \arctan \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3x-17}{4(x^2-2x+5)} + C.$

Alle integralen van rationale functies zijn te herleiden tot de volgende vier grondtypen :

a) $\int \frac{dx}{x-a} = \log |x-a| + C$

b) $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \quad (n \neq 1)$

c) $\int \frac{Px+Q}{x^2+px+q} dx$ met positief definitieve noemer. De integraal is te herleiden volgens :

$$\frac{P}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(Q - \frac{pP}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$$

= $\frac{P}{2} \log(x^2+px+q) +$ een arctan, wanneer wij stellen :

$$x + \frac{p}{2} = t \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} .$$

d) $\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} dx$ met positieve noemer. Wij herleiden volgens :

$$\frac{P}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx + \left(Q - \frac{pP}{2}\right) \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]^n}$$

De eerste integraal is direct te berekenen, terwijl de tweede integraal door substitutie

$$x + \frac{1}{2}p = t \sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}$$

te herleiden is tot

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$$

die in paragraaf 1 is behandeld.

B. Wij gaan thans over tot integratie van het algemene geval

$$\int \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n} dx = \int \frac{T(x)}{N(x)} dx.$$

Stap 1 : Zorg, door deling, dat $m = \text{graad } T < n = \text{graad } N$.

Stap 2 : Ontbind de noemer in reële factoren van de eerste graad en reële definitieve factoren van de tweede graad.

Stap 3 : Splits de breuk als som van een aantal breuken, waarvan de noemers zijn de eerstegraadsfactoren, de definitieve tweedegraadsfactoren, of machten daarvan.

Stap 4 : Integreer de afzonderlijke breuken, hetgeen neerkomt op de vier genoemde grondtypen.

Vb.1.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+1}{x^2+1} dx &= \int \frac{x^3+x-x+1}{x^2+1} dx = \int x dx - \int \frac{x-1}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + \arctan x + C. \end{aligned}$$

Vb.2.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2} \log |x-1| - \frac{1}{2} \log |x+1| = \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Vb.3.

$$\int \frac{(x-1)dx}{3x^2+5x-2} = \int \frac{(x-1)dx}{(3x-1)(x+2)}.$$

$$\text{Stel nu } \frac{x-1}{(3x-1)(x+2)} \equiv \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$x-1 \equiv A(x+2) + B(3x-1)$$

$$1 = A + 3B ; -1 = 2A - B ; \text{ dus } B = \frac{3}{7}, A = -\frac{2}{7}.$$

De integraal wordt dus

$$-\frac{2}{7} \int \frac{dx}{3x-1} + \frac{3}{7} \int \frac{dx}{x+2} = -\frac{2}{21} \log |3x-1| + \frac{3}{7} \log |x+2| + C.$$

Vb.4.

$$\int \frac{(x+1)dx}{x(x+5)^2}.$$

Soms komen in de noemer gelijke factoren voor.

De breuksplitsing verloopt dan als volgt :

$$\text{Stel } \frac{x+1}{x(x+5)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{(x+5)^2}$$

$$x+1 \equiv A(x^2+10x+25) + B(x^2+5x) + Cx.$$

$$\text{Dus } A + B = 0 \quad ; \quad 10A + 5B + C = 1 \quad ; \quad 25A = 1.$$

$$A = \frac{1}{25} \quad ; \quad B = -\frac{1}{25} \quad ; \quad C = \frac{4}{5}.$$

$$\int \frac{(x+1)dx}{x(x+5)^2} = \frac{1}{25} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{25} \int \frac{dx}{x+5} + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{(x+5)^2} =$$

$$= \frac{1}{25} \log |x| - \frac{1}{25} \log |x+5| - \frac{4}{5(x+5)} + C.$$

Vb.5. Soms komt in de noemer een definiete kwadratische factor voor.

$$\int \frac{2x^2+x+1}{x^3-x^2+3x+5} dx = \int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2-2x+5)} dx$$

Wij splitsen nu als volgt :

$$\text{Stel } \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2-2x+5)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5}$$

$$2x^2+x+1 \equiv A(x^2-2x+5) + (x+1)(Bx+C).$$

$$A + B = 2 \quad ; \quad -2A + B + C = 1 \quad ; \quad 5A + C = 1$$

$$\text{Dus } A = \frac{1}{4} \quad ; \quad B = \frac{7}{4} \quad ; \quad C = -\frac{1}{4} \text{ en de integraal wordt}$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{7x-1}{x^2-2x+5} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \log |x+1| + \frac{7}{8} \log |x^2-2x+5| + \frac{3}{4} \arctan \frac{x-1}{2} + C$$

wegens het eerste voorbeeld van deze paragraaf.

Vb.6. Soms komt in de noemer een definiete kwadratische factor meerdere malen voor.

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$$

Wij splitsen dan als volgt :

$$\text{Stel } \frac{1}{x(x^2+1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

$$1 \equiv A(x^4+2x^2+1) + (Cx+D)(x^3+x) + (Ex+F)x$$

$$A + C = 0 ; D = 0 ; 2A + C + E = 0 ; D + F = 0 ; A = 1, \text{ dus}$$

$$A = 1 ; C = E = -1 ; D = F = 0.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{x^2+1} - \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2} = \\ &= \log |x| - \frac{1}{2} \log |x^2+1| + \frac{1}{2(x^2+1)} + C. \end{aligned}$$

C. De breuksplitsing van $\frac{T(x)}{N(x)}$ geschiedt dus als volgt :

Ontbind de noemer in reële factoren van graad 1 en 2

$$N(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \dots (x^2+px+q)^\lambda (x^2+rx+s)^\mu \dots$$

Stel vervolgens

$$\begin{aligned} \frac{T(x)}{N(x)} &\equiv \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \\ &+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \dots + \\ &+ \frac{P_1 x + Q_1}{x^2+px+q} + \frac{P_2 x + Q_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{P_\lambda x + Q_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \\ &+ \frac{R_1 x + S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2 x + S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \dots + \frac{R_\mu x + S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu} + \dots \end{aligned}$$

Gelijkstelling van coëfficiënten van gelijke machten van x levert voldoende vergelijkingen voor de berekening der coëfficiënten A, B, P, Q, R, S , etc.

§.3 Goniometrische integralen, transcendente integrand

A. Een integraal van het type \int Ration. $f_u(\sin x, \cos x) dx$ is door de substitutie $\tan \frac{1}{2}x = t$ te herleiden tot een integraal met rationale integrand, immers

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} dx &= \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = 4 \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = \\ &= -2 \int t d \frac{1}{1+t^2} = -\frac{2t}{1+t^2} + 2 \arctan t = -\sin x + x + C. \end{aligned}$$

Hoewel deze methode feilloos werkt, is zij meestal zeer omslachtig en is het aan te bevelen om haar slechts toe te passen wanneer alle andere middelen zijn uitgeput. Die andere middelen zijn :
eenvoudige substitutie,
gebruik van goniometrische formules,
graad verlagen = hoek vergroten,
stel $\tan x = t$.

Vb.1.

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} dx = \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} dx = x - \sin x + C.$$

Vb.2.

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx = - \int \frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x} = - \log(1+\cos x) + C.$$

Vb.3.

$$\begin{aligned} \int \sin px \sin qx dx &= \frac{1}{2} \left[\int \cos(p-q)x dx - \int \cos(p+q)x dx \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(p-q)x}{p-q} - \frac{\sin(p+q)x}{p+q} \right] + C \end{aligned}$$

in de veronderstelling dat $p \neq q$ en $p \neq -q$.

Vb.4.

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} \tan^2 x + 1} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{ab} \int \frac{d \frac{a}{b} \tan x}{\frac{a^2}{b^2} \tan^2 x + 1} = \frac{1}{ab} \arctan \left[\frac{a}{b} \tan x \right] + C.$$

Eigenlijk hebben wij hier de substitutie $\tan x = t$ toegepast.
 In het volgende voorbeeld blijkt dat de substitutie $\tan \frac{1}{2} x = t$
 wel eens meevalt

Vb.5.

$$\int \frac{dx}{1+2 \cos x} = \int \frac{1}{1+2 \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2 dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{dt}{3-t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\int \frac{dt}{\sqrt{3}-t} + \int \frac{dt}{\sqrt{3}+t} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \log \left| \frac{\sqrt{3} + \tan \frac{1}{2} x}{\sqrt{3} - \tan \frac{1}{2} x} \right| + C.$$

Vb.6.

$$\int \cos^4 x \, dx = \frac{1}{4} \int [1 + \cos 2x]^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos 2x \, d2x + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) \, dx =$$

$$= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

Vb.7.

$$\int \cos^5 x \, dx = \int \cos^4 x \, d \sin x = \int (1 - \sin^2 x)^2 \, d \sin x =$$

$$= \int (1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x) \, d \sin x =$$

$$= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

Vb.8.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \tan^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x + C.\end{aligned}$$

B. Wij beschouwen thans algemener de integraal

$$\int \cos^p x \sin^q x dx = \int c^p s^q dx.$$

Wanneer p of q oneven is, dan is de integraal eenvoudig op te lossen. Wanneer b.v. p oneven is, dan schuiven wij één \cos onder het d -teken en dan schrijven wij de resterende even macht van $\cos x$ met behulp van $c^2 = 1 - s^2$ als \sin . Wanneer p en q beide even zijn moet partiële integratie worden toegepast.

Wij leiden reductieformules af als volgt :

$$\begin{aligned}\int c^p s^q dx &= \int c^{p-1} s^q ds = \frac{1}{q+1} \int c^{p-1} ds^{q+1} = \\ &= \frac{1}{q+1} c^{p-1} s^{q+1} - \frac{1}{q+1} \int s^{q+1} dc^{p-1} = \\ &= \frac{1}{q+1} c^{p-1} s^{q+1} + \frac{p-1}{q+1} \int s^{q+2} c^{p-2} dx = \\ &= \frac{1}{q+1} c^{p-1} s^{q+1} + \frac{p-1}{q+1} \int s^q c^{p-2} dx - \frac{p-1}{q+1} \int s^q c^p dx.\end{aligned}$$

dus

$$\begin{cases} \int c^p s^q dx = \frac{1}{q+1} c^{p-1} s^{q+1} + \frac{p-1}{p+q} \int c^{p-2} s^q dx. & \text{Evenzo} \\ \int c^p s^q dx = -\frac{1}{q+1} c^{p+1} s^{q-1} + \frac{q-1}{p+q} \int c^p s^{q-2} dx. \end{cases}$$

Door toepassing der reductieformules kan men dus de graad met 2 verlagen.

$$\begin{aligned}\text{Vb.1. } \int c^4 s^2 dx &= \frac{c^3 s^3}{6} + \frac{3}{6} \int c^2 s^2 dx = \\ &= \frac{c^3 s^3}{6} + \frac{c s^3}{8} + \frac{1}{8} \int s^2 dx = \\ &= \frac{c^3 s^3}{6} + \frac{c s^3}{8} - \frac{cs}{16} + \frac{1}{16} x + C.\end{aligned}$$

Door de reductieformules van rechts naar links te lezen kan men de graad met twee verhogen.

Vb.2. Bereken $\int c^{-8} s^4 dx$.

$$\int c^{-6} s^4 dx = -\frac{1}{2} c^{-7} s^5 + \frac{2}{2} \int c^{-8} s^4 dx, \quad \text{dus}$$

$$\begin{aligned} \int c^{-8} s^4 dx &= \frac{1}{7} s^5 c^{-7} + \frac{2}{7} \int s^4 c^{-6} dx = \\ &= \frac{1}{7} \sin^5 x \cos^{-7} x + \frac{2}{35} \tan^5 x + C. \end{aligned}$$

Een zeer belangrijke toepassing van de reductieformules voor bepaalde integralen bij p en q geheel en groter dan 1 is de volgende:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \sin^q x dx &= \frac{p-1}{p+q} \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^{p-2} s^q dx = \frac{(p-1)(p-3)}{(p+q)(p+q-2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^{p-4} s^q dx = \\ &= \dots = \frac{(p-1)(p-3)(p-5)\dots(q-1)(q-3)(q-5)\dots}{(p+q)(p+q-2)(p+q-4)\dots} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overset{0|1}{\cos x} \overset{0|1}{\sin x} dx. \end{aligned}$$

De restintegralen zijn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x dx = \frac{1}{2}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Naar analogie van $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 2 1$ voeren wij in de notatie $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$

Wij vinden dan de formule van Wallis

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx = \frac{(p-1)!! (q-1)!!}{(p+q)!!} \cdot \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{als } p \text{ en } q \text{ even.} \\ 1 & \text{als } p \text{ en/of } q \text{ oneven.} \end{cases}$$

welke formule geldt voor p en q geheel en ≥ 0 , als wij afspreken dat $0!! = 1 = (-1)!!$.

$$\text{Vb. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cos^4 x dx = \frac{7!! 3!!}{12!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1}{12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Vb. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx = \frac{6!!}{7!!} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{7 \cdot 5 \cdot 3}$$

- G. Zeer in het algemeen kan men de volgende regels aanhouden voor het integreren van functies van transcendenten :
- arctan x , log x , arcsin x na isolering met partiële integratie wegwerken.
 - e^x , sin x , cos x : een reductieformule zoeken met partiële integratie.
 - soms sin $x = \text{Im}(e^{ix})$ gebruiken.

Vb.1.

$$\begin{aligned} \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= - \int \arcsin x \, d\sqrt{1-x^2} = \\ &= - \arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2} + x + C. \end{aligned}$$

Vb.2.

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot x \cdot \cos x \, dx &= \text{Re} \int x e^{(1+i)x} \, dx = \\ &= \text{Re} \left[\frac{1}{1+i} \int x \, d e^{(1+i)x} = \text{Re} \left[\frac{x e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{1}{1+i} \int e^{(1+i)x} \, dx \right] = \right. \\ &= \frac{1}{2} x e^x (\sin x + \cos x) - \frac{1}{2} e^x \sin x + C. \end{aligned}$$

Ook kan men de integraal reëel houden en herleiden tot bekende typen :

$$\begin{aligned} \int e^x x \cos x \, dx &= \int x \, d \frac{1}{2} (e^x \cos x + e^x \sin x) = \\ &= \frac{1}{2} x (e^x \cos x + e^x \sin x) - \frac{1}{2} \int (e^x \cos x + e^x \sin x) dx \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

§.4 Wortels in de integrand.

In het algemeen zullen wij trachten een integraal, waarin een wortel voorkomt, door substitutie van een nieuwe variabele te herleiden tot een integraal van een rationale functie.

Vb.1. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$. Stel $\sqrt{x} = t$, dan $x = t^2$, $dx = 2t dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx &= 2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 2t - 2 \arctan t + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Vb.2. $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$. Stel $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t$, dan $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ en

$$dx = \frac{4t dt}{(1-t^2)^2}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx &= 4 \int \frac{t^2}{(1+t^2)(1-t^2)} dt = 2 \int \frac{dt}{1-t^2} - 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{dt}{1+t} - 2 \arctan t = \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - 2 \arctan t + C = \\ &= \log |x + \sqrt{x^2-1}| - 2 \arctan \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C. \end{aligned}$$

Algemeen kunnen wij

$$\int \text{Rat.fu.} (x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx, \text{ door } \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \text{ te stellen,}$$

herleiden tot $\int \text{Rat.fu.} (t) dt$.

Wij gaan thans over tot de bespreking van integralen van het type

$$\int \text{Rat.fu.} (x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx.$$

1e manier, gegeven met enig voorbehoud, omdat er meestal veel
gerekend uit voorkomt.

Als discrim. > 0 , dan

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = |x-x_1| \sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}} \cdot a$$

en de integraal is teruggebracht op een vorig type.

Als discrim. < 0 , dan kunnen wij de integraal herleiden

tot $\int \text{Rat.fu.}(t) dt$ door te stellen

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t.$$

Voorbeeld.

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-x+1}}. \quad \text{Stel } \sqrt{x^2-x+1} = x + t, \text{ dan}$$

$$x = \frac{1-t^2}{2t+1}; \quad dx = \frac{-2t^2-2t-2}{(2t+1)^2} dt; \quad \sqrt{x^2-x+1} = \frac{t^2+t+1}{2t+1}.$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{2t^2-2}{(2t+1)^2} dt = \int \left[\frac{1}{2} - \frac{2t+2}{(2t+1)^2} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2} t - \int \frac{dt}{2t+1} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{(2t+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \log |2t+1| + \frac{3}{4} \frac{1}{2t+1} + C =$$

$$= \sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{2} \log |2\sqrt{x^2-x+1} - 2x + 1| + C.$$

Opmerking Integralen van het type

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

kunnen vlugger worden berekend door gebruikmaking van de
grondintegralen.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

In ons voorbeeld krijgen wij :

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2-x+1}} &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = \\ &= \sqrt{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \log \left| x-\frac{1}{2} + \sqrt{x^2-x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

2e manier ter berekening van $\int \text{Rat.fu.}(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) \, dx$,
 speciaal ten behoeve van de berekening van bepaalde
integralen :
 Door kwadraatafsplitsing kunnen wij de integraal herleiden
 tot een der volgende 3 typen, die door een goniometrische
 substitutie tot goniometrische integraal wordt :

- a) $\int \text{Rat.fu.}(x, \sqrt{1-x^2}) \, dx$. Stel $x = \cos \varphi$.
- b) $\int \text{Rat.fu.}(x, \sqrt{x^2-1}) \, dx$. Stel $x = \sec \varphi$.
- c) $\int \text{Rat.fu.}(x, \sqrt{x^2+1}) \, dx$. Stel $x = \tan \varphi$.

N.B. Let op de tekens, wanneer wortels worden getrokken !

Vb.1. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$

Stel $x = \cos \varphi$ en neem φ zo, dat

als $0 \leq x \leq 1$, dan $\frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq 0$.

Er volgt, dat binnen het integratiegebied geldt $\sqrt{\sin^2 \varphi} = \sin \varphi$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\varphi) \, d\varphi = \\ &= \left[\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

de oppervlakte van een kwart cirkel met straal 1.

HOOFDSTUK XI BEPAALENDE INTEGRALLEN

§.1 Brokken en repen

In het volgende spreken wij over het begrip k-dimensionaal gebied G_k van een n -dimensionale ruimte R_n , met $1 \leq k \leq n$. Dit begrip is vanuit ons standpunt moeilijk te definiëren. Daarom volstaan wij met het geven van voorbeelden :

1. Voorbeelden van een G_1 zijn: een lijnstuk van R_1 ; een stuk van een kromme in R_2 of R_3 .
2. Voorbeelden van een G_2 zijn: een cirkelschijf of een massieve veelhoek in R_2 ; een stuk van een gebogen oppervlak in R_3 .
3. Voorbeelden van een G_3 zijn: een massieve bol of een massief veelvlak in R_3 ; een willekeurig lichaam (b.v. een worst) in R_3 .

Een gebied mag zich ook tot in het oneindige uitstrekken (b.v. een halve rechte of alles buiten een bol in R_3).

Een gebied is op diverse manieren te schrijven als "limiet van de som" van elementaire gebiedjes. Deze elementaire gebiedjes, waarvan de begrenzing veelal wordt gevormd door elementaire figuren zoals punten, rechten, cirkels, vlakken, kegel- en cylindermantels, boloppervlakken, etc., onderscheiden wij in

Brokken, waarvan alle afmetingen klein zijn, en

Repen, waarvan enkele, maar niet alle afmetingen klein zijn.

Een elementair gebiedje (dus een brok of een reep) duiden wij aan door E_i , waarin i de dimensie van het gebiedje aangeeft. De maat $\mu(E_i)$ van een elementair gebiedje is de ons veelal bekende lengte, oppervlakte of inhoud van de E_i .

Brokken

1. Beschouw in R_1 een segment $x_1 < x < x_2$. Als $x_2 - x_1 = \Delta x$ klein is, dan is dit een brok E_1 met

$$\mu(E_1) = \Delta x.$$

2. Beschouw een stuk van een kromme met booglengthe Δs .
Als Δs klein is, dan is dit een brok E_1 met

$$\mu(E_1) = \Delta s.$$

3. Beschouw in R_2 een rechthoek $x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$.
Als $x_2 - x_1 = \Delta x$ en $y_2 - y_1 = \Delta y$ klein zijn, dan is dit een brok E_2 met

$$\mu(E_2) = \Delta x \Delta y.$$

4. Beschouw in R_2 een sectorstuk $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, $r_1 < r < r_2$.
Als $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$ en $r_2 - r_1 = \Delta r$ klein zijn, dan is dit een brok E_2 met een maat $\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)(r_2^2 - r_1^2)$, die in benadering is

$$\mu(E_2) \approx r \Delta r \Delta \varphi.$$

5. In R_3 is een klein blok een brok E_3 met maat

$$\mu(E_3) = \Delta x \Delta y \Delta z.$$

6. Beschouw in R_3 een wigstuk, dat in cylinder-coördinaten r, φ, z , waarvoor dus

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

geldt, wordt beschreven door

$$\varphi_1 < \varphi < \varphi_2, \quad r_1 < r < r_2, \quad z_1 < z < z_2.$$

Als $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$, $r_2 - r_1 = \Delta r$, $z_2 - z_1 = \Delta z$ klein zijn,

dan is dit een brok E_3 met maat $\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)(z_2 - z_1)(r_2^2 - r_1^2)$, die in benadering is

$$\mu(E_3) \approx r \Delta r \Delta \varphi \Delta z.$$

7. Beschouw in R_3 een blokachtig stuk, dat in bolcoördinaten ρ, φ, θ , waarvoor dus

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta$$

geldt, wordt beschreven door

$$\varphi_1 < \varphi < \varphi_2, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2, \quad \rho_1 < \rho < \rho_2.$$

Als $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$, $\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta$, $\rho_2 - \rho_1 = \Delta\rho$ klein zijn, dan is dit

een brok E_3 met zijden $\Delta\rho$, $\rho_1 \Delta\theta$ en $\rho_1 \sin \theta_1 \Delta\varphi$, waarvan de maat in benadering is

$$\mu(E_3) \approx \rho^2 \sin \theta \Delta \theta \Delta \varphi \Delta \rho.$$

Repen

11. Beschouw in R_2 een rechthoek $x_1 < x < x_2$, $0 < y < y_0$.

Als $\Delta x = x_2 - x_1$ klein is, dan is dit een reep E_2 met

$$\mu(E_2) = y_0 \Delta x.$$

12. Beschouw in R_2 de reep, die door $x_1 < x < x_2$ uitgesneden wordt uit het gebied dat begrensd wordt door de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$. Als $\Delta x = x_2 - x_1$ klein is, dan is dit een reep E_2 , waarvan de maat in benadering is

$$\mu(E_2) \approx \Delta x \cdot |f(x_1) - g(x_1)|$$

13. Beschouw in R_2 de sector $0 < r < r_0$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$.

Als $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ klein is, dan is dit een reep E_2 met

$$\mu(E_2) = \frac{1}{2} r_0^2 \Delta\varphi$$

14. Beschouw in R_2 de cirkelschil $r_1 < r < r_2$. Als $\Delta r = r_2 - r_1$ klein is, dan is dit een reep E_2 met

$$\mu(E_2) \approx 2\pi r_1 \Delta r.$$

15. Beschouw in R_3 de staaf $x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$, $0 < z < z_0$.

Als $\Delta x = x_2 - x_1$ en $\Delta y = y_2 - y_1$ klein zijn, dan is dit een reep E_3 met

$$\mu(E_3) = z_0 \Delta x \Delta y.$$

16. Beschouw in R_3 de figuur begrensd door $x_1 < x < x_2$,

$y_1 < y < y_2$, $0 < z < f(x,y)$.

Als $\Delta x = x_2 - x_1$ klein is, dan is dit een reep E_3 met

$$\mu(E_3) \approx \Delta x \cdot \int_{y_1}^{y_2} f(x_1, y) dy.$$

17. Beschouw in R_3 de plak, begrensd door

$x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$, $f(x,y) < z < g(x,y)$.

Als $\Delta y = y_2 - y_1$ klein is, dan is dit een reep E_3 met

$$\mu(E_3) \approx \Delta y \cdot \left[\int_{x_1}^{x_2} g(x, y_1) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1) dx \right]$$

18. Beschouw de bolschil $r_1 < r < r_2$. Als $\Delta r = r_2 - r_1$ klein is, dan is dit een reep E_3 met maat

$$\mu(E_3) \approx 4\pi r_1^2 \Delta r.$$

19. Beschouw het ronde oppervlak van een afgeknotte kegel met apothema Δs en stralen r_1 en r_2 van grond- en bovenvlak. Als Δs klein is, dan is dit een reep E_2 met maat

$$\mu(E_2) \approx 2\pi r_1 \Delta s.$$

20. Beschouw een cylinderplak met straal r en hoogte Δh . Als Δh klein is, dan is dit een reep E_3 met maat

$$\mu(E_3) = \pi r^2 \Delta h.$$

§.2 Meervoudige integraal, definitie.

Zij gedefinieerd een functie f op een gebied G , dwz. een voorschrift volgens hetwelk aan elk punt van G een reëel getal wordt toegevoegd. Wij wensen te definiëren de integraal van f over G , notatie

$$\int_G f$$

Daartoe brengen wij een verdeling van G in een groot aantal gelijksoortige brokken E aan. Wij kiezen in elke brok een punt p , bepalen de functiewaarde $f(p)$ in dat punt en sommeren de producten $f(p)\mu(E)$. Tenslotte nemen wij de limiet van deze som, als het aantal brokken naar oneindig en de maat ervan naar nul gaat. De te definiëren integraal is nu deze limiet, tenminste als hij bestaat

Def. $\int_G f = \lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \sum_{\text{alle } E \text{ in } G} f(p)\mu(E).$

Voorbeeld Een gebied G_2 in R_2 zij belegd met massa met een dichtheid, die in het punt (x,y) bedraagt $f(x,y)$. De totale massa van G is dan $\int_G f$.

Voorbeeld Boven een gebied G_2 in het vlak xOy is gegeven een functie $f(x,y)$. De inhoud van het lichaam dat wordt begrensd door G_2 , de cylinder boven G_2 en de grafiek van $f(x,y)$ is $\int_G f$.

Stelling De integraal van de functie f over het gebied G bestaat, indien f continu is voor alle punten van G (eventueel met uitzonderingen, waar f dan wel begrensd moet zijn)

Deze stelling wordt niet bewezen.

Voor $\int_G f$ geldt een aantal eigenschappen, die directe gevolgen zijn van de definitie :

1. $\int_G f$ is een reëel getal

2. $\int_G (f+g) = \int_G f + \int_G g$ en $\int_G \lambda f = \lambda \int_G f$ voor $\lambda = \text{constant}$

3. $\int_{G_1} f + \int_{G_2} f = \int_{G_1+G_2} f$ voor niet-overlappende G_1 en G_2 .

4. $\int_E 1 = \mu(E)$

5. Als overal op G geldt $f \leq g$, dan is

$$\int_G f \leq \int_G g.$$

De definitie van $\int_G f$ hangt af van het gebied G , de functie f , en de gebruikte soort brokken. Men gebruikt de volgende notatie voor \int_G bij achtereenvolgens de zeven soorten brokken, die in par.1 zijn genoemd:

1. $G \equiv$ lijnstuk, $f \equiv f(x)$, $\mu(E) = \Delta x$, dan $\int_G f(x)dx$.

Vb. de oppervlakte $\int_a^b f(x)dx$.

2. $G \equiv$ boog, $f \equiv f(s)$, $\mu(E) = \Delta s$, dan $\int_G f(s)ds$

Vb. de arbeid van een kracht $K(s)$ onder een hoek $\alpha(s)$ langs een kromlijnige baan is

$$\int_{s_1}^{s_2} K(s) \cos \alpha(s) ds.$$

3. $G \equiv$ schijf, $f \equiv f(x,y)$, $\mu(E) = \Delta x \Delta y$, dan $\iint_G f(x,y) dx dy$.

Vb. De inhoud van de cylinder boven de schijf G in het xOy -vlak, die wordt afgeknot door de grafiek van $f(x,y)$.

Vb. Het moment t.o.v. de y -as van een schijf G in het xOy -vlak met massaverdeling $f(x,y)$ is

$$\iint_G x f(x,y) dx dy.$$

4. $G \equiv$ schijf, $f \equiv f(r,\varphi)$, $\mu(E) = r \Delta r \Delta \varphi$, dan $\iint_G f(r,\varphi) r dr d\varphi$.

Vb. De massa van een schijf, waarop de massaverdeling in poolcoördinaten wordt gegeven door $f(r,\varphi)$.

5. $G \equiv$ worst, $f \equiv f(x,y,z)$, $\mu(E) = \Delta x \Delta y \Delta z$, dan $\iiint_G f(x,y,z) dx dy dz$.

Vb. De massa van een lichaam G met massaverdeling $f(x,y,z)$.

Vb. De inhoud van de vierdimensionale bol, waarvan de vergelijking in R_4 luidt $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$, is

$$2 \iiint_G \sqrt{1-x^2-y^2-z^2} dx dy dz$$

waarbij G het inwendige van de driedimensionale bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ is.

Vb. De inhoud van het lichaam G is $\iiint_G dx dy dz$.

6. $G \equiv$ worst, $f \equiv f(r,\varphi,z)$, $\mu(E) = r \Delta r \Delta \varphi \Delta z$, dan

$$\iiint_G f(r,\varphi,z) r dr d\varphi dz.$$

Vb. Het traagheidsmoment t.o.v. de z -as van een homogeen lichaam L met massadichtheid 1 is

$$\iiint_L (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint_L r^2 \cdot r dr d\varphi dz.$$

Vb. Het traagheidsmoment t.o.v. het vlak $z = 0$ van een lichaam L met massaverdeling $m(r,\varphi,z)$ is

$$\iiint_L z^2 m(r,\varphi,z) r dr d\varphi dz.$$

7. $G \equiv$ worst, $f \equiv f(\rho, \theta, \varphi)$, $\mu(E) = \rho^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi d\rho$,

$$\text{dan } \int_G f(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi d\rho.$$

Vb. Het moment t.o.v. O van een lichaam L met massaverdeling $m(\rho, \theta, \varphi)$ is

$$\int_L \rho m(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\varphi d\theta$$

Opmerking Uit de momentenstelling volgt voor de coördinaten van het zwaartepunt (ξ, η, ζ) van een lichaam L met massaverdeling $m(x, y, z)$:

$$\xi = \frac{\int_L x m(x, y, z) dx dy dz}{\int_L m(x, y, z) dx dy dz}, \quad \eta = \frac{\int_L y m(x, y, z) dx dy dz}{\int_L m(x, y, z) dx dy dz}$$

$$\zeta = \frac{\int_L z m(x, y, z) dx dy dz}{\int_L m(x, y, z) dx dy dz}$$

Stelling | De integraal van f over G is, wanneer f en G fatsoenlijk zijn, onafhankelijk van de gebruikte soort brokken.

Wij kunnen deze stelling hier niet bewijzen, daar de gebruikte begrippen niet scherp genoeg zijn gedefinieerd. Voor de dubbel-integraal is de stelling door zijn interpretatie reeds plausibel, want

$$\int_G f(x, y) dx dy = \int_G \bar{f}(r, \varphi) r dr d\varphi$$

betekent bijv. dat de totale massa van de schijf G met massaverdeling $f(x, y) \equiv f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) \equiv \bar{f}(r, \varphi)$ dezelfde is onverschillig of men G in rechthoekjes verdeelt en tot de limiet overgaat, dan wel of men G in sectorstukjes verdeelt en tot de limiet overgaat.

Evenzo geldt voor drievoudige integralen in rechthoekige-, cylinder- en bolcoördinaten

$$\int_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_G \bar{f}(r, \varphi, z) r dr d\varphi dz = \int_G \bar{\bar{f}}(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

§.3 Herhaalde integralen, dubbelintegralen.

Voor de berekening van enkelvoudige integralen beschikken wij reeds over de

Hoofdstelling | Als $\varphi(x)$ zo is, dat $\varphi'(x) = f(x)$, dan is

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

De berekening van meervoudige integralen zullen wij terugbrengen tot de berekening van een aantal enkelvoudige integralen. Daartoe verdelen wij het gebied G niet in brokken, doch in gelijksoortige repen. Aan elke reep kennen wij toe de functiewaarde $\int_{\text{reep}} f$.

De berekening geschiedt dan met behulp van de volgende, enigszins vaag geformuleerde en in de huidige opzet moeilijk bewijsbare, maar wel plausibele stelling :

Stelling $\int_G f = \int_{\text{over alle repen in } G} \left[\int_{\text{will.reep}} f \right]$

Deze stelling drukt uit, dat men de integraal van f over G niet alleen als limiet van een som van bijdragen van een verdeling in brokken, maar ook als limiet van een som van bijdragen van een verdeling in repen kan beschouwen, waarbij de bijdrage over een reep zelf weer als limiet van een som te beschouwen is. Wij lichten dit op 2 manieren toe voor de dubbelintegraal

$$\iint_G f(x,y)dx dy$$

1e interpretatie Interpreteer de dubbelintegraal als inhoud van de door de grafiek van $f(x,y)$ afgeknotte cylinder boven de schijf G in het xOy -vlak, waarbij wij ons G ingesloten denken door de krommen

$$y = y_1(x) \quad \text{en} \quad y = y_2(x)$$

die gedefinieerd zijn voor $a \leq x \leq b$ en waarvoor geldt $y_1(a) = y_2(a)$ en $y_1(b) = y_2(b)$. Verdeel G in repen evenwijdig aan de y -as met breedte Δx , dan is de integraal van $f(x,y)$ over zo'n reep, dus de inhoud van de plak boven de reep,

$$\int_{\text{reep}} f \approx \Delta x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Deze integraal is afhankelijk van de x-coördinaat van de reep. Vervolgens integreren wij over x, dus over de repen, en komen zo tot

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy \right]$$

Wanneer wij ons het gebied G ingesloten denken door de krommen

$$x = x_1(y) \quad \text{en} \quad x = x_2(y),$$

die gedefinieerd zijn voor $\alpha \leq y \leq \beta$ en waarvoor geldt $x_1(\alpha) = x_2(\alpha)$ en $x_1(\beta) = x_2(\beta)$, en wanneer wij G verdelen in repen evenwijdig aan de x-as met breedte Δy , dan krijgen wij op analoge wijze

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \int_\alpha^\beta dy \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx \right].$$

De dubbelintegraal is dus op twee manieren herleid tot een herhaalde integraal, die op de gewone wijze kan worden berekend.

2e interpretatie. Interpreteer de dubbelintegraal als de totale massa van de schijf G met massaverdeling $f(x,y)$. Dan is $\int_{\text{reep}} f$

de totale massa van de reep. Ook hier vindt men als de herleiding van dubbelintegraal tot herhaalde integraal

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy = \int_\alpha^\beta dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx$$

Vb.1 $\iint_G x y^2 dx dy$ met $G : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. Antwoord : 0.

Vb.2 Zij G het kwart in eerste kwadrant van $x^2 + y^2 \leq 1$.

Gevraagd wordt $\iint_G e^{x^2+y^2} xy dx dy$.

Verdeel G in repen evenwijdig aan de x-as. Dan

$$\begin{aligned} \iint_G e^{x^2+y^2} xy dx dy &= \int_0^1 y e^{y^2} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x e^{x^2} dx = \\ &= \int_0^1 y e^{y^2} dy \cdot \frac{1}{2}(e^{1-y^2} - 1) = \frac{1}{2}e \int_0^1 y dy - \frac{1}{4} \int_0^1 e^{y^2} dy^2 = \\ &= \frac{1}{4}e - \left(\frac{1}{4}e - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Vb.3 Zij G de driehoek die in het xOy-vlak wordt ingesloten door de rechten $y = 2x$, $2y = x$, $x+y = 3$.

Om $\iint xy dx dy$ over dit gebied te berekenen verdelen wij G eerst door de rechte $x = 1$ in twee gebieden G_1 en G_2 , die wij elk in repen evenwijdig aan de y-as verdelen.

$$\begin{aligned} \iint_G xy dx dy &= \iint_{G_1} xy dx dy + \iint_{G_2} xy dx dy = \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{2x} xy dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} xy dy = \\ &= \int_0^1 x dx \left[\frac{1}{2}(4x^2 - \frac{1}{4}x^2) \right] + \int_1^2 x dx \cdot \frac{1}{2} [(3-x)^2 - \frac{1}{4}x^2] = \\ &= \frac{15}{8} \int_0^1 x^3 dx + \frac{1}{8} \int_1^2 (3x^3 - 24x^2 + 36x) dx = \frac{13}{8} . \end{aligned}$$

Vb.4 Gevraagd $\int_0^\pi dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) e^{\sin y} dy$.

De binnenste integraal is zeer moeilijk. Wij schrijven de herhaalde integraal eerst als dubbelintegraal over het gebied G : de rechthoek $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Vervolgens verdelen wij G in repen evenwijdig aan de x-as, dan

$$\begin{aligned} \int_0^\pi dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,y) dy &= \iint_G f(x,y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^\pi f(x,y) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \cdot e^{\sin y} \int_0^\pi \sin(x+y) dx = \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin y} dy [\cos(\pi + y) - \cos y] = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin y} \cos y dy = 2 [e^{\sin \frac{\pi}{2}} - e^0] = 2(e-1). \end{aligned}$$

Vb.5 Gevraagd $\int_0^\infty y^5 dy \int_{y^2}^\infty \frac{dx}{1+x^8}$.

Daar de binnenste integraal te moeilijk is, schrijven wij eerst een dubbelintegraal. Het gebied G is het gebied boven de x-as,

dat rechts van de parabool $y^2 = x$ ligt. Dit gebied verdelen wij in repen evenwijdig met de y -as, dan

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y^5 dy \int_{y^2}^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} &= \iint_G \frac{y^5}{1+x^8} dx dy = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} \int_0^{\sqrt{x}} y^5 dy = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} \cdot \frac{1}{6} x^3 = \frac{1}{24} \int_0^{\infty} \frac{dx^4}{1+x^8} = \frac{\pi}{48} \end{aligned}$$

Vb.6 Gevraagd $\iint_G \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^2}$ over $G : 4x^2 + y^2 \geq 1$

Wij voeren poolcoördinaten in. De vergelijking van de ellips $4x^2 + y^2 = 1$ in poolcoördinaten is $r^2(4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1$. De integraal gaat over in

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^2} &= \iint_G \frac{r dr d\varphi}{r^4} = 4 \iint_{\frac{1}{4}G} \frac{dr d\varphi}{r^3} = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^3} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\frac{-1}{r^2} \right]_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{5\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vb.7 Gevraagd de inhoud die wordt ingesloten door de cylinders $x^2 + y^2 = 1$ en $x^2 + z^2 = 1$. Wij beschouwen het lichaam als de cylinder op $x^2 + y^2 = 1$ in het xOy -vlak, die wordt afgeknot door de grafiek van $z = \sqrt{1-x^2}$. De gevraagde inhoud is dus

$$8 \iint_G \sqrt{1-x^2} dx dy,$$

waarbij G het eerste kwadrant van $x^2 + y^2 \leq 1$ is.

Verdeel G in repen evenwijdig aan de y -as, dan

$$\begin{aligned} 8 \iint_G \sqrt{1-x^2} dx dy &= 8 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = \\ &= 8 \int_0^1 (1-x^2) dx = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Vb.8 Gevraagd de inhoud van het lichaam dat wordt begrensd door

$$0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq z^2 - x^2 - y^2$$

Dit lichaam blijkt te zijn een kegel met 0 als top en de z-as als as. De grondcirkel is de cirkel in $z = 1$, die als projectie op het xOy-vlak heeft de cirkel $x^2 + y^2 = 1$. Noem deze projectie G, dan is de gevraagde inhoud (als functie worden $z = 1$ en $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ beschouwd)

$$\begin{aligned} \iint_G 1 \cdot dx dy - \iint_G \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \pi - \iint_G r \cdot r dr d\varphi = \\ &= \pi - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \pi - 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \pi. \end{aligned}$$

§.4 Drievoudige integralen.

Door de stelling van paragraaf 3 tweemaal toe te passen kunnen wij drievoudige integralen herleiden tot enkelvoudige integralen. Dit geschiedt als volgt.

G zij een gebied in R_3 . Op G zij gedefinieerd $f(x, y, z)$.

Laat G liggen tussen en geraakt worden door de vlakken $x = a$ en $x = b$, beide dus loodrecht op de x-as.

Breng aan een willekeurig vlak loodrecht op de x-as en laat de doorsnede van dit vlak met G liggen tussen en geraakt worden door de rechten

$$y = y_1(x) \quad \text{en} \quad y = y_2(x).$$

Breng aan een willekeurige verticale rechte in het willekeurige vlak en laat deze rechte de doorsnede met G snijden in de punten

$$z = z_1(x, y) \quad \text{en} \quad z = z_2(x, y).$$

Dan is

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Vb.1 Gevraagd $\iiint \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$

over het gebied G in het eerste oktant dat wordt begrensd door de coördinaatvlakken en het vlak $x + y + z = 1$.

$$\begin{aligned}
 \iiint_G \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3} &= \int_{x=0}^1 dx \int_{y=0}^{1-x} dy \int_{z=0}^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} = \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \cdot \left[\frac{-1}{2(x+y+z+1)^2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} = \\
 &= -\frac{1}{8} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(x+y+1)^2} = \\
 &= -\frac{1}{8} \int_0^1 (1-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\frac{-1}{x+y+1} \right]_{y=0}^{y=1-x} = \\
 &= -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right] = \frac{1}{2} \log 2 - \frac{5}{16}.
 \end{aligned}$$

Vb.2 Gevraagd $\iiint \frac{yz}{x^2} dx dy dz$ over de oneindig lange balk, die wordt beschreven door $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $1 \leq x$.

$$\iiint \frac{yz}{x^2} dx dy dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x^2} \int_0^1 y dy \int_0^1 z dz = \frac{1}{4}.$$

Vb.3 Gevraagd het traagheidsmoment t.o.v. de z-as van de homogene kubus $|x| \leq h$, $|y| \leq h$, $|z| \leq h$.

$$\begin{aligned}
 T &= \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_{-h}^h dz \int_{-h}^h dy \int_{-h}^h (x^2 + y^2) dx = \\
 &= 2h \int_{-h}^h dy \left(\frac{2}{3} h^3 + 2hy^2 \right) = \frac{16}{3} h^3.
 \end{aligned}$$

Vb.4 Gevraagd $\iiint_G \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ over G : $|z| \geq 3$.

1e manier: met cylindercoördinaten

$x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Dan

$$\iiint_G \frac{r dr d\varphi dz}{(z^2 + r^2)^2} = 2 \cdot \int_3^\infty dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^2} =$$

$$= - \int_3^{\infty} dz \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{z^2+r^2} \right]_0^{\infty} d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_3^{\infty} \frac{dz}{z^2} = \frac{2\pi}{3}$$

2e manier met bolcoördinaten

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta$$

$$\int_G \frac{\rho^2 \sin \theta \, d\theta d\rho d\varphi}{\rho^4} = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{3}{\cos \theta}}^{\infty} \frac{\sin \theta}{\rho^2} d\rho =$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \sin \theta \cdot \left[-\frac{1}{\rho} \right]_{\frac{3}{\cos \theta}}^{\infty} = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

Vb.5 De inhoud van de 4-dimensionale bol is volgens paragraaf 2

$$I = 2 \iiint \sqrt{1-x^2-y^2-z^2} \, dx dy dz \quad \text{over } G: x^2+y^2+z^2 \leq 1.$$

Wij gebruiken bolcoördinaten en stellen straks $\rho = \sin \alpha$.

$$I = 2 \iiint \sqrt{1-\rho^2} \, \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} \, d\rho =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} \pi^2$$

Vb.6 Gevraagd het traagheidsmoment t.o.v. de z-as van het lichaam G, dat door het vlak $z = x$ wordt afgesneden van de omwentelingsparaboloïde $x^2 + y^2 = z$.

Wij voeren cylindercoördinaten in; dan is de vergelijking van het vlak $z = r \cos \varphi$ en van de paraboloïde $z = r^2$.

Voor de projectie van de snijfiguur geldt $r = \cos \varphi$.

$$T = \iiint (x^2+y^2) dx dy dz = \iiint r^3 dr d\varphi dz =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^3 dr \int_{r^2}^{r \cos \varphi} dz =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} dr [r^4 \cos \varphi - r^5] = \frac{1}{15} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{96}$$

Stelling van Guldin (1577 - 1643)

De inhoud van een omwentelingslichaam is gelijk aan het product van de oppervlakte van een meridiaandoorsnede en de lengte van de baan die het zwaartepunt van de meridiaandoorsnede bij de wenteling aflegt.

Bewijs

Stel dat het omwentelingslichaam L ontstaat door wenteling om de z-as van de in het xOz-vlak gelegen schijf G. Wij gebruiken cylindercoördinaten.

$$\text{Inhoud} = \iiint_L dx dy dz = \iiint_L r dr d\varphi dz = 2\pi \iint_G r dr dz = 2\pi \iint_G x dx dz.$$

Voor de x-coördinaat ξ van het zwaartepunt van G geldt

$$\xi \iint_G dx dz = \iint_G x dx dz, \text{ dus}$$

$$\text{Inhoud} = 2\pi \xi \cdot \text{Opp. G.}$$

Vb.7 Gevraagd de inhoud van het lichaam, begrensd door

$$\left[\sqrt{x^2 + y^2} - a \right]^2 + z^2 = b^2, \quad (a > b)$$

Uit het onderzoek van de doorsnede met $x = 0$ en met $z = 0$ blijkt, dat het lichaam een torus is. De inhoud is dus

$$2\pi a \cdot \pi b^2 = 2\pi^2 ab^2$$

Vb.8 Gevraagd het zwaartepunt van de halve torus $y \geq 0$.
 Uit symmetrie-overwegingen volgt dat het zwaartepunt op de y-as ligt. Voor de y-coördinaat η geldt

$$\begin{aligned} \pi^2 ab^2 \eta &= \iiint y dx dy dz = \iiint r^2 \sin \varphi dr d\varphi dz = \\ &= \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_{a-b}^{a+b} r^2 dr \int_{-V}^{+V} dz \end{aligned}$$

met $V = \sqrt{b^2 - (r-a)^2}$. Stel $r - a = b \cos \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, dan

$$\pi^2 ab^2 \eta = 2 \cdot 2 \int_{a-b}^{a+b} r^2 \sqrt{b^2 - (r-a)^2} dr =$$

$$= -4b^2 \int_{\pi}^0 (a+b \cos \alpha)^2 \sin^2 \alpha \, d\alpha =$$

$$= 4b^2 \left[a^2 \frac{\pi}{2} + 0 + b^2 \frac{\pi}{8} \right] \quad \text{Dus } \eta = \frac{4a^2 + b^2}{2\pi a}.$$

§.5 Vlakke Oppervlakten.

A. Rechthoekige coördinaten. $O = \int_a^b f(x) dx.$

Vb.1 Gevraagd de oppervlakte O van de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Beschouw de functie $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, dan

$$O = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx =$$

$$= 4 \frac{b}{a} \cdot \text{opp. kwart cirkel} = \pi ab.$$

Vb.2 Gevraagd de oppervlakte O van de lus van $y^2 = x^2(1-x).$

Wij tekenen de grafiek door op te merken, dat $x > 1$ verboden gebied is, dat er symmetrie t.o.v. de x -as bestaat, en dat de functie $y = x\sqrt{1-x}$ nulpunten in $(1,0)$ en $(0,0)$ en een maximum in $(\frac{2}{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3})$ bezit. Nu is

$$O = 2 \int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx. \quad \text{Stel } \sqrt{1-x} = t, \text{ dan}$$

$$O = -2 \int_1^0 (1-t^2)t \, 2t \, dt = 4 \int_0^1 (t^2 - t^4) \, dt = 8/15.$$

Vb.3 Gevraagd de oppervlakte binnen de astroïde $x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$

Wij tekenen de grafiek door op te merken, dat er symmetrie t.o.v. de x -as en t.o.v. de y -as bestaat, dat met impliciet differentieren volgt $y' = -(y/x)^{1/3}$, en dat de functie

$$y = (1-x^{3/2})^{3/2}$$

verloopt binnen $|x| \leq 1.$

Nu is

$$0 = 4 \int_0^1 (1 - x^{2/3})^{3/2} dx. \quad \text{Stel } \sqrt[3]{x} = t, \text{ dan}$$

$$0 = 4 \cdot 3 \cdot \int_0^1 (1 - t^2)^{3/2} t^2 dt. \quad \text{Stel } t = \sin \varphi, \text{ dan}$$

$$0 = 12 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi d\varphi = 12 \cdot \frac{1!! \cdot 3!!}{6!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8} \pi.$$

B. Poolcoördinaten.

De oppervlakte van de sector, die wordt begrensd door $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ en de grafiek van de kromme, die in poolcoördinaten wordt gegeven door $r = r(\varphi)$, is de limiet van de som van een aantal sectorvormige repen met maat $\frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi$. De totale oppervlakte is dus

$$O = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Vb.4 Gevraagd de oppervlakte O van het lemniscaat, dat de vergelijking in rechthoekige-, resp. in poolcoördinaten

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad \text{resp. } r = a\sqrt{\cos 2\varphi} \quad \text{heeft.}$$

Wij tekenen de grafiek na opgemerkt te hebben dat er symmetrie t.o.v. de x -as en t.o.v. de y -as bestaat, en dat er slechts punten zijn als

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{en} \quad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}. \quad \text{Dus}$$

$$O = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2$$

Vb.5 Gevraagd de oppervlakte O van de lus van het folium van Descartes, waarvan de vergelijking in rechthoekige- resp. in poolcoördinaten luidt

$$x^3 + y^3 = 3xy \quad \text{resp.} \quad r = \frac{3 \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}$$

$$O = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi. \quad \text{Stel } \tan \varphi = t$$

$$O = \frac{9}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(t^3 + 1)^2} = \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{d(t^3 + 1)}{(t^3 + 1)^2} = \frac{3}{2}$$

Vb.6 Gevraagd de oppervlakte O van één boog van de cycloïde, waarvan de vergelijking in parametervorm luidt

$$x = at - a \sin t \quad ; \quad y = a - a \cos t$$

Wij gebruiken

$$\begin{aligned} O &= \int_0^{2\pi} y(t) dx(t) = \int_0^{2\pi} (a - a \cos t) d(at - a \sin t) = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t) dt = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

§.6 Gebogen lengten en oppervlakten.

A. Teneinde de lengte van de kromme $y = f(x)$ tussen de punten A en B te berekenen, verdelen wij de kromme in brokken ter lengte

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

De lengte van de kromme tussen $x = a$ en $x = b$ is dan

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Vb.1 De lengte van de parabool $y = x^2$ voor $0 \leq x \leq 1$ is

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx. \quad \text{Stel } 2x = \tan \varphi, \text{ dan} \\ s &= \frac{1}{2} \int_0^{\arctan 2} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{1}{2} \int_0^{\arctan 2} \frac{d \sin \varphi}{(1 - \sin^2 \varphi)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{dt}{(1-t^2)^2} \end{aligned}$$

als $\sin \varphi = t$ gesteld wordt. De onbepaalde integraal is

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} &= \int \frac{dt}{1-t^2} + \int \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^2} = \int \frac{dt}{1-t^2} + \frac{1}{2} \int t d \frac{1}{1-t^2} = \\ &= \int \frac{dt}{1-t^2} + \frac{t}{2(1-t^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1-t^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \left(\frac{dt}{1-t} + \frac{dt}{1+t} \right) + \frac{t}{2(1-t^2)} = \\ &= \frac{1}{4} \log \frac{1+t}{1-t} + \frac{t}{2(1-t^2)} + C. \end{aligned}$$

$$s = \frac{1}{4} \log (2 + \sqrt{5}) + \frac{1}{2} \sqrt{5}.$$

B. In parametervorm $x = x(t)$, $y = y(t)$ luidt de formule

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \Delta t, \text{ dus}$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Vb.2 De lengte van een boog van de cycloïde $x = at - a \sin t$, $y = a - a \cos t$ is

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{2} t dt = \underline{8a}. \end{aligned}$$

C. Voor poolcoördinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ gaat wegens

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

de formule over in

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} d\varphi$$

Vb.3 De lengte van de cardioïde $r = 2a(1 - \cos \varphi)$ is

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2(1 - \cos \varphi)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos \varphi} d\varphi = 16a.$$

D. Teneinde van het lichaam, dat wordt verkregen bij wenteling om de x-as van $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, de ronde oppervlakte te berekenen, verdelen wij het lichaam in repen, die in benadering kegelmantels zijn met straal y en apothema Δs , dus met oppervlakte

$$2\pi y \Delta s$$

De ronde oppervlakte bij wenteling om de x-as is dus

$$O = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

en, als de kromme in poolcoördinaten door $r = r(\varphi)$ wordt gegeven,

$$O = \int_\alpha^\beta 2\pi r \sin \varphi \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi.$$

Vb.4 Het lemniscaat $r^2 = \cos 2\varphi$, waarvoor dus $r\dot{r} = -\sin 2\varphi$, wentelt om de x-as. Dan

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi \sin\varphi \sqrt{r^4 + r^2\dot{r}^2} d\varphi = \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \sqrt{\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi} d\varphi = \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi = 4\pi \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

E. Wij wensen te berekenen de oppervlakte van de grafiek van $z = f(x,y)$, die ligt boven het gebied G van het xOy-vlak. Daartoe verdelen wij het te berekenen stukoppervlak in brokken, waarvan de projectie de maat $\Delta x \cdot \Delta y$ heeft. Het raakvlak in het punt (x_0, y_0, z_0) van een brok heeft de vergelijking

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 (y - y_0).$$

De normaalvector op dit raakvlak heeft de kentallen

$$\left[-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0, -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0, 1 \right]$$

Als γ de hoek tussen deze normaalvector en de z-as voorstelt, dan is de maat van de brok

$$\frac{\Delta x \Delta y}{\cos \gamma} = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}{1}$$

De gevraagde oppervlakte is dus

$$O = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

of, in cylindercoördinaten wegens een formule uit hoofdstuk IV

$$O = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} \cdot r dr d\varphi.$$

Vb.5 Gevraagd de oppervlakte O van de kegel $z^2 = x^2 + y^2$, die binnen de cylinder $x^2 + y^2 = 2x$ ligt.

Voor $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ is $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, dus

$$O = 2 \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = 2 \iint_G \sqrt{2} dx dy = 2\sqrt{2} \pi.$$

Vb.6 Gevraagd de oppervlakte O van de cylinder $x^2 + y^2 = 2x$, die binnen de kegel $z^2 = x^2 + y^2$ ligt.

Verdeel de op de cylindermantel gelegen oppervlakte (die niet alleen door $z^2 = x^2 + y^2$ maar ook door $z^2 = 2x$ wordt afgesneden) in repen evenwijdig aan de z -as, met maat $2z\Delta s$, waarin Δs een boogbrok van de grondcirkel van de cylinder is.

De gevraagde oppervlakte is dus $2 \int z ds$ over de cirkel $x^2 + y^2 = 2x$.

$$O = 2 \int z ds = 4 \int_0^2 \sqrt{2x} \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

dus, wegens $y = \sqrt{2x - x^2}$

$$O = 4 \int_0^2 \sqrt{2x} \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx = 4\sqrt{2} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = 16.$$

§.7 De errorfunctie

In de statistiek speelt de errorfunctie

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

een belangrijke rol. Meetkundig stelt hij voor de oppervlakte tussen de t -as, de rechten $t = -x$ en $t = x$, en de grafiek van

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}.$$

Opmerking 1. De errorfunctie is een voorbeeld van een functie, die is gedefinieerd als een niet in elementaire functies uit te drukken integraal. Voor numerieke tabellen zie Jahnke - Emde, Tables of functions.

Opmerking 2. De grafiek van de functie (1) is een speciaal geval van de foutenkromme van Gauss (of normale frequentiekromme)

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

namelijk voor $\mu = 0$ en $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Bij een experiment, dat een groot aantal malen wordt herhaald, blijkt*) de kans op een waarneming tussen a en b soms te zijn

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt,$$

waarin μ het gemiddelde en σ de spreiding van de waarnemingen is. De kans op een waarneming tussen $-\infty$ en ∞ moet dan 1 zijn. Voor erf(x) zou dit betekenen

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

Bewijs van deze formule:

Wij berekenen op twee manieren

$$\iint_G e^{-x^2-y^2} dx dy \quad ; \quad G = \text{eerste kwadrant van } xOy\text{-vlak.}$$

Eerst benaderen wij G door een vierkant $N \times N$ met $N \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \iint_G e^{-x^2-y^2} dx dy &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N dx \int_0^N e^{-x^2-y^2} dy = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-x^2} dx \int_0^N e^{-y^2} dy = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\int_0^N e^{-t^2} dt \right]^2 = \\ &= \left[\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \right]^2 . \end{aligned}$$

Vervolgens benaderen wij G door een kwartcirkel met straal $R \rightarrow \infty$:

$$\iint_G e^{-x^2-y^2} dx dy = \iint_G e^{-r^2} r dr d\varphi = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr =$$

*) Zie H.Freudenthal, Waarschijnlijkheid en statistiek.

$$= -\frac{\pi}{4} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-r^2} d(-r^2) = \frac{\pi}{4}.$$

Gelijkstelling der antwoorden levert

$$\operatorname{erf}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1,$$

waarmee het gestelde bewezen is.