TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Examen- en Tentamenopgaven (1960-1968)

Wiskunde II

Met antwoorden en oplossingen

Onderafdeling der Wiskunde

EXAMEN
en TENTAMEN OPGAVEN

Wiskunde II
met antwoorden en oplossingen (1960-1968)

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT. NR. 201
PRIJS f 3,50

Inhoudsbeschrijving
Examen en Tentamen Opgaven Wiskunde II
(1960-1968)

(17 Mei 2005, JdG)

Examen en Tentamen opgaven Wiskunde II

In dit tentamenboek zijn opgenomen alle wiskunde II tentamens:
uit 1960 t/m 1963 met antwoorden, resp.
uit 1964 t/m 1968 met uitgewerkte oplossingen
(de multiple choice proeftentamens 1962 t/m 1964 met antwoordcode).

Voor studenten, die oefenstof zoeken voor een bepaald onderdeel van Wiskunde II, is het boek toegankelijker gemaakt door toevoeging van een tabel (achterin dit boek), die de indeling van de collegestof geeft over de besproken tentamens.

Ieder tentamen is aangegeven met een code:
<u>in letters</u> (P,II,H) het soort (proef-, deel-, herkansings-) tentamen;
<u>in cijfers</u> de maand en het jaar waarin het tentamen plaats vond.

Tentamen Wiskunde II op maandag 4 januari 1960.

1. a) Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y''' - y'' + 2y = e^{-x} \cos x.$$

b) Gegeven is de rij

$$a_n \quad \text{met} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

<u>Bewijs</u> dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (a_n + a_{n+1})$$

convergeert en bepaal de som.

2. a) Bepaal de oppervlakte van dat deel van het zadelvlak $z = xy$ dat ligt binnen de cylinder

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2, \qquad x \geqslant 0.$$

b) Bepaal de massa van een bol, waarin de massadichtheid evenredig is met de afstand tot het middelpunt.

3. In het xy-vlak is gegeven de kromme $2xy = 1$ en de rechte $x + y = 0$.

1) Bepaal de vergelijking van het oppervlak dat ontstaat door wenteling van de kromme om de rechte.

2) Bepaal de beschrijvenden van het oppervlak die gaan door het punt $P(0,0,1)$.

4. a) Geef aan voor welke z in het complexe vlak de reeks

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(z - \overline{z})^{2n}}{n}$$

convergeert.

Toon aan dat de som (als ze bestaat) > -1 en $\leqslant 0$ is.

b) Bepaal $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \frac{x}{2})^{\pi} - \cos x + x \operatorname{arc} \cos \frac{x}{2}}{\log (1 - \frac{x}{2}) + \arcsin \frac{x}{2}}$.

<u>Antwoorden Tentamen januari 1960.</u>

1. a) $\lambda e^{-x} + e^{x}(\mu \cos x + \nu \sin x) + \frac{1}{8}e^{-x}(\cos x + \sin x)$

(λ, μ, ν reëel)

b) Som = a_1.

2. a) $\frac{10}{9} - \frac{\pi}{6}$.

b) Als massaverdeling = $A\rho$ en straal bol = R, dan is $M = \pi A R^4$.

3. 1) $z^2 + 2xy - 1 = 0$.

2) $\underline{x} = (0,0,1) + \rho(1,0,0)$

$\underline{x} = (0,0,1) + \sigma(0,1,0)$.

4. a) $-\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \frac{1}{2}$.

b) $\pi - \pi^2$

Proeftentamen Wiskunde II op zaterdag 12 maart 1960

1. a) Bepaal alle reële oplossingen van

$$y'''' + y'' + y = 0 \; .$$

b) Bepaal de oplossing van

$$y''' - y'' = x$$

waarvoor geldt

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \; .$$

2. Gegeven:

$$z_1 = e^{i\varphi} \; , \quad z_2 = ie^{i\varphi} \; , \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi \; .$$

a) Teken z_1 en z_2 voor zekere φ.

b) Voor welke φ bestaat $\arg \dfrac{z_2+1}{z_1+1}$? Bepaal $\arg \dfrac{z_2+1}{z_1+1}$ voor deze waarden van φ.

c) Bepaal de uiterste waarde(n) van $\operatorname{Re}(z_1 + z_2)$.

3. a) Onderzoek of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

convergent is.

b) Gegeven

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \tfrac{1}{2} \; .$$

Onderzoek voor welke reële waarden van x de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

convergent resp. divergent is.

4. Bepaal met behulp van standaardreeksen de derde afgeleide in het punt $x = 0$ van de functie

$$f(x) = \frac{\log(1+x) - \sin x}{\sqrt{1-x}} \; .$$

Antwoorden Proeftentamen maart 1960

1. a) $y = e^{\frac{1}{2}x}(\alpha \cos \frac{1}{2}x\sqrt{3} + \beta \sin \frac{1}{2}x\sqrt{3}) + e^{-\frac{1}{2}x}(\gamma \cos \frac{1}{2}x\sqrt{3} + \delta \sin \frac{1}{2}x\sqrt{3})$

   (α, β, γ, δ reëel).

   b) $y = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$.

2. b) $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, $\varphi \neq \pi$.

   $$\arg \frac{z_2 + 1}{z_1 + 1} = \frac{\pi}{4} \quad (-\pi < \varphi < \frac{\pi}{2}) \text{ resp. } -\frac{3\pi}{4} \quad (\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi) .$$

   c) $\varphi = -\frac{\pi}{4}$: $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \sqrt{2}$, maximum;

   $= \frac{3\pi}{4}$: $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = -\sqrt{2}$, minimum.

3. a) Divergentie.

   b) Convergent voor $-1 < x < 1$, divergent voor $|x| > 1$.

4. $\frac{3}{2}$.

Examen (tentamen) Wiskunde II op maandag 20 juni 1960.

1. a) Onderzoek voor welke waarden van p de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^p}$$

convergent resp. divergent is.

b) z doorloopt in het complexe vlak de omtrek der rechthoek ABCD, waarbij A, B, C en D de beeldpunten zijn van resp.

$$- i \log 2,\ \tfrac{1}{6}\pi - i \log 2,\ \tfrac{1}{6}\pi + i \log 2,\ i \log 2.$$

Beschrijf nauwkeurig de baan welke $w = e^{iz}$ dan doorloopt.

---

2. a) De kromme

$$K: \begin{cases} x^2 - 2z^2 = 1 \\ y = z \end{cases}$$

wentelt om de rechte

$$\underline{x} = \lambda(0,1,1).$$

Bepaal de vergelijking van het omwentelingsoppervlak.

b) Bepaal de meetkundige plaats der rechten die de rechte

$$\begin{cases} x = 0 \\ z - y = 0 \end{cases}$$

en de kromme

$$\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

snijden, en evenwijdig zijn met het vlak $y = 1$.

3. a) A is een lineaire afbeelding met nulruimte

$$\underline{x} = \mu(1,1,1).$$

Bewijs dat

$$\underline{p} = (1,1,1)$$

eigenvector is.

b) A is een lineaire afbeelding van R_4 in R_3 met matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Bepaal bases voor beeld- en nulruimte.

c) A is een lineaire afbeelding van R_3 op R_3.
De eigenwaarden van A zijn 1, 3, en -2, met achtereenvolgens de eigenvectoren:

$$\rho(1,1,1), \quad \sigma(1,-2,0) \quad \text{en} \quad \tau(2,0,1).$$

Bepaal de matrix van A.

3'. a) Bereken

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx.$$

b) Bepaal het convergentiegebied van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, e^{n\frac{z-1}{z-3}} \qquad \text{(denk aan de rand).}$$

4. a) Bereken de oppervlakte van dat deel van de cylinderwand

$$x^2 + z^2 = 1$$

waarvoor

$$x^2 + y^2 \leqslant 1$$
$$x + y \geqslant 1$$
$$x \geqslant 0$$
$$y \geqslant 0, \; z \geqslant 0.$$

b) Bereken

$$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 + \cos x}}$$

Antwoorden Tentamen juni 1960.

1. a) $p > \frac{1}{2}$: convergent, $p \leqslant \frac{1}{2}$: divergent.

b) AB: cirkelboog $|w| = 2$, argument toenemend van 0 tot $\frac{1}{6}\pi$.

BC: rechte lijn $\arg w = \frac{\pi}{6}$, modulus afnemend van 2 tot $\frac{1}{2}$.

CD: cirkelboog $|w| = \frac{1}{2}$, argument afnemend van $\frac{\pi}{6}$ tot 0.

DA: langs de reële as van $\frac{1}{2}$ naar 2.

2. a) $x^2 - 2yz = 1.$

b) Twee stukken:

$$y = 0 \; ; \qquad x^2y + (y - z)^2 = 0.$$

3. a) Eigenwaarde van $\underline{p}$ is 0.

b) Basis beeldruimte b.v.: $(0,-2,1)$ en $(2,0,3)$

Basis nulruimte b.v.: $(5,1,-2,0)$ en $(13,0,-5,1)$.

c) $$\begin{pmatrix} 13 & -8 & 22 \\ 4 & 5 & -8 \\ -6 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

3'. a) $-\frac{2}{\pi}$

b) $|z - 2| < 1$, maar $z \neq 3$.

4. a) $2 - \frac{1}{2}\pi$.

b) $2\sqrt{2} - 2$.

Examen (tentamen) Wiskunde II op dinsdag 10 januari 1961.

1. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' + 4y = \sin x \cos x.$$

2. Voor welke complexe z geldt:

$$\log |e^z| < |z| - 1.$$

Teken in het z-vlak het bijbehorende gebied.

3. Voor welke reële waarden van x ($0 < x < 2$) convergeert de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \sin x)^n}{n}.$$

4. Voor welke waarde(n) van α bestaat de volgende limiet:

$$\lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^\alpha - e^{\alpha^2 t}}{\log (1+t) - \sin t}.$$

Bereken bij elke gevonden α de limiet.

5. Bewijs dat de afstand van het punt $P(x_0, y_0, z_0)$ tot het vlak $ax + by + cz = d$ gelijk is aan:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

6. In de ruimte is gegeven de kromme

$$\begin{cases} x = 1 + \dfrac{\sin t}{\sqrt{2}} \\ y = 1 + \dfrac{\sin t}{\sqrt{2}} \\ z = 1 + \cos t\ . \end{cases}$$

Bepaal de vergelijking van het oppervlak, dat ontstaat als deze kromme gewenteld wordt om de rechte $\underline{x} = \lambda(1,1,1)$.

7. Bereken $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

8. B is een lineaire afbeelding van R_3 in zichzelf met matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

De afbeelding A van R_3 in zichzelf is gegeven door $A\underline{x} = B\underline{a} + \underline{x}$.
Voor welke vectoren $\underline{a}$ uit R_3 is A een lineaire afbeelding?

Antwoorden Tentamen januari 1961

1. $y = -\frac{1}{8}x \cos 2x + \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x$ (λ, μ reëel).

2. $y^2 \geqslant 2x+1$ (buitengebied parabool + rand).

3. $0 \leqslant x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6} < x \leqslant \frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2\pi$.

4. $\alpha = 0$ limiet = 0; $\alpha = 1$ limiet = 1.

6. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

7. $2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$.

8. $\underline{a} = \lambda(1,-1,0)$ (de nulruimte van B).

Proeftentamen Wiskunde II op zaterdag 18 maart 1961.

1. a) Bepaal de oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y''' - y'' + y' - y = e^{ix}.$$

b) Ga na of er reële oplossingen zijn.

2. Ga na of de volgende reeks convergeert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot n^{-n} \cdot n! \,.$$

3. Van een reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

is $\qquad s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n.$

a) Bewijs dat $u_n = \frac{1}{n} + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

b) Bewijs dat $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 \cdot u_n$ bestaat.

c) Bewijs dat $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ convergeert.

d) Bestaat $\lim\limits_{n \to \infty} \left\{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right\}$?

4. Ga na voor welke waarden van x de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)x^{2n+1}}{(2n)!}$$

convergent is en bepaal de som voor die waarden van x.

5. Bepaal $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{3}\arctan x^3 + \log(1-x) + \sin(e^x - 1)}{(\sin x)^4}$.

6. Zij $w = \dfrac{2}{2z - i}$. Als z de rechte Im z = 1 doorloopt, wat is dan de "baan" van w ? Voor welke waarde(n) van z = Im w extreem?

7. Bepaal alle functies f(x,t), die voldoen aan

$$2\,\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f - \sin t .$$

<u>Antwoorden Proeftentamen maart 1961</u>

1. a) $y = \dfrac{i-1}{4}\, xe^{ix} + c_1 e^x + c_2 e^{ix} + c_3 e^{-ix}$.

   b) Er zijn geen reële oplossingen.

2. Divergent.

3. d) Ja, volgens c) en de convergentiedefinitie van reeksen.

4. Alle x. Som = $x^2 \sin x - x \cos x$.

5. $-\dfrac{11}{24}$.

6. Een cirkel, middelpunt $-i$, straal 1, het punt 0 uitgezonderd.
   Voor z = i is Im w extreem, nl. Im w = -2.

7. $f(x,t) = \{c_1(t) + xc_2(t)\}e^x + \sin t$.

Examen (tentamen) Wiskunde II op dinsdag 20 juni 1961.

1. a) Bepaal

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \dfrac{9+3x}{9+x^2}}{\sin x - \arctan x} .$$

b) Zij $w = e^z - e^{-z}$. Als z de rechte $\mathrm{Re}\, z = \log 2$ doorloopt dan doorloopt w een ellips. Bewijs dit.

---

2. a) Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'''' - y''' - y' + y = 2 \sin x.$$

b) Bepaal

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + 2 \tan x} .$$

3. Door het voorschrift $A(x,y,z) = (y,z,x)$ wordt de R_3 op zichzelf afgebeeld.

a) Laat zien dat dit voorschrift een lineaire afbeelding is en dat deze afbeelding orthogonaal is.

b) Bepaal de eigenvectoren van A.

c) Laat zien dat er een vlak door 0 is dat door A in zichzelf wordt afgebeeld.

d) Laat nu zien dat de afbeelding een draaiing van de ruimte om een zekere as is en bepaal de hoek waarover wordt gedraaid.

4. a) De kromme

$$\begin{cases} y = z \\ x^2 = 1 - 2y^2 \end{cases}$$

wordt gewenteld om de rechte

$$\underline{x} = (0,2,0) + \lambda(0,0,1).$$

Welk oppervlak ontstaat hierdoor?

b) Een bol met middelpunt $(0,0,0)$ en straal 1 heeft massaverdeling

$$\rho(x,y,z) = |z|.$$

Bepaal de massa van het stuk van de bol dat binnen de kegel

$$z^2 = x^2 + (y-1)^2$$

ligt. (Bepaal daartoe eerst de vergelijking van de projectie op het XOY-vlak van de doorsnijdingskromme van de kegel en het boloppervlak).

Antwoorden Tentamen juni 1961.

1. a) $\frac{16}{27}$.

b) Als $w = u + iv$,

dan is $\frac{4}{9}u^2 + \frac{4}{25}v^2 = 1.$

2. a) $$y = (A + Bx)e^{x} + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C \sin \tfrac{1}{2}x\sqrt{3} + D \cos \tfrac{1}{2}x\sqrt{3}\right) + \sin x$$

(A, B, C, D reëel).

b) $$\frac{2}{5}\log 2 + \frac{\pi}{10}.$$

3. b) $\alpha(1,1,1)$ bij eigenwaarde 1.

c) Het vlak $x + y + z = 0$.

d) As: $\underline{x} = \alpha(1,1,1)$, hoek van draaiing: $\frac{2\pi}{3}$.

4. a) Het boldeel

$$x^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 9$$

waarvoor

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2} \leq z \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \text{(bolschil).}$$

b) $$\frac{\pi}{16}.$$

Examen (tentamen) Wiskunde II op maandag 15 januari 1962.

1. Voor welke complexe z is de uitdrukking

$$z + \frac{1}{z}$$

reëel en positief?
Teken in het z-vlak het bijbehorende gebied.

2. Geef de eerste zes termen van de reeksontwikkeling rond $x = 0$ van de volgende functies:

$$e^x, \quad \sin x, \quad \sqrt{1+x}, \quad \arctan x, \quad \log(1-x).$$

Bepaal de eerste vier termen van de reeksontwikkeling rond $x = 1$ van $\log(1+x^2)$.

3. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' - y' + y = x\, e^{\frac{x}{2}}.$$

4. Bepaal de vergelijking van de meetkundige plaats van de punten, waarvan de afstand tot de oorsprong gelijk is aan de afstand tot de lijn ℓ: $\underline{x} = (0,0,1) + \lambda(0,-1,1)$.

5. Bereken:

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+1}}.$$

6. De lineaire afbeelding A is gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} a+1 & 3 & 5 \\ 4 & b+2 & 10 \\ c & d & 20 \end{pmatrix}$$

Verder is gegeven dat de dimensie van de nulruimte van A gelijk aan 2 is.
Bereken a, b, c en d.
Bewijs dat $\lambda = 0$ eigenwaarde van A is.

Antwoorden Tentamen januari 1962.

1. De punten $z = x + iy$ met a) $x > 0$
en b) $y(x^2 + y^2 - 1) = 0$.

2. Zie dictaat.

$$\log(1+x^2) = \log 2 + \frac{x-1}{1!} - \frac{(x-1)^3}{3!} + 3\,\frac{(x-1)^4}{4!} + \dots$$

3. $$y(x) = e^{1/2\,x}(\lambda \cos \tfrac{1}{2}x\sqrt{3} + \mu \sin \tfrac{1}{2}x\sqrt{3} + \tfrac{4}{3}x), \quad (\lambda, \mu \text{ reëel}).$$

4. $$y^2 + z^2 - 2yz + 2y + 2z - 1 = 0.$$

5. $$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$$

6. $a = 1$, $b = 4$, $c = 8$, $d = 12$.

Proeftentamen Wiskunde II op donderdag 15 maart 1962

a. Zij $z = x + iy$. Dan is

$|e^z| =$ (1) $e^{|z|}$; (2) e^z ; (3) $\sqrt{e^{2x} + e^{2y}}$; (4) $e^{\mathrm{Re}\, z}$.

b. Uit $\overline{z_1} . \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$ volgt:

(1) niets; (2) $z_1 = 0$ of $z_2 = 0$; (3) z_1 en z_2 zijn reëel;
(4) $z_1 z_2$ is reëel.

c. $2i\sqrt{3}\, e^{\frac{4}{3}\pi i} =$ (1) $-3 - i\sqrt{3}$; (2) $\sqrt{3} - 3i$; (3) $3 + i\sqrt{3}$;
(4) geen van de antwoorden 1,2,3 is goed.

d. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ is

(1) convergent omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ voor iedere x convergent is,

(2) divergent omdat de termen niet tot 0 naderen,

(3) convergent omdat n! voor iedere n veel groter dan n^n is,

(4) convergent volgens het criterium van d'Alembert.

e. We kunnen besluiten dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergent is als bekend is dat

(1) $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$ vanaf zeker rangnummer;

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$;

(3) $\sqrt[n]{|u_n|} \to 0$ voor $n \to \infty$.

(4) Géén van de voorwaarden 1,2,3 is voldoende voor convergentie.

f. De definitie van convergentie luidt: Een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent als:

(1) bij iedere $\varepsilon > 0$ een N is te vinden zodat $|a_n| < \varepsilon$ voor $n > N$;

(2) $\sum_{n=1}^{N} a_n$ een limiet heeft voor $N \to \infty$;

(3) de partiële sommen s_n en s_{n+1} voor voldoend grote n willekeurig weinig van elkaar verschillen, dus $\lim_{n\to\infty}(s_{n+1} - s_n) = 0$;

(4) bij iedere $\varepsilon > 0$ een N te vinden is zodat $\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right| < \varepsilon$.

g. De beeldpunten van de complexe getallen 0, z_1 en z_2 vormen een gelijkzijdige driehoek. Hieruit volgt:

(1) $\arg z_1 + \arg z_2 = \pi/3$; (2) $\arg(z_1 - z_2) = 2\pi/3$; (3) $\left|\arg \frac{z_1}{z_2}\right| = \pi/3$;

(4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

h. $\mathrm{Re}\left(\frac{3+i}{4+3i}\right) =$ (1) 3/5 ; (2) 15/7 ; (3) 9/25 ; (4) 3/4 .

i. Beschouw in het z-vlak de figuur met als vergelijking

$$|z| = 1, \quad |z+i| = \alpha \quad \text{en} \quad \bar{z} = z - i \ .$$

Als deze figuren een gemeenschappelijk punt hebben dan is

(1) $\alpha = 1$; (2) $\alpha = \sqrt{3}$; (3) $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{7}$.

(4) Het gestelde geldt voor ieder positief getal α.

j. De reeks $\sum_{n\,1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n+\frac{1}{2})\pi}{n}$ is

(1) divergent omdat de partiële sommen onbeperkt toenemen;

(2) convergent omdat de reeks alternerend is en $|\sin x| \leq 1$ voor alle x;

(3) convergent omdat $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ en de termen van teken verwisselen.

(4) divergent omdat de exponent van n in de noemer niet kleiner dan 1 is.

k. De reeks $1 - \frac{\pi^2}{1.2} + \frac{\pi^4}{1.2.3.4} - \frac{\pi^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$ is

(1) convergent met een som kleiner dan $1 - \frac{\pi^2}{2}$;

(2) convergent met som -1 ;

(3) wel alternerend maar divergent omdat de termen niet monotoon tot nul naderen;

(4) divergent omdat de termen niet tot nul naderen.

l. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^n\, x^n$ is convergent voor

(1) $|x| < 1/e$ en verder divergent; (2) $|x| \leqslant 1/e$ en verder divergent;
(3) $|x| < 1$ en verder divergent; (4) $|x| \leqslant 1$ en verder divergent.

m. Beschouw de reeksen

I $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) - (\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}) - (\frac{1}{2}+\frac{1}{5}) + (\frac{1}{2}+\frac{1}{6}) - (\frac{1}{2}+\frac{1}{7}) + \dots$;

II $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{\frac{1}{2}\log n}}$.

(1) I en II zijn divergent; (2) I is convergent en II is divergent;
(3) I en II zijn convergent; (4) I is divergent en II is convergent.

n. De differentiaalvergelijking $y'' + 3y' - 4y = 4$ heeft als oplossing:

(1) $y = Ae^{-4x} + Be^{x} - x$; (2) $y = Ae^{-4x} + Be^{x} - 1$;

(3) $y = Ae^{4x} + Be^{-x} - 1$; (4) $y = A\cos 4x + B\sin x - 1$.

o. De verstandige manier om een bijzondere oplossing van $y'' - 2y' + y = e^x$ te vinden is te proberen:

(1) $y = Ax^2e^x$; (2) $y = Ae^x$; (3) $y = (Ax+B)e^x$; (4) $y = (Ax^2+Bx+C)e^x$.

p. De differentiaalvergelijking $y''' - y = 0$ heeft als oplossing:

(1) $y = A + Be^x + Ce^{-x}$; (2) $y = Ae^x + Bxe^x + Cx^2e^x$;
(3) $A\cos\frac{1}{2}x\sqrt{3} + B\sin\frac{1}{2}x\sqrt{3}$; (4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

q. $\frac{(1+i\sqrt{3})^9}{(-1+i)^{10}} =$ (1) $-16i$; (2) $\frac{1}{2}i$; (3) $\frac{1}{-1+i}$; (4) $-i$.

$\sqrt[5]{31}$ nauwkeurig in 2 decimalen is: (1) 1,96 ; (2) 1,97 ; (3) 1,98 ; (4) 1,99

s. $\lim_{x\to 0} \frac{2\arctan x - \log(\frac{1+x}{1-x})}{\sin(x^3)} =$ (1) 0 ; (2) $-4/3$; (3) -1 ;
(4) de limiet bestaat niet.

t. De coëfficiënt van x^5 in de reeksontwikkeling van $\sqrt[3]{1-3x}$ is:

(1) -176 ; (2) $-7\frac{1}{3}$; (3) 0 ;

(4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

Antwoorden Proeftentamen maart 1962

a4	b1	c4	d2	e3	f2	g3	h1	i2	j1
k2	l3	m1	n2	o1	p4	q1	r4	s2	t2.

Examen (tentamen) Wiskunde II op dinsdag 19 juni 1962.

1. a) Bepaal de oplossing van

$$y''e^x + y'e^x + ye^x = x - 1$$

die de x-as in de oorsprong snijdt onder hoeken $+\frac{\pi}{4}$.

b) Bepaal

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x/2} - \sqrt{1+x+\frac{1}{2}x^2}}{x.\log \cos x}.$$

---

2. a) Bewijs de reductieformule

$$\int_0^{\pi/4} \tan^{2n} x \, dx = \frac{1}{2n-1} - \int_0^{\pi/4} \tan^{2n-2} x \, dx.$$

b) Bepaal de massa van het lichaam dat van het eerste octant wordt afgesneden door de bol met vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0,$$

als de dichtheid gegeven wordt door

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

(Gebruik bolcoördinaten).

3. Een lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is gegeven door de matrix

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Toon aan dat elke vector in het vlak V met vergelijking $x + y + z = 0$ eigen vector bij de eigenwaarde 1 is.

b) Bepaal de eigenvectoren bij de eigenwaarde $\frac{1}{2}$.

c) Als $\underline{x}' = (x', y', z')$ de projectie is van $\underline{x} = (x,y,z)$ op V toon dan aan dat $A\underline{x} = \frac{1}{2}(\underline{x}+\underline{x}')$ en $A^{-1}\underline{x} = 2\underline{x} - \underline{x}'$.

4. a) Ga na of de reeks met algemene term

$$u_n = \sqrt[3]{\sin (n^{-\pi})}\ \arctan n$$

convergent of divergent is.

b) Bepaal de vergelijking van de cylinder waarvan de asrichting (1,0,1) is en waarvan elke beschrijvende raakt aan de hyperbolische paraboloïde met vergelijking $x^2 - y^2 = 2z$.

<u>Antwoorden Tentamen juni 1962.</u>

1. a) $y(x) = xe^{-x}$; b) $-1/6$.

2. b) $\frac{3\pi}{2}$.

3. b) $x = \gamma(1,1,1)$.

4. a) convergent; b) $y^2 - 2x + 2z + 1 = 0$.

Examen (tentamen) Wiskunde II op dinsdag 8 januari 1963.

1. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y''' + 8y = e^{-2x}.$$

2. Bepaal het convergentiegebied in het complexe vlak van de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{3z+1}{z-1}\right)^n.$$

Schets dit gebied.

3. De functie $f(x)$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{\log(1+x^2) - \arctan x^2}{x^3} \qquad \text{voor } x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$

a) Bewijs dat $f(x)$ continu is voor $x = 0$.

b) Bereken $\int_0^1 f(x)\, dx$.

4. Het lichaam L in R_3 wordt bepaald door

$$0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 \leq x$$

Bereken de inhoud van L.

5. In R_3 is gegeven de vector $\underline{a}$ met lengte $|\underline{a}| = 1$. Zij ℓ de rechte $\underline{x} = \lambda\underline{a}$.

a) Bewijs dat de projectie van een vector $\underline{x}$ op ℓ is de vector $(\underline{a}, \underline{x})\underline{a}$.

b) Bewijs dat de afbeelding $A\underline{x} = 3(\underline{a}, \underline{x})\underline{a}$ een lineaire afbeelding van R_3 in zichzelf is.

c) Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van A.

<u>Antwoorden Tentamen januari 1963</u>

1. $y = (\lambda + \frac{x}{12})e^{-2x} + (\mu \cos x\sqrt{3} + \nu \sin x\sqrt{3})e^{x}$ $\quad (\lambda, \mu, \nu$ reëel).

2. $|z + \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$: <u>binnengebied</u> van cirkel om $-\frac{1}{2}$ met straal $\frac{1}{2}$.

3. a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-\frac{1}{2}x + \ldots) = 0 = f(0)$.

   b) $\frac{\pi}{8} - \frac{3}{4} \log 2$.

4. $\frac{5}{32}\pi$.

5. a) Ontbind $\underline{x}$ in $\rho\underline{a} + \underline{b}$ met $\underline{b} \perp \underline{a}$; dan $\rho = (\underline{a}, \underline{x})$.

   b) $3(\underline{a}, \underline{x}+\underline{y})\underline{a} = 3(\underline{a}, \underline{x})\underline{a} + 3(\underline{a}, \underline{y})\underline{a}$; evenzo $\lambda\underline{x}$.

   c) 3 met eigenvectoren $\rho\underline{a}$
   0 " " $\perp \underline{a}$.

Herkansingsexamen (tentamen) Wiskunde I/II op vrijdag 18 januari 1963.

1. Bepaal

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n + \sin n}{\log (n\sqrt{n}) + \cos (n\sqrt{n})}.$$

2. Bepaal de afgeleide van sin (x^x).

3. Bepaal

$$\int \frac{\sqrt{3 + \log x}}{x} dx.$$

4. Druk $x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x}$ in poolcoördinaten uit. (z, r en φ).

5. Als gegeven is dat het stelsel

$$\begin{cases} px + y + z = 0 \\ x - y + pz = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

een oplossingsruimte van dimensie 1 heeft, bepaal dan deze oplossingsruimte.

6. Voor welke complexe getallen z is $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ reëel?

7. Wat zijn de reeksontwikkelingen van $\sqrt[3]{1+x}$ en $\log (1-x^2)$ in de omgeving van $x = 0$?

8. Ga na of $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{\log n}}$ convergent of divergent is.

9. Bepaal de vergelijking van de rechte cirkelkegel met top $(2,2,2)$ en als richtkromme de cirkel met straal 1 en middelpunt $(1,1,1)$ in het vlak $x+y+z = 3$.

10. Bepaal $\int \frac{dx}{1 + 2\cos x}$.

11. Bepaal de inhoud van het lichaam dat ontstaat door wenteling om de Z-as van de in het XOZ-vlak gelegen ellips $(x-2)^2 + 4z^2 = 1$.

12. Van de lineaire afbeelding A van R_3 in zichzelf zijn λ_1, λ_2, λ_3 de eigenwaarden.
Bewijs dat $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det A$.

<u>Antwoorden Herkansingstentamen januari 1963</u>

1. $\frac{2}{3}$.

2. $(1 + \log x) \cdot x^x \cdot \cos x^x$.

3. $\frac{2}{3}(3 + \log x)^{3/2} + C$.

4. $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$.

5. De dimensie is 1 als $p+1 = 0$; dan $\underline{x} = \lambda(2,5,-3)$
of als $p = 0$; dan $\underline{x} = \mu(1,1,-1)$.

6. z = reëel $(\neq -1)$ of $|z| = 1$ $(\neq -1)$.

7. $1 + \frac{1}{3}x - \frac{1.2}{3.6}x^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9}x^3 - \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}x^4 + \ldots$

$- x^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^8 - \ldots$.

8. Divergent.

9. $5(x^2+y^2+z^2) - 8(xy+xz+yz) + 12(x+y+z) - 36 = 0$.

10. $\frac{1}{\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{3} + \tan \frac{1}{2}x}{\sqrt{3} - \tan \frac{1}{2}x}$. 11. $2\pi^2$. 12. Zie dictaat.

Proeftentamen Wiskunde II op zaterdag 9 maart 1963

a. De differentiaalvergelijking $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$ heeft als oplossing:

(1) $y = Ae^{-x} + Be^{2x} + Ce^{3x}$; (2) $y = Ae^{x} + Be^{-2x} + Ce^{3x}$;

(3) $y = Ae^{x} + Be^{2x} + Ce^{-3x}$; (4) géén der antwoorden 1,2,3 is juist.

b. De differentiaalvergelijking $y''' = y$ heeft als oplossingsruimte:

(1) $y = Ae^{x} + Be^{-x} + C$; (2) $y = Ce^{x}$;

(3) $y = Ae^{x} + B\sin(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3})x + C\cos(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3})x$;

(4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

c. De functie $t(x)$ voldoet aan de vergelijking $\frac{d^3t}{dx^3} + \frac{dt}{dx} - 2x = 0$. Dan is

(1) $t(x) = e^{x}\{A + B\sin x + C\cos x\} + x^2$;

(2) $t(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + Ce^{2x}$;

(3) $t(x) = Ae^{x} + B\sin(x+\varphi) + x^2$;

(4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

d. Voor alle oplossingen van de differentiaalvergelijking $y'' + Ay' + y = 1$ (A reëel) geldt $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$ als

(1) $A > 0$; (2) $0 < A < 2$; niet voor $A \geqslant 2$;

(3) $A \geqslant 2$; niet voor $A < 2$; (4) $A > 0$ behalve voor $A = 2$.

e. De differentiaalvergelijking $y'' + (1+i)y' + iy = i$ heeft de volgende reële oplossingen

(1) $y = Ae^{-x} + B\cos x + 1$ met A en B reëel;

(2) $y = Ae^{-x} + 1$ met A reëel; géén andere reële oplossing;

(3) $y = 1 + A\sin x + B\cos x + e^{-x}$;

(4) de vergelijking heeft géén reële oplossingen.

f. De definitie van een convergente reeks luidt: een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent als

(1) $\lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \right) = 0$;

(2) de partiële sommen s_n en s_{n+1} voor voldoend grote n willekeurig weinig van elkaar verschillen, dus $\lim_{n \to \infty} (s_{n+1} - s_n) = 0$;

(3) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$;

(4) $\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$ bestaat.

g. We kunnen besluiten dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergent is als bekend is dat

(1) $\sqrt[n]{|u_n|} < 1$ vanaf zeker rangnummer;

(2) $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$;

(3) $\sum_{n=1}^{N} u_n < C$ voor alle N vanaf zeker rangnummer;

(4) géén van de voorwaarden 1,2,3 is voldoende voor convergentie.

h. Voor de convergentiestraal R van de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ geldt:

(1) R = 1 als $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$; (2) $R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$;

(3) $R = \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$; (4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

i. Als $\{a_n\}$ een rij natuurlijke getallen met $a_n < a_{n+1}$ is, geldt voor de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} x^{a_n}$:

(1) de reeks is convergent voor $|x| < 1$;

(2) de convergentiestraal hangt af van $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}$;

(3) de reeks is divergent voor $x \neq 0$ omdat a_n stijgend is;

(4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

j. Als $\lim_{n\to\infty} na_n = 1$ dan is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(1) convergent; (2) convergent mits a_n monotoon daalt; (3) divergent;
(4) over de convergentie of divergentie is géén uitspraak te doen.

k. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1-n}{z}}$ is convergent:

(1) voor alle waarden van z behalve $z = 0$;
(2) voor geen enkele waarde van z; (3) voor $\operatorname{Re} z > 0$; (4) voor $|z| > 1$.

l. Beschouw de reeksen

$$\text{I} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sin \frac{1}{n}} \; ; \qquad \text{II} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cos \frac{1}{n}} \, .$$

(1) I en II zijn convergent; (2) I en II zijn divergent;
(3) I is convergent, II divergent; (4) I is divergent, II convergent.

m. De reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ is

(1) divergent; (2) convergent op grond van d'Alembert;

(3) convergent omdat $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \leq 1$ is;

(4) convergent omdat n log n is te schrijven als $n^{1+\alpha}$ met $\alpha > 0$ (vanaf zeker rangnummer).

n. $\lim_{x\to 0} \frac{x - \arcsin x}{x - \sin x} =$ (1) -1 ; (2) 0 ; (3) 1 ;
(4) de limiet bestaat niet.

o. Beschouw de reeksen

$$\text{I} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$

$$\text{II} \qquad 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{3}{15} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{3}{31} + \dots \, .$$

(1) I en II zijn convergent; (2) I en II zijn divergent;
(3) I is convergent, II is divergent; (4) I is divergent, II is convergent.

p. De reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ is

(1) convergent omdat de reeks alternerend is met monotoon tot nul naderende termen;

(2) divergent omdat $a_{2n+1} > \frac{1}{2n+1}$ en $\Sigma \frac{1}{2n+1}$ divergent is;

(3) divergent omdat $|a_n|$ niet monotoon tot nul nadert;

(4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

q. De reeks $2! + \frac{1}{2} \cdot \frac{3!}{1!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4!}{2!} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5!}{3!} + \dots$ is

(1) divergent; (2) convergent met som 16 ; (3) convergent met som $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$;
(4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

r. $\sqrt[5]{30}$ nauwkeurig in 2 decimalen is:

(1) 1,96 ; (2) 1,97 ; (3) 1,98 ; (4) 1,99 .

s. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \arctan x - \log(\frac{1+x}{1-x})}{\sin(x^3)}$ = (1) 0 ; (2) -4/3 ; (3) -1 ;
(4) de limiet bestaat niet.

t. De coëfficiënt van x^4 in de reeksontwikkeling van $\sqrt[5]{1-5x}$ is

(1) 5^5 ; (2) -21 ; (3) 79 4/5 ;
(4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

<u>Antwoorden Proeftentamen maart 1963</u>

a2	b4	c4	d1	e2	f4	g4	h4	i1	j3
k3	l4	m1	n1	o1	p4	q2	r2	s2	t2

Examen (tentamen) Wiskunde II op vrijdag 14 juni 1963.

1. a) De functie $y(x)$ voldoet aan de volgende voorwaarden:

α) $y''' + 2y'' + 2y' = 0$

β) $y(0) = y'(0) = 0$

γ) $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 1.$

Bepaal $y(x)$.

b) Bereken

$$\lim_{x\to\infty} x\left\{x \log\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right) + 1\right\}.$$

---

2. a) Onderzoek de convergentie van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin n}\ .$$

b) Gegeven de bol B met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ en de vector $\underline{a} = (1,1,0)$.

Bepaal de vergelijking van de cylinder met asrichting $\underline{a}$, die de bol **B** omhult.

3. Gegeven de lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 met matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Bewijs</u> dat deze afbeelding een spiegeling t.o.v. een vlak voorstelt. Bepaal de vergelijking van dat vlak.

4. a) De kromme K, in het eerste octant, is gegeven als doorsnijding van de parabolische cylinders $x = y^2$ en $x = z^2$.
   Bereken de lengte van het stuk van K tussen de vlakken $y = 0$ en $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

   b) Bereken de inhoud van het lichaam bepaald door $x^2 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ en $0 \leqslant z \leqslant x^3 \dfrac{\sin y}{y}$.

<u>Antwoorden Tentamen juni 1963</u>

1. a) $y(x) = 1 - e^{-x}(\cos x + \sin x)$.

   b) 1.

2. a) relatief convergent.

   b) $x^2 - 2xy + y^2 + 2z^2 - 4z = 0$.

3. $\lambda_1 = -1$ met eigenvectoren $\alpha(1,1,1)$.
   $\lambda_{2,3} = 1$ met eigenvectoren in V: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
   Ontbind $\underline{x}$ in $\underline{x}'$ in V en $\underline{x}'' \perp V$; $A(\underline{x}' + \underline{x}'') = \underline{x}' - \underline{x}''$; dus V is het spiegelvlak.

4. a) $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)$.

   b) $\frac{1}{4}$.

Herkansingsexamen (tentamen) Wiskunde I/II op 21 juni 1963.

1. Bepaal

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \log n}{\log(n^2+n+1)} .$$

2. Bewijs dat de grafieken van $y = x^x$ en $y = \frac{1}{x^x}$ elkaar loodrecht snijden $(x > 0)$.

3. Bepaal

$$\int \sqrt{x^2 + 2}\, dx.$$

4. Druk $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ uit in poolcoördinaten (z, r, φ).

5. Als z de eenheidscirkel doorloopt en $w = e^{z^2+2z}$ wat is dan de minimale afstand van w tot de oorsprong?

6. Bepaal

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sqrt[3]{1 + 3x}}{1 - \cos 2x} .$$

7. Welk punt op de in het XOZ-vlak gelegen cirkel $x^2 + z^2 = 1$ heeft minimale afstand tot het vlak $3x + 12y + 4z = 13$?
Hoe groot is die afstand?

8. De eenheidsbol wordt door de kegel $x^2 + y^2 - \lambda z^2 = 0$ in 3 delen verdeeld. Bepaal λ zó dat de binnendelen samen even grote inhoud hebben als het buitendeel.

Antwoorden Herkansingstentamen juni 1963

1. $\frac{1}{2}$.

2. $y_1'(1) = 1,\ y_2'(1) = -1$.

3. $I = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{x^2+2} + \log(x + \sqrt{x^2+2}) + C$.

4. $$z_{xx} = z_{rr} \cos^2\varphi - 2z_{r\varphi} \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + z_{\varphi\varphi} \frac{\sin^2\varphi}{r^2} +$$
$$+ z_r \frac{\sin^2\varphi}{r} + 2z_\varphi \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} \qquad \text{(aangenomen } z_{\varphi r} = z_{r\varphi}) .$$

5. $e^{-3/2}$.

6. $\frac{3}{4}$.

7. $(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$; $\frac{8}{13}$.

8. $\lambda = 3$ (halve tophoek kegel: $\frac{\pi}{3}$).

Examen (tentamen) Wiskunde II op maandag 6 januari 1964.

1. Gegeven is de differentiaalvergelijking $y''' - y = i$.
   Gevraagd worden:
   a) alle oplossingen;
   b) alle zuiver imaginaire oplossingen.

2. a) Onderzoek de convergentie van

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)$$

   b) Bepaal $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - \cos x}{\arcsin x}$ $(a > 0)$.

   c) $a_1, a_2, \ldots$ is een rij reële getallen met $\lim_{n \to \infty} n\, a_n = 0$.
   Bewijs dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ convergeert.

3. Bereken de inhoud van het gebied in R_3 gegeven door

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 7 \quad \text{en} \quad x^2 + y^2 - z^2 \geqslant 1$$

   (aanwijzing: gebruik cylindercoördinaten).

4. De orthogonale lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is een draaiing om een as loodrecht op de door $\underline{a} = (1,0,1)$ en $\underline{b} = (0,1,1)$ opgespannen deelruimte. Verder is gegeven $A\underline{a} = \underline{b}$.
   Bepaal
   a) het beeld $A\underline{b}$;
   b) de matrix van A;
   c) de reële eigenwaarde(n) en eigenvectoren.

Oplossingen tentamen januari 1964.

1. a) We lossen eerst de homogene vergelijking $y''' - y = 0$ op door $y = e^{tx}$. Dat geeft de kar. vgl. $t^3 - 1 = 0$

$$t_1 = 1$$
$$t_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$
$$t_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

$$y_{hom} = \lambda e^x + \mu e^{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})x} + \tau e^{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3})x}$$

$$= \lambda e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(\mu e^{\frac{1}{2}i\sqrt{3}x} + \tau e^{-\frac{1}{2}i\sqrt{3}x}\right)$$

$$= \lambda e^x + e^{-\frac{1}{2}x}(\rho \cos \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x + \sigma \sin \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x)$$

λ, ρ, σ complex.

$$y_{part} = -i$$

Algemene oplossing:

$$y(x) = -i + \lambda e^x + e^{-\frac{1}{2}x}(\rho \cos \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x + \sigma \sin \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x)$$

met λ, ρ, σ complex.

b) $$y(x) = -i + \lambda e^x + e^{-\frac{1}{2}x}(\rho \cos \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x + \sigma \sin \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x)$$

met λ, ρ, σ zuiver imaginair.

2. a) $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \Sigma \frac{1}{n} \log \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)$$

$u_n > 0$ We mogen de vergelijkingsstelling toepassen.

$$u_n = \frac{\log\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)}{\sin \frac{1}{n}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 < 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{n^2}$$

Want $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\log(1+t)}{t} = 1$ en $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$

Daar $\Sigma \frac{1}{n^2}$ convergeert, convergeert ook Σu_n.

b) We dienen de reeksontwikkeling van de teller voort te zetten tot en met de termen van de 1° graad, want de eerste term van de noemer is x

Bedenk dat $a^x = e^{x \ln a}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x \ln a + \dots) - (1 - \dots)}{x + \dots} = \lim_{x \to 0} \frac{x(\ln a + \dots)}{x(1 + \dots)} = \ln a$$

c) Uit $\lim\limits_{n \to \infty} n\, a_n = 0$ volgt:

Voor $n > N$ is $|n\, a_n| < 1$ of $|a_n| < \frac{1}{n}$

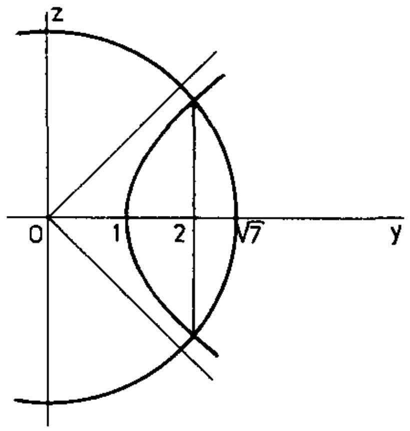
We bewijzen

$$\Sigma u_n = \Sigma \frac{a_n}{n} \quad \text{is zelfs absoluut convergent.}$$

Want $|u_n| = \left|\frac{a_n}{n}\right| < \frac{1}{n^2}$ voor $n > N$

en volgens de vergelijkingsstelling is dan $\Sigma |u_n|$ convergent.

3.



Oplossing I .

Zij B: $x^2 + y^2 + z^2 = 7$

EH: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

We gebruiken cylindercoördinaten om de gevraagde inhoud I te berekenen.

$$I = 2 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r dr \int_0^{z_1} dz +$$

$$2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_2^{\sqrt{7}} r dr \int_0^{z_2} dz$$

De grenzen z_1 en z_2 vinden we door

$$x^2 + y^2 - z_1^2 = r^2 - z_1^2 = 1 \rightarrow \quad z_1 = \sqrt{r^2 - 1}$$

$$x^2 + y^2 + z_2^2 = r^2 + z_2^2 = 7 \rightarrow \quad z_2 = \sqrt{7 - r^2}$$

$$I = 2\pi \int_1^2 \sqrt{r^2 - 1}\, d(r^2 - 1) - 2\pi \int_2^{\sqrt{7}} \sqrt{7 - r^2}\, d(7 - r^2)$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left[(r^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \Big/_{r=1}^{r=2} - (7 - r)^{\frac{3}{2}} \Big/_{r=2}^{r=\sqrt{7}} \right] = 8\pi\sqrt{3}.$$

Oplossing II.

We kunnen I ook met een integraal berekenen als volgt:(cylindercoörd.)

$$I = 2 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} dz \int_{r=\sqrt{1+z}}^{r=\sqrt{7-z^2}} r dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (7 - z^2 - 1 - z^2)dz$$

$$= 2 \quad [6\sqrt{3} - \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3}] = 8\,\pi\sqrt{3}.$$

4. A heeft een draaiingsas loodrecht op vlak V

$$V = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b} = \lambda(1,0,1) + \mu(0,1,1)$$

Direct te zien is dat voldoet $(1,1,-1)$ = as, waarmee de normaal op V en dus ook de vergelijking van V bekend is n.l. $x + y - z = 0$.

ad c) De vectoren $\neq \underline{0}$ langs de draaiingsas, dus $\underline{x} = \lambda(1,1,-1)$ $(\lambda \neq 0)$ zijn eigenvectoren bij eigenwaarde 1. Aangezien $\underline{a}$ loodrecht op de as staat en als beeld een vector $\neq \pm \underline{a}$ heeft is er geen andere reële eigenvector.

ad a)

I $\qquad A(1,0,1) = (0,1,1) \qquad A(0,1,1) = (c_1,c_2,c_3) = \underline{c}$

Omdat A orthogonaal is, is de lengte van $\underline{c}$ gelijk aan de lengte van $\underline{b}$. Dus $|\underline{b}| = |\underline{c}|$ of $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 2 \quad (\alpha)$
Omdat A een draaiing is met as $\perp$ V zal met $\underline{b}$ ook zijn beeld $A\underline{b} = \underline{c}$ in V liggen $\qquad c_1 + c_2 - c_3 = 0 \quad (\beta)$
tevens is de draaiingshoek tussen $\underline{a}$ en $\underline{b}$ $(\varphi(a,b))$ gelijk aan die tussen $\underline{b}$ en $\underline{c}$ $(\varphi(b,c))$, $\underline{c} \neq \underline{a}$

$$(a,b) = (b,c)$$

$$1 = c_2 + c_3 \qquad (\gamma)$$

Uit (α), (β), (γ) volgt

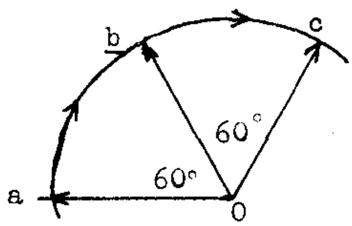
$$\underline{c} = (-1,1,0) \quad \text{of} \quad (1,0,1)$$

(De laatste vector $(1,0,1) = a$ voldoet ook aan (α), (β), (γ). Dat wisten we al).

Nu is van drie vectoren het beeld bekend, n.l.

$$\begin{array}{lll} A(as) = as & & A(1,1,-1) = (1,1,-1) \\ A\underline{a} = \underline{b} & & A(1,0,1) = (0,1,1) \\ A\underline{b} = \underline{c} & & A(0,1,1) = (-1,1,0). \end{array}$$

II Er is een veel mooiere oplossing, als we opgemerkt hebben dat de driehoek $0,\underline{a}, \underline{b}$ in V gelijkzijdig is.



Want $|a| = |b| = |a-b| = \sqrt{2}$

$A\underline{a} = \underline{b}$ was gegeven

$A\underline{b} = \underline{c}$ waarbij $\underline{c}$ de vector is met lengte $\sqrt{2}$ en $\angle\, b0c = 60°$

Dan is $\underline{c}$ ook de verschilvector

$\underline{b} - \underline{a} = (0,1,1) - (1,0,1) = (-1,1,0) = \underline{c}.$

ad b) Door vegen volgt:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Herkansingsexamen Wiskunde I/II op donderdag 16 januari 1964.

1. Bereken $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

2. Gegeven: $z = \dfrac{1}{1 + \arctan\sqrt{x^2+y^2}}$; bewijs dat $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

3. Gegeven: de vectoren $\underline{a} = (4,0,5,8)$, $\underline{b} = (2,-2,3,6)$, $\underline{c} = (3,7,2,-1)$;
Bewijs, dat de rechten ℓ: $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{b}$ en m: $\underline{x} = \underline{b} + \mu\underline{c}$ elkaar snijden.

4. Gegeven: $z_1^2 + z_2^2 = 0$ en $z_1 + z_2 = i\sqrt{2}$; bereken z_1 en z_2 en laat zien, dat z_1 en z_2 wortels zijn van de vergelijking $z^8 = 1$.

5. Voor welke waarde van a bestaat

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x) + \arctan x}{\sqrt{1-ax^2} - \cos\frac{1}{2}x}$$

<u>niet?</u>

6. Onderzoek de convergentie van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n)\log n}{n^2}$$

7. In R_2 is de vector $\underline{p} = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ gegeven. Als $\underline{x}$ een willekeurige vector in R_2 is, dan is de vector $\underline{y} = (\underline{x},\underline{p})\underline{p}$ de projectie van x op $\underline{p}$. Bewijs dit.
Beschouw de lineaire afbeelding A van R_2, die aan $\underline{x}$ als beeld toevoegt de vector $\underline{x}+\underline{y}$. Stel de matrix van A op.

8. Bepaal de oppervlakte van het gedeelte van $x^2 + y^2 = 4z$ dat tussen $z = 0$ en $z = 4$ is gelegen.

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1964.

1. De integraal is oneigenlijk bij $x = 1$. Ga dit na.
Bereken de onbepaalde integraal met partiële integratie

$$\int \arcsin \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x \cdot (-\sqrt{1-x^2}) + \int 1 \cdot dx + C$$

$$= -\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + x + C = F(x)$$

$$I = \lim_{p \uparrow 1} \left(F(p) - F(0)\right) = 1$$

2. Oplossing I

$$z(x,y) = \left[1 + \arctan (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$$

Door partiëel differentiëren naar x en y ontstaat het gewenste resultaat

Oplossing II met poolcoördinaten

$$z(r,\varphi) = [1 + \arctan r]^{-1} \text{ hangt dus niet van } \varphi \text{ af.}$$

De uitdrukking

$$yz_x - xz_y = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot r \sin \varphi + \frac{\partial z}{\partial y} r\, (-\cos \varphi) =$$

$$= -\left\{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}\right\} = -\frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

Bij deze functie geldt dus $\frac{\partial z(r)}{\partial \varphi} = 0$.

3. De rechten ℓ, m snijden elkaar indien er een $\lambda = \lambda_0$ en $\mu = \mu_0$ bestaan zodat $\underline{a} + \lambda_0 \underline{b} = \underline{b} + \mu_0 \underline{c}$.

We gaan vegen

$$\begin{array}{ll} \underline{a} = (4.0,5,8) & \underline{a} + 8\underline{c} = (28,56,21,0) \\ \underline{b} = (2,-2,3,6) & \underline{b} + 6\underline{c} = (20,40,15,0) \\ \underline{c} = (3,7,2,-1) & \underline{c} \qquad = (3,7,2,-1) \end{array}$$

Daaruit volgt

$$5(\underline{a} + 8\underline{c}) = 7(\underline{b} + 6\underline{c})$$

$$\underline{a} - \frac{2}{5}\underline{b} = \underline{b} + \frac{2}{5}\underline{c}$$

Opmerking: Vegen en opmerken dat $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ afhankelijk zijn is niet voldoende. Ga dit na.

4. Oplossing I

$$z_1^2 + z_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_2 = \pm i z_1 \qquad \text{dus}$$

$$z_1 + z_2 = z_1(1 \pm i) = \sqrt{2}\; e^{\pm\frac{1}{4}\pi i} z_1. \text{Invullen geeft}$$

$$e^{\pm\frac{1}{4}\pi i} z_1 = i = e^{\frac{1}{2}\pi i}, \qquad \text{m.a.w.}$$

$$\begin{array}{lcl} z_1 = e^{\frac{1}{4}\pi i} & & z_1 = e^{\frac{3}{4}\pi i} \\ & \text{of} & \\ z_2 = e^{\frac{3}{4}\pi i} & & z_2 = e^{\frac{1}{4}\pi i} \end{array}$$

In beide gevallen verifiëren we direct $z_1^8 = z_2^8 = 1$.

Oplossing II

$$-2 = (z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2 = 0 + 2z_1z_2 \qquad z_1z_2 = -1$$

$$(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2 = 0 + 2 \qquad z_1 - z_2 = \pm\sqrt{2}$$

We kennen nu de som en het verschil van z_1 en z_2

en volgt $\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) = e^{\frac{\pi}{4}i} \\ z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i) = -e^{-\frac{\pi}{4}i} \end{cases}$ of $\begin{cases} z_1 = -e^{-\frac{\pi}{4}i} \\ z_2 = e^{+\frac{\pi}{4}i} \end{cases}$

Door invullen volgt

$$z_1^8 = z_2^8 = 1.$$

5. $$\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \ldots \qquad |x| < 1$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \ldots \qquad |x| < 1$$

$$(1-ax^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(-ax^2) + \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{1\cdot 2}(-ax^2)^2 \qquad |ax^2| < 1$$

$$-\cos\frac{1}{2}x = -1 + \frac{(\frac{1}{2}x)^2}{2!} - \frac{(\frac{1}{2}x)^4}{4!} + \ldots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 - \ldots\ \ldots}{(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{8})x^2 + \ldots\ x^4 + \ldots} \quad \text{bestaat niet}$$

als $\frac{1}{2}a = \frac{1}{8}$ of $a = \frac{1}{4}$

6. $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n)\cdot \log n}{n^2}$$

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{want} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$$

dus $$\left|\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right| < 1 \text{ voor } n > N_0$$

daar $\Sigma\, n^{-\frac{3}{2}}$ convergeert, convergeert de gegeven reeks zelfs absoluut.

7. De projectie $\underline{y}$ van $\underline{x}$ op $\underline{p}$ is een veelvoud van $\underline{p}$, dus $\underline{y} = \lambda\underline{p}$, en heeft de eigenschap dat $\underline{x} - \underline{y}$ loodrecht op $\underline{p}$ staat, derhalve

$$(\underline{x} - \lambda\underline{p}\,,\ \underline{p}) = 0, \quad \text{dus} \quad \lambda = \frac{(\underline{x}\,,\ \underline{p})}{(\underline{p}\,,\ \underline{p})}$$

Hier is $(\underline{p}\,,\ \underline{p}) = 1$ dus $\lambda = (\underline{x}\,,\ \underline{p})$

Verder is gegeven

$$A\underline{x} = \underline{x} + (\underline{x}\,,\ \underline{p})\underline{p}$$
$$A(1,0) = (1,0) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = (\tfrac{3}{2}\,,\ \tfrac{1}{2})$$
$$A(0,1) = (0,1) + (\tfrac{1}{2}\,,\ \tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2}\,,\ \tfrac{3}{2})$$

zodat

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Noem de projectie van het gevraagde oppervlak O op het xoy-vlak G.

Dan is G: $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \end{cases}$

Zowel uit gedaante van G als uit de functie $x^2 + y^2 = 4z$ blijkt dat poolcoördinaten de voorkeur genieten.

$$O = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \sqrt{1 + (\tfrac{r}{2})^2}\, r\, d\, r$$

$$= 2\pi \cdot 2 \int_0^4 \left\{1 + (\tfrac{r}{2})^2\right\}^{\frac{1}{2}} d\left\{1 + (\tfrac{r}{2})^2\right\}$$

$$= \frac{8\pi}{3} \left\{1 + (\tfrac{r}{2})^2\right\}^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^{r=4} = \frac{8\pi}{3} \left\{\sqrt{125} - 1\right\}.$$

Proeftentamen Wiskunde II op zaterdag 7 maart 1964.

a. De differentiaalvergelijking $y''' - 8y = 0$ heeft als oplossing:

(1) $\alpha\, e^{2x} + \beta\, xe^{2x} + \gamma\, x^2 e^{2x}$

(2) $\alpha\, e^{2x} + \beta\, e^{-x+x\sqrt{3}} + \gamma\, e^{-x-x\sqrt{3}}$

(3) $\alpha\, e^{2x} + \beta\, e^{-x}\cos x\sqrt{3} + \gamma\, e^{-x}\sin x\sqrt{3}$

(4) $\alpha\, e^{2x} + \beta\, e^{-\frac{1}{2}x}\cos \frac{1}{2}x\sqrt{3} + \gamma\, e^{-\frac{1}{2}x}\sin \frac{1}{2}x\sqrt{3}$.

b. De differentiaalvergelijking $y''' + 3y' = 1$ heeft als oplossing:

(1) $\alpha + \beta \cos ix\sqrt{3} + \gamma \sin ix\sqrt{3} + \frac{1}{3}x$

(2) $\alpha + \beta \sin x\sqrt{3} + \gamma \cos x\sqrt{3} + \frac{1}{3}$

(3) $\frac{1}{3} + \alpha \cos x\sqrt{3} + \beta \sin x\sqrt{3}$

(4) $\alpha + \beta\, e^{-ix\sqrt{3}} + \gamma\, e^{ix\sqrt{3}} + \frac{1}{3}x$.

c. De oplossingen van de differentiaalvergelijking $y''' - y' = e^{-x}$, die voldoen aan $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 1$, zijn:

(1) $\alpha\, e^{-x} + 1 + \frac{1}{2}x e^{-x}$

(2) $\alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{x} + 1 + \frac{1}{2}xe^{-x}$, met $\alpha > \beta$

(3) $\alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{x} + \gamma + \frac{1}{2}xe^{-x}$, waarbij β en γ willekeurige functies zijn van x met $\beta \to 0$ en $\gamma \to 1$ als $x \to \infty$

(4) Voor geen enkele oplossing geldt $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 1$.

d. De differentiaalvergelijking $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}$ heeft als oplossing:

(1) $\alpha\, e^{-x}\sin x + \beta\, e^{-x}\cos x + e^{-x}$

(2) $\alpha\, e^{-x}\sin x + \beta\, e^{-x}\cos x + xe^{-x}$

(3) $\alpha \sin(1+x) + \beta \cos(1+x) + e^{-x}$

(4) géén van de antwoorden 1, 2, 3 is juist.

e. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ is

(1) relatief convergent

(2) absoluut convergent met som -1

(3) absoluut convergent met som $+1$

(4) géén van de antwoorden 1, 2, 3 is juist.

f. De definitie van convergentie luidt: Een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent als:

(1) de rij der partiële sommen begrensd is

(2) $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$ bestaat

(3) bij iedere positieve ε een N bestaat zodat voor alle $n > N$ geldt, dat het verschil der partiële sommen s_{n+1} en s_n in absolute waarde kleiner is dan ε;

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

g. Beschouw de reeksen

I $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

II $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + \log n}{2n^2 - 1}$

Nu geldt:

(1) I en II zijn divergent

(2) I is divergent, II is convergent

(3) I is convergent, II is divergent

(4) I en II zijn convergent.

h. Beschouw de reeksen:

I $\sum_{n=1}^{\infty} \{\sin \pi(n + \frac{1}{n})\}^2$

II $\sum_{n=1}^{\infty} \{\cos \pi(n + \frac{1}{n})\}^2$

Nu geldt:

(1) I en II zijn divergent

(2) I is divergent, II is convergent

(3) I is convergent, II is divergent

(4) I en II zijn convergent.

i. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is een reeks met positieve termen.

We kunnen besluiten dat $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergent is indien:

(1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ voor alle n die groter zijn dan een zeker getal N

(2) alle partiële sommen kleiner zijn dan 1

(3) $\sqrt[n]{u_n} < 1 - \frac{1}{n}$ voor alle n die groter zijn dan een zeker getal N

(4) géén van de uitspraken 1, 2, 3 is voldoende voor convergentie.

j. We zeggen dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ aan de voorwaarde Γ voldoet indien $\lim_{n \to \infty} na_n = 0$.

Nu geldt:

(1) alle convergente reeksen voldoen aan de voorwaarde Γ

(2) alle reeksen die aan de voorwaarde Γ voldoen zijn convergent.

(3) alle reeksen die niet aan de voorwaarde Γ voldoen zijn divergent

(4) er bestaan convergente reeksen die niet aan de voorwaarde Γ voldoen.

k. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^n$ is:

(1) divergent

(2) convergent en de som is 1

(3) convergent en de som is 2

(4) convergent en de som is 4.

l. Als $\quad u_n = \dfrac{1}{n\,(\log n)^2} \quad (n = 3,4,\ldots)$ dan geldt:

(1) $\quad u_n > \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dx}{x(\log x)^2}$ en de reeks $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} u_n$ is divergent

(2) $\quad u_n < \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dx}{x(\log x)^2}$ en de reeks $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} u_n$ is convergent

(3) $\quad u_n < \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x(\log x)^2}$ en de reeks $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} u_n$ is convergent

(4) $\quad u_n > \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x(\log x)^2}$ en de reeks $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} u_n$ is divergent.

m. De reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^p}} - 1\right)$ is:

(1) divergent indien $p \leqslant 0$, en convergent indien $p > 0$

(2) divergent indien $p \leqslant 1$, en convergent indien $p > 1$

(3) divergent indien $p < 1$, en convergent indien $p \geqslant 1$

(4) divergent indien $p < 0$, en convergent indien $p \geqslant 0$.

n. Een voldoende voorwaarde voor de convergentie van een reeks met positieve termen, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, is

(1) $\quad \sqrt[n]{u_n} < 1$ voor $n \geqslant N$

(2) $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ is convergent

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}$ is convergent

(4) $\lim_{n\to\infty} u_n \log n = 0.$

o. Een nodige voorwaarde voor de convergentie van een reeks met positieve termen, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, is:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ is convergent

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}$ is convergent

(4) u_n nadert monotoon naar nul als $n \to \infty$.

p. Als $a_n = n(\sqrt[n]{p} - 1)$, dan geldt:

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat alleen als $p = 1$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat voor $1 \leq p < \infty$, terwijl $a_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$ voor $0 < p < 1$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat voor $0 < p \leq 1$, terwijl $a_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$ voor $p > 1$

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat voor alle positieve waarden van p.

q. De machtreeks $S(x) = x + x^2 - x^3 - x^4 + x^5 + x^6 - x^7 - x^8 + \ldots$

(1) convergeert als $-1 \leq x < 1$, divergeert als $x < -1$ en $x \geq 1$ en de som in geval van convergentie $\frac{x}{1 + x^2}$

(2) convergeert als $|x| < 1$ met som $\frac{1+x}{1+x^2}$, en divergeert als $|x| \geq 1$

(3) convergeert als $|x| < 1$ met som $\frac{x(1+x)}{1+x^2}$, en divergeert als $|x| \geq 1$

(4) géén van de uitspraken 1, 2, 3 is juist.

r. Beschouw de beide limieten:

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$$

$$L_2 = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4}\left(\log\sqrt{x^2+1} - \tfrac{1}{2}(\sin x)^2\right).$$

Nu geldt:

(1) Niet allebei de limieten L_1 en L_2 bestaan

(2) $L_1 < L_2$

(3) $L_1 = L_2$

(4) $L_1 > L_2$.

s. Beschouw de complexe machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz^2}}{n\sqrt{n}}$. Als $z = x + iy$, dan wordt het convergentiegebied van deze reeks gegeven door:

(1) $xy > 0$

(2) $x^2 - y^2 \leq 1$

(3) $xy \geq 0$

(4) géén van de antwoorden 1, 2, 3 is juist

t. $\sqrt[3]{9}$, tot op drie decimalen nauwkeurig berekend, is

(1) 2,079

(2) 2,080

(3) 2,081

(4) 2,082.

Antwoorden proeftentamen maart 1964.

a3	b4	c1	d1	e4	f2	g2	h3	i2	j4
k3	l3	m2	n3	o2	p4	q3	r4	s3	t2.

Examen (tentamen) Wiskunde II op maandag 15 juni 1964.

1. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y^{(4)} - y'' + 2y' + 2y = x.$$

2. Voor welke reële waarden van x convergeert de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \log \frac{1}{n^2} .$$

---

3. Bepaal

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1 - \sin x + \cos x}{(1 - \sin x)^2}\, dx.$$

4. Het gebied G in het xOy-vlak is gegeven door de ongelijkheden
$x \leqslant y \leqslant x\sqrt{3}$, $x + y \geqslant 1$.
Schets het gebied G en bepaal

$$\iint_G \frac{dx\, dy}{(x^2 + y^2)^2} .$$

Het gebruik van poolcoördinaten verdient hierbij aanbeveling.

5. Gegeven is de bol B: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$
en het vlak V: $x = 1$.

a) Bepaal de pool van V ten opzichte van B.

b) Bepaal de vergelijking van de kegel met top (2,0,0) die B omhult.

c) Bepaal de hoek tussen de as en een beschrijvende rechte van deze kegel.

6. De lineaire afbeelding A is een rotatie van R_3 over een hoek van π radialen om de lijn $\left.\begin{matrix} z = 0 \\ x + y = 0 \end{matrix}\right\}$

De lineaire afbeelding B is een spiegeling van R_3 ten opzichte van het yOz-vlak.

a) Bepaal de matrices van A en B.

b) Bepaal de reële eigenwaarde(n) van AB en de bijbehorende eigenvectoren.

7. We zeggen dat een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ voldoet aan de voorwaarde

A: indien $\lim_{n \to \infty} n^2 \cdot u_n = 0$

B: indien $\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \cdot u_n = 0$

C: indien $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergent is.

a) Volgt C uit A?
Indien uw antwoord "ja" is, moet u het bewijs geven; indien uw antwoord "neen" is, moet u een voorbeeld geven van een reeks die wél aan A, maar niet aan C voldoet.

Beantwoord op dezelfde manier nog één van de vragen b), c) of d):

b) Volgt C uit B?

c) Volgt A uit C?

d) Volgt B uit C?

Oplossingen Tentamen juni 1964.

1) $$y^{(4)} - y^{(2)} + 2y' + 2y = x$$

Oplossing homogene vergelijking $y = e^{px}$

kar. vgl $\quad p^4 - p^2 + 2p + 2 = (p+1)^2(p-1-i)(p-1+i) = 0.$

$p_{1,2} = -1 \quad p_{3,4} = 1 \pm i$ zodat

$$y_{hom} = \lambda e^{-x} + \mu x e^{-x} + \rho e^{(1+i)x} + \sigma e^{(1-i)x}$$

$$= \lambda e^{-x} + \mu x e^{-x} + e^{x}(\tau \cos x + \mu \sin x)$$

Stel $\quad y_{part} = ax + b \quad y'(x) = a \quad y'' = y''' = y^{IV} = 0$

en vul in $\quad 2ax + 2b + 2a \equiv x \quad a = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{2}$

Algemene oplossing

$$y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \lambda e^{-x} + \mu x e^{-x} + \tau e^{x}\cos x + \mu e^{x}\sin x.$$

2. We passen het criterium van d'Alembert toe op de reeks van absolute waarden $\Sigma\, |u_n|$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \left|\frac{\log\,(n+1)^{-2}}{\log n^{-2}}\right|$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \frac{\log\,(n+1)}{\log n} = |x| \cdot 1 \cdot 1 = |x|$$

zodat $\quad \Sigma\, u_n$ convergeert voor $|x| < 1$
divergeert voor $|x| > 1$

Rand $\quad |x| = 1$

We onderzoeken de convergentie van

$$\Sigma\, |u_n| = \Sigma \left|\frac{1}{n^2} \log \frac{1}{n^2}\right|$$

$$|u_n| = \left|\frac{1}{n^2}\log\frac{1}{n^2}\right| = \frac{2\log n}{n^2} < \frac{2\sqrt{n}}{n^2} = \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$$

De reeks $\quad 2\,\Sigma\, n^{-\frac{3}{2}}$ convergeert dus

$\Sigma\, u_n$ convergeert (absoluut) voor $|x| \leq 1$
divergeert voor $|x| > 1$.

3. Oplossing I

$$I = \int_0^{\pi/3} \frac{1-\sin x+\cos x}{(1-\sin x)^2}\,dx = \int_0^{\pi/3}\frac{dx}{1-\sin x} + \int_0^{\pi/3}\frac{\cos x\,dx}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \int_0^{\pi/3}\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx + \int_{x=0}^{x=\pi/3}\frac{d\sin x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \int_0^{\pi/3}\frac{dx}{\cos^2 x} - \int_{x=0}^{x=\pi/3}\frac{d\cos x}{\cos^2 x} - \int_{x=0}^{x=\pi/3}\frac{d(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \left[\tan x + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{1-\sin x}\right]_{x=0}^{x=\pi/3} = \sqrt{3}+4+2\sqrt{3} = 4+3\sqrt{3}$$

Oplossing II

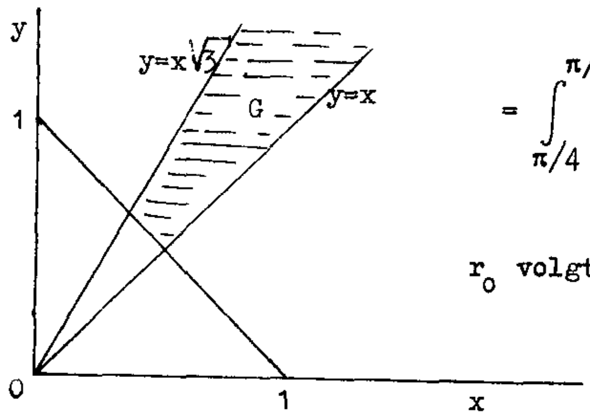
Stel $\quad \tan\frac{1}{2}x = t$

$$I = \int_0^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{1-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{(1-t)^4}{(1+t^2)^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = 4\int_0^{\frac{1}{3}\sqrt{3}}\frac{dt}{(1-t)^3}$$

$$= -4 \int_{t=0}^{t=\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{d(1-t)}{(1-t)^3} = \frac{2}{(1-\frac{1}{3}\sqrt{3})^2} - 2 = 4 + 3\sqrt{3}$$

4.

$$O = \iint_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$



$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_{r=r_0}^{r=\infty} \frac{r\,dr}{r^4}$$

r_0 volgt uit $x + y = 1$

$$r(\cos\varphi + \sin\varphi) = 1$$

$$O = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}}^{\infty} r^{-3}dr = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tfrac{1}{2}(1+2\cos\varphi\sin\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{12} + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin\varphi\, d\sin\varphi = \frac{\pi}{24} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\ .$$

5. a) Zij $P = (p_1, p_2, p_3)$ de pool van V t.o.v. B. Dan moeten de vergelijkingen $p_1x + p_2y + p_3z = 2$ en $1x + 0y + 0z = 1$ afhankelijk zijn, zodat $P = (2,0,0)$.

b) Oplossing <u>met</u> gebruikmaking van a):

$$T = (2,0,0)\ ;\quad \text{richtkromme } K \cdot \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

Beschrijvende $\underline{x} = (2,0,0) + \lambda(u,v,w)$ gaat door K als

$$\left.\begin{array}{l}\lambda u = -1 \\ \lambda^2(v^2 + w^2) = 1\end{array}\right\} u^2 = v^2 + w^2 \rightarrow (x-2)^2 = y^2 + z^2$$

Kegel: $(x-2)^2 - y^2 - z^2 = 0$

Oplossing <u>zonder</u> gebruik van a):

Beschrijvende: $\underline{x} = (2,0,0) + \lambda(u,v,w)$

Snijpunten met B: $(2 + \lambda u)^2 + \lambda^2 v^2 + \lambda^2 w^2 = 2$

Raakvoorwaarde: discriminant nul, dus

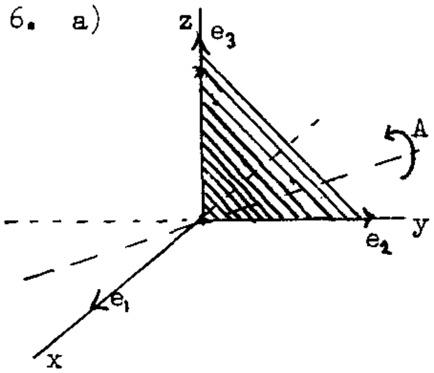
$$(4u)^2 - 4 \cdot 2(u^2 + v^2 + w^2) = 0 \Rightarrow u^2 = v^2 + w^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = y^2 + z^2.$$

c) Zo te zien : $\frac{\pi}{4}$

Of met $\cos\varphi = \frac{(a \cdot b)}{|a| \cdot |b|}$

6. a)



$$\left.\begin{array}{l} A e_1 = -e_2 \\ A e_2 = -e_1 \\ A e_3 = -e_3 \end{array}\right\} A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} B e_1 = -e_1 \\ B e_2 = e_2 \\ B e_3 = e_3 \end{array}\right\} B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} ABe_1 = e_2 \\ ABe_2 = -e_1 \\ ABe_3 = -e_3 \text{ (eigenvector)} \end{array} \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Los op dat $|AB - \lambda| = 0.$ $\rightarrow$ $(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$ $\quad \lambda = -1$
Het stelsel $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ heeft als oplossing $\rho(0,0,1)$.

7. a) $A \rightarrow C$; Want $\lim_{n \to \infty} n^2 u_n = 0$ $\rightarrow$ $|u_n| < \frac{1}{n^2}$ voor $n > N_0$

$\rightarrow$ $\Sigma\, u_n$ absoluut convergent, $\rightarrow$ $\Sigma\, u_n$ convergent.

b) C volgt niet uit B; want de harmonische reeks voldoet aan B en toch niet aan C.

c) A volgt niet uit C; want de reeks $\Sigma \frac{(-1)^n}{n}$ voldoet aan C en toch niet aan A.

d) B volgt niet uit C; want de reeks $\Sigma \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ voldoet aan C en toch niet aan B.

Herkansingsexamen Wiskunde I/II op dinsdag 23 juni 1964.

1. z stelt een complex getal voor. Bepaal de modulus van $e^{(e^{z})}$.

2. $z = x^3 + y^3$. Door de betrekkingen $u = x + y$ en $v = x \cdot y$ is z een functie van u en v.

   Bereken $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ uitgedrukt in u en v.

3. Los op:
$$\begin{aligned} 3x - 3y + 2z &= 3 \\ 2x - 2y + 3z &= 7 \\ 9x - 9y + z &= -6. \end{aligned}$$

4. Gegeven: $f(x) = e^{-|x|} + a|x|$

   f(x) is differentieerbaar voor alle x.
   Gevraagd: Bepaal a en de afgeleide in het punt x = 0.

5. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking
$$y''' - 2y'' + y' = 2e^{\frac{1}{2}x}.$$

6. Gegeven is dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert.
   Bereken:
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log(1 + a_n) - \sin a_n}{a_n^2}.$$

7. De lineaire afbeelding A van R_3 is de projectie van alle punten van R_3 op het vlak $x - 2y = 0$. Stel de matrix van de afbeelding A op en bereken de eigenwaarden en eigenvectoren.

8. Bereken $\int_0^1 \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{(x+1)(x-\sqrt{x})}\,dx.$

9. Bereken de oppervlakte van dat deel van de kegel $z^2 = x^2 + y^2$ dat gelegen is in het eerste octant en waarvoor geldt

$$1 - x \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}.$$

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1964.

1. Stel $e^z = w$ $\qquad |e^w| = e^{\mathrm{Re}(w)}$

Nu is $\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}(e^z) = \mathrm{Re}(e^x \cdot e^{iy})$

$$= \mathrm{Re}\{e^x \cdot (\cos y + i \sin y)\} = e^x \cos y$$

zodat $|e^{(e^z)}| = e^{(e^x \cos y)}$

2. Uit gegeven
$$\begin{aligned} u &= x + y \quad &(\alpha) \\ v &= xy \quad &(\beta) \\ z &= x^3 + y^3 \quad &(\gamma) \end{aligned}$$
volgt: $z = z\{x(u,v),\ y(u,v)\}$

zodat $z_u = z_x\, x_u + z_y\, y_u$

en

$$(*) \qquad z_{uu} = (z_{xx} x_u + z_{xy} y_u) x_u + z_x x_{uu} + (z_{yx} x_u + z_{yy} y_u) y_u + z_y y_{uu}$$

de hierin voorkomende x_u, x_{uu}, y_u, y_{uu} kunnen we vinden door (α) en (β) tweemaal impliciet te differentiëren naar u

$$\left.\begin{aligned} (\alpha_u):&\quad 1 = x_u + y_u \\ (\beta_u):&\quad 0 = x_u y + x y_u \end{aligned}\right\} \rightarrow \; x_u = \frac{x}{x-y} \qquad y_u = \frac{-y}{x-y}$$

$$\left.\begin{aligned} (\alpha_{uu}):&\quad 0 = x_{uu} + y_{uu} \\ (\beta_{uu}):&\quad 0 = x_{uu} y + 2x_u y_u + x y_{uu} \end{aligned}\right\} \rightarrow \; x_{uu} = \frac{-2xy}{(x-y)^3} = -y_{uu}$$

Uit (γ) volgt

$$z_x = 3x^2; \quad z_y = 3y^2; \quad z_{xx} = 6x; \quad z_{yy} = 6y \text{ en } z_{xy} = 0 = z_{yx}$$

Deze resultaten invullen in ($_*$) geeft:

$$z_{uu} = \frac{1}{(x-y)^2}(6x^3 + 6y^3) + \frac{1}{(x-y)^3}(-6x^3 y + 6xy^3)$$

$$= 6(x+y) = 6u.$$

Oplossing II

$$z = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)\{(x+y)^2 - 3xy\}$$

$$= u(u^2 - 3v) = u^3 - 3uv$$

zodat $\quad z_u = 3u^2 - 3v$

$\quad\quad z_{uu} = 6u$

3. Ga vegen met rijen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 7 \\ 9 & -9 & 1 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -15 & 15 & 0 & 15 \\ -25 & 25 & 0 & 25 \\ 9 & -9 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & -9 & 1 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Oplossing: $z = 3 \quad x = \lambda \quad y = 1 + \lambda$

$\lambda(1,1,0) + (0,1,3)$

Opmerking: Controleer of $(0,1,3)$ voldoet

Controleer of $(1,1,0)$ voldoet aan het homogene stelsel.

4. Speciaal geldt dat $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ bestaat (en $= f'(0)$)

d.w.z. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{-|h|} + a|h| - 1}{h}$ bestaat

dus moet $\lim\limits_{h \uparrow 0} \dfrac{e^{h} - ah - 1}{h} = \lim\limits_{h \downarrow 0} \dfrac{e^{-h} + ah - 1}{h}$

Uit $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{h}-1}{h} = 1 = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-e^{-h}+1}{h}$ volgt, dat dan ook

$$1 - a = -1 + a$$
$$a = 1$$

Conclusie:

Uit de differentieerbaarheid van f in $x = 0$ volgt dat $a = 1$ en $f'(0) = 0$.

5. Probeer als oplossing voor de homogene vergelijking: $y = e^{tx}$.

Dan moet $t^3 - 2t^2 + t = t(t-1)^2 = 0$

$t_1 = 0 \quad t_2 = t_3 = 1$

$y_{hom} = \lambda + \mu e^x + \tau xe^x$

Probeer als particuliere oplossing: $y = 8ae^{\frac{1}{2}x}$

$$y' = 4ae^{\frac{1}{2}x} \; ; \quad y'' = 2ae^{\frac{1}{2}x} \; ; \quad y''' = ae^{\frac{1}{2}x}$$

Dan volgt $a - 4a + 4a = 2$ en is $y_{part} = 16e^{\frac{1}{2}x}$

Alg. opl.: $y = \lambda + \mu e^x + \tau xe^x + 16e^{\frac{1}{2}x}$.

6. Opgave wijzigen. Toevoegen $a_n > 0$

Oplossing:

Uit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv volgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

en geldt voor $n > N$ dat $|a_n| < 1$ zodat we reeksontwikkeling kunnen toepassen.

$$\log(1+a_n) - \sin a_n = \left(a_n - \frac{a_n^2}{2} + \ldots\right) - \left(a_n - \frac{a_n^3}{3!} + \ldots\right)$$

$$= -\frac{a_n^2}{2} + \text{termen van hogere orde.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+a_n) - \sin a_n}{a_n^2} = -\frac{1}{2}$$

7. Uit meetkundige overweging volgt:

$$A(1,0,0) = (\tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}, 0)$$

$$A(0,1,0) = (\tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{5}, 0)$$

$$A(0,0,1) = (0, 0, 1)$$

of uit vegen met

$$A(2\ 1\ 0) = (2,1,0)$$
$$A(1,-2,0) = (0,0,0)$$
$$A(0,0,1) = (0,0,1)$$

zodat $$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Tevens volgt uit de gegeven projectie dat $x - 2y = 0$ een vlak is van eigenvectoren bij eigenwaarde 1, en ook dat $\lambda(1,-2,0)$ eigenvector is bij eigenwaarde 0.
(Natuurlijk vindt men ook dit resultaat door de karakteristieke vergelijking det $(A - \lambda) = 0$ en daarna $Ax = \lambda x$ op te lossen).

8. $$f(x) = \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{(x+1)(x-\sqrt{x})} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x+1} = 1 + \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = g(x)$$

voor $x \neq 0$ en $x \neq 1$

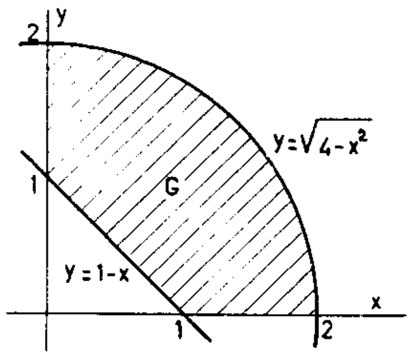
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = 1 + 2\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$$

Stel $\sqrt{x} = t$

$$= 1 + 4\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = 1 + 4\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt$$

$$= 1 + \Big[4t - 4\arctan t\Big]_0^1 = 5 - \pi$$

9. Kegel: $z^2 = x^2 + y^2 = r^2$ dus $z = r$



$$\sigma = \iint_G \sqrt{1+z_r^2}\; r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{r(\varphi)}^{2} \sqrt{2}\; r\,dr$$

De ondergrens $r(\varphi)$ volgt uit $y = 1-x$ of $r\cos\varphi = 1 - r\sin\varphi$

$$r(\varphi) = \frac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\left[4 - \frac{1}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^2}\right]d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\left[\int_0^{\pi/2} 4\,d\varphi - \int_0^{\pi/2}\frac{1}{(1+\tan\varphi)^2}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\right] \qquad (\tan\varphi = t)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\left[2\pi - \int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t)^2}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left[2\pi + \frac{1}{1+t}\Big|_0^{N\to\infty}\right] = \sqrt{2}(\pi - \tfrac{1}{2}).$$

Examen (tentamen) Wiskunde II op dinsdag 5 januari 1965.

1. a) Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y^{(3)} - y'' + 2y = e^{x} + e^{-x}.$$

   b) Ga na of deze differentiaalvergelijking oplossingen $y(x)$ bezit die begrensd zijn als $x \to -\infty$.

2. Schets in het complexe z-vlak het convergentiegebied van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n(z^2 - |z|^{-2})}}{n^3 \log(1 + \frac{1}{n})} .$$

3. Bereken $\int_{-1}^{2} \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}\, dx.$

4. Bepaal de inhoud van het gebied in R_3 dat is gegeven door

$$x^2 + y^2 \leqslant 4 - z \leqslant 2x.$$

5. Zij in R_2 een vector $\underline{a}$ gegeven.
Men beschouwt de afbeelding A van R_2 in R_2 die is gegeven door:

$$A\underline{x} = \underline{x} + \underline{a} \,.\, D(\underline{x}, \underline{a}).$$

Hierin stelt $D(\underline{x}, \underline{a})$ de determinant van de vectoren $\underline{x}$ en $\underline{a}$ voor.

a) Bewijs dat A lineair is.

b) Bewijs dat de nulruimte van A de dimensie 0 heeft.

c) Toon aan dat A regulier is.

d) Laat zien dat voor de inverse afbeelding A^{-1} geldt:

$$A^{-1}\underline{x} = \underline{x} - \underline{a} \,.\, D(\underline{x}, \underline{a}).$$

e) Toon aan dat 1 de enige eigenwaarde van A is, en bepaal de bijbehorende eigenvectoren (onderscheid nu de gevallen $\underline{a} = \underline{0}$ en $\underline{a} \neq \underline{0}$).

Oplossingen Tentamen januari 1965.

1. a) We bepalen de oplossing van de homogene vergelijking:

$$y''' - y'' + 2y = 0$$

De karakteristieke vergelijking

$$p^3 - p^2 + 2 = (p + 1)(p^2 - 2p + 2) = 0$$

heeft als wortels $p_1 = -1$; $p_2 = 1 + i$; $p_3 = 1 - i$ zodat

$$y_{hom} = \lambda e^{-x} + (\rho e^{ix} + \tau e^{-ix})e^x \qquad \lambda, \rho, \tau \text{ complex.}$$

Reële oplossing:

$$y_{hom} = \lambda e^{-x} + \mu e^x \cos x + \sigma e^x \sin x \quad \lambda, \sigma, \mu \text{ reëel .}$$

Daar e^{-x} oplossing is van de homogene vergelijking proberen we als particuliere oplossing

$$y = axe^{-x} + be^x$$

We substitueren

$$\begin{aligned} y' &= (a - ax)e^{-x} + be^x \\ y'' &= (-2a + ax)e^{-x} + be^x \\ y''' &= (3a - ax)e^{-x} + be^x \end{aligned}$$

in de vergelijking .

Dit geeft: $5ae^{-x} + 2be^{x} = e^{x} + e^{-x}$

$$a = \frac{1}{5} \quad b = \frac{1}{2}$$

Algemene reële oplossing:

$$y(x) = \frac{1}{5}xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{x} + \lambda e^{-x} + \mu e^{x}\cos x + \sigma e^{x}\sin x$$

$(\lambda, \mu, \sigma$ reëel)

1. b) Als $x \to -\infty$ dan $(\frac{1}{2}e^{x} + \mu e^{x}\cos x + \sigma e^{x}\sin x) \to 0$

maar $(\frac{1}{2}xe^{-x} + \lambda e^{-x}) \to -\infty$ voor elke λ.

Er zijn geen oplossingen die begrensd zijn voor $x \to -\infty$.

2. Zij $$\Sigma\, u_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n(z^2-|z|^{-2})}}{n^3 \log\,(1+\frac{1}{n})} \qquad (z \neq 0)$$

Pas op $\Sigma\,|u_n(z)|$ het criterium van d'Alembert toe

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \left|e^{z^2-|z|^{-2}}\right| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\log\,(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\log\,(1+\frac{1}{n+1})}$$

$$= \left|e^{z^2-|z|^{-2}}\right| \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$= e^{\mathrm{Re}\{z^2-|z|^{-2}\}} \qquad (\alpha)$$

Stel $z = x + iy$ dan $z^2 - |z|^{-2} = x^2 - y^2 - (x^2+y^2)^{-1} + 2ixy$

zodat (α) overgaat in:

$$= e^{\dfrac{x^4 - y^4 - 1}{x^2 + y^2}}$$

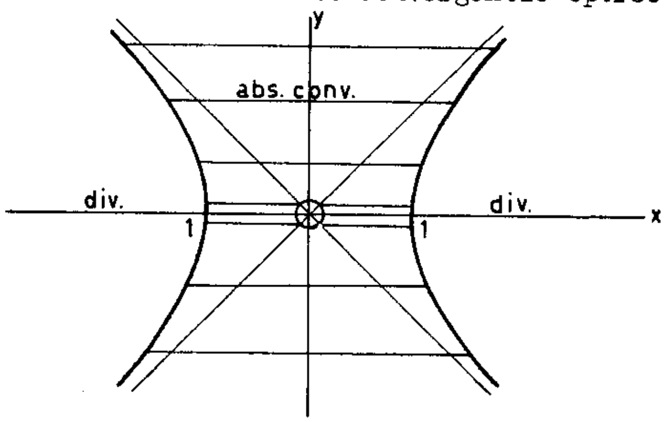
Convergentie voor $x^4 - y^4 < 1$ met uitzondering van $(x,y) = (0,0)$.
Divergentie voor $x^4 - y^4 > 1$

Rand $x^4 - y^4 = 1$? dit is $\mathrm{Re}(z^2 - |z|^{-2}) = 0$
dan te onderzoeken:

$$\Sigma\, u_n(z) = \Sigma\, \frac{1}{n^3 \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \qquad \text{(pos. termen)}$$

Nu is $$\frac{1}{n^3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \,..\right)} = \frac{1}{n^2\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}\,..\right)} < \frac{1}{n^2\left(1 - \frac{1}{2n}\right)} \leqslant \frac{2}{n^2}$$

zodat op de rand zelfs absolute convergentie optreedt.



3. $$\int_{-1}^{2} \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}\, dx = I$$

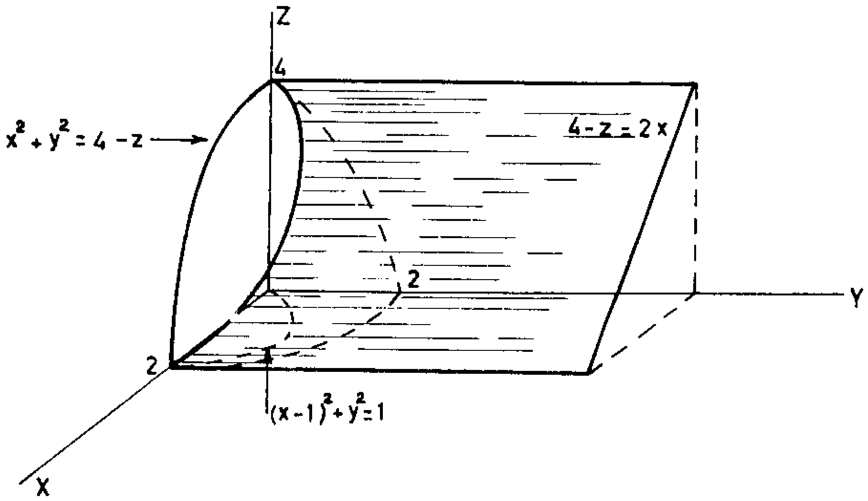
Stel $t = \sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}$ dan is $x = \dfrac{2t^2 - 1}{t^2 + 1}$ en $dx = \dfrac{6t}{(t^2+1)^2}\, dt$

$$I = \lim_{N\to\infty} 6 \int_0^N \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\, dt$$

$$= \lim_{N\to\infty} 3 \int_0^N t\, \frac{2t}{(t^2+1)^2}\, dt = \lim_{N\to\infty} -3 \int_0^N t \cdot d\, \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[-3 \quad \frac{t}{1+t^2} - \arctan t \, \Big|_o^N \right] = \frac{3\pi}{2} .$$

4.



Gevraagd de inhoud te berekenen van het kapje I dat door het vlak $4 - z = 2x$ wordt afgesneden van de ellipt. paraboloïde. (Getekend in 1° octant).

Eliminatie van z uit $\begin{cases} 4 - z = 2x & (\alpha) \\ x^2 + y^2 = 4 - z & (\beta) \end{cases}$

geeft de projectie op het XOY-vlak van de doorsnijding van (α) en (β):

$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \quad \text{of} \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$$

of $\quad r(r - 2\cos\varphi) = 0$ in poolcoördinaten

$$I = 2\int_o^{\pi/2} d\varphi \int_o^{2\cos\varphi} r dr \int_{4-2r\cos\varphi}^{4-r^2} dz$$

$$= 2\int_o^{\pi/2} d\varphi \int_o^{2\cos\varphi} (2r\cos\varphi - r^2) r dr$$

$$= 2\int_o^{\pi/2} \left[\frac{2}{3} r^3 \cos\varphi - \frac{1}{4} r^4\right]_o^{2\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{8}{3}\int_o^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{8}{3} \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdot \pi/2 = \frac{\pi}{2}$$

5. a) A is lineair want

$$A(\underline{x}+\underline{y}) = (\underline{x}+\underline{y}) + \underline{a}\,D(\underline{x}+\underline{y}, \underline{a})$$
$$= \underline{x}+\underline{y} + \underline{a}\{D(\underline{x}, \underline{a}) + D(\underline{y}, \underline{a})\} = \underline{x}+\underline{a}\,D(\underline{x},\underline{a}) + \underline{y}+\underline{a}\,D(\underline{y},\underline{a})$$
$$= A\underline{x} + A\underline{y}$$

$$A(\lambda\underline{x}) = \lambda\underline{x} + \underline{a}\,D(\lambda\underline{x}, \underline{a}) = \lambda(\underline{x}+\underline{a}\,D(\underline{x},\underline{a})) = \lambda A\underline{x}$$

b) Als $\underline{x} \in N$(ulruimte) dan moet $A\underline{x} = \underline{0}$

of $\underline{x} = -D(\underline{x}, \underline{a})\underline{a}$ dus moet $\underline{x} = \lambda\underline{a}$

$\lambda\underline{a} = -\lambda\,D(\underline{a},\underline{a})\,\underline{a} = \underline{0}$ $(D(\underline{a},\underline{a}) = 0)$

Alleen $\underline{x} = \lambda\underline{a} = \underline{0}$ voldoet.

c) 2 = dim (nulruimte) + dim (beeldruimte) = 0 + 2

dim (beeldruimte) = 2 dus A regulier.

d) Geldt $A(\underline{x} - \underline{a}\,D(\underline{x},\underline{a})) = \underline{x}$?

Dit is $= A\underline{x} - D(\underline{x},\underline{a})\,A\underline{a}$

$= \underline{x} + D(\underline{x},\underline{a}) \cdot \underline{a} - D(\underline{x},\underline{a})\,\{\underline{a} + \underline{a}\,D(\underline{a},\underline{a})\}$

$= \underline{x}$ wegens $D(\underline{a},\underline{a}) = 0$

e) $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$; $\underline{x} + \underline{a}\,D(\underline{x},\underline{a}) = \lambda\underline{x}$

$D(\underline{x},\underline{a})\,\underline{a} = (\lambda - 1)\underline{x}$

Zij $\lambda \neq 1$ dan is weer als in b) $\underline{x}$ een veelvoud van $\underline{a}$,

dus $D(\underline{x}, \underline{a}) = 0$ en $\underline{0} = (\lambda - 1)\underline{x} \rightarrow \underline{x} = \underline{0}$

Van een eigenvector $\underline{x}$ eisen we $\underline{x} \neq \underline{0}$.

Noodzakelijk is $\lambda = 1$ en dus

$$D(\underline{x},\underline{a})\,\underline{a} = (\lambda - 1)\underline{x} = \underline{0}$$

Is $\underline{a} = \underline{0}$ dan geldt voor elke $\underline{x} \in R_2$

$$D(\underline{x}, \underline{0})\underline{0} = \underline{0}$$

dus A is de identieke afbeelding.

Is $\underline{a} \neq \underline{0}$ dan voldoet elke x waarvoor $D(\underline{x},\underline{a}) = 0$

dit is $\underline{x} = \rho\,\underline{a}$

Herkansingstentamen Wiskunde I,II op maandag 18 januari 1965.

1. Bepaal de afgeleide van

$$y = x^{\log \frac{1}{x}} \qquad (x > 0).$$

2. Los op: $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ (z complex)

3. Bepaal a zodanig, dat het volgende stelsel oplosbaar is en bepaal in dat geval de oplossing

$$\begin{aligned} x - 2y + \quad\quad z &= 3 \\ 2x - 3y + (2+a)z &= 6+a \\ -x + (2+a)y \quad\quad &= 2a-4. \end{aligned}$$

4. Gegeven

$$z = f(x,y)$$
$$x = u + v$$
$$y = u^2 + v^2.$$

Druk $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ uit in x en y en de eerste en tweede afgeleiden van z naar x en y.

5. Voor welke reële waarden van x convergeert de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! + n^n} .$$

6. Bereken: $\int_0^4 \sqrt{\frac{x}{4-x}} \, \frac{dx}{x}$.

7. Bepaal de massa van het lichaam, gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \\ x^2 + y^2 > z^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

als de massadichtheid in het punt (x,y,z) gelijk is aan $(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$.

8. B is een lineaire afbeelding van R_3 in R_3, α is een vast getal.
De lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is gegeven door

$$A\underline{x} = B\underline{x} + \alpha\underline{x}.$$

Bewijs dat A dezelfde eigenvectoren heeft als B.

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1965.

1. Schrijf y als een e-macht $(x > 0!)$ en pas daarna de kettingregel toe.

$$\therefore \quad y = e^{-\log^2 x}$$

$$y' = e^{-\log^2 x} \cdot -2 \log x \cdot \frac{1}{x} \quad \text{of} \quad y' = -\frac{2}{x} \cdot e^{-\log^2 x} \cdot \log x.$$

2. Merk op dat $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$ een factor is van het product:

$$z^5 + 1 = (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)$$

De oplossingen van de gegeven vergelijking zijn dus de oplossingen van de binominaalvergelijking:

$$z^5 = -1 \quad \text{(met de voorwaarde } z \neq -1\text{)}.$$

Hieruit volgt dat

$$z_k = e^{\frac{i\pi + 2k\pi i}{5}}$$

voor k = 1,2,3,4 de gevraagde oplossingen zijn. $(-1 = e^{i\pi})$

3. Schrijf het stelsel in matrixvorm en ga "vegen".

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & a+2 & a+6 \\ -1 & a+2 & 0 & 2a-4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & a & 1 & 2a-1 \end{array}\right)$$

Voor a = 1 is dit stelsel equivalent met:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Voor a = 1 luidt dus de oplossing:

$$\underline{x} = (2,0,1) + \lambda(3,1,-1).$$

Met $a \neq 1$ kan als volgt verder geveegd worden:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & a & 1 & 2a-1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \end{array}\right) \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Hieruit blijkt dat het stelsel voor a = -1 vals is
Indien $|a| \neq 1$, dan vereenvoudigt men verder:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 0 & 0 & 6a+4 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 \\ 0 & a+1 & 0 & 2a \end{array}\right)$$

Voor $|a| \neq 1$ wordt de oplossing:

$$\underline{x} = \left(\frac{6a+4}{a+1}, \quad \frac{2a}{a+1}, \quad \frac{a-1}{a+1}\right)$$

<u>Samenvatting</u>:

$a = 1 \quad : \quad \underline{x} = (2,0,1) + \lambda(3,1,-1)$

$a = -1 \quad : \quad$ stelsel vals

$|a| \neq 1 \quad : \quad \underline{x} = \left(\frac{6a+4}{a+1}, \quad \frac{2a}{a+1}, \quad \frac{a-1}{a+1}\right)$.

4. Beschouw z als een functie van x en y, en x en y als functies van u en v. Uit de gegevens volgt:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v} = 1 \; , \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2u \; , \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 2v \; .$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

worden nu als volgt berekend:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot 2v$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot 1 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} \cdot 2u + 2v \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot 1 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot 2u \right\}$$

Onder de aanname: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ kan deze vorm nog vereenvoudigd worden tot

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2(u+v) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4uv \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \; .$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2(x^2 - y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

5. Pas het convergentiekenmerk van Cauchy toe; hieruit volgt de convergentie voor alle reële waarden van x, want:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{1}{\sqrt[n]{n!+n^n}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n} = 0.$$

6. De integraal is oneigenlijk, want de integrand is niet gedefinieerd voor x = 0,4. Hieruit volgt:

$$\int_0^4 \sqrt{\frac{x}{4-x}}\,\frac{dx}{x} = \lim_{a\downarrow 0}\lim_{b\uparrow 4} \int_a^b \frac{d\,\frac{x-2}{2}}{\sqrt{1-(\frac{x-2}{2})^2}}$$

$$= \lim_{a\downarrow 0}\lim_{b\uparrow 4} \left\{\arcsin\frac{b-2}{2} - \arcsin\frac{a-2}{2}\right\}$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi .$$

7. De totale massa M is gelijk aan de getalswaarde van de volgende integraal:

$$I = \iiint_G \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz$$

$$G: \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 \leqslant 2 \\ x^2+y^2 > z^2 \\ z \geqslant 0 \end{array}$$

($x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Kegel met top in O; hier gebied buiten kegel)

Bij de berekening beperken we ons tot dat deel van G dat ligt in het eerste octant. Dit kan, daar het integratiegebied en de integrand invariant zijn t.a.v. de verwisseling: $x \leftrightarrow -x$ (en $y \leftrightarrow -y$).

Bovendien transformeren we I op bolcoördinaten.

$$(x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \; ; \quad dxdydz \rightarrow r^2 \sin\psi \, d\psi \, d\varphi \, dr).$$

$$\therefore \qquad I = 4 \iiint_{G'} \frac{1}{r} \cdot r^2 \sin\psi \, d\psi \, d\varphi \, dr$$

$$G' : \quad 0 \leqslant r \leqslant 2$$
$$\frac{\pi}{4} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} .$$

$$\therefore \qquad I = 4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\psi \, d\psi \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 r dr = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = 2\pi\sqrt{2}.$$

Hieruit volgt: $M = 2\pi\sqrt{2}$.

8. We bewijzen eerst dat elke eigenvector $\underline{b}$ van B met eigenwaarde λ_b ook een eigenvector van A is. De bijbehorende eigenwaarde is nu echter: $\lambda_b + \alpha$. Dit volgt direct uit:

$$A\underline{b} = B\underline{b} + \alpha\underline{b} = \lambda_b\underline{b} + \alpha\underline{b} = (\lambda_b + \alpha)\underline{b}$$

Op analoge wijze is in te zien, dat elke eigenvector $\underline{a}$ van A met eigenwaarde λ_a, ook een eigenvector van B (echter met eigenwaarde $\lambda_a - \alpha$) moet zijn.
Hiermede is bewezen, dat A dezelfde eigenvectoren heeft als B.

Proeftentamen Wiskunde II op zaterdag 13 maart 1965.

1. Los op, voor alle reële waarden van p, de volgende differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten:

$$y'' - py' + (p-1)y = e^{3x}.$$

2. a) Bepaal het gebied in het complexe vlak waar de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{n} (1+z)^n$$

convergeert.

b) Bepaal

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1-x^3)^{-\frac{1}{5}} - \arctan x - \frac{1}{3}x^3}{1 - \cosh x^2}$$

3. Men wil log 3 benaderen met behulp van de reeksontwikkeling voor $\log \frac{1+x}{1-x}$ rond $x = 0$.
Met hoeveel termen kan men volstaan opdat de fout kleiner is dan 2.10^{-4} ?

4. Geef van elk van de volgende uitspraken aan of hij al dan niet juist is en motiveer uw antwoord.

a) Als een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ absoluut convergeert, is $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$.

b) Zij S_n de n^e partiële som van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
Als $\lim_{n\to\infty} (S_{n+10} - S_n) = 1$, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ divergent.

c) Als de partiële sommen van een reeks begrensd zijn, is die reeks convergent.

d) Als voor een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ met positieve termen voor oneindig veel waarden van n geldt dat $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, is die reeks divergent.

Oplossingen Proeftentamen maart 1965.

1. a) Karakteristieke vergelijking van de homogene differentiaalvergelijking:

$$t^2 - pt + (p-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1, \quad t_2 = p-1$$

Dus oplossing van de homogene vergelijking:

$$y = \lambda e^x + \mu e^{(p-1)x} \qquad (p \neq 2)$$

$$y = \lambda e^x + \mu x e^x \qquad (p = 2)$$

b) Een particuliere oplossing van de niet homogene dv:
Twee gevallen: $p \neq 4$, $p = 4$.

$\underline{p \neq 4}$:

Stel $y = Ae^{3x}$ $\quad y' = 3Ae^{3x}$, $\quad y'' = 9Ae^{3x}$

Derhalve $A(9 - 3p + p - 1)e^{3x} = e^{3x} \Rightarrow A = \frac{1}{8-2p}$

$\underline{p = 4}$:

Stel $y = Bxe^{3x}$ $\quad y' = B(3x+1)e^{3x}$, $\quad y'' = B(9x+6)e^{3x}$

Dus $B(9x + 6 - 12x - 4 + 3x)e^{3x} = e^{3x} \Rightarrow B = \frac{1}{2}$.

De algemene oplossing luidt dus

$$\left.\begin{array}{ll} p = 2: & y = \lambda e^{x} + \mu x e^{x} + \frac{1}{4} e^{3x} \\ p = 4: & y = \lambda e^{x} + \mu e^{3x} + \frac{1}{2} x e^{3x} \\ p \neq 2,4: & y = \lambda e^{x} + \mu e^{(p-1)x} + \frac{1}{8-2p} e^{3x} \end{array}\right\} \quad \lambda,\ \mu \text{ complex}$$

2. a) De algemene term laat zich omvormen tot

$$|u_n| = \frac{n - (n-1)}{n(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} (1+z)^n = \frac{1}{n(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} (1+z)^n$$

Absolute convergentie wordt onderzocht met d'Alembert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|1+z|^{n+1}}{(n+1)(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \frac{n(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{|1+z|^n} = |1+z|$$

$|1+z| < 1$: absolute convergentie

$|1+z| > 1$: divergentie, omdat de algemene term $\not\to 0$

$|1+z| = 1$: moet apart worden bekeken:

Nu is echter

$$|u_n| = \frac{1}{n(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ is een convergente reeks, dus $\sum\limits_{1}^{\infty} |u_n|$ eveneens .

Resultaat: Absolute convergentie voor $|1+z| \leq 1$

(cirkel om $z = -1$, straal 1, rand inbegrepen)

b) Enkele van de optredende reeksen:

$$(1-x^3)^{-\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{x^6}{2} + \ldots$$

$$\cosh x^2 = 1 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + \ldots$$

Dus
$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1+\frac{1}{5}x^3 + \ldots) - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \ldots - \frac{1}{3}x^3}{1 - 1 - \frac{1}{2}x^4 - \ldots} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{5}x^4 + \ldots}{-\frac{1}{2}x^4 - \ldots} = -\frac{2}{5} .$$

3.

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots \qquad (|x| < 1)$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \ldots \qquad (|x| < 1)$$

aftrekken

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 + \ldots \qquad (|x| < 1)$$

Vul in: $x = \frac{1}{2}$, dan is $\frac{1+x}{1-x} = 3$

$$\log 3 = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^6} + \ldots$$

Afbreken na de n-de term (controleren!!) levert als fout:

$$\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{2n+5} \cdot \frac{1}{2^{2n+4}} + \ldots$$

afschatten met meetkundige reeks

$$|\text{fout}| \leq \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \circ \frac{1}{2n+1}$$

Het rechterlid is kleiner dan $2 \cdot 10^{-4}$, als

$$3 \circ 2^{2n-1}\,(2n+1) > 10^4$$

Voor n = 4 staat er links $27 \cdot 2^7 < 10^4$

Voor n = 5 daarentegen $33 \cdot 2^9 > 10^4$

Dus 5 termen zijn zeker voldoende.

Opmerking: Controleer dat 4 termen niet alleen bij de schatting van de meetkundige reeks, maar ook bij die van de oorspronkelijke reeks een te grote fout opleveren.

4. a) De uitspraak is niet juist.

Immers $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergeert absoluut, maar $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

b) De uitspraak is juist:

Zou $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ convergeren, dan bestond $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

Tevens zou dan $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+10} = S$, dus $\lim\limits_{n\to\infty} (S_{n+10} - S_n) = S - S = 0$,

in strijd met het gegeven.

c) Een veel gemaakte, maar onjuiste bewering.

De reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$

heeft een begrensde rij van partiële sommen (-1, 0) maar is niet convergent. Achtergrond: De termen zijn niet allemaal positief!

d) Ook deze bewering is niet juist. De reeks

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots \quad \left(u_{2k} = \frac{1}{2^k},\ u_{2k-1} = \frac{1}{3^k}\right)$$

is convergent met som

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

maar voor alle oneven rangnummers $n = 2k - 1$ geldt

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{2k}}{u_{2k-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^k > 1.$$

Examen (tentamen) Wiskunde II op dinsdag 15 juni 1965.

1. a) Bereken van de differentiaalvergelijking

$$y''' + y' = 2x$$

de oplossing $y = f(x)$, die voldoet aan

$$f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0, \quad f'(0) = 1.$$

b) Schets in het complexe vlak het convergentiegebied van de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2 z^2 + nz} \qquad (z = x + iy).$$

Onderzoek vooral ook het gedrag van de reeks op de rand.

---

2. Gegeven de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} \qquad (x \text{ is reëel})$$

a) Bepaal alle waarden van x, waarvoor de reeks convergeert.
b) Bereken de som van de reeks voor alle waarden van x, waarvoor de reeks absoluut convergeert.

3. A en B zijn afbeeldingen van R_3 in zichzelf

$$A\underline{x} = \underline{x} \times \underline{a} \qquad \text{met } \underline{a} = (1,1,1).$$

B is de spiegeling t.o.v. het vlak $z = 0$.

a) Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.

b) Toon aan dat de matrix van A gelijk is aan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Bepaal de beeldruimte en de nulruimte van de afbeelding $C = BA$.
d) Bereken de eigenwaarden met bijbehorende eigenvectoren van C.

4. a) Bereken de oppervlakte van het gebied G in het XOY-vlak waarvoor geldt:

$$x \geq 0 \qquad x^2 + y^2 \leq 1$$
$$y \geq x \qquad y \leq 2x^2\sqrt{3}.$$

b) Bepaal op de boog van de cycloide, gegeven door

$$x = t - \sin t$$
$$y = 1 - \cos t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

het punt P, dat, langs de boog gemeten, een afstand 2 tot de oorsprong heeft.

Oplossingen Tentamen juni 1965.

1. a) Voor de homogene dv. substitueren we $y = e^{tx}$:

$$t^3 + t = 0 \Rightarrow t_1 = 0, \quad t_{2,3} = \pm i$$

Dus algemene oplossing:

$$y = \lambda + \mu e^{ix} + \nu e^{-ix}.$$

Of, meer vertrouwd:

$$y = \lambda + \alpha \cos x + \beta \sin x.$$

waarbij λ, α en β nog wel complex mogen zijn.

Direct zien we, dat $y = x^2$ aan de niet homogene dv. voldoet (anders stellen we $y = Ax^2 + Bx$).

Dus de oplossing

$$y = x^2 + \lambda + \alpha \cos x + \beta \sin x$$

moet aan de bijvoorwaarden worden aangepast:

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = \lambda + \alpha = 0 \\ y(\pi) = \pi^2 + \lambda - \alpha = 0 \\ y'(0) = \beta = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2}\pi^2 \\ \beta = 1 \\ \lambda = -\frac{1}{2}\pi^2 \end{array}\right.$$

Conclusie:

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\pi^2 \cos x + \sin x.$$

b) We passen d'Alembert toe

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|e^{(n+1)^2 z^2 + (n+1)z - n^2 z^2 - nz}\right| =$$

$$= \left|e^{(2n+1)z^2 + z}\right| = e^{(2n+1)(x^2 - y^2) + x}$$

Als $\quad x^2 - y^2 < 0$, dan $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$ dus absoluut convergent.

Als $\quad x^2 - y^2 > 0$, dan is $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to \infty \qquad (n \to \infty)$

dus $u_n \not\to 0$, divergent.

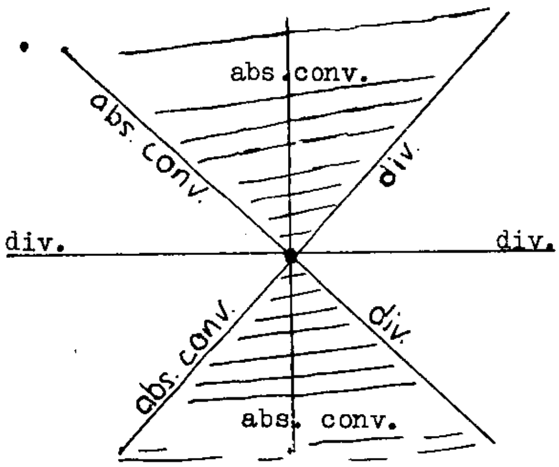
Als $\quad x^2 - y^2 = 0$ en $x > 0$, dan is $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = e^x > 1$

dus ook $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = e^x > 1 \Rightarrow$ divergent.

Als $\quad x^2 - y^2 = 0$ en $x < 0$, dan is $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = e^x < 1$

(absolute convergentie)

Tenslotte $x^2 - y^2 = 0$ en $x = 0$ (dus $x = y = 0$)
m.a.w. $u_n = 1$ (voor alle n) $\Rightarrow$ divergent



2. a) Met d'Alembert:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|^{3n+4}}{3n+4} \; \frac{3n+1}{|x|^{3n+1}} \underset{n\to\infty}{\to} |x|^3$$

dus: absoluut convergent als $|x| < 1$
divergent als $|x| > 1$.

De rand: $x = 1$: $\quad u_n = \frac{1}{3n+1} > \frac{1}{4n}$

dus $\Sigma\, u_n$ is divergent.

$x = -1 \quad u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$ alternerend, termen naderen monotoon tot nul dus convergent.

Het gebied van absolute convergentie is dus $-1 < x < 1$.

b) Stel. $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = S(x)$.

Termsgewijs differentiëren:

$$S'(x) = \sum_{0}^{\infty} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3}$$

Derhalve $S(x) - S(0) = \int_0^x S'(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^3}\,dt$.

Hierin is $S(0) = \sum_{0}^{\infty} \frac{0^{3n+1}}{3n+1} = 0$

Met breuksplitsing:

$$\frac{1}{1-t^3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-t} + \frac{1}{3}\,\frac{t+2}{t^2+t+1}$$

Dus $$\int \frac{1}{1-t^3}\,dt = -\frac{1}{3}\int\frac{d(1-t)}{1-t} + \frac{1}{6}\int\frac{(2t+1)+3}{(t^2+t+1)}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-t) + \frac{1}{6}\log(t^2+t+1) + \frac{1}{2}\int\frac{d(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-t) + \frac{1}{6}\log(t^2+t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Derhalve $$S(x) = \frac{1}{6}\log\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} -$$

$$-\left(\frac{1}{6}\log\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\log\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Opmerking: Uit dit voorbeeld blijkt, dat de bij het onbepaald integreren eventueel in te voeren constante niet altijd nul behoeft te zijn.

3. a) De afbeelding is lineair want:

(1) $$A(\underline{x} + \underline{y}) = (\underline{x} + \underline{y}) \times \underline{a} = \underline{x} \times \underline{a} + \underline{y} \times \underline{a} = A\underline{x} + A\underline{y}$$

(2) $$A(\lambda \underline{x}) = \lambda \underline{x} \times \underline{a} = \lambda(\underline{x} \times \underline{a}) = \lambda \cdot A\underline{x}.$$

b) De componenten van de vector $A\underline{x}$ zijn:

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

of $$x_2 - x_3, \quad x_3 - x_1, \quad x_1 - x_2.$$

Hieruit volgt de vorm van de matrix, nl.:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{want:} \quad \begin{aligned} y_1 &= \quad x_2 - x_3 \\ y_2 &= -x_1 \quad\quad + x_3 \\ y_3 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

c) Spiegelen t.o.v. xy-vlak ($z = 0$) betekent dat (x_1, x_2, x_3) overgaat in $(x_1, x_2, -x_3)$

De matrix van deze lineaire afbeelding B luidt dus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De matrix van de afbeelding $C = BA$ volgt hier uit door matrix-vermenigvuldiging:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Door vegen berekent men met behulp hiervan gemakkelijk de nulruimte nl.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De nulruimte bestaat dus uit de vectoren $\underline{x} = \mu(1,1,1)$.
Dit is ook zonder meer meetkundig in te zien daar
$A\lambda(1,1,1) = \lambda A(1,1,1) = \underline{0}$ en $B\underline{0} = \underline{0}$; dus $BA\lambda(1,1,1) = B\underline{0} = \underline{0}$

d) De eigenwaarden λ volgen uit de determinant:

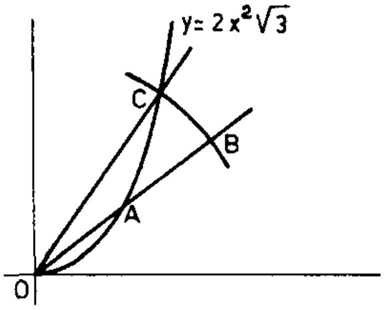
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{of} \quad \lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1$$

De bijbehorende eigenvectoren krijgt men door het stelsel $C\underline{x} = \lambda\underline{x}$ voor de waarden $\lambda = 0,\ 1,\ -1$ op te lossen.
De bijbehorende eigenvectoren zijn respectievelijk voor $\lambda = 0,\ 1,\ -1$:

$$\mu(1,1,1), \quad \mu(0,1,1), \quad \mu(1,0,1).$$

4. a) De gevraagde oppervlakte is gelijk aan de oppervlakte van de gebogen driehoek ABC, ingesloten door cirkel, parabool en rechte als onderstaand:



In rechthoekige resp. poolcoördinaten is:

$$A\left(\tfrac{1}{6}\sqrt{3}\,,\ \tfrac{1}{6}\sqrt{3}\right) \Rightarrow \overset{\textstyle r \qquad \varphi}{\left(\tfrac{1}{6}\sqrt{6}\,,\ \tfrac{\pi}{4}\right)}$$

$B(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}) \Rightarrow (1, \frac{\pi}{4})$

$C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}) \Rightarrow (1, \frac{\pi}{3})$

AC: $y = 2x^2\sqrt{3}$ wordt $r = \dfrac{\sin\varphi}{2\sqrt{3}\cos^2\varphi}$

BC: $x^2 + y^2 = 1$ wordt $r = 1.$

Dus $$O = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{\frac{\sin\varphi}{2\sqrt{3}\cos^2\varphi}}^{1} r\,dr = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi .\ r^2\Big|_{\frac{\sin\varphi}{2\sqrt{3}\cos^2\varphi}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi - \frac{1}{24}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{24}\int_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^2\varphi\ d\tan\varphi$$

$$= \frac{\pi}{24} - \frac{1}{72}\left(\tan^3\frac{\pi}{3} - \tan^3\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{24} + \frac{1}{72}.$$

b) De lengte van de boog OP is $(0 \leq t_p \leq 2\pi)$

$$L = \int_0^{t_p} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \int_0^{t_p} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\ dt =$$

$$= \int_0^{t_p} \sqrt{2 - 2\cos t}\ dt = \int_0^{t_p} \sqrt{4\sin^2\tfrac{1}{2}t}\,dt =$$

$$= \int_0^{t_p} \left|2\sin\tfrac{1}{2}t\right| dt = \int_0^{t_p} 2\sin\tfrac{1}{2}t\ dt = 4 - 4\cos\tfrac{1}{2}t_p$$

Uit $4 - 4\cos\frac{1}{2}t_p = 2$ volgt $\cos\frac{1}{2}t_p = \frac{1}{2} \Rightarrow t_p = \frac{2}{3}\pi$

Dus $P = (\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2})$

Herkansingstentamen Wiskunde I,II op woensdag 23 juni 1965.

Stof voor Wiskunde I.

1. a) Differentieer

$$y = (\sqrt{x})^{\sin x}.$$

b) Bereken $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\tan x}}{1 + \cos 2x}\, dx.$

2. Los voor de verschillende waarden van a op

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 3 \\ 4x - 2y + az &= 3a \\ x + y + az &= 3. \end{aligned}$$

3. Zij $z = f(x,y)$, met $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Druk $\frac{\partial z}{\partial x}$ uit in r, φ en de partiële afgeleiden van z naar r en φ.

4. Zij ρ het beeldpunt in het complexe vlak van een complex getal $\rho = a + ib$.
Construeer de beeldpunten van de wortels van de vergelijking

$$2z^2 + 2\rho z + \rho^2 = 0.$$

Stof voor Wiskunde II.

5. a) Bereken $\lim_{x \to \infty} x^2(\sin \frac{1}{x} - \log \frac{1+x}{x}).$

b) Voor welke reële x convergeert de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n(n+1)}.$$

6. a) In R_3 is gegeven een vaste vector $\underline{a}$ met lengte 1. Bewijs dat voor elke x in R_3 de vector $(\underline{a}, \underline{x})\underline{a}$ de loodrechte projectie is van x op de rechte $\lambda \underline{a}$. .

b) Gegeven is in R_3 de lineaire afbeelding A gedefinieerd door:

$$A\underline{x} = \underline{x} - 2(\underline{a}, \underline{x})\underline{a} ,$$

waarin $\underline{a}$ een vaste vector is met lengte 1.
Wat betekent deze afbeelding meetkundig?
Bepaal zonder de matrix van A op te stellen, de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren van A.

7. Bepaal de vergelijking van de kegel met top (1,1,1) en richtkromme $x = \cos\varphi$; $y = \sin\varphi$; $z = 0$.

8. Bereken de massa van het deel van de cylinder $x^2 + y^2 = 2x$ begrensd door de vlakken $z = 0$; $z = 2x$ als de massadichtheid μ gegeven is door

$$\mu = \frac{z}{x^2 + y^2} .$$

Oplossingen herkansingstentamen juni 1965.

1. a) Herschrijf de functie tot een e-macht en differentieer daarna.

$$y = e^{\frac{\sin x \cdot \log x}{2}}$$

$$y' = e^{\frac{\sin x \cdot \log x}{2}} \cdot \frac{1}{2}\left\{\cos x . \log x + \frac{1}{x} \cdot \sin x\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x . \log x\right)$$

b) De gegeven integraal is oneigenlijk, want de integrand is niet gedefinieerd voor $x = \frac{\pi}{2}$.
Hieruit volgt:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\tan x}}{1+\cos 2x}\,dx = \lim_{a\uparrow\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\int_0^a e^{-\tan x}\,\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \lim_{a\uparrow\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\int_0^a e^{-\tan x}\,d\tan x$$

$$= \lim_{a\uparrow\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}e^{-\tan x}\Big|_0^a = \frac{1}{2}$$

2. Schrijf het stelsel in matrixvorm op en ga vegen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & a & 3a \\ 1 & 1 & a & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 6 & 0 & 3a & 3a+6 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{array}\right)$$

Voor $a = 1$ is dit stelsel equivalent met

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore \quad \underline{x} = (0,0,3) + \lambda(1,1,-2)$ voor $a = 1$.

Stel nu $a \neq 1$, dus

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & a & a+2 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 1 & a+1 & 3 \end{array}\right)$$

Hieruit volgt dat het stelsel voor a = -2 equivalent is met:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\therefore \qquad \underline{x} = (0,3,0) + \lambda(1,1,1) \qquad \text{voor } a = -2.$$

Stel nu weer $a \neq 1,-2$ en ga verder vegen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2-a \end{array}\right)$$

$$\therefore \qquad \underline{x} = (1,2-a,1) \qquad \text{voor } a \neq 1,-2.$$

<u>Samenvatting</u>:

$$\begin{array}{lcl} a = 1 & : & \underline{x} = (0,0,3) + \lambda(1,1,-2) \\ a = -2 & : & \underline{x} = (0,3,0) + \lambda(1,1,1) \\ a \neq 1,-2 & : & \underline{x} = (1,2-a,1). \end{array}$$

3. Beschouw z als een functie van r en φ en deze weer als functies van x en y. Dan is

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad .$$

$\frac{\partial r}{\partial x}$ en $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ zijn te berekenen door de gegeven betrekkingen (nl. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) te differentiëren naar x.

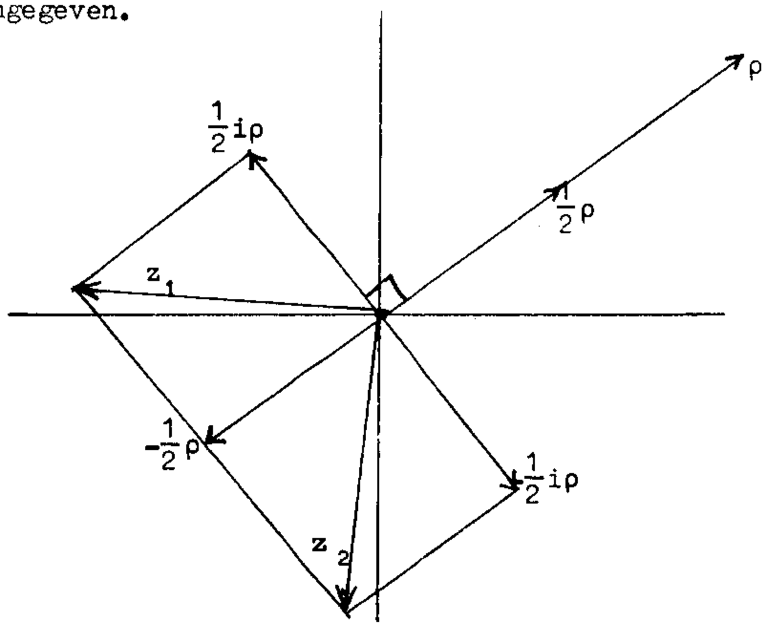
$$\begin{cases} 1 = \cos\varphi \cdot \frac{\partial r}{\partial x} - r\sin\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \\ 0 = \sin\varphi \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + r\cos\varphi \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \cos\varphi \cdot \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi} \quad .$$

4. Los de vierkantsvergelijking op met de bekende formule.
Dus $z_1 = -\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}i\rho$, $z_2 = -\frac{1}{2}\rho - \frac{1}{2}i\rho$.

Als nu ρ een gegeven complex getal voorstelt, dan verloopt de constructie in het complexe vlak van z_1 en z_2 zoals in bijgaande figuur is aangegeven.



5. a) De limiet kan eenvoudig door reeksontwikkeling berekend worden nl.:

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\sin\frac{1}{x} - \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{u\downarrow 0} \frac{1}{u^2}\left(\sin u - \log(1+u)\right) =.$$

$$\lim_{u\downarrow 0}\left(\frac{1}{u^2}\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!}\dots\right) - \frac{1}{u^2}\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots\right)\right) =$$

$$\lim_{u\downarrow 0}\left(\frac{1}{u} - \frac{u}{3!} + \frac{u^3}{5!} - \frac{u^5}{7!}\dots \quad - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} - \frac{u}{3}\dots\right) = \frac{1}{2}$$

b) Pas het convergentiekenmerk van Cauchy toe en stel $u = x - 2$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|u|^n}{3^n(n+1)}} = \frac{|u|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = \frac{|u|}{3}$$

Dus voor $\frac{|u|}{3} < 1$ of $-1 < x < 5$ is de gegeven reeks absoluut convergent.

De randpunten, x = -1,5, moeten nu apart onderzocht worden. Voor x = -1,5 verkrijgt de reeks respectievelijk de volgende gedaanten:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\qquad (x = -1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\qquad (x = +5)$$

De eerste reeks is convergent (alternerende reeks en $|u_n| = \frac{1}{n+1}$ nadert monotoon tot nul als n tot oneindig nadert); de tweede reeks is de bekende divergente harmonische reeks.
Bovenstaande resultaten kunnen nu als volgt samengevat worden:

$-1 < x < 5$	absolute convergentie
$x = -1$	relatieve convergentie
$x = 5$	divergentie.

Opmerking: In het tweede geval is de reeks niet absoluut convergent, daar voor x = -1 de reeks der moduli divergeert.

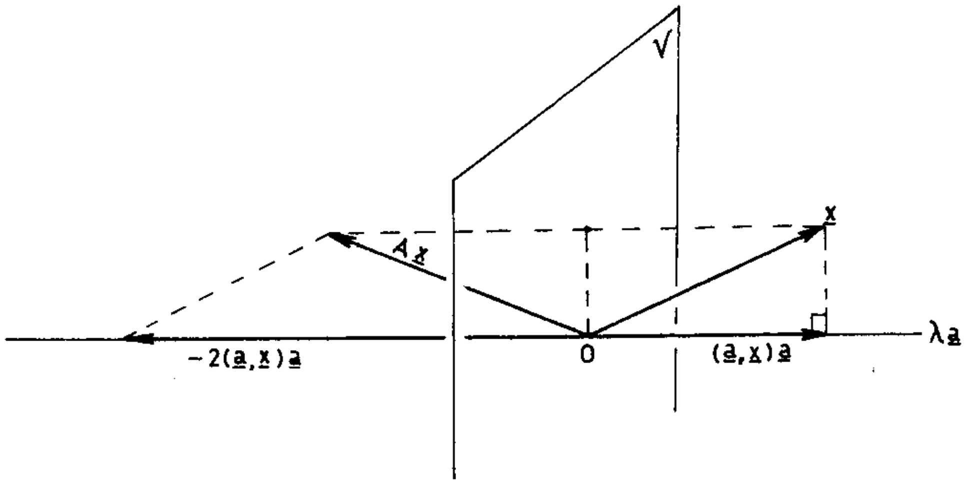
6. a) De lengte van de projectie van $\underline{x}$ op de rechte $\lambda\underline{a}$ is gelijk aan:

$$|\underline{x}| \cdot |\cos\varphi| = |\underline{a}| \cdot |\underline{x}| \cdot |\cos\varphi| = |(\underline{a}, \underline{x})|$$

met $\quad \varphi = \sphericalangle(\underline{a}, \underline{x}) \quad$ en $\quad |\underline{a}| = 1.$

Hieruit volgt dat de vector $(\underline{a}, \underline{x})\underline{a}$ de loodrechte projectie is van $\underline{x}$ op de rechte $\lambda\underline{a}$.

b) Door een tekening te maken ziet men onmiddellijk in, dat de beeldvector van $\underline{x}$ ontstaat door $\underline{x}$ te spiegelen t.o.v. het vlak V door O en loodrecht op de lijn $\lambda\underline{a}$.



Hieruit volgt dat $\underline{x} = \mu\underline{a}$ eigenvectoren van de l.a.A met eigenwaarde $\lambda = -1$, en $\underline{x}$ in vlak V eigenvectoren met eigenwaarde $\lambda = 1$ zijn.

Opmerking: De tekening is gemaakt in de veronderstelling $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Voor andere waarden van φ kan gemakkelijk een overeenkomstige figuur getekend worden.

7. De parametervoorstelling van de kegel luidt:

$$x = \lambda(\cos\varphi - 1) + 1$$
$$y = \lambda(\sin\varphi - 1) + 1$$
$$z = -\lambda + 1$$

Voor φ = constant en variabele λ stellen deze vormen de parametervoorstelling van een beschrijvende van de kegel voor. Door $\lambda = 1 - z$ in de eerste twee vergelijkingen in te vullen en daarna φ te elimineren verkrijgt men de volgende vergelijking:

$$(x - z)^2 + (y - z)^2 = (1 - z)^2.$$

of uitgewerkt:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2yz + 2z - 1 = 0.$$

8. De totale massa M van het lichaam wordt gegeven door:

$$M = \iiint_G \frac{z}{x^2 + y^2}\,dxdydz$$

$$G: \quad x^2 + y^2 \leqslant 2x$$
$$0 \leqslant z \leqslant 2x \ .$$

Door op te merken dat zowel de integrand alsook het integratiegebied invariant zijn t.a.v. de verwisseling: y wordt -y, en na overgang op cylindercoördinaten ($x^2 + y^2 = r^2$, $dxdydz \to rd\varphi drdz$) kan men de integraal als volgt herschrijven:

$$M = 2\iiint\limits_{G_1} \frac{z}{r^2}\, r\, d\varphi drdz \ ,$$

$$G : 0 \leqslant r \leqslant 2 \cos \varphi$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad \text{(de halve cirkel!)}$$
$$0 \leqslant z \leqslant 2r \cos \varphi \ .$$

Laatstgenoemde integraal kan gemakkelijk in een herhaalde integraal omgezet worden. De berekening verloopt nu als volgt:

$$M = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} dr \int_0^{2r\cos\varphi} \frac{z}{r}\, dz = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} 2r \cos^2\varphi dr =$$

$$= 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi = 8 \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$$

$\therefore \qquad M = \frac{3}{2}\pi \ .$

Examen (tentamen) Wiskunde II op woensdag 5 januari 1966.

1. Bepaal de oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y''' - 3y'' + y' - 3y = e^{3x},$$

waarvan de grafiek in de oorsprong aan de lijn $y = x$ raakt.

2. Voor welke complexe waarden van z convergeert de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{(|z|^2 - z)n}}{n^2 \log n} \quad ?$$

3. Bereken $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} dx.$

4. Bepaal de oppervlakte van het deel van het bolopppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ binnen de cylinder $y^2 + z^2 - y = 0$.

5. Een lineaire afbeelding A van R_3 op R_2 heeft de nulruimte $\underline{x} = \lambda(1,-3,-3)$, terwijl $A(1,0,0) = (3,2)$ en $A(1,1,1) = (4,3)$.

   a) Bepaal de matrix van A.

   b) Voor welke waarde van p is het beeld van het vlak $px + y + z = 0$ een rechte lijn?

Oplossingen Tentamen januari 1966.

1. We bepalen de oplossingen van de homogene vergelijking:

$$y''' - 3y'' + y' - 3y = 0.$$

De karakteristieke vergelijking

$$t^3 - 3t^2 + t - 3 = t^2(t-3) + (t-3) = 0$$

heeft als wortels 3, $-i$, $+i$, zodat

$$y_{hom} = \lambda_1 e^{3x} + \lambda_2 e^{-ix} + \lambda_3 e^{+ix} \qquad \lambda_i \text{ complex.}$$

Daar e^{3x} voorkomt in de homogene oplossing proberen we niet ae^{3x} maar

$$y_{part} = axe^{3x}.$$

Invullen van y en de afgeleiden levert

$$10ae^{3x} = e^{3x} \qquad a = \frac{1}{10}$$

en als part. opl.

$$y = 1/10\,x\,e^{3x} \quad .$$

Alg. opl.: $y(x) = \lambda_1 e^{3x} + 1/10\,x\,e^{3x} + \mu_1 \cos x + \mu_2 \sin x.$

We vinden alle reële oplossingen door λ_1, μ_1, μ_2 reëel te kiezen.
Extra eis is $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1.$
Door differentëren en invullen van $x = 0$ volgen de voorwaarden

$$y(0) = \lambda_1 + \mu_1 = 0$$
$$y'(0) = (3\lambda_1 + 1/10) + \mu_2 = 1$$

zodat we 2 onbekenden kunnen elimineren.

Opl. $\quad y(x) = (\lambda_1 + 1/10\,x)\,e^{3x} - \lambda_1 \cos x + (9/10 - 3\lambda_1)\sin x.$

2. Stel $|z|^2 - z = w$ en onderzoek de reeks van absolute waarden met het criterium van d'Alembert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e^{w(n+1)}|}{|e^{wn}|} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{\log n}{\log(n+1)} = |e^w| \; .$$

want $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n(1+\frac{1}{n})}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \left\{1 + \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log n}\right\} = 1.$

En uit $\quad |e^w| = |e^{u+iv}| = e^u \cdot |e^{iv}| = e^u \cdot (\cos^2 v + \sin^2 v)$

$$= e^u = e^{\mathrm{Re}(w)}$$

volgt:
Convergentie $\quad \mathrm{Re}(w) \leqslant 0$
Immers ook voor $\mathrm{Re}(w) = 0$ (d.i. op de rand) volgt (absolute) convergentie.

$$\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}\{|z|^2 - z\} = \mathrm{Re}\{x^2 + y^2 - x - iy\}$$
$$= x^2 - x + y^2 = (x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2 - \tfrac{1}{4} \leqslant 0$$

dan moet
$$(x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2 \leqslant (\tfrac{1}{2})^2 \; .$$

Convergentie treedt op binnen en op de rand van een cirkel in het complexe vlak met middelpunt $\frac{1}{2}$ en straal $\frac{1}{2}$.

3. $$\int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} dx = I$$

Oplossing I

Stel $x = \cos\varphi$ en kies $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ dan is

$$I = -\int_{\pi/2}^{0} \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} \, . \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= -\int_{\pi/2}^{0} \tan\tfrac{1}{2}\varphi \, . \sin\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} (1-\cos\varphi) d\varphi$$

$$= \pi/2 - 1.$$

Oplossing II

Door de onbepaalde integraal uit te rekenen.

Stel $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t$ dan $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt.$

$$I = \int_1^0 \frac{-4t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^1 \frac{2t \, d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} = -2\int_0^1 t \, . \, d\left(\frac{1}{t^2+1}\right)$$

$$= \left[-2\frac{t}{t^2+1} + 2\arctan t\right]_0^1 = -1 + \frac{\pi}{2} \, .$$

4. De opgave is wezenlijk hetzelfde wanneer we x en z verwisselen.
We berekenen dan het oppervlak van het deel van de eenheidsbol binnen

$$x^2 + y^2 - x = (x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}$$ boven èn onder het xoy-vlak.

We gaan over op cylindercoördinaten

$$O = 2\iint_G \sqrt{1 + z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\varphi^2} \, r \, . \, dr \, . \, d\varphi$$

met $G: \begin{cases} z = 0 \\ (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4} \end{cases}$ $\qquad G \begin{cases} z = 0 \\ r - \cos\varphi \leqslant 0 \end{cases}$

waarbij $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. We beperken ons tot $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, de halve cirkel in het eerste octant.

$$z^2 + y^2 + x^2 = 1 \longrightarrow z^2 + r^2 = 1$$

$$0 = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$= -2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \frac{d(1-r^2)}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$= -4\int_0^{\pi/2} (\sin\varphi - 1)d\varphi = 2\pi - 4.$$

5. a) Uit het gegeven volgt

$$\begin{array}{ll} A(1,-3,-2) = (0,0) & A(0,-3,-2) = (-3,-2) \\ A(1,0,0) = (3,2) \quad \rightarrow & A(1,0,0) = (3,2) \quad \rightarrow \\ A(1,1,1) = (4,3) & A(0,1,1) = (1,1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} A(0,-1,0) = (-1,0) & A(0,1,0) = (1,0) \\ A(1,0,0) = (3,2) \quad \rightarrow & A(1,0,0) = (3,2) \quad \rightarrow \\ A(0,1,1) = (1,1) & A(0,0,1) = (0,1) \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Vlak V: $px + y + z = 0$ is in parametervorm te schrijven als

$$\underline{x} = \mu(1,0,-p) + \lambda(0,1,-1).$$

Indien

$$A(1,0,-p) = \alpha\, A(0,1,-1) = \alpha\,.\,(1,-1)$$

dan wordt elke vector uit V afgebeeld op de lijn door $(1,-1)$

$$A(1,0,-p) = (3,2-p) = 3(1,-1).$$

Dan moet $2-p = -3 \qquad p = 5.$

We kunnen ook zeggen: V moet de nulruimte bevatten, dus $p.1 - 3 - 2 = 0 \Rightarrow p = 5.$

Herkansingsexamen (tentamen) Wiskunde I/II op 17 januari 1966.

1. Bereken $\int \frac{x \sin x}{\cos^2 x}\, dx$.

2. Los met behulp van de regel van Cramer x_2 op uit het stelsel

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 11 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -2 \; . \end{cases}$$

3. Bepaal de vergelijking van het raakvlak in het punt $(0,1,e)$ van het oppervlak

$$z = e^{x+y^2} \; .$$

4. Voor welke complexe z geldt: $\left|\frac{z-2}{z-4}\right| = 1$?

5. a) Bereken
$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^p - (x+1)^q}{\log(x+1)} \; .$$

   b) Voor welke reële waarden van x $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$, convergeert de reeks
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \cos x)^n}{n+1} \; .$$

6. A is een afbeelding van R_3 in zichzelf, die aan elke vector $\underline{x}$ (behorende tot R_3) de projectie van $\underline{x}$ op het vlak $x + z = 0$ toevoegt.
   a) Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.
   b) Bepaal, zonder de matrix van A te gebruiken, de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren van A.
   c) Stel de matrix van A op.

7. De doorsnijding van de bol: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ met het vlak $z = 0$, is de richtkromme van een cylinder, waarvan de beschrijvenden evenwijdig zijn met de vector $\underline{a} = (1,1,2)$.
   Bepaal de vergelijking van dit cylinderoppervlak.

8. Bereken de totale massa M in het eerste octant van R_3 $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$, als de massadichtheid d in R_3 gegven is door

$$d = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} \; .$$

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1966.

1.
$$\int \frac{x \sin x}{\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{x\, d\cos x}{\cos^2 x} = \int x \,.\, d\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{d(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}$$

$$= \frac{x}{\cos x} - \log\left|\tan \tfrac{1}{2}(x+\tfrac{\pi}{2})\right| + C.$$

Opm. 1.

Bij de afleiding werd gebruik gemaakt van de standaard integraal

$$\int \frac{1}{\sin x} = \log\,\left|\tan \tfrac{1}{2} x\right| + C.$$

Opm. 2.

Door gebruik te maken van

$$\cos x = \cos^2 \tfrac{1}{2} x - \sin^2 \tfrac{1}{2} x = \sin^2 \tfrac{1}{2} x(\cot^2 \tfrac{1}{2} x - 1)$$

ziet men na breuksplitsing

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \log\left|\frac{1+\tan\frac{1}{2}x}{1-\tan\frac{1}{2}x}\right| + C.$$

2.
$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 11 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 17 & 14 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 0 & -11 & 14 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{42-68}{-70+44} = 1.$$

3. Het punt $(0,1,e)$ behoort tot het oppervlak! Het raakvlak in $(x,y) = (0,1)$ heeft de gedaante:

$$z - e = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{(0,1)} (x-0) + \left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{(0,1)} (y-1).$$

$$\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{(0,1)} = \left\{e^{x+y^2}\right\}_{(0,1)} = e \;;$$

$$\left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{(0,1)} = \left\{(e^{x+y^2}) \,.\, 2y\right\}_{(0,1)} = 2e \;;$$

Invullen geeft:

$$z - ex - 2ey + e = 0.$$

4. $$\left|\frac{z-2}{z-4}\right| = 1$$

$$|z-2| = |\bar{z}-4| = |\bar{z}-\bar{4}| = |z-4| \, .$$

Geldt voor alle z met $\text{Re}(z) = 3$.

5. a) $$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^p - (x+1)^q}{\log(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\{1 + \binom{p}{1}x + ..\} - \{1 + \binom{q}{1}x + ..\}}{x - \frac{x^2}{2} + \dots}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(p-q) + \binom{p}{2} - \binom{q}{2}\ x + \dots}{1 - \frac{x}{2} + \dots} = p - q \, .$$

Opm.:
Begin met het ontwikkelen van de noemer.

b) We onderzoeken de reeks van absolute waarden.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|2\cos x|^n}{n+1} \, .$$

Het criterium van d'Alembert levert: De oorspronkelijke reeks convergeert absoluut als

$$|2\cos x| < 1$$

$$-\tfrac{1}{2} < \cos x < \tfrac{1}{2}$$

Dit betekent voor de beschouwde waarden van x op $[0\pi]$

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \, .$$

Rand:
In $x = \frac{\pi}{3}$ als $2\cos x = +1$ is de reeks divergent.

In $x = \frac{2\pi}{3}$ als $2\cos x = -1$ is de reeks convergent (waarom?).

Conclusie: Convergentie voor $\frac{\pi}{3} < x \leqslant \frac{2\pi}{3}$.

6. a) We bepalen de projectie van $\underline{x} = (x,y,z,)$ op het vlak V: $x+z = 0$ door het snijpunt S te bepalen van de loodlijn $(x,y,z) + \lambda(1,0,1)$ met V. $2\lambda = -x-z$. Daaruit volgt S =

$$A(x_1,y_1,z_1) = \left(\frac{x_1 - z_1}{2} \text{ , } y_1 \text{ , } \frac{-x_1 + z_1}{2}\right). \qquad (1)$$

Dan blijkt $A\underline{x}_1 + A\underline{x}_2 = A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)$

en $\lambda\, A\underline{x}_1 = A\lambda\underline{x}_1$

door invullen van (1).

b) Elke vector in vlak V valt samen met zijn beeld m.a.w. $A\underline{x} = \underline{x}$ voor $x \in V$. De vectoren $\lambda(1,0,1)$ worden ook op hun drager afgebeeld, nl. in O (d.i. $0 \cdot (1,0,1)$.

Conclusie: $\lambda = 1$ e.v. Vlak V

$\lambda = 0$ e.v. $\lambda(1,0,1)$.

c) M.b.v. (1) bepalen we de kolommen $A\underline{e}_i$ van de matrix A.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,0) = (\tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}) \\ A(0,1,0) = (0, 1, 0) \\ A(0,0,1) = (-\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}) \end{array}\right\} \qquad A = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2} & 0 & -\tfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tfrac{1}{2} & 0 & \tfrac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

7. Richtkromme K $\quad (x-1)^2 + y^2 = 1 \qquad$ as: $\lambda(1,1,2)$.

$z = 0$

Kies $\underline{x}_0$ op K en bepaal de rechte door $\underline{x}_0$ evenwijdig aan (1,1,2).
Dan volgt:

$$\left.\begin{array}{l} (x_0 - 1)^2 + y^2 = 1 \\ z_0 = 0 \\ x = x_0 + \lambda \cdot 1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot 1 \\ z = z_0 + \lambda \cdot 2 \end{array}\right\} \text{ elimineer nu } \lambda,\ x_0,\ y_0,\ z_0$$

$$z = 0 + 2\lambda \text{ ; } \lambda = \tfrac{1}{2} z$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = x - \tfrac{1}{2} z \\ y_0 = y - \tfrac{1}{2} z \end{array}\right\} \text{ invullen in vgl. 1 geeft}$$

Cylinder opp.:

$$(x - 1 - \tfrac{1}{2} z)^2 + (y - \tfrac{1}{2} z)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 + \tfrac{1}{2} z^2 - xz - yz - 2x + z = 0.$$

8. $$M = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{\infty} \frac{\rho^2 \, d\rho}{(\rho^2+1)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \int_0^{\infty} \frac{\rho^2 \, d\rho}{(\rho^2+1)^2} \quad .$$

De onbepaalde integraal kan men:

òf met formules voor J_2 en J_1 oplossen,

$$\int \frac{\rho^2 \, d\rho}{(\rho^2+1)^2} = \int \frac{\rho^2+1-1}{(\rho^2+1)^2} \, d\rho = J_1 - J_2$$

$$= \tfrac{1}{2} \arctan \rho - \tfrac{1}{2} \frac{\rho}{\rho^2+1} + C$$

òf door part. int. bepalen

$$\int \frac{\rho^2 \, d\rho}{(\rho^2+1)^2} = +\tfrac{1}{2} \int \frac{\rho \, d(\rho^2+1)}{(\rho^2+1)^2} = -\tfrac{1}{2} \int \rho \, d\left(\frac{1}{\rho^2+1}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2} \frac{\rho}{\rho^2+1} + \tfrac{1}{2} \arctan \rho + C.$$

$$M = \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{N\to\infty} \left\{ \tfrac{1}{2} \arctan N - \tfrac{1}{2}\left(\frac{N}{N^2+1}\right) \right\} = \frac{\pi}{8} \; .$$

Opm.:

Bereken zelf de bepaalde integraal met een goniometrische substitutie.

Examen (tentamen) Wiskunde II op maandag 13 juni 1966.

1. a) Bepaal alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' - y = e^{-x}$$

die voldoen aan $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$.

b) Bepaal de reële getallen α waarvoor de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, 2^{n \cos \alpha} \text{ convergeert.}$$

Bereken voor die waarden van α de som van de reeks.

---

2. a) Bepaal $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x \log(1 + x^2) + x^2 \arctan x}$.

b) Bereken

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x(x+1)}} \quad .$$

3. a) Bepaal de lengte van de kromme

$$\left.\begin{array}{l} x = e^{-\varphi} \cos \varphi \\ y = e^{-\varphi} \sin \varphi \\ z = 1 - e^{-\varphi} \end{array}\right\} \qquad 0 \leq \varphi < \infty \quad .$$

b) Bereken de inhoud van het lichaam dat in R_3 wordt bepaald door

$$x^2 + z^2 \leq 9, \quad y^2 + z^2 \leq 9.$$

4. Voor alle reële getallen t en een vaste vector $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ met $|\underline{a}| = 1$ wordt een lineaire afbeelding A_t van R_3 in R_3 gedefinieerd door

$$A_t \underline{x} = \underline{x} + t(\underline{a}, \underline{x})\underline{a} \ .$$

Beantwoord de volgende vragen <u>zonder</u> van de matrix van A_t gebruik te maken:

a) Bewijs dat $\underline{a}$ voor alle waarden van t een eigenvector is van A_t en bepaal de bij $\underline{a}$ behorende eigenwaarde.

b) Bewijs dat 1 voor alle waarden van t een eigenwaarde is van A_t en bepaal de bij 1 behorende eigenvectoren.

c) Voor welke waarde(n) van t is A_t orthogonaal?

Oplossingen Tentamen juni 1966.

1. a) Homogeen: $y'' - y = 0 \xrightarrow{y=e^{tx}} t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \pm 1$ dus $y = \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$.

Niet homogeen: $y'' - y = e^{-x}$. Stel part. oplossing $y = Axe^{-x}$.

Dan is $y' = A(1-x)e^{-x}$, $y'' = A(x-2)e^{-x}$

dus $y'' - y = -2Ae^{-x} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$.

Dus algemene opl.:

$$y = \lambda e^{x} + (\mu - \tfrac{1}{2}x)e^{-x} \qquad (\lambda,\ \mu \text{ complex}).$$

Van de tweede term is de limiet nul, als $x \to \infty$, de eerste term heeft slechts een limiet (en die is nul) wanneer $\lambda = 0$. Conclusie:

$$y = (\mu - \tfrac{1}{2}x)e^{-x}. \qquad (\mu \text{ complex})$$

b) Het is een machtreeks in $w = 2^{\cos\alpha}$.

$\sum_{1}^{\infty} n w^{n}$ heeft als convergentiestraal 1 (d'Alembert) (op de rand <u>geen</u> convergentie) en

$$S(w) = w \sum_{n=1}^{\infty} n w^{n-1} =$$

$$= w\left(\sum_{n=1}^{\infty} w^{n}\right)' = w\left(\frac{w}{1-w}\right)' = \frac{w}{(1-w)^2} .$$

Dus de oorspronkelijke reeks convergeert voor

$$-1 < 2^{\cos\alpha} < +1 \Leftrightarrow \cos\alpha < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ..)$$

met als som

$$S = \frac{2^{\cos\alpha}}{(1-2^{\cos\alpha})^2} .$$

2. a) $$x\cos x - \sin x = x(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots) - (x - \frac{x^3}{3!} + \dots)$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + \text{hogere machten van } x$$

$$x\log(1+x^2) + x^2\arctan x =$$

$$= x(x^2 - \dots) + x^2(x - \dots)$$

$$= 2x^3 + \text{hogere machten van } x \quad (|x| < 1).$$

De limiet wordt $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-\frac{1}{3}x^3 + \dots}{2x^3 + \dots} = -\frac{1}{6}$.

b) $$I = \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x(x+1)}} \underset{x=\frac{1}{y}}{\overset{=}{\Uparrow_1}} \int_1^0 \frac{y}{\sqrt{\frac{1}{y}(\frac{1}{y}+1)}} \cdot \frac{-dy}{y^2} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y+1}}$$

$$= \int_0^1 (y+1)^{-\frac{1}{2}}\, d(y+1) = 2(y+1)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 2\sqrt{2} - 2 .$$

Opm.:

Het is oorspronkelijk een oneigenlijke integraal ($x \to \infty$). Na substitutie $x = \frac{1}{y}$ ook nog voor $y \downarrow 0$. In de herleiding valt het oneigenlijke karakter weg.

Behalve de standaardoplossingen met $\sqrt{x^2+x} = x+t$, dan wel $\sqrt{\frac{x+1}{x}} = u$ (voer deze zelf uit!) is er ook nog een goniometrische oplossing:

Stel $x = \tan^2\varphi$. Dan loopt φ bijv. van $\frac{\pi}{4}$ naar $\frac{\pi}{2}$.

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2\tan\varphi\, d\varphi}{\tan^3\varphi\sqrt{1+\tan^2\varphi}\cos^2\varphi} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\tan\varphi\, d\varphi}{\tan^3\varphi\,\frac{1}{\cos\varphi}\cos^2\varphi} =$$

$$= 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sin^2\varphi} = -\frac{2}{\sin\varphi}\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = -2 + 2\sqrt{2}.$$

3. a) $$\left.\begin{aligned} x &= e^{-\varphi}\cos\varphi \\ y &= e^{-\varphi}\sin\varphi \\ z &= 1 - e^{-\varphi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \dot{x} &= e^{-\varphi}(-\cos\varphi - \sin\varphi) \\ \dot{y} &= e^{-\varphi}(\cos\varphi - \sin\varphi) \\ \dot{z} &= e^{-\varphi} \end{aligned}\right.$$

$$L = \lim_{N\to\infty} \int_{\varphi=0}^{N} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, d\varphi =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^N \sqrt{3e^{-2\varphi}}\, d\varphi = \lim_{N\to\infty} (-\sqrt{3}e^{-\varphi})\Big|_0^N = \sqrt{3}.$$

b) Het gaat over de doorsnijdingsfiguur van twee even dikke cylinders met assen langs y- resp. x-as.

$$I = \int_{z=-3}^{+3} dz \int_{x=-\sqrt{9-z^2}}^{+\sqrt{9-z^2}} dx \int_{y=-\sqrt{9-z^2}}^{+\sqrt{9-z^2}} dy =$$

$$= \int_{-3}^{+3} dz \quad 2\sqrt{9-z^2} \,.\, 2\sqrt{9-z^2} =$$

$$= 4\int_{-3}^{+3} (9-z^2)dz = 4(9z - \tfrac{1}{3}z^3)\Big|_{-3}^{+3} = 144.$$

4\. a) We berekenen $A_t\ \underline{a}$ voor willekeurige t

$$A_t\ \underline{a} = \underline{a} + t(\underline{a}, \underline{a})\underline{a} = (1 + t|\underline{a}|^2)\underline{a}\ .$$

Dus $\underline{a}$ is eigenvector bij eigenwaarde $1 + t|\underline{a}|^2 = 1 + t.$

b) $\underline{b}$ is eigenvector van A_t met eigenwaarde 1 betekent $A_t\ \underline{b} = 1.\underline{b}$. In dit geval

$$\underline{b} + t(\underline{a}, \underline{b})\underline{a} = \underline{b}$$

dus $\quad t(\underline{a}, \underline{b})\underline{a} = \underline{0}\ .$

Er zijn 2 mogelijkheden: ($\underline{a} = \underline{0}$ is in strijd met gegeven)

1) Voor $t = 0$ voldoen alle $\underline{b}$ (A_t = identiteit).

2) Voor $t \neq 0$ voldoen die $\underline{b}$ waarvoor $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$ (het loodvlak op $\underline{a}$ door $\underline{0}$).

c) Voor orthogonaliteit is nodig en voldoende

$$|A_t\ \underline{x}| = |\underline{x}| \quad \text{voor alle } \underline{x}$$

dus

$$|\underline{x} + t(\underline{a}, \underline{x})\underline{a}| = |\underline{x}|$$

$$(\underline{x} + t(\underline{a}, \underline{x})\underline{a}\ ,\ \ \underline{x} + t(\underline{a}, \underline{x})\underline{a}) = (\underline{x}, \underline{x})$$

$$(\underline{x}, \underline{x}) + 2t(\underline{a}, \underline{x})(\underline{a}, \underline{x}) + t^2(\underline{a}, \underline{x})^2(\underline{a}, \underline{a}) = (\underline{x}, \underline{x})$$

of, daar $(\underline{a}, \underline{a}) = |\underline{a}|^2 = 1$

$$(2t + t^2)(\underline{a}, \underline{x})^2 = 0 \quad \text{voor alle x}$$

dus $\quad 2t + t^2 = 0 \qquad t_1 = 0 \quad (A_t = \text{identiteit}),$

$\qquad\qquad\qquad\qquad t_2 = -2 \quad (A_t = \text{spiegeling in vlak } (\underline{a}, \underline{x}) = 0).$

Herkansingsexamen (tentamen) Wiskunde I/II op 22 juni 1966.

1. Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$.

2. Differentieer

$$y = \log|x \arctan x| .$$

3. Zij $z = f(x,y)$ met $x = u$, $y = v - u^2$.

   Druk $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ uit in u, v en de partiële afgeleiden van z naar u en v.

4. Voor welke reële waarde(n) van a is het onderstaande stelsel oplosbaar.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ ax + y + z = 3 \\ x + 2y - az = 2. \end{cases}$$

5. De lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is een draaiing, waarvan de as loodrecht staat op de vectoren (2,0,-1) en (2,-1,0).
   Verder is gegeven dat A(2,0,-1) = (2,-1,0).
   Bepaal:
   a) De reële eigenwaarde van A en een bijbehorende eigenvector.
   b) Het beeld A(2,-1,0).

6. Bereken $\displaystyle\int_2^3 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}}$.

7. Bereken de inhoud van het lichaam bepaald door

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$$
$$x^2 + y^2 \leq z.$$

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1966.

1. Eerste methode

We schrijven de uitdrukking achter het limiet symbool als e-macht. De exponent wordt dan

$$n^2 \log \frac{n^2+n}{n^2+n+1} = n^2 \log\left(1 - \frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

$$= \frac{n^2}{-(n^2+n+1)} \cdot \frac{\log\left(1-\frac{1}{n^2+n+1}\right)}{-\frac{1}{n^2+n+1}} .$$

Als $n \to \infty$ dan nadert de eerste factor tot -1, de tweede factor is van de gedaante $\frac{\log(1+h)-\log 1}{h}$ waarbij $h \to 0$, dus nadert tot de afgeleide van $\log x$ voor $x=1$, m.a.w. tot 1. Op grond van de continuïteit van de e-macht is de gevraagde limiet derhalve $e^{-1.1} = e^{-1}$.

Tweede methode

$$\left(\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right)^{n^2} = \left(\frac{n^3-n}{n^3-1}\right)^{n^2} = \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}} .$$

De teller nader tot $\frac{1}{e}$ (standaardlimiet) als $n \to \infty$. De noemer is te schrijven als $\left\{\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}\right\}^{\frac{1}{n}}$ waarbij de vorm tussen accoladen tot $\frac{1}{e} \sim \frac{1}{2,7}$ nadert, m.a.w. voor voldoende grote n geldt $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}} < \text{noemer} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$. De uiterste leden naderen tot 1 (standaardlimiet) dus de noemer eveneens (insluitstelling). De gevraagde limiet bedraagt derhalve e^{-1}.

2. $y = \log|x \arctan x|$

$$y' = \frac{1}{x \arctan x} \cdot \left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{(1+x^2)\arctan x} .$$

3. $$\left.\begin{array}{l} x = u \\ y = v - u^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u = x \\ v = x^2 + y \end{array}\right.$$

Nu is $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} + 2x\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\frac{\partial z}{\partial v}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial v} + 2x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2x\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} + 2\frac{\partial z}{\partial v} + 2x\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right\}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2x\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} + 2\frac{\partial z}{\partial v} + 2x\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2u\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right) + 2\frac{\partial z}{\partial v} + 4u^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} .$$

4. Het betreft hier 3 lineaire vergelijkingen met 3 onbekenden.
De coëfficiënten determinant van het homogene stelsel bedraagt

(Sarrus) $D = -a + 1 - 2a + a^2 + 1 - 2 = a(a-3)$,

Dus voor $a \neq 0$ en $a \neq 3$ is het stelsel oplosbaar (Cramer). Onderzoeken we apart de gevallen $a = 0$ en $a = 3$ (met rang (matrix A) ≤ 2). Dit kan rechtstreeks gebeuren (doe dit zelf!), maar ook met rangbepaling van de matrix B, die ontstaat uit A door de kolom bekende termen toe te voegen: Bijvoorbeeld bedraagt de determinant D_z van x-kolom, y-kolom en kolom der bekende termen

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 + 2a - 1 - 6 - 2a = -2 \neq 0,$$

dus de rang van de aangevulde matrix is drie voor alle a.
Conclusie: $a = 0$ en $a = 3$ leveren strijdige stelsels.

5. a) De draaiingsas levert eigenvectoren bij eigenwaarde 1.
Stel $\underline{a} = (a,b,c)$ is asvector $\perp(2,0,-1)$ en $\perp(2,-1,0)$ dan is
$2a - c = 2a - b = 0 \Rightarrow \underline{a} = \rho(1,2,2)$.

5\. b) Omdat (2,-1,0) in het vlak $x + 2y + 2z = 0$ loodrecht op de as ligt, is dit ook het geval met de beeldvector $\underline{p} = A(2,-1,0) = (p,q,r)$.

Dus $p + 2q + 2r = 0.$ (1)

Verder moet (p,q,r) dezelfde lengte hebben als (2,-1,0).

Dus $p^2 + q^2 + r^2 = 5.$ (2)

Tenslotte moet de hoek tussen de vectoren (2,0,-1) en (2,-1,0) gelijk zijn aan die tussen (2,-1,0) en (p,q,r). Dit levert met behulp van (2)

$$4 + 0 + 0 = 2p - q + 0r \qquad (3)$$

Uit (1) en (3) volgt $\underline{p} = (0,-4,4) + \rho(2,4,-5)$.
Substitutie in (2) geeft na vermenigvuldiging

$$5\rho^2 - 8\rho + 3 = 0 \Rightarrow \rho_1 = 1 \quad \text{of} \quad \rho_2 = \frac{3}{5}.$$

ρ_1 vervalt. Dit zou als beeldvector (2,0,-1) leveren, in strijd met het gegeven. Daarom

$$A(2,-1,0) = \underline{p} = (0,-4,4) + \frac{3}{5}(2,4,-5) = (\tfrac{6}{5}, -\tfrac{8}{5}, 1)$$

6\.
$$I = \int_2^3 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}} = \int_{x=2}^3 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-2\frac{1}{2})^2}} =$$

$$= \int_{x=2}^3 \frac{2x+2}{\sqrt{1-(2x-5)^2}}\,dx \underset{2x-5=y}{=} \int_{-1}^{+1} \frac{y+7}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\tfrac{1}{2}dy.$$

De integraal is oneigenlijk bij beide grenzen.

Men vindt $\int_{-1}^{1} \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$, want de integrand is oneven. Vervolgens

$$I = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 7\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 7\lim_{p\uparrow 1}\int_0^p \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 7\lim_{p\uparrow 1}\arcsin p = 7\,\frac{\pi}{2}.$$

7\. Cylindercoördinaten: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2 \leqslant 2 \Rightarrow z^2 \leqslant 2 - r^2$$

$$x^2 + y^2 \leqslant z \qquad\qquad \Rightarrow r^2 \leqslant z.$$

dus $\qquad r^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2 - r^2}$

met als noodzakelijke consequentie $r^4 \leqslant 2 - r^2 \Rightarrow r \leqslant 1.$

Op grond van symmetrieoverwegingen mogen we schrijven

$$I = 4 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{1} \int_{z=r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (\sqrt{2 - r^2} - r^2) r\,dr =$$

$$= 2\pi \left[\int_{r=0}^{1} -\tfrac{1}{2} (2 - r^2)^{\frac{1}{2}}\, d(2 - r^2) - \int_0^1 r^3\,dr \right] =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (2 - r^2)^{3/2} - \frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{1} =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{3} (1 - 2^{3/2}) - \frac{1}{4} \right)$$

$$= -\frac{14}{12} \pi + \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Examen (tentamen) Wiskunde II op **maandag** 9 januari 1967

1. a) Bepaal alle reële oplossingen $y(x)$ van

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x \,.$$

b) Bepaal $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x)$.

2. Onderzoek $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} \log \frac{n}{n+1}$ op convergentie.

3. a) Van een lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is $(1,0,0)$ eigenvector bij eigenwaarde 2; $A(0,1,0) = (4,1,-2)$; $A(0,0,1) = (2,1,-1)$.

a1) Bepaal de matrix van A^{-1}.

a2) Bepaal de eigenvector(en) en eigenwaarde(n) van A^{-1}.

b) Stel B is een lineaire afbeelding van R_3 in R_3 met $(\det B) \neq 0$. Zij $\underline{v}$ eigenvector van B met eigenwaarde λ.

b1) Bewijs, dat $\lambda \neq 0$.

b2) Bewijs, dat $\underline{v}$ eigenvector van B^{-1} is.

b3) Bepaal de bij $\underline{v}$ behorende eigenwaarde van B^{-1}.

4. Een bol B en een kegel K zijn resp. gegeven door de vergelijkingen

$$B : \; x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$$

$$K : \; x^2 + 3y^2 = z^2 \,.$$

a) Laat zien dat de projectie van de doorsnijding van K en B op het XOY-vlak wordt voorgesteld door

$$\begin{cases} (x^2 + 2y^2)^2 - (x^2 + 3y^2) = 0 \\ z = 0 \,. \end{cases}$$

b) Bereken de oppervlakte van het deel van B dat binnen K ligt.

Oplossingen Tentamen januari 1967

1. a) Substitutie van $y(x) = e^{tx}$ levert als karakteristieke vergelijking:

$$t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1 = (t-1)^2 - i^2 = (t-1+i)(t-1-i) = 0$$

en als oplossingen van de homogene vergelijking:

$$y(x) = ae^{(1+i)x} + be^{(1-i)x} = e^x(ae^{ix} + be^{-ix}) .\ \text{De reële zijn}$$

$$y(x) = e^x(\alpha \cos x + \beta \sin x) \qquad (\alpha,\beta \text{ reëel}) .$$

Voor de bepaling van een particuliere oplossing dienen we niet te nemen $y_0(x) = Ae^x \cos x + Be^x \sin x$ zoals het rechterlid der d.v. suggereert. Immers $y_0'' - 2y_0' + 2y_0 = 0$ voor alle A en B. Daarom proberen we als oplossing: $y(x) = Axe^x \cos x + Bxe^x \sin x$. Invullen in de differentiaalvergelijking geeft $A = 0$, $B = 2$.

Alle reële oplossingen zijn dus:

$$y(x) = 2xe^x \sin x + \alpha e^x \cos x + \beta e^x \sin x \quad (\alpha,\beta \text{ reëel}) .$$

b) $$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{t\to\infty} y(-t) = \lim_{t\to\infty} \left\{ 2\,\frac{t \sin t}{e^t} + \frac{\alpha \cos t - \beta \sin t}{e^t} \right\} = 0 .$$

Dit volgt uit de insluitstelling en de standaardlimiet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0 .$$

2. Eerst onderzoeken we absolute convergentie en beschouwen dus $\Sigma\, \frac{n+1}{n} \log \frac{n+1}{n}$, want $\log \frac{n}{n+1} < 0$! Omdat $\lim\limits_{n\to\infty} n \log \frac{n+1}{n} = 1$ is vanaf zekere N $\log \frac{n+1}{n} > \frac{1}{2n}$ en $\frac{n+1}{n} \log \frac{n+1}{n} > \frac{1}{2n}$; dus is $\Sigma\, \frac{n+1}{n} \log \frac{n+1}{n}$ divergent (vergelijkingsstelling).

Is $\Sigma\, (-1)^n\, \frac{n+1}{n} \log \frac{n}{n+1} = \Sigma\, (-1)^{n+1}\, \frac{n+1}{n} \log \frac{n+1}{n} = \Sigma\, (-1)^{n+1}\, u_n$ convergent?

a) $u_n > 0$ en dus is de reeks alternerend;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$;

c) $(1+\frac{1}{n}) > (1+\frac{1}{n+1})$, dus

$$u_n = (1+\frac{1}{n})\log(1+\frac{1}{n}) > (1+\frac{1}{n+1})\log(1+\frac{1}{n+1}) = u_{n+1} .$$

(Men kan natuurlijk ook laten zien dat de afgeleide van $f(x) = (1+\frac{1}{x})\log(1+\frac{1}{x})$ negatief is.)

Conclusie: De reeks is relatief convergent.

Opmerking: Door te vergeten dat $\log \frac{n}{n+1} < 0$ komt men tot de volgende fout:

$$\Sigma\ (-1)^n\ \frac{n+1}{n} \cdot \log \frac{n}{n+1} = \Sigma\ (-1)^n u_n\ ,\quad u_n \geq u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq \ldots .$$

Dit laatste is niet waar. Ook is $(-1)^n$ geen garantie dat een reeks alterneert; zie bijv. $\Sigma\,(-1)^n \frac{\cos \pi n}{n}$ (is divergent).

3. a1) Door vegen volgt uit

$$\begin{aligned} A^{-1}(2,1,-1) &= (0,0,1) \\ A^{-1}(4,1,-2) &= (0,1,0) \\ A^{-1}(2,0,0) &= (1,0,0) \end{aligned} \quad \text{dat} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

a2) We bepalen de wortels van $\det(A^{-1} - \lambda I) = 0$.

$$-\lambda^3 + \tfrac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \tfrac{1}{2} = -(\lambda^2+1)(\lambda - \tfrac{1}{2}) = 0 .$$

$$A^{-1} - \tfrac{1}{2} I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Eigenvectoren bepalen we door op te lossen $(A^{-1} - \frac{1}{2} I)\underline{x} = \underline{0}$. Dit geeft door vegen $\underline{x} = \rho(1,0,0)$.

b1) Er geldt $B\underline{v} = \lambda \underline{v}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$. Stel $\lambda = 0$ dan $B\underline{v} = \underline{0}$; maar $\det B \neq 0$ garandeert een onafhankelijk stelsel, met alleen de nulvector als oplossing. Dat kan niet, want $\underline{v}$ is eigenvector, dus $\neq \underline{0}$. Dus λ kan niet 0 zijn.

b2) $B\underline{v} = \lambda \underline{v}$, $\underline{v} = B^{-1}B\underline{v} = B^{-1}\lambda\underline{v} = \lambda B^{-1}\underline{v}$, d.i. $\frac{1}{\lambda}\,\underline{v} = B^{-1}\underline{v}$.

b3) Blijkens $B^{-1}\underline{v} = \frac{1}{\lambda}\,\underline{v}$ is $\frac{1}{\lambda}$ de bedoelde eigenwaarde.

4. a) Substitutie van $z^2 = x^2 + 3y^2$ in het linkerlid van B geeft $2x^2 + 4y^2 = 2z$, waarna z gemakkelijk is te elimineren:

(1) $(x^2 + 2y^2)^2 - (x^2 + 3y^2) = 0$.

Dit stelt een cylinder voor, met beschrijvenden // z-as en door de punten die zowel op B als op K liggen. De projectie van de doorsnijding van B en K op het XOY-vlak bestaat dus uit de punten, die aan (1) en aan z = 0 voldoen.

b) Over het door (1) omsloten gebied G bepalen we nu

$$I = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \qquad z - 1 = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \ .$$

Dit geeft $I = \iint_G \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

Het ligt nu voor de hand poolcoördinaten in te voeren. Het gebied G wordt dan bepaald door

$$r^4(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi)^2 = r^2(\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi)$$

ofwel

(2) $$r(\varphi) = \frac{\sqrt{1 + 2\sin^2\varphi}}{1 + \sin^2\varphi} \ .$$

Kennelijk geeft dit een kromme met de x-as en y-as als symmetrieassen (dat blijkt uit (1) al). Dus

$$I = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} \frac{rdr}{\sqrt{1 - r^2}} = 4\int_0^{\pi/2} (1 - \sqrt{1 - r^2(\varphi)})d\varphi \ .$$

Substitutie van (2) geeft nu

$$I = 4\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1 + \sin^2\varphi} = 4\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi} = 4\int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + 2t^2} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{2} \ .$$

Herkansingsexamen (tentamen) Wiskunde I/II op maandag 23 januari 1967

1. Gegeven: $\begin{cases} x = ue^{-v} , \\ y = ve^{-u} . \end{cases}$

   Druk $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $\frac{\partial v}{\partial x}$ uit in u en v.

2. Bepaal een richtingsvector van de rechte, die door P(6,2,1) gaat, evenwijdig is met het vlak met vergelijking $x-2y-z=0$ en de z-as snijdt.

3. Teken in het complexe vlak de beeldpunten van de wortels van de vergelijking

$$(z-i)^3 + 8i = 0 .$$

4. Bepaal $\int e^{2x} \cos x \, dx$.

5. Los op de differentiaalvergelijking

$$y''' - y'' + y' - y = e^x .$$

6. Bereken $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x^2 + x \log(1-x)}{\sin x - x}$.

7. Gegeven is de lineaire afbeelding van R_2 in R_3 met matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & a \\ a & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

   a) Bepaal voor alle waarden van a de nulruimte van de afbeelding.

   b) Bepaal voor alle waarden van a de dimensie van en een basis voor de beeldruimte van de afbeelding.

8. Bereken voor het gebied G in het (x,y)-vlak, gegeven door $x \geq 0$, $y \geq \sqrt{x}$, de integraal

$$\iint_G x e^{-y^5} \, dx \, dy .$$

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1967

1. We differentiëren de vergelijkingen $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ impliciet naar x:

$$1 = u_x e^{-v} - uv_x e^{-v} ,$$

$$0 = v_x e^{-u} - vu_x e^{-u} .$$

Uit de laatste vergelijking volgt (wegens $e^{-u} \neq 0$) $v_x = vu_x$. Substitutie geeft dan

$$u_x = \frac{e^v}{1-uv} \quad ; \quad v_x = \frac{ve^v}{1-uv} .$$

2. Noem het gegeven vlak V, de te bepalen rechte $\underline{a} + \lambda\underline{b}$. Dan geldt

1) $\underline{b} \in V$

2) $\underline{b} \in$ vlak door P en de z-as.

M.a.w. $\left.\begin{array}{l} b_1 - 2b_2 - b_3 = 0 , \\ 2b_1 - 6b_2 \qquad = 0 . \end{array}\right\}$ Kies $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3) = (3,1,1)$.

(Hoewel niet gevraagd blijkt $\underline{a} = (0,0,-1)$.)

3. Los op $(z-i)^3 = w^3 = -8i = 8 \cdot e^{(-\pi/2 + 2k\pi)i}$, $(k = 0,1,2)$.

$$w_1 = 2e^{-\pi/6\ i} = \sqrt{3} - i \qquad z_1 = \sqrt{3}$$

$$w_2 = 2e^{\pi/2\ i} = 2i \qquad \text{of} \qquad z_2 = 3i$$

$$w_3 = 2e^{7/6\ \pi i} = -\sqrt{3} - i \qquad z_3 = -\sqrt{3} .$$

4. Partiële integratie of als volgt:

$$\int e^{2x} \cos x dx = \mathrm{Re} \int e^{(2+i)x} dx$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2+i} e^{(2+i)x}\right) + C = \mathrm{Re} \left\{\frac{1}{5} e^{2x}(2-i)(\cos x + i \sin x)\right\} + C$$

$$= \frac{1}{5} e^{2x}(2 \cos x + \sin x) + C .$$

5. Substitutie van $y = e^{tx}$ in de homogene vergelijking geeft

$$t^3 - t^2 + t - 1 = (t^2+1)(t-1) = 0 , \quad t_1 = 1, \ t_2 = i, \ t_3 = -i ,$$

zodat $\quad y_{hom} = \alpha_1 e^x + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 \sin x$.

Als particuliere oplossing proberen we

$$y_{part} = axe^x \quad (\text{en niet } be^x) .$$

Hiervoor vinden we $y^{(n)} = a(x+n)e^x$; dit geeft in de gegeven vergelijking $2a = 1$ zodat de algemene oplossing is:

$$y(x) = (\tfrac{1}{2}x + \alpha_1)e^x + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 \sin x .$$

c.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2 - \frac{x^6}{3} + \ldots\right) + x\left(-x - \frac{x^2}{2} - \ldots\right)}{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) - x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + \text{hogere orde termen}}{-\frac{x^3}{6} + \text{hogere orde termen}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + \ldots}{-\frac{1}{6} + \ldots} = 3 .$$

7. a) Gezocht de $\underline{x}$ met $A\underline{x} = \underline{0}$. M.a.w. we lossen de 3 vergelijkingen met 2 onbekenden $\underline{x} = (x_1, x_2)$ op door vegen met rijen

$$\begin{matrix}(-1,a)\\(a,-1)\\(1,1)\end{matrix} \sim \begin{matrix}(-1,a)\\(0,-1+a^2)\\(0,1+a)\end{matrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{matrix}\sim (-1,-1) & \text{als } 1+a = 0\\ \sim \begin{matrix}(-1,0)\\(0,1+a)\end{matrix} & \text{als } 1+a \neq 0 .\end{matrix}$$

Dus als $a = -1$: $N = \lambda(1,-1)$; als $a \neq -1$: $N = (0,0)$.

b) We bepalen nu het aantal onafhankelijke <u>kolommen</u>

$$\begin{pmatrix}-1 & a\\ a & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & a+1\\ a & -a-1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \sim \begin{pmatrix}-1 & 1\\ a & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\text{als } 1+a = 0\\ \text{resp. } \neq 0 .\end{matrix}$$

De beeldruimte is dus 1- resp. 2-dimensionaal naar gelang $a = -1$ of $\neq -1$; de gevonden vectoren (1 resp. 2) vormen een basis.

8. G ligt rechts van de y-as <u>boven</u> $y = \sqrt{x}$. Integreer eerst naar x:

$$\iint_G xe^{-y^5}\, dx\, dy = \int_0^\infty dy \int_0^{y^2} xe^{-y^5}\, dx = \frac{1}{2}\frac{1}{5}\int_0^\infty e^{-y^5}\, dy^5 = \frac{1}{10} .$$

Proeftentamen Wiskunde II op zaterdag 11 maart 1967

1. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y''' + y'' + y' = 6x^2 + \sinh x + e^{-\frac{1}{2}} .$$

2. a) Bereken

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\log^2(1-x)}} .$$

   b) Men benadert sinh 0,1 door de reeksontwikkeling van sinh x na de term met x^3 af te breken. Geef een schatting van de hierbij gemaakte fout.

3. a) Toon aan dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{1+p}}$ convergeert voor $p > 0$.

   b) Bepaal alle complexe getallen z waarvoor de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} e^{niz}$ convergeert.

4. Geef van elk der volgende beweringen aan of deze al dan niet juist is. Bewijs Uw antwoorden.

   a) Als $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ convergent.

   b) Als de rij a_n begrensd is, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log n}{n}$ divergent.

   c) Als de rij a_n begrensd is, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ absoluut convergent.

   d) Als a_n een begrensde rij is van niet-negatieve getallen dan is $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n}$ convergent.

<u>Opmerking</u>: Een rij a_n heet begrensd als een getal C bestaat zodanig dat $|a_n| < C$ voor alle n.

Oplossingen Proeftentamen maart 1967

1. De karakteristieke vergelijking is

$$t^3 + t^2 + t = 0 , \quad \text{met} \quad t_1 = 0,\ t_2 = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3},\ t_3 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3} .$$

De reële oplossingen van de homogene vergelijking zijn dus

$$(1) \qquad y = \lambda + \mu e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\tfrac{1}{2}x\sqrt{3}) + \nu e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\tfrac{1}{2}x\sqrt{3}) \qquad (\lambda,\mu,\nu \text{ reëel}).$$

Het rechterlid van de inhomogene vergelijking bevat de termen $e^{-\frac{1}{2}} + 6x^2 = (e^{-\frac{1}{2}}+6x^2)e^{0x}$, $\frac{1}{2}e^x$ en $-\frac{1}{2}e^{-x}$. Met het oog op (1) verwachten we dus een particuliere oplossing van de vorm

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + de^x + fe^{-x} .$$

Differentiëren geeft

$$y''' + y'' + y' = a + 2b + 6c + (2b+6c)x + 3cx^2 + 3de^x - fe^{-x} ,$$

wat gelijk wordt aan het gegeven rechterlid als

$$c = 2,\ b = -6,\ a = e^{-\frac{1}{2}},\ d = \frac{1}{6},\ f = \tfrac{1}{2} .$$

De gevraagde oplossingen worden dus gevonden door aan (1) toe te voegen

$$e^{-\frac{1}{2}}x - 6x^2 + 2x^3 + \frac{1}{6}e^x + \tfrac{1}{2}e^{-x} .$$

2. $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\log^2(1-x)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log\cos x}{\log^2(1-x)}} .$$

Stellen we nu $\dfrac{\log\cos x}{\log^2(1-x)} = y$ en $\lim\limits_{x\to 0} y = \ell$, dan geldt: als $x \to 0$ dan $e^y \to e^{\ell}$ (continuïteit van e^y).

Nu is $$\ell = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log(1+\cos x - 1)}{\cos x - 1}\,\frac{\cos x - 1}{\log^2(1-x)}\right\} =$$

$$= 1\cdot\lim_{x\to 0}\left\{\frac{-2\sin^2\frac{1}{2}x}{x^2}\left(\frac{x}{\log(1-x)}\right)^2\right\} = -\tfrac{1}{2}\cdot(-1)^2 = -\tfrac{1}{2} .$$

De uitkomst is dus $e^{-\frac{1}{2}}$.

3\. a) Vergelijk $u_n = \dfrac{\log n}{n^{1+p}}$ met $v_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{2}p}}$.

Omdat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n^{\frac{1}{2}p}} = 0$ geldt voor alle $n \geqslant$ zekere N: $u_n < v_n$.

Evenals $\Sigma\, v_n$ is $\Sigma\, u_n$ dus een convergente reeks.

b) $$|u_n| = \left|\frac{\log n}{n^2}\, e^{nix-ny}\right| = \frac{\log n}{n^2}\, e^{-ny} .$$

Voor $y \geqslant 0$ is de reeks dus (zie a)) absoluut convergent.
Voor $y = -p$, met $p > 0$ vindt men

$$|u_n| = \log n\, \frac{e^{np}}{n^2} \to \infty \qquad \text{als } n \to \infty ;$$

dus divergentie.
De reeks is dus absoluut convergent voor alle z op of boven de reële as, en voor alle andere z divergent.

4\. a) Is juist, want als we $na_n = u_n$ stellen, dan geldt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n+1}{n}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 ,$$

zodat $\Sigma\, u_n$ volgens het criterium van d'Alembert convergeert.

b) Is onjuist, zoals blijkt als men $a_n = 0$ neemt.

c) Is juist, want als $\dfrac{a_n}{n^2} = u_n$ wordt gesteld, dan geldt

$$|u_n| = \frac{|a_n|}{n^2} < \frac{C}{n^2} .$$

Evenals $\Sigma\, \dfrac{1}{n^2}$ is $\Sigma\, |u_n|$ dus convergent.

d) Is onjuist, zoals blijkt door $a_{2k-1} = 0$ en $a_{2k} = 2$ te nemen; dan stemt de reeks nl. overeen met de harmonische reeks, en die is divergent.

Examen (tentamen) Wiskunde II op maandag 12 juni 1967

1. a) Los op $y'''' + y''' = x + e^x$.

   b) Onderzoek met de vergelijkingsstelling voor welke reële x de volgende reeks convergeert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^{2n}}{n^2}\right) .$$

---

2. De lineaire afbeelding A wordt gegeven als spiegeling t.o.v. het vlak

$$\alpha:\ x + y - z = 0 .$$

De lineaire afbeelding B wordt gegeven door de matrix

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} .$$

(Dit is een spiegeling t.o.v. het vlak

$$\beta:\ x - 2y - z = 0 .)$$

De lineaire afbeelding C wordt gedefinieerd door C = BA.

a) Bepaal de matrices van A en C.

b) Bewijs dat C direct orthogonaal, dus een draaiing is.

c) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van C, en bepaal de draaiingsas.

3. a) $$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^n} .$$

   Geef een reductieformule voor I_n.

   b) Bereken $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$.

4. a) Bereken $$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \frac{2 \arcsin y}{\sqrt{1 - y^2}} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx .$$

   b) Bereken $$\iiint_G \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} ,$$

   waarin G gegeven wordt door $\begin{cases} 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ z \geqslant 0 . \end{cases}$

Oplossingen Tentamen juni 1967

1. a) Eerst bepalen we de oplossing van de homogene vergelijking: $y^{(4)} + y^{(3)} = 0$.
Substitueer $y = e^{tx}$, dan wordt de karakteristieke vergelijking: $t^4 + t^3 = 0$
met oplossing: $t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = -1$.
De algemene oplossing van de homogene vergelijking is dus

$$y = \lambda + \mu x + \nu x^2 + \rho e^{-x}.$$

Voor een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking proberen we $y = ax^4 + bx^3 + ce^x$. Dan is

$$y^{(4)} + y^{(3)} = 24ax + 6b + 24a + 2ce^x.$$

Dit wordt gelijk aan $x + e^x$ als $a = \frac{1}{24}$, $b = -\frac{1}{6}$, $c = \frac{1}{2}$.
De algemene oplossing is dus

$$y = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}e^x + \lambda + \mu x + \nu x^2 + \rho e^{-x}.$$

b) De algemene term is $u_n = \log\left(1 + \frac{x^{2n}}{n^2}\right)$. Een noodzakelijke conditie voor convergentie is: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ dus: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{n^2} = 0$; dit geldt alleen voor $|x| \leqslant 1$. Nu geldt: $0 \leqslant \log\left(1 + \frac{x^{2n}}{n^2}\right) < \frac{x^{2n}}{n^2}$ en als $|x| \leqslant 1$:
$0 \leqslant \log\left(1 + \frac{x^{2n}}{n^2}\right) < \frac{x^{2n}}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$. De reeks $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^2}$ is convergent, dus volgens de vergelijkingsstelling convergeert $\sum\limits_1^\infty \log\left(1 + \frac{x^{2n}}{n^2}\right)$ voor $|x| \leqslant 1$. Voor $|x| > 1$ is de reeks divergent, omdat dan niet geldt $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

2. a) De normaal van α is: $(1,1,-1)$ en $A(1,1,-1) = (-1,-1,1)$. $(1,0,1)$ en $(0,1,1)$ zijn vectoren in α en gaan dus in zichzelf over bij spiegeling in α. Door systematisch vegen vinden we nu de beelden van $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,1)$:

$$\begin{array}{lll} (1,1,-1) \to (-1,-1,1) & & (0,1,-2) \to (-2,-1,0) \\ (1,0,1) \to (1,0,1) & \sim & (1,0,1) \to (1,0,1) \quad \sim \\ (0,1,1) \to (0,1,1) & & (0,1,1) \to (0,1,1) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (0,1,-2) \to (-2,-1,0) & & (0,1,0) \to (-2/3,1/3,2/3) \\ (1,0,1) \to (1,0,1) & \sim & (1,0,0) \to (1/3,-2/3,2/3) \\ (0,0,3) \to (2,2,1) & & (0,0,1) \to (2/3,2/3,1/3) \end{array}$$

dus (pas op de volgorde!) de matrix van A is $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$C = BA = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & -9 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

b) A en B zijn spiegelingen dus gespiegeld orthogonale afbeeldingen. Dus det A = det B = -1. Dus is C eveneens orthogonaal en det C = det (BA) = = det B · det A = (-1)(-1) = 1. Dus is C direct orthogonaal.

c) $\det(C-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ geeft $-\lambda^2(1+\lambda) + 1 + \lambda = 0$.

$(1+\lambda)(1-\lambda^2) = 0$, dus $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$.

$$\lambda_1 = 1 : \quad \begin{array}{rcrcl} -x & & +z & = & 0 \\ & -2y & & = & 0 \\ x & & -z & = & 0 . \end{array}$$

Hieraan voldoet de eigenvector $\rho(1,0,1)$. Dit is de draaiingsas (dus tevens de snijlijn van de vlakken α en β).

$$\lambda_2 = \lambda_3 = -1 : \quad \begin{array}{rcrcl} x & & +z & = & 0 \\ & 0y & & = & 0 \\ x & & +z & = & 0 . \end{array}$$

Bij $\lambda = -1$ behoort dus een vlak van eigenvectoren: $x+z = 0$ met uitzondering van (0,0,0).

De draaiingsas is de normaal van dit vlak. De draaiingshoek is π. Dit is te verwachten omdat de vlakken α en β loodrecht op elkaar staan.

3. a) Stel $n \geq 2$:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2-1)^n} = \int \frac{-x^2+1+x^2}{(x^2-1)^n}\,dx = -\int \frac{dx}{(x^2-1)^{n-1}} + \int \frac{x^2dx}{(x^2-1)^n} =$$

$$= -I_{n-1} + \tfrac{1}{2}\int \frac{xd(x^2-1)}{(x^2-1)^n} = -I_{n-1} + \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{1-n}\,xd(x^2-1)^{1-n} =$$

$$= -I_{n-1} + \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{1-n}\left\{x(x^2-1)^{1-n} - \int (x^2-1)^{1-n}\,dx\right\} =$$

$$= -I_{n-1} - \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{n-1}\,\frac{x}{(x^2-1)^{n-1}} + \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{n-1}\,I_{n-1} =$$

$$= \frac{3-2n}{2(n-1)}\,I_{n-1} - \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(x^2-1)^{n-1}}\ .$$

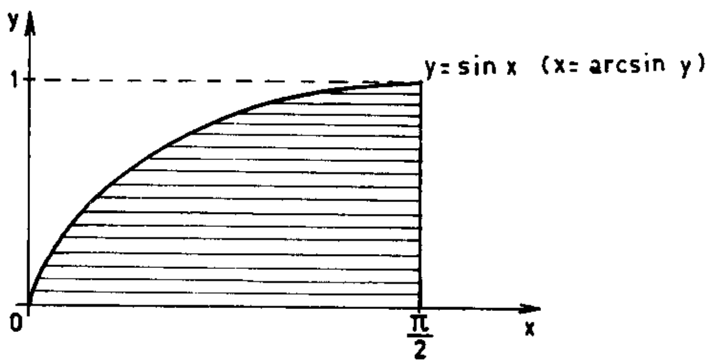
b) We gebruiken de reductieformule van 3a voor $n = 2$:

$$I_2 = \frac{3-2\cdot 2}{2(2-1)}\,I_1 - \frac{1}{2(2-1)}\,\frac{x}{(x^2-1)^{2-1}} = -\tfrac{1}{2}I_1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{x}{x^2-1}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2-1} = \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \tfrac{1}{2}\log|x-1| - \tfrac{1}{2}\log|x+1| + C$$

dus $\quad I_2 = -\tfrac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \tfrac{1}{2}\,\frac{x}{x^2-1} + C\ .$

4. a) Het gebied G, waarover geïntegreerd wordt, wordt begrensd door de x-as, de rechte $x = \frac{\pi}{2}$ en de grafiek van $y = \sin x$



Om de integraal te kunnen bepalen verwisselen we de integratievolgorde:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \int_0^{\sin x} \frac{2\arcsin y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \int_0^{\sin x} 2\arcsin y\ d\arcsin y =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx (\arcsin y)^2 \Big|_0^{\sin x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, x^2 dx\ ,$$

omdat voor $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$: $\arcsin \sin x = x$.

Dus $\quad I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{4}$.

b) 1) Met bolcoördinaten: $\left.\begin{array}{l} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{array}\right\}$

Voor de grenzen vinden we:

$1 \leq \rho^2 \sin^2\theta \leq 4$ dus $\frac{1}{\sin\theta} \leq \rho \leq \frac{2}{\sin\theta}$; $\quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; $\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_{1/\sin\theta}^{2/\sin\theta} \frac{\rho^2 d\rho}{\rho^3} =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta\, \log\rho \Big|_{1/\sin\theta}^{2/\sin\theta} = 2\pi \int_0^{\pi/2} \log 2 \sin\theta\, d\theta = 2\pi \log 2\ .$$

2) Met cylindercoördinaten: $\left.\begin{array}{l} x = r \cos\varphi \\ y = r \sin\varphi \\ z = z \end{array}\right\}$

Nu worden de grenzen: $1 \leq r \leq 2$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $0 \leq z$.

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 r\, dr \int_0^{\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}\ .$$

In de laatste integraal fungeert r als constante; substitueer $z = r \tan\xi$, dan volgt

$$I = 2\pi \int_1^2 r\, dr \int_0^{\pi/2} \frac{r\, d\tan\xi}{(r^2 + r^2\tan^2\xi)^{3/2}} = 2\pi \int_1^2 \frac{dr}{r} \int_0^{\pi/2} \cos\xi\, d\xi = 2\pi \log 2\ .$$

Herkansingsexamen (tentamen) Wiskunde I/II op woensdag 21 juni 1967

1. Bepaal $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \pi/4}$.

2. a) Bepaal de afgeleide van de functie

$$f(x) = x^{\arctan x} , \quad x > 0 .$$

b) Bepaal $\int \dfrac{x}{\cos^2 x} dx$.

3. Gegeven is het oppervlak

$$z = 2 \arctan \frac{e^x}{y} , \quad y \neq 0 .$$

Gevraagd wordt de vergelijking van het raakvlak in het punt $(0,1,\pi/2)$.

4. Los op

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 5 \\ 8x - 4y - z &= 0 \\ 3x + 2y - 3z &= 7 . \end{aligned}$$

5. Los op $z^3 = 4 + 4i\sqrt{3}$.

6. Voor welke reële waarden van x convergeert de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n} .$$

7. Een lineaire afbeelding A van R_3 heeft als matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Bewijs dat A een draaiing voorstelt.

8. Bepaal $\int \dfrac{dx}{x^2 + x - 2}$.

9. Bereken de inhoud van het lichaam bepaald door

$$x^2 + y^2 \leq 1 , \quad x^2 - y^2 + z \leq 0 , \quad z \geq 0 .$$

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1967

1. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \pi/4} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin(y+\pi/4) - \cos(y+\pi/4)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{2\sin y \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}{y} = \sqrt{2}$.

2. a) $(x^{\arctan x})' = (e^{\log x \arctan x})' = e^{\log x \arctan x}(\log x \arctan x)' =$

$$= x^{\arctan x}\left(\frac{\arctan x}{x} + \frac{\log x}{1+x^2}\right) .$$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = \int x\,d\tan x = x\tan x - \int \tan x\,dx = x\tan x + \log|\cos x| + C$.

3. De vergelijking is $z - \frac{\pi}{2} = a(x-0) + b(y-1)$ met constanten a en b nl.

$$a = (z_x)_{(0,1)} = \left(\frac{2e^{x}/y}{1+e^{2x}/y^2}\right)_{(0,1)} = 1 , \quad b = (z_y)_{(0,1)} = \left(\frac{-2e^{x}/y^2}{1+e^{2x}/y^2}\right)_{(0,1)} = -1 .$$

Dit geeft $x - y - z = -\frac{\pi}{2} - 1$.

4. Herleid de vergelijkingen tot een eenvoudiger equivalent stelsel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 8 & -4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 10 & 0 & -5 & 10 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Het laatste stelt voor: $\begin{aligned} -3x + 2y \quad &= 1 \\ 2x \quad - z &= 2 . \end{aligned}$

Stel $x = 2\lambda$ dan volgt $y = \frac{1}{2} + 3\lambda$, $z = 4\lambda - 2$; samengevat

$$\underline{x} = (0, \tfrac{1}{2}, -2) + \lambda(2,3,4) .$$

5. $4 + 4i\sqrt{3} = \sqrt{16+48}\cdot e^{i\varphi}$; dus $e^{i\varphi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $\varphi = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$.

Dus $\qquad z = \sqrt[3]{8}\cdot e^{i(\pi/9 + k2\pi/3)} , \quad k = 0,1,2$.

$$z_1 = 2e^{i\pi/9} , \quad z_2 = 2e^{7i\pi/9} , \quad z_3 = 2e^{13i\pi/9} = 2e^{-5i\pi/9} .$$

6. De convergentiestraal vinden we met

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x|^2 = |x|^2 .$$

De reeks is dus convergent als $|x| < 1$
divergent als $|x| > 1$ dus $R = 1$.

In de randpunten $x = \pm 1$ gaat de reeks over in $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ met $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Deze reeks is niet absoluut convergent ($\Sigma \frac{1}{n}$ divergent). Wel is voldaan aan

1) de reeks is alternerend;
2) $|u_n| \geq |u_{n+1}| \geq |u_{n+2}| \geq \dots$;
3) $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

Dus ook voor $x = 1$ en -1 is de reeks convergent (relatief).

7. De matrix is orthogonaal:

$$A^T A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = I .$$

Verder is

$$\det A = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = +1 .$$

Dus is A een direct orthogonale afbeelding van R_3, en dat is altijd een draaiing om een as (stelling).

8. $$\int \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \int \left(\frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2}\right) dx = \frac{1}{3} \log \left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C .$$

9. $z = y^2 - x^2$ is een hyperbolische paraboloïde, die gedeeltelijk boven de cirkel $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ ligt, nl. boven de twee sectoren waar $|y| > |x|$. Hierover moet $z = y^2 - x^2$ worden geïntegreerd. Vanwege de symmetrie t.o.v. de x-as kan met één sector worden volstaan.
Men vindt met poolcoördinaten:

$$\text{Inhoud} = 2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^1 r\, dr (r^2 \sin^2\varphi - r^2 \cos^2\varphi) = \Big[- \sin 2\varphi\Big]_{\pi/4}^{3\pi/4} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} .$$

Examen (tentamen) Wiskunde II op maandag 8 januari 1968

1. a) Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{1-\cosh x - x^2\cos x + \arctan x^2} .$$

b) Gegeven is dat de reeks $\sum\limits_1^\infty a_n$ convergeert en $a_n \geqslant 0$.

Onderzoek op convergentie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{\sqrt{1+a_n} - 1\} .$$

2. A is een lineaire afbeelding van R_3 in zichzelf, met als matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad (\alpha \text{ reëel}) .$$

a) Bepaal eigenvectoren en eigenwaarden van A.

b) Bepaal α zó dat A regulier is en

$$A(1,0,-1) = A^2(1,0,-1) .$$

3. Bereken de inhoud van het gedeelte van de bol $x^2 + y^2 + z^2 - 2za = 0$ waarvoor $x^2 + y^2 \leqslant 3z^2$ $(a > 0)$.

4. a) Bepaal $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{(1+3\cos^2 x)\cos x}$.

b) Bereken

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(3x+1)\sqrt{x^2-1}} .$$

<u>Oplossingen Tentamen januari 1968</u>

1. a) $\log(1+x^2) = x^2 - \dots$ $\qquad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots$

$x^2\cos x = x^2 - \dots$ $\qquad \arctan x^2 = x^2 - \dots$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{1-\cosh x - x^2\cos x + \arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \dots}{1-(1+\frac{x^2}{2}) - x^2 + x^2 + \dots} = -2 .$$

b) $$|t_n| = \sqrt{1+a_n} - 1 = \frac{a_n}{\sqrt{1+a_n}+1} \leq \frac{a_n}{2} \ .$$

Daar $a_n \geq 0$ en gegeven is dat $\sum_1^\infty a_n$ convergeert, convergeert $\sum_1^\infty t_n$ zelfs absoluut.

Opmerking: Het leidt tot geen resultaat wanneer men probeert gebruik te maken van het feit dat de reeks $\Sigma\, t_n$ alterneert. Er is nl. niet bekend of $|t_n|$ <u>monotoon</u> naar 0 gaat.

2. a) A kan hoogstens drie verschillende eigenwaarden hebben. Het is zonder meer te zien dat α, $\alpha+1$, $\alpha-1$ eigenwaarden zijn, want voor deze waarden van λ wordt de matrix

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha-\lambda & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

singulier. Hetzelfde resultaat volgt uit (ontwikkel naar de tweede kolom)

$$|A - \lambda I| = (\alpha-\lambda)\{(\alpha-\lambda)^2 - 1\} = 0 \ .$$

Als eigenvectoren vindt men:

$$\begin{array}{lll} \text{bij } \lambda_1 = \alpha & : & \mu(0,1,0) \\ \text{bij } \lambda_2 = \alpha+1 & : & \mu(1,2\alpha,1) \\ \text{bij } \lambda_3 = \alpha-1 & : & \mu(1,0,-1) \ . \end{array}$$

b) $(1,0,-1)$ is de eigenvector behorende bij de eigenwaarde $\alpha-1$, dus

$$A(1,0,-1) - A^2(1,0,-1) = \{(\alpha-1) - (\alpha-1)^2\}(1,0,-1) =$$
$$= (\alpha-1)(2-\alpha)(1,0,-1) \ .$$

Dit geeft de nulvector voor $\alpha = 1$ (maar dan is A singulier) en voor $\alpha = 2$. Deze laatste waarde moeten we hebben.

3. a) Oplossing met gebruik van bolcoördinaten.
Het volume element is $\rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$.
Het inwendige van de bol is het gebied waarvoor geldt $\rho < 2a\cos\theta$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.
Het inwendige van de kegel is het gebied waarin voldaan is aan $\sin^2\theta < 3\cos^2\theta$, dus $0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}$.

Dus $\quad I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \rho^2 d\rho = -2\pi \int_0^{\pi/3} \frac{8a^3}{3} \cos^3\theta\, d\cos\theta =$

$$= -\frac{4}{3}\pi a^3 \cos^4\theta \Big|_0^{\pi/3} = \frac{4}{3}\pi a^3 (1 - \frac{1}{16}) = \frac{5}{4}\pi a^3 .$$

b) Oplossing met gebruik van cylindercoördinaten.
Het volume element is $r\, d\varphi\, dr\, dz$.
Het deel van de bol dat buiten de kegel is gelegen is het gebied waarin voldaan is aan $z\sqrt{3} < r < \sqrt{2az - z^2}$; $0 < z < \frac{1}{2}a$.
De inhoud van dat deel is dus

$$I' = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}a} dz \int_{z\sqrt{3}}^{\sqrt{2az - z^2}} r\, dr = \pi \int_0^{\frac{1}{2}a} (2az - 4z^2) dz =$$

$$= \pi \left(az^2 - \frac{4z^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}a} = \frac{1}{12}\pi a^3 .$$

De inhoud van het resterende deel is dan

$$I = \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{1}{12}\pi a^3 = \frac{5}{4}\pi a^3 .$$

4\. a) $\int \frac{\sin x\, dx}{(1 + 3\cos^2 x)\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{(1 + 3\cos^2 x)\cos x} = \int \frac{3\cos x\, d\cos x}{1 + 3\cos^2 x} - \int \frac{d\cos x}{\cos x} =$

$$= C + \frac{1}{2} \log \frac{1 + 3\cos^2 x}{\cos^2 x} .$$

b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(3x+1)\sqrt{x^2 - 1}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d(1/\cos u)}{(1 + 3/\cos u)\tan u} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\cos u + 3} = \int_0^1 \frac{dt}{2 + t^2} =$

$$= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dp}{\sqrt{2}(1 + p^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan p \Big|_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

(Gebruikt zijn de substituties $x = \frac{1}{\cos u}$, $\tan \frac{u}{2} = t$, $t = p\sqrt{2}$.)

Niet reglementair (voor bepaalde integralen), maar toch goed is:
$\sqrt{x^2 - 1} = x - t$, dus $x = \frac{t^2 + 1}{2t}$, enz.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(3x+1)\sqrt{x^2-1}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{3t^2+2t+3} = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{(t+\frac{1}{3})^2+\frac{8}{9}} =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{\frac{1}{4}\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{\frac{2}{3}\sqrt{2}\,dp}{\frac{8}{9}(p^2+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\sqrt{2} - \arctan\frac{\sqrt{2}}{4}\right) .$$

Herkansingsexamen (tentamen) Wiskunde I/II op maandag 22 januari 1968

1. Door de betrekkingen

$$\begin{cases} y^x = 1 + z \\ xy + z^2 = 3 \end{cases}$$

zijn y en z vastgelegd als functies van x.
Bereken $\frac{dz}{dx}$ in het punt $(x,y,z) = (3,1,0)$.

2. Voor welke waarden van a heeft het stelsel

$$\begin{cases} (a-1)x + 3y = a \\ \quad ax + 6y = 4 \end{cases}$$

oplossingen?
Bepaal voor die waarden van a alle oplossingen van het stelsel.

3. Teken in het complexe vlak de beeldpunten van de complexe getallen z waarvoor $\frac{z^2}{z+1}$ reëel is.

4. Bepaal de extrema van $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

5. Bepaal alle reële oplossingen van $y''' + 8y = 16x$.

6. Voor welke reële x convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n + \frac{1}{n}}$?

7. Bereken $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{(x-1)^2}\, dx$.

8. Gegeven is een lineaire afbeelding van R_4 in R_3 door de matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Bepaal

a) de rang van de matrix,

b) de dimensie en een basis van de nulruimte van de afbeelding,

c) de dimensie en een basis van de beeldruimte van de afbeelding.

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1968

1. Impliciet differentiëren naar x geeft:

$$y^x(\log y + \frac{x}{y}y') = z' . \quad \text{In } (3,1,0): \quad 3y' = z'$$

$$y + xy' + 2zz' = 0 . \qquad 1 + 3y' = 0 \quad \text{dus } z' = -1 .$$

2. $$\left(\begin{array}{cc|c} a-1 & 3 & a \\ a & 6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} a-1 & 3 & a \\ 2-a & 0 & 4-2a \end{array}\right) ; \quad \text{voor } a \neq 2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} a-1 & 3 & a \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right) .$$

$a \neq 2$ geeft dus $(x,y) = (2 , \frac{2}{3} - \frac{1}{3}a)$.

$a = 2$ geeft: $x + 3y = 2$; $(x,y) = (2,0) + \lambda(3,-1)$.

3. $$\frac{z^2}{z+1} = \frac{x^2 - y^2 + 2xyi}{x+1+iy} = \frac{(x+1)(x^2-y^2) + 2xy^2 + i(x^2+y^2+2x)y}{(x+1)^2 + y^2} .$$

Dit is reëel als $y(x^2 + y^2 + 2x) = 0$, dus als $y = 0$ en/of $x^2 + 2x + y^2 = (x+1)^2 + y^2 - 1 = 0$; de gevraagde beeldpunten z liggen dus op de reële as $(z \neq -1)$ en op de cirkelomtrek met middelpunt $(-1,0)$ en straal 1.

4. f(x) is voor alle x gedefinieerd.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}(1+x^2)} .$$

Voor $|x| < 1$ of > 1 is dit nooit nul, dus daar geen extrema.
$x = +1$ geeft: $f(1) = \pi/2$ dus $(1,\pi/2)$ is globaal maximum.
$x = -1$ geeft: $f(-1) = -\pi/2$ dus $(-1,-\pi/2)$ is globaal minimum.
(De grafiek vertoont daar knikken.)

5. De karakteristieke vergelijking luidt: $t^3 + 8 = (t+2)(t^2 - 2t + 4) = 0$.

$t_1 = -2$; $t_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$ dus $y_{hom} = \lambda e^{-2x} + e^x(\mu \cos x\sqrt{3} + \nu \sin x\sqrt{3})$.

$y_{part} = 2x$ (direct in te zien); dus $y = y_{hom} + 2x$ $(\lambda,\mu,\nu$ reëel).

6. $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1+1/(n+1)}{n+1/n}|x|^3 = |x|^3 \; ; \text{ dus } \begin{array}{l} \text{convergent als } |x| < 1 \\ \text{divergent als } |x| > 1 . \end{array}$$

$x = 1$: $u_n = \frac{1}{n+1/n} = 1/n \cdot \frac{1}{1+1/n^2} > \frac{1}{2n}$; dus divergent.

$x = -1$: $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + 1/n}$, term van relatief convergente reeks: alternerend,

$|u_n|$ monotoon dalend naar 0 (monotoon want $n + \frac{1}{n} < n + 1 + \frac{1}{n+1}$).

7. $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{(x-1)^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2x}{(x-1)^2}\right) dx = \tfrac{1}{2} - 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\, d\,\frac{1}{x-1} = \tfrac{1}{2} - 2\left[\frac{x}{x-1} - \log|x-1|\right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\tfrac{1}{2} - 2\log 2\ .$$

8. $$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) rang = 2.

b) dim. nulruimte = 4 - 2 = 2; basis: (0,0,1,-1), (1,1,0,-2); dit zijn nl. 2 onafhankelijke oplossingen van

$$2x_1 + x_3 + x_4 = 0\ , \quad -x_1 + x_2 = 0\ .$$

c) dim. beeldruimte = rang = 2; basis (1,1,1) , (3,-1,1) of (1,-1,0) , (2,0,1). (N.b. de nulruimte is een deel van R_4, de beeldruimte een deel van R_3.)

Proeftentamen Wiskunde II op zaterdag 9 maart 1968

1. Bereken $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}\arctan x - \sin(x\sqrt{2})}{x(2+\cos x) - 3\sin x}$.

2. Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1-x}{x}\right)^n \qquad (x \text{ is reëel}).$$

a) Voor welke waarden van x convergeert de reeks?

b) Bepaal de som van de reeks voor alle onder a) gevonden waarden van x.

3. Teken in het complexe vlak de beeldpunten van de complexe getallen z waarvoor de onderstaande reeks convergeert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{n}\right)(1-z)^n .$$

4. Bepaal voor alle reële waarden van de parameter a de oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' - ay' + (2a-4)y = 4x + 4 .$$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ is een reeks met uitsluitend positieve termen.
Geef van elk der onderstaande uitspraken aan of hij juist is en motiveer Uw antwoord.

A. Als $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ convergeert, dan convergeert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

B. Als de partiële sommen van de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ kleiner zijn dan 100, dan geldt $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

C. Als de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ convergeert, dan convergeert de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{u_n}{n}$.

D. Als er een natuurlijk getal N bestaat zodat voor alle $n > N$ geldt

$\sqrt[n]{u_n} \leq \frac{5}{7}$, dan convergeert de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Oplossingen Proeftentamen maart 1968

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots) - x\sqrt{2} + \frac{2x^3\sqrt{2}}{3!} - \frac{4x^5\sqrt{2}}{5!} + \ldots}{x\left(2 + 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) - 3x + \frac{3x^3}{3!} - \frac{3x^5}{5!} + \ldots} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}(\frac{1}{5} - \frac{1}{30})x^5 + \ldots}{(\frac{1}{24} - \frac{1}{40})x^5 + \ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}\sqrt{2} + \text{machten van } x}{\frac{1}{60} + \text{machten van } x} = 10\sqrt{2}\ .$$

2. a) Het criterium van d'Alembert zegt:

als $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left|\frac{1-x}{x}\right| = \left|\frac{1-x}{x}\right| \begin{array}{l} < 1, \text{ dan convergentie} \\ > 1, \text{ dan divergentie}\ . \end{array}$$

Dus convergentie als $|x-1| < |x|$, $(x-1)^2 < x^2$, $x > \frac{1}{2}$.
Voor $x < \frac{1}{2}$, en ook voor $x = \frac{1}{2}$ (dan harmonische reeks), divergentie.

b) Voor $x > \frac{1}{2}$ geeft $\frac{1-x}{x} = t$ de convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n$.

De som is $-\log(1-t) = -\log(1 - \frac{1-x}{x}) = -\log(2 - \frac{1}{x})$.

3. De reeks Σu_n met $u_n = \dfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{n} = \dfrac{2\sin^2\frac{1}{2n}}{n} < \frac{1}{2}\dfrac{1}{n^3}$ is convergent (vergelijkingsstelling). Dus is $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(1-z)^n$ absoluut convergent als $|1-z| \leq 1$.

Voor $|1-z| > 1$ is de reeks divergent, zoals blijkt uit het criterium van d'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(1-z)^{n+1}}{u_n(1-z)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2n+2}}{\sin^2\frac{1}{2n}}\cdot\frac{n}{n+1}\right)|1-z| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2n}}{\sin\frac{1}{2n}}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{1}{2n+2}}{\frac{1}{2n+2}}\right)^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^3|1-z| = |1-z| > 1\ .$$

De beeldpunten liggen dus binnen en op de cirkel om 1 met straal 1.

4. De karakteristieke vergelijking is

$$t^2 - at + 2a - 4 = 0 \quad\text{of}\quad (t - \tfrac{1}{2}a)^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - 2a + 4 = (\tfrac{1}{2}a - 2)^2$$

$$t_1 = a - 2,\quad t_2 = 2\ .$$

Dit geeft

$$y_{hom} = \lambda e^{(a-2)x} + \mu e^{2x} \quad \text{als } a \neq 4$$

$$= \lambda e^{2x} + \mu x e^{2x} \quad \text{als } a = 4 .$$

Als $a \neq 2$ dan proberen we een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking te verkrijgen met $y = px + q$; dit geeft

$$-ap + (2a-4)(px+q) = 4x + 4 \; ; \; p = \frac{2}{a-2} \; , \; q = \frac{3a-4}{(a-2)^2}$$

$$y = y_{hom} + \frac{2}{a-2}x + \frac{3a-4}{(a-2)^2} \quad \text{(geldt ook als } a=4).$$

Als $a = 2$ en dus $t_1 = 0$, dan vinden we een particuliere oplossing met $y = ux^2 + vx$; dit geeft

$$2u - 2(2ux+v) = 4x + 4 \; ; \; u = -1, \; v = -3$$

$$y = \lambda + \mu e^{2x} - x^2 - 3x .$$

5. A. Onjuist; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergeert maar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ niet.

B. De partiële sommen s_n vormen een stijgende (want $u_n > 0$), begrensde (want < 100) rij; dus bestaat $\lim_{n\to\infty} s_n$; anders gezegd: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is convergent; bij elke convergente reeks Σu_n geldt $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

C. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ convergeert zelfs absoluut, want $\frac{u_n}{n} \leq u_n$.

D. Uit $u_n \leq (\frac{5}{7})^n$ voor $n > N$ volgt, eveneens op grond van de vergelijkingsstelling, dat $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergeert; $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{5}{7})^n$ is immers een convergente meetkundige reeks.

Examen (tentamen) Wiskunde II op woensdag 12 juni 1968

1. a) Onderzoek of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

convergeert, dan wel divergeert.

b) Bepaal de algemene reële oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y''' - y'' + y' - y = e^x + e^x \cos x \,.$$

---

2. a) Bepaal de vergelijking van de omwentelingscylinder met as $\underline{x} = \lambda(1,2,0)$, die gaat door het punt $(0,0,1)$.

b) Bereken de inhoud van het deel van de ruimte, waarvoor geldt

$$x \geqslant 0 \,, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1 \,,$$

$$x^2 + y^2 \leqslant 2 \,, \qquad 0 \leqslant z \leqslant x\sqrt{1 - y^2} \,.$$

3. Bereken de volgende integralen

a) $$\int \frac{4dx}{(x-1)(x^2 - 4x + 3)} \,.$$

b) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x} \,.$$

4. De lineaire afbeelding A van R_2 in R_2 is gegeven door

$$A\underline{x} = p\underline{x} - (\underline{a}\,, \underline{x})\underline{a} \,,$$

waarbij $\underline{a}$ een vaste vector met lengte 1 is, en p een reëel getal.

a) Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van A.

b) Voor welke p bestaat er een vector $\underline{x} \neq \underline{0}$ waarvoor geldt $A\underline{x} = \underline{0}$?

Oplossingen Tentamen juni 1968

1. a) $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} > 0 \qquad 0 < \sin(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) < \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

dus $0 < u_n < \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

Omdat $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ convergeert is volgens de vergelijkingsstelling ook $\Sigma\, u_n$ convergent.

b) Substitutie van $y = e^{tx}$ in de homogene differentiaalvergelijking levert

$$(t-1)(t^2+1) = 0 \ ; \quad t_1 = 1 , \quad t_2 = i , \quad t_3 = -i .$$

Hieruit volgt

$$y_{hom} = \lambda e^x + \mu \cos x + \nu \sin x .$$

Er moet een particuliere oplossing zijn van de gedaante

$$y = axe^x + be^x \cos x + ce^x \sin x$$

	xe^x	e^x	$e^x \cos x$	$e^x \sin x$
y	a	-	b	c
y'	a	a	b + c	-b + c
y''	a	2a	2c	-2b
y'''	a	3a	-2b+2c	-2b-2c

Substitutie in de oorspronkelijke differentiaalvergelijking leidt tot

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ -2b + c = 1 \\ -b - 2c = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2} \\ b &= -2/5 \\ c &= 1/5 . \end{aligned}$$

De gevraagde algemene reële oplossing is dus

$$y = \lambda e^x + \mu \cos x + \nu \sin x + \tfrac{1}{2} xe^x - \frac{2}{5} e^x \cos x + \frac{1}{5} e^x \sin x \quad (\lambda,\mu,\nu \text{ reëel})$$

2. a) De lijn door $(0,0,1)$ // as is $(0,0,1) + \lambda(1,2,0)$; een willekeurig punt P daarop is $(\lambda, 2\lambda, 1)$. Neem nu 1° het vlak door P $\perp$ as: $x + 2y = 5\lambda$; 2° de bol door P met middelpunt O (op de as!): $x^2 + y^2 + z^2 = 5\lambda^2 + 1$. Hun doorsnijding is een cirkel. Eliminatie van λ geeft het oppervlak dat deze cirkel beschrijft als λ varieert; men vindt

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 5z^2 = 5 .$$

Aldus wordt het gevraagde oppervlak gevonden op de manier, die bij omwentelingsoppervlakken gebruikelijk is.

Men kan ook de methode ter bepaling van cylinderoppervlakken toepassen. Als richtkromme van de cylinder kan blijkbaar worden genomen: de eenheidscirkel in het vlak door O ⊥ as

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 , \quad x + 2y = 0 .$$

Als (x_0, y_0, z_0) op deze richtkromme ligt, dus als

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 , \quad x_0 + 2y_0 = 0$$

dan is

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda \\ y &= y_0 + 2\lambda \\ z &= z_0 \end{aligned}$$ een parametervoorstelling van een beschrijvende.

Elimineer λ, x_0, y_0, z_0 uit dit vijftal vergelijkingen; eerst x_0, y_0, z_0:

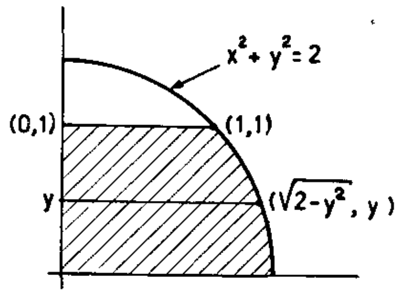
$$(x-\lambda)^2 + (y-2\lambda)^2 + z^2 = 1 , \quad x + 2y = 5\lambda ;$$

vervolgens λ:

$$(5x - x - 2y)^2 + (5y - 2x - 4y)^2 + 25z^2 = 25$$

of

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 5z^2 - 5 = 0 .$$



b) Inhoud $= \iint_G x\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy =$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} x\,dx = \tfrac{1}{2} \int_0^1 (2-y^2)\sqrt{1-y^2}\,dy .$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{\pi}{4} ; \quad -\tfrac{1}{2}\int_0^1 y^2\sqrt{1-y^2}\,dy = -\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{32} .$$

Inhoud $= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{32} = \frac{7}{32}\pi .$

3\. a) $$\frac{4}{(x-1)(x^2-4x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-3} .$$

$$4 = A(x-1)(x-3) + B(x-3) + C(x-1)^2$$

$x=1$: $\quad 4 = -2B \quad$ dus $\quad B = -2$

$x=3$: $\quad 4 = 4C \quad$ " $\quad C = 1$

coëf.v.x^2: $0 = A + C \quad$ " $\quad A = -1$

$$I = \log\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + \frac{2}{x-1} + C .$$

b) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x} = \int \frac{1}{\sin^4 x}\, d\tan x = \int \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2}{\sin^4 x}\, d\tan x =$$

$$= \int\left(1 + \frac{2}{\tan^2 x} + \frac{1}{\tan^4 x}\right) d\tan x = \tan x - \frac{2}{\tan x} - \frac{1}{3\tan^3 x} + C .$$

4\. a) Voor $\underline{x} \neq \underline{0}$ moet voldaan zijn aan $\lambda\underline{x} = p\underline{x} - (\underline{a}, \underline{x})\underline{a}$ of $(p-\lambda)\underline{x} = (\underline{a}, \underline{x})\underline{a}$. Hieraan wordt voldaan: 1° als $(\underline{a}, \underline{x}) = 0$, $p = \lambda$ d.w.z. de vectoren $\mu\underline{b}$, waarbij $\underline{b} \perp \underline{a}$, zijn eigenvectoren bij eigenwaarde p; 2° als $\underline{x} = \nu\underline{a}$ d.w.z. $(p-\lambda)\nu\underline{a} = \nu(\underline{a}, \underline{a})\underline{a} = \nu\underline{a}$, $p - \lambda = 1$; de vectoren $\nu\underline{a}$ met $\nu \neq 0$ zijn eigenvectoren bij eigenwaarde $p - 1$.

b) Een dergelijke vector bestaat, of anders gezegd, de nulruimte van A heeft dimensie $\neq 0$, als de afbeelding een eigenwaarde 0 heeft.
Onder a) zijn de eigenwaarden bepaald: $\lambda_1 = p$, $\lambda_2 = p - 1$. Voor $p = 0$ en voor $p = 1$ bestaat dus een vector $\underline{x} \neq \underline{0}$ met $A\underline{x} = \underline{0}$.

Herkansingsexamen (tentamen) Wiskunde I/II op woensdag 19 juni 1968

1. Bepaal $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{2}{\sin 2x}\right)$.

2. z en u zijn impliciet gegeven als functies van x en y door

$$x + y + z + u = 1$$
$$x^2 - y^2 + z^2 - u^2 = 1 .$$

Bereken $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ in $(x,y,z,u) = (1,2,-2,0)$.

3. Voor welke reële waarde(n) van a is het volgende stelsel oplosbaar

$$x + ay = a^2$$
$$ax + y = 1 .$$

Bepaal voor die waarden van a de oplossing(en).

4. Bepaal de complexe getallen $z = re^{i\varphi}$ waarvoor

$$|e^{1/z^3}| = 1 .$$

5. Bepaal de vergelijking van de kegel met top (0,0,0) en richtkromme

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 . \end{cases}$$

6. Bepaal de as van de draaiing in R_3 die gegeven wordt door de matrix

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

7. Bereken de inhoud van het lichaam bepaald door

$$x^2 + y^2 + (z - \tfrac{1}{2})^2 \leq 1$$
$$x^2 + y^2 + (z + \tfrac{1}{2})^2 \leq 1 .$$

8. Ga na of de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$ convergeert.

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1968

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{2}{\sin 2x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{-4\sin^2 \frac{1}{2}x}{\sin 2x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-4\sin^2 \frac{1}{2}x}{(\frac{1}{2}x)^2}\,\frac{\frac{1}{4}x}{\sin 2x} = -4\cdot\frac{1}{8} = -\frac{1}{2}$.

2. $z = z(x,y)$; $u = u(x,y)$; $P = (1,2,-2,0)$

$1 + z_x + u_x = 0$; $u_x = -1 - z_x$;

$2x + 2zz_x - 2uu_x = 0$; $z_x(P) = \frac{1}{2}$; $u_x(P) = -1\frac{1}{2}$;

$2 + 2z_x^2 + 2zz_{xx} - 2u_x^2 - 2uu_{xx} = 0$; z_{xx} in P : $z_{xx} = -\frac{1}{2}$.

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1-a^2 & 0 & a^2-a \\ a & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ als $a = 1$

$\left(\begin{array}{cc|c} a+1 & 0 & -a \\ a & 1 & 1 \end{array}\right)$ als $a \neq 1$.

Bij $a = 1$ staat er $x + y = 1$; dus $\underline{x} = (0,1) + \lambda(1,-1)$.

Bij $a \neq 1$ volgt, mits $a + 1 \neq 0$: $x = \frac{-a}{a+1}$, $y = 1 + \frac{a^2}{a+1}$.

Bij $a = -1$ is het stelsel strijdig.

4. $z = re^{i\varphi}$; $w = z^{-3} = r^{-3}e^{-3i\varphi}$; $|e^w| = e^{\mathrm{Re}\,w} = e^{r^{-3}\cos 3\varphi} = 1$,

dus $\cos 3\varphi = 0$, $3\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\varphi = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$.

Dit geeft de rechten $x = 0$ en $y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}\,x$ (oorsprong uitgesloten).

5. Rechte ℓ door 0 in richting (u,v,w): $(x,y,z) = \lambda(u,v,w)$.
Snijdt richtkromme als voor zekere λ

$$\lambda^2(u^2+v^2+w^2) = 1 \qquad \lambda(u+v+w) = 1 .$$

Dus moeten u,v,w voldoen aan (λ elimineren)

$$u^2 + v^2 + w^2 = (u+v+w)^2 .$$

De punten der rechten ℓ die de richtkromme snijden voldoen dus aan

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2$$

ofwel $\quad xy + yz + zx = 0$.

6. De as is de eigenvector bij eigenwaarde $\lambda = 1$.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dus de as is: $\underline{x} = \alpha(1,1,0)$.

7. Neem cylindercoördinaten; dan over de cirkelschijf $r \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{3}$ te integreren $z = (\sqrt{1-r^2} - \frac{1}{2})$:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} r\,dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}-\frac{1}{2}} dz = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} (r\sqrt{1-r^2} - \tfrac{1}{2}r)dr = \frac{5}{24}\pi \ .$$

Dit is de inhoud van de door $z = 0$ van $x^2 + y^2 + (z+\frac{1}{2})^2 \leqslant 1$ afgesneden kap. De gevraagde inhoud is het dubbele: $\frac{5}{12}\pi$.

Daar het een omwentelingsfiguur is, kan het ook eenvoudig als volgt:

$$I = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \pi r^2\,dz \qquad \text{met} \quad r^2 = 1 - (z+\tfrac{1}{2})^2 \ .$$

8. $u_n = \sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}$ is negatief; beschouw dus $|u_n|$:

$|u_n| = \frac{1}{3!}\frac{1}{n^3} - \frac{1}{5!}\frac{1}{n^5} + \ldots < \frac{1}{3!}\frac{1}{n^3}$; want bij een alternerende reeks met monotoon naar nul dalende termen is de som kleiner dan de eerste term. Volgens de vergelijkingsstelling is Σu_n dus (absoluut) convergent; immers $\Sigma \frac{1}{n^3}$ convergeert.

Indeling van de stof over de tentamens

Tentamen	D.V.	Σ	$\int$	$\iint$	lengte opp.	meet-kunde	lin. afb.	com-plex	rest WI
II 1.60	1a	1b, 4		2b	2a	3		4a	
P 3.60	1	3, 4						2	
II 6.60		1a, 3'b		4b	4a	2	3	1b,3'b	
II 1.61	1	3, 4	7			5, 6	8	2	
P 3.61	1, 7	2 t/m 5						6	
II 6.61	2a	1a	2b			4	3	1b	
II 1.62	3	2	5			4	6	1	
		d t/m f						a t/m c	
P 3.62	n t/m p	i t/m m	m	u l	t i p l e	c h o i	c e	g t/m i	
		r t/m t						q	
II 6.62	1a	1b, 4a	2a	2b		4b	3		
II 1.63	1	2, 3	3b	4		5a	5bc	2	
H 1.63		7, 8	10	11		9	12	6	1 t/m 5
P 3.63	a t/m e	f t/m t	m	u l	t i p l e	c h o i	c e	k	
II 6.63	1a	1b, 2a		4b	4a	2b	3		
H 6.63		6	3	8		7		5	1,2,4
II 1.64	1	2		3			4		
H 1.64		5, 6			8	7	7	4	1,2,3
P 3.64	a t/m d	e t/m t	m	u l	t i p l e	c h o i	c e	s	
II 6.64	1	2, 7	3	4		5	6		
H 6.64	5	6	8		9		7	1	2,3,4
II 1.65	1	2	3	4			5	2	
H 1.65		5	6	7			8	2	1,3,4
P 3.65	1	2,3,4						2a	
II 6.65	1a	1b, 2	2b	4a	4b		3	1b	
H 6.65		5		8		6a, 7	6b	4	1,2,3
II 1.66	1	2	3		4		5	2	
H 1.66		5	1	8		7	6	4	1,2,3
II 6.66	1a	1b, 2a	2b	3b	3a		4		
H 6.66			6	7			5		1,2,3,4
II 1.67	1a	2			4b	4a	3		1b
H 1.67	5	6		8			7	3	1 t/m 4
P 3.67	1	2,3,4						3a	
II 6.67	1a	1b	3	4			2		
H 6.67		6	8	9			7	5	1 t/m 5
II 1.68		1	4	3			2		
H 1.68	5	6	7				8	3	1 t/m 4
P 3.68	4	1,2,3,5						3	
II 6.68	1b	1a	3	2b		2a	4		
H 6.68		8		7		5	6	4	1 t/m 4