Onderafdeling Wiskunde

Afd. Algemene Wetenschappen

EXAMEN
en
TENTAMEN OPGAVEN

Wiskunde I en II
met Oplossingen

DEEL I

TYPEWERK VERZORGD DOOR MEJ. M.G.H. v.d. BROEK

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

EXAMEN en TENTAMEN

OPGAVEN

Wiskunde I en II met Oplossingen

DEEL I

Inhoudsbeschrijving

EXAMEN en TENTAMEN OPGAVEN

Wiskunde I en II met Oplossingen

DEEL I

(18 Mei 2005, JdG)

JJAM. Brands.

2 00

EXAMEN EN TENTAMEN OPGAVEN WISKUNDE I EN II MET OPLOSSINGEN

Dit opgavenboek is bedoeld als hulpmiddel bij de bestudering van de wiskunde voor het P-examen. De slechte resultaten die hiervoor geboekt worden zijn gedeeltelijk aan slordigheid te wijten. Zo komt het geregeld voor dat opgaven niet goed gelezen zijn en vaak tracht men een bewijs te leveren zonder het gegeven te gebruiken. Vooruit een plan maken hoe een opgave moet worden aangepakt komt bij bijna geen enkele kandidaat op. De belangrijkste oorzaak van mislukking is echter: gebrek aan routine in het toepassen van de geleerde stellingen, formules etc. Deze routine moet men opdoen door veel opgaven te maken en daarbij zo systematisch mogelijk te werk te gaan. Hiertoe zijn thans verzameld alle examen en tentamen opgaven wiskunde uit de jaren 1957 t/m 1961. Een groep wetenschappelijke medewerkers van de onderafdeling wiskunde, de zgn. perfectionisten, heeft deze opgaven gemaakt zoals men dit op een examen zou moeten doen, commentaar geleverd en eventuele andere oplossingen genoemd, verwijzingen naar het dictaat er aan toegevoegd en waar nodig veel gemaakte fouten gesignaleerd. Het is niet de bedoeling dat U deze oplossingen zonder meer leest, maar dat U eerst zelf de opgaven maakt. Mocht dit niet direct lukken dan kunt U in een 2^e gedeelte van dit boek aanwijzingen vinden waarna U het nog eens kunt proberen. In het 3^e gedeelte treft U dan de bovengenoemde oplossingen aan. Zowel van korte als van zeer uitgebreide oplossingen zijn voorbeelden gegeven.

Men bedenke wel dat dit opgavenboek gebruikt moet worden naast de colleges, instructies en oefeningen en niet "in plaats van ".

OPGAVEN

1. Bewijs de volgende stelling:
   Als f(x) differentieerbaar is voor x = a, dan is f(x) continu voor x = a.

2. Differentieer en werk uit:
   $f(x) = 2x \arctan x - \log(1+x^2)$.

3. Bereken $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{5^n.7+3^n}$.

4. Bereken $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin 2x}$.

5. Bereken de volgende integraal: $\int x \log(1-x^2)dx$.

6. Bereken $\int \dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

7. Beschouw op $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ de functies
   $y = \sin x$ en $y = \frac{1}{2} \tan x$
   a) Teken in één figuur de grafiek van beide functies (alleen de tekening wordt gevraagd).
   b) Bereken de tangens van de hoeken, waaronder de beide grafieken snijden.
   c) Bereken de oppervlakte van het gebied dat door beide grafieken wordt ingesloten.

8. Schets op $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ de grafiek van $y = \arcsin(\sin x)$.
   Geef een korte toelichting.

9. Gegeven is $f(x) = \arctan \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

   a) Bepaal de afgeleide van f(x).
   b) Bepaal $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   c) Schets de grafiek van f(x) (buigpunten niet gevraagd).

d) Bewijs, zonder de integraal uit te rekenen, dat $\pi/4 < \int_0^1 f(x)dx < \text{arc } \tan\sqrt{2}$.

10. Bereken

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^8} \left[0^7 + 1^7 + 2^7 + 3^7 + \ldots + (n-1)^7\right] .$$

$\frac{1}{8}$

11. Gegeven is de functie $f(x) = \frac{(x-1)^2 (x-3)}{(x-2)^3}$.

a) Welke asymptoten heeft de grafiek van de functie.
b) Bepaal $f'(x)$.
c) Bepaal de extremen.
d) Schets de grafiek.

12. De functie $f(x)$ is gegeven door $f(x) = \lim_{n \to \infty} \arctan \frac{n}{1+nx}$ voor $x \geqslant 0$.

a) Is $f(x)$ continu in het punt $x = 0$?
b) Bepaal de oppervlakte begrensd door x - as, y - as, de grafiek van $f(x)$ en de rechte $x = 1$.

13. Bewijs de volgende stelling:
Gegeven: $f(x)$ is differentieerbaar op $a \leqslant x \leqslant b$,
c is een getal, zodat $a < c < b$,
$f(x)$ is minimaal voor $x = c$.
Te bewijzen: $f'(c) = 0$.

14. Gegeven: $f(x) = x \log(2+\sin \frac{1}{x})$ voor $x \neq 0$ en
$f(0) = 0$.
Is $f(x)$ continu in $x = 0$?
Is $f(x)$ differentiëerbaar in $x = 0$?
Motiveer uw antwoorden.

15. Gegeven: $f(x) = 3x^4 - 8|x|(2x^2+3)+30x^2+12$.

a) Bepaal de extrema van f.
b) Toon aan dat $f(x)$ positief is voor alle waarden van x.
c) Teken de grafiek van de functie f.

16. Bepaal de onbepaalde integraal:

$$I = \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\, dx .$$

17. Bereken de bepaalde integraal: $I = \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} x \arcsin(x^2)dx$.

18. Bereken: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2 x}$.

19. Bereken $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

20. Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{x(x-5)^2}$ voor $x \geqslant 0$.
Bepaal alle extrema en schets de grafiek.

21. Bereken $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{\sin x} - \sin x}.dx$.

22. Bepaal $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \tan x}{\sqrt{\cos x+\tan x} - \sqrt{\cos x+\sin x}}$.

23. De integraal $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\alpha \sin x \, dx}{1-\sin^2\alpha \sin^2 x}$

hangt af van α . Bepaal de waarde
a) als $\alpha = 0$;
b) als $0 < \alpha < \pi/2$.

24. Gegeven $y = x^3 - 4x^2 + 2|x|$.
a) Bepaal de x-coördinaat van elk extreem.
b) Schets de grafiek van de kromme, voorgesteld door bovenstaande vergelijking.
c) Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan deze kromme in (2,-4).
d) Toon aan dat deze raaklijn de kromme nog in een tweede punt raakt.

25. Gegeven: f(x) is continu voor alle x.
Voor $x \neq 0$ is deze functie gedefiniëerd door:

$$f(x) = \frac{\sin(x\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} .$$

a) Bereken f(0)
b) Bereken f'(x).

26. $f(x) = e^{\arctan x}.(x^3 - 3x^2 + x - 3)$
a) Bepaal de snijpunten van de grafiek van f(x) met de assen.
b) Voor welke x is de functie extreem?
c) Schets de grafiek.

27. Bereken $I = \displaystyle\int \tan x.\log|\cos x|dx$.

28. Bereken $I = \int_0^1 (\frac{1}{x} - \frac{1}{(1+x^2)\arctan x})\,dx$.

29. f(x) is gedefinieerd door:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1} + \sqrt[n]{|\sin \frac{\pi}{2}x|}}{x^{2n} + \sqrt[n]{|\cos \frac{\pi}{2}x|}} .$$

Maak een grafiek van f(x).

30. Gegeven is de functie

$$f(x) = |\sin x|.e^{-2|\sin x|} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$$

a) Bepaal alle extrema van f(x).
b) Schets de grafiek van f(x).

31. Bereken de integraal

$$I = \int \frac{x \cos x}{\sin^2 x}\,dx .$$

32. Bereken

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x}{\sqrt{1+x^4} - \sqrt{1-x^4}} .$$

33. Bereken

$$I = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\log^2 x}} .$$

34. Gegeven is de functie $f(x) = (2-2x-x^2)e^{|x|-1}$.
a) Bereken de uiterste waarde (n).
b) Bereken de buigpunten, voor zover aanwezig.
c) Schets de grafiek.

35. Ga na voor welke waarden van x de volgende functie gedefinieerd is en bepaal de afgeleide van deze functie.

$$\arcsin \sqrt{x} + \arctan \sqrt{\frac{1}{x} - 1} .$$

36. Zelfde vraag voor $x^{\log x}.\sin x$.

37. Een functie f is gegeven door

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad \text{als } x < 0\ ,$$
$$f(x) = x^3 + \ x + 1 \quad \text{als } x \geqslant 0\ .$$

Als gegeven is dat f een overal differentieerbare functie is, bepaal dan a en b. (Toelichten!).

38. Bewijs met behulp van de definitie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+1} = \frac{1}{2}\ .$$

39. Zij $f(x) = \frac{x-1}{x^2} \, . e^{-|x-1|}$.

Teken een grafiek van deze functie en geef een toelichting daarop.

40. Bepaal $\int \log(1+x^2)dx$.

41. Bereken $\int_0^{\infty} \{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x+1}\} dx$.

42. Op het interval $-1 \leqslant x \leqslant 4$ $(x \neq 5/3)$ is gegeven de functie

$$f(x) = \frac{3x^2+3x-8}{3x-5}\ .$$

Bepaal de uiterste waarden van f.

43. Bereken $L = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(1-\cos 2x)}$.

44. Bereken $\int_0^{\sqrt{3}} 3(x^2+1)\arctan x \, dx$.

45. Bepaal $L = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x \arctan x}$.

46. De functie f is voor $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos x}{(x+1)^n+1}\ .$$

Maak een grafiek van f en ga na of f continu is voor x = 0.

47. Bereken $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x.\tan x.e^{\frac{1}{\sin x}}}$.

48. Een punt $P = (x_0, y_0)$ ligt op de hyperbool met de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Bewijs dat de vergelijking van de raaklijn in P aan de hyperbool luidt: $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

49. Door de vergelijking $z^3 + 3xz - 3y = 0$ wordt z impliciet als functie van x en y gegeven.

Bereken: $2(\frac{\partial z}{\partial x})^3 - z^2(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})$.

50. Gegeven is $z = f(x,y)$. Door $x = u-v$ en $y = u+v$ worden z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ functies van u en v. Gevraagd wordt

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\right]$$

uit te drukken in de hogere partiële afgeleiden van z naar x en y.

51. Gegeven zijn twee betrekkingen tussen x, y, z en t

$$x^3 + y^2t + z + t^3 - 2 = 0 \qquad (\alpha)$$

$$xz + yt^2 - t - 1 = 0 \qquad (\beta)$$

Hierdoor zijn z en t als functies van x en y bepaald: $z = z(x,y)$ en $t = t(x,y)$. Nu stelt $z = z(x,y)$ een oppervlak voor. Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan dit oppervlak in het punt $(x,y,z) = (1,1,1)$.

52. Gegeven is $z = f(x.y)$, $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$.

Druk $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\partial z}{\partial u}$ uit in x, y en de partiële afgeleiden van z naar x en y.

53. De kromming in een punt van de kromme y = f(x) kan worden berekend met de formule

$$K = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}$$

Leid hieruit af de formule voor de kromming, indien de kromme wordt gegeven in parametervoorstelling: x = x(t), y = y(t).

54. Gegeven is de kromme met parameter voorstelling

$$x = \frac{t}{1+t^3}\ , \quad y = \frac{t^2}{1+t^3}\ .$$

Stel de vergelijking op van de raaklijn in het met t = 1 corresponderende punt van de kromme.

55. In de functie z = z(x,y) die continue eerste en tweede partiële afgeleiden bezit, worden door $x = u(1-v^2)$, $y = uv$ nieuwe variabelen ingevoerd. Druk $u^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ uit in x, y en de partiële afgeleiden van z naar x en y.

56. In de functie z = z(x,y) worden door $x = e^{6u+3v}$, $y = e^{3u+6v}$ nieuwe variabelen ingevoerd. Druk

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} - 2\frac{\partial z}{\partial u} - 2\frac{\partial z}{\partial v}$$

uit in x, y en de partiële afgeleiden van z naar x en y.

57. Tussen x,y,z,t bestaan de betrekkingen

$$x^2 + y + yz + \sin(z+t) = 0$$
$$y^2 + z^2 + xz - \cos(zt) = 0.$$

Beschouw z en t als functies van de onafhankelijk variabelen x en y. Bereken $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ in het punt x = 1, y = -1, z = 0, t = π.

58. Gegeven is in parametervoorstelling de kromme:

$$x(t) = t^2 + t + 1$$

$$y(t) = \tfrac{1}{2} \qquad + 2t\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

a) Bepaal de kromming in het met $t = 1$ corresponderende punt P van de kromme.

b) Bepaal de coördinaten van het bijbehorende kromtemiddelpunt M.

59. Gegeven is de functie $z = f(x,y)$. Door de betrekkingen

$$x = \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{2}v^2$$

$$y = uv$$

worden nieuwe onafhankelijke variabelen u en v ingevoerd. Druk $A = \frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$ uit in x en y en de partiële afgeleiden van z naar x en y.

60. Gegeven $z = f(x,y)$.

We voeren nieuwe variabelen u en v in door de betrekkingen

$$u = x + y$$

$$v = x^2 + y^2.$$

Druk nu $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ uit in u, v, en de partiële afgeleiden van z naar u en v.

61. Gegeven is de kromme met parametervoorstelling:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cot\theta \\ y &= 2\sin^2\theta \end{aligned}\right\} 0 < \theta < \pi .$$

Bereken de kromming in het hoogste punt van de kromme.

62. z is een functie van x en y; $x = \frac{u}{v}$; $y = v^2$. Waarin gaat

$$2y \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}$$ over als z als functie van u en v wordt beschouwd?

63. z is als functie van x en y gegeven door $xz^3 - 3yz + x = 0$.

a) Bewijs: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (\alpha)$.

b) Waarin gaat de betrekking (α) over als men op poolcoördinaten overgaat?

c) Hoe kunt U het onder b) verkregen resultaat direct inzien?

64. Een vlakke kromme is in parametervoorstelling gegeven door:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \tan u \\ y &= \frac{2a}{\cos u} \end{aligned} \quad . \right\} \qquad (a > 0, \ |u| < \tfrac{\pi}{2}).$$

Toon aan dat dit een tak van een hyperbool is en bepaal de kromming in het punt $p(a\sqrt{3}, 4a)$.

65. U is een functie van de rechthoekige coordinaten x en y. Druk

$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ in poolcoördinaten uit.

66. Los op het stelsel:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 6 \\ 5x - 8y + 11z &= 17 \\ 6x - 8y + 10z &= 14 \\ 3x - 5y + 7z &= 11. \end{aligned}$$

67. In R_2 zijn gegeven de punten

O = (0,0) ; A = (-2,1) ; B = (-1,4) ; C = (3,3).

Bereken de oppervlakte van de vierhoek O A B C.

68. Zij V een vectorruimte van dimensie 4. Zij $\underline{e}$, $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ een onafhankelijk stelsel vectoren van V.
Bewijs, dat elke vector van V als lineaire combinatie van $\underline{e}$, $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ te schrijven is, en dat dit slechts op één manier mogelijk is.

69. Gegeven zijn de vlakken

$$U : \underline{x} = (0,1,2) + \lambda(1,0,2) + \mu(0,2,1)$$
$$V : \underline{x} = (0,1,2) + \rho(2,0,0) + \sigma(0,1,0)$$

Bepaal de parameter voorstelling van de snijlijn l van U en V.

70. Los op:

$$\begin{aligned} x + y + z - 2u + v &= 0 \\ x - 2y + z + u + 3v &= 0 \\ 2x + y + 2z - 3u - 2v &= 0 \\ 5x - y + 5z - 4u + v &= 0 \end{aligned}$$

Welk verband bestaat er bij een stelsel homogene lineaire vergelijkingen tussen: aantal onbekenden (n), rang van de coefficienten matrix (r), en de dimensie van de oplossingsruimte (d)?
Controleer dit verband bij deze opgave.

71. Bepaal **x** zodanig dat de inhoud van het parallelepipedum opgespannen door de vectoren $\underline{a} = (1,2,3)$ $\underline{b} = (0,1,2)$ en $\underline{c} = (2,0,x)$ groter is dan 3.

72. Door $\begin{cases} x + y + z + u + v = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = 10 \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 + v^3 = 0, \end{cases}$ worden **z**, u en v gegeven als functies van x en y. Bereken $\frac{\partial z}{\partial x}$ in het punt (x,y,z,u,v) = = (0,2,1,-1,-2).

73. Gegeven het punt $P = (1,2,1)$en de rechte

$$l: \underline{x} = (6,1,3) + \lambda(1,2,3).$$

Gevraagd een parametervoorstelling van het vlak door P en l. Bewijs dat dit vlak evenwijdig is aan het vlak

$$\underline{x} = \rho(-7,8,5) + \sigma(1,-9,-10).$$

74. Van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 1 \end{aligned}$$

is gegeven

1° $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$

2° De determinant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ is nul.

Is het stelsel oplosbaar? Motiveer het antwoord.

75. Gegeven zijn de vlakken

$$\begin{aligned} U &: 2x + y + 2z = 7 \\ V &: x + y - z = -2 \\ W &: \underline{x} = (1,2,0) + \lambda(0,1,2) + \mu(2,0,1). \end{aligned}$$

Door hun snijpunt gaat een vlak evenwijdig aan de rechten

$$l: \underline{x} = (0,1,2) + \rho(3,1,2) \text{ en } m : \underline{x} = (2,0,1) + \sigma(2,1,3).$$

Bepaal dit vlak in parametervoorstelling.

76. Van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z = b_1 \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z = b_2 \\ a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z = b_3 \end{cases} \quad \text{is} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Geef de formule voor de oplossing van x volgens de regel van Cramer. Leid deze formule af.

77. Gegeven zijn de vlakken:

$$V : x + 2y = 3$$

$$\text{en } W : x + y + z = 6$$

Bepaal de vergelijking van het vlak U, dat evenwijdig is met de snijlijn l van V en W en gaat door de punten A(1,-5,2) en B(-2,-3,4).

78. Los het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\begin{cases} 3x - y + z + 5u = 7 \\ \quad 2y - 3z + 4u = 6 \\ 6x \quad - z + 3u = 9 \end{cases}$$

79. Gegeven zijn de vier vectoren

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 \text{ en } \underline{a}_4 \text{ in } R_4.$$

a) Noem de vier axioma's voor de definitie van de determinant $D(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3,\underline{a}_4)$ van de vier gegeven vectoren.

b) Bewijs uit deze axioma's dat deze determinant gelijk is aan nul, als $\underline{a}_1 = \underline{a}_2$.

80. Door de vergelijking $x^2 + y^2 - z^2 - 4xz + 2y + 1 = 0$ is een oppervlak O gegeven.

a) Bewijs dat de rechte

$$l : x = (0, -1, 0) + \lambda(1,2,1)$$

geheel op het oppervlak ligt.

b) Bewijs, dat alle punten van l hetzelfde raakvlak bezitten. Bepaal de vergelijking van dit raakvlak.

81. • Bepaal een parametervoorstelling van de snijlijn l der twee vlakken V en W, als

$$V : 2x + y - 3z = -8$$
$$W : \underline{x} = (-1,2,3) + \lambda(2,1,2) + \mu(-2,2,1).$$

82. Los op het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} -ax + 2y - z = 0 \\ 3x - y - 2z = 5a \\ 3x - 4y + z = 2a \end{cases}$$

voor alle waarden van a.

83. Gegeven is het oppervlak $O : x^2 + y^2 + 2xz = 1$

a) Bereken het raakvlak aan O in een willekeurig punt $P\ (x_0, y_0, z_0)$.

b) Hoe moet P gekozen worden, opdat dit raakvlak de lijn

$$l : \underline{x} = (0,0,1) + \lambda(1,1,-1)$$ geheel bevat?

84. a) $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ vormen een basis van de vectorruimte R. Wat betekent dit?

b) Bereken de volgende determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 1 \end{vmatrix}$$

c) Aan welke voorwaarde moeten λ, μ, ν, ρ voldoen opdat de vectoren $\underline{e}_1 + \mu\underline{e}_2$, $\underline{e}_2 + \nu\underline{e}_3$, $\underline{e}_3 + \rho\underline{e}_4$, $\underline{e}_4 + \lambda e_1$ ook een basis van R vormen? Licht uw antwoord toe.

85. Los op:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 5 ; \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 7 ; \\ 7x_1 + x_2 - 11x_3 - 3x_4 &= 0 . \end{aligned}$$

86. Gegeven is de boog $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ $(0 \leqslant t \leqslant 8)$. De eindpunten van deze boog heten A en C. Op de boog ligt het punt B, waarvoor $t = 5$. Bepaal D op de boog zodanig, dat het volume van de piramide ABCD maximaal is.

AANWIJZINGEN

1. U moet bewijzen dat $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ of wel $\lim_{x \to a} \{f(x)-f(a)\} = 0$.
   Gebruik nu dat de afgeleide van f bestaat.

2. Zie II § 5 A1, 2, B11, C13, 15.

3. Zie I § 3 D Vb.2.

4. Zie I § 4 D.

5. Zie II § 10 E.

6. Zie II § 10 D.

7. a,b. Zie II § 3. ; c. Zie II § 1 en § 9.

8. Vgl. def. I § 2 I.

9. ad a). zie kettingregel II, § 5. C.
   ad b). voor $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ zie I, § 4, A vb 2.
   ad c). maak een schema voor het tekenverloop van f(x) en f'(x).
   Zie II § 6 vb 1.
   ad d). zie II, § 2 eig. VIII en bekijk de grafiek van f(x).

10. Denk aan de definitie van het begrip "bepaalde integraal".
    Zie II, § 2.

11. Wat zijn de kritieke punten? Ga tekenverloop na van f(x) en f'(x).
    a) Bepaal $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
    Waar is f(x) discontinu?
    b) Pas toe Eigenschappen II 10 § 5 "regel" 2 en 3.
    c) Los op f'(x) = 0.

12. a) Bepaal $\lim_{n \to \infty} \arctan \frac{n}{1+nx}$.
Pas daarna toe: definitie op I 14 vermeld waarbij U zich beperkt tot $x \downarrow 0$.
b) Partiële integratie.

13. Definitie afgeleide II § 4; extrema II § 6.

14. Definitie continuiteit I § 4 C.
Definitie afgeleide II § 4.

15. Onderzoek waar f(x) differentieerbaar is en wat het gedrag is van de afgeleide.

16. Voor eigenschappen van onbepaalde integralen zie II § 10.
Zorg dat niet sinx en sin2x beide in de integrand voorkomen.

17. Zie II § 12. Bereken de onbepaalde integraal met de methode van partiële integratie.

18. Probeer met het analogon voor functies van I § 3.D voorbeeld 2, te komen tot toepassing van de standaard-limiet uit I § 4.D.

19. Definitie cyclometrische functies: I § 2 J.
Herleid de haakfactor. Probeer de standaardlimiet uit I § 4.D te gebruiken.

20. Onderzoek het bestaan en gedrag van f'. (zie II § 6).

21. Is de integrand voor x=0 gedefinieërd? Zie II § 13.

22. Pas toe I.11.vb.2, deel teller en noemer door gemeenschappelijke factor en gebruik I.16.vb.2.

23. a) Substitueer $\alpha = 0$, en de integraal is direct uit te rekenen.
b) Bedenk dat α, $\sin \alpha$ en $\cos \alpha$ constanten zijn.
Substitueer $\cos x = t$, pas toe II.26 en denk aan de eigenschappen van cyclometrische functies (I.7.3).

24. Voor extrema: Zie II. 16. § 6, vooral II. 17 met voorbeelden. Bedenk dat de functie $|x|$ niet gedifferentieerd kan worden; onderscheid twee gevallen (zie I.4.D. vb.5 en II.7.vb. 3).

    Raaklijn: zie II.6. § 3 en II.18. vb.5. Voor d): Ga na in welk(e) punt(en) de gevraagde raaklijn de kromme snijdt.

25. a) Def. I, § 4 C.
    b) Regels van Leibniz ; Def.II § 4.

26. a) X-as : $y = 0$; Y-as : $x = 0$.
    b) II § 6.

27. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; II § 10 B.

28. Bereken eerst de onbepaalde integraal. II § 10.B. Daarna de bepaalde integraal als oneigenlijke integraal met limiet I § 4.D. vb.1.

29. I § 3 C, standaardlimieten 2 en 3. Let op de voorwaarden, waaronder deze limieten optreden!

30. a) I § 1 opm.3, II § 6. Denk aan extremen op de rand van het definitieinterval.

31. Combineer $\frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x}$. Partiële integratie. II § 10 E.

32. Ontbind teller in factoren. Pas toe I § 4 D. Zie ook vb.2 en 3 aldaar.

33. Combineer $\frac{dx}{x}$. Zie verder II § 10 B.

34. Onderscheid $x \geqslant 0$ en $x \leqslant 0$.
    Zie voorts II § 6, III § 4 A.

35. Zie I § 2 I.

36. x schrijven als macht van e.

37. Zorg dat f continu is. Zorg dat in 0 de rechter- en linker afgeleide gelijk zijn.

38. Definitie limiet: I § 3 B.

39. Bepaal van f(x) nulpunten, asymptoten, extrema; onderzoek het gedrag van de eerste afgeleide (II § 4).

40. Differentiatie van $\log(1+x^2)$ levert een rationale functie. Zie II § 10 E.

41. Voor de betekenis van het symbool $\int_0^\infty$ zie II § 13.

42. Differentiëren of $f(x)=\alpha$ oplossen.

43. Zie I § 4 D.

44. Part.integr.

45. I § 3 D. vb.2 en I § 4 D.

46. Onderscheidt $|x+1|<1$, $|x+1|=1$ en $|x+1|>1$.

47. Substitutie.

48. Zie III, § 5, vb. 4 B.

49. Zie IV, § 4 A, vb.

50. Beschouw $z_x = z_x\,[\,x(u,v),y(u,v)\,]$. Zie IV § 2 . 6.

51. Pas toe IV, 9, D en gebruik IV, 5, gevolg.

52. Pas toe IV, 12, 2; IV 6,6; IV 3.D.

53. Parametervoorstelling III § 6.

54. Zie III, § 6.

55. Kettingregels IV § 4 B.

56. Vind $\frac{\partial z}{\partial u}$ en $\frac{\partial z}{\partial v}$ m.b.v. IV,12.2. Substitueer hierin $\frac{\partial x}{\partial u}$ en $\frac{\partial x}{\partial v}$, te

vinden door partiële differentiatie van de gegeven uitdrukkingen voor x en y. Bepaal $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}$ door de uitdrukking voor $\frac{\partial z}{\partial v}$ nog eens partieel naar u te differentieren volgens IV.12.2. Vergelijk ook IV.12.vb.1.

57. Zie IV.9.D; differentieer naar x en substitueer het gevraagde punt. Differentieer nogmaals naar x en maak gebruik van de reeds gevonden eerste afgeleiden.

58. Vgl. III § 6, III § 4.

59. Vgl. IV § 2, G en § 4.

60. IV § 2 G, § 4.

61. Zie III, § 6.

62. Zie IV § 4 B, vb.3.

63. 1) Zie IV § 3; 2) Zie IV § 4; 3) Wat betekent $\frac{\partial z}{\partial r} = 0$?

64. Zoek betrekking tussen tan u en cos u. Zie III § 6 of § 4.

65. Zie IV § 4 B, vb.3.

66. Zie V § 7 vb.1.

67. Gebruik determinanten; zie V § 9.

68. Zie definities in V § 4 B en C.

69. De punten van l behoren tot U en tot V.
Los op parametervoorstelling van U = parametervoorstelling van V.

70. Ga vegen. Zie V 13.

71. $|\mathrm{Det}\ (\underline{a},\underline{b},\underline{c})|$ = volume van parallelopidum opgespannen door $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$.

72. Differentiatie volgens methode van IV § 3, en invullen van de waarden (0,2,1,-1,-2) doet een stelsel lineaire vergelijkingen ontstaan met $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $\frac{\partial v}{\partial x}$ in (0,2,1,-1,-2) als onbekenden.
(zie V § 7 e.v.).

73. Een vlak is bepaald door een steunvector en twee lineair onafhankelijke richtingsvectoren.
Denk aan V § 8 stelling blz. V. 17.

74. Zie V § 8 stelling blz. V.17.

75. Bepaal het snijpunt van de drie vlakken door eerst de vergelijking van W te bepalen (V.3.B) en dan uit de 3 vergelijkingen voor U, V en W de coördinaten x, y en z op te lossen (V.14.§ 7). De richtingsvectoren van l en m zijn evenwijdig met het gevraagde vlak; zie verder V.2.5.

76. Zie V.21.B met n = 3.

77. Vgl. V. § 2 B.

78. V. § 7.

79. a) Zie blz. V 19 bovenaan.
b) Gebruik blz. V 19, 2).

80. a) Vgl. IV § 2 B.
b) Vgl. IV § 3 B, IV § 2 E.

81. Bepaal eerst de vergelijking van W (V § 2 B vb.2).
Daarna een parametervoorstelling van l(V § 2 B vb.5).

82. V § 7.

83. a) Vgl. IV § 3 B, IV § 2 E.
b) Vgl. IV § 2 B.

84. Zie V § 4 B 5, V § 9, V § 4 C.

85. V § 7.

86. Zie definitie determinant.

OPLOSSINGEN

1. Bewijs staat in II § 4.

2. $f'(x) = 2\{1.\text{arc tan } x + x\,\frac{1}{1+x^2}\} - \frac{1}{1+x^2}\,.2x \;=\; 2 \text{ arc tan } x.$

3. We zien dat 5^n de belangrijkste term is en zetten deze dus apart:

$$a_n = \sqrt[n]{5^n 7+3^n} = 5\sqrt[n]{7+(\tfrac{3}{5})^n}.$$

Nu is

$$1 < \sqrt[n]{7+(\tfrac{3}{5})^n} < \sqrt[n]{8}.$$

Volgens I § 3 Insluitstelling en standaardlimiet 3 is

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5.$ (Immers $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{8} = 1$).

4.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}\,-1}{\sin\,2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}\,+1}\cdot\frac{1}{\sin\,2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}\,+1}\cdot\frac{2x}{\sin\,2x}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.1.\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}\,.$$

5. We willen door partiele integratie de functie log kwijtraken en passen dus toe $\int u dv = uv - \int v\,du$ met $u = \log(1-x^2)$.

$$\int x\,\log(1-x^2)dx = \int\log(1-x^2)d(\tfrac{1}{2}\,x^2) = \tfrac{1}{2}\,x^2\log(1-x^2) - \int\tfrac{1}{2}\,x^2 d\,\log(1-x^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,x^2\log(1-x^2) + \int\frac{x^3}{1-x^2}\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,x^2\log(1-x^2) - \int x dx + \int\frac{xdx}{1-x^2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,x^2\log(1-x^2) - \tfrac{1}{2}\,x^2 - \tfrac{1}{2}\,\log(1-x^2) + C.$$

Men kan ook eerst $1-x^2= y$ stellen en vindt:

$$\int x \log(1-x^2)dx = -\tfrac{1}{2}\int \log y \, dy.$$ Zie verder II E vb.1.

6. Stel $y = \sqrt{x}$, dan $x = y^2$ en $dx = 2ydy$.

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int \frac{2y \ dy}{(1+y^2).y} = 2\int \frac{dy}{1+y^2} = 2 \arctan y + c$$

waarin $y = \sqrt{x}$. De gevraagde integraal is dus $2\arctan\sqrt{x} + c$. Dit kan ook a.v. opgeschreven worden (zie kettingregel!):

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \arctan\sqrt{x} + c.$$

7. a) de grafiek laten we weg.

b) de grafieken snijden elkaar in de oorsprong O en in het punt A waarvoor $\sin x = \tfrac{1}{2}\tan x$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$, d.i. $\cos x = \tfrac{1}{2}$.

A is het punt $(\frac{\pi}{3} , \tfrac{1}{2}\sqrt{3})$.

In O en A tekenen we raaklijnen aan de 2 grafieken. Deze maken hoeken met de pos.X-as waarvan te tangens is

$1 = \cos 0$ in O en $\tfrac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ in A voor $y = \sin x$ en

$\tfrac{1}{2} = \frac{1}{2\cos^2 0}$ in O en $2 = \frac{1}{2\cos^2 \pi/3}$ in A voor $y = \tfrac{1}{2}\tan x$.

De tangenten van de verschilhoeken zijn respectievelijk:

$\frac{1-\frac{1}{2}}{1+1.\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ en $\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2.\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$ in O resp. A.

c) $$0 = \int_0^{\pi/3} \sin x \, dx - \int_0^{\pi/3} \tfrac{1}{2}\tan x \, dx = \int_0^{\pi/3} \sin x \, dx + \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= [- \cos x]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{3}} + \tfrac{1}{2}[\log|\cos x|]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{3}} =$$

$$= - \tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{2}\log\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\log 2.$$

8. Toelichting:

Voor $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ is $x = \arcsin p$ als $p = \sin x$.

Voor $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ is $0 \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}$ en $\sin(\pi - x) = \sin x = p$

en dus $\arcsin(\sin x) = \pi - x$.

Voor $-\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2}$ is $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\pi - x \leqslant 0$ en $\sin(-\pi - x) = \sin x = p$

en dus $\arcsin(\sin x) = -\pi - x$.

de functie is dus
$$\begin{cases} -\pi - x & \text{voor} \quad -\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2}\,, \\ x & \phantom{\text{voor}} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{\pi}{2}\,, \\ \pi - x & \phantom{\text{voor}} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi\,. \end{cases}$$

(In één formule $\arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \left|\pi - \left| x + \frac{\pi}{2}\right|\right|$. Ga na!)

9. a) Stel $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = u$ Volgens de kettingregel (II § 5 C) is

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Nu is $\frac{df}{du} = \frac{1}{1+u^2}$ en

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

(II § 5 A 3, 12)

$$= \frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\text{Dus } f'(x) = \frac{1}{1+\frac{(x+1)^2}{x^2+1}} \cdot \frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1-x}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

b) $L = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \arctan \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ wegens de continuïteit van de arctan.

$$L = \arctan 1 = \pi/4.$$

Opm: arc tan 1 $\neq \frac{5}{4}\pi$ daar $-\pi/2 <$ arc tan $< +\pi/2$. Zie I, § 2 I.

Om $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ te bepalen, stellen we $-x=t$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \text{arc tan} \lim_{t \to \infty} \frac{-t+1}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \text{arc tan} \lim_{t \to \infty} \frac{-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = \text{arc tan} -1 = -\pi/4.$$

c) arc tan $u > 0$ voor $u > 0$ en arc tan $u < 0$ voor $u < 0$.

f(x) is gedefinieerd voor alle x.

Dus $f(x) > 0$ voor $x > -1$ ($\sqrt{x^2+1}$ is positief).

$f(x) < 0$ voor $x < -1$

$f(x) = 0$ voor $x = -1$

$f(0) = \arctan 1 = \pi/4$ (geoorloofd daar f(x) continu is).

Onder a) zagen we: $f'(x) = \dfrac{1-x}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+1}}$

Dus $f'(x) > 0$ voor $x < 1$; f(x) monot. stijgend zie II § 6.

$f'(x) = 0$ voor $x = 1$; f(x) extreem

$f'(x) < 0$ voor $x > 1$; f(x) monot.dalend.

$f(1) = \arctan \sqrt{2}$ is 'n (absoluut) maximum.

Het schetsen van de grafiek van f(x) volgt nu geheel uit onderstaand schema:

x :	$-\infty \leftarrow$			-1				0				1				$\to \infty$
f(x) :	$-\pi/4 \leftarrow$	- - - - -		0	+ + + +			$\pi/4$	+ + + +			arctan$\sqrt{2}$	+ + + +			$\to \pi/4$
f'(x):	+	+		+	+			+	+			0	- - - - -			

d) Uit het schema zien we dat voor f(x) op (0,1) geldt:

$$\pi/4 < f(x) < \text{arc tan} \sqrt{2} \text{ ; }$$ f(x) is daar nl. monotoon stijgend.

En dus geldt volgens II, § 2, eig. VIII :

$$\pi/4 \ (1-0) < \int_0^1 f(x)dx < \text{arc tan} \sqrt{2}. \ (1-0)$$

Opm. We zien dit ook direct uit de grafiek:

nl. $\int_0^1 f(x)dx$ is een oppervlakte, kleiner dan de oppervlakte van de rechthoek met hoogte arc tan $\sqrt{2}$ en groter dan de oppervlakte van de rechthoek met hoogte $\pi/4$ (beide met basis (0,1)).

10. In II § 2 zien we:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ x_i-x_{i-1}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} (x_i-x_{i-1})f(\xi_i)$$

waarin ($x_0= a$, $x_1, \dots, x_n= b$) een rij verdelingen van het interval (a,b) doorloopt. Hiervoor kiezen we nu verdelingen van (0,1) in n gelijke delen en nemen $n\to\infty$.

Dan is $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^8}[0^7+1^7+2^7+3^7+\dots+(n-1)^7] =$

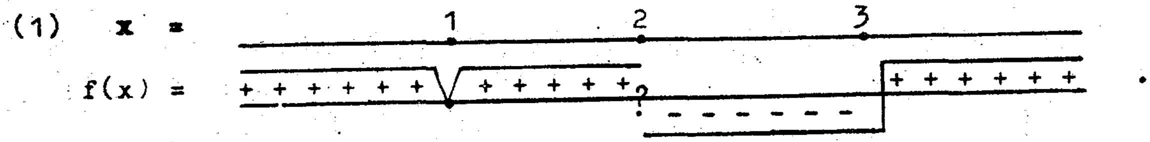
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[(\frac{0}{n})^7+(\frac{1}{n})^7+(\frac{2}{n})^7+\dots+(\frac{n-1}{n})^7] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(\frac{i-1}{n})^7 = \int_0^1 x^7 dx = \frac{1}{8}.$$

(hierin is: $x_i-x_{i-1}=\frac{1}{n}$ en $f(\xi_i) = (\frac{i-1}{n})^7$

ξ_i is een punt uit het i^{de} deelinterval.

11. Merk op dat voor x=2 de functie niet is gedefinieerd. We veroorloven ons de antwoorden niet in de gevraagde volgorde te geven.
De kritieke punten (nulpunten van teller of noemer) zijn x=1, x=2, x=3 en bepalen het teken van f(x) :



Wij bepalen f'(x)

$$f'(x) = -\frac{(x-1)(x-5)(x-2)^2}{(x-2)^6} \quad \text{voor } x \neq 2$$

$$= -\frac{(x-1)(x-5)}{(x-2)^4} \quad \text{voor } x \neq 2$$

in beeld:

(2) x = 1 2 3 4 5

f'(x) = - - - - - ⊙ + + + + ? + + + + + + + + + + + + ⊙ - - - -

De nulpunten van f' zijn de enige waarden waar extrema <u>kunnen</u> optreden. Of het extrema zijn volgt uit het tekenverloop van f'(x) of uit f"(x).

Treedt in x=1 of x=5 een extremum op ?

Uit (2) volgt:

$f'(x) < 0$ voor $x < 1$ dus f(x) daalt (vs stelling II 17),

$f'(x) > 0$ voor $1 < x < 2$ dus f(x) stijgt.

Dus f(1) is een minimum.

Soortgelijke beschouwingen laten zien dat f(5) één max. is.

Wil men werken met f"(x) dan volgt na differentiëren van f'(x)

$$f''(x) = \frac{2x^2-14x+8}{(x-5)^5} \quad \text{voor } x \neq 2$$

dus $f''(1) = 4$	$f''(5) = -\frac{4}{81}$
$f''(1) > 0$	$f''(5) < 0$
dus f' neemt toe in de buurt van x=1	dus f' neemt af in de buurt van x=5
dus f is hol van boven	f is bol van boven (zie III 5)
dus f(1) is een minimum	f(5) is een maximum

Nog steeds zijn de extrema niet bepaald.(Wel de plaats waar ze optreden).

Met $f(1) = 0$ minimum

$f(5) = \frac{32}{27}$ maximum is die vraag beantwoord.

Soms verdient het zelfs aanbeveling de buigpunten, de nulpunten van $f''(x)=0$ te bepalen en de bijbehorende helling, $f'(x)$, in die punten.

Onderzoek naar asymptoten.

Horizontale asymptoot:

Bepaal $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x^2-2x+1)(x-3)}{(x-2)^3} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5x^2-5x-3}{x^3-6x^2+12x-8} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{5}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{1-\frac{6}{x}+\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}} = 1. \qquad (I.13)$$

Verder:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{-x\to\infty} f(-(-x)) = \lim_{t\to\infty} f(-t) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(-t-1)^2(-t-3)}{(-t-2)^3} = 1. \qquad \text{(vgl.I.13 voorb.2)}$$

Dus:

zowel voor $x\to\infty$ als voor $x\to-\infty$ is de lijn $y=1$ horizontale asymptoot.

Verticale asymptoot:

Uit het tekenverloop van $f(x)$ volgt dat voor x-en links van 2 $f(x)>0$ is, voor x-en rechts van 2 is $f(x)<0$. Tevens staat $(x-2)$ in de noemer van $f(x)$. Daar voor $x=2$ de teller niet 0 is, geldt: $f(x)\to\infty$ voor $x\uparrow 2$ en $f(x)\to-\infty$ voor $x\downarrow 2$. De lijn $x=2$ is dus verticale asymptoot.

12. a) Te bewijzen: $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = f(0)$

Nu is

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \text{arc tan} \frac{n}{1+nx} = \text{arc tan} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+nx} \right),$$ omdat de functie arc tan continu is.

$$= \text{arc tan} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}+x} \right) = \text{arc tan} \frac{1}{x} \text{ voor } x \neq 0.$$

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} \text{arc tan} \frac{n}{1} = \frac{\pi}{2}.$$

Rest te bewijzen:

$$\lim_{x \downarrow 0} \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$ Dit is zo.

De functie f is dus in $x = 0$ (rechts-)continu.

b) De gevraagde opp. is, daar $f(x)$ arc tan $\frac{1}{x}$ niet negatief is op $[0,1]$, gelijk aan

$$\sigma = \int_0^1 \operatorname{arc\,tan} \frac{1}{x}\, dx.$$

Part.int.levert

$$\sigma = x.\operatorname{arc\,tan} \frac{1}{x} \Big|_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{1 + (\frac{1}{x})^2} \cdot \frac{-1}{x^2}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

Opm. Men kan ook schrijven arc tan $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ - arc tan x voor $x > 0$ en dan integreren als in II § 10 E vb.2.

B

Analoog aan definitie II § 6 kunnen we voor $a < c < b$ uitspreken: $f(x)$, gedefinieerd en differentieerbaar op $a \leqslant x \leqslant b$, bereikt een minimum voor $x = c$ als $f(c+h)-f(c) \geqslant 0$ is voor voldoende kleine h; d.w.z. dat er een positief getal η bestaat zodat uit $|h| \leqslant \eta$ volgt $a \leqslant c+h \leqslant b$ en $f(c+h)-f(c) \geqslant 0$.

(n.b. omdat c geen randpunt van het definitie gebied van $f(x)$ is, zijn voldoende kleine waarden van h steeds geoorloofd).

Voor $0 < h \leqslant \eta$ is dan $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0$ en voor $-\eta \leqslant h < 0$ is $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0$. De limiet voor $h \to 0$ van beide quotiënten bestaat en is gelijk aan $f'(c)$, (zie definitie II § 4), zodat volgt $f'(c) \geqslant 0$, en $f'(c) \leqslant 0$, dus $f'(c) = 0$. (Hierin is gebruikt de eigenschap dat uit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L$ en $f(x) > 0$ voor $x \neq 0$ volgt dat $L \geqslant 0$ is. Dit volgt direct uit de definitie van limiet (I.§ 4.B); is nl $L < 0$, dan is bij $\varepsilon = \frac{1}{2}|L|$ geen δ te vinden die aan de eisen van definitie I § 4 B voldoet).

<u>Opmerking 1</u>: De stelling is afkomstig van Fermat, en is in II § 6 voor een maximum bewezen.

<u>Opmerking 2</u>: In het bewijs werden gebruikt de limieten: $\lim\limits_{h \downarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ en $\lim\limits_{h \uparrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$, die de rechter- en linker afgeleide van $f(x)$ in c heten. "$f(x)$ is differentiëerbaar voor $x=c$" betekent dat de rechter en linker afgeleide van $f(x)$ in c bestaan <u>en</u> gelijk zijn.

14. "$f(x)$ is continu voor $x=0$" betekent dat $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ bestaat en gelijk is aan $f(0)$. We onderzoeken daarom:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \log(2+\sin \frac{1}{x}).$$

Daar voor $x \neq 0$ geldt $-1 \leqslant \sin \frac{1}{x} \leqslant 1$; gelden de volgende ongelijkheden: (we sturen aan op een toepassing van de insluitstelling).

$0 = \log 1 \leqslant \log(2+\sin \frac{1}{x}) \leqslant \log 3$ voor $x \neq 0$,

$0 \leqslant f(x) \leqslant x \log(3)$ als $x < 0$, $x \log 3 \leqslant f(x) \leqslant 0$, als $x < 0$

dus $-|x| \log 3 \leqslant f(x) \leqslant |x| \log 3$ voor $x \neq 0$.

Nu is $\lim\limits_{x \to 0} |x| \log 3 = \lim\limits_{x \to 0} -|x| \log 3 = 0$, zodat we de insluitstelling (I § 4 B) kunnen toepassen en vinden: $\lim\limits_{x \to 0} x \log(2+\sin \frac{1}{x}) = 0$.

Daar $f(0) = 0$ is, geldt dat $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, zodat de functie in $x=0$ continu is. We onderzoeken nu de differentieerbaarheid. $f(x)$ is in $x=0$ differentiëerbaar als de volgende limiet bestaat.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \log(2 + \sin \frac{1}{h})-0}{h} = \lim_{h \to 0} \log(2 + \sin \frac{1}{h}).$$

De overweging dat $\sin \frac{1}{h}$ voor $h \to 0$ steeds sneller tussen -1 en $+1$ heen en weergaat, leert ons dat $\log(2 + \sin \frac{1}{h})$ tussen 0 en log 3 schommelt zodat de limiet niet bestaat. Dit bewijzen we nu aan de hand van definitie I § 4 B. Voor iedere positieve δ zijn er zowel waarden van h in $0 < |h| < \delta$ waarvoor: $\frac{1}{h} = (2k + \frac{1}{2})\pi$.(k geheel), als waarden waarvoor $\frac{1}{h} = (2k + \frac{3}{2})\pi$ (k geheel); neem bijv. maar $k > \frac{1}{2\pi\delta}$. Voor iedere $\delta > 0$, zijn der dus $0 < |h| < \delta$ zowel waarden van h met $\log(2 + \sin \frac{1}{h}) = \log 3$ als met $\log(2 + \sin \frac{1}{h}) = 0$. Het is dus onmogelijk een L aan te geven, zodat voor iedere $\varepsilon > 0$ een positieve δ te vinden is, zodat $|\log(2 + \sin \frac{1}{h})-L| < \varepsilon$ is, als $0 < |h| < \delta$, want als $\varepsilon < \frac{1}{2} \log 3$ kan daarbij geen δ gevonden worden, ongeacht de waarde die men aan L zou willen toekennen.

15. Als f(x) in een omgeving van $x = c$ (dit is een interval $a < x < b$, met $a < c < b$) differentieerbaar is, kunnen we krachtens een stelling van Fermat (II § 6) in $x = c$ zeker geen extreem hebben als $f'(c) \neq 0$ is. Behalve in $x = 0$ is f(x) overal differentiëerbaar. (voor $x = 0$ geldt:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -24; \quad \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = +24, \text{ zodat } f'(0)$$

niet bestaat. Zie II § 4).

Buiten $x = 0$, en de nulpunten van f'(x) kunnen dus geen extrema liggen, (maar het is niet gezegd dat $x = 0$ en de nulpunten van f'(x) extrema zijn). We merken op dat f(x) een even functie is (I § 2 E) zodat we alles over f(x) te weten komen als we f(x) voor $x \geqslant 0$ onderzoeken. Voor $x \geqslant 0$ is $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 24x + 12$. Voor $x > 0$ bestaat f'(x) en $f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 60x - 24 = 12(x-1)^2(x-2)$, dus $f'(x) = 0$ voor $x = 1$ en $x = 2$.

Om de grafiek goed te tekenen beschouwen we ook de tweede afgeleide. (Zie III § 4 A). Voor $x>0$ bestaat deze en is $f''(x) = 48x^2-96x+60 =$ $= 12(x-1)(3x-5)$.

We maken nu het volgende schema. (Vgl. II § 6 gevolgen van de stelling van het gemiddelde).

x	0		1		5/3		2	
f'(x)		-		-		-		+
f''(x)		+		-		+		+
f(x)		dalend, hol		dalend, bol		dalend, hol		stijgend, hol
	maximum		buigpunt		buigpunt		minimum	

De grafiek is symmetrisch t.o.v. de y-as. Voor $x\to\infty$ en $x\to-\infty$ gaat $f(x)\to\infty$. We vinden de volgende extrema: In $x=0$ een maximum (relatief), waarde 12; In $x=-2$, $x=2$ minima (absoluut), waarde 4. Daar het absolute minimum van $f(x)$, 4 is, volgt uit $f(x)\geqslant 4$, $f(x)>0$; dus $f(x)$ is positief voor alle x. De grafiek heeft buigpunten voor $x=-5/3$, $x=-1$, $x=1$, $x=5/3$, waarvan in $x=-1$, en $x=1$ de raaklijn horizontaal is. $x=0$ is een keerpunt van de grafiek.

16. We gebruiken de substitutie methode (II § 10 D). We zorgen er steeds voor dat niet gelijktijdig sin x en sin 2x in de integrand voorkomen. Daar $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ is

$$I = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{2\sin x\; d(\sin x)}{1+\sin^2 x} = \int \frac{d(1+\sin^2 x)}{1+\sin^2 x} =$$

$= \log(1+\sin^2 x)+C$. Willen we echter overgaan op goniometrische functies van 2x, dan vinden we uit

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x),\quad I = \int \frac{\sin 2x}{1+\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}\,dx = \int \frac{\sin 2x}{3-\cos 2x}\,d(2x) =$$

$$= \int \frac{d(3-\cos 2x)}{3-\cos 2x} = \log(3-\cos 2x)+C' = \log(2+2\sin^2 x)+C' =$$

$$= \log(1+\sin^2 x) + \log 2 + C' = \log(1+\sin^2 x) + C.$$

17. Berekening van bepaalde integralen berust op de hoofdstelling (II § 9) volgens de methode geïllustreerd in II § 12.
We berekenen eerst de onbepaalde integraal met partiële integratie (II § 10 E). Omdat we weten dat bij differentiatie van arcsin(x^2) een rationele functie ontstaat, (II § 5 B voorbeeld 9) richten we het zo in dat de arcsin(x^2) gedifferentieerd wordt, waardoor een rationale integrand ontstaat. Substituties (II § 10 D) worden steeds gebruikt.

$$\int x \arcsin (x^2)dx = \tfrac{1}{2}\int \arcsin (x^2)d(x^2) =$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 \arcsin (x^2) - \tfrac{1}{2}\int x^2 d(\arcsin (x^2)) =$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 \arcsin (x^2) - \tfrac{1}{2}\int x^2 \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 \arcsin(x^2) + \tfrac{1}{4}\int \frac{d(1-x^4)}{\sqrt{1-x^4}} = \tfrac{1}{2} x^2 \arcsin(x^2) + \tfrac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + C.$$

(N.B. Uiteraard is $|x| \leqslant 1$).

De bepaalde integraal is nu:

$$\tfrac{1}{2}[x^2 \arcsin (x^2) + \sqrt{1-x^4} + c]_{0}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \{ (\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2 \arcsin ((\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2) + \sqrt{1-(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^4} - 1 \} = \tfrac{1}{4} \arcsin \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}(\sqrt{3}-2) =$$

$$= \frac{\pi}{24} + \frac{1}{4}(\sqrt{3}-2).$$

18. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x\sin x} - \cos x)(\sqrt{1+x\sin x} + \cos x)}{\sin^2 x(\sqrt{1+x \sin x} + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1+x\sin x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x\sin x} + \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x} + 1\right) \frac{1}{\sqrt{1+x\sin x} + \cos x} .$$

We gebruiken nu de standaardlimiet $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (I § 4 D) en stelling (I § 4 B) voor quotiënten en sommen waaruit we concluderen $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x} + 1\right) = 2$. Uit de insluitstelling (I § 4 B) volgt dat $\lim_{x \to 0} x \sin x = 0$ $(-1 \leqslant \sin x \leqslant 1)$; dus $\lim_{x \to 0} (1+x \sin x) = 1$.

We vinden dat de gevraagde limiet gelijk is aan $2.\frac{1}{2} = 1$.

Opmerking: De stelling I § 4 B blz.I.13 mag alleen worden toegepast als de limieten links van de implicatie pijl bestaan, en als bij deling die welke in de noemer komt ongelijk nul is.

Opmerking: Voor kenners van Wiskunde II:
De gevraagde limiet kan ook met Mac Laurin reeks ontwikkelingen worden bepaald (zie VII § 5 c).

19. Voor alles zal men willen proberen de haakfactor te vereenvoudigen. Beschouwt men een rechthoekige driehoek met zijden 1, x, $\sqrt{1+x^2}$ dan komt men op het idee dat $\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan \frac{1}{x}$. (Omdat we spreken over $\lim_{x \to \infty}$ is zonder bezwaar $x > 0$ te nemen). Dit bewijzen we op de bekende wijze (Vgl.I § 2 J).
Is $\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = t$, dan is $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin t$ en $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$; in ons geval, waar $0 < \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1$, is zelfs $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Nu is $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\tan(\frac{\pi}{2} - t) = \frac{1}{x}$, bovendien:

$0<\frac{\pi}{2}-t<\frac{\pi}{2}$, dus $\frac{\pi}{2}-t=\text{arc tan}\,\frac{1}{x}$. Substitueert men nu $x=y^{-1}$, $y=\tan z$ $(0<z<\frac{\pi}{2})$, dan vindt men voor de gevraagde limiet achtereenvolgens:

$$\lim_{x\to\infty} x\,\text{arc tan}\,1/x=\lim_{y\downarrow 0}\frac{\text{arc tan}\,y}{y}=\lim_{z\downarrow 0}\frac{z}{\tan z}.$$ (Daar voor $-\frac{\pi}{z}<z<\frac{\pi}{z}$ $\text{arc tan}(\tan z)=z$ en $\tan z\downarrow 0\Leftrightarrow z\downarrow 0$ is).

Uit I § 4 D voorb.2 en stelling I § 4 B voor de limiet van een quotient volgt $\lim_{z\to 0}\frac{z}{\tan z}=1$, dus in het bijzonder $\lim_{z\downarrow 0}\frac{z}{\tan z}=1$.

Opmerking 1: Men onderscheide goed het verschil in betekenis van de symbolen $\lim_{z\to 0}$, $\lim_{z\downarrow 0}$. $\lim_{z\uparrow 0} f(z)$ bestaat als $\lim_{z\downarrow 0} f(z)$ en $\lim_{z\uparrow 0} f(z)$ beide bestaan en gelijk zijn.

Opmerking 2: Omdat ook $\lim_{z\uparrow 0}\frac{z}{\tan z}=1$ is, kan men menen, tevens bewezen te hebben $\lim_{x\to-\infty} x(\frac{\pi}{2}-\text{arc sin}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})=1$.

Dit is onjuist, hetgeen men uit de overweging dat voor $x<0$, $x(\frac{\pi}{2}-\text{arc sin}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})<0$ is, direct ziet. Voor negatieve x is in de bovenstaande herleiding $-\frac{\pi}{2}<t<0$, zodat $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-t<\pi$. De overgang van $\tan(\frac{\pi}{2}-t)=\frac{1}{x}$ op $\frac{\pi}{2}-t=\text{arc tan}\,\frac{1}{x}$ is voor negatieve x dus fout.

20. Uit $f(x)=x^{3/2}\,|x-5|$ volgt

$$f'(x)=\begin{cases}-5/2\;x^{\frac{1}{2}}(x-3) & 0<x<5\\ 5/2\;x^{\frac{1}{2}}(x-3) & 5<x\,.\end{cases}$$

In $x=5$ bestaat de afgeleide niet; in $x=0$ zouden we gezien het definitiegebied van de functie alleen van de rechter afgeleide $\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ kunnen spreken. Tevens beschouwen we de tweede afgeleide:

$$f''(x)=\begin{cases}-\frac{15}{4}\,x^{\frac{1}{2}}\,(\frac{x-1}{x}) & 0<x<5\\ \frac{15}{4}\,x^{\frac{1}{2}}\,(\frac{x-1}{x}) & 5<x;\end{cases}$$ in $x=5$ bestaat de 2^{de} afgeleide niet.

We maken nu het volgende schema (zie II § 4, III § 4a)

x	0		1		3			5		
f'(x)	?	+	+	+	0	-	-	?	+	+
f"(x)	?	+	0	-	-	-	-	?	+	+
		stijgend, hol		stijgend, bol		dalend, bol			stijgend, hol	
			buigpunt		maximum			minimum		

Voor $x \to \infty$ stijgt f(x) boven alle waarden. Verder $f(x) \geqslant 0$.

We hebben dus: x=0 rand-minimum (absoluut) waarde 0
x=3 maximum (relatief) waarde $6\sqrt{3}$
x=5 minimum (absoluut) waarde 0.

Bij het tekenen van de grafiek komt verder nog tot uitdrukking: x=1 is buigpunt, x=5 is keerpunt (de linker en rechtertak in x=5 hebben raaklijnen met resp. als richtingscoëfficiënten de linker- en rechter afgeleiden van f(x) in x=5; deze bestaan en zijn $-5\sqrt{5}$ en $5\sqrt{5}$). De nulpunten zijn x=0 en x=5, in x=0 raakt de grafiek aan de x-as (de rechter-afgeleide in x=0 is 0).

Opmerking: De stelling van II § 6 zegt dat als een extreem optreedt in een punt waar de functie differentiëerbaar is, daar de afgeleide 0 is. We gebruiken dit in de vorm; van de punten waar f(x) differentiëerbaar is kan alleen een extreem optreden, (maar hoeft geen extreem op te treden!) in de punten waar f'(x) = 0. Over het al of niet optreden van extrema in punten waar f(x) niet differentiëerbaar is leert de stelling uiteraard niets.

21. De integrand is voor x=0 niet gedefiniëerd. Voor $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$ geldt:

$$\sqrt{\frac{1}{\sin x} - \sin x} = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$$

, (omdat $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x| = \cos x$ als $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$), zodat de integrand daar continu is. Krachtens definitie II § 13 is dan $I = \lim_{p \downarrow 0} \int_p^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$ indien deze bestaat (anders bestaat ook I niet).

Berekening van $\int_{p}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ volgens de methode van II § 12 levert dat de onbepaalde integraal $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{\sin x}} = 2\sqrt{\sin x} + C$ (zie II § 10), en dat de bepaalde integraal $2\sqrt{\sin \frac{\pi}{2}} - 2\sqrt{\sin p} =$

$= 2(1-\sqrt{\sin p})$ is. I is dan gelijk $\lim\limits_{p \downarrow 0} 2(1-\sqrt{\sin p}) = 2(1-\lim\limits_{p \downarrow 0} \sqrt{\sin p}) = 2$.

<u>Opmerking</u>: Kijk bij bepaalde integralen steeds of de integrand wel over het <u>hele</u> integratie interval gedefinieërd is.

22. N.B. In het volgende wordt enkele keren de stelling op I.13 gebruikt.

Natuurlijk proberen we eerst substitutie van x=0 (zie opmerking 1). Dit levert $\frac{0}{0}$, zodat we gaan proberen de breuk te vereenvoudigen of althans in een voor ons doel meer geschikte gedaante te brengen. De vorm van de noemer doet ons denken aan I.11.vb.2; vermenigvuldigen van teller en noemer met $\sqrt{\cos x + \tan x} + \sqrt{\cos x + \sin x}$ geeft

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \tan x}{\sqrt{\cos x + \tan x} - \sqrt{\cos x + \sin x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \tan x\,[\sqrt{\cos x + \tan x} + \sqrt{\cos x + \sin x}]}{\tan x - \sin x} .$$

(even Uw geheugen opfrissen: $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a-b$).

En nu opletten! Substitutie van x=0 levert nog steeds $\frac{0}{0}$, maar we zien twee prettige veranderingen:

1^e. Teller en noemer zijn deelbaar door sin x (want $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$); hierdoor mag worden gedeeld aangezien $\sin x \neq 0$ (immers: $x \to 0$, maar $x \neq 0$).

2^e. De haakfactor in de teller heeft een limiet $\neq 0$ voor $x \to 0$, zodat we deze afsplitsen m.b.v. stelling I.13, hetgeen een aanzienlijke vereenvoudiging oplevert (zie ook opm.3).

1^e en 2^2 uitvoeren geeft

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x} - 1} \cdot \lim_{x \to 0} [\sqrt{\cos x + \tan x} + \sqrt{\cos x + \sin x}\,] =$$

$$= 2.\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \quad (1).$$

Voor het uitrekenen van (1) staan nu enkele wegen open:

a) U hebt een goed geheugen en U weet nog uit I.16.vb.2 dat

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

b) U hebt een nog beter geheugen en U herinnert zich de geometrische trucjes van de middelbare school (hier gebruikt: $\cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2}$; let er op dat $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$ geen vereenvoudiging geeft!):

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \right)^2 .2 = 2,$$

waarbij de"standaardlimiet" I.16.D is gebruikt.

c) Uw geheugen laat U in de steek, maar U kent de 2e semesterstof al en probeert het met de reeksontwikkeling voor cos x (geldig voor alle x). Let er in dit geval goed op dat het geen zin heeft, zelfs onzinnig ~~is~~ reeksontwikkelingen te gebruiken vóór de gevraagde limiet in de vorm (1) is gebracht!

Via een der methoden a,b of c vinden we dus: L = 2.2 = 4.

Opmerking 1. De aanwijzing "substitueer x=0" lijkt in strijd met de opmerking:"$x \to 0$, maar $x \neq 0$". De verklaring van deze schijnbare tegenstrijdigheid is als volgt: Laat gevraagd worden te berekenen $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Bestaat nu f(a) en is f(x) continu voor x=a (I.14.C; de meeste U bekende functies zijn continu, zie I.14,15), dan is L = f(a). Voorbeeld: $\lim\limits_{x \to 0} (2x+1) = 2.0 + 1 = 1$; hier is $f(x) = 2x + 1$, f(0) bestaat en f(x) is continu voor x=0.

Zo gingen we in het bovenstaande steeds na of door herleiding een vorm was ontstaan die bestaat voor x=0, omdat we dan klaar geweest zouden zijn;

vb.: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin x}{x^2+x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x\sin x}{x+1} = 0$, want $\frac{x \sin x}{x+1}$ bestaat voor x=0 en is daar continu.

Opmerking 2. Voor het berekenen van limieten wordt vaak gebruik gemaakt van een of meer van de eigenschappen, genoemd op I.9 t/m I.16. Indien U de stof van semester II reeds kent kunt U vaak gebruik maken van reeksontwikkelingen.

Opmerking 3. Ga na elke herleiding steeds na of teller en noemer deelbaar zijn door eenzelfde factor (zie boven onder 1) en of misschien een factor afgesplitst kan worden die een limiet $\neq 0$ heeft (zie boven onder 2). Vooral dit laatste geeft vaak vereenvoudigingen. Vaak is het afsplitsen van een factor met limiet = 0 verboden, bijv. is de herleiding

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \sin x . \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = 0 . \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = ?$$

niet toelaatbaar, aangezien de regel $\lim f(x).g(x) = \lim f(x).\lim g(x)$ slechts geldig is als $\lim f(x)$ en $\lim g(x)$ beide bestaan.

(Evenzo geldt $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ slechts als $\lim f(x)$ en $\lim g(x)$ bestaan, terwijl $\lim g(x) \neq 0$).

23. a) Substitutie van $\alpha = 0$ levert

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\alpha \sin x \, dx}{1-\sin^2\alpha \sin^2 x} = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [- \cos x]_0^{\pi/2} = -0+1 = \underline{\underline{1}} .$$

b) We nemen een vaste α met $0 < \alpha < \pi/2$; dan zijn $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$ constanten. De factor $\cos\alpha$ kan dus direct voor het integraalteken gebracht worden; verder schrijven we voor het gemak even $\sin\alpha = a$:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \alpha \sin x \, dx}{1-\sin^2 \alpha \sin^2 x} = \cos\alpha \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \, dx}{1-a^2 \sin^2 x} . \qquad (1).$$

We stellen, alvorens verder te rekenen, even vast dat de integrand bestaat voor alle x met $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ (voor $x = \frac{\pi}{2}$ staat er in de noemer: $1-\sin^2\alpha$, en dit is niet nul, aangezien $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; voor alle andere x is $0 \leqslant \sin^2\alpha \sin^2 x < 1$ en dus $1-\sin^2\alpha \sin^2 x \neq 0$); de integraal is dus niet oneigenlijk (zie II.32) en er zullen dus geen limietovergangen nodig zijn.

We berekenen nu eerst de onbepaalde integraal in (1), dus

$$J = \int \frac{\sin x \, dx}{1-a^2 \sin^2 x} \ .$$

De kennis van de integraalrekening, vereist voor tentamen I, geeft u slechts 2 methoden voor het berekenen van J, n.l. substitutie van een **nieuwe** variabele (II.27) en partiële integratie (II.28). De keus zal niet moeilijk zijn: we zoeken een geschikte substitutie. De teller herkennen we als te zijn $\sin x \, dx = -d(\cos x)$; we kunnen ook $\sin^2 x$ uitdrukken in $\cos x$ (wegens $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$) en dus proberen we $\cos x = y$:

$$J = - \int \frac{d(\cos x)}{(1-a^2)+ a^2 \cos^2 x} \ .$$

(denk er om: a is een constante).

De laatste integraal lijkt op $\int \frac{dt}{1+t^2}$ = arc tan t, en om deze vorm te bereiken brengen we in de noemer $(1-a^2)$ buiten haakjes (dan komt er iets van de vorm $1+\ldots$):

$$- \int \frac{d(\cos x)}{(1-a^2)[1+ \frac{a^2 \cos^2 x}{1-a^2}]} = - \frac{1}{1-a^2} \int \frac{d(\cos x)}{1+\left(\frac{a \cos x}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2} \ .$$

In de noemer staat nu inderdaad iets van de gedaante

$1+t^2$ (met $t = \frac{a \cos x}{\sqrt{1-a^2}}$) ; in de teller staat

$$d(\cos x) = d\left(\frac{a \cos x}{\sqrt{1-a^2}}\right) \times \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$$

(immers: $d \frac{a \cos x}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} d(\cos x)$ en dus

$$J = - \frac{1}{1-a^2} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \int \frac{d \ \frac{a \cos x}{\sqrt{1-a^2}}}{1+ \frac{a \cos x}{\sqrt{1-a^2}}}$$

waarmee de integraal in de vorm $\int \frac{dt}{1+t^2}$ is gebracht, met $t = \frac{a \cos x}{\sqrt{1-a^2}}$;

$$J = -\frac{1}{1-a^2} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \cdot \text{arc tan}\left(\frac{a\cos x}{\sqrt{1-a^2}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{a\sqrt{1-a^2}}\ \text{arc tan}\left(\frac{a\cos x}{\sqrt{1-a^2}}\right) \quad \text{wegens } 1-a^2 = (\sqrt{1-a^2})^2\ ).$$

Voor (1) vinden we dus

$$I = \cos\alpha\left[-\frac{1}{a\ \sqrt{1-a^2}}\ \text{arc tan}\ \frac{a\cos x}{\sqrt{1-a^2}}\ \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{\cos\alpha}{a\ \sqrt{1-a^2}}\left[\text{arc tan } 0 - \text{arc tan}\ \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\ \right] =$$

$$= \frac{\cos\alpha}{a\ \sqrt{1-a^2}}\ \text{arc tan}\ \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\ .$$

Tenslotte substitueren we voor a weer: $a = \sin\alpha$, dus $1-a^2 = \cos^2\alpha$, $\sqrt{1-a^2} = \cos\alpha$.

__Opm.1.__ Let op: $\sqrt{1-a^2} = \sqrt{\cos^2\alpha} = |\cos\alpha|$ (immers $\sqrt{a^2} = |a|$; aangezien hier $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ is $\cos\alpha > 0$, en dus $|\cos\alpha| = \cos\alpha$. Als bijv. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, dan is $\cos\ \alpha < 0$, en dus $\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\cos\alpha$.

Dan is

$$I = \frac{1}{\sin\alpha}\ \text{arc tan}\ (\tan\alpha).$$

Nu is (zie I.7.3) arc tan x gedefinieerd voor alle x, en arc tan x = y betekent: <u>tan y = x en $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$</u>. Noemen we nu arc tan (tan α) = y, dan betekent dit dus: tan y = tan α, en $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Uit tan y = tan α volgt: $y = \alpha + k.\pi$; gegeven is $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, dus $k = 0 \Longrightarrow y = \text{arc tan}\ (\tan\alpha) = \alpha$, en dus

$$I = \frac{\alpha}{\sin\alpha}\ .$$

Opm.2. Let bij arc tan x = y op de voorwaarde: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Zo is bijv. arc $\tan(\tan \frac{3\pi}{4}) \neq \frac{3\pi}{4}$, maar arc tan $(\tan \frac{3\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4}$, immers arc $\tan(\tan \frac{3\pi}{4}) = y$ betekent: $\tan y = \tan \frac{3\pi}{4} (=-1)$ en $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.
Zie voor dit alles nog eens I.7.I.

Opm.3. Indien U reeds op de hoogte bent van de wiskunde voor semester II, dan bent U in het nadeel: wellicht hebt U dan geprobeerd te zwaar materiaal (IX.10) te gebruiken. Bedenk evenwel dat onder de op IX.10 genoemde methoden ook voor komt: "eenvoudige substitutie"! Een paardenmiddel als $\tan \frac{x}{2} = t$ is hier, hoewel het werkt, niet aan te bevelen.

Opm.4. In het bovenstaande is gebruikt: $1-a^2 = (\sqrt{1-a^2})^2$. Denk er om dat een dergelijke herleiding alleen mogelijk is als $1-a^2 \geqslant 0$, d.w.z. als $|a| \leqslant 1$ (zoals in ons geval).

Opm.5. Het was niet noodzakelijk $\sin\alpha = a$ te stellen; zonder dit was de berekening van de onbepaalde integraal in (1) als volgt verlopen:

$$\int \frac{\sin x\, dx}{1-\sin^2\alpha \sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2\alpha} \int \frac{d(\cos x)}{1+\tan^2\alpha \cos^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{\sin\alpha \cos\alpha} \int \frac{d(\tan\alpha \cos x)}{1+(\tan\alpha \cos x)^2} = -\frac{1}{\sin\alpha \cos\alpha} \text{arc } \tan(\tan\alpha \cos x)$$

en verder overeenkomstig het bovenstaande.

24. a. Voor het bepalen van de extremen gaan we het gedrag van de eerste afgeleide van de functie $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2|x|$ na (II.16. § 6, vooral de voorbeelden op II.17,18). Aangezien de functie $|x|$ niet overal differentieerbaar is, n.l. niet voor $x = 0$ (II.7.vb.3), is $f(x)$ dit ook niet overal; we beschouwen nu twee gevallen, nl. $x < 0$ en $x > 0$:

Voor $x < 0$ is $|x| = - x$ (zie I.2) dus $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x$;
Voor $x > 0$ is $|x| = x$ dus $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x$.
(voor $x = 0$ is $|x| = 0$ en $f(0) = 0$).

Hieruit volgt:

$$\text{Voor } x<0: \quad f'(x) = 3x^2 - 8x - 2 = 3\left(x - \frac{4+\sqrt{22}}{3}\right)\left(x - \frac{4-\sqrt{22}}{3}\right) \qquad (1)$$

$$\text{Voor } x>0: \quad f'(x) = 3x^2 - 8x + 2 = 3\left(x - \frac{4+\sqrt{10}}{3}\right)\left(x - \frac{4-\sqrt{10}}{3}\right) \qquad (2)$$

(voor $x = 0$ bestaat $f'(x)$ niet).

Het tekenverloop van (1) wordt:

	$\frac{4-\sqrt{22}}{3}$		0		$\frac{4+\sqrt{22}}{3}$	
+	0	-		-	0	+

(N.B. $\sqrt{22} > \sqrt{16} = 4$, dus $4 - \sqrt{22} < 0$).

Het tekenverloop van (2) wordt:

	0		$\frac{4-\sqrt{10}}{3}$		$\frac{4+\sqrt{10}}{3}$	
+		+	0	-	0	+

Ermee rekening houdend dat (1) resp. (2) alleen geldig zijn voor $x < 0$ resp. $x > 0$, vinden we voor het tekenverloop van $f'(x)$ en daarmee voor het gedrag van $f(x)$ w.b. stijgen en dalen (II.17) het volgende beeld:

x		$\frac{4-\sqrt{22}}{3}$		0		$\frac{4-\sqrt{10}}{3}$		$\frac{4+\sqrt{10}}{3}$	
$f'(x)$	+	0	-	?	+	0	-	0	+
gedrag $f(x)$	stijgend		dalend		stijgend		dalend		stijgend
extrema		max.		min.		max.		min.	

Aangezien $f(x)$ voor alle x gedefinieerd is (vgl. opm. 3) constateren we: (relatieve) maxima voor $x = \frac{4-\sqrt{22}}{3}$ en $x = \frac{4-\sqrt{10}}{3}$, (relatieve) minima voor $x = 0$ (de raaklijn is hier niet horizontaal, maar bestaat niet) en $x = \frac{4+\sqrt{10}}{3}$.

b. Voor het tekenen van de grafiek constateren we eerst dat de gegeven functie gedefinieerd is voor alle x en continu is, aangezien elk van de samenstellende termen x^3, x^2, en $|x|$ continu is (I.14.C en I.15); de grafiek zal dus een "ononderbroken kromme" zijn, en verticale asymptoten treden niet op. Als $x \to \infty$ is $f(x) \to \infty$, als $x \to -\infty$ is $f(x) \to -\infty$ (om dit in te zien schrijven we: $f(x) = x^3(1 - \frac{4}{x} + \frac{2|x|}{x^3})$), dus horizontale asymptoten treden niet op.

Snijpunten met de x-as vinden we als nulpunten van $f(x)$ d.i.

$x^3 - 4x^2 + 2|x| = 0$.

Onderscheid weer 2 gevallen (als boven):

Voor $x < 0$: $x^3 - 4x^2 - 2x = 0$, $x(x-2-\sqrt{6})(x-2+\sqrt{6}) = 0$,
$x = 0$, $2+\sqrt{6}$, $2-\sqrt{6}$, en, aangezien $x < 0$,
alleen: $x_1 = 2-\sqrt{6}$.

Voor $x > 0$: $x^3 - 4x^2 + 2x = 0$, $x(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2}) = 0$,
$x = 0$, $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$, en, aangezien $x > 0$, alleen:
$x_2 = 2-\sqrt{2}$, $x_3 = 2+\sqrt{2}$.

$x = 0$ blijkt ook een nulpunt te zijn, (vgl.opm.4) dus de snijpunten met de x-as zijn $(2-\sqrt{6},0)$, $(0,0)$, $(2-\sqrt{2},0)$, $(2+\sqrt{2},0)$.

(Voor het schetsen van de grafiek schatten we: $\sqrt{2} \approx 1,4$, etc.).

De x-coördinaten van de extremen zijn reeds onder a gevonden; voor het tekenen doen we weer enkele ruwe schattingen ($\sqrt{22} \approx 4,7$, etc.)

Uit a volgt dat $f'(\frac{4-\sqrt{22}}{3}) = f'(\frac{4-\sqrt{10}}{3}) = f'(\frac{4+\sqrt{10}}{3}) = 0$, dus de raaklijnen in deze extremen lopen horizontaal; de raaklijn in het extreem (0,0) bestaat niet. Om nu toch iets over het verloop van de grafiek in (0,0) te weten te komen bepalen we m.b.v. (1) en (2) de richting van de raaklijn in de buurt van (0,0):

$$\lim_{x \downarrow 0} f'(x) = \lim_{x \downarrow 0} (3x^2-8x+2) = +2 \text{ en } \lim_{x \uparrow 0} f'(x) = \lim_{x \uparrow 0} (3x^2-8x-2) = -2.$$

Beschouwen we nu de stukken van de grafiek voor $x \leqslant 0$ en $x \geqslant 0$ afzonderlijk, dan zien we dat beide stukken in (0,0) een raaklijn bezitten, nl. resp. $y = -2x$ en $y = +2x$ (II.18.vb.5; maak zelf een figuur).

Tenslotte bepalen we uit het gedrag van de tweede afgeleide eventuele buigpunten (III.5.§ 4.A):

Uit (1) en (2) volgt:

Voor $x < 0$: $f''(x) = 6x-8$, voor $x > 0$: $f''(x) = 6x-8$ (voor $x = 0$ bestaat f"(x) natuurlijk niet) en het tekenverloop van f"(x) en daarmee het gedrag van f(x) t.a.v. hol en bol zijn (zie III.5.§ 4.A) wordt nu:

x		0		$\frac{4}{3}$	
f"(x)	-	?	-	0	+
f(x)	bol		bol		hol

Er is dus een buigpunt voor $\underline{x = \frac{4}{3}}$, de bijbehorende y-coördinaat berekenen we (of schatten we voor de tekening) uit de geg. vergelijking. M.b.v. alle bovenstaande gegevens kunnen we nu de gevraagde grafiek schetsen. Denk er om: f'(a) geeft steeds de richting van de raaklijn voor x=a aan, en deze richting tekenen we in elk hierboven berekend punt (dus voor het buigpunt: $f'(\frac{4}{3})$ berekenen). Denk ook om het "hol" resp. "bol" zijn; aan weerskanten van een buigpunt loopt de grafiek aan verschillende kanten van de raaklijn.

c. De raaklijn in (2,-4) (inderdaad ligt dit punt op de gegeven kromme, ga dit steeds na) vinden we volgens II.18.vb.5 :
Uit (2): f'(2) = -2, dus y+4=-2(x-2) of $\underline{2x+y=0}$ (3).

d. We gaan eerst na in welk(e) punt(en) de raaklijn (3) de kromme snijdt (of raakt). Daartoe lossen we x op uit (3) en $y = x^3-4x^2+2|x|$:

$$y = -2x = x^3-4x^2+2|x| \text{ of } x^3-4x^2+2(x+|x|) = 0.$$

Voor $x<0$: $x^3-4x^2 = 0$, $x^2(x-4) = 0$, $x = 0$ of $x = 4$; geen oplossing (want $x<0$). Voor $x>0$: $x^3-4x^2+4x = 0$, $x(x-2)^2 = 0$, $x = 0$ of 2, dus $x = 2$. Ook $x = 0$ (vgl.opm.4) blijkt te voldoen; de enige punten zijn dus (2,-4) (het gegeven raakpunt) en (0,0); de raaklijn (3) snijdt de kromme dus nog in (0,0). Dat hier inderdaad raking optreedt kunnen we niet bewijzen door de raaklijn in (0,0) te bepalen, immers deze bestaat niet! Evenwel hebben we onder b gezien dat in (0,0) twee stukken van de kromme samenkomen die elk een raaklijn (y=-2x resp. y=+2x) hebben in (0,0); de eerste hiervan is juist (3), zodat (3) inderdaad de kromme nog in een tweede punt, nl. (0,0), raakt.

Opm.1. Let op: voor een maximum is het niet voldoende dat f(x) links stijgend, rechts dalend is (kijk eens naar $f(x) = \frac{1}{x^2}$ voor x = 0!); noodzakelijk is dat de functie in het punt zelf gedefinieerd is. Verder kunnen nog randextremen optreden als de functie niet overal gedefinieerd is ($f(x) = 3x+5$ voor $-1 \leqslant x \leqslant 5$ heeft min.2 voor x=-1 en max. 20 voor x=5).

Opm.2. Denk er om dat bij het onderzoek van $|x|$ het punt x = 0 niet vergeten wordt; dit levert bijv. in b een nulpunt op, terwijl het gevraagde punt in d juist (0,0) is.

Opm.3. Zoals uit b blijkt is in een buigpunt de raaklijn niet noodzakelijk horizontaal (is dit wel het geval, dan spreekt men wel van een horizontaal buigpunt); let hierop in de tekening!

Opm.4. Beschouwen we, zoals onder b en d, de stukken van de grafiek voor $x \leqslant 0$ en $x \geqslant 0$ afzonderlijk, dan vinden we voor elk van deze stukken een raaklijn in (0,0). We zeggen daarom wel dat de functie zowel links als rechtsdifferentieerbaar is in (0,0) (echter niet differentieerbaar); vgl.de grafiek van de functie $|x|$.

25. a. De gegeven formule heeft geen betekenis voor $x = 0$. Uit de continuïteit van $f(x)$ voor $x = 0$ volgt evenwel (Def. I § 4 C):

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x\sqrt[3]{x})}{x\sqrt[3]{x}} . x = 1.0 = 0.$$

b. Volgens de regels van Leibniz (II § 5 A) geldt voor $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{\cos x^{4/3} . 4/3 x^{1/3} . x^{1/3} - 1/3 x^{-2/3} \sin x^{4/3}}{x^{2/3}} =$$

$$= \frac{4x\sqrt[3]{x} \cos(x\sqrt[3]{x}) - \sin(x\sqrt[3]{x})}{3x\sqrt[3]{x}} .$$

Deze formule is voor $x = 0$ niet bruikbaar. Daarom passen we hier de definitie van de afgeleide toe (Def II § 4):

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h\sqrt[3]{h})-0}{h\sqrt[3]{h}} = 1$$

26. $f(x) = (x-3)(x^2+1)e^{\operatorname{arc\,tan} x}$. Geoorloofd: alle x.

a. Snijpunten met de assen:

X-as: $y = 0$, dus $x-3 = 0$, $x = 3$, daar de beide andere factoren geen reële nulpunten hebben.

Y-as: $x = 0$ dus $y = -3.1.e^0 = -3$.

De gevraagde punten zijn dus $(3,0)$ en $(0,-3)$.

b. $f(x)$ is overal differentieerbaar, dus: Voor een extreem moet gelden $f'(x) = 0$. (II. § 6, eerste stelling)

$$f'(x) = e^{\text{arc tan } x}\frac{1}{x^2+1}(x^3-3x^2+x-3)+e^{\text{arc tan } x}(3x^2-6x+1)$$

$$= e^{\text{arc tan } x}(3x^2-5x-2) = e^{\text{arc tan } x}(3x+1)(x-2).$$

We vinden als tekenverloop van $f'(x)$:

x		$-1/3$		2		3	
f'(x)	+	0	-	0	+	+	+
f(x)		max		min		0	
	$-\infty$ ↗		↘		↗		↗ ∞

waarbij blijkt, dat voor $x = -1/3$ een relatief maximum optreedt:
$f(x) = -100/27.e^{\text{arc tan}-1/3}$ en voor $x = 2$ een relatief minimum:
$f(x) = -5e^{\text{arc tan } 2}$.
Verder is $f(x)\rightarrow\infty$ voor $x\rightarrow\infty$ want $e^{\text{arc tan } x} > e^{-\pi/2}$, en

$$x^3-3x^2+x-3 = x^3(1-3/x+1/x^2-3/x^3) > (\tfrac{1}{2})x^3$$

wanneer $x > 10$ bijvoorbeeld.
Dus $f(x) > 1/2\ e^{-\pi/2}x^3$ als $x > 10$, en $1/2e^{-\pi/2}x^3\rightarrow\infty$ voor $x\rightarrow\infty$.
Analoge redenering toont aan, dat $f(x)\rightarrow-\infty$ voor $x\rightarrow-\infty$. (Vgl. I § 3 E).

27. $$I = \int\log|\cos x|.\frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\int\log|\cos x|\frac{d \cos x}{\cos x} =$$

$$= -\int\log|\cos x|d(\log|\cos x|) = -\tfrac{1}{2}\log^2|\cos x| + C.$$

28. De onbepaalde integraal:

$$\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{(1+x^2)\text{arc tan } x}\right)dx = \log|x| - \int\frac{d(\text{arc tan } x)}{\text{arc tan } x} =$$

$$= \log|x| - \log|\text{arc tan } x| + C = \log \frac{|x|}{|\text{arc tan } x|} + C.$$

I is een oneigenlijke integraal. Dus:

$$I = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(1+x^2)\text{arc tan } x}\right)dx =$$

$$= \lim_{\delta \downarrow 0} \log \frac{|x|}{|\text{arctan } x|} \Bigg|_\delta^1 = \log \frac{1}{\text{arc tan } 1} - \lim_{\delta \downarrow 0} \log \frac{\delta}{\text{arc tan } \delta} =$$

$$= \log \frac{4}{\pi} - \log \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\delta}{\text{arc tan } \delta} = \log \frac{4}{\pi} - \log 1 = \log \frac{4}{\pi} .$$

<u>Opmerking</u>: Het is <u>onjuist</u> de bepaalde integraal te schrijven als

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^1 \frac{1}{x}\, dx - \lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^1 \frac{1}{(1+x^2)\text{arc tan } x}\, dx ,$$

omdat beide limieten niet bestaan. In de praktijk blijkt dit een zeer vaak voorkomende fout te zijn.

29. Voor $|x| > 1$ zijn de termen x^{2n+1} en x^{2n} dominerend in de limiet, daar de beide n^{de} machtswortels begrensd zijn (tussen 0 en 1).

Dus:

a. $$|x| > 1 : f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x + x^{-2n}\sqrt[n]{|\sin \frac{\pi}{2} x|}}{1 + x^{-2n}\sqrt[n]{|\cos \frac{\pi}{2} x|}} = \frac{x+0}{1+0} = x$$

omdat $0 \leqslant x^{-2n}\sqrt[n]{|\sin \frac{\pi}{2} x|} \leqslant (x^{-2})^n$

en $0 \leqslant x^{-2n}\sqrt[n]{|\cos \frac{\pi}{2} x|} \leqslant (x^{-2})^n$,

waarbij $\lim_{n \to \infty} (x^{-2})^n = 0$ (I § 3 C standaardlimiet 2) en we verder gebruik maken van de insluitstelling,

b. $0 < |x| < 1$. Nu is $\lim_{n \to \infty} x^{2n+1} = 0$, $\lim_{n \to \infty} x^{2n} = 0$ volgens dezelfde standaardlimiet, en verder is

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|\cos \frac{\pi}{2} x|} = 1, \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|\sin \frac{\pi}{2} x|} = 1,$$

omdat $|\cos \frac{\pi}{2} x|$ en $|\sin \frac{\pi}{2} x|$ in dit interval beide <u>positief</u> zijn ($x = 0$ en $x = \pm 1$ sluiten we uit).

Dus: $$f(x) = \frac{0+1}{0+1} = 1.$$

c. Nu resteren nog drie punten: $x = 0, +1, -1$.

$$f(0) = \lim_{n \to \infty} \frac{0+\sqrt[n]{0}}{0+\sqrt[n]{1}} = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$$

$$f(1) = \lim_{n \to \infty} \frac{1+\sqrt[n]{1}}{1+\sqrt[n]{0}} = \lim_{n \to \infty} 2 = 2$$

$$f(-1) = \lim_{n \to \infty} \frac{-1+\sqrt[n]{1}}{1+\sqrt[n]{0}} = \lim_{n \to \infty} 0 = 0.$$

30. $f(x)$ is positief, behoudens in $0, \pi, 2\pi$, waar $f(x) = 0$.

a. We onderscheiden $\sin x \geqslant 0$ d.w.z. $0 \leqslant x \leqslant \pi$, en $\sin x \leqslant 0$, d.w.z. $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

1) $0 \leqslant x \leqslant \pi$: $f(x) = \sin x \, e^{-2\sin x}$. Voor $0 < x < \pi$ geldt in een extreem: $f'(x) = 0$. (II § 6 eerste stelling)

$$f'(x) = \cos x \, e^{-2\sin x} - 2\sin x \cos x \, e^{-2\sin x} =$$

$$= \cos x \,(1-2\sin x) e^{-2\sin x} = 0, \text{ als } x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6},$$

met als tekenverloop

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$	1	+ +	0	- - -	0	+ + +	0	- -	(-1)
$f(x)$	0		$\frac{1}{2}e^{-1}$		e^{-2}		$\frac{1}{2}e^{-1}$		0
	min	↗	max	↘	min	↗	max	↘	min

waaruit blijkt, dat maxima optreden in $\frac{\pi}{6}$ en $\frac{5\pi}{6}$ en een minimum in $\frac{\pi}{2}$.

Uit het feit, dat $f'(0) = 1$ volgt dat de raaklijn aan de grafiek in de oorsprong een hoek van 45° maakt met de positieve X-as. Analoog vinden we een hoek van 135° tussen raaklijn en positieve X-as (althans voor dit deel van de grafiek) in het punt $x = \pi$.

2) $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

$$f(x) = -\sin x\, e^{2\sin x}$$

$$= \sin(x-\pi)e^{-2\sin(x-\pi)} = f(x-\pi)$$

daar $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ impliceert $0 \leqslant x-\pi \leqslant \pi$.

De grafiek tussen π en 2π is dus een verschoven copie van die tussen 0 en π.

Tenslotte blijkt dat

$x = 0,\ \pi,\ 2\pi$	absolute minima:	$f(x) = 0$
$x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}$	absolute maxima:	$f(x) = \frac{1}{2e}$
$x = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$	relatieve minima:	$f(x) = \frac{1}{e^2}$

31. $$I = \int x \frac{d \sin x}{\sin^2 x} = -\int x\, d\, \frac{1}{\sin x} =$$

$$= -\frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin x}\, dx =$$

$$= -\frac{x}{\sin x} + \log\left|\tan \frac{1}{2} x\right| + C.$$

Opmerking: In de complementen wordt behandeld:

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{2\sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x}\, dx = \int \frac{d\, \frac{1}{2} x}{\tan \frac{1}{2} x \cos^2 \frac{1}{2} x} =$$

$$= \int \frac{d(\tan \frac{1}{2} x)}{\tan \frac{1}{2} x} = \log\left|\tan \frac{1}{2} x\right| + C.$$

32. $$L = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)(1-\cos^2 x)}{(1+x^4)-(1-x^4)} \, . \, (\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1-x^4}) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}x . \sin^2 x}{2x^4} \, . \, (\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1-x^4}) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \tfrac{1}{4}\left(\frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}\right)^2 . \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 . (\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1-x^4}) =$$

*) $$= \lim_{x \to 0} \tfrac{1}{4}\left(\frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}\right)^2 . \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 . \lim_{x \to 0} (\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1-x^4}) =$$

$$= \tfrac{1}{4}.1.1.2 = \tfrac{1}{2}.$$

33. $$I = \int_1^e \frac{d(\log|x|)}{\sqrt{1+\log^2 x}} = {}^{**})$$

$$= \int_1^e \frac{d(\log x)}{\sqrt{1+\log^2 x}} = \log\{\log x + \sqrt{1+\log^2 x}\} \Big|_1^e =$$

$$= \log(1+\sqrt{1+1})-\log(0+\sqrt{1+0}) = \log(1+\sqrt{2})$$

vgl. II § 10 B laatste grondformule.

34. 1) $x \geqslant 0$ $f(x) = (2-2x-x^2)e^{x-1}$

nulpunten: daar $e^{x-1} > 0$ vinden we alleen nulpunten voor $2-2x-x^2 = 0 \rightarrow x = -1+\sqrt{3}$. De andere wortel is namelijk negatief.

$f'(x) = (2-2x-x^2)e^{x-1} + (-2-2x)e^{x-1} =$

---

*) Dit is geoorloofd, omdat alle genoemde limieten bestaan.

**) De vervanging van $|x|$ door x is geoorloofd, omdat het integratievlak slechts positieve x bevat.

$= (-4x-x^2)e^{x-1} < 0$ voor $x > 0$.

$f''(x) = (-4-2x)e^{x-1} + (-4x-x^2)e^{x-1}$

$= (-4-6x-x^2)e^{x-1} < 0$ voor $x \geqslant 0$

f" vertoont geen tekenwisseling voor $x \geqslant 0$, dus geen buigpunt in dit interval.

x	0		$-1+\sqrt{3}$		
f'(x)	0	-	-	-	-
f(x)	$2e^{-1}$	↘	0	↘	

Uit het tekenverloop van f'(x) blijkt, dat voor $x \geqslant 0$ geen extreem optreedt. Wel vinden we een horizontale raaklijn aan de grafiek voor $x \geqslant 0$ in $(0, 2e^{-1})$.

2) $x \leqslant 0$. $f(x) = (2-2x-x^2)e^{-x-1}$

Nulpunten: $2-2x-x^2 = 0 \rightarrow x = -1-\sqrt{3}$.

$f'(x) = -(2-2x-x^2)e^{-x-1} + (-2-2x)e^{-x-1}$

$= (-4+x^2)e^{-x-1} = (x+2)(x-2)e^{-x-1}$

$f''(x) = (2x+4-x^2)e^{-x-1} = 0$ voor $x = 1-\sqrt{5}$.

(De andere wortel van de vierkantsvergelijking is positief, ligt dus buiten het vak $x \leqslant 0$).

x			$(-1-\sqrt{3})$		-2				$(1-\sqrt{5})$				0
f'(x)	+	+	+	+	0	-	-		-	-			$4e^{-1}$
f"(x)	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	
f(x)		↗	0	↗		↘				↘			$2e^{-1}$
					max.				buigpunt				

Uit het tekenverloop van f'(x) en f"(x) blijkt, dat

$x = -2$ maximum $f(x) = 2e$,

$x = 1-\sqrt{5}$ buigpunt.

Tenslotte blijkt de raaklijn aan de grafiek van f(x) voor $x \leqslant 0$ in $(0,2e^{-1})$ niet horizontaal te zijn. Daar vertoont de grafische voorstelling dus een knik en blijkt de functie niet extreem te zijn, aangezien aan beide zijden $f'(x) < 0$.

35. arc sin u is gedefinieerd voor $|u| \leqslant 1$,
$\sqrt{x}$ is gedefinieerd voor $x \geqslant 0$,
arc tan u is gedefinieerd voor alle u. De gegeven functie is dus gedefinieerd als $x \geqslant 0$, $\frac{1}{x} - 1 \geqslant 0$ en $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$ d.w.z. als $0 < x \leqslant 1$.
We merken op dat de functie voor x = 0 niet gedefinieerd is maar wel een limiet heeft voor $x \downarrow 0$ nl. $\frac{\pi}{2}$.
De afgeleide vinden we m.b.v. II § 5 A^1, B^9, B^{11}, B^{12} :

$$[\text{arc sin } (x)^{\frac{1}{2}} + \text{arc tan } (x^{-1}-1)^{\frac{1}{2}}]^{1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+(x^{-1}-1)} \cdot \tfrac{1}{2}(x^{-1}-1)^{-\frac{1}{2}}(-x^{-2}) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x^{-1}-1}} = 0.$$

Opmerking:

1) Uit de stelling van het gemiddelde volgt dat de gegeven functie constant moet zijn als de afgeleide 0 is! Dit hadden we direct in kunnen zien: Als $0 < x \leqslant 1$ zijn 1, $\sqrt{x}$ en $\sqrt{1-x}$ zijden van een rechthoekige driehoek en dus is arc sin $\sqrt{x}$ + arc tan $\sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \frac{\pi}{2}$.

2) Bovenstaande afleiding van de afgeleide functie is niet juist voor x = 1. Hier zou men de definitie moeten toepassen.

36. De functie $f(x) = x^{\log x} \sin x$ is gedefinieerd als $x > 0$ daar dan log x zinvol is, evenals x^{α} voor willekeurige α en ook sin x voor alle x gedefinieerd is.

Hier wordt vaak de fout gemaakt $x^{\log x}$ te differentieren m.b.v. II § 5 B^{12} hoewel in deze regel uitdrukkelijk staat dat de exponent niet van x afhangt. We moeten $x^{\log x}$ schrijven als macht van e en daarna II § 5 C 14 en de kettingregel toepassen.

$$f(x) = (e^{\log x})^{\log x} \sin x = e^{\log^2 x} \sin x$$

$$f'(x) = (e^{\log^2 x} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x}) \sin x + e^{\log^2 x} \cos x =$$

$$= x^{\log x} \{2 \frac{\sin x \log x}{x} + \cos x\} .$$

Opmerking: Vergeet niet meer dat <u>ieder</u> <u>positief</u> getal te schrijven is als macht van e nl. $a = e^{\log a}$.

37. $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 0} (x^3 + x + 1) = 1,$

$\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow 0} (x^2 + ax + b) = b.$

De functie f is continu in $x = 0$, dus $b = 1$.
Voor alle andere x is f continu. Voor $x \neq 0$ is f differentieerbaar.
De rechterafgeleide van f in $x = 0$ is $\lim\limits_{h \downarrow 0} \frac{(h^3+h+1)-1}{h} = 1$

De linkerafgeleide van f in $x = 0$ is $\lim\limits_{h \uparrow 0} \frac{(h^2+ah+1)-1}{h} = a.$

Gegeven is dat f in $x = 0$ differentieerbaar is, dus bestaan linker- en rechterafgeleide en ze zijn gelijk, d.w.z. <u>$a = 1$</u>.
<u>Opmerking</u>: Na afleiding van $b = 1$ is ook de volgende oplossing goed. De gegeven functie heeft een grafiek die voor $x \leqslant 0$ samenvalt met die van x^2+ax+b, en voor $x > 0$ samenvalt met die van x^3+x+1. De grafiek van de gegeven functie heeft in $x = 0$, $y = 1$ een raaklijn. Dan hebben alle drie grafieken daar dezelfde raaklijn d.w.z. de waarde van $2x+a$ voor $x = 0$ en die van $3x^2+1$ voor $x = 0$ zijn gelijk d.i. $a = 1$

38. Aangetoond moet worden dat bij ieder positief getal ε een getal N gevonden kan worden zodat voor alle natuurlijke $n > N$ geldt, dat $\left|\frac{n^2+1}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ is. Is $\varepsilon > 0$ willekeurig gegeven, dan voldoet $N = \sqrt{\max(0, \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon})}$ aan deze eisen, waarmee ipso facto bewezen is dat een getal N met genoemde eigenschap gevonden kan worden. Immers is $n > N$ dan is $n^2 > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$ en dus is $2n^2 > \frac{1}{2\varepsilon} - 1$, dus $2n^2 + 1 > \frac{1}{2\varepsilon}$, dus

$$\varepsilon > \frac{1}{2(2n^2+1)} = \left|\frac{1}{2(2n^2+1)}\right| = \left|\frac{2n^2+2-2n^2-1}{2(2n^2+1)}\right| = \left|\frac{n^2+1}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| .$$

Opmerking. Op het klad gaat men van achteren naar voren te werk:

Wil $\left|\frac{n^2+1}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2(2n^2+1)} < \varepsilon$ zijn dan moet $2(2n^2+1) > 1/\varepsilon$ zijn,

maar dan moet $n^2 > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$ zijn. Nu kan $1-2\varepsilon < 0$ zijn, we mogen dan $\sqrt{1-2\varepsilon}$ niet opschrijven, daarom nemen we

$$N = \begin{cases} 0 & \text{als } \varepsilon > 1/2 \\ \sqrt{\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}} & \text{als } \varepsilon \leqslant 1/2 \end{cases}$$

(Dit houdt in dat als $\varepsilon > 1/2$ voor alle n: $\frac{n^2+1}{2n^2+1} - \frac{1}{2} < \varepsilon$ is.

Dit is juist daar $\frac{1}{2} < \frac{n^2+1}{2n^2+1} < 1$).

39. Voor $x = 0$ is $f(x)$ niet gedefinieerd.

Voor $x < 1$, $x \neq 0$ is $f(x) = \frac{x-1}{x^2} e^{x-1}$ en $f'(x) = \frac{x^2-2x+2}{x^3} e^{x-1}$.

Voor $x > 1$ is $f(x) = \frac{x-1}{x^2} e^{1-x}$ en $f'(x) = -\frac{x^2-2}{x^3} e^{1-x}$.

We onderzoeken eerst het punt $x = 1$: $f(1) = 0$.

De linker en rechter afgeleiden van $f(x)$ in $x = 1$ zijn resp.:

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1+h-1}{(1+h)^2} e^{h+1-1} - 0 \right) = 1 = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+2}{x^3} e^{x-1} \text{ en}$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1+h-1}{(1+h)^2} e^{1-1-h} - 0\right) = 1 = \lim_{x \to 1} - \frac{x^2-2}{x^3} e^{1-x} .$$

In $x = 1$ is $f(x)$ dus differentiëerbaar en de afgeleide $f'(1) = 1$.
Het enige nulpunt van $f'(x)$ is $x = \sqrt{2}$.
We stellen het volgende schema op:

		0		1		$\sqrt{2}$	
f(x)	-	?	-	0	+	+	+
f'(x)	-	?	+	+	+	0	-
f(x)	dalend		stijgend	stijgend	stijgend		dalend
		niet gedefinieerd		nulpunt		maximum	

Zowel voor $x \uparrow 0$ als voor $x \downarrow 0$ neemt $f(x)$ alle negatieve waarden aan, dus de y-as is asymptoot (tweemaal benaderd). Omdat $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ is de x-as asymptoot (eveneens tweemaal benaderd). Bovendien is het maximum in $x = \sqrt{2}$ blijkbaar absoluut.
De grafiek verloopt nu aldus: voor $x < 0$ ligt de grafiek geheel in het derde kwadrant met de assen als asymptoten. Voor $x \downarrow 0$ nadert de grafiek asymptotisch naar de negatieve y-as. In $0 < x < \sqrt{2}$ stijgt de grafiek door zijn enige nulpunt in $x = 1$, naar een absoluut maximum voor $x = \sqrt{2}$, waarde $\frac{\sqrt{2}-1}{2} e^{1-\sqrt{2}}$. Voor $x > \sqrt{2}$ daalt de grafiek, doch blijft in het eerste kwadrant, asymptotisch naar de positieve x-as naderend.
<u>Opmerking</u>. Het hol - of bol zijn en de buigpunten van de grafiek zou men met de tweede afgeleide kunnen onderzoeken. Dit is echter kennelijk niet de bedoeling van de steller van het vraagstuk.

40. We gebruiken de methode der partiële integratie II § 10 E zó, dat de nieuwe integrand de afgeleide van log(1+x²) bevat. Dit levert: $I = x\log(1+x^2) - \int x\, d(\log(1+x^2)) =$

$$= x\log(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = x\log(1+x^2) - \int \frac{2x^2+2-2}{x^2+1}\,dx =$$

$$= x\log(1+x^2) - 2\int dx + 2\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= x\log(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C. \qquad \text{(zie II § 10).}$$

41. Volgens de definitie van II § 12 is,

$$I = \lim_{N\to\infty} \int_0^N \left\{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x+1}\right\} dx = \lim_{N\to\infty} \log\left(\frac{N+\sqrt{1+N^2}}{N+1}\right),$$

(zie II § 12). De onbepaalde integraal is immers

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{dx}{1+x} = \log(x+\sqrt{1+x^2}) - \log(1+x) + C. \qquad \text{(zie II § 10)}$$

We vinden dus dat $I = \lim_{N\to\infty} \log\left(\frac{1+\sqrt{1/N^2+1}}{1+1/N}\right) = \log 2.$

42. $$f'(x) = \frac{(6x+3)(3x-5)-3(3x^2+3x-8)}{(3x-5)^2} = 3\,\frac{(3x-1)(x-3)}{(3x-5)^2}.$$

Tekenverloop:

x:		1/3		5/3		3	
f'(x):	+ + +	0	- - -	?	- - -	0	+ + +
f:	stijgend	5/3	dalend	?	dalend	7	stijgend

Extrema:

In $x = 1/3$ een maximum groot $5/3$,
In $x = 3$ een minimum groot 7 ,
In $x = -1$ en $x = 4$ randextremen groot 1 resp. $\frac{52}{7}$.

Opmerking: Deze opgave is ook zonder differentiaalrekening op te lossen. Stel $f(x) = \alpha$ en los x op:

$$3x^2+3x-8 = \alpha(3x-5) \quad \text{of}$$
$$3x^2+3(1-\alpha)x + (5\alpha-8) = 0.$$

Deze vgl. heeft geen oplossing als $9(1-\alpha)^2 - 12(5\alpha-8) < 0$ d.i. voor $5/3 < \alpha < 7$. Hieruit vinden we de extreme waarden $5/3$ en 7. In het algemeen gaat deze methode niet op.

43. $L = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos 2x}$ als beide limieten bestaan. Dus

$$L = 1. \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2\frac{1}{2}x}{2\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \tfrac{1}{4}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = \frac{1}{4}\,.$$

44. We passen partiele integratie zó toe dat de functie arc tan uit de integrand verdwijnt en een rationale integrand verkregen wordt. (Vgl. II § 10 E vb.2 en vb.5).

Noem de onbepaalde integraal I.

$$I = (x^3 + 3x) \text{ arctan } x - \int (x^3 + 3x) \frac{1}{x^2+1} \, dx =$$

$$= (x^3 + 3x) \text{ arctan } x - \int \{ x + \frac{2x}{x^2+1} \} \, dx =$$

$$= (x^3 + 3x) \text{ arctan } x - \tfrac{1}{2} x^2 - \log(x^2+1) + C.$$

De gevraagde integraal is $6\sqrt{3} . \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} . 3 - \log 4 =$

$$= 2\pi\sqrt{3} - \frac{3}{2} - 2 \log 2.$$

45. $L = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{1+\sqrt{x^2+1}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\text{arctan } x}$ als beide limieten bestaan.

De eerste limiet vinden we door $x = 0$ in te vullen daar de beschouwde functie in $x = 0$ continu is. Om de tweede limiet te bepalen schrijven we $x = \tan u$. Als nu $x \to 0$ dan ook $u \to 0$ als we $u = \text{arctan } x$ nemen. Dan is

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{arctan } x} = \lim_{u \to 0} \frac{\tan u}{u} = 1.$$

De limiet L is dus $- \frac{1}{2}$.

46. We moeten de gevallen waarin $(x+1)^n$ veel groter is dan 1, gelijk is aan 1 en veel kleiner is dan 1 (voor grote n) onderscheiden:

Als $-2<x<0$ is $\lim\limits_{n\to\infty} (x+1)^n = 0$,

Als $x = 0$ is $\lim\limits_{n\to\infty} (x+1)^n = 1$,

Als $0<x$ is $(x+1)^n \to \infty$ voor $n \to \infty$.

Hieruit volgt: $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{voor } -\frac{\pi}{2} \leqslant x < 0, \\ 1/2 & \text{voor } x = 0, \\ 0 & \text{voor } 0 < x \leqslant \pi/2. \end{cases}$

Daar $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x) = 1 \neq f(0) \neq \lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = 0$ is f in x = 0 niet continu.

47. $I = \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} I(\varepsilon)$ waarin $I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x . \tan x . e^{\frac{1}{\sin x}}}$.

We moeten I op deze manier berekenen daar voor x = 0 de integrand in I niet gedefinieerd is.

$$\frac{dx}{\sin x \tan x} = \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x} = \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} = -\, d(\frac{1}{\sin x}).$$

Dus is $I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\pi/2} e^{-\frac{1}{\sin x}}\, d(\frac{-1}{\sin x}) = [\, e^{\frac{-1}{\sin x}}]_{x=\varepsilon}^{x=\pi/2} = e^{-1} - e^{\frac{-1}{\sin \varepsilon}}$.

Als $\varepsilon \downarrow 0$ dan $\sin \varepsilon \downarrow 0$ en dus $\frac{1}{\sin \varepsilon} \to \infty$. Daar $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$ is

$\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} I(\varepsilon) = e^{-1} - 0 = e^{-1}$.

48. De vergelijking van de raaklijn aan een kromme $y = f(x)$ in een punt $P = (x_0, y_0)$ van die kromme is: $y - y_0 = y_0'(x - x_0)$.
y' vinden we door <u>impliciet</u> differentiëren:

Uit $\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} y' = 0$ volgt $y_0' = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$.

Dit ingevuld geeft: $y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$

$$\frac{yy_0 - y_0^2}{b^2} = \frac{xx_0 - x_0^2}{a^2} \; ; \quad \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

daar immers (x_0, y_0) een punt is van de hyperbool.

49. $z = z(x,y)$. Door impliciet k differentieren vinden we $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$:

naar x: $3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 3z + 3x \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ dus $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-z}{x+z^2}$,

naar y: $3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 3x \frac{\partial z}{\partial y} - 3 = 0$ dus $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+z^2}$ (*)

(*) naar y differentiëren geeft: $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2z \frac{\partial z}{\partial y}}{(x+z^2)^2} = \frac{-2z}{(x+z^2)^3}$.

De gevraagde vorm wordt dus:

$$2\left(\frac{-z}{x+z^2}\right)^3 - z^2 \frac{-2z}{(x+z^2)^3} = 0.$$

50. $\frac{\partial z}{\partial x} = z_x(x(u,v), y(u,v))$. Analoog $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Dus: $\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$.

Nu is $x = u-v$ dus $\frac{\partial x}{\partial v} = -1$

$y = u+v$ $\frac{\partial y}{\partial v} = +1$

De gevraagde vorm wordt dus:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \ .$$

Opm: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ zijn niet noodzakelijk gelijk. Zie stelling IV, § 4 A en vb.

51. De vergelijking van het raakvlak aan het oppervlak $z = z(x,y)$ in $(x,y,z) = (1,1,1)$ is

$$(z-1) = (x-1)\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{(x=1,y=1)} + (y-1)\left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{(x=1,y=1)} \ .$$

We bepalen de part.afgeleiden van z naar x en y door de vergelijkingen α en β impliciet te differentiëren.
(α) differentieren naar x levert:

$$3x^2 + y^2 t_x + z_x + 3t^2 t_x = 0.$$ En (β) diff. naar x geeft:

$$z + xz_x + 2ytt_x - t_x = 0.$$

Substitutie van $(x,y,z) = (1,1,1)$ geeft

$$3 + t_x + 3t^2 t_x + z_x = 0$$

$$1 + z_x + 2t\ t_x - t_x = 0 \ .$$

De onbekende waarde van t vinden we door $(x,y,z) = (1,1,1)$ te substitueren in (α) en (β). $t = 0$ is de enige waarde die aan beide voldoet.

Dus volgt

$$\left.\begin{array}{l} 3 + t_x + z_x = 0 \\ 1 - t_x + z_x = 0 \end{array}\right\} \quad z_x = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{(x=1,y=1)} = -2.$$

Door part.diff. naar y van (α) en (β) volgt

$$2yt + y^2 t_y + zy + 3t^2 t_y = 0$$
$$xz_y + 2ytt_y + t^2 - t_y = 0$$

en na substitutie van $(x,y,z,t) = (1,1,1,0)$

$$\left.\begin{array}{l} t_y + z_y = 0 \\ -t_y + z_y = 0 \end{array}\right\} z_y = 0$$

Vergelijkingen raakvlak is: $z-1 = -2(x-1)$.

52. (α) $z_u = z_x x_u + z_y y_u$

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v$$

en door z_v nog eens naar v partieel te differentiëren

$$(\beta) \quad z_{vv} = \frac{\partial}{\partial v}\{z_x x_v + z_y y_v\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial v}\{z_x x_v\} + \frac{\partial}{\partial v}\{z_y y_v\}$$

$$= (\frac{\partial}{\partial v} z_x)\, x_v + z_x (\frac{\partial}{\partial v} x_v) + (\frac{\partial}{\partial v} z_y)\, y_v + z_y(\frac{\partial}{\partial v} y_v)$$

$$= (z_{xx} x_v + z_{yx} y_v)\, x_v + z_x x_{vv} + (z_{xy} x_v + z_{yy} y_v)\, y_v + z_y y_{vv}.$$

Uit $x = e^u e^v$ en $y = e^u e^{-v}$ volgt

$$x_v = x_{vv} = x_u = x \text{ en } y_u = -y_v = y_{vv} = y$$

zodat (α) en (β) overgaan in:

$$z_u = xz_x + yz_y$$

$$z_{vv} = z_{xx}x^2 - z_{xy}xy + z_x x - z_{yx}xy + z_{yy}y^2 + z_y y$$

dus

$$z_{vv} - z_u = z_{xx}x^2 - z_{xy}xy - z_{yx}xy + z_{yy}y^2$$. En als VI 10

geldt

$$= z_{xx}x^2 - 2z_{xy}xy + z_{yy}y^2 .$$

53. $K = \dfrac{|\ddot{y}\,\dot{x} - \ddot{x}\,\dot{y}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$. Zie bladzijde III.16.

54. Gevraagd is de raaklijn in $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Deze is $y-\frac{1}{2} = m(x-\frac{1}{2})$, waarin de richtingscoëfficiënt

$$m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=\frac{1}{2}} = \left[\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right]_{t=1} \quad \text{(zie bladzijde III.16).}$$

Nu is $\dot{x}(t) = \dfrac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$; $\dot{y}(t) = \dfrac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}$, zodat we voor de gevraagde raaklijn vinden:

$$y-\tfrac{1}{2} = -(x-\tfrac{1}{2}) \quad \text{of} \quad x+y = 1.$$

55. Analoog aan IV § 4 B 2, vindt men door partiele differentiatie van $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$ de formule:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}.$$

Hierin is gebruikt dat op grond van stelling IV § 4 A geldt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Berekening levert: $\dfrac{\partial x}{\partial u} = (1-v^2) \quad \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0 \text{ , zodat}$$

$$u^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}u^2(1-v^2) + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}u^2 v(1-v^2) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}u^2 v^2 =$$

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\,xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

56. De gegeven situatie kan worden voorgesteld door

$$z = z(x,y), x = x(u,v), y = y(u,v) \text{ en dus}$$

$$z = z[x(u,v), y(u,v)] \qquad (1),$$

hetgeen juist de situatie van IV. 12. 2 is.
We beginnen met partiële differentiatie van (1) naar u resp. v, gebruik makend van de kettingregel (IV.12.2):

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} & (2) \\ \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} & (3) \end{cases}$$

De in (2) en (3) voorkomende factoren $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ laten we staan, immers deze mogen volgens de opgave juist in het antwoord voorkomen. Verder kunnen we de factoren $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ en $\frac{\partial y}{\partial v}$ (die natuurlijk niet in het antwoord mogen voorkomen, zie de opgave!) rechtstreeks bepalen door de gegeven uitdrukkingen voor x en y:

$$x = e^{6u+3v}, \quad y = e^{3u+6v}$$

naar u resp. v partiëel te differentieren (IV.3.D):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 6e^{6u+3v}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 3e^{3u+6v},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 3e^{6u+3v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 6e^{3u+6v}.$$

In het antwoord mogen u en v niet meer voorkomen; dat is hier gemakkelijk te bereiken, aangezien

$$e^{6u+3v} = x, e^{3u+6v} = y, \text{ zodat}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 6x, \frac{\partial y}{\partial u} = 3y, \frac{\partial x}{\partial v} = 3x, \frac{\partial y}{\partial v} = 6y.$$

Substitutie hiervan in (2) en (3) levert

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = 6x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 3y\dfrac{\partial z}{\partial y} & (4) \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = 3x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 6y\dfrac{\partial z}{\partial y}\,. & (5) \end{cases}$$

Vervolgens dienen we nog $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ te bepalen. Nu is

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) \text{ dus m.b.v. (5):}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 3\,\frac{\partial}{\partial u}\left(x\,\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 6\,\frac{\partial}{\partial u}\left(y\,\frac{\partial z}{\partial y}\right). \qquad (6)$$

Bekijk eerst de eerste term in (6). Volgens de product regel (II.10.A 2) is:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(x\,\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + x\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right). \qquad (7)$$

En nu oppassen! $\frac{\partial x}{\partial u}$ is direct te bepalen: $\frac{\partial x}{\partial u} = 6e^{6u+3v} = 6x.$

U mag echter niet schrijven: $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial x}$ aangezien hierdoor akelig veel verwarring kan ontstaan. U moet als variabelen òf x en y òf u en v nemen, maar geen combinaties hiervan! Uit de schrijfwijze $\frac{\partial z}{\partial x}$ blijkt dat hierin x en y de variabelen zijn. Om nu naar u te kunnen differentieren moet u dus eerst in gedachten voor x en y weer de gegeven functies van u en v substitueren: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, zodat we krijgen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\,[x(u,v),y(u,v)]$$

en vervolgens de kettingregel

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

toepassen, zodat met $f = \frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot 6x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot 3y. \qquad (8)$$

We vinden dus voor (7):

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(x \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 6x \frac{\partial z}{\partial x} + x \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot 6x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot 3y\right] =$$

$$= 6x \frac{\partial z}{\partial x} + 6x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad . \qquad (9)$$

Op analoge wijze vinden we

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(y \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) =$$

$$= 3y \frac{\partial z}{\partial y} + y \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\right] =$$

$$= 3y \frac{\partial z}{\partial y} + y\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot 6x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot 3y\right] =$$

$$= 3y \frac{\partial z}{\partial y} + 6\, xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad . \qquad (10)$$

Substitutie van (9) en (10) in (6) geeft

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 18x \frac{\partial z}{\partial x} + 18y \frac{\partial z}{\partial y} + 18x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 18y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 45xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad . \qquad (11)$$

Tenslotte substitueren we (2),(3) en (11) in de gevraagde uitdrukking, waarmee we krijgen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - 2 \frac{\partial z}{\partial u} - 2 \frac{\partial z}{\partial v} = 9 \left[2x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 5xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right] \quad .$$

<u>Opmerkingen.1</u>. In de meeste gevallen (IV.10.§ 4.A.stelling) geldt:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$. We hadden dus $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$ ook kunnen vinden door (4) naar v te differentieren. Van deze eig. is in het bovenstaande ook gebruik gemaakt, bijv. in (8).

Opmerkingen.2. In ons geval zijn $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ en $\frac{\partial y}{\partial v}$ gemakkelijk te bepalen aangezien x en y expliciet als functies van u en v gegeven zijn. Vaak gaat dit minder gemakkelijk, zie bijv. IV.13.vb.3 (r en φ impliciet gegeven als functies van x en y) en IV.13.vb.4. Door zgn. impliciet differentieren (IV.8.§ 3) kunnen we altijd de gevraagde uitdrukkingen vinden.

57. Opmerking 1: Gegeven zijn 2 betrekkingen (vergelijkingen) waarin 4 variabelen x,y,z, en t voorkomen. Beschouwen we x en y als bekenden, dan kunnen we (2 vgl.met 2 onbek.) z en t hieruit opgelost denken; z en t worden dus inderdaad functies van x en y als we deze laatste als onafhankelijk variabelen beschouwen.

Opmerking 2: Het gegeven punt (1,-1,0,π) voldoet inderdaad aan beide betrekkingen (dit steeds even nagaan).

Teneinde betrekkingen te verkrijgen waarin de gevraagde partiele afgeleide voorkomt differentieren we de gegeven betrekkingen eenmaal (impliciet) partieel naar x (IV.3.D; IV.8.§ 3) en krijgen dan (y constant houden, z en t zijn functies van x):

$$\begin{cases} 2x+y\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x}\right)\cos(z+t) = 0 & (1) \\ 2z\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial x} + z + \left(z\frac{\partial t}{\partial x} + t\frac{\partial z}{\partial x}\right)\sin(zt) = 0 & (2 \end{cases}$$

Voor het differentieren van yz en xz is hierbij gebruik gemaakt van de productregel (II.10.A2); voor het diff. van sin(z+t) en cos(zt) is gebruik gemaakt van de kettingregel (II.12.C), welke natuurlijk ook geldt voor het geval van 2 variabelen waarvan er een constant gehouden wordt.

Aangezien we zoeken $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$, differentieren we (1) en (2) nogmaals (partiëel) naar x:

$$2 + y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}) \cos (z+t) - (\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x})^2 \sin (z+t) = 0 \qquad (3)$$

$$2 (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (z \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + t \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}) \sin(zt) +$$

$$+ (z \frac{\partial t}{\partial x} + t \frac{\partial z}{\partial x})^2 \cos (zt) = 0. \qquad (4)$$

Let nu op! Er wordt niet gevraagd een uitdrukking voor $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ te vinden (bijv. als functie van x,y,z en t) die voor elk punt (x,y,z,t) die voor elk punt (x,y,z,t) geldig is; gevraagd wordt $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ te bepalen in het punt P = (1,-1,0,π) (het antwoord is dus een getal). We substitueren nu in (3) en (4): (x,y,z,t) = (1,-1,0,π), zodat we krijgen:

$$2 - (\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})_p - [(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})_p + (\frac{\partial^2 t}{\partial x^2})_p] = 0$$

$$2(\frac{\partial z}{\partial x})_p^2 + 2(\frac{\partial z}{\partial x})_p + (\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})_p + \pi^2 (\frac{\partial z}{\partial x})_p^2 = 0$$

of

$$\begin{cases} 2 - 2(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})_p - (\frac{\partial^2 t}{\partial x^2})_p = 0 & (5) \\ (\pi^2 + 2)(\frac{\partial z}{\partial x})_p^2 + 2(\frac{\partial z}{\partial x})_p + (\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})_p = 0 & (6) \end{cases}$$

Hierbij betekent $(\frac{\partial z}{\partial x})_p$: de partiële afgeleide van z naar x, berekend in het punt P (1,-1,0,π).

Hier staan 2 vergelijkingen met 4 onbekenden, n.l. $(\frac{\partial z}{\partial x})_p$, $(\frac{\partial t}{\partial x})_p$, $(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})_p$, $(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2})_p$. Aangezien we i.h.a. voor het vinden van 4 onbekenden 4 vergelijkingen nodig hebben, gebruiken we (1) en (2) (andere keus is er trouwens niet!). Substitutie van (1,-1,0,π) hierin levert

$$\left\{\begin{array}{ll} 2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p - \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_p\right] = 0 & \qquad (7) \\ \\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p = 0 & \qquad (8) \end{array}\right.$$

(de vier vergelijkingen die we zochten zijn nu (5),(6),(7) en (8)) en dus $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p = 0$, $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_p = 2$. (9)
Substitutie van (9) in (5) en (6) levert dan

$$\left\{\begin{array}{l} 2 - 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_p - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_p = 0 \\ \\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_p = 0 \quad \text{en hieruit} \quad \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)_p = \underline{2}. \end{array}\right.$$

<u>Opmerking 3</u>. Let nog eens op het volgende: (1) en (2) zijn geldig in <u>elk</u> punt (x,y,z,t) dat aan de gegeven vergelijkingen voldoet, (7) en (8) gelden slechts voor $P(1,-1,0,\pi)$. Differentiatie van (7) of (8) levert op 0 = 0, aangezien alle voorkomende symbolen getallen voorstellen! Om een betrekking voor $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ of $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ te vinden kunnen we dus <u>niet</u> (7) òf (8), maar <u>wel</u> (1) of (2) differentieren.

58. a) Met t = 1 correspondeert $P(3,3\sqrt{3})$.

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{t\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2t + 1} \text{ . dus } y'(P) = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\sqrt{3}(2t+1) - 2(t\sqrt{3}+2\sqrt{3})}{(2t+1)^2} \cdot \frac{1}{2t+1} =$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}}{(2t+1)^3} \text{ . Derhalve } y''(P) = -\frac{\sqrt{3}}{9} \text{ .}$$

Hieruit volgt m.b.v. III § 4 B:

$$K(P) = \frac{|y''(P)|}{\{1+y'(P)^2\}^{3/2}} = \frac{\sqrt{3}}{9.4^{3/2}} = \frac{\sqrt{3}}{72}.$$

b) Daar $y''(P) < 0$ en $y'(P) = \sqrt{3}$ volgt, dat de kromme ter plaatse bol is (convex) en $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (vgl.III § 4 B). Verder is $\rho(P) =$ $= \frac{1}{K(P)} = 24\sqrt{3}$. Dus

$$\xi = x(P) + \rho \sin\varphi = 3 + 24\sqrt{3}.\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 39$$

$$\eta = y(P) - \rho\cos\varphi = 3\sqrt{3} - 24\sqrt{3}.\tfrac{1}{2} = -9\sqrt{3}$$

m.a.w. $M = (\xi, \eta) = (39, -9\sqrt{3})$.

Merk op, dat $\eta < y(P)$ door de convexiteit ($y''(P) < 0$).

<u>Opmerking</u>: We kunnen voor a) ook de krommingsformule gebruiken uit III § 6 blz.III 16. We moeten dan evenwel **voor b) nog** apart y'' uitrekenen, om de ligging van M (boven of onder P) vast te stellen. De boven gevolgde methode is dus korter.

59. Uit de gegeven betrekkingen volgt, dat

$$\frac{\partial x}{\partial u} = u, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -v, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u.$$

Dus (vgl.IV § 2 G)

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = u\frac{\partial z}{\partial x} + v\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = -v\frac{\partial z}{\partial x} + u\frac{\partial z}{\partial y}$$

en (vgl.IV § 4)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(v\frac{\partial z}{\partial y}\right) =$$

$$= 1\,\frac{\partial z}{\partial x} + u\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 0\,\frac{\partial z}{\partial y} + v\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = {*})$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} + u\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial u}\right\} + v\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right\} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} + u^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\,uv\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + v^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,.$$

Analoog berekenen we (vgl.IV § 4)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(-v\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(u\frac{\partial z}{\partial y}\right) =$$

$$= -1\,\frac{\partial z}{\partial x} - v\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 0\,\frac{\partial z}{\partial y} + u\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = {*})$$

$$= -\frac{\partial z}{\partial x} - v\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial v}\right\} + u\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right\} =$$

$$= -\frac{\partial z}{\partial x} + v^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2uv\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + u^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

gecombineerd levert dit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = (u^2 + v^2)\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (v^2 + u^2)\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,.$$

of

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,.$$

Opm.*) Een partiele afgeleide van z naar een variabele uit één van de stelsels wordt steeds als functie van de variabelen uit dit stelsel beschouwd. Differentiatie naar een variabele uit het tweede stelsel moet dus met de kettingregel geschieden! Hier: $\frac{\partial z}{\partial x}$ is een functie van x en y. Derhalve

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).\ \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).\ \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\ \frac{\partial y}{\partial u}\ .$$

60. Uit het gegeven leiden we af:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y.$$

Dus (IV § 2 G)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2x\,\frac{\partial z}{\partial v}\ .$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2y\,\frac{\partial z}{\partial v}\ .$$

en (IV § 4)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + 2\,\frac{\partial z}{\partial v} + 2x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = {}^{*)}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u}\ \frac{\partial v}{\partial x} + 2\,\frac{\partial z}{\partial v} + 2x\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + 2x\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\ \frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4x\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + 2\,\frac{\partial z}{\partial v} + 4x\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\ .$$

Op **dezelfde wijze is**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z\,\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + 2\,\frac{\partial z}{\partial v} + 2y\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = {}^{*)}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u}\ \frac{\partial v}{\partial y} + 2\,\frac{\partial z}{\partial v} + 2y\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\ \frac{\partial u}{\partial y} + 2y\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\ \frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4y\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + 2\,\frac{\partial z}{\partial v} + 4y^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\ .$$

*) vgl.de opmerking onder oplossing 59.

Samengevat:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4(x+y)\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + 4\,\frac{\partial z}{\partial v} + 4\,(x^2+y^2)\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} =$$

$$= 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4u\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + 4\,\frac{\partial z}{\partial v} + 4v\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,.$$

61. **y is maximaal als** $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dan is $x = 0$. Volgens III § 6 is de kromming K in dit punt

$$K = \frac{|\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}\,.$$

Nu is $\dot{x} = \frac{-2}{\sin^2\theta}$ en $\ddot{x} = 4\,\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$,

$$\dot{y} = 4\sin\theta\cos\theta = 2\sin 2\theta \text{ en } \ddot{y} = 4\cos 2\theta\,.$$

Door $\theta = \frac{\pi}{2}$ **in te vullen vinden we:**

$$K = \frac{|8-0|}{[4+0]^{3/2}} = 1.$$

Tweede oplossing: Uit het gegeven volgt

$$y = \frac{2}{1+\frac{1}{4}x^2}\,. \quad \text{Hieruit:} \quad y' = \frac{-x}{(1+\frac{1}{4}x^2)^2} \text{ en } y'' = \frac{\frac{3}{4}x^2-1}{(1+\frac{1}{4}x^2)^3}\,.$$

De kromming in punt $x = 0$, $y = 2$ is volgens III § 4

$$K = \frac{1}{\{1+0\}^{3/2}} = 1.$$

62. Uit $x = \frac{u}{v}$ en $y = v^2$ volgt:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{v} - \frac{u}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{v} - \frac{u}{v^2}\frac{\partial v}{\partial y} \\ 0 &= 2v\frac{\partial v}{\partial x} \\ 1 &= 2v\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= v \;, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{u}{2v^2} \;, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2v} \;. \end{aligned}$$

Dan is $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = v\frac{\partial z}{\partial u}$ en

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial u} + v\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2v}\frac{\partial z}{\partial u} + v\left(\frac{u}{2v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{2v}\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u}\right) =$$

$$= \frac{1}{2v}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{u}{2v}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u} \;.$$

De gegeven uitdrukking gaat over in:

$$uv\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + v^2\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} \;.$$

63. 1) Uit $xz^3 - 3yz + x = 0$ volgt door partiele differentiatie:

$$z^3 + 3xz^2\frac{\partial z}{\partial x} - 3y\frac{\partial z}{\partial x} + 1 = 0 \text{ en}$$

$$3xz^2\frac{\partial z}{\partial y} - 3z - 3y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ waaruit we vinden:}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z^3+1}{3(y-xz^2)} \text{ en } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-z}{y-xz^2} \;.$$

Dan is $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz^3+ x - 3yz}{3(y-xz^2)} = 0.$

2) Als in IV § 4 B vb.3 vinden we

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi \;,\; \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r} \;,\; \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi \;,\; \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r} \;.$$

Dan is.

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = r\cos\varphi\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right) + r\sin\varphi\left(\frac{\partial z}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)$$

$$= r\frac{\partial z}{\partial r} \;.$$

De uitdrukking (α) gaat over in $\dfrac{\partial z}{\partial r} = 0.$
We hadden dit ook kunnen vinden door te schrijven

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = r\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{y}{r}\right) = r\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) = r\frac{\partial z}{\partial r} \;.$$

3) In 2) hebben we gevonden dat $\dfrac{\partial z}{\partial r} = 0$, dus dat z een functie van φ alleen is. Dit kunnen we direct inzien door de gegeven uitdrukking door x te delen waardoor de vgl. voor z overgaat in

$$z^3 - 3(\tan\varphi)z+1 = 0$$

Hieraan zien we dat z alleen van φ afhangt.

64. Uit $x = a\tan u$, $y = \dfrac{2a}{\cos u}$ en $1+\tan^2 u = \dfrac{1}{\cos^2 u}$ volgt:

$1+(\frac{x}{a})^2 = (\frac{y}{4a})^2$ d.i. $-x^2+ \frac{1}{4}y^2 = a^2$. Dit is de vergelijking van een hyperbool. Uit de beperking $|u| < \pi/2$ volgt $y > 0$. We hebben dus met de tak boven de x-as te maken.

Uit $y = 2\sqrt{a^2 + x^2}$ volgt $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ en $y'' = \dfrac{2a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$.

De kromming P is volgens III § 4 :

$$\frac{\frac{2a^2}{8a^3}}{\{1+(\sqrt{3})^2\}^{3/2}} = \frac{1}{32a} .$$

De kromming is ook met III § 6 te vinden:

$$\dot{x} = \frac{a}{\cos^2 u} , \quad \ddot{x} = \frac{2a \sin u}{\cos^3 u} , \quad \mathring{y} = \frac{2a \sin u}{\cos^2 u} , \quad \ddot{y} = \frac{2a(2-\cos^2 u)}{\cos^3 u} .$$

Voor het punt P is $u = \pi/3$. We vinden

$$K = \frac{|112a^2 - 96a^2|}{\{16a^2 + 48a^2\}^{3/2}} = \frac{1}{32a} .$$

65. Volgens IV § 4 B is

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} .$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \{ \frac{\partial^2 u}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} (- \frac{\sin \varphi}{r}) \} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi (- \frac{\sin \varphi}{r}) +$$

$$+ \{ \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} (- \frac{\sin \varphi}{r}) \} \frac{\cos \varphi}{r} +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial \varphi} \{ - \frac{1}{r^2} \cos \varphi \cos \varphi + \frac{1}{r} (- \sin \varphi)(- \frac{\sin \varphi}{r}) \}$$

Als we $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi}$ mogen stellen (vgl. IV § 4 A) is

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\sin 2\varphi}{2} \{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \} + \frac{\cos 2\varphi}{r} \{ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \}.$$

66. We vervangen dit stelsel door een equivalent, maar eenvoudiger stelsel:

$$\begin{array}{cccc|c} a & 2 & -3 & 4 & 6\\ b & 5 & -8 & 11 & 17\\ c & 6 & -8 & 10 & 14\\ d & 3 & -5 & 7 & 11 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 5a-2b & 0 & 1 & -2 & -4\\ b-c & -1 & 0 & 1 & 3\\ c-3a & 0 & 1 & -2 & -4\\ c-2d & 0 & 2 & -4 & -8 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}$$

Stel $y = 2\lambda$. Dan is $-2\lambda + 2z = 4$ $\quad z = \lambda + 2$

$-x + z = 3$ $\quad x = \lambda - 1$

En de oplossingen zijn: $\underline{x}$: $(-1, 0, 2) + \lambda(1, 2, 1)$

Opm: controleer steeds: dim(ruimte der rijvect.) + dim(oplossingsr.) = aantal onbekenden. Zie V, § 6 stelling.
Ook is het zinvol om een oplossing met $\lambda = 0$ of 1 even te controleren op eventuele rekenfouten.

67. Opp.OABC = Opp OAB + Opp OBC. Hiervoor is nodig dat men de ligging van O,A,B,C t.o.v. elkaar even schetst.
Nu is $\det(\underline{A},\underline{B})$ = georiënteerd oppervlakte van het parallelogram opgespannen door $\underline{A}$ en $\underline{B}$.
Dus:

$$\text{Opp OABC} = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -2\\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -1\\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 3\tfrac{1}{2} + 7\tfrac{1}{2} = 11.$$

Opm: Opp OAB = $\det(\underline{B},\underline{A}) = -\det(\underline{A},\underline{B})$ zie V § 9.

68. Zij $\underline{v}$ een willekeurige vector $\in$ V. Volgens definitie 4, V § 4 zijn de 5 vectoren $\underline{e}$, $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ en $\underline{v}$ afhankelijk:
d.w.z. er bestaan getallen $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ <u>niet</u> <u>alle</u> 0, zodat

$$\lambda\underline{v} + \alpha_1\underline{e} + \alpha_2\underline{f} + \alpha_3\underline{g} + \alpha_4\underline{h} = \underline{0}.$$

Nu is $\lambda \neq 0$, daar anders $\alpha_1\underline{e} + \alpha_2\underline{f} + \alpha_3\underline{g} + \alpha_4\underline{h} = \underline{0}$ met niet alle $\alpha_i = 0$ in strijd met het gegevene: $\underline{e}$, $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ onafhankelijk.

Noem $\frac{-\alpha_i}{\lambda} = \beta_i$ dan is dus $\underline{v} = \beta_1\underline{e} + \beta_2\underline{f} + \beta_3\underline{g} + \beta_4\underline{h}$.

Elke vector van V is dus als lineaire combinatie van $\underline{e}$, $\underline{f}$, $\underline{g}$ en $\underline{h}$ te schrijven:

Stel dit kan op 2 manieren: $\underline{v} = \beta_1\underline{e} + \beta_2\underline{f} + \beta_3\underline{g} + \beta_4\underline{h}$

en $\underline{v} = \gamma_1\underline{e} + \gamma_2\underline{f} + \gamma_3\underline{g} + \gamma_4\underline{h}$

Dan is $\underline{0} = (\beta_1 - \gamma_1)\underline{e} + (\beta_2 - \gamma_2)\underline{f} + (\beta_3 - \gamma_3)\underline{g} + (\beta_4 - \gamma_4)\underline{h}$

en uit de onafhankelijkheid van $\underline{e}$, $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$, volgt:

$$\beta_i - \gamma_i = 0 \quad \text{ofwel} \quad \beta_i = \gamma_i \quad \text{voor } i = 1,2,3,4.$$

Het is dus slechts op één manier mogelijk.

69. Punten van de snijlijn l behoren tot U en V dus geldt:

$$(0,1,2) + \lambda(1,0,2) + \mu(0,2,1) = (0,1,2) + \rho(2,0,0) + \sigma(0,1,0).$$

Uitwerken, coördinaten gelijk stellen geeft dan

1) $\lambda = 2\rho$
2) $2\mu = \sigma$
3) $2\lambda + \mu = 0$

Elimineren van λ en μ uit 1) en 2) en substitutie in 3) geeft

$$4\rho = -\tfrac{1}{2}\sigma$$

$$-8\rho = \sigma$$

Dus de punten van l hebben de gedaante

$$\underline{x} = (0,1,2) + \rho(2,0,0) - 8\rho\,(0,1,0)$$

$$= (0,1,2) + \rho(2,-8,0)$$

N.B. Er werd niet de vergelijking van l gevraagd.

70. Het stelsel vergelijkingen vervangen we door de matrix van coëfficiënten (α). We vervangen (α) door een equivalent stelsel dat veel eenvoudiger op te lossen is, omdat veel coëfficiënten nul worden. U dient daartoe een geschikte rij als "bezem" te kiezen. Geschikt is een rij waarin een coëfficiënt voorkomt die in absolute waarde klein is, liefst gelijk aan 1. Wij kiezen de 1° rij 1° element. Door nu van de 2°, 3° en 4° rij een geschikt veelvoud van de 1° rij af te trekken ontstaat (β). Na vegen met de 3° rij als bezem ontstaat γ. In dit stelsel kunnen we de 4° rij schrappen, die is afhankelijk van de overige rijen (Of de tweede rij).

$$(\alpha)\quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & -2 \\ 5 & -1 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\beta)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -6 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(\gamma)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{14} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Na vegen met de 2° rij ontstaat (δ), de coëfficiënten matrix van een stelsel dat equivalent is met (α).

$$(\delta)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kies 5 - 3 = 2 parameters bijv. $z = \lambda$ en $u = \mu$ dan is

$$\left.\begin{array}{l} x = -\lambda + \mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \\ u = \mu \\ v = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Oplossing} \quad \lambda(-1,0,1,0,0) + \mu(1,1,0,1,0)$$

Verband tussen n, r en d is $n = r + d$.
Hier is $d = 2$ $r = 3$ $n = 5$ dus $5 = 3 + 2$.

71. De inhoud van het parallelepipedum is $|\text{Det}(\underline{a},\underline{b},\underline{c})|$.

$$\text{Det}\ (\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & x \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = x + 2.$$

We moeten x dus zo kiezen, dat $|x + 2| > 3$.

Dus $x + 2 > 3$ of $x + 2 < - 3$

Oplossing $x > 1$ of $x < - 5$.

72. Door partiële differentiatie naar x van de drie betrekkingen uit de opgave vindt men: (n.b. y hangt niet van x af).

$$(1) \quad \begin{cases} 1 + \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\[2ex] 2x + 2z\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\[2ex] 3x^2 + 3z^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + 3u^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3v^2\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Hieruit krijgt men drie vergelijkingen met onbekenden $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $\frac{\partial v}{\partial x}$ in (0,2,1,-1,-2) door voor x,z,u, en v de waarden 0,1,-1 en -2 in te vullen. Deelt men tevens de tweede vergelijking door twee en de derde door drie, dan ontstaat, als men de bekende termen naar het rechterlid gebracht heeft, het volgende stelsel:

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = - 1 \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial x} - 2\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 4\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Omdat we slechts een van de onbekenden uit (2) willen weten, en de coëfficiënten determinant niet nul is, berekenen we $\frac{\partial z}{\partial x}$ met behulp van de regel van Cramer (V § 10 B; ook vegen leidt natuurlijk tot het doel).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}.$$

(Voor de berekening van determinanten zie V § 9).

(Met vegen gaat de oplossing aldus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \text{ dus } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{3}).$$

<u>Opmerking</u>: Men moet niet proberen uit (1) $\frac{\partial z}{\partial x}$ als functie van x, z, u, en v op te lossen, daar men dan een discussie moet wijden aan de nulpunten van de coëfficiënten-determinant waartoe (0,2,1,-1,-2) toch niet behoort.

73. Een vlak is bepaald door een steunvector en twee lineair onafhankelijke richtingsvectoren. De plaatsvector van ieder punt uit het vlak kan dienen als steunvector; we nemen (6,1,3). Als richtingsvectoren nemen we: (1,2,3) en (5,-1,2); de eerste is de richtingsvector van l, de tweede die van de verbindingslijn van (6,1,3) en (1,2,1); deze zijn lineair onafhankelijk.

Een parametervoorstelling van het vlak V is dan:

$$\underline{x} = (6,1,3) + \lambda(1,2,3) + \mu(5,-1,2).$$

V is evenwijdig aan het vlak W met parametervoorstelling

$\underline{x} = \rho(-7,8,5) + \sigma(1,-9,-10)$, als V **de vectoren (-7**,8,5) en (1,-9,-10) bevat, d.w.z. dat de beide stelsels:

$\lambda(1,2,3) + \mu(5,-1,2) = (-7,8,5)$ en

$\lambda(1,2,3) + \mu(5,-1,2) = (1,-9,-10)$ in λ en μ elk een oplossing hebben.

Dat betekent dat de volgende twee stelsels van 3 inhomogene vergelijkingen in λ en μ elk een oplossing hebben:

$$\begin{array}{l} \lambda + 5\mu = -7 \\ 2\lambda - \mu = 8 \\ 3\lambda + 2\mu = 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \lambda + 5\mu = 1 \\ 2\lambda - \mu = -9 \\ 3\lambda + 2\mu = -10 \end{array}$$

Daar de rang van $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ twee is (de beide richtingsvectoren zijn lineair onafhankelijk), is dit dan en slechts dan het geval als

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \text{ en } \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -9 \\ 3 & 1 & -10 \end{vmatrix} = 0;$$

Stelling V § 8 blz. V 17 ; vergelijk V § 10 C voorbeeld 2 dat algebraisch dezelfde vorm heeft als dit vraagstuk.

Verificatie (zie V § 9) levert:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & -13 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & 22 \\ -13 & 26 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -9 \\ 3 & 2 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -11 & -11 \\ 0 & -13 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & -11 \\ -13 & -13 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{q.e.d.}$$

Opmerking 1. Een andere formulering voor het tweede gedeelte is:

V is evenwijdig aan $\underline{x} = \rho(-7,8,5) + \sigma(1,-9,-10)$ als

$\underline{x} = (6,1,3) + \rho(-7,8,5) + \sigma(1,-9,-10)$ ook een parameter voorstelling van V is.

Opmerking 2. Algemeen kan men formuleren:

Nodig en voldoende opdat de vlakken V met (natuurlijk lineair onafhankelijke) richtingsvectoren $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en W met richtingsvectoren $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ en $\underline{d} = (d_1, d_2, d_3)$ evenwijdig zijn is:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = 2.$$

74. Nodig en voldoende voor de oplosbaarheid van het stelsel is dat de matrices A en B dezelfde rang hebben waarbij

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{pmatrix} .$$

(zie V § 8 stelling en bewijs op blz. V 17.)

$$\text{rang } A = 2 \text{ want } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ en } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

(zie V § 10 A)

$$\text{rang } B = 3 \text{ want } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Het stelsel is dus niet oplosbaar.

75. Het ligt voor de hand eerst het snijpunt van U, V en W te bepalen. Hiertoe zoeken we getallen x, y en z (de coördinaten van het gevraagde snijpunt) die voldoen aan (1), (2) en (3):

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 7 & (1) \\ x + y - z = -2 & (2) \\ \underline{x} = (1,2,0) + \lambda(0,1,2) + \mu(2.0.1) & (3) \end{cases}$$

Bedenk dat (3) ook een voorwaarde is waaraan x, y en z moeten voldoen, immers voor (3) kunnen we schrijven

$$(x,y,z) = (1,2,0) + \lambda(0,1,2) + \mu(2,0,1)$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda + \mu \,. \end{cases} \qquad (4)$$

Er staan nu verschillende wegen voor ons open, waarvan we er twee noemen:

a) Substitueer (4) in (1) en (2):

$(1) \Longrightarrow 5\lambda + 6\mu = 3$

$(2) \Longrightarrow \lambda - \mu = 5$

en hieruit $\lambda = 3$, $\mu = -2$; hiermee in (4): $x = -3$, $y = 5$, $z = 4$ (we controleren even of deze waarden voldoen aan (1) en (2)) zodat het gevraagde snijpunt is $S(-3,5,4)$.

b) Bepaal de vergelijking van W (V.3.B), d.w.z. breng W in de gedaante (1) door λ en μ uit (4) te elimineren: Uit $y = 2+\lambda$ volgt $\lambda = y-2$, en uit $x = 1+2\mu$ volgt $\mu = \frac{1}{2}(x-1)$; dit in de derde vergelijking geeft

$$z = 2(y - 2) + \tfrac{1}{2}(x - 1) \text{ of } x + 4y - 2z = 9. \qquad (5)$$

Vervolgens lossen we x, y en z op uit (1), (2) en (5) m.b.v. "vegen" (V.14 § 7 ; neem de rechterleden mee!):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2, & 1, & 2 & 7 \\ 1, & 1, & -1 & -2 \\ 1, & 4, & -2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0, & -1, & 4 & 11 \\ 1, & 1, & -1 & -2 \\ 0, & 3, & -1 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0, & -1, & 4 & 11 \\ 1, & 0, & 3 & 9 \\ 0, & 0, & 11 & 44 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{matrix}(0, & -1, & 4 \\ \sim(1, & 0, & 3 \\ (0, & 0, & 1\end{matrix}\left|\begin{matrix}11)\\ 9)\\ 4)\end{matrix}\right. \sim \begin{matrix}(0, & -1, & 0 \\ (1, & 0, & 0 \\ (0, & 0, & 1\end{matrix}\left|\begin{matrix}-5)\\ -3)\\ 4)\end{matrix}\right.$$

dus $-y = -5$, $x = -3$, $z = 4$ en dus $S = (-3, 5, 4)$.
De opgave luidt nu: zoek een vlak (we noemen dit α) door $S(-3,5,4)$ dat evenwijdig is aan l en m.
$l /\!/ \alpha$ betekent: richtingsvector van $l /\!/ \alpha$, dus $(3,1,2) /\!/ \alpha$.
$m /\!/ \alpha$ betekent: richtingsvector van $m /\!/ \alpha$, dus $(2,1,3) /\!/ \alpha$
(zie V.1.B3 en V.3.B vb.1).
We weten nu van α: een punt $S(-3,5,4)$, d.w.z. een steunvector $(-3,5,4)$ en twee vectoren $/\!/ \alpha$, d.w.z. twee richtingsvectoren $(3,1,2)$ en $(2,1,3)$. De parametervoorstelling van α is dan direct op te schrijven (V.2.5):

$$\underline{x} = (-3,5,4) + \rho(3,1,2) + \sigma(2,1,3).$$

Opmerking 1. We hadden S ook kunnen vinden door van (1) en (2) de parametervoorstelling te bepalen (V.4.vb.4) en deze te combineren met de parametervoorstelling (3). Deze methode is zeer omslachtig (ga dit na) en dus niet aan te bevelen.
Ook hadden we de parametervoorstelling van de snijlijn van U en V kunnen bepalen (V.4.vb.5) en deze dan met de parametervoorstelling van W kunnen combineren. Ook deze methode is omslachtig.
Over het algemeen is overgang van vergelijkingen op parametervoorstellingen, en omgekeerd, vervelend (hoewel niet te vermijden). Zo mogelijk maken we dus direct gebruik van de gegeven voorstellingen (zie boven onder a, en vergelijk eens met b). Zie ook V.2.§ 2. A en B.
Opmerking 2. Bedenk steeds dat het bekend zijn van een punt van een vlak equivalent is met het bekend zijn van een steunvector van dat vlak.

76. Zie V.21 B met $n = 3$.

77. Als steunvector van U kunnen we gebruiken de vector $\overrightarrow{OA} = (1,-5,2)$. Een der beide richtingsvectoren van U is bijv. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-3,2,2)$. Een andere richtingsvector van U is de richtingsvector van l.

Daartoe lossen we het stelsel door V en W gegeven vergelijkingen schematisch op:

$$* \left(\begin{array}{ccc|c} \overset{*}{1}, & 2, & 0 & 3 \\ 1, & 1, & 1 & 6 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 2, & 0 & 3 \\ 0, & -1, & 1 & 3 \end{array}\right) \qquad {}^{1)}$$

Stel $y = \lambda$. Dan is $x = -2\lambda + 3$, $z = \lambda + 3$. Dus l: $\underline{x} = (3,0,3) + \lambda(-2,1,1)$. Met als richtingsvector: $(-2,1,1)$. U heeft dus als <u>parametervoorstelling:</u>

$$\underline{x} = (1,-5,2) + \rho(-3,2,2) + \sigma(-2,1,1).$$

Eliminatie van ρ en σ levert de <u>vergelijking</u> van U

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 3\rho - 2\sigma \\ y = -5 + 2\rho + \sigma \\ z = 2 + 2\rho + \sigma \end{array}\right\} \; y + 5 = z + 5 = z - 2 \text{ dus } y - z + 7 = 0$$

78. We lossen het stelsel schematisch op.

$$* \left(\begin{array}{cccc|c} 3, & \overset{*}{-1}, & 1, & 5 & 7 \\ 0, & 2, & -3, & 4 & 6 \\ 6, & 0, & -1, & 3 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3, & -1, & \overset{*}{1}, & 5 & 7 \\ 6, & 0, & -1, & 14 & 20 \\ {*}\,6, & 0, & -1, & 3 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3, & -1, & 1, & \overset{*}{5} & 7 \\ {*}\,0, & 0, & 0, & 11 & 11 \\ 6, & 0, & -1, & 3 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3, & -1, & 1, & 0 & 2 \\ 0, & 0, & 0, & 1 & 1 \\ 6, & 0, & -1, & 0 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 9, & -1, & 0, & 0 & 8 \\ 0, & 0, & 0, & 1 & 1 \\ 6, & 0, & -1, & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{llll} 9x - y & & & = 8 \\ & & u & = 1 \\ 6x & - z & & = 6 \end{array}\right.$$

Stel nu $x = \lambda$. Dan is $y = -8 + 9\lambda$,
$z = -6 + 6\lambda$, $u = 1 + 0.\lambda$, of:
$\underline{x} = (0,-8,-6,1) + \lambda(1,9,6,0)$.

---

1) In dit en volgende vraagstukken, waar het veegprocédé wordt gevolgd, wordt met * de rij, waarmee, en de kolom, die wordt geveegd, aangegeven.

79. a) Zie blz. V 19 bovenaan.

Deze axioma's leggen evenwel de determinant mog niet geheel vast. Wèl als we er bij definiëren

$$D(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4) = 1$$

b) Stellen we in 2): $\underline{a}_1 = \underline{a}_2$, dan volgt

$$D(\underline{a}_1, \underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_4) = - D(\underline{a}_1, \underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_4), \text{ dus}$$

$$2\, D(\underline{a}_1, \underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_4) = 0, \text{ bijgevolg}$$

$$D(\underline{a}_1, \underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_4) = 0.$$

80. a) Opdat de rechte 1 geheel op O ligt, moeten voor alle waarden van λ de coördinaten van het punt P $(0+\lambda, -1+2\lambda, 0+\lambda)$ aan de vergelijking van O voldoen. Invullen levert links

$$\lambda^2 + (-1+2\lambda)^2 - \lambda^2 - 4\lambda^2 + 2(-1+2\lambda) + 1 =$$

$$= \lambda^2 + 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^2 - 4\lambda^2 - 2 + 4\lambda + 1 \equiv 0$$

Dus 1 ligt geheel op O.

b) Om de raakvlakvergelijking op blz. IV 5 te kunnen toepassen moeten we z als functie van x en y beschouwen, terwijl onze vergelijking slechts een impliciet verband tussen x, y, en z geeft. Dus gebruiken we IV § 3 B:

$$2x - 2z \frac{\partial z}{\partial x} - 4z - 4x \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - 4z}{4x + 2z} .$$

$$2y - 2z \frac{\partial z}{\partial y} - 4x \frac{\partial z}{\partial y} + 2 = 0 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y + 2}{4x + 2z} .$$

Voor het onder a) genoemde punt $P(x_0, y_0, z_0) = (\lambda, -1+2\lambda, \lambda)$ is

dus $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = \frac{-2\lambda}{6\lambda} = -\frac{1}{3}$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = \frac{4\lambda}{6\lambda} = \frac{2}{3}$, mits $\lambda \neq 0$.

(In het met $\lambda = 0$ corresponderende punt zijn $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ blijkbaar niet bepaald). De raakvlakvergelijking van blz.IV wordt nu daar $(x_o, y_o, z_o) = (\lambda, -1+2\lambda, \lambda)$: $z - \lambda = (x-\lambda).-\frac{1}{3} + (y+1-2\lambda).\frac{2}{3}$, of

uitgewerkt $z - \lambda = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3} - \frac{4\lambda}{3}$, of

$$x - 2y + 3z = 2.$$

Daar deze vergelijking onafhankelijk is van λ, volgt hieruit, dat alle punten P van l, die niet samenvallen met het punt $(0,-1,0)$ $(\lambda = 0)$ hetzelfde raakvlak aan O hebben, nl.

$$x - 2y + 3z = 2.$$

Opmerking: Meetkundig stelt O een kegel voor, l een mantellijn op O, en $(0,-1,0)$ is de top van O.

Eerste oplossing:

We elimineren λ en μ uit de parametervoorstelling van W: (vgl.V § 2 B vb. 2).

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda - 2\mu \\ y = 2 + \lambda + 2\mu \\ z = 3 + 2\lambda + \mu \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y - 1 = 3\lambda \\ x + 2z - 5 = 6\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow x + 2y - 2z = -3.$$

Hiermee is de vergelijking van W verkregen. Het stelsel door V en W gegeven vergelijkingen geeft een parametervoorstelling van l als oplossing (vgl. V § 2 B vb. 5).
Schematisch:

$$\begin{array}{c} \\ * \end{array}\begin{pmatrix} \overset{*}{2}, & 1, & -3 & \vert & -8 \\ 1, & 2, & -2 & \vert & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} * \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0, & -3, & \overset{*}{1} & \vert & -2 \\ 1, & 2, & -2 & \vert & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0, & -3, & 1 & \vert & -2 \\ 1, & -4, & 0 & \vert & -7 \end{pmatrix}$$

of: $\begin{cases} -3y + z = -2 \\ x - 4y = -7 \end{cases}$ Stel nu $y = \alpha$. Dan is

$x = -7 + 4\alpha$, $z = -2 + 3\alpha$.

Een parametervoorstelling van l is dus: $\underline{x} = (-7,0,-2) + $
$+ \alpha(4,1,3)$.

Tweede oplossing. .

Een willekeurig punt P van W heeft als coördinaten $(-1+2\lambda-2\mu,\ 2+\lambda+2\mu,\ 3+2\lambda+\mu)$. Opdat P op de snijlijn l met V ligt, moeten zijn coördinaten tevens aan de vergelijking van V voldoen, dus

$2(-1+2\lambda-2\mu) + (2+\lambda+2\mu) - 3(3+2\lambda+\mu) = -8$ of:

$-\lambda - 5\mu = 1$, $\lambda = -5\mu - 1$. Derhalve heeft een willekeurig punt P van l als coördinaten: $(-1+2[-5\mu-1]-2\mu,\ 2+[-5\mu-1]+2\mu,\ 3+2[-5\mu-1]+\mu) = (-12\mu-3, -3\mu+1, -9\mu+1)$.
Noem $-3\mu = \alpha$, dan is een parametervoorstelling van

l: $\underline{x} = (-3, 1, 1) + \alpha(4, 1, 3)$.

Gemakkelijk zien we de overeenkomst tussen de beide verkregen oplossingen.

82. We lossen het stelsel schematisch op:

$$\begin{array}{c} \\ \\ * \end{array}\left(\begin{array}{rrr|r} -a, & 2, & \overset{*}{-1} & 0 \\ 3, & -1, & -2 & 5a \\ 3, & -4, & 1 & 2a \end{array}\right) \sim^* \left(\begin{array}{rrr|r} 3-a, & \overset{*}{-2}, & 0 & 2a \\ 9, & -9, & 0 & 9a \\ 3, & -4, & 1 & 2a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1-a, & 0, & 0 & 0 \\ 1, & -1, & 0 & a \\ -1, & 0, & 1 & -2a \end{array}\right)$$

In het geval $a \neq 1$ kunnen we met de eerste rij de eerste kolom vegen. Resultaat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-a, & 0, & 0 & 0 \\ 0, & -1, & 0 & a \\ 0, & 0, & 1 & -2a \end{array}\right) \quad \text{Dus} \begin{cases} x = 0 \\ y = -a \\ z = -2a \end{cases} \quad \text{of } \underline{x} = (0,-a,-2a)$$

Als a = 1, dan wordt het stelsel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0, & 0, & 0 & 0 \\ 1, & -1, & 0 & 1 \\ -1, & 0, & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + z = -2 \end{cases}$$

$x = \lambda$ geeft $y = -1 + \lambda$, $z = -2 + \lambda$, dus $\underline{x} = (0,-1,-2) + \lambda(1,1,1)$.

83. a) Volgens IV § 3 B geldt, als we z opvatten als functie van x en y:

$$2x + 2z + 2x\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x+z}{x}.$$

$$2y + 2x\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{x}.$$

Het raakvlak aan O in P (x_0, y_0, z_0) heeft dus als vergelijking (IV § 2 E).

$$z - z_0 = -\frac{x_0 + z_0}{x_0}(x - x_0) - \frac{y_0}{x_0}(y - y_0) \qquad (x_0 \neq 0).$$

Uitgewerkt:

$$x_0 z - x_0 z_0 = -x_0 x - z_0 x + x_0^2 + x_0 z_0 - y_0 y + y_0^2 .$$

$P(x_0, y_0, z_0)$ ligt evenwel op O, dus

$$x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 z_0 = 1.$$

De raakvlakvergelijking laat zich dus vereenvoudigen tot:

$$x_0 x + y_0 y + x_0 z + z_0 x = 1,$$

een formule, die ook geldt voor $x_0 = 0$ (te verifiëren door y i.p.v. z als afhankelijk variabele te beschouwen.

83. b) De rechte l ligt geheel in het raakvlak, als voor elke waarde van λ de coördinaten van het punt $Q(0+\lambda,\ 0+\lambda,\ 1-\lambda)$ aan de gevonden raakvlakvergelijking voldoen, d.w.z.

$$\lambda x_o + \lambda y_o + (1-\lambda)\ x_o + \lambda z_o \equiv 1$$

$$\lambda(y_o + z_o) + (x_o - 1) \equiv 0 \quad \text{(identiteit in } \lambda\text{)},$$

m.a.w. $x_o = 1,\ \ y_o = -z_o$.

(x_o, y_o, z_o) moet echter aan de vergelijking van O voldoen, dus

$$x_o^2 + y_o^2 + 2x_oz_o = 1$$

of

$$1 + y_o^2 - 2y_o = 1 \Longrightarrow y_o = 2 \text{ of } 0.$$

Het gevraagde punt P kan dus zijn

$$P_1 = (1,2,-2) \text{ of } P_2 = (1,0,0).$$

84. Dit betekent dat iedere vector van R een lineaire combinatie is van $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$, en $\underline{e}_4$ en dat deze 4 vectoren onafhankelijk zijn. (Def. V § 4 B 5) volgens V § C heeft R de dimensie 4. Ieder 4-tal onafhankelijke vectoren is dan een basis. De in c) genoemde vectoren vormen dus een basis van R als ze onafhankelijk zijn en dit is zo als de in 6) genoemde determinant $\neq 0$ is. (def. det.4)).

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 0 & \nu & 1 \\ 0 & 0 & \rho \end{vmatrix} = 1 - \lambda\mu\nu\rho .$$

Het antwoord op vraag c) is dus $\lambda\mu\nu\rho \neq 1$.

Opm.1. In a) moet men niet vergeten dat uit $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$, $\underline{e}_4$ onafhankelijk niet volgt dat iedere $\underline{x}$ uit R een lineaire combinatie van deze vectoren is. Dit zou wel zo zijn als ook nog dim R = 4 gegeven was. Het feit dat iedere $\underline{x}$ uit R een lineaire combinatie van $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$, $\underline{e}_4$ is betekent evenmin dat $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$, $\underline{e}_4$ onafhankelijk zijn. Zo zijn in R_2 alle vectoren lineaire combinaties van (1,0), (0,1), (1,1) en (0,0) en deze 4 vectoren zijn afhankelijk.

Opm.2. De in V § 9 besproken regel van Sarrus geldt niet voor andere dan 3×3 determinanten.

85. We passen de methode van V § 7 toe

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2, & 1, & 4, & 2 & 5 \\ 7, & 2, & -1, & 1 & 7 \\ 7, & 1, & -11, & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2, & 1, & 4, & 2 & 5 \\ 3, & 0, & -9, & -3 & -3 \\ 5, & 0, & -15, & -5 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2, & 1, & 4, & 2 & 5 \\ 1, & 0, & -3, & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Dus het stelsel is equivalent met

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 - 3x_3 - x_4 = -1 \end{array}\right\}$$

Stel $x_3 = \lambda$, $x_4 = \mu$. Dan is $x_1 = 3\lambda + \mu - 1$ en $x_2 = -10\lambda - 4\mu + 7$.

De oplossingen zijn:

$$\underline{x} = (-1, 7, 0, 0) + \lambda(3, -10, 1, 0) + \mu(1, -4, 0, 1).$$

86. Het is duidelijk niet de bedoeling dit als een stereometrievraagstuk te beschouwen. ABC "grondvlak" noemen en dan hoogte bepalen is zeer omslachtig. We zien in V § 9 dat de inhoud van ABCD de absolute waarde is van D(<u>b</u>, <u>c</u>, <u>d</u>) waarin <u>b</u>, <u>c</u> en <u>d</u> de vectoren AB, AC en AD zijn. De inhoud van ABCD, als D = (t, t^2, t^3) is dus de absolute waarde van:

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & t \\ 25 & 64 & t^2 \\ 125 & 512 & t^3 \end{vmatrix} = 120\,(t^3 - 13\,t^2 + 40\,t).$$

De functie $t^3 - 13t^2 + 40t$ heeft een maximum tussen $t = 0$ en $t = 5$ en een minimum tussen $t = 5$ en $t = 8$. We bepalen beiden. Die met de grootste absolute waarde geeft de gezochte maximale inhoud.

$$(t^3 - 13t^2 + 40t)' = 3t^2 - 26t + 40 = (3t - 20)(t-2).$$

Voor $t = 2$ vinden we $t^3 - 13t^2 + 40t = 36$ en voor $t = 6\frac{2}{3}$ vinden we $t^3 - 13t^2 + 40t = \frac{-400}{27}$.

Het antwoord is dus D = (2,4,8).