Tamr

Onderafdeling Wiskunde

Afd. Algemene Wetenschappen

EXAMEN
en
TENTAMEN OPGAVEN

Wiskunde I en II
met Oplossingen

DEEL II

TYPEWERK VERZORGD DOOR MEJ. M.G.H. v.d. BROEK

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

EXAMEN en TENTAMEN

OPGAVEN

Wiskunde I en II met Oplossingen

DEEL II

Inhoudsbeschrijving

EXAMEN en TENTAMEN OPGAVEN

Wiskunde I en II met Oplossingen

DEEL II

(18 Mei 2005, JdG)

O P G A V E N

87. Gevraagd alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' + 6y' + 25y = e^x .$$

88. Gevraagd de oplossing $y = f(x)$ van de differentiaalvergelijking

$$y'' + 2y' = - y ,$$

die voldoet aan $f(0) = 1$ en $f'(0) = 0$.
Schets de grafiek van de gevonden oplossing.

89. Bereken de wortels van de vergelijking

$$2^4 + (z+i\sqrt{2})^4 = 0$$

en construeer de beeldpunten in het complexe vlak van deze wortels.

90. z is een complex getal waarvan het beeldpunt het kwart van de eenheidscirkel, dat wordt beschreven door

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4} \qquad \text{doorloopt.}$$

Teken en beschrijf de meetkundige plaats van het beeldpunt van

$$w = z + i\bar{z} .$$

91. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y''' - 3y'' + 4' - 2y = 2e^x .$$

92. Bepaal alle <u>reële</u> oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y^{(5)} + y^{(2)} = 6x^2 - 6x + 1 .$$

93. a) Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y'' + 2y' + y = e^{x} + e^{-x} .$$

b) Als y(x) de algemene oplossing is, bepaal dan:

$$\lim_{x \to \infty} [y(x) - \tfrac{1}{2} \cosh x].$$

94. Bepaal modulus en argument van de wortels van

$$z^6 - 2z^3 + 2 = 0 .$$

Teken de beeldpunten van de wortels in het complexe vlak.

95. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' + 2y' + 2y = x(e^{x} - 1) .$$

96. Voor welke complexe z geldt

$$\left|\bar{z} + \frac{1}{z}\right| < 2\tfrac{1}{2} \quad ?$$

Geef ook een tekening.

97. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking:

$$y''' - y'' + 2y = e^{-x} \cos x .$$

98. Bepaal alle **reële** oplossingen van:

$$y'''' + y'' + y = 0 .$$

99. Bepaal de oplossing van

$$y''' - y'' = x$$

waarvoor geldt $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

100. Gegeven $z_1 = e^{i\varphi}$, $z_2 = i\,e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$

a) Teken z_1 en z_2 voor zekere φ.

b) Voor welke φ bestaat $A = \arg \dfrac{z_2 + 1}{z_1 + 1}$?

Bepaal $\arg \dfrac{z_2 + 1}{z_1 + 1}$ voor deze waarden van φ.

c) Bepaal de uiterste waarde(n) van $\mathrm{Re}(z_1 + z_2)$.

101. z doorloopt in het complexe vlak de omtrek van rechthoek ABCD, waarbij de hoekpunten als volgt zijn gelegen:

A: $-\,i \log 2$

B: $\frac{1}{6}\pi - i \log 2$

C: $\frac{1}{6}\pi + i \log 2$

D: $+\,i \log 2$

Beschrijf nauwkeurig de baan welke $w = e^{iz}$ dan doorloopt.

102. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' + 4y = \sin x \cos x.$$

103. Voor welke complexe z geldt:

$$\log |e^z| \leqslant |z| - 1.$$

Teken in het z-vlak het bijbehorende gebied.

104. a) Bepaal de oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y''' - y'' + y' - y = e^{ix}.$$

b) Ga na of er reële oplossingen zijn.

105. Zij $w = \frac{2}{2z-i}$. Als z de rechte $\operatorname{Im} z = 1$ doorloopt, wat is dan de "baan" van w? Voor welke waarde(n) van z is Im w extreem?

106. Bepaal alle functies f(x,t) die voldoen aan

$$2\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f - \sin t.$$

107. Zij $w = e^{z} - e^{-z}$. Als z de rechte $\operatorname{Re} z = \log 2$ doorloopt, dan doorloopt w een ellips. Bewijs dit.

108. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'''' - y''' + y' + y = 2\sin x.$$

109. Onderzoek of de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \log n}{n^4 - 4n^2 + 1}$$

$a_n < \frac{c}{n}$

convergent of divergent is.

110. Bepaal

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x^2 - 4\sin^2 \frac{1}{2}x}{\cosh x - \sqrt{1+x^2}}.$$

111. Geef de definitie van het begrip "convergentie van een reeks".

112. Schrijf op de reeksontwikkeling voor $\log \frac{1+x}{1-x}$.

Bepaal hiermee (door $x = \frac{1}{3}$ te nemen) een reeksontwikkeling voor log 2. Toon aan dat de fout die wordt gemaakt wanneer men na de tweede term afbreekt, kleiner dan $\frac{1}{500}$ is.

113. Is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left[1-\cos\frac{1}{n}\right]$ convergent of divergent?

114. a) Voor welke waarden van de complexe veranderlijke z is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{nz}$ convergent resp. divergent.

b) Neem nu verder z reëel en zó dat de reeks convergeert. Bepaal dan de som van de reeks.

115. Bewijs dat de limiet van de algemene term van een convergente reeks nul is.

116. Toon aan dat de reeks met algemene term $\frac{1}{n}$ divergeert.

117. Bepaal

$$\lim_{x \to 0} \frac{xe^x - \sin(x+x^2)}{x - \arctan x} .$$

118. Geef in het complexe vlak aan voor welke $z = x+iy$ de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left[\frac{z+\bar{z}}{(z-\bar{z})^2} \right]^n$$

convergeert, en voor welke hij divergeert.

119. Gegeven: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ is convergent voor $x = p > 0$.
Bewijs dat de reeks convergent is voor $-p < x < p$.

120. Onderzoek of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \frac{\pi}{2})}{n}$$

convergent of divergent is.

121. Bepaal:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - \arctan x + \frac{1}{2}(\sinh x)^2}{e^x - \cos x - x(1-x)^{-1}} .$$

122. Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z+2)^{2n} n(n+1)} .$$

Gevraagd:

a) Voor welke (complexe) z is de reeks convergent resp.divergent;

b) Een schets van het convergentiegebied in het complexe vlak;

c) De som van de reeks voor $z = i-2$.

123. Voor welke reële x is de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{5}\right)^n\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$$

convergent resp. divergent?

124. Gegeven is de rij $a_1, a_2, \ldots$ met $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bewijs dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(a_n + a_{n+1})$ convergeert en bepaal de som.

125. a) Geef aan, voor welke z in het complexe vlak de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-\bar{z})^{2n}}{n}$$

convergeert.

b) Toon aan, dat voor de som S(z), als ze bestaat, geldt:

$$-1 < S(z) \leq 0.$$

126. Bepaal

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\pi} - \cos x + x \arccos \frac{x}{2}}{\log\left(1-\frac{x}{2}\right) + \arcsin \frac{x}{2}}.$$

127. Onderzoek of de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ convergeert.

128. Gegeven $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ (a_n reëel).

Onderzoek voor welke reële waarden van x de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ convergent resp. divergent is.

129. Bepaal met behulp van standaardreeksen de derde afgeleide in het punt x = 0 van de functie

$$f(x) = \frac{\log(1+x) - \sin x}{\sqrt{1-x}}.$$

130. Onderzoek voor welke waarden van p de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^p}$$

convergent, resp. divergent is.

131. Bepaal het convergentiegebied van de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{n \frac{z-1}{z-3}} .$$

Denk daarbij ook aan de rand.

132. Voor welke reële waarden van x ($0 \leqslant x \leqslant 2\pi$) convergeert de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \sin x)^n}{n} .$$

133. Voor welke waarde(n) van α bestaat de volgende limiet:

$$\lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^{\alpha} - e^{\alpha^2 t}}{\log(1+t) - \sin t} .$$

Bereken bij elke gevonden α de limiet.

134. Ga na of de volgende reeks convergeert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n . n^{-n} . n\,!$$

135. Van een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n.$$

a) Bewijs dat $u_n = \frac{1}{n} + \log(1 - \frac{1}{n})$ voor $n \geqslant 2$.

b) Bewijs dat $\lim_{n \to \infty} n^2 u_n$ bestaat.

c) Bewijs dat $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergeert.

d) Bestaat $\lim_{n \to \infty} (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n)$?

136. Ga na voor welke waarden van x de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)x^{2n+1}}{(2n)!}$$

convergent is en bepaal de som voor die waarden van x.

137. Bepaal

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tan} x^3 + \log(1-x) + \sin(e^x - 1)}{(\sin x)^4} .$$

138. Bepaal $L = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - \dfrac{9+3x}{9+x^2}}{\sin x - \arctan x}$.

139. Bewijs voor vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ van R_n de ongelijkheid van Schwarz:

$$(\underline{a},\underline{b})^2 \leqslant (\underline{a},\underline{a})(\underline{b},\underline{b}).$$

140. Bepaal de vergelijkingen van de beide raakvlakken aan de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, die loodrecht staan op de rechte

$$\underline{x} = (1,2,3) + \lambda(3,4,0).$$

141. Bepaal de vergelijking van de kegel die T = (1,1,1) als top, en die de parabool $\begin{cases} y = x+1 \\ z = x^2+1 \end{cases}$ tot richtkromme heeft.

142. Gevraagd de vergelijking van de meetkundige plaats van de rechten, die de y-as en de rechte y = 0, z = 2 snijden, en evenwijdig zijn met het vlak x+y = 0.

143. Bepaal de vergelijking van de meetkundige plaats van de punten, die gelijke afstand hebben tot de rechten l en m:

$$l: \begin{cases} y=0 \\ z=1 \end{cases} \qquad m: \begin{cases} x=0 \\ z=-1 \end{cases} .$$

Tot welk type tweedegraadsoppervlakken behoort de gevonden meetkundige plaats? Schets de meetkundige plaats door de doorsneden met de coördinaatvlakken aan te geven.

144. Gegeven zijn de rechten

$$l: \begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases}, \qquad m: \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}, \qquad n: \begin{cases} z=0 \\ y=1. \end{cases}$$

Bepaal de vergelijking van het oppervlak, dat bestaat uit alle rechten die l, m en n snijden.

145. $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ zijn onafhankelijke vectoren in R_3 .

$$\underline{p} = \underline{a} \times \underline{b} \quad \text{en} \quad \underline{q} = \underline{b} \times \underline{c}.$$

Bepaal de vergelijking van het vlak dat wordt opgespannen door $\underline{p}$ en $\underline{q}$.

146. In het xy-vlak is gegeven de kromme K: $2xy = 1$ en de rechte l: $x+y = 0$.
a) Bepaal de vergelijking van het oppervlak S, dat ontstaat door wenteling van K om l.
b) Bepaal de beschrijvenden van S, die door het punt P(0,0,1) gaan.

147. De kromme K: $\begin{cases} x^2 - 2z^2 = 1 \\ y = z \end{cases}$

wentelt om de rechte l: $\underline{x} = \lambda(0,1,1)$.
Bepaal de vergelijking van het verkregen omwentelingsoppervlak S.

148. Bepaal de meetkundige plaats S van de rechten, die de rechte l en de kromme K snijden, en evenwijdig zijn met het vlak $y = 1$, als gegeven is

$$l: \begin{cases} x = 0 \\ y-z = 0 \end{cases} \qquad K: \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

149. Bewijs dat de afstand van het punt $P(x_0, y_0, z_0)$ tot het vlak $ax + by + cz = d$ gelijk is aan:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} .$$

150. In de ruimte is gegeven de kromme

$$\begin{cases} x = 1 + \dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}, \\ y = 1 + \dfrac{\sin t}{\sqrt{2}}, \\ z = 1 + \cos t . \end{cases}$$

Bepaal de vergelijking van het oppervlak dat ontstaat als deze kromme gewenteld wordt om de rechte $\underline{x} = \lambda(1,1,1)$.

151. De kromme $\begin{cases} y = z \\ x^2 = 1 - 2y^2 \end{cases}$

wordt gewenteld om de rechte $\underline{x} = (0,2,0) + \lambda(0,0,1)$. Welk oppervlak ontstaat hierdoor?

152. Bereken $I = \int_0^1 \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^4}dx$.

153. Bereken

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx .$$

154. Bereken

$$I = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}} .$$

155. Bereken

$$I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+1}} dx .$$

156. Bepaal

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\tan x} .$$

157. Bereken de inhoud I van het (zich tot in het oneindige uitstrekkende) lichaam, dat ligt in het eerste octant en dat verder gegeven wordt door

$$x^2+y^2 \geqslant 1; \quad \frac{1}{3}x\sqrt{3} \leqslant y \leqslant x\sqrt{3}; \quad 0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

158. Bereken $I = \iiint_L (x+y-2z)\,dxdydz$, waarin het lichaam L de ruimte in het eerste octant inneemt, die ligt binnen de cylinder $x^2+y^2=1$, boven het vlak xOy en onder het vlak $x+y-z = 1$.
(Het is bij de berekening niet voordelig op cylindercoördinaten over te gaan).

159. Bepaal de oppervlakte van dat gedeelte van de bol $x^2+y^2+z^2=1$, dat buiten de cylinder $x^2+4y^2=1$ ligt. (Gebruik rechthoekige coördinaten!).

160. Bereken de oppervlakte van het stuk van de cylinder

$$z = \log\frac{2}{x} \qquad (x>0)$$

dat ligt boven het gebied in het XOY-vlak, dat wordt begrensd door de x-as, de parabool $y = x^2$, en de snijlijn van de cylinder met het XOY-vlak.

161. Bereken de massa van een heelal met massadichtheid

$$\frac{1}{(\rho^2+2)^2}$$

waarin ρ de afstand is tot de oorsprong.

162. Bereken de lengte van de ruimtekromme in R_3, waarvan de parametervoorstelling is:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1+\cos t \\ y &= \sin t \\ z &= -2\log\cos\frac{t}{2} \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{3}).$$

163. Bereken de oppervlakte van dat deel van het zadelvlak $z = xy$, dat ligt binnen de cylinder C:

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 \quad , \; x \geqslant 0.$$

2x

164. Bepaal de massa van een bol met straal R, waarin de massadichtheid evenredig is met de afstand tot het middelpunt.

165. Bereken de oppervlakte van dat deel van de cylinderwand

$$x^2 + z^2 = 1,$$

waarvoor geldt:

$$x^2 + y^2 \leqslant 1$$
$$x + y \geqslant 1$$
$$z \geqslant 0$$

166. Een bol met middelpunt (0,0,0) em straal 1 heeft massaverdeling $\rho(x,y,z) = |z|$. Bepaal de massa van het stuk van de bol dat binnen de kegel $z^2 = x^2 + (y-1)^2$ ligt. (Bepaal daartoe eerst de vergelijking van de projectie op het XOY-vlak van de doorsnijdingskromme van de kegel en het boloppervlak).

167. A is een lineaire afbeelding van R_3 in R_3 met nulruimte $\underline{x} = \mu(1,1,1)$. Bewijs dat $\underline{p} = (1,1,1)$ eigenvector is.

168. A is een lineaire afbeelding van R_4 in R_3 met matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Bepaal bases voor beeld- en nulruimte.

169. A is een lineaire afbeelding van R_3 op R_3 . De eigenwaarden van A zijn 1,3, en -2 met als eigenvectoren respectievelijk $\rho(1,1,1)$, $\sigma(1,-2,0)$ en $\tau(2,0,1)$. Bereken de matrix van A.

170. B is een lineaire afbeelding van R_3 in zichzelf met matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De afbeelding A van R_3 in zichzelf is gegeven door

$$A\underline{x} = B\underline{a} + \underline{x}\ .$$

Voor welke vectoren $\underline{a}$ uit R_3 is A een lineaire afbeelding?

171. Door het voorschrift $A(x,y,z) = (z,x,y)$ wordt de R_3 op zichzelf afgebeeld.

a) Laat zien dat dit voorschrift een lineaire afbeelding is en dat deze afbeelding orthogonaal is.

b) Bepaal de eigenvectoren van A.

c) Laat zien dat er een vlak door O is dat door A in zichzelf wordt afgebeeld.

d) Laat nu zien dat de afbeelding een draaiing van de ruimte om een zekere as is en bepaal de hoek waarover wordt gedraaid. 17.7

A A N W I J Z I N G E N

87. Zie VI § 7 vb. 4.

88. Zie VI § 6 vb. 3 en stelling.

89. Substitueer $w = z+i\sqrt{2}$ en pas toe VI 8.

90. VI 6 voorbeeld 4; VI 7 voorbeeld 5.

91. Theorie van de lineaire differentiaalvergelijkingen VI § 5 - § 6 - § 7.

92. Los de homogene vergelijking op met behulp van VI.14.§ 6; zoek vervolgens één oplossing van de inhomogene vergelijking van de vorm $x^2(ax^2+ bx + c) = ax^4+ bx^3+ cx^2$ (VI.16. § 7).

93. Los de homogene vergelijking op met behulp van VI.14. § 6; zoek vervolgens één oplossing van de inhomogene vergelijking van de vorm $ae^x + bx^2e^{-x}$ (VI.16. § 7).
Gebruik voor het tweede deel de definitie van coshx (VI.21).

94. Stel $z^3= w$ en los de ontstane vierkantsvergelijking in w op. Zie verder VI.7. § 3.

95. Los de homogene vergelijking op met behulp van VI.14. § 6; zoek

vervolgens één oplossing van de inhomogene vergelijking van de vorm $(ax+b)e^x + (cx+d)$ (VI.16. § 7).

96. Breng onder één noemer en bedenk dat $z\bar{z} = |z|^2$.

97. Vgl. VI § 6 en § 7.

98. Vgl. VI § 6.

99. Vgl. VI § 6 en § 7.

100. a) Vgl. VI § 2.3)
b) VI § 1. Opm.
c) VI § 2. 4)

101. VI § 2.

102. Zie VI § 6. Inhomogene vergelijking. Probeer niet A sin 2x maar Ax sin 2x + Bx cos 2x of zo iets.

103. Zie VI blz. 5.

104. a) Zie VI § 6
b) Nadenken en inzien hoe simpel de vraag is!

105. 1) Stel $z = x+i$, $w = u+iv$. Druk u en v in x uit en elimineer dan x uit de 2 vergelijkingen.
2) Als U aan een plaatje heeft gezien dat w een cirkel doorloopt met $-i$ als middelpunt probeer dan rechtstreeks $|w+i| = 1$ te bewijzen.

106. Bedenk dat sin t niet van x afhangt.

107. Schrijf $w = u+iv$, $z = \log 2 + iy$. Bepaal u en v en elimineer dan y.

108. VI § 6. Inhomogene vergelijking: oplossing is zo te zien!

109. Zie VII.3. Vergelijkingsstelling en standaardreeks op pag. VII 4.

110. Zie de reeksontwikkelingen op VII.20; VII.21 vb.7 en bedenk dat $2 \sin^2 \frac{1}{2}x = 1-\cos x$.

111. Zie VII § 1.

112. Zie VII.20 en VII § 6 vb.2.

113. Voor de begrippen convergentie en divergentie zie VII § 1. Onderzoek of de termen positief zijn, overweeg VII § 2 en vergeet daarbij niet I § 4 D.

114. Als $e^z = \zeta$ staat er een machtreeks in ζ. Zie VII § 7.

115. Zie VII.2.

116. Zie VII.1, voorbeeld 5.

117. Gebruik reeksontwikkelingen op VII.20.

118. Stel $\dfrac{z+\bar{z}}{(z-\bar{z})^2} = w$ en pas d'Alembert (VII.6) toe.

119. Vergelijk het bewijs van VII.12, stelling.

120. Bedenk dat
$$\sin(n\tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 \text{ als } n \text{ even} \\ +1 \text{ of } -1 \text{ als } n \text{ oneven.} \end{cases}$$

121. Gebruik reeksontwikkelingen op VII.14 en VII.20.

122. Stel $z+2 = w$ en pas d'Alembert toe.

123. Stel $\frac{2}{5}(x + \frac{1}{x}) = y$ en pas d'Alembert toe.

124. Definitie VII § 1.

125. a) VII § 7, § 4.
Noem $z = x+iy$. x,y reëel.
b) VII § 4 blz. 14.
Stelling VII blz. 10 (voorbeeld onderaan de bladzijde).

126. VII § 5, speciaal blz.20. Denk aan integratie van machtreeksen binnen hun convergentiegebied.

127. Vergelijkingsstelling VII § 2.

128. VII § 4. Denk ook aan de stelling VII blz.2.

129. Ontwikkel eerst f(x) volgens standaardreeksen. VII § 5 blz.20. Vergelijk deze reeksontwikkeling met de Maclaurinontwikkeling van f(x).

130. Vergelijkingsstelling VII § 2.
Zie ook de standaardreeksen op blz. VII 4.

131. Machtreeks in $e^{\frac{z-1}{z-3}}$.
Denk verder aan wiskunde I: VI blz.5.

132. Stel $2\sin x = y$.

133. Reeksontwikkeling. Bedenk dat de noemer niet sneller tot 0 mag naderen dan de teller.

134. Vergelijk VII.6 vb. 5.

135. a) $u_n = s_n - s_{n-1}$ voor $n > 1$, $u_1 = s_1$.
b) reeks voor log(1+x).
c) vergelijken met $\Sigma \frac{1}{n^2}$.
d) definitie convergentie!

136. a) d'Alembert
b) VII § 4 B. Stelling.

137. Reeksontwikkelingen.

138. Reeksontwikkelingen.

139. Zie VIII § 1.

140. Zie bijv. VIII § 4.

141. Zie VIII. § 6.A.

142. Vergelijk VIII.21, voorbeeld 10.

143. Afstand punt tot rechte: VIII.3; type VIII 15, § 5.

144. Vergelijk VIII.20, voorbeeld 9.

145. Bedenk dat p loodrecht op a en op b staat. Zie VIII.22, § 7.

146. a) Zie VIII. § 6 C
b) Zie VIII. § 5

147. Zie VIII § 6 C.

148. VIII § 6 D.

149. Zie VIII 9.

150. Zie VIII § 6 C. Beter: Wat voor kromme is gegeven ? Hoe wordt deze gewenteld ? Antwoord is zo te zien !

151. VIII § 6 C. Voorzichtig met elimineren !

152. Zie IX § 4.

153. Denk aan het punt x = 0. Oneigenlijke integraal ! Zie VII § 5 blz. 20 t/m 23.

154. Verwissel de integratievolgorde. Zie X § 3.

155. Delen, partieel integreren.

156. Stel tanx = u.

157. Zie X § 2, 3 en 4.

158. Zie X § 4.

159. Zie de formule voor de oppervlakte op X.20, en vergelijk X.21, voorbeeld 5 en 6.

160. Zie 159.

161. Zie X 6, voorbeeld 5.

162. Vergelijk X 19, B en vb. 2.

163. Gebruik cylindercoördinaten. Zie X § 6 E.

164. Zie X § 2 blz.6 voorbeeld 5. Gebruik bolcoördinaten (X § 2, blz.7).

165. Zie X blz.20 onderaan. Schets de ongelijkheden in het xy vlak.

166. a) Elimineer z uit de 2 vergelijkingen.

b) Bepaal $\iiint |z|\,dx\,dy\,dz = \iint_P dx\,dy \int_{z_{kegel}}^{z_{bol}} |z|\,dz.$

Hierin is P de projectie van de snijkromme.

167. Probeer de eigenwaarde te vinden, die bij de eigenvector (1,1,1) zal moeten horen. Zie blz. XI.16.

168. Zie XI § 3.

169. Zie XI § 3; XI blz.16; XI § 2 definitie.

170. A is <u>geen</u> lineaire afbeelding als $A\underline{o} \neq \underline{o}$.

171. a) definities XI § 2 en § 5.
b) niet rekenen maar aan definitie denken !
c) door A worden hoeken onveranderd gelaten (zie XI § 5).
d) Als A een draaiing over een hoek φ is en $\underline{x} \perp$ as dan is φ de hoek tussen $\underline{x}$ en $A\underline{x}$.

O P L O S S I N G E N

87. We lossen eerst de homogene vergelijking op: $y'' + 6y' + 25y = 0$.
De karakteristieke vergelijking wordt: $t^2 + 6t + 25 = 0$
$t_{1,2} = -3 \pm 4i$ (zie VI § 6).
De oplossingen zijn: $y = e^{-3x}(\lambda \cos 4x + \mu \sin 4x)$.
Zoek nu een particuliere oplossing van de <u>inhomogene</u> vergelijking.
Stel hiertoe $y = ae^x$; $y' = y'' = ae^x$

$ae^x + 6ae^x + 25ae^x = e^x$ $\qquad a = 1/32$.

De algemene oplossing is nu:

$$y = e^{-3x}(\lambda \cos 4x + \mu \sin 4x) + 1/32\, e^x.$$

Opm: dat we nu <u>alle</u> oplossingen hebben, volgt uit de beide stellingen uit VI § 5.
Controleer steeds of het aantal constanten in de algemene oplossing gelijk is aan de orde der D.V.

88. De D.V. is homogeen: $y'' + 2y' + y = 0$.
De karakteristieke vergelijking is: $t^2 + 2t + 1 = 0$; $t_{1,2} = -1$.
En de algemene oplossing is

$$y = \lambda e^{-x} + \mu x e^{-x} \qquad \text{(zie VI, § 6 stelling).}$$

$y(0) = 1$ geeft $1 = \lambda$
$y'(x) = -\lambda e^{-x} + \mu e^{-x} - \mu x e^{-x}$
$y'(0) = 0$ geeft: $-\lambda + \mu = 0$ dus $\mu = 1$ en de oplossing is:

$$y = e^{-x} + xe^{-x} = (1+x)e^{-x}.$$

Nu de grafiek van $f(x) = (1+x)e^{-x}$. Hiertoe maken we weer het bekende schema
$f'(x) = -xe^{-x}$ $\qquad$ Nu is $e^{-x} > 0$ voor alle x.
$f''(x) = (x-1)e^{-x}$

$$\lim_{x\to\infty} (1+x)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{e^x} = 0 \qquad \text{(zie VII, § 5, E).}$$

Verder is $(1+x)e^{-x} \to -\infty$ voor $x \to -\infty$.

Het schema wordt:

x :	$-\infty \leftarrow$	-1	0	+1	$\to +\infty$
f(x) :	$-\infty \leftarrow$ - - - - - -	0 + + +	1	+ + + + +	$\to 0$
f'(x) :	$+\infty \leftarrow$ + + + + + + + +	+	0	- - - - - -	$\to 0$

$\downarrow$

$f''(1)=0$

f(x) heeft dus een max. voor x = 0 en buigpunt voor x = + 1.

De grafiek van f(x) is nu te schetsen.

89. Substitueer $z + i\sqrt{2} = w$ en los op:

$$w^4 = -2^4 = 2^4 e^{i\pi + 2k\pi i}.$$

Opl. $w = 2e^{\frac{1}{4}\pi i + \frac{1}{2}\pi ik}$ met $k = 0,1,2,3,$

$$= 2\{\cos(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}k\pi) + i\sin(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}k\pi)\}$$

$w_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ $\qquad z_1 = \sqrt{2}$

$w_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ $\qquad z_2 = \sqrt{2} - 2\sqrt{2}.i$

$w_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ $\qquad z = w - i\sqrt{2}$ dus $\qquad z_3 = -\sqrt{2}$

$w_4 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ $\qquad z_4 = -\sqrt{2} - 2\sqrt{2}.i$

90. <u>Opl.I</u>: Stel $z = e^{i\varphi}$ $(-\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4)$, dan is

$$w = e^{i\varphi} + ie^{-i\varphi}$$
$$= e^{i\varphi} + e^{-i\varphi + i\frac{\pi}{2}}$$

(die e-machten kunt U niet optellen. U kunt er alleen een andere naam aan geven als de argumenten precies tegengesteld zijn).

$$w = (e^{i\varphi}e^{-i\pi/4} + e^{-i\varphi + i\pi/4})e^{+\pi/4.i}$$
$$= 2\cos(\varphi - \pi/4).e^{\pi/4.i}$$

dus $|w| = 2\cos(\varphi - \pi/4)$ $\qquad 0 \leqslant |w| \leqslant 2$

en arg $w = \pi/4$.

Conclusie: Nemen we aan dat z de kwartcirkel doorloopt in positieve richting dus $-\pi/4 \underset{\varphi}{\to} \pi/4$, dan loopt w vanaf de oorsprong naar het punt $2e^{\pi/4 i} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ volgens een rechte lijn.

Opl.II: Stel $z = x + iy$, dan is $w = x + iy + ix + y = x + y + i(x + y)$.
Hieruit volgt:

1) $\arg w = \pi/4$, onafhankelijk van de baan die z doorloopt.

2) $|w| = |x + y| . \sqrt{2}$ doch $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, met $-\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$, dus $|w| = \sqrt{2}\,|\cos\varphi + \sin\varphi|$

$$= \sqrt{2}\,(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

(want $\cos\varphi + \sin\varphi \geqslant 0$).

91. We zoeken eerst de algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking: $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$, (zie VI § 7).
De karakteristieke vergelijking $t^3 - 3t^2 + 4t - 2 = (t-1)(t^2 - 2t + 2) = 0$ heeft als wortels $t = 1$, $t_2 = 1 + i$, $t_3 = 1 - i$, (zie VI § 6). De algemene reële oplossing van de homogene vergelijking wordt dan gegeven door:

$$y = \lambda e^x + \mu e^x \cos x + \nu e^x \sin x,\ \lambda, \mu, \nu \text{ reëel,}$$ (vergelijk VI § 6 voorbeeld 2).

Nu moeten we een oplossing van de inhomogene vergelijking $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 2e^x$ vinden; omdat e^x aan de homogene vergelijking voldoet proberen we $y = axe^x$, (vergelijk VI § 7 voorbeeld 5).
Dan is $y' = ae^x + axe^x$; $y'' = 2ae^x + axe^x$; $y''' = 3ae^x + axe^x$.
Invullen en delen door e^x levert $3a - 6a + 4a = 2$, dus $a = 2$.
De algemene oplossing is dan:

$$y = \lambda e^x + \mu e^x \cos x + \nu e^x \sin x + 2xe^x,\ \lambda, \mu, \nu, \text{ reëel.}$$

Opmerking. Laat men ook complexe oplossingen toe, dan is de algemene oplossing: $y = c_1 e^x + c_2 e^{(1+i)x} + c_3 e^{(1-i)x} + 2xe^x$, c_1, c_2, c_3 complex.

92. De homogene vergelijking luidt $y^{(5)} + y^{(2)} = 0$. Substitutie van $y = e^{tx}$ geeft de karakteristieke vergelijking: $t^5 + t^2 = 0$; $t^2(t^3 + 1) = 0$; $t^2(t+1)(t^2-t+1) = 0$, dus $t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = -1$, $t_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $t_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.
De algemene oplossing van de homogene vergelijking wordt dan (zie VI. 14. § 6):

$$\lambda e^{o.x} \quad \mu x e^{o.x} + \nu e^{-x} + \rho e^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3})x} + \sigma e^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3})x} =$$

$$= \lambda + \mu x + \nu e^{-x} + \rho e^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3})x} + \sigma e^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3})x} \qquad (1)$$

waarin voor λ , μ , ν , ρ en σ (eventueel complexe) getallen gesubstitueerd mogen worden.
We zoeken vervolgens één oplossing van de inhomogene vergelijking.
De poging om een oplossing van de gedaante $ax^2 + bx + c$ te vinden, mislukt; dit komt doordat de karakteristieke vergelijking een (<u>dubbele</u>) wortel $t = 0$ heeft (met bijbehorende oplossingen $e^{o.x} = 1$ en $xe^{o.x} = x$). We verhogen daarom de graad van het te zoeken polynoom met <u>twee</u> (vgl. ook VI.16.vb.3):
probeer $y = x^2(ax^2 + bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ (2).

<u>Opmerking 1.</u>
Het is duidelijk dat een eventueel "reststuk" $dx + e$ in (2) niet interessant zou zijn, daar dit reeds in (1) voorkomt.
We vinden: $y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx$, $y^{(2)} = 12\,ax^2 + 6bx + 2c$ en zo doorgaande vinden we $y^{(5)} = 0$; substitutie in de inhomogene vergelijking levert

$$12\,ax^2 + 6bx + 2c = 6x^2 - 6x + 1$$

dus $12a = 6$, $6b = -6$, $2c = 1$ of $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = \frac{1}{2}$, zodat een oplossing van de inhomogene vergelijking is

$$\tfrac{1}{2}x^4 - x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 \;.$$

I.v.m. (1) wordt de oplossing van de gegeven vergelijking dan

$$y = \tfrac{1}{2}x^4 - x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \lambda + \mu x + \nu e^{-x} + \rho e^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3})x} + \sigma e^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3})-x} \qquad (3)$$

(λ , μ , ν , ρ , σ eventueel complex).
En nu opletten:

<u>1.</u> Als u denkt nu klaar te zijn, verrekent u zich **lelijk**, want gevraagd worden niet <u>alle</u> oplossingen, maar <u>alle reële</u> oplossingen van de gegeven diff. vergelijking.

<u>2.</u> Als u denkt klaar te zullen zijn na duidelijk vermeld te hebben dat λ, μ, ν, ρ en σ slechts reëel mogen zijn, dan zit u er ook naast: niet alleen deze <u>constanten</u>, maar ook de in (3) voorkomende <u>functies</u> oefenen invloed uit op het al of niet reëel zijn van (3) (zie opm. 3).

Conclusie: we moeten nagaan welke functies in (3) complexe waarden kunnen aannemen (de variabele x wordt steeds reëel ondersteld).
De functies x^4, x^3, x^2, 1, x, e^{-x} zijn steeds reëel; door λ, μ en ν reëel te kiezen leveren de eerste zes termen in (3) dus een reële bijdrage. Voor de laatste twee termen schrijven we

$$\rho e^{\frac{1}{2}x}.e^{\frac{1}{2}xi\sqrt{3}} + \sigma e^{\frac{1}{2}x}.e^{-\frac{1}{2}xi\sqrt{3}} =$$

$$= \rho e^{\frac{1}{2}x}(\cos\tfrac{1}{2}x\sqrt{3} + i\sin\tfrac{1}{2}x\sqrt{3}) + \sigma e^{\frac{1}{2}x}(\cos\tfrac{1}{2}x\sqrt{3} - i\sin\tfrac{1}{2}x\sqrt{3}) =$$

$$= e^{\frac{1}{2}x}[(\rho+\sigma)\cos\tfrac{1}{2}x\sqrt{3} + i(\rho-\sigma)\sin\tfrac{1}{2}x\sqrt{3}] \qquad (4).$$

Opmerking 2.
Gebruikt is hier de gegeneraliseerde formule van Euler: $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ (zie VI.5); vervolgens is gesplitst in reëel en imaginair deel.
De functies $e^{\frac{1}{2}x}$, $\cos\frac{1}{2}x\sqrt{3}$ en $\sin\frac{1}{2}x\sqrt{3}$ zijn steeds reëel. Zorgen we er dus voor dat $\rho+\sigma$ en $i(\rho-\sigma)$ reëel zijn, dan zijn we klaar. Noem daarom $\rho+\sigma=\alpha$, $i(\rho-\sigma)=\beta$ (5), dan worden i.v.m. (3) alle reële oplossingen van de gegeven vergelijking gegeven door

$$y = \tfrac{1}{2}x^4 - x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \lambda + \mu x + \nu e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}(\alpha\cos\tfrac{1}{2}x\sqrt{3} + \beta\sin\tfrac{1}{2}x\sqrt{3})$$

waarin nu voor λ, μ, ν, α en β reële getallen gesubstitueerd moeten worden.

Opmerking 3.
Ga na dat bij gegeven reële α en β uit (5) volgt dat $\rho = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)$, $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)$; om α en β reëel te krijgen moeten we in (3) ρ en σ dus complex nemen!

Opmerking 4.
Een oplossing van de inhomogene vergelijking vinden we ook als volgt: neem een functie y waarvoor geldt $y^{(2)} = 6x^2 - 6x + 1$; deze voldoet, want nu is $y^{(5)} = 0$. Door tweemaal integreren vinden we $y' = 2x^3 - 3x^2 + x + p$, $y = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + px + q$ (p en q willekeurige constanten); neem p = q = 0, dan vinden we juist de boven vermelde oplossing.

93. a) De karakteristieke vergelijking luidt $t^2 + 2t + 1 = 0$, $(t+1)^2 = 0$ dus $t_{1,2} = -1$. De algemene oplossing van de homogene vergelijking is dus

$$\lambda e^{-x} + \mu x e^{-x} \qquad (1)$$

(zie VI.14 § 6) waarin λ en μ (eventueel complexe) getallen voorstellen.

We zoeken nu één oplossing van de inhomogene vergelijking. In het rechterlid van de vergelijking komen twee termen voor; voor de term e^x proberen we iets van de vorm ae^x. De term e^{-x} komt ook in de oplossing (1) van de homogene vergelijking voor, dus kunnen we niet iets van de vorm be^{-x} proberen, zelfs niet iets van de vorm bxe^{-x} (ook deze term komt al in (1) voor), maar wel iets van de vorm bx^2e^{-x} (dus $be^{-x} \cdot x^2$, aangezien $t = -1$ een tweevoudige wortel van de karakteristieke vergelijking is; vergelijk vraagstuk 92).

We proberen dus $y = ae^x + bx^2e^{-x}$; $y' = ae^x + 2bxe^{-x} - bx^2e^{-x}$;

$y'' = ae^x + 2be^{-x} - 4bxe^{-x} + bx^2e^{-x}$. Substitutie in de vergelijking levert $4ae^x + 2be^{-x} = e^x + e^{-x}$, dus $a = 1/4$, $b = 1/2$.

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is dus

$$y = \tfrac{1}{4}e^x + \tfrac{1}{2}x^2e^{-x} + \lambda e^{-x} + \mu x e^{-x}. \qquad (2)$$

b) We hebben : $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ (VI.21) en dus is i.v.m. (2):

$$y(x) - \tfrac{1}{2}\cosh x = 1/2\, x^2e^{-x} + (\lambda - 1/4)e^{-x} + \mu x e^{-x}.$$

Nu weten we: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^p}{e^x} = 0$ voor alle reële p (zie VII.22) en dus

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0, \text{ zodat}$$

$$\lim_{x\to\infty}[y(x) - \tfrac{1}{2}\cos h\, x] = 0.$$

94. Opm. 1. Vooraf merken we op dat de gegeven vergelijking van de zesde graad is en dus zes (eventueel samenvallende) wortels heeft.

We zien onmiddellijk (ziet U het ook ?) dat de gegeven vergelijking een vergelijking in z^3 is; stellen we $z^3 = w$, dan ontstaat

$$w^2 - 2w + 2 = 0 \quad \text{dus} \quad w = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i; \quad w_1 = 1 + i, \quad w_2 = 1 - i.$$

We moeten nu z oplossen uit $z^3 = w$ (1) met $w = w_1$ of $w = w_2$.(1) is een binomiaal vergelijking (zie VI.8); om deze op te lossen moeten we $|w|$ en arg w kennen (noem arg $w_1 = \varphi_1$, arg $w_2 = \varphi_2$).

Opm. 2. Algemeen vinden we, als $z = a + ib$, $|z|$ uit $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ en arg z = φ uit $a = |z| \cos\varphi$, $b = |z| \sin\varphi$ (dus ook: $\tan\varphi = \frac{b}{a}$) (VI.2).

Hier is $|w_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\tan\varphi_1 = \frac{1}{1} = 1$ dus $\varphi_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ of $= -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. Uit $1 = \sqrt{2}\cos\varphi_1$ blijkt: $\varphi_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (zie ook een tekening!). $|w_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\tan\varphi_2 = -1$ dus

$$\varphi_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ of } = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ; uit } 1 = \sqrt{2}\cos\varphi_2 \text{ blijkt:}$$

$$\varphi_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Dus is (zie VI.8):

1) Als $w = w_1 = 1 + i$:

$|z^3| = |z|^3 = |w_1| = \sqrt{2}$ dus $|z| = \sqrt[6]{2}$; arg $z^3 = 3$ arg $z =$ arg $w_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ dus arg $z = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ en we vinden 3 verschillende wortels, n.l. voor $k = 0,1,2$:

z_1 met $|z_1| = \sqrt[6]{2}$, arg $z_1 = \frac{\pi}{12}$.

z_2 met $|z_2| = \sqrt[6]{2}$, arg $z_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{4}\pi$.

z_3 met $|z_3| = \sqrt[6]{2}$, arg $z_3 = \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{17}{12}\pi$.

(ga na dat we voor $k = 3$ weer z_1 vinden !).

2) Als $w = w_2 = 1 - i$:

$|z| = \sqrt[6]{2}$, arg $z = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ dus we vinden

$$\begin{cases} z_4 \text{ met } |z_4| = \sqrt[6]{2}, \ \arg z_4 = -\frac{\pi}{12}. \\ z_5 \text{ met } |z_5| = \sqrt[6]{2}, \ \arg z_5 = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7}{12}\pi. \\ z_6 \text{ met } |z_6| = \sqrt[6]{2}, \ \arg z_6 = -\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{5}{4}\pi. \end{cases}$$

Het tekenen van de beeldpunten van de 6 wortels levert nu geen moeilijkheden op aangezien modulus en argument van alle wortels gegeven zijn (zie opm. 4).

Opm. 3. Ga na dat $\bar{z}_1 = z_4$, $\bar{z}_2 = z_6$, $\bar{z}_3 = z_5$; dat met elke wortel z ook $\bar{z}$ een wortel moet zijn volgt uit de laatste stelling op VI.7.

Opm. 4. Ga na dat de beeldpunten van alle wortels liggen op een cirkel met straal $\sqrt[6]{2}$, paarsgewijs gespiegeld t.o.v. de reële as (denk aan opm.3!), terwijl z_1, z_2, z_3 en z_4, z_5, z_6 twee gelijkzijdige driehoeken vormen.

Opm. 5. Een iets andere oplossing loopt als volgt: door kwadraatafsplitsen ontstaat $(z^3-1)^2+1 = 0$, $(z^3-1)^2 = -1 = e^{\pi i+2k\pi}$,
$z^3-1 = e^{\frac{\pi i}{2}+k\pi i}$, $z^3 = 1 + e^{\frac{\pi i}{2}+k\pi i}$, dus voor k = 0: $z^3 = 1 + e^{\frac{\pi i}{2}} =$ $= 1 + i$, voor k = 1: $z^3 = 1 + e^{\frac{3\pi i}{2}} = 1 - i$; zie nu verder bovenstaande oplossing.

95. De karakteristieke vergelijking is $t^2 + 2t + 2 = 0$, $t = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$; de algemene oplossing van de homogene vergelijking is dus (VI.14.§ 6):

$$\lambda e^{(-1+i)x} + \mu e^{(-1-i)x} \qquad (1)$$

(λ en μ zijn (eventueel complexe) getallen).

Vervolgens zoeken we één oplossing van de inhomogene vergelijking. In het rechterlid van de vergelijking komen twee termen, n.l. xe^x en $-x$, voor. Voor de term xe^x (= lineaire vorm maal e^x) proberen we iets van de vorm $(ax + b)e^x$ (weer lineaire vorm maal e^x; denk er om dat de lineaire vorm nu ook een constante kan bevatten!); voor de term $-x$ (lineaire vorm) proberen we iets van de vorm $cx + d$ (weer lineaire vorm, nu met constante; natuurlijk noemt U deze vorm niet $ax + b$, want de letters a en b zijn al gebruikt). We proberen dus

$y = (ax + b)e^x + cx + d$, $y' = (ax + a + b)e^x + c$, $y'' = (ax + 2a + b)e^x$.

Substitutie in de vergelijking geeft

$5axe^x + (4a + 5b)e^x + 2cx + 2c + 2d = xe^x - x$ dus $5a = 1$, $4a + 5b = 0$,

$2c = -1$, $2c + 2d = 0$ waaruit volgt $a = \frac{1}{5}$, $b = -\frac{4}{25}$, $c = -\frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{2}$,

zodat de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking in verband met (1) luidt:

$$y = \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}\right)e^x - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} + \lambda e^{(-1+i)x} + \mu e^{(-1-i)x} \tag{2}$$

(λ, μ (eventueel complexe) getallen).

Denk er om: U bent nog niet klaar! Gevraagd worden immers alle reële oplossingen. Het is nu niet voldoende in (2) λ en μ reëel te nemen (zie vraagstuk 92). Een nadere analyse leert (als in vraagstuk 92) dat slechts de termen uit (1) complexe waarden kunnen opleveren; we schrijven daarom (1) in de vorm

$$\lambda e^{-x} \cdot e^{ix} + \mu e^{-x} \cdot e^{-ix} =$$

$$= e^{-x}(\lambda \cos x + i\lambda \sin x + \mu \cos x - i\mu \sin x) =$$

$$= e^{-x}[(\lambda + \mu)\cos x + i(\lambda - \mu)\sin x]. \tag{3}$$

Door, als in vraagstuk 92, $\lambda + \mu = \alpha$ en $i(\lambda - \mu) = \beta$ te stellen en nu voor α en β slechts reële waarden toe te laten, krijgen we alle reële functies van de vorm (3).

Alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking zijn dus

$$y = \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}\right) e^x - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} + e^{-x}(\alpha \cos x + \beta \sin x)$$

waarin α en β reële getallen voorstellen.

96. We brengen onder één noemer:

$$\left|\frac{z\bar{z}+1}{z}\right| < 2\tfrac{1}{2} \text{ of } \frac{|z\bar{z}+1|}{|z|} < 2\tfrac{1}{2}.$$

Nu is $z\bar{z} = |z|^2$ (zie voor de gebruikte eigenschappen: VI.1.§ 1), $|z|^2 + 1$ is reëel en positief, dus schrijven we

$$\frac{|z|^2+1}{|z|} < 2\tfrac{1}{2}.$$

Dit is een gewone (reële) ongelijkheid met als onbekende $|z|$; oplossen levert:

$$\frac{2|z|^2 - 5|z| + 2}{2\,|z|} < 0 \text{ of } \frac{(|z|-2)(2|z|-1)}{|z|} < 0$$

waaruit (let op de noemer, dus $|z| \neq 0$!): $\frac{1}{2} < |z| < 2$. Dus: precies dié complexe getallen z voldoen waarvoor geldt $\frac{1}{2} < |z| < 2$; dit zijn de complexe getallen waarvan de beeldpunten in het complexe vlak liggen in de ring, begrensd door de cirkels die de oorsprong als middelpunt hebben en als stralen $\frac{1}{2}$ en 2 (maak zelf een tekening); de cirkels zelf doen niet mee.

Opm. Het is ook mogelijk direct $z = re^{i\varphi}$ (VI.5a.4) te schrijven; dan is $\bar{z} = re^{-i\varphi}$ en we krijgen dan:

$|re^{-i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}| < 2\frac{1}{2}$, $|e^{-i\varphi}|.|r + \frac{1}{r}| < \frac{5}{2}$ en dus $r + \frac{1}{r} < \frac{5}{2}$ (zie verder boven) aangezien $|e^{-i\varphi}| = 1$ (VI.4.§ 2) en $r + \frac{1}{r} > 0$.

97. a) We lossen eerst de homogene vergelijking

$$y''' - y'' + 2y = 0$$

op door substitutie van $y = e^{tx}$ (t constant). Dit levert:

$$(t^3 - t^2 + 2)e^{tx} = 0,$$

of, aangezien $e^{tx} \neq 0$:

$$t^3 - t^2 + 2 = 0, \text{ de karakteristieke vergelijking.}$$

$t^3 - t^2 + 2 = (t+1)(t^2 - 2t + 2) = 0$ heeft als oplossingen:
$t_1 = -1$, $t_{23} = 1 \pm i$, dus de homogene differentiaalvergelijking heeft als algemene oplossing:

$$y = \lambda e^{-x} + \rho e^{(1+i)x} + \sigma e^{(1-i)x}$$

waarbij λ, ρ en σ willekeurige (complexe) constante coëfficiënten zijn. De algemene reële oplossing kan verkregen worden door λ reëel, ρ en σ als elkaars complex geconjugeerde te kiezen. Deze oplossing krijgt dan de vorm

$$y = \lambda e^{-x} + \mu e^{x}\cos x + \nu e^{x}\sin x$$

(λ, μ, ν willekeurig, reëel, constant).

b) Als particuliere oplossing van de niet homogene vergelijking proberen we de vorm:

$$y = Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x$$

Coëfficiënten-overzicht:

	$e^{-x}\cos x$	$e^{-x}\sin x$
y	A	B
y'	$B - A$	$-A - B$
y''	$-2B$	$2A$
y'''	$2A + 2B$	$2B - 2A$
$y''' - y'' + 2y$	$4A + 4B$	$4B - 4A$

Dus $y''' - y'' + 2y = (4A + 4B)e^{-x}\cos x + (4B - 4A)e^{-x}\sin x$.
Het gevraagde rechterlid wordt verkregen, wanneer $4A + 4B = 1$, $4B - 4A = 0$, dus als $A = B = \frac{1}{8}$. Een particuliere oplossing van onze vergelijking is dus: $y = \frac{1}{8}e^{-x}(\cos x + \sin x)$ en de algemene reële oplossing luidt:

$$y = \lambda e^{-x} + e^{x}(\mu \cos x + \nu \sin x) + \frac{1}{8} e^{-x} (\cos x + \sin x)$$

$(\lambda, \mu, \nu$ constant, reëel).

98. $y = e^{tx}$ levert als karakteristieke vergelijking (zie de toelichting bij 97 a): $t^4 + t^2 + 1 = 0$.

Als vierkantsvergelijking in t^2 heeft deze vergelijking als oplossingen:

$$t^2 = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} i\sqrt{3} = e^{\pm 2/3\pi i(+2k\pi i)} \qquad (k = 0,1)$$

m.a.w.

$$t_1 = e^{1/3\pi i}, \qquad t_2 = e^{1/3\pi i + \pi i} = -e^{1/3\pi i},$$

$$t_3 = e^{-1/3\pi i}, \qquad t_4 = e^{-1/3\pi i + \pi i} = -e^{-1/3\pi i}.$$

In reëel en imaginair deel uitgeschreven:

$$t_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} i\sqrt{3}, \qquad t_2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i\sqrt{3},$$

$$t_3 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i\sqrt{3}, \qquad t_4 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} i\sqrt{3}.$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking luidt dus:

$$y = \lambda e^{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3})x} + \mu e^{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3})x} + \rho e^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3})x} + \rho e^{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3})x}$$

$(\lambda, \mu, \rho, \sigma$ constant, complex).

De algemene reële oplossing verkrijgt men door $\lambda = \bar{\rho}$ en $\mu = \bar{\sigma}$ te kiezen. Zij heeft de vorm:

$$y = e^{\frac{1}{2}x}(\alpha \cos\tfrac{1}{2}x\sqrt{3} + \beta \sin\tfrac{1}{2}x\sqrt{3}) + e^{-\frac{1}{2}x}(\gamma \cos\tfrac{1}{2}x\sqrt{3} + \delta \sin\tfrac{1}{2}x\sqrt{3})$$

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta$ constant, reëel).

<u>Opmerking</u>: Daar $t^4 + t^2 + 1 = (t^6 - 1)/(t^2 - 1)$ zijn de oplossingen van de karakteristieke vergelijking gelijk aan de oplossingen $\neq \pm 1$ van de binominaalvergelijking $t^6 = 1$. (vergelijk blz. VI.8).

99. a) De homogene differentiaalvergelijking laat zich door substitutie van $y = e^{tx}$ herleiden tot de karakteristieke vergelijking: $t^3 - t^2 = 0$ met als oplossingen $t_{1,2} = 0$ (dubbel), $t_3 = 1$.
De algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking is dus

$$y = (\lambda + \mu x).e^{0.x} + \nu e^{1.x} = \lambda + \mu x + \nu e^x.$$

b) Als particuliere oplossing van de niet homogene differentiaal-vergelijking moeten we proberen:

$$y = Ax^2 + Bx^3$$

omdat $\lambda + \mu x$ oplossing van de homogene vergelijking is en het rechterlid gelijk is aan $1.x + 0$, dus twee coëfficiënten ter bepaling vereist.
Dit levert: $y'' = 2A + 6Bx$, $y''' = 6B$, $y''' - y'' =$
$= -6Bx + (6B - 2A) = x$, wanneer $B = -\frac{1}{6}$, $A = -\frac{1}{2}$.
De particuliere oplossing is dus:
$y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$. De algemene oplossing van de niet homogene differentiaalvergelijking wordt hiermee

$$y = \lambda + \mu x - \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \nu e^x.$$

c) Tenslotte moeten we onze oplossing aan de drie bijvoorwaarden laten voldoen:

1°. $y(0) = \lambda + \nu = 0$
2°. $y'(0) = (\mu - x - \tfrac{1}{2}x^2 + \nu e^x)_{x=0} = \mu + \nu = 0$
3°. $y''(0) = (-1-x+\nu e^x)_{x=0} = -1+\nu = 0$

Derhalve: $\nu = 1$, $\mu = -1$, $\lambda = -1$ waarmee we als oplossing gevonden hebben:

$$y = -1 - x - \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + e^x.$$

100. a) Daar $|z_1| = |e^{i\varphi}| = 1$, tekenen we z_1 op de eenheidscirkel, argument gemeten in positieve zin van de positieve reële as af. $z_2 = ie^{i\varphi} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \varphi)}$ ligt ook op de eenheidscirkel, maar $\frac{\pi}{2}$ radialen verder dan z_1 . (vgl. VI § 2.3).

b) $\arg \dfrac{z_2+1}{z_1+1}$ bestaat, mits $\dfrac{z_2+1}{z_1+1}$ bestaat en niet nul is.(vgl. VI. § 1 opm.).

Dit wil zeggen:

1°. $z_1 + 1 \neq 0$, dus $z_1 \neq -1$, $\varphi \neq \pi$

2°. $z_2 + 1 \neq 0$, dus $z_2 \neq -1$, $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$.

Behoudens in genoemde uitzonderingsgevallen, geldt

$$\arg \frac{z_2+1}{z_1+1} = \arg(z_2+1) - \arg(z_1+1)$$

$z_2+1 = z_2-(-1)$ is de vrije vector van -1 naar z_2, z_1+1 die van -1 naar z_1. Daar in een cirkel een omtrekshoek gelijk is aan de helft van de opgespannen boog, is dus:

voor $-\pi < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (en dus $\varphi + \frac{\pi}{2} < \pi$): $A = \frac{\pi}{4}$.

voor $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ (en dus $\varphi + \frac{\pi}{2} > \pi$): $A = -\frac{3\pi}{4}$.

c) $z_1 + z_2 = e^{i\varphi}(1+i) = e^{i\varphi}.\sqrt{2}\, e^{\frac{1}{4}\pi i} = \sqrt{2}\, e^{i(\frac{\pi}{4} + \varphi)}$. Dus $\text{Re}(z_1 + z_2) = \sqrt{2}.\cos(\frac{\pi}{4} + \varphi)$. In het interval $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ vinden we hiervoor vrije extremen, als $\frac{\pi}{4} + \varphi = 0$ (maximum) en als $\frac{\pi}{4} + \varphi = \pi$ (minimum), waar de cosinus resp. gelijk is aan 1 en -1. Dus:

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{Re}(z_1 + z_2) = \sqrt{2} \text{ max.}$$
$$\varphi = \frac{3\pi}{4} \qquad \text{Re}(z_1 + z_2) = -\sqrt{2} \text{ min.}$$

Als functie van φ beschouwd, heeft $\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} + \varphi)$ ook nog een randmaximum, als $\varphi = \pi$. Dit bedraagt $\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -1$.

101. Van A naar B is $z = -i \log 2 + x$ $(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6})$.

Dus $e^{iz} = e^{i(-i \log 2 + x)} = e^{\log 2} . e^{ix} = 2\, e^{ix}$. Gevolg: e^{iz} heeft hier constante modulus 2, en argument toenemend van 0 tot $\frac{\pi}{6}$. De baan is dus de in positieve zin beschreven cirkel met straal 2 om het punt O, tussen de voerstralen $\varphi = 0$ en $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Van B naar C is $z = \frac{1}{6}\pi + iy$ $(-\log 2 \leqslant y \leqslant \log 2)$ m.a.w.

$$e^{iz} = e^{i(\frac{1}{6}\pi + iy)} = e^{\frac{1}{6}\pi i} . e^{-y} .$$

Hier is arg z constant ($= \frac{1}{6}\pi$), en neemt $|z|$ af van $e^{-(-\log 2)} = 2$ tot $e^{-(\log 2)} = \frac{1}{2}$. De baan is dus het rechte lijnstuk langs de voerstraal $\varphi = \frac{\pi}{6}$, beschreven vanaf $r = 2$ tot $r = \frac{1}{2}$ (poolcoördinaten).

Van C naar D is $z = x + i \log 2$ $(\frac{1}{6}\pi \geqslant x \geqslant 0)$ $e^{iz} = e^{i(x+i \log 2)} = e^{-\log 2} . e^{ix} = \frac{1}{2} e^{ix}$. De baan is weer een cirkelboog met straal $\frac{1}{2}$ om O negatief doorlopen van $\varphi = \frac{\pi}{6}$ tot $\varphi = 0$.

Van D naar A is $z = iy$ $(\log 2 \geqslant y \geqslant -\log 2)$ $e^{iz} = e^{i.iy} = e^{-y}$: Het stuk reële as van $e^{-\log 2} = \frac{1}{2}$ tot $e^{-(-\log 2)} = 2$.

102. We zoeken eerst de oplossingen van de homogene vergelijking

$$y'' + 4y = 0.$$

De bijbehorende karakteristieke vergelijking is $t^2 + 4 = 0$ met als wortels $t_1 = 2i$, $t_2 = -2i$. De algemene oplossing van de homogene vergelijking is $c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.

Het rechterlid van de inhomogene vergelijking is $\frac{1}{2} \sin 2x$. Het heeft geen zin A sin 2x als oplossing te proberen daar dit een oplossing van de homogene vergelijking is.

Probeer $y = x\,(A\cos 2x + B\sin 2x)$. Dan is $y'' + 4y = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x$.

Kies dus $A = -\frac{1}{8}$, $B = 0$.

Oplossing: $y = -\frac{1}{8}x\cos 2x + c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$.

103. Volgens VI § 2 is $|e^z| = e^x$ waarin x het reële deel van z is. De ongelijkheid gaat over in:

$$x + 1 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Hieruit volgt: $x \leqslant -1$ of $(x+1)^2 \leqslant x^2 + y^2$. We moeten dus de getallen z hebben met Re $z \leqslant -1$ en die met $y^2 \geqslant 2x+1$. Samen vormen deze het deel van het complexe vlak "buiten" de parabool met vergelijking $y^2 = 2x + 1$.

104. a) De karakteristieke vergelijking van de homogene differentiaalvergelijking is $t^3 - t^2 + t - 1 = 0$. Dat is $(t-1)(t^2 + 1) = 0$. De wortels zijn $t_1 = 1$, $t_2 = i$, $t_3 = -i$. Het heeft geen zin als bijzondere oplossing Ae^{ix} te proberen daar dit een oplossing van de homogene vergelijking is. Probeer Axe^{ix}. We vinden $A = \frac{i-1}{4}$.
Algemene oplossing: $y = \frac{i-1}{4}xe^{ix} + c_1e^x + c_2e^{ix} + c_3e^{-ix}$.

b) Daar het rechterlid niet reëel is, is het linkerlid ook niet reëel. Er zijn dus geen reële oplossingen.

105. Eerste oplossing:

Uit $z = x + i$ volgt $w = u + iv = \frac{2}{2z-i} = \frac{2}{2x+i} = \frac{4x-2i}{4x^2+1}$. We elimineren nu x uit $u = \frac{4x}{4x^2+1}$ en $v = \frac{-2}{4x^2+1}$ om de vergelijking van de baan van w te vinden.

We vinden achtereenvolgens:

$$4x^2+1=\frac{-2}{v}\ ;\quad -\frac{u}{v}=2x\ ;\quad \frac{u^2}{v^2}+1=4x^2+1\ ;\ \text{dus}\ \frac{u^2}{v^2}+1=\frac{-2}{v}$$

of $u^2+(v+1)^2=1$. Dit is de vergelijking van de cirkel met middelpunt $(0,-1)$ en straal 1. Als x van $-\infty$ tot $+\infty$ varieert doorloopt w deze cirkel in positieve zin van 0 tot 0. Voor geen enkele z is $w=0$. Dit punt behoort dus niet bij de "baan". $\mathrm{Im}\,w$ is extreem voor $\mathrm{Im}\,w=-2$, dat is als $z=0$. Dit is ook te zien aan de uitdrukking $v=\dfrac{-2}{4x^2+1}$.

Tweede oplossing:

Uit $z=x+i$, $w=\dfrac{2}{2z-i}$ volgt:

$$|w+i|=\left|\frac{1+2xi}{2x+i}\right|=\sqrt{\frac{1+4x^2}{4x^2+1}}=1,$$

d.w.z. w doorloopt een cirkel met straal 1 en middelpunt $-i$.

106. Als we t als constante opvatten, heeft de differentiaalvergelijking de vorm $f''-2f'+f=\sin t=$ "constant".
De karakteristieke vergelijking is $t^2-2t+1=0$ en dus is de algemene oplossing van de homogene vergelijking:
$(c_1+c_2x)e^x$ waarin we onder "constanten" verstaan: grootheden die niet van x afhangen. We zien zo een bijzondere oplossing nl. $f=\sin t$. De algemene oplossing is dus

$$f(x,t)=\{c_1(t)+xc_2(t)\}e^x+\sin t.$$

107. $w=e^z-e^{-z}$ en $z=\log 2+i.y$, y reëel.

$$w=u+iv=2e^{iy}-\tfrac{1}{2}e^{-iy}$$
$$=3/2.\cos y+i.5/2.\sin y.$$

Uit $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ volgt $(\frac{2}{3}u)^2 + (\frac{2}{5}v)^2 = 1$.

De "baan" van w is een ellips met halve assen $\frac{3}{2}$ en $\frac{5}{2}$.

108. $y'''' - y''' - y' + y = 2 \sin x$ heeft als bijzondere oplossing $y = \sin x$.

De karakteristieke vergelijking is $t^4 - t^3 - t + 1 = 0$ met oplossingen $t_1 = t_2 = 1$, $t_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$. De gezochte reële oplossingen zijn dus $y = (A + Bx)e^x + e^{-\frac{1}{2}x}(C \sin\frac{1}{2}x\sqrt{3} + D\cos\frac{1}{2}x\sqrt{3}) + \sin x$.

109. $u_n = \dfrac{n \log n}{n^4 - 4n^2 + 1}$; u_n is positief $(n > 1)$.

Nu is $\log n < n$; en $4n^2 < \frac{1}{2}n^4$ voor $n > 2$.

Dus $\quad u_n < \dfrac{n^2}{n^4 - \frac{1}{2}n^4} = \dfrac{2}{n^2}$ voor $n > 2$.

$v_n = \dfrac{1}{n^2}$ is de algemene term van een convergente reeks (zie VII.4).
Vanaf zeker rangnummer $(n=3)$ is $u_n < 2v_n$. Volgens de vergelijkingsstelling voor reeksen met positieve termen (zie VII.3) is dus ook de reeks $\Sigma\, u_n$ convergent.

Opm. Men kan ook als volgt te werk gaan:

$$u_n < \frac{n^2}{n^4 - 4n^2 + 1} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2}{n^2 - 4 + \frac{1}{n^2}} < \frac{2}{n^2} \quad \text{vanaf zeker rangnummer.}$$

(door $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2}{n^2 - 4 + \frac{1}{n^2}} = 1$ is de breuk vanaf zeker rangnummer < 2).

110. Zie voor de reeks ontwikkelingen: VII.20; VII.21 vb. 7.

We vervangen $4 \sin^2 \frac{1}{2}x$ door $2(1-\cos x)$. Dit is niet noodzakelijk, maar werkt sneller. De reeksontwikkeling voor $\sqrt{1+x^2}$ vinden we uit die van $(1+u)^m$ met $m = \frac{1}{2}$ en $u = x^2$.

We nemen **niet** meer termen mee dan nodig is. We krijgen:

$$L = \lim_{x\to o} \frac{(x^2 - \frac{1}{3}x^6 + \ldots) - 2(1 - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \ldots)}{(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots) - (1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \ldots)} =$$

$$\lim_{x\to o} \frac{\frac{1}{12}x^4 + \ldots}{\frac{1}{6}x^4 + \ldots} = \frac{1}{2}\,.$$

111. Zie VII § 1.

Opmerking: Vaak worden de volgende foute antwoorden gegeven:

1) Een reeks is convergent als hij een som heeft. Onzin! Wat is "som"?

2) Een reeks is convergent als de limiet van de "som" bestaat. Welke som? Men bedoelt: als de limiet van s_n bestaat, waarin s_n de som van de termen met rangnummer $\leq n$ voorstelt. Over de "som" van een reeks kan men pas praten als men al weet dat de reeks convergent is.

112. $\log \frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x)$

$$= (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots) + (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots)$$

$$= 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\,.$$

$$\log 2 = \log \frac{1+1/3}{1-1/3} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{3^{2n-1}}\,.$$

De rest na 2 termen vergelijken we met een meetkundige reeks:

$$2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{3^{2n-1}} < 2.\frac{1}{5} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}} = 2\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^3.8} = \frac{1}{540} < \frac{1}{500}\,.$$

Als benadering voor log 2 vinden we $2(\frac{1}{3} + \frac{1}{81}) \approx 0{,}69$.

113. De vraag naar convergentie of divergentie van de reeks, is de vraag naar het bestaan van de volgende limiet: $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \arcsin(1-\cos\frac{1}{n})$ (zie VII § 1). Helaas is deze limiet zo ingewikkeld dat men de vraag naar zijn bestaan niet direct kan beantwoorden. Men is daarom gedwongen convergentie of divergentie van de reeks te onderzoeken, met de criteria die in hoofdstuk VII behandeld worden. Allereerst moet men nu weten of de termen alle positief (eventueel alle negatief, zie opmerking 1) zijn, of dat zowel positieve als negatieve termen voorkomen. Nu is voor natuurlijke n, $0<\cos\frac{1}{n}<1$, $0<(1-\cos\frac{1}{n})<1$, $0<\arcsin(1-\cos\frac{1}{n})<\frac{\pi}{2}$. (zie definitie arcsin in I § 2 I).

De te onderzoeken reeks heeft dus uitsluitend positieve termen. Zie VII § 2. De criteria van Cauchy (blz.VII 5) en d'Alembert (blz.VII 6) zijn slecht te gebruiken, omdat de daarin voorkomende limieten lastig zijn. We zoeken nu een reeks, waarvan bekend is of hij convergeert of divergeert, en die zo is dat de vergelijkingsstelling (blz.VII 3) toepasbaar is. Wat we dus zoeken is:

òfwel een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ met positieve termen die convergeert en waarvoor $cv_n \geqslant \arcsin(1-\cos\frac{1}{n})$ is voor $n>N$, voor zekere N, (uiteraard $c>0$);

òfwel een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ met positieve termen die divergeert en waarvoor voor zekere natuurlijke M en $c>0$ geldt $cw_n \leqslant \arcsin(1-\cos\frac{1}{n})$ als $n\geqslant M$.

Lukt het zo'n reeks $\Sigma\, v_n$ dan wel zo'n reeks $\Sigma\, w_n$ te vinden, dan volgt uit de vergelijkingsstelling dat $\Sigma \arcsin(1-\cos\frac{1}{n})$ convergeert dan wel divergeert. Als vergelijkingsreeksen staan de standaardreeksen van blz. VII 4 ter beschikking. Nu volgt uit

$$1 = \lim_{y\downarrow 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\arcsin x}{x},$$ (y=sin x) (I § 4 D) dat een getal h bestaat zodat uit $0<x<h$ volgt $\frac{\arcsin x}{x}<2$, $\arcsin x<2x$.

Uit $\lim_{n\to\infty}(1-\cos\frac{1}{n}) = 0$ volgt dat er bij h een getal N_1 te vinden is zodat voor $n \geq N$, $0 < 1-\cos\frac{1}{n} < h$ is. Voor $n \geq N_1$ is dan $\arcsin(1-\cos\frac{1}{n}) <$ $< 2(1-\cos\frac{1}{n})$. Analoog volgt uit $\lim_{x\downarrow 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (I § 4 D), dat er een N_2 bestaat zodat voor $n \geq N_2$ $1-\cos\frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}$. Voor $n \geq N = \max(N_1,N_2)$ is nu

$$\arcsin(1-\cos\frac{1}{n}) < 2(1-\cos\frac{1}{n}) < \frac{2}{n^2}.$$

Omdat $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (blz.VII-4) convergeert en $\frac{2}{n^2} \geq \arcsin(1-\cos\frac{1}{n})$ convergeert de te onderzoeken reeks.

Opmerking 1. Heeft men een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ met louter negatieve termen, dan kan men de stellingen van VII § 2 toepassen op $\sum_{n=1}^{\infty}(-u_n)$. De reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty}(-u_n)$ zijn of beide convergent (met sommen S en -S) of beide divergent.

Bewijs:
$$\sum_{n=1}^{N}(-u_n) = -\sum_{n=1}^{N} u_n.$$

Opmerking 2. De vergelijkingsstelling geldt alleen voor reeksen met positieve termen. Uit Σw_n divergent en $Cw_n \geq u_n$ volgt niets voor Σu_n, evenmin uit Σv_n convergent en $cv_n \leq u_n$. De stelling is alleen goed als $c > 0$ is.

Opmerking 3. $1-\cos\frac{1}{n} = 2\sin^2\frac{1}{2n}$ leidt tot een analoge oplossing.

Opmerking 4. In onze oplossing wordt de reeks met termen $\arcsin[1-\cos\frac{1}{n}]$ via enkele tussenstappen vergeleken met de reeks $\Sigma\frac{1}{n^2}$. Dit kan men ook combineren en wel als volgt.

We willen constateren dat de termen van de twee reeksen "even snel tot 0 naderen", d.w.z. dat hun quotiënten een limiet $\neq 0$ hebben. De oplossing luidt:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\arcsin[1-\cos\frac{1}{n}] = \lim_{n\to\infty} n^2\,\frac{\arcsin[2\sin^2\frac{1}{2n}]}{2\sin^2\frac{1}{2n}}\,2\sin^2\frac{1}{2n} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin[2\sin^2\frac{1}{2n}]}{[2\sin^2\frac{1}{2n}]}\cdot\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2n}}{(\frac{1}{2n})}\right\}^2 = \frac{1}{2}.$$

Dus is voor zekere N en alle $n > N$:

$$n^2\arcsin[1-\cos\frac{1}{n}] < 1 \text{ dus } 0 < \arcsin[1-\cos\frac{1}{n}] < \frac{1}{n^2}.$$

114 a) Noemt men $e^z = \zeta$, dan blijkt dat men de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\zeta^n$ moet onderzoeken. (zie VII § 7). Bekijkt men $\Sigma\, n\,|\zeta|^n$ dan blijkt (verg. VII § 4)

- bijv. met d'Alembert (blz. VII.6) ($\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|\zeta|^{n+1}}{n|\zeta|^n} = |\zeta|$) of Cauchy (blz. VII.5) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|\zeta|^n} = |\zeta|$ dat deze reeks convergeert als $|\zeta| < 1$. Als $|\zeta| \geqslant 1$ divergeert de reeks want dan $n|\zeta|^n \to \infty$ als $n \to \infty$.

Op grond van de stelling en opmerking op blz. VII.26 volgt dat $\sum_{n=1}^{\infty} n\,\zeta^n$ convergent is als $|\zeta| < 1$, divergent als $|\zeta| \geqslant 1$. (Als $\lim u_n = 0$ is $\lim |u_n| = 0$). We vinden dus convergentie als $|\zeta| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} < 1$ (zie blz. VI.5) divergentie als $|\zeta| = e^{\operatorname{Re} z} \geqslant 1$. Dus convergentie indien $\operatorname{Re} z < 0$ divergentie als $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

b) Is z negatief reëel, dan vinden we de som van de reeks aldus:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{nz} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{nz}\right)' = \left(\frac{e^z}{1-e^z}\right)' = \frac{e^z}{(1-e^z)^2} .$$

Zie VII § 4 B. (accent: differentiëren naar z).

Een enigszins andere methode: $e^z = \zeta$ dan $0 < \zeta < 1$ en

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,\zeta^n = \zeta \sum_{n=1}^{\infty} n\,\zeta^{n-1} = \zeta\left(\sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n\right)' = \zeta\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)' = \frac{\zeta}{(1-\zeta)^2} .$$

(accent: differentiëren naar ζ).

115. Zie VII.2.

116. Zie aanwijzing.

117. We gebruiken de reeksontwikkelingen van VII.20 (voorbeelden: VII.22 e.v.).
<u>Bekijk eerst de noemer</u>: $x - \arctan x = x - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \ldots$ (voor $|x| < 1$).

<u>N.B.</u> De beperking $|x| < 1$ is geen bezwaar, aangezien toch $x \to 0$. De noemer begint met $\frac{1}{3}x^3$; ontwikkel nu de teller <u>minstens tot en met derde machten van x</u>; neem veiligheidshalve ook de eerstvolgende term na x^3 mee:

$$xe^x = x\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} \ldots \text{ (voor alle } x\text{)}$$

$$\sin(x+x^2) = \sin[x(1+x)] = x(1+x) - \frac{x^3(1+x)^3}{3!} \dots = x+x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{2} \dots$$

(voor alle x).

(termen met $x^5(1+x)^5$ en hoger geven slechts termen met hogere machten dan x^4).

Dus wordt de gevraagde limiet:

$$\lim_{x \to o} \frac{(x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} \dots) - (x + x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{2} \dots)}{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}} =$$

$$\lim_{x \to o} \frac{\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 \dots}{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \dots} = \lim_{x \to o} \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x \dots}{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}x^2 \dots} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2.$$

118. Stel $\frac{z+\bar{z}}{(z-\bar{z})^2} = w$; de reeks is dan $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)w^n$. We gaan absolute convergentie na m.b.v. het kenmerk van d'Alembert (VII.6):

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(n+2)w^{n+1}}{n(n+1)w^n}\right| = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{2}{n}) \, |w| = |w|.$$

En dus:

Voor $|w| < 1$: absolute convergentie, dus <u>convergentie</u> (zie VII.26). (1)

Voor $|w| > 1$: <u>divergentie</u>, immers: op den duur is

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$, dus $|u_{n+1}| > |u_n|$, dus de termen naderen niet tot nul (VII.2, stelling).

Voor $|w| = 1$: nader onderzoeken. Nu is $|u_n| = n(n+1)$, dus geldt <u>niet</u>

$\lim_{n \to \infty} |u_n| = 0$, dus <u>divergentie</u>.

I.v.m. (1) lossen we z op uit

$$\left|\frac{z+\bar{z}}{(z-\bar{z})^2}\right| < 1.$$

In het algemeen bestaan hiervoor 3 methoden:

1°. Substitutie van $z = re^{i\varphi}$.

2°. Substitutie van $z = x + iy$.

3°. Directe berekening zonder substitutie (zie bijv. VI.4, vb 6 t/m 9).

We gebruiken hier methode 2°:

$z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ dus

$$\left|\frac{2x}{(2iy)^2}\right| < 1 \;;\; \left|\frac{2x}{-4y^2}\right| < 1 \;;\; \frac{|x|}{2y^2} < 1 \;;\; \frac{|x| - 2y^2}{2y^2} < 0$$

dus $|x| < 2y^2$ en $\underline{y \neq 0} \Longrightarrow |x| < 2y^2$.

$x \geqslant 0$ geeft $y^2 > \frac{1}{2}x$.

$x < 0$ geeft $y^2 > -\frac{1}{2}x$.

Er is dus convergentie voor die complexe getallen z waarvan het beeldpunt valt in het buitengebied van de parabolen $y^2 = \frac{1}{2}x$ en $y^2 = -\frac{1}{2}x$, de rand <u>niet</u> meegeteld (maak zelf een tekening), en divergentie voor alle andere z.

119. Het bewijs verloopt analoog aan dat van de stelling op VII.12 :

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$ is convergent, dus $\lim_{n \to \infty} a_n p^n = 0$ (VII.2 stelling), dus vanaf zekere n (zeg voor $n > N$) geldt: $a_n p^n < 1$. Nu is voor $-p < x < p$ (of $|x| < p$):

$$|a_n x^n| = |a_n p^n| \cdot \left(\frac{|x|}{p}\right)^n < \left(\frac{|x|}{p}\right)^n \qquad \text{(voor } n > N\text{)}.$$

Aangezien $|x| < p$, is $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{p}\right)^n$ convergent (meetkundige reeks), dus is ook $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ convergent (vergelijkingsstelling, VII.3). Hieruit volgt: Voor $|x| < p$ is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absoluut convergent, dus convergent (VII.7.B).

120. Er geldt:

$$\sin(n\,\tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 \text{ als } n = 0,2,4,\ldots, \text{ dus } n \text{ even.} \\ \left.\begin{array}{l} 1 \text{ als } n = 1,5,9,\ldots \\ -1 \text{ als } n = 3,7,11,\ldots \end{array}\right\} \text{ dus } (-1)^k \text{ als } n = 2k+1 \\ \qquad (k = 0,1,2,\ldots). \end{cases}$$

Dus $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\,\frac{\pi}{2})}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\,\frac{\pi}{2}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \ldots$.

Nu is $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \left|\frac{(-1)^k}{2k+1}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} = 0$. Verder is

$|u_{k+1}| = \dfrac{1}{2(k+1)+1} = \dfrac{1}{2k+3} < \dfrac{1}{2k+1} = |u_k|$. De absolute waarden van de termen naderen dus monotoon tot nul, terwijl de reeks alternerend is; hij is dus convergent (VII.9, stelling).

Opmerking: In het geval dat de som van de reeks ook gevraagd wordt denken we aan standaardreeks 5) op blz. VII.20. We weten niet of we hier $x = 1$ mogen invullen! Gebruik echter opmerking c) op blz. VII.24. Noem de som van de reeks S. Dan is:

$$\left|S - (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| < \frac{1}{2k+3} \qquad \text{(a)}$$

$$\left|\arctan x - (x - \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1})\right| < \frac{x^{2k+3}}{2k+3} < \frac{1}{2k+3}. \qquad \text{(b)}$$

Door k voldoende groot te kiezen en x voldoende dicht bij 1, volgt uit (a) en (b) dat $|S - \arctan 1|$ willekeurig klein gemaakt kan worden. Maar $|S - \arctan 1|$ is een constante! Dan is dus blijkbaar $S - \arctan 1 = 0$ d.w.z. $S = \frac{\pi}{4}$.

121. Bekijk eerst de noemer; gebruik de reeksontwikkelingen op VII.14 en VII.20.

$$x(1-x)^{-1} = \frac{x}{1-x} = x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots) =$$

$$= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \ldots \qquad (|x| < 1).$$

(de beperking $|x| < 1$ is geen bezwaar, aangezien toch $x \to 0$).

Dus $e^x - \cos x - x(1-x)^{-1} =$

$$= (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots) - (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots) - (x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots) =$$

$$= -\frac{5}{6}x^3 - x^4 \ldots \qquad (|x| < 1).$$

De noemer begint met $-\frac{5}{6}x^3$; ontwikkel de teller minstens tot en met de derde machten van x:

$$(\sin hx)^2 = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \text{ (zie VI.21) } =$$

$$= \frac{1}{4}[(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \ldots) - (1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \ldots)]^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(2x + \frac{x^3}{3} \ldots)^2 = x^2(1 + \frac{x^2}{6} \ldots)^2 =$$

$$= x^2(1 + \frac{x^2}{3} \ldots) = x^2 + \frac{x^4}{3} \ldots \qquad \text{(alle } x).$$

Dus $\log(1+x) - \arctan x + \frac{1}{2}(\sin hx)^2 =$

$$= (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots) - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots) + \frac{1}{2}(x^2 + \frac{x^4}{3} \ldots) =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 \ldots \qquad (|x| < 1).$$

Dus de gevraagde limiet wordt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 \ldots}{-\frac{5}{6}x^3 - x^4 \ldots} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{12}x \ldots}{-\frac{5}{6} - x \ldots} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{5}{6}} = -\frac{4}{5}.$$

122. a) Stel $z + 2 = w$, dan staat er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{w^{2n} n(n+1)}$ (dus $w \neq 0$).

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{w^{2n} n(n+1)}{w^{2n+2}(n+1)(n+2)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|w|^2 (1+\frac{2}{n})} = \frac{1}{|w|^2} .$$

Voor $\frac{1}{|w|^2} < 1$, dus $|w| > 1$: absolute convergentie, dus convergentie (d'Alembert, VII.6).

Voor $\frac{1}{|w|^2} > 1$, dus $|w| < 1$ (voor $w = 0$ zijn de termen niet gedefinieerd): divergentie (vgl. vraagst.118).

Voor $\frac{1}{|w|^2} = 1$, dus $|w| = 1$: nader onderzoeken. Nu is

$|u_n| = \frac{1}{n(n+1)}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ is convergent wegens

$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$ (vergelijkingsstelling, VII.3); de reeks is dus absoluut convergent, dus convergent.

Er is dus convergentie voor $\frac{1}{|w|^2} \leqslant 1$ of $|w| \geqslant 1$ (het verboden punt $w = 0$ valt hier buiten). Uit $|w| \geqslant 1$ volgt $|z+2| \geqslant 1$; er is dus <u>convergentie</u> voor die complexe z die voldoen aan $|z+2| \geqslant 1$, en divergentie voor alle andere z.

b) De beeldpunten van de complexe getallen z die voldoen aan $|z+2| \geqslant 1$ liggen op of buiten de cirkel met middelpunt -2 en straal 1 (de rand doet dus mee), aangezien $|z+2| = |z-(-2)|$ voorstelt de afstand van z tot het punt -2. Maak zelf een tekening.

c) Voor $z = i-2$ of $z+2 = i$ komt er, met $i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] ;$$

voor de k^e partiële som geldt dus

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} [\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}] = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

en dus, als s de som van de reeks voorstelt:

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} (1 - \frac{1}{k+1}) = 1.$$

123. Stel $\frac{2}{5}(x + \frac{1}{x}) = y$, dan komt er

$$\sum_{n=1}^{\infty} n[\frac{2}{5}(x + \frac{1}{x})]^n = \sum_{n=1}^{\infty} ny^n.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)y^{n+1}}{ny^n}\right| = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) |y| = |y| ,$$

dus voor $|y| < 1$: absolute convergentie, dus <u>convergentie</u>;

voor $|y| > 1$: divergentie (vgl. vraagstuk 118);

voor $|y| = 1$: nader onderzoek leert dat nu $|u_n| = n$;

hier geldt <u>niet</u> $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$, dus <u>divergentie</u>.

$|y| < 1$ geeft $\left|\frac{2}{5}(x + \frac{1}{x})\right| < 1$ of $-\frac{5}{2} < x + \frac{1}{x} < \frac{5}{2}$.

$x + \frac{1}{x} < \frac{5}{2}$ geeft $\frac{(2x-1)(x-2)}{x} < 0$, dus $\frac{1}{2} < x < 2$ of $x < 0$ (a).

$x + \frac{1}{x} > \frac{5}{2}$ geeft $\frac{(2x+1)(x+2)}{x} > 0$, dus $x > 0$ of $-2 < x < \frac{1}{2}$ (b).

Combinatie van (a) en (b) geeft <u>$-2 < x < \frac{1}{2}$ of $\frac{1}{2} < x < 2$</u> (beknopter: $\frac{1}{2} < |x| < 2$); voor deze x is de reeks dus convergent, voor alle andere x divergent (voor x = 0 zijn de termen zelfs niet gedefiniëerd!).

124. Per definitie heet een reeks convergent met som S, als $\lim_{n\to\infty} s_n = S$, waarbij s_n de som van de eerste n termen der reeks is (VII § 1).

Hier vinden we:

$$s_n = (a_1 + a_2) - (a_2 + a_3) + \ldots + (-1)^n(a_n + a_{n+1}) = a_1 + (-1)^n a_{n+1}.$$

We zullen bewijzen dat $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a_1$, dus $S = a_1$. Immers $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, dus $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, aangezien $|0-|a_n|| = |0-a_n|$ (vgl.def. Wisk. I, I § 3 B). Verder geldt:

$$-|a_{n+1}| \leqslant (-1)^n a_{n+1} \leqslant |a_{n+1}|$$

waarin linker- en rechterlid tot nul naderen, en derhalve ook het middelste lid als limiet nul heeft (insluitstelling) $(n\to\infty)$. Hieruit volgt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_1 + \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n a_{n+1} = a_1 + 0 = a_1$.

<u>Opmerking</u>: Omdat over het teken van a_n niets gegeven is, mogen we <u>niet</u> concluderen, dat de reeks alternerend is!

125. a) De beschouwde reeks is een machtreeks met $z-\bar{z} = w$ als variabele.
Zij is absoluut convergent, als

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-\bar{z})^{2(n+1)}}{n+1}\right| \cdot \left|\frac{n}{(z-\bar{z})^{2n}}\right| = |z-\bar{z}|^2 < 1$$

en divergent als dezelfde limiet groter is dan 1. (d'Alembert).
Dus: $|z-\bar{z}| < 1$: absolute convergentie; $|z-\bar{z}| > 1$: divergentie.
Het geval $|z-\bar{z}| = 1$ onderzoeken we later.
Door $z = x+iy$ (x,y reëel) te stellen vinden we $\bar{z} = x-iy$, $|z-\bar{z}| = |2iy| = 2|y|$. Het absolute convergentiegebied is dus: $|y| < \frac{1}{2}$, dus de strook $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$ in het complexe z-vlak ($|\mathrm{Im}\, z| < \frac{1}{2}$). Het geval $|z-\bar{z}| = 1$ levert $y = \pm\frac{1}{2}$, $z - \bar{z} = \pm i$. Beide substituties geven de reeks

$$-\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$$

die a) alternerend is en b) termen heeft waarvan de absolute waarden monotoon tot nul naderen, dus convergentie.

Het convergentiegebied wordt dus tenslotte de strook $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$.

b) In het geval $|z-\bar{z}| < 1$ hebben we

$$\frac{(z-\bar{z})^{2n}}{n} = \frac{(2iy)^{2n}}{n} = (-1)^n \frac{(4y^2)^n}{n} \quad \text{met } |z-\bar{z}| = |2iy| < 1 \text{ dus } |4y^2| < 1$$

waarbij bovendien $4y^2$ reëel is. Derhalve is $S(z)$ de som van een standaardmachtreeks:

$$S(z) = -\log(1 + 4y^2) = -\log(1 + 4(\operatorname{Im} z)^2).$$

Omdat $0 \leqslant 4y^2 < 1$ volgt hieruit

$$-\log(1+1) < S(z) \leqslant -\log 1$$

$$\text{of} \quad -\log 2 < S(z) \leqslant 0.$$

Voor $z-\bar{z} = \pm i$ was de reeks $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots = S(\pm i)$.

Op grond van de stelling op blz. VII 10 is dus

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \leqslant S(\pm i) \leqslant -1 + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{5}{6} \leqslant S(\pm i) \leqslant -\frac{1}{2}.$$

Combineren we deze resultaten, dan vinden we in elk geval

$$-1 < S(z) \leqslant 0$$

omdat $\log 2 < 1$.

126. We gebruiken machtreeksontwikkeling:

De noemer (N):

a) $\log(1-\frac{x}{2}) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2 - \frac{1}{3}(\frac{x}{2})^3 - \ldots = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \ldots$

b) $\arcsin \frac{x}{2} = \int_0^{x/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^{x/2} (1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1.3}{2.4}t^4 + \ldots)dt =$

$$= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\frac{x^3}{2^3 3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{2^5 5} + \ldots .$$

Beide ontwikkelingen gelden voor $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, dus $|x| < 2$.

Samengevat: $N = -\frac{1}{8}x^2 + x^3(\ldots)$.

De teller (T) :

a) $(1 - \frac{x}{2})^{\pi} = 1 - \pi \cdot \frac{x}{2} + \frac{\pi(\pi-1)}{1.2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \ldots =$

$$= 1 - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2-\pi}{8}x^2 - \ldots \qquad \left|\frac{x}{2}\right| < 1$$

b) $-\cos x = -1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \ldots$

c) $x \operatorname{arc\,cos} x = x(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin} x) = \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \ldots \qquad |x| < 1$

Samengevat: $T = \frac{\pi^2-\pi}{8}x^2 + x^3(\ldots) \qquad |x| < 1$

Dus: $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\pi^2-\pi}{8}x^2 + x^3(\ldots)}{-\frac{1}{8}x^2 + x^3(\ldots)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\pi^2-\pi) + 8x(\ldots)}{-1 + 8x(\ldots)} = \pi - \pi^2$.

Opm. De arcsin-reeks is ook te verkrijgen met de reeksontwikkeling van Maclaurin:

$f(x) = \operatorname{arc\,sin} x$, $f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = x(1-x^2)^{-3/2}$,

$f'''(x) = (1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2}$.

Dus $\operatorname{arc\,sin} x = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots =$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \ldots .$$

127. De algemene term van de reeks luidt

$$1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}} .$$

Deze is dus positief. We gebruiken dus de vergelijkingsstelling, bedenkend dat $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Hier: $\lim\limits_{n \to \infty} 2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2\sqrt{n}}}{(\frac{1}{2\sqrt{n}})^2} = 2$, dus $\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2\sqrt{n}}}{(\frac{1}{2\sqrt{n}})^2} > 1$ vanaf zekere n,

of: Voor alle voldoend grote n is $2 \sin^2 \frac{1}{2\sqrt{n}} > 1(\frac{1}{2\sqrt{n}})^2 = \frac{1}{4n}$.

Anderzijds is $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent, dus volgens de vergelijkingsstelling

onze reeks eveneens.

128. De te beschouwen reeks is een machtreeks, waarop we het criterium van d'Alembert kunnen toepassen (denk aan de absolute waarden):

Absolute convergentie, als $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}x}{a_n} \right| =$

$= \frac{|\frac{1}{2}x|}{|\frac{1}{2}|} = |x| < 1$.

Divergentie, als dezelfde limiet groter is dan 1, dus $|x| > 1$. In het geval $|x| = 1$ zien we dat de limiet van de **absolute** waarde van de algemene term: $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n x^n| = \lim\limits_{n \to \infty} |a_n|.1 = \frac{1}{2}$.

Hier kan dus nooit convergentie optreden, omdat $\lim\limits_{n \to \infty} a_n x^n \neq 0$.

Resumerend vinden we dus convergentie als $-1 < x < 1$ en divergentie als $x \geqslant 1$ en als $x \leqslant -1$.

129. We bepalen met standaardreeksen de reeksontwikkeling van

$$f(x) = (1-x) \{\log(1+x) - \sin x\}.$$

a) $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(-x) + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-x)^2 + \frac{1}{3!}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-x)^3 + \ldots$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \ldots \qquad (|x| < 1)$$

b) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ $\quad (|x|<1)$

c) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$

Dus $f(x) = (1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots)(-\frac{x^2}{2} + x^3(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}) + \dots)$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})x^3 + x^4(\dots), \qquad (|x| < 1)$$

Bedenken we, dat de Maclaurin ontwikkeling van f(x) luidt:

$$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + x^2\,\frac{f''(0)}{2!} + x^3\frac{f'''(0)}{3!} + \dots$$

dan moeten de coëfficiënten in beide ontwikkelingen overeenstemmen.

Dus: $\frac{1}{3!}\,f'''(0) = \frac{1}{4}$ of $f'''(0) = \frac{3}{2}$.

130. De reeks heeft uitsluitend positieve termen. We passen dus de vergelijkingsstelling toe.

Omdat $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$ vinden we

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^p} \cdot \frac{n^p}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

dus $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^p} \Big/ n^{-p-\frac{1}{2}} = 1$. $\quad$ *)

We merken op, dat $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p-\frac{1}{2}}$ convergeert als $p > \frac{1}{2}$, en divergeert als $p \leqslant \frac{1}{2}$. Dit zal waarschijnlijk dus ook voor onze reeks gelden:

a) $p > \frac{1}{2}$

Volgens *) is voor alle voldoend grote n:

$$\frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^p} < 2 \cdot n^{-p-\frac{1}{2}}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p-\frac{1}{2}}$ was convergent. Onze reeks dus ook.

b) $p \leqslant \frac{1}{2}$

Volgens *) is voor alle voldoend grote n:

$$\frac{\arc\tan\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^p} > \tfrac{1}{2}\cdot n^{-p-\frac{1}{2}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p-\frac{1}{2}}$ was divergent. Onze reeks dus ook.

131. De beschouwde reeks is een machtreeks in $w = e^{\frac{z-1}{z-3}}$. Volgens d'Alembert hebben we dus absolute convergentie, als

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{w^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{w^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|w|\,\frac{n^2}{(n+1)^2} = |w| < 1$$

en divergentie, als dezelfde limiet $|w| > 1$.

In het geval $|w| = 1$ geldt voor de algemene term:

$\left|\frac{w^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$, dus is de reeks absoluut en a **fortiori** gewoon convergent, omdat $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$ convergeert. Het convergentiegebied, uitgedrukt in w, is dus: $|w| \leqslant 1$ m.a.w. $\left|e^{\frac{z-1}{z-3}}\right| \leqslant 1$. Om hiervan een indruk te krijgen merken we op dat voor reële p en q geldt $|e^{p+iq}| = |e^p|.|e^{iq}| = e^p.1 = e^p$. (Wisk.I.VI blz.5).

In ons geval: $\left|e^{\frac{z-1}{z-3}}\right| = e^{\mathrm{Re}\,\frac{z-1}{z-3}} \leqslant 1$ als $\mathrm{Re}\,\frac{z-1}{z-3} \leqslant 0$.

Stellen we $z = x + iy$, dan is

$$\mathrm{Re}\,\frac{z-1}{z-3} = \mathrm{Re}\,\frac{(x-1)+iy}{(x-3)+iy} = \mathrm{Re}\,\frac{[(x-1)+iy][(x-3)-iy]}{(x-3)^2+y^2} = \frac{(x-1)(x-3)+y^2}{(x-3)^2+y^2} =$$

$$= \frac{x^2-4x+3+y^2}{(x-3)^2+y^2} \leqslant 0, \text{ als } \frac{(x-2)^2-1+y^2}{(x-3)^2+y^2} \leqslant 0$$

dus: $(x-2)^2 + y^2 \leqslant 1$ met $(x,y) \neq (3,0)$.

Het convergentiegebied is dus een cirkelschijf in het z-vlak, middelpunt 2, straal 1, inclusief rand, behalve het punt 3.

132. Noem 2 sin x = y. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}$ is absoluut convergent voor $|y| < 1$ met som $-\log(1-y)$...(zie VII.14). Voor $|y| > 1$ is de reeks divergent (d'Alembert). Voor y = 1 is het de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ die divergent is en voor y = -1 is het de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ die convergent is (VII.9.vb.1).
Samenvattend: De reeks is convergent als

$$-1 \leqslant 2\sin x < 1, \text{ dus als}$$

$$0 \leqslant x < \frac{\pi}{6} \quad \text{of} \quad \frac{5\pi}{6} < x \leqslant \frac{7\pi}{6} \quad \text{of} \quad \frac{11\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2\pi .$$

Opmerking: De som van de reeks is $-\log(1-2\sin x)$ voor bovengenoemde waarden van x.

133. We passen reeksontwikkelingen toe:
Voor alle α is:

$$(1+t)^{\alpha} = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}t^3 + \dots \qquad \text{voor } |t| < 1,$$

$$e^{\alpha^2 t} = 1 + \alpha^2 t + \frac{\alpha^4 t^2}{2} + \frac{\alpha^6 t^3}{6} + \dots \qquad \text{voor alle } t,$$

(zie VII.20, 6) en 1)). Verder is:

$$\log(1+t) - \sin t = -\frac{t^2}{2} + \dots \qquad \text{voor } |t| < 1.$$

De gevraagde limiet bestaat als in de reeksontwikkeling van de teller de termen met t^0 en t^1 ontbreken, dat is als $\alpha = \alpha^2$, d.w.z. $\alpha = 0$ of $\alpha = 1$.

Als $\alpha = 0$ staat er $\lim\limits_{t \to 0} 0 = 0$.

Als $\alpha = 1$ is $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{(1+t)-e^t}{\log(1+t)-\sin t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{-\frac{t^2}{2} + t^3(\ldots)}{-\frac{t^2}{2} + t^3(\ldots)} = 1.$

134. Het gaat hier om een reeks met positieve termen. We passen het criterium van d'Alembert toe:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+1}(n+1)^{-n-1}(n+1)!}{3^n \cdot n^{-n} \cdot \quad n!} = \lim_{n \to \infty} 3(1+\frac{1}{n})^{-n} = \frac{3}{e} > 1.$$

De reeks is dus divergent.

135. a) Voor $n \geqslant 2$ is $u_n = s_n - s_{n-1} = \frac{1}{n} - \log n + \log n-1 = \frac{1}{n} + \log(1-\frac{1}{n})$.

b) Voor $|x| < 1$ geldt:

$$x + \log(1-x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots \text{ en dus is}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+\log(1-x)}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$. Met $x = \frac{1}{n}$ volgt het gestelde.

c) Vanaf zeker rangnummer N_0 geldt volgens b:

$0 < (-u_n) < \frac{1}{n^2}$ en dus is de reeks Σu_n convergent (verg.stelling).

d) De vraag luidt: bestaat $\lim s_n$? Anders gezegd (def.conv.):

Convergeert Σu_n ? Antwoord: Ja (volgens c).

136. We gaan eerst na voor welke waarden van x de reeks absoluut convergent is. Gebruik hiertoe d'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)}{(2n+1)}\cdot\frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}}\cdot\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\right| = 1.x^2.0 = 0.$$

De reeks is absoluut convergent en dus convergent voor alle x.

We noemen de som S(x). Volgens VII § 4 B (stelling) is:

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(2n+1)x^{2n} = \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}x^{2n+1}\right\}' =$$

$$= \left\{-x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right\}' = \{-x\cos x\}' =$$

$$= -\cos x + x\sin x.$$

Dus:

$$S(x) = x^2\sin x - x\cos x.$$

137. Voor alle z geldt $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots$.

Als $z = e^x-1$ is $z = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ voor alle x.

We vinden dus $\sin(e^x-1) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{24}x^4 + \dots$ voor alle x.

Dit kunnen we ook rechtstreeks afleiden m.b.v. de reeks van Maclaurin:

$$\sin(e^x-1) = f(x) = f(0) + x\,f'(0) + \frac{x^2}{2!}f'(0) + \dots$$

$$= 0 + x + \frac{x^2}{2!} + 0.\frac{x^3}{3!} - 5.\frac{x^4}{4!} + \dots .$$

Met behulp van de reeksontwikkeling van de arctan en log(1+x) vinden we nu

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(x^3-\frac{x^9}{3}+\dots)-(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\dots)+(x+\frac{x^2}{2}-\frac{5x^4}{24}+\dots)}{x^4}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^4 =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{11}{24}x^4+x^5(\dots)}{x^4}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^4 = -\frac{11}{24}\cdot 1 = -\frac{11}{24}.$$

138. We gebruiken de reeksontwikkelingen van VII.20:

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + \dots .$$

$$\frac{9+3x}{9+x^2} = (1 + \frac{1}{3}x).(1+\frac{x^2}{9})^{-1} = (1 + \frac{1}{3}x)(1-\frac{x^2}{9}+\dots) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{27}x^3 + \dots .$$

We vinden:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{8}{81}x^3 + x^4(\dots)}{\frac{1}{6}x^3 + x^5(\dots)} = \frac{48}{81} = \frac{16}{27} .$$

139. Het bewijs staat op blz. VIII.2.

140. I. Een normaal van de raakvlakken is (3,4,0). De raakpunten P_1 en P_2 vinden we door de bol $(\underline{x},\underline{x}) = 100$ te snijden met de rechte $\underline{x} = \lambda(3,4,0)$ door het middelpunt van de bol.

$9\lambda^2 + 16\lambda^2 = 100$; $\lambda_{1,2} = \pm 2$; P_1: (6,8,0); P_2: (-6,-8,0).

Door toepassing van een stelling van blz. VIII.14 vinden we voor de vergelijkingen van de raakvlakken: $6x + 8y = 100$ en $-6x - 8y = = 100$ of $3x + 4y = 50$ en $3x + 4y = -50$.

II. Een vlak met (3,4,0) als normaal heeft de vergelijking $3x + 4y + s = = 0$ (blz. VIII.7). Om de gevraagde raakvlakken te vinden moet men dus s zo bepalen dat de afstand van het vlak tot het middelpunt (0,0,0) van de bol r (= 10) is. Volgens blz. VIII.7 moet dus

$$\frac{|s|}{\sqrt{9+16}} = 10; \quad s = \pm 50.$$

141. De bepaling van de vergelijking van een kegel staat beschreven in VIII. § 6.A.

Een parametervoorstelling van de richtkromme is $(\lambda, \lambda + 1, \lambda^2 + 1)$.

Voor elke waarde van λ is $\underline{x} = (1,1,1) + \mu(\lambda-1, \lambda, \lambda^2)$ dus een mantellijn (beschrijvende) van de kegel.

Deze kunnen we schrijven als $x = 1 + \mu\lambda - \mu$ (1)

$y = 1 + \mu\lambda$ (2)

$z = 1 + \mu\lambda^2$ (3)

Eliminatie van λ en μ uit (1), (2) en (3) levert ons de vergelijking van de kegel. Uit (3) en (2) volgt: $(z-1)\mu = \mu^2\lambda^2 = (y-1)^2$; uit (2) en (1) $y-x = \mu$; dus $(z-1)(y-x) = (y-1)^2$, of $y^2 + xz - yz - x - y + 1 = 0$ is de gevraagde vergelijking.

142. Een willekeurig punt P op de y-as is P(o,a,o) (a willekeurig reëel); een willekeurig punt Q op de rechte $y = 0$, $z = 2$ is Q (b,0,2) (b willekeurig reëel). Een parametervoorstelling van de rechte PQ is

$$\underline{x} = (o,a,o) + \lambda(b,-a,2)$$

(parameter λ). Deze rechte, met richtingsvector $\underline{p} = (b,-a,2)$, is evenwijdig aan het vlak α: $x + y = 0$ als $\underline{p} /\!/ \alpha$, d.w.z. als $\underline{p} \perp (1,1,0)$ ((1,1,0) is nl. de normaalvector van α, zie VIII.7), dus als $b.1 - a.1 + 2.0 = 0$ of wel $a = b$.

Alle rechten die voldoen aan de gestelde eisen kunnen we dus geven door

$$\underline{x} = (o,a,o) + \lambda(a,-a,2)$$

waarin a willekeurig reëel (vast gekozen voor elke rechte) en λ een (reële) parameter is.

Voor een punt (x,y,z) van zo'n rechte geldt dus

$$\begin{cases} x = \lambda a \\ y = a - \lambda a \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

en eliminatie van $\lambda(\lambda = \frac{1}{2}z)$ geeft

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}za \\ y = a - \frac{1}{2}za \end{cases} .$$

Dit stelt voor de vergelijking van zo'n rechte (gegeven als snijlijn van twee vlakken).

Door eliminatie van a vinden we nu de vergelijking van de gevraagde meetkundige plaats, die beschreven wordt door de rechten (1) als we a laten variëren:

$$\frac{2x}{z} = \frac{y}{1-\frac{1}{2}z}$$

of $2x - xz - yz = 0$.

143. Een willekeurig punt van l resp. m is $Q(\lambda,0,1)$ resp. $R(0,\mu,-1)$, dus l en m hebben parametervoorstellingen:

$\underline{x} = (0,0,1) + \lambda(1,0,0)$ resp. $\underline{x} = (0,0,-1) + \mu(0,1,0)$. Is $P = (x,y,z)$, dan is $\underline{PQ} = (\lambda-x, -y, 1-z)$, dus $\underline{PQ} \perp l$ (en PQ is de afstand van P tot l) als $\lambda - x = 0 \Rightarrow \lambda = x$, dus dan is $Q = (x,0,1)$ en $PQ = \sqrt{y^2+(1-z)^2}$ (vgl. VIII. 3. vb.4).

Evenzo is $\underline{PR} = (-x, \mu - y, -1-z)$; $\underline{PR} \perp m$ (en PR is de afstand van P tot m) als $\mu - y = 0 \Rightarrow \mu = y$, dus dan is $R = (0,y,-1)$ en $PR = \sqrt{x^2+(1+z)^2}$.

Als $PQ = PR$, dan geldt dus

$$y^2+(1-z)^2 = x^2+(1+z)^2,$$

of $x^2 - y^2 + 4z = 0$, hetgeen de vergelijking van de gevraagde meetkundige plaats, een <u>hyperbolische paraboloïde</u> (<u>zadelvlak</u>) is (VIII.17). Maak zelf een schets; de doorsneden met de coördinaatvlakken zijn $x^2 + 4z = 0$ (parabool), $y^2 - 4z = 0$ (parabool) en $x^2 - y^2 = 0$ (of $x+y = 0$ en $x-y = 0$, 2 snijdende rechten).

144. Willekeurige punten op l resp. m zijn A(o,a,1) resp. B(1,0,b) (a,b willekeurig). De rechte door A en B heeft parametervoorstelling $\underline{x} = (o,a,1) + \lambda(1,-a,b-1)$ (parameter λ) of

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \lambda \\ y = a - \lambda a \\ z = 1 + \lambda(b-1) \end{cases}$$

Deze rechte moet n snijden, d.w.z. voor zekere λ_s moet gelden

$$\begin{cases} a - \lambda_s a = 1 \\ 1 + \lambda_s(b-1) = 0. \end{cases}$$

Eliminatie van λ_s levert $\frac{a-1}{a} = \frac{1}{1-b}$ of $b(1-a) = 1$. (2)

Alle punten (x,y,z) van de gevraagde m.p. voldoen dus aan (1), waarbij ook voldaan is aan (2). Eliminatie van λ, a en b levert uit (1):

$$y = a - xa \Longrightarrow a = \frac{y}{1-x}$$

$$z = 1 + x(b-1) \Longrightarrow b = \frac{x+z-1}{x}$$

en dit in (2) levert

$$\frac{x+z-1}{x} \cdot \frac{1-x-y}{1-x} = 1$$

of $\underline{xy + xz + yz - x - y - z + 1 = 0}$, de vgl. van het gevraagde oppervlak.

145. Noem het gevraagde vlak α, en de normaalvector van α : $\underline{n}$. Dan is $\underline{n} \perp \underline{p}$, dus $\underline{n}$ ligt in het vlak β, opgespannen door $\underline{a}$ en $\underline{b}$ (zie def. vectorproduct VIII.22). Evenzo is $\underline{n} \perp \underline{q}$, dus $\underline{n}$ ligt in het vlak γ, opgespannen door $\underline{b}$ en $\underline{c}$.

$\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ zijn onafhankelijk, dus β en γ hebben een snijlijn, waarvan de richtingsvector blijkbaar juist $\underline{b}$ is. $\underline{n}$ valt langs deze snijlijn en is dus een veelvoud van $\underline{b}$, zodat we de vergelijking van α kunnen schrijven als

$$(\underline{b},\underline{x}) = 0$$

(zie VIII.4), of, als $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$ en $\underline{x} = (x,y,z)$:

$$\underline{b_1x + b_2y + b_3z = 0.}$$

146. a) De as van wenteling is de lijn l: $\underline{x} = \mu(1,-1,0)$.

Het vlak door een willekeurig punt Q $(x_0, y_0, 0)$ van K loodrecht op l is dus bepaald door de vergelijkingen

$$\begin{cases} 1.x - 1.y + 0.z = 1.x_0 - 1.y_0 + 0.z_0 \\ 2x_0y_0 = 1 \end{cases},$$

uitgewerkt

(1) $\quad x - y = x_0 - y_0$

(2) $\quad 2x_0y_0 = 1$

De bol door Q met middelpunt O (O ligt namelijk op l) heeft als vergelijking

(3) $\quad x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2$

samen met (2).

De vergelijking van S wordt verkregen door eliminatie van x_0 en y_0 uit (1), (2) en (3). Omdat nu geldt

$$(x_0 - y_0)^2 + 2x_0y_0 = x_0^2 + y_0^2$$

vinden we

$$(x-y)^2 + 1 = x^2 + y^2 + z^2,$$

in vereenvoudigde vorm:

(4) $z^2 + 2xy - 1 = 0.$

b) We schrijven (4) in de volgende gedaante

$$2xy = 1 - z^2$$

waardoor de stelsels rechten op S als volgt luiden: (vgl.VIII § 5)

$$\text{I:} \begin{cases} \alpha x = 1 - z \\ 2y = \alpha(1+z) \end{cases} \qquad \text{II:} \begin{cases} 2x = \beta(1+z) \\ \beta y = 1 - z \end{cases}$$

Opdat P(0,0,1) op een rechte uit I resp. II ligt, moet, zoals blijkt uit substitutie, resp. $\alpha = 0$ en $\beta = 0$ gelden.

De gevraagde rechten zijn dus

$$\left.\begin{array}{r} 1 - z = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right\} \quad \text{of} \quad \underline{x} = (0,0,1) + \rho(1,0,0)$$

en

$$\left.\begin{array}{r} 1 - z = 0 \\ 2x = 0 \end{array}\right\} \quad \text{of} \quad \underline{x} = (0,0,1) + \sigma(0,1,0)$$

147. Het vlak door een willekeurig punt P (x_o, y_o, z_o) van k loodrecht op l heeft de vergelijking

$$0.x + 1.y + 1.z = 0.x_o + 1.y_o + 1.z_o,$$

uitgewerkt

(1) $y + z = y_o + z_o$

waarbij P op k ligt, dus

(2) $x_o^2 - 2z_o^2 = 1$

(3) $y_o = z_o$

De bol met middelpunt O (O ligt op de as van de wenteling!) door P heeft als vergelijking

(4) $x^2 + y^2 + z^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2$

samen met (2) en (3). Eliminatie van x_o, y_o en z_o uit (1), (2), (3) en (4) geeft de vergelijking van S:

Uit (2) en (4) volgt met behulp van (3):

(5) $$x^2+ y^2+ z^2- 1 = 4z_o^2$$

(1) en (3) leiden tot

(6) $$y + z = 2z_o$$

(5) en (6) tenslotte leveren:

$$x^2+ y^2+ z^2- 1 = (y+z)^2$$

zodat de vergelijking van S luidt:

$$x^2- 2yz = 1.$$

148. Door $y = \lambda$ te stellen vinden we de algemene gedaante van een punt P van l (zgn. parametervoorstelling)

(1) $$P \text{ op } l \Leftrightarrow P = (0,\lambda,\lambda).$$

Analoog vinden we voor een willekeurig punt Q van k, door $x = \mu$ te stellen:

(2) $$Q \text{ op } k \Leftrightarrow Q = (\mu,-\mu^2,0).$$

De parametervoorstelling van de lijn PQ is nu:

(3) $$\underline{x} = (0,\lambda,\lambda) + \alpha(\mu,-\mu^2-\lambda, -\lambda)$$

waarbij α de parameter langs PQ is. Opdat PQ evenwijdig is met het vlak $y = 1$, dus loodrecht staat op de vector (0,1,0), moet

$$\mu.0 + (-\mu^2-\lambda).1 + (-\lambda).0 = 0,$$

uitgewerkt

(4) $$\lambda = -\mu^2.$$

De lijn PQ krijgt nu door (4) als parametervoorstelling:

(5) $$\underline{x} = (0,-\mu^2,-\mu^2) + \alpha(\mu,0,\mu^2).$$

Door α te variëren beschrijft men de lijn PQ, en door variatie van μ verkrijgt men alle in aanmerking komende lijnen op het gevraagde oppervlak. Eliminatie van α en μ uit (5) levert de vergelijking van S.

Uitgewerkt:

$$(5) \qquad \begin{cases} x = \alpha\mu \\ y = -\mu^2 \\ z = -\mu^2 + \alpha\mu^2 \end{cases}$$

Hieruit leiden we af

$$z - y = \mu x = -\alpha y,$$

dus $\qquad \mu = \dfrac{z-y}{x}\ ,\ \alpha = \dfrac{y-z}{y} \qquad (xy \neq 0) \qquad (*)$

waaruit volgt: $\qquad x = -\dfrac{(y-z)^2}{xy}$

of: $\qquad x^2y + (y-z)^2 = 0.$

Apart dienen we te onderzoeken: (vgl.(*))

a) $x = 0$. In dit vlak ligt alleen de rechte $\underline{x} = \nu(0,0,1)$ die op het oppervlak kan liggen (omdat de oorsprong op beide krommen voorkomt).

b) $y = 0$. Dit vlak behoort geheel tot S, omdat O op **k** en l ligt en dus alle lijnen door O evenwijdig aan het vlak $y = 1$ tot S gerekend moeten worden.

Samenvattend mogen we zeggen, dat S uit twee stukken bestaat, nl.

$$y = 0$$

$$\text{en } x^2y + (y-z)^2 = 0.$$

149. De loodlijn uit P op het vlak heeft de parametervoorstelling

$$\underline{x} = (x_o, y_o, z_o) + \lambda(a,b,c).$$

Voor het snijpunt Q bepalen we λ_Q uit:

$$a(x_o + \lambda_Q a) + b(y_o + \lambda_Q b) + c(z_o + \lambda_Q c) = d.$$

De gevraagde afstand is $|\lambda_Q.(a,b,c)| = |\lambda_Q| . \sqrt{a^2+b^2+c^2} =$

$$= \frac{|ax_o + by_o + cz_o - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} .$$

150. We kunnen deze vraag beantwoorden met de methode van VIII § 6 C. Het daar genoemde "handige" middelpunt is (1,1,1). We zien dan dat de oplossing zonder enig rekenwerk als volgt kan worden gegeven: De kromme is blijkbaar een grote cirkel van de bol

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Deze wordt gewenteld om een lijn door het middelpunt (1,1,1). Het oppervlak dat ontstaat is genoemde bol.

151. Oplossing volgens VIII § 6 C:

Laat $P(\sqrt{1-2\lambda^2}, \lambda, \lambda)$ een punt van de kromme zijn. We <u>moeten</u> nu onthouden: $|\lambda| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$. (1)

P wentelt in vlak : $z = \lambda$. (2)

Een bol door P, met middelpunt op de as is bijv.

$$x^2 + (y-2) + z^2 = 5 - 4\lambda . \qquad (3)$$

Door elimineren uit (2) en (3) volgt de vergelijking

$$x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 1 \qquad (4)$$

(waaruit we overigens zien dat (0,2,-2) een "handiger" middelpunt was geweest!).

Als we nu (1) niet zijn vergeten dan zien we dat <u>niet</u> de door (4) gegeven bol het gevraagde antwoord is maar de schil van deze bol bepaald door de vgl. (1) d.w.z. $|z| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Kunnen we voorkomen dat we de fout maken de hele bol als antwoord te geven? Ja, door niet te vergeten dat: <u>elimineren vaak meer geeft dan gevraagd wordt</u>. Verder maken we de fout niet als we een plaatje tekenen

en tevens de gegeven vergelijkingen met verstand bekijken:
We zien: de kromme ligt in het vlak $y = z$ en op het oppervlak $x^2 = 1 - 2y^2$. Maar dan ook op het oppervlak $x^2 = 1 - y^2 - z^2$ (immers $y = z$). De kromme is dus de doorsnede van vlak $y = z$ met de eenheidsbol, dus een cirkel. Deze cirkel wordt om een lijn gewenteld. Resultaat: een stuk van een bol.

Als we eerst het plaatje tekenen dan zien we zo de kortste oplossing:

De gegeven kromme is een cirkel (zie boven). Deze ligt op de bol $x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 1$ en wordt gewenteld om een lijn door middelpunt van deze bol. De omwentelingsfiguur is een schil van deze bol.

152. We berekenen eerst de onbepaalde integraal: $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^4}\,dx$.

I. Stel $\sqrt{1-x^2} = t$ dan is $x^2 = 1-t^2$; $xdx = -tdt$ en de integraal gaat over in $\int \frac{-t^2dt}{t^2(2-t^2)} = \int \frac{dt}{t^2-2}$, (alleen waarden van x en t tussen 0 en 1 zijn van belang). Breuksplitsing $\frac{1}{t^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)$ doet ons voor de onbepaalde integraal vinden:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{2}}\right| + C.$$

II. De methode van blz. IX.16:

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} = |1-x|.\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, en substitutie van $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t$

(dus $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$) geeft zoals vaak aanleiding tot veel rekenwerk.

III. Volgens blz. IX.17 stelt men $x = \cos\varphi$, waardoor de integraal overgaat in:

$$\int \frac{\cos\varphi \cdot |\sin\varphi|}{\sin^2\varphi \cdot (1+\cos^2\varphi)} \cdot (-\sin\varphi)\,d\varphi = \int \frac{-\cos\varphi}{1+\cos^2\varphi}\,d\varphi$$

(alleen waarden van φ tussen 0 en $\pi/2$!).

Dit is $\displaystyle\int \frac{-d(\sin\varphi)}{2-\sin^2\varphi} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sin\varphi - \sqrt{2}}{\sin\varphi + \sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{2}} \right| + C.$

We vinden dan voor I (de integrand is niet gedefiniëerd voor $t = 1$)

$$I = \lim_{p \uparrow 1} \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{2}} \right| \right]_{x=0}^{x=p} = \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{2}} \right| \right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(\sqrt{2}+1).$$

Opmerking: Men kan ook de bepaalde integraal met de grenzen transformeren. In oplossing III vindt men bijv.

$$\int_0^1 \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^4}\,dx = \int_{\pi/2}^1 \frac{\cos\varphi|\sin\varphi|}{\sin^2\varphi(1+\cos^2\varphi)} - (\sin\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{1+\cos^2\varphi}\,d\varphi \quad \text{etc.}$$

Merk op dat in de laatste integraal de integrand ook voor de eindpunten van het integratie-interval gedefinieerd is. Dit is in overeenstemming met het feit dat

$$\lim_{p \uparrow 1} \int_{\arccos p}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{1+\cos^2\varphi}\,d\varphi = \lim_{q \downarrow 0} \int_q^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{1+\cos^2\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{1+\cos^2\varphi}\,d\varphi .$$

153. Omdat de integraal bij het punt 0 oneigenlijk is, schrijven we

$$I = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^{\frac{1}{2}\pi} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx =$$

$$= \lim_{\delta \downarrow 0} \left[-\frac{1}{x} + \cot x \right]_{\delta}^{\frac{1}{2}\pi} =$$

$$= -\frac{1}{\frac{1}{2}\pi} + 0 - \lim_{\delta \downarrow 0} (\cot \delta - \frac{1}{\delta}).$$

De vorm achter het limietsymbool werken we uit:

$$\cot \delta - \frac{1}{\delta} = \frac{\cos \delta}{\sin \delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{\delta \cos \delta - \sin \delta}{\delta \sin \delta} =$$

$$= \frac{\delta(1 - \frac{1}{2}\delta^2 + \dots) - (\delta - \frac{1}{6}\delta^3 + \dots)}{\delta(\delta - \frac{1}{6}\delta^3 + \dots)} = \frac{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6})\delta^3 + \dots}{\delta^2 - \dots} = \frac{-\frac{1}{3}\delta + \dots}{1 - \dots},$$

waaruit blijkt dat $\lim\limits_{\delta \downarrow 0} (\cot \delta - \frac{1}{\delta}) = \lim\limits_{\delta \downarrow 0} \dfrac{-\frac{1}{3}\delta + \dots}{1 - \dots} = 0.$

Substitutie van deze uitkomst geeft: $I = -\frac{2}{\pi}$.

Opmerking: Dat I negatief is, behoeft ons niet te verwonderen, aangezien voor $0 < x \leqslant \frac{1}{2}\pi$ geldt: $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$.

154. We verwisselen de integratievolgorde (vgl. X § 3):

Het integratiegebied G in het xy-vlak laat zich omschrijven door de ongelijkheden:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ \arcsin y \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi \\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x \end{array}\right.$$

Dus:

$$\int_{y=0}^{1} dy \int_{x=\arcsin y}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}} = \iint_G \frac{dx\ dy}{\sqrt{1+\cos x}} = \int_{x=0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}} \int_{y=0}^{\sin x} dy =$$

$$= \int_{x=0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}} \cdot \sin x = -\int_{x=0}^{\frac{1}{2}\pi} (1+\cos x)^{-\frac{1}{2}} d(1+\cos x) =$$

$$= \left[-2(1+\cos x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = -2 + 2\sqrt{2}.$$

155. $I = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx - 2\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx - [2\sqrt{x^2+1}]_0^1$

$$J = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = \left[x\sqrt{x^2+1}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$$= \sqrt{2} - J + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \sqrt{2} - J + \log(1+\sqrt{2}).$$

Dus $I = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$.

156. <u>1ste oplossing</u>:

Substitueer $x = \arctan u$.

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{1+2u}\cdot\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{5}\int_0^\infty \left\{\frac{4}{1+2u} - \frac{2u-1}{u^2+1}\right\} du$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{N\to\infty}\left\{2\int_0^N \frac{d(2u+1)}{2u+1} - \int_0^N \frac{d(u^2+1)}{u^2+1} + \int_0^N \frac{du}{u^2+1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{N\to\infty}\{\log(2N+1)^2 - \log(N^2+1) + \arctan N\} =$$

$$= \frac{1}{5}\left\{2\log 2 + \frac{\pi}{2}\right\}.$$

<u>2de oplossing</u>:

Laat α de hoek tussen 0 en $\frac{\pi}{2}$ zijn waarvoor $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Dan is:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\cos x + 2\sin x} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x+\alpha-\alpha)\,dx}{\sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}\cos(x+\alpha) + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(x+\alpha)\right\}\frac{dx}{\sin(x+\alpha)} =$$

$$= \frac{2}{5}\left[\log \sin(x+\alpha)\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2}{5}\log 2 + \frac{\pi}{10}\,.$$

157. Duidt men het lichaam aan met L, het gebied in het xOy vlak:
$x^2+y^2 \geqslant 1$; $\frac{1}{3}x\sqrt{3} \leqslant y \leqslant x\sqrt{3}$ met G dan is:

$$I = \iiint_L dx\,dy\,dz = \iint_G dx\,dy \int_0^{(x^2+y^2)^{-3/2}} dz = \iint_G \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy$$

(zie achtereenvolgens: blz. X.6, no.5; blz.X, 12 begin van § 4; **vergelijk met blz.** X.5 bovenaan). Maak een tekening van G!
Overgang op poolcoördinaten: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ levert: (zie stelling op blz. X.7).

$$I = \iint_G \frac{1}{r^3}\,r\,dr\,d\varphi\ ;\ G \text{ is het gebied: } r \geqslant 1;\ \frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}\,.$$

Als herhaalde integraal geschreven (zie X § 4) komt er

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int_1^{\infty} \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{\pi}{6}\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dr}{r^2} = \frac{\pi}{6}\lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{N}+1\right) = \frac{\pi}{6}\,.$$

Opmerking: Bij directe overgang op cylindercoördinaten r, φ, z (door $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ te nemen), komt er (zie blz. X.7):

$$I = \iiint_L dx\,dy\,dz = \iiint_L r\,dr\,d\varphi\,dz,$$ waarbij men L bepaalt als $r \geqslant 1$, $\pi/6 \leqslant \varphi \leqslant \pi/3$, $0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{r^3}$, hetgeen tot dezelfde integralen aanleiding geeft.

158. Bereken de integraal direct als herhaalde integraal.

L is het volgende gebied in R_3 : $0 \leqslant x \leqslant 1$, $1-x \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}$,

$0 \leqslant z \leqslant (x+y-1)$ en $I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{x+y-1} (x+y-2z)dz =$

$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dy \left[(x+y)z - z^2\right]_{z=0}^{z=x+y-1} = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y-1)dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left[(x-1)y + \tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx + \int_0^1 (1-x)dx$$

$= \int_0^1 t^2 dt - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{\pi}{4}$ (in de eerste integraal stelde men

$t = \sqrt{1-x^2}$ voor de tweede, zie blz. IX.17).

159. Maak zelf een schets van de bol en de cylinder. De cylinder snijdt het XOY-vlak volgens de ellips $x^2 + 4y^2 = 1$, $z = 0$ of $x^2 + \left(\frac{y}{\frac{1}{2}}\right)^2 = 1$, $z = 0$, dus met halve assen 1 en $\frac{1}{2}$. De bol snijdt het XOY-vlak volgens de cirkel $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

Noemen we G het gebied van het XOY-vlak, gelegen buiten de genoemde ellips, binnen de genoemde cirkel dat voldoet aan $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ (maak zelf een schets), dan volgt uit symmetrieoverwegingen en de algemene formule op X.20 dat de gevraagde oppervlakte is

$$O = 8 \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

waarbij nu $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ (het + teken aangezien we alleen het gedeelte van de bol boven G beschouwen), dus $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ en dus

$$O = 8 \iint_G \frac{dx\, dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} . \qquad (1)$$

De grenzen van G beschouwende, vinden we dus

$$O = 8\int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dy =$$

$$= 8\int_0^1 dx \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\right]_{y=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} = 8\int_0^1 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right] dx = \frac{8}{3}\pi .$$

Opm.1. Het berekenen van (1) door eerst naar x en daarna naar y te integreren is veel moeilijker.

Opm.2. Het is ook mogelijk eerst de oppervlakte van de bol binnen de cylinder te berekenen en deze vervolgens af te trekken van de oppervlakte van de hele bol (= 4π).

160. De cylinder snijdt het XOY-vlak volgens de rechte $\log \frac{2}{x} = 0$ of $x = 2$ (maak zelf een schets). We gebruiken dezelfde formule als in vrgst. 159; G is nu het gebied in het XOY-vlak, begrensd door $y = 0$, $y = x^2$ en $x = 2$ (maak zelf een schets).

$z = \log \frac{2}{x}$, dus $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, en de gevraagde oppervlakte is

$$O = \iint_G \frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}\,dx\,dy = \int_0^2 \frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}\,dx \int_0^{x^2} dy =$$

$$= \int_0^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2) = \left[\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}\right]_0^2 = \underline{\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)}.$$

Opm.1. $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}$ omdat hier $x > 0$.

Opm.2. Let er op dat eerst integreren naar x hier omslachtiger is !

161. Volgens X.6 vb. 5 is de gevraagde massa

$$M = \iiint_G \frac{1}{(\rho^2 + 2)^2} dx\, dy\, dz$$

waarbij G nu de gehele 3-dimensionale ruimte is. Vanwege de symmetrie van de functie $\frac{1}{(\rho^2+2)^2}$ en het integratiegebied G t.o.v. O voeren we bolcoördinaten in:

$$M = \iiint_G \frac{\rho^2 \sin\theta}{(\rho^2 + 2)^2} d\theta\, d\varphi\, d\rho =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\rho^2}{(\rho^2 + 2)^2} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 4\pi \int_0^\infty \frac{\rho^2}{(\rho^2 + 2)^2} d\rho\ .$$

Nu is (vgl. IX.4 vb. 6):

$$\int \frac{\rho^2}{(\rho^2 + 2)^2} d\rho = -\frac{1}{2}\int \rho\, d\left(\frac{1}{\rho^2 + 2}\right) = -\frac{\rho}{2(\rho^2 + 2)} + \frac{1}{2}\int \frac{d\rho}{\rho^2 + 2} =$$

$$= -\frac{\rho}{2(\rho^2 + 2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{\rho}{\sqrt{2}} + C \text{ en dus}$$

$$M = 4\pi \lim_{\rho \to \infty} \left[-\frac{\rho}{2(\rho^2 + 2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right] = \underline{\tfrac{1}{2}\pi^2\sqrt{2}}\ .$$

Opmerking. Vanwege de symmetrie geldt: M = 8 × de integraal over een octant; dit geeft hier geen vereenvoudiging.

162. Analoog aan X.19.B geldt voor 3 dimensies de formule

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt\ .$$

Hier is $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{3}$, $\dot{x} = -\sin t$, $\dot{y} = \cos t$, $\dot{z} = \tan \frac{t}{2}$ en dus

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \tan^2\frac{t}{2}}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos\frac{t}{2}} \quad \text{(aangezien } \cos\frac{t}{2} \geqslant 0 \text{ voor } (0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{3}).$$

Nu is

$$\int \frac{dt}{\cos\frac{t}{2}} = \int \frac{dt}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2})} = -2\int \frac{d(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2})} = -2\log\left|\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{4})\right| + C$$

(zie IX.1)

en dus

$$s = \left[-2\log\left|\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{4})\right|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -2\log\left|\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12})\right| = \underline{\log 3}.$$

163. We gebruiken cylindercoördinaten:

$$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

a) De grondkromme van de cylinder C heeft in deze coördinaten de vergelijking:

$$r^4 = r^2\cos 2\varphi$$
$$\text{of } r = \sqrt{\cos 2\varphi} \quad \text{(lemniscaat).}$$

De wortelvorm beperkt, met de voorwaarde $x \geqslant 0$, het te gebruiken interval voor φ ($\cos 2\varphi \geqslant 0$) tot

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4},$$

en blijkbaar geldt dan voor r binnen de cylinder C:

$$0 \leqslant r \leqslant \sqrt{\cos 2\varphi}\;.$$

b) Voor het zadelvlak $z = xy$ is $\frac{\partial z}{\partial x} = y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x$ derhalve is

$$\sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2} = \sqrt{1 + r^2}.$$

c) De gevraagde oppervlakte is nu: (vgl. X § 6 E).

$$\iint\limits_{G \text{ binnen } C} \sqrt{1 + r^2}\; r\, dr d\varphi = \int_{\varphi = -\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{r=0}^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{1 + r^2}\, r dr =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{r=0}^{\sqrt{\cos 2\varphi}} (1+r^2)^{\frac{1}{2}} d(1+r^2) = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \,.\, \Big[\tfrac{2}{3}(1+r^2)^{3/2}\Big]_{r=0}^{\sqrt{\cos 2\varphi}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \{(1+\cos 2\varphi)^{3/2}-1\}\, d\varphi = \frac{1}{3}\int_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\sqrt{2}\,\cos^3\varphi - 1)d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2}\int_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2\varphi)d\,\sin\varphi - \frac{1}{3}[\varphi]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2}\,\Big[\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{6}\pi = \frac{10}{9} - \frac{\pi}{6} .$$

164. De opgave betreft een radieel probleem onafhankelijk van enige richting. We berekenen dus de massa van een octant, vermenigvuldigd met 8.

a) Het driedimensionaal gebied, waarover we integreren (een boloctant) luidt in bolcoördinaten:

$$0 \leqslant \rho \leqslant R, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} .$$

b) De massaverdeling is evenredig met ρ , en wordt dus

$$f(\rho\,,\,\theta\,,\,\varphi) = A\rho \qquad\qquad (A \text{ constant})$$

(vgl. X blz. 7 onderaan).

c) De totale massa van de bol is dus:

$$M = 8\iiint_{\text{octant}} A\rho\,.\rho^2\,\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= 8A\int_{\varphi=0}^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\frac{1}{2}\pi} \sin\theta\, d\theta \int_{\rho=0}^{R} \rho^3 d\rho =$$

$$= 8A[\varphi]_0^{\frac{1}{2}\pi}\,[-\cos\theta]_0^{\frac{1}{2}\pi}\,[\tfrac{1}{4}\rho^4]_0^R =$$

$$= 8A.\tfrac{1}{2}\pi.1.\tfrac{1}{4}R^4 = \pi AR^4.$$

165. We gebruiken de formule onderaan op blz. X 20.

a) Het integratiegebied G in het xy-vlak is het kleinste cirkelsegment begrensd door de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ en de lijn $x + y = 1$. Hiervoor gelden de ongelijkheden:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 - x \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - x^2} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 1 - y \leqslant x \leqslant \sqrt{1 - y^2} \end{array}\right.$$

b) De integrand wordt bepaald door de vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + z^2 = 1 \\ z \geqslant 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad z = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \text{derhalve}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

c) De gevraagde oppervlakte laat zich nu op twee verschillende wijzen berekenen.

I. $$O = \iint_G \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{x=0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_{y=1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dy =$$

$$= \int_{x=0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \{ \sqrt{1-x^2} - 1 + x \} =$$

$$= \int_{x=0}^{1} dx - \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= [x]_0^1 - [\arcsin x]_0^1 - \tfrac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2)$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2} - \left[\sqrt{1 - x^2}\right]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2} .$$

II. $$O = \iint_G \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{y=0}^{1} dy \int_{x=1-y}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \int_{y=0}^{1} dy \, [\arcsin x]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$= \int_0^1 \text{arc sin}\,\sqrt{1-y^2}\,dy - \int_0^1 \text{arc sin}\,(1-y)\,dy = I_1 - I_2$$

In I_1 geldt: $\text{arc sin}\,\sqrt{1-y^2} = \text{arc cos}\,y$ omdat $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Dus $$I_1 = \int_0^1 \text{arc cos}\,y\,dy = \Big[y\,\text{arc cos}\,y\Big]_0^1 - \Big\{-\int_0^1 \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}\Big\} =$$

$$= 0 + \int_0^1 \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\Big[\sqrt{1-y^2}\Big]_0^1 = 1 \qquad \text{(zie boven).}$$

In I_2 substitueren we $y = 1-t$. Dit levert

$$I_2 = -\int_{t=1}^{0} \text{arc sin}\,t\,dt = \int_0^1 \text{arc sin}\,t\,dt =$$

$$= \Big[t\,\text{arc sin}\,t\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \qquad \text{(zie boven)}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 + \Big[\sqrt{1-t^2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Resultaat: $O = I_1 - I_2 = 1 - (\frac{\pi}{2} - 1) = 2 - \frac{\pi}{2}$.

166. We beperken ons eerst tot $z > 0$. (1)

De eenheidsbol heeft de vergelijking $z^2 = 1 - x^2 - y^2$.
Als we deze snijden met de gegeven kegel en z elimineren vinden we de vergelijking van de projectie van de snijkromme op het vlak $z = 0$. Deze is dus $1 - x^2 - y^2 = x^2 + (y-1)^2$.

Dat is $$x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\ . \qquad (2)$$

Deze projectie is dus de cirkel met middelpunt $(0, \frac{1}{2})$ en straal $\frac{1}{2}$. (Teken zelf een figuur).
Het stuk G waarvan we de **massa** willen bepalen ligt boven deze cirkel. Het is aan de bovenkant door de bol, aan de onderkant door de kegel begrensd. De gevraagde massa is

$$M = \iiint_G |z|\,dx\,dy\,dz.$$

Nu we de projectie van de snijkromme weten kunnen we de grenzen van deze integraal zo opschrijven:

$$M = 2\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{\frac{1}{4} - (y - \frac{1}{2})^2}} dx \int_{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}^{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} z\,dz =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{\frac{1}{4} - (y-\frac{1}{2})^2}} \{-2x^2 - 2y^2 + 2y\}\,dx = \frac{4}{3}\int_0^1 \{\tfrac{1}{4} - (y-\tfrac{1}{2})^2\}^{3/2}\,dy$$

(Substitueer $y-\frac{1}{2} = \frac{\sin\varphi}{2}$)

$$= \frac{1}{12}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3!!}{4!!} = \frac{\pi}{32}\ .$$

In verband met opmerking (1) is de gevraagde massa $\frac{\pi}{16}$.

<u>2de oplossing</u>. Als men eenmaal de projectie (2) heeft gevonden kan men ook op cylinder coördinaten overgaan en wel als volgt:

$$x = \rho\cos\varphi\ ;\ y = \tfrac{1}{2} + \rho\sin\varphi\ ;\ z = z.$$

De vergelijkingen van bol en kegel worden dan resp. $z^2 = \frac{3}{4} - \rho^2 - \rho\sin\varphi$ en $z^2 = \frac{1}{4} + \rho^2 - \varphi\sin\varphi$.

We vinden

$$\text{massa} = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} \rho\,d\rho \int_{z(\text{kegel})}^{z\,(\text{bol})} z\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} \rho\{\tfrac{1}{2} - 2\rho^2\}\,d\rho = 2\pi\left[\tfrac{1}{4}\rho^2 - \tfrac{1}{2}\rho^4\right]_{\rho=0}^{\rho=\frac{1}{2}} = \frac{1}{16}\pi\ .$$

Opmerking: Hier niet vergeten dat $\rho\,d\rho d\varphi dz$ de maat van een brok is.

167. Omdat $\mu(1,1,1)$ nulruimte van A is, geldt

$$A(1,1,1) = \underline{0} = 0(1,1,1).$$

Dus (1,1,1) is eigenvector van A bij de eigenwaarde 0.

168. a) De beeldruimte wordt opgespannen door de beeldvectoren van $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$, en $\underline{e}_4$, d.w.z. de kolomvectoren van de matrix van A.

$$\begin{matrix}(1, & -1, & 2)\\(3, & 1, & 4)\\(4, & -2, & 7)\\(7, & 3, & 9)\end{matrix} \sim \begin{matrix}(1, & -1, & 2)\\(4, & 0, & 6)\\(2, & 0, & 3)\\(10, & 0, & 15)\end{matrix} \sim \begin{matrix}(1, & -1, & 2)\\(2, & 0, & 3)\end{matrix} \sim \begin{matrix}(0, & -2, & 1)\\(2, & 0, & 3)\end{matrix}.$$

Een basis voor de beeldruimte van A wordt dus gevormd door de vectoren (0, -2, 1) en (2, 0, 3).

b) De nulruimte van A bestaat uit die vectoren (x_1, x_2, x_3, x_4) die voldoen aan de vectorvergelijking

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & 7\\-1 & 1 & -2 & 3\\2 & 4 & 7 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Symbolisch opgelost:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 7\\-1 & 1 & -2 & 3\\2 & 4 & 7 & 9\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 4 & 2 & 10\\-1 & 1 & -2 & 3\\0 & 6 & 3 & 15\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 2 & 1 & 5\\-1 & 5 & 0 & 13\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{cases} \phantom{-x_1 +{}} 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 \phantom{{}+x_3} + 13x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{Stel } x_2 = \lambda,\ x_4 = \mu .$$

Dan is $x_1 = 5\lambda + 13\mu$, $x_3 = -2\lambda - 5\mu$..

m.a.w. $x = \lambda(5, 1, -2, 0) + \mu(13, 0, -5, 1)$.

Een basis voor de nulruimte wordt dus gevormd door de vectoren (5, 1, -2, 0) en (13, 0, -5, 1).

<u>Opmerking</u>. We controleren nog even:

dim beeldruimte + dim nulruimte = 2 + 2 = 4

en dit is precies de dimensie van de ruimte (R_4) waarop de lineaire afbeelding is gedefinieerd.

169. De kolommen van de gevraagde matrix zijn de beelden der basis-eenheidsvectoren (zie XI. § 3).
Uit het gegeven over de eigenwaarden en -vectoren volgt (zie blz. XI.16)

$(1,1,1) \to (1,1,1)$; $(1, -2, 0) \to (3, -6, 0)$; $(2, 0, 1) \to (-4, 0, -2)$

Gebruik makend van de definitie van een lineaire afbeelding (zie XI § 2) kunnen we de gezochte beeldvectoren van de eenheids-basis-vectoren door "vegen" verkrijgen:

$$\begin{bmatrix} (1, 1, 1) \to (1, 1, 1) \\ (1,-2, 0) \to (3,-6, 0) \\ (2, 0, 1) \to (-4,0,-2) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} (-1, 1, 0) \to (5, 1, 3) \\ (1, -2, 0) \to (3,-6, 0) \\ (2, 0, 1) \to (-4, 0,-2) \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} (-1, 1, 0) \to (5, 1, 3) \\ (-1, 0, 0) \to (13, -4, 6) \\ (2, 0, 1) \to (-4, 0, -2) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} (0, 1, 0) \to (-8, 5, -3) \\ (1, 0, 0) \to (-13, 4, -6) \\ (0, 0, 1) \to (22, -8, 10) \end{bmatrix}$$

De gevraagde matrix is dus (denk aan de volgorde van de kolommen!)

$$\begin{bmatrix} -13 & -8 & 22 \\ 4 & 5 & -8 \\ -6 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

170. Voor iedere lineaire afbeelding A geldt $A\underline{0} = \underline{0}$. Dit moet dus hier ook gelden:

$$A\underline{0} = B\underline{a} + \underline{0} = \underline{0} \text{ als } B\underline{a} = \underline{0}.$$

Omgekeerd, als $B\underline{a} = 0$ staat er $A\underline{x} = \underline{x}$ en dit is een lineaire afbeelding. Het antwoord is dus:
Voor alle $\underline{a}$ uit de nulruimte van B. Deze kunnen we vinden uit:

$$B\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + 2a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

als $a_3 = 0$, $a_1 = -a_2 = \lambda$.
Antwoord: $\underline{a} = \lambda(1, -1, 0)$.

171. a) 1. Zij $\underline{x} = (x,y,z)$. Dan is

$$A(\lambda \underline{x}) = A(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda z, \lambda x, \lambda y) = \lambda(z,x,y) = \lambda A\underline{x}.$$

2. Verder is $A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = A(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2) =$

$$= (z_1 + z_2,\ x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) = A\underline{x}_1 + A\underline{x}_2 .$$

Dus is A een lineaire afbeelding. Voor iedere $\underline{x}$ is

$|A\underline{x}| = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} = |\underline{x}|$. Volgens de def. (XI. § 5) is

A orthogonaal.

b) $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ betekent:

$$(z,\ x,\ y) = (\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z).$$

Hieruit volgt $\lambda^3 = 1$, dus $\lambda = 1$ (λ is nl. reëel).
Daaruit volgt weer $x = y = z$. De eigenvectoren zijn dus de veelvouden van $(1,1,1)$.

c) Uit de stelling van XI § 5 volgt dat bij een orthogonale afbeelding niet alleen de lengte van de vectoren maar ook hoeken onveranderd blijven. De lijn $\alpha(1,1,1)$ is vast. Dus ook het vlak door O loodrecht op $(1,1,1)$ gaat in zichzelf over. Dat is het vlak met vergelijking $x + y + z = 0$. Dit is ook rechtstreeks te zien:
Als $x = (x,\ y,\ z)$ met $x + y + z = 0$ dan is

$A\underline{x} = (z,\ x,\ y)$ en deze ligt in hetzelfde vlak.

d) In c) is reeds opgemerkt dat alle hoeken en afstanden gelijk blijven en verder de lijn $\alpha(1,1,1)$ puntsgewijs vast blijft. De afbeelding is dus een draaiing van de ruimte om deze lijn. Kies een willekeurige vector in het loodvlak door O op deze lijn (d.i. $x + y + z = 0$) bijv. $\underline{x} = (1,\ -1,\ 0)$. Deze gaat over in $Ax = x' = (0,\ 1,\ -1)$. De hoek tussen deze vectoren is bepaald door

$$\cos \varphi = \frac{(\underline{x},\underline{x}')}{|\underline{x}|.|\underline{x}'|} = \frac{-1}{2} .$$

A is dus een draaiing om de lijn $\alpha(1,1,1)$ over een hoek $\frac{2\pi}{3}$.

Opmerking 1. Na in a) aangetoond te hebben dat A lineair is, kan men de matrix opschrijven:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aan de matrix zien we dan ook dat A orthogonaal is. De eigenwaardevergelijking is dan

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 = 0.$$

Dit is hier een omweg.

<u>Opmerking 2</u>. Als we m.b.v. c) hebben ingezien dat A een draaiing om de lijn $\alpha(1,1,1)$ is, volgt de hoek $\frac{2\pi}{3}$ uit de overweging A^3 = identiteit.