

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE IIIa

Gegeven in het

Najaarssemester 1964

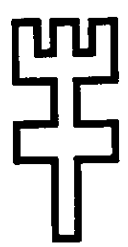
Handwritten notes at the top left of the page.

**Onderafdeling
der Wiskunde**

Wiskunde IIIa

GEGEVEN IN HET
NAJAARSSEMESTER 1964

TYPEWERK VERZORGD DOOR MEJ.A.N.M. VAN DE GRIENDT



**TECHNISCHE HOGESCHOOL
EINDHOVEN**

ENKELE NOTITIES
bij
WISKUNDE IIIa, IIIb en III

In de 60er en 70er jaren gold dat de studenten Chemische Technologie, wat betreft het algemeen wiskundeonderwijs in het 2e jaar, konden/mochten volstaan met de '*kleine wiskunde*'. Ook wel WISKUNDE IIIb genaamd. Deze wiskunde betrof een selectie uit de colleges WISKUNDE IIIa en IV, zoals die voor alle overige afdelingen werden verzorgd. In 1967 kwam *één* verbeterde en aangevulde variant in gebruik onder de naam WISKUNDE III. Voor de chemisch technologen werd, in het herfstsemester, hieruit een selectie genomen.

(JdG, 18 Mei 2005.)

ONDERAFDELING DER WISKUNDE

W I S K U N D E IIIa

Gegeven in het

Najaarssemester 1964

T e c h n i s c h e H o g e s c h o o l E i n d h o v e n

INHOUD

Hoofdstuk I	<u>Differentiaalvergelijkingen</u>	I.1 t/m I.39
§.1	Elementaire typen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde.	I.1
§.2	Substituties en kunstgrepen.	I.9
§.3	Enkele algemene opmerkingen.	I.12
§.4	Differentiaalvergelijkingen van hogere orde en stelsels differentiaalvergelijkingen.	I.14
§.5	Simultane lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten.	I.15
§.6	Oplossing door machtreekssubstitutie.	I.21
§.7	Benaderende oplossingsmethoden.	I.29
§.8	Laplace-transformatie.	I.33
Hoofdstuk II	<u>Reeksen en integralen van Fourier</u>	II.1 t/m II.38
§.1	Trigonometrische reeksen.	II.1
§.2	Fourier-coëfficiënten van enkele eenvoudige functies.	II.4
§.3	De ongelijkheid van Bessel en de formule van Parseval.	II.8
§.4	De hoofdstelling.	II.11
§.5	Trillende snaren en staven.	II.15
§.6	Het verschijnsel van Gibbs.	II.18
§.7	Fourier-integralen.	II.19
§.8	Complexe schrijfwijze van Fourier-reeksen en Fourier-integralen.	II.25
§.9	Verwisseling van volgorde van sommatie, differentiatie en integratie. Uniforme convergentie.	II.28
Hoofdstuk III	<u>Kwadratische vormen en kwadratische oppervlakken</u>	III.1 t/m III.28
§.1	Matrix van een lineaire afbeelding. Invloed van basiskeuze. Eigenvectoren.	III.1
§.2	Het meetkundige probleem.	III.9
§.3	Symmetrische lineaire afbeeldingen.	III.18
§.4	Klassifikatie van kwadratische oppervlakken.	III.22

HOOFDSTUK I DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

§.1 Elementaire typen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde.

A. Scheiding van veranderlijken.

$$P(y) \frac{dy}{dx} = Q(x).$$

Dan is

$$P(y)dy = Q(x)dx,$$

$$\int P(y)dy = \int Q(x)dx. + C$$

Vb1.

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$2x dx + 2y dy = 0.$$

$$x^2 + y^2 = C \text{ (stelsel concentrische cirkels).}$$

Vb2.

$$y = x \frac{dy}{dx}.$$

Deel door xy dan is $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$

$y=0 \quad x \neq 0$ een opl
 $y \neq 0 \quad x=0$ bank hand.

$$\log |y| = \log |x| + C.$$

$$y = C_1 x \text{ (stelsel rechten door 0).}$$

B. Lineaire differentiaalvergelijkingen.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

Stel $y = u(x)v(x)$, dan wordt de D.V.

$$u'v + v'u + Puv = Q,$$

$$v(u' + Pu) + v'u = Q.$$

Zoek nu één functie $u(x)$, zo dat $u' + P(x)u = 0$ (geval A), dan komt er

$$v' = \frac{Q(x)}{u(x)}.$$

Deze is door directe integratie op te lossen.

Vb.3

$$xy' - (x+1)y = x^2 - x^3.$$

Stel $y = uv$, dan komt er

$$v[xu' - (x+1)u] + xuv' = x^2 - x^3.$$

Zoek $u(x)$, waarvoor

$$xu' - (x+1)u = 0.$$

$$\frac{du}{u} = \frac{x+1}{x} dx,$$

$$\log |u| = x + \log |x| + C.$$

We hebben slechts één functie $u(x)$ nodig, waarvoor wij kunnen nemen

$$u = x e^x. \quad (\text{Niet } u(x) \equiv 0)$$

Substitueren we deze u , dan komt er

$$v' = (1-x)e^{-x},$$

dus

$$v = \int (1-x)e^{-x} dx = xe^{-x} + C.$$

De algemene oplossing van de D.V. is dus

$$y = x^2 + C x e^x.$$

Vb.4

In een stroomkring met zelfinductie L en weerstand R loopt een stroom I onder invloed van een electromotorische kracht E .

Als t de tijd is, dan geldt

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E.$$

We veronderstellen L en R constant.

Stel $I = u(t)v(t)$, dan komt er

$$v(L u' + R u) + Lu \frac{dv}{dt} = E.$$

Stel nu

$$Lu' + Ru = 0,$$

dan is hieraan te voldoen door

$$u(t) = e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Bij substitutie levert dit

$$\frac{dv}{dt} = \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t},$$

waaruit v door integratie te vinden is, als E als functie van t gegeven is.

Stellen we nu ook E constant, dan is

$$v(t) = \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C,$$

$$I(t) = \frac{E}{R} + C e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Noemen we I_0 de stroom op het tijdstip $t = 0$, dan komt er

$$I_0 = \frac{E}{R} + C,$$

dus

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

Voor grote waarden van t is de e -macht klein en is I bij benadering gelijk aan E/R . Speciale gevallen :

1° Sluitingsstroom $I_0 = 0$

$$I(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

2° Verbreekingsstroom $E = 0$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Opm. Bedenk dat de algemene methode vaak niet de vlugste methode is.

Vb.5

$$(1 - x^2)y' - 2xy = 1.$$

Men ziet direct, dat deze D.V. te schrijven is als

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)y] = 1$$

en dat de algemene oplossing luidt

$$(1 - x^2)y = x + C.$$

C. Differentiaalvergelijkingen van het type Bernoulli.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^\alpha \quad \text{met } \alpha \neq 1.$$

Probeer de substitutie $y = z^\beta$ met passend gekozen β .

Dan is

$$\frac{dy}{dx} = \beta z^{\beta-1} \frac{dz}{dx}$$

en de D.V. wordt

$$\beta z^{\beta-1} \frac{dz}{dx} + P(x)z^\beta = Q(x)z^{\alpha\beta}.$$

Deling door $\beta z^{\beta-1}$ geeft

$$\frac{dz}{dx} + \frac{1}{\beta} P(x)z = \frac{1}{\beta} Q(x)z^{\alpha\beta-\beta+1}.$$

Kiest men nu

$$\beta = \frac{1}{1-\alpha},$$

dan komt er

$$\frac{dz}{dx} + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x),$$

waarmee een lineaire D.V. verkregen is.

Vb.6

$$xy' + y = y^2 \log x. \quad \alpha = -1 \rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

Stel $y = 1/z$, dan is $y' = -z'/z^2$ en er komt

$$-\frac{xz'}{z^2} + \frac{1}{z} = \frac{\log x}{z^2},$$

$$xz' - z = -\log x.$$

Deze is eenvoudig op te lossen, als men door x^2 deelt:

$$\frac{xz' - z}{x^2} = -\frac{\log x}{x^2},$$

$$\left(\frac{z}{x}\right)' = -\frac{\log x}{x^2},$$

$$\frac{z}{x} = -\int \frac{\log x}{x^2} dx = \int \log x d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\log x + 1}{x} + C,$$

dus

$$y = \frac{1}{\log x + 1 + Cx}.$$

D. Homogene differentiaalvergelijkingen.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Stel $\frac{y}{x} = z$, dus $y = xz$, $\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z$ en de D.V. wordt

$$x \frac{dz}{dx} + z = f(z).$$

Deze is met scheiding van veranderlijken op te lossen.

Vb.7

$$y' = \frac{4x - y}{2x + y}.$$

Stelt men $y = xz$, dan komt er

$$xz' + z = \frac{4 - z}{2 + z},$$

$$xz' = \frac{4 - 3z - z^2}{2 + z},$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(z + 2)dz}{z^2 + 3z - 4} = 0,$$

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{5} \int \frac{dz}{z-1} + \frac{2}{5} \int \frac{dz}{z+4} = 0,$$

$$x^5 (z-1)^3 (z+4)^2 = C,$$

$$(y - x)^3 (y + 4x)^2 = C.$$

Vb.8

$$y' = \frac{4x - y + 7}{2x + y - 1}.$$

Deze D.V. is niet homogeen. Door een eenvoudige substitutie is zij echter homogeen te maken. Stel

$$x = X + p, \quad y = Y + q,$$

dus ga over op nieuwe variabelen X en Y , waarbij p en q nader te bepalen constanten zijn. De D.V. wordt dan

$$\frac{dY}{dX} = \frac{4X - Y + 4p - q + 7}{2X + Y + 2p + q - 1}.$$

Kies nu p en q dusdanig, dat

$$\begin{aligned} 4p - q + 7 &= 0 \\ 2p + q - 1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{dus } p = -1, q = 3.$$

De D.V. wordt dan

$$\frac{dY}{dX} = \frac{4X - Y}{2X + Y} \text{ met oplossing } (Y - X)^3 (Y + 4X)^2 = C.$$

De oorspronkelijke D.V. heeft dus de oplossing

$$(y - x - 4)^3 (y + 4x + 1)^2 = C.$$

Opm. Dezelfde methode is van toepassing op alle D.V. van het type

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right),$$

behalve als de vergelijkingen, waaruit p en q moeten worden bepaald, strijdig zijn. Dan gaat het echter nog eenvoudiger.

Vb.9

$$y' = \frac{2x + y + 1}{2x + y + 2}.$$

Stel nu $z = 2x + y$, dan is $z' - 2 = \frac{z+1}{z+2}$,

welke met scheiding van variabelen op te lossen is. De algemene oplossing is

$$e^{3(y-x)} (3y + 6x + 5) = C. \quad C > 0$$

E. Exacte differentiaalvergelijkingen.

Laat een stelsel krommen gegeven zijn door

$$(1) \quad F(x,y) = C;$$

d.w.z. elke waarde van C geeft een exemplaar van het stelsel.

Dan is

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0,$$

en dit is een D.V. van het type

$$(2) \quad P(x,y) + Q(x,y)y' = 0,$$

waaraan het gegeven stelsel krommen voldoet. Daar echter

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x},$$

geldt voor deze D.V., dat

$$(3) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Een D.V. van het type (2), die aan (3) voldoet, heet een exacte D.V. (of totale D.V.). We zullen nu omgekeerd voor een dergelijke D.V. een oplossing van het type (1) trachten te vinden.

We zullen dit eerst voor een voorbeeld doen. Neem de D.V.

$$x + 2y + (2x+1) y' = 0.$$

Deze is exact, want

$$\frac{\partial}{\partial y} (x + 2y) = 2 = \frac{\partial}{\partial x} (2x + 1).$$

We trachten eerst

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x + 2y$$

op te lossen. Hiervan is natuurlijk $F = \frac{1}{2} x^2 + 2xy$ een oplossing.

Voor iedere vaste waarde van y mag hierbij nog een constante opgeteld worden, die voor verschillende waarden van y verschillend, d.w.z. een functie van y mag zijn.

De meest algemene oplossing is dus

$$F(x,y) = \frac{1}{2} x^2 + 2xy + \varphi(y),$$

waarin de functie φ dus alleen van y en niet van x afhangt.

Nu trachten we bovendien aan

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 1$$

te voldoen. Dit leidt tot

$$2x + \frac{d\varphi}{dy} = 2x + 1.$$

Dus

$$\frac{d\varphi}{dy} = 1,$$

$$\varphi = y - C;$$

de algemene oplossing is dus

$$\frac{1}{2} x^2 + 2xy + y = C.$$

In het algemene geval gaan we op analoge wijze te werk.

Eerst trachten we

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P$$

op te lossen. Dit leidt tot

$$F = \int P dx + \varphi(y).$$

Nu trachten we

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

op te lossen, hetgeen leidt tot

$$\frac{d\varphi}{dy} = Q - \frac{\partial}{\partial y} (\int P dx).$$

Dit lukt alleen, als het rechterlid alleen van y en niet van x afhangt. Dit is echter inderdaad het geval, want

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Q - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P \, dx \right) \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int P \, dx \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

omdat de differentiaalvergelijking exact is. Dus is φ door directe integratie te bepalen.

In de praktijk is het feit, dat in de D.V. voor φ geen x mag voorkomen een controle op rekenfouten !

F. Integrerende factor.

Als de D.V. van het type (2) niet exact is (niet aan (3) voldoet) kan bovenstaande methode niet toegepast worden. Vaak is het dan echter mogelijk de D.V. met een integrerende factor $\mu(x,y)$ te vermenigvuldigen, dusdanig dat de nieuwe D.V.

$$\mu P + \mu Q y' = 0$$

wel exact is. Dit betekent, dat

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x},$$

of

$$P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mu$$

moet zijn. Het oplossen van deze (partiële) D.V. voor μ is in het algemeen veel moeilijker dan het oplossen van de oorspronkelijke vergelijking. We hebben echter slechts één oplossing voor μ , die niet identiek nul is, nodig en die is met enige handigheid vaak wel te zien, b.v. door μ als functie van x alleen of van y alleen te kiezen.

Vb.10 $y^2 - (2xy + x^2) y' = 0.$

Deze D.V. is niet exact. De D.V. voor μ wordt

$$y^2 \frac{\partial \mu}{\partial y} + (2xy + x^2) \frac{\partial \mu}{\partial x} = (-2y - 2x - 2y) \mu,$$

$$y^2 \frac{\partial \mu}{\partial y} + x(2y + x) \frac{\partial \mu}{\partial x} = -2(2y + x) \mu.$$

Hieraan voldoet $\mu = 1/x^2$. Vermenigvuldigt men de D.V. met deze factor, dan ontstaat een exacte D.V., die gemakkelijk op te lossen is. Ook de oorspronkelijke D.V. is trouwens eenvoudig op andere wijze op te lossen.

§.2 Substituties en kunstgrepen.

Soms is door een substitutie een D.V., die niet tot een der vorige typen behoort, tot een bekend type te herleiden.

Vb.1

$$xy' + y + x^2 e^{xy} + 1 = 0.$$

Stel $xy = z$, dan is

$$z' + x^2 e^z + 1 = 0.$$

Stel $e^z = t$, dan is $t' = e^z z'$, dus $z' = t'/t$, dus

$$t' + t + x^2 t^2 = 0.$$

In deze D.V. van Bernoulli stellen we $t = 1/w$, dan is

$$-\frac{w'}{w^2} + \frac{1}{w} + \frac{x^2}{w^2} = 0,$$

$$w' - w - x^2 = 0.$$

In deze lineaire D.V. stellen we $w = uv$,

$$v(u' - u) + v'u - x^2 = 0.$$

Neem u dusdanig, dat $u' - u = 0$, dus bv. $u = e^x$. Dit geeft

$$v' = x^2 e^{-x}$$

$$v = \int x^2 e^{-x} dx = e^{-x} (-x^2 - 2x - 2) + C,$$

dus $w = -x^2 - 2x - 2 + C e^x$,

en daar $w = 1/t = e^{-z} = e^{-xy}$, is de algemene oplossing

$$e^{-xy} = -x^2 - 2x - 2 + C e^x.$$

Dikwijls is het voordelig, niet $y = y(x)$, maar $x = x(y)$ te beschouwen.

Vb.2

$$(x^2 - y^4) \frac{dy}{dx} = 2xy.$$

$y=0$ opl.

Neem $x = x(y)$, dan

$$x^2 - y^4 = 2xy \frac{dx}{dy}.$$

Stel nu $x^2 = z$, dan ontstaat de lineaire D.V.

$$z - y^4 = y \frac{dz}{dy},$$

die wij delen door y^2

$$\frac{y \frac{dz}{dy} - z}{y^2} = -y^2,$$

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{z}{y} \right) = -y^2,$$

$$\frac{z}{y} = -\frac{1}{3} y^3 + C$$

$$x^2 = -\frac{1}{3} y^4 + Cy.$$

Het vervangen van $y = y(x)$ door $x = x(y)$ is vaak voordelig bij vergelijkingen, waarin x niet expliciet voorkomt. Dit is het duidelijkste te demonstreren aan vergelijkingen van hogere orde. Het volgende voorbeeld geeft een vergelijking van de tweede orde.

Vb.3 (Ruimtevaart). Gevraagd wordt de snelheid, waarmee een projectiel van de aarde moet worden weggeschoten, om buiten de invloed van de zwaartekracht van de aarde te komen. Laat x de afstand van het projectiel tot de aarde zijn en t de tijd, dan is

$$\text{het middelp. } \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\alpha}{x^2}.$$

De grootte van de positieve constante α zullen we straks bepalen. Neem nu $t = t(x)$, dan is

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\frac{dt}{dx}} \right) \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\left(\frac{dt}{dx}\right)^2} \frac{d^2t}{dx^2} \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = -\frac{\frac{d^2t}{dx^2}}{\left(\frac{dt}{dx}\right)^3}.$$

De D.V. wordt dan

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{\alpha}{x^2} \left(\frac{dt}{dx}\right)^3.$$

Stel $\frac{dt}{dx} = u = \frac{1}{v}$ ($v =$ snelheid) :

$$\frac{du}{dx} = \frac{\alpha}{x^2} u^3,$$

$$\frac{du}{u^3} = \frac{\alpha dx}{x^2},$$

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{\alpha}{x} - C,$$

$$v = \sqrt{\frac{2(\alpha + Cx)}{x}}.$$

Opdat het projectiel tot in het oneindige doorvliegt moet $C \geq 0$ zijn; als $C = 0$, geldt $v \rightarrow 0$ voor $x \rightarrow \infty$. Dus

$$v = \sqrt{\frac{2\alpha}{x}}.$$

Om α te bepalen noemen we $r =$ aardstraal en $-g =$ versnelling aan het aardoppervlak. Dan is

$$-g = -\frac{\alpha}{r^2},$$

dus

$$\alpha = g r^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{2gr^2}{x}}.$$

De snelheid aan het aardoppervlak is dus

$$v_0 = \sqrt{2gr}.$$

Nu is $r = 6400$ km en $g = 981$ cm/sec². Dan is

$$v_0 = 1,12 \cdot 10^6 \text{ cm/sec},$$

dat is ongeveer 40000 km per uur.

Opmerking. Bij dit voorbeeld is er nog een andere, eenvoudigere kunstgreep, die tot oplossing van de D.V. leidt. Vermenigvuldigt men

namelijk beide leden van de D.V. met $\frac{dx}{dt}$, dan komt er

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{\alpha}{x^2} \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha}{x}\right),$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha}{x} + C.$$

$$v^2 = \frac{2(\alpha + Cx)}{x}.$$

Soms kan men door de D.V. te differentiëren resultaat bereiken.

Vb.4

$$y = x + (y')^2.$$

Differentieer:

$$y' = 1 + 2y' y''.$$

Stel $y' = p$:

$$p = 1 + 2p \frac{dp}{dx}.$$

Deze D.V. is met scheiding van variabelen op te lossen:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ x = 2p + 2 \log |p-1| + C. \\ 2) \ y = x + p^2 \end{array} \right\} \quad p^2 = \pm \sqrt{y-x} \quad x =$$

Substitueren we dit en $y' = p$ in de oorspronkelijke D.V. dan komt er

$$y = p^2 + 2p + 2 \log |p-1| + C.$$

Hiermee is een parametervoorstelling voor de oplossing gevonden.

Vb.5 (D.V. van Clairaut)

$$y = y'x - f(y')$$

$$y = y'x - (y')^2,$$

$$y' = y' + (x - 2y') y''.$$

Noem $y' = p$, dan komt er

$$(x - 2p) \frac{dp}{dx} = 0.$$

Hieraan kan op twee manieren worden voldaan. In de eerste plaats kunnen wij stellen

$$\frac{dp}{dx} = 0, \text{ dus } p = C,$$

hetgeen

$$y = Cx - C^2$$

oplevert.

De andere mogelijkheid is $\left. \begin{array}{l} x = 2p \\ y = p^2 \end{array} \right\},$

hetgeen leidt tot

$$y = \frac{1}{4} x^2.$$

Hier doet zich dus het verschijnsel voor, dat naast de algemene oplossing met een willekeurige constante erin nog een enkele losse oplossing optreedt, die singuliere oplossing genoemd wordt.

Indien bij het oplossen van een D.V. gedeeld wordt, kan het gebeuren, dat daarbij een singuliere oplossing wordt verduisterd. Zo is in vb.4 bij de oplossing van de D.V. voor p door $p-1$ gedeeld.

Kennelijk is echter $p = 1$ een oplossing van de D.V., die tot de singuliere oplossing

$$y = x + 1$$

van de oorspronkelijke D.V. leidt.

In de vroegere voorbeelden hebben we gemakshalve de gevolgen van het invoeren of weglaten van een factor in een D.V. buiten beschouwing gelaten. Het is echter duidelijk, dat dit voor een volledige discussie van de oplossingen van een D.V. niet geoorloofd is.

§.3 Enkele algemene opmerkingen.

De algemene gedaante van een D.V. van de eerste orde is $\varphi(x,y,y') = 0$. Denkt men zich deze naar y' opgelost: $y' = f(x,y)$, en bedenkt men, dat de afgeleide van een functie meetkundig de tangens van de hellingshoek voorstelt, dat ziet men, dat de differentiaalvergelijking een richtingsveld bepaalt: aan elk punt (x,y) wordt een richting toegevoegd.

Men kan van het richtingsveld een meetkundig beeld krijgen door in een aantal punten (x,y) de door $f(x,y)$ gegeven richtingscoëfficiënt uit te rekenen en de hierdoor bepaalde richting als een streepje in het punt (x,y) te tekenen.

Een oplossing van de D.V. is nu een kromme, die bij het richtingsveld past, d.w.z. een kromme, waarvan de raaklijn in elk punt de richting van het richtingsveld ter plaatse heeft.

Maakt men een tekening als bovenbedoelde bij $y' = -\frac{x}{y}$, dan suggereert deze direct al de oplossingen der D.V., nl. een stelsel concentrische cirkels met middelpunt in de oorsprong. Evenzo bij $y' = \frac{y}{x}$ een stelsel rechte lijnen door de oorsprong. Deze oplossingen waren trouwens al van vroeger bekend. Maar ook als dat niet zo is, bv. bij $y' = x^2 + y^2$, geeft het tekenen van een richtingsveld vaak een indruk over het verloop van de oplossingskrommen.

De getekende figuren doen ons ook nog de suggestie aan de hand, dat, mits het richtingsveld voldoende "netjes" is, door elk punt (x_0, y_0) precies één oplossingskromme zal gaan. Het bewijs van een dergelijke bewering is vrij lastig (hiervoor moet trouwens eerst worden gepreciseerd, wat we onder "netjes" moeten verstaan). We gaan op deze kwestie niet nader in; zij is een speciaal geval van het algemene probleem, in hoeverre een gegeven D.V. oplossingen bezit (existentieprobleem).

De oplossingen, die we in de vorige paragrafen vonden, waren meestal van de gedaante $F(x, y, C) = 0$ met een willekeurige constante C . Het vinden van een oplossing door een punt (x_0, y_0) komt dan neer op het bepalen van die waarde(n) van C , waarvoor $F(x_0, y_0, C) = 0$.

Vb.1 In vb.5 van paragraaf 1 hebben we als oplossing van de D.V. $(1-x^2) y' - 2xy = 1$ gevonden $(1-x^2) y = x + C$. De oplossing, die voor $x = 2$ de waarde -1 aanneemt, krijgen we door $C = 1$ te kiezen.

We maken nog een opmerking over singuliere oplossingen in verband met het richtingsveld. We beschouwen daartoe de oplossingen van de D.V. van Clairaut nog wat nader. Het blijkt dan, dat de rechte lijnen, die de algemene oplossing vormen, juist alle raaklijnen zijn van de parabool, die de singuliere oplossing vormt. De parabool is omhullende van het stelsel rechte lijnen in de zin van de volgende definitie.

Definitie. Een omhullende van een stelsel krommen is een kromme, die in elk van haar punten aan een exemplaar van het stelsel krommen raakt.

Op grond van de bovenstaande beschouwingen is het duidelijk, dat een omhullende van een stelsel oplossingen van een D.V. van de eerste orde bij het richtingsveld past en dus ook een oplossing is.

Vb.2
$$y^2 (y')^2 + y^2 = 1.$$

Dit leidt tot
$$\frac{dx}{dy} = \pm \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Dus
$$x - C = \pm \sqrt{1-y^2}$$

$$(x - C)^2 + y^2 = 1.$$

Dit is een stelsel cirkels met straal 1 en middelpunten op de x-as. Hiervan zijn de rechte lijnen $y = 1$ en $y = -1$ kennelijk omhullenden. Deze zijn ook oplossingen van de D.V.

N.B. Niet iedere singuliere oplossing van een D.V. is omhullende van de algemene oplossing !

§.4 Differentiaalvergelijkingen van hogere orde en stelsels differentiaalvergelijkingen.

In plaats van één D.V. met één onbekende functie kunnen we ook stelsels van meer dan één D.V. met meer onbekende functies beschouwen. Een voorbeeld hiervan is

$$\left. \begin{aligned} z + \frac{dz}{dx} - 2 \frac{dy}{dx} &= 0 \\ z - \frac{dz}{dx} - 2y &= 0 \end{aligned} \right\} ,$$

hetgeen twee vergelijkingen van de eerste orde zijn voor de onbekende functies $y(x)$ en $z(x)$. Om dit stelsel op te lossen ligt het het meest voor de hand om te trachten een van beide onbekenden en zijn afgeleide te elimineren en zo één D.V. met één onbekende over te houden.

In ons voorbeeld lukt dat gemakkelijk. Los y op uit de tweede vergelijking :

$$y = \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} \frac{dz}{dx} ,$$

en bepaal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dz}{dx} - \frac{1}{2} \frac{d^2 z}{dx^2} .$$

Dit substitueren we in de eerste vergelijking met als resultaat

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + z = 0 ,$$

hetgeen een D.V. van de tweede orde voor z is, met als algemene oplossing

$$z = A \cos x + B \sin x .$$

Substitutie hiervan in de tweede D.V. van het oorspronkelijke stelsel levert

$$y = \frac{1}{2} (A - B) \cos x + \frac{1}{2} (A + B) \sin x .$$

De algemene oplossing van het stelsel bevat dus twee willekeurige constanten.

We hebben hier dus twee vergelijkingen met twee onbekenden van de eerste orde omgezet in één vergelijking met één onbekende van de tweede orde. We kunnen ook het omgekeerde proces uitvoeren. Neem de D.V.

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y^2 - 1 = 0 .$$

Stel nu $\frac{dy}{dx} = z$, dan is de D.V. blijkbaar equivalent met het stelsel

$$\left. \begin{aligned} y \frac{dz}{dx} + x^2 z^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= z \end{aligned} \right\} ,$$

dat van de eerste orde is.

Ditzelfde kunnen we doen met een willekeurige D.V. van hogere orde $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. Stel $y = y_1$, $y' = y_2$, $y'' = y_3$, \dots , $y^{(n-1)} = y_n$, dan krijgen we het stelsel

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \frac{dy_2}{dx} = y_3, \dots, \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \frac{dy_n}{dx}) = 0,$$

bestaande uit n vergelijkingen van de eerste orde met n onbekenden.

Omgekeerd kan men vaak, zoals we hierboven aan een voorbeeld hebben gezien, een stelsel (z.g. simultane) D.V. omzetten in één D.V. van hogere orde met één onbekende functie. Vaak is het echter makkelijker het stelsel rechtstreeks op te lossen.

§.5 Simultane lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten.

$$\text{Vb.1} \quad \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 5x - 6y \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - 4y \end{aligned} \right\} .$$

Eerste methode. We elimineren y door y uit de eerste vergelijking op te lossen en in de tweede vergelijking te substitueren. Dit levert

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0,$$

met als algemene oplossing

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}.$$

Substitutie in de eerste vergelijking geeft

$$y = \frac{1}{2} C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}.$$

Tweede methode. Probeer een oplossing van de vorm

$$x = C e^{\lambda t}, \quad y = D e^{\lambda t}.$$

Dit geeft

$$\left. \begin{aligned} \lambda C e^{\lambda t} &= 5C e^{\lambda t} - 6D e^{\lambda t} \\ \lambda D e^{\lambda t} &= 3C e^{\lambda t} - 4D e^{\lambda t} \end{aligned} \right\} .$$

of

$$\left. \begin{aligned} (5 - \lambda)C - 6D &= 0 \\ 3C - (4 + \lambda)D &= 0 \end{aligned} \right\} .$$

We zoeken een oplossing die niet identiek nul is. Zulke C en D zijn alleen dan hieruit te vinden als

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -6 \\ 3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0.$$

Dus $\lambda = 2$ of $\lambda = -1$.

Nemen we $\lambda = 2$, dan vinden we $D = \frac{1}{2}C$; voor $\lambda = -1$ vinden we $D = C$.

Omdat de vergelijkingen homogeen en lineair zijn is de som van twee oplossingen weer een oplossing. Dus we vinden als algemene oplossing

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}, \quad y = \frac{1}{2} C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}. \quad G\left(\frac{1}{2}e^{2t}, \frac{1}{2}e^{-t}\right) + C_2(e^{-t}, e^{-t}) = (x, y)$$

Algemeen geval:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \right\} .$$

Probeer $x_1 = C_1 e^{\lambda t}$, $x_2 = C_2 e^{\lambda t}$, ..., $x_n = C_n e^{\lambda t}$. Dit geeft

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)C_1 + a_{12}C_2 + \dots + a_{1n}C_n &= 0 \\ a_{21}C_1 + (a_{22} - \lambda)C_2 + \dots + a_{2n}C_n &= 0 \\ \cdot &\cdot \\ a_{n1}C_1 + a_{n2}C_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)C_n &= 0 \end{aligned} \right\} .$$

Dit stelsel van n homogene lineaire vergelijkingen voor C_1, \dots, C_n heeft dan en slechts dan een van de nuloplossing verschillende oplossing als de coëfficiëntendeterminant = 0 is, d.w.z. als

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dit is een n° graadsvergelijking voor λ . Bij elke wortel kan men een stelsel C_1, \dots, C_n dat niet nul is bepalen. Heeft deze vergelijking n verschillende wortels dan vinden we door lineaire combinatie de algemene oplossing. Als de vergelijking meervoudige wortels heeft komen we oplossingen te kort. Evenals in het geval van één homogene lineaire D.V. van hogere orde met constante coëfficiënten kunnen we bij een k -voudige wortel voor λ een veelterm van de graad $k-1$ in t als factor bij $e^{\lambda t}$ zetten.

Vb.2
$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 6x + 4y \\ \frac{dy}{dt} &= -4x - 2y \end{aligned} \right\} .$$

De λ -vergelijking wordt nu

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & 4 \\ -4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0,$$

met een dubbele wortel $\lambda = 2$. Probeer dus

$$\left. \begin{aligned} x &= (A + Bt)e^{2t} \\ y &= (C + Dt)e^{2t} \end{aligned} \right\} .$$

Substitutie geeft

$$\left. \begin{aligned} 2A + 2Bt + B &= 6(A + Bt) + 4(C + Dt) \\ 2C + 2Dt + D &= -4(A + Bt) - 2(C + Dt) \end{aligned} \right\} .$$

Gelijkstelling van coëfficiënten levert

$$\left. \begin{aligned} 2B &= 6B + 4D \\ 2D &= -4B - 2D \\ 2A + B &= 6A + 4C \\ 2C + D &= -4A - 2C \end{aligned} \right\} ,$$

met als oplossing $D = -B$, $C = -A + \frac{1}{4}B$. Dus de algemene oplossing der D.V. is

$$\left. \begin{aligned} x &= (A + Bt)e^{2t} \\ y &= (-A + \frac{1}{4}B - Bt)e^{2t} \end{aligned} \right\} .$$

De wortels van de λ -vergelijking kunnen ook complex zijn.

$$\text{Vb.3} \quad \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - 5y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y \end{aligned} \right\} .$$

De λ -vergelijking wordt

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

met als wortels $2 + 3i$ en $2 - 3i$. Als oplossing proberen we

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{2t} (A \cos 3t + B \sin 3t) \\ y &= e^{2t} (C \cos 3t + D \sin 3t) \end{aligned} \right\} \rightarrow \dot{x} \rightarrow 5y = 3x - \dot{x}$$

Substitutie geeft

$$\left. \begin{aligned} 2A \cos 3t + 2B \sin 3t - 3A \sin 3t + 3B \cos 3t &= \\ &= 3A \cos 3t + 3B \sin 3t - 5C \cos 3t - 5D \sin 3t \\ 2C \cos 3t + 2D \sin 3t - 3C \sin 3t + 3D \cos 3t &= \\ &= 2A \cos 3t + 2B \sin 3t + C \cos 3t + D \sin 3t \end{aligned} \right\} .$$

Gelijkstelling van de coëfficiënten van sinus en cosinus afzonderlijk geeft

$$\left. \begin{aligned} 2A + 3B &= 3A - 5C \\ 2B - 3A &= 3B - 5D \\ 2C + 3D &= 2A + C \\ 2D - 3C &= 2B + D \end{aligned} \right\} ,$$

met als oplossing $C = \frac{1}{5}A - \frac{3}{5}B$, $D = \frac{3}{5}A + \frac{1}{5}B$. Dus de algemene oplossing der D.V. luidt

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{2t} (A \cos 3t + B \sin 3t) \\ y &= \frac{1}{5}e^{2t} [(A - 3B)\cos 3t + (3A + B) \sin 3t] \end{aligned} \right\} .$$

Tenslotte nog een voorbeeld met drie onbekenden.

$$\text{Vb.4} \quad \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + z \\ \frac{dy}{dt} &= x + z \\ \frac{dz}{dt} &= x + y \end{aligned} \right\} .$$

De λ -vergelijking is

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2) = 0.$$

De enkelvoudige wortel $\lambda = 2$ geeft als vergelijkingen voor C_1, C_2, C_3 :

$$\left. \begin{aligned} -2C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 - 2C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 + C_2 - 2C_3 &= 0 \end{aligned} \right\} ,$$

met als oplossing $C_1 = C_2 = C_3$, en dus

$$x = y = z = C e^{2t}.$$

Bij de dubbele wortel $\lambda = -1$ zouden we dus factoren van de gedaante $A + Bt$ moeten toevoegen. Dit blijkt echter hier niet nodig te zijn, omdat in de lineaire vergelijkingen voor C_1, C_2, C_3 een extra rangverlaging optreedt, zodat deze al voldoende onafhankelijke constanten opleveren. Het stelsel bestaat nl. uit drie maal de vergelijking

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0.$$

We vinden dus als algemene oplossing

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{-t} + D e^{2t} \\ y &= C_2 e^{-t} + D e^{2t} \\ z &= -(C_1 + C_2) e^{-t} + D e^{2t} \end{aligned} \right\} .$$

Een belangrijke toepassing van de vergelijkingen van het in deze paragraaf behandelde type is op trillende systemen met meer dan één vrijheidsgraad. Dat is de reden waarom we hier voor de onafhankelijk veranderlijke de letter t (= tijd in de toepassingen) hebben gekozen. Het is dan van belang om te weten of de afwijkingen van de evenwichtstoestand bij toenemende t niet steeds groter worden, d.w.z. dat het systeem niet explodeert. Bij reële wortels van de λ -vergelijking behoren termen van de vorm $e^{\lambda t}$, die voor $t \rightarrow \infty$ naar ∞ of 0 gaan al naar gelang $\lambda > 0$ of $\lambda < 0$. Bij complexe wortels van de λ -vergelijking behoren termen van de vorm $e^{\alpha t} \cos \beta t$ en $e^{\alpha t} \sin \beta t$, waarin α het reële deel van λ is. Als dus alle wortels van de λ -vergelijking een negatief reëel deel hebben sterft de beweging op den duur uit. Heeft minstens één der wortels een positief reëel deel, dan moeten we vrezen dat de uitwijkingen steeds groter worden, tenzij de begintoestand zo is gekozen, dat de hiervoor verantwoordelijke termen niet optreden. Het geval dat er wortels zijn met reëel deel = 0 (die als ze enkelvoudig zijn termen geven van een gewone ongedempte trilling) is wat ingewikkelder, omdat dan meervoudige wortels een speciale rol gaan spelen.

De D.V., die we tot nu toe in deze paragraaf hebben behandeld, waren allen homogeen. We beschouwen nu een inhomogeen lineair stelsel.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n + A_1(t) \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n + A_n(t) \end{aligned} \right\}$$

Stel dat we twee oplossingen $x_1 = f_1(t), \dots, x_n = f_n(t)$ en $x_1 = g_1(t), \dots, x_n = g_n(t)$ van dit stelsel hebben, d.w.z., er geldt

$$\left. \begin{aligned} f_1'(t) &= a_{11} f_1(t) + \dots + a_{1n} f_n(t) + A_1(t) \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ f_n'(t) &= a_{n1} f_1(t) + \dots + a_{nn} f_n(t) + A_n(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} g_1'(t) &= a_{11} g_1(t) + \dots + a_{1n} g_n(t) + A_1(t) \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ g_n'(t) &= a_{n1} g_1(t) + \dots + a_{nn} g_n(t) + A_n(t) \end{aligned} \right\}$$

Noemen we nu $g_1(t) - f_1(t) = h_1(t), \dots, g_n(t) - f_n(t) = h_n(t)$, dan vinden we door aftrekking van de overeenkomstige regels uit bovenstaande stelsels gelijkheden

$$\left. \begin{aligned} h_1'(t) &= a_{11} h_1(t) + \dots + a_{1n} h_n(t) \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ h_n'(t) &= a_{n1} h_1(t) + \dots + a_{nn} h_n(t) \end{aligned} \right\} ,$$

d.w.z. $x_1 = h_1(t), \dots, x_n = h_n(t)$ is een oplossing van het corresponderende homogene stelsel vergelijkingen.

Omgekeerd als $x_1 = f_1(t), \dots, x_n = f_n(t)$ een oplossing van het inhomogene stelsel is en $x_1 = h_1(t), \dots, x_n = h_n(t)$ een oplossing van het corresponderende homogene stelsel, dan is $x_1 = f_1(t) + h_1(t), \dots, x_n = f_n(t) + h_n(t)$ een oplossing van het inhomogene stelsel. Daarmee hebben we de volgende stelling.

Stelling | Als $x_1 = f_1(t), \dots, x_n = f_n(t)$ een particuliere oplossing van het inhomogene stelsel is en $x_1 = h_1(t), \dots, x_n = h_n(t)$ de algemene oplossing van het corresponderende homogene stelsel, dan is $x_1 = f_1(t) + h_1(t), \dots, x_n = f_n(t) + h_n(t)$ de algemene oplossing van het inhomogene stelsel.

Opmerking : Deze stelling geldt ook als de coëfficiënten van het homogene lineaire stelsel niet constant zijn.

$$\left. \begin{aligned} \text{Vb.5} \quad \frac{dx}{dt} &= 5x - 6y - 4e^t \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - 4y - 3e^t \end{aligned} \right\}$$

De corresponderende homogene vergelijking is in voorbeeld 1 behandeld. Probeer voor de particuliere oplossing $x = ae^t$, $y = be^t$. Dit geeft

$$\left. \begin{aligned} a &= 5a - 6b - 4 \\ b &= 3a - 4b - 3 \end{aligned} \right\} \quad \text{dus } a = 1, b = 0.$$

De algemene oplossing luidt dus

$$\left. \begin{aligned} x &= e^t + C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \\ y &= \frac{1}{2} C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \end{aligned} \right\}$$

§.6 Oplossing door machtrekssubstitutie.

A. Gewone machtrekssubstitutie

We demonstreren de methode eerst aan een eenvoudig voorbeeld, waarvan we de oplossing ook op een andere manier makkelijk kunnen bepalen.

$$\text{Vb.1} \quad y' - xy = 0.$$

Met scheiding van veranderlijken zien we dat de algemene oplossing

$$y = C e^{\frac{1}{2}x^2} \quad \text{is. Neem voor } y \text{ een machtreeks}$$

$y = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots + u_n x^n + \dots$. We trachten de coëfficiënten u_0, u_1, \dots van deze machtreeks zo te bepalen, dat aan de D.V. voldaan is. Er geldt :

$$y' = u_1 + 2u_2 x + 3u_3 x^2 + \dots$$

Substitutie in de D.V. geeft

$$(u_1 + 2u_2 x + 3u_3 x^2 + \dots) - (u_0 x + u_1 x^2 + u_2 x^3 + \dots) = 0.$$

We stellen nu de coëfficiënten van elke macht van x afzonderlijk hierin = 0.

Dit geeft

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ 2u_2 - u_0 &= 0 \\ 3u_3 - u_1 &= 0 \\ 4u_4 - u_2 &= 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ nu_n - u_{n-2} &= 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

Hieruit volgt $0 = u_1 = u_3 = u_5 = u_7 \dots$. Voor de even indices geldt

$$u_{2n} = \frac{u_{2n-2}}{2n} = \frac{u_{2n-4}}{2n(2n-2)} = \frac{u_{2n-6}}{2n(2n-2)(2n-4)} = \dots = \frac{u_0}{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2} = \frac{u_0}{2^n n!}.$$

We vinden dus als oplossing $y = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} x^{2n} =$

$$= u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = u_0 e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Het procédé is dus, dat we voor y een machtreeks met onbepaalde coëfficiënten in de D.V. substitueren en dan trachten, door de coëfficiënt van elke macht van x afzonderlijk nul te stellen, deze onbepaalde coëfficiënten te bepalen. Dit lukt altijd bij een lineaire D.V., waarvan de coëfficiënten en het rechterlid in een machtreeks te ontwikkelen zijn en de coëfficiënt van de hoogste orde afgeleide 1 is. We zullen dat aantonen voor een vergelijking van de tweede orde (het gaat echter geheel analoog voor vergelijkingen van hogere orde) :

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x).$$

We veronderstellen a , b en f in machtreeksen ontwikkeld. Probeer

$$y = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

Dan is

$$y' = u_1 + 2u_2 x + 3u_3 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) u_{n+1} x^n,$$

$$y'' = 2u_2 + 2 \cdot 3u_3 x + 3 \cdot 4u_4 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) u_{n+2} x^n.$$

Substitueren we dit, dan komt er in $a(x)y'$ en in $b(x)y$ het product van twee machtreeksen te staan. Stel

$$b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

$$\text{dus } b(x)y = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots)(u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots).$$

Om hierin de coëfficiënt van x^n te vinden, moeten we blijkbaar in de ene factor de coëfficiënt van x^k nemen en die vermenigvuldigen met de coëfficiënt van x^{n-k} in de andere factor en dit vervolgens optellen voor alle waarden van k lopende van 0 tot n .

$$\text{Dus } b_n u_0 + b_{n-1} u_1 + \dots + b_1 u_{n-1} + b_0 u_n.$$

Meer formeel met Σ -tekens opgeschreven :

$$\begin{aligned} b(x)y &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_m u_k x^{m+k} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m+k=n} b_m u_k \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n b_{n-k} u_k \right) x^n. \end{aligned}$$

Op analoge wijze gaan we te werk met $a(x)y'$. Stel

$$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$\begin{aligned} a(x)y' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) u_{n+1} x^n \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_m u_{k+1} x^{m+k} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+m=n} (k+1) a_m u_{k+1} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+1) a_{n-k} u_{k+1} \right) x^n. \end{aligned}$$

Uitgeschreven ziet de coëfficiënt van x^n er dus als volgt uit :

$$a_n u_1 + 2a_{n-1} u_2 + \dots + n a_1 u_n + (n+1) a_0 u_{n+1}.$$

De coëfficiënt van x^n bevat nu $(n+1)(n+2)u_{n+2}$ als bijdrage van y'' ;

In de bijdragen van $a(x)y'$ en $b(x)y$ komen echter alleen u_0, u_1, \dots, u_{n+1}

voor en in de bijdrage van het rechterlid komt geen der u 's voor.

We kunnen dus hieruit u_{n+2} oplossen en uitdrukken in u_0, u_1, \dots, u_{n+1} .

Zo kunnen we de u 's successievelijk bepalen. We kiezen u_0 en u_1 willekeurig.

Uit de coëfficiënt van x^0 bepalen we u_2 als functie van u_0 en u_1 ,

vervolgens bepalen we uit de coëfficiënt van x^1 u_3 als functie van de

inmiddels bekende u_0, u_1, u_2 enz.

We moeten eigenlijk nog bewijzen, dat de zo gevonden machtreeks voor y een positieve convergentiestraal heeft. Als deze straal = 0 zou zijn, zou de machtreeks alleen voor $x = 0$ convergeren en dus geen oplossing geven.

Men kan inderdaad bewijzen, dat als de machtreeksen voor a , b en f positieve convergentiestralen hebben, dit ook geldt voor de hier gevonden machtreeks voor y . Dit voeren we hier niet uit.

Bij de oplossing hebben we gevonden, dat u_0 en u_1 willekeurig kunnen worden gekozen; we vinden dus een oplossing met twee willekeurige constanten, dus de algemene oplossing van de D.V. van de tweede orde.

Vb.2 $(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p + 1)y = 0$ (D.V. van Legendre).

Hierin is p een constante. Weliswaar is de coëfficiënt van y'' niet gelijk aan 1, maar als we door $1 - x^2$ delen is dat wel zo en zijn de coëfficiënten van y' en y nog steeds in een machtreeks te ontwikkelen. We substitueren weer

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n,$$

dan komt er

$$(1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)u_{n+2}x^{n+2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)u_{n+1}x^{n+1} + p(p+1) \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = 0.$$

De coëfficiënt van x^n is

$$(n+2)(n+1)u_{n+2} - n(n-1)u_n - 2nu_n + p(p+1)u_n.$$

Het is duidelijk dat dit voor $n \geq 2$ geldt. Directe verificatie leert ons echter dat het ook voor $n = 0$ en $n = 1$ juist is. We stellen dit nu nul :

$$(n+2)(n+1)u_{n+2} + (p-n)(p+n+1)u_n = 0 \quad \text{voor } n = 0, 1, 2, \dots$$

en dit levert

$$u_n = - \frac{(p-n+2)(p+n-1)}{n(n-1)} u_{n-2} \quad \text{voor } n = 2, 3, \dots$$

Voor even indices geeft dit

$$u_{2n} = (-1)^n \frac{p(p-2) \dots (p-2n+2)(p+1)(p+3) \dots (p+2n-1)}{(2n)!} u_0,$$

en voor oneven indices

$$u_{2n+1} = (-1)^n \frac{(p-1)(p-3) \dots (p-2n+1)(p+2)(p+4) \dots (p+2n)}{(2n+1)!} u_1.$$

We vinden dus de volgende twee onafhankelijke oplossingen :

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p(p-2) \dots (p-2n+2)(p+1)(p+3) \dots (p+2n-1)}{(2n)!} x^{2n},$$

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(p-1)(p-3) \dots (p-2n+1)(p+2)(p+4) \dots (p+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Deze machtreeksen hebben convergentiestraal 1. Een uitzondering treedt op als p geheel is, omdat dan in één van beide machtreeksen de coëfficiënten van een zekere index af nul worden. We beperken ons tot $p \geq 0$.

Als $p = 2m$ ($m \geq 0$), dan worden in $y_1(x)$ de termen met $n > m$ nul en als $p = 2m + 1$ ($m \geq 0$), dan gebeurt hetzelfde in $y_2(x)$. We vinden in beide gevallen dus een oplossing die een veelterm is. Door deze met een passende constante te vermenigvuldigen krijgen we de polynomen van Legendre $P_p(x)$, en wel

$$P_{2m}(x) = \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m} (m!)^2} y_1(x) \text{ voor } p = 2m,$$

$$P_{2m+1}(x) = \frac{(-1)^m (2m+1)!}{2^{2m} (m!)^2} y_2(x) \text{ voor } p = 2m + 1.$$

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

Als de coëfficiënt van de hoogste orde afgeleide niet = 1 is, kan de zoëven behandelde methode falen.

Vb.3 $2xy' - y = 0.$

Substitueer $y = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$, dan leidt dit tot

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n u_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = 0,$$

en dit geeft $(2n - 1)u_n = 0$, dus $u_n = 0$ voor alle $n = 0, 1, 2, \dots$.

We vinden dus alleen de nuloplossing. Met scheiding van veranderlijken zien we dat de algemene oplossing luidt

$$y = C \sqrt{|x|},$$

die inderdaad niet in een machtreeks naar machten van x is te ontwikkelen. We hadden de coëfficiënt van y' wel = 1 kunnen maken door door $2x$ te delen, maar dan was de nieuwe coëfficiënt van y niet meer in een machtreeks te ontwikkelen.

B. Uitbreiding der machtreekssubstitutie

Voor de toepassingen zeer belangrijke differentiaalvergelijkingen zijn juist van een type, waarin gewone machtreekssubstitutie faalt. We bespreken een gewijzigde methode die bruikbaar is voor D.V. van de vorm

$$(1) \quad x^2 y'' + x a(x) y' + b(x) y = 0,$$

waarin a en b in een machtreeks te ontwikkelen zijn. We doen het eerst met een voorbeeld.

Vb.4 $x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0$ (D.V. van Bessel).

Hierin is p een constante ≥ 0 .

We proberen nu de substitutie $y = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ met passend te kiezen constante α . We kunnen nu $u_0 \neq 0$ aannemen, daar we dit door wijziging van α kunnen bereiken (de nuloplossing interesseert ons niet). Nu is

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+n) u_n x^{\alpha+n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+n)(\alpha+n-1) u_n x^{\alpha+n-2}.$$

Substitutie geeft:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+n)(\alpha+n-1) u_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+n) u_n x^{\alpha+n} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{\alpha+n+2} - p^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{\alpha+n} = 0.$$

Nulstellen van de afzonderlijke machten van x geeft

$$\left. \begin{aligned} (\alpha^2 - p^2) u_0 &= 0 \\ \{ (\alpha + 1)^2 - p^2 \} u_1 &= 0 \\ \{ (\alpha + n)^2 - p^2 \} u_n + u_{n-2} &= 0 \quad \text{voor } n \geq 2 \end{aligned} \right\}.$$

Wegens $u_0 \neq 0$ levert de eerste voorwaarde ons de indiciaalvergelijking voor α :

$$\alpha^2 - p^2 = 0,$$

met als wortels $\alpha = \pm p$. We beschouwen eerst $\alpha = p$. Dan is

$(p + n)^2 - p^2 \neq 0$ voor $n = 1, 2, \dots$. Dus $0 = u_1 = u_3 = u_5 = \dots$ en

$$u_{2n} = - \frac{u_{2(n-1)}}{4n(n+p)} = \dots = (-1)^n \frac{u_0}{4^n n! (n+p)(n-1+p) \dots (1+p)}.$$

Neem nu $\alpha = -p$. We kiezen eerst $0 = u_1 = u_3 = u_5 = \dots$.

De coëfficiënt van u_{2n} is $(2n - p)^2 - p^2 = 4n(n - p)$ en dit is altijd $\neq 0$, behalve als p een geheel getal is.

Veronderstel eerst dat p niet geheel is, dan is

$$u_{2n} = - \frac{u_{2(n-1)}}{4n(n-p)} = \dots = (-1)^n \frac{u_0}{4^n n!(n-p)(n-1-p)\dots(1-p)}.$$

We hebben nu twee onafhankelijke oplossingen gevonden, waarvan de tweede uit de eerste ontstaat door p door $-p$ te vervangen. Als $y_1(x)$ en $y_2(x)$ twee van zulke onafhankelijke oplossingen zijn dan is voor p niet geheel, de algemene oplossing van de D.V. van Bessel

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Stel nu p geheel. We beginnen met $p = 0$. Dan zijn de oplossingen behorende bij $\alpha = p$ en $\alpha = -p$ dezelfde. We vinden dan geen twee onafhankelijke oplossingen. Als $p = m > 0$ (m geheel), dan blijft de eerste oplossing bestaan maar $\alpha = -m$ leidt niet tot een oplossing, want de coëfficiënt van u_{2m} is nul, dus $0 = u_{2m-2} = u_{2m-4} = \dots = u_0$, hetgeen een contradictie is (hiervoor hoeft niet verondersteld te worden, dat $0 = u_1 = u_3 = u_5 = \dots$).

We vinden met onze methode in het geval van gehele $p = m$ alleen de oplossing behorende bij $\alpha = m$.

Dit geeft

$$y(x) = x^m + x^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+m)(n-1+m)\dots(1+m)} x^{2n}.$$

Vermenigvuldigt men deze met $\frac{1}{2^m m!}$, dan ontstaat de Bessel-functie

$J_m(x)$ van de eerste soort en orde m :

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}.$$

Ook in het geval van niet gehele p kan men door de eerste door ons gevonden oplossing met een (hier niet aan te geven) constante factor te vermenigvuldigen een functie $J_p(x)$ krijgen, die Bessel-functie van de eerste soort en orde p genoemd wordt.

Behalve de gewone D.V. van Bessel wordt ook wel beschouwd de D.V.

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0,$$

met een soortgelijke oplossing als de gewone D.V. van Bessel (alleen de factor $(-1)^n$ treedt niet op). Met $J_m(x)$ correspondeert

$$I_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m},$$

en ook voor algemene p een $I_p(x)$.

De in voorbeeld 4 gebruikte methode van substitutie kan in het algemene geval van een D.V. van het type (1) toegepast worden. Ook dan komt er als indiciaalvergelijking een vierkantsvergelijking voor α . Als het verschil van de wortels α_1 en α_2 niet geheel is, leiden beide wortels tot een oplossing en wordt dus de algemene oplossing van de D.V. gevonden. Als het verschil geheel is, leidt in ieder geval de grootste van de twee tot een oplossing. Het kan gebeuren dat de kleinste ook tot een oplossing leidt, maar het kan ook gebeuren, dat dit niet zo is. In het laatste geval en in het geval dat de wortels samenvallen is een tweede oplossing van de vorm

$$y_1(x) \log x + x^{\alpha_1} u(x)$$

te vinden, waarin $y_1(x)$ de bij de wortel α_1 behorende oplossing is en $u(x)$ een machtreeks; hierbij is $\alpha_1 \geq \alpha_2$ verondersteld.

Al deze beweringen bewijzen we niet.

In het geval van de Bessel-functie van gehele orde m leidt dit tot een tweede oplossing $Y_m(x)$. Met de functie $I_m(x)$ correspondeert in dat geval een tweede functie $K_m(x)$.

Van de Bessel-functies bestaan uitvoerige tabellen. Bovendien zijn hun eigenschappen uitvoerig onderzocht.

Als men op de D.V.

$$x^2 y'' + ax y' + (c + d^2 x^{2s})y = 0$$

de substituties $y = x^{\frac{1}{2}(1-a)} z$, $t = \frac{d}{s} x^s$ toepast, dan krijgt men voor z als functie van t een D.V. van Bessel met

$$p = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - c}}{s}.$$

Als $Z(t)$ een oplossing van deze D.V. is, dan is

$$x^{\frac{1}{2}(1-a)} Z\left(\frac{d}{s} x^s\right)$$

een oplossing van de oorspronkelijke vergelijking.

We merken tenslotte nog op dat we in deze gehele paragraaf ook hadden kunnen werken met machtreeksen, die opklimmende machten van $x - a$ bevatten met een constante a .

§.7 Benaderende oplossingsmethoden.

Veronderstel dat er een D.V. van de vorm $y' = f(x,y)$ gegeven is die we met geen der bekende methoden kunnen oplossen. We bespreken nu twee methoden die onder bepaalde omstandigheden tot een benadering van een oplossing kunnen leiden. Laat de oplossing gevraagd zijn, die door het punt (a,b) gaat. Veronderstel dat we zo'n oplossing $y(x)$ bezitten en dat $f(x,y)$ continu is. Dan geldt

$$(1) \quad \frac{dy(x)}{dx} = f(x,y(x)), \quad y(a) = b,$$

waaruit door integratie tussen de grenzen a en x volgt

$$y(x) - b = \int_a^x \frac{dy(t)}{dt} dt = \int_a^x f(t,y(t))dt.$$

Dus deze oplossing van de D.V. voldoet aan

$$(2) \quad y(x) = b + \int_a^x f(t,y(t))dt.$$

Omgekeerd, als $y(x)$ aan (2) voldoet, voldoet $y(x)$ ook aan (1). We trachten nu (2) op te lossen door in het rechterlid een "benadering" $y = u(x)$ in te zetten in de hoop in het linkerlid een betere benadering

$$v(x) = b + \int_a^x f(t,u(t))dt$$

te verkrijgen. Dit proces kan herhaald worden. Gaat men bv. uit van de functie $y_1(x) = b$ (constant), dan kan men zo successievelijk $y_2(x)$, $y_3(x)$, ... bepalen door de algemene betrekking

$$y_{n+1}(x) = b + \int_a^x f(t, y_n(t))dt.$$

Men kan bewijzen, dat onder bepaalde voorwaarden, op te leggen aan de functie f , de rij functies $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... convergeert naar een limietfunctie, die oplossing is van de D.V. Dit voeren we niet uit, maar wel merken we op dat, als men het proces enige malen toepast, men vaak een redelijke benadering van de gezochte oplossing verkrijgt.

Vb.1 $y' = x + y^2$. Gevraagd de oplossing, die door $(0,0)$ gaat.

In dit geval is $f(x,y) = x + y^2$. Neem $y_1(x) = 0$. Dan is

$$y_2(x) = \int_0^x [t + (y_1(t))^2] dt = \int_0^x t dt = \frac{1}{2} x^2,$$

$$y_3(x) = \int_0^x (t + \frac{1}{4} t^4) dt = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{20} x^5,$$

$$y_4(x) = \int_0^x (t + (\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{20}t^5)^2) dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{160}x^8 + \frac{1}{4400}x^{11}.$$

Een analoge methode kan worden toegepast op stelsels D.V. van de eerste orde. We schetsen dit voor het geval van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Laat het stelsel gegeven zijn door

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y,z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x,y,z),$$

en laat de oplossing gevraagd zijn, waarvoor $y(a) = b$, $z(a) = c$ geldt, dan voldoet een dergelijke oplossing aan

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= b + \int_a^x f(t,y(t), z(t))dt \\ z(x) &= c + \int_a^x g(t,y(t), z(t))dt \end{aligned} \right\}$$

Neem nu $y_1(x) = b$, $z_1(x) = c$, dan vinden we $y_2(x)$, $z_2(x)$, $y_3(x)$, $z_3(x)$, ... successievelijk uit

$$\left. \begin{aligned} y_{n+1}(x) &= b + \int_a^x f(t,y_n(t), z_n(t))dt \\ z_{n+1}(x) &= c + \int_a^x g(t,y_n(t), z_n(t))dt \end{aligned} \right\}$$

In paragraaf 4 hebben we gezien, dat een D.V. van hogere orde altijd gereduceerd kan worden tot een stelsel D.V. van de eerste orde. De methode kan dus ook op D.V. van hogere orde toegepast worden.

Vb.2 $y'' = x + y^2$. Gevraagd de oplossing, waarvoor geldt $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. We vervangen de D.V. door het stelsel

$$\left. \begin{aligned} z' &= x + y^2 \\ y' &= z \end{aligned} \right\},$$

met de voorwaarden $y(0) = 0$, $z(0) = 1$. We vervangen dit door

$$y(x) = \int_0^x z(t) dt,$$

$$z(x) = 1 + \int_0^x [t + (y(t))^2] dt.$$

Neem nu $y_1(x) = 0$, $z_1(x) = 1$. Dan is $y_2(x) = \int_0^x 1 dt = x$,

$$z_2(x) = 1 + \int_0^x t dt = 1 + \frac{1}{2} x^2, \quad y_3(x) = \int_0^x (1 + \frac{1}{2} t^2) dt = x + \frac{1}{6} x^3,$$

$$z_3(x) = 1 + \int_0^x (t + t^2) dt = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3,$$

$$y_4(x) = \int_0^x (1 + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{3} t^3) dt = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{12} x^4,$$

$$z_4(x) = 1 + \int_0^x (t + t^2 + \frac{1}{3} t^4 + \frac{1}{36} t^6) dt = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{15} x^5 + \frac{1}{252} x^7,$$

$$y_5(x) = \int_0^x (1 + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{15} t^5 + \frac{1}{252} t^7) dt = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{90} x^6 + \frac{1}{2016} x^8,$$

enz.

Een tweede methode is analoog met de numerieke benadering van een integraal (bv. met de formule van Simpson) en sluit direct aan bij het beeld van het richtingsveld, gegeven in paragraaf 3.

We gaan weer uit van de D.V. $y' = f(x, y)$. Een oplossing hiervan, die door het punt (x_0, y_0) gaat, heeft in dat punt een raaklijn met richtingscoëfficiënt $f(x_0, y_0)$ en kan dus in de buurt van dit punt benaderd worden met de rechte lijn

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

We verdelen nu het stuk van de x-as tussen x_0 en a , waar we de oplossing willen beschouwen, in kleine stukjes door deelpunten x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , die voldoen aan $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < a$. Van links naar rechts gaand nemen we in elk stukje een benadering met een rechte lijn als hierboven aangegeven. Deze rechte geeft weer het beginpunt van de benadering in het volgende stukje. Het totale beeld wordt zo een gebroken lijn. De ordinaten y_1, y_2, \dots, y_{n-1} , behorende bij x_1, \dots, x_{n-1} bij de benadering worden dus successievelijk gevonden uit

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \\ y_2 - y_1 &= f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) \\ &\dots \\ y_{n-1} - y_{n-2} &= f(x_{n-2}, y_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2}). \end{aligned}$$

Tenslotte wordt de ordinat b van de benadering behorende bij de abscis a gevonden uit

$$b - y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})(a - x_{n-1}).$$

Door optelling vinden we hieruit

$$\begin{aligned} b = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{n-2}, y_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ + f(x_{n-1}, y_{n-1})(a - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Door de stukjes kleiner te maken en het aantal deelpunten te vergroten, kan men de benadering verbeteren. Voor ieder ander punt x tussen x_0 en a kunnen we een soortgelijke formule opschrijven. Ook voor een punt, dat links van x_0 is gelegen, gaat het analoog, waarbij we dan van rechts naar links moeten werken.

Als we het zeer eenvoudige geval beschouwen, dat f alleen van x en niet van y afhangt, dus $y' = f(x)$, dan krijgen we

$$b = y_0 + f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{n-1})(a - x_{n-1}),$$

hetgeen inderdaad, zoals we uit de integraalrekening weten, een benadering is van de oplossing

$$y = y_0 + \int_{x_0}^a f(t) dt.$$

Vaak neemt men, ter vereenvoudiging van de berekening, de stukjes even groot, dus $x_k - x_{k-1} = h$. Dan vereenvoudigt de algemene formule zich tot

$$\begin{aligned} b = y_0 + h \{ f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1) + \dots + f(x_{n-2}, y_{n-2}) \} \\ + f(x_{n-1}, y_{n-1})(a - x_{n-1}). \end{aligned}$$

De berekening kan overzichtelijk worden opgeschreven in een tabel met vier kolommen, waarin in elke regel van links naar rechts opgeschreven worden: x_k , y_k , $f(x_k, y_k)$, $(x_{k+1} - x_k) f(x_k, y_k)$. De eerste kolom is bepaald door de gekozen verdeling. De y_k wordt uit het resultaat van de vorige regel gevonden, want

$$y_k = y_{k-1} + (x_k - x_{k-1}) f(x_{k-1}, y_{k-1}),$$

dus door optelling van het resultaat op de tweede en vierde plaats in de vorige regel.

Het volgende voorbeeld dient alleen ter illustratie van de methode. We kiezen een D.V., waarvan we de oplossing kennen, om de benadering met het exacte resultaat te vergelijken.

Vb.3 $y' = -\frac{x}{y}$. Gevraagd de oplossing door $(0,1)$ en wel de waarde hiervan voor $x = \frac{1}{2}$. We kiezen een verdeling in stukjes ter lengte $h = 0,1$.

We krijgen de volgende tabel

x_k	y_k	$f(x_k, y_k)$	$(x_{k+1} - x_k) f(x_k, y_k)$
0	1	0	0
0,1	1	-0,1	-0,01
0,2	0,99	-0,20	-0,020
0,3	0,97	-0,31	-0,031
0,4	0,939	-0,43	-0,043
0,5	0,896		

De correcte waarde is $\frac{1}{2} \sqrt{3} = 0,866$. Een verdeling in 5 stukken is nog vrij grof.

Ook deze methode is tot stelsels D.V. en dus ook tot D.V. van hogere orde uit te breiden.

Het onbevredigende van de in deze paragraaf behandelde benaderingsmethoden is, dat we nog geen informatie hebben over de fout, die we maken als we een bepaalde graad van benadering hebben gekozen. Op deze kwestie gaan we hier niet verder in.

§.8 Laplace-transformatie.

Inleiding

We beginnen met een eenvoudig voorbeeld. Stel dat de oplossing gevraagd is van de D.V.

$$y' - 2y = e^x,$$

waarvoor geldt $y(0) = 0$.

Laat $y(x)$ zo'n oplossing zijn en neem aan, dat voor deze oplossing geldt dat

$$Y(p) = \int_0^{\infty} y(x) e^{-px} dx$$

bestaat, althans voor voldoende grote p . Verder stel verder dat

$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) e^{-px} = 0$. Met behulp van partiële integratie vinden we dan (bedenk dat $y(0) = 0$) :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y(x) e^{-px} dx &= \left[-\frac{1}{p} y(x) e^{-px} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} y'(x) e^{-px} dx = \\ &= \frac{1}{p} \int_0^{\infty} y'(x) e^{-px} dx. \end{aligned}$$

Omdat $y(x)$ een oplossing is van de D.V., geldt $y'(x) - 2y(x) = e^x$.

We vermenigvuldigen nu beide leden met e^{-px} en integreren van 0 tot ∞ . Dit geeft

$$(p - 2) Y(p) = \int_0^{\infty} e^x e^{-px} dx.$$

$$\text{Nu is } \int_0^{\infty} e^{ax} e^{-px} dx = \int_0^{\infty} e^{(a-p)x} dx = \left[\frac{1}{a-p} e^{(a-p)x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}$$

voor $p > a$. Dus als $p > 1$ is en p bovendien zo groot is dat $Y(p)$

$$\text{bestaat, geldt } Y(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}.$$

Dus als bovendien $p > 2$, is

$$Y(p) = \int_0^{\infty} (e^{2x} - e^x) e^{-px} dx,$$

dus

$$\int_0^{\infty} (y(x) - e^{2x} + e^x) e^{-px} dx = 0$$

voor voldoende grote p . Dit is natuurlijk juist als $y(x) = e^{2x} - e^x$.

Of nu omgekeerd uit het nul zijn van bovenstaande integraal voor alle

(voldoende grote) p volgt dat $y(x) = e^{2x} - e^x$, weten we nog niet. Het is in werkelijkheid wel zo en de zo voor $y(x)$ gevonden functie is dan ook inderdaad de gezochte oplossing, die we natuurlijk ook wel op andere wijze hadden kunnen vinden.

Het blijkt dus, dat het procédé om met e^{-px} te vermenigvuldigen en dan van 0 tot ∞ te integreren na enige manipulaties tot een formule leidt, waarin de oplossing van de D.V. kan worden afgelezen. Dit procédé is zo belangrijk, dat het een naam heeft gekregen.

Definitie en enkele eigenschappen van de Laplace-transformatie

Laat $f(x)$ een functie zijn, die voor alle reële $x \geq 0$ gedefinieerd is en waarvoor

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx$$

bestaat voor voldoende grote p .

Definitie. De functie $F(p)$ die gedefinieerd is door

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx$$

heet de Laplace-getransformeerde van $f(x)$.

Symbolische aanduiding:

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}.$$

De overgang van $f(x)$ naar $F(p)$ heet Laplace-transformatie. Deze wordt in allerlei gebieden van de wiskunde toegepast, o.a. bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen.

Eigenschappen

I $\mathcal{L}\{f(x) + g(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} + \mathcal{L}\{g(x)\}.$

II $\mathcal{L}\{C f(x)\} = C \mathcal{L}\{f(x)\}$ voor constante C .

III $\mathcal{L}\{f'(x)\} = -f(0) + p \mathcal{L}\{f(x)\}$, als $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) e^{-px} = 0$.

De eigenschappen I en II volgen direct uit de definitie. Ze betekenen, dat \mathcal{L} een lineaire afbeelding is. Eigenschap III vinden we met partiële integratie:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(x)\} &= \int_0^{\infty} f'(x) e^{-px} dx = [f(x) e^{-px}]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx = \\ &= -f(0) + p \mathcal{L}\{f(x)\}. \end{aligned}$$

Door eigenschap III herhaalde malen toe te passen, vinden we

IV $\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = -[f^{(n-1)}(0) + p f^{(n-2)}(0) + \dots + p^{n-1} f(0)] + p^n \mathcal{L}\{f(x)\},$

als $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) e^{-px} = 0$ voor $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Toepassing op differentiaalvergelijkingen. Het omkeerprobleem

Bovenstaande eigenschappen maken de Laplace-transformatie geschikt voor het oplossen van lineaire D.V. met constante coëfficiënten.

We demonstreren dit aan een vergelijking van de tweede orde:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Noem ter afkorting $Y(p) = \mathcal{L}\{y(x)\}$ en $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$.

Past men Laplace-transformatie toe, dan krijgt men:

$$- [y'(0) + py(0)] + p^2 Y(p) - a_1 y(0) + a_1 p Y(p) + a_2 Y(p) = F(p),$$

$$Y(p) = \frac{p y(0) + y'(0) + a_1 y(0) + F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Als nu $y(0)$ en $y'(0)$ gegeven zijn, is hierdoor de getransformeerde van $y(x)$ geheel vastgelegd. De voornaamste moeilijkheid is nu echter, uit de getransformeerde de oorspronkelijke functie terug te vinden. Hiervoor bestaan algemene methoden, die we hier echter niet kunnen bespreken. Bovendien kan men bewijzen, dat de oorspronkelijke functie, indien zij continu is, door haar getransformeerde ondubbelzinnig bepaald is. Er bestaan echter ook uitvoerige tabellen, waarin men kan trachten de gezochte functie te vinden (bv. G.Doetsch, Tabellen zur Laplace-Transformation, of Bateman manuscript project, Tables of integral transforms, Volume I).

Enkele hulpmiddelen bij het terugzoeken

Vaak kan men de getransformeerde schrijven als een product van twee functies, waarvan we de oorspronkelijke functies kennen.

We vinden de oorspronkelijke functie van het product dan als volgt :

Stel $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ en $G(p) = \mathcal{L}\{g(x)\}$, dan is

$$\begin{aligned} F(p) G(p) &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx \int_0^{\infty} g(x) e^{-px} dx = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) g(y) e^{-p(t+y)} dt dy. \end{aligned}$$

Stel nu $x = t + y$, dus $y = x - t$:

$$\begin{aligned} F(p) G(p) &= \int_0^{\infty} dt f(t) \int_t^{\infty} g(x-t) e^{-px} dx = \\ &= \int_0^{\infty} dx e^{-px} \int_0^x f(t) g(x-t) dt, \end{aligned}$$

$$\text{dus } F(p) G(p) = \mathcal{L}\left\{ \int_0^x f(t) g(x-t) dt \right\}.$$

De functie $h(x) = \int_0^x f(t) g(x-t) dt$ noemt men de convolutie van $f(x)$ en $g(x)$, geschreven $f(x) * g(x)$. Dus :

Stelling De Laplace-getransformeerde van de convolutie van twee functies is het product van de Laplace-getransformeerden van die twee functies. In formule:

$$\mathcal{L}\{f(x) * g(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} \cdot \mathcal{L}\{g(x)\}.$$

Stelling Als $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$, dan is $F(p-a) = \mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\}$.

Bewijs:
$$\int_0^{\infty} e^{ax} f(x) e^{-px} dx = \int_0^{\infty} f(x) e^{-(p-a)x} dx.$$

Als de getransformeerde een gebroken rationale functie van p is, waarvan de graad van de teller kleiner is dan de graad van de noemer, dan helpt splitsing in partiële breuken. Deze levert termen van de vorm

$$\frac{C}{(p-a)^n}, \quad \frac{C}{\{(p-a)^2 + b^2\}^n}, \quad \frac{Cp}{\{(p-a)^2 + b^2\}^n}.$$

Voor het gemak beperken we ons bij de kwadratische noemerfactoren tot $n = 1$. Het geval $n > 1$ gaat analoog, maar ingewikkelder.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^n e^{-px} dx &= \left[-\frac{x^n e^{-px}}{p} \right]_0^{\infty} + \frac{n}{p} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-px} dx = \dots = \\ &= \frac{n!}{p^n} \int_0^{\infty} e^{-px} dx = \frac{n!}{p^{n+1}}. \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \sin bx e^{-px} dx = \left[\frac{e^{-px}}{p^2 + b^2} (-b \cos bx - p \sin bx) \right]_0^{\infty} = \frac{b}{p^2 + b^2}.$$

$$\int_0^{\infty} \cos bx e^{-px} dx = \left[\frac{e^{-px}}{p^2 + b^2} (-p \cos bx + b \sin bx) \right]_0^{\infty} = \frac{p}{p^2 + b^2}.$$

Hieruit volgt direct de volgende tabel

$\mathcal{L}\{f(x)\}$	$f(x)$
$\frac{1}{(p-a)^n}$	$\frac{e^{ax} x^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{(p-a)^2 + b^2}$	$\frac{e^{ax} \sin bx}{b}$
$\frac{p}{(p-a)^2 + b^2}$	$e^{ax} \left(\cos bx + \frac{a}{b} \sin bx \right)$

Met behulp van convolutie is deze tabel verder uit te breiden.

De Laplace-transformatie is bijzonder bruikbaar voor het vinden van de oplossing $y(x)$ van een lineaire D.V. met constante coëfficiënten, die vastgelegd is doordat $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ in een vast punt a gegeven zijn (hierin is n de orde van de D.V.; het punt a kan door substitutie $x = t + a$ naar 0 verschoven worden). Bij de vroeger behandelde oplossingsmethode werd eerst de algemene oplossing bepaald, waarna de hierin optredende constanten aangepast werden aan de speciale voorwaarden, waaraan de gezochte oplossing moest voldoen. Dit is, speciaal bij vergelijkingen van tamelijk hoge orde een aanzienlijke omweg. Het voordeel van de methode met Laplace-transformatie is, dat we rechtstreeks naar de ene verlangde oplossing toerekenen, zonder dat we eerst de algemene oplossing behoeven te bepalen.

Tot slot nog een voorbeeld.

Vb.1 $y'' + b^2 y = x^2 + x + \frac{2}{b^2}$. Gevraagd de oplossing, waarvoor $y(0) = y'(0) = 0$. Als $F(p) = \mathcal{L}\{x^2 + x + \frac{2}{b^2}\}$ (dit rekenen we niet uit), dan geldt voor $Y(p) = \mathcal{L}\{y(x)\}$:

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p^2 + b^2}.$$

Nu is $\frac{1}{p^2 + b^2} = \mathcal{L}\left\{\frac{\sin bx}{b}\right\}$. Met behulp van de convolutie vinden we

$$y(x) = \frac{1}{b} \int_0^x \left(t^2 + t + \frac{2}{b^2}\right) \sin b(x-t) dt.$$

Hiermee is de gevraagde oplossing eigenlijk al gevonden. Met partiële integratie rekenen we de erin optredende integraal nog uit.

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 \sin b(x-t) dt &= \left[\frac{1}{b} t^2 \cos b(x-t)\right]_0^x - \frac{2}{b} \int_0^x t \cos b(x-t) dt = \\ &= \frac{x^2}{b} + \frac{2}{b^2} [t \sin b(x-t)]_0^x - \frac{2}{b^2} \int_0^x \sin b(x-t) dt = \\ &= \frac{x^2}{b} - \frac{2}{b^2} \int_0^x \sin b(x-t) dt, \end{aligned}$$

dus

$$\frac{1}{b} \int_0^x (t^2 + \frac{2}{b^2}) \sin b(x-t) dt = \frac{x^2}{b^2} .$$

$$\frac{1}{b} \int_0^x t \sin b(x-t) dt = \left[\frac{t}{b^2} \cos b(x-t) \right]_0^x - \frac{1}{b^2} \int_0^x \cos b(x-t) dt =$$

$$= \frac{x}{b^2} + \frac{1}{b^3} \left[\sin b(x-t) \right]_0^x = \frac{x}{b^2} - \frac{\sin bx}{b^3} , \text{ dus}$$

$$y(x) = \frac{x^2}{b^2} + \frac{x}{b^2} - \frac{\sin bx}{b^3} .$$

Men kan ook $F(p)$ uitrekenen en splitsing in partiële breuken toepassen.

HOOFDSTUK II REEKSEN EN INTEGRALEN VAN FOURIER

§.1 Trigonometrische reeksen.

Periodieke functies

In het eerstejaars college is een studie gemaakt van machtreeksen. Ook is daar het probleem beschouwd, of en zo ja hoe men een gegeven functie in een machtreeks kan ontwikkelen. Dit heeft geleid tot de reeks van Taylor.

Voor periodieke functies is een andere vorm van reeksontwikkeling meer passend. Een functie $f(x)$ heet periodiek met periode p als voor alle x geldt $f(x+p) = f(x)$. Dan geldt ook $f(x+np) = f(x)$ voor gehele n . Als men de grafiek van een dergelijke functie over een afstand p naar rechts (of links) verschuift, verandert deze niet.

Ongedempte trillingsverschijnselen zijn voorbeelden van periodieke functies van de tijd (wisselstroom, trillende snaren en balken).

De functies $\sin x$ en $\cos x$ zijn voorbeelden van periodieke functies (periode 2π). Maar ook $\sin nx$ en $\cos nx$ zijn voor natuurlijke n periodiek met periode 2π en ook de constante functies. Een reeks

$$(1) \quad c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = S(x)$$

heet een trigonometrische reeks. Als deze convergeert, stelt de som ook een periodieke functie met periode 2π voor. We zullen zien dat zeer vele periodieke functies met periode 2π zich in een dergelijke reeks laten ontwikkelen.

Verband tussen coëfficiënten en som van een trigonometrische reeks

Veronderstel dat de reeks (1) convergent is voor alle reële x en noem de door deze reeks voorgestelde functie $S(x)$. Dan geldt

$$\int_0^{2\pi} S(x) \sin kx \, dx = \int_0^{2\pi} \left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \sin kx \, dx.$$

We weten niet, of we de reeks in het rechterlid termsgewijs mogen integreren. We stappen voorlopig over dit bezwaar heen en doen het toch. Dan komt er

$$(2) \quad c_0 \int_0^{2\pi} \sin kx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \sin kx \, dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx \sin kx \, dx \right).$$

Er geldt nu

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin kx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{voor } n \neq k \\ \pi & \text{voor } n = k \end{cases} \quad n \text{ en } k \text{ geheel } \geq 1.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \sin kx \, dx = 0 \text{ voor } n \text{ en } k \text{ geheel } \geq 0.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{voor } n \neq k, n \text{ en } k \text{ geheel } \geq 0 \\ \pi & \text{voor } n = k \geq 1, n \text{ geheel} \\ 2\pi & \text{voor } n = k = 0. \end{cases}$$

Immers $\sin nx \sin kx = \frac{1}{2} \{ \cos(n-k)x - \cos(n+k)x \}$, dus

$$\text{voor } n \neq k \text{ is } \int_0^{2\pi} \sin nx \sin kx \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-k)x}{n-k} - \frac{\sin(n+k)x}{n+k} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\text{en voor } n = k \geq 1 \text{ is } \int_0^{2\pi} \sin nx \sin kx \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin(n+k)x}{n+k} \right]_0^{2\pi} = \pi;$$

$\cos nx \sin kx = \frac{1}{2} \{ \sin(n+k)x + \sin(k-n)x \}$, dus

$$\text{voor } n \neq k \text{ is } \int_0^{2\pi} \cos nx \sin kx \, dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(n+k)x}{n+k} - \frac{\cos(k-n)x}{k-n} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$\text{voor } n = k \geq 1 \text{ is } \int_0^{2\pi} \cos nx \sin kx \, dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos(n+k)x}{n+k} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\text{en voor } n = k = 0 \text{ is } \int_0^{2\pi} \cos nx \sin kx \, dx = 0, \text{ omdat } \sin kx = 0;$$

$\cos nx \cos kx = \frac{1}{2} \{ \cos(n+k)x + \cos(n-k)x \}$, dus

$$\text{voor } n \neq k \text{ is } \int_0^{2\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+k)x}{n+k} + \frac{\sin(n-k)x}{n-k} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$\text{voor } n = k \geq 1 \text{ is } \int_0^{2\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+k)x}{n+k} + x \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\text{en voor } n = k = 0 \text{ is } \int_0^{2\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$

Met behulp hiervan gaat (2) voor gehele $k \geq 1$ over in πb_k .

Doen we hetzelfde met $\cos kx$ in plaats van $\sin kx$, dan komt er πa_k voor $k \geq 1$ en $2\pi c_0$ voor $k = 0$. Maken we de afspraak $c_0 = \frac{1}{2} a_0$, dan komt er πa_k voor $k \geq 0$.

Als we aannemen, dat termgewijze integratie van de reeks geoorloofd is, vinden we dus

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s(x) \cos kx \, dx \text{ voor } k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s(x) \sin kx \, dx \text{ voor } k = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\}$$

Bedenk wel, dat we niet bewezen hebben, dat deze betrekkingen tussen a_k , b_k en $s(x)$ voor iedere trigonometrische reeks gelden! We hebben namelijk bij de afleiding ergens de volgorde van sommatie en integratie verwisseld zonder dit te rechtvaardigen. De gevonden formules dienen dan ook slechts als leidraad bij de nu volgende definitie.

Fourier-coëfficiënten van een functie

We draaien nu het probleem om en beginnen niet met een trigonometrische reeks, maar met een functie $f(x)$, waarvan we a priori niet eens weten of het wel mogelijk is haar als een trigonometrische reeks te schrijven. We nemen wel aan, dat $f(x)$ periodiek is met periode 2π en verder dat zij integreerbaar is tussen 0 en 2π (en dus wegens de periodiciteit tussen ieder tweetal eindige grenzen).

Definitie. De getallen a_k en b_k , die bepaald zijn door

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \text{ voor } k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \text{ voor } k = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \text{ (formules van Euler),}$$

heten de Fourier-coëfficiënten van $f(x)$ en de met deze coëfficiënten gevormde trigonometrische reeks

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

heet de Fourier-reeks van $f(x)$.

We hopen, dat deze reeks convergeert en de functie $f(x)$ voorstelt. Of dit waar is, zullen we in paragraaf 4 onderzoeken. Het zal blijken, dat we om te bewijzen, dat het zo is, verdergaande voorwaarden aan $f(x)$ zullen moeten opleggen.

Als $f(x)$ een even functie is (d.w.z. $f(-x) = f(x)$), dan geldt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx &= \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx + \int_0^{\pi} f(2\pi-x) \cos k(2\pi-x) \, dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \end{aligned}$$

want, omdat $f(x)$ periodiek is, geldt $f(2\pi-x) = f(-x)$ en omdat $f(x)$ even is, geldt $f(-x) = f(x)$. Verder is

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx = \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx + \int_0^{\pi} f(2\pi-x) \sin k(2\pi-x) \, dx = 0$$

om dezelfde redenen. Op analoge wijze vinden we voor oneven functies (d.w.z. $f(-x) = -f(x)$):

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

We hebben dus gevonden:

Voor de Fourier-coëfficiënten a_k en b_k van een even functie $f(x)$ geldt:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = 0.$$

Voor de Fourier-coëfficiënten a_k en b_k van een oneven functie $f(x)$ geldt:

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

§.2 Fourier-coëfficiënten van enkele eenvoudige functies

We zullen nu van enige functies de Fourier-coëfficiënten bepalen. We zullen ook gebruik maken van het feit dat de bijbehorende Fourier-reeksen deze functies voorstellen in die punten waar de functies continu zijn. Uit de hoofdstelling (zie §.4) volgt, dat dit voor de hier behandelde functies inderdaad het geval is.

Alle beschouwde functies zullen uiteraard periodiek zijn met periode 2π . Om een dergelijke functie vast te leggen is het voldoende haar tussen 0 en 2π (of op een ander interval ter lengte 2π) te geven en haar dan periodiek voort te zetten.

Vb.1 $f(x) = 1$ voor $0 < x < \pi$, $f(x) = -1$ voor $\pi < x < 2\pi$. Deze functie is oneven, dus $a_k = 0$.

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx = \left[-\frac{2}{k\pi} \cos kx \right]_0^{\pi} = -\frac{2}{k\pi} \{(-1)^k - 1\}.$$

Voor even k is $b_k = 0$; voor oneven k is $b_k = \frac{4}{k\pi}$. De functie $f(x)$ is overall continu, behalve in $k\pi$ (k geheel). Dus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} \frac{1}{4}\pi & \text{voor } 0 < x < \pi \\ -\frac{1}{4}\pi & \text{voor } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

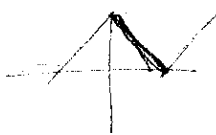
Voor $x = k\pi$ is de uitkomst klaarblijkelijk = 0.

Vullen we $x = \frac{1}{2}\pi$ in, dan vinden we

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{4}\pi.$$

Deze reeks is echter juist de machtreeksontwikkeling van $\arctan x$ voor $x = 1$. Vroeger was de geldigheid van deze reeks beperkt tot $|x| < 1$. We zien hier dus, dat het voor $x = 1$ ook goed is.

Vb.2 $f(x) = \pi - x$ voor $0 \leq x < \pi$, $f(x) = x - \pi$ voor $\pi \leq x < 2\pi$. Deze functie is even, dus $b_k = 0$. Voor $k \geq 1$ geldt



$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos kx \, dx = \left[\frac{2}{k\pi} (\pi - x) \sin kx \right]_0^{\pi} + \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx =$$

$$= -\frac{2}{k^2\pi} \{ (-1)^k - 1 \}. \text{ Verder is}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \, dx = \pi. \text{ Daar } f(x) \text{ overal continu is geldt}$$


$$f(x) = \frac{1}{2}\pi + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1)x}{(2n+1)^2}, \text{ dus}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1)x}{(2n+1)^2} = \begin{cases} \frac{1}{8}\pi^2 - \frac{1}{4}\pi x & \text{voor } 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{1}{4}\pi x - \frac{3}{8}\pi^2 & \text{voor } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Voor $x = 0$ geeft dit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{1}{8}\pi^2.$$

Vb.3 $f(x) = \pi - x$ voor $0 < x < 2\pi$. Deze functie is oneven, dus $a_k = 0$.



$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin kx \, dx = \left[-\frac{2}{k\pi} (\pi - x) \cos kx \right]_0^{\pi} - \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos kx \, dx =$$

$$= \frac{2}{k} - \frac{2}{k\pi} \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{k}. \text{ Dus}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x \text{ voor } 0 < x < 2\pi.$$

Voor $x = \frac{1}{2}\pi$ krijgen we dezelfde uitkomst als in voorbeeld 1.

Vb.4 $f(x) = (\pi - x)^2$ voor $0 \leq x < 2\pi$. De functie is even, dus $b_k = 0$. Voor $k \geq 1$ geldt

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)^2 \cos kx \, dx = \left[\frac{2}{k\pi} (\pi - x)^2 \sin kx \right]_0^{\pi} + \frac{4}{k\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin kx \, dx =$$

$$= \frac{4}{k^2} \text{ en verder is } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)^2 \, dx = \frac{2}{3}\pi^2. \text{ Daar } f(x) \text{ overal continu}$$

$$\text{is, geldt } f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \text{ dus}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = -\frac{1}{12}\pi^2 + \frac{1}{4}(\pi-x)^2 = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) \text{ voor } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Vult men hierin $x = 0$ (of $x = 2\pi$) in, dan krijgt men

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{1}{6}\pi^2.$$

Invulling van $x = \pi$ levert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{12}\pi^2.$$

In de voorbeelden 1 en 3 zien we dat de som van een overal convergente trigonometrische reeks geen continue functie behoeft te zijn!

Vaak is het prettig om het nulpunt op de x -as te verschuiven, d.w.z. $f(x)$ te vervangen door $f(x+\alpha)$. Stel

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

dan is

$$\begin{aligned} f(x+\alpha) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n(x+\alpha) + b_n \sin n(x+\alpha)) = \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha) \cos nx + (-a_n \sin n\alpha + b_n \cos n\alpha) \sin nx\}. \end{aligned}$$

Het speciale geval $\alpha = \pi$ geeft :

$$f(x+\pi) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(-1)^n a_n \cos nx + (-1)^n b_n \sin nx\}.$$

Past men dit op het resultaat van voorbeeld 3 toe, dan krijgt men

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n} = \frac{1}{2}x \text{ voor } -\pi < x < \pi$$

en analoog bij voorbeeld 4 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos nx}{n^2} = \frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{4}x^2 \text{ voor } -\pi \leq x \leq \pi.$$

In de theorie van de gelijkrichters spelen de in het volgende voorbeeld behandelde functies een rol

Vb.5 $f(x) = \sin x$ voor $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = 0$ voor $\pi \leq x \leq 2\pi$.
We berekenen de Fourier-coëfficiënten van deze functie.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin kx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \{ \cos(k-1)x - \cos(k+1)x \} \, dx.$$

Voor $k > 1$ levert dit $\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(k-1)x}{k-1} - \frac{\sin(k+1)x}{k+1} \right]_0^{\pi} = 0$ en voor $k = 1$ levert het $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos kx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \{ \sin(k+1)x - \sin(k-1)x \} \, dx.$$

Voor $k \neq 1$ levert dit $\frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(k+1)x}{k+1} + \frac{\cos(k-1)x}{k-1} \right]_0^{\pi}$, hetgeen

= 0 is voor oneven k en = $-\frac{2}{\pi(k^2-1)}$ voor even k . Voor $k = 1$ vinden we

$$\frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\pi} = 0. \quad \text{Dus}$$

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} = \begin{cases} \sin x & \text{voor } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{voor } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Past men verschuiving over π toe, dan vindt men

$$\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin x & \text{voor } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Telt men beide resultaten bij elkaar op, dan komt er

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} = |\sin x|.$$

Daar dit periodiek met periode π is, kunnen we x door $\frac{1}{2}x$ vervangen :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{4n^2-1} = \left| \sin \frac{1}{2}x \right|.$$

We beschouwen ten slotte nog het geval, dat de door een Fourier-reeks voorgestelde functie niet continu is. Zo is de in voorbeeld 3 gegeven reeks niet continu in $x = 0$, want voor $0 < x < 2\pi$ is de uitkomst $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x$ en voor $-2\pi < x < 0$ is de uitkomst $-\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x$. Dit laatste kunnen we uit de grafiek aflezen, maar ook als volgt berekenen. Als $-2\pi < x < 0$, dan is $0 < x + 2\pi < 2\pi$, dus de uitkomst is $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(x + 2\pi) = -\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x$. Laten we nu x van rechts naar nul naderen, dan nadert de functiewaarde tot $\frac{1}{2}\pi$, doen we hetzelfde van links, dan komt er $-\frac{1}{2}\pi$. Vullen we $x = 0$ in de reeks in dan komt er 0, dat is juist het gemiddelde van beide limietwaarden. In voorbeeld 1 treedt hetzelfde verschijnsel op. Het blijkt een algemeen verschijnsel te zijn. Als we in een punt a , waar de functie $f(x)$, die door de reeks wordt voorgesteld niet continu is, de limiet voor $x \rightarrow a$ van rechts komend aanduiden met

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a + 0)$$

en analoog voor de limiet van links

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = f(a - 0),$$

dan blijkt de waarde van de reeks voor $x = a$ juist $\frac{1}{2} \{ f(a+0) + f(a-0) \}$ te zijn. In een punt a , waar $f(x)$ wel continu is, is natuurlijk $f(a) = f(a+0) = f(a-0)$, zodat dezelfde formule ook in dat geval kan worden gebruikt.

§.3 De ongelijkheid van Bessel en de formule van Parseval.

We gaan uit van een functie $f(x)$, die integreerbaar is en periodiek met periode 2π . We willen proberen deze functie door een trigonometrische reeks voor te stellen. Hiertoe nemen we eerst een partiële som van een trigonometrische reeks

$$\frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

die een trigonometrisch polynoom genoemd wordt. We willen proberen het verschil van $f(x)$ en zo'n trigonometrisch polynoom klein te maken. Om de afwijking van beide te meten kiezen we de uitdrukking

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(t) - \frac{1}{2} \alpha_0 - \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \right)^2 dt.$$

Deze uitdrukking, die in ieder geval ≥ 0 is, gaan we uitwerken. Hierbij noemen we a_k en b_k de Fourier-coëfficiënten van $f(x)$.

Werken we de integrand uit, dan geeft dit

$$\begin{aligned} & (f(t))^2 - \alpha_0 f(t) - 2 \sum_{k=1}^n (\alpha_k f(t) \cos kt + \beta_k f(t) \sin kt) + \\ & + \frac{1}{4} \alpha_0^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha_0 \alpha_k \cos kt + \alpha_0 \beta_k \sin kt) + \\ & + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) (\alpha_m \cos mt + \beta_m \sin mt). \end{aligned}$$

Integreren we dit van 0 tot 2π en delen we dit door π dan komt er

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt - \alpha_0 a_0 - 2 \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \\ & + \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt - \frac{1}{2} a_0^2 - \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) + \\ & + \frac{1}{2} (\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{k=1}^n \{ (\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2 \}. \end{aligned}$$

Het is duidelijk, dat dit zo klein mogelijk is als $\alpha_k = a_k$ voor $k = 0, 1, \dots, n$ en $\beta_k = b_k$ voor $k = 1, 2, \dots, n$. We kunnen dus zeggen, dat de beste benadering van $f(x)$ met een trigonometrisch polynoom geleverd wordt door een partiële som van de Fourier-reeks van $f(x)$. Verder blijkt uit het feit, dat bovenstaande uitdrukking ≥ 0 is, dat

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt.$$

Hieruit volgt dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$, waarvan de termen ≥ 0 zijn, convergent is. Bovendien is

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt \quad (\text{ongelijkheid van Bessel}).$$

We merken nog op dat deze ongelijkheid door een gelijkheid mag worden vervangen :

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt \quad (\text{formule van Parseval}).$$

Dit bewijzen we niet; we zullen er ook geen gebruik van maken bij onze verdere afleidingen.

Uit de convergentie van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ volgt dat de termen van deze reeks naar nul naderen en daaruit volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, of uitgeschreven :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt = 0.$$

De volgende hulpstelling, die we later nog nodig zullen hebben, is hieruit direct af te leiden.

Hulpstelling. Als a en b constanten zijn met $0 \leq a < b \leq 2\pi$ en als $f(x)$ integreerbaar is tussen a en b , dan geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin \left(n + \frac{1}{2}\right)t \, dt = 0.$$

Bewijs. We voeren een hulpfunctie $h(x)$ in, die gedefinieerd is door $h(x) = 0$ voor $0 \leq x < a$, $h(x) = f(x)$ voor $a \leq x \leq b$, $h(x) = 0$ voor $b < x \leq 2\pi$.

Dan is

$$\int_a^b f(t) \sin \left(n + \frac{1}{2}\right)t \, dt = \int_0^{2\pi} h(t) \sin \left(n + \frac{1}{2}\right)t \, dt.$$

Nu is

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} h(t) \sin \left(n + \frac{1}{2}\right)t \, dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} h(t) \cos \frac{1}{2}t \sin nt \, dt + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} h(t) \sin \frac{1}{2}t \cos nt \, dt = 0, \end{aligned}$$

waarmee de hulpstelling bewezen is.

§.4 De hoofdstelling.Integraalformule voor een partiële som van een Fourier-reeks

We gaan weer uit van een integreerbare functie $f(x)$, periodiek met periode 2π en met Fourier-coëfficiënten a_k en b_k . Partiële sommen van de Fourier-reeks van $f(x)$ geven we aan met $s_n(x)$, dus

$$s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

We gaan de convergentie van de Fourier-reeks voor een vaste waarde $x = c$ van x onderzoeken. We vullen in $s_n(c)$ de formules van Euler voor de Fourier-coëfficiënten in :

$$\begin{aligned} s_n(c) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\pi} \cos kc \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt + \frac{1}{\pi} \sin kc \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kc \cos kt + \sin kc \sin kt) \right\} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t - c) \right\} f(t) dt. \end{aligned}$$

Stel nu $t = c + u$, $u = t - c$, dan komt er

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^{2\pi-c} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \right\} f(c + u) du.$$

Aan de grafiek van een functie $g(x)$, die periodiek is met periode 2π , zien we direct, dat voor een willekeurige a geldt

$$\int_a^{a+2\pi} g(t) dt = \int_0^{2\pi} g(t) dt.$$

Passen we dit toe, dan vinden we

$$s_n(c) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right\} f(c + t) dt.$$

Op het gedeelte van de integraal van π tot 2π passen we de substitutie $t = 2\pi - u$, $u = 2\pi - t$ toe. Gebruik makend van de periodiciteit van $f(x)$ vinden we dan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) f(c+t) dt &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \right) f(c-u) du, \quad \text{dus} \end{aligned}$$

$$s_n(c) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) \{ f(c+t) + f(c-t) \} dt.$$

De eerste factor in de integrand kunnen we nu nog verder omvormen :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} t} \left\{ \sin \frac{1}{2} t + \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{1}{2} t \cos kt \right\} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} t} \left\{ \sin \frac{1}{2} t + \sum_{k=1}^n \left[\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) t \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} t} \left\{ \sin \frac{1}{2} t + \left(\sin \frac{3}{2} t - \sin \frac{1}{2} t \right) + \left(\sin \frac{5}{2} t - \sin \frac{3}{2} t \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) t \right] \right\} = \\ &= \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t}. \end{aligned}$$

Dit is natuurlijk alleen goed, als $\sin \frac{1}{2} t \neq 0$, d.w.z. als $t \neq 2m\pi$ met gehele m .

Vullen we dit in bovenstaande integraal in, dan moeten we bij de ondergrens $t = 0$ oppassen, omdat de integrand een noemer bevat, die voor $t \rightarrow 0$ naar nul gaat. De tellerfactor $\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t$ gaat echter ook naar

nul en dit moet ook, want $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt$ nadert tot de eindige waarde $n + \frac{1}{2}$ als $t \rightarrow 0$.

We merken eerst nog het volgende op:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{\sin \frac{1}{2} t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt = 1.$$

We vinden nu

$$s_n(c) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} \cdot \frac{f(c+t) + f(c-t)}{2} dt.$$

Hiermee is een integraalvoorstelling van de partiële som gevonden.

De hoofdstelling

We moeten nu nagaan wat hiermee gebeurt voor $n \rightarrow \infty$. We zullen daartoe enige veronderstellingen over de functie $f(x)$ moeten maken. We weten al, dat het niet realistisch zou zijn, $f(x)$ overal continu aan te nemen, omdat we in paragraaf 2 hebben gezien, dat er zeer eenvoudige trigonometrische reeksen bestaan, waarvan de somfunctie niet overal continu is, maar op sommige plaatsen een sprong vertoont. D.w.z. voor $x \rightarrow c$ van rechts komend nadert $f(x)$ tot een bepaalde waarde en evenzo van links komend, maar deze twee uitkomsten behoeven niet dezelfde te zijn:

$$\lim_{x \downarrow c} f(x) = f(c+0), \quad \lim_{x \uparrow c} f(x) = f(c-0).$$

We zullen echter nog iets meer aannemen, nl. dat, als we ons tot waarden van x rechts van c beperken, de functie $f(x)$ differentieerbaar is en evenzo van links :

$$\lim_{x \downarrow c} \frac{f(x) - f(c+0)}{x-c} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c+0)}{h} = f'_+(c),$$

$$\lim_{x \uparrow c} \frac{f(x) - f(c-0)}{x-c} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(c-h) - f(c-0)}{-h} = f'_-(c).$$

Het spreekt vanzelf dat bij benadering van rechts voor de waarde van $f(x)$ in c $f(c+0)$ wordt gebruikt en bij benadering van links $f(c-0)$. Dit is in bovenstaande formules al geschied.

Onder deze veronderstellingen zullen we nu bewijzen dat $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(c) = \varphi(c)$, waarbij $\varphi(c)$ gedefinieerd is door

$$\varphi(c) = \frac{1}{2} \{ f(c+0) + f(c-0) \},$$

dat is dus het gemiddelde van de grenswaarden bij benadering van rechts en van links.

Wegens $\varphi(c) = \frac{\varphi(c)}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt$, geldt

$$s_n(c) - \varphi(c) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} \left\{ \frac{f(c+t) + f(c-t)}{2} - \varphi(c) \right\} dt.$$

We moeten aantonen dat dit naar nul gaat als $n \rightarrow \infty$. Dit zou direct volgen uit de hulpstelling van paragraaf 3, als we wisten dat de functie

$$(1) \quad \frac{1}{\sin \frac{1}{2} t} \left\{ \frac{f(c+t) + f(c-t)}{2} - \varphi(c) \right\}$$

integreerbaar is tussen 0 en π . Dat is echter niet direct duidelijk, omdat $\lim_{t \rightarrow 0} \sin \frac{1}{2} t = 0$. De factor tussen accolades gaat echter ook naar

nul als $t \rightarrow 0$. Een nadere analyse is dus nodig. Nu is bekend dat

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t} = 1;$$

verder is

$$\frac{2}{t} \left\{ \frac{f(c+t) + f(c-t)}{2} - \varphi(c) \right\} = \frac{f(c+t) - f(c+0)}{t} - \frac{f(c-t) - f(c-0)}{-t},$$

hetgeen voor $t \downarrow 0$ nadert tot $f'_+(c) - f'_-(c)$.

Hieruit zien we, dat (1) voor $t \downarrow 0$ tot een eindige limietwaarde nadert. Daar 0 het enige kritieke punt van deze functie is, mogen we dus de hulpstelling toepassen en concluderen dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(c) = \varphi(c).$$

Hiermee is de volgende stelling bewezen.

Stelling Laat $f(x)$ voor alle reële x gedefinieerd zijn, periodiek met periode 2π en integreerbaar over elk begrensd interval. Laat voor een reële c gelden, dat

$$\lim_{x \downarrow c} f(x) = f(c+0),$$

$$\lim_{x \uparrow c} f(x) = f(c-0),$$

$$\lim_{x \downarrow c} \frac{f(x) - f(c+0)}{x - c},$$

$$\lim_{x \uparrow c} \frac{f(x) - f(c-0)}{x - c}$$

bestaan. Dan geldt

$$\frac{1}{2} \{f(c+0) + f(c-0)\} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nc + b_n \sin nc),$$

waarin a_n en b_n bepaald zijn door de formules van Euler.

Als $f(x)$ continu is in c , dan is natuurlijk $\frac{1}{2}\{f(c+0) + f(c-0)\} = f(c)$. Deze stelling is de hoofdstelling uit de theorie der Fourier-reeksen.

Andere periode dan 2π .

Vaak zullen de beschouwde functies in de praktijk wel periodiek zijn, maar met een andere periode dan 2π . Deze zijn echter door een eenvoudige transformatie op het geval van periode 2π terug te brengen.

Stel dat $f(x)$ een functie is met periode p , dus $f(x+p) = f(x)$. We voeren een hulpfunctie $F(x)$ in, die gedefinieerd wordt door

$$F(x) = f\left(\frac{px}{2\pi}\right), \text{ dus } f(x) = F\left(\frac{2\pi x}{p}\right).$$

Nu is $F(x + 2\pi) = f\left(\frac{p(x+2\pi)}{2\pi}\right) = f\left(\frac{px}{2\pi} + p\right) = f\left(\frac{px}{2\pi}\right) = F(x)$,

dus $F(x)$ is periodiek met periode 2π . We ontwikkelen nu $F(x)$ in een Fourier-reeks (hierbij even aannemende dat $F(x)$ continu is):

$$F(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$\text{dan is } \boxed{f(x) = F\left(\frac{2\pi x}{p}\right) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{p} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{p}\right),}$$

$$\text{waarbij } a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{pt}{2\pi}\right) \cos nt \, dt =$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos \frac{2\pi nt}{p} \, dt$$

$$\text{en analoog } b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \sin \frac{2\pi nt}{p} \, dt.$$

Als $f(x)$ niet continu is, moeten we natuurlijk weer $\frac{1}{2} (f(x_0) + f(x_0^-))$ nemen.

§.5 Trillende snaren en staven

We beschouwen een dunne gespannen snaar. Kies de x -as langs de evenwichtstoestand van de snaar met $x = 0$ en $x = l$ in de eindpunten van de snaar. We geven de snaar een kleine uitwijking uit de evenwichtstoestand die in één vlak door de x -as ligt. In dit vlak kiezen we een y -as. We nemen aan dat ieder punt een beweging gaat beschrijven gelegen op een rechte loodrecht op de x -as en dat de uitwijkingen zo klein zijn, dat de spanning in de snaar er niet door verandert. De beweging van de snaar kan beschreven worden door y als functie van x en t te geven.

Vatten we een stukje van de snaar gelegen tussen $x = x_0$ en $x = x_1$ in het oog, dan werkt in de uiteinden een kracht op dit stukje veroorzaakt door de spanning, en wel in tangentiële richting. De component in de y -richting van de resulterende kracht is

$$P(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_0), \text{ met } \tan \alpha_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=x_1}, \tan \alpha_0 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=x_0}.$$

Hierin is P de spanning in de snaar. We nemen aan dat de hoeken α_0 en α_1 zo klein zijn, dat we sinus en tangens aan elkaar gelijk kunnen stellen, dan is de kracht dus

$$P \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=x_1} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=x_0} \right\},$$

en dit kan voor een klein stukje snaar weer benaderd worden met $P(x_1 - x_0) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{x=x_0}$. De massa van het stukje snaar is $\rho(x_1 - x_0)$,

waarin ρ de massa per lengte-eenheid van de snaar is en de versnelling is bij benadering $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=x_0}$ (de versnelling verschilt van punt tot punt).

Dit levert ons de volgende partiële D.V. voor de trillende snaar:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

waarin $\alpha^2 = \frac{P}{\rho}$.

Eenzelfde D.V. vindt men bij de beschouwing van longitudinale trillingen in staven (dan is $\alpha^2 = \frac{E}{m}$, E = elasticiteitsmodulus, m = dichtheid).

Hoewel we geen theorie van partiële D.V. behandeld hebben, kunnen we deze vergelijking met een substitutie oplossen. We passen op de onafhankelijke veranderlijken x en t de volgende substitutie toe

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x - \alpha t \\ \eta &= x + \alpha t \end{aligned} \right\},$$

dan is $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial y}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial y}{\partial \eta}$,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2},$$

en analoog $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}$,

zodat de D.V. overgaat in $\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

Dit is echter eenvoudig op te lossen. Integratie naar ξ levert

$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \varphi(\eta)$ met willekeurige functie φ . Integratie hiervan levert

$y = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, met willekeurige (differentieerbare) functies f_1 en f_2 .

Dit levert de algemene oplossing

$$y(x, t) = f_1(x - \alpha t) + f_2(x + \alpha t).$$

De snaar is echter vastgehouden aan de uiteinden $x = 0$ en $x = \ell$. Dit geeft $0 = y(0, t) = y(\ell, t)$ voor alle t . Substitutie van $x = 0$ geeft

$$f_1(-\alpha t) + f_2(\alpha t) = 0 \text{ voor alle } t.$$

Noemen we $\alpha t = u$, dan is dus $f_2(u) = -f_1(-u)$ voor alle u , dus

$$y(x, t) = f_1(x - \alpha t) - f_1(-x - \alpha t).$$

Substitueren we nu $x = \ell$, dan geeft dit

$$0 = f_1(\ell - at) - f_1(-\ell - at) \text{ voor alle } t.$$

Noemen we $v = -\ell - at$, dan vinden we $f_1(v) = f_1(v + 2\ell)$ voor alle v , dus de functie f_1 is periodiek met periode 2ℓ . We kunnen deze functie dus in een Fourier-reeks ontwikkelen:

$$f_1(w) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n w}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n w}{\ell} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{dus } y(x,t) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{\pi n(x-at)}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n(x-at)}{\ell} \right\} \\ &\quad - \left[\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{\pi n(x+at)}{\ell} - b_n \sin \frac{\pi n(x+at)}{\ell} \right\} \right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(2a_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} \sin \frac{\pi n a t}{\ell} + 2b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} \cos \frac{\pi n a t}{\ell} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \left\{ A_n \sin \frac{\pi n a t}{\ell} + B_n \cos \frac{\pi n a t}{\ell} \right\}. \end{aligned}$$

De beweging is dus de superpositie van de door elk der termen van de reeks beschreven bewegingen. De beweging behorende bij de n^e term bestaat uit een stuk van een sinusoïde bestaande uit n bogen tussen begin- en eindpunt van de snaar (dit lezen we af aan de factor $\sin \frac{\pi n x}{\ell}$).

De maxima van de sinusoïde veranderen harmonisch met de tijd (dit volgt uit de tweede factor). De maximale amplitude van de trilling in de buiken is $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$; verder zijn er $n-1$ knopen (begin- en eindpunt niet meegeteld). De trillingstijd T wordt gevonden uit

$$\frac{\pi n a T}{\ell} = 2\pi$$

dus $T = \frac{2\ell}{n a}$. De frequentie is dus $\frac{n a}{2\ell}$. Voor de verschillende waarden van n zijn de frequenties dus gehele veelvouden van de frequentie $\frac{a}{2\ell}$ van de grondtoon ($n=1$). De frequenties behorende bij $n=2,3,\dots$ geven de boventonen. De coëfficiënten A_n en B_n bepalen de door de snaar voortgebrachte totale trilling.

§.6 Het verschijnsel van Gibbs.

We beschouwen nog eens een trigonometrische reeks met een som, die niet continu is, bv. de reeks van voorbeeld 1 in paragraaf 2 :

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} \frac{1}{4} \pi & \text{voor } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{voor } x = 0. \end{cases}$$

Om na te gaan, hoe dit resultaat tot stand komt, beschouwen we een partiële som van deze reeks :

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

De grafiek van deze functie begint bij $x = 0$ met de waarde 0, stijgt dan naar een boven $\frac{1}{4}\pi$ gelegen maximum (des te steiler naarmate n groter is) en loopt dan slingerend om de waarde $\frac{1}{4}\pi$ heen. De maxima en minima vinden we door de afgeleide = 0 te stellen.

$$\begin{aligned} \frac{d s_n(x)}{dx} &= \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k+1)x = \frac{1}{2 \sin x} \sum_{k=0}^{n-1} 2 \sin x \cos(2k+1)x = \\ &= \frac{1}{2 \sin x} \sum_{k=0}^{n-1} (\sin(2k+2)x - \sin 2k x) = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x} \text{ voor } x \neq m\pi \\ & \hspace{15em} (m \text{ geheel}). \end{aligned}$$

Dit is = 0, als $\sin 2nx = 0$ is. Het eerste (en tevens grootste) maximum ligt bij $x = \frac{\pi}{2n}$. De waarde van de functie $s_n(x)$ aldaar is

$$s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}}{2k+1}.$$

Dit nadert voor $n \rightarrow \infty$ tot $\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$. Om dit in te zien verdelen we het interval van 0 tot π in n gelijke delen, die dus de lengte $\frac{\pi}{n}$ hebben.

Op elk van deze stukjes nemen we de functiewaarde in het midden, dat is in het punt $(k + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{n} = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ voor $k = 0, 1, \dots, n-1$. De hierbij behorende benaderingssom van de integraal $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ is dan

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{n} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}}{\frac{(2k+1)\pi}{2n}} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}}{2k+1} = 2 s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

We hebben dus gevonden, dat $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \left(\frac{\pi}{2n} \right) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

De waarde van dit laatste kunnen we in een tabel opzoeken. We vinden dan in drie decimalen de waarde 0,926. Hetzelfde voor $\frac{1}{4}\pi$ doende, vinden we echter 0,785. We zien dus dat de hoogte van de eerste top (waarvan de abscis $\frac{\pi}{2n}$ tot nul nadert als $n \rightarrow \infty$) een limiet heeft, die ongeveer 18% groter is dan de waarde $\frac{1}{4}\pi$. Dit noemt men het verschijnsel van Gibbs. Het is niet beperkt tot dit ene voorbeeld, maar treedt steeds in soortgelijke situaties op.

We merken op, dat dit verschijnsel geenszins in strijd is met de geldigheid van (1). Voor $x = 0$ geldt $s_n(0) = 0$ voor alle n . Voor een vaste $x > 0$ geldt voor voldoende grote n , dat $\frac{\pi}{2n} < x$, zodat de ongelijkheid

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \left(\frac{\pi}{2n} \right) > \frac{1}{4}\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \quad (\text{voor } 0 < x < \pi)$$

geen contradictie inhoudt. Wel zien we, dat we, naarmate we x dichterbij nul kiezen, de n groter moeten maken om een goede benadering van de limietwaarde te krijgen. De convergentie van de reeks wordt dus steeds "slechter", naarmate we x dichterbij nul nemen. Op deze kwestie komen we echter nog terug.

§.7 Fourier-integralen.

Door demping worden vele verschijnselen in de natuur beschreven door functies, die niet zuiver periodiek zijn. Voor zulke functies kunnen we de Fourier-reeks vervangen door een Fourier-integraal.

Stel dat $f(x)$ een functie is, die voor alle reële waarden van x gedefinieerd is en waarvoor de oneigenlijke integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

bestaat (d.w.z. een eindige waarde heeft). We verwaarlozen nu eerst die waarden van x , die zeer groot in absolute waarde zijn, d.w.z. we bekijken de functie alleen voor $-R < x < R$, waarin R een groot pos.reëel getal is. We zetten de zo verkregen functie periodiek voort, d.w.z. we definiëren een nieuwe functie $g(x)$ door: $g(x) = f(x)$ voor $-R < x \leq R$ en $g(x)$ is periodiek met periode $2R$.

Nemen we aan dat $g(x)$ aan de voorwaarden voldoet, waaronder $g(x)$ door zijn Fourier-reeks wordt voorgesteld (zie paragraaf 4); voor het gemak nemen we aan dat $g(x)$ continu is. Dan is

$$g(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{R} + b_n \sin \frac{\pi n x}{R} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{met } a_n &= \frac{1}{R} \int_0^{2R} g(t) \cos \frac{\pi n t}{R} dt = \frac{1}{R} \int_{-R}^R g(t) \cos \frac{\pi n t}{R} dt = \\ &= \frac{1}{R} \int_{-R}^R f(t) \cos \frac{\pi n t}{R} dt, \end{aligned}$$

$$\text{en analoog } b_n = \frac{1}{R} \int_{-R}^R f(t) \sin \frac{\pi n t}{R} dt.$$

Vullen we deze a_n en b_n in, dan geldt voor $-R < x < R$, dat

$$f(x) = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R} \int_{-R}^R f(t) \cos \frac{\pi n(t-x)}{R} dt.$$

Laten we nu R naar ∞ naderen, dan krijgen we, wegens

$$\left| \int_{-R}^R f(t) dt \right| \leq \int_{-R}^R |f(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt,$$

$$\text{dat } \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t) dt = 0, \text{ dus}$$

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R} \int_{-R}^R f(t) \cos \frac{\pi n(t-x)}{R} dt.$$

Beschouwen we nu de integraal

$$(1) \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x) dt,$$

en nemen we hiervan een benadering door de u -as in gelijke stukken ter grootte $\frac{\pi}{R}$ te verdelen, en de waarde van de integraal in de rechter uiteinden van de stukjes te beschouwen, dan krijgen we als benaderingssom

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{R} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \frac{\pi n(t-x)}{R} dt.$$

Dit maakt het plausibel, dat de integraal (1) gelijk is aan $f(x)$. Het bewijs dat dit inderdaad het geval is, geven we hier niet.

We vatten de bewering met de gemaakte veronderstellingen in de volgende stelling samen.

Stelling | Laat $f(x)$ voor alle reële x gedefinieerd en integreerbaar zijn en

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

een eindige waarde hebben. Laat voor een reële c gelden dat

$$\lim_{x \downarrow c} f(x) = f(c+0),$$

$$\lim_{x \uparrow c} f(x) = f(c-0),$$

$$\lim_{x \downarrow c} \frac{f(x) - f(c+0)}{x-c},$$

$$\lim_{x \uparrow c} \frac{f(x) - f(c-0)}{x-c}$$

bestaan. Dan geldt

$$\frac{1}{2} \{ f(c+0) + f(c-0) \} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-c) dt.$$

De integraal in het rechterlid heet integraal van Fourier.

We kunnen de integraal van Fourier als volgt splitsen:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos uc \, du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin uc \, du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut \, dt.$$

In plaats van de $\cos nc$ en $\sin nc$ met natuurlijke n , die bij de Fourierreeks optreden, krijgen we nu $\cos uc$ en $\sin uc$ met continu veranderlijke u . Hierbij wordt de reeks met sommatievariabele n vervangen door een integraal met integratievariabele u . We kunnen nu ook Fourier-coëfficiënten $A(u)$ en $B(u)$ invoeren als volgt

$$\int_0^{\infty} \{ A(u) \cos uc + B(u) \sin uc \} du, \quad \text{met}$$

$$A(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut \, dt,$$

$$B(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut \, dt.$$

Vb.1 Neem $f(t) = 1$ voor $0 < t < 1$, $f(t) = 0$ voor $t < 0$ en voor $t > 1$, $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$. Dan is

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_0^1 \cos u(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \left[\frac{\sin u(t-x)}{u} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u(1-x) + \sin u x}{u} du. \text{ Voor } x = 0 \text{ of } x = 1 \text{ levert dit}$$

$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{2} \pi$. Voor andere waarden van x levert de verificatie hetzelfde resultaat. Bv. $0 < x < 1$:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u(1-x) + \sin ux}{u} du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = 1.$$

Vb.2 Gedempte trilling. In het eerstejaarscollege is deze behandeld als oplossing van de D.V.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2h \frac{dy}{dt} + k^2 y = 0.$$

Als nu $k > h > 0$, dan is de algemene oplossing van deze D.V.

$$y = e^{-ht} (\lambda \cos pt + \mu \sin pt) \text{ met } p = \sqrt{k^2 - h^2}.$$

We beschouwen nu $f(t) = C e^{-ht} \sin pt$ voor $0 \leq t$ en $f(t) = 0$ voor $t \leq 0$. Nu geldt

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} f(v) \cos u(v-t) dv =$$

$$= \frac{C}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-hv} \sin pv \cos u(v-t) dv.$$

$$\text{Nu is } \int_0^{\infty} e^{-hv} \sin pv \cos u(v-t) dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-hv} \sin [(p+u)v-ut] dv + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-hv} \sin [(p-u)v+ut] dv.$$

Op de eerste integraal passen we de substitutie $w = v - \frac{ut}{p+u}$, $v = w + \frac{ut}{p+u}$ toe, waardoor we krijgen:

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{hut}{p+u}} \int_{-\frac{ut}{p+u}}^{\infty} e^{-hw} \sin(p+u)w dw =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{hut}{p+u}} \left[\frac{e^{-hw}}{h^2+(p+u)^2} \{-h \sin(p+u)w - (p+u) \cos(p+u)w\} \right]_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= \frac{-h \sin ut + (p+u) \cos ut}{2(h^2 + (p+u)^2)}$$

De tweede integraal vinden we door in de eerste integraal u door -u te vervangen. Doen we dit ook in de uitkomst, dan komt er

$$\frac{h \sin ut + (p-u) \cos ut}{2(h^2 + (p-u)^2)}$$

$$\text{Nu is } \{h^2+(p+u)^2\} \{h^2+(p-u)^2\} = (h^2+p^2+u^2)^2 - 4p^2u^2 =$$

$$= (k^2+u^2)^2 - 4k^2u^2 + 4h^2u^2 = (u^2-k^2)^2 + 4h^2u^2,$$

$$-h\{h^2+(p-u)^2\} + h\{h^2+(p+u)^2\} = 4phu,$$

$$(p+u)\{h^2+(p-u)^2\} + (p-u)\{h^2+(p+u)^2\} = 2p(h^2+p^2-u^2) = -2p(u^2-k^2).$$

De Fourier-coëfficiënten van f(t) zijn dus

$$A(u) = \frac{-Cp(u^2-k^2)}{\pi\{(u^2-k^2)^2+4h^2u^2\}},$$

$$B(u) = \frac{2Cphu}{\pi\{(u^2-k^2)^2+4h^2u^2\}}.$$

Op grond van de betrekking

$$f(t) = \int_0^{\infty} \{A(u) \cos ut + B(u) \sin ut\} du$$

is de gedempte trilling gesplitst in een continu spectrum van harmonisch periodieke bewegingen met hoeksnelheid u (frequentie u/2π). De amplitude S van de bij u behorende harmonische trilling is

$$S = \frac{C p}{\pi \sqrt{(u^2 - k^2)^2 + 4h^2 u^2}}$$

Om het gedrag hiervan als functie van u te bestuderen, bepalen we de afgeleide naar u :

$$\frac{2 C p u (k^2 - 2h^2 - u^2)}{\pi \sqrt{(u^2 - k^2)^2 + 4h^2 u^2}^3}$$

Als $h \geq \frac{1}{2} k \sqrt{2}$, dan is dit voortdurend negatief voor $u > 0$, dus S neemt voor toenemende u steeds af. Voor $u = 0$ is

$$S = \frac{C p}{\pi k^2} \text{ en voor } u \rightarrow \infty \text{ geldt } S \rightarrow 0.$$

Als echter $h < \frac{1}{2} k \sqrt{2}$, dan is de afgeleide eerst positief tot $u = \sqrt{k^2 - 2h^2}$ en daarna negatief. De amplitude heeft dus een maximum bij $u = \sqrt{k^2 - 2h^2}$ ter grootte $\frac{C}{2\pi h}$.

Door de invloed van de demping krijgen we niet één scherpe spectraallijn bij $u = p$, maar een band, die des te smaller is, naarmate de demping h kleiner is.

Vb.3 Vlakke electromagnetische golf.

Als een dergelijke golf zich in de x -richting in vacuo voortplant, dan wordt dit beschreven door de D.V.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2},$$

waarin E de elektrische veldsterkte is en c de lichtsnelheid (voor de magnetische veldsterkte is het analoog). Deze vergelijking is formeel dezelfde als de snaarvergelijking en heeft dus als algemene oplossing

$$E = f_1(x-ct) + f_2(x+ct).$$

Ontwikkelen we nu $f_1(w)$ in een Fourier-integraal (we stellen f_2 voor het gemak nul), dan komt er

$$E = \int_0^{\infty} \{ A(u) \cos u(x-ct) + B(u) \sin u(x-ct) \} du.$$

Nemen we een vaste u , dan is voor vaste t de integrand harmonisch en periodiek met periode (= golflengte) $\lambda = \frac{2\pi}{u}$. In de tijd is de beweging ook harmonisch en periodiek met periode (= trillingstijd) $T = \frac{2\pi}{uc}$.

De frequentie $\nu = \frac{uc}{2\pi}$. We vinden dus de betrekking $\lambda \nu = c$. De integraal stelt de splitsing van de golf voor in een continu spectrum van frequenties $\frac{uc}{2\pi}$.

Stellen we f_2 niet nul, dan verandert er niets essentieels aan het bovenstaande.

Als de functie $f(x)$, die als een Fourier-integraal wordt geschreven, even is, dan zien we onmiddellijk in, dat

$$A(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt, \quad B(u) = 0.$$

Evenzo voor oneven functies $f(x)$:

$$A(u) = 0, \quad B(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt.$$

Vaak is de functie alleen voor positieve x gegeven. We kunnen de functie dan op verschillende manieren uitbreiden tot een functie die voor alle reële x gegeven is. Voorbeelden :

- 1° Stel $f(x) = 0$ voor $x < 0$,
- 2° Stel $f(x) = f(-x)$ voor $x < 0$, dus maak de functie even,
- 3° Stel $f(x) = -f(-x)$ voor $x < 0$, dus maak de functie oneven.

§.8 Complexe schrijfwijze van Fourier-reeksen en Fourier-integralen.

Vaak worden Fourier-reeksen in plaats van met sinus en cosinus met complexe e-machten geschreven op grond van de betrekkingen

$$\cos u = \frac{1}{2} (e^{iu} + e^{-iu}), \quad \sin u = \frac{1}{2i} (e^{iu} - e^{-iu}).$$

We gaan uit van de grondformule van de Fourier-reeksen

$$\frac{1}{2} \{ f(x+0) + f(x-0) \} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Vullen we hierin het bovenstaande voor cos en sin in, dan komt er

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} a_n (e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{1}{2i} b_n (e^{inx} - e^{-inx}) \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{imx},$$

waarin de α_m bepaald zijn door

$$\alpha_m = \frac{1}{2} (a_m - i b_m) \text{ voor } m > 0,$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} a_0,$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2} (a_{-m} + i b_{-m}) \text{ voor } m < 0.$$

Gebruiken we nu de formules van Euler voor a_n en b_n dan vinden we

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)(\cos mt - i \sin mt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-imt} dt \quad \text{voor } m > 0,$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt,$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)(\cos(-mt) + i \sin(-mt)) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-imt} dt \quad \text{voor } m < 0.$$

Samenvatting:

$$\frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx},$$

met $\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt$ voor alle gehele n .

Het spreekt vanzelf dat met $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$ bedoeld is

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} e^{-inx}.$$

We moeten hiermee echter voorzichtig zijn, omdat de convergentie van elk der twee reeksen afzonderlijk niet gewaarborgd is. Neem bijv. de

reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, dus $a_n = 0$ voor $n \geq 0$ en $b_n = \frac{1}{n}$ voor $n \geq 1$, dan is

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{inx} &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2} i \frac{1}{n} (\cos nx + i \sin nx) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{2} i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}. \end{aligned}$$

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ gaat voor $x = 0$ over in $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, die divergent is.

Alle moeilijkheden kunnen echter omzeild worden, als we de reeks

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

opvatten als $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \alpha_n e^{inx}$,

$$\text{omdat } \sum_{n=-N}^N \alpha_n e^{inx} = \alpha_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n e^{inx} + \alpha_{-n} e^{-inx}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{1}{2} (a_n - i b_n) (\cos nx + i \sin nx) + \frac{1}{2} (a_n + i b_n) (\cos nx - i \sin nx) \right\} = \\
&= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx),
\end{aligned}$$

hetgeen juist een partiële som is van de oorspronkelijke Fourier-reeks.

Met Fourier-integralen kunnen we hetzelfde doen. We gaan weer uit van

$$\frac{1}{2} \{ f(x+0) + f(x-0) \} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x) dt.$$

Hierin vullen we $\cos u(t-x) = \frac{1}{2} (e^{iu(t-x)} + e^{-iu(t-x)})$ in.

Dit geeft :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-iux} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iut} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{iux} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt.$$

In de eerste integraal stellen we $u = -v$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{iux} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt.$$

We krijgen dus

$$\frac{1}{2} \{ f(x+0) + f(x-0) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt.$$

Ook hier moet weer dezelfde voorzorg worden genomen als bij de Fourier-reeksen. Het rechterlid moet hier opgevat worden als

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{iux} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt.$$

Stellen we

$$f_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt,$$

dan heet $f_1(u)$ de Fourier-getransformeerde van $f(x)$. Op grond van de Fourier-integraal kunnen we nu bij de Fourier-getransformeerde de oorspronkelijke functie makkelijk weer terugvinden (aannemende dat $f(x)$ continu is):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) e^{iux} du.$$

Als dus $f_1(u)$ de Fourier-getransformeerde van $f(x)$ is, dan is $f(x)$ de Fourier-getransformeerde van $f_1(-u)$.

§.9 Verwisseling van volgorde van sommatie, differentiatie en integratie. Uniforme convergentie.

Probleemstelling

In het voorafgaande zijn we dikwijls gestoten op vragen, in hoeverre reeksen termsgewijs gedifferentieerd of geïntegreerd mogen worden. We sommen hieronder eerst een aantal van dergelijke soort vragen op.

Stel dat we een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hebben die voor alle x in een zeker interval convergent is met somfunctie $f(x)$. We kunnen dan de volgende vragen stellen.

- A. Stel dat alle functies $f_n(x)$ continu zijn. Is dan $f(x)$ continu?
B. Stel dat alle functies $f_n(x)$ differentieerbaar zijn. Is dan $f(x)$ differentieerbaar?

In geval B bevestigend wordt beantwoord, kunnen we vragen of $\frac{d f(x)}{dx}$ verkregen kan worden door termsgewijs differentieren van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Deze vraag splitsen we nog in twee vragen.

- C. Stel dat alle functies $f_n(x)$ en de functie $f(x)$ differentieerbaar zijn. Converteert de reeks

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d f_n(x)}{dx} ?$$

- D. Stel dat alle functies $f_n(x)$ en de functie $f(x)$ differentieerbaar zijn en dat (1) convergeert. Geldt dan

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d f_n(x)}{dx} ?$$

Een analoge vraag kunnen we ook met integralen stellen.

- E. Stel dat alle functies $f_n(x)$ en de functie $f(x)$ integreerbaar zijn voor $a \leq x \leq b$. Geldt dan

$$(3) \quad \int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx ?$$

Andere vragen kunnen wij stellen bij functies van meer variabelen. We kunnen bijvoorbeeld naar de ene variabele differentieren en naar de andere integreren. Mag de volgorde van deze operaties verwisseld worden? D.w.z. geldt het volgende

$$\text{F.} \quad \frac{d}{dx} \int_a^b f(x,t) dt = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt ?$$

We kunnen ook naar beide variabelen integreren en een soortgelijke vraag stellen. D.w.z. geldt het volgende

$$\underline{G.} \quad \int_a^b dt \int_a^{\beta} f(x,t) dx = \int_a^{\beta} dx \int_a^b f(x,t) dt ?$$

Tenslotte kunnen we naar beide variabelen differentiëren. Dit leidt tot de vraag of het volgende geldt

$$\underline{H.} \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} .$$

Vraag H is al in het eerste jaar behandeld. Het antwoord is in het algemeen ontkennend, maar als beide leden continu zijn in de omgeving van (a,b) , dan geldt H in (a,b) . Daarmee beschouwen we H als afgedaan.

In alle vragen, waarin integralen voorkomen, kunnen we nog een onderscheid maken tussen eigenlijke en oneigenlijke integralen.

Verder kunnen we alle vragen, waarin reeksen met hun sommen voorkomen vervangen door equivalenten vragen, waarin rijen en hun limieten voorkomen. Stellen we namelijk

$$(4) \quad \begin{cases} u_1 = a_1, \\ u_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ voor } n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

dan spreekt het vanzelf, dat hierdoor bij gegeven a_1, a_2, \dots alle u_1, u_2, \dots bepaald zijn. Het omgekeerde geldt echter ook. Als u_1, u_2, \dots gegeven zijn, dan voldoen de a_1, a_2, \dots die gedefinieerd worden door

$$\begin{aligned} a_1 &= u_1, \\ a_n &= u_n - u_{n-1} \text{ voor } n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

klaarblijkelijk aan (4), want voor $n \geq 2$ geldt dan

$$\sum_{k=1}^n a_k = u_1 + \sum_{k=2}^n (u_k - u_{k-1}) = u_n.$$

Dit passen we toe door te stellen

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f_1(x), \\ g_n(x) &= \sum_{k=1}^n f_k(x) \text{ voor } n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Dan is D equivalent met

D* Stel dat alle functies $g_n(x)$ en de functie $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ differentieerbaar zijn en dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d g_n(x)}{dx}$$

bestaat. Geldt dan

$$(5) \quad \frac{d}{dx} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d g_n(x)}{dx} ?$$

We merken hierbij op, dat het vanzelf spreekt dat

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{d f_k(x)}{dx}.$$

Evenzo wordt E vervangen door een bewering E*, waarbij (3) vervangen wordt door

$$(6) \quad \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx.$$

We merken nog op, dat vraag A, waarin van continuïteit sprake is, niet over verwisseling van volgorde gaat. We kunnen de vraag echter in een dusdanige vorm gieten, dat dit wel zo is. Dat $f(x)$ continu is voor $x = a$ betekent, dat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. De vraag is of dit juist is, als hetzelfde

gegeven is voor de functies $f_n(x)$, dus $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = f_n(a)$. Omdat uiteraard

$f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$, kunnen we de gestelde vraag ook de volgende gedaante geven:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

Het antwoord op alle hierboven gestelde vragen is in het algemeen ontkennend. Dit neemt niet weg, dat in vele gevallen het antwoord toch bevestigend is. Het is ons doel dit nu nader te onderzoeken. We beginnen echter met een aantal voorbeelden, waarbij het niet goed gaat.

Tegenvoorbeelden

De theorie der Fourier-reeksen levert ons tegenvoorbeelden voor A, B en C. We beschouwen de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},$$

die convergent is voor alle reële x . Alle termen van de reeks zijn differentieerbare functies. We hebben echter aangetoond dat de somfunctie niet overal continu en dus ook niet overal differentieerbaar is. Hiermee zijn A en B ontkennend beantwoord. Voor $x = \pi$ is de somfunctie wel differentieerbaar. Daar

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin nx}{n} \right) = \cos nx,$$

is de reeks der afgeleiden daar $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ en deze reeks is divergent, hetgeen een ontkennend antwoord op vraag C oplevert.

Vb.1 We definiëren de rij functies $g_n(x)$ door

$$g_n(x) = nx^2 \sin \frac{1}{nx} \text{ voor } x \neq 0, \\ g_n(0) = 0.$$

Deze functies zijn alle differentieerbaar. Voor $x \neq 0$ is dit evident; voor $x = 0$ wordt de afgeleide

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_n(h) - g_n(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} nh \sin \frac{1}{nh} = 0, \text{ omdat } |\sin \frac{1}{nh}| \leq 1.$$

De afgeleide is dus

$$g_n'(x) = 2nx \sin \frac{1}{nx} - \cos \frac{1}{nx} \text{ voor } x \neq 0, \\ g_n'(0) = 0.$$

Nu is $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = x$. Voor $x = 0$ is dit duidelijk; voor $x \neq 0$ volgt dit

$$\text{uit } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}} = 1 \text{ en } g_n(x) = x \cdot \frac{\sin \frac{1}{nx}}{\frac{1}{nx}}. \text{ Dus } \frac{d}{dx} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \right\} = 1.$$

Voor $x = 0$ is echter $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d g_n(x)}{dx} = 0$, waarmee \underline{D}^* ontkennend is beantwoord.

Voor $x \neq 0$ is het antwoord bevestigend, want dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n'(x) = 1$.

Vb.2 We definiëren de rij functies $g_n(x)$ door $g_n(x) = n^2 x^n (1-x)$.

We beperken ons tot $0 \leq x \leq 1$. We bewijzen nu dat $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$ voor al deze x . Voor $x = 0$ en $x = 1$ is dit duidelijk, want $g_n(0) = g_n(1) = 0$ voor alle n . Voor $0 < x < 1$ geldt echter $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 x^n = 0$, hetgeen bijvoorbeeld volgt uit het feit dat de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

convergentiestraal 1 heeft. Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$ voor $0 \leq x \leq 1$, is

ook $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx = 0$. Aan de andere kant is

$$\int_0^1 g_n(x) dx = n^2 \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = n^2 \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)},$$

dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1$. Hiermee is een ontkennend

antwoord op vraag \underline{E}^* gevonden.

Ook bij vraag \underline{F} kan een voorbeeld gegeven worden waaruit blijkt, dat het antwoord in het algemeen ontkennend luidt; wij behandelen zo'n voorbeeld niet.

Het antwoord op vraag \underline{G} luidt voor eigenlijke integralen bevestigend, hetgeen we niet zullen bewijzen. Voor oneigenlijke integralen is het antwoord in het algemeen ontkennend; we gaan er niet op in.

Continuïteit van limietfunctie van een rij en somfunctie van een reeks.
Uniforme convergentie.

We trachten nu voorwaarden te vinden, waaronder het antwoord op bovenstaande vragen bevestigend wordt. We beginnen met vraag A in de formulering voor rijen in plaats van reeksen. Dus: als $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$ en als alle

$g_n(x)$ continu zijn, is dan $g(x)$ continu?

Continuïteit van $g(x)$ voor $x = a$ betekent, dat $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ en dit

betekent, dat er bij iedere reële $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, dusdanig dat voor alle (geoorloofde) waarden van x , waarvoor $|x-a| < \delta$ geldt, ook $|g(x) - g(a)| < \epsilon$ geldt. Om dit eventueel aan te tonen, zullen we de continuïteit van de functies $g_n(x)$ wel nodig hebben. Dit proberen we als volgt te bereiken. Schrijf voor een of andere index n

$$g(x) - g(a) = g(x) - g_n(x) + g_n(x) - g_n(a) + g_n(a) - g(a).$$

Hieruit volgt

$$|g(x) - g(a)| \leq |g(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - g_n(a)| + |g_n(a) - g(a)|.$$

De middelste van de drie termen kunnen we bij gegeven n klein krijgen door x dicht bij a te kiezen (continuïteit van $g_n(x)$ voor $x = a$). De laatste term kunnen we klein krijgen door n groot te nemen, omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(a) = g(a)$.

Met de eerste term kunnen we voor vaste x natuurlijk hetzelfde bereiken. We moeten echter toestaan, dat x variabel is, en weten dan niet of we het dan voor alle x in een zekere omgeving van a gezamenlijk met één vaste n kunnen bereiken. Anders gezegd, we weten niet of de convergentie van $g_n(x)$ naar $g(x)$ voor alle x even snel gaat. In het algemeen hoeft dat ook niet zo te zijn; vandaar in het algemeen het negatieve antwoord op vraag A. We hebben dit verschijnsel al in paragraaf 6 opgemerkt, waar we gezien hebben dat de convergentie van een Fourier-reeks in de buurt van een punt, waar de somfunctie niet continu is, steeds slechter wordt. We geven daarvan nog een ander, eenvoudiger voorbeeld.

Vb.3 Neem $g_n(x) = x^n$ voor $0 \leq x \leq 1$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$ voor $0 \leq x < 1$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(1) = 1$. De limietfunctie is dus discontinu voor $x = 1$.

Naarmate x dichter bij 1 komt te liggen, wordt de convergentie van x^n naar nul steeds slechter, immers $|x^n| < \epsilon$ is equivalent met $n \log x < \log \epsilon$, dus met $n > \frac{\log \epsilon}{\log x}$ (want $\log x < 0$). Als $\epsilon < 1$ geldt $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log \epsilon}{\log x} = \infty$,

zodat we, als we x steeds dichter bij 1 kiezen, de grens voor n steeds groter moeten nemen.

Als we het optreden van dit verschijnsel nu uitsluiten, kunnen we wel tot de continuïteit van de limietfunctie besluiten. We weten, dat $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$ voor een vaste x betekent, dat er bij iedere $\epsilon > 0$ een N bestaat, zo dat voor alle $n > N$ geldt $|g(x) - g_n(x)| < \epsilon$. Maken we

x nu variabel dan zal in het algemeen N , behalve natuurlijk van ϵ , ook van x afhangen. We nemen nu aan dat N onafhankelijk van x kan worden gekozen, hetgeen een precisering is van de uitspraak, dat de convergentie voor alle x "even goed" is. Dit leidt tot de volgende definitie.

Def. Een rij functies $g_n(x)$ heet uniform convergent met limiet $g(x)$, als bij alle $\epsilon > 0$ een N bestaat, dusdanig dat voor alle $n > N$ en voor alle geoorloofde x geldt

$$|g(x) - g_n(x)| < \epsilon.$$

Het essentiële is dus, dat N hier alleen van ϵ afhangt en niet van x , terwijl bij gewone convergentie N zowel van ϵ als van x mag afhangen.

Het spreekt vanzelf hoe uniforme convergentie van een reeks (in plaats van een rij) wordt gedefinieerd. In plaats van uniforme convergentie spreekt men ook wel van gelijkmatige convergentie.

Om het verschil tussen gewone convergentie en uniforme convergentie duidelijk te laten uitkomen schrijven we hieronder ter vergelijking de definitie van gewone convergentie van een rij functies nog eens op.

Een rij functies $g_n(x)$ is convergent met limiet $g(x)$, als bij alle $\epsilon > 0$ en alle geoorloofde x een N bestaat, dusdanig dat voor alle $n > N$ geldt

$$|g(x) - g_n(x)| < \epsilon.$$

We trachten nu het bewijs van de continuïteit van $g(x)$ voor $x = a$ te voltooien in de veronderstelling, dat de rij $g_n(x)$ uniform convergeert met limiet $g(x)$. Als $\epsilon > 0$ gegeven is, dan is er dus bij $\frac{1}{3}\epsilon$ een N , zo dat voor alle $n > N$ en alle geoorloofde x geldt $|g_n(x) - g(x)| < \frac{1}{3}\epsilon$. Omdat de functie $g_{N+1}(x)$ continu is voor $x = a$, is er bij $\frac{1}{3}\epsilon$ een $\delta > 0$, zo dat voor alle geoorloofde x met $|x-a| < \delta$ geldt $|g_{N+1}(x) - g_{N+1}(a)| < \frac{1}{3}\epsilon$.

Voor iedere geoorloofde x met $|x-a| < \delta$ geldt dus

$$|g(x) - g_{N+1}(x)| < \frac{1}{3}\epsilon, |g_{N+1}(x) - g_{N+1}(a)| < \frac{1}{3}\epsilon, |g_{N+1}(a) - g(a)| < \frac{1}{3}\epsilon,$$

en dus $|g(x) - g(a)| < \epsilon$. Hiermee is de volgende stelling bewezen.

Stelling | Als de rij functies $g_n(x)$ uniform convergeert met limiet $g(x)$ en als alle functies $g_n(x)$ continu zijn voor $x = a$, dan is ook $g(x)$ continu voor $x = a$.

Andere formulering:

| Als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniform convergeert met som $f(x)$ en als alle functies $f_n(x)$ continu zijn voor $x = a$, dan is ook $f(x)$ continu voor $x = a$.

Nadere beschouwing van het begrip uniforme convergentie

Ter toelichting van het begrip uniforme convergentie nog enkele voorbeelden.

Vb.4 Stel $g_n(x) = x^n(1-x)$ voor $0 \leq x \leq 1$. Voor al deze x is

$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$. Verder is de rij uniform convergent. Om dat in te zien

bestuderen we het gedrag van deze functies; daartoe bepalen we de afgeleide $g_n'(x) = n x^{n-1} - (n+1) x^n = x^{n-1} \{n - (n+1)x\}$. Deze is positief voor $x < n/(n+1)$ en negatief voor $x > n/(n+1)$. Hieruit volgt dat $g_n(x)$ een absoluut maximum heeft voor $x = n/(n+1)$. De waarde aldaar is

$$g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

$$\text{dus } |g_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \text{ voor alle } x \text{ met } 0 \leq x \leq 1.$$

Nu is $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Bij iedere $\epsilon > 0$ is er dus een

$$N \text{ zo dat voor } n > N \text{ geldt } \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \epsilon$$

en dus $|g_n(x)| < \epsilon$ voor alle x met $0 \leq x \leq 1$, waarmee de uniforme convergentie aangetoond is.

Vb.5 We nemen nu $g_n(x) = x^n(1-x)$ voor $0 \leq x \leq 1$. Voor al deze x geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$; dit bewijzen we op analoge wijze als in voorbeeld 2.

De convergentie is nu echter niet uniform. Op dezelfde wijze als in voorbeeld 4 zien we, dat $g_n(x)$ een absoluut maximum heeft voor $x = n/(n+1)$. De waarde aldaar is nu echter

$$g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}, \text{ dus } \lim_{n \rightarrow \infty} g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{e}.$$

Er is dus een N_1 , zodat voor $n > N_1$ geldt $g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) > \frac{1}{3}$ (omdat $e < 3$). We nemen nu $\epsilon = \frac{1}{6}$. Als de rij uniform convergent zou zijn, zou er een N zijn zo dat voor alle $n > N$ en alle x met $0 \leq x \leq 1$ zou gelden $|g_n(x)| < \frac{1}{6}$. Voor een n , die $> N_1$ en $> N$ is, zou dan gelden

$$g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) > \frac{1}{3} \text{ en } |g_n\left(\frac{n}{n+1}\right)| < \frac{1}{6},$$

hetgeen een tegenstrijdigheid is. De rij is dus niet uniform convergent.

Aan dit voorbeeld zien we, dat het best kan gebeuren, dat een rij continue functies, die niet uniform convergent is, toch een continue limietfunctie heeft. Uniforme convergentie is dus wel voldoende, maar niet noodzakelijk voor de continuïteit van de limietfunctie.

Aan dit voorbeeld merken we tevens het merkwaardige feit op, dat een rij functies, die convergeert naar een limietfunctie, die identiek nul is, de eigenschap kan hebben, dat de maxima van alle functies van de rij groter zijn dan een vaste (niet van de index n afhankelijke) positieve waarde. Dit is niet in strijd met de convergentie naar nul, omdat de plaats van

dit maximum verschuift bij toenemende n . Nemen we nl. een vaste x met $0 \leq x < 1$, dan komt voor voldoende grote n de argumentwaarde $n/(n+1)$, waarvoor het maximum wordt aangenomen steeds verder rechts van x te liggen. Voor $x = 1$ zijn alle $g_n = 0$.

Het kan zelfs nog erger. Nemen we nl. de rij functies van voorbeeld 2, die ook nadert tot de functie, die identiek nul is, dan is

$$g_n \left(\frac{n}{n+1} \right) = \frac{n^2}{n+1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n},$$

zodat hier de waarde van het maximum zelfs naar oneindig gaat voor $n \rightarrow \infty$.

Een veel gebruikte methode om uniforme convergentie van reeksen te behandelen lichten we toe in het volgende voorbeeld.

Vb.6 We beschouwen de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2} \sin x$. Deze is convergent voor alle reële waarden van x . Immers voor $x \neq 0$ is het een meetkundige reeks met reden e^{-x^2} , die convergent is wegens $0 < e^{-x^2} < 1$. Voor $x = 0$ echter zijn alle termen van de reeks nul, dus is de reeks ook convergent. De som van de reeks is blijkbaar

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2} \sin x = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 - e^{-x^2}} & \text{voor } x \neq 0, \\ 0 & \text{voor } x = 0. \end{cases}$$

Nu geldt echter $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{1 - e^{-x^2}} \right| = \infty$, dus de somfunctie van de reeks is niet

continu voor $x = 0$. Daar de termen van de reeks wel continu zijn, volgt uit bovenstaande stelling, dat de reeks onmogelijk uniform convergent kan zijn. Kiezen we echter een vast positief getal δ en beperken we ons tot $|x| \geq \delta$, dan is voor deze waarden van x de reeks wel uniform convergent. De absolute waarde van het verschil van de reeks en een partiële som is namelijk

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx^2} \sin x - \sum_{k=0}^n e^{-kx^2} \sin x \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-kx^2} \sin x \right| \leq \\ \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-k\delta^2} \quad (\text{voor } |x| \geq \delta);$$

dit laatste is willekeurig klein te krijgen voor voldoende grote n , omdat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta^2}$ wegens $\delta > 0$ convergeert. Omdat deze reeks niet van x afhangt, hangt de te kiezen grens voor n ook niet van x af, zodat de convergentie uniform is.

Het is makkelijk na te gaan, dat de methode van dit voorbeeld ook gebruikt kan worden om de volgende stelling te bewijzen.

Stelling | Als $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ en als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ uniform convergeert, dan convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ook uniform.

Deze stelling wordt heel vaak toegepast in het speciale geval dat de functies $g_n(x)$ constant zijn, d.w.z. niet van x afhangen.

In dat geval is het voldoende dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ convergeert; de convergentie is dan uiteraard automatisch uniform. De stelling wordt dan vaak naar Weierstrass genoemd. In voorbeeld 6 hebben we met dit geval te maken gehad.

Verwisseling van volgorde van sommatie en differentiatie.

We beschouwen nu vraag D^* . Ook hier is door uniforme convergentie te eisen een bevestigend antwoord te verkrijgen, en wel verlangen we uniforme convergentie van de rij der afgeleiden. We zullen het bewijs, dat analoog met het vorige geval maar ingewikkelder is, niet geven. Verder behoeven we niet te veronderstellen dat $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ differentieerbaar is.

Stelling | Als $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$, als alle functies $g_n(x)$ differentieerbaar zijn en als de rij functies $\frac{d g_n(x)}{dx}$ uniform convergeert, dan is $g(x)$ differentieerbaar en

$$\frac{d}{dx} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d g_n(x)}{dx} .$$

Andere formulering:

Als $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, als alle functies $f_n(x)$ differentieerbaar zijn en als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d f_n(x)}{dx}$ uniform convergeert, dan is $f(x)$ differentieerbaar en

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d f_n(x)}{dx} .$$

We leggen de nadruk op het feit, dat de uniforme convergentie geëist wordt van de rij der afgeleiden en niet van de rij der functies zelf. Uniforme convergentie van de rij der functies zelf helpt niet, zoals blijkt uit voorbeeld 1. De daar gegeven rij $g_n(x)$ is namelijk uniform convergent.

Om dit in te zien bedenken we dat uit de formule van Taylor volgt, dat $\sin u = u - \frac{1}{2} u^2 \sin \theta u$ met $0 < \theta < 1$ (θ hangt van u af!).

Hieruit volgt

$$\left| x - nx^2 \sin \frac{1}{nx} \right| = \left| \frac{1}{2n} \sin \frac{\theta}{nx} \right| \leq \frac{1}{2n} .$$
 Dit laatste hangt niet van x af

en gaat naar nul als $n \rightarrow \infty$. Hieruit volgt direct de uniforme convergentie van de rij $g_n(x)$ met limiet x . Desondanks is (5) hier niet vervuld.

Omgekeerd is het ook mogelijk, dat de rij $g_n(x)$ niet uniform convergeert en de rij $g_n'(x)$ wel. In dat geval mag bovenstaande stelling dus wel worden toegepast. Neem bv. $g_n(x) = \frac{x}{n}$ voor alle reële x , dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$ voor alle x , maar deze convergentie is niet uniform want $|\frac{x}{n}| < \epsilon$ is equivalent met $n > \frac{|x|}{\epsilon}$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\epsilon} = \infty$ zodat we door x groot te maken de grens voor n onbepaald kunnen vergroten. Nu is $g_n'(x) = \frac{1}{n}$; dit convergeert wel uniform, want het convergeert en hangt helemaal niet van x af.

Verwisseling van volgorde van sommatie en integratie.

Bij vraag E* krijgen we een bevestigend antwoord als we uniforme convergentie van de rij g_n aannemen en ons tot eigenlijke integralen beperken.

Stelling | Als de rij functies $g_n(x)$ uniform convergeert met limiet $g(x)$ en als alle functies $g_n(x)$ en $g(x)$ eigenlijk integreerbaar zijn voor $a \leq x \leq b$, dan geldt

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx.$$

Andere formulering:

Als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uniform convergeert met som $f(x)$ en als alle functies $f_n(x)$ en $f(x)$ eigenlijk integreerbaar zijn voor $a \leq x \leq b$, dan geldt

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Het bewijs van deze stelling is zeer eenvoudig. Op grond van de uniforme convergentie van $g_n(x)$ is er bij $\epsilon/2(b-a)$ een N , zodat voor $n > N$ en alle x geldt $|g(x) - g_n(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.

Hieruit volgt echter direct

$$\left| \int_a^b g(x) dx - \int_a^b g_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b \{g(x) - g_n(x)\} dx \right| \leq (b-a) \frac{\epsilon}{2(b-a)} < \epsilon,$$

waaruit de stelling volgt.

In werkelijkheid geldt er een veel verder gaande stelling, waarin de uniforme convergentie van $g_n(x)$ wordt vervangen door gewone convergentie met de toevoeging, dat er een positieve constante K bestaat, zodat $|g_n(x)| < K$ voor alle n en alle x . Deze voorwaarde drukt men uit door te zeggen, dat de functies $g_n(x)$ uniform begrensd zijn. Als dan bovendien $g_n(x)$ en $g(x)$ integreerbaar zijn voor $a \leq x \leq b$, dan geldt (6).

Het zeer moeilijke bewijs van deze stelling geven we hier niet. Wel merken we op, dat in het tegenvoorbeeld 2 de voorwaarde van de uniforme begrensdheid uiteraard niet is vervuld. Inderdaad hebben we reeds eerder vastgesteld, dat de maxima van deze functies naar oneindig gaan als $n \rightarrow \infty$.

Voor oneigenlijke integralen geldt het voorafgaande niet. Zelfs uniforme convergentie is dan niet voldoende om verwisselbaarheid van limiet en integraal te waarborgen. We gaan dat niet na.

Verwisseling van volgorde van differentiatie en integratie.

Bij vraag F is er geen sprake van een limiet van een rij of een som van een reeks, zodat het begrip uniforme convergentie hier niet toepasselijk is. Als extra-voorwaarde, die voldoende is om een bevestigend antwoord te krijgen, kiezen we de voorwaarde dat $\frac{\partial f}{\partial x}$ continu is. Dit drukken we uit in de volgende stelling.

Stelling | Laat $f(x,t)$ continu zijn voor $\alpha \leq x \leq \beta$, $a \leq t \leq b$, laat $\frac{\partial f}{\partial x}$ bestaan voor dezelfde x en t en continu zijn.
Dan geldt

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x,t) dt = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt$$

voor alle x met $\alpha < x < \beta$.

Deze stelling bewijzen we niet. Let wel, dat de continuïteit in deze stelling bedoeld is als continuïteit in de twee veranderlijken x en t samen. Zo is het bijvoorbeeld niet voldoende dat $\frac{\partial f}{\partial x}$ voor vaste t als functie van x en voor vaste x als functie van t continu is.

De stelling verliest ook haar geldigheid, als de integralen oneigenlijk gemaakt worden door een van de integratiegrenzen naar het oneindige te verschuiven.

Tenslotte nog een opmerking over hetgeen er gebeurt als behalve de integrand ook de integratiegrenzen van x afhangen. Als de grenzen a en b van de integralen vervangen worden door differentieerbare functies $a(x)$ en $b(x)$ met $a \leq a(x) \leq b(x) \leq b$ en als bovendien aan de voorwaarden van bovenstaande stelling is voldaan, dan volgt uit de kettingregel van de differentiaalrekening direct, dat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t) dt &= \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt + \\ &+ f(x, b(x)) \cdot \frac{d b(x)}{dx} - f(x, a(x)) \cdot \frac{d a(x)}{dx}. \end{aligned}$$

HOOFDSTUK III KWADRATISCHE VORMEN EN KWADRATISCHE OPPERVLAKKEN

§.1 Matrix van een lineaire afbeelding. Invloed van basiskeuze. Eigenvectoren.

Korte samenvatting van hetgeen vroeger behandeld is.

We beschouwen een lineaire afbeelding A van een n -dimensionale vectorruimte V in een m -dimensionale vectorruimte W . Aan A is in het eerstejaars college op de volgende wijze een matrix toegevoegd.

Kies een basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ van V en een basis $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m$ van W . Omdat $A\underline{e}_j$ een element van W is, is het een lineaire combinatie van $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m$.

We kunnen dus schrijven:

$$A\underline{e}_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \underline{f}_i \quad \text{voor } j = 1, \dots, n.$$

De matrix met elementen a_{ij} (m rijen en n kolommen) heet de matrix van de afbeelding A . In het eerstejaars college is deze matrix ook met de letter A aangeduid. Zij hangt echter behalve van A ook af van de basiskeuze in V en W . Daar wij in het vervolg de invloed van een wijziging van basis zullen nagaan, zullen we voorzichtigheidshalve de matrix van een lineaire afbeelding niet langer met dezelfde letter aanduiden als de afbeelding zelf, dus bv. $[A]$ schrijven voor de matrix van A .

Overgang op een andere basis

We bestuderen eerst de overgang van een basis op een andere basis, zonder daarbij voorlopig een lineaire afbeelding in de beschouwing te betrekken.

Laat $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ een basis zijn van een vectorruimte V . Een vector \underline{x} van V

is dan te schrijven in de vorm $\underline{x} = \sum_{j=1}^n x_j \underline{e}_j$; dan heten x_1, \dots, x_n zoals

bekend de componenten van \underline{x} ten opzichte van de basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$. Om zoveel

mogelijk profijt te trekken van de matrixnotatie schrijven we deze x_1, \dots, x_n nu niet naast elkaar, maar onder elkaar als een matrix met één

kolom en n rijen: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, die we de kolom van \underline{x} ten opzichte van de

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\underline{x})$$

basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ noemen. Notatie (\underline{x}) . Uiteraard hangt deze kolom behalve van \underline{x} ook van de basis af.

De kolom van \underline{e}_j heeft een 1 op de j^e plaats en elders nullen.

Als U een matrix is met n kolommen, dan kan het matrixproduct $U(\underline{x})$ gevormd worden. $U(\underline{e}_j)$ is dan de j^e kolom van U .

Hulpstelling $(\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}) = \alpha(\underline{a}) + \beta(\underline{b})$.

Bewijs. Stel $\underline{a} = \sum_{j=1}^n a_j \underline{e}_j$, $\underline{b} = \sum_{j=1}^n b_j \underline{e}_j$, dan is $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} =$
 $= \sum_{j=1}^n (\alpha a_j + \beta b_j) \underline{e}_j$. Dus

$$(\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}) = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 \\ \vdots \\ \alpha a_n + \beta b_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \alpha(\underline{a}) + \beta(\underline{b}).$$

In woorden luidt de hulpstelling: de kolom van een lineaire combinatie van vectoren is de overeenkomstige lineaire combinatie van de kolommen van deze vectoren. Dit is ook geldig voor een som met meer dan twee termen.

Naast de ("oude") basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ beschouwen we nu een andere ("nieuwe") basis $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ van dezelfde vectorruimte V . De kolom van \underline{x} ten opzichte van deze nieuwe basis noteren we $(\underline{x})'$.

Dus als $\underline{x} = \sum_{j=1}^n x_j \underline{e}'_j$, dan is $(\underline{x})' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$.

We willen nu het verband tussen (\underline{x}) en $(\underline{x})'$ bepalen. Laat $(\underline{e}'_j) = \begin{pmatrix} s_{1j} \\ \vdots \\ s_{nj} \end{pmatrix}$

zijn, d.w.z. $\underline{e}'_j = \sum_{k=1}^n s_{kj} \underline{e}_k$. Laat men nu j van 1 tot n lopen,

dan vormen de s_{ij} een matrix S , waarvan de j^e kolom juist de kolom van \underline{e}'_j is ten opzichte van de basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$. In elke kolom van S staan dus de componenten van een basisvector van de nieuwe basis ten opzichte van de oude basis.

De matrix S heet de matrix behorende bij de overgang van de basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ op de basis $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$.

Omdat $\underline{x} = \sum_{j=1}^n x_j \underline{e}'_j$, volgt uit bovenstaande hulpstelling:

$$(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n x_j (\underline{e}'_j) =$$

$$\begin{aligned}
&= x_1' \begin{pmatrix} s_{11} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_n' \begin{pmatrix} s_{1n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} x_1' + \dots + s_{1n} x_n' \\ \vdots \\ s_{n1} x_1' + \dots + s_{nn} x_n' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = S(\underline{x})'.
\end{aligned}$$

Hiermee is het verband tussen (\underline{x}) en $(\underline{x})'$ gevonden.

Uitgeschreven in drie variabelen:

$$\begin{aligned}
x_1 &= s_{11} x_1' + s_{12} x_2' + s_{13} x_3' \\
x_2 &= s_{21} x_1' + s_{22} x_2' + s_{23} x_3' \\
x_3 &= s_{31} x_1' + s_{32} x_2' + s_{33} x_3'.
\end{aligned}$$

De componenten van \underline{x} ten opzichte van de oude basis worden hier dus uitgedrukt in die ten opzichte van de nieuwe basis.

Om misverstand te voorkomen merken we op, dat de hier besproken toevoeging van een matrix aan een overgang op een andere basis iets geheel anders is dan de vroeger behandelde toevoeging van een matrix aan een lineaire afbeelding. Men mene dus niet, dat er nu sprake is van een "afbeelding" van $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ op $\underline{e}_1', \dots, \underline{e}_n'$ of iets dergelijks.

Laat T de matrix zijn, die behoort bij de overgang van $\underline{e}_1', \dots, \underline{e}_n'$ op $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$. Dan geldt voor iedere vector \underline{x} in V :

$(\underline{x})' = T(\underline{x})$, en dus $(\underline{x}) = S(\underline{x})' = ST(\underline{x})$. In het bijzonder $(\underline{e}_j) = ST(\underline{e}_j) =$ de j^e kolom van ST . Deze heeft dus op de j^e plaats een 1 en elders nullen. Dus $ST =$ de eenheidsmatrix; dus S is regulier en $T = S^{-1}$.

Stelling | De matrix S behorende bij de overgang van een basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ op een basis $\underline{e}_1', \dots, \underline{e}_n'$ is regulier en de matrix behorende bij de overgang van $\underline{e}_1', \dots, \underline{e}_n'$ op $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ is S^{-1} .

Vb.1 In R_2 zij $\underline{e}_1 = (1,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1)$ en de nieuwe basis $\underline{e}_1' = (4,3)$, $\underline{e}_2' = (5,4)$. Bij de overgang van $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ op $\underline{e}_1', \underline{e}_2'$ hoort dan de matrix $S = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Bij de overgang van $\underline{e}_1', \underline{e}_2'$ op $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ hoort dan $S^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Inderdaad is

$\left. \begin{aligned} (1,0) &= 4(4,3) - 3(5,4) \\ (0,1) &= -5(4,3) + 4(5,4) \end{aligned} \right\}$: de kolommen van S^{-1} bevatten de componenten van de oude basisvectoren ten opzichte van de nieuwe basis.

Invloed van basiskeuze op de matrix van een lineaire afbeelding.

De matrix van een lineaire afbeelding is ingevoerd door $Ae_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$; we beperken ons tot afbeeldingen van een vectorruimte V in zichzelf. Hieruit volgt

$$(Ae_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nj} \end{pmatrix} ; \text{ de kolom van } Ae_j \text{ is de } j^{\text{e}} \text{ kolom van de matrix } [A] \text{ van } A.$$

$$\text{Nu is } \underline{Ax} = A \sum_{j=1}^n x_j e_j = \sum_{j=1}^n x_j Ae_j, \text{ dus}$$

$$(\underline{Ax}) = \sum_{j=1}^n x_j (Ae_j) =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = [A] (\underline{x}).$$

Uitgeschreven in drie veranderlijken (stel $\underline{Ax} = \underline{y}$ met componenten y_1, y_2, y_3):

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ y_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3. \end{aligned}$$

De matrix $[A]$ is de enige matrix waarvoor een betrekking van het type $(\underline{Ax}) = [A](\underline{x})$ geldt; dit wordt gepreciseerd in de volgende stelling:

Stelling Laat V een vectorruimte zijn, $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ een basis van V en laat (\underline{x}) de kolom van \underline{x} ten opzichte van $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ voorstellen. Als A een lineaire afbeelding is van V in V , dan bestaat er één en slechts één matrix U met n rijen en n kolommen, zo dat

$$(\underline{Ax}) = U(\underline{x})$$

geldt voor alle \underline{x} in V , en wel voldoet $U = [A]$, de matrix van A ten opzichte van $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$.

Bewijs: Dat $U = [A]$ voldoet, is hierboven al aangetoond. Stel nu $(\underline{Ax}) = U(\underline{x})$ voor alle \underline{x} in V . Dan geldt ook $(A\underline{e}_j) = U(\underline{e}_j)$, maar $(A\underline{e}_j)$ is de j^e kolom van $[A]$ en $U(\underline{e}_j)$ is de j^e kolom van U . Deze stemmen overeen voor alle j , dus $U = [A]$.

We beschouwen nu een overgang op een nieuwe basis $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ met overgangsmatrix S . Dan geldt

$$(\underline{Ax})' = S^{-1}(\underline{Ax}) = S^{-1}[A](\underline{x}) = S^{-1}[A]S(\underline{x})'.$$

Uit bovenstaande stelling, toegepast op de basis $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$, volgt nu dat $S^{-1}[A]S$ de matrix is van A ten opzichte van $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$. Noemen we deze $[A]'$, dan geldt

$$[A]' = S^{-1}[A]S.$$

Hiermee is het verband tussen de matrices van A ten opzichte van oude en nieuwe basis gevonden.

Als voorbeeld beschouwen we de lineaire afbeelding A van R_2 in zichzelf, waarvoor geldt $A(1,0) = (0,-1)$, $A(0,1) = (-1,1)$. Ten opzichte van de basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ van voorbeeld 1 heeft deze de matrix

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} e'_1 &= 4,3 \\ e'_2 &= 5,4 \end{aligned}$$

Gaan we nu over op de basis $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2$ van voorbeeld 1, dan wordt de matrix van deze afbeelding

$$S^{-1}[A]S = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dit klopt met de volgende afleiding:

$$\begin{aligned} A(4,3) &= 4A(1,0) + 3A(0,1) = 4(0,-1) + 3(-1,1) = (-3,-1) = \\ &= -7(4,3) + 5(5,4), \end{aligned}$$

waaruit blijkt, dat de componenten van $A\underline{e}'_1$ ten opzichte van $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2$ juist de eerste kolom van de nieuwe matrix vormen. Voor de tweede kolom en $A\underline{e}'_2$ geldt een analoge afleiding.

Eenvoudige gedaante van de matrix van een lineaire afbeelding.
Eigenwaarden en eigenvectoren.

We kunnen nu de vraag stellen, in hoeverre we de matrix van een gegeven lineaire afbeelding een eenvoudige gedaante kunnen geven door passende keuze van een basis.

We zoeken daartoe vectoren die een eenvoudig beeld hebben en vinden deze in die vectoren waarvan het beeld dezelfde richting heeft als de vector zelf. Dit leidt tot de volgende definitie:

Een vector \underline{v} , die $\neq \underline{0}$ is, heet een eigenvector van de afbeelding A , als er een getal λ bestaat, dusdanig dat $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$. Het getal λ heet een eigenwaarde van A behorende bij de eigenvector \underline{v} .

Nemen we een basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ in V en stellen we $A\underline{e}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \underline{e}_i$, dan gaat $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ over in

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j = \lambda v_i \quad \text{voor } i = 1, \dots, n,$$

als $\underline{v} = \sum_{j=1}^n v_j \underline{e}_j$. We beschouwen dit bij gegeven λ als een stelsel

homogene vergelijkingen voor v_1, \dots, v_n . Omdat een eigenvector $\neq \underline{0}$ moet zijn, kan dit stelsel alleen dan opgelost worden als λ een wortel is van de karakteristieke vergelijking van de matrix $[A]$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

We mogen dit ook de karakteristieke vergelijking van de lineaire afbeelding A noemen. De vergelijking hangt nl. niet van de basiskeuze af. Het linkerlid kan worden geschreven $\det([A] - \lambda[I])$, waarin $[I]$ de eenheidsmatrix is. Bij deze notatie is gebruik gemaakt van het verschil van twee matrices, hetgeen een begrip is dat we nog niet hadden gedefinieerd.

De som van twee matrices U en V is een matrix, die ontstaat door de overeenkomstige elementen van U en V bij elkaar op te tellen. Dus als $U + V = W$, dan is $w_{ij} = u_{ij} + v_{ij}$ en analoog voor het verschil. Er geldt dan $T(U + V) = TU + TV$ en $(U + V)T = UT + VT$, zoals gemakkelijk te verifiëren is.

Gaan we nu over op een andere basis, dan wordt $[A]$ vervangen door $S^{-1}[A]S$; we krijgen dan

$$\begin{aligned} \det(S^{-1}[A]S - \lambda[I]) &= \det\{S^{-1}([A] - \lambda[I])S\} \\ &= \det S^{-1} \cdot \det([A] - \lambda[I]) \cdot \det S. \end{aligned}$$

Uit $S^{-1}S = [I]$ volgt echter, dat $\det S^{-1} \cdot \det S = 1$. Dus $\det(S^{-1}[A]S - \lambda[I]) = \det([A] - \lambda[I])$.

Stelling | Als $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ eigenvectoren zijn van een lineaire afbeelding A en $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ de bijbehorende eigenwaarden en als de λ_i twee aan twee verschillend zijn, dan zijn $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ lineair onafhankelijk.

Bewijs. Stel dat $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ lineair afhankelijk zijn, dan is er een maximaal lineair onafhankelijk deelstelsel van het stelsel $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$, dat uit k vectoren bestaat, waarbij $1 \leq k < m$. Door eventueel de nummering te veranderen kunnen we bereiken, dat $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ lineair onafhankelijk zijn en de overige \underline{v}_i hiervan lineair afhankelijk, dus bv.

$$\underline{v}_m = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{v}_i.$$

$$\text{Nu geldt } \sum_{i=1}^k \lambda_m \alpha_i \underline{v}_i = \lambda_m \underline{v}_m = A \underline{v}_m = \sum_{i=1}^k \alpha_i A \underline{v}_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i \underline{v}_i.$$

Omdat $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ lineair onafhankelijk zijn, volgt hieruit $(\lambda_m - \lambda_i) \alpha_i = 0$ voor $i = 1, \dots, k$. Omdat \underline{v}_m een eigenvector is, is $\underline{v}_m \neq \underline{0}$, dus er is zeker een $\alpha_h \neq 0$. Dan geldt echter $\lambda_m = \lambda_h$ in strijd met de veronderstelling dat de λ_i twee aan twee verschillend zijn.

We beperken ons nu tot het geval, dat de karakteristieke vergelijking n verschillende reële wortels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heeft. Hierbij behoren eigenvectoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ die lineair onafhankelijk zijn en dus een basis vormen.

Kiezen we deze basis, dan volgt uit $A \underline{v}_j = \lambda_j \underline{v}_j$, dat de matrix van A er dan als volgt uitziet

$$(1) \quad \left(\begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{array} \right)$$

Een matrix van deze vorm heet een diagonaalmatrix. We kunnen het gevonden resultaat ook voor matrices formuleren.

Stelling | Als B een matrix met n rijen en n kolommen is, waarvan de karakteristieke vergelijking n verschillende reële wortels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heeft, dan bestaat er een reguliere matrix S, zo dat $S^{-1}BS$ de gedaante (1) heeft.

Als de karakteristieke vergelijking meervoudige of complexe wortels heeft, wordt de zaak ingewikkelder. We bespreken dat niet. Gedaante (1) is dan ook niet altijd bereikbaar.

Vb.2 We beschouwen de lineaire afbeelding A van R_2 in zichzelf die ten opzichte van de basis $\underline{e}_1 = (1,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1)$ de matrix

$$[A] = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix}$$

heeft. De karakteristieke vergelijking van A is

$$\begin{vmatrix} 8 - \lambda & 3 \\ -18 & -7 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0.$$

De eigenwaarden zijn dus 2 en -1. Om de eigenvectoren bij de eigenwaarde 2 te vinden moeten we oplossen:

$$\left. \begin{array}{l} 6v_1 + 3v_2 = 0 \\ -18v_1 - 9v_2 = 0 \end{array} \right\} . \text{ Dit heeft als oplossing } (v_1, v_2) = \alpha(1, -2),$$

dus bv. (1, -2). De eigenwaarde -1 geeft

$$\left. \begin{array}{l} 9v_1 + 3v_2 = 0 \\ -18v_1 - 6v_2 = 0 \end{array} \right\} , \text{ met als oplossing } (v_1, v_2) = \alpha(1, -3), \text{ dus bv. } (-1, 3).$$

Kiezen we deze lineair onafhankelijke eigenvectoren (1, -2), (-1, 3) als nieuwe basis, dan is de matrix behorende bij de overgang op deze nieuwe basis:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ en de matrix van A ten opzichte van deze}$$

nieuwe basis luidt:

$$S^{-1}[A]S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

hetgeen een diagonaalmatrix is.

§.2 Het meetkundige probleem

In het eerste jaar zijn een aantal krommen in het platte vlak en een aantal oppervlakken in de ruimte behandeld, die dit gemeen hebben, dat ze alle door een vergelijking van de tweede graad zijn bepaald.

In R_2 waren dit

de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, de parabool $y^2 = 2px$.

Enkele voorbeelden in R_3 :

de ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, de hyperbolische paraboloid $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

We stellen ons ten doel krommen en oppervlakken, die door vergelijkingen van de tweede graad worden bepaald, nader te onderzoeken. Bij dit onderzoek worden we geleid door een overweging, die we eerst aan een voorbeeld verduidelijken.

We vergelijken de krommen $x^2 - y^2 = 1$ en $(x-2)^2 - y^2 = 1$. De eerste is een vergelijking van het type, dat hierboven aan de hyperbool is toegevoegd. We zien echter direct, dat ook bij de tweede een hyperbool behoort. We kunnen dit beredeneren door van het coördinatenstelsel, waarmee de meetkundige figuur in de vergelijking $(x-2)^2 - y^2 = 1$ is uitgedrukt, over te gaan op een ander stelsel, dat eenvoudig ontstaat door de oorsprong te verschuiven naar het punt dat in het "oude" stelsel de coördinaten $(2,0)$ had. De richting van de assen laten we onveranderd. Noemen we de coördinaten van het punt, dat in het oude stelsel (x,y) was, in het "nieuwe" stelsel (\bar{x},\bar{y}) , dan is klaarblijkelijk $x = \bar{x} + 2$, $y = \bar{y}$.

De figuur krijgt dus in de nieuwe coördinaten de vergelijking $\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 1$ en is dus een hyperbool.

We kunnen ook een andere methode volgen om hetzelfde resultaat te bereiken. We laten het coördinatenstelsel op zijn plaats, maar gaan de meetkundige figuur verschuiven en wel over een afstand 2 in de richting van de negatieve x-as. Een punt (x,y) gaat dan over in een ander punt (\bar{x},\bar{y}) , dat blijkbaar bepaald is door $\bar{x} = x-2$, $\bar{y} = y$. De punten (x,y) die voldoen aan $(x-2)^2 - y^2 = 1$ gaan blijkbaar over in de punten (\bar{x},\bar{y}) , die voldoen aan $\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 1$, hetgeen een hyperbool is. De oorspronkelijke figuur was dus ook een hyperbool.

Formeel algebraïsch zijn beide methoden identiek; ze verschillen echter in hun meetkundige beschrijving en interpretatie, hoewel ze ook meetkundig op hetzelfde grondbeginsel berusten, nl. dat er geen verschil gemaakt wordt tussen congruente figuren, die op verschillende plaatsen in de ruimte liggen. In het eerste geval brengt men door een speciale keuze van het coördinatenstelsel de vergelijking in een herkenbare gedaante en maakt vervolgens geen verschil meer tussen de figuren, die op welk coördinatenstelsel ook deze vergelijking hebben. Verschillende coördinatenstelsels ontstaan echter uit elkaar door bewegingen, zodat figuren met dezelfde vergelijking in verschillende coördinatenstelsels congruent zijn. In het

tweede geval is de zaak rechtstreeks duidelijk, omdat hier de figuren zelf aan een beweging onderworpen worden, waarbij ze in congruente figuren overgaan.

Wij zullen in het vervolg de interpretatie kiezen, waarbij de meetkundige figuren vast zijn en het coördinatenstelsel beweeglijk. Dit is dus de zojuist als eerste geval beschreven methode.

We maken eerst een opmerking over vectoren. Bij de invoering van vectoren in het eerstejaarscollege was een vector een pijl uitgaande van een vast punt O (oorsprong). We behoeven dan ook geen onderscheid te maken tussen vectoren en punten: het eindpunt van de pijl en de door de pijl voorgestelde vector kunnen we vrijelijk door elkaar gebruiken. In plaats van deze gebonden vectoren kunnen we echter ook vrije vectoren beschouwen, waarvan het beginpunt van de pijl niet in O hoeft te liggen; pijlen die door evenwijdige verschuiving uit elkaar kunnen ontstaan, stellen dan dezelfde vector voor. De componenten van zulk een vrije vector zijn projecties op de coördinaatassen. Als we echter een correspondentie tussen punten en vectoren tot stand willen brengen, kiezen we bij een punt P evenals vroeger de vector \vec{OP} , die de positievector van P wordt genoemd.

We gaan nu eerst het effect na van een verschuiving van de oorsprong van het coördinatenstelsel zonder verandering van de richting der assen. Dit betekent, dat een vector, als vrije vector opgevat, op beide assenstelsels dezelfde componenten heeft. Laat O de oorsprong van het oude en O' die van het nieuwe stelsel zijn en stel $\vec{OO'} = \underline{p}$. Noemen we de positievector van een punt P t.o.v. het oude stelsel $\underline{x} = \vec{OP}$ en t.o.v. het nieuwe stelsel $\underline{y} = \vec{O'P}$, dan geldt blijkbaar $\underline{x} = \underline{y} + \underline{p}$. Daar coördinaten van een punt hetzelfde zijn als componenten van de positievector van dat punt geeft deze formule, in componenten uitgeschreven

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= y_1 + p_1 \\ \dots & \\ x_n &= y_n + p_n \end{aligned} \right\} \text{ de overgang van oude coördinaten } (x_1, \dots, x_n) \text{ op}$$

nieuwe coördinaten (y_1, \dots, y_n) van een punt bij verschuiving van het assenstelsel in R_n . Deze verschuiving van een assenstelsel heet een translatie.

We laten nu de oorsprong op zijn plaats, maar veranderen de richtingen der assen. We drukken dit ook uit in vectortaal. De positievector \underline{x} van een punt met coördinaten x_1, \dots, x_n is te ontbinden volgens eenheidsvectoren $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ in de richtingen van de positieve coördinaatassen volgens $\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n$. Nu kiezen we nieuwe assen met corresponderende nieuwe basisvectoren $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$. De coördinatentransformatie correspondeert met de overgang in de vectorruimte op een andere basis. In paragraaf 1 hebben we aan zo'n overgang op een nieuwe basis een matrix S toegevoegd, die bepaald was door

$$\underline{e}'_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} \underline{e}_i.$$

We hebben nu echter te maken met orthogonale coördinatenstelsels, dus de vectoren $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ staan twee aan twee loodrecht op elkaar en evenzo de vectoren $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$. Bovendien zijn het eenheidsvectoren.

Dit geeft

$$(\underline{e}'_j, \underline{e}'_k) = \left(\sum_{i=1}^n s_{ij} \underline{e}_i, \sum_{h=1}^n s_{hk} \underline{e}_h \right) = \sum_{i=1}^n s_{ij} s_{ik},$$

dus

$$\sum_{i=1}^n s_{ij} s_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{als } j \neq k \\ 1 & \text{als } j = k. \end{cases}$$

Dit betekent echter juist, dat de matrix S orthogonaal is.

We nemen nu in R_n de natuurlijke basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$, waarbij \underline{e}_j bestaat uit de rij getallen met een 1 op de j^e plaats en elders nullen. Dan is

$(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j \underline{e}_j$. Op deze natuurlijke basis is, als we de vectoren van R_n als kolomvectoren schrijven:

$$\underline{e}'_j = \begin{pmatrix} s_{1j} \\ s_{2j} \\ \vdots \\ s_{nj} \end{pmatrix}. \text{ De kolomvectoren van } S \text{ zijn dus juist de nieuwe}$$

basisvectoren. De kolomvectoren van een orthogonale matrix zijn dus onderling loodrechte eenheidsvectoren. De determinant van de matrix is dus $D(\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n)$ en deze is ± 1 omdat de matrix orthogonaal is. Nu is in R_3 een onafhankelijk stelsel vectoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ een rechts, resp. links stelsel, als de determinant $D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3) > 0$, resp. < 0 is. In R_n definiëren we, dat een onafhankelijk stelsel $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ van n vectoren een rechts, resp. links stelsel vormt als $D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) > 0$ resp. < 0 is. Bij een coördinatenstelsel eisen we nu, dat we met een rechts stelsel te maken hebben, hetgeen neerkomt op de eis dat $D(\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n) = +1$.

Laat nu \underline{x} oude coördinaten (x_1, \dots, x_n) en nieuwe coördinaten (y_1, \dots, y_n)

$$\begin{aligned} \text{hebben, dan is dus } \underline{x} &= \sum_{i=1}^n x_i \underline{e}_i = \sum_{j=1}^n y_j \underline{e}'_j = \sum_{j=1}^n y_j \sum_{i=1}^n s_{ij} \underline{e}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n s_{ij} y_j \right) \underline{e}_i. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $x_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} y_j$ (vergelijk dit met het in paragraaf 1 afgeleide verband: $(\underline{x}) = S(\underline{y})'$),

hetgeen de formules voor de transformatie van coördinaten bij een rotatie van het assenstelsel voorstelt.

Voert men na elkaar een translatie en een rotatie uit, dan krijgt men

$$x_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} y_j + p_i,$$

waarin S een orthogonale matrix is met $\det S = 1$.

In het eerstejaarscollege is afgeleid, dat voor $n = 2$ een orthogonale matrix met determinant 1 de gedaante

$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ heeft. Daar $\underline{e}_1' = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, is dus φ de hoek, die de

nieuwe x -as met de oude maakt. De overgang van oude coördinaten (x_1, x_2) op nieuwe coördinaten (y_1, y_2) wordt dan gegeven door

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= y_1 \cos \varphi - y_2 \sin \varphi \\ x_2 &= y_1 \sin \varphi + y_2 \cos \varphi \end{aligned} \right\}. \text{ In het algemeen zijn de } s_{ij} \text{ componenten}$$

van eenheidsvectoren, dus cosinussen van hoeken tussen vectoren en wel is s_{ij} de cosinus van de hoek tussen de oude positieve x_i -as en de nieuwe positieve y_j -as. Uit deze meetkundige interpretatie blijkt direct, dat de matrix, die behoort bij de overgang van nieuwe naar oude coördinaten de getransponeerde matrix S^T van S is. Dit klopt met het vroeger afgeleide feit, dat voor een orthogonale matrix S geldt $S^T = S^{-1}$.

Het linkerlid van een kwadratische kromme of oppervlak is een veelterm van de tweede graad. Deze splitsen we in zijn homogene bestanddelen: het gedeelte $Q(\underline{x})$ van de tweede graad, het gedeelte $L(\underline{x})$ van de eerste graad en de constante term c .

Voorbeeld: $2x_1^2 + 3x_2x_3 + 3x_2 + 5x_3 + 6$ heeft $Q(\underline{x}) = 2x_1^2 + 3x_2x_3$, $L(\underline{x}) = 3x_2 + 5x_3$, $c = 6$.

Men noemt een homogene veelterm ook wel een vorm: $Q(\underline{x})$ is een kwadratische vorm, $L(\underline{x})$ een lineaire vorm.

We gaan nu het effect na van een translatie en een rotatie op een kwadratische functie. Bij een translatie gaat een kwadratische vorm klaarblijkelijk over in een niet noodzakelijk homogene kwadratische veelterm en een lineaire veelterm in een lineaire veelterm. Het zuiver kwadratische stuk van deze kwadratische veelterm is echter precies dezelfde kwadratische vorm als de oorspronkelijke kwadratische vorm, nu echter in nieuwe coördinaten. In formule:

Als $Q(\underline{x})$ een kwadratische vorm is en $\underline{x} = \underline{y} + \underline{p}$ een translatie dan is de getransformeerde $Q(\underline{y} + \underline{p})$ gelijk aan $Q(\underline{y})$ + termen van eerste graad en constanten. Dit is duidelijk, want een term ax_1x_j uit $Q(\underline{x})$ gaat over in $a(y_1 + p_1)(y_j + p_j) = ay_1y_j +$ termen van eerste graad en constante.

De formule voor een rotatie daarentegen drukt x_1, \dots, x_n homogeen en lineair in y_1, \dots, y_n uit. Hieruit volgt, dat een kwadratische vorm in een kwadratische vorm overgaat en een lineaire vorm in een lineaire vorm.

We gebruiken nu de rotatie om het kwadratische gedeelte in een zo eenvoudig mogelijke gedaante te brengen en vervolgens de translatie om het lineaire gedeelte te vereenvoudigen. Bij dit laatste proces wordt het effect van de eerste vereenvoudiging niet bedorven, omdat een translatie het kwadratische gedeelte ongewijzigd laat. We proberen door de translatie het lineaire gedeelte geheel nul te krijgen, hetgeen echter niet in alle gevallen zal lukken. Als het wel lukt, kunnen we evenwel ook zonder bezwaar eerst de translatie en dan de rotatie uitvoeren. Als namelijk het lineaire gedeelte nul is, blijft het dat klaarblijkelijk bij het uitvoeren van een rotatie.

Hetgeen bij de rotatie met het homogene kwadratische gedeelte gebeurt, is het beschouwen van het gedrag van een kwadratische vorm bij een homogene lineaire transformatie van de veranderlijken die in die vorm voorkomen. Ook het algemenere geval van de kwadratische functie, die aan rotatie en translatie onderworpen wordt, kan hier echter met een kunstgreep ondergebracht worden, als men een extra veranderlijke u invoert. Als men de kwadratische functie $f(\underline{x})$ in haar homogene delen splitst: $f(\underline{x}) = Q(\underline{x}) + L(\underline{x}) + c$, waarin Q een kwadratische en L een lineaire vorm is, dan is $F(\underline{x}, u) = Q(\underline{x}) + uL(\underline{x}) + cu^2$ een kwadratische vorm met een veranderlijke meer. Uit $F(\underline{x}, u)$ krijgt men $f(\underline{x})$ weer terug door $u = 1$ te stellen. Men noemt u wel de homogeniseringsveranderlijke.

Voorbeeld: de kwadratische functie $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3 + 5x_1 - 2x_3 + 6$ in de drie veranderlijken x_1, x_2, x_3 gaat over in de kwadratische vorm $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3 + 5x_1u - 2x_3u + 6u^2$ in de vier veranderlijken x_1, x_2, x_3, u .

Ook de formules voor de algemene coördinatentransformatie (translatie en rotatie samen) kunnen door invoering van de homogeniseringsveranderlijke homogeen gemaakt worden.

De overgang

$$x_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} y_j + p_i,$$

van de oude coördinaten x_1, \dots, x_n in de nieuwe coördinaten y_1, \dots, y_n zetten we om in de overgang

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \sum_{j=1}^n s_{ij} y_j + p_i \\ u &= v \end{aligned} \right\}$$

van de oude coördinaten x_1, \dots, x_n, u in de nieuwe coördinaten y_1, \dots, y_n, v . Stellen we $u = v = 1$, dan krijgen we de oorspronkelijke formules terug.

Door deze kunstgreep is het probleem van het transformeren van een inhomogene kwadratische functie met een beweging gemaakt tot een speciaal geval van het transformeren van een kwadratische vorm met een homogene lineaire coördinatentransformatie. Dit laat echter direct een vectorinterpretatie toe, want als we de veranderlijken opvatten als componenten van een vector, dan correspondeert met een homogene lineaire transformatie van de veranderlijken juist de overgang op componenten bij een andere basis van de vectorruimte.

We merken op, dat aan de invoering van een homogeniseringsveranderlijke ook nog een redelijke meetkundige interpretatie kan worden gegeven; we gaan daar evenwel niet op in.

We beschouwen dus nu een kwadratische vorm $Q(\underline{x})$ in n veranderlijken $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Deze bevat termen van de gedaante $b_i x_i^2$ en van de gedaante $c_{ij} x_i x_j$ en zou dus algemeen genoteerd kunnen worden als

$$Q(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} x_i x_j.$$

Dit is echter een weinig overzichtelijke notatie. De kwadraten kunnen natuurlijk in de tweede som worden opgenomen door ook c_{ij} met $i = j$ toe te laten en $b_i = c_{ii}$ te stellen:

$$Q(\underline{x}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} x_i x_j.$$

Deze sommatie is echter ook nog niet eenvoudig, omdat alleen c_{ij} met $i \leq j$ voorkomen. Dit kan men op eenvoudige wijze opheffen door $c_{ij} = 0$ te stellen voor $i > j$. Doet men dit dan komt er

$$Q(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j \quad \text{met } c_{ij} = 0 \text{ voor } i > j.$$

Dit blijkt echter nog niet de handigste notatie te zijn. De coëfficiënt van $x_1 x_2$ in $Q(\underline{x})$ is $c_{12} + c_{21}$, dat is in ons geval c_{12} , omdat $c_{21} = 0$ is. Men kan echter de waarde, die de coëfficiënt van $x_1 x_2$ heeft, ook op een andere wijze over c_{12} en c_{21} verdelen. We kiezen nu de verdeling waarbij beide even groot worden: $a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} c_{12}$. Dan gaat $Q(\underline{x})$ over in

$$Q(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad \text{met } a_{ji} = a_{ij}.$$

Hier is dus de coëfficiënt van $x_1 x_2$ gelijk aan $a_{12} + a_{21} = 2a_{12}$. Uitgeschreven wordt dit dus in twee veranderlijken:

$$Q(\underline{x}) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2,$$

in drie veranderlijken:

$$Q(\underline{x}) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2$$

Op grond van deze schrijfwijze is aan de kwadratische vorm $Q(\underline{x})$ een matrix $[A]$ toegevoegd en wel een matrix, die voldoet aan $a_{ji} = a_{ij}$, of anders uitgedrukt aan $[A]^T = [A]$. Een dergelijke matrix heet symmetrisch.

Voorbeeld. Aan de vorm $x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$ is de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

toegevoegd.

Gezien het verband tussen lineaire afbeeldingen en matrices ligt het voor de hand de lineaire afbeeldingen te beschouwen, die een symmetrische matrix hebben. Deze laten zich, zonder over de matrix te spreken, ook als volgt karakteriseren.

Een lineaire afbeelding A van R_n in zichzelf heet symmetrisch als

$$(A\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}, A\underline{y})$$

geldt voor alle vectoren \underline{x} en \underline{y} in R_n .

Neemt men de natuurlijke basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ in R_n en kiest men $\underline{x} = \underline{e}_i$ en $\underline{y} = \underline{e}_j$, dan krijgen we voor de matrixelementen a_{ij} van A juist $a_{ji} = a_{ij}$, dus de matrix van A is symmetrisch. Ook omgekeerd is een lineaire afbeelding met een symmetrische matrix weer symmetrisch in de zin van bovenstaande definitie, hetgeen direct blijkt door $(A\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}, A\underline{y})$ in componenten uit te schrijven.

Aan de kwadratische vorm is dus ook een symmetrische lineaire afbeelding toegevoegd, die we met A zullen aanduiden. Met behulp van deze afbeelding kunnen we ook schrijven

$$Q(\underline{x}) = (A\underline{x}, \underline{x}).$$

Dit volgt direct uit het feit, dat de i^e component van $A\underline{x}$ gelijk is aan $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$.

We wensen door een basistransformatie van de vectorruimte de kwadratische vorm op een eenvoudiger gedaante te brengen. Welke vereenvoudigingen we daarbij zullen nastreven zullen we nu echter eerst door meetkundige overwegingen trachten op te sporen.

Daartoe beschouwen we eerst weer de niet homogene gemaakte kwadratische functie $f(\underline{x}) = Q(\underline{x}) + L(\underline{x}) + c$. Het kwadratische gedeelte $Q(\underline{x})$ schrijven we in de vorm $(A\underline{x}, \underline{x})$ met symmetrische A . Van de lineaire vorm $\frac{1}{2}L(\underline{x})$ kunnen we de coëfficiënten opvatten als componenten van een vector \underline{b} ; dan is $L(\underline{x}) = 2(\underline{b}, \underline{x})$, dus

$$f(\underline{x}) = (A\underline{x}, \underline{x}) + 2(\underline{b}, \underline{x}) + c.$$

Waarom we de factor 2 ingevoerd hebben, wordt duidelijk als we de homogene gemaakte vorm

$$(A\underline{x}, \underline{x}) + 2u(\underline{b}, \underline{x}) + cu^2$$

beschouwen; als we de matrix van A weer $[A]$ noemen en \underline{b} als een kolomvector opvatten wordt de matrix $[H]$ van deze kwadratische vorm in (\underline{x}, u) juist

$$[H] = \begin{array}{|c|c|} \hline [A] & \underline{b} \\ \hline \underline{b}^T & c \\ \hline \end{array}$$

Voorbeeld. Breiden we de reeds beschouwde vorm $x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$ uit tot $x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - 2x_2 + 5$, dan is $\underline{b} = (\frac{1}{2}, -1)$ en $c = 5$ en de matrix $[H]$ van de homogeen gemaakte vorm:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

We hebben al opgemerkt, dat de translatie gebruikt wordt om het lineaire gedeelte te vereenvoudigen en zo mogelijk geheel $= 0$ te maken. We gaan na wat het meetkundig betekent, dat de lineaire termen ontbreken. Dit heeft ten gevolge dat uit $f(\underline{x}) = 0$ volgt $f(-\underline{x}) = 0$, omdat voor een kwadratische vorm kennelijk geldt $Q(\underline{x}) = Q(-\underline{x})$. Meetkundig betekent dit, dat de oorsprong van het coördinatenstelsel middelpunt is van de meetkundige figuur $f(\underline{x}) = 0$. Het omgekeerde geldt nu ook, dat, als voor een kwadratische functie uit $f(\underline{x}) = 0$ volgt $f(-\underline{x}) = 0$, in deze functie de lineaire termen ontbreken, althans als er een \underline{x} bestaat, waarvoor $f(\underline{x}) = 0$ en het kwadratische gedeelte van $f(\underline{x})$ niet identiek nul is. We bewijzen dit niet.

Bij een willekeurige kwadratische functie $f(\underline{x})$ zoeken we nu naar een middelpunt \underline{p} ; passen we dan een translatie toe, zodat de nieuwe oorsprong in \underline{p} komt, dan vallen de lineaire termen weg. Passen we de translatie $\underline{x} = \underline{y} + \underline{p}$ toe op $f(\underline{x})$, dan komt er

$$(A(\underline{y} + \underline{p}), \underline{y} + \underline{p}) + 2(\underline{b}, \underline{y} + \underline{p}) + c.$$

We schrijven alleen de lineaire termen hiervan op:

$$(A\underline{y}, \underline{p}) + (A\underline{p}, \underline{y}) + 2(\underline{b}, \underline{y});$$

omdat A symmetrisch is, geldt $(A\underline{y}, \underline{p}) = (\underline{y}, A\underline{p}) = (A\underline{p}, \underline{y})$, zodat het lineaire gedeelte overgaat in

$$2(A\underline{p} + \underline{b}, \underline{y}),$$

hetgeen wegvalt als $A\underline{p} + \underline{b} = \underline{0}$. De lineaire vergelijkingen

$$A\underline{x} + \underline{b} = \underline{0}$$

heten de middelpuntsvergelijkingen behorend bij $f(\underline{x}) = 0$. Het zijn n lineaire vergelijkingen met n onbekenden, waarvan de gedaante direct aan de matrix $[H]$ is te ontlezen.

Voor het hierboven behandelde voorbeeld worden deze vergelijkingen:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2} = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 1 = 0 \end{array} \right\} , \text{ met als oplossing } (-\frac{1}{2}, 0).$$

De middelpuntsvergelijkingen kunnen strijdig zijn; in dat geval is er geen middelpunt. We komen daar nog op terug.

We beschouwen nu het geval, dat de lineaire termen al ontbreken; door een rotatie trachten we het kwadratische gedeelte te vereenvoudigen. Beschouwen we de krommen en oppervlakken, die als inleiding tot dit onderwerp hebben gediend, dan zien we, dat de vergelijkingen alle zo waren dat er alleen kwadraten, zoals x^2 en y^2 , van de veranderlijken in voorkwamen, maar geen producten, zoals xy . De meetkundige betekenis is deze (in R_3 geformuleerd), dat de coördinaatvlakken symmetrievlakken zijn. Bv. de

vergelijking van de ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, gaat bij vervanging van x door $-x$ in zichzelf over. Hieruit volgt, dat het (y,z) -vlak een symmetrievlak is, want de punten (x,y,z) en $(-x,y,z)$ liggen gespiegeld t.o.v. dit vlak.

Het bepalen van symmetrievlakken is echter onderdeel van een algemenere kwestie. Snijden we een kwadratisch oppervlak met een rechte, dan komen er in het algemeen twee snijpunten; we bepalen het midden van de door deze punten gevormde koorde. Nu vormen de middens van alle evenwijdige korden een plat vlak. Ook algemeen in R_n vormen de middens van evenwijdige korden een hypervlak. We tonen dit aan. Laat de richting gegeven zijn door een vector \underline{v} . Een rechte in de richting \underline{v} heeft als parametervoorstelling $\underline{x} = \underline{m} + t\underline{v}$; hierin is \underline{m} een punt op de rechte, waarvoor we het midden van de koorde kunnen nemen. De snijpunten met $(A\underline{x}, \underline{x}) + c = 0$ vinden we door substitutie: $(A(\underline{m} + t\underline{v}), \underline{m} + t\underline{v}) + c = 0$.

Dit is een vierkantsvergelijking voor t , waarvan de wortels de parameterwaarden van de snijpunten geven. Daar echter \underline{m} het middelpunt van de koorde is, moeten de twee wortels elkaars tegengestelde zijn, dus de lineaire term in de vierkantsvergelijking nul zijn:

$$(A\underline{m}, \underline{v}) + (A\underline{v}, \underline{m}) = 0.$$

Op grond van de symmetrie van A gaat dit over in $2(A\underline{v}, \underline{m}) = 0$. De middens van de korden vormen dus een hypervlak met als vergelijking

$$(A\underline{v}, \underline{x}) = 0.$$

Dit heet het aan de richting \underline{v} toegevoegde hypervlak.

Een symmetrievlak krijgen we nu, als het aan \underline{v} toegevoegde vlak loodrecht staat op \underline{v} ; immers dan is het vlak juist gevormd uit de middens van loodrecht op het vlak staande korden, hetgeen juist betekent dat het vlak een symmetrievlak is. De vector $A\underline{v}$ is nu echter loodrecht op het vlak; een symmetrievlak krijgen we dus als $A\underline{v}$ dezelfde richting heeft als \underline{v} :

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v}.$$

Dit betekent, dat \underline{v} een eigenvector is van A . We zullen dus een onderzoek instellen naar de eigenvectoren van een symmetrische lineaire afbeelding, hetgeen in paragraaf 3 zal geschieden.

We hebben de meetkundige formulering in R_3 gekozen. In het platte vlak wordt aan een richting een rechte toegevoegd en komen er symmetrielijnen in plaats van symmetrievlakken.

§.3 Symmetrische lineaire afbeeldingen

In paragraaf 1 hebben we eigenvectoren \underline{y} en eigenwaarden λ van een lineaire afbeelding A van een n -dimensionale vectorruimte in zichzelf beschouwd:

$$A\underline{y} = \lambda\underline{y}.$$

We hebben gezien, dat als alle n wortels van de karakteristieke vergelijking van A reëel en verschillend zijn, de bijbehorende eigenvectoren een basis vormen en de matrix van A op deze basis de diagonaalvorm krijgt. De karakteristieke vergelijking van A kan echter complexe en meervoudige wortels hebben; dan loopt alles niet zo eenvoudig. Nemen we echter een symmetrische afbeelding, dan treedt een aanzienlijke vereenvoudiging op. We zullen aantonen, dat alle wortels van de karakteristieke vergelijking dan reëel zijn. Bovendien zijn er, ook als er meervoudige wortels zijn, steeds n lineair onafhankelijke eigenvectoren, die bovendien twee aan twee loodrecht kunnen worden gekozen.

Om dit aan te tonen moeten we eerst even terugkomen op het begrip inwendig product. We hebben in R_n een inwendig product $(\underline{x}, \underline{y})$ van twee

vectoren \underline{x} en \underline{y} ingevoerd door de definitie $(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$.

Dit inwendig product heeft de volgende eigenschappen:

1. $(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{y}, \underline{x})$.
2. $(\underline{x} + \underline{y}, \underline{z}) = (\underline{x}, \underline{z}) + (\underline{y}, \underline{z})$.
3. $(a\underline{x}, \underline{y}) = a(\underline{x}, \underline{y})$.
4. $(\underline{x}, \underline{x}) > 0$ als $\underline{x} \neq \underline{0}$.

Ook in een deelruimte van R_n hebben we echter een inwendig product, dat we eenvoudig aan R_n ontleenen; ook dit voldoet uiteraard aan de bovenstaande vier eigenschappen. Dit brengt ons ertoe ook in andere vectorruimten dan R_n inwendige producten te beschouwen. We gaan axiomatisch te werk en erkennen die functies als fatsoenlijke inwendige producten, die aan bovenstaande vier eisen voldoen. Dit geeft de volgende definitie:

Een vectorruimte met inwendig product is een vectorruimte, waarin aan ieder tweetal vectoren \underline{x} en \underline{y} van deze ruimte een reëel getal $(\underline{x}, \underline{y})$ is toegevoegd, dusdanig, dat aan bovenstaande eigenschappen 1., 2., 3., 4. is voldaan.

Voorbeelden zijn R_n en alle deelruimten van R_n . Een ander voorbeeld met oneindige dimensie is het volgende. De continue functies $f(x)$, die gedefinieerd zijn voor $0 \leq x \leq 1$ vormen een vectorruimte. Definiëren we het inwendig product (f, g) van twee functies $f(x)$ en $g(x)$ door

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx, \text{ dan is makkelijk na te gaan, dat dit aan de}$$

vier eisen voldoet, zodat we een vectorruimte met inwendig product verkregen hebben. We beperken ons verder tot eindige dimensies.

Het begrip symmetrische lineaire afbeelding, dat in paragraaf 2 voor afbeeldingen van R_n in zichzelf is gedefinieerd, kan op dezelfde wijze voor iedere vectorruimte met inwendig product worden gedefinieerd. We zullen nu aantonen, dat alle wortels van de karakteristieke vergelijking van zo'n afbeelding reëel zijn.

Stel dus dat A een symmetrische lineaire afbeelding van een n -dimensionale vectorruimte V met inwendig product is. Laat a_{ij} de matrix-elementen van A t.o.v. een of andere basis van V zijn en stel dat λ een eventueel complexe wortel van de karakteristieke vergelijking van A is: $\lambda = \alpha + i\beta$ met α en β reëel. Uit de betekenis van de karakteristieke vergelijking volgt, dat het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = \lambda x_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

een van de nuloplossing verschillende oplossing heeft, die echter natuurlijk ook complex kan zijn; noem deze $(s_1 + it_1, \dots, s_n + it_n)$ met reële $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n$. Dus

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} (s_k + it_k) = (\alpha + i\beta)(s_j + it_j).$$

Splitsing in reële en imaginaire delen geeft

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} s_k = \alpha s_j - \beta t_j,$$

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} t_k = \beta s_j + \alpha t_j.$$

We nemen nu vectoren \underline{s} en \underline{t} in V , die op dezelfde basis, waarmee de matrix der a_{ij} is gevormd, componenten (s_1, \dots, s_n) resp. (t_1, \dots, t_n) hebben.

Dan zijn \underline{s} en \underline{t} niet beide = $\underline{0}$. Uit bovenstaande formules volgt dan

$$\left. \begin{aligned} \underline{As} &= \alpha \underline{s} - \beta \underline{t} \\ \underline{At} &= \beta \underline{s} + \alpha \underline{t} \end{aligned} \right\} . \text{ Nu volgt uit het feit, dat } A \text{ symmetrisch is, dat}$$

$(\underline{As}, \underline{t}) = (\underline{s}, \underline{At})$, dus $\alpha(\underline{s}, \underline{t}) - \beta(\underline{t}, \underline{t}) = \beta(\underline{s}, \underline{s}) + \alpha(\underline{s}, \underline{t})$, dus

$\beta((\underline{s}, \underline{s}) + (\underline{t}, \underline{t})) = 0$. Daar \underline{s} en \underline{t} niet beide = $\underline{0}$ zijn, is

$(\underline{s}, \underline{s}) + (\underline{t}, \underline{t}) > 0$, dus $\beta = 0$, dus λ reëel.

Stelling | Alle wortels van de karakteristieke vergelijking van een symmetrische lineaire afbeelding zijn reëel.

We bewijzen nu de volgende hulpstelling:

Hulpstelling | Stel in een vectorruimte V met inwendig product een vector $\underline{v} \neq \underline{0}$. De vectoren \underline{x} van V met $(\underline{v}, \underline{x}) = 0$ vormen een deelruimte W van V . Als $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ een basis van W vormen, vormen $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k, \underline{v}$ een basis van V , dus de dimensie van W is één lager dan die van V (W heet het orthogonale complement van \underline{v}).

Bewijs. Dat W een deelruimte van V is, volgt direct uit de eisen, die aan een inwendig product zijn opgelegd. We bewijzen nu eerst, dat $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k, \underline{v}$ lineair onafhankelijk zijn. Stel dus $\lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k + \mu \underline{v} = \underline{0}$. Omdat $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ in W liggen, geldt $(\underline{v}, \underline{a}_1) = \dots = (\underline{v}, \underline{a}_k) = 0$, dus $0 = (\underline{v}, \underline{0}) = (\underline{v}, \lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k + \mu \underline{v}) = \mu(\underline{v}, \underline{v})$. Omdat $\underline{v} \neq \underline{0}$, volgt hieruit $\mu = 0$, dus $\lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k = \underline{0}$. Omdat $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ lineair onafhankelijk zijn, volgt hieruit $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Neem nu een willekeurige \underline{x} in V ; we trachten een getal μ zo te bepalen, dat $\underline{x} - \mu \underline{v}$ in W ligt (ontbinding van \underline{x} in een vector langs \underline{v} en loodrecht op \underline{v}). Daartoe moet $\underline{0} = (\underline{x} - \mu \underline{v}, \underline{v}) = (\underline{x}, \underline{v}) - \mu(\underline{v}, \underline{v})$ zijn. Daar $\underline{v} \neq \underline{0}$, is hieraan te voldoen met $\mu = (\underline{x}, \underline{v})/(\underline{v}, \underline{v})$. Daar $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ een basis van W vormen, zijn er getallen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, zo dat $\underline{x} - \mu \underline{v} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k$, dus $\underline{x} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k + \mu \underline{v}$. Hiermee is het bewijs voltooid.

Stelling | Als A een symmetrische lineaire afbeelding van een n -dimensionale vectorruimte V met inwendig product is, dan zijn er n lineair onafhankelijke eigenvectoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ van A , die twee aan twee loodrecht op elkaar staan (d.w.z. $(\underline{v}_j, \underline{v}_k) = 0$ voor $j \neq k$).

Bewijs. We bewijzen de stelling met volledige inductie naar n . Voor $n = 1$ is er niets te bewijzen, omdat dan iedere vector $\underline{v} \neq \underline{0}$ eigenvector is. Stel dus nu, dat de stelling juist is voor vectorruimten met dimensie $n-1$. We nemen een wortel λ van de karakteristieke vergelijking van A ; op grond van de vorige stelling is deze reëel en dus hoort er een eigenvector \underline{v} bij: $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$. Laat W het orthogonale complement van \underline{v} zijn. We beweren, dat voor iedere \underline{x} in W ook $A\underline{x}$ in W ligt. Immers voor \underline{x} in W geldt $(\underline{v}, \underline{x}) = 0$, dus, gebruikmakend van het feit dat A symmetrisch is,

$$(\underline{v}, A\underline{x}) = (A\underline{v}, \underline{x}) = (\lambda \underline{v}, \underline{x}) = \lambda(\underline{v}, \underline{x}) = 0, \text{ dus } A\underline{x} \text{ ligt in } W.$$

Dit betekent, dat A een lineaire afbeelding van W in zichzelf induceert, die natuurlijk symmetrisch is. Volgens de hulpstelling heeft W dimensie $n-1$, dus kunnen we op W de inductieveronderstelling toepassen. Dit levert ons $n-1$ lineair onafhankelijke eigenvectoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}$ van A in W , die twee aan twee loodrecht op elkaar staan. Omdat $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}$ een basis van W vormen, vormen $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}, \underline{v}$ een basis van V op grond van de hulpstelling. Deze n vectoren voldoen aan alle vereisten van onze stelling, omdat $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}$ als vectoren van W alle loodrecht op \underline{v} staan.

De vectoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ uit deze stelling vormen een basis van V . Daar een getallenveelvoud van een eigenvector, mits $\neq \underline{0}$, weer een eigenvector is, kunnen we zonder bezwaar aannemen, dat $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ eenheidsvectoren zijn. Gaan we nu weer terug tot het geval, dat $V = R_n$, dan kunnen we, door zo nodig één der \underline{v}_j door zijn tegengestelde te vervangen, bereiken, dat de determinant $D(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = 1$, dus dat $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ een rechts stelsel vormen. De matrix S , die bij de overgang op de basis $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ behoort, is dan

orthogonaal met $\det S = 1$. Als $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de eigenwaarden zijn, die bij de eigenvectoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ behoren, dan wordt de matrix van A ten opzichte van de basis $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ de diagonaalmatrix

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

De karakteristieke vergelijking van A is dus $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0$.

Vertalen we tenslotte de verkregen resultaten alle in de taal der matrices, dan vinden we de volgende stelling:

Stelling Bij een symmetrische matrix B met n rijen en kolommen bestaat een orthogonale matrix S met $\det S = 1$, dusdanig, dat $S^{-1} B S = S^T B S$ de gedaante (1) heeft. Hierin zijn $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de wortels van de karakteristieke vergelijking van B, elk met zijn multipliciteit geteld; deze wortels zijn dus alle reëel.

Voor $n = 2$ kunnen we de realiteit van de wortels zonder moeite door directe berekening verifiëren. De karakteristieke vergelijking is dan

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0; \text{ deze heeft reële wortels omdat de discriminant } (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \text{ is.}$$

Vb.1 Onderzoek de symmetrische matrix

$$\begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix}. \text{ De karakteristieke vergelijking is } \lambda^2 - 75\lambda + 1250 = (\lambda - 50)(\lambda - 25) = 0.$$

Bij de eigenwaarde 50 krijgen we

$$\left. \begin{aligned} -9x_1 - 12x_2 &= 0 \\ -12x_1 - 16x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ met als oplossing } (x_1, x_2) = \alpha(4, -3); \text{ een eenheids-}$$

vector is $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$. Bij de andere eigenwaarde 25 krijgen we op analoge wijze $(x_1, x_2) = \alpha(3, 4)$; eenheidsvector $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. In deze volgorde vormen ze een rechts orthogonaal stelsel. Inderdaad is

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

Vb.2 Onderzoek de symmetrische matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \text{Karakteristieke vergelijking} \\ \lambda^3 - 9\lambda^2 - 81\lambda + 729 = (\lambda + 9)(\lambda - 9)^2 = 0.$$

Bij de eigenwaarde -9 behoort de oplossing $(x_1, x_2, x_3) = \alpha(2, 1, -2)$, dus een eenheidsvector $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$. Bij de dubbele wortel 9 komen er twee lineair onafhankelijke oplossingen, die bepaald worden door de vergelijking $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. Deze zijn inderdaad orthogonaal met de eigenvector bij -9 . Twee onderling loodrechte oplossingen die eenheidsvectoren zijn, zijn $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ en $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. In deze volgorde vormen de drie vectoren een rechts stelsel. Verder is

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

§.4 Klassifikatie van kwadratische oppervlakken

De gevonden resultaten gebruiken we nu voor het onderzoek van kwadratische vergelijkingen. We passen eerst een rotatie toe op het homogene kwadratische deel. Iets algemener bekijken we het effect van een homogene lineaire coördinatentransformatie.

$$x_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} y_j \text{ op de kwadratische vorm } Q(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

$$\begin{aligned} (\text{met } a_{ij} = a_{ji}). \text{ Bij invullen komt er } & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{h=1}^n s_{ih} y_h \sum_{k=1}^n s_{jk} y_k = \\ & = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ih} a_{ij} s_{jk} \right) y_h y_k. \end{aligned}$$

Als dus $[A]$ de matrix van de gegeven kwadratische vorm is en S de matrix van de coördinatentransformatie dan is $S^T [A] S$ de matrix van de kwadratische vorm in de nieuwe veranderlijken. De matrix van een kwadratische vorm gedraagt zich dus anders bij basistransformatie dan die van een lineaire afbeelding (die in $S^{-1} [A] S$ overgaat). Als S orthogonaal is, bestaat dit verschil niet, omdat dan $S^{-1} = S^T$.

Op grond van de resultaten van paragraaf 3 bestaat bij een symmetrische matrix $[A]$ een orthogonale matrix S met $\det S = 1$, zo dat $S^T [A] S$ diagonaal-vorm heeft. Omdat de diagonaalelementen van de matrix de coëfficiënten van de kwadraten zijn, volgt hieruit direct, dat door een rotatie het kwadratische gedeelte van een kwadratische functie in de vorm $\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ kan worden gebracht.

Deze $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ zijn de eigenwaarden van de matrix $[A]$ van het kwadratische gedeelte; onder deze λ 's kunnen nullen voorkomen. Stel dat er k stuks ongelijk aan nul zijn en dat de nummering zo gekozen is dat $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ (het is mogelijk dat $k = n$). De kwadratische functie heeft dan de gedaante

$$\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_k y_k^2 + 2\beta_1 y_1 + \dots + 2\beta_n y_n + c.$$

We trachten nu door een translatie het lineaire stuk te vereenvoudigen. De β_1, \dots, β_k kunnen we zonder moeite verwijderen met de translatie

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= z_1 - \frac{\beta_1}{\lambda_1} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ y_k &= z_k - \frac{\beta_k}{\lambda_k} \\ y_{k+1} &= z_{k+1} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ y_n &= z_n \end{aligned} \right\}$$

, waardoor de kwadratische functie overgaat in

$$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_k z_k^2 + 2\beta_{k+1} z_{k+1} + \dots + 2\beta_n z_n + \gamma.$$

Het kan nu gebeuren, dat er geen lineaire termen meer over zijn, doordat $\beta_{k+1} = \dots = \beta_n = 0$ of doordat $k = n$. In dat geval is ons einddoel

$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_k z_k^2 + \gamma$ bereikt. Als minstens één der getallen

$\beta_{k+1}, \dots, \beta_n$ niet nul is, is verdere vereenvoudiging mogelijk door nog een rotatie en eventueel een translatie in te schakelen, die echter alleen op de veranderlijken z_{k+1}, \dots, z_n werkt en het kwadratische gedeelte dus niet aantast. Hiermee valt te bereiken dat alle eerstegraadstermen op één na (bv. die van z_n) en bovendien de constante term wegvallen.

We zullen dit niet in het algemene geval onderzoeken, maar ons beperken tot $n = 2$ en $n = 3$. Dat de constante term met een translatie kan worden weggewerkt als er een lineaire term met coëfficiënt $\neq 0$ aanwezig is,

volgt direct uit $az + b = a(z + \frac{b}{a})$. Het onderzoek is dus alleen nodig,

als er nog tenminste twee lineaire termen met coëfficiënten $\neq 0$ zijn overgebleven; dit kan alleen als $k \leq n - 2$. Dit geeft bij $n = 2$ alleen $k = 0$ en bij $n = 3$ alleen $k = 0$ en $k = 1$.

Het geval $k = 0$ is zeer eenvoudig, omdat er dan geen kwadratische termen over zijn:

$$2\beta_1 z_1 + 2\beta_2 z_2 + 2\beta_3 z_3 \quad (\text{voor } n = 3).$$

Dit $= 0$ is de vergelijking van een plat vlak. Door de derde coördinaat loodrecht op dit vlak te kiezen, dus in de richting van de vector $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ gaat het vlak over in $w_3 = 0$ en de lineaire vorm in

$$2\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} w_3.$$

Voor $n = 2$ analoog.

Nu nog $k = 1, n = 3$:

$$\lambda_1 z_1^2 + 2\beta_2 z_2 + 2\beta_3 z_3.$$

We kunnen weer een coördinatentransformatie in het (z_2, z_3) -vlak toepassen, waardoor de rechte $\beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 = 0$ overgaat in $w_3 = 0$.
 Expliciet opgeschreven:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= w_1 \\ z_2 &= -\frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2}} w_2 - \frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2}} w_3 \\ z_3 &= \frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2}} w_2 - \frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2}} w_3 \end{aligned} \right\}$$

De kwadratische functie wordt dan $\lambda_1 w_1^2 - 2\sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2} w_3$.

Samenvatting

De standaardgedaanten, waarin een kwadratische functie door rotatie en translatie kunnen worden gebracht, zijn:

- 1° $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_k x_k^2 + \gamma; \lambda_1, \dots, \lambda_k$ alle $\neq 0$ (middelpunt).
- 2° $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_k^2 x_k^2 - 2\mu x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu$ alle $\neq 0, k < n$ (geen middelpunt).

De γ in geval 1° mag = 0 zijn.

Voor de typen van krommen en oppervlakken, die er uitkomen letten we nu nog op het al dan niet nul zijn der coëfficiënten en op de tekens van

de coëfficiënten. Zo is bv. $x^2 + 2y^2 = 1$ en ook $x^2 + 3y^2 = 1$ een ellips, maar $x^2 - 3y^2 = 1$ een hyperbool. Bij het beoordelen van de diverse tekencombinaties, moeten we bedenken dat een vergelijking dezelfde figuur blijft voorstellen als we haar met een eventueel negatieve factor vermenigvuldigen. Zo is de tekencombinatie $++-$ gelijkwaardig met $---$. Verder kunnen we het vermenigvuldigen gebruiken om een coëfficiënt die niet nul is gelijk aan ± 1 te maken.

We beginnen eerst met $n = 2$: kwadratische krommen (= kegelsneden) in het platte vlak. Eerst het geval, dat er een middelpunt is en de lineaire termen dus verwijderd kunnen worden. Het aantal k der eigenwaarden $\neq 0$ nemen we eerst twee en de constante term $\neq 0$:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \gamma = 0.$$

We onderzoeken nu de mogelijke tekencombinaties voor $\lambda_1, \lambda_2, \gamma$. Nemen we eerst $+-$, dan kunnen we de vergelijking met andere letters als volgt schrijven

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ hetgeen, zoals we al weten, een } \underline{\text{hyperbool}} \text{ voorstelt.}$$

Op analoge wijze vinden we bij $++$ de vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ hetgeen een } \underline{\text{ellips}} \text{ is.}$$

In het resterende geval $+++$ zien we direct in, dat er geen reële (x, y) zijn die aan de vergelijking voldoen; dit geval

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \text{ noemen we een } \underline{\text{imaginaire ellips}}. \text{ Ter onderscheiding wordt daarom het voorafgaande geval wel een } \underline{\text{reële ellips}} \text{ genoemd.}$$

Nu onderzoeken we het geval $k=2, \gamma=0$, dus $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 0$. In het geval $+-$ kan het linkerlid ontbonden worden in twee lineaire factoren; er komen twee snijdende rechten:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \underline{\text{reëel snijdend lijnenpaar}}; \text{ ontbinding } \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

In het geval $++$ is ook ontbinding mogelijk, als we complexe getallen toelaten; vandaar:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \underline{\text{imaginair snijdend lijnenpaar}}; \text{ ontbinding } \left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right);$$

"snijpunt" is $(0,0)$, dat het enige reële punt is, dat voldoet.

Hiermee is $k=2$ afgehandeld. Nu $k=1, \gamma \neq 0$, dus $\lambda_1 x_1^2 + \gamma = 0$. In het geval $+-$ is weer ontbinding in lineaire factoren mogelijk, die nu echter aanleiding geeft tot evenwijdige rechten:

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0, \underline{\text{reëel evenwijdig lijnenpaar}}; \text{ ontbinding } \left(\frac{x}{a} + 1\right)\left(\frac{x}{a} - 1\right).$$

In het geval $++$ is er alleen een complexe ontbinding:

$$\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0, \underline{\text{imaginair evenwijdig lijnenpaar}}; \text{ ontbinding } \left(\frac{x}{a} + i\right)\left(\frac{x}{a} - i\right);$$

geen reële punten.

Het geval $k=1, \gamma=0$ geeft maar één geval:

$x^2 = 0$, dubbelrechte.

Er resteren dan nog de oneigenlijke gevallen $k=0, \gamma \neq 0$ en $k=0, \gamma=0$:

$1 = 0$, niets,

$0 = 0$, vlak.

Tenslotte nog de gevallen zonder middelpunt. Het geval $k=1$ geeft een bekende kromme:

$x^2 = 2py$, parabool.

Het geval $k=0$ geeft

$y = 0$, rechte.

Voor $n = 3$ komen we op analoge wijze tot de volgende indeling.

Bij $k=3, \gamma \neq 0$, dus $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \gamma = 0$ geven drie van de vier mogelijke tekencombinaties oppervlakken, die al van vroeger bekend zijn:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ (++--), eenbladige hyperboloïde,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ (+---), tweebladige hyperboloïde,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ (+++-), reële ellipsoïde.

Het geval ++++ is weer zo, dat er geen reële punten aan voldoen, vandaar:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ (++++) , imaginaire ellipsoïde.

Het geval $k = 3, \gamma = 0, \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0$ levert kegels.

Omdat het linkerlid homogeen is, voldoet met (p_1, p_2, p_3) ook

$(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha p_3)$ voor willekeurige α aan de vergelijking. Meetkundig uit-

gedrukt betekent dit, dat als een punt op het oppervlak ligt, ook alle punten op de verbindingslijn van dat punt met de oorsprong O op het oppervlak liggen. Het oppervlak is dus een kegel met top O. Bij de tekencombinatie +++ is echter O het enige reële punt dat voldoet; bij +-+ zijn er, zoals men makkelijk ziet, reële punten buiten O op de kegel.

Dus:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (++-), reële kegel,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ (+++), imaginaire kegel.

Het geval $k=2$, $\gamma \neq 0$, $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \gamma = 0$ levert cilinders, omdat nu met (p_1, p_2, p_3) ook (p_1, p_2, x_3) met willekeurige x_3 aan de vergelijking voldoet, zodat het oppervlak uit rechten evenwijdig met de x_3 -as is opgebouwd. Het type van de cilinder vinden we, door de kegelsnede in het vlak $x_3 = 0$ te bekijken, die dezelfde vergelijking heeft als de cilinder zelf. We komen zo tot de volgende indeling:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ (+--), } \underline{\text{hyperbolische cilinder,}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \text{ (++-), } \underline{\text{elliptische cilinder,}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \text{ (+++), } \underline{\text{imaginaire cilinder.}}$$

Het geval $k=2$, $\gamma=0$, $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 0$ kunnen we op soortgelijke wijze behandelen. Ook nu krijgen we cilinders, zij het dan "ontaarde". De gevallen kunnen we gewoon kopiëren van de overeenkomstige gevallen bij $n=2$; een rechte correspondeert nu met een vlak:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ (+-)} \quad \underline{\text{reëel snijdend vlakkenpaar,}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ (++)} \quad \underline{\text{imaginair snijdend vlakkenpaar.}}$$

Geheel analoog voor $k=1$, $\gamma \neq 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0 \text{ (+-)} \quad \underline{\text{reëel evenwijdig vlakkenpaar,}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0 \text{ (++)} \quad \underline{\text{imaginair evenwijdig vlakkenpaar.}}$$

De gevallen $k=1$; $\gamma=0$; $k=0$, $\gamma \neq 0$ en $k=0$, $\gamma=0$ geven resp.

$$x^2 = 0, \quad \underline{\text{dubbeltvlak,}}$$

$$1 = 0, \quad \underline{\text{niets,}}$$

$$0 = 0, \quad \underline{\text{ruimte.}}$$

Nu de oppervlakken zonder middelpunt. Het geval $k=2$, $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - 2\mu x_3 = 0$ geeft bekende oppervlakken:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \text{ (+-), } \underline{\text{hyperbolische paraboloid,}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \text{ (++)}, \quad \underline{\text{elliptische paraboloid.}}$$

De gevallen $k=1$ en $k=0$ zijn weer direct door "cilindrificatie" uit de vlakke gevallen te halen:

$$x^2 = 2pz, \quad \text{parabolische cilinder,}$$

$$z = 0, \quad \text{vlak.}$$

We leggen er de nadruk op, dat het type van de kromme of het oppervlak aan de standaardvorm van de vergelijking gemakkelijk kan worden herkend met behulp van de beschouwingen, die hierboven zijn gegeven. Het is dus niet nodig, deze gevallen te memoriseren.

$$\text{Vb.1} \quad 41x_1^2 - 24x_1x_2 + 34x_2^2 - 34x_1 - 112x_2 + 4 = 0.$$

De middelpuntsvergelijkingen zijn:

$$\left. \begin{aligned} 41x_1 - 12x_2 - 17 &= 0 \\ -12x_1 + 34x_2 - 56 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ met als oplossing } (1,2).$$

Door de translatie $x_1 = y_1 + 1$, $x_2 = y_2 + 2$ gaat de vergelijking over in $41y_1^2 - 24y_1y_2 + 34y_2^2 - 125 = 0$ (de constante term -125 wordt eenvoudig verkregen door $(1,2)$ in het oorspronkelijke linkerlid te substitueren). De rotatie die bepaald is in voorbeeld 1 van paragraaf 3 levert

$$50z_1^2 + 25z_2^2 - 125 = 0 \text{ of } 2z_1^2 + z_2^2 - 5 = 0, \text{ hetgeen een reële ellips is.}$$

$$\text{Vb.2} \quad 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2 - 14x_1 + 10x_2 - 12x_3 + 19 = 0.$$

Middelpuntsvergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 - 7 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5 &= 0 \\ -2x_2 + 2x_3 - 6 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ zijn strijdig. We beginnen dus met een}$$

rotatie; de karakteristieke vergelijking van de matrix van het kwadratische gedeelte is:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-6) = 0 \text{ met wortels } 3, 6, 0.$$

De eigenwaarde 3 geeft als een eenheidseigenvector $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, de eigenwaarde 6 de eenheidseigenvector $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, die inderdaad loodrecht op de vorige is. Het vectorproduct $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ van deze twee blijkt inderdaad eigenvector bij de eigenwaarde 0 te zijn.

De rotatie

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 \\ x_2 &= \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ x_3 &= -\frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \end{aligned} \right\} \text{ voert de vergelijking over in}$$

$$3y_1^2 + 6y_2^2 + 2y_1 - 20y_2 + 6y_3 + 19 = 0.$$

De lineaire termen met y_1 en y_2 maken we weg met $y_1 = z_1 - \frac{1}{3}$, $y_2 = z_2 + \frac{5}{3}$; dit geeft $3z_1^2 + 6z_2^2 + 6y_3 + 2 = 0$, hetgeen door $y_3 = z_3 - \frac{1}{3}$ overgaat in $3z_1^2 + 6z_2^2 + 6z_3 = 0$. De vergelijking $x^2 + 2y^2 + 2z = 0$ stelt een elliptische paraboloid voor.

We bespreken nu nog een toepassing van kwadratische vormen en kwadratische oppervlakken. Van een lichaam L kunnen we het traagheidsmoment ten opzichte van een as bepalen. We nemen aan, dat deze as door de oorsprong van het coördinatenstelsel gaat; de richting kan dan met een vector $\underline{v} \neq \underline{0}$ vastgelegd worden. Men zou \underline{v} bovendien nog als een eenheidsvector kunnen kiezen; wij doen dat niet. Voor de bepaling van het traagheidsmoment hebben we de afstand van een punt \underline{x} tot de as nodig; hiertoe ontbinden we \underline{x} in een vector langs \underline{v} en een vector loodrecht op \underline{v} . We zoeken dus een getal μ , zo dat $(\underline{x} - \mu\underline{v}, \underline{v}) = 0$; dit geeft $\mu = \frac{(\underline{x}, \underline{v})}{(\underline{v}, \underline{v})}$. Het kwadraat van de afstand van \underline{x} tot de as is dus

$$\left(\underline{x} - \frac{(\underline{x}, \underline{v})}{(\underline{v}, \underline{v})} \underline{v}, \underline{x} - \frac{(\underline{x}, \underline{v})}{(\underline{v}, \underline{v})} \underline{v} \right) = \frac{(\underline{x}, \underline{x})(\underline{v}, \underline{v}) - (\underline{x}, \underline{v})^2}{(\underline{v}, \underline{v})}.$$

Om hieruit het traagheidsmoment te verkrijgen moet dit met de massadichtheid ρ vermenigvuldigd worden en vervolgens geïntegreerd naar $\underline{x} = (x, y, z)$, dus het gezochte traagheidsmoment is

$$\frac{1}{(\underline{v}, \underline{v})} \iiint_L \{ (\underline{x}, \underline{x})(\underline{v}, \underline{v}) - (\underline{x}, \underline{v})^2 \} \rho \, dx \, dy \, dz.$$

We kunnen nu \underline{v} variëren; d.w.z. de richtingen van de as door het vaste punt O variëren. Als we het traagheidsmoment $J(\underline{v})$ noemen, dan is de integraal, die gelijk is aan $(\underline{v}, \underline{v}) J(\underline{v})$ klaarblijkelijk een kwadratische vorm $Q(\underline{v})$. Immers de integrand is een kwadratische vorm in \underline{v} en blijft dat bij integratie, want elke coëfficiënt van de kwadratische vorm wordt afzonderlijk geïntegreerd. Door draaiing van het coördinatenstelsel kan $Q(\underline{v})$ in standaardvorm worden gebracht; op dit speciale coördinatenstelsel krijgt het traagheidsmoment dus de gedaante

$$J(\underline{v}) = \frac{\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3 v_3^2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},$$

waarin $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ constanten zijn. Omdat klaarblijkelijk $J(\underline{v}) > 0$ voor alle $\underline{v} \neq \underline{0}$, moet $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ zijn. De coördinaatassen van dit speciale coördinatenstelsel heten hoofdtraagheidsassen in O . Voor verdere bijzonderheden verwijzen we naar de mechanica. We vermelden alleen nog een kwadratisch oppervlak, dat we in dit verband kunnen introduceren. Op elke lijn door O zetten we een punt met afstand $1/\sqrt{J(\underline{v})}$, d.w.z. we beschouwen die punten \underline{v} waarvoor $|\underline{v}| = \{J(\underline{v})\}^{-\frac{1}{2}}$, of $(\underline{v}, \underline{v}) J(\underline{v}, \underline{v}) = 1$; dit geeft echter direct het oppervlak $Q(\underline{v}) = 1$, hetgeen een ellipsoïde is, de traagheidsellipsoïde in O .