

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

## **WISKUNDE IIIb**

**Syllabus van het college voor studenten der afdeling T**

**Najaarssemester 1962**

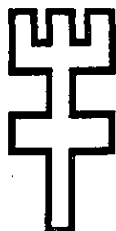
578  
Onderafdeling der Wiskunde

**Afd. Algemene Wetenschappen**

**WISKUNDE IIIb**

SYLLABUS VAN HET COLLEGE  
VOOR STUDENTEN  
DER AFDELING T  
GEGEVEN IN HET  
NAJAARSSEMESTER 1962

TYPEWERK VERZORGD DOOR MEJ. A.N.M. VAN DE GRIENDT



TECHNISCHE HOGESCHOOL  
EINDHOVEN

**ENKELE NOTITIES**  
bij  
**WISKUNDE IIIa, IIIb en III**

In de 60er en 70er jaren gold dat de studenten Chemische Technologie, wat betreft het algemeen wiskundeonderwijs in het 2e jaar, konden/mochten volstaan met de '*kleine wiskunde*'. Ook wel WISKUNDE IIIb genaamd. Deze wiskunde betrof een selectie uit de colleges WISKUNDE IIIa en IV, zoals die voor alle overige afdelingen werden verzorgd. In 1967 kwam één verbeterde en aangevulde variant in gebruik onder de naam WISKUNDE III. Voor de chemisch technologen werd, in het herfstsemester, hieruit een selectie genomen.

(JdG, 18 Mei 2005.)

*J. de G.*

Onderafdeling der Wiskunde

AFD. ALGEMENE WETENSCHAPPEN

W I S K U N D E IIIb

Syllabus van het college voor studenten der afdeling T

Najaarssemester 1962

---

T e c h n i s c h e   H o g e s c h o o l   E i n d h o v e n

Jan de Graaf

Onderafdeling der Wiskunde

AFD. ALGEMENE WETENSCHAPPEN

W I S K U N D E IIIb

Syllabus van het college voor studenten der afdeling T

Najaarssemester 1962

---

T e c h n i s c h e   H o g e s c h o o l   E i n d h o v e n

Hoofdstuk I	<u>Differentiaalvergelijkingen</u>	I.1 t/m	I.35
§.1	Elementaire typen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde.		I.1
§.2	Substituties en kunstgrepen.		I.5
§.3	Enkele algemene opmerkingen.		I.9
§.4	Differentiaalvergelijkingen van hogere orde en stelsels differentiaalvergelijkingen.		I.10
§.5	Simultane lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten.		I.12
§.6	Machtrees substitutie. De differentiaalvergelijking van Bessel.		I.17
§.7	Partiële differentiaalvergelijkingen.		I.21
§.8	Enkele belangrijke differentiaalvergelijkingen. Oplossen door separeren.		I.25
Hoofdstuk II	<u>Numerieke wiskunde</u>	II.1 t/m	II.17
§.1	Interpolatie.		II.1
§.2	Differentievergelijkingen.		II.9
Hoofdstuk III	<u>Statistiek</u>	III.1 t/m	III.32
§.1	Inleidende opmerkingen.		III.1
§.2	Waarschijnlijkheid. Het geval van een alternatief		III.2
§.3	Waarschijnlijkheid in een eindig veld.		III.6
§.4	Stochastische veranderlijken.		III.8
§.5	Gemiddelde en spreiding.		III.15
§.6	Populatie en steekproef.		III.20
§.7	Centrale limietstelling.		III.23
§.8	Betrouwbaarheidsgrenzen.		III.27
§.9	Correlatie.		III.30
Hoofdstuk IV	<u>Vectoranalyse</u>	IV.1 t/m	IV.12
§.1	Vectorvelden.		IV.1
§.2	De integraalstellingen.		IV.3
§.3	Enkele formules voor gradiënt, rotatie en divergentie.		IV.11
Hoofdstuk V	<u>Laplace-Transformatie</u>	V.1 t/m	V.5
Hoofdstuk VI	<u>Reeksen en integralen van Fourier</u>	VI.1 t/m	VI.24

HOOFDSTUK I DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN§.1 Elementaire typen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde.A. Scheiding van veranderlijken.

$$P(y) \frac{dy}{dx} = Q(x).$$

Dan is  $P(y)dy = Q(x)dx,$   
 $\int P(y)dy = \int Q(x)dx.$

Vb.1  $x + y \frac{dy}{dx} = 0.$

$$2x dx + 2y dy = 0.$$

$$x^2 + y^2 = C \text{ (stelsel concentrische cirkels).}$$

Vb.2  $y = x \frac{dy}{dx}.$

Deel door  $xy$ , dan is  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

$$\log |y| = \log |x| + C,$$

$$y = C_1 x \text{ (stelsel rechten door 0).}$$

B. Lineaire differentiaalvergelijkingen.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

Stel  $y = u(x)v(x)$ , dan wordt de D.V.

$$u'v + v'u + Puv = Q,$$

$$v(u' + Pu) + v'u = Q.$$

Zoek nu één functie  $u(x) \neq 0$ , zo dat  $u' + P(x)u = 0$  (geval A),  
 dan komt er

$$v' = \frac{Q(x)}{u(x)}.$$

Deze is door directe integratie op te lossen.

Vb.3  $xy' - (x+1)y = x^2 - x^3.$

Stel  $y = uv$ , dan komt er

$$v[xu' - (x+1)u] + xuv' = x^2 - x^3.$$

Zoek  $u(x)$ , waarvoor

$$xu' - (x+1)u = 0.$$

$$\frac{du}{u} = \frac{x+1}{x} dx,$$

$$\log |u| = x + \log |x| + C.$$

We hebben slechts één functie  $u(x)$  nodig, waarvoor wij kunnen nemen

$$u = x e^x.$$

Substitueren we deze  $u$ , dan komt er

$$v' = (1-x)e^{-x},$$

dus

$$v = \int (1-x)e^{-x} dx = x e^{-x} + C.$$

De algemene oplossing van de D.V. is dus

$$y = x^2 + Cx e^x.$$

Opmerking. Bedenk dat de algemene methode vaak niet de vlugste methode is.

Vb.4  $(1-x^2)y' - 2xy = 1.$

Men ziet direct, dat deze D.V. te schrijven is als

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)y] = 1$$

en dat de algemene oplossing luidt

$$(1-x^2)y = x + C.$$

### C. Differentiaalvergelijking van het type Bernoulli.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^\alpha \quad \text{met } \alpha \neq 1.$$

Probeer de substitutie  $y = z^\beta$  met passend gekozen  $\beta$ .

Dan is

$$\frac{dy}{dx} = \beta z^{\beta-1} \frac{dz}{dx}$$

en de D.V. wordt

$$\beta z^{\beta-1} \frac{dz}{dx} + P(x)z^\beta = Q(x)z^{\alpha\beta}.$$

Deling door  $\beta z^{\beta-1}$  geeft

$$\frac{dz}{dx} + \frac{1}{\beta} P(x)z = \frac{1}{\beta} Q(x)z^{\alpha\beta-\beta+1}.$$



Kiest men nu

$$\beta = \frac{1}{1-\alpha},$$

dan komt er

$$\frac{dz}{dx} + (1-\alpha) P(x)z = (1-\alpha) Q(x),$$

waarmee een lineaire D.V. verkregen is.

Vb.5  $xy' + y = y^2 \log x.$

Stel  $y = 1/z$ , dan is  $y' = -z'/z^2$  en er komt

$$-\frac{xz'}{z^2} + \frac{1}{z} = \frac{\log x}{z^2},$$

$$xz' - z = -\log x.$$

Deze is eenvoudig op te lossen, als men door  $x^2$  deelt:

$$\frac{xz' - z}{x^2} = -\frac{\log x}{x^2},$$

$$\left(\frac{z}{x}\right)' = -\frac{\log x}{x^2},$$

$$\frac{z}{x} = -\int \frac{\log x}{x^2} dx = \int \log x d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\log x + 1}{x} + C,$$

dus

$$y = \frac{1}{\log x + 1 + Cx}.$$

#### D. Homogene differentiaalvergelijkingen.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Stel  $\frac{y}{x} = z$ , dus  $y = xz$ ,  $\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z$  en de D.V. wordt

$$x \frac{dz}{dx} + z = f(z).$$

Deze is met scheiding van veranderlijken op te lossen.

Vb.6  $y' = \frac{4x - y}{2x + y}.$

Stelt men  $y = xz$ , dan komt er

$$xz' + z = \frac{4 - z}{2 + z},$$

$$xz' = \frac{4 - 3z - z^2}{2 + z},$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(z+2)dz}{z^2+3z-4} = 0,$$

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{5} \int \frac{dz}{z-1} + \frac{2}{5} \int \frac{dz}{z+4} = 0,$$

$$x^5 (z-1)^3 (z+4)^2 = C,$$

$$(y-x)^3 (y+4x)^2 = C.$$

Vb.7  $y' = \frac{4x-y+7}{2x+y-1}.$

Deze D.V. is niet homogeen. Door een eenvoudige substitutie is zij echter homogeen te maken. Stel

$$x = X + p, \quad y = Y + q,$$

dus ga over op nieuwe variabelen X en Y, waarbij p en q nader te bepalen constanten zijn. De D.V. wordt dan

$$\frac{dY}{dX} = \frac{4X - Y + 4p - q + 7}{2X + Y + 2p + q - 1}.$$

Kies nu p en q zodanig, dat

$$\left. \begin{aligned} 4p - q + 7 &= 0 \\ 2p + q - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ dus } p = -1, \quad q = 3.$$

De D.V. wordt dan

$$\frac{dY}{dX} = \frac{4X - Y}{2X + Y} \text{ met oplossing } (Y-X)^3 (Y+4X)^2 = C.$$

De oorspronkelijke D.V. heeft dus de oplossing

$$(y-x-4)^3 (y+4x+1)^2 = C.$$

Opmerking. Dezelfde methode is van toepassing op alle D.V. van het type

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right),$$

behalve als de vergelijkingen, waaruit p en q moeten worden bepaald, strijdig zijn. Dan gaat het echter nog eenvoudiger.

Vb.8  $y' = \frac{2x+y+1}{2x+y+2}.$

Stel nu  $z = 2x + y$ , dan is

$$z' - 2 = \frac{z+1}{z+2},$$

welke met scheiding van variabelen op te lossen is. De algemene oplossing is

$$e^{3(y-x)}(3y + 6x + 5) = C.$$

## §.2 Substituties en kunstgrepen.

Soms is door een substitutie een D.V., die niet tot een der vorige typen behoort, tot een bekend type te herleiden.

Vb.1  $xy' + y + x^2 e^{xy} + 1 = 0.$

Stel  $xy = z$ , dan is

$$z' + x^2 e^z + 1 = 0.$$

Stel  $e^z = t$ , dan is  $t' = e^z z'$ , dus  $z' = t'/t$ , dus

$$t' + t + x^2 t^2 = 0.$$

In deze D.V. van Bernoulli stellen we  $t = 1/w$ , dan is

$$-\frac{w'}{w^2} + \frac{1}{w} + \frac{x^2}{w^2} = 0,$$

$$w' - w - x^2 = 0.$$

In deze lineaire D.V. stellen we  $w = uv$ :

$$v(u'-u) + v'u - x^2 = 0.$$

Neem u dusdanig, dat  $u'-u = 0$ , dus b.v.  $u = e^x$ . Dit geeft

$$v' = x^2 e^{-x},$$

$$v = \int x^2 e^{-x} dx = e^{-x}(-x^2 - 2x - 2) + C,$$

$$\text{dus } w = -x^2 - 2x - 2 + C e^x,$$

en daar  $w = 1/t = e^{-z} = e^{-xy}$ , is de algemene oplossing

$$e^{-xy} = -x^2 - 2x - 2 + C e^x.$$

Dikwijls is het voordelig, niet  $y = y(x)$ , maar  $x = x(y)$  te beschouwen.

Vb.2  $(x^2 - y^4) \frac{dy}{dx} = 2xy.$

Neem  $x = x(y)$ , dan

$$x^2 - y^4 = 2xy \frac{dx}{dy}.$$

Stel nu  $x^2 = z$ , dan ontstaat de lineaire D.V.

$$z - y^4 = y \frac{dz}{dy},$$

die wij delen door  $y^2$ :

$$\frac{y \frac{dz}{dy} - z}{y^2} = -y^2,$$

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{z}{y} \right) = -y^2,$$

$$\frac{z}{y} = -\frac{1}{3} y^3 + C,$$

$$x^2 = -\frac{1}{3} y^4 + Cy.$$

Het vervangen van  $y = y(x)$  door  $x = x(y)$  is vaak voordelig bij vergelijkingen, waarin  $x$  niet expliciet voorkomt.

**Vb.3 (Ruimtevaart).** Gevraagd wordt de snelheid, waarmee een projectiel van de aarde moet worden weggeschoten, om buiten de invloed van de zwaartekracht van de aarde te komen. Laat  $x$  de afstand van het projectiel tot de aarde zijn en  $t$  de tijd, dan is

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\alpha}{x^2}.$$

De grootte van de positieve constante  $\alpha$  zullen we straks bepalen. Neem nu  $t = t(x)$ , dan is

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}},$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\frac{dt}{dx}} \right) \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\left( \frac{dt}{dx} \right)^2} \frac{d^2 t}{dx^2} \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = -\frac{\frac{d^2 t}{dx^2}}{\left( \frac{dt}{dx} \right)^3}.$$

De D.V. wordt dan

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = \frac{\alpha}{x^2} \left( \frac{dt}{dx} \right)^3.$$

Stel  $\frac{dt}{dx} = u = \frac{1}{v}$  ( $v = \text{snelheid}$ ):

$$\frac{du}{dx} = \frac{\alpha}{x^2} u^3,$$

$$\frac{du}{u^3} = \frac{\alpha dx}{x^2},$$

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{\alpha}{x} - C,$$

$$v = \sqrt{\frac{2(\alpha + Cx)}{x}}.$$

Opdat het projectiel tot in het oneindige doorkomt moet  $C \geq 0$  zijn; als  $C = 0$ , geldt  $v \rightarrow 0$  voor  $x \rightarrow \infty$ . Dus

$$v = \sqrt{\frac{2\alpha}{x}}.$$

Om  $\alpha$  te bepalen noemen we  $r = \text{aardstraal}$  en  $-g = \text{versnelling aan het aardoppervlak}$ . Dan is

$$-g = -\frac{\alpha}{r^2},$$

dus  $\alpha = gr^2$ ,

$$v = \sqrt{\frac{2gr^2}{x}}.$$

De snelheid aan het aardoppervlak is dus

$$v_0 = \sqrt{2gr}.$$

Nu is  $r = 6400 \text{ km}$  en  $g = 981 \text{ cm/sec}^2$ . Dan is

$$v_0 = 1,12 \cdot 10^6 \text{ cm/sec},$$

dit is ongeveer 40000 km per uur.

Soms kan men door een D.V. te differentiëren resultaat bereiken.

Vb.4  $y = x + (y')^2.$

Differentieer:  $y' = 1 + 2y'y''.$

Stel  $y' = p$  :  $p = 1 + 2p \frac{dp}{dx}.$

Deze D.V. is met scheiding van variabelen op te lossen:

$$x = 2p + \log |p-1| + C.$$

Substitueren we dit en  $y' = p$  in de oorspronkelijke D.V., dan komt er

$$x = p^2 + 2p + \log |p-1| + C.$$

Hiermee is een parametervoorstelling voor de oplossing gevonden.

Vb.5 (D.V. van Clairaut).

$$y = y'x - (y')^2$$

$$y' = y''_0 + (x-2y')y''.$$

Noem  $y' = p$ , dan komt er

$$(x-2p) \frac{dp}{dx} = 0.$$

Hieraan kan op twee manieren worden voldaan. In de eerste plaats kunnen wij stellen

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{dus } p = C,$$

hetgeen  $y = Cx - C^2$   
oplevert.

De andere mogelijkheid is

$$\left. \begin{array}{l} x = 2p \\ y = p^2 \end{array} \right\},$$

hetgeen leidt tot

$$y = \frac{1}{4} x^2.$$

Hier doet zich dus het verschijnsel voor, dat naast de algemene oplossing met een willekeurige constante erin nog een enkele losse oplossing optreedt, die singuliere oplossing genoemd wordt.

Indien bij het oplossen van een D.V. gedeeld wordt, kan het gebeuren, dat daarbij een singuliere oplossing wordt verduisterd. Zo is in voorbeeld 4 bij de oplossing van de D.V. voor  $p$  door  $p-1$  gedeeld. Kennelijk is echter  $p=1$  een oplossing van de D.V., die tot de singuliere oplossing

$$y = x + 1$$

van de oorspronkelijke D.V. leidt.

### §.3 Enkele algemene opmerkingen.

De algemene gedaante van een D.V. van de eerste orde is  $\varphi(x,y,y') = 0$ . Denkt men zich deze naar  $y'$  opgelost:  $y' = f(x,y)$ , en bedenkt men, dat de afgeleide van een functie meetkundig de tangens van de hellingshoek voorstelt, dan ziet men, dat de D.V. een richtingsveld bepaalt: aan elk punt  $(x,y)$  wordt een richting toegevoegd.

Een oplossing van de D.V. is nu een kromme, die bij het richtingsveld past, d.w.z. een kromme, waarvan de raaklijn in elk punt de goede richting heeft.

Als men een figuur van een richtingsveld tekent, dan suggereert deze figuur, dat, mits het richtingsveld voldoende "netjes" is, door elk punt  $(x_0, y_0)$  precies één oplossingskromme zal gaan. Wij zullen niet nagaan onder welke voorwaarden dit inderdaad het geval is. Wij wijzen er slechts op, dat als we een algemene oplossing gevonden hebben van de gedaante  $F(x,y,C) = 0$  (zoals dat in de vorige paragrafen het geval was), het vinden van een oplossing door  $(x_0, y_0)$  neerkomt op het bepalen van die waarde(n) van  $C$  waarvoor  $F(x_0, y_0, C) = 0$ . Als we b.v. in voorbeeld 4 van §.1 de oplossing willen hebben, die voor  $x = 2$  de waarde  $-1$  aanneemt, dan moeten we  $C = 1$  kiezen.

We beschouwen de oplossingen van de D.V. van Clairaut nog wat nader. De rechte lijnen, die de algemene oplossing vormen, zijn juist de raaklijnen aan de parabool, die de singuliere oplossing vormt: de parabool is de omhullende van het stelsel rechte lijnen, d.w.z. raakt in elk van zijn punten aan één der exemplaren van het stelsel. Op grond van bovenstaande beschouwingen is het duidelijk, dat een dergelijke omhullende van een stelsel oplossingen van een D.V. van de eerste orde ook bij het richtingsveld past en dus ook een oplossing is.

Vb.1  $y^2(y')^2 + y^2 = 1.$

Dit leidt tot

$$\frac{dx}{dy} = \pm \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Dus  $x - C = \pm \sqrt{1-y^2},$   
 $(x-C)^2 + y^2 = 1.$

Dit is een stelsel cirkels met straal 1 en middelpunten op de X-as. Hiervan zijn de rechte lijnen  $y=1$  en  $y=-1$  kennelijk omhullenden. Deze zijn ook oplossingen van de D.V.

#### §.4 Differentiaalvergelijkingen van hogere orde en stelsels differentiaalvergelijkingen.

In plaats van één D.V. met één onbekende functie kunnen we ook stelsels van meer dan één D.V. met meer dan één onbekende functies beschouwen. Een voorbeeld hiervan is

$$\left. \begin{aligned} z + \frac{dz}{dx} - 2 \frac{dy}{dx} &= 0 \\ z - \frac{dz}{dx} - 2y &= 0 \end{aligned} \right\},$$

hetgeen twee vergelijkingen van de eerste orde zijn voor de onbekende functies  $y(x)$  en  $z(x)$ . Om dit stelsel op te lossen ligt het het meest voor de hand om te trachten een van beide onbekenden en zijn afgeleide te elimineren en zo één D.V. met één onbekende functie over te houden.

In ons voorbeeld lukt dat gemakkelijk. Los  $y$  op uit de tweede vergelijking:

$$y = \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} \frac{dz}{dx},$$

en bepaal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dz}{dx} - \frac{1}{2} \frac{d^2z}{dx^2}.$$

Dit substitueren we in de eerste vergelijking met als resultaat

$$\frac{d^2z}{dx^2} + z = 0,$$

hetgeen een D.V. van de tweede orde voor  $z$  is, met als algemene oplossing

$$z = A \cos x + B \sin x.$$

Substitutie hiervan in de tweede D.V. van het oorspronkelijke stelsel levert

$$y = \frac{1}{2} (A-B) \cos x + \frac{1}{2} (A+B) \sin x.$$

De algemene oplossing van het stelsel bevat dus twee willekeurige constanten.

We hebben hier dus twee vergelijkingen met twee onbekenden van de eerste orde omgezet in één vergelijking met één onbekende van de tweede orde.

We kunnen ook het omgekeerde proces uitvoeren. Neem de D.V.

$$y \frac{d^2y}{dx^2} + x^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Stel nu  $\frac{dy}{dx} = z$ , dan is de D.V. blijkbaar equivalent met het stelsel

$$\left. \begin{aligned} y \frac{dz}{dx} + x^2 z^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= z \end{aligned} \right\},$$

dat van de eerste orde is.



Ditzelfde kunnen we doen met een willekeurige D.V. van hogere orde  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ . Stel  $y = y_1$ ,  $y' = y_2$ ,  $y'' = y_3$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n-1)} = y_n$ , dan krijgen we het stelsel

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3, \quad \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \quad F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \frac{dy_n}{dx}) = 0,$$

bestaande uit  $n$  vergelijkingen van de eerste orde met  $n$  onbekenden.

Omgekeerd kan men vaak, zoals we hierboven aan een voorbeeld hebben gezien, een stelsel (z.g. simultane) D.V. omzetten in één D.V. van hogere orde met één onbekende functie. Vaak is het echter gemakkelijker het stelsel rechtstreeks op te lossen.

Simultane D.V. treden op bij de beschouwing van het concentratieverloop als functie van de tijd bij chemische reacties. Neem als voorbeeld een niet-omkeerbare reactie van de gedaante



waarin  $a, b, c, d$  natuurlijke getallen zijn. Noem  $N_A, N_B, N_C, N_D$  de hoeveelheden van de verschillende stoffen; deze hangen af van de tijd. Noem  $C_A, C_B, C_C, C_D$  de concentraties van de stoffen; dus  $N_A = C_A V$ , enz., waarin  $V$  het volume is. Vatten we één molecule van  $A$  in het oog dan zijn er nog  $a-1$  moleculen van  $A$  en  $b$  moleculen van  $B$  nodig om een reactie tot stand te brengen. Verder is het totale aantal moleculen van stof  $A$  evenredig met  $N_A$ . Dit geeft

$$-\frac{dN_A}{dt} = k N_A C_A^{a-1} C_B^b,$$

met een positieve reactieconstante  $k$ .

Als we aannemen dat het volume constant is kunnen we dit in de volgende vorm brengen

$$-\frac{dC_A}{dt} = k C_A^a C_B^b.$$

Analoog met de andere stoffen  $B, C$  en  $D$ .

Als tweede voorbeeld nemen we de volgende twee omkeerbare reacties



met reactieconstanten  $k_1$  voor  $A \rightarrow B$ ,  $k_2$  voor  $B \rightarrow A$ ,  $k_3$  voor  $B \rightarrow C$ ,  $k_4$  voor  $C \rightarrow B$ . Dit geeft

$$\frac{dN_A}{dt} = -k_1 N_A + k_2 N_B,$$

$$\frac{dN_B}{dt} = -(k_2 + k_3) N_B + k_1 N_A + k_4 N_C,$$

$$\frac{dN_C}{dt} = -k_4 N_C + k_3 N_B.$$

Nu is natuurlijk  $N_A + N_B + N_C$  constant; stel  $N_A + N_B + N_C = 1$ .  
Dit klopt ook met bovenstaande D.V., want daaruit volgt

$$\frac{d(N_A + N_B + N_C)}{dt} = 0.$$

Met behulp van  $N_C = 1 - N_A - N_B$ , kan  $N_C$  geëlimineerd worden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_A}{dt} &= -k_1 N_A + k_2 N_B \\ \frac{dN_B}{dt} &= (k_1 - k_4) N_A - (k_2 + k_3 + k_4) N_B + k_4 \end{aligned} \right\}$$

Dit zijn twee simultane D.V. met twee onbekenden.

### §.5 Simultane lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten.

$$\text{Vb.1 } \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 5x - 6y \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - 4y \end{aligned} \right\} .$$

Eerste methode. We elimineren  $y$  door  $\dot{y}$  uit de eerste vergelijking op te lossen en in de tweede vergelijking te substitueren. Dit levert

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0,$$

met als algemene oplossing

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}.$$

Substitutie in de eerste vergelijking geeft

$$y = \frac{1}{2} C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}.$$

Tweede methode. Probeer een oplossing van de vorm

$$x = C e^{\lambda t}, \quad y = D e^{\lambda t}.$$

Dit geeft

$$\left. \begin{aligned} \lambda C e^{\lambda t} &= 5 C e^{\lambda t} - 6 D e^{\lambda t} \\ \lambda D e^{\lambda t} &= 3 C e^{\lambda t} - 4 D e^{\lambda t} \end{aligned} \right\} .$$

of

$$\left. \begin{aligned} (5-\lambda)C - 6D &= 0 \\ 3C - (4+\lambda)D &= 0 \end{aligned} \right\} .$$

We zoeken een oplossing die niet identiek nul is. Zulke C en D zijn alleen dan hieruit te vinden als

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1) = 0.$$

Dus  $\lambda = 2$  of  $\lambda = -1$ .

Nemen we  $\lambda = 2$ , dan vinden we  $D = \frac{1}{2}C$ ; voor  $\lambda = -1$  vinden we  $D = C$ .

Omdat de vergelijkingen homogeen en lineair zijn, is de som van twee oplossingen weer een oplossing. Dus we vinden als algemene oplossing

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}, \quad y = \frac{1}{2} C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}.$$

Algemeen geval:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n \end{aligned} \right\}$$

Probeer  $x_1 = C_1 e^{\lambda t}$ ,  $x_2 = C_2 e^{\lambda t}$ , ...,  $x_n = C_n e^{\lambda t}$ . Dit geeft

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)C_1 + a_{12}C_2 + \dots + a_{1n}C_n &= 0 \\ a_{21}C_1 + (a_{22} - \lambda)C_2 + \dots + a_{2n}C_n &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}C_1 + a_{n2}C_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)C_n &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Dit stelsel van n homogene lineaire vergelijkingen voor  $C_1, \dots, C_n$  heeft dan en slechts dan een van de nuloplossing verschillende oplossing als de coëfficiëntendeterminant = 0 is, d.w.z. als

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dit is een  $n^e$  graadsvergelijking voor  $\lambda$ . Bij elke wortel kan men een stelsel  $C_1, \dots, C_n$ , dat niet nul is, bepalen. Heeft de vergelijking n verschillende wortels, dan vinden we door lineaire combinatie de algemene oplossing. Als de vergelijking meervoudige wortels heeft, komen we oplossingen te kort. Evenals in het geval van één homogene lineaire D.V. van hogere orde met constante coëfficiënten kunnen we bij een k-voudige wortel voor  $\lambda$ , een veelterm van de graad k-1 in t als factor bij  $e^{\lambda t}$  zetten.

$$\text{Vb.2 } \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 6x + 4y \\ \frac{dy}{dt} &= -4x - 2y \end{aligned} \right\} .$$

De  $\lambda$ -vergelijking wordt nu

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 4 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 4 = (\lambda-2)^2 = 0,$$

met een dubbele wortel  $\lambda = 2$ . Probeer dus

$$\left. \begin{aligned} x &= (A+Bt) e^{2t} \\ y &= (C+Dt) e^{2t} \end{aligned} \right\} .$$

Substitutie geeft

$$\left. \begin{aligned} 2A + 2Bt + B &= 6(A+Bt) + 4(C+Dt) \\ 2C + 2Dt + D &= -4(A+Bt) - 2(C+Dt) \end{aligned} \right\} .$$

Gelijkstelling van coëfficiënten levert

$$\left. \begin{aligned} 2B &= 6B + 4D \\ 2D &= -4B - 2D \\ 2A + B &= 6A + 4C \\ 2C + D &= -4A - 2C \end{aligned} \right\} ,$$

met als oplossing  $C = -A + \frac{1}{4}B$ ,  $D = -B$ . Dus de algemene oplossing der D.V. is

$$\left. \begin{aligned} x &= (A + Bt) e^{2t} \\ y &= \left(-A + \frac{1}{4}B - Bt\right) e^{2t} \end{aligned} \right\} .$$

De wortels van de  $\lambda$ -vergelijking kunnen ook complex zijn.

$$\text{Vb.3 } \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - 5y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y \end{aligned} \right\} .$$

De  $\lambda$ -vergelijking wordt

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

met als wortels  $2+3i$  en  $2-3i$ . Als oplossing proberen we

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{2t}(A \cos 3t + B \sin 3t) \\ y &= e^{2t}(C \cos 3t + D \sin 3t) \end{aligned} \right\} .$$

Substitutie geeft

$$\left. \begin{aligned} 2A \cos 3t + 2B \sin 3t - 3A \sin 3t + 3B \cos 3t &= \\ &= 3A \cos 3t + 3B \sin 3t - 5C \cos 3t - 5D \sin 3t \\ 2C \cos 3t + 2D \sin 3t - 3C \sin 3t + 3D \cos 3t &= \\ &= 2A \cos 3t + 2B \sin 3t + C \cos 3t + D \sin 3t \end{aligned} \right\}$$

Gelijkstelling van de coëfficiënten van sinus en cosinus afzonderlijk geeft

$$\left. \begin{aligned} 2A + 3B &= 3A - 5C \\ 2B - 3A &= 3B - 5D \\ 2C + 3D &= 2A + C \\ 2D - 3C &= 2B + D \end{aligned} \right\} ,$$

met als oplossing  $C = \frac{1}{5} A - \frac{3}{5} B$ ;  $D = \frac{3}{5} A + \frac{1}{5} B$ . Dus de algemene oplossing van de D.V. luidt

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{-2t} (A \cos 3t + B \sin 3t) \\ y &= \frac{1}{5} e^{2t} [(A-3B) \cos 3t + (3A+B) \sin 3t] \end{aligned} \right\}$$

Tenslotte nog een voorbeeld met drie onbekenden.

$$\text{Vb. 4 } \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + z \\ \frac{dy}{dt} &= x + z \\ \frac{dz}{dt} &= x + y \end{aligned} \right\} .$$

De  $\lambda$ -vergelijking is

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0.$$

De enkelvoudige wortel  $\lambda = 2$  geeft als vergelijkingen voor  $C_1, C_2, C_3$ :

$$\left. \begin{aligned} -2C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 - 2C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 + C_2 - 2C_3 &= 0 \end{aligned} \right\} ,$$

met als oplossing  $C_1 = C_2 = C_3$ , en dus  $x = y = z = C e^{2t}$ .

Bij de dubbele wortel  $\lambda = -1$  zouden we dus factoren van de gedaante  $A+Bt$  moeten toevoegen. Dit blijkt echter hier niet nodig te zijn, omdat in de lineaire vergelijkingen voor  $C_1, C_2, C_3$  een extra rangverlaging optreedt, zodat deze al voldoende onafhankelijke constanten opleveren. Het stelsel bestaat nl. uit drie maal de vergelijking

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0.$$

We vinden dus als algemene oplossing

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{-t} + D e^{2t} \\ y &= C_2 e^{-t} + D e^{2t} \\ z &= (C_1 + C_2) e^{-t} + D e^{2t} \end{aligned} \right\} .$$

De D.V., die we tot nu toe in deze paragraaf hebben behandeld waren allen homogeen. We beschouwen nu een inhomogeen lineair stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n + A_1(t) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n + A_n(t) \end{aligned} \right\}$$

Op geheel analoge wijze als bij de inhomogene lineaire vergelijking van hogere orde kan men inzien dat men de algemene oplossing van dit stelsel verkrijgt door bij een particuliere oplossing van dit stelsel de algemene oplossing van het corresponderende homogene stelsel op te tellen. Dit geldt ook nog als de coëfficiënten van het homogene stelsel niet constant zijn.

$$\text{Vb.5 } \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 5x - 6y - 4 e^t \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - 4y - 3 e^t \end{aligned} \right\} .$$

De corresponderende homogene vergelijking is in voorbeeld 1 behandeld. Probeer voor de particuliere oplossing  $x = a e^t$ ,  $y = b e^t$ . Dit geeft

$$\left. \begin{aligned} a &= 5a - 6b - 4 \\ b &= 3a - 4b - 3 \end{aligned} \right\} , \text{ dus } a = 1, b = 0.$$

De algemene oplossing luidt dus

$$\left. \begin{aligned} x &= e^t + C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \\ y &= \frac{1}{2} C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \end{aligned} \right\} .$$

### §.6 Machtrees substitutie. De differentiaalvergelijking van Bessel.

We demonstreren de methode eerst aan een eenvoudig voorbeeld.

Vb.1  $y' - xy = 0.$

Met scheiding van veranderlijken zien we, dat de algemene oplossing

$y = C e^{\frac{1}{2}x^2}$  is. Neem voor  $y$  een machtreeks  $y = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots + u_nx^n + \dots$

We trachten de coëfficiënten  $u_0, u_1, \dots$  van deze machtreeks zo te bepalen dat aan de D.V. voldaan is. Er geldt:

$$y' = u_1 + 2u_2x + 3u_3x^2 + \dots + (n+1)u_{n+1}x^n + \dots$$

Substitutie in de D.V. geeft

$$(u_1 + 2u_2x + 3u_3x^2 + \dots + (n+1)u_{n+1}x^n + \dots) - (u_0x + u_1x^2 + u_2x^3 + \dots + u_{n-1}x^n + \dots) = 0.$$

We stellen nu de coëfficiënten van elke macht van  $x$  afzonderlijk  $= 0$ . Dit geeft

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ 2u_2 - u_0 &= 0 \\ 3u_3 - u_1 &= 0 \\ \dots & \\ nu_n - u_{n-2} &= 0 \\ \dots & \end{aligned}$$

Hieruit volgt  $0 = u_1 = u_3 = u_5 = \dots$ . Voor de even indices geldt:

$$u_{2n} = \frac{u_{2n-2}}{2n} = \frac{u_{2n-4}}{2n(2n-2)} = \frac{u_{2n-6}}{2n(2n-2)(2n-4)} = \dots = \frac{u_0}{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2} = \frac{u_0}{2^n n!}$$

We vinden dus als oplossing

$$\begin{aligned} y &= u_0 + \frac{u_0}{2 \cdot 1!} x^2 + \frac{u_0}{2^2 \cdot 2!} x^4 + \dots + \frac{u_0}{2^n \cdot n!} x^{2n} + \dots = \\ &= u_0 \left( 1 + \frac{1}{1!} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n + \dots \right) = u_0 e^{\frac{1}{2}x^2}. \end{aligned}$$

Het procédé is dus, dat we voor  $y$  een machtreeks met onbepaalde coëfficiënten in de D.V. substitueren en dan trachten, door de coëfficiënten van elke macht van  $x$  afzonderlijk nul te stellen, deze onbepaalde coëfficiënten te bepalen. Dit lukt altijd voor een lineaire D.V., waarvan de coëfficiënten en het rechterlid machtreeksen zijn en de coëfficiënt van de hoogste orde afgeleide  $= 1$  is. Voor een vergelijking van de tweede orde ziet het er dus als volgt uit:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x),$$

waarin  $a(x)$ ,  $b(x)$  en  $f(x)$  in machtreeksen kunnen worden ontwikkeld.

De volgende D.V. is voor de toepassingen zeer belangrijk.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad (\text{D.V. van Bessel}).$$

Hierin is  $p$  een constante  $\geq 0$ . Deze D.V. voldoet niet aan de hierboven gestelde voorwaarden. Weliswaar kunnen we de coëfficiënt van  $y''$  gelijk aan 1 maken door door  $x^2$  te delen, maar dan zijn de nieuwe coëfficiënten van  $y'$  en  $y$  niet meer in een machtreeks te ontwikkelen.

Gewone machtreekssubstitutie blijkt hier te falen, behalve als  $p$  een geheel getal is. We passen een gewijzigde machtreekssubstitutie toe van de vorm

$$(1) \quad y = u_0 x^\alpha + u_1 x^{\alpha+1} + u_2 x^{\alpha+2} + \dots + u_n x^{\alpha+n} + \dots,$$

waarin  $\alpha$  een nader te bepalen constante is. We mogen nu  $u_0 \neq 0$  aannemen, want als dit niet het geval is, kunnen wij het altijd bereiken door  $\alpha$  te veranderen en de  $u$ 's te vernummeren. B.v. als  $u_0 = u_1 = 0$  en  $u_2 \neq 0$ , dan vervangen we  $\alpha$  door  $\alpha+2$ .

Nu is

$$y' = \alpha u_0 x^{\alpha-1} + (\alpha+1)u_1 x^\alpha + (\alpha+2)u_2 x^{\alpha+1} + \dots + (\alpha+n+1)u_{n+1} x^{\alpha+n} + \dots,$$

$$y'' = \alpha(\alpha-1)u_0 x^{\alpha-2} + (\alpha+1)\alpha u_1 x^{\alpha-1} + (\alpha+2)(\alpha+1)u_2 x^\alpha + \dots + (\alpha+n+2)(\alpha+n+1)u_{n+2} x^{\alpha+n} + \dots$$

Substitueert men dit in de D.V., dan komt er

$$\begin{aligned} & \alpha(\alpha-1)u_0 x^\alpha + (\alpha+1)\alpha u_1 x^{\alpha+1} + \dots + (\alpha+n)(\alpha+n-1)u_n x^{\alpha+n} + \dots + \\ & + \alpha u_0 x^\alpha + (\alpha+1)u_1 x^{\alpha+1} + \dots + (\alpha+n)u_n x^{\alpha+n} + \dots + \\ & + u_0 x^{\alpha+2} + u_1 x^{\alpha+3} + \dots + u_{n-2} x^{\alpha+n} + \dots + \\ & - p^2(u_0 x^\alpha + u_1 x^{\alpha+1} + \dots + u_n x^{\alpha+n} + \dots) = 0. \end{aligned}$$

Stelt men de afzonderlijke machten van  $x$  nul, dan komt er

$$\left. \begin{aligned} & [\alpha(\alpha-1) + \alpha - p^2] u_0 = 0 \\ & [(\alpha+1)\alpha + (\alpha+1) - p^2] u_1 = 0 \\ & [(\alpha+n)(\alpha+n-1) + (\alpha+n) - p^2] u_n + u_{n-2} = 0 \quad \text{voor } n \geq 2 \end{aligned} \right\}$$

of na omvorming

$$\left. \begin{aligned} & (\alpha^2 - p^2) u_0 = 0 \\ & [(\alpha+1)^2 - p^2] u_1 = 0 \\ & [(\alpha+n)^2 - p^2] u_n + u_{n-2} = 0 \quad \text{voor } n \geq 2 \end{aligned} \right\}$$



Omdat  $u_0 \neq 0$ , moet  $\alpha^2 - p^2 = 0$  zijn, dus  $\alpha = p$  of  $\alpha = -p$ . We nemen eerst  $\alpha = p$ . Dan is  $(p+n)^2 - p^2 = 2p(n+1) \neq 0$  voor alle  $n = 1, 2, 3, \dots$ . We vinden nu direct  $0 = u_1 = u_3 = u_5 = \dots$ . Voor de even indices geldt

$$\begin{aligned} u_{2n} &= -\frac{u_{2n-2}}{4n(n+p)} = \frac{u_{2n-4}}{4n(n+p)4(n-1)(n-1+p)} = \dots = \\ &= \frac{(-1)^n}{4^n n!(n+p)(n-1+p)\dots(1+p)} u_0. \end{aligned}$$

We beschouwen nu  $\alpha = -p$  en veronderstellen eerst, dat  $p$  niet geheel is. Dan is  $(2n-p)^2 - p^2 = 4n(n-p) \neq 0$  voor alle  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Kiezen we nu  $0 = u_1 = u_3 = u_5 = \dots$ , dan kunnen we de  $u$ 's met even indices evenals hierboven bepalen en vinden we op analoge wijze

$$u_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n n!(n-p)(n-1-p)\dots(1-p)} u_0.$$

In beide oplossingen is  $u_0$  willekeurig te kiezen. Door b.v.  $u_0 = 1$  te nemen, vinden we twee onafhankelijke oplossingen, waarvan de tweede  $y_2(x)$  uit de eerste  $y_1(x)$  ontstaat door  $p$  door  $-p$  te vervangen. De algemene oplossing van de D.V. is dan

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Neem nu  $p$  geheel ( $p=m$ ). De eerste oplossing met  $\alpha = m$  blijft bestaan. Als  $m = 0$ , is de tweede oplossing dezelfde als de eerste; als  $m \geq 1$ , levert  $\alpha = -m$  in het geheel geen oplossing op, immers

$$[(-m+2m)^2 - m^2] u_{2m} + u_{2m-2} = 0,$$

of  $u_{2m-2} = 0$ , en hieruit volgt weer  $0 = u_{2m-4} = \dots = u_0$ , hetgeen in strijd is met onze veronderstelling  $u_0 \neq 0$ . In het geval dat  $p$  geheel is vinden we dus geen twee onafhankelijke oplossingen met deze methode. De oplossing met  $\alpha = m$  en  $u_0 = 1$  ziet er als volgt uit

$$y(x) = x^m + x^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!(n+m)(n-1+m)\dots(1+m)} x^{2n}.$$

Vermenigvuldigt men deze met  $\frac{1}{2^m m!}$ , dan ontstaat de Bessel-functie  $J_m(x)$  van de eerste soort en orde  $m$ :

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}.$$

Ook in het geval van niet-gehele  $p$  vindt men door de door ons gevonden oplossing met een (hier niet aan te geven) constante factor te vermenigvuldigen een functie  $J_p(x)$ , die Bessel-functie van de eerste soort en orde  $p$  genoemd wordt.

In het geval dat  $p$  geheel is, bestaat er naast  $J_m(x)$  ook nog een tweede oplossing  $Y_m(x)$  van de D.V. van Bessel, die Bessel-functie van de tweede soort genoemd wordt.

Behalve de gewone D.V. van Bessel wordt ook wel beschouwd de D.V.

$$(2) \quad x^2 y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0,$$

met een soortgelijke oplossing als de gewone D.V. van Bessel (alleen de factor  $(-1)^n$  treedt niet op). Met  $J_m(x)$  correspondeert

$$I_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m},$$

en ook voor algemene  $p$  een  $I_p(x)$ . Met de tweede oplossing  $Y_m(x)$  correspondeert nu  $K_m(x)$ .

Van de Bessel-functies bestaan uitvoerige tabellen.

Er zijn een aantal D.V., die men door eenvoudige substituties tot de D.V. van Bessel kan terugbrengen. We geven één voorbeeld

$$x^2 y'' + axy' + (c + d^2 x^{2s})y = 0,$$

met constante  $a, c, d$  en  $s$ . Past men de substitutie  $y = x^{\frac{1}{2}(1-a)} z$ ,  $t = \frac{d}{s} x^s$  toe, dan krijgt men voor  $z$  als functie van  $t$  een D.V. van Bessel met

$$p = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}(1-a)^2 - c}}{s}.$$

Als dus  $Z(t)$  een oplossing van deze D.V. is, dan is

$$x^{\frac{1}{2}(1-a)} Z\left(\frac{d}{s} x^s\right)$$

een oplossing van de oorspronkelijke vergelijking.

Als het teken voor  $d^2 x^{2s}$  een minteken is in plaats van een plusteken, ontstaat door dezelfde substitutie een gewijzigde D.V. van Bessel van het type (2) met dezelfde  $p$  als zoëven.

De hier gegeven methode om de D.V. van Bessel op te lossen kan toegepast worden op alle D.V. van het type

$$x^2 y'' + xa(x)y' + b(x)y = 0,$$

waarin  $a(x)$  en  $b(x)$  in machtreeksen te ontwikkelen zijn.

Om hier beginnen we met de substitutie van de reeks (1) met  $u_0 \neq 0$ . Deze leidt, als we de afzonderlijke machten van  $x$  gelijk aan nul stellen, in de eerste plaats tot een vierkantsvergelijking voor  $\alpha$ , die indiciaalvergelijking genoemd wordt. Als het verschil van de wortels van deze vergelijking niet geheel is, geven beide wortels een oplossing van de D.V. In dat geval vinden we dus de algemene oplossing van de vorm  $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ .

Als het verschil van de wortels geheel is, leidt in ieder geval de grootste van de twee wortels tot een oplossing. De kleinste kan ook tot een oplossing leiden, maar het kan ook zijn, dat dit niet het geval is (bij de D.V. van Bessel hebben we dit verschijnsel opgemerkt). Als de kleinste wortel geen oplossing geeft en bovendien in het geval dat de twee wortels samenvallen (dan zijn de oplossingen bij beide wortels natuurlijk dezelfde), bestaat er een tweede oplossing van de gedaante

$$(3) \quad y_1(x) \log x + x^{\alpha_2} u(x),$$

waarin  $y_1(x)$  een oplossing is, behorende bij de grootste wortel  $\alpha_1$ . Verder is  $\alpha_2$  de kleinste wortel en  $u(x)$  een machtreeks, waarvan de coëfficiënten weer kunnen worden gevonden door (3) met onbepaalde coëfficiënten in  $u(x)$  in de D.V. te substitueren en deze coëfficiënten op analoge wijze te bepalen als hierboven is geschied.

### §.7 Partiële differentiaalvergelijkingen.

Bij een partiële D.V. is de onbekende functie een functie van meer dan één veranderlijke. In de D.V. komen de partiële afgeleiden van deze functie voor. Een voorbeeld is

$$z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Een oplossing hiervan is een functie  $z(x,y)$  van twee veranderlijken, die met haar partiële afgeleiden  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  en  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  aan de vergelijking voldoet.

In de vergelijking noemen we nu  $x$  en  $y$  de onafhankelijk veranderlijken en  $z$  de afhankelijk veranderlijke. De orde van een vergelijking is de hoogste orde afgeleide, die in de vergelijking voorkomt. In bovenstaand voorbeeld is de orde dus 2.

We behandelen eerst een zeer eenvoudig voorbeeld, nl. de D.V.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Noemen we  $\frac{\partial z}{\partial y} = u(x,y)$ , dan wordt de vergelijking  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ . Kiezen we een vaste waarde  $y_0$  van  $y$ , dan ontstaat de gewone D.V.  $\frac{d}{dx} u(x, y_0) = 0$ , waarvan de oplossing luidt  $u(x, y_0) = C_0$ , waarin  $C_0$  een constante is.

Nemen we een andere waarde  $y_1$  van  $y$ , dan krijgen we  $u(x, y_1) = C_1$ , waarin  $C_1$  weer een constante is, die niet gelijk aan  $C_0$  hoeft te zijn.

Maken we  $y$  nu variabel, dan kan bij iedere waarde van  $y$  een andere waarde van  $C$  behoren. Dit betekent, dat  $C$  een functie van  $y$  is, die overigens willekeurig is, dus

$$u(x, y) = \varphi(y).$$

We krijgen dus nu, dat  $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(y)$ . Kiezen we een vaste waarde  $x_0$  van  $x$  dan krijgen we  $\frac{d}{dy} z(x_0, y) = \varphi(y)$  met als oplossing

$$z(x_0, y) = \int_a^y \varphi(t) dt + C_0.$$

Op analoge wijze als hierboven beredeneren we, dat als we  $x$  variabel maken, de  $C_0$  door een willekeurige functie van  $x$  vervangen wordt. Daar verder ook  $\varphi$  een willekeurige functie was, krijgen we als algemene oplossing

$$z = f_1(x) + f_2(y),$$

waarin  $f_1$  en  $f_2$  willekeurige differentieerbare functies zijn. Het is door substitutie makkelijk te verifiëren, dat het gevonden resultaat inderdaad aan de D.V. voldoet.

Aan dit voorbeeld zien we een kenmerkend verschil tussen partiële en gewone D.V., nl. dat in een algemene oplossing willekeurige functies optreden, in plaats van willekeurige constanten. Hierdoor wordt de totaliteit van de functies, die aan de D.V. voldoen, veel minder makkelijk te overzien.

Behalve in de allereenvoudigste gevallen is het onmogelijk om de algemene oplossing van een partiële D.V. aan te geven. Meestal zijn in de praktijk, behalve de D.V., nog nadere voorwaarden gegeven, die de oplossing bepalen. Bij gewone D.V. gingen we vaak aldus te werk, dat we eerst de algemene oplossing van de D.V. bepaalden, en achteraf de daarin optredende constanten aan de gegeven voorwaarden aanpasten. Deze methode is bij partiële D.V. meestal onuitvoerbaar. Hier proberen we meestal een aantal oplossingen van de D.V. te vinden en deze vervolgens dermate te combineren, dat aan de voorwaarden is voldaan. Dit gaat in het bijzonder goed als de vergelijking lineair is, d.w.z. van de eerste graad in de afhankelijk veranderlijke en haar partiële afgeleiden. Zo ziet de meest algemene lineaire partiële D.V. van de eerste orde en twee onafhankelijk veranderlijken er als volgt uit

$$(1) \quad P(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + R(x, y)z = S(x, y),$$

met willekeurige  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  en  $S$ . Als de functie  $S$  identiek nul is, is de vergelijking homogeen.

Voor een homogene lineaire D.V. geldt nu, dat een lineaire combinatie van oplossingen weer een oplossing is. Laat  $z_1(x, y)$  en  $z_2(x, y)$  oplossingen van (1) met  $S = 0$  zijn, dan is

$$P \frac{\partial z_1}{\partial x} + Q \frac{\partial z_1}{\partial y} + R z_1 = 0,$$

$$P \frac{\partial z_2}{\partial x} + Q \frac{\partial z_2}{\partial y} + R z_2 = 0.$$

Dan is voor constante  $C_1$  en  $C_2$ :

$$\begin{aligned} P \frac{\partial(C_1 z_1 + C_2 z_2)}{\partial x} + Q \frac{\partial(C_1 z_1 + C_2 z_2)}{\partial y} + R(C_1 z_1 + C_2 z_2) &= \\ = C_1 \left( P \frac{\partial z_1}{\partial x} + Q \frac{\partial z_1}{\partial y} + R z_1 \right) + C_2 \left( P \frac{\partial z_2}{\partial x} + Q \frac{\partial z_2}{\partial y} + R z_2 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Een analoog bewijs kan gegeven worden voor lineaire combinaties van meer dan twee functies, voor vergelijkingen van hogere orde en voor vergelijkingen met meer dan twee onafhankelijk veranderlijken.

Vaak heeft men een schaar oplossingen met een willekeurige parameter  $\alpha$  erin, d.w.z. een functie  $z(x, y, \alpha)$ , die voor iedere waarde van  $\alpha$  een oplossing is. Dan is ook

$$\int_a^b \varphi(\alpha) z(x, y, \alpha) d\alpha$$

met willekeurige functie  $\varphi(\alpha)$  een oplossing (a en b zijn constanten). Dit volgt uit het (hier niet bewezen) feit, dat

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b \varphi(\alpha) z(x, y, \alpha) d\alpha = \int_a^b \varphi(\alpha) \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial x} d\alpha,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_a^b \varphi(\alpha) z(x, y, \alpha) d\alpha = \int_a^b \varphi(\alpha) \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial y} d\alpha,$$

zodat

$$\begin{aligned} P \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b \varphi(\alpha) z(x, y, \alpha) d\alpha + Q \frac{\partial}{\partial y} \int_a^b \varphi(\alpha) z(x, y, \alpha) d\alpha + \\ + R \int_a^b \varphi(\alpha) z(x, y, \alpha) d\alpha &= \\ = \int_a^b \varphi(\alpha) \left\{ P \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial x} + Q \frac{\partial z(x, y, \alpha)}{\partial y} + R z(x, y, \alpha) \right\} d\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Neem als voorbeeld de D.V.

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + bz = 0,$$

waarin a en b constanten zijn. Omdat deze vergelijking lineair is met constante coëfficiënten, proberen we de substitutie  $z = e^{\alpha x + \beta y}$ . Dan is

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x + \beta y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \beta e^{\alpha x + \beta y}.$$

Substitutie in de D.V. geeft

$$(a\alpha + \beta + b)e^{\alpha x + \beta y} = 0,$$

dus

$$a\alpha + \beta + b = 0,$$

$$\beta = -a\alpha - b.$$

We vinden dus als oplossing  $z = e^{\alpha x - a\alpha y - by}$ , waarin  $\alpha$  nog een willekeurige parameter is. Dan is ook

$$(2) \quad z = \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) e^{\alpha x - a\alpha y - by} d\alpha = e^{-by} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) e^{\alpha(x - ay)} d\alpha$$

met willekeurige functie  $\varphi(\alpha)$  een oplossing (mits de integraal bestaat).

Dit geeft ons een methode om de algemene oplossing te bepalen.

Stel  $z = e^{-by} w$ , dan is  $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-by} \frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -be^{-by} w + e^{-by} \frac{\partial w}{\partial y}$ .

Substitutie in de D.V. geeft

$$ae^{-by} \frac{\partial w}{\partial x} - be^{-by} w + e^{-by} \frac{\partial w}{\partial y} + be^{-by} w = 0,$$

$$\text{dus } a \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

$$\text{Stel nu } \left. \begin{array}{l} u = x - ay \\ v = x + ay \end{array} \right\}.$$

$$\text{Dan is } \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -a \frac{\partial w}{\partial u} + a \frac{\partial w}{\partial v}.$$

Dus de D.V. gaat over in  $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$ , welke als algemene oplossing heeft  $w = \phi(u)$  met willekeurige  $\phi$ . Dit leidt tot de algemene oplossing

$$z = e^{-by} \phi(x - ay)$$

van de oorspronkelijk D.V.

Laat nu de oplossing gevraagd zijn, die voor  $x = 0$  voldoet aan  $z = f(y)$ , waarin  $f$  een gegeven functie is. Dan geldt

$$e^{-by} \phi(-ay) = f(y).$$

Stel nu  $-ay = t$ ,  $y = -t/a$ , dan is

$$\phi(t) = e^{-\frac{bt}{a}} f\left(-\frac{t}{a}\right),$$

dus 
$$\psi(x-ay) = e^{-\frac{bx}{a} + by} f\left(y - \frac{x}{a}\right),$$

dus de gevraagde oplossing is

$$z = e^{-\frac{bx}{a}} f\left(y - \frac{x}{a}\right).$$

Als b.v.  $f(y) = \frac{e^{-by}}{y}$ , dan is  $z = e^{-\frac{bx}{a}} \frac{e^{-b\left(y - \frac{x}{a}\right)}}{y - \frac{x}{a}} = \frac{e^{-by}}{y - \frac{x}{a}}$ .

Deze oplossing kunnen we ook uit (2) krijgen. Vult men  $x = 0$  in (2) in, dan komt er

$$e^{-by} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) e^{-\alpha ay} d\alpha.$$

Veronderstel  $a > 0$  en  $y > 0$ , dan is

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha ay} d\alpha = \left[ -\frac{e^{-\alpha ay}}{ay} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{ay}.$$

Neemt men nu  $\varphi(\alpha) = a$  (constant), dan krijgen we blijkbaar de goede oplossing en vinden we als de gezochte oplossing

$$z = ae^{-by} \int_0^{\infty} e^{\alpha(x-ay)} d\alpha \quad (\text{voor } x < ay):$$

Inderdaad is

$$z = ae^{-by} \left[ \frac{e^{\alpha(x-ay)}}{x-ay} \right]_0^{\infty} = \frac{ae^{-by}}{ay-x}.$$

### §.8 Enkele belangrijke differentiaalvergelijkingen. Oplossen door separeren.

Vb.1 Diffusie van een oplossing of van een gas. Voor het gemak beschouwen we het eenvoudige geval van een kolom, waarin de diffusie slechts in één richting plaats vindt. Deze richting nemen we als x-richting. Als  $c$  de concentratie is in de kolom, dan is  $c$  een functie van  $x$  en  $t$  (tijd). De snelheid van de diffunderende materie is evenredig met de concentratieverandering:

$$v = -k \frac{\partial c}{\partial x} \quad (k \text{ constant } > 0).$$

We beschouwen een klein stukje ter lengte  $\Delta x$  van de kolom, gelegen tussen de x-waarden  $x$  en  $x+\Delta x$ . Dan is de wijziging in de hoeveelheid materie per tijdseenheid  $q\Delta x \frac{\partial c}{\partial t}$  ( $q$  = doorsnede kolom). De hoeveelheid materie, die per tijdseenheid links binnenkomt is  $qv(x)$  en de hoeveelheid, die rechts naar buiten gaat is  $qv(x+\Delta x)$ , waarvoor bij kleine  $\Delta x$  geschreven mag worden  $qv(x) + \Delta x q \frac{\partial v}{\partial x}$ .

De toeneming van de hoeveelheid materie is dus

$$- q \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} = k q \Delta x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

We krijgen zo de ééndimensionale diffusievergelijking

$$\frac{\partial c}{\partial t} = k \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

Als we snelheden in alle richtingen van de ruimte toelaten wordt de vergelijking

$$\frac{\partial c}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right).$$

Een vergelijking van hetzelfde type krijgen we bij de warmtegeleiding. De warmtestroom  $q$  is nl. evenredig met het temperatuurverval en dit geeft

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x},$$

hetgeen op geheel analoge wijze als hierboven leidt tot de warmtegeleidingsvergelijking

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

want de vermeerdering van de hoeveelheid warmte in een stukje  $\Delta x$  is  $q \Delta x c \rho \frac{\partial T}{\partial t}$  ( $c$  is soortelijke warmte,  $\rho$  is dichtheid). Dus is  $\alpha = \frac{k}{c \rho}$ .

Analoog in drie dimensies  $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$ .

In de diffusievergelijking kunnen we weer  $c = e^{\alpha x + \beta t}$  substitueren. Dit leidt tot  $\beta = k \alpha^2$ , dus tot  $c = e^{\alpha x + k \alpha^2 t}$ . Vaak is het nuttig om hierin voor  $\alpha$  een imaginaire waarde te nemen, d.w.z. we vervangen  $\alpha$  door  $i\alpha$ ; dit geeft  $c = e^{i\alpha x - k \alpha^2 t}$ . Door combinatie krijgen we de oplossing

$$c = \int_0^{\infty} e^{-k\alpha^2 t} A(\alpha) \cos \alpha (x - \varphi(\alpha)) d\alpha.$$

Een gebruikelijke bijvoorwaarde is, dat de toestand aan het begin van het proces gegeven is. D.w.z. als  $t = 0$ , dan is  $c = f(x)$ , waarin  $f$  een gegeven functie is. Dit geeft

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\alpha) \cos \alpha (x - \varphi(\alpha)) d\alpha.$$

Er bestaan algemene methoden om hieruit  $A(\alpha)$  en  $\varphi(\alpha)$  te bepalen.



Vb.2 Golfvoortplanting. We beginnen daartoe met de trillende snaar. We beschouwen een dunne gespannen snaar. Kies de x-as langs de evenwichtstoestand van de snaar met  $x = 0$  en  $x = \ell$  in de eindpunten van de snaar. We geven de snaar een kleine uitwijking uit de evenwichtstoestand, die in één vlak met de x-as ligt. In dit vlak kiezen we een y-as. We nemen aan, dat ieder punt een beweging gaat beschrijven gelegen op een rechte loodrecht op de x-as en dat de uitwijkingen zo klein zijn, dat de spanning in de snaar er niet door verandert. De beweging van de snaar kan beschreven worden door y als functie van x en t te geven. Vatten we een klein stukje van de snaar gelegen tussen  $x = x_0$  en  $x = x_1$  in het oog, dan werkt in de uiteinden één kracht op dit stukje veroorzaakt door de spanning en wel in tangentiële richting. De component in de y-richting van de resulterende kracht is

$$P(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_0) \text{ met } \tan \alpha_1 = \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=x_1}, \quad \tan \alpha_0 = \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=x_0}.$$

Hierin is P de spanning in de snaar. We nemen aan dat de hoeken  $\alpha_1$  en  $\alpha_0$  zo klein zijn, dat we sinus en tangens aan elkaar gelijk kunnen stellen. Dan is de kracht dus

$$P \left\{ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=x_1} - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=x_0} \right\}.$$

Voor een klein stukje mogen we hiervoor schrijven  $P(x_1 - x_0) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ .

De massa van het stukje snaar is  $\rho(x_1 - x_0)$ , waarin  $\rho$  de massa per lengte-eenheid van de snaar is en de versnelling is  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ . Dit levert ons de volgende D.V. voor de trillende snaar

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Een vergelijking van hetzelfde type vinden we voor allerlei vormen van golfvoortplanting in één richting. Bij voortplanting in willekeurige richting wordt  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  weer vervangen door  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  (de afhankelijk veranderlijke is dan niet y).

Om de D.V. op te lossen passen we de volgende substitutie toe

$$\left. \begin{aligned} u &= x - \alpha t \\ v &= x + \alpha t \end{aligned} \right\},$$

dan is

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial y}{\partial u} + \alpha \frac{\partial y}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial v^2},$$

en analoog

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2},$$

zodat de D.V. overgaat in  $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$ . Deze hebben we al eerder opgelost, met als algemene oplossing  $y = f_1(u) + f_2(v)$  met willekeurige functies  $f_1$  en  $f_2$ . De oorspronkelijke D.V. heeft dus als algemene oplossing

$$y = f_1(x-at) + f_2(x+at).$$

De snaar is echter vastgehouden aan de uiteinden  $x = 0$  en  $x = \ell$ . Dit geeft  $0 = y(0, t) = y(\ell, t)$  voor alle  $t$ . Substitutie van  $x = 0$  geeft

$$f_1(-at) + f_2(at) = 0 \quad \text{voor alle } t.$$

Noemen we  $at = w$ , dan is dus  $f_1(-w) + f_2(w) = 0$  voor alle  $w$ , dus

$$y(x, t) = f_1(x-at) - f_1(-x-at).$$

Substitueren we nu  $x = \ell$ , dan geeft dit

$$f_1(\ell-at) - f_1(-\ell-at) = 0 \quad \text{voor alle } t.$$

Noemen we  $-\ell-at = w_1$ , dan is  $\ell-at = w_1 + 2\ell$ , dus we vinden dat de functie  $f_1$  voldoet aan

$$f_1(w_1 + 2\ell) = f_1(w_1) \quad \text{voor alle } w_1.$$

Deze eigenschap van  $f_1$  drukt men wel uit door te zeggen, dat  $f_1$  periodiek is met periode  $2\ell$ .

We behandelen nu een andere methode ter oplossing van partiële D.V. die zeer algemeen gebruikelijk is, nl. separeren. We gaan weer uit van de D.V.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Probeer een oplossing van de vorm  $y = \varphi(x) \phi(t)$ . De functie wordt dus gekozen als een product van een functie van  $x$  alleen en een functie van  $t$  alleen. Dan is

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \varphi \phi'', \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \varphi'' \phi.$$

Substitutie in de D.V. geeft

$$\varphi \frac{d^2 \phi}{dt^2} = \alpha^2 \phi \frac{d^2 \varphi}{dx^2},$$

$$\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dt^2} = \frac{\alpha^2}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dx^2}.$$

Het linkerlid is een functie alleen van  $t$  en het rechterlid een functie alleen van  $x$ . Hieruit volgt, dat beide leden constant zijn. Dit zien we in, door bv.  $x$  constant en  $t$  variabel te nemen. Omdat  $x$  constant is, is het rechterlid constant, dus het linkerlid ook bij variabele  $t$ . Dan is echter ook het rechterlid constant bij variabele  $x$ . We kiezen de constante negatief en stellen

$$\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\mu^2,$$

dus

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \mu^2 \phi = 0,$$

met als algemene oplossing  $\phi(t) = A \sin(\mu t + \beta)$  met constante  $A$  en  $\beta$ . De D.V. voor  $\phi$  wordt

$$\frac{\alpha^2}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\mu^2,$$

of

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{\mu^2}{\alpha^2} \psi = 0,$$

met als algemene oplossing  $\psi(x) = B \sin\left(\frac{\mu}{\alpha} x + \gamma\right)$  met constante  $B$  en  $\gamma$ . Voor  $y$  vinden we dus

$$y = C \sin\left(\frac{\mu}{\alpha} x + \gamma\right) \sin(\mu t + \beta).$$

We passen deze oplossing nu aan bij de voorwaarde, dat  $y = 0$  voor  $x = 0$  en  $x = \ell$ . Nu geeft  $x = 0$ :

$$C \sin \gamma \sin(\mu t + \beta) = 0 \quad \text{voor alle } t,$$

$$\text{dus } \sin \gamma = 0, \text{ dus } y = C \sin \frac{\mu}{\alpha} x \sin(\mu t + \beta).$$

Substitutie van  $x = \ell$  geeft

$$C \sin \frac{\mu}{\alpha} \ell \sin(\mu t + \beta) = 0 \quad \text{voor alle } t,$$

$$\text{dus } \sin \frac{\mu}{\alpha} \ell = 0, \text{ dus } \frac{\mu}{\alpha} \ell = n\pi, \mu = \frac{n\alpha\pi}{\ell} \text{ met gehele } n.$$

We kunnen ons beperken tot  $n \geq 0$ , want

$$C \sin \frac{-\mu}{\alpha} x \sin(-\mu t + \beta) = C \sin \frac{\mu}{\alpha} x \sin(\mu t - \beta),$$

dus de overgang van  $\mu$  op  $-\mu$  is door verandering in  $\beta$  op te vangen.

Dus we krijgen de oplossingen

$$y = C(n) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin\left(\frac{n\pi\alpha t}{\ell} + \beta(n)\right),$$

hetgeen door lineaire combinatie

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C(n) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin\left(\frac{n\pi\alpha t}{\ell} + \beta(n)\right)$$

oplevert. Men kan bewijzen, dat iedere oplossing van de snaarvergelijking,

die voldoet aan  $y = 0$  voor  $x = 0$  en  $x = \ell$  en alle  $t$ , in deze vorm is te brengen. De fysische interpretatie is, dat iedere term uit een stel bogen van een sinusoiden bestaat ( $\sin \frac{n\pi x}{\ell}$ ), die zelf weer harmonisch in de tijd oscilleren ( $\sin (\frac{n\pi \alpha t}{\ell} + \beta(n))$ ).

De trillingstijd  $T$  van de  $n^e$  trilling wordt gevonden uit

$$\frac{n\pi\alpha T}{\ell} = 2\pi, \quad \text{dus } T = \frac{2\ell}{n\alpha}.$$

De frequenties  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{n\alpha}{2\ell}$  vormen gehele veelvoud van de grondfrequentie  $\frac{\alpha}{2\ell}$ , behorende bij  $n = 1$  (grondtoon van de snaar);  $n = 2, 3, \dots$  geven de boventonen van de snaar.

Een veel moeilijker probleem is het om  $C(n)$  en  $\beta(n)$  uit te rekenen, als redelijke bijvoorwaarden gegeven zijn. Een redelijke bijvoorwaarde is het b.v. om de snaar bij  $t = 0$  een gegeven uitwijking te geven en hem dan vrij los te laten. Dit betekent voor  $t = 0$ , dat  $y = f(x)$  en  $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$  met gegeven functie  $f$ . Het probleem om uit deze gegevens de  $C(n)$  en  $\beta(n)$  te bepalen, kunnen wij hier niet oplossen (theorie der Fourierreeksen).

Een soortgelijke oplossingsmethode passen we toe op de diffusievergelijking

$$\frac{\partial c}{\partial t} = k \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

Probeer  $c = \varphi(t) \phi(x)$ , dan komt er  $\varphi' \phi = k \varphi \phi''$ , of

$$\frac{1}{k} \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\phi''}{\phi}.$$

Beide leden zijn weer constant. Stel

$$\frac{\varphi'}{k\varphi} = -\mu^2,$$

dus  $\varphi' + k\mu^2\varphi = 0$ , dus  $\varphi = Ae^{-k\mu^2 t}$ . Dan is

$$\frac{\phi''}{\phi} = -\mu^2,$$

dus  $\phi = B \cos \mu(x-\gamma)$ , dus

$$y = Ce^{-k\mu^2 t} \cos \mu(x-\gamma).$$

Hier kan  $\mu$  continu veranderlijk zijn. Dus we krijgen een oplossing

$$y = \int_0^{\infty} C(\mu) e^{-k\mu^2 t} \cos \mu(x-\gamma(\mu)) d\mu.$$

Het is nu vaak zo dat de concentratieverdeling  $c = f(x)$  voor  $t = 0$  gegeven is. Dit leidt tot het probleem  $C(\mu)$  en  $\gamma(\mu)$  zo te kiezen, dat

$$f(x) = \int_0^{\infty} C(\mu) \cos \mu(x - \gamma(\mu)) d\mu.$$

Ook dit probleem lossen we niet op (theorie der Fourier-integralen).

**Vb.3 Potentiaalvergelijking.** We beschouwen een onsamendrukbare stationnair stromende vloeistof. De beweging wordt beschreven door een locale snelheidsvector  $\underline{v}$  met componenten  $v_1, v_2, v_3$ , die functies zijn van de plaatscoördinaten  $x, y, z$ .

Beschouw een assenparallel volume-element met ribben  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ . Door de vlakken loodrecht op de  $x$ -as stroomt naar binnen

$$(v_1(x) - v_1(x + \Delta x)) \Delta y \Delta z,$$

hetgeen voor een klein volume-element gelijk gesteld kan worden aan

$$- \frac{\partial v_1}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Doen we hetzelfde met de andere zijvlakken, dan komt er in totaal

$$- \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z,$$

hetgeen bij een onsamendrukbare vloeistof = 0 moet zijn, dus

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0.$$

We nemen nu aan, dat de snelheidsvector een potentiaal  $u(x, y, z)$  heeft, dat is een functie van  $x, y, z$ , dusdanig dat

$$v_1 = - \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_2 = - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_3 = - \frac{\partial u}{\partial z}.$$

De betekenis van deze veronderstelling zullen we bij de vectoranalyse in het vierde semester nog nader beschouwen. We krijgen voor  $u$  dan de volgende D.V.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \text{ of afgekort } \Delta u = 0.$$

Deze D.V. van Laplace is zeer belangrijk. Alvorens deze vergelijking door separeren op te lossen, is het vaak aan te bevelen een transformatie van variabelen toe te passen, die is aangepast aan de fysische randvoorwaarden. Dit vergemakkelijkt nl. het aanpassen van de gevonden oplossingen aan deze randvoorwaarden. Laat b.v. de stroming plaats vinden in een cilindrische buis, dan komen er randvoorwaarden op de wand van de buis. Voeren we nu cylindercoördinaten in met de  $z$ -as in de as van de buis

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\},$$

dan hebben we het voordeel, dat de randvoorwaarden gegeven worden voor  $r = \text{constant}$ . Zetten we  $\Delta u$  om in cylindercoördinaten, dan komt er, zoals in het eerste jaar is afgeleid:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

We gaan nu separeren, d.w.z. we stellen  $u = R(r) \Phi(\varphi) Z(z)$ , dan leidt  $\Delta u = 0$  tot

$$R'' \Phi Z + \frac{1}{r^2} R \Phi'' Z + R \Phi Z'' + \frac{1}{r} R' \Phi Z = 0.$$

Deling door  $R \Phi Z$  geeft

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = 0,$$

of

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -r^2 \frac{R''}{R} - r^2 \frac{Z''}{Z} - r \frac{R'}{R}.$$

Het linkerlid hangt alleen van  $\varphi$  af, het rechterlid alleen van  $r$  en  $z$ . Dus zijn beide leden constant:

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2, \quad \Phi = A \sin(\lambda\varphi + \gamma).$$

Als we  $\varphi$  met  $2\pi$  laten toenemen, zijn we in de ruimte op hetzelfde punt aangeland en moet  $\Phi$  weer dezelfde waarde hebben. Hieruit volgt, dat  $\lambda = n$  (geheel). Dus

$$\frac{R''}{R} - \frac{n^2}{r^2} + \frac{Z''}{Z} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = 0,$$

$$\frac{Z''}{Z} = -\frac{R''}{R} + \frac{n^2}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{R'}{R}.$$

Het linkerlid hangt alleen van  $z$  af, het rechterlid alleen van  $r$ . Beide leden zijn dus constant. Neem de constante positief =  $\alpha^2$  (ook een negatieve constante leidt tot redelijke oplossingen, die we hier echter niet zullen beschouwen). We krijgen

$$Z = B_1 e^{\alpha z} + B_2 e^{-\alpha z}.$$

Tenslotte houden we nog over

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} = 0,$$

$$r^2 R'' + r R' + (\alpha^2 r^2 - n^2) R = 0.$$

Dit lijkt al op een vergelijking van Bessel. De substitutie  $\alpha r = s$  leidt echter tot

$$s^2 \frac{d^2 R}{ds^2} + s \frac{dR}{ds} + (s^2 - n^2) R = 0,$$

hetgeen een D.V. van Bessel van orde  $n$  is.

Laat  $R_n(s)$  en  $R_n^*(s)$  onafhankelijke oplossingen van deze vergelijking zijn. Dan vinden we als oplossingen van de D.V. van Laplace:

$$(B_1 e^{\alpha z} + B_2 e^{-\alpha z})(C_1 R_n(\alpha r) + C_2 R_n^*(\alpha r)) \sin(n\varphi + \gamma).$$

Een andere transformatie is die op bolcoördinaten:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} .$$

Dan gaat  $\Delta u$  over in

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} .$$

We beschouwen eerst de oplossingen die alleen van  $r$  afhangen :  
 $u = u(r)$ . Deze voldoen aan de D.V.

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0 .$$

Noem  $\frac{du}{dr} = v$ , dan komt er  $\frac{dv}{dr} + \frac{2}{r} v = 0$ ,

$$\frac{dv}{v} = - 2 \frac{dr}{r} ,$$

$$\frac{du}{dr} = v = \frac{C}{r^2} ,$$

$$u = \frac{A}{r} + B .$$

Speciaal is dus  $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  een oplossing van  $\Delta u = 0$ . Eveneens

voldoet  $u = \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}} = \frac{1}{\rho}$ , waarin  $\rho$  de afstand van het

variabele punt  $(x, y, z)$  tot het vaste punt  $(\alpha, \beta, \gamma)$  is.

Deze oplossing speelt een belangrijke rol in de potentiaaltheorie.

We gaan nu separeren:  $u = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$ :

$$R'' \Theta \Phi + \frac{1}{r^2} R \Theta'' \Phi + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R \Theta \Phi'' + \frac{2}{r} R' \Theta \Phi + \frac{\cot \theta}{r^2} R \Theta' \Phi = 0 ,$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{2}{r} \frac{R'}{R} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\Theta'}{\Theta} = 0 .$$

Analoog als bij cylindercoördinaten vinden we

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = - n^2 \quad (n \text{ geheel}), \quad \Phi = A \sin (n\varphi + \gamma) .$$

Nu is

$$r^2 \frac{R''}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} + 2r \frac{R'}{R} + \cot \theta \frac{\Theta'}{\Theta} = 0 ,$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} = -\frac{\theta''}{\theta} - \cot \theta \frac{\theta'}{\theta} + \frac{n^2}{\sin^2 \theta}.$$

Het linkerlid hangt alleen van  $r$  af, het rechterlid alleen van  $\theta$ . Dus zijn beide constant =  $\lambda$ :

$$r^2 R'' + 2r R' - \lambda R = 0.$$

Probeer  $R = r^q$ ,  $R' = qr^{q-1}$ ,  $R'' = q(q-1)r^{q-2}$ . Substitutie geeft

$$q(q-1)r^q + 2qr^q - \lambda r^q = 0,$$

$$q^2 + q - \lambda = 0.$$

Stel dus  $\lambda = p(p+1)$  met  $p$  reëel  $\geq 0$ , dan wordt de vergelijking

$$q^2 + q - p^2 - p = 0,$$

$$(q-p)(q+p+1) = 0.$$

Dus we vinden de oplossingen  $R = r^p$  en  $R = r^{-p-1}$ . De tweede oplossing is echter singulier in de oorsprong. Voor  $\theta$  krijgen we nu de D.V.

$$\theta'' + \theta' \cot \theta + \left\{ p(p+1) - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right\} \theta = 0.$$

Stel nu  $\cos \theta = v$ ,  $\frac{dv}{d\theta} = -\sin \theta$ ,

$$\theta' = -\frac{d\theta}{dv} \sin \theta, \quad \theta'' = \frac{d^2\theta}{dv^2} \sin^2 \theta - \frac{d\theta}{dv} \cos \theta,$$

$$\frac{d^2\theta}{dv^2} \sin^2 \theta - \frac{d\theta}{dv} \cos \theta - \frac{d\theta}{dv} \cos \theta + \left\{ p(p+1) - \frac{n^2}{\sin^2 \theta} \right\} \theta = 0,$$

$$(1) \quad (1-v^2) \frac{d^2\theta}{dv^2} - 2v \frac{d\theta}{dv} + \left\{ p(p+1) - \frac{n^2}{1-v^2} \right\} \theta = 0.$$

Het geval  $n = 0$  geeft de D.V. van Legendre:

$$(1-v^2) \frac{d^2\theta}{dv^2} - 2v \frac{d\theta}{dv} + p(p+1) \theta = 0,$$

die met machtreeksubstitutie op te lossen is. Oplossingen heten Legendre-functies.

Het algemene geval (1) behandelen we als volgt:

Stel  $\theta = (1-v^2)^{\frac{1}{2}n} z$ , dan is

$$\frac{d\theta}{dv} = (1-v^2)^{\frac{1}{2}n} \frac{dz}{dv} - nv (1-v^2)^{\frac{1}{2}n-1} z,$$



$$\frac{d^2 \theta}{dv^2} = (1-v^2)^{\frac{1}{2}n} \frac{d^2 z}{dv^2} - 2nv(1-v^2)^{\frac{1}{2}n-1} \frac{dz}{dv} - n(1-v^2)^{\frac{1}{2}n-1} z + \\ + n(n-2)v^2(1-v^2)^{\frac{1}{2}n-2} z.$$

Substitutie in (1) geeft

$$(1-v^2)^{\frac{1}{2}n+1} \frac{d^2 z}{dv^2} - 2(n+1)v(1-v^2)^{\frac{1}{2}n} \frac{dz}{dv} + \{p(p+1) - n(n+1)\} (1-v^2)^{\frac{1}{2}n} z = 0,$$

dus na deling door  $(1-v^2)^{\frac{1}{2}n}$

$$(1-v^2) \frac{d^2 z}{dv^2} - 2(n+1)v \frac{dz}{dv} + \{p(p+1) - n(n+1)\} z = 0.$$

We nemen nu de D.V. van Legendre

$$(1-v^2) \frac{d^2 y}{dv^2} - 2v \frac{dy}{dv} + p(p+1)y = 0,$$

en differentiëren deze  $n$  maal. Nu is

$$\frac{d^n}{dv^n} \left\{ (1-v^2) \frac{d^2 y}{dv^2} \right\} = (1-v^2) \frac{d^{n+2} y}{dv^{n+2}} - 2nv \frac{d^{n+1} y}{dv^{n+1}} - n(n-1) \frac{d^n y}{dv^n},$$

$$\frac{d^n}{dv^n} \left\{ -2v \frac{dy}{dv} \right\} = -2v \frac{d^{n+1} y}{dv^{n+1}} - 2n \frac{d^n y}{dv^n},$$

$$\frac{d^n}{dv^n} \{ p(p+1)y \} = p(p+1) \frac{d^n y}{dv^n}.$$

Noemen we  $w = \frac{d^n y}{dv^n}$ , dan komt er

$$(1-v^2) \frac{d^2 w}{dv^2} - 2(n+1)v \frac{dw}{dv} + \{p(p+1) - n(n+1)\} w = 0,$$

hetgeen dezelfde D.V. is als die voor  $z$ .

We vinden dus, dat

$$\theta = (1-v^2)^{\frac{1}{2}n} \frac{d^n y}{dv^n},$$

waarin  $y$  een Legendre-functie  $P_p(v)$  is. Dus

$$u = r^p \sin^n \theta P_p^{(n)}(\cos \theta) \sin(n\varphi + \gamma),$$

met  $p$  een reële parameter en  $n$  een natuurlijk getal. Hierin is

$$P_p^{(n)}(\cos \theta) = \left[ \frac{d^n P_p(v)}{dv^n} \right]_{v=\cos \theta}$$

Speciaal is voor  $n = 0$ :

$$u = r^p P_p(\cos \theta).$$

## HOOFDSTUK II NUMERIEKE WISKUNDE

### §.1 Interpolatie.

Vaak heeft men bij functies  $f(x)$  niets anders beschikbaar dan een tabel, waarin voor een rij waarden van het argument  $x$  de bijbehorende functiewaarde  $f(x)$  wordt gegeven. Dikwijls heeft men de functiewaarde echter nodig voor een waarde van  $x$ , die niet in de tabel voorkomt. Als de functie analytisch is gegeven, kan men natuurlijk trachten de functiewaarden zelf uit de definitie te berekenen. Men doet dan hetzelfde werk, als ook de maker van de tabel heeft gedaan; van de tabel heeft men dan echter geen enkel nut.

Analoge opmerkingen kunnen worden gemaakt over functies, die empirisch worden bepaald tussen fysische grootheden. Als men daarvan een tabel heeft, zou men voor een niet in de tabel voorkomend verband, dit zelf door metingen kunnen vaststellen.

We willen echter van de tabel gebruik maken en het hulpmiddel daartoe is interpolatie. We kunnen zo nooit tot een exacte oplossing komen van de vraag hoe de functiewaarde is, want als men  $f(x)$  geeft in een eindig stel waarden  $x_1, \dots, x_n$  van  $x$ , dan is daardoor  $f(x)$  voor andere waarden van  $x$  niet vastgelegd. Als de functie echter glad verloopt en de gegeven waarden  $x_1, \dots, x_n$  niet te ver uit elkaar liggen, mogen we verwachten, dat we tot een redelijke benadering van  $f(x)$  kunnen komen voor waarden van  $x$ , die tussen de gegeven waarden inliggen. We nemen dan aan, dat we  $f(x)$  redelijk kunnen benaderen met een veelterm van voldoende hoge graad. We kiezen deze veelterm dusdanig, dat hij voor een aantal der  $x_k$  de juiste functiewaarde geeft.

We beginnen met het eenvoudigste geval, nl. met een lineaire functie. Deze is door twee waarden vastgelegd. Neem dus twee punten  $x_1$  en  $x_2$  en stel  $f(x_1) = y_1$  en  $f(x_2) = y_2$ . Voor  $x$  tussen  $x_1$  en  $x_2$  nemen we een lineaire benadering

$$y = ax + b.$$

$$\text{Nu moet } \left. \begin{array}{l} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{array} \right\}$$

zijn en hieruit volgt  $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ ,

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

$$b = y_1 - ax_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1},$$

$$\text{dus de functie is } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Hiermee kan voor  $x$  tussen  $x_1$  en  $x_2$  de benaderde functiewaarde worden berekend; uiteraard ook voor andere waarden van  $x$ , maar het is te verwachten, dat de nauwkeurigheid dan minder groot zal zijn.

In principe kan bovenstaand procédé voor veeltermen van hogere graad worden toegepast en wel voor veeltermen van graad  $n$  met  $n+1$  waarden  $x_1, \dots, x_{n+1}$ . We willen het echter wat overzichtelijker doen.

De formule voor lineaire interpolatie is in  $y_1$  en  $y_2$  homogeen lineair:

$$y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Aan deze formule zien we duidelijk, dat het voor  $x=x_1$  en  $x=x_2$  uitkomt, want voor  $x=x_1$  wordt de coëfficiënt van  $y_1$  één en die van  $y_2$  nul en voor  $x=x_2$  worden de coëfficiënten resp. nul en één.

Dit kunnen we voor hogere graden nabootsen. Laat de functiewaarden voor  $x_1, \dots, x_{n+1}$  resp.  $y_1, \dots, y_{n+1}$  zijn. We proberen een interpolatieformule van de vorm

$$y_1 \alpha_1 + y_2 \alpha_2 + \dots + y_{n+1} \alpha_{n+1},$$

waarin  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$  veeltermen in  $x$  zijn, dusdanig, dat  $\alpha_k$  bij substitutie van  $x = x_k$  in één overgaat en bij substitutie van de overige  $x_j$  in nul. Dit laatste is te bereiken door te nemen

$$(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \dots (x-x_{n+1});$$

om dan ook nog één te krijgen voor  $x = x_k$ , moeten we dit delen door

$$(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_{n+1}).$$

We vinden zo de interpolatieformule van Lagrange:

$$\sum_{k=1}^{n+1} y_k \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_{n+1})}{(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_{n+1})},$$

hetgeen inderdaad een veelterm van hoogstens de  $n^e$  graad is.

We kunnen nu ook zeggen, dat dit de veelterm van hoogstens de  $n^e$  graad is, die voor  $x_1, \dots, x_{n+1}$  de waarden  $y_1, \dots, y_{n+1}$  aanneemt.

Stel nl. dat er twee veeltermen  $P(x)$  en  $Q(x)$  van hoogstens de  $n^e$  graad zijn, zo dat

$$P(x_k) = y_k, \quad Q(x_k) = y_k \quad \text{voor } k = 1, \dots, n+1.$$

We vormen dan  $R(x) = P(x) - Q(x)$ , hetgeen ook een veelterm van hoogstens de  $n^e$  graad is, waarvoor geldt

$$R(x_k) = 0 \quad \text{voor } k = 1, \dots, n+1.$$

Uit de algebra is echter bekend, dat een veelterm van hoogstens de  $n^e$  graad hoogstens  $n$  verschillende nulpunten kan hebben, tenzij deze veelterm identiek nul is. Inderdaad, als  $x_k$  een nulpunt van  $R(x)$  is, is  $R(x)$  door  $x-x_k$  deelbaar. Dus

$$R(x) = a(x - x_1) \dots (x - x_{n+1}),$$

hetgeen echter een graad  $> n$  heeft, tenzij  $a = 0$ .

Dus  $R(x) = 0$ , dus  $P(x) = Q(x)$ , dus er kan niet meer dan één polynoom zijn, dat aan de gestelde eisen voldoet, en dit is het polynoom, dat door de interpolatieformule van Lagrange wordt gegeven.

Ook deze formule is voor numerieke toepassing nog tamelijk gecompliceerd. Men zou kunnen denken, dat dit onvermijdelijk is, omdat er maar één polynoom bestaat, dat aan de gestelde eisen voldoet. Door de berekening op een andere wijze in te richten kan hetzelfde resultaat echter in een overzichtelijker vorm worden verkregen.

Laat  $g_n(x)$  het polynoom van hoogstens de  $n^e$  graad zijn, waarvoor  $g_n(x_k) = y_k$  voor  $k = 1, \dots, n+1$  en  $g_{n-1}(x)$  het polynoom van hoogstens de  $(n-1)^e$  graad, waarvoor  $g_{n-1}(x_k) = y_k$  voor  $k = 1, \dots, n$ . Dan is  $h(x) = g_n(x) - g_{n-1}(x)$  een polynoom van hoogstens de graad  $n$ , waarvoor  $h(x_k) = 0$  voor  $k = 1, \dots, n$ . Dus

$$h(x) = c(x - x_1) \dots (x - x_n) \text{ met constante } c.$$

Deze  $c$  noemen we  $[y_1, y_2, \dots, y_{n+1}]$ . Dan is

$$(1) \quad g_n(x) = g_{n-1}(x) + [y_1, y_2, \dots, y_{n+1}] (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

We herhalen nu hetzelfde procédé met  $g_{n-1}(x)$  en zetten dit steeds voort en komen zo tot de interpolatieformule van Newton

$$(2) \quad g_n(x) = [y_1] + [y_1, y_2](x-x_1) + [y_1, y_2, y_3](x-x_1)(x-x_2) + \dots + [y_1, y_2, \dots, y_{n+1}](x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n).$$

Uiteraard hebben we pas iets aan deze formule, als we in staat zijn de erin voorkomende constanten (de uitdrukkingen tussen rechte haken) uit te rekenen.

We hadden het afbraakproces ook in een andere volgorde kunnen uitvoeren, door b.v. bij de eerste stap in  $g_n(x)$  niet eerst  $x_{n+1}$ , maar een andere  $x_k$  weg te laten. Bedenken we echter, dat uit (1) volgt, dat  $[y_1, \dots, y_{n+1}]$  de coëfficiënt van  $x^n$  in  $g_n(x)$  is, die volkomen bepaald is en onafhankelijk van het gekozen afbraakproces, dan leiden we daaruit af, dat de constanten  $[y_1, \dots, y_k]$  niet afhangen van de volgorde, waarin de  $y$ 's hierin voorkomen, zodat b.v.

$$[y_1, y_2, \dots, y_k] = [y_k, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}].$$

Dit gebruiken we om deze coëfficiënten uit te rekenen. We gaan uit van  $g_{n-2}(x)$  met  $g_{n-2}(x_k) = y_k$  voor  $k = 2, 3, \dots, n$ . Hieruit kunnen we  $g_n(x)$  krijgen door eerst  $x_1$  en dan  $x_{n+1}$  toe te voegen:

$$g_n(x) = g_{n-2}(x) + [y_2, y_3, \dots, y_n, y_1](x-x_2)(x-x_3) \dots (x-x_n) + \\ + [y_2, y_3, \dots, y_n, y_1, y_{n+1}](x-x_2)(x-x_3) \dots (x-x_n)(x-x_1).$$

We kunnen echter ook eerst  $x_{n+1}$  en dan  $x_1$  toevoegen:

$$g_n(x) = g_{n-2}(x) + [y_2, y_3, \dots, y_n, y_{n+1}](x-x_2)(x-x_3) \dots (x-x_n) + \\ + [y_2, y_3, \dots, y_n, y_{n+1}, y_1](x-x_2)(x-x_3) \dots (x-x_n)(x-x_{n+1}).$$

Bedenken we nu dat

$$[y_2, y_3, \dots, y_n, y_1, y_{n+1}] = [y_2, y_3, \dots, y_n, y_{n+1}, y_1] = \\ = [y_1, y_2, \dots, y_{n+1}] \text{ en } [y_2, y_3, \dots, y_n, y_1] = [y_1, y_2, \dots, y_n],$$

dan vinden we door aftrekking

$$[y_1, \dots, y_{n+1}](x-x_2) \dots (x-x_n)(x_{n+1} - x_1) + \\ + [y_1, \dots, y_n](x-x_2) \dots (x-x_n) - [y_2, \dots, y_{n+1}](x-x_2) \dots (x-x_n) = 0,$$

$$\text{dus } [y_1, y_2, \dots, y_{n+1}] = \frac{[y_2, y_3, \dots, y_{n+1}] - [y_1, y_2, \dots, y_n]}{x_{n+1} - x_n}.$$

Dit geldt voor iedere waarde van  $n$  en geeft zo de weg tot successievelijke bepaling van de haakuitdrukkingen:

$$[y_j] = y_j,$$

$$[y_j, y_{j+1}] = \frac{[y_{j+1}] - [y_j]}{x_{j+1} - x_j},$$

$$[y_j, y_{j+1}, y_{j+2}] = \frac{[y_{j+1}, y_{j+2}] - [y_j, y_{j+1}]}{x_{j+2} - x_j},$$

.....

$$[y_j, y_{j+1}, \dots, y_{j+k}] = \frac{[y_{j+1}, \dots, y_{j+k}] - [y_j, \dots, y_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j}.$$

Als we  $y_j = f(x_j)$  schrijven, dan is

$$[y_j, y_{j+1}] = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}, \text{ hetgeen vroeger een differentiequotient}$$

genoemd is. In de numerieke wiskunde gebruikt men een andere term, nl. gedeelde differentie. Een verschil van functiewaarden, zoals  $f(x_{j+1}) - f(x_j)$  heet een differentie. Deze wordt nu door een verschil van argumentwaarden gedeeld, vandaar gedeelde differentie. Men kan ze als volgt handig in een tabel rangschikken:

$x_1$	$y_1$				
		$[y_1, y_2]$			
$x_2$	$y_2$		$[y_1, y_2, y_3]$		
		$[y_2, y_3]$		$[y_1, y_2, y_3, y_4]$	
$x_3$	$y_3$		$[y_2, y_3, y_4]$		
		$[y_3, y_4]$		$[y_2, y_3, y_4, y_5]$	
$x_4$	$y_4$		$[y_3, y_4, y_5]$		
		$[y_4, y_5]$			
$x_5$	$y_5$				
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

Zo bijvoorbeeld voor de functie  $x^3$  met  $x = 0, 1, 4, 3, 6, 7$ :

0	0					
		1				
1	1		5			
		21		1		
4	64		8		0	
		37		1		0
3	27		13		0	
		63		1		
6	216		16			
		127				
7	343					

Met behulp van het schema van gedeelde differenties zijn de coëfficiënten in de interpolatieformule van Newton uit te rekenen. Elke volgende term uit deze formule ontstaat door een basispunt  $x_k$  (met functiewaarde  $y_k$ ) toe te voegen. Als men dus  $g_n(x)$  voor een zekere waarde van  $n$  berekend heeft en men wil de nauwkeurigheid vergroten door basispunten toe te voegen, dan behoeft men slechts aan de formule enkele termen toe te voegen. Bij de formule van Lagrange zou men helemaal opnieuw moeten beginnen!

We beschouwen nu het belangrijke speciale geval, dat de basispunten equidistant zijn; d.w.z. het verschil van twee opeenvolgende basispunten is constant. Het in verschillende volgordes gebruiken der basispunten en omvormen van de gevonden formules leidt dan tot een aantal uit de literatuur bekende interpolatieformules, zoals die van Gauss, Stirling, Steffensen, Bessel, Everett, die we hier niet zullen bespreken.

We nemen nu aan dat  $x_1, \dots, x_{n+1}$  in de natuurlijke volgorde genomen zijn, dus  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ . We veronderstellen ze nu verder equidistant, dan is  $x_{k+1} - x_k = w$  constant. De in de formules voor de haakuitdrukkingen voorkomende noemers zijn nu in  $w$  uit te drukken. We kunnen dus in plaats van met gedeelde differenties nu met gewone differenties werken, mits we het effect van de noemers in de formule verwerken.

De gewone differenties worden gedefinieerd door

$$(y_j) = y_j,$$

$$(y_j, y_{j+1}) = (y_{j+1}) - (y_j),$$

$$(y_j, y_{j+1}, y_{j+2}) = (y_{j+1}, y_{j+2}) - (y_j, y_{j+1}),$$

.....

$$(y_j, y_{j+1}, \dots, y_{j+k}) = (y_{j+1}, \dots, y_{j+k}) - (y_j, \dots, y_{j+k-1}).$$

Nu geldt:

$$[y_j, \dots, y_{j+k}] = \frac{1}{k!w^k} (y_j, \dots, y_{j+k}).$$

We bewijzen dit door volledige inductie naar k. Voor k = 0 is het evident. Als het voor een zekere k juist is, dan geldt voor k + 1:

$$\begin{aligned} [y_j, \dots, y_{j+k+1}] &= \frac{[y_{j+1}, \dots, y_{j+k+1}] - [y_j, \dots, y_{j+k}]}{x_{j+k+1} - x_j} = \\ &= \frac{1}{(k+1)w} \cdot \frac{1}{k!w^k} \{ (y_{j+1}, \dots, y_{j+k+1}) - (y_j, \dots, y_{j+k}) \} = \\ &= \frac{1}{(k+1)!w^{k+1}} (y_j, \dots, y_{j+k+1}). \end{aligned}$$

Noemen we nu  $x = x_1 + pw$ , dan is, wegens  $x_j = x_1 + (j-1)w$ ,

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k) = pw \cdot (p-1)w \cdot (p-2)w \dots (p-k+1)w = w^k p(p-1)\dots(p-k+1).$$

Vullen we dit alles in (2) in, dan komt er

$$\begin{aligned} \xi_n(x) &= (y_1) + \frac{1}{1!w} (y_1, y_2)wp + \frac{1}{2!w^2} (y_1, y_2, y_3)w^2 p(p-1) + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!w^n} (y_1, \dots, y_{n+1})w^n p(p-1) \dots (p-n+1), \end{aligned}$$

of, met binomiaalcoëfficiënten geschreven:

$$\xi_n(x) = (y_1) + (y_1, y_2) \binom{p}{1} + (y_1, y_2, y_3) \binom{p}{2} + \dots + (y_1, \dots, y_{n+1}) \binom{p}{n}.$$

Dit is de z.g. voorwaartse interpolatieformule van Gregory-Newton.

De formule is geldig voor equidistante basispunten, die in de natuurlijke volgorde  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$  worden genomen. De naam "voorwaarts" heeft

betrekking op de plaats in het differentieschema van de in de formule voorkomende differenties (het schema van gewone differenties wordt op analoge wijze opgeschreven als dat van de gedeelde differenties).

Er bestaan tabellen van de binomiaalcoëfficiënten; deze treden zoals bekend ook op in de binomiaalreeks

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \dots$$

We keren terug tot het algemene geval van de formule van Newton. De interpolatieformule geeft niet het exacte resultaat voor de functiewaarde. Laat de fout  $R_n(x)$  heten, dus

$$f(x) = g_n(x) + R_n(x).$$

We willen trachten iets naders over de fout te weten te komen. Hiertoe nemen we even een vaste waarde  $x = a$  aan, en voegen  $a$  als basispunt aan de interpolatie toe en bepalen dus het polynoom  $g_{n+1}(x)$ , dat behalve aan  $g_{n+1}(x_k) = f(x_k)$  voor  $k = 1, \dots, n+1$  ook nog aan  $g_{n+1}(a) = f(a)$  voldoet:

$$g_{n+1}(x) = g_n(x) + [y_1, \dots, y_{n+1}, f(a)](x-x_1) \dots (x-x_{n+1}).$$

Substitutie van  $x = a$  hierin geeft

$$f(a) = g_n(a) + [y_1, \dots, y_{n+1}, f(a)](a-x_1) \dots (a-x_{n+1}),$$

dus

$$(3) \quad R_n(a) = [y_1, \dots, y_{n+1}, f(a)](a-x_1) \dots (a-x_{n+1}).$$

Nu geldt de stelling, dat, als  $\varphi(x)$  een differentieerbare functie is met  $\varphi(b) = \varphi(c) = 0$ , er één  $\xi$  tussen  $b$  en  $c$  bestaat met  $\varphi'(\xi) = 0$ . Immers volgens de middelwaardstelling is er een  $\xi$  tussen  $b$  en  $c$  met

$$\varphi'(\xi) = \frac{\varphi(c) - \varphi(b)}{c - b} = 0.$$

We nemen nu aan, dat  $f(x)$   $n+1$  maal differentieerbaar is. Dan geldt hetzelfde voor  $R_{n+1}(x) = f(x) - g_{n+1}(x)$ . Verder heeft  $R_{n+1}(x)$  minstens  $n+2$  nulpunten, nl.  $x_1, \dots, x_{n+1}, a$ . Tussen elk tweetal opeenvolgende van deze nulpunten ligt een nulpunt van de afgeleide, dus  $R_{n+1}(x)$  heeft minstens  $n+1$  nulpunten. Zo heeft  $R_{n+1}''(x)$  minstens  $n$  nulpunten enz.  $R_{n+1}^{(n+1)}(x)$  heeft nog minstens één nulpunt  $\xi$ , dat gelegen is tussen de uiterste waarden van  $x_1, \dots, x_{n+1}, a$ . Voor deze  $\xi$  geldt dus

$$f^{(n+1)}(\xi) = g_{n+1}^{(n+1)}(\xi).$$

Omdat  $g_n(x)$  een polynoom van de  $n$ e graad is, is  $g_n^{(n+1)}(x) = 0$ , dus

$$g_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)! [y_1, \dots, y_{n+1}, f(a)],$$

$$\text{dus} \quad R_n(a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (a-x_1) \dots (a-x_{n+1}).$$

Vervangen we  $a$  nu weer door een veranderlijke  $x$ , die tussen de uiterste waarden van  $x_1, \dots, x_{n+1}$  ligt, dan geldt

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_1) \dots (x-x_{n+1}),$$

waarbij  $\xi$  (afhankelijk van  $x$ ) ook tussen de uiterste waarden van  $x_1, \dots, x_{n+1}$  ligt.



Dit is de formule voor de rest bij de interpolatieformule van de  $n^e$  graad. Hieruit kan een schatting van de gemaakte fout verkregen worden door  $f^{(n+1)}(\xi)$  te vervangen door de ongunstigste waarde van  $f^{(n+1)}(x)$  ( $\xi$  zal in het algemeen niet bekend zijn). Dit kan natuurlijk alleen toegepast worden als we  $f^{(n+1)}(x)$  voldoende goed beheersen. Dit is in de praktijk vaak niet het geval. Men beoordeelt de zaak dan naar het differentieschema. Men gaat zo lang door met het maken van differenties tot ze voldoende klein geworden zijn.

Als  $f(x)$  zelf een polynoom van de  $n^e$  graad is, is  $f^{(n+1)}(x)$  identiek nul, dus ook  $R_n(x)$  identiek nul. Dus  $f(x) = g_n(x)$ ; dit was ook te verwachten. Uit formule (3) volgt, dat in dat geval ook  $[y_1, \dots, y_{n+2}] = 0$ . De  $(n+1)^e$  gedeelde differenties van een polynoom van de  $n^e$  graad zijn dus nul. Bij equidistante basispunten in natuurlijke volgorde geldt hetzelfde voor gewone differenties.

Behalve de afwijking afkomstig van het feit, dat de interpolatieformule niet exact de functie weergeeft, is er in de praktijk nog een tweede bron van afwijkingen. In een tabel staan de waarden van een functie in een bepaald aantal decimalen aangegeven, d.w.z. er staat niet de werkelijke functiewaarde, maar een benadering. Door van deze benaderingen differenties te maken en door deze in de interpolatieformule te substitueren kan accumulatie van afrondingsfouten optreden. We zullen de invloed van deze afronding niet nagaan. We merken alleen op, dat terwijl aan de ene kant het vergroten van de orde der differenties die worden beschouwd (vergroting van  $n$  dus) de interpolatieformule nauwkeuriger maakt, aan de andere kant de invloed van de afrondingsfouten bij vergroting van  $n$  ook groter wordt en het gunstige effect zou kunnen bederven.

Tenslotte merken we nog op, dat er in de literatuur diverse notaties voor differenties bestaan. We zullen deze notaties niet alle bespreken, maar slechts één der gebruikelijkste vermelden.

Men werkt met een differentie-operator  $\Delta$ . Herhaalde toepassing van deze operator wordt met een exponent aangeduid, dus  $\Delta^3$  betekent dat de operator  $\Delta$  drie maal achter elkaar wordt toegepast. Als de basispunten met indices genummerd zijn (zoals wij tot nu toe ook gedaan hebben), dus b.v.  $x_1, x_2, \dots$  (eventueel ook negatieve indices), dan wordt de plaats waar de operator toegepast wordt ook met een index bij  $\Delta$  aangeduid (zonder  $x$  dus). Zo definiëren we

$$\Delta_k f = f(x_{k+1}) - f(x_k).$$

Als er geen verwarring kan ontstaan over de functie  $f$ , waarvan de differentie wordt genomen, schrijven we eenvoudig  $\Delta_k$ . Schrijven we bovendien  $f(x_k) = y_k$ , dan komt er

$$\Delta_k = y_{k+1} - y_k.$$

Herhaling geeft

$$\begin{aligned} \Delta_k^2 &= \Delta_{k+1} - \Delta_k = y_{k+2} - y_{k+1} - (y_{k+1} - y_k) = \\ &= y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_k^3 &= \Delta_{k+1}^2 - \Delta_k^2 = y_{k+3} - 2y_{k+2} + y_{k+1} - y_{k+2} + 2y_{k+1} - y_k = \\ &= y_{k+3} - 3y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k.\end{aligned}$$

In de differentietabel gaat de zaak er als volgt uitzien:

$x_1$	$y_1$				
		$\Delta_1$			
$x_2$	$y_2$		$\Delta_1^2$		
		$\Delta_2$		$\Delta_1^3$	
$x_3$	$y_3$		$\Delta_2^2$		$\Delta_1^4$
		$\Delta_3$		$\Delta_2^3$	
$x_4$	$y_4$		$\Delta_3^2$		$\Delta_2^4$
		$\Delta_4$		$\Delta_3^3$	
$x_5$	$y_5$		$\Delta_4^2$		$\Delta_3^4$

De  $\Delta$ 's heten voorwaartse differenties. Men heeft ook achterwaartse en centrale differenties.

Met  $\Delta$ 's geschreven ziet de formule van Gregory-Newton er als volgt uit:

$$S_n(x) = y_1 + \Delta_1 \binom{p}{1} + \Delta_1^2 \binom{p}{2} + \Delta_1^3 \binom{p}{3} + \dots + \Delta_1^n \binom{p}{n}.$$

Neemt men hierin  $p = n$ , dan komt er

$$y_{n+1} = y_1 + \binom{n}{1} \Delta_1 + \binom{n}{2} \Delta_1^2 + \dots + \Delta_1^n.$$

Hiermee is een willekeurige  $y_k$  (met  $k \geq 1$ ) in de voorwaartse differenties met onderindex 1 uitgedrukt (we kunnen  $y_1 = \Delta_1^0$  als differentie van de nulde orde opvatten). Omgekeerd geldt

$$\Delta_1^n = y_{n+1} - \binom{n}{1} y_n + \binom{n}{2} y_{n-1} - \binom{n}{3} y_{n-2} + \dots + (-1)^n y_1,$$

zoals gemakkelijk met volledige inductie naar  $n$  te bewijzen is.

## §.2 Differentievergelijkingen.

In vele gevallen kan een probleem, dat bij chemische reacties optreedt beter beschreven worden door een veranderlijke, die met sprongen varieert (dus discrete waarden aanneemt), dan door een die continu varieert. Als dat voor de onafhankelijk veranderlijke het geval is, komt een differentievergelijking de plaats van de differentiaalvergelijking innemen.

Differentievergelijkingen treden ook op, als men numeriek een benaderde oplossing van een differentiaalvergelijking tracht te vinden. Dit is analoog met de benadering van een integraal door een som.

Een voorbeeld, waarbij we rechtstreeks tot een differentievergelijking komen wordt geleverd door tegenstroom extractiesystemen van vloeistoffen met een serie extractietanks. Laat deze tanks van links naar rechts met de getallen 1, ..., N genummerd zijn. Van links naar rechts stroomt het te extraheren materiaal en wel  $y_n$  van tank n naar tank n+1 van de geëxtraheerde stof;  $y_0$  stroomt in en  $y_N$  uit het systeem. Van rechts naar links stroomt de extraherende vloeistof en wel  $Y_n$  van tank n naar tank n-1 van de geëxtraheerde stof;  $Y_{N+1}$  stroomt in en  $Y_1$  uit het systeem. Er wordt aangenomen dat het proces stationnair is. In tank n stroomt  $y_{n-1}$  van links en  $Y_{n+1}$  van rechts in; in evenwicht gaat dit over in  $y_n$  en  $Y_n$ , zodat  $Y_n = k y_n$  met constante k;  $Y_n$  gaat naar links,  $y_n$  naar rechts. In tank n stroomt in  $y_{n-1} + Y_{n+1}$  en uit  $y_n + Y_n$ . Dus in stationnaire toestand:

$$\begin{aligned} y_{n-1} + Y_{n+1} &= y_n + Y_n, \\ y_{n-1} + k y_{n+1} &= y_n + k y_n, \\ y_{n+1} - \left(1 + \frac{1}{k}\right) y_n + \frac{1}{k} y_{n-1} &= 0 \\ \text{Evenzo: } Y_{n+1} - \left(1 + \frac{1}{k}\right) Y_n + \frac{1}{k} Y_{n-1} &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} y_{n-1} + Y_{n+1} &= y_n + Y_n, \\ y_{n-1} + k y_{n+1} &= y_n + k y_n, \\ y_{n+1} - \left(1 + \frac{1}{k}\right) y_n + \frac{1}{k} y_{n-1} &= 0 \\ Y_{n+1} - \left(1 + \frac{1}{k}\right) Y_n + \frac{1}{k} Y_{n-1} &= 0 \end{aligned}} \right\} \text{ . Noem } \frac{1}{k} = \alpha.$$

Dit is een differentievergelijking, hoewel er in deze formulering geen differenties voorkomen. Maar met de resultaten van het eind van §.1 kan de vergelijking ook met differenties worden geschreven.

Bovenstaande vergelijking is lineair en homogeen met constante coëfficiënten. De algemene lineaire homogene differentievergelijking van de orde k ziet er als volgt uit:

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + a_2 y_{n+k-2} + \dots + a_k y_n = 0;$$

hierin is k vast en n doorloopt de gehele getallen. De coëfficiënten  $a_1, \dots, a_k$  hangen in het algemeen van n af.

Het is duidelijk, dat als  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$  gegeven zijn, de  $y_k, y_{k+1}, \dots$  uit de vergelijking successievelijk kunnen worden opgelost:

$$n=0 \text{ geeft } y_k = -a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \dots - a_k y_0,$$

$$n=1 \text{ geeft } y_{k+1} = -a_1 y_k - a_2 y_{k-1} - \dots - a_k y_1,$$

$$n=2 \text{ geeft } y_{k+2} = -a_1 y_{k+1} - a_2 y_k - \dots - a_k y_2,$$

enz.

De algemene oplossing zal dus k willekeurige constanten bevatten.

Als de coëfficiënten van de vergelijking constant zijn leidt een substitutie echter sneller tot de algemene oplossing. Stel nl.

$y_n = \lambda^n$  met nader te bepalen  $\lambda$ ; dan is

$$\lambda^{n+k} + a_1 \lambda^{n+k-1} + a_2 \lambda^{n+k-2} + \dots + a_k \lambda^n = 0.$$

Deelt men door  $\lambda^n$  dan komt er

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + \dots + a_k = 0.$$

Dit hangt niet meer van  $n$  af en is een  $k^e$  graadsvergelijking voor  $\lambda$ . Als deze  $k$  verschillende reële wortels  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  heeft, vinden we zo  $k$  verschillende oplossingen  $y_n = \lambda_1^n, y_n = \lambda_2^n, \dots, y_n = \lambda_k^n$ . Een lineaire combinatie van deze is weer een oplossing. De algemene oplossing is dus

$$y_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_k \lambda_k^n,$$

met willekeurige constanten  $C_1, \dots, C_k$ .

We passen dit toe op bovenstaand voorbeeld. We hebben de vergelijking  $y_{n+1} - (1+\alpha)y_n + \alpha y_{n-1} = 0$ , geldig voor  $n = 1, 2, \dots, N-1$ .

Voor de  $N^e$  tank geldt het niet, omdat  $y_{N+1}$  geen zin heeft. Voor deze tank is de evenwichtsvoorwaarde echter

$$y_{N-1} + y_{N+1} = y_N + \frac{1}{\alpha} y_N.$$

We nemen nu aan, dat  $y_{N+1} = 0$ , d.w.z. dat de extraherende vloeistof aanvankelijk geen te extraheren stof bevat. Dan komt er

$$-(\alpha+1)y_N + \alpha y_{N-1} = 0.$$

Bovenstaande vergelijking geldt ook voor  $n = N$ , als we  $y_{N+1} = 0$  stellen.

Substitutie van  $y_n = \lambda^n$  geeft:

$$\lambda^{n+1} - (1+\alpha)\lambda^n + \alpha\lambda^{n-1} = 0,$$

dus  $\lambda^2 - (1+\alpha)\lambda + \alpha = (\lambda-1)(\lambda-\alpha) = 0$ .

De algemene oplossing is dus  $y_n = C_1 + C_2 \alpha^n$ .

Laat nu  $y_0$  gegeven zijn, dat is de hoeveelheid te extraheren stof, die ingebracht wordt. Ter bepaling van  $C_1$  en  $C_2$  vinden we

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 &= y_0 \\ C_1 + C_2 \alpha^{N+1} &= 0 \end{aligned} \right\},$$

dus  $C_1 = -\frac{y_0 \alpha^{N+1}}{1 - \alpha^{N+1}}$ ,  $C_2 = \frac{y_0}{1 - \alpha^{N+1}}$  en

$$y_n = \frac{y_0 (\alpha^n - \alpha^{N+1})}{1 - \alpha^{N+1}}, \text{ dus } Y_n = \frac{1}{\alpha} y_n = \frac{y_0 (\alpha^{n-1} - \alpha^N)}{1 - \alpha^{N+1}}.$$

Belangrijk zijn nu  $y_N$  en  $Y_1$ ; dat is hetgeen uittreedt uit het stelsel.

$$y_N = \frac{y_0(\alpha^N - \alpha^{N+1})}{1 - \alpha^{N+1}}, \quad Y_1 = \frac{y_0(1 - \alpha^N)}{1 - \alpha^{N+1}}.$$

Hieruit blijkt  $Y_1 + y_N = y_0$ ; dit klopt, want de hoeveelheid, die uittreedt moet gelijk zijn aan de hoeveelheid, die intreedt.

Het resultaat is des te beter, naarmate  $k$  groter, dus  $\alpha$  kleiner is. Beter betekent hier natuurlijk, dat  $Y_1$  groter en  $y_N$  kleiner is. Bij gegeven  $\alpha$  kan het resultaat verbeterd worden door het aantal tanks te vergroten. Voor  $\alpha < 1$  nadert  $Y_1$  zelfs tot  $y_0$  voor  $N \rightarrow \infty$  (volledige extractie). Voor  $\alpha > 1$  nadert  $Y_1$  tot  $y_0/\alpha$ ; in dat geval lukt het niet door vergroting van het aantal tanks het ideale geval van volledige extractie willekeurig dicht te benaderen.

Het geval  $\alpha = 1$  is een uitzonderingsgeval, omdat de vergelijking voor  $\lambda$  dan een dubbele wortel krijgt. We beschouwen deze omstandigheid eerst bij de algemene vergelijking.

Zonder bewijs delen we mede, dat als de vergelijking een  $p$ -voudige wortel  $\lambda$  bezit, daarbij een oplossing behoort van de vorm:

$$y_n = \lambda^n (C_0 + C_1 n + \dots + C_{p-1} n^{p-1}),$$

hetgeen inderdaad een oplossing met  $p$  constanten is.

In het geval van de tanks met  $\alpha = 1$  krijgen we een vergelijking met een dubbele wortel 1; dus de algemene oplossing is dan

$$y_n = C_0 + C_1 n.$$

Ter bepaling van  $C_0$  en  $C_1$  krijgen we nu

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= y_0 \\ C_0 + (N+1)C_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

dus  $C_0 = y_0$ ,  $C_1 = -\frac{y_0}{N+1}$ , dus

$$Y_n = y_n = \frac{y_0(N+1 - n)}{N+1}, \quad y_N = \frac{y_0}{N+1}, \quad Y_1 = \frac{y_0 N}{N+1}.$$

Bij de algemene vergelijking, kan de vergelijking voor  $\lambda$  ook complexe wortels bezitten. Met  $\lambda$  is de toegevoegd complexe van  $\lambda$  dan ook een wortel. Schrijf de wortel met modulus en argument:

$\lambda = \rho e^{i\alpha}$ , dan zijn de twee wortels  $\lambda_1 = \rho e^{i\alpha}$  en  $\lambda_2 = \rho e^{-i\alpha}$  en de bijbehorende oplossing is  $y_n = \rho^n \{ C_1 e^{in\alpha} + C_2 e^{-in\alpha} \}$ . Nemen we  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$  dan komt er  $\rho^n \cos n\alpha$  en nemen we  $C_1 = \frac{1}{2i}$ ,  $C_2 = -\frac{1}{2i}$ , dan komt er  $\rho^n \sin n\alpha$ . We krijgen dus een oplossing van de vorm

$$y_n = \rho^n (A_1 \cos n\alpha + A_2 \sin n\alpha).$$

Tenslotte kunnen de complexe wortels ook nog weer meervoudig zijn. Dan wordt elk van de oplossingen  $\rho^n \cos n\alpha$  en  $\rho^n \sin n\alpha$  nog met een veelterm in  $n$  vermenigvuldigd.

Naast homogene lineaire differentievergelijkingen kunnen we ook inhomogene beschouwen. Evenals bij differentiaalvergelijkingen geldt ook hier, dat de algemene oplossing van de inhomogene vergelijking wordt verkregen door bij één particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking de algemene oplossing van de corresponderende homogene vergelijking op te tellen.

Vb.1  $y_{n+1} + y_n = n$ . De homogene vergelijking  $y_{n+1} + y_n = 0$  heeft als algemene oplossing  $y_n = A(-1)^n$ . Probeer voor de inhomogene vergelijking de oplossing  $y_n = \alpha n + \beta$ . Dit geeft

$$\alpha n + \alpha + \beta + \alpha n + \beta = n, \text{ dus } \left. \begin{array}{l} 2\alpha = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{array} \right\}, \alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{4}.$$

De algemene oplossing is dus  $y_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4} + A(-1)^n$ .

Een veel voorkomende niet-lineaire differentievergelijking is die van Riccati:

$$y_{n+1} y_n + a y_{n+1} + b y_n + c = 0.$$

Stel hierin  $y_n = \frac{1}{v_n} + \delta$ ,  $v_n = \frac{1}{y_n - \delta}$  met nader te kiezen  $\delta$ .

Substitutie geeft

$$\left(\frac{1}{v_{n+1}} + \delta\right) \left(\frac{1}{v_n} + \delta\right) + a \left(\frac{1}{v_{n+1}} + \delta\right) + b \left(\frac{1}{v_n} + \delta\right) + c = 0.$$

Vermenigvuldig met  $v_n v_{n+1}$ :

$$(\delta v_{n+1} + 1)(\delta v_n + 1) + a v_n (\delta v_{n+1} + 1) + b v_{n+1} (\delta v_n + 1) + c v_n v_{n+1} = 0,$$

$$\{\delta^2 + (a+b)\delta + c\} v_n v_{n+1} + (b+\delta)v_{n+1} + (a+\delta)v_n + 1 = 0.$$

Dit is in het algemeen weer een vergelijking van Riccati, tenzij  $\delta$  zo gekozen wordt dat

$$\delta^2 + (a+b)\delta + c = 0.$$

Nemen we voor  $\delta$  een wortel van deze vierkantsvergelijking, dan gaat de vergelijking over in

$$(b+\delta)v_{n+1} + (a+\delta)v_n + 1 = 0,$$

hetgeen een inhomogene lineaire vergelijking met constante coëfficiënten is, die als algemene oplossing heeft

$$v_n = \frac{-1}{a+b+\delta} + C \left(-\frac{a+\delta}{b+\delta}\right)^n.$$

Hieruit vinden we  $y_n = \frac{1}{v_n} + \delta$ .

We behandelen nu het benaderd oplossen van differentiaalvergelijkingen door in plaats daarvan differentievergelijkingen te beschouwen. Als we een differentiaalvergelijking voor  $y$  als functie van  $x$  hebben, verdelen we het interval, waar we de oplossingen willen bepalen in kleine stukjes door deelpunten  $x_0, x_1, x_2, \dots$ . De afgeleiden vervangen we door gedeelde differenties. We nemen de deelpunten gemakshalve equidistant:  $x_{k+1} - x_k = w$ . De eerste afgeleide vervangen we door een differentiequotient:

$$f'(a) \sim \frac{f(a+w) - f(a)}{w}, \quad \text{dus } y_n' \sim \frac{y_{n+1} - y_n}{w}.$$

Om te zien wat we met de tweede afgeleide zullen doen beschouwen we de Taylor-ontwikkeling:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} f''(a)h^2 + \dots$$

Vul nu  $h = w$  en  $h = -w$  in:

$$f(a+w) = f(a) + f'(a)w + \frac{1}{2} f''(a)w^2 + \dots$$

$$f(a-w) = f(a) - f'(a)w + \frac{1}{2} f''(a)w^2 + \dots$$

Optelling geeft  $f(a+w) + f(a-w) = 2f(a) + f''(a)w^2 + \dots$ . Dus

$$y_n'' \sim \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{w^2}.$$

Voor de derde afgeleide gaan we op analoge wijze te werk:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} f''(a)h^2 + \frac{1}{6} f'''(a)h^3 + \dots$$

Vul in  $h = w, h = -w, h = 2w$ :

$$f(a+w) = f(a) + f'(a)w + \frac{1}{2} f''(a)w^2 + \frac{1}{6} f'''(a)w^3 + \dots$$

$$f(a-w) = f(a) - f'(a)w + \frac{1}{2} f''(a)w^2 - \frac{1}{6} f'''(a)w^3 + \dots$$

$$f(a+2w) = f(a) + 2f'(a)w + 2f''(a)w^2 + \frac{4}{3} f'''(a)w^3 + \dots$$

We nemen nu  $\lambda$  maal de eerste +  $\mu$  maal de tweede +  $\nu$  maal de derde, dusdanig dat  $f'(a)$  en  $f''(a)$  wegvallen:

$$\left. \begin{aligned} \lambda - \mu + 2\nu &= 0 \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu + 2\nu &= 0 \\ \frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{6}\mu + \frac{4}{3}\nu &= 1 \end{aligned} \right\}, \quad \lambda = -3, \mu = -1, \nu = 1. \quad \text{Dit geeft}$$

$-3f(a+w) - f(a-w) + f(a+2w) = -3f(a) + f'''(a)w^3 + \dots$ . Dus

$$y_n''' \sim \frac{y_{n+2} - 3y_{n+1} + 3y_n - y_{n-1}}{w^3}.$$

We krijgen zo inderdaad juist gedeelde differenties van opklimmende orde.

Door dit in een differentiaalvergelijking in te vullen krijgen we een differentievergelijking.

Vb.2  $y'' + xy' + y = 0$ . Deze wordt vervangen door

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{w^2} + (x_0 + nw) \frac{y_{n+1} - y_n}{w} + y_n = 0,$$

hetgeen een differentievergelijking van de tweede orde is. Deze kan opgelost worden als  $y_0$  en  $y_1$  gegeven zijn, door successievelijke bepaling van  $y_2, y_3, \dots$ . In plaats van  $y_1$  kan ook  $y_0'$  gegeven zijn. Deze vervangen we dan weer door de benadering  $y_0' \sim \frac{y_1 - y_0}{w}$ , dus  $y_1 \sim y_0 + wy_0'$ .

De methode is nog belangrijker voor het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen, omdat analytische oplossingsmethoden daar vaak veel moeilijker zijn dan bij gewone differentiaalvergelijkingen. We nemen als voorbeeld de warmtegeleidingsvergelijking

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

We verdelen zowel de x-as als de t-as in stukjes door deelpunten en schrijven nu  $T_{m,n}$  voor  $T(x_m, t_n)$ . Noem  $w_1$  de lengte van de stukjes op de x-as en  $w_2$  die op de t-as. Als we het bovenstaande apart op x en t toepassen, krijgen we

$$\frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{w_2} = \alpha \frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{w_1^2},$$

dus 
$$T_{m,n+1} = T_{m,n} + \frac{\alpha w_2}{w_1^2} (T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}),$$

$$T_{m,n+1} = \frac{\alpha w_2}{w_1^2} T_{m+1,n} + \frac{w_1^2 - 2\alpha w_2}{w_1^2} T_{m,n} + \frac{\alpha w_2}{w_1^2} T_{m-1,n}.$$

Deze betrekking stelt ons in staat om, als  $T_{m,n}$  voor een zekere n en alle m gegeven is,  $T_{m,n+1}$  voor alle m uit te rekenen.

De methode is bijzonder eenvoudig toe te passen, als de bijvoorwaarde, waardoor de oplossing vastgelegd wordt, gegeven is in de vorm van een beginvoorwaarde: voor  $t = t_0$  is T als functie van x voorgescreven (d.w.z. de situatie op het begintijdstip is voorgescreven). Gevraagd wordt hoe het verloop van de functie in de loop van de tijd verandert.

Nu is  $T_{m,0}$  voor alle m door de beginvoorwaarde gegeven. Uit de differentievergelijking kunnen successievelijk  $T_{m,1}$  voor alle m,  $T_{m,2}$  voor alle m enz. worden bepaald.

Het hierboven behandelde voorbeeld is echter om verschillende redenen een bijzonder eenvoudig geval:

1° Er komen geen gemengde afgeleiden, zoals  $\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t}$  in voor. Het wel voorkomen van zulke afgeleiden is geen essentiële moeilijkheid; er kunnen ook differentiebbenaderingen voor worden gegeven, die wij hier echter niet bespreken.



- 2° In één van de veranderlijken is de vergelijking van de eerste orde, hetgeen het oplossen van de corresponderende differentievergelijking naar die veranderlijke vergemakkelijkt.
- 3° De bijvoorwaarden, die de oplossing vastleggen, zijn van een gedaante, die het oplossen vergemakkelijken.

Het blijkt nu, dat juist de gedaante van de bijvoorwaarden in andere gevallen het struikelblok is. We beschouwen de potentiaal vergelijking, die we voor het gemak in twee veranderlijken opschrijven, hetgeen voor de te volgen methode overigens niet essentieel zal blijken te zijn. Dus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

We verdelen x- en y-as in stukjes ter lengte  $w_1$  en  $w_2$ ; de differentievergelijking wordt:

$$\frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{w_1^2} + \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{w_2^2} = 0.$$

Gemakshalve nemen we  $w_1 = w_2$ , dan komt er

$$u_{m+1,n} + u_{m-1,n} + u_{m,n+1} + u_{m,n-1} - 4u_{m,n} = 0.$$

Als het nu zo zou zijn, dat  $u$  en  $\frac{\partial u}{\partial y}$  op de x-as gegeven zouden zijn, dan zou dit betekenen dat we  $u_{m,0}$  en  $u_{m,1}$  voor alle  $m$  zouden kennen (hierbij voor  $\frac{\partial u}{\partial y}$  op de x-as de benadering  $\frac{u_{m,1} - u_{m,0}}{w}$  gebruikende).

Dan zou successievelijk  $u_{m,2}$ ,  $u_{m,3}$ , ... opgelost kunnen worden.

In deze vorm is de bijvoorwaarde echter meestal niet gegeven. Een in de praktijk veel voorkomend geval is, dat  $u$  voorgeschreven is op de randkromme van een gebied  $G$  en dat gevraagd wordt de oplossing in  $G$  te vinden, die de gegeven randwaarden aanneemt. Een dergelijke bijvoorwaarde heet een randvoorwaarde.

Schrijven we de differentievergelijking in de vorm

$$u_{m,n} = \frac{u_{m+1,n} + u_{m-1,n} + u_{m,n+1} + u_{m,n-1}}{4},$$

dan zien we dat  $u_{m,n}$  gelijk is aan het gemiddelde van de waarden van  $u$  in de vier naburige punten  $(m+1,n)$ ,  $(m-1,n)$ ,  $(m,n+1)$  en  $(m,n-1)$  van het rooster der punten  $(m,n)$ .

Men begint nu getallen  $v_{m,n}$  te kiezen, die nog niet aan de differentievergelijking behoeven te voldoen, maar die wel aan de randvoorwaarde voldoen. In elk punt  $(m,n)$  in het gebied  $G$  berekenen we het residu:

$$R_{m,n} = v_{m+1,n} + v_{m-1,n} + v_{m,n+1} + v_{m,n-1} - 4v_{m,n}.$$

Als alle  $R_{m,n} = 0$  zouden zijn, zouden we klaar zijn. Als dat niet zo is, trachten we de  $v_{m,n}$  zo te wijzigen, dat de  $R_{m,n}$  steeds dichterbij nul komen te liggen. De waarden van  $v_{m,n}$  aan de rand veranderen we niet om te zorgen dat steeds aan de randvoorwaarde voldaan blijft. Deze methode heet relaxatie-methode. Wijziging van  $v$  in één punt heeft invloed op het residu in het punt zelf en in de vier naburige punten, en wel wordt, als we bij  $v$  in een punt een bedrag  $\delta$  optellen, het residu in dat punt met  $4\delta$  verminderd en in de vier naburige punten met  $\delta$  vermeerderd. Het feit, dat het residu in het punt zelf sterker verandert, dan in de naburige punten is de oorzaak, dat we van de methode succes kunnen verwachten.

We kunnen bijvoorbeeld beginnen met een punt, waar het residu het grootst in absolute waarde is en door een verandering aldaar dit residu kleiner maken. De residuen in de naburige punten kunnen daardoor echter worden vergroot (dit hangt van de tekens van de residuen af), zodat het niet altijd verstandig is, het residu in het veranderde punt meteen nul te maken. Als we b.v. de situatie hebben van een residu 8 in een punt met  $-2,7,3,1$  als residuen in de naburige punten en we nemen  $\delta = 2$  dan wordt het residu in het punt zelf nul. De residuen in de naburige punten zijn nu echter  $0,9,5,3$  geworden, zodat er een residu is ontstaan, dat nog groter is dan hetgeen we al hadden.

Over de handigste methoden die men in de praktijk moet volgen om snel tot een redelijk resultaat bij het relaxeren te komen, bestaat een uitvoerige literatuur. We gaan er hier echter niet verder op in.

## HOOFDSTUK III STATISTIEK

### §.1 Inleidende opmerkingen.

De mathematische statistiek houdt zich bezig met het systematisch behandelen van regelmatigheden, die optreden bij gebeurtenissen waarvan de uitslag onzeker is. Enige voorbeelden dienen ter toelichting hiervan.

Wanneer men een fysische grootte gaat meten, dan zal de uitkomst beïnvloed worden door allerlei fouten van apparatuur en waarnemer. Dit uit zich in het feit, dat als men de waarneming herhaalt, men de tweede maal in het algemeen een uitkomst vindt, die verschilt van die van de eerste waarneming. De fouten, die men maakt zijn in twee klassen te verdelen: systematische en toevallige fouten. Voorbeelden van systematische fouten zijn het wegen met een balans waarvan de armen ongelijk zijn of met niet goed geijkte gewichten. Deze fouten zijn niet te elimineren door de waarneming te herhalen. Toevallige afwijkingen daarentegen kan men hopen te matigen door het experiment een groot aantal malen te herhalen. De vraag is nu welke conclusies kunnen worden getrokken uit de uitkomsten van deze waarnemingen met betrekking tot de "ware" waarde van de te meten grootte en met welke onzekerheid de gevonden uitkomst nog is behept.

Wanneer men met een muntstuk één maal kruis of munt werpt, is het onmogelijk te voorspellen wat er komt. Als we het een groot aantal malen doen, verwachten we, dat er ongeveer in de helft van de gevallen kruis komt. Men drukt dit wel uit door te zeggen dat de kans op kruis  $\frac{1}{2}$  is. Men kan vragen, wat "ongeveer" de helft nu eigenlijk is; in het bijzonder bij welke afwijking men moet vermoeden, dat er iets met de munt aan de hand is.

Wanneer men één man van 40 jaar beschouwt, is het niet te voorspellen of hij over een jaar nog in leven zal zijn. Neemt men echter een groot aantal mannen van 40 jaar (b.v. van de gehele Nederlandse bevolking), dan is binnen zeer nauwe grenzen te voorspellen, welk gedeelte van hen over een jaar in leven zal zijn. Op dergelijke overwegingen berust het verzekeringswezen.

Wanneer een product vervaardigd wordt, zal dit aan zekere kwaliteitseisen moeten voldoen. Exemplaren die buiten bepaalde normen vallen, moeten worden afgekeurd. Men zou natuurlijk alle exemplaren kunnen controleren en zo de zekerheid verkrijgen dat ze aan de normen voldoen, als tenminste bij de controle geen fouten worden gemaakt. Bij massaproductie kan dit te kostbaar zijn; bovendien zijn er gevallen, waarin bij beproeving het product wordt vernietigd. Als men toestaat, dat een klein percentage van het geleverde product buiten de normen valt, kan men de controle beperken tot een steekproef uit het totaal van de producten. De vraag is dan welke conclusie men uit de uitkomst van de steekproef kan trekken over het totaal.

Het spreekt vanzelf, dat dit nooit een volstrekt zekere conclusie kan zijn. Men moet het op de koop toe nemen, dat in sommige gevallen de conclusie onjuist is. Men tracht het echter zo in te richten, dat dit slechts zelden het geval is.

Het onderzoek van vragen van bovengenoemde aard is het object van de mathematische statistiek. Het essentiële is, dat er gebeurtenissen blijken te bestaan, die elk voor zich onzeker zijn, of zoals men ook wel zegt aan toeval onderhevig, maar in grote aantallen bepaalde regelmatigheden vertonen. Alleen op verschijnselen, die deze kenmerken vertonen, kan mathematische statistiek worden toegepast. In de praktijk blijkt dit toepassingsgebied echter enorm groot te zijn.

## §.2 Waarschijnlijkheid. Het geval van een alternatief.

Het fundamentele begrip ter beschrijving van de statistische begrippen is het begrip waarschijnlijkheid of kans. De eenvoudigste voorbeelden hiervan zijn ontleend aan de kansspelen, die trouwens ook historisch de aanleiding tot de ontwikkeling van de kansrekening zijn geweest.

We komen terug op het in §.1 vermelde kruis of munt werpen. Bij één worp zeggen we dat de kans op kruis  $\frac{1}{2}$  is. De betekenis hiervan is geen andere, dan dat bij een groot aantal worpen het quotiënt van het aantal malen dat kruis gevallen is en het totale aantal worpen (het frequentie-quotiënt van "kruis") dicht bij  $\frac{1}{2}$  ligt. Dit is uiteraard een weinig preciese begripsbepaling.

De hierdoor ontstane moeilijkheid ondervangen we door toepassing van de axiomatische methode. We bespreken een begrip kans, dat aan zekere gebeurtenissen wordt toegekend en dat aan zekere axioma's voldoet. Het zal blijken, dat inderdaad gevonden wordt, dat bij grote aantallen het frequentie-quotiënt dicht bij de kans komt te liggen. De bruikbaarheid van de gekozen opbouw wordt bepaald door de toepassingsmogelijkheid in de praktijk, waar de mathematische statistiek wordt gebruikt.

Alvorens deze axiomatische opbouw algemeen te geven, behandelen we eerst een eenvoudig geval, nl. dat van een alternatief, dat is een experiment dat slechts twee mogelijke uitkomsten heeft. Deze uitkomsten kan men elk een naam geven, bv. "goed" en "fout", of "kruis" en "munt", of 1 en 0. Aan elk van beide uitkomsten wordt een getal toegekend, dat de waarschijnlijkheid van deze uitkomst heet en dat een reëel getal  $\geq 0$  is. Verder zijn de whn. (we korten waarschijnlijkheid af met wh. en waarschijnlijkheden met whn.) van de beide uitkomsten samen gelijk aan 1. Noem de wh. van goed  $p$ ; dan is de wh. van fout  $1-p$ , ook wel met  $q$  aangeduid. We gaan nu het experiment een aantal malen herhalen. Een uitkomst is nu een rijtje goed's en fout's achter elkaar. Nemen we eerst twee experimenten, dan zijn er vier mogelijke uitkomsten: (goed, goed), (goed, fout), (fout, goed), (fout, fout). Elk van deze uitkomsten kunnen we nu weer een wh. geven. We kunnen dit echter niet meer willekeurig doen, omdat we overeenstemming moeten hebben met de whn. bij het éénmaal uitgevoerde experiment. Laten we de hierboven genoemde vier mogelijkheden de whn. resp.  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$  geven. We kennen nu ook aan combinaties van deze mogelijkheden whn. toe en wel de som van de whn. van de mogelijkheden afzonderlijk (somregel). Voorbeeld: de wh. van (goed, goed) of (fout, fout) is  $x + v$ . Dit is een nieuw postulaat; het is echter kennelijk een plausibele veronderstelling. Nu is  $x + y$  de wh. op (goed, goed) of (goed, fout), d.w.z. de wh. dat het eerste experiment goed oplevert en het tweede onverschillig is.

Daarom stellen we  $x + y = p$ . Analoog met het tweede experiment  $x + u = p$ . Analoog met fout:  $u + v = 1-p$ ,  $y + v = 1-p$ . Door deze betrekkingen zijn  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$  nog niet bepaald. We kunnen bv.  $x$  willekeurig kiezen en vinden dan

$$y = p - x, u = p - x, v = 1 - 2p + x.$$

Gewaarborgd is nu al, dat  $x + y + u + v = 1$ ; we eisen echter nog dat  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$  alle vier  $\geq 0$  zijn. Dit geeft voor  $x$  de restricties  $0 \leq x \leq p$ ,  $2p - 1 \leq x$ .

We zien dus, dat door de tot nu toe opgelegde voorwaarden de whn. voor de vier gevallen nog niet zijn vastgelegd. We interpreteren dit als volgt. Tussen de twee experimenten kan een zekere afhankelijkheid bestaan, in die zin dat de uitslag van het eerste experiment van invloed is op de kansen bij het tweede experiment. We kunnen dit ook als volgt uitdrukken. Als we al weten, dat het eerste experiment "goed" heeft opgeleverd, blijven er maar twee van de vier oorspronkelijke mogelijkheden over met whn. resp.  $x$  en  $p-x$ . De som van deze twee is echter niet  $= 1$ , maar  $= p$ , hetgeen de wh. van "goed" bij het eerste experiment is. Delen we nu echter door  $p$  dan is de som wel  $= 1$ ; deze uitkomsten worden voorwaardelijke waarschijnlijkheden genoemd. Zo is  $x/p$  de voorwaardelijke wh. van "goed" bij het tweede experiment onder de voorwaarde dat het eerste experiment ook "goed" heeft opgeleverd. De experimenten heten nu onafhankelijk als de voorwaardelijke whn. gelijk zijn aan de overeenkomstige whn. zonder voorwaarde. Dus in het zoëven genoemde voorbeeld, als  $x/p$  gelijk is aan de wh. van "goed" bij het tweede experiment, dat is  $p$ .

Uit de definitie van onafhankelijkheid volgt nu direct, dat bij onafhankelijke experimenten de wh. van een uitkomst het product is van de whn. van de bijbehorende uitkomsten van de afzonderlijke experimenten. Voorbeeld:

In het algemene geval (eventueel afhankelijk) geldt dat de wh. van (goed, fout) gelijk is aan de wh. van goed bij experiment 1 maal de voorwaardelijke wh. van fout bij experiment 2 onder de voorwaarde dat experiment 1 goed heeft opgeleverd. Bij onafhankelijke experimenten wordt dit dus eenvoudig: wh. van goed bij experiment 1 maal wh. van fout bij experiment 2, d.i.  $p(1-p)$ .

Zo vinden we dus  $x = p^2$ ,  $y = u = p(1-p)$ ,  $v = (1-p)^2$ .

Deze productregel is geen nieuw postulaat, maar een consequentie van de definitie van onafhankelijkheid.

In plaats van twee maal kunnen we het experiment nu ook  $n$  maal uitvoeren. We nemen nu direct aan, dat deze experimenten onafhankelijk zijn (de begrippen voorwaardelijke wh. en onafhankelijkheid worden op analoge wijze gedefinieerd als hierboven voor  $n = 2$  is geschied). Ook nu weer geldt een productregel. De wh. van een bepaalde opeenvolging van "goed" en "fout" hangt alleen af van het aantal malen dat er "goed" in voorkomt. Als dat aantal  $= k$  is, is deze wh.  $p^k(1-p)^{n-k}$ . Dit is echter niet de wh. dat het aantal goede uitslagen  $k$  is, want deze  $k$  goede uitslagen kunnen op verschillende manieren in de rij der  $n$  uitslagen zitten. Bv.  $n = 3$ ,  $k = 2$ : (goed, goed, fout), (goed, fout, goed), (fout, goed, goed).

Volgens de somregel moeten we de whn. van elk van deze gevallen optellen. Elk geval heeft echter dezelfde wh.  $p^k(1-p)^{n-k}$ . Dit getal moeten we dus vermenigvuldigen met het aantal manieren waarop  $k$  maal het woord goed op een rij van  $n$  open plaatsen kan worden neergezet.

Dit aantal is juist de binomiaalcoëfficiënt  $\binom{n}{k}$ . Om dit in te zien, beschouwen we  $(1+x)^n$ , dat we geschreven denken als een product van  $n$  maal  $1+x$ . Gaan we dit product uitwerken dan krijgen we telkens een term door in elk van de factoren hetzij de  $1$ , hetzij de  $x$  te kiezen. Hebben we  $k$  maal de  $x$  gekozen dan krijgen we een term  $x^k$ ; het aantal manieren waarop dat kan geschieden is hetzelfde als hierboven bij de keuze van  $k$  maal het woord goed. De coëfficiënt van  $x^k$  is echter  $\binom{n}{k}$ .

We hebben dus gevonden, dat bij een rij van  $n$  onafhankelijke experimenten met een alternatief met wh.  $p$  op "goed", de kans  $P_k$ , dat  $k$  maal goed voorkomt in de rij, gelijk is aan

$$P_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

We gaan nu na hoe het verloop van  $P_k$  is bij vaste  $n$ . De gevallen dat  $p = 0$  of  $p = 1$  sluiten we in het vervolg uit; voor  $p = 0$  is  $P_k = 0$  voor  $k > 0$  en voor  $p = 1$  is  $P_k = 0$  voor  $k < n$ . Er geldt

$$\frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{n! p^k (1-p)^{n-k} (k-1)! (n-k+1)!}{k! (n-k)! n! p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}.$$

Hieruit volgt direct dat  $P_k > P_{k-1}$  dan en slechts dan als  $k < np + p$ , en  $P_k = P_{k-1}$  dan en slechts dan als  $k = np + p$ . Hieruit volgt, dat de maximale  $P_k$  bereikt wordt voor die  $k$ , die tussen  $np + p - 1$  en  $np + p$  inligt (dit interval bevat ook het getal  $np$ ); aan beide kanten van dit maximum is  $P_k$  monotoon. Een uitzondering op dit gedrag ontstaat als  $np + p$  geheel is; dan zijn er twee even grote maxima bij  $k = np + p - 1$  en  $k = np + p$  met aan weerszijden daarvan weer een monotoon gedrag van  $P_k$ .

We zien dus, dat de grootste wh. bij een  $k$  behoort die dicht bij  $np$  ligt. Dit is in overeenstemming met de frequentie-interpretatie; we verwachten dat  $k/n$  dicht bij  $p$  ligt, speciaal voor grote  $n$ . We weten echter nog niet hoe groot de kans is om met  $k/n$  dicht bij  $p$  te komen.

We beschouwen daarom voor een  $\epsilon > 0$  de wh.  $P(\epsilon)$  dat  $|\frac{k}{n} - p| \geq \epsilon$ . Deze is klaarblijkelijk op grond van de somregel

$P(\epsilon) = \sum \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ , waarbij de som uitgestrekt wordt over die waarden van  $k$ , waarvoor  $|\frac{k}{n} - p| \geq \epsilon$ , of hetgeen op hetzelfde neerkomt  $(k-pn)^2 > n^2 \epsilon^2$ . Hieruit volgt

$$P(\epsilon) \leq \frac{1}{n^2 \epsilon^2} \sum (k-pn)^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

met sommatie uitgestrekt over dezelfde  $k$ . Omdat alle termen positief zijn, geldt dezelfde ongelijkheid a fortiori, als de som uitgestrekt wordt over alle  $k$  van 0 tot  $n$ :

$$P(\varepsilon) \leq \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \sum_{k=0}^n (k-pn)^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Het rechterlid van deze ongelijkheid gaan we nu uitrekenen. Daartoe bedenken we eerst, dat

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \{p + (1-p)\}^n = 1.$$

Verder is  $k \binom{n}{k} = \frac{k n!}{k! (n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}$ , dus

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-1-k} = np \{p + (1-p)\}^{n-1} = np. \end{aligned}$$

Tenslotte is  $k(k-1) \binom{n}{k} = \frac{k(k-1)n!}{k! (n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)! (n-k)!} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$ ,

dus

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k+2} (1-p)^{n-2-k} = n(n-1) p^2. \end{aligned}$$

Nu is  $(k-pn)^2 = k(k-1) + (1-2np)k + n^2 p^2$ , dus

$$\sum_{k=0}^n (k-pn)^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n(n-1) p^2 + (1-2np)np + n^2 p^2 = np(1-p).$$

Hiermee vinden we het resultaat

$$(1) \quad P(\varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n \varepsilon^2}.$$

Hieruit volgt dat voor een vaste  $\varepsilon > 0$  het rechterlid, en dus ook het linkerlid van de ongelijkheid naar nul gaat voor  $n \rightarrow \infty$ . Dus:

Voor iedere  $\varepsilon > 0$  is de kans, dat  $\frac{k}{n}$  meer dan  $\varepsilon$  van  $p$  afwijkt, willekeurig klein te krijgen door  $n$  voldoende groot te maken (wet van de grote getallen).

Deze uitspraak realiseert datgene, wat we verwachtten. We hebben in de inleiding gezegd, dat we verwachtten dat bij grote  $n$  het frequentiequotiënt  $k/n$  ongeveer gelijk aan  $p$  zal zijn. Deze vage uitspraak wordt nu bevestigd en gepreciseerd. Weliswaar is een grote afwijking van  $p$  altijd mogelijk, maar bij grote  $n$  zeer onwaarschijnlijk, want de kans dat  $k/n$  meer dan  $\epsilon$  van  $p$  afwijkt kunnen we door  $n$  te vergroten zo klein krijgen als we zelf willen. Bovendien levert formule (1) ons expliciet een grens voor  $n$ , waarbij dat het geval is.

### §.3 Waarschijnlijkheid in een eindig veld.

In de vorige paragraaf hebben we enkele begrippen en regels ingevoerd met behulp van een alternatief, dat we een aantal malen herhalen. De voornaamste zijn: waarschijnlijkheid, somregel, afhankelijkheid, productregel. We kunnen nu algemener de zaak als volgt stellen.

We gaan uit van een aantal mogelijke "uitkomsten"  $a_1, \dots, a_m$  van door toeval beheerste experimenten of gebeurtenissen. In het geval van het alternatief waren dat rijtjes met "goed" en "fout". Aan elk van deze  $a_i$  wordt een getal  $P(a_i) \geq 0$  toegekend, dat wh. van  $a_i$  genoemd wordt. Hierbij wordt nog de eis gesteld, dat

$$\sum_{i=1}^m P(a_i) = 1.$$

Behalve aan de afzonderlijke  $a_i$  wordt ook aan iedere collectie  $V$  van objecten  $a_i$  (bv. die bestaande uit  $a_1, a_2, a_6$ ) een getal  $P(V)$  toegekend, dat de som is van de  $P(a_i)$  voor die  $a_i$ , die in  $V$  voorkomen (in het voorbeeld dus  $P(a_1) + P(a_2) + P(a_6)$ , genoemd de wh. dat  $a_1$  of  $a_2$  of  $a_6$  optreedt). In formule uitgedrukt:

$$P(V) = \sum_{a_i \text{ in } V} P(a_i).$$

Dit is de somregel. Bij gebruik van dit formalisme in de praktijk moeten we erop letten, dat de uitkomsten die we als  $a_1, \dots, a_m$  kiezen elkaar twee aan twee uitsluiten (d.w.z. nooit bij uitvoering van het experiment gelijktijdig kunnen optreden). Om redenen van praktische bruikbaarheid is het verder gewenst de  $a_1, \dots, a_m$  zo te kiezen, dat het niet nodig is één of meer der  $a_i$  nog verder te splitsen in een aantal mogelijkheden.

De verzamelingen  $V$ , die we hierboven genoemd hebben, zijn ook mogelijke uitkomsten van een experiment, alleen niet zulke, die we als "elementaire" uitkomsten hebben gekozen. Men denke als voorbeeld aan het in de vorige paragraaf behandelde geval van tweemaal achter elkaar een alternatief. Dit heeft vier elementaire uitkomsten. De uitspraak: "het eerste experiment levert goed op" correspondeert ook met een uitkomst, die bepaald wordt door een verzameling  $V$  bestaande uit de twee elementen (goed, fout) en (goed, goed).



Dit leidt tot een uitbreiding van de somregel. Hiervoor noemen we eerst enkele begrippen over verzamelingen. Laat  $V$  en  $W$  twee verzamelingen bestaande uit objecten  $a_i$  zijn. Als we geïnteresseerd zijn in het feit, dat de uitkomst in één van beide komt zonder dat het ons kan schelen in welke, dan moeten we blijkbaar die verzameling  $V \cup W$  beschouwen, die alle objecten  $a_i$  bevat die in minstens één van beide zitten. Deze verzameling heet de vereniging van  $V$  en  $W$  en bestaat dus uit die elementen, die in  $V$  of in  $W$  liggen (inclusief degene die in allebei liggen). Op analoge wijze kunnen we geïnteresseerd zijn in uitkomsten, die zowel tot  $V$  als tot  $W$  behoren. Deze corresponderen met de verzameling  $V \cap W$ , die alle objecten  $a_i$  bevat die zowel in  $V$  als in  $W$  zitten, en die de doorsnede van  $V$  en  $W$  genoemd wordt.

De begrippen vereniging en doorsnede kunnen natuurlijk op dezelfde wijze voor andere verzamelingen worden geformuleerd.

Als nu  $V$  en  $W$  uitkomsten zijn, die elkaar uitsluiten, d.w.z. geen enkele  $a_i$  gemeen hebben of, zoals men zegt, een lege doorsnede hebben, dan geldt

$$P(V \cup W) = P(V) + P(W) \quad (\text{somregel}).$$

Deze uitgebreide somregel volgt echter direct uit de hierboven behandelde somregel, immers:

$$P(V) + P(W) = \sum_{a_i \text{ in } V} a_i + \sum_{a_i \text{ in } W} a_i,$$

maar omdat  $V$  en  $W$  niets gemeen hebben, wordt in het rechterlid de wh. van iedere  $a_i$  die in  $V \cup W$  voorkomt precies eenmaal geteld, zodat we precies  $P(V \cup W)$  vinden.

Het begrip afhankelijkheid is gegrondvest op het begrip voorwaardelijke wh., dat we nu in de algemene situatie bespreken. Hierbij is dus sprake van een voorwaarde, dat is zelf een uitkomst  $W$ . We nemen nu aan dat bekend is dat  $W$  vervuld is, d.w.z. we beperken ons tot die  $a_i$  die in  $W$  liggen. Nu gaan we onder deze voorwaarde de uitkomst  $V$  bekijken. De mogelijkheden  $a_i$  die in  $V$  maar buiten  $W$  liggen zijn nu echter a priori uitgesloten, zodat we ons tot  $V \cap W$  beperken. In ons reeds gebruikte voorbeeld zou  $W$  kunnen zijn de voorwaarde, dat het eerste experiment goed oplevert, dus  $W$  bestaat uit (goed, goed) en (goed, fout). Neem nu voor  $V$  de uitkomst: het tweede experiment levert fout op, d.w.z.  $V$  bestaat uit (goed, fout) en (fout, fout). Door de voorwaarde  $W$  die we gesteld hebben valt de tweede mogelijkheid weg en blijft slechts  $V \cap W$ , dat is (goed, fout) over. Om nu echter te zorgen, dat de wh., die zo verkregen worden, samen = 1 zijn moeten we nog door  $P(W)$  delen (alles is als het ware op  $W$  geprojecteerd). We duiden de voorwaardelijke waarschijnlijkheid op  $V$  onder de voorwaarde  $W$  aan met  $P(V|W)$ . Dan geldt:

$$P(V|W) = \frac{P(V \cap W)}{P(W)}.$$

Deze voorwaardelijke wh. is alleen dan zinvol te definiëren, als  $P(W) \neq 0$ .

We noemen nu  $V$  onafhankelijk van  $W$ , als  $P(V|W) = P(V)$ . Deze voorwaarde is gelijkwaardig met

$$P(V \cap W) = P(V) \cdot P(W),$$

hetgeen de productregel voor onafhankelijke uitkomsten is:

Als  $V$  en  $W$  onafhankelijke uitkomsten zijn is de wh. dat de uitslag tot  $V$  en tot  $W$  behoort het product van de whn. van  $V$  en  $W$  afzonderlijk. In het hierboven gegeven voorbeeld is bij onafhankelijkheid de wh. van (goed, fout) juist  $p(1-p)$ .

Hiermee is in wezen de volledige fundering van de waarschijnlijkheidsrekening gegeven op één belangrijk punt na. We hebben nl. de veronderstelling gemaakt dat het totale aantal a priori gegeven mogelijkheden eindig is. Met deze veronderstelling komen we echter in de praktijk niet uit.

#### §.4 Stochastische veranderlijken.

In vele gevallen is een van het toeval afhankelijke uitkomst een reëel getal. Men denke slechts aan metingen van fysische grootheden, waarvan we de invloed van meetfouten willen beschouwen, of ook aan gevallen waarbij de te meten grootheid zelf aan fluctuaties onderhevig is, zoals de lengte van gekeurden bij een medische keuring, het koolstofgehalte van het door een staalfabriek geproduceerde staal, de jaarlijkse opbrengst van een korenveld.

In deze gevallen is de uitkomst een continu variabel reëel getal, dat in de praktijk misschien wel aan zekere grenzen gebonden is (bv. altijd positief), maar toch in ieder geval oneindig veel waarden kan aannemen. Een dergelijke van toeval afhankelijke variabele heet een stochastische veranderlijke (engels: random variable, frans: variable aléatoire, Duits: zufällige Veränderliche). Hiervoor moeten we een begrip verzinnen, dat een analoge rol als het begrip wh. bij een variabele in een eindig veld. Het begrip wh. in de vorm als tot nu toe beschouwd is niet bruikbaar, want als elementaire uitkomsten zouden alle reële getallen moeten worden gekozen: om dan echter de wh. te krijgen dat de uitkomst tussen 1 en 2 ligt, zouden volgens de somregel de  $P(x)$  voor alle continu veel reële getallen  $x$  tussen 1 en 2 moeten worden gesommeerd. Hieraan kan geen redelijke zin worden toegekend.

Evenals wij de wh. vroeger als een idealisatie hebben ingevoerd van het frequentie-quotient bij een groot aantal herhalingen van het experiment, gaan we nu ook een groot aantal malen de grootte van een stochastische veranderlijke bepalen. Het resultaat is een collectie reële getallen, waarin we graag enige regelmaat zouden willen ontdekken. We verdelen met behulp van een aantal deelpunten  $a_1, \dots, a_n$  de reële getallen in een aantal vakken: de getallen  $\leq a_1$ , de getallen tussen  $a_1$  en  $a_2, \dots$ , de getallen tussen  $a_{n-1}$  en  $a_n$ , de getallen  $> a_n$ .

We tellen nu het aantal uitkomsten in elk van de vakken. Dit geeft al een aardig voorbeeld hoe de uitkomsten verdeeld zijn, vooral als men de grootte van de vakken handig kiest. Maakt men de vakken te klein, dan worden de aantallen in elk vak te klein en worden de invloeden van toevallige fluctuaties te groot en het totale beeld te vlak. Worden de

vakken te groot gemaakt, dan gaat informatie verloren, doordat te veel op een hoop gegooid wordt en het beeld te grof is.

Grafisch is een en ander het best te veraanschouwelijken in een histogram. Dit wordt verkregen door op de x-as de verdeling in vakken uit te zetten en in het platte vlak op elk vak een rechthoek te zetten met een oppervlakte evenredig met het aantal uitkomsten in het betreffende vak. Welke evenredigheidsfactor gekozen wordt is natuurlijk onbelangrijk als er slechts één histogram gemaakt wordt. Als echter verschillende histogrammen van dezelfde variabele moeten worden vergeleken, is dit wel van betekenis. De factor = 1 nemen, zou niet handig zijn, want bij vergroting van het totale aantal metingen zouden de hoogten steeds groter worden, omdat de aantallen steeds groeien. Kiezen we de factor echter  $\frac{1}{N}$  (N is aantal waarnemingen), dan komt het erop

neer dat het oppervlak gelijk gekozen wordt aan het frequentie-quotiënt van de uitkomsten, die in het betreffende vak terecht komen. Het is redelijk te verwachten, dat dit getal een zekere stabiliteit zal vertonen bij grote N; we zouden het als een benadering kunnen opvatten voor de kans dat de uitkomst in het betreffende vak komt.

Men zou nog kunnen vragen waarom de oppervlakte en niet de hoogte van de rechthoek gelijk gemaakt wordt aan het frequentie-quotiënt. Dit is om een zekere stabiliteit te verkrijgen bij een verandering van de verdeling in vakken. Wanneer we een vak beschouwen en we gaan dit door een nieuw deelpunt in het midden van het vak in twee nieuwe vakken verdelen, dan zal waarschijnlijk in elk van de twee vakken ongeveer de helft komen van de uitkomsten van het oorspronkelijke vak. Zou men nu de hoogte als maat hebben genomen, dan zouden de nieuwe rechthoeken maar ongeveer de halve hoogte hebben van de oude en het totale beeld geheel veranderen. Werkt men echter met de oppervlakte, dan volgt uit het feit dat de bases van de nieuwe rechthoeken de helft zijn van de basis van de oude rechthoek, dat de hoogten ongeveer gelijk blijven en het totale beeld dus weinig verandert.

Het blijkt nu inderdaad, dat als men histogrammen maakt van een stochastische veranderlijke, deze bij grote N een sterke mate van stabiliteit blijken te bezitten, die vergelijkbaar is met de stabiliteit van het frequentie-quotiënt bij de herhaling van een alternatief. De bovenkant van het histogram is een gebroken lijn, die als we bij vergroting van N tevens de verdeling in vakken verfijnen, blijkt te naderen tot een vloeiende kromme.

De hierboven geschetste regelmatigheden staan echter niet geheel los van de regelmatigheden, die we vroeger bij een eindig veld hebben opgemerkt. Bij de beschrijving van de histogrammen is al met frequentie-quotiënten gewerkt en het ligt voor de hand ook nu weer het begrip wh. als idealisatie hiervan in te voeren. Bij een vak tussen twee deelpunten a en b zouden we dan kunnen spreken van de wh. dat de uitkomst in dit vak komt. Het verschil met vroeger is dus, dat nu niet aan de elementaire uitkomsten (d.i. hier één bepaalde waarde van de veranderlijke) een wh. wordt toegekend, maar wel aan ieder vak (a, b). Hierbij moeten we natuurlijk wel in het oog houden dat een equivalent van de somregel ook hier van kracht moet zijn. We schrijven  $P(a < x \leq b)$  voor de wh. dat de uitkomst x voldoet aan  $a < x \leq b$ . We kunnen dit nu direct beschrijven met behulp van de eenvoudiger getallen  $P(x \leq b)$ , de kans dat  $x \leq b$  is. Als we de geldigheid van de somregel willen aannemen dan moet  $P(x \leq a) + P(a < x \leq b) = P(x \leq b)$  zijn. Noemen we nu  $P(x \leq \xi) = F(\xi)$ , dan is dus

$$P(a < x \leq b) = F(b) - F(a).$$

Daar dit  $\geq 0$  moet zijn als  $a \leq b$ , moet  $F$  een monotoon niet-dalende functie zijn. Omdat de wh. dat  $x$  een of andere willekeurige waarde aanneemt gelijk één is geldt  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} F(\xi) = 1$ . Om een analoge reden is

$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} F(\xi) = 0$ . De functie  $F$  heet de verdelingsfunctie van de stochastische veranderlijke  $x$ . Hoewel in het algemeen een dergelijke verdelingsfunctie uitsluitend de eigenschappen:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} F(\xi) = 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} F(\xi) = 0, \quad \text{uit } \xi \leq \eta \text{ volgt } F(\xi) \leq F(\eta)$$

behoeft te bezitten, zullen we ons gewoonlijk beperken tot het geval dat  $F(\xi)$  differentieerbaar is met continue afgeleide  $f(\xi)$ , die frequentiefunctie van de stochastische veranderlijke  $x$  genoemd wordt. Voor deze geldt dan uiteraard

$$P(a < x \leq b) = \int_a^b f(\xi) d\xi.$$

Deze frequentiefunctie voldoet aan  $f(\xi) \geq 0$  en  $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 1$ .

Deze frequentiefunctie sluit nu mooi aan bij het beeld van het histogram. De interpretatie van een integraal als een oppervlak levert ons dus  $P(a < x \leq b)$  als de oppervlakte tussen  $x$ -as, de grafiek van  $f(\xi)$  en de lijnen  $x = a$  en  $x = b$ . De histogramrechthoeken zijn dus op te vatten als benadering van dit oppervlak en dus als benaderingen van de integraal in de zin zoals integralen ook gedefinieerd zijn. De kromme die door de bovenkant van het histogram wordt benaderd is dus de grafiek van de frequentiefunctie van de stochastische veranderlijke.

De frequentiefunctie is op te vatten als een soort waarschijnlijkheidsdichtheid, die na integratie over een interval de wh. van een uitkomst in dat interval levert.

Met behulp van de uit een stochastische veranderlijke verkregen inzichten, zouden we nu algemeen het begrip wh. voor een willekeurig eindig of oneindig veld kunnen definiëren. We zullen dit algemene geval niet behandelen, omdat dit alleen al hierom geen zin heeft, omdat ons de mathematische hulpmiddelen om dit algemeenste geval met succes te kunnen aanpakken, hier niet ter beschikking staan. Toch zullen we tot een iets algemenere begripsvorming moeten overgaan dan het geval van één stochastische veranderlijke; deze sluit echter op natuurlijke wijze bij het voorafgaande aan.

In de eerste plaats is het vaak nodig verschillende stochastische veranderlijken tegelijk te beschouwen. Zo zal men behalve het koolstofgehalte ook nog de hardheid en enkele andere gegevens meten van het geproduceerde staal in een staalfabriek. Deze gegevens die aan een zelfde monster worden gemeten, vormen telkens een stelsel bij elkaar behorende getallen, waartussen allicht wel een zekere afhankelijkheid zal bestaan. Daarnaast is het ook gewenst voor de juiste bestudering van de uitkomsten van een serie herhalingen van de bepaling van een zelfde stochastische veranderlijke, de serie uitkomsten als één geheel te beschouwen. Dit laatste is analoog met hetgeen we bij een alternatief gedaan hebben.

Een rij  $(x_1, \dots, x_n)$  van reële getallen hebben we een vector  $\underline{x}$  in  $R_n$  genoemd. We spreken nu ook van een stochastische vectorveranderlijke.

Een uitkomst hiervan is een vector, dat is een rij van  $n$  reële getallen. We nemen aan dat bij een dergelijke stochastische vectorveranderlijke een zekere frequentiefunctie behoort (dit is evenals in het geval van een getallenveranderlijke een beperking van de algemeenheid), die nu een functie  $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$  van  $n$  veranderlijken is. Deze is overal  $\geq 0$  en bovendien is de integraal over de hele  $R_n$  van  $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$  gelijk aan 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n = 1.$$

Dit laatste hangt samen met de waarschijnlijkheidsinterpretatie van  $f$ . Als  $G$  een gebied in  $R_n$  is, dan definiëren we de wh. dat de uitkomst  $(x_1, \dots, x_n)$  in  $G$  ligt door

$$P((x_1, \dots, x_n) \text{ in } G) = \int_G f(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

We krijgen ook nu weer een somregel, die direct uit de integraaldefinitie van de wh. volgt: als  $G_1$  en  $G_2$  gebieden in  $R_n$  zijn met een lege doorsnede dan geldt

$$P((x_1, \dots, x_n) \text{ in } G_1 \cup G_2) = P((x_1, \dots, x_n) \text{ in } G_1) + P((x_1, \dots, x_n) \text{ in } G_2).$$

In woorden: als twee uitkomsten elkaar uitsluiten, dan is de wh. dat de ene of de andere gevonden wordt gelijk aan de som van de uitkomsten afzonderlijk.

De juistheid volgt direct uit het feit, dat een integraal over  $G_1 \cup G_2$  de som is van de integralen over  $G_1$  en over  $G_2$ .

Een stochastische vectorveranderlijke  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$  kunnen we opvatten als een combinatie van elk harer componenten  $x_1, \dots, x_n$  afzonderlijk. Er is nu natuurlijk een verband tussen de frequentiefunctie  $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$  van  $\underline{x}$  en de frequentiefuncties  $f_1(\xi_1), \dots, f_n(\xi_n)$  van  $x_1, \dots, x_n$ . Beschouwen we bv.  $P(x_1 \leq \xi_1)$ , dan is dit dus de kans dat  $x_1 \leq \xi_1$  en dat  $x_2, \dots, x_n$  willekeurig zijn; dus

$$P(x_1 \leq \xi_1) = \int_{-\infty}^{\xi_1} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \dots, t_n) dt_2 \dots dt_n.$$

Differentieert men dit naar  $\xi_1$ , dan vindt men

$$f_1(\xi_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, t_2, \dots, t_n) dt_2 \dots dt_n.$$

Deze z.g. marginale frequentiefuncties behorende bij  $(x_1, \dots, x_n)$  krijgt men dus door over de veranderlijken, die buiten beschouwing gelaten worden, van  $-\infty$  tot  $+\infty$  te integreren. In plaats van slechts één veranderlijke variabele te laten, kan men dit ook met meer doen en

zo uit de vectorveranderlijke een nieuwe vectorveranderlijke van lagere dimensie verkrijgen. Houdt men bv.  $x_1, \dots, x_m$  over van  $x_1, \dots, x_n$  dan is de frequentiefunctie daarvan in  $\xi_1, \dots, \xi_m$  gelijk aan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, \dots, \xi_m, t_{m+1}, \dots, t_n) dt_{m+1} \dots dt_n.$$

Geheel analoog met vroeger definiëren we nu het begrip voorwaardelijke wh. We doen het eerst voor een speciaal geval. Laat  $\underline{x} = (x_1, x_2)$  een vectorveranderlijke in  $R_2$  zijn. Stel dat  $G_1$  een verzameling reële getallen is, die we opvatten als een uitkomst voor  $x_1$ . Stel nu, dat we al weten, dat  $x_1$  in  $G_1$  ligt. Beschouwen we nu de uitkomst  $G_2$  voor  $x_2$ , dan hoeven we voor  $(x_1, x_2)$  alleen die gevallen te beschouwen, waarvoor  $x_1$  in  $G_1$  ligt. Zo komen we dus tot  $P(x_1 \text{ in } G_1, x_2 \text{ in } G_2)$ , die gevormd wordt met de verzameling van die vectoren  $\underline{x} = (x_1, x_2)$ , waarvoor  $x_1$  in  $G_1$  en  $x_2$  in  $G_2$  ligt. De voorwaardelijke wh. dat  $x_2$  in  $G_2$  ligt onder voorwaarde dat  $x_1$  in  $G_1$  ligt krijgen we door dit door  $P(x_1 \text{ in } G_1)$  te delen:

$$P(x_2 \text{ in } G_2 | x_1 \text{ in } G_1) = \frac{P(x_1 \text{ in } G_1, x_2 \text{ in } G_2)}{P(x_1 \text{ in } G_1)},$$

of met integralen geschreven

$$\begin{aligned} & \int_{G_1} dt_1 \int_{G_2} f(t_1, t_2) dt_2 \\ &= \frac{\int_{G_1} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) dt_2}{\int_{G_1} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) dt_2}. \end{aligned}$$

De stochastische veranderlijke  $x_2$  heet nu onafhankelijk van de stochastische veranderlijke  $x_1$  als voor alle  $G_1$  en  $G_2$  geldt

$$P(x_2 \text{ in } G_2 | x_1 \text{ in } G_1) = P(x_2 \text{ in } G_2),$$

of met integralen:

$$\int_{G_1} dt_1 \int_{G_2} f(t_1, t_2) dt_2 = \int_{G_1} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) dt_2 \cdot \int_{G_2} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) dt_1.$$

Neemt men nu voor  $G_1$  het interval van  $-\infty$  tot  $\xi_1$  en differentieert men naar  $\xi_1$ , dan gaat dit over in:

$$\int_{G_2} f(\xi_1, t_2) dt_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, t_2) dt_2 \cdot \int_{G_2} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) dt_1.$$

Neemt men voor  $G_2$  het interval van  $-\infty$  tot  $\xi_2$  en differentieert men naar  $\xi_2$ , dan komt er:

$$f(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, t_2) dt_2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \xi_2) dt_1.$$

Noemt men de marginale frequentiefuncties van  $x_1$  en  $x_2$  resp.  $f_1$  en  $f_2$  dan krijgen we dat

$$f(\xi_1, \xi_2) = f_1(\xi_1) f_2(\xi_2),$$

hetgeen de productregel is voor de frequentiefunctie van twee onafhankelijke stochastische veranderlijken. Deze is hier afgeleid in de veronderstelling dat de afzonderlijke veranderlijken getallenveranderlijken zijn. De begrippen voorwaardelijke wh. en onafhankelijkheid zijn echter op analoge wijze ook voor vectorveranderlijken te definiëren en ook dan geldt de productregel voor frequentiefuncties.

In de praktijk is het vaak nodig functies van stochastische veranderlijken te beschouwen. Als  $x$  de gemeten grootte is, zal bv.  $x^2$  of  $\sin x$  de grootte zijn, die we werkelijk nodig hebben. Ook deze grootheden zijn van het toeval afhankelijk. Dit brengt ons ertoe om vast te stellen, dat, als  $x$  een stochastische veranderlijke is en  $\varphi(x)$  een reële functie,  $\varphi(x)$  ook een stochastische veranderlijke is met een verdelingsfunctie. Het berekenen van de verdelingsfunctie van  $\varphi(x)$ , als die van  $x$  bekend is, is vaak niet eenvoudig. We zullen de methode, die gevolgd moet worden, aan een eenvoudig voorbeeld toelichten.

Laat  $x$  een stochastische veranderlijke zijn met verdelingsfunctie  $F(\xi)$  en frequentiefunctie  $f(\xi)$ . Gevraagd de overeenkomstige functies  $G(\xi)$  en  $g(\xi)$  voor de stochastische veranderlijke  $x^2$ . Nu is  $G(\xi) = P(x^2 \leq \xi)$ , de kans dat  $x^2 \leq \xi$  is. Voor  $\xi < 0$  is  $x^2 \leq \xi$  natuurlijk onmogelijk, dus de kans is dan nul. Voor  $\xi > 0$  krijgen we  $P(x^2 \leq \xi) = P(-\sqrt{\xi} \leq x \leq \sqrt{\xi}) = F(\sqrt{\xi}) - F(-\sqrt{\xi})$ . Dus

$$\left. \begin{aligned} G(\xi) &= 0 && \text{voor } \xi < 0 \\ G(\xi) &= F(\sqrt{\xi}) - F(-\sqrt{\xi}) && \text{voor } \xi \geq 0 \end{aligned} \right\}.$$

Door differentiëren vinden we de frequentiefunctie:

$$\left. \begin{aligned} g(\xi) &= 0 && \text{voor } \xi < 0 \\ g(\xi) &= \frac{f(\sqrt{\xi}) + f(-\sqrt{\xi})}{2\sqrt{\xi}} && \text{voor } \xi > 0 \end{aligned} \right\}.$$

Voor  $\xi = 0$  heeft de afgeleide van  $G(\xi)$  niet te bestaan.

Ook functies van meer veranderlijken kunnen worden beschouwd, dus bv.  $\varphi(x_1, x_2)$ , waarin  $x_1$  en  $x_2$  stochastische veranderlijken zijn.

Men kan zich afvragen, welke functies zoal als verdelings- of frequentiefuncties plegen op te treden. In beginsel kan dat van alles zijn; de hierboven voor deze functies genoemde beperkingen zijn in principe de enige. Nu blijkt in de praktijk echter, dat frequentiefuncties

vaak een analoog verloop hebben met één tamelijk geprononceerde top. In die gevallen, waar de afwijkingen van één bepaalde waarde als fouten worden beschouwd (bv. bij metingen van fysische grootheden) is dit verloop natuurlijk ook wel te verwachten: de top komt bij de "ware" waarde van de grootheid en grote fouten zijn onwaarschijnlijker dan kleine. In andere gevallen echter, waar de grootheid zelf aan fluctuaties onderhevig is, is de noodzaak van een dergelijk verloop veel minder duidelijk.

Men pleegt vaak gebruik te maken van de volgende frequentiefunctie

$$f(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (m \text{ en } \sigma \text{ zijn constanten});$$

deze functie heeft een grafiek met één top bij  $\xi = m$ . De factor van de e-macht is zo gekozen om te bewerkstelligen dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 1.$$

Inderdaad, in het eerste jaar is bewezen, dat  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ , dus

met de substitutie  $\xi = m + t\sigma\sqrt{2}$  vinden we dat

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1.$$

Vroeger werd vaak aangenomen, dat iedere stochastische veranderlijke deze frequentiefunctie heeft. We zullen spoedig zien, waarom deze functie, die wel de normale frequentiefunctie wordt genoemd, een speciale rol speelt in de statistiek. Er zijn inderdaad veel gevallen, waarin het gerechtvaardigd is aan te nemen dat de verdeling normaal is (althans bij benadering); het is echter niet verstandig, dit klakkeloos in alle gevallen te doen, hetgeen men in de moderne statistiek ook niet meer doet.

Het is goed te bedenken, dat in de praktijk de frequentiefunctie van de stochastische veranderlijke die men wenst te onderzoeken, meestal niet bekend is. Het is dan natuurlijk een aanzienlijke vereenvoudiging als men kan aannemen, dat deze functie normaal is. In plaats van een geheel onbekende functie, houdt men dan slechts twee onbekende constanten  $m$  en  $\sigma$  over. Op de betekenis van deze constanten komen we nog terug.

We merken nog op, dat er iets onbevredigends is gelegen in het feit, dat we een aparte opzet hebben gemaakt voor het geval van een eindig veld en het geval van continu veranderlijke grootheden.

Daar de behandeling in beide gevallen vrij veel overeenkomst vertoont, kan men zich afvragen of er geen opzet is, die beide gevallen verenigt. Dit is inderdaad mogelijk; we kunnen daarop hier niet verder ingaan, omdat het daarvoor benodigde mathematische apparaat ons hier niet ter beschikking staat.



### §.5 Gemiddelde en spreiding.

Zoals al opgemerkt, is de verdeling van een stochastische veranderlijke meestal niet bekend. Om een geheel onbekende functie vast te leggen, kost vaak veel moeite; we proberen daarom enkele getalengrootheden te vinden, die ons al enige informatie geven over de verdeling.

Voor de eerste van deze getallen denken we weer aan het geval van een frequentiefunctie met één top zoals bij de met fouten behepte waarnemingen. Ergens bij de top van de frequentiefunctie zit de "beste" waarde. Hoe moeten we deze nu definiëren? Hiertoe nemen we nogmaals een aanloopje door eerst weer eens te kijken naar een grote serie metingen van de stochastische veranderlijke met waarnemingen  $x_1, \dots, x_N$ . Als we

geen reden hebben om de ene waarneming beter te achten dan de andere, zullen we de beste waarde bepalen door het rekenkundige gemiddelde

$\frac{x_1 + \dots + x_N}{N}$  te nemen. Om nu aansluiting te krijgen aan de frequentiefunctie denken we ons  $N$  zeer groot en de reële as weer door deelpunten

in vakjes verdeeld. We splitsen  $\frac{x_1 + \dots + x_N}{N}$  in stukken naar gelang

van de vakken waar de  $x_v$  in liggen. De  $x_v$  die in een vak  $a < x \leq b$  liggen zijn, als het vak klein is, allemaal ongeveer even groot (ongeveer

=  $b - a$ ); de bijdrage is dus ongeveer  $\frac{b - a}{N} N_{ab}$ , waarin  $N_{ab}$  het aantal waar-

nemingen in het vak is. Nu is  $\frac{N_{ab}}{N}$  het frequentie-quotiënt van het

vakje, hetgeen ongeveer gelijk is aan  $f(b) \cdot (b - a)$ , als  $f(\xi)$  de frequentiefunctie van de stochastische veranderlijke  $x$  is. Dit maakt het plausibel om het gemiddelde van een stochastische veranderlijke  $x$  met frequentiefunctie  $f(\xi)$  als volgt te definiëren

$$(1) \quad E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi) d\xi.$$

Het gemiddelde is dus een vast getal, dat niet van het toeval afhangt.

Op analoge wijze kan men het gemiddelde van  $\varphi(x)$  bepalen als  $\varphi(\xi)$  een reële functie is:

$$(2) \quad E(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Omdat  $\varphi(x)$  zelf een stochastische veranderlijke is, zou men het gemiddelde daarvan ook kunnen bepalen, door de frequentiefunctie  $g(\xi)$  van  $\varphi(x)$  uit te rekenen en vervolgens daarop definitieformule (1) toe te passen met als resultaat

$$(3) \quad E(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi g(\xi) d\xi.$$

De resultaten van (2) en (3) zijn gelijk, hetgeen we hier niet zullen bewijzen.

Nog algemener geldt voor  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ , als  $x_1, \dots, x_n$  stochastische veranderlijken zijn met gecombineerde frequentiefunctie  $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ :

$$E(\varphi(x_1, \dots, x_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) f(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

In het (belangrijke) speciale geval, dat de stochastische veranderlijken  $x_1, \dots, x_n$  onafhankelijk zijn met frequentiefuncties  $f_1(\xi), \dots, f_n(\xi)$ , dan komt er

$$E(\varphi(x_1, \dots, x_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) f_1(\xi_1) \dots f_n(\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Het is mogelijk, dat de integraal uit formule (1) niet bestaat; in dat geval heeft de betreffende stochastische veranderlijke geen gemiddelde.

Voorbeeld: neem een stochastische veranderlijke met de frequentiefunctie  $f(\xi) = \frac{1}{\pi(1+\xi^2)}$ . Deze voldoet een de eisen; want  $f(\xi) \geq 0$  en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\pi(1+\xi^2)} = \frac{1}{\pi} [\arctan \xi]_{-\infty}^{\infty} = 1. \text{ Proberen we echter het gemiddelde}$$

$$\text{te bepalen dan krijgen we } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi d\xi}{\pi(1+\xi^2)} = \frac{1}{2\pi} [\log(1+\xi^2)]_{-\infty}^{\infty}, \text{ hetgeen}$$

niet bestaat. Frequentiefuncties, die geen gemiddelde opleveren, zullen we echter meestal buiten beschouwing laten.

Neemt men de normale frequentiefunctie, dan vindt men voor het gemiddelde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi) d\xi = m + \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - m) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi - m)^2}{2\sigma^2}} d\xi =$$

$$m + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = m + \left[ -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = m$$

De constante  $m$  uit de formule voor de frequentiefunctie is dus juist het gemiddelde.

We hebben vroeger de frequentiefunctie geïnterpreteerd als een waarschijnlijkheidsdichtheid. Vergelijken we dit met een verdeling van massadichtheid op de reële lijn, dan correspondeert in deze analogie het gemiddelde juist met het zwaartepunt van de massaverdeling. De formule is nl. precies dezelfde als die van het zwaartepunt; men bedenke hierbij, dat in ons geval de totale "massa" gelijk aan 1 is, zodat het niet nodig is daardoor te delen. Het zwaartepunt is het punt, waar men de totale massa als puntmassa kan concentreren. Analoog is het gemiddelde het getal, dat men in de plaats van de stochastische veranderlijke zou stellen als er maar één uitkomst mogelijk zou zijn. Bedenk dat het maar een analogie is, waaraan niet te veel waarde moet worden gehecht.

Ook bij een veranderlijke, die slechts discrete waarden kan aannemen, kan men een gemiddelde definiëren. Door een soortgelijke beschouwing als hierboven gegeven met behulp van frequentie-quotiënten krijgt men hiervoor een formule. Als de mogelijke uitkomsten  $a_1, \dots, a_n$  zijn met waarschijnlijkheden  $p_1, \dots, p_n$  dan is het gemiddelde  $\sum_{j=1}^n a_j p_j$ . In een dergelijk eindig veld spreekt men ook wel van de mathematische verwachting.

Voorbeeld: Bij het alternatief kan men bij een serie van  $n$  herhalingen het aantal malen goed als veranderlijke stellen. Neemt men aan dat de serie onafhankelijk is, dan is de kans op  $k$  maal goed gelijk aan

$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ , zoals in paragraaf 2 is afgeleid.

Het gemiddelde aantal malen goed bij  $n$  onafhankelijke herhalingen van het alternatief is dus

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np \text{ (dit is ook in paragraaf 2 uitgerekend).}$$

Inderdaad is  $np$  ook juist de waarde, die we voor dit aantal verwachten.

Dit is nog duidelijker als we het aantal  $k$  door het frequentiequotiënt  $\frac{k}{n}$  vervangen; het gemiddelde wordt dan  $p$ .

Het gemiddelde bij een eindig veld is van ouds bekend uit de theorie van de kansspelen. Als bij verschillende uitslagen van een kansspel verschillende geldbedragen worden uitgekeerd, is het gemiddelde (in de hierboven omschreven zin, dus met inachtneming van de voor elke uitkomst bestaande whn.) een maat voor het bedrag dat redelijk is als inzet om aan het spel te mogen meedoen. Het woord mathematische verwachting is hierdoor ook verklaard. We gaan hier echter niet verder op in.

Het gemiddelde geeft ons een representatieve waarde van een stochastische veranderlijke. Het is echter ook van groot belang om te weten hoe groot de afwijkingen zijn, die we kunnen verwachten. Het maakt een groot verschil of de waarnemingen van een grootheid bijna allemaal heel dicht bij elkaar (en dus dicht bij hun rekenkundig gemiddelde) liggen of dat ze ver verspreid uit elkaar liggen zonder een geprononceerde concentratie (in dit geval is de betekenis van het gemiddelde ook minder duidelijk). De twee gevallen corresponderen met een frequentiefunctie met een scherpe piek, dan wel een, die vlak verloopt. We zoeken daarom naar een maat voor de afwijking van het gemiddelde.

Gaan we weer uit van een aantal waarnemingen  $x_1, \dots, x_N$  van de veranderlijke, dan is de afwijking van de waarneming  $x_v$  tot het rekenkundige gemiddelde  $\bar{x}$  gelijk aan  $|x_v - \bar{x}|$ . Door hiervan het rekenkundige

gemiddelde over alle waarnemingen te nemen (dus  $\frac{1}{N} \sum_{v=1}^N |x_v - \bar{x}|$ ),

krijgen we een gemiddelde afwijking, die de indruk maakt een redelijke maat te zijn voor de verspreiding der waarnemingen. Nu blijkt deze maat lastig hanteerbaar te zijn, voornamelijk door de erin optredende absolute waarden. Aangezien er ook geen dwingende reden is om deze maat te kiezen, nemen we een andere, waarin we de kwadraten van  $x_v - \bar{x}$  nemen.

We gebruiken daarom de volgende maat voor de afwijking

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{v=1}^N (x_v - \bar{x})^2}.$$

We leggen er de nadruk op, dat de keuze van deze maat een conventie is, die als enige rechtvaardiging de makkelijke hanteerbaarheid heeft.

Zetten we dit nu om in een grootheid voor de stochastische veranderlijke zelf op dezelfde wijze als hierboven met het gemiddelde is geschied dan vinden we de spreading  $\sigma$  van de stochastische veranderlijke  $x$ , die gedefinieerd is door  $\sigma > 0$  en

$$(4) \quad \sigma^2 = E((x - E(x))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - E(x))^2 f(\xi) d\xi.$$

Men kan dit nog in een andere vorm brengen door  $(\xi - E(x))^2 = \xi^2 - 2\xi E(x) + (E(x))^2$  te schrijven. De overeenkomstige splitsing van de integraal levert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 f(\xi) d\xi - 2(E(x))^2 + (E(x))^2, \text{ dus}$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - (E(x))^2.$$

Ook bij de spreading kunnen we voor functies soortgelijke formules geven als bij het gemiddelde. Zo is het kwadraat van de spreading van  $\varphi(x)$  gelijk aan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(\xi) - E(\varphi(x)))^2 f(\xi) d\xi,$$

en analoog voor functies van meer veranderlijken.

Het is weer mogelijk dat de integraal in (4) niet bestaat, ook al bestaat het gemiddelde wel. Voorbeeld:

Neem  $f(\xi) = \frac{1}{2(1+\xi^2)^{3/2}}$ . Dan is  $f(\xi) \geq 0$  en

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = \left[ \frac{\xi}{2\sqrt{1+\xi^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = 1. \quad \text{Het gemiddelde vinden we uit}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi) d\xi = \left[ -\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0. \quad \text{Voor de spreading zouden we de}$$

volgende integraal moeten uitrekenen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 f(\xi) d\xi = \left[ \log(\xi + \sqrt{1+\xi^2}) - \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \right]_{-\infty}^{\infty}, \text{ maar dit convergeert}$$

niet. We zullen dergelijke functies meestal niet beschouwen.

Om de spreiding van de normale frequentiefunctie uit te rekenen bedenken we, dat

$$\int t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = -t e^{-\frac{1}{2}t^2} + \int e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } \int_{-\infty}^{\infty} (\xi-m)^2 f(\xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} (\xi-m)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}} d\xi = \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sigma^2. \end{aligned}$$

We hebben dus gevonden, dat de constanten  $m$  en  $\sigma$  van de normale frequentiefunctie juist gemiddelde en spreiding van deze functie zijn.

Als we de analogie die het gemiddelde vergeleek met een zwaartepunt nu ook voortzetten tot de spreiding, dan is het direct duidelijk, dat het kwadraat van de spreiding overeenkomt met het traagheidsmoment ten opzichte van het zwaartepunt.

Bij een veranderlijke, die slechts discrete waarden aanneemt, definiëren we de spreiding als volgt. Stel dat de mogelijke uitkomsten  $a_1, \dots, a_n$  zijn met waarschijnlijkheden  $p_1, \dots, p_n$ , en het gemiddelde

$$\text{dus } m = \sum_{j=1}^n a_j p_j, \text{ dan definiëren we de spreiding } \sigma \text{ door}$$

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^n (a_j - m)^2 p_j.$$

Passen we dit weer toe op het aantal malen goed in een serie van  $n$  onafhankelijke herhalingen van een alternatief, dan vinden we

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^n (k-np)^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np(1-p).$$

Dit laatste is al in paragraaf 2 uitgerekend. De spreiding van het frequentie-quotiënt  $\frac{k}{n}$  van goed wordt dus  $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$  en deze nadert

tot nul als  $n \rightarrow \infty$ . Dit klopt, want we hebben vroeger gezien dat bij toenemende  $n$  de kans dat het frequentie-quotiënt in de buurt van  $p$  ligt steeds groter wordt.

We leiden nog een ongelijkheid af, die we in het vervolg zullen gebruiken en die betrekking heeft op gemiddelde en spreiding.

We beschouwen de wh. dat een stochastische veranderlijke  $x$  minstens  $k$  maal de spreiding van het gemiddelde afwijkt, waarin  $k$  een constante  $\geq 1$  is. Noem  $f(\xi)$  de frequentiefunctie van  $x$ ,  $m$  het gemiddelde van  $x$ , en  $\sigma$  de spreiding van  $x$ .

$$\text{Als } |\xi - m| \geq k\sigma, \text{ dan is } \frac{(\xi-m)^2}{k^2\sigma^2} \geq 1, \text{ dus}$$

$$P(|x-m| \geq k\sigma) = \int_{|\xi-m| \geq k\sigma} f(\xi) d\xi \leq \frac{1}{k^2\sigma^2} \int_{|\xi-m| \geq k\sigma} (\xi-m)^2 f(\xi) d\xi \leq \\ \leq \frac{1}{k^2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi-m)^2 f(\xi) d\xi = \frac{1}{k^2}. \text{ Dit levert ons}$$

$$P(|x-m| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad (\text{ongelijkheid van Bienaymé-Cebysev}).$$

Let wel, dat dit voor iedere frequentiefunctie geldt! Neemt men bv.  $k = 2$ , dan vindt men dus voor de kans dat een grootheid minstens twee maal de spreiding van het gemiddelde afwijkt ten hoogste  $\frac{1}{4} = 25\%$  is. Bij een grootheid met een normale frequentiefunctie blijkt deze kans echter slechts ongeveer 5% te zijn, hetgeen aanzienlijk minder is.

### §.6 Populatie en steekproef.

We hebben al meermalen opgemerkt, dat in de praktijk van een stochastische veranderlijke de frequentiefunctie niet bekend is. Het enige wat we met deze veranderlijke kunnen doen is deze een aantal malen gaan meten. We vinden dan een aantal uitkomsten  $x_1, \dots, x_n$ . Een dergelijk stel uitkomsten noemen we nu ook een steekproef; we nemen steeds aan, dat de metingen onafhankelijk zijn. Een dergelijke steekproefuitkomst  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$  is zelf weer een stochastische vectorvariabele, want als men een tweede maal  $n$  metingen doet van de veranderlijke zal er wel een ander stel uitkomsten komen dan de eerste keer. We moeten nu in de praktijk werken met grootheden, die uit de steekproefuitkomst zijn afgeleid, omdat dit de enige zijn die we in handen hebben. We trachten daaruit iets te weten te komen over de verdeling (de frequentiefunctie) van de stochastische variabele zelf; deze wordt in dit verband dan ook wel de populatie genoemd. Deze terminologie hangt samen met het beeld, dat de populatie bestaat uit een zeer groot aantal individuen, die niet allen afzonderlijk kunnen worden onderzocht, maar waarvan de kenmerken geheel vast liggen. Een gedeelte daarvan, de steekproef, wordt wel onderzocht.

Voorbeelden: 1° Opinie-onderzoek; een aantal ondervraagden wordt om zijn mening over een onderwerp gevraagd. De populatie is de hele bevolking of een bepaalde groep daarvan.

2° Een geneesmiddel wordt beproefd op een aantal patiënten. De populatie is de gehele bevolking.

3° De kwaliteit van een massaproduct wordt aan een aantal exemplaren onderzocht. De populatie is de totale productie.

Het spreekt vanzelf, dat het zeer belangrijk is, dat de steekproef inderdaad willekeurig ("toevallig") wordt genomen. Dit is in de praktijk vaak nog niet zo eenvoudig. Tekortkomingen hierin schaden de algemeenheid, waarmee de conclusies mogen worden toegepast. Als in geval 2° de proeven in Amsterdam worden gedaan, gelden de uitkomsten dan ook voor inwoners van Eindhoven? Of voor inwoners van Argentinië? Op deze en dergelijke kwesties gaan we hier niet in, hoewel we op het praktische belang ervan met grote nadruk willen wijzen.

Wij zullen in het vervolg steeds aannemen, dat de steekproef willekeurig is genomen en dat de verschillende uitkomsten van één steekproef onafhankelijk zijn. Dit laatste is een essentiële beperking, die we echter om niet te uitvoerig te worden, moeten maken.

Het belangrijkste getal dat we uit de steekproefuitkomst kunnen afleiden is het rekenkundige gemiddelde van de getallen van de uitkomst, ook wel steekproefgemiddelde genaamd

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

Dit is weer een stochastische veranderlijke waarvan we nu het gemiddelde en de spreiding zullen uitrekenen. Laat  $m$  het gemiddelde van  $x$  zijn.

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \xi_j f(\xi_1) \dots f(\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m = m.$$

$$\begin{aligned} E((\bar{x}-m)^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j - m \right)^2 f(\xi_1) \dots f(\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n = \\ &= \frac{1}{n^2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^n (\xi_j - m) \right)^2 f(\xi_1) \dots f(\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n. \end{aligned}$$

Na uitwerken van dit kwadraat, geven de termen van de vorm  $(\xi_j - m)(\xi_k - m)$  met  $j \neq k$  een integraal die = 0 is, omdat  $\int_{-\infty}^{\infty} (\xi_j - m) f(\xi_j) d\xi_j = 0$ .

De zuivere kwadraten geven juist  $\sigma^2$  (waarin  $\sigma$  de spreiding van  $x$  is). Dus er komt als uitkomst  $\frac{\sigma^2}{n}$ . Dus

Stelling | Als  $x$  een stochastische veranderlijke is met gemiddelde  $m$  en spreiding  $\sigma$ , dan heeft het steekproefgemiddelde van een onafhankelijke steekproef ter grootte  $n$  een gemiddelde  $m$  en een spreiding  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

Door overgang op een steekproefgemiddelde van een steekproef ter grootte  $n$  blijft het gemiddelde dus hetzelfde, maar wordt de spreiding met een factor  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  verkleind. We krijgen dus de indruk, dat we de zekerheid, dicht bij het gemiddelde te zitten hebben vergroot. Dit kunnen we nu nog wat preciseren.

We passen de ongelijkheid van Bienaymé-Cebysev toe op het steekproefgemiddelde  $\bar{x}$  :

$$P(|\bar{x} - m| \geq \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Kies nu  $k$  dusdanig, dat  $\frac{k\sigma}{\sqrt{n}} = \epsilon$  ( $\epsilon$  een positief getal), dus  $k = \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}$ ,

dan vinden we

$$P(|\bar{x} - m| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

Hierin is  $\sigma$  een constante; kiezen we  $\epsilon$  ook vast, dan is het rechterlid willekeurig klein te maken door  $n$  groot te kiezen. Dus de wh. dat het steekproefgemiddelde  $\bar{x}$  of meer van het gemiddelde afwijkt nadert tot nul als de afmeting van de steekproef naar oneindig gaat (wet van de grote getallen). Anders gezegd: bij een grote steekproef is men vrijwel zeker dat het steekproefgemiddelde heel dicht bij het populatiegemiddelde ligt.

Op grond hiervan zeggen we dat het steekproefgemiddelde  $\bar{x}$  een bruikbare schatting (eng.: consistent estimate) is voor het gemiddelde  $\mu$  van de populatie.

In het algemeen heet een steekproefgrootte  $a(x_1, \dots, x_n)$  (afhankelijk van de uitkomst  $(x_1, \dots, x_n)$  van de steekproef) een bruikbare schatting voor de populatieconstante  $\alpha$ , als voor iedere positieve  $\epsilon > 0$  geldt dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|a(x_1, \dots, x_n) - \alpha| \geq \epsilon) = 0.$$

Dit betekent dus, dat men door  $n$  groot te maken iedere gewenste graad van zekerheid kan verkrijgen, dat  $a$  minder dan  $\epsilon$  van  $\alpha$  afwijkt.

Voor het kwadraat van de spreiding  $\sigma^2$  zijn we geneigd de volgende steekproefgrootte te gebruiken:

$$(1) \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Het zou mooier zijn als we hierin  $\bar{x}$  door  $m$  mochten vervangen, maar dit kunnen we niet doen, omdat  $m$  niet bekend is.

We gaan nu na of onze keuze goed is, door eerst het gemiddelde te berekenen. Nu is

$$x_i - \bar{x} = x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \frac{1}{n} \left\{ (n-1)(x_i - m) - \sum_{j \neq i} (x_j - m) \right\}.$$

Het gezochte gemiddelde is dus

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ (n-1)(\xi_i - m) - \sum_{j \neq i} (\xi_j - m) \right\}^2 f(\xi_1) \dots f(\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n = \\ = \frac{1}{n^2} \left\{ (n-1)^2 \sigma^2 - (n-1) \sigma^2 \right\} = \frac{n-1}{n} \sigma^2. \end{aligned}$$

Men kan ook de spreiding van (1) berekenen (hetgeen we niet zullen doen) en daaruit met de ongelijkheid van Bienaymé-Cebysev bewijzen, dat (1) een bruikbare schatting is voor  $\sigma^2$ . Toch is het gevonden resultaat voor het gemiddelde vreemd; we zouden eerder een gemiddelde  $= \sigma^2$  hebben verwacht. Dat (1) een bruikbare schatting is, zegt alleen maar iets als we  $n$  steeds groter maken. Houden we echter  $n$  vast, d.w.z. beschouwen we steekproeven van een vaste afmeting; dan leert de wet van de grote getallen, nu toegepast op de stochastische veranderlijke (1), ons, dat als we een groot aantal malen steekproeven ter grootte  $n$  nemen en voor elke steekproef (1) uitrekenen, het rekenkundige gemiddelde van de uitkomsten



van deze berekening niet dicht bij  $\sigma^2$ , maar dicht bij  $\frac{n-1}{n} \sigma^2$  zal komen te liggen. Men drukt dit uit door te zeggen, dat (1) als schatting van  $\sigma^2$  weliswaar bruikbaar, maar niet zuiver (eng.: biased) is. Het is daarom beter (1) te vervangen door de grootheid

$$(2) \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

waarvan het gemiddelde wel gelijk is aan  $\sigma^2$ , en die daarom een zuivere schatting (eng.: unbiased estimate) van  $\sigma^2$  wordt genoemd, die bovendien evenzeer bruikbaar is als (1), immers  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} = 1$ .

We bespreken voorlopig geen andere steekproefgrootheden dan  $\bar{x}$  en  $s$ .

### §.7 Centrale limietstelling.

We geven nu nog een schets van een kwestie, die samenhangt met de betekenis van de normale frequentiefunctie.

We gaan uit van een alternatief met kans  $p$  op goed en nemen een serie van  $n$  onafhankelijke herhalingen hiervan. De kans dat  $k$  keer goed voorkomt hebben we vroeger berekend. Het aantal malen, dat goed voorkomt is zelf een stochastische veranderlijke met gemiddelde  $np$  en spreiding  $\sqrt{np(1-p)}$ . Nu is de kans op één bepaald aantal in de praktijk bij grote  $n$  niet zo belangrijk als de kans, dat dit aantal tussen twee grenzen ligt.

Voorbeeld: Een massaproduct wordt volgens bepaalde normen hetzij goedgekeurd, hetzij afgekeurd. Als we een steekproef van 500 stuks willen keuren, dan interesseert het ons niet zo erg, wat de kans is dat hiervan precies 437 stuks worden goedgekeurd. Veel interessanter is bv. de vraag wat de kans is dat er meer dan 450 worden goedgekeurd, of anders gezegd minder dan 10% afgekeurd.

Het komt dus neer op de vraag wat de kans is dat het aantal malen goed ( $k$ ) tussen twee grenzen  $\mu_1$  en  $\mu_2$  ligt:  $P(\mu_1 < k < \mu_2)$ . We beweren nu, dat we voor grote  $n$  dit bij benadering ook kunnen berekenen, door net te doen of we te maken hebben met een normale verdeling met hetzelfde gemiddelde  $np$  en dezelfde spreiding  $\sqrt{np(1-p)}$ . M.a.w. we kunnen  $P(\mu_1 < k < \mu_2)$  benaderen met

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \int_{\mu_1}^{\mu_2} e^{-\frac{(\xi - np)^2}{2np(1-p)}} d\xi,$$

en wel met een benadering, die des te beter wordt naarmate  $n$  groter is.

We wijzigen (1) door de transformatie  $\xi = np + t \sqrt{np(1-p)}$  :

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\mu_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{\mu_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Noemen we nu  $\lambda_1 = \frac{\mu_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}$  en  $\lambda_2 = \frac{\mu_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ , dan stellen we nu dat

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(np + \lambda_1 \sqrt{np(1-p)} < k < np + \lambda_2 \sqrt{np(1-p)}) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, \end{aligned}$$

geldig is voor vaste  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  (mits  $p \neq 0$  en  $p \neq 1$ ).

We geven een schets van een bewijs van deze bewering. We stellen  $v = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ , dan is  $k = np + v \sqrt{np(1-p)}$  en  $n-k = n(1-p) - v \sqrt{np(1-p)}$ .

Als we nu  $k$  tussen de hierboven gegeven grenzen houden, dan ligt  $v$  tussen  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$ . Laten we nu  $n$  naar oneindig gaan, dan moeten  $k$  en  $n-k$  ook naar oneindig. We maken gebruik van de in het eerste jaar behandelde formule van Stirling  $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ . Nu is de kans op  $k$  maal goed gelijk aan  $\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$ . Omdat  $n$ ,  $k$ ,  $n-k$  alle drie naar oneindig gaan mogen we op alle drie de formule van Stirling toepassen. Dit geeft

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} p^k (1-p)^{n-k}}{\sqrt{2\pi} k^{k+\frac{1}{2}} e^{-k} \sqrt{2\pi} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}} e^{-(n-k)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \left(\frac{np}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k+\frac{1}{2}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)} \left(1+v \frac{\sqrt{np(1-p)}}{np}\right)^{np+v\sqrt{np(1-p)}+\frac{1}{2}} \left(1-v \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n(1-p)}\right)^{n(1-p)-v\sqrt{np(1-p)}+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Van de middelste en laatste factor in de noemer nemen we de logarithme:

$$\begin{aligned} & (np+v\sqrt{np(1-p)}+\frac{1}{2}) \log \left(1+v \frac{\sqrt{np(1-p)}}{np}\right) + \\ & + (n(1-p)-v\sqrt{np(1-p)}+\frac{1}{2}) \log \left(1-v \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n(1-p)}\right). \end{aligned}$$

Op de logarithme passen we de logarithmische reeks  $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$ , toe, waarbij we de termen die voor  $n \rightarrow \infty$  naar nul gaan meteen weglaten. Dit geeft

$$v \sqrt{np(1-p)} + v^2(1-p) - \frac{1}{2}v^2(1-p) + \dots + \\ -v \sqrt{np(1-p)} + v^2p - \frac{1}{2}v^2p + \dots = \frac{1}{2}v^2 + \dots$$

Op grond hiervan schrijven we

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}$$

De gevraagde kans krijgen we nu door dit te sommeren over die waarden van  $k$ , die gelegen zijn tussen  $np + \lambda_1 \sqrt{np(1-p)}$  en  $np + \lambda_2 \sqrt{np(1-p)}$ .

We gaan nu een approximatie maken van  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ , door de  $t$ -as

te verdelen in stukjes ter lengte  $\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}$ , die we afzetten ter

weerszijden van het punt  $\frac{-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ . Deze deelpunten zijn dan

$$\frac{-np}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{k}{\sqrt{np(1-p)}} \text{ met gehele } k. \text{ De deelpunten die tussen } \lambda_1 \text{ en } \lambda_2$$

komen geven juist de zelfde waarden van  $k$  als hierboven bij de kans en de approximatiesom behorende bij deze verdeling is juist de som over deze  $k$  van

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{np(1-p)}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} \right)^2}$$

Behoudens het feit, dat we niet gepreciseerd hebben wat het symbool  $\sim$  precies betekent en dus niet aangetoond hebben, dat het mag gehanteerd worden zoals hier gedaan, is de overeenstemming hiermee aangetoond.

We merken nog op, dat in ons bewijs de  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  eindig moesten zijn.

In werkelijkheid hoeft dat niet en geldt bv. ook

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(k < np + \lambda \sqrt{np(1-p)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Analoog bij de bovengrens.

Hieruit blijkt dus, dat men als  $n$  groot is voor de berekening van kansen, als in het voorbeeld in het begin van deze paragraaf genoemd, bij benadering de normale frequentiefunctie mag toepassen. De vraag rijst hierbij hoe groot  $n$  moet zijn om dit te mogen doen. Dit blijkt nog sterk af te hangen van de waarde van  $p$ . Als  $p$  niet te dicht bij 0 of 1 ligt, is de overeenstemming voor  $n \geq 30$  heel goed. Dat de waarden van  $p$  dicht bij 0 of 1 roet in het eten gooien, is niet zo verwonderlijk, als men bedenkt, dat voor  $p = 0$  of  $p = 1$  de zaak helemaal mis gaat. Voor een  $p$  heel dicht bij 0 of 1, geldt de hierboven gegeven formule nog wel, maar pas bij zeer grote  $n$  komt de kans dicht bij zijn limietwaarde.

te liggen. Dit zou niet zo erg zijn, ware het niet, dat juist de gevallen dat  $p$  dicht bij 0 of 1 ligt voor de praktijk zeer belangrijk zijn. Neemt men weer het voorbeeld van defecten bij fabricage, dan spreekt het vanzelf, dat het streven erop gericht is het percentage afgekeurde exemplaren laag te houden. Dit betekent dus, dat de kans op afkeuring dicht bij 0, en dus de kans op goedkeuring dicht bij 1 ligt.

Voor al dergelijke zeldzame gebeurtenissen bestaat een andere verdeling die goed als benadering voor grote steekproeven gebruikt kan worden, nl. de z.g. Poisson-verdeling. We zullen deze evenwel niet bespreken.

De hierboven afgeleide limietformule laat zich in zeer belangrijke mate generaliseren.

Als we van een stochastische variabele  $x$  met gemiddelde  $m$  en spreiding  $\sigma$  een onafhankelijke steekproef ter grootte  $n$  nemen, dan blijkt de frequentiefunctie van het steekproefgemiddelde  $\bar{x}$  bij benadering een normale frequentiefunctie te bezitten, met een des te betere benadering naarmate  $n$  groter is. Iets precieser kunnen we dit als volgt beschrijven.

We weten dat  $\bar{x}$  een gemiddelde  $m$  en een spreiding  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  bezit.

De grootheid  $\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-m)}{\sigma}$  heeft dus gemiddelde 0 en spreiding 1. Nu geldt voor twee vaste getallen  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  de volgende formule:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\lambda_1 < \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-m)}{\sigma} < \lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt,$$

of anders geschreven:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(m + \frac{\lambda_1 \sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x} < m + \frac{\lambda_2 \sigma}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Dit geldt geheel onafhankelijk van de gedaante van de frequentiefunctie van de veranderlijke  $x$ , als deze maar een gemiddelde en een spreiding bezit. Deze uitkomst heet de centrale limietstelling. Het bewijs ervan is te moeilijk om hier te geven.

Deze stelling levert de rechtvaardiging van het gebruik van de normale frequentiefunctie bij grote steekproeven. We herhalen echter het gevaar, dat hieraan verbonden is: de stelling geeft geen uitspraak over de vraag, hoe groot  $n$  moet zijn om de normale frequentiefunctie te mogen toepassen. Het antwoord op deze vraag hangt wel af van de frequentiefunctie van de veranderlijke  $x$ , evenals het hierboven ook afhangt van de grootte van  $p$ .

Uit deze centrale limietstelling heeft men het veelvuldige voorkomen van verdelingen die bij benadering normaal zijn, ook nog trachten te verklaren. Denkt men bv. weer aan de metingen van een fysische grootte, die met fouten behept is, dan verklaart men deze door aan te nemen, dat er een groot aantal verschillende omstandigheden zijn bij de meting die elk een kleine fout in het meetresultaat tot gevolg kunnen hebben. Men kan daarbij denken aan allerlei onderdelen van het meetapparaat, die afwijkingen kunnen vertonen en aan allerlei instel- en afleesfouten die de waarnemer kan maken. Elk van deze invloeden kan een positieve of negatieve fout in het eindresultaat opleveren. Neemt men aan, dat deze

invloeden onafhankelijk van elkaar werken, dan zal de samenwerking van dit grote aantal kleine invloeden bij benadering een normale verdeling opleveren.

De waarde van bovenstaande redenering willen we in het midden laten. Het is in ieder geval zo, dat er vele gevallen van toepassing zijn, waarvoor deze redenering niet opgaat.

### §.8 Betrouwbaarheidsgrenzen.

Uit de productie van een massaproduct neemt men een steekproef van 500 stuks en vindt hierin 480 stuks die worden goedgekeurd en 20 stuks die worden afgekeurd. Gevraagd welk percentage van de productie aan de gestelde kwaliteitsnorm voldoet.

Met zekerheid is hierover natuurlijk niets te zeggen. Het ziet er wel naar uit dat de fractie afgekeurde exemplaren in de buurt van  $\frac{20}{500}$  of 4% zal liggen maar of de afwijking groot of klein is, valt zo niet te zeggen.

We zullen nu toch een uitspraak moeten gaan doen en daar we met zekerheid geen enkele uitspraak kunnen doen (behalve die, dat er afgekeurde exemplaren bestaan), zullen we het risico moeten aanvaarden, dat we wel eens een foute uitspraak doen. Het procédé berust hierop, dat we aannemen, dat als we slechts één experiment uitvoeren van een uitkomst met een zeer kleine wh., deze uitkomst dan niet gevonden wordt. Hoe klein deze kleine wh. gekozen wordt is een zaak van praktisch beleid, waar we nog wel even op zullen terugkomen. Hier kiezen we min of meer willekeurig de waarde 0,05 of 5%, die de betrouwbaarheidsdrempel wordt genoemd.

De fractie goede exemplaren in de populatie heeft een vaste, maar onbekende waarde  $p$ , die tevens de kans is om bij het steekproef nemen een goede te trekken. Bij een steekproef ter grootte  $n$  met  $k$  goede uitkomsten is het gemiddelde van  $k/n$  gelijk aan  $p$  en de spreiding  $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ .

We verwachten dat de uitkomst dicht bij het gemiddelde ligt en zullen de kans dat de uitkomst meer dan  $\lambda$  maal de spreiding van het gemiddelde aflight, in symbolen  $P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \lambda \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ , de overschrijdingskans

behorende bij  $\lambda$  noemen. Door  $\lambda$  groter te maken kunnen we deze natuurlijk steeds kleiner maken. Ook kunnen we omgekeerd de vraag stellen hoe groot  $\lambda$  moet zijn om de overschrijdingskans een zeker bedrag te laten zijn. Daar voor een herhaald alternatief alle kansen bekend zijn, kan dit in principe voor iedere waarde van  $p$  en  $n$  uitgerekend worden. In ons geval behoeft alleen  $n = 500$  te worden genomen. We maken echter ter vereenvoudiging de veronderstelling, dat we bij benadering gebruik mogen maken van de normale frequentiefunctie, waarbij de overschrijdingskans behorende bij  $\lambda$  gelijk is aan

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\lambda} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Hiervan bestaan tabellen, waarvan we hieronder een kort uittreksel geven.

$\lambda$	overschr. kans	overschr. kans	$\lambda$
1	0,32	0,1	1,6
2	0,05	0,05	2,0
3	0,003	0,01	2,3
4	0,00006	0,001	3,3
		0,0001	3,9

Bij de door ons gekozen betrouwbaarheidsdrempel van 0,05 hoort dus  $\lambda = 2$ . Dus

$$P \left( p - 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \frac{k}{n} < p + 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) = 0,95.$$

We nemen nu aan dat  $\frac{k}{n}$  voor een bepaalde  $p$  tussen deze grenzen ligt. We kunnen dit ook grafisch uitzetten. De horizontale as nemen we als  $p$ -as en de verticale als  $\frac{k}{n}$ -as. Bij elke waarde  $p_0$  van  $p$  zetten we op de verticale lijn  $p = p_0$  het interval uit, dat voor die waarde van  $p$  door bovenstaande ongelijkheid voor  $k/n$  is aangegeven. We doen dit voor iedere waarde van  $p$  tussen 0 en 1 en vinden zo door al deze intervallen bij elkaar te nemen een gebied in het platte vlak, dat ook door bovenstaande ongelijkheid wordt bepaald en dat een betrouwbaarheidsgebied behorende bij de drempel 0,05 wordt genoemd. Onafhankelijk van enige veronderstelling a priori over de grootte van  $p$  kunnen we nu zeggen dat de kans dat  $\frac{k}{n}$  binnen het betrouwbaarheidsgebied ligt, 0,95 is.

In overeenstemming met de gedragslijn, die in het begin van deze paragraaf is uiteengezet, nemen we aan, dat bij de steekproef, die we genomen hebben, de uitkomst inderdaad in het betrouwbaarheidsgebied ligt. De uitkomst is echter 0,96 en we vinden dus dat

$$p - 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{500}} < 0,96 < p + 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{500}}.$$

Meetkundig komt dit hierop neer, dat we de horizontale lijn  $\frac{k}{n} = 0,96$  in de grafiek zetten en bepalen, wat deze met het betrouwbaarheidsgebied gemeen heeft. Dit leidt nu tot grenzen voor  $p$  die de betrouwbaarheidsgrenzen voor  $p$  worden genoemd. In ons geval wordt de berekening

$$- 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{500}} < p - 0,96 < 2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{500}}$$

$$(p - 0,96)^2 < \frac{4p(1-p)}{500}$$

$$1,008 p^2 - 1,928 p + 0,96^2 < 0,$$

hetgeen leidt tot  $0,938 < p < 0,974$ . Dit zijn dus de betrouwbaarheidsgrenzen. We doen nu de uitspraak, dat het percentage goede exemplaren in de populatie tussen 93,8% en 97,4% ligt. De betekenis van deze uitspraak is de volgende. Als we dezelfde gedragslijn om tot een uitspraak

te komen een groot aantal malen volgen, dan zullen we gemiddeld in 95% van de gevallen een juiste en in 5% van de gevallen een onjuiste uitspraak doen.

Het is natuurlijk ook mogelijk de 95% en 5% te vervangen door bv. 99% en 1%, maar de betrouwbaarheidsgrenzen, die we dan voor  $p$  vinden, komen verder uit elkaar te liggen en de uitspraak, die we doen, wordt dienovereenkomstig vager en dus minder bruikbaar.

Het ene uiterste is een zeer kleine kans op een onjuiste uitspraak, waarbij de uitspraak zeer vaag en weinig zeggend wordt en het andere uiterste is een vrij grote kans op een onjuiste uitspraak, waarbij de uitspraak zelf scherp is. Tussen deze twee uitersten moet een praktische tussenweg worden gevonden. Waar die ligt hangt van allerlei factoren af, o.a. hoe schadelijk men het acht om een foute uitspraak te doen. Als men dit om bepaalde redenen catastrofaal acht, moet men de betrouwbaarheidsdrempel laag kiezen. Omdat men anderzijds aan een vage uitspraak ook weinig heeft, moet men dan de prijs voor de grotere zekerheid betalen, door de steekproef groter te kiezen en zo de betrouwbaarheidsgrenzen dichter bij elkaar te krijgen.

Het geval van een alternatief is in zoverre bijzonder eenvoudig dat dan de kansen die bij de steekproef optreden, exact bekend zijn. We hebben weliswaar bij de berekening een benadering met een normale verdeling gemaakt, maar in principe was dit niet nodig geweest.

In ingewikkelder gevallen is dat niet meer zo. We wensen dan een zekere populatiegrootte te bepalen en gebruiken daartoe een schatting, die uit de steekproef berekend wordt. Meestal weet men de verdeling van deze schatting niet. Als de steekproef groot is kunnen we het er vaak wel op wagen om aan te nemen, dat de verdeling van de schatting normaal is. Dit kunnen we bovendien (ook bij kleine steekproeven) doen als de populatiegrootte het gemiddelde  $m$  van een normaal verdeelde stochastische variabele  $x$  is en  $\bar{x}$  de schatting van  $m$ . Er geldt namelijk de volgende stelling:

Als  $x$  een stochastische veranderlijke is met een normale frequentiefunctie dan heeft het steekproefgemiddelde  $\bar{x}$  van een onafhankelijke steekproef ook een normale frequentiefunctie.

We weten al van vroeger, dat als  $x$  gemiddelde  $m$  en spreiding  $\sigma$  heeft,  $\bar{x}$  gemiddelde  $m$  en spreiding  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  heeft.

Ook als we aannemen, dat we voor de schatting met een normale frequentiefunctie mogen werken, dan is de zaak toch pas vastgelegd als gemiddelde en spreiding bekend zijn. Nu is het gemiddelde juist de gezochte populatiegrootte, als we ten minste aannemen, dat de schatting zuiver is; deze populatiegrootte wordt in de theorie van de betrouwbaarheidsgrenzen variabel genomen, zodat we daar geen last van hebben. De spreiding evenwel is een onbekende, waar we in eerste instantie geen vat op hebben. We trachten deze dan door een steekproef-schatting te vervangen.

We nemen het geval dat het gemiddelde  $m$  van een stochastische variabele  $x$  met normale frequentiefunctie en spreiding  $\sigma$  gezocht is. Dan heeft de grootte  $\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-m)}{\sigma}$  een normale frequentiefunctie met gemiddelde 0 en spreiding 1. We vervangen nu  $\sigma$  door de zuivere schatting

(zie paragraaf 6):

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

De grootheid  $\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-m)}{s}$  is niet meer normaal verdeeld (wel bij benadering voor grote  $n$ ); de frequentiefunctie (die van  $n$  afhangt) is echter bekend en wordt naar Student genoemd. Van de overschrijdingskansen behorende bij deze frequentiefunctie vindt men tabellen in de leerboeken over statistiek. Er wordt daar dan gesproken over "graden van vrijheid"; dit correspondeert met  $n-1$ . Dus bij een steekproef ter grootte 10 behoren 9 graden van vrijheid. We behandelen nog een voorbeeld.

Van een fysische grootheid zijn 8 metingen gedaan met de uitkomsten: één maal 13,2, drie maal 13,4, twee maal 13,5 en twee maal 13,6.

Het steekproefgemiddelde  $\bar{x} = 13,45$  en  $s = \frac{0,12}{7}$ . Dus  $\frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{0,12}{56}} = 0,046$ .

We nemen een betrouwbaarheidsdrempel 0,05 en vinden in een tabel van overschrijdingskansen voor 7 graden van vrijheid de waarde 2,4.

Voor de onbekende  $m$  vinden we volgens onze gedragslijn dus:

$$- 2,4 < \frac{13,45 - m}{0,046} < 2,4,$$

waaruit volgt  $13,34 < m < 13,56$ , hetgeen betrouwbaarheidsgrenzen voor de gemeten grootheid zijn. Hadden we als betrouwbaarheidsdrempel 0,001 genomen, dan hadden we in de tabel 5,4 gevonden en voor de betrouwbaarheidsgrenzen  $13,2 < m < 13,7$ . Hieruit is de invloed van de keuze van de betrouwbaarheidsdrempel duidelijk te zien.

## §.9 Correlatie.

Het begrip afhankelijkheid van twee stochastische veranderlijken hebben we al eerder besproken. Het ene uiterste is onafhankelijkheid, waarbij de verdeling van de ene veranderlijke niet afhangt van de waarde die de andere aanneemt. Het andere uiterste is volledige, functionele afhankelijkheid, waarbij de waarde van de ene veranderlijke door die van de andere volledig is vastgelegd (bv. lengte van een zijde en oppervlakte van een vierkant). Tussen deze uitersten zijn er tussengevallen van meerdere of mindere mate van afhankelijkheid. Deze wensen we nu in een maat uit te drukken. Als men bv. van een aantal mensen de lengte en het gewicht meet, dan zal daartussen wel een zekere afhankelijkheid zijn in die zin, dat in het algemeen langere mensen ook zwaarder zullen zijn. De afhankelijkheid gaat echter niet zo ver, dat alle mensen met dezelfde lengte ook hetzelfde gewicht hebben.

Men gebruikt voor het meten van afhankelijkheid tussen stochastische veranderlijken  $x$  en  $y$  onder andere een grootheid, die correlatie-coëfficiënt  $\rho$  wordt genoemd. Deze wordt bepaald door de formule

$$\rho = \frac{E\{(x-m_1)(y-m_2)\}}{\sigma_1 \sigma_2},$$



waarin  $m_1$  en  $\sigma_1$  gemiddelde en spreiding van  $x$  en  $m_2$  en  $\sigma_2$  gemiddelde en spreiding van  $y$  zijn. Een steekproefschatting voor deze grootheid is

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Voor deze grootheden geldt  $-1 \leq \rho \leq 1$  en  $-1 \leq r \leq 1$ . Dit zien we als volgt in. Als  $u$  en  $v$  stochastische variabelen zijn, dan is

$$E(u + v) = E(u) + E(v);$$

als  $u$  een stochastische variabele is en  $c$  een constante, dan is

$$E(cu) = c E(u).$$

Beide beweringen volgen onmiddellijk uit de integraaldefinitie van het gemiddelde. Neem nu een reële parameter  $\lambda$ , en noem  $x - m_1 = u$ ,  $y - m_2 = v$ , dan is

$$E\{(\lambda u + v)^2\} = E(\lambda^2 u^2 + 2\lambda uv + v^2) = \lambda^2 E(u^2) + 2\lambda E(uv) + E(v^2).$$

Dit is echter klaarblijkelijk  $\geq 0$  voor iedere waarde van  $\lambda$ , wegens  $(\lambda u + v)^2 \geq 0$ . Hieruit volgt echter direct dat

$$\{E(u, v)\}^2 \leq E(u^2) E(v^2),$$

dus

$$-\sqrt{E(u^2) E(v^2)} \leq E(uv) \leq \sqrt{E(u^2) E(v^2)},$$

dus  $-1 \leq \rho \leq 1$ . Op analoge wijze toont men aan, dat  $-1 \leq r \leq 1$ .

Als  $x$  en  $y$  onafhankelijk zijn, dan is  $\rho = 0$ . Immers de frequentiefunctie van de gecombineerde veranderlijke  $(x, y)$  is  $f_1(\xi) f_2(\eta)$ ; hierin zijn  $f_1$  en  $f_2$  de frequentiefuncties van  $x$ , resp.  $y$ . Dus

$$\begin{aligned} E\{(x - m_1)(y - m_2)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - m_1)(\eta - m_2) f_1(\xi) f_2(\eta) d\xi d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - m_1) f_1(\xi) d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - m_2) f_2(\eta) d\eta = 0. \end{aligned}$$

Dus:

Onafhankelijke veranderlijken zijn ongecorrleerd.

Uit  $\rho = 0$  volgt omgekeerd nog niet, dat de veranderlijken onafhankelijk zijn.

We beschouwen nu het geval dat  $\rho = 1$ . Dan is er klaarblijkelijk een negatieve waarde van  $\lambda$ , waarvoor  $E\{(\lambda u + v)^2\} = 0$ . Omdat  $(\lambda u + v)^2 \geq 0$  betekent dit dat  $\lambda u + v = 0$ , dus

$$y - m_2 = -\lambda(x - m_1);$$

er bestaat dus niet alleen een functionele afhankelijkheid tussen  $x$  en  $y$ ,

maar deze is zelfs lineair en wel dusdanig dat bij toenemende  $x$  ook  $y$  toeneemt.

Bij  $\rho = -1$  komt er ook zo'n lineair verband, nu echter met afnemende  $y$  bij toenemende  $x$ .

Hieruit blijkt, dat de correlatiecoëfficiënt een maat is voor de lineaire afhankelijkheid van twee stochastische veranderlijken.

De steekproefgrootte  $r$  is een schatting van  $\rho$ . De grootte van  $r$  geeft dus ook een idee van de lineaire afhankelijkheid. Het verdient aanbeveling hieraan pas waarde te hechten, als de afmetingen van de steekproef redelijk groot zijn.

## HOOFDSTUK IV VECTORANALYSE

### §.1 Vectorvelden.

In de fysica heeft men vaak te maken met de situatie, dat in elk punt van de ruimte of van een gedeelte van de ruimte een vector gegeven is. Voorbeelden zijn diverse vormen van krachtvelden zoals elektrisch veld, magnetisch veld, gravitatieveld; verder stromingsvelden, zoals de plaatselijke snelheid van de materie in een punt van een stromende vloeistof.

Dit brengt ons tot het begrip van een vectorveld: in elk punt van een deel van de ruimte is een vector  $\underline{a}$  gegeven, die nog afhangt van de plaats van dat punt, dus bv. van de coördinaten  $x, y, z$  van dit punt:  $\underline{a}(x,y,z)$ . De vector zelf kan beschreven worden door zijn rechthoekige componenten:  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , die natuurlijk elk ook weer afhangen van  $x, y, z$ . De beschrijving van een vectorveld in getalfuncties geschiedt dus door drie functies van drie veranderlijken  $a_1(x,y,z), a_2(x,y,z), a_3(x,y,z)$ . Dit is de vorm waarin we een expliciet gegeven vectorveld vaak bepalen.

Bij theoretische beschouwingen daarentegen zullen we de voorkeur geven aan een kortere notatie. In dit opzicht is het schrijven van  $\underline{a}(x,y,z)$  al een winst, maar ook de veranderlijken  $(x,y,z)$ , die de coördinaten van een punt aangeven, vatten we samen tot een vector  $\underline{x} = (x,y,z)$ , welks meetkundige betekenis de positievector van het punt is, nl. de vector OP van de oorsprong van het coördinatenstelsel naar het punt.

Een vectorveld wordt dus beschreven met een vectorfunctie  $\underline{a}(\underline{x})$ .

Andere fysische grootheden, die niet door een vector maar door een getal worden bepaald, zijn ook van punt tot punt variabel (bv. temperatuur, massadichtheid). De grootheid  $\alpha$  is dan ook een functie  $\alpha(x,y,z)$  van de coördinaten van het punt, of korter geschreven  $\alpha(\underline{x})$  van de positievector. Men noemt dit een scalarveld.

We noemen een vectorveld differentieerbaar als de componenten van dit veld differentieerbaar zijn. Van deze componenten kunnen dan partiële afgeleiden gevormd worden, bv. naar  $x$ :  $\frac{\partial a_1}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial x}, \frac{\partial a_3}{\partial x}$ . Deze vatten we weer samen tot een vectorafgeleide  $\frac{\partial \underline{a}}{\partial x}$  en analoog  $\frac{\partial \underline{a}}{\partial y}, \frac{\partial \underline{a}}{\partial z}$ .

Bij een scalarveld  $\alpha(\underline{x})$ , hetgeen een gewone functie van drie veranderlijken is, kunnen we ook de partiële afgeleiden naar de verschillende veranderlijken vormen  $\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \frac{\partial \alpha}{\partial z}$ , welke we nu als componenten van een vectorveld opvatten, dat we de gradiënt van  $\alpha$  noemen:

$\text{grad } \alpha = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right)$ . In plaats van grad  $\alpha$  schrijft men ook wel  $\nabla \alpha$  ( $\nabla = \text{nabla}$ ).

Als  $\underline{a} = \text{grad } \alpha$ , dan zeggen we dat  $\alpha$  een potentiaal van  $\underline{a}$  is (in de fysica noemt men meestal  $-\alpha$  een potentiaal van  $\underline{a}$ ). Niet ieder vectorveld heeft een potentiaal; als dit echter wel zo is, vereenvoudigt dit de beschrijving van het vectorveld, omdat een scalaire functie eenvoudiger is dan een vectorfunctie.

Vb.1 Electricisch veld van een puntlading in de oorsprong. De veldsterkte in een punt P is gericht langs de voerstraal OP en is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot O. De richting van de veldsterkte is dus dezelfde als die van de positievector  $\underline{x}$  van P. We kunnen deze dus  $\lambda \underline{x}$  stellen, waarin  $\lambda$  een scalaire factor is, die van  $\underline{x}$  mag afhangen. Noemen we de afstand  $|\underline{x}|$  van P tot O nu  $r$ , dus  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , dan moet  $|\lambda \underline{x}| = |\lambda| r$  evenredig zijn met  $\frac{1}{r^2}$ , dus  $\lambda = \frac{c}{r^3}$  met constante  $c$ . De veldsterkte is dus  $\underline{E} = \frac{c}{r^3} \underline{x} = \left( \frac{cx}{r^3}, \frac{cy}{r^3}, \frac{cz}{r^3} \right)$ . Dit veld heeft nu

inderdaad een potentiaal; neemt men namelijk  $\alpha = -\frac{c}{r}$ , dan is

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{c}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{cx}{r^3} \text{ en analoog } \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{cy}{r^3}, \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{cz}{r^3}, \text{ dus } \text{grad } \alpha = \underline{E}.$$

Potentiaal en veldsterkte zijn niet gedefinieerd in de oorsprong O.

We beschouwen nog eens de partiële afgeleide  $\frac{\partial \alpha}{\partial \underline{x}}$  van een functie  $\alpha(x, y, z)$ . Deze ontstaat door de veranderlijken  $y$  en  $z$  vast te houden en alleen  $x$  te variëren en van de zo ontstane functie van één veranderlijke de afgeleide te nemen in het punt waar de partiële afgeleide gezocht was. Meetkundig komt dit hierop neer, dat men in het punt een lijn evenwijdig met de  $x$ -as beschouwt en de variatie van de veranderlijke alleen op deze lijn toelaat. Analoog met  $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$  en  $\frac{\partial \alpha}{\partial z}$  met  $y$ -as resp.  $z$ -as. Er is echter van meetkundig standpunt geen enkele reden, om deze handelwijze alleen tot de richting van de coördinaatassen te beperken. We nemen nu een willekeurige rechte lijn door het punt P. Deze kan voorgesteld worden met de parametervoorstelling  $\underline{x} = \underline{p} + t\underline{v}$ ; hierin is  $\underline{p}$  de positievector van P,  $\underline{v}$  de richtingsvector van de lijn en  $t$  een parameter. We kunnen zonder bezwaar de vector  $\underline{v}$  een lengte 1 geven:  $|\underline{v}| = 1$  (een dergelijke vector noemt men wel eenheidsvector). Doen we dat, dan is  $|t|$  juist de afstand van het betreffende punt van de lijn tot P, immers deze afstand is  $|\underline{x} - \underline{p}| = |t\underline{v}| = |t|$ , als  $|\underline{v}| = 1$ . We beschouwen nu de functie  $\alpha(\underline{x})$  op de rechte; het gedrag is bepaald door

$$\varphi(t) = \alpha(\underline{p} + t\underline{v}),$$

waarin  $\varphi(t)$  de waarde geeft van de functie  $\alpha$  in het punt van de lijn, dat bij de waarde  $t$  van de parameter behoort. Bij  $t = 0$  behoort het punt P. De afgeleide van  $\varphi(t)$  voor  $t = 0$  noemen we daarom de richtingsafgeleide van  $\alpha(\underline{x})$  in  $\underline{p}$  voor de richting  $\underline{v}$ . Volgens de regels voor het differentiëren van functies van meer veranderlijken is echter

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{dz}{dt};$$

daar  $\underline{x} = \underline{p} + t\underline{v}$ , is echter juist  $\left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \underline{v}$ , zodat we, gebruik makend van het inwendige product van twee vectoren, voor de richtingsafgeleide kunnen schrijven

$$(1) \quad (\text{grad } \alpha, \underline{v}).$$

Dit geeft ons een meetkundige interpretatie van de gradiënt. De richtingsafgeleide van  $\alpha$  in de richting  $\underline{v}$  is namelijk de projectie van  $\text{grad } \alpha$  op de richting van  $\underline{v}$  met plusteken of minteken al naar gelang deze projectie in dezelfde of in tegengestelde richting als  $\underline{v}$  valt.

Immers uit (1) volgt dat de richtingsafgeleide gelijk is aan het product van de lengtes van grad  $\alpha$  en  $\underline{v}$  en de cosinus van de hoek tussen grad  $\alpha$  en  $\underline{v}$ . De lengte van  $\underline{v}$  is echter = 1, waaruit de bewering over de projectie nu direct volgt.

De richtingsafgeleide is dus maximaal als grad  $\alpha$  en  $\underline{v}$  dezelfde richting hebben. Grad  $\alpha$  geeft de richting van de sterkste toeneming van de functie  $\alpha$ ; bovendien geeft  $|\text{grad } \alpha|$  de afgeleide in die richting. In richtingen loodrecht op grad  $\alpha$  is de richtingsafgeleide nul, dus de functie in eerste benadering constant.

Het vlak loodrecht op grad  $\alpha$  is raakvlak aan het oppervlak  $\alpha = \text{constant}$ .

## §.2 De integraalstellingen.

Laat een kromme K gegeven zijn door een parametervoorstelling  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . Voorbeeld: de eenheidscirkel in het  $(x,y)$ -vlak met middelpunt in de oorsprong:  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 0$ . In vectorschrijfwijze geven we de kromme weer door  $\underline{x} = \underline{x}(t)$ . We kunnen

nu de vector  $\frac{d\underline{x}}{dt} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$  vormen; deze heeft de richting van de raaklijn aan de kromme. Immers de richting van de koorde tussen de punten behorende bij  $t$  en  $t+h$  is  $\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)$ , of ook  $\frac{1}{h}(\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t))$ , dus de limiet hiervan voor  $h \rightarrow 0$  is  $\frac{d\underline{x}}{dt}$ , de richting van de raaklijn. Een eenheidsvector in de raakrichting heet de raakvector  $\underline{t}$ .

Deze ontstaat dus door  $\frac{d\underline{x}}{dt}$  door zijn lengte  $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$  te

delen. Eigenlijk is er nog een tekendubbelzinnigheid in de definitie van  $\underline{t}$ , daar we  $\underline{t}$  ook door zijn tegengestelde mogen vervangen. Bij de hier gedane keuze wijst  $\underline{t}$  in de richting van het doorlopen der kromme in de richting van toenemende  $t$ . Stel, dat  $t$  het interval  $a \leq t \leq b$  doorloopt, dan is  $\underline{x}(a)$  het beginpunt en  $\underline{x}(b)$  het eindpunt van de kromme.

Stel nu, dat er verder een scalarveld  $\alpha(\underline{x})$  gegeven is, dan beschouwen we dit scalarveld op de kromme, door de functie  $\varphi(t) = \alpha(\underline{x}(t))$  te bestuderen. Hierop passen we de hoofdstelling van de integraalrekening toe:

$$\int_a^b \frac{d\varphi}{dt} dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Nu is  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{dz}{dt}$ ; verder is het lijnelement  $ds$  op de kromme K bepaald door  $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$ , dus

$\frac{d\varphi}{dt} dt = (\text{grad } \alpha, \underline{t}) ds$ . Hiermee vinden we de eerste integraalformule

$$(1) \quad \int_K (\text{grad } \alpha, \underline{t}) ds = \alpha(\text{eindpunt}) - \alpha(\text{beginpunt}).$$

Daar  $\underline{t}$  een eenheidsvector is, is  $(\text{grad } \alpha, \underline{t})$  de richtingsafgeleide van  $\alpha$  in de richting van de raaklijn aan de kromme. Deze richtingsafgeleide noemt men de tangentiële afgeleide van  $\alpha$ .

De belangrijkste fysische toepassing van (1) is, het vectorveld  $\text{grad } \alpha$  op te vatten als een krachtveld en  $\alpha$  als een potentiaal van dit krachtveld. De integraal in het linkerlid van (1) is op te vatten als de arbeid, die verricht wordt bij doorlopen van de kromme  $K$ ; immers als  $\underline{a} = \text{grad } \alpha$  de kracht is, dan is  $(\underline{a}, \underline{t})$  de tangentiële component van de kracht. Op grond van (1) is de potentiaal  $\alpha$  een maat voor de energie in het veld, want de arbeid die verricht wordt als men van het punt  $P$  naar het punt  $Q$  gaat, is  $\alpha(Q) - \alpha(P)$ . Blijkbaar hangt deze arbeid niet af van de weg, die men kiest, maar alleen van begin- en eindpunt. Dit laatste kan ook als volgt worden uitgedrukt. Neemt men een gesloten kromme, dat is een kromme waarvan beginpunt en eindpunt samenvallen (bv. een cirkel), dan is blijkens (1) de totale arbeid dus nul. Een veld, dat aan deze eis voldoet, heet conservatief; het voldoet aan de wet van behoud van energie, want men kan geen energie winnen of verliezen door een rondgang door het veld te maken. We hebben dus gevonden:

Een veld, dat een potentiaal bezit, is conservatief.

Omgekeerd heeft een conservatief veld ook een potentiaal, hetgeen we niet zullen aantonen. Er bestaan echter ook velden, die geen potentiaal hebben en waarvoor  $\int_K (\underline{a}, \underline{t}) ds$ , uitgestrekt over een gesloten kromme niet = 0 hoeft te zijn.

Vb.1 Neem in het platte vlak het veld  $\underline{a}$  gegeven door  $\underline{a} = (-y, x)$ . Deze vector staat in ieder punt loodrecht op de positievector  $(x, y)$ . We integreren nu over de eenheidscirkel. Blijkbaar valt dan  $\underline{a}$  in de richting van  $\underline{t}$  en dus is  $(\underline{a}, \underline{t}) = |\underline{a}| = 1$  op deze cirkel, mits  $\underline{a}$  en  $\underline{t}$  gelijk georiënteerd zijn. Kies nu de parametervoorstelling  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ , dan is  $\frac{dx}{dt} = -\sin t$ ,  $\frac{dy}{dt} = \cos t$ , dus  $ds = dt$  en  $\underline{t} =$

$$= (-\sin t, \cos t), (\underline{a}, \underline{t}) = 1. \text{ Dus } \int_K (\underline{a}, \underline{t}) ds = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

We beschouwen nu de integraal  $\int_K (\underline{a}, \underline{t}) ds$  voor een willekeurig veld  $\underline{a}$  en een gesloten kromme  $K$ . Allereerst nemen we voor  $K$  een kleine rechthoek in het  $(x, y)$ -vlak met zijden evenwijdig aan de coördinaatassen, die op een dusdanige wijze doorlopen wordt, dat daarbij het rechthoekige gebied voortdurend aan de linkerkant ligt. Op de zijden evenwijdig met de  $x$ -as is  $\underline{t} = (1, 0)$  of  $(-1, 0)$ , dus  $(\underline{a}, \underline{t}) = \pm a_1$ , en wel  $+ a_1$  op de onderste en  $- a_1$  op de bovenste van de twee zijden. Noemt men de lengten der zijden  $\Delta x$  en  $\Delta y$ , dan zijn de twee integralen bij benadering resp.  $a_1 \Delta x$  en  $- a_1 \Delta x$ , waarbij de waarden van  $a_1$  in beide gevallen behoren bij waarden van  $y$ , die  $\Delta y$  verschillen. Beide integralen samen zijn bij benadering dus  $-\frac{\partial a_1}{\partial y} \Delta y \Delta x$ . Op analoge wijze vinden we bij de zijden evenwijdig aan de  $y$ -as bij benadering  $a_2 \Delta y$  voor de rechtse en  $- a_2 \Delta y$  voor de linkse zijde en samen dus bij benadering  $\frac{\partial a_2}{\partial x} \Delta x \Delta y$ . Daar  $\Delta x \Delta y$  de oppervlakte van de rechthoek is, vinden we zo bij benadering voor de integraal

$$\left( \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) \cdot \text{opp rechthoek.}$$

We beschouwen nu een gebied  $G$  in het  $(x,y)$ -vlak met randkromme  $K$ , die we weer zo doorlopen denken, dat het gebied hierbij voortdurend aan de linkerkant ligt. We verdelen het gebied in kleine rechthoekjes door lijnen evenwijdig met de  $x$ -as en de  $y$ -as. Elk rechthoekje afzonderlijk doorlopen we weer zo, dat het ingesloten rechthoeksgebied aan de linkerkant ligt. Tellen we dan de integralen van alle rechthoeken bij elkaar op dan vallen de bijdragen van de zijden, die binnen  $G$  liggen alle tegen elkaar weg omdat elk dergelijk lijntje rand is van twee rechthoeken en bij deze twee rechthoeken in tegengestelde richting doorlopen wordt en zodoende twee bijdragen tot de integralen levert die precies elkaars tegengestelde zijn. Bij optelling van alle integralen blijft alleen de integraal over  $K$  over. De stukjes aan de rand zijn geen zuivere rechthoeken, daar er door  $K$  stukjes afgesneden worden.

Op elke rechthoek passen we bovenstaande benadering toe. Tellen we dit op en maken we de verdeling steeds fijner dan nadert de som van deze benaderingen klaarblijkelijk tot de integraal

$$\iint_G \left( \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

We bewijzen niet, dat de gemaakte fout bij de benaderingen steeds kleiner wordt naarmate de verdeling steeds fijner wordt, en dat het niet hindert, dat de stukjes aan de rand geen rechthoeken zijn. Zo vinden we

$$(2) \quad \iint_G \left( \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_K (\underline{a}, \underline{t}) ds,$$

voor een gebied  $G$  in het  $(x,y)$ -vlak met randkromme  $K$ , waarbij de oriëntering van de raakvector  $\underline{t}$  van  $K$  behoort bij een dusdanige omloopszin van  $K$ , dat hierbij  $G$  aan de linkerkant ligt.

Het in voorbeeld 1 gevonden resultaat klopt met (2), want  $\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = 2$  en de oppervlakte van de eenheidscirkel is  $\pi$ .

We beschouwen nu een stuk oppervlak  $S$  in de ruimte met randkromme  $K$ . We willen nu wederom  $\int_K (\underline{a}, \underline{t}) ds$  in verband brengen met een integraal

die over  $S$  wordt uitgestrekt. Om dit te doen gaan we  $S$  in kleine stukjes verdelen; hierop zouden we graag het voorafgaande toepassen. Nu is een dergelijk stukje van  $S$  in het algemeen niet vlak, maar gekromd. Voor een klein stukje zal het echter geen kwaad kunnen, het stukje door een stukje plat vlak te benaderen. Dit stukje hoeft echter niet evenwijdig met één van de coördinaatvlakken te zijn. We voeren daarom even een hulpcoördinatenstelsel in, waarin we een punt de coördinaten  $(u,v,w)$  geven en wel zo dat de  $u$ -as en de  $v$ -as evenwijdig zijn met het beschouwde vlakstukje. De eenheidsvectoren langs deze positieve assen noemen we  $\underline{h}$ ,  $\underline{k}$ ,  $\underline{n}$ . Dan is  $\underline{u} = (x, \underline{h})$ ,  $\underline{v} = (x, \underline{k})$ ,  $\underline{w} = (x, \underline{n})$ , en  $\underline{x} = u\underline{h} + v\underline{k} + w\underline{n}$ , dus  $x = uh_1 + vk_1 + wn_1$ ,  $y = uh_2 + vk_2 + wn_2$ ,  $z = uh_3 + vk_3 + wn_3$ .

Een vector  $\underline{a}$  ontbinden we nu ook in componenten volgens deze assen:  $\underline{a}_u = (\underline{a}, \underline{h})$ ,  $\underline{a}_v = (\underline{a}, \underline{k})$ ,  $\underline{a}_w = (\underline{a}, \underline{n})$ . Nu kunnen we de formule voor het

platte vlak toepassen. We vinden dan de integraal van  $\frac{\partial a_v}{\partial u} - \frac{\partial a_u}{\partial v}$ . We gaan dit nu weer omzetten in de oorspronkelijke componenten en coördinaten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_v}{\partial u} - \frac{\partial a_u}{\partial v} &= \frac{\partial(\underline{a}, \underline{k})}{\partial u} - \frac{\partial(\underline{a}, \underline{h})}{\partial v} = \left( \frac{\partial \underline{a}}{\partial u}, \underline{k} \right) - \left( \frac{\partial \underline{a}}{\partial v}, \underline{h} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial a_1}{\partial x} h_1 + \frac{\partial a_2}{\partial y} h_2 + \frac{\partial a_3}{\partial z} h_3, \underline{k} \right) - \left( \frac{\partial a_1}{\partial x} k_1 + \frac{\partial a_2}{\partial y} k_2 + \frac{\partial a_3}{\partial z} k_3, \underline{h} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) (h_2 k_3 - h_3 k_2) + \left( \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) (h_3 k_1 - h_1 k_3) + \\ &+ \left( \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) (h_1 k_2 - h_2 k_1). \end{aligned}$$

Nu is de vector  $(h_2 k_3 - h_3 k_2, h_3 k_1 - h_1 k_3, h_1 k_2 - h_2 k_1)$  juist het vectorproduct  $\underline{h} \times \underline{k}$ . Omdat  $\underline{h}, \underline{k}, \underline{n}$  een rechts stelsel onderling loodrechte eenheidsvectoren vormen is  $\underline{h} \times \underline{k} = \underline{n}$ . Verder is de vector

$$\left( \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}, \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) \text{ juist de } \underline{\text{rotatie}} \text{ van } \underline{a}.$$

De hierboven gevonden uitdrukking is het inwendig product van deze

$$\text{vectoren: } \frac{\partial a_v}{\partial u} - \frac{\partial a_u}{\partial v} = (\text{rot } \underline{a}, \underline{n}).$$

De integraal van  $\frac{\partial a_v}{\partial u} - \frac{\partial a_u}{\partial v}$  over het stukje is dus bij benadering gelijk aan  $(\text{rot } \underline{a}, \underline{n})$  maal de oppervlakte van het stukje. Volgens (2) is deze integraal gelijk aan  $\int_K (\underline{a}, \underline{t}) ds$ , waarbij K de randkromme van het stukje

is. Deze moet zo worden doorlopen dat, in de  $(u, v, w)$ -coördinaten gerekend, het stukje in het  $(u, v)$ -vlak aan de linkerkant ligt. Dit betekent, dat de omloopszin van K en de richting van  $\underline{n}$  samen de schroefzin van een rechtse schroef moeten vormen.

Nu verdelen we een niet meer klein verondersteld oppervlak S met randkromme K, waarop we een bepaalde normaalrichting uitgekozen hebben, in kleine stukjes. Op alle randkrommen van deze stukjes passen we het bovenstaande toe. We tellen de zo verkregen integralen alle bij elkaar op. De bijdrage van krommen die er door de verdeling in stukjes bijgekomen zijn, vallen echter weg, omdat zo'n stuk kromme randkromme is van twee stukjes en bij beide in tegengestelde zin doorlopen wordt en dus tegengestelde integralen levert. Bij optelling van alle lijnintegralen blijft alleen de integraal over K over. Het andere lid nadert bij verfijning van de verdeling tot de integraal over S van  $(\text{rot } \underline{a}, \underline{n})$ . Zo vinden we

$$(3) \quad \boxed{\int_S (\text{rot } \underline{a}, \underline{n}) d\sigma = \int_K (\underline{a}, \underline{t}) ds} \quad (\text{formule van Stokes}).$$

Hierin is  $d\sigma$  een oppervlakte-element op S. Verder passen de oriënteringen van  $\underline{n}$  en  $\underline{t}$  zo bij elkaar, dat de omloopszin van de kromme K, die past bij  $\underline{t}$ , tezamen met  $\underline{n}$  de schroefzin van een rechtse schroef geeft.



Omdat  $\underline{n}$  een eenheidsvector is, is  $(\text{rot } \underline{a}, \underline{n})$  de projectie van  $\text{rot } \underline{a}$  op de richting van  $\underline{n}$ , of zoals men ook wel zegt de normale component van  $\text{rot } \underline{a}$ .

Vb.2 Neem het vectorveld  $\underline{a} = (z-y, x-z, y-x)$ ; dan is  $\text{rot } \underline{a} = (2, 2, 2)$ . We nemen nu de halve bol, die bestaat uit het stuk boven het  $(x, y)$ -vlak van de bol  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . We kiezen de naar buiten wijzende normaal op het boloppervlak; hiervoor geldt kennelijk  $\underline{n} = (x, y, z)$  in het punt  $(x, y, z)$  van het boloppervlak. We kiezen poolcoördinaten in het  $(x, y)$ -vlak. Op grond van een in het eerste jaar afgeleide formule voor de oppervlakte is nu het linkerlid van (3) gelijk aan

$$\iint (\text{rot } \underline{a}, \underline{n}) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} r dr d\varphi,$$

waarbij  $z = \sqrt{1-r^2}$ , dus  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$  en

$(\text{rot } \underline{a}, \underline{n}) = 2(x + y + z) = 2(r \cos \varphi + r \sin \varphi + \sqrt{1-r^2})$ , zodat de integraal overgaat in:

$$\int_0^1 dr \int_0^{2\pi} 2(r \cos \varphi + r \sin \varphi + \sqrt{1-r^2}) \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} d\varphi, \text{ maar } \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0, \text{ dus er komt } 4\pi \int_0^1 r dr = 2\pi. \text{ De randkromme is de}$$

eenheidscirkel in het  $(x, y)$ -vlak. In het  $(x, y)$ -vlak is  $z = 0$ , dus  $\underline{a} = (-y, x, y-x)$ . Bij projectie van  $\underline{a}$  op  $\underline{t}$ , die ook in het  $(x, y)$ -vlak ligt, mag men  $\underline{a}$  dan ook nog vervangen door  $(-y, x, 0)$ . Nu is precies de situatie ontstaan van voorbeeld 1; ook de oriëntering blijkt te kloppen met de bij formule (3) vereiste oriëntering. In voorbeeld 1 hebben we echter ook een uitkomst  $2\pi$  gevonden, hetgeen klopt.

Het is duidelijk, dat (2) een speciaal geval van (3) is, dat ontstaat als we voor  $S$  een stuk van het  $(x, y)$ -vlak kiezen, met  $\underline{n} = (0, 0, 1)$ .

Neemt men nu een gesloten oppervlak, bv. een boloppervlak, dan heeft dit in het geheel geen randkromme. Dit heeft ten gevolge, dat voor een gesloten oppervlak op grond van (3) geldt

$$\int_S (\text{rot } \underline{a}, \underline{n}) d\sigma = 0.$$

Past men de formule van Stokes toe op een conservatief veld  $\underline{a}$ , dan is het rechterlid steeds nul voor ieder oppervlak  $S$ . Hieruit volgt nu makkelijk, dat identiek geldt  $\text{rot } \underline{a} = \underline{0}$ : het veld is rotatievrij. Immers als in een punt  $\text{rot } \underline{a} \neq \underline{0}$ , dan kiezen we een klein oppervlakje door dat punt en loodrecht op de richting van  $\text{rot } \underline{a}$ . Dit geeft zeker een linkerlid van (3) dat niet nul is. Dus

Een conservatief veld is rotatievrij.

Men zou geneigd zijn te denken dat het omgekeerde van deze stelling ook uit de formule van Stokes volgt. Als namelijk het veld rotatievrij is, is het linkerlid van (3) altijd nul en dus ook het rechterlid. Hieruit kan echter nog niet worden geconcludeerd, dat het veld conservatief is, omdat (3) niet toegepast kan worden op alle gesloten krommen  $K$ , maar slechts op die gesloten krommen, die randkrommen zijn van een binnen het veld verlopend oppervlak. Het volgende fysische voorbeeld geeft een beeld van de ontstane moeilijkheid.

Vb.3 We beschouwen het magneetveld van een oneindig lange rechte stroomgeleider. De veldsterkte in een punt staat loodrecht op de stroomgeleider en loodrecht op de loodlijn uit het punt op de stroomgeleider en is omgekeerd evenredig met de afstand van het punt tot de stroomgeleider. Neem de stroomgeleider als  $z$ -as. Dan is makkelijk na te gaan, dat het magneetveld de gedaante  $\underline{H} = \left( \frac{-cy}{x^2+y^2}, \frac{cx}{x^2+y^2}, 0 \right)$  met constante  $c$  heeft.

Directe verificatie leert, dat  $\text{rot } \underline{H} = \underline{0}$ . Op de  $z$ -as is  $\underline{H}$  niet gedefinieerd. Als gesloten kromme nemen we de eenheidscirkel  $x^2 + y^2 = 1$  in het  $(x,y)$ -vlak. Dan is  $\int (\underline{H}, \underline{t}) ds$  juist  $c$  maal de integraal van voorbeeld 1, dat is dus  $2\pi c$ . Het veld is dus niet conservatief; dit is echter ook fysisch bekend, want door met een magneetpool om de stroomgeleider heen te lopen, valt inderdaad energie te winnen of te verliezen. Door een dergelijke om de  $z$ -as heen lopende kromme kan ook geen oppervlak gelegd worden, zonder de  $z$ -as, waar het veld oneindig wordt, te snijden. Neemt men echter een gesloten kromme, die niet om de  $z$ -as heen loopt, dan kan daar wel een oppervlak door gelegd worden en levert de formule van Stokes, dat de energie nul is.

Bij de eerste integraalformule hebben we gevonden, dat een veld, dat een potentiaal bezit, conservatief is en nu hebben we gevonden, dat een conservatief veld rotatievrij is. Door combinatie van deze resultaten vinden we, dat uit  $\underline{a} = \text{grad } \alpha$  volgt, dat  $\text{rot } \underline{a} = \underline{0}$ , dus de formule

$$\text{rot grad } \alpha = \underline{0},$$

die door directe berekening ook makkelijk te verifiëren is.

We beschouwen nu het linkerlid van de formule van Stokes nog wat nader, of nog iets algemener

$$(4) \quad \int_S (\underline{a}, \underline{n}) d\sigma$$

voor een willekeurig vectorveld  $\underline{a}$ . We zeggen nu, dat als  $\underline{a} = \text{rot } \underline{b}$ ,  $\underline{b}$  een vectorpotentiaal van  $\underline{a}$  is. Vatten we het veld  $\underline{a}$  op als een stromingsveld of een snelheidsveld, dan geeft (4) juist de door het oppervlak  $S$  stromende vloeistof, positief geteld in de richting van  $\underline{n}$ . Als  $\underline{a}$  een vectorpotentiaal heeft is voor een gesloten oppervlak de totale hoeveelheid in- en uitstromende vloeistof dus nul. De totale hoeveelheid materie blijft dus in elk ruimtestuk constant; het veld is bronvrij (d.w.z. (4) is nul voor alle gesloten oppervlakken  $S$ ).

Een veld, dat een vectorpotentiaal bezit, is bronvrij.

Omgekeerd heeft een bronvrij veld ook een vectorpotentiaal, hetgeen we niet zullen aantonen. Er bestaan echter ook velden, die geen vectorpotentiaal bezitten en waarvoor (4) voor een gesloten oppervlak  $S$  niet nul behoeft te zijn.

Vb.4 Neem het veld  $\underline{a} = (x, y, z)$ . Als oppervlak nemen we de eenheidsbol  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Op deze bol is kennelijk  $(\underline{a}, \underline{n}) = 1$  voor de naar buiten wijzende normaal  $\underline{n}$ . Dus is (4) gelijk aan de oppervlakte van de bol, d.i.  $4\pi$ .

We beschouwen nu de integraal (4) voor een willekeurig veld  $\underline{a}$  en een gesloten oppervlak  $S$ . Allereerst nemen we voor  $S$  het oppervlak van een klein rechthoekig blok met zijvlakken evenwijdig met de coördinaatvlakken en een naar buiten wijzende normaal. In de vlakken loodrecht op de  $x$ -as is  $\underline{n} = (1, 0, 0)$  of  $(-1, 0, 0)$ , dus  $(\underline{a}, \underline{n}) = \pm a_1$  en wel  $+ a_1$  op het vlak dat bij de grootste  $x$ -waarde behoort en  $- a_1$  op het andere vlak. Noemt men de lengten der ribben van het blok  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , dan zijn de bij de genoemde vlakken behorende integralen bij benadering resp.  $a_1 \Delta y \Delta z$  en  $- a_1 \Delta y \Delta z$ , waarbij de waarden van  $a_1$  in beide gevallen behoren bij waarden van  $x$  die  $\Delta x$  verschillen. Beide integralen samen zijn bij benadering dus  $\frac{\partial a_1}{\partial x} \Delta y \Delta z \Delta x$ . Op analoge wijze behandelt men de andere zijvlakken met als resultaten  $\frac{\partial a_2}{\partial y} \Delta x \Delta z \Delta y$  en  $\frac{\partial a_3}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$ . Maakt men gebruik van de divergentie van  $\underline{a}$ , dat is  $\text{div } \underline{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$ , dan vinden we als benadering voor de totale integraal:  $(\text{div } \underline{a}) \cdot \text{inh. blok}$ .

We beschouwen nu een gebied  $G$  in de ruimte met randoppervlak  $S$ , met naar buiten wijzende normaal. We verdelen het gebied in kleine rechthoekige blokjes, door vlakken loodrecht op de drie coördinaatassen. Bij elk blok nemen we de normaal, die naar buiten wijst en met behulp daarvan de bijbehorende integraal (4). Tellen we de integralen voor alle blokken bij elkaar op, dan vallen de bijdragen van de zijvlakken, die binnen  $G$  liggen, alle tegen elkaar weg, omdat elk dergelijk zijvlak rand is van twee blokken en bij beide blokken juist een tegengestelde normaalkeuze en dus ook een tegengestelde integraal behoort. Bij optelling van alle integralen blijft alleen de integraal over  $S$  over. De brokjes aan de rand van  $G$  zijn geen zuivere rechthoekige blokken daar er door  $S$  stukjes afgesneden worden.

Op elk blok passen we bovenstaande benadering toe. Tellen we dit op en maken we de verdeling steeds fijner, dan nadert de som van deze benaderingen klaarblijkelijk tot de integraal

$$\int_G \text{div } \underline{a} \, d\tau,$$

waarin  $d\tau = dx \, dy \, dz$  het ruimte-element is. We bewijzen niet, dat de gemaakte fout bij de benaderingen steeds kleiner wordt, naarmate de verdeling steeds fijner wordt, en dat het niet hindert, dat de stukjes aan de rand geen rechthoekige blokken zijn. Zo vinden we:

$$(5) \quad \boxed{\int_G \text{div } \underline{a} \, d\tau = \int_S (\underline{a}, \underline{n}) \, d\sigma} \quad (\text{formule van Gauss}).$$

Hierin is  $G$  een gebied in de ruimte,  $S$  het randoppervlak van  $G$ ,  $\underline{n}$  de naar buiten gerichte normaal.

Het in voorbeeld 4 gevonden resultaat klopt met deze formule, want  $\text{div } \underline{a} = 3$  en de inhoud van  $G$  is  $\frac{4}{3}\pi$ .

Past men de formule van Gauss toe op een veld, dat bronvrij is, dan is het rechterlid steeds nul en dus ook het linkerlid. Hieruit volgt nu weer direct, dat identiek geldt  $\text{div } \underline{a} = 0$ : het veld is divergentievrij:

Een bronvrij veld is divergentievrij.

Als omgekeerd gegeven is, dat het veld divergentievrij is, is het linkerlid van (5) en dus ook het rechterlid altijd nul. Hieruit volgt nog niet, dat het veld bronvrij is, want (5) geldt alleen voor die gesloten oppervlakken, waarvan het binnengebied geheel in het veld ligt. We lichten deze moeilijkheid met het volgende fysische voorbeeld toe.

Vb.5 We beschouwen het elektrische veld van een puntlading of, hetgeen op hetzelfde neerkomt, het gravitatieveld van een massapunt. De veldsterkte in een punt is gericht langs de verbindinglijn met de puntlading en is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot die lading. Nemen we de lading in de oorsprong van het coördinatenstelsel,

dan heeft het veld de gedaante  $\underline{E} = \left( \frac{cx}{r^3}, \frac{cy}{r^3}, \frac{cz}{r^3} \right)$  met constante  $c$  en

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  (zie voorbeeld 1 in paragraaf 1). Directe verificatie leert, dat  $\text{div } \underline{E} = 0$ . In de oorsprong is  $\underline{E}$  niet gedefinieerd. We nemen

als gesloten oppervlak de bol  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Op deze bol is  $r = 1$ ,

dus  $\int_S (\underline{E}, \underline{n}) d\sigma$  is juist  $c$  maal de in voorbeeld 4 uitgerekende integraal,

dus gelijk aan  $4\pi c$ . Het veld is dus niet bronvrij; in het binnengebied van het gesloten oppervlak is het veld niet overal gedefinieerd. Voor een gesloten oppervlak, dat de oorsprong niet in zijn inwendige bevat, is de corresponderende integraal wel nul.

We vergelijken de situatie in dit voorbeeld nog even met die in voorbeeld 3. Voor het veld in voorbeeld 3 geldt nu ook  $\text{div } \underline{H} = 0$ ; dit veld is bovendien bronvrij, want als een gesloten oppervlak de  $z$ -as niet snijdt, heeft ook het binnengebied niets met de  $z$ -as gemeen, zodat nu op ieder gesloten oppervlak de formule van Gauss kan worden toegepast. Aan de andere kant geldt in voorbeeld 5, dat  $\text{rot } \underline{E} = \underline{0}$ ; dit veld is bovendien conservatief, omdat iedere gesloten kromme, die niet door  $O$  gaat, als randkromme op te vatten is van een oppervlak, dat niet door  $O$  gaat, zodat op iedere gesloten kromme de formule van Stokes kan worden toegepast.

Uit de formule van Stokes hebben we geconcludeerd, dat een veld, dat een vectorpotentiaal bezit, bronvrij is en uit de formule van Gauss, dat een bronvrij veld divergentievrij is. Door combinatie van deze resultaten vinden we, dat uit  $\underline{b} = \text{rot } \underline{a}$  volgt, dat  $\text{div } \underline{b} = 0$ , dus de formule

$$\text{div rot } \underline{a} = 0,$$

die door directe berekening ook makkelijk te verifiëren is.

### §.3 Enkele formules voor gradiënt, rotatie en divergentie.

De in de vorige paragraaf behandelde integraalstellingen hebben het belang van gradiënt, rotatie en divergentie in het licht gesteld. We behandelen daarom nu enkele formules, die op deze operaties betrekking hebben.

Allereerst nog iets over de notatie. In plaats van grad  $\varphi$  schrijft men ook  $\nabla\varphi$ , waarbij  $\nabla$  als een symbolische vector  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$  wordt opgevat. Van deze symbolische vector vormen we nu het inwendige product met een vectorveld  $\underline{a}$ :  $(\nabla, \underline{a}) = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = \text{div } \underline{a}$ . Evenzo kan men het vectorproduct  $\nabla \times \underline{a}$  vormen, hetgeen juist rot  $\underline{a}$  blijkt te zijn. De notaties  $(\nabla, \underline{a})$  voor  $\text{div } \underline{a}$  en  $\nabla \times \underline{a}$  voor  $\text{rot } \underline{a}$  worden veel gebruikt.

We gaan nu het effect na van het na elkaar uitvoeren van twee van de operaties grad, rot en div. Hierbij moeten we bedenken, dat grad op een scalar en rot en div op een vector werken en dat grad en rot een vector en div een scalar opleveren. Dit geeft de volgende mogelijkheden van samenstelling:

rot grad  $\alpha$ , div grad  $\alpha$ , rot rot  $\underline{a}$ , div rot  $\underline{a}$ , grad div  $\underline{a}$ .

Twee van deze zijn al in paragraaf 2 als nul gesignaleerd:

- (1) rot grad  $\alpha = \underline{0}$ .
- (2) div rot  $\underline{a} = 0$ .

Verder heeft men voor div grad een apart symbool  $\Delta$  ingevoerd:

$$(3) \Delta\alpha = \text{div grad } \alpha = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}.$$

Deze operator  $\Delta$  laat men ook op een vectorveld  $\underline{a}$  werken met als resultaat een vectorveld, waarvan de componenten ontstaan door  $\Delta$  op de componenten van  $\underline{a}$  te laten werken:

$$(4) \Delta\underline{a} = (\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3).$$

Tussen de overgebleven uitdrukkingen bestaat nog de volgende betrekking:

$$(5) \text{grad div } \underline{a} = \text{rot rot } \underline{a} + \Delta\underline{a}.$$

We beschouwen om dit te bewijzen, de eerste component van rot rot  $\underline{a}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) = \\ & = \frac{\partial^2 a_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} \right), \end{aligned}$$

hetgeen de eerste component van grad div  $\underline{a} - \Delta\underline{a}$  is. De andere componenten gaan analoog, hetgeen tot (5) leidt.

Verder zijn er nog verbanden tussen rot, grad en div en de algebraïsche vectoroperaties. We noemen de volgende betrekkingen:

$$(6) \quad \text{grad } (\varphi\psi) = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi.$$

$$(7) \quad \text{rot } (\varphi \underline{a}) = \varphi \text{ rot } \underline{a} + (\text{grad } \varphi) \times \underline{a}.$$

$$(8) \quad \text{div } (\varphi \underline{a}) = \varphi \text{ div } \underline{a} + (\text{grad } \varphi, \underline{a}).$$

$$(9) \quad \text{div } (\underline{a} \times \underline{b}) = (\underline{b}, \text{rot } \underline{a}) - (\underline{a}, \text{rot } \underline{b}).$$

De geldigheid hiervan is zeer eenvoudig te verifiëren. Ten slotte blijkt de operatie  $\Delta$  verwisselbaar te zijn met grad, rot en div:

$$(10) \quad \text{grad } \Delta \varphi = \Delta \text{ grad } \varphi.$$

$$(11) \quad \text{rot } \Delta \underline{a} = \Delta \text{ rot } \underline{a}.$$

$$(12) \quad \text{div } \Delta \underline{a} = \Delta \text{ div } \underline{a}.$$

Men krijgt (10) door in (5)  $\underline{a} = \text{grad } \varphi$  te stellen en (1) en (3) te gebruiken. Men krijgt (12) door op (5) links en rechts div toe te passen en (2) en (3) te gebruiken. Voor (11) vervangt men eerst in (5)  $\underline{a}$  door  $\text{rot } \underline{a}$  en gebruikt (2):

$$\underline{0} = \text{rot rot rot } \underline{a} + \Delta \text{ rot } \underline{a};$$

vervolgens past men op (5) links en rechts rot toe en gebruikt (1):

$$\underline{0} = \text{rot rot rot } \underline{a} + \text{rot } \Delta \underline{a}.$$

Door combinatie vindt men (11).

## HOOFDSTUK V LAPLACE - TRANSFORMATIE

Ter inleiding behandelen we een eenvoudig voorbeeld. Stel dat we de oplossing  $y(x)$  van de D.V.

$$y' - 2y = e^x,$$

zoeken, waarvoor geldt  $y(0) = 0$ . Veronderstel, dat voor deze oplossing geldt, dat

$$Y(p) = \int_0^{\infty} y(x) e^{-px} dx$$

bestaat, althans voor voldoende grote  $p$ . Veronderstel verder, dat  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) e^{-px} = 0$ . Met behulp van partiële integratie vinden we van bedenk dat  $y(0) = 0$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y(x) e^{-px} dx &= \left[ -\frac{1}{p} y(x) e^{-px} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} y'(x) e^{-px} dx = \\ &= \frac{1}{p} \int_0^{\infty} y'(x) e^{-px} dx. \end{aligned}$$

Omdat  $y(x)$  een oplossing is van de D.V., geldt  $y'(x) - 2y(x) = e^x$ . We vermenigvuldigen nu beide leden van deze gelijkheid met  $e^{-px}$  en integreren van 0 tot  $\infty$ . Dit geeft

$$(p - 2) Y(p) = \int_0^{\infty} e^x e^{-px} dx.$$

$$\text{Nu is } \int_0^{\infty} e^{ax} e^{-px} dx = \int_0^{\infty} e^{(a-p)x} dx = \left[ \frac{1}{a-p} e^{(a-p)x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p-a} \text{ voor } p > a.$$

$$\text{Dus geldt voor voldoende grote } p: Y(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } Y(p) &= \int_0^{\infty} (e^{2x} - e^x) e^{-px} dx, \text{ dus} \\ \int_0^{\infty} (y(x) - e^{2x} + e^x) e^{-px} dx &= 0. \end{aligned}$$

Dit is natuurlijk juist, als  $y(x) = e^{2x} - e^x$  wordt gekozen. Dit is echter inderdaad de gezochte oplossing.

Als  $f(x)$  een functie is, die voor alle positieve reële  $x$  gedefinieerd is en als

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx$$

voor voldoende grote  $p$  bestaat, dan heet de zo verkregen functie  $F(p)$  van  $p$  de Laplace-getransformeerde van  $f(x)$ . Deze wordt symbolisch aangeduid met

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}.$$

De overgang van  $f(x)$  naar  $F(p)$  heet Laplace-transformatie. Deze wordt in allerlei gebieden van de wiskunde toegepast, o.a. bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen.

Uit de definitie volgt direct

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(x) + g(x)\} &= \mathcal{L}\{f(x)\} + \mathcal{L}\{g(x)\}, \\ \mathcal{L}\{C f(x)\} &= C \mathcal{L}\{f(x)\} \text{ voor constante } C.\end{aligned}$$

Verder vindt men door partiële integratie:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(x)\} &= \int_0^{\infty} f'(x) e^{-px} dx = \left[ f(x) e^{-px} \right]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx = \\ &= -f(0) + p \mathcal{L}\{f(x)\},\end{aligned}$$

mits  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) e^{-px} = 0$ . Door herhaling van deze herleiding vinden we

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} &= - \left[ f^{(n-1)}(0) + p f^{(n-2)}(0) + \dots + p^{n-1} f(0) \right] + \\ &\quad + p^n \mathcal{L}\{f(x)\},\end{aligned}$$

mits  $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) e^{-px} = 0$  voor  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Deze eigenschappen maken de Laplace transformatie geschikt voor het oplossen van eventueel inhomogene lineaire D.V. met constante coëfficiënten. We hebben dit al aan het inleidende voorbeeld gezien. We beschouwen nog eens het algemene geval van een dergelijke vergelijking van de tweede orde:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Noem ter afkorting  $Y(p) = \mathcal{L}\{y(x)\}$  en  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ . Past men Laplace-transformatie op de D.V. toe, dan krijgt men

$$- [y'(0) + p y(0)] + p^2 Y(p) - a_1 y(0) + a_1 p Y(p) + a_2 Y(p) = F(p),$$

$$Y(p) = \frac{p y(0) + y'(0) + a_1 y(0) + F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Als nu  $y(0)$  en  $y'(0)$  gegeven zijn, is hierdoor de getransformeerde van  $y(x)$  geheel vastgelegd. De voornaamste moeilijkheid is nu echter, uit de getransformeerde de oorspronkelijke functie terug te vinden. Hiervoor bestaan algemene methoden, die we hier echter niet kunnen bespreken. Bovendien kan men bewijzen, dat de oorspronkelijke functie door haar getransformeerde ondubbelzinnig bepaald is. Er bestaan echter ook uitvoerige tabellen, waarin men kan trachten de gezochte functie te vinden (bv. G.Doetsch, Tabellen zur Laplace-Transformation, of Bateman manuscript project, Tables of integral transforms, Volume I).

Vaak kan men de getransformeerde schrijven als een product van twee functies, waarvan we de oorspronkelijke functies kennen. We vinden de oorspronkelijke functie van het product dan als volgt:



Stel  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$  en  $G(p) = \mathcal{L}\{g(x)\}$ , dan is

$$\begin{aligned} F(p) G(p) &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx \cdot \int_0^{\infty} g(x) e^{-px} dx = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) g(y) e^{-p(t+y)} dt dy. \end{aligned}$$

Stel nu  $x = t + y$ , dus  $y = x - t$ :

$$\begin{aligned} F(p) G(p) &= \int_0^{\infty} dt f(t) \int_t^{\infty} g(x-t) e^{-px} dx = \int_0^{\infty} dx e^{-px} \int_0^x f(t) g(x-t) dt \\ &= \mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t) g(x-t) dt\right\}. \end{aligned}$$

De functie  $h(x) = \int_0^x f(t) g(x-t) dt$  noemt men de convolutie van  $f(x)$

en  $g(x)$ . We hebben dus gevonden dat de Laplace-getransformeerde van de convolutie van twee functies het product is van de Laplace-getransformeerden van die functies.

Als  $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ , dan is  $F(p-a) = \mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\}$ .

Dit volgt direct uit

$$\int_0^{\infty} e^{ax} f(x) e^{-px} dx = \int_0^{\infty} f(x) e^{-(p-a)x} dx.$$

Als de getransformeerde een gebroken rationale functie van  $p$  is, waarvan de graad van de teller kleiner is dan de graad van de noemer, dan helpt splitsing in partiële breuken. Deze levert termen van de vorm

$$\frac{C}{(p-a)^n}, \frac{C}{\{(p-a)^2 + b^2\}^n}, \frac{Cp}{\{(p-a)^2 + b^2\}^n}.$$

$$\begin{aligned} \text{Nu is } \int_0^{\infty} x^n e^{-px} dx &= \left[ -\frac{x^n e^{-px}}{p} \right]_0^{\infty} + \frac{n}{p} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-px} dx = \dots = \\ &= \frac{n!}{p^n} \int_0^{\infty} e^{-px} dx = \frac{n!}{p^{n+1}}, \text{ dus} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(p-a)^n} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ax} x^{n-1}}{(n-1)!}\right\}.$$

Op analoge wijze vindt men

$$\frac{1}{(p-a)^2 + b^2} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ax} \sin bx}{b}\right\}, \frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2} = \mathcal{L}\{e^{ax} \cos bx\}.$$

Ook bij de hogere machten van deze noemers kan men de oorspronkelijke functies makkelijk bepalen; de uitkomsten worden dan ingewikkelder.

De Laplace-transformatie is bijzonder geschikt voor lineaire D.V. met constante coëfficiënten om de oplossing  $y(x)$  te bepalen, waarvoor  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  in een vast punt  $a$  gegeven zijn (hierin is  $n$  de orde van de D.V.). Het voordeel is, dat we rechtstreeks naar deze oplossing toerekenen, zonder dat we eerst de algemene oplossing van de D.V. hoeven te bepalen.

Vb.1  $y'' + b^2y = x^2 + x + \frac{2}{b^2}$ . Gevraagd de oplossing, waarvoor  $y(0) = y'(0) = 0$ . Als  $F(p) = \mathcal{L}\{x^2 + x + \frac{2}{b^2}\}$  (deze rekenen we niet uit), dan geldt voor  $Y(p) = \mathcal{L}\{y(x)\}$ :

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p^2 + b^2}.$$

Men zou nu  $F(p)$  kunnen uitrekenen en splitsing in partiële breuken toepassen. We volgen een andere methode, die van de convolutie gebruik maakt. We weten al dat  $\frac{1}{p^2 + b^2} = \mathcal{L}\left\{\frac{\sin bx}{b}\right\}$ . Hieruit volgt nu direct

$$y(x) = \frac{1}{b} \int_0^x \left(t^2 + t + \frac{2}{b^2}\right) \sin b(x-t) dt. \text{ Hiermee is de oplossing al}$$

gevonden; we behoeven nog slechts de integraal uit te rekenen.

Nu is

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 \sin b(x-t) dt &= \left[\frac{1}{b} t^2 \cos b(x-t)\right]_0^x - \frac{2}{b} \int_0^x t \cos b(x-t) dt = \\ &= \frac{x^2}{b} + \frac{2}{b^2} \left[t \sin b(x-t)\right]_0^x - \frac{2}{b^2} \int_0^x \sin b(x-t) dt, \end{aligned}$$

$$\text{dus } \frac{1}{b} \int_0^x \left(t^2 + \frac{2}{b^2}\right) \sin b(x-t) dt = \frac{x^2}{b}. \text{ Verder is}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \int_0^x t \sin b(x-t) dt &= \frac{1}{b^2} \left[t \cos b(x-t)\right]_0^x - \frac{1}{b^2} \int_0^x \cos b(x-t) dt = \\ &= \frac{x}{b^2} + \frac{1}{b^3} \left[\sin b(x-t)\right]_0^x = \frac{x}{b^2} - \frac{\sin bx}{b^3}, \end{aligned}$$

$$\text{dus } y(x) = \frac{x^2}{b^2} + \frac{x}{b^2} - \frac{\sin bx}{b^3}.$$

Ook bij partiële D.V. wordt vaak Laplace-transformatie toegepast. Als er bv. twee onafhankelijke veranderlijken zijn, past men de transformatie op een van beide veranderlijken toe en houdt een gewone D.V. in de andere veranderlijke over. Het voordeel, dat men, als de bijvoorbeeld, die de oplossing vastleggen, een geschikte gedaante hebben, rechtstreeks naar de gezochte oplossing toerekent, weegt hier nog veel zwaarder, dan bij gewone D.V., omdat bij partiële D.V. het bepalen van

een algemene oplossing meestal een praktische onmogelijkheid is. We lichten de gang van zaken aan een eenvoudig voorbeeld toe.

Vb.2  $\frac{\partial y}{\partial x} + a e^{-bx} = \frac{\partial y}{\partial t}$  met constante  $a$  en  $b > 0$ . Gevraagd de oplossing

van deze D.V., die voldoet aan de voorwaarden, dat voor  $t = 0$  en  $x$  willekeurig geldt  $y = 0$  en voor  $x \rightarrow +\infty$  en  $t$  willekeurig geldt  $y = 0$ .

We passen Laplace-transformatie op de veranderlijke  $t$  toe. Laat de getransformeerde van  $y$  luiden  $Y(x, p)$ , dan volgt uit het feit dat  $y = 0$

voor  $t = 0$  en  $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}$ :  $\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{a e^{-bx}}{p} = pY$ . De getransformeerde  $\frac{\partial y}{\partial x}$  is

inderdaad  $\frac{\partial Y}{\partial x}$ , hetgeen men inzielt door in de definitieformule van de

Laplace-getransformeerde onder het integraalteken te differentiëren.

De gevonden vergelijking voor  $Y$  is nu een gewone D.V. voor  $Y$  als functie van  $x$ , met  $p$  als bijkomstige parameter. Het oplossen van deze vergelijking met Laplace-transformatie is minder praktisch, omdat de bijvoorwaarde nu voor  $x \rightarrow \infty$  gegeven is. De algemene oplossing van deze lineaire D.V. van de eerste orde bepalen we met de methode van hoofdstuk I, §.1; het resultaat is

$$Y = \frac{a e^{-bx}}{p(p+b)} + C e^{px}.$$

De bijvoorwaarde is nu dat voor  $x \rightarrow +\infty$   $y$  nadert tot de functie van  $t$ , die identiek nul is. Hieruit volgt, dat voor  $x \rightarrow +\infty$  ook  $Y \rightarrow 0$ . Daar Laplace-getransformeerden voor grote waarden van  $p$  gedefinieerd moeten zijn, volgt hieruit dat  $C = 0$ , dus

$$Y = \frac{a e^{-bx}}{p(p+b)}.$$

Het terugvinden van  $y$  is nu eenvoudig, want

$$\frac{1}{p(p+b)} = \frac{1}{b} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+b} \right) = \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{b} (1 - e^{-bt}) \right\}.$$

Het resultaat is dus dat

$$y = \frac{a}{b} e^{-bx} (1 - e^{-bt}).$$

## Syllabus van het college Wiskunde III b.

HOOFDSTUK VI, REEKSEN EN INTEGRALen VAN FOURIER

1. De functies  $\sin x$  en  $\cos x$  zijn voorbeelden van functies die voldoen aan

$$f(x + 2\pi) = f(x) \text{ voor alle } x.$$

Definitie: een functie  $f$  die voor zekere  $p$  voldoet aan

$$f(x + p) = f(x) \text{ voor alle } x$$

heet een periodieke functie met periode  $p$ .

Het is duidelijk dat ook  $\sin kx$  ( $k$  geheel) periodiek is met periode  $2\pi$ . Voor  $k > 1$  is  $2\pi$  echter niet de kleinste positieve periode (deze is  $2\pi/k$ ).

Opgaven:

1. Laat zien dat  $\sin \alpha x$  en  $\cos \alpha x$  dan en slechts dan periodiek zijn met periode  $2\pi$  indien  $\alpha$  een geheel getal is.
2. Wat is de kleinste positieve periode van  $\tan x$ ?
3. Zij  $f$  periodiek met periode  $p$ . Bewijs dat ook  $np$  ( $n$  geheel) een periode van  $f$  is.

2. Zij  $N, a_0, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$  zekere getallen ( $N$  geheel). Zij (voor alle  $x$ )

$$s(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1)$$

Dan is  $s$  periodiek met periode  $2\pi$ .

Er is een simpel verband tussen  $s$  en de coëfficiënten  $a_n$  en  $b_n$ .

Stelling: Voor de functie  $s$  uit (1) geldt

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) \cos kx \, dx = a_k \quad (\text{als } k = 0, 1, \dots, \text{of } N),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) \sin kx \, dx = b_k \quad (\text{als } k = 1, \dots, \text{ of } N).$$

Bewijs: We zijn klaar (ga na!) als we bewijzen dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = \begin{cases} 2\pi & \text{als } k = 0 \\ 0 & \text{als } k \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{als } k = n \neq 0 \\ 0 & \text{als } k \neq n, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx \, dx = 0 \quad (k \text{ en } n > 0),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{als } k = n \neq 0 \\ 0 & \text{als } k \neq n \end{cases}$$

We bewijzen alleen de laatste formule (bewijs de andere formules zelf).

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \cos(k-n)x - \cos(k+n)x \} \, dx.$$

Als  $k - n \neq 0$  is dan in het rechterlid gelijk aan

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(k-n)x}{k-n} - \frac{\sin(k+n)x}{k+n} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Voor  $k = n$  krijgen we echter

$$\frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin(k+n)x}{k+n} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Opgave:

Zij  $f$  periodiek met periode  $2\pi$ . Bewijs en onthoud dat voor alle reële  $a$  en gehele  $k$

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) \cos kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

3. Stel dat de reeks (een z.g. trigonometrische reeks)

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

voor alle waarden van  $x$  convergeert. Noem de som  $s(x)$ .

Is dan weer

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} kx \, dx = \begin{cases} a_k \\ b_k \end{cases}. \quad (2)$$

Dit is (op grond van de rekenarij uit 2) het geval indien we integratie en sommatie mogen verwisselen, d.w.z. indien

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cos kx \, dx = \\ & = \frac{1}{2\pi} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cos kx \, dx \end{aligned}$$

en analoog met  $\sin kx$ .

Bij convergentie zonder meer van de reeks (1) is deze verwisseling niet steeds geoorloofd. Maar wel als de reeks (1) zg. uniform convergeert (een scherpere eis dan convergentie zonder meer, we definiëren dit begrip in dit college niet). En dus hebben we als uitbreiding van de stelling uit 2:

Stelling. Als de reeks (1) uniform convergeert dan gelden de formules (2). Bovendien is de som  $s$  een continue periodieke functie. Men noemt de formules (2) de formules van Euler.

4. Zij  $f$  een functie die periodiek is met periode  $2\pi$ . Is  $f$  bovendien integreerbaar, dan kunnen we definiëren

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Met deze coëfficiënten vormen we de reeks

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1)$$

Deze reeks noemen we (ongeacht convergentie of divergentie) de Fourier-reeks van  $f$ . En  $a_n$  en  $b_n$  heten de Fourier-coëfficiënten van  $f$ .

Op grond van 3 weten we:

Als de reeks (1) uniform convergeert, dan is de som  $s$  een continue functie van  $x$ , waarvoor geldt

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} nx \, dx = \begin{Bmatrix} a_n \\ b_n \end{Bmatrix}.$$

We stellen nu de volgende vragen:

- a. Onder welke voorwaarden voor de functie  $f$  convergeert de reeks (1) ?
- b. Indien (1) convergeert voor zekere  $x$ , heeft dan de som  $s(x)$  iets te maken met  $f(x)$  ?

Opmerking. Fourierreeksen zijn trigonometrische reeksen. Niet iedere trigonometrische reeks is echter een Fourierreeks. Uit 3 volgt wel dat een uniform convergerende trigonometrische reeks de Fourierreeks van z'n som  $s(x)$  is.

5. Teneinde een stelling over de convergentie van Fourierreeksen te kunnen formuleren voeren we het begrip stuksgewijs continu differentieerbaar in. Een functie heet continu differentieerbaar als hij differentieerbaar en zijn afgeleide continu is. Een stuksgewijs continu differentieerbare functie is opgebouwd uit eindig vele continu differentieerbare stukken. De overgang van het ene stuk naar het andere behoeft niet continu te zijn. Wel moeten in de eindpunten van ieder deelinterval functie en afgeleide eindige linker- en rechter limieten hebben.

Voorbeelden.

$$1. \text{ Interval } [-1, 1]. f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{als } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ x-1 & \text{als } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$f$  is continu differentieerbaar voor  $-1 < x < 0$  en voor  $0 < x < 1$ .  
 $f$  is discontinu (en dus zeker niet differentieerbaar) in  $x = 0$ .  
 $f$  is dus niet continu voor  $-1 < x < 1$  en dus ook niet differentieerbaar voor  $-1 < x < 1$ . Wel bestaan

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \downarrow 0} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \uparrow 0} f'(x) = 1, \quad \lim_{x \downarrow 0} f'(x) = 1.$$

2. Interval  $-\infty < x < \infty$ .  $f(x) = x(2\pi - x)$  voor  $0 \leq x \leq 2\pi$ .  
 $f(x + 2\pi) = f(x)$  voor alle  $x$ .

(hierdoor ligt  $f$  vast !).



$f$  is continu voor  $-\infty < x < \infty$ .  $f$  is continu differentieerbaar in ieder interval  $2n\pi < x < 2(n+1)\pi$ . En daar  $\lim_{x \downarrow 2n\pi} f'(x)$  en  $\lim_{x \uparrow 2n\pi} f'(x)$  bestaan (hoe groot zijn deze limieten?) is  $f$  stuksgewijs continu differentieerbaar in ieder eindig interval (volgens de bovenstaande definitie niet in  $(-\infty, \infty)$  omdat er maar eindig veel discontinuïteiten mogen voorkomen).

Opmerking. De volgende schrijfwijze is gebruikelijk:

$$f(a-0) = \lim_{x \uparrow a} f(x), \quad f(a+0) = \lim_{x \downarrow a} f(x).$$

$f(a-0)$  is de linker limiet,  $f(a+0)$  is de rechterlimiet van  $f$  in  $a$  (Merk op dat  $f$  continu is in  $a$  dan en slechts dan indien  $f(a-0)$  en  $f(a+0)$  beide bestaan en gelijk zijn aan  $f(a)$ ).

Men kan de volgende stelling over de convergentie van Fourier-reeksen bewijzen:

Stelling. Zij de functie  $f$  periodiek met periode  $2\pi$  en in het interval  $[-\pi, \pi]$  stuksgewijs continu differentieerbaar. Dan convergeert de Fourier-reeks van  $f$  voor alle waarden van  $x$  en de som van de reeks is gelijk aan

$$\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$$

(in alle punten  $x$  waar  $f$  continu is, is dit gelijk aan  $f(x)$ ).

In woorden: als  $f$  "stuksgewijs netjes" is (en de meeste in toepassing optredende functies zijn dat) dan convergeert de Fourier-reeks van  $f$  voor alle  $x$ ; de som is gelijk aan  $f(x)$ , behalve in de discontinuïteitspunten, waar de som "het midden kiest", d.w.z., gelijk is aan het gemiddelde van linker- en rechter limiet van  $f$  (en niets te maken heeft met de waarde van  $f$  in het discontinuïteitspunt).

Voorbeelden.

- a.  $f(x) = x(2\pi - x)$  voor  $0 \leq x \leq 2\pi$  en verder periodiek met periode  $2\pi$ .  $f$  is continu voor alle  $x$  en stuksgewijs continu differentieerbaar (teken grafiek). Verder is  $f$  een even functie van  $x$ . Want uit de formule voor  $0 \leq x \leq 2\pi$  volgt dat  $f(x) = f(2\pi - x)$  en met de periodiciteit volgt hieruit dat  $f(x) = f(-x)$  voor alle  $x$ .

Gebruik makend van het even zijn van  $f$  vinden we voor de Fourier-coëfficiënten

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(2\pi - x) \cos nx \, dx =$$

(tweemaal partieel integreren)

$$= -\frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^2\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = -\frac{4}{n^2} \text{ indien } n \neq 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(2\pi - x) \, dx = \frac{4}{3} \pi^2.$$

De Fourier-reeks van  $f$  is dus

$$\frac{2}{3} \pi^2 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx.$$

Volgens de stelling moet deze reeks voor alle  $x$  convergeren en de som  $f(x)$  hebben.

Neem eens  $x = 0$ . Dan blijkt  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

Neem  $x = \pi$ . Dan blijkt  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ .

De antwoorden kloppen onderling want

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots - 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^2} + \dots - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \dots \right).$$

- b.  $f(x) = x$  voor  $-\pi < x \leq \pi$  en verder periodiek met periode  $2\pi$ .  
Deze functie is oneven ( $f(-x) = -f(x)$ ). Hieruit volgt

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{2}{n}.$$

De Fourierreeks van  $f$  is dus

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}.$$

Daar  $f$  stuksgewijs continu differentieerbaar is, convergeert deze reeks voor alle  $x$ . De som is  $f(x)$  behalve voor  $x = (2n+1)\pi$ , ( $n$  geheel), waar de som 0 is (alle termen zijn nul) terwijl

$$f((2n+1)\pi - 0) = \pi, \quad f((2n+1)\pi + 0) = -\pi.$$

#### Opgaven.

1. Bepaal de Fourierreeks van

a)  $f(x) = |\sin 2x|$  (wat is de periode van  $f$ ?)

b)  $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$  en verder periodiek met periode  $2\pi$ .

c)  $f(x) = 1 + \cos 2x$ .

2. Zij  $f(x)$  periodiek met periode  $2\pi$ .

Bewijs de volgende uitspraken:

- a) als  $f$  even is (d.w.z.  $f(-x) = f(x)$ ) voor alle  $x$ ) dan is

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

b) als  $f$  oneven is ( $f(-x) = -f(x)$ ) dan is

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

c) als  $f$  ook de periode  $\pi$  heeft dan is

$$a_{2n+1} = 0, \quad b_{2n+1} = 0,$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{2n} \\ b_{2n} \end{array} \right\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} 2nx \, dx.$$

7. Zij  $f$  periodiek met periode  $p$ . Kunnen we aan  $f$  een Fourierreeks toevoegen? Definieer de functie  $g$  door

$$g(y) = f\left(\frac{py}{2\pi}\right). \quad (1)$$

Dan heeft  $g$  de periode  $2\pi$  (ga na). Zij de bij  $g$  behorende Fourierreeks

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny).$$

Dan is, omdat uit (1) volgt dat

$$f(x) = g\left(\frac{2\pi x}{p}\right),$$

de bij  $f$  behorende Fourierreeks

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nx}{p} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{p} \right). \quad (2)$$

Voor de coëfficiënten  $a_n$  en  $b_n$  geldt

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} a_n \\ b_n \end{array} \right\} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(y) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} ny \, dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{py}{2\pi}\right) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} ny \, dy = \text{(substitueer} \\ &\qquad\qquad\qquad y = \frac{2\pi x}{p} \text{)} \\ &= \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \frac{2\pi nx}{p} \, dx. \quad (3) \end{aligned}$$

Hiermee zijn de bij een periodieke functie met periode  $p$  behorende Fourierreeks en de bijbehorende formules van Euler gevonden. Natuurlijk geldt de stelling uit 5 ook voor periodieke functies met periode  $p$ .

8. Zij een functie  $g$  slechts gedefinieerd voor  $0 < x < a$ . We zullen veronderstellen dat  $g(0+0)$  en  $g(a-0)$  bestaan. Kunnen we dan aan  $g$  een Fourierreeks toekennen? Niet zonder meer, want  $g$  is niet periodiek. Maar we kunnen  $g$  wel periodiek voortzetten, d.w.z. een periodieke functie  $f$  vinden zodanig dat voor  $0 < x < a$   $f(x) = g(x)$ .

Een mogelijkheid is  $f$  te definiëren door

$$f(0) = \frac{1}{2}[g(0+0) + g(a-0)] ,$$

$$f(x) = g(x) \text{ voor } 0 < x < a ,$$

$$f(x+a) = f(x) \text{ voor alle } x .$$

$f$  heeft dan de periode  $a$ . Beschouw nu de Fourierreeks

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi x}{a} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{a} \right) \quad (1)$$

van  $f$ . Dan is

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \frac{2n\pi x}{a} dx \\ &= \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \frac{2n\pi x}{a} dx . \end{aligned}$$

De Fouriercoëfficiënten  $a_n$  en  $b_n$  kunnen dus met behulp van de Eulerformules uit  $g$  bepaald worden. Stel dat  $g$  stuksgewijs continu differentieerbaar is voor  $0 < x < a$ . Dan is  $f$  het ook. En dan is de reeks (1) voor alle  $x$  convergent met som  $s(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$ .

Voor  $0 < x < a$  is dus ook

$$s(x) = \frac{1}{2} [g(x+0) + g(x-0)] , \quad (2)$$

terwijl (ga na)

$$s(0) = s(a) = \frac{1}{2} [g(0+0) + g(a-0)]. \quad (3)$$

Hiermee hebben we dus een Fourierreeks voor een in een eindig interval gedefinieerde en niet-periodieke functie  $g$  gevonden.

Opmerking. Is  $g$  bovendien continu voor  $0 \leq x \leq a$ , dan geldt voor  $0 < x < a$

$$s(x) = g(x),$$

terwijl nu

$$s(0) = s(a) = \frac{1}{2} [g(0) + g(a)].$$

Merk op dat, tenzij  $g(0) = g(a)$ ,  $f(x)$  niet continu is in  $x = 0$ , en dat daarom in het algemeen niet  $s(0) = g(0)$ ,  $s(a) = g(a)$ .

In een aantal toepassingen willen we aan een functie  $g$ , gedefinieerd voor  $0 < x < a$ , een Fourierreeks toevoegen die uitsluitend cosinus termen bevat (een zg. Fourier-cosinus-reeks). Dit kan door  $g$  voort te zetten tot een functie  $f$  die de periode  $2a$  heeft en bovendien een even functie is:

$$f(x) = \begin{cases} g(0+0) & \text{voor } x = 0 \\ g(x) & \text{voor } 0 < x < a \\ g(a-0) & \text{voor } x = a \\ g(-x) & \text{voor } -a < x < 0 \end{cases}$$

$$f(x+2a) = f(x) \text{ voor alle } x.$$

Merk op dat  $f$  continu is in  $x = 0$  en  $x = a$ .

We vinden nu (ga na) voor  $f$  een Fourierreeks

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{a},$$

waarin 
$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Is  $g$  stuksgewijs continu differentieerbaar dan gelden voor de som  $s$  van de reeks weer de formules (2) en (3). Is  $g$  bovendien continu dan geldt  $s(x) = g(x)$  voor  $0 \leq x \leq a$ .

Op analoge wijze kunnen we de bovenstaande functie  $g$  ontwikkelen in een Fourier-sinus-reeks. Als oneven periodieke voortzetting  $f$

van  $g$  met periode  $2a$  nemen we de functie, gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x = 0 \\ g(x) & \text{voor } 0 < x < a \\ 0 & \text{voor } x = a \\ -g(-x) & \text{voor } -a < x < 0 \end{cases}$$

$$f(x+2a) = f(x) \text{ voor alle } x.$$

Merk op dat  $f$  slechts dan continu is in  $x = 0$  indien  $g(0+0) = 0$  en slechts dan continu is in  $x = a$  indien  $g(a-0) = 0$ .

De Fourier-reeks voor  $f$  wordt

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{a},$$

met

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Is  $f$  stuksgewijs continu differentieerbaar dan gelden voor de som van de reeks weer de formules (2) en (3). (Merk op, dat  $s(0)$  dan en slechts dan gelijk is aan  $g(0)$  indien  $g(0) = 0$ ).

Voorbeeld. Gevraagd een sinusreeks voor de functie  $g$  gegeven door

$$g(x) = 1, \quad 0 < x < a.$$

$$\text{Daar } \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} dx = -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{a} \Big|_0^a = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n),$$

is de reeks

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{a}.$$

Vraag: Wat is de som van de reeks voor  $-a < x < 0$ ?

En in de punten  $-a$ ,  $0$ , resp.  $+a$ ?

9. Zij  $f$  periodiek met periode  $2\pi$ . De algemene term in de Fourierreeks van  $f$  schrijven we als

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \\ &= \frac{1}{2} [(a_n - ib_n) e^{inx} + (a_n + ib_n) e^{-inx}] = \\ &= c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}. \end{aligned}$$

Hierin is

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \end{aligned} \quad (1)$$

en

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx.$$

Verder kunnen we voor de nulde term schrijven

$$\frac{1}{2} a_0 = c_0,$$

waarin

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Uit het bovenstaande volgt dat de Fourier-reeks van  $f$  geschreven kan worden als

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}),$$

of als

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

waarbij de coëfficiënten  $a_n$  voor alle gehele  $n$  (positief, negatief



en nul) door (1) bepaald zijn.

Dit is de complexe vorm van de Fourier-reeks welke o.m. het voordeel van grotere eenvoud heeft.

Voor functies met periode  $p$  hebben we analoog als Fourier-reeks

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{p}},$$

met

$$c_n = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{p}} dx.$$

De in 5. genoemde stelling geldt natuurlijk ook voor de complexe Fourier-reeks, mits men  $\sum_{-\infty}^{\infty}$  interpreteert als  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N$ .

Opgave. Bewijs dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} e^{ikx} dx = \delta_{nk} \quad \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{als } n = k \\ 0 & \text{als } n \neq k \end{cases}$$

en leid hiermee af dat voor een uniform convergente reeks

$$s(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

de Euler-formules

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) e^{-inx} dx$$

gelden.

10. Zij de functie  $f$  gedefinieerd voor alle  $x$ . Kies een getal  $N > 0$  en definieer de functie  $f_N$  door

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{voor } -\frac{1}{2}N \leq x \leq \frac{1}{2}N \\ 0 & \text{voor } |x| > \frac{1}{2}N \end{cases}$$

We ontwikkelen nu de functie  $f_N$  in een Fourier-reeks. Is  $f$  stuksgewijs continu differentieerbaar dan is  $f_N$  het ook en dan geldt dus voor  $|x| < \frac{1}{2}N$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] &= \frac{1}{2} [f_N(x+0) + f_N(x-0)] = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n x}{N}}, \end{aligned} \quad (1)$$

met

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{N} \int_{-\frac{1}{2}N}^{\frac{1}{2}N} f_N(\xi) e^{-i \frac{2\pi n \xi}{N}} d\xi = \\ &= \frac{1}{N} \int_{-\frac{1}{2}N}^{\frac{1}{2}N} f(\xi) e^{-i \frac{2\pi n \xi}{N}} d\xi. \end{aligned}$$

Stel  $h_N(y) = \int_{-\frac{1}{2}N}^{\frac{1}{2}N} f(\xi) e^{-2\pi i \xi y} d\xi$ .

Dan is  $c_n = \frac{1}{N} h_N\left(\frac{n}{N}\right)$

en we kunnen, als we nog stellen

$$y_n = \frac{n}{N},$$

voor (1) ook schrijven

$$\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] = \sum_{-\infty}^{\infty} h_N(y_n) e^{2\pi i x y_n} \cdot (y_{n+1} - y_n). \quad (2)$$

Laat nu  $N \rightarrow \infty$  gaan. Dan nadert (als  $f$  "netjes" is)  $h_N$  tot de functie  $h$ , gedefinieerd door

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-2\pi i \xi y} d\xi. \quad (3)$$

En daar  $y_{n+1} - y_n$  tot nul nadert, vermoeden we dat het rechterlid van (2) nadert tot de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(y) e^{2\pi i x y} dy. \quad (4)$$

Dit vermoeden is juist, mits  $f$  voldoende netjes is.

Stelling. Veronderstel dat  $f$  aan de volgende voorwaarden voldoet:

a)  $f$  is in ieder eindig interval stuksgewijs continu differentieerbaar;

b)  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi$  bestaat.

Dan bestaat voor alle  $y$  de functie

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{2\pi i \xi y} d\xi \quad (5)$$

en geldt voor alle  $x$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N g(y) e^{-2\pi i xy} dy = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]. \quad (6)$$

Opmerkingen.

1. Dit is de integraalstelling van Fourier. Merk op dat

$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N$  een wat voorzichtiger limiet overgang is dan de schrijfwijze  $\int_{-\infty}^{\infty}$  zou aangeven. Deze restrictie is in veel praktische gevallen overbodig.

2. Merk op dat de functie  $g(y)$  uit (5) gelijk is aan  $h(-y)$  uit (3). En ook bij de overgang van (4) naar (6) is  $y$  door  $-y$  vervangen. Dit berust uitsluitend op historische gronden. Men noemt  $g$  de Fourier-integraal of de Fourier-getransformeerde van  $f$ .

3. Men kan (5) en (6) ook samenvatten tot

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i xy} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi y} f(\xi) d\xi = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)].$$

Voorbeelden

a) Voor reële  $p$  en  $\alpha > 0$  hebben we

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - 2px} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x + \frac{p}{\alpha})^2 + \frac{p^2}{\alpha}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{p^2/\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{p^2/\alpha}. \end{aligned}$$

Men kan bewijzen dat deze formule ook geldt voor imaginaire (en complexe)  $p$ . Zij nu

$$f(x) = e^{-\alpha x^2}.$$

Dan is

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 + 2\pi ixy} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2 y^2/\alpha}.$$

En de bovengenoemde stelling zegt dat nu

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-2\pi ixy} dy = f(x), \text{ of}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 y^2}{\alpha} - 2\pi ixy} dy = e^{-\alpha x^2}.$$

Verifieer dit zelf door  $\frac{\pi y}{\sqrt{\alpha}} = u$  te stellen.

b) Zij  $f(x) = e^{-2\pi\alpha|x|}$ ,  $\alpha > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Dan is } g(y) &= \int_0^{\infty} e^{-2\pi\alpha x + 2\pi ixy} dx + \int_{-\infty}^0 e^{+2\pi\alpha x + 2\pi ixy} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi(\alpha - iy)} + \frac{1}{2\pi(\alpha + iy)} = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + y^2)}. \end{aligned}$$

Uit de stelling volgt nu dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + y^2)} e^{-2\pi i x y} dy = e^{-2\pi \alpha |x|}, \text{ of}$$

$$\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi x y)}{\alpha^2 + y^2} dy = e^{-2\pi \alpha |x|}, \text{ of (met } 2\pi y = u, 2\pi \alpha = \beta)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{u^2 + \beta^2} du = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-\beta |x|}}{\beta}.$$

Dit is een integraal die niet gemakkelijk elementair uit te rekenen is!

11. Zij  $f$  een functie van de drie variabelen  $\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$  die in ieder dezer variabelen de periode 1 heeft. Dus

$$f(\xi+1, \eta+m, \zeta+n) = f(\xi, \eta, \zeta)$$

voor alle  $\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$  en alle gehele  $l$ ,  $m$  en  $n$ .

Aan zo'n functie kunnen we als volgt een drievoudige Fourier-reeks toevoegen (we kiezen de complexe vorm).

Daar  $f$  een periodieke functie van  $\xi$  is, is een Fourier-reeks voor  $f$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l(\eta, \zeta) e^{2\pi i l \xi}, \quad (1)$$

met

$$c_l(\eta, \zeta) = \int_0^1 f(\xi, \eta, \zeta) e^{-2\pi i l \xi} d\xi.$$

We constateren dat voor alle gehele  $m$  en  $n$

$$c_l(\eta+m, \zeta+n) = c_l(\eta, \zeta).$$

$c_l$  is dus tweevoudig periodiek. Een Fourier-reeks voor  $c_l$  is dus

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{lm}(\zeta) e^{2\pi i m \eta}, \quad (2)$$

met

$$c_{1m}(\zeta) = \int_0^1 c_1(\eta, \zeta) e^{-2\pi i m \eta} d\eta = \\ = \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta, \zeta) e^{-2\pi i (l\xi + m\eta)} d\xi d\eta.$$

Substitutie van de Fourierreeks (2) voor  $c_1$  in de Fourierreeks (1) voor  $f$  levert als tweevoudige Fourierreeks voor  $f$

$$\sum_{l,m=-\infty}^{\infty} c_{1m}(\zeta) e^{2\pi i (l\xi + m\eta)}$$

Daar tenslotte  $c_{1m}(\zeta)$  nog een periodieke functie van  $\zeta$  is, kunnen we het spel nog eens herhalen. We krijgen dan tenslotte als drievoudige Fourierreeks voor  $f$

$$\sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} c_{lmn} e^{2\pi i (l\xi + m\eta + n\zeta)}, \quad (3)$$

$$\text{waarin } c_{lmn} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta, \zeta) e^{-2\pi i (l\xi + m\eta + n\zeta)} d\xi d\eta d\zeta.$$

Men kan bewijzen dat, indien  $f$  "voldoende netjes" is (b.v. continu differentieerbaar), de reeks (3) convergeert voor alle  $\xi, \eta$  en  $\zeta$  met som  $f(\xi, \eta, \zeta)$ .

12. De in 11. beschouwde drievoudig periodieke functies zijn nog niet de meest algemene daar de periodiciteit van deze functies correspondeert met die van een kubisch rooster dat georiënteerd is langs de coördinaatassen.

We willen nu periodieke functies onderzoeken, waarvan de periodiciteit correspondeert met die van een scheefhoekig en willekeurig georiënteerd rooster. Deze periodiciteit kunnen we als volgt beschrijven.

Zij  $\underline{u}_1$ ,  $\underline{u}_2$  en  $\underline{u}_3$  drie onafhankelijke vectoren in  $R_3$ . En zij de functie  $f$  van  $\underline{x}$  (dus van  $x$ ,  $y$  en  $z$ ) zo dat

$$f(\underline{x} + l\underline{u}_1 + m\underline{u}_2 + n\underline{u}_3) = f(\underline{x}) \quad (1)$$

voor alle  $\underline{x}$  en alle gehele  $l$ ,  $m$  en  $n$ . Dan is  $f$  drievoudig periodiek met de periodevectoren  $\underline{u}_1$ ,  $\underline{u}_2$  en  $\underline{u}_3$ . De verzameling van alle punten

$$l\underline{u}_1 + m\underline{u}_2 + n\underline{u}_3, \quad l, m \text{ en } n \text{ geheel}$$

heet het perioden-rooster  $R$ . Het parallelopipedum  $V$  dat opgespannen wordt door  $\underline{u}_1$ ,  $\underline{u}_2$  en  $\underline{u}_3$  heet de elementaire cel van dit rooster (is  $f$  bekend in  $V$  dan is  $f$  overal bekend).

Om de drievoudige Fourier-ontwikkeling met 11. hier toepasbaar te maken kiezen we een nieuw (in het algemeen scheefhoekig) coördinatenstelsel, nl. datgene waarvan  $\underline{u}_1$ ,  $\underline{u}_2$  en  $\underline{u}_3$  de eenheidsvectoren zijn. Uit de onafhankelijkheid van  $\underline{u}_1$ ,  $\underline{u}_2$  en  $\underline{u}_3$  volgt immers dat deze vectoren een basis voor  $R_3$  vormen, d.w.z. dat er bij iedere  $\underline{x}$  uit  $R_3$  getallen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  zijn zodanig dat

$$\underline{x} = \xi \underline{u}_1 + \eta \underline{u}_2 + \zeta \underline{u}_3. \quad (2)$$

$\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$  zijn de kentallen van  $\underline{x}$  ten opzichte van het nieuwe coördinatenstelsel. Om goed te doen uitkomen dat  $\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$  van  $\underline{x}$  afhangen zullen we soms schrijven  $\xi(\underline{x})$ ,  $\eta(\underline{x})$ ,  $\zeta(\underline{x})$ .

Definieer nu de functie  $g$  van  $\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$  door

$$g(\xi, \eta, \zeta) = f(\xi \underline{u}_1 + \eta \underline{u}_2 + \zeta \underline{u}_3). \quad (3)$$

Dan volgt uit (1) dat voor alle  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  en alle gehele  $l$ ,  $m$  en  $n$

$$g(\xi + l, \eta + m, \zeta + n) = g(\xi, \eta, \zeta).$$

Is  $f$ , en dus ook  $g$ , voldoende netjes dan is dus volgens 11

$$g(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} c_{lmn} e^{2\pi i(l\xi + m\eta + n\zeta)},$$

met

$$c_{lmn} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 g(\xi, \eta, \zeta) e^{-2\pi i(l\xi + m\eta + n\zeta)} d\xi d\eta d\zeta.$$

Hieruit volgt direct dat

$$f(\underline{x}) = \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} c_{lmn} e^{2\pi i[l\xi(\underline{x}) + m\eta(\underline{x}) + n\zeta(\underline{x})]} \quad (4)$$

met

$$c_{lmn} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(\xi \underline{u}_1 + \eta \underline{u}_2 + \zeta \underline{u}_3) e^{-2\pi i(l\xi + m\eta + n\zeta)} d\xi d\eta d\zeta. \quad (5)$$

We willen deze uitdrukkingen nog wat herleiden en onafhankelijk maken van de coördinaten  $\xi$ ,  $\eta$  en  $\zeta$ . Hiertoe moeten we eerst de begrippen reciproke basis en reciprook rooster invoeren. Deze begrippen spelen in vele delen der kristallografie een belangrijke rol.

Indien de vectoren  $\underline{u}_1$ ,  $\underline{u}_2$  en  $\underline{u}_3$  onderling loodrechte eenheidsvectoren zijn (d.w.z. indien  $(\underline{u}_i, \underline{u}_j) = \delta_{ij}$ ) dan volgt uit (2) direct door nemen van het inwendig product met  $\underline{u}_1$  dat  $\xi(\underline{x}) = (\underline{x}, \underline{u}_1)$ . En analoog  $\eta(\underline{x}) = (\underline{x}, \underline{u}_2)$ ,  $\zeta(\underline{x}) = (\underline{x}, \underline{u}_3)$ . Is dit niet het geval dan bepalen we eerst bij de gegeven  $\underline{u}_1$ ,  $\underline{u}_2$  en  $\underline{u}_3$  een drietal vectoren  $\underline{v}_1$ ,  $\underline{v}_2$  en  $\underline{v}_3$  zodanig dat

$$(\underline{u}_i, \underline{v}_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Hierdoor zijn  $\underline{v}_1$ ,  $\underline{v}_2$  en  $\underline{v}_3$  eenduidig bepaald, want voor de vector  $\underline{v}_1$  moet bijvoorbeeld gelden

$$\left. \begin{aligned} (\underline{u}_1, \underline{v}_1) &= 1 \\ (\underline{u}_2, \underline{v}_1) &= 0 \\ (\underline{u}_3, \underline{v}_1) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Dit zijn drie lineair vergelijkingen voor de componenten van  $\underline{v}_1$ .



De determinant van dit stelsel is (ga na) gelijk aan het volume  $V$  van het parallellepipedum op  $\underline{u}_1$ ,  $\underline{u}_2$  en  $\underline{u}_3$  (dus het volume van de elementaire cel van het rooster  $R$ ) en dus niet nul.

Opgave. Bewijs dat men, gebruik makend van het vectorproduct, voor de oplossing van (6) kan schrijven

$$\underline{v}_1 = \frac{\underline{u}_2 \times \underline{u}_3}{\text{Det}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)}.$$

En analoog

$$\underline{v}_2 = \frac{\underline{u}_3 \times \underline{u}_1}{\text{Det}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)}, \quad \underline{v}_3 = \frac{\underline{u}_1 \times \underline{u}_2}{\text{Det}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)}.$$

Bewijs ook dat

$$\text{Det}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = \frac{1}{\text{Det}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)}.$$

Bepaal  $\underline{v}_1$ ,  $\underline{v}_2$  en  $\underline{v}_3$  voor het geval dat

$$\underline{u}_1 = (1, 1, -1), \quad \underline{u}_2 = (1, 2, -1), \quad \underline{u}_3 = (-3, 1, 4).$$

Het is eenvoudig in te zien dat  $\underline{v}_1$ ,  $\underline{v}_2$  en  $\underline{v}_3$  onafhankelijk zijn.

Want uit

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$$

volgt door het nemen van het inproduct met  $\underline{u}_j$  dat  $\alpha_j = 0$ .

De vectoren  $\underline{v}_1$ ,  $\underline{v}_2$  en  $\underline{v}_3$  vormen dus ook een basis voor  $R_3$ . Men noemt deze de bij  $\underline{u}_1$ ,  $\underline{u}_2$  en  $\underline{u}_3$  behorende reciproke basis. En de verzameling van alle punten

$$l\underline{v}_1 + m\underline{v}_2 + n\underline{v}_3 \quad \text{met } l, m \text{ en } n \text{ geheel} \quad (7)$$

noemt men het bij het oorspronkelijke rooster  $R$  behorende reciproke rooster  $R^*$ .

Opgave. Bewijs dat de bij  $\underline{v}_1, \underline{v}_2$  en  $\underline{v}_3$  behorende reciproke basis weer  $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$  is. En dat  $(R^*)^* = R$ .

Met behulp van de reciproke basis  $\underline{v}_1, \underline{v}_2$  en  $\underline{v}_3$  kunnen we nu  $\xi(\underline{x}), \eta(\underline{x})$  en  $\zeta(\underline{x})$  direct bepalen uit (2):

$$\xi(\underline{x}) = (\underline{x}, \underline{v}_1), \quad \eta(\underline{x}) = (\underline{x}, \underline{v}_2), \quad \zeta(\underline{x}) = (\underline{x}, \underline{v}_3).$$

Hiermee wordt de exponent in de reeks (4)

$$l \xi(\underline{x}) + m \eta(\underline{x}) + n \zeta(\underline{x}) = (\underline{x}, l\underline{v}_1 + m\underline{v}_2 + n\underline{v}_3) = (\underline{x}, \underline{k}_{lmn}),$$

waarin

$$\underline{k}_{lmn} = l\underline{v}_1 + m\underline{v}_2 + n\underline{v}_3 \quad (8)$$

een punt is van het reciproke rooster  $R^*$ .

We definiëren nu voor alle vectoren  $\underline{k}$  uit  $R^*$  de functie  $c(\underline{k})$  door

$$c(\underline{k}) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(\xi \underline{u}_1 + \eta \underline{u}_2 + \zeta \underline{u}_3) e^{-2\pi i (\underline{k}, \xi \underline{u}_1 + \eta \underline{u}_2 + \zeta \underline{u}_3)} d\xi d\eta d\zeta. \quad (9)$$

Dan volgt uit (5), (6) en (8) dat

$$c_{lmn} = c(\underline{k}_{lmn}).$$

En we kunnen dus in plaats van (4) ook schrijven

$$f(\underline{x}) = \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} c(\underline{k}_{lmn}) e^{2\pi i (\underline{x}, \underline{k}_{lmn})}.$$

Of, in iets symbolischer notatie,

$$f(\underline{x}) = \sum_{\underline{k} \in R^*} c(\underline{k}) e^{2\pi i (\underline{x}, \underline{k})}, \quad (10)$$

waarin met het onderschrift van het somteken bedoeld is dat  $\underline{k}$  alle punten van het reciproke rooster  $R^*$  moet doorlopen, d.w.z. alle punten van de vorm (7).

Formule (10) is de uiteindelijke vorm van de drievoudige Fourierreeks voor  $f$ . Merk op dat deze vorm geheel vrij is van coördinatenstelsels.

Dit laatste kan ook voor de integraal ter bepaling van de Fouriercoëfficiënt  $c(\underline{k})$  bereikt worden door te schrijven

$$c(\underline{k}) = \frac{1}{V} \iiint_V f(\underline{x}) e^{-2\pi i(\underline{k}, \underline{x})} dV \quad (11)$$

waarbij geïntegreerd wordt over het bij het rooster  $R$  behorende elementaire parallelipedum,  $V$  uit de  $x, y, z$  ruimte (het volume van dit parallelipedum is ook met  $V$  aangeduid).

Dat de rechterleden van (11) en (9) gelijk zijn is te zien met de brokken- en rephetheorie uit het eerste jaar. Verdeel nl.  $V$  in  $N^3$  gelijke brokken met begrenzingen evenwijdig aan de begrenzingen van  $V$ . Dan krijgen we als benadering van de integraal in (11).

$$\frac{1}{V} \sum_{p,q,r=1}^N f\left(\frac{p}{N} u_1 + \frac{q}{N} u_2 + \frac{r}{N} u_3\right) \cdot e^{-2\pi i(\underline{k}, \frac{p}{N} u_1 + \frac{q}{N} u_2 + \frac{r}{N} u_3)} \cdot \frac{V}{N^3}$$

en het rechterlid van (11) is de limiet van deze uitdrukking voor  $N \rightarrow \infty$ . Maar verdelen we het integratie gebied (een kubus) van de integraal in (9) evenzo in  $N^3$  gelijke delen dan krijgen we precies dezelfde benadering voor de integraal.