TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken, Tentamenopgaven en Antwoorden

bij het college WISKUNDE III

Cursusjaar 1968-1969

Br... ...

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken en antwoorden

BIJ HET COLLEGE WISKUNDE III CURSUSJAAR 1968-1969

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT. NR. 235
PRIJS f 2,--

INHOUD

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

§ 1 t/m § 9:

1. $xy' + 2y = xyy'$.

2. $xy^2 - x - (yx^2 - y)y' = 0$.

3. $y' = \dfrac{\log x - y}{x \log x}$.

4. $(x^2+1)y' = (y+2)(x+\sqrt{x^2+1})$.

5. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$.

6. $y'(x - \sin y) + y = 0$.

7. $y + xy^2 - xy' = 0$ (Int. factor: $\mu(y)$).

8. $y' + \dfrac{x}{1+x^2}\, y = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$.

9. $x(y-x)y' = y^2$.

10. $\{\tan(x+y) - 1\}y' = 1$.

11. $(3x^2-1)y + (x^3 - x + 2y)y' = 0$.

12. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{y}{x^2} + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{x}\right)y' = 0$.

13. $y' - \frac{1}{2}y = y^3 e^{-x}$.

14. $2y' - y = 10x^3y^5$.

15. $(x-y)^2y' = (x-y+1)^2$.

16. $e^x y \log y = (e^x + y \log^2 y)y'$.

17. $2x^3y^2 - y + (2x^2y^3 - x)y' = 0$ (int. factor: $\mu(xy)$).

18. $\dfrac{y'}{y} - x^2y = \dfrac{1}{x}$.

19. $x - y^2 + 2xyy' = 0$.

20. $y + xy + \sin y + (x + \cos y)y' = 0$ (int. factor: $\mu(x)$).

21. $3xy^2y' + 2y^3 = 2$.

22. $(3x+5y+6)y' = x + 7y + 2$.

23. $y' \cos y + \sin y = x$.

24. $y^2(xyy'-1) = 1 - x^2(1+y^2)$.

25. $(x-3y)y' + 3x - y = 0$.

26. $x(1-x^2)y' + (3x^2-1)y = 2x^3$.

27. $(2x-4y+5)y' = 2y - x - 3$.

28. $3x^2 + 6xy^2 + (6x^2y+4y^3)y' = 0$.

29. $(x-y+1)y' = 1$.

30. $2xy + (y^2-3x^2)y' = 0$.

31. $y = xy' + y' - (y')^2$.

32. $xy' + 2y - \sin x = 0$.

33. $y \sin x - 1 + y' \cos x = 0$.

34. $y'(y^2-x) - y = 0$.

35. $y' + 2y = 2xy\sqrt{y}$.

36. $y^2 + (xy+1)y' = 0$.

§ 11:

1. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y ; \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 3y . \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y + e^t ; \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x - 3y + e^{-t} . \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = 2e^t ; \\ \dfrac{dy}{dt} + z = e^t ; \\ \dfrac{dz}{dt} + x = e^t . \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 7\,\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2x = 0\ ; \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} + 3\,\dfrac{dy}{dt} + y = 0\ ; \\[2ex] x(0) = 1\ ;\ \ y(0) = 0\ . \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \alpha^2 y = \cos\ \alpha t\ ; \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} + \alpha^2 x = \sin\ \alpha t\ ; \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - 2y = \sin\ t\ ; \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} + x - y = 3t\ . \end{cases}$$

§ 12:

1. $y'''' - 5y'' + 10y' - 6y = 0$

   $y(o) = 1\ ;\ \ y'(o) = 0\ ;\ \ y''(o) = 6\ ;\ \ y'''(o) = -14\ .$

2. $y''' + y = \frac{1}{2}x^2\, e^x$

   $y(o) = y'(o) = y''(o) = 0\ .$

3. $\ddot{x} + \ddot{y} + 2\dot{x} + \dot{y} + x + 2y = 0$

   $\ddot{x} + \ddot{y} + \dot{x} + 2x + 3y = 4t + 5$

   $x(o) = 31\ ;\ \ y(o) = -22\ ;\ \ \dot{x}(o) = 9\ ;\ \ \dot{y}(o) = -5\ .$

4. $\ddot{x} = 3x + 4y$

   $\ddot{y} + x + y = 0$

   $x(o) = \dot{y}(o) = 1$

   $y(o) = \dot{x}(o) = 0\ .$

5. $y'' + 2y - 3z' = 5\cos\ x + 5\sin\ x$

   $z'' - 8z + 2y' = 15\cos\ x$

   $y(o) = 3\ ;\ \ y'(o) = 6\ ;\ \ z(o) = -\frac{1}{3}\ ;\ \ z'(o) = -\frac{2}{3}\ .$

§ 13 en § 14

1. $y'' - xy = 0$.

2. $y''' + xy = 0$.

3. $(1-x^2)y'' + 6y = 0$.

4. $(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$.

5. $y'' - xy = 1$.

6. $xy'' - (1+x)y' + y = 0$.

7. $2x^2(1+x^2)y'' + xy' - 12x^2y = 0$.

8. $x^2y'' - xy' + y = 0$.

9. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$.

10. $xy'' + 2y' + xy = 0$.

LINEAIRE ALGEBRA

§ 1.

1. Bewijs dat voor elk tweetal matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \quad \text{geldt} \quad AB = BA \quad .$$

2. Voor de lineaire afbeeldingen $\mathcal{A} : V \to V$ en $\mathcal{B} : V \to V$ geldt $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}$ en $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
   Bewijs dat hieruit volgt $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ en $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}$.

3. In R_2 zijn gegeven de basisvectoren $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$.
   Wat zijn de kolommen ten opzichte van deze basis van de volgende vectoren?

$$\underline{a} = \underline{e}_1$$
$$\underline{b} = \underline{e}_2$$
$$\underline{c} = \underline{e}_1 - \underline{e}_2$$
$$\underline{d} = \sqrt{3}\,\underline{e}_1 - \frac{1}{9}\underline{e}_2 \quad .$$

4. De lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ heeft de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

   Gevraagd:

   a) dimensie beeldruimte
   b) dimensie nulruimte
   c) de vergelijking van de beeldruimte
   d) de kolom van $\underline{x}$, als $\mathcal{A}\underline{x}$ de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ heeft.

5. Gegeven zijn twee lineaire afbeeldingen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ van R_3 in R_3 met matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -11 & 8 & -7 \\ -8 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de matrices behorende bij de afbeeldingen $\mathcal{A}\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}\mathcal{A}$.

6. Gegeven is de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ met de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de kolom van alle vectoren $\underline{x}$, die op zichzelf worden afgebeeld.

7. Zij $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ een basis van R_n.

Een lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ is als volgt gedefinieerd:

$$\mathcal{A}\underline{e}_1 = \underline{0}$$

$$\mathcal{A}\underline{e}_i = \underline{e}_{i-1} \quad \text{voor} \quad i = 2,3,\dots,n .$$

Wat is de matrix A van $\mathcal{A}$ t.o.v. $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$.

Toon aan dat $\mathcal{A}^n\underline{x} = \underline{0}$ voor elke $\underline{x}$ uit R_n.

Toon aan dat alle eigenwaarden van $\mathcal{A}$ nul zijn.

8. Zij $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ de projectie op het vlak opgespannen door de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$, die resp. kolommen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hebben.

De vector $\underline{x}$ heeft de kolom $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Toon aan dat $\mathcal{A}$ een lineaire afbeelding is.

b) Bepaal de kolom van de vector $\mathcal{A}\underline{e}_i$ voor $i = 1,2,3$.

c) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$.

d) Bepaal de kolom van het beeld van $\underline{x}$.

e) Heeft $\mathcal{A}$ een inverse?

f) Bewijs $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.

9. Zij $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ de spiegeling aan het vlak opgespannen door de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$, die resp. kolommen $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ hebben.
V is het vlak $(\underline{p}, \underline{x}) = 0$, waarbij $\underline{p}$ de kolom $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ heeft.

a) Toon aan dat deze afbeelding lineair is.

b) Wat is de matrix van $\mathcal{A}$?

c) Wat is het beeld W onder de afbeelding $\mathcal{A}$ van het vlak V?

d) Als $\underline{p}$ de kolom $\begin{pmatrix} p \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ heeft, voor welke waarde(n) van p is dan $W \perp V$?

e) Bewijs $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$.

10. Zij V de vectorruimte van de derdegraadspolynomen $at^3 + bt^2 + ct + d$.
De polynomen $1, t, t^2, t^3$ vormen een basis van V.
De afbeelding $\mathcal{D}$ is gedefinieerd door
$\mathcal{D}(at^3 + bt^2 + ct + d) = 3at^2 + 2bt + c$.

a) Toon aan dat $\mathcal{D}$ een lineaire afbeelding is.

b) Wat is de matrix van $\mathcal{D}$ t.o.v. de basis $1, t, t^2, t^3$?

c) Wat zijn de matrices van $\mathcal{D}^2$, $\mathcal{D}^3$ en $\mathcal{D}^4$?

11. Zij V de vectorruimte der derdegraadspolynomen $at^3 + bt^2 + ct + d$.
De afbeelding $\mathcal{T} : V \to V$ is gedefinieerd door
$\mathcal{T}(at^3 + bt^2 + ct + d) = a(1+t)^3 + b(1+t)^2 + c(1+t) + d$.

d) Toon aan dat $\mathcal{T}$ een lineaire afbeelding is.

b) Wat is de matrix T van $\mathcal{T}$ t.o.v. de basis $1, t, t^2, t^3$?

c) Toon aan dat $1, 1+t, (1+t)^2, (1+t)^3$ ook een basis van V is.

d) Heeft $\mathcal{T}$ een inverse? Zo ja, wat is de matrix van $\mathcal{T}^{-1}$ t.o.v. de basis $1, 1+t, (1+t)^2, (1+t)^3$?

12. V is de vectorruimte der op $[0,1]$ continue functies met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging.
De afbeelding $\mathcal{A} : V \to R_1$ is gedefinieerd door $\mathcal{A}f = f(0)$.

a) Toon aan dat $\mathcal{A}$ een lineaire afbeelding is.

b) Wat is de nulruimte N van $\mathcal{A}$?

c) Heeft $\mathcal{A}$ een inverse?

d) Als de functie f een oplossing van de vergelijking $\mathcal{A}x = c$ is, dan vinden wij alle oplossingen van de vergelijking door te nemen $x = f + n$ met $n \in N$. Bewijs dit.

13. Zij $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ een lineaire afbeelding met de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & a \\ \beta & \delta & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{t.o.v. een basis } \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 .$$

V is het vlak opgespannen door $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$ en W het beeld van V onder de afbeelding $\mathcal{A}$.

a) Wanneer is de beeldruimte W een deel van het vlak V?

b) Wanneer is W een 2-dimensionale deelruimte?

c) Wanneer heeft $\mathcal{A}$ een inverse?

d) Wanneer gaat V punt voor punt in zichzelf over?

e) Toon aan dat voor $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma \geqslant 0$ er steeds een vector $\underline{x} \neq \underline{0}$ is uit V, die in een veelvoud van zichzelf over gaat.

f) Wat zijn de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ als $\beta = 0$ is?

14. L en M zijn deelruimten van de n-dimensionale vectorruimte V. L en M hebben alleen de nulvector gemeen. Bewijs dat $\dim L + \dim M \leqslant n$. Als geldt $\dim L + \dim M = n$, dan is elke $\underline{x}$ uit V eenduidig te schrijven als $\underline{x} = \underline{\ell} + \underline{m}$ met $\underline{\ell}$ uit L en $\underline{m}$ uit M. Bewijs dit.

15. Zij V de vectorruimte van alle polynomen.
De afbeeldingen $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_0$ en $\mathcal{A}_{-1}$ worden als volgt gedefinieerd.

$$\mathcal{A}_1(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k) = \frac{1}{k+1}a_0x^{k+1} + \frac{1}{k}a_1x^k + \dots + a_kx$$

$$\mathcal{A}_{-1}(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k) = ka_0x^{k-1} + (k-1)a_1x^{k-2} + \dots + a_{k-1}$$

en $\mathcal{A}_0$ is de identieke afbeelding.

Zij verder de afbeelding $\mathcal{A}_n$ gedefinieerd door

$$\mathcal{A}_n = \begin{cases} \mathcal{A}_1^n & \text{voor } n > 0 \text{ en geheel} \\ \mathcal{A}_0 & \text{voor } n = 0 \\ \mathcal{A}_{-1}^{-n} & \text{voor } n < 0 \text{ en geheel} \end{cases} .$$

Toon aan dat $\mathcal{A}_n$ een lineaire afbeelding is voor elke gehele n.
Wat zijn de beeldruimten van de afbeeldingen $\mathcal{A}_n$?
Hebben de afbeeldingen $\mathcal{A}_n$ inversen?

§ 2.

1. In R_1 is een basis $\underline{e}_1$ gegeven.
Een andere basis $\underline{f}_1$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$ de kolom (5).
Een vector $\underline{x}$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$ de kolom (x).
Bepaal de overgangsmatrix S van $\underline{e}_1$ naar $\underline{f}_1$.
Wat is de kolom van $\underline{x}$ t.o.v. $\underline{f}_1$.

2. In R_2 is een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ gegeven.
Een andere basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ resp. de kolommen $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.
Bepaal de overgangsmatrix S van $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ naar $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$.
Wat is de kolom t.o.v. $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ van een vector $\underline{x}$, die t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ de kolom $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ heeft.
Maak dit duidelijk in een tekening voor het geval $x = 4$ en $y = 7$.

3. In R_3 is een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ gegeven. De vector $\underline{x}$ heeft t.o.v. deze basis de kolom $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.
Een andere basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$ heeft t.o.v. de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ resp. de kolommen $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
Wat is de overgangsmatrix S van $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ naar $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$.
Wat is de kolom van $\underline{x}$ t.o.v. $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$.

4. In R_3 is een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ gegeven.
Een andere basis $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ resp. de kolommen

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}.$$

Wat is de kolom t.o.v. $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ van een vector $\underline{x}$, die t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de kolom $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ heeft.

5. Gegeven is de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ met de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

t.o.v. een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.

Men gaat over op een nieuwe basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$ met resp. de kolommen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$ t.o.v. de oude basis.

Gevraagd de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. de nieuwe basis.

6. Gegeven is de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ met t.o.v. de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Men gaat over op een nieuwe basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$, waarbij een overgangsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

behoort.

Wat is de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$.

De vector $\underline{x}$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wat is de kolom van de beeldvector $\mathcal{A}\underline{x}$ t.o.v. de oude en t.o.v. de nieuwe basis.

7. Gegeven zijn de afbeelding $\mathcal{A}$ en de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ van vraagstuk 8, § 1.

De vector $\underline{c}$ heeft de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

T.o.v. de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ heeft $\mathcal{A}$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ga dit na.

8. Gegeven zijn de afbeelding $\mathcal{A}$ en de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ van vraagstuk 9, § 1.

De vector $\underline{c}$ heeft de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wat is de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

9. De vector $\underline{x} \neq \underline{0}$ uit R_n heeft t.o.v. de basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ de kolom $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$.

Construeer een basis $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n$ waarop $\underline{x}$ de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ heeft.

Construeer een basis $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$ waarop $\underline{x}$ de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ heeft.

10. In R_n zijn drie bases $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$, $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n$ en $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$ gekozen.

De overgangsmatrix van $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ naar $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n$ zij S en die van $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$ naar $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n$ zij T.

De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ de matrix A.

Druk de matrix B van $\mathcal{A}$ t.o.v. $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$ uit in A, S en T.

11. Zij V gedefinieerd als in opgave 10 en 11, § 1 en de afbeeldingen $\mathcal{D}$ en $\mathcal{T}$ eveneens.
Laat zien dat de matrix D' van $\mathcal{D}$ op de basis 1, $1+t$, $(1+t)^2$, $(1+t)^3$ is gegeven door $D' = T^{-1}DT$.

§ 3.

1. De lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ heeft t.o.v. een basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een onafhankelijk stelsel eigenvectoren.

2. Van een lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ zijn gegeven de eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -2$. De kolommen van de hierbij behorende eigenvectoren zijn resp.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Verder is $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ de kolom van het beeld van de eerste basisvector.

Bepaal:

a) de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. de gebruikte basis;

b) de derde eigenwaarde en de kolom van de bijbehorende eigenvector.

3. De lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ heeft op $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ en de kolommen der eigenvectoren $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$.
Neem $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ als nieuwe basis voor R_3. Zij S de overgangsmatrix.
Controleer dat $S^{-1}AS$ een diagonaalmatrix is.

4. Bepaal de eigenwaarden en de kolommen der eigenvectoren van de afbeeldingen $\mathcal{A}$ uit vraagstuk 8 en 9, § 1.
Wat is de meetkundige interpretatie hiervan?

5. Bepaal een matrix S zodanig dat $S^{-1}AS$ een diagonaalmatrix is en bereken $S^{-1}AS$ voor

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

6. De lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ heeft op een basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Bepaal de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ en de kolommen der eigenvectoren.

b) Wat is de matrix van de lineaire afbeelding $\mathcal{A}^7$.

7. De lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ heeft eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Toon aan dat de lineaire afbeelding $\mathcal{B} = \mathcal{A} + c\mathcal{I}$ de eigenwaarden $\lambda_1 + c, \dots, \lambda_n + c$ heeft.

8. Zij N de nulruimte van de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$.
$\mathcal{A}$ heeft een eigenwaarde $\lambda = 0$ dan en slechts dan als dimensie $N \geqslant 1$ is.
Bewijs dit.

9. $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ zijn lineaire afbeeldingen $R_n \to R_n$ met een gemeenschappelijk stelsel onafhankelijke eigenvectoren $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$. Hoe zien de matrices van $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ er uit op de basis $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$?
Toon aan dat $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.

10. V is de vectorruimte van alle lineaire combinaties van de functies e^t en e^{2t}.
$\mathcal{D}$ is de lineaire afbeelding die aan een functie uit V zijn afgeleide naar t toevoegt.
Wat zijn de eigenwaarden van $\mathcal{D}$?

11. V is de vectorruimte van alle lineaire combinaties van de functies sin t en cos t.
$\mathcal{D}$ is de lineaire afbeelding die aan een functie uit V zijn afgeleide naar t toevoegt.
Wat zijn de eigenwaarden van $\mathcal{D}$?

12. De reguliere lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ heeft eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.
Wat zijn de eigenwaarden van $\mathcal{A}^{-1}$?
Wat zijn de eigenvectoren hierbij ?

13. $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ zijn lineaire afbeeldingen $R_n \to R_n$ en $\mathcal{A}$ is regulier.
Toon aan dat $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}$ dezelfde eigenwaarden hebben.

14. $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ zijn lineaire afbeeldingen $R_n \to R_n$, die voldoen aan $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$;
λ is een eigenwaarde van $\mathcal{A}$ met eigenvector $\underline{v}$.
Als $\mathcal{B}\underline{v} \neq \underline{0}$ is, dan is $\mathcal{B}\underline{v}$ ook een eigenvector van $\mathcal{A}$ bij de eigenwaarde λ.
Bewijs dit.

15. $\mathcal{A}$ is een lineaire afbeelding $R_3 \to R_3$ met op zekere basis de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

Het spoor van A is gedefinieerd door $\mathrm{sp}(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}$.
Zij S de overgangsmatrix naar een andere basis.
Bewijs dat $\mathrm{sp}(A) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i$ als λ_1, λ_2 en λ_3 de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ zijn.
Bewijs dat $\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(S^{-1}AS)$.
Zoudt U het spoor van de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ kunnen definiëren?

16. Het spoor van een $n \times n$ matrix A wordt gedefinieerd door $\mathrm{sp}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (verg. vorige opgave).
a) Laat zien dat $\mathrm{sp}(AB) = \mathrm{sp}(BA)$ als A en B $n \times n$ matrices zijn.
b) Laat zien dat voor twee lineaire afbeeldingen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ van $R_n \to R_n$ niet kan gelden $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{I}$.

§ 4.

1. Bewijs dat voor elk tweetal vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ uit een vectorruimte met inproduct geldt:

a) $$|\underline{x} + \underline{y}| \leq |\underline{x}| + |\underline{y}|$$

b) $$|\underline{x} + \underline{y}|^2 + |\underline{x} - \underline{y}|^2 = 2|\underline{x}|^2 + 2|\underline{y}|^2 \quad .$$

Wat is de meetkundige betekenis.

2. De vectoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ uit een vectorruimte zijn onderling loodrecht en alle ongelijk de nulvector.
Bewijs dat $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ onafhankelijk zijn.

3. In R_3 wordt een vector $\underline{x}$ geprojecteerd op het vlak opgespannen door de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$. Als de projectie $\underline{y}$ geschreven wordt als $\underline{y} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$, toon dan aan dat

$$\alpha = \frac{(\underline{x},\underline{a})(\underline{b},\underline{b}) - (\underline{x},\underline{b})(\underline{a},\underline{b})}{(\underline{a},\underline{a})(\underline{b},\underline{b}) - (\underline{a},\underline{b})^2}$$

en $$\beta = \frac{(\underline{x},\underline{b})(\underline{a},\underline{a}) - (\underline{x},\underline{a})(\underline{a},\underline{b})}{(\underline{a},\underline{a})(\underline{b},\underline{b}) - (\underline{a},\underline{b})^2} \quad .$$

4. Voor een vector $\underline{x}$ uit de vectorruimte V geldt dat $(\underline{x},\underline{y}) = 0$ voor alle vectoren $\underline{y}$ uit V.
Bewijs dat $\underline{x} = \underline{0}$.

5. De vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn van gelijke lengte.
Bewijs dat $\underline{x} - \underline{y}$ en $\underline{x} + \underline{y}$ loodrecht zijn.
Wat is de meetkundige betekenis.

6. In R_3 heeft een vector $\underline{a}$ de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ t.o.v. een orthonormale basis.

Construeer met behulp van het orthogonalisatieproces van Gram-Schmidt een basis van onderling loodrechte vectoren waar $\underline{a}$ deel van uitmaakt.

7. V is de vectorruimte der op $[-1,1]$ continue functies. Ga voor elk van de onderstaande definities na of (f,g) voldoet aan de eisen voor een inproduct.

a) $$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

b) $$(f,g) = \int_{-1}^{1} t^2 f(t)g(t)dt$$

c) $$(f,g) = \int_{0}^{1} t^2 f(t)g(t)dt \quad .$$

8. V is de vectorruimte van alle polynomen op het interval $[0,1]$.

Er is gedefinieerd $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

a) Is V een vectorruimte met inproduct?

b) Vindt een polynoom in de deelruimte L opgespannen door de polynomen t en $1-t$, dat loodrecht staat op t.

c) Geef een tweedegraadspolynoom aan, dat loodrecht staat op L.

d) Bepaal de projectie van t^2 op L.

9. V is de vectorruimte van alle lineaire combinaties van de functies e^t en e^{2t}. Construeer een basis van functies die volgens het inproduct

$\int_0^1 f(t)g(t)dt$ (ga na dat dit inderdaad een inproduct is) loodrecht zijn.

10. V is de vectorruimte van alle derdegraadspolynomen op $[0,\infty]$.

Er is gedefinieerd $(f,g) = \int_0^\infty e^{-t} f(t)g(t)dt$.

a) Ga na dat (f,g) een inproduct is.

b) Bepaal, uitgaande van de basis $1, t, t^2, t^3$, een basis van onderling loodrechte vectoren met het orthogonalisatieproces van Gram-Schmidt.

11. $\mathcal{A}$ is een afbeelding van de vectorruimte V in zichzelf.

Voor $\mathcal{A}$ geldt dat $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}, \mathcal{A}\underline{y})$ voor elk tweetal vectoren $\underline{x}$, $\underline{y}$ uit V. Bewijs dat de afbeelding $\mathcal{A}$ lineair is. (Gebruik opgave 4, § 4.)

§ 5.

1. W is een k-dimensionale deelruimte van de n-dimensionale vectorruimte V.
$W_{\perp}$ is de verzameling van vectoren uit V, die loodrecht staan op alle vectoren uit W.
$W_{\perp}$ heet het orthogonale complement van W.
a) Toon aan dat $W_{\perp}$ een deelruimte van V is.
b) Toon aan dat W en $W_{\perp}$ alleen de nulvector gemeen hebben.
c) Wat is de dimensie van $W_{\perp}$?

2. In R_5 wordt de deelruimte U opgespannen door de vectoren met kolommen

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ t.o.v. een orthonormale basis.

a) Bepaal een basis van het orthogonale complement van U.
b) Bepaal de projectie op U van de vector $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$.

3. In R_4 zijn gegeven drie vectoren met kolommen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Construeer een orthonormale basis voor de deelruimte opgespannen door deze drie vectoren. Hoe zoudt U de gevonden basis aanvullen tot een orthonormale basis voor R_4.

4. De vectorruimte V is eindig dimensionaal. De vectoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ vormen een orthonormaal stelsel, d.w.z. zij zijn ter lengte 1 en onderling loodrecht.
Voor elke $\underline{v}$ uit V geldt $(\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^{m} (\underline{v}, \underline{v}_i)^2$. Toon aan dat $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ een orthonormale basis van V is.
Kent U het omgekeerde van deze stelling?

5. Een lineaire afbeelding $\mathcal{A} : V \to V$ heet orthogonaal als voor elke $\underline{x} \in V$ geldt $(\underline{x}, \underline{x}) = (\mathcal{A}\underline{x}, \mathcal{A}\underline{x})$.
Bewijs dat voor elk tweetal vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ uit V geldt $(\mathcal{A}\underline{x}, \mathcal{A}\underline{y}) = (\underline{x}, \underline{y})$.

6. Een vierkante matrix A heet orthogonaal als geldt $A^{-1} = A^T$.
Een orthogonale afbeelding heeft t.o.v. een orthonormale basis een orthogonale matrix.
Als een lineaire afbeelding t.o.v. een orthonormale basis een orthogonale matrix heeft, dan is de lineaire afbeelding orthogonaal.
Bewijs dit. Zie ook Wiskunde II.

7. De afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ is orthogonaal.
Bewijs dat voor elk tweetal vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ uit R_n geldt $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}, \mathcal{A}^{-1}\underline{y})$.

8. In R_3 zijn twee vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ gegeven met respectievelijk kolommen
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{6} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{6} \end{pmatrix}$ t.o.v. een orthonormale basis.

De draaiing $\mathcal{A}$ beeldt $\underline{x}$ op $\underline{y}$ af. De draaiingsas staat loodrecht op $\underline{x}$ en $\underline{y}$. Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$.
Wat is de matrix van $\mathcal{A}$ op de basis $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ als $\underline{z}$ de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ heeft?

9. Een orthogonale afbeelding $\mathcal{A} : V \to V$ heeft als reële eigenwaarden $+1$ of -1.
Bewijs.

10. In R_n is een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ gedefinieerd met de eigenschap
$|\mathcal{A}\underline{x}| = |\lambda|\ |\underline{x}|$ voor alle $\underline{x}$ uit R_n.
Toon aan dat $\mathcal{A}$ het product is van een scalaire vermenigvuldiging met λ' en een orthogonale afbeelding, waarbij $|\lambda'| = |\lambda|$.
Wat kunt U zeggen van de kolommen van de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. een orthonormale basis.

11. De lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ heeft t.o.v. een orthonormale basis de matrix A.
$\mathcal{A}^T$ is de lineaire afbeelding die t.o.v. deze basis de matrix A^T heeft.
Toon aan dat $\mathcal{A}^T\mathcal{A}$ t.o.v. deze basis een diagonaalmatrix heeft dan en slechts dan als de kolommen van A onderling loodrecht zijn.

§ 6.

1. De afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ is lineair en symmetrisch.
Is de matrix van $\mathcal{A}$ op elke basis symmetrisch?
Zo neen, construeer dan een tegenvoorbeeld.

2. De lineaire afbeeldingen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ van R_n in R_n zijn symmetrisch.
Toon aan: $\mathcal{A}\mathcal{B}$ is symmetrisch dan en slechts dan als $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.

3. De lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ is symmetrisch.
Toon aan:

a) $\mathcal{A}^{-1}$ is symmetrisch als $\mathcal{A}$ regulier is.

b) $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}$ is symmetrisch als $\mathcal{B} : R_n \to R_n$ orthogonaal is.

c) $\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}$ is symmetrisch als $\mathcal{B} : R_n \to R_n$ symmetrisch is.

4. V is de vectorruimte der op $[0,1]$ oneindig vaak differentieerbare functies f, die aan de randcondities $f(0) = f(1) = 0$ voldoen.
De afbeelding $\mathcal{L} : V \to V$ is gedefinieerd door $\mathcal{L}f = -(rf')' + sf$, waarin r en s gegeven, niet-negatieve functies uit V zijn.

Verder is gedefinieerd $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

a) Laat zien dat V een ruimte met inproduct is.

b) Laat zien dat $\mathcal{L}$ een lineaire symmetrische afbeelding is.

c) Laat zien dat $(\mathcal{L}f,f) \geq 0$ is.

5. Laat zien dat de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ uit opgave 8, § 1 symmetrisch is en dat $(\mathcal{A}\underline{v}, \underline{v}) \geq 0$ voor alle $\underline{v}$ uit R_3. Wat is van dit laatste de meetkundige betekenis?
Algemeen geldt: zij $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ een projectie op een vlak V door de oorsprong dan is $\mathcal{A}$ symmetrisch en $(\mathcal{A}\underline{v}, \underline{v}) \geq 0$ voor alle $\underline{v}$ uit R_3. Toon dit aan.

6. Laat zien dat de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ uit opgave 9, § 1 symmetrisch is.
Geldt algemeen dat spiegeling aan een vlak door de oorsprong in R_3 een symmetrische afbeelding is?

7. Van een symmetrische lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ is de nulruimte het orthogonale complement van de beeldruimte. Toon dit aan.

8. Een lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ is gegeven met matrix A t.o.v. een orthonormale basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$.
$\mathcal{A}^T$ is gedefinieerd als de lineaire afbeelding van R_n in R_n, die op deze basis de matrix A^T heeft.

   a) Laat zien dat de definitie van $\mathcal{A}^T$ onafhankelijk van de keuze van de orthonormale basis is.

   b) Bewijs dat voor elk tweetal vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ uit R_n geldt $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}, \mathcal{A}^T\underline{y})$.

   c) Bewijs dat $\mathcal{A}$ symmetrisch is dan en slechts dan als $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$.

9. Zij $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ een lineaire afbeelding. De afbeelding $\mathcal{A}^T$ is gedefinieerd als in opgave 8.
Toon aan:

   a) $\mathcal{A}^T\mathcal{A}$ is symmetrisch

   b) $(\mathcal{A}^T\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) \geq 0$ voor alle $\underline{x}$ uit R_n

   c) de eigenwaarden van $\mathcal{A}^T\mathcal{A}$ zijn ≥ 0.

10. De lineaire afbeelding $\mathcal{B} : R_n \to R_n$ is symmetrisch en alle eigenwaarden van $\mathcal{B}$ zijn ≥ 0.
Toon aan dat er een afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ bestaat, zodanig dat $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}$ is.

11. De lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ heeft t.o.v. een orthonormale basis een matrix A, waarvan de kolommen onderling loodrecht zijn.
Toon aan

   a) $A = A_1 A_2$, waarbij A_1 een orthogonale matrix is en A_2 een diagonaalmatrix

   b) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$, waarbij $\mathcal{A}_1$ een orthogonale afbeelding en $\mathcal{A}_2$ een symmetrische afbeelding is.

12. Gegeven de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$.
Kies een orthonormale basis, bestaande uit de eigenvectoren van de symmetrische afbeelding $\mathcal{A}^T\mathcal{A}$.
Toon aan dat de matrix A van $\mathcal{A}$ t.o.v. deze basis onderling loodrechte kolommen heeft (zie ook opgave 11, § 5).

13. Elke lineaire afbeelding $\mathcal{A}: R_n \to R_n$ is te schrijven als het product van een orthogonale afbeelding en een symmetrische afbeelding. (Combineer opgave 11 en 12.)

14. $N(\mathcal{A})$ en $B(\mathcal{A})$ zijn respectievelijk de nulruimte en de beeldruimte van een lineaire afbeelding $\mathcal{A}: R_n \to R_n$. De afbeelding $\mathcal{A}^T$ is gedefinieerd als in opgave 8.

Toon aan:

a) $N(\mathcal{A}^T)$ is het orthogonale complement van $B(\mathcal{A})$

b) $B(\mathcal{A}^T)$ is het orthogonale complement van $N(\mathcal{A})$.

15. $\mathcal{A}$ is een lineaire afbeelding van R_n in R_n met matrix A t.o.v. een orthonormale basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$.

De kolom van een vector $\underline{x}$ uit R_n zij X.

Een orthonormale basis $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ *met kolommen*

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{pmatrix}, \dots, U_n = \begin{pmatrix} u_{1n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{t.o.v. } \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$$

wordt door $\mathcal{A}$ respectievelijk op $\lambda_1 \underline{u}_1, \dots, \lambda_n \underline{u}_n$ afgebeeld.

a) Toon aan dat

$$A = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{1n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} .$$

b) Is $\mathcal{A}$ een symmetrische afbeelding?

c) Toon aan dat geldt $AX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, U_i \, U_i^T X$.

§ 7.

1. $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) = 1$ is de kwadriek behorende bij de symmetrische lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$.
De vector $\underline{x}$ ligt in het aan $\underline{y}$ toegevoegde hypervlak.
Toon aan dat $\underline{y}$ in het aan $\underline{x}$ toegevoegde hypervlak ligt.

2. $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) = 1$ is de kwadriek behorende bij de symmetrische lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$, die een orthonormaal stelsel eigenvectoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ heeft.
Toon aan dat $\underline{v}_i$ in het aan $\underline{v}_j$ toegevoegde hypervlak ligt voor $j \neq i$.

3. $\mathcal{A}$ is de projectie uit opgave 8, § 1, A de in die opgave bepaalde matrix t.o.v. de basis $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$ en $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x})$ de bijbehorende kwadratische vorm.
De vector $\underline{x}$ heeft kolom $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ t.o.v. deze basis en kolom $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$
t.o.v. een nieuwe basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ gedefinieerd door de kolommen
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ t.o.v. $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$.
a) Bepaal de matrix A' van $\mathcal{A}$ t.o.v. $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.
b) Schrijf $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x})$ als kwadratische vorm in x_1, x_2, x_3.
c) Schrijf $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x})$ als kwadratische vorm in x'_1, x'_2, x'_3.
d) Bereken $X'^T A' X'$.
e) Waarom geven c) en d) een verschillend resultaat?

4. $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ is de projectie op een vlak V door de oorsprong.
Wat is het type van het kwadratisch oppervlak $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) = 1$?

5. $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ is de spiegeling aan een vlak V door de oorsprong.
Wat is het type van het kwadratisch oppervlak $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) = 1$ en van het kwadratisch oppervlak $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) = 0$?

6. $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ is een symmetrische lineaire afbeelding, $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x})$ de bijbehorende kwadratische vorm.
Toon aan

$$\max_{|\underline{x}|=1} (\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) = \text{grootste eigenwaarde van } \mathcal{A} \,;$$

$$\min_{|\underline{x}|=1} (\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) = \text{kleinste eigenwaarde van } \mathcal{A} \,.$$

7. Voor de kwadratische vormen $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x})$ en $(\mathcal{B}\underline{x}, \underline{x})$ behorende bij de symmetrische lineaire afbeeldingen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ van $R_n \to R_n$ geldt $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) \geqslant (\mathcal{B}\underline{x}, \underline{x})$ voor alle $\underline{x}$ uit R_n.
Toon aan

a) de afbeelding $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ heeft eigenwaarden $\geqslant 0$;

b) de grootste eigenwaarde van $\mathcal{A} \geqslant$ de grootste eigenwaarde van $\mathcal{B}$.

8. $\mathcal{A} : R_2 \to R_2$ is een symmetrische lineaire afbeelding met positieve eigenwaarden. Van de kwadriek $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) = 1$ zijn $\underline{v}$ en $\underline{m}$ aan elkaar toegevoegde richtingen. Toon aan dat $\underline{v}$ en $\underline{m}$ onafhankelijk zijn.

Neem $\underline{v}$ en $\underline{m}$ als basis en laat $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ de kolom van een vector $\underline{x}$ t.o.v. deze basis zijn.

a) Toon aan dat de kwadriek $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) = 1$ op de basis $\underline{v}$, $\underline{m}$ de gedaante $(\mathcal{A}\underline{v}, \underline{v})\xi^2 + (\mathcal{A}\underline{m}, \underline{m})\eta^2 = 1$ heeft.

b) Wat is de gedaante van de kwadriek op deze basis als $\underline{v}$ en $\underline{m}$ bovendien vectoren op de kwadriek zijn?

9. Vindt een gemeenschappelijk paar aan elkaar toegevoegde richtingen $\underline{v}$ en $\underline{m}$ voor de kwadrieken die op de basis $\underline{e}_1 = (1,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1)$ de vergelijkingen $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ en $2xy = 1$ hebben.
Welke gedaanten nemen deze kwadrieken aan op de basis $\underline{v}$, $\underline{m}$?

§ 8.

1. Bepaal van elk der volgende tweedegraadskrommen het (de) eventueel aanwezige middelpunt(en), een transformatie, die de kromme in standaardvorm doet overgaan, de standaardvorm en het type.

a) $7x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_1 - 12x_2 - 9 = 0$.

b) $4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2 - 7x_1 + 4x_2 + 9 = 0$.

c) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_1 - 12x_2 + 8 = 0$.

d) $3x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1 + 9 = 0$.

e) $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1 = 0$.

f) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 1 = 0$.

g) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 8 = 0$.

2. Bepaal van elk der volgende tweedegraadsoppervlakken het (de) eventueel aanwezige middelpunt(en), een transformatie, die het oppervlak in standaardvorm doet overgaan, de standaardvorm en het type.

a) $6x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_3 - 4x_1 - 2x_2 = 0$.

b) $x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_3 + 1 = 0$.

c) $x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 1 = 0$.

d) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 - 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 1 = 0$.

e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 0$.

f) $7x_1^2 + 4x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3 + 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 - 8 = 0$.

g) $x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 - x_3 = 0$.

h) $3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0$.

i) $2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$.

j) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_1x_3 = 1$.

k) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$.

FOURIERREEKSEN

§ 2.

Bepaal de fourierreeks van de volgende funkties (met periode 2π):

1. $f(x) = \sin \frac{1}{2}x \qquad \text{voor } -\pi \leq x < \pi$.

2. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{voor } 0 \leq x \leq \pi \\ -x^3 & \text{voor } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$.

3. $f(x) = \sinh x \qquad \text{voor } 0 \leq x < 2\pi$.

4. $f(x) = x \sin x \qquad \text{voor } -\pi \leq x < \pi$.

5. $f(x) = \begin{cases} x \sin x & \text{voor } 0 \leq x < \pi \\ -x \sin x & \text{voor } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$.

Bereken de som van de volgende reeksen:

6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ (aanwijzing: gebruik het resultaat van vraagstuk 2).

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (aanwijzing: gebruik het resultaat van vraagstuk 3).

8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(4n+1)^2(4n+3)^2}$ (aanwijzing: gebruik het resultaat van vraagstuk 5).

§ 3.

Bepaal de fourierreeks van de volgende funkties:

9. $f(x) = x - [x]$, als $[x]$ het grootste gehele getal $\leq x$ is.

10. $f(x) = \begin{cases} x & \text{voor } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{voor } 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x & \text{voor } 2 < x < 3 \end{cases}$

$f(x+3) = f(x)$ voor alle x .

11. $f(x) = e^x$ voor $-c \leq x < c \quad (c > 0)$

$f(x+2c) = f(x)$ voor alle x .

12. Bepaal de fourier-sinusreeks voor $f(x) = \cos x$ in het interval $0 < x < \pi$.

13. Bepaal de fourier-cosinusreeks voor $f(x) = x$ in het interval $0 \leq x \leq \pi$.

§ 4.

Gebruik de fourierintegraal bij het bewijzen van de volgende formules:

14. $$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin y \cos yx}{y}\,dy = \begin{cases} 1 & \text{voor } |x| < 1 \\ 0 & \text{voor } |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{voor } |x| = 1 \end{cases} .$$

15. $$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos yx\,dy \int_0^1 \theta^2 \cos(\theta y)\,d\theta = \begin{cases} x^2 & \text{voor } |x| < 1 \\ 0 & \text{voor } |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{voor } |x| = 1 \end{cases} .$$

16. $$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin yx\,dy \int_0^1 \theta^2 \sin(\theta y)\,d\theta = \begin{cases} x^2 & \text{voor } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{voor } 1 < x \\ \frac{1}{2} & \text{voor } x = 1 \end{cases} .$$

17. Wat zijn de uitkomsten van vraagstuk 16 voor $x < 0$?

§ 5.

Bepaal de fouriergetransformeerde $F(y)$ van de volgende funkties:

18. $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{voor } x = 0 \\ e^{-x} & \text{voor } x > 0 \end{cases} .$$

19. $f(x) = (ax+b)e^{-|x|}$.

Bereken met het gevonden resultaat:

$$\int_0^\infty \frac{y \sin yx}{(1+y^2)^2}\,dy \quad \text{en} \quad \int_0^\infty \frac{\cos yx}{1+y^2}\,dy .$$

20. $f(x) = |x|e^{-|x|}$.

Bereken: $\int\limits_0^\infty \frac{\cos yx}{(1+y^2)^2}\,dy$.

§ 6.

21. Op de rand van de eenheidscirkel (in poolcoördinaten: $r = 1, -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$) is de temperatuurverdeling $T(1,\varphi) = |\varphi|$ gegeven.
Bepaal de temperatuurverdeling $T(r,\varphi)$ over de schijf.
Bereken $T(\frac{1}{2}, \pi)$ in 2 decimalen nauwkeurig.
Bewijs dat $T(r, \pm\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.
Schets de hoogtekaart van $T(r,\varphi)$ voor $r \leqslant 1$.

22. Bepaal de temperatuurverdeling $T(x,y)$ binnen de rechthoek $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2$ als gegeven is:

$$T(0,y) = 0 \quad ; \quad T(x,0) = \sin \pi x \quad ;$$
$$T(1,y) = 0 \quad ; \quad T(x,2) = x(1-x) \quad .$$

23. Een dunne, homogene, gespannen snaar met spanning s en dichtheid ρ trilt in een xu-vlak om zijn evenwichtstoestand $u = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \ell$.
Gegeven zijn de beginvoorwaarden $u(x,0) = 0$ en $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = ax(\ell - x)$.
Bepaal de uitwijking $u(x,t)$ ten tijde t en voor $0 \leqslant x \leqslant \ell$.

24. Als vraagstuk 23 met beginvoorwaarden:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \quad \text{en} \quad u(x,0) = \begin{cases} ax & \text{voor } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\ell \\ a(\ell - x) & \text{voor } \frac{1}{2}\ell \leqslant x \leqslant \ell \ . \end{cases}$$

Wat is de stand van de snaar op het tijdstip $t = \frac{\ell}{2\alpha}$ als $\alpha^2 = s/\rho$?

25. Als vraagstuk 23 met beginvoorwaarden:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \quad \text{en} \quad u(x,0) = \begin{cases} 2ax & \text{voor } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\ell}{4} \\ \frac{2}{3}\,a(\ell - x) & \text{voor } \frac{\ell}{4} \leqslant x \leqslant \ell \ . \end{cases}$$

Wat valt U op betreffende het voorkomen van grond- en boventonen in de vraagstukken 24 en 25 ?

26. De tijdafhankelijke warmtegeleidingsvergelijking voor een dunne homogene staaf langs de x-as heeft de gedaante $\frac{\partial T}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (T = temperatuur, k = warmtegeleidingscoëfficiënt, t = tijd).
Beschouw een dergelijke staaf $(0 \leqslant x \leqslant \ell)$ en bepaal met de methode van separatie van variabelen $T(x,t)$ onder de voorwaarden $T(x,0) = x(\ell - x)$ $(0 \leqslant x \leqslant \ell)$, $T(0,t) = T(\ell,t) = 0$ $(t \geqslant 0)$.
Wat is de stationaire temperatuurverdeling over de staaf? Wat is het resultaat als $k = 0$? Kunt U dat fysisch inzien?

27. Beschouw een eendimensionale diffusiekolom langs de x-as. Bepaal de concentratie $C(x,t)$ als funktie van plaats en tijd als de beginconcentratie is $C(x,0) = |x|e^{-|x|}$.
Vul in de uitkomst $t = 0$ in en laat met behulp van de vraagstukken 19 en 20 zien dat we de beginconcentratie terugkrijgen.

§ 9,10.

28. Bewijs, dat de rij funkties $g_n(x) = \dfrac{1}{1 + n^2x^2}$ uniform convergeert op elk interval $a \leqslant x \leqslant b$ dat $x = 0$ niet bevat.
Is de rij uniform convergent voor $0 < x \leqslant 1$?

29. Onderzoek de uniforme convergentie van de rij $g_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{2n}}$.

30. Bewijs: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$ is uniform convergent voor $a \leqslant x \leqslant 3/2$ $(a > 0)$.
Is de reeks uniform convergent op het interval $0 \leqslant x \leqslant 1$?

31. Bewijs: $\lim\limits_{x \to 0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n a^n}{n!(1 + a^{2n}x^2)} = e^{-a}$.

32. Bewijs: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{1 + x^n}$ is uniform convergent voor $x \geqslant 1 + c$ $(c > 0)$.

33. Gegeven: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ is absoluut convergent.

Bewijs: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ is uniform convergent voor alle x.

34. Bewijs: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\left[1 - (\tfrac{1}{2})^2\frac{k^2}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{k^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{k^6}{5} - \dots\right]$

voor $k^2 < 1$.

35. Gegeven: $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n^2}\sin(2^{n^2}x) \quad (a > 1)$.

Bewijs: a) $s(x)$ is een continue funktie van x;

b) $s'(x)$ bestaat voor alle x, als $a > 2$;

c) $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2a^{-1})^{n^2}\cos(2^{n^2}x) \quad (a > 2)$.

36. Gegeven: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^4x^2}$.

Bewijs: $f'(x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4x}{(n^3+n^4x^2)^2}$.

Kan men $f''(x)$ vinden door nogmaals termsgewijs te differentiëren?

37. Bewijs, dat in het antwoord van vraagstuk 23 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ door termsgewijze differentiatie kunnen worden gevonden.

38. Bewijs, dat $u(x,t)$ uit vraagstuk 24 een continue funktie is van de twee variabelen x en t.

39. Gegeven: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} \quad (x > 1)$.

Bewijs: a) $f(x)$ is oneindig vaak differentieerbaar;

b) $f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\log n)^k n^{-x} \quad (k = 1,2,\dots)$.

Opmerking: Uit de uniforme convergentie van de afgeleidenreeks op het interval $x \geqslant p > 1$ bij elke vastgehouden p volgt de differentieerbaarheid op $x > p > 1$ voor elke vaste p, dus de differentieerbaarheid in elk punt $x > 1$.

ANTWOORDEN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

§ 1 t/m § 9:

1. $yx^2 = Ce^y$.

2. $y^2 - 1 = C(x^2 - 1)$.

3. $y = \frac{1}{2} \log x + \frac{C}{\log x}$.

4. $y = -2 + C(x\sqrt{x^2+1} + 1 + x^2)$.

5. $C(x^2 + y^2) = x$.

6. $xy + \cos y = C$.

7. $2x + yx^2 = Cy$; $y = 0$.

8. $y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \log \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|}$.

9. $y = Ce^{y/x}$.

10. $\sin(x+y) = Ce^y$.

11. $x^3y - xy + y^2 = C$.

12. $\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} = C$.

13. $e^x = Cy^2 - 2xy^2$; $y = 0$.

14. $y^4(Ce^{-2x} - 10x^3 + 15x^2 - 15x + \frac{15}{2}) = 1$; $y = 0$.

15. $(2x - 2y + 1)e^{2(x-y)^2+6x+2y} = C$.

16. $e^x = (y + C)\log y$; $y = 1$.

17. $xy(x^2 + y^2) + 1 = Cxy$; $y = 0$.

18. $4x = (C - x^4)y$.

19. $y^2 = Cx - x \log|x|$.

20. $(xy + \sin y)e^x = C$.

21. $(y^3 - 1)x^2 = C$.

22. $(y-x-2)^4 = C(5y+x+2)$; $5y + x + 2 = 0$.

23. $\sin y = Ce^{-x} + x - 1$.

24. $x^2(1+y^2) = Ce^{x^2+y^2}$.

25. $(y+x)^2(y-x) = C$.

26. $Cx(1-x^2) = y - x$.

27. $e^{4x+8y}(4x-8y+11) = C$.

28. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$.

29. $y - x = Ce^y$.

30. $x^2 - y^2 = Cy^3$; $y = 0$.

31. $y = Cx + C - C^2$; $4y = (x+1)^2$.

32. $x^2y = C + \sin x - x\cos x$.

33. $y = \sin x + C\cos x$.

34. $y(3x-y^2) = C$.

35. $(Ce^x + x + 1)\sqrt{y} = 1$; $y = 0$.

36. $ye^{xy} = C$.

§ 11:

1. $$\begin{cases} x = e^{2t}(A\sin 3t + B\cos 3t) \\ y = \frac{1}{2}e^{2t}\left[(3B-A)\sin 3t - (3A+B)\cos 3t\right] . \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x = A + (B+4t)e^t - e^{-t} \\ y = 2A + \frac{3}{2}(B-1+4t)e^t - \frac{5}{2}e^{-t} . \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x = Ae^{-t} + e^{\frac{1}{2}t}\{B\sin\frac{1}{2}t\sqrt{3} + C\cos\frac{1}{2}t\sqrt{3}\} + e^t \\ y = Ae^{-t} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}\{(C\sqrt{3}-B)\sin\frac{1}{2}t\sqrt{3} - (B\sqrt{3}+C)\cos\frac{1}{2}t\sqrt{3}\} + e^t \\ z = Ae^{-t} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}\{-(B+C\sqrt{3})\sin\frac{1}{2}t\sqrt{3} + (B\sqrt{3}-C)\cos\frac{1}{2}t\sqrt{3} . \end{cases}$$

4. $\begin{cases} x = \frac{1}{3}\, e^{-2t/5} + \frac{2}{3}\, e^{-\frac{1}{4}t} \\ y = -\frac{2}{3}\, e^{-2t/5} + \frac{2}{3}\, e^{-\frac{1}{4}t}. \end{cases}$

5. $$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} x = Ae^{\alpha^2 t} + Be^{-\alpha^2 t} + \dfrac{\alpha+1}{\alpha(1+\alpha^2)} \sin \alpha t \\ y = -Ae^{\alpha^2 t} + Be^{-\alpha^2 t} + \dfrac{\alpha-1}{\alpha(1+\alpha^2)} \cos \alpha t \end{array}\right\} \alpha \neq 0 . \\ \left.\begin{array}{l} x = t + A \\ y = B \end{array}\right\} \alpha = 0 . \end{cases}$$

6. $\begin{cases} x = A \cos t + B \sin t + \frac{1}{2} t \sin t + \frac{1}{2} t \cos t + 6t \\ y = \frac{1}{2}(A+B)\cos t + \frac{1}{2}(B-A)\sin t + \frac{1}{2} t \cos t + 3t + 3 + \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{4} \sin t . \end{cases}$

§ 12:

1. $y = e^x(\cos x + \sin x) - e^{-x} \sinh 2x$.

2. $y = \frac{1}{4}\, e^x(x^2 - 3x + \frac{3}{2}) - \frac{1}{24}\, e^{-x} - \frac{1}{3}\, e^{\frac{1}{2}x}(\cos \frac{1}{2} x\sqrt{3} - \sqrt{3} \sin \frac{1}{2} x\sqrt{3})$.

3. $x = 8t + 30 + e^t$

   $y = -4t - 21 - e^t$.

4. $2x = (3t-1)e^t + (t+3)e^{-t}$

   $4y = (4-3t)e^t - (4+t)e^{-t}$,

5. $y = 3 \cos x + 6 \sin x$

   $3z = -\cos x - 2 \sin x$.

§ 13 en § 14:

1. $$y = a_0 \left[1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} + \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9} + \ldots\right] +$$
$$a_1 \left[x + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^7}{3.4.6.7} + \frac{x^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \ldots\right] .$$

2. $$y = a_0\left[1 - \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^8}{2.3.4.6.7.8} - \ldots\right] +$$

$$a_1\left[x - \frac{x^5}{3.4.5} + \frac{x^9}{3.4.5.7.8.9} - \ldots\right] +$$

$$a_2\left[x^2 - \frac{x^6}{4.5.6} + \frac{x^{10}}{4.5.6.8.9.10} - \ldots\right] .$$

3. $$y = a_0[1 - 3x^2 + x^4 + \frac{1}{5}x^6 + \frac{3}{5.7}x^8 + \frac{3}{7.9}x^{10} + \frac{3}{9.11}x^{12} + \ldots] +$$

$$a_1[x - x^3] .$$

4. $$y = a_0\left(1 + 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n-2)!}{(2n-3)2^{2n}(n-1)!\,n!} x^{2n}\right) + a_1(x - \frac{4}{3}x^3) .$$

5. $$y = a_0\left[1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} + \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9} + \ldots\right] +$$

$$a_1\left[x + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^7}{3.4.6.7} + \frac{x^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \ldots\right] +$$

$$\tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.4.5}x^5 + \frac{1}{2.4.5.7.8}x^8 + \frac{1}{2.4.5.7.8.10.11}x^{11} + \ldots .$$

6. $$y = \lambda(1+x) + \mu e^x .$$

7. $$y = \lambda\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n(-3)(-1).1.3\ldots(2n-5)}{3.7\ldots(4n-1)} x^{2n}\right] +$$

$$+ \mu\sqrt{x}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-5)(-1).3.7\ldots(4n-9)}{4^n n!} x^{2n}\right] .$$

8. $$y = \lambda x + \mu x \log|x| .$$

9. $$y = \lambda x^2 + \mu x^3 .$$

10. $$y = \frac{1}{x}(\lambda \sin x + \mu \cos x) .$$

ANTWOORDEN LINEAIRE ALGEBRA

§ 1:

3. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1/9 \end{pmatrix}$.

4. a) 2; b) 1; c) $x + y - z = 0$; d) $X = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $X = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \text{O} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{O} & & & 0 \end{pmatrix}$.

8. c) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; d) $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \end{pmatrix}$.

9. b) $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$; d) $p = -2 \pm \sqrt{3}$.

10. $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

D^4 = nulmatrix .

11. b) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. a) altijd; b) $\alpha\delta \neq \gamma\beta$; c) $\alpha\delta \neq \gamma\beta$ en $c \neq 0$; d) $\alpha = \delta = 1$ en $\beta = \gamma = 0$;
f) α, δ en c.

§ 2.

1. $S = (5)$; $(x/5)$.

2. $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3x + 2y \\ 2x - y \end{pmatrix}$.

3. $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. $x' = \dfrac{\begin{vmatrix} x & g_1 & h_1 \\ y & g_2 & h_2 \\ z & g_3 & h_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}}$; analoog voor y' en z'.

5. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. $A' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -12 & -26 & -44 \\ 9 & 20 & 32 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$; $AX = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$; $A'X' = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

10. $B = TS^{-1}\ AST^{-1}$.

§ 3.

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ b) $3 ; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Opg. 8, § 1: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 ; \ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 0 ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Opg. 9, § 1: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 ; \ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -1 ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. a) $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3 ; \quad \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 0 ; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $3^6 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. 1 en 2 .

11. i en $-i$.

12. $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_k}$.

§ 4.

7. a) voldoet; b) voldoet; c) voldoet niet .

8. b) bijv. $1 - \frac{3t}{2}$; c) bijv. $6t^2 - 6t + 1$; d) $t - 1/6$.

9. e^t en $e^{2t} - \frac{2}{3}\,\frac{e^3 - 1}{e^2 - 1}\,e^t$.

10. 1; $t - 1$; $t^2 - 4t + 2$; $t^3 - 9t^2 + 18t - 6$.

§ 5.

1. c) $n - k$.

2. b) (3, 9/5, 3/5, 6/5, 3/5) .

8. $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 + \sqrt{6} & 1 + 2\sqrt{6} \\ -2 - \sqrt{6} & 4 & -2 + \sqrt{6} \\ 1 - 2\sqrt{6} & -2 - \sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

§ 7.

3. a) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_3$

c) $2x_1'^2 + 6x_2'^2 + 4x_1'x_2'$; d) $x_1'^2 + x_2'^2$.

4. cirkelcylinder .

5. eenbladige hyperboloïde; kegel .

8. b) $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

9. Bijv. $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\underline{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$2x'^2 + 2y'^2 = 1$; $4x'^2 - 4y'^2 = 1$.

§ 8.

1. a) $M(1,2)$;

$$\begin{cases} x_1 = z_1\sqrt{\frac{1}{5}} - z_2\sqrt{\frac{4}{5}} + 1 \\ x_2 = z_1\sqrt{\frac{4}{5}} + z_2\sqrt{\frac{1}{5}} + 2 \end{cases}$$

$3z_1^2 + 8z_2^2 - 24 = 0$, ellips .

b) geen middelpunt

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \underline{y} \ ; \qquad \underline{y} = \underline{z} + \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{13}} \\ -\frac{1}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

$13z_2^2 - \sqrt{13}z_1 = 0$, parabool .

c) $M(3,0) + \lambda(-2,1)$ rechte van middelpunten .

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} z_2 + 3 \\ x_2 = - \frac{1}{\sqrt{5}} z_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} z_2 \end{cases}$$

$5z_2^2 - 1 = 0,$ evenwijdig lijnenpaar .

d) $M(1,0)$

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + 1 \\ x_2 = z_2 \end{cases}$$

$3z_1^2 + 2z_2^2 + 6 = 0,$ imaginaire ellips .

e) $M(1,1)$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} z_1 \sqrt{2} - \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} + 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} z_1 \sqrt{2} + \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

$\frac{1}{2} z_1^2 + \frac{3}{2} z_2^2 = 0$, imaginair snijdend lijnenpaar .

f) $M(-1,0) + \lambda(1,-1)$ rechte van middelpunten.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} z_1 \sqrt{2} + \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} - 1 \\ x_2 = - \frac{1}{2} z_1 \sqrt{2} + \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} \end{cases}$$

$2z_2^2 = 0$, reëel samenvallend lijnenpaar .

g) $M(1,1)$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 1 \\ x_2 = y_2 + 1 \end{cases}$$

$y_1^2 + y_2^2 + 6 = 0$, imaginaire cirkel .

2. a) $M(0,1,-\frac{1}{2})$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{5}} z_3 \\ x_2 = z_1 + 1 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} z_2 + \frac{2}{\sqrt{5}} z_3 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$z_1^2 + 8z_2^2 - 2z_3^2 - 1 = 0$, éénbladige hyperboloïde .

b) $M(0,0,1)$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} z_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} z_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} z_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} z_3 \\ x_3 = z_1 + 1 \end{cases}$$

$z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_3^2 = 0$ kegel .

c) $M(0,0,1) + \lambda(2,1,1)$ rechte van middelpunten

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{\sqrt{6}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} z_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} z_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} z_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} z_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} z_3 + 1 \end{cases}$$

$3z_2^2 + 4z_3^2 - 2 = 0$, elliptische cylinder .

d) $M: p_1 - 2p_2 + p_3 - 1 = 0$, vlak van middelpunten

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_3 + 1 \\ x_2 = -\frac{2}{\sqrt{6}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_3 \end{cases}$$

$6z_1^2 = 0$, samenvallend vlakkenpaar .

e) geen middelpunt

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{y} \; ; \qquad \underline{y} = \underline{z} - \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{12}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$z_1^2 + 2z_3^2 - 6z_2\sqrt{2} = 0$, elliptische paraboloïde .

f) $M(0,1,0)$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} z_1 + \frac{2}{3} z_2 - \frac{1}{3} z_3 \\ x_2 = -\frac{1}{3} z_1 + \frac{2}{3} z_2 + \frac{2}{3} z_3 + 1 \\ x_3 = \frac{2}{3} z_1 - \frac{1}{3} z_2 + \frac{2}{3} z_3 \end{cases}$$

$12z_1^2 + 3z_2^2 + 3z_3^2 - 12 = 0$, ellipsoïde .

g) geen middelpunt

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \underline{y} \; ; \qquad \underline{y} = \underline{z} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{16}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$2z_1^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}z_3 = 0$, parabolische cylinder .

h) $M(0,0,0)$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} z_1 \sqrt{3} - \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} + \frac{1}{6} z_3 \sqrt{6} \\ x_2 = \frac{1}{3} z_1 \sqrt{3} \qquad\qquad - \frac{1}{3} z_3 \sqrt{6} \\ x_3 = \frac{1}{3} z_1 \sqrt{3} + \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} + \frac{1}{6} z_3 \sqrt{6} \end{cases}$$

$7z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$, imaginaire kegel .

i) $M\ \lambda(1,-1,-1)$, rechte van middelpunten .

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} z_1 \sqrt{3} + \frac{1}{3} z_3 \sqrt{6} \\ x_2 = -\frac{1}{3} z_1 \sqrt{3} + \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} + \frac{1}{6} z_3 \sqrt{6} \\ x_3 = -\frac{1}{3} z_1 \sqrt{3} - \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} + \frac{1}{6} z_3 \sqrt{6} \end{cases}$$

$-z_2^2 + 3z_3^2 = 0$, snijdend vlakkenpaar .

j) $M\ \mu(-2,1,0) + \tau(0,-1,2)$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{6} z_1 \sqrt{6} + \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} - \frac{1}{3} z_3 \sqrt{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} z_1 \sqrt{6} + \frac{1}{3} z_3 \sqrt{3} \\ x_3 = \frac{1}{6} z_1 \sqrt{6} - \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} - \frac{1}{3} z_3 \sqrt{3} \end{cases}$$

$6z_1^2 - 1 = 0$, evenwijdig vlakkenpaar .

k) $M(0,0,0)$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} z_1 \sqrt{3} + \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} - \frac{1}{6} z_3 \sqrt{6} \\ x_2 = \frac{1}{3} z_1 \sqrt{3} + \frac{1}{3} z_3 \sqrt{6} \\ x_3 = \frac{1}{3} z_1 \sqrt{3} - \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} - \frac{1}{6} z_3 \sqrt{6} \end{cases}$$

$z_1^2 - \frac{1}{2} z_2^2 - \frac{1}{2} z_3^2 = 0$, kegel .

ANTWOORDEN FOURIERREEKSEN

1. $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{4n^2 - 1}$.

2. $\frac{\pi^3}{4} + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n(n^2\pi^2 - 2)}{n^4} \cos nx$.

3. $\frac{\cosh 2\pi - 1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cosh 2\pi - 1)\cos nx - n \sinh 2\pi \sin nx}{n^2 + 1}$.

4. $1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n^2 - 1}$.

5. $\frac{\pi}{2} \sin x - \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{(4n^2 - 1)^2}$.

6. $\frac{\pi^4}{96}$.

7. $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{\sinh 2\pi}{\cosh 2\pi - 1}$.

8. $\frac{\pi^2 \sqrt{2}}{128}$.

9. $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n}$.

10. $\frac{2}{3} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin \frac{n\pi}{3})^2 \cos \frac{2\pi nx}{3}}{n^2}$.

11. $\frac{\sinh c}{c} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{c \sinh c}{c^2 + n^2\pi^2} \cos \frac{\pi nx}{c} - \frac{\pi n \sinh c}{c^2 + n^2\pi^2} \sin \frac{\pi nx}{c} \right\}$.

12. $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1}$.

13. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

17. $\begin{cases} -x^2 & \text{voor } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{voor } \quad x < -1 \\ -\frac{1}{2} & \text{voor } \quad x = -1 \end{cases}$.

18. $F(y) = \dfrac{1}{1+2\pi iy}$.

19. $F(y) = \dfrac{2b}{1+4\pi^2y^2} - \dfrac{8\pi iya}{(1+4\pi^2y^2)^2}$; $\frac{\pi}{4}\, xe^{-|x|}$; $\frac{\pi}{2}\, e^{-|x|}$

20. $F(y) = 2\,\dfrac{1-4\pi^2y^2}{(1+4\pi^2y^2)^2}$; $\frac{\pi}{4}(1+|x|)e^{-|x|}$.

21. $T(r,\varphi) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{r^{2n+1}}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)\varphi$.

$T(\frac{1}{2},\pi) = 2.23$ want

$$0 \leqslant T(\tfrac{1}{2},\pi) - \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} - \frac{1}{18\pi} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2^5.5^2} + \frac{1}{2^7.7^2} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{5^2}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \ldots\right) = \frac{4}{25\pi}\,\frac{1}{2^5}\,\frac{1}{3/4} = \frac{1}{150\pi} < \frac{1}{200} .$$

22. $T(x,y) = \dfrac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\sin((2k+1)\pi x)\sinh((2k+1)\pi y)}{(2k+1)^3 \sinh(2(2k+1)\pi)} + \dfrac{\sinh(\pi(2-y))\sin \pi x}{\sinh 2\pi}$.

23. $u(x,t) = \dfrac{8a\ell^3}{\alpha\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^4} \sin \dfrac{(2n+1)\pi x}{\ell} \sin \dfrac{(2n+1)\pi\alpha t}{\ell}$.

24. $u(x,t) = \dfrac{4a\ell}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} \sin \dfrac{\pi k}{2} \sin \dfrac{k\pi x}{\ell} \cos \dfrac{k\pi\alpha t}{\ell}$; $u(x, \frac{\ell}{2\alpha}) = 0$.

25. $u(x,t) = \dfrac{16a\ell}{3\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} \sin \dfrac{k\pi}{4} \sin \dfrac{k\pi x}{\ell} \cos \dfrac{k\pi\alpha t}{\ell}$.

In vraagstuk 24 komen de $(2k-1)^e$ boventonen niet voor, in vraagstuk 25 ontbreken de $(4k-1)^e$ boventonen $(k = 1,2,3,\ldots)$.

26. $$T(x,t) = \frac{8\ell^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 kt}{\ell^2}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{\ell} .$$

$T(x,t) \to 0$ $(t \to \infty)$ voor iedere x $(0 \leqslant x \leqslant \ell)$.
Koeling van de staaf tot temperatuur $T = 0$.

$T(x,t) \equiv T(x,0)$.
Geen warmtegeleiding.

27. $$C(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1-\alpha^2)\cos \alpha x}{(1+\alpha^2)^2} e^{-k\alpha^2 t} d\alpha .$$

28. Neen.

29. Uniform vonvergent op elk interval $a \leqslant x \leqslant b$ dat de punten $x = \pm 1$ niet bevat.

30. Neen.

31. Ja.

TENTAMENOPGAVEN EN HERKANSINGEN MET ANTWOORDEN

TENTAMENOPGAVEN

N.B. Van enkele tentamens zijn één of meer opgaven weggelaten, welke betrekking hebben op onderwerpen, die niet meer tot de tentamenstof behoren.

24 januari 1959

1. Bepaal met behulp van machtreekssubstitutie de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} - 2y = 0 .$$

2. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$x \cos y \frac{dy}{dx} + \sin y(1 - x^2 \sin y \tan x) = 0 .$$

Aanwijzing: het zoeken naar een integrerende factor is niet voordelig.

3. Bereken van de functie $f(x)$, die gedefinieerd is door

$$f(x) = \cos x \quad \text{voor } -\tfrac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \tfrac{1}{2}\pi ,$$

$$f(x) = 0 \quad \text{voor } x < -\tfrac{1}{2}\pi \text{ en voor } x > \tfrac{1}{2}\pi ,$$

de Fourier-coëfficiënten $A(u)$ en $B(u)$, behorende bij de voorstelling

$$f(x) = \int_0^\infty \{A(u)\cos ux + B(u)\sin ux\} du .$$

4. a) Geef de definitie van uniforme convergentie van een rij functies.
   b) Bewijs, dat de rij functies $g_n(x) = x \cos \frac{x}{x+n}$ voor $0 \leqslant x \leqslant 1$ uniform convergeert.

10 juni 1959

1. Los op $(y+x^2)dy + x(1-y)dx = 0$.

Aanwijzing: zoek een integrerende factor van de gedaante $f(x^2+y^2)$.

2. Gegeven

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 2\frac{dz}{dt} = -2x - 2y - z\ ;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2z}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt} = -2x + z\ ;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2z}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 2\frac{dz}{dt} = -2y + z\ ;$$

$$x(0) = z(0) = 0\ ;$$

$$y(0) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 1\ .$$

Gevraagd de functies x, y en z te berekenen met behulp van Laplace-transformatie.

3. Bewijs $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ux \sin^2(\frac{1}{2}u)}{u^2}\,du = \begin{cases} \frac{\pi}{4}(1-|x|) & \text{voor } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{voor } |x| \geqslant 1\ . \end{cases}$

4. a) Bewijs de stelling:

als de reeks $\sum_1^\infty f_n(x)$ uniform convergeert met som $f(x)$ en als alle functies $f_n(x)$ en $f(x)$ eigenlijk integreerbaar zijn voor $a \leqslant x \leqslant b$ dan geldt:

$$\int_a^b \left(\sum_1^\infty f_n(x)\right) dx = \sum_1^\infty \int_a^b f_n(x)dx\ .$$

b) Bereken $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(n^2-x)^2} \right\} dx\ .$

Motiveer de bewerkingen, die U uitvoert.

<u>12 januari 1960</u>

1. De functie $f(x)$ met periode π is gegeven door

$$f(x) = \sin x \quad \text{voor} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}\ ;$$

$$f(x) = 0 \quad \text{voor} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi\ .$$

a) Bepaal de Fourier-reeks van $f(x)$.

b) Bepaal $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

2. a) Bepaal de algemene oplossing van de D.V.

$$(x^2+y^2)y' = xy \; .$$

b) Bepaal met Laplace-transformatie de oplossing van de D.V.

$$y''' + y'' + y' + y = 1 + x \; ,$$

die voldoet aan

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \; .$$

3. a) Onderzoek of de rij functies e^{-nx^2} voor $x > 0$ uniform convergeert.

b) Bewijs dat de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^3}$ termsgewijs mag worden gedifferentieerd voor alle $x \geqslant 0$.

4. Vervalt.

13 juni 1960

1. Van de functie $f(x)$ is gegeven

$$f(x) = 1-2x \quad \text{voor} \quad 0 < x < \tfrac{1}{2} \; ,$$
$$f(x) = 0 \quad \text{voor} \quad \tfrac{1}{2} < x < 1 \; ,$$
$$f(x) \text{ is periodiek met periode } 1 \; .$$

a) Bepaal de Fourier-reeks van $f(x)$.

b) Wat vindt U door substitutie van $x = 0$ in deze reeks?

2. Vervalt.

3. Los de volgende differentiaalvergelijking op

$$y = \frac{x\{1+(y')^2\}}{2y'} \; .$$

4. Bewijs dat $\lim\limits_{x \to 0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^3x^2}}{2^n} = 1$.

16 januari 1961

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op voor $x > 0$

$$x^2 + y^2 + 4 + 4xy \frac{dy}{dx} = 0 .$$

2. Van de functie $f(x)$ is gegeven

$$f(x) = x^2 \text{ voor } 0 < x < \pi ,$$
$$f(x) = -f(-x) ,$$
$$f(x) \text{ is periodiek met periode } 2\pi .$$

a) Bepaal de Fourier-reeks van $f(x)$.

b) Bereken $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ door middel van substitutie van $x = \frac{1}{2}\pi$ in de Fourier-reeks van $f(x)$.

3. Bereken $\int\limits_0^1 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x^2+n)^2} \, dx$.

4. Bepaal formules voor een coördinatentransformatie (rotatie en translatie in één stel formules), waardoor de vergelijking van het kwadratische oppervlak

$$x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3 - 4x_1 + 4x_3 = 0$$

standaardgedaante krijgt.
Geef de vergelijking van het oppervlak in de nieuwe coördinaten en bepaal de aard van het oppervlak.

13 juni 1961

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op

$$y^2 + 3x + 2y + (5y^2 + 4xy + x) \frac{dy}{dx} = 0 .$$

Aanwijzing: zoek een integrerende factor, die een functie van $x + y^2$ is.

2. a) Bewijs dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nx = \frac{\pi \cosh x}{2 \sinh \pi} - \frac{1}{2}$$

geldt voor $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

b) Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

3. Bij het kwadratische oppervlak, gegeven door

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 6x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 10 = 0 ,$$

wordt gevraagd een coördinatentransformatie (rotatie en translatie), zodat de vergelijking van het oppervlak in standaardgedaante overgaat.
Bepaal de vergelijking in de nieuwe coördinaten en het type van het oppervlak.

4. Een rij functies $g_n(x)$ is gegeven door $g_n(x) = \frac{1}{n^2} \log\{1+n^2(1-x)\}$.

a) Bewijs dat deze rij functies voor $0 \leqslant x \leqslant 1$ uniform convergeert.

b) Als a een getal is met $0 < a < 1$, dan is de rij functies $\frac{dg_n(x)}{dx}$ uniform convergent voor $0 \leqslant x \leqslant a$. Toon dit aan.
Geldt de uniforme convergentie van deze rij ook voor $0 \leqslant x \leqslant 1$?
Geef een beredenering van Uw antwoord.

<u>15 januari 1962</u>

1. a) De differentiaalvergelijking

$$4x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

heeft een oplossing van de gedaante $y = x^{\alpha}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n\right)$ met $\alpha > 0$.
Bepaal α, u_1 en u_2.

b) Los de volgende differentiaalvergelijking op

$$(y+x^2+1) \frac{dy}{dx} = 2x(y-x^2-1) .$$

2. Een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ van R_3 in R_3 is vastgelegd door

$$\mathcal{A}(1,0,0) = (3,-2,-1) ,$$
$$\mathcal{A}(0,1,0) = (4,-3,-1) ,$$
$$\mathcal{A}(0,0,1) = (-2,2,0) ,$$

t.o.v. $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$ en $\underline{e}_3 = (0,0,1)$.

a) Laat zien, dat er een basis bestaat, zo dat de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van die basis diagonaalvorm heeft.

b) Bepaal een basis als in punt a) bedoeld, en geef de matrix behorende bij de overgang van de oorspronkelijke basis naar die basis.

3. a) Vervalt.

b) De functie $f(x)$ is gedefinieerd door

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| \;, && \text{als } |x| < 1 \,, \\ f(x) &= \tfrac{1}{2} \;, && \text{als } |x| = 1 \,, \\ f(x) &= 0 \;, && \text{als } |x| > 1 \,. \end{aligned}$$

Bepaal de integraal van Fourier behorende bij $f(x)$ en laat zien, dat deze gelijk is aan $f(x)$.

4. a) Onderzoek de uniforme convergentie van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan nx}{n\sqrt{n+x^2}} \;.$$

b) Bewijs het volgende:
als een rij $g_1(x), g_2(x), \ldots$ van functies convergeert voor $-1 \leqslant x \leqslant 1$, en wel uniform voor $-1 \leqslant x \leqslant 0$ en ook uniform voor $0 \leqslant x \leqslant 1$, dan convergeert die rij uniform voor $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

<u>14 juni 1962</u>

1. Een oppervlak van de tweede graad in R_3 is bepaald door de vergelijking

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_3^3 - 2x_1 + 12x_2 - 2x_3 - 3 = 0 \;.$$

a) Onderzoek, of het oppervlak een middelpunt bezit.

b) Bepaal de formules van een dusdanige coördinatentransformatie, dat het oppervlak in de nieuwe coördinaten een vergelijking in standaardvorm heeft.

c) Bepaal de vergelijking van het oppervlak in de in b) ingevoerde nieuwe coördinaten en tevens het type van het oppervlak.

2. Van de functie $f(x)$ is gegeven

$$\begin{aligned} &f(x) \text{ is periodiek met periode } 2\pi, \\ &f(x) = x \quad \text{voor } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ &f(x) = 0 \quad \text{voor } \pi < x < 2\pi. \end{aligned}$$

a) Bereken de Fourier-reeks van $f(x)$.

b) Voor welke waarden van x $(0 \leq x < 2\pi)$ is de som van de Fourier-reeks gelijk aan $f(x)$ en waarom?

3. Bepaal met reekssubstitutie voor $x > 0$ de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 .$$

4. Vervalt.

<u>15 januari 1963</u>

1. a) Bepaal de algemene oplossing van

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1 + 2x^2y^2}{x^3y} .$$

b) Bepaal de algemene oplossing van

$$(1 - x^3) \frac{d^2y}{dx^2} - 3x^2 \frac{dy}{dx} + 3xy = 0$$

en ook de oplossing, die voldoet aan $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2. a) Bepaal de Fouriergetransformeerde van de functie $f(x)$, die gegeven is door

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \quad &&\text{voor } |x| < 2\pi, \\ f(x) &= 5 &&\text{voor } |x| = 2\pi, \\ f(x) &= 0 &&\text{voor } |x| > 2\pi. \end{aligned}$$

b) Bepaal met behulp van Laplacetransformatie de oplossingen $y(x)$, $z(x)$ van

$$\left.\begin{aligned} y - \frac{dz}{dx} &= 2 \sin x \\ \frac{dy}{dx} + z &= 2e^x + 2 \cos x \end{aligned}\right\} ,$$

die voldoen aan $y(0) = 1$, $z(0) = 2$.

3. In R_3 zij $\underline{p} = (1,1,1)$. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ van R_3 in R_3 is gegeven door

$$\mathcal{A}\underline{x} = (\underline{p}, \underline{x})\underline{p} - \underline{x} .$$

a) Bewijs dat $\mathcal{A}$ symmetrisch is

b) Bepaal alle eigenvectoren van $\mathcal{A}$ met bijbehorende eigenwaarden.

3. c) Wat is het type van het kwadratische oppervlak in R_3, dat bepaald wordt door de vergelijking

$$2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \quad ?$$

4. a) Bepaal de reële waarden van x, waarvoor de reeks $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(n-x)}$ convergeert. Toon aan, dat de reeks voor die waarden van x termsgewijs mag worden gedifferentieerd.

   b) Toon aan dat de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+x)}{n^2}$ voor $x \geqslant 0$ convergent maar niet uniform convergent is.

6 juni 1963

1. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$x - y + (x+y)\frac{dy}{dx} = 0 .$$

   a) Bepaal de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking.
   b) Bepaal een integrerende factor van deze differentiaalvergelijking, die een functie is van $x^2 + y^2$.

2. Van de functie $f(x)$ is gegeven: $f(x) = x(2\pi - x)$ voor $0 < x < 2\pi$,
   $f(x)$ is periodiek met periode 2π.

   a) Bewijs dat $f(-x) = f(x)$ voor $0 < x < 2\pi$.
   b) Bepaal de Fourier-reeks van $f(x)$.
   c) Toon aan, dat de Fourier-reeks van $f(x)$ som 0 heeft voor $x = 2k\pi$, k geheel (n.b.: $f(2k\pi)$ is niet gegeven).
   d) Bepaal de som van de reeks, die als termen de kwadraten der Fouriercoëfficiënten van $f(x)$ heeft.

3. Het kwadratische oppervlak K is gegeven door de vergelijking

$$5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 8x_3^2 - 1 = 0 .$$

   a) Bepaal de richtingen, waaraan ten opzichte van K hetzelfde vlak is toegevoegd als aan de richting, die bepaald is door de vector (1,0,0).
   b) Bepaal een dusdanige coördinatentransformatie, dat de vergelijking van K in de nieuwe coördinaten standaardgedaante heeft; geef de vergelijking van K in deze nieuwe coördinaten en noem het type van K.

4. Gegeven is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}e^{-nx^2}}{n}$.

a) Bepaal, voor welke reële waarden van x de reeks convergeert.

b) Onderzoek, of de reeks in de onder a) gevonden waardeverzameling uniform convergeert.

14 januari 1964

1. Bepaal een zodanige coördinatentransformatie dat de vergelijking van het kwadratische oppervlak

$$5x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1x_3 + 5x_3^2 - 8x_2 + 3 = 0$$

in standaardvorm overgaat. Toon aan dat dan ook de vergelijking van het oppervlak

$$x_1^2 + 8x_2^2 + 6x_1x_3 + x_3^2 - 16x_2 + 9 = 0$$

in standaardvorm overgaat.
Van welk type zijn deze oppervlakken?
Toon aan dat de oppervlakken twee punten gemeen hebben en bepaal daarvan de oorspronkelijke coördinaten.

2. Los op $xy'(1 + \log x - \log y) = y$.

3. Bepaal de Fourier-reeks van de functie f met periode 2π waarvoor

$$f(x) = x + \cos x \quad \text{voor} \quad -\pi < x \leqslant \pi .$$

Bepaal het verschil van f(x) en de som van de Fourier-reeks voor $x = \frac{\pi}{2}$ en voor $x = \pi$.
(Als U hierbij stellingen gebruikt noem die dan!)

4. We definiëren $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n\sqrt{x}}$ voor $x \geqslant 0$; $n = 1,2,\ldots$.

Bepaal de limietfunctie van de functierij f_n. Ga na of de convergentie van deze rij uniform is op $x \geqslant 0$.

5. De functie y voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$y'(x) + 1 = (x^2 + y^2)^4$$

en $\quad y(0) = 0$.

Geef een benadering voor het maximum m van de functie y.
N.B.: Als U een interval (a,b) met lengte $\leqslant 0{,}1$ aangeeft waarbinnen m ligt is dat voldoende.

5 juni 1964

1. Bepaal y uit

$$2y' + y \sin x = \frac{\sin x}{y} ,$$
$$y(0) = 2 .$$

2. Gegeven: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x = 1$ voor alle $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

a) Wat is de som van de reeks voor $\frac{\pi}{2} < x < \pi$?
b) Bepaal getallen a_n die aan het gegeven voldoen.
c) Bepaal dan de som van de reeks voor $x = 0$ en $x = -\pi$.
d) Is de reeks uniform convergent voor $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$?

3. Bepaal het type van elk van de kwadratische oppervlakken waarvan hieronder de vergelijking staat.

a) $10x^2 - 12xy + 10y^2 = z^2 - 1$,
b) $10x^2 - 12xy + 10y^2 = z$,
c) $10x^2 - 12xy + 10y^2 = z^2$.

4. Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{1 + nx}$. Deze limiet noemen we $f(x)$.

Ga na of de convergentie van $\frac{\sin nx}{1 + nx}$ naar $f(x)$ uniform is op

a) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$,
b) $0 < x$,
c) $x \geqslant \frac{\pi}{2}$.

5. Beschouw de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y' = 1 + xy^2$$

waarvoor $y(0) = 0$. Deze functie neemt in $x = \frac{1}{2}$ een waarde aan die tussen $\frac{1}{2}$ en 1 ligt.
Bepaal $y(\frac{1}{2})$ in 2 decimalen nauwkeurig.

12 januari 1965

1. Vervalt.

2. De functie f is gedefinieerd voor alle reële x; ze is even en periodiek met periode 2π; voor $0 \leqslant x \leqslant \pi$ voldoet ze aan $f(x) = x(x-\pi)$.
Zij de Fourier-reeks van f:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\} .$$

a) Toon aan dat voor alle k geldt $b_k = 0$ en dat voor oneven k geldt $a_k = 0$; bepaal a_k voor even k.
b) Toon aan dat de reeks voor alle x convergeert met $f(x)$ als som.
c) Ga na of de convergentie van de reeks uniform is voor $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

3. Het oppervlak S in R_3 is gegeven door de vergelijking

$$119x^2 + 240xy - 119y^2 - 169z^2 + 240x - 238y + 338z = 288 .$$

a) Heeft S middelpunten; zo ja, welke?
b) Bewijs dat 169 en -169 eigenwaarden zijn van de bij het kwadratische gedeelte behorende matrix.
c) Bepaal de formules van een zódanige coördinatentransformatie (translatie en rotatie) dat de vergelijking van S in nieuwe coördinaten standaardgedaante heeft.
d) Noem het type van S.

4. De reeks $\sum_{1}^{\infty} |f_n(x)|$ convergeert voor $0 \leqslant x \leqslant 1$ uniform naar een functie $s(x)$.
a) Bewijs dat de rij $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ uniform convergeert voor $0 \leqslant x \leqslant 1$.
b) Bepaal, als $f_n(x)$ integreerbaar is,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx .$$

5. y stelt een functie van x voor, $x \geqslant 0$.
y voldoet aan

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} - xy^2 \\ y(0) &= \frac{1}{10} \end{aligned}\right\} .$$

Bepaal een getal α zó dat $|y(1)-\alpha| \leqslant \frac{1}{20}$.

23 januari 1965

1. Bepaal de oplossingen van de volgende differentiaalvergelijking:

$$(x^2+y^2+x)dx + xydy = 0 .$$

2. De functie f is gedefinieerd door

$$f(x) = 2\pi x - x^2 \quad \text{voor } \pi < x \leqslant 2\pi ,$$

f is periodiek met periode 2π,

f is oneven.

a) Bepaal de Fourier-reeks van f.

b) Bepaal de som van deze reeks voor $x = 1$ en motiveer Uw antwoord.

c) Is de Fourier-reeks uniform convergent op het interval $0 < x < \pi$?

3. In R_2 is een kegelsnede gegeven door de vergelijking

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 10x - 70y - 225 = 0 .$$

Bepaal een coördinatentransformatie waardoor de vergelijking van de kegelsnede in standaardgedaante overgaat.
Bepaal het type van de kegelsnede.

4. De rij functies $f_n(x)$, $n = 1,2,3,\ldots$ is op het interval $0 \leqslant x \leqslant 1$ gedefinieerd en uniform convergent met limiet $f(x)$.
Zij $g_n(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$, $n = 1,2,3,\ldots$.
Bewijs dat de rij $g_n(x)$ op het interval $0 \leqslant x \leqslant 1$ uniform convergeert.

5. y stelt een functie van x voor, $x \geqslant 0$.
y voldoet aan

$$y' = x^2 - y^2$$
$$y(0) = 1 .$$

Bepaal $y(\frac{1}{2})$ met een fout die kleiner is dan 0,05.

8 juni 1965

1. De functie f is gedefinieerd door

$$f(x) = x \qquad 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} ,$$
$$f(x) = x - \pi , \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi ,$$

f is even,

f is periodiek met periode 2π.

a) Bepaal de Fourier-reeks van f.

b) Bepaal de som van de Fourier-reeks.

c) Ga na of de Fourier-reeks op het interval $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ uniform convergeert.

2. Gegeven is de rij functies $f_n(x) = \cos \frac{x}{n}$.

a) Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

b) Toon aan dat de rij op de reële getallenrechte niet uniform convergent is.

c) Ga na of de rij uniform convergent is op het interval $-\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

3. Het oppervlak S in R_3 is gegeven door de vergelijking

$$3x^2 + 4xy - z^2 + 4y + 2z = 0 .$$

a) Bepaal de formules van een zodanige coördinatentransformatie dat de vergelijking van S in de nieuwe coördinaten standaardgedaante heeft.

b) Noem het type van S.

c) Geef in (x,y,z)-coördinaten de meetkundige plaats der punten van S waarvan de afstand tot het middelpunt van S minimaal is.

4. a) Bepaal met behulp van machtreeksen de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + \frac{y'}{x} + y\left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) = 0 .$$

b) Toon aan dat voor iedere oplossing y van deze differentiaalvergelijking geldt: $y(x).\sqrt{x}$ is een goniometrische functie.

4 januari 1966

1. In R_3 is gegeven het oppervlak met vergelijking

$$x^2 - 4xy + 2y^2 - 4xz + 5z^2 + 4x - 4y - 18z = 0 .$$

Bepaal van dit oppervlak

a) het middelpunt,

b) de standaardgedaante,

c) de aard.

2. Los op met behulp van de Laplace-transformatie

$$y'' - 3y' + 2y = e^x(\cos x - \sin x) ,$$

$$y(0) = y'(0) = 0 .$$

3. Zij f een functie met de volgende eigenschappen:

f is periodiek met periode 2π,

$f(x) = 1 + \cos x$ voor $0 \leqslant x \leqslant \pi$,

$f(x) = 1 - \cos x$ voor $-\pi < x < 0$.

a) Bepaal de Fourier-reeks van f.

b) Ga na voor welke waarde van x deze reeks naar f(x) convergeert.

c) Bereken $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(4k^2-1)^2}$.

4. Beschouw voor alle reële x de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} .$$

a) Bewijs dat de reeks voor iedere $\delta > 0$ uniform convergent is op $\delta \leqslant |x|$.

b) Bewijs, met behulp van de definitie, dat de reeks niet uniform convergeert op de hele reële as.

c) Is ook op een andere manier te zien dat de reeks niet uniform convergeert op de hele reële as?

5. y stelt een functie van x voor.
y voldoet aan

$$\begin{cases} y' = \sin(xy) , \\ y(0) = 1 . \end{cases}$$

Bereken, in één decimaal nauwkeurig, $y(\frac{1}{2})$.

6 juni 1966

1. De functie f is voor alle reële x gedefinieerd en heeft de volgende eigenschappen

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \text{ als } 0 < x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$f(x) = \pi - x \text{ als } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi.$$

$f(x)$ is oneven,

$f(x)$ is periodiek met periode 2π,

$f(0) = 0$.

a) Bepaal de Fourier-reeks van f.

b) Geef een formulering van de hoofdstelling en leidt daaruit af voor welke x de Fourier-reeks naar $f(x)$ convergeert.

2. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x^2y'' + xy' - y = 0 .$$

3. Bepaal van het kwadratische oppervlak

$$8x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 - 13x_1 - 8x_2 - 10x_3 + 9 = 0$$

a) de eventueel aanwezige middelpunt(en),

b) de standaardvorm en het type,

c) de bijbehorende coördinatentransformatie,

d) de vergelijking $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \sigma$ van een raakvlak door de top.

4. Beantwoord de volgende beweringen alleen met ja, nee, of blanco. Een onjuist antwoord wordt negatief gerekend.

4.1. De rij $f_n(x) = x^n$ convergeert voor $0 \leq x \leq 1$.

4.2. De rij $f_n(x) = x^n$ convergeert uniform op $0 \leq x < 1$.

Zij $g_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+n^2x^4}$ en $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$.

4.3. $g(x)$ is continu.

4.4. De rij $g_n(x)$ is uniform convergent op $x \geq 1$.

4.5. De rij $g_n(x)$ is uniform convergent op $0 \leq x \leq 1$.

4.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{2} g_n(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)dx$.

Zij $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x + \sin nx}{n^2}$.

4.7. De reeks is convergent voor alle reële x.

4.8. De reeks is uniform convergent op $0 < x < \pi$.

4.9. De reeks is uniform convergent op de reële as.

4.10. f(x) is overal continu.

10 januari 1967

1. Los op het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x + y - z \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

met beginvoorwaarden $x(0) = y(0) = 0$; $z(0) = -6$.

2. Gegeven $f(x) = 1-x$ voor $0 \leqslant x \leqslant 1$,
$f(x) = -1-x$ voor $-1 < x < 0$,
f is periodiek met periode 2.

a) Bepaal de Fourier-reeks van de functie f,

b) Voor welke waarden van x convergeert de Fourier-reeks naar f(x) en voor welke niet? Licht Uw antwoord toe.

c) Convergeert de Fourier-reeks uniform op $-1 \leqslant x \leqslant 1$?

3. Gegeven de rij functies $g_n(x) = n^3x^3e^{-n^2x^2}$ $(n = 1,2,\ldots)$.

a) Onderzoek deze rij op uniforme convergentie voor $0 \leqslant x \leqslant 1$.

b) Bereken $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} n^3x^3e^{-n^2x^2}\right)dx$ en $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 n^3x^3e^{-n^2x^2}dx\right)$.

c) Wat concludeert U uit het gevondene in a) en b) ?

4. V is een vectorruimte van dimensie 4. De vectoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ en $\underline{e}_4$ vormen in V een orthonormale basis. $\mathcal{A}$ is een lineaire afbeelding van V in V die ten opzichte van de gegeven basis vastgelegd wordt door de matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

a) Bepaal een nieuwe orthonormale basis van V, ten opzichte waarvan $\mathcal{A}$ een matrix met diagonaalvorm heeft.

b) Zij $\underline{x} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 + \underline{e}_4$.

Druk de vector $\mathcal{A}\,\underline{x}$ uit in de nieuwe en in de oude basis.

<u>10 juni 1967</u>

1. Los op:

a) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + \sin y}{x \cos y} \quad ;$$

b) Het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y$$

met beginvoorwaarden $x(0) = 14$, $y(0) = 0$.

2. De functie f wordt gedefinieerd door:

$$f(x) = |x| + \sin \pi x \quad \text{voor } -1 < x \leqslant 1 ,$$

f(x) is periodiek met periode 2.

a) Bepaal de Fourier-reeks van f.

b) Bepaal de som van de Fourier-reeks voor $-1 < x \leqslant 1$; licht Uw antwoord toe.

c) Convergeert de Fourier-reeks van f uniform op $-1 < x \leqslant 1$?

3. Gegeven de rij functies $g_n(x) = x \cos \dfrac{x}{x+n}$ voor $n = 1,2,\ldots$ en $x \geqslant 0$.

Gevraagd:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ voor $x \geqslant 0$.

b) Laat zien, dat de rij functies <u>niet</u> uniform convergeert op het gebied $x \geqslant 0$.

c) Ga na of de rij uniform convergeert op het interval $0 \leqslant x \leqslant 10$.

4. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ beeldt R_3 in R_3 af.
De matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van de basis

$$\underline{a}_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ (0,1,1)$$

$$\underline{a}_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ (1,0,1)$$

$$\underline{a}_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ (1,1,0)$$

is

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Bereken de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van de oorspronkelijke basis

$$\underline{e}_1 = (1,0,0)$$

$$\underline{e}_2 = (0,1,0)$$

$$\underline{e}_3 = (0,0,1) .$$

b) Wat is het beeld van de vector $\underline{a}_1 - \underline{a}_2$ onder $\mathcal{A}$, uitgedrukt in de basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ en wat uitgedrukt in de basis $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$?

<u>9 januari 1968</u>

1. Bepaal de oplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = x \cos \alpha - y \sin \alpha ,$$

$$\frac{dy}{dt} = x \sin \alpha + y \cos \alpha , \quad \alpha \text{ constant},$$

die voldoen aan de beginvoorwaarden $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

2. V is een eindig dimensionale vectorruimte met inproduct. $\mathcal{A} : V \to V$ is een symmetrische lineaire afbeelding.
Bewijs:
a) Als $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) > 0$ voor alle $\underline{x} \neq \underline{0}$, dan zijn alle eigenwaarden van $\mathcal{A}$ positief.
b) Als alle eigenwaarden van $\mathcal{A}$ positief zijn, dan is $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) > 0$ voor alle $\underline{x} \neq \underline{0}$.

3. Gegeven $f(x) = x$ voor $0 \leq x \leq \pi$.
Bepaal de Fourier-cosinusreeks van deze functie.

4. De temperatuurverdeling $T(x,t)$ van een geïsoleerde staaf voldoet aan de differentiaalvergelijking

(i) $$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

aan de beginvoorwaarde

(ii) $$T(x,0) = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

en aan de randvoorwaarden

(iii) $$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\pi} = 0, \quad t > 0.$$

a) Bewijs dat de functies

$$e^{-k^2 t} \cos kx, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

voldoen aan de differentiaalvergelijking (i) en aan de randvoorwaarden (iii).

b) Bepaal de functie $T(x,t)$ die voldoet aan (i), (ii) en (iii).

Opmerking: Het resultaat van vraagstuk 3 kan worden gebruikt bij de oplossing van vraagstuk 4.

5. $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 x}, \quad x \geqslant 1.$$

a) Bewijs dat de reeks uniform convergent is.

b) Is $f(x)$ continu voor $x \geqslant 1$?

c) Is $f(x)$ differentieerbaar voor $x > 1$?

HERKANSING

22 juni 1964

N.B.! De opgaven 1 t/m 4 hebben betrekking op Wiskunde IIIa.
De opgaven 5 t/m 8 hebben betrekking op Wiskunde IV.
Men moet alle opgaven maken maar het is raadzaam te beginnen met het onderdeel waarvoor U het laagste cijfer hebt behaald bij de tentamens IIIa en IV.

1. Los op de differentiaalvergelijking: $y' + 2xy = x^3$.

2. Bepaal met behulp van machtreekssubstitutie die oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$$

waarvoor geldt, dat $y'(0) = 0$.

3. Hoe luidt de hoofdstelling van de reeksen van Fourier voor een functie met periode 2π?
Geef voor een functie $f(x)$ met periode 2π de formules voor de Fourier-coëfficiënten.

4. Toon aan, dat de vergelijking $3x^2 + 4xy - 12x - 8y + 8 = 0$ een hyperbool voorstelt. Bereken de afstand van de toppen.

5. Vervalt.

6. Op de snijkromme van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 210$ en het vlak $x + y = 2z$ neemt de functie $2x + y + z$ een maximum aan. Bereken dit maximum.

7. Gegeven is de scalaire functie $\varphi = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$. Laat zien, dat dit een harmonische functie is.
Zij vervolgens S een gesloten oppervlak dat de oorsprong aangeeft.
Bereken $\int_S (\text{grad } \varphi, \underline{n})d\sigma$, waarbij $\underline{n}$ de buitenwaarts gerichte eenheidsnormaalvector is.

8. Een vaas bevat n rode en n witte ballen.
Beschouw het volgende experiment: men trekt uit de vaas telkens een bal die terstond weer teruggeworpen wordt, en wel 10 maal achtereen. Toon aan dat de kans dat er meer rode dan witte ballen in zo'n serie van 10 komen groter dan $\frac{3}{8}$ is.

18 januari 1965

1. Bepaal y uit $\begin{cases} xy^2 + 2xy + y' = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

2. Zij $f(x) = \cos x$ voor $0 < x < \pi$ en f periodiek met periode π.
   Bepaal de Fourier-reeks van f.

3. Bepaal de coördinaten van de uiteinden van de lange as van de ellips met vergelijking
$$41x^2 + 24xy + 34y^2 = 25 .$$

4. Beschouw de snijkromme van de ellipsoïde met vergelijking
$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 10$$
met het vlak met vergelijking
$$x + y + z = 0 .$$
Welk(e) punt(en) op deze kromme ligt (liggen) het dichtst bij de oorsprong?

5. De eerste formule van Green luidt:
$$\int_G \{\varphi\Delta\psi + (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi)\} d\tau = \int_S \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} d\sigma .$$
Wat stellen in deze formule de symbolen
$$G,\ S,\ \Delta\psi,\ \operatorname{grad} \varphi,\ \frac{\partial\psi}{\partial n},\ d\tau \text{ en } d\sigma$$
voor? Zij nu G de bol met middelpunt $(0,0,0)$ en straal 2 en zij $\varphi = \psi = r$ (= afstand tot de oorsprong). Verifieer hiervoor bovenstaande formule.

6. Men werpt één dobbelsteen vier maal en noteert de vier worpen (bijv. 2,6,3,3).
   a) Wat is de kans dat de som van de vier worpen even is?
   b) Wat is de kans dat de laagste worp een 2 is?

22 juni 1965

1. De functie f voldoet voor $x > 0$ aan de volgende differentiaalvergelijking:
$$xf'(x) + \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
en bovendien is $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.
Bepaal $f(x)$.

2. De functie f is voor alle reële x gedefinieerd door

$$f(x) = \sin x + \cos x\,, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$
f is even,
f is periodiek met periode 2π.

a) Bepaal de Fourier-reeks van f.
b) Bepaal de som van de Fourier-reeks voor $x = \pi$; licht Uw antwoord toe.

3. Bepaal de lengte van de lange as van de ellips met vergelijking

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 + 4x + 4y - 4 = 0\,.$$

4. Zij G het gebied in R_2 dat wordt bepaald door $y^2 \leqslant 4(1-|x|)$; $\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
Bepaal $\iint\limits_G \rho(x,y)dxdy$ met behulp van de coördinatentransformatie

$$x = u^2 - v^2\,,$$
$$y = 2uv\,.$$

5. Zij S het oppervlak in R_3 dat wordt bepaald door de vergelijking

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\,.$$

Bepaal $\iint\limits_S (x+y+z)d\sigma$.

6. Het resultaat van een meting kan worden opgevat als een stochastische variabele $\underline{x}$; bewijs dat het gemiddelde van twee onafhankelijke metingen een spreiding heeft die kleiner is dan die van $\underline{x}$.

<u>17 januari 1966</u>

1. Los op $\quad y'\left(x + \dfrac{1}{1+y^2}\right) + y = 0\,.$

2. Een functie f is periodiek met periode π. Bovendien is gegeven, dat

$$f(x) = 2|\cos x|^2 \quad \text{voor } 0 \leqslant x < \pi\,.$$

Bepaal de Fourier-reeks van f.

3. Bepaal van de kegelsnede in het (x,y)-vlak gegeven door $x^2 + 4xy + y^2 = 3$ de vergelijking(en) van de raaklijn(en) in de top(pen).

4. Bepaal van de functie $f(x,y) = 2xy$ de extrema die worden aangenomen in het gebied $x^2 + y^2 \leq 1$.

5. Gegeven is het vectorveld $\underline{a} = \{\frac{1}{2}x^2 + y, x, x^2 + y^2 - xz\}$.
S is het gedeelte van de kegel $x^2 + y^2 = z^2$ gelegen tussen de vlakken $z = 1$ en $z = 2$. Bereken

$$\left| \int_S (\underline{a}, \underline{n}) d\sigma \right| .$$

6. Door de vectorfunctie $\begin{cases} u = (x+y)^2 \\ v = (x-y)^2 \end{cases}$ wordt het (x,y)-vlak afgebeeld in het (u,v)-vlak.
   1) Bepaal de functionaalmatrix van deze afbeelding. In welke punten (x,y) is de rang gelijk aan 2, respectievelijk gelijk aan 1 en 0 ?
   2) Wat is het beeld van het (x,y)-vlak?
   3) Is deze afbeelding enkelvoudig of is er sprake van een meervoudige overdekking?

7. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn stochastische variabelen. Zij $\alpha = \rho(\underline{x}, \underline{y})$. Uit praktische overwegingen is het uitrekenen van de correlatie coëfficiënt $\beta = \rho(\underline{x}, 100\underline{y} + 50)$ eenvoudiger.
Wat is het verband tussen α en β ?

<u>22 juni 1966</u>

1. Los op $xy'' - (1 + x^2)y' = 0$.

2. Bereken de Fourier-reeks van de functie f bepaald door

$$f(x) = \pi - x \quad \text{als } 0 \leq x \leq \pi ,$$
$$f(x) \text{ is even,}$$
$$f(x) \text{ is periodiek met periode } 2\pi.$$

3. Gegeven is het kwadratische oppervlak in R_3 met vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2z - 2 = 0 .$$

Bepaal
a) de standaardgedaante van de vergelijking;
b) het type van het oppervlak.

4. $\underline{x}$ is een continue stochastische variabele met dichtheidsfunctie $f(x)$ en distributiefunctie $F(x)$.
Stel $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ zijn n onafhankelijke waarnemingen van $\underline{x}$. De kleinste onder deze n waarnemingen noemen we $\underline{y}$.
a) Hoe groot is, bij gegeven y, de kans $P(\underline{y} > y)$?
b) Als $\underline{x}$ exponentieel verdeeld is met parameter λ, dus als

$$f(x) = 0\,, \qquad x < 0$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\,, \quad x \geq 0\,,$$

toon dan aan dat $\underline{y}$ eveneens exponentieel verdeeld is met parameter $n\lambda$.

5. Het volgende stukje programma moet gelezen worden onder de veronderstelling van de geldigheid van de declaraties

"<u>integer</u> <u>array</u> a[1 : 100]; <u>integer</u> MIN, min, k"

en onder de veronderstelling, dat aan elk element van het integer array "a" inmiddels een positieve waarde is toegekend.

```
       "MIN := 0; min := 0; k := 100;
klaar:  if a[k] > MIN then begin MIN := a[k]; min := k end;
        k := k - 1; if k > 0 then goto klaar"
```

Vraag 1: Wat is na afloop van dit stukje programma de betekenis van de waarde van de variabele genaamd "MIN"?
Vraag 2: Wat is na afloop van dit stukje programma de betekenis van de waarde van de variabele genaamd "min"?

6. Op de cylinder $x^2 + y^2 = 1$ is K de schroeflijn $(\cos\varphi, \sin\varphi, \varphi)$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, met beginpunt $P(-1,0,-\pi)$ en eindpunt $Q(-1,0,\pi)$; L is de rechte van P naar Q. $\underline{a}$ is het vectorveld (y,z,x).
a) Bereken $\int_K (\underline{a}, \underline{t})ds$.
b) Bereken $\int_L (\underline{a}, \underline{t})ds$.
c) Is het veld $\underline{a}$ conservatief?

<u>21 januari 1967</u>

1. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y+1}{x-y}\,.$$

2. Zij $f(x) = |\sin x| - \sin x$ voor $-\pi \leqslant x < \pi$ en periodiek met periode 2π. Bepaal de Fourier-reeks van $f(x)$.

3. In R_3 is het kwadratische oppervlak H gegeven waarvan de vergelijking luidt

$$-24xy + 7y^2 + z^2 = 1 .$$

Bepaal de vergelijking van H t.o.v. een orthonormale basis, waarvan de basisvectoren langs de hoofdassen van H vallen.
Bepaal het type van H.

4. Bepaal de extrema van de functie f gedefinieerd door $f(x,y) = xy^2$.

5. In R_3 is het volgende vectorveld gegeven:

$$\underline{a}(\underline{x}) = (\cos x, -z, y) .$$

Bepaal $\iint\limits_S (\text{rot } \underline{a}, \underline{n}) d\sigma$

waarin S het oppervlak voorstelt gedefinieerd door: $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x \geqslant 0 , \end{cases}$
en $\underline{n}$ de naar $(1,0,0)$ gerichte normaal op S.

6. Een grossier ontvangt van een fabrikant een zeer grote partij van een bepaald artikel. De grossier neemt een steekproef van 100 stuks uit de partij en gaat van deze 100 stuks na welke bruikbaar zijn voor een zeker doel.

   a) Bereken de kans dat meer dan 72 exemplaren uit de steekproef bruikbaar zijn, onder de veronderstelling dat 80% van de hele partij bruikbaar is.

   De fabrikant garandeert dat minstens 80% van de geleverde goederen bruikbaar is voor het gestelde doel. De grossier wil de kans dat hij ten onrechte bij de fabrikant reclameert over het gegarandeerde percentage, beperken tot ten hoogste 0,10.

   b) Bij welke aantallen bruikbare exemplaren in zijn steekproef zal de grossier reclameren?

7. Gedeclareerd zijn

   <u>integer</u> <u>array</u> A[1 : 100]; <u>integer</u> i, N

   Aan de subscripted variables van het array A zijn achtereenvolgens de waarden toegekend van een monotoon dalende rij getallen tussen 0 en 1.

Schrijf een stukje programma, dat nagaat of er een getal N te vinden is ($1 \leqslant N \leqslant 999$), zodat voor alle $i \geqslant N$ geldt

$$A[i] - A[i+1] < 2^{-10}$$

en dat, als zo'n N te vinden is, de waarde van N uitprint.

21 juni 1967

1. Los op: $(x^3y^2 - \sin y)y' = x - x^2y^3$.

   Bepaal de oplossing waarvan de grafiek gaat door het punt (1,0).

2. De functie $f(x)$ is gegeven door

   $$f(x) = 2x \quad \text{voor} \quad -\pi < x \leqslant \pi ,$$
   $$f(x) \text{ is periodiek met periode } 2\pi .$$

   Bepaal de reeks van Fourier van $f(x)$.

3. a) Bepaal de vergelijking van de grootste bol die beschreven kan worden in de ellipsoïde met vergelijking

   $$5x^2 + 6xz + 2y^2 + 5z^2 = 8 .$$

   b) Bepaal ook de coördinaten van de beide raakpunten.

4. Het veld $\underline{u} = (e^y, e^z, e^x)$, gedefinieerd in R_3, is een vectorpotentiaal van een veld $\underline{v}$; het veld $\underline{v}$ is zelf weer een vectorpotentiaal van een veld $\underline{w}$.
   a) Bepaal het veld $\underline{w}$.
   b) Het veld $\underline{u}$ heeft zelf ook een vectorpotentiaal. Waarom?
   c) Bepaal een mogelijke vectorpotentiaal van $\underline{u}$.

5. De duur van een telefoongesprek is een continue stochastische variabele $\underline{x}$. De tijdseenheid is de minuut. Gegeven is, dat de kans dat een gesprek langer duurt dan zes minuten gelijk is aan 0,05. Men meet steekproefsgewijs lengten van telefoongesprekken.
   a) Hoe groot is de kans, dat er in een steekproef van 10 gesprekken precies 2 voorkomen die langer duren dan 6 minuten? (Antwoord in formule en uit Compendium.)
   b) Hoe groot is de kans, dat er in een steekproef van 200 gesprekken meer dan 15 gesprekken voorkomen die langer duren dan zes minuten?

c) Gegeven wordt nog, dat $\underline{x}$ exponentieel verdeeld is met kansdichtheidsfunctie

$$f(x) = 0 \quad \text{voor } x < 0 \,, \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{voor } x \geqslant 0 \,.$$

Bereken λ, indien nodig met tabel 9.5 uit het compendium.

6. Op een ponsband staat het natuurlijke getal n, gevolgd door n^2 getallen van type <u>real</u> die de elementen zijn van een n × n-matrix, rij na rij op de band opgenomen.
Schrijf een ALGOL-programma, waarin de band wordt gelezen en waarin vervolgens aan de elementen van een array g[0 : 2 × n] de volgende waarden worden toegekend:
aan g[i] het gemiddelde van de elementen van de i-de rij ($1 \leqslant i \leqslant n$);
aan g[i + n] het gemiddelde van de elementen van de i-de kolom ($1 \leqslant i \leqslant n$);
aan g[0] het gemiddelde van alle elementen van de matrix.

<u>22 januari 1968</u>

1. Los op de differentiaalvergelijking

$$(6x^2y + 9xy^2 - 5)dx + (2x^3 + 9x^2y)dy = 0 \,.$$

2. Bepaal de Fourier-reeks van de functie f, die periodiek is met periode 2, terwijl verder gegeven is

$$f(x) = x + 1 \,, \quad 0 < x < 1 \,,$$
f(x) is oneven.

3. Zij V een driedimensionale vectorruimte met inproduct. In V is een onafhankelijke basis $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ gegeven, zodat $|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}| = 1$ en een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ die gedefinieerd is door

$$\mathcal{A}\underline{x} = (\underline{a}\,,\underline{x})\underline{a} + (\underline{b}\,,\underline{x})\underline{b} + (\underline{c}\,,\underline{x})\underline{c} \,.$$

a) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.
b) Bewijs dat 1 een eigenwaarde van $\mathcal{A}$ is, dan en slechts dan als het drietal basisvectoren een loodrecht paar bevat.

4. Bepaal de extrema van $f(x,y) = xy(x^2 + y^2)$ in het gebied $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

5. In zeker experiment is de kans op uitkomst A onbekend. Er is echter een theorie die deze kans op minstens 0,95 stelt. Bij n onafhankelijke herhalingen van het betreffende experiment wordt in 90% van de gevallen uitkomst A waargenomen.

Is dit aanleiding om aan het door de theorie gestelde te gaan twijfelen? Neem $\alpha = 0{,}025$ en beschouw achtereenvolgens de situaties $n = 10$, $n = 100$ en $n = 250$.

6. Welke getallen worden er geprint bij uitvoering van het volgende programma:

```
begin integer n,k; integer array a[2 : 45];
      for k := 2 step 1 until 45 do a[k] := k;
      n := 1;
   L: if n ≤ 5 then n := n + 1 else goto KLAAR;
      if a[n] = 0 then goto L;
      for k := n ↑ 2 step n until 45 do a[k] := 0;
      goto L;
KLAAR: for k := 2 step 1 until 45 do
          begin if a[k] ≠ 0 then PRINT(a[k]) end
end
```

ANTWOORDEN TENTAMENOPGAVEN

24 januari 1959

1. $y = \dfrac{\lambda + \mu x}{1 - x^2}$.

2. $x \sin y[\log|\cos x| + \lambda] = 1$
$y = k\pi$.

3. $A(u) = 2\,\dfrac{\cos \frac{\pi u}{2}}{\pi(1-u^2)}$, $\quad B(u) = 0$.

4. $g(x) = x$
$|g_n(x) - g(x)| \leq \dfrac{1}{2n^2}$.

10 juni 1959

1. $y - 1 = C\sqrt{x^2 + y^2}$.

2. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\sin t\sqrt{2}$
$y = e^t \cos t$
$z = te^t$.

4. b) $\dfrac{7}{4} - \dfrac{\pi^2}{6}$.

12 januari 1960

1. a) $f(x) \sim \dfrac{1}{\pi} + \sum_1^\infty \left\{ -\dfrac{2\cos 2nx}{(4n^2-1)\pi} + \dfrac{4(-1)^{n+1} n \sin 2nx}{(4n^2-1)\pi} \right\}$.

b) $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\pi} - \dfrac{2}{\pi}\sum_1^\infty \dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

2. a) $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2 y^{-2}}$.

b) $L\{y\} = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^2+1}$, $\quad y = x - \sin x$.

3. a) Neen.

b) $-2\sum_1^\infty \dfrac{xe^{-nx^2}}{n^2}$ is uniform convergent, nl. $0 \leq xe^{-nx^2} \leq (2ne)^{-\frac{1}{2}}$.

13 juni 1960

1. a) $f(x) \sim \frac{1}{4} + \sum_{1}^{\infty} \frac{\{1-(-1)^n\} \cos 2\pi nx + \pi n \sin 2\pi nx}{\pi^2 n^2}$.

   b) $x = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}$ of $\frac{1}{4} = \sum_{0}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 (2n+1)^2}$.

3. $y = \pm x$

   $y = \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2}\lambda x^2$.

16 januari 1961

1. $y^2 = Cx^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{5}x^2 - 4$.

2. a) $f(x) \sim 2\sum_{1}^{\infty} \left\{ \frac{\pi(-1)^{k+1}}{k} + 2\frac{(-1)^k}{\pi k^3} - \frac{2}{\pi k^3} \right\} \sin kx$.

   b) $\frac{\pi^3}{32}$.

3. $\frac{1}{2}$.

4. $$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} z_1\sqrt{2} + \frac{1}{3} z_2\sqrt{3} - \frac{1}{6} z_3\sqrt{6} + 1 \\ x_2 = \qquad\qquad - \frac{1}{3} z_2\sqrt{3} - \frac{1}{3} z_3\sqrt{6} \\ x_3 = -\frac{1}{2} z_1\sqrt{2} + \frac{1}{3} z_2\sqrt{3} - \frac{1}{6} z_3\sqrt{6} - 1 \end{cases}$$

   $2z_1^2 + 3z_2^2 - 6z_3^2 - 4 = 0$ eenbladige hyperboloïde.

13 juni 1961

1. $y^5 + xy^4 + 2xy^3 + 2x^2y^2 + x^2y + x^3 = C$ of $(x+y)(x+y^2)^2 = C$.

2. b) $x = \pi \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi}{2} \coth \pi - \frac{1}{2}$.

3. $$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} z_1\sqrt{3} + \frac{1}{2} z_2\sqrt{2} - \frac{1}{6} z_3\sqrt{6} - 3 \\ x_2 = \frac{1}{3} z_1\sqrt{3} - \frac{1}{2} z_2\sqrt{2} - \frac{1}{6} z_3\sqrt{6} - 3 \\ x_3 = -\frac{1}{3} z_1\sqrt{3} \qquad\qquad - \frac{1}{3} z_3\sqrt{6} \end{cases}$$

$z_2^2 + 3z_3^2 - 8 = 0$ elliptische cylinder.

4. b) geen uniforme convergentie voor $0 \leq x \leq 1$.

15 januari 1962

1. a) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{120}$ $(y = \sin\sqrt{x})$.

b) $C(x^4 + 2x^2 + y^2 + 1)e^{2\arctan\frac{y}{x^2+1}} = 1$.

2. a) Er zijn drie verschillende eigenwaarden: 0, $\pm$ 1.

b) $$\left.\begin{aligned} \lambda &= 0 \rightarrow (-2,2,1) \\ \lambda &= 1 \rightarrow (-3,2,1) \\ \lambda &= -1 \rightarrow (1,-1,0) \end{aligned}\right\} \qquad S = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. b) $f(x)$ is gelijk aan zijn Fourier-integraal, omdat

$$f(1) = \tfrac{1}{2}(f(1+0) + f(1-0))$$

en $$f(-1) = \tfrac{1}{2}(f(-1+0) + f(-1-0))$$

terwijl $f(x)$ verder continu is.

4. a) De reeks is uniform convergent.

14 juni 1962

1. a) Er is een rechte van middelpunten $\underline{x} = (3,1,0) + \rho(1,0,-1)$.

b) $$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \rightarrow \underline{v}_1 = (\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \ 0 \ , -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) \\ \lambda_2 &= -2 \rightarrow \underline{v}_2 = (\tfrac{1}{6}\sqrt{6}, -\tfrac{1}{3}\sqrt{6}, \ \tfrac{1}{6}\sqrt{6}) \\ \lambda_3 &= +4 \rightarrow \underline{v}_3 = (-\tfrac{1}{3}\sqrt{3}, \ \tfrac{1}{3}\sqrt{3}, -\tfrac{1}{3}\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2} z_1\sqrt{2} + \tfrac{1}{6} z_2\sqrt{6} - \tfrac{1}{3} z_3\sqrt{3} + 3$$
$$x_2 = - \tfrac{1}{3} z_2\sqrt{6} + \tfrac{1}{3} z_3\sqrt{3} + 1$$
$$x_3 = - \tfrac{1}{2} z_1\sqrt{2} + \tfrac{1}{6} z_2\sqrt{6} - \tfrac{1}{3} z_3\sqrt{3} .$$

c) $-2z_2^2 + 4z_3^2 = 0$, reëel snijdend vlakkenpaar.

2. a) $f(x) \sim \frac{1}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right]$.

b) $x \neq \pi$.

3. $y = \sqrt{x} \cdot \{A + B \log x\}$.

15 januari 1963

1. a) $x^4y^2 + x^2 = C$.

b) $y = a_1x - a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3n-1}$, $y = x$.

2. a) $F(y) = \frac{4\pi y \sin(4\pi^2 y)}{4\pi^2 y^2 - 1}$ voor $|2\pi y| \neq 1$ en $= 2\pi$ voor $|2\pi y| = 1$.

b) $y = e^x + \sin x$, $z = e^x + \cos x$.

3. b) $\lambda_1 = 2$, $\underline{x} = \alpha(1,1,1) = \alpha\underline{p}$

$\lambda_{2,3} = -1$, alle $\underline{x}$ met $(\underline{x}, \underline{p}) = 0$.

c) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 6$,

2-bladige hyperboloïde.

4. a) $|x| \leq 1$.

6 juni 1963

1. a) $\log(x^2 + y^2) + 2 \arctan \frac{y}{x} = C$.

b) $\frac{1}{x^2 + y^2}$.

2. a) N.b. $f(-x) \neq -x(2\pi + x)$.

   b) $a_0 = \frac{4}{3}\pi^2$, $a_k = -\frac{4}{k^2}$, $b_k = 0$.

   d) $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \frac{16}{15}\pi^4$.

3. a) Aan $\underline{v} = (1,0,0)$ is toegevoegd $(\mathcal{A}\underline{v}, \underline{x}) = 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0$. De richtingen $\underline{w}$ met hetzelfde toegevoegde vlak voldoen aan $\mathcal{A}\underline{w} = (5,-4,-2)$; $\underline{w} = (1,0,0) + \lambda(2,2,1)$.

   b)
$$
\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{2}{3} y_1 + \tfrac{1}{5}\sqrt{5}\, y_2 - \tfrac{4}{15}\sqrt{5}\, y_3 \\
x_2 &= \tfrac{2}{3} y_1 + \tfrac{5}{15}\sqrt{5}\, y_3 \\
x_3 &= \tfrac{1}{3} y_1 - \tfrac{2}{5}\sqrt{5}\, y_2 - \tfrac{2}{15}\sqrt{5}\, y_3
\end{aligned}
$$

$9(y_2^2 + y_3^2) - 1 = 0$
elliptische cylinder.

4. a) Voor alle reële x.

   b) Ja.

<u>14 januari 1964</u>

1.
$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} z_3 \\
x &= z_1 + 1 \\
x_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} z_3 .
\end{aligned}
$$

Typen: $4z_1^2 + 2z_2^2 + 8z_3^2 - 1 = 0$ ellipsoïde

$8z_1^2 - 2z_2^2 + 4z_3^2 + 1 = 0$ tweebladige hyperboloïde.

Gemeenschappelijk punt: $(z_1 z_2 z_3) = (0, \pm 1/\sqrt{2}, 0)$
afkomstig van $(\mp \frac{1}{2}, 1, \pm \frac{1}{2})$.

2. $cy = (\log y - \log x)$.

3. $f(x) \sim \cos x - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$

verschil resp. 0 en π .

4. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \sqrt{x}$; convergeert uniform.

5. $4/9\sqrt{2} \leq y_{max} \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

5 juni 1964

1. $y = \{1 + 3e^{\cos x - 1}\}^{\frac{1}{2}}$.

2. a) -1 .

   b) $a_n = \dfrac{4(-1)^{n-1}}{\pi(2n-1)}$.

   c) resp. 1 en -1.

   d) Neen, want de som van de reeks is niet continu.

3. a) $16z_1^2 + 4z_2^2 - z_3^2 + 1 = 0$ tweebl. hyperboloïde

   b) $16z_1^2 + 4z_2^2 - z_3^2 = 0$ ellipt. paraboloïde

   c) $16z_1^2 + 4z_2^2 - z_3^2 = 0$ reële kegel.

4. a) Niet uniform convergent.
   b) Niet uniform convergent.
   c) Uniform convergent.

5. $y(\frac{1}{2}) = 0{,}52$.

12 januari 1965

2. a) $a_k = \dfrac{2}{k^2}\{(-1)^k + 1\}$ voor $k \neq 0$.

   b) Convergentie is uniform vs Weierstrass.

3. a) $m = (0,-1,1)$.

   c) $$\begin{aligned} x &= 12/13\, z_1 + \quad + 5/13\, z_3 \\ y &= 5/13\, z_1 + \quad - 12/13 z_3 - 1 \\ z &= \qquad\quad + z_2 + \qquad + 1 . \end{aligned}$$

   d) Reële kegel.

5. $\left|y(1) - \frac{119}{200} + \frac{23}{480}\right| \leq \frac{23}{480}$.

23 januari 1965

1. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 = C$.

2. a) $\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k - 2 + (-1)^k\pi^2k^2}{k^3} \sin kx$.

   b) $1 - 2\pi$.

   c) Daar f discontinu is in $x = \pi$ convergeert de Fourier-reeks niet uniform op $0 < x \leqslant \pi$ en dus ook niet uniform op $0 < x < \pi$.

3. $x = 3/5\, z_1 + 4/5\, z_2 - 23/5$
   $y = -4/5\, z_1 + 3/5\, z_2 - 11/5$
   $z_1^2 - 2z_2 = 0$, parabool.

5. $|y(\tfrac{1}{2}) - \frac{173}{240}| < \frac{7}{240}$.

8 juni 1965

1. a) $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{1}{(2k+1)^2}\right]\cos(2k+1)x$.

   b) $\begin{cases} |x| & 0 \leqslant |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 \quad \text{voor} & |x| = \frac{\pi}{2} \\ |x| - \pi & \frac{\pi}{2} < |x| \leqslant \pi \end{cases}$.

   c) Niet uniform convergent.

3. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   b) $-4z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 4$ eenbladige hyperboloïde.

   c) $\begin{cases} 2x + y + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{5}(2y - x - 4)^2 + (z-1)^2 = 4 \end{cases}$.

4. a) $\frac{1}{\sqrt{x}}[A \cos x + B \sin x] = y(x)$.

4 januari 1966

1. a) $m = (-2,-1,1)$.

   b) $6z_1^2 + 3z_2^2 - z_3^2 = 11$.

   c) Eenbladige hyperboloïde.

2. $y(x) = -e^x \cos x + e^x$.

3. a) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} \sin 2nx$.

   b) Convergeert voor alle x.

   c) $\frac{\pi^2}{64}$.

4. c) $s(x) = 1 + x^2 \quad x \neq 0$
   $s(0) = 0$.
   Uit uniforme convergentie zou volgen $s(x)$ is continu.

5. $y(\frac{1}{2}) = 1.1$.

6 juni 1966

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2}\right) \sin nx$.

   b) Zie dictaat; voor alle x.

2. $y = \alpha x + \beta x^{-1}$.

3. a) Geen middelpunt.

   b) $z_1 = 3z_2^2 + 3z_3^2$; omwentelingsparaboloïde.

   c) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 4 \\ 2\sqrt{2} & 3 & -1 \\ -2\sqrt{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   d) $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$.

4. 4.1. ja
   4.2. nee
   4.3. ja
   4.4. ja
   4.5. nee
   4.6. ja
   4.7. ja
   4.8. ja
   4.9. nee
   4.10. ja.

<u>10 januari 1967</u>

1. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

2. a) $\frac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi nx)}{n}$.

   b) Voor $x \neq 2k$ (k geheel): convergentie naar $f(x)$.
   Voor $x = 2k$ (k geheel): convergentie naar 0, terwijl $f(2k) = 1$.

   c) Nee.

3. a) Geen uniforme convergentie.

   b) 0 en 0.

   c) Ook als de rij $\{g_n(x)\}$ niet uniform convergeert, dan kan toch
   $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx = \int_a^b \left\{ \lim_{n\to\infty} g_n(x)\right\} dx \quad \text{zijn.}$$

4. a) $\underline{e}'_1 = (1,0,0,0)$
   $\underline{e}'_2 = (0,0,1,0)$
   $\underline{e}'_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(0,1,0,-1)$
   $\underline{e}'_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(0,1,0,1)$.

   b) $\mathcal{A}\underline{x} = 4\underline{e}'_1 - \underline{e}'_2 + 7\sqrt{2}\ \underline{e}'_4$
   $\mathcal{A}\underline{x} = 4\underline{e}_1 + 7\underline{e}_2 - \underline{e}_3 + 7\underline{e}_4$.

10 juni 1967

1. a) $x \sin y + x^2 = C$

   b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 14e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$.

2. a) $\frac{1}{2} + \sin \pi x - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

   b) $|x| + \sin \pi x$; zie hoofdstelling.

   c) Ja.

3. a) x.

   c) Ja.

4. a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   b) $\mathcal{A}(\underline{a}_1 - \underline{a}_2) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + 2\underline{e}_3)$

   $\mathcal{A}(\underline{a}_1 - \underline{a}_2) = \underline{a}_1 + \underline{a}_2$.

9 januari 1968

1. $\underline{x}(t) = e^{t \cos \alpha}\begin{pmatrix} \cos(t \sin \alpha) \\ \sin(t \sin \alpha) \end{pmatrix}$.

3. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

4. b) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)^2 t} \cos(2n+1)x$.

5. b) Ja.

   c) Ja.

ANTWOORDEN HERKANSING

22 juni 1964

1. $\frac{1}{2}(x^2 - 1) + ce^{-x^2} = y$.

2. $y = c(1 - 3x^2)$.

4. $4z_1^2 - z_2^2 = 4$.
   Afstand der toppen = 2.

6. In (11,5,8) is maximum = 35.

7. -4π .

8. $\frac{1}{2}\{1 - \binom{10}{5}(\frac{1}{2})^{10}\} > 3/8$.

18 januari 1965

1. $y = \dfrac{2}{3c^{x^2} - 1}$.

2. $f(x) \sim \dfrac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{4n^2 - 1} \sin 2nx$.

3. $\pm (3/5, -4/5)$.

4. $\pm (1,-2,1)$ afstand $\sqrt{6}$.

5. 32π .

6. a) $\frac{1}{2}$.
   b) $(5/6)^4 - (4/6)^4$.

22 juni 1965

1. $f(x) = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{c}{x} e^{\sqrt{x}}$ met $c = 0$.

2. a) $f(x) = \dfrac{2}{\pi} + \cos x - \dfrac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}$.
   b) $f(\pi) = -1$.

3. Lange as van $x_1^2 + 4x_2^2 = 4$ is 4.

4. $\frac{224}{45}$.

5. 16π .

17 januari 1966

1. $xy + \arctan y = c$.

2. $1 + \cos 2x$.

3. $x + y = \pm \sqrt{2}$.

4. $f(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}) = f(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 1$ max
$f(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}) = f(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}) = -1$ min .

5. $\frac{15}{2}\pi$.

6. 1) rang = 0 als $(x,y) = (0,0)$
= 1 als $x^2 = y^2$ en $(x,y) \neq (0,0)$
= 2 elders.

2) Het eerste kwadrant $u \geq 0$, $v \geq 0$.

3) 4-voudig want (x,y); $(-x,y)$; $(-x,-y)$ en $(x,-y)$ hebben hetzelfde beeld.

7. $\alpha = \beta$.

22 juni 1966

1. $y = C_1 e^{\frac{1}{2}x^2} + C_2$.

2. $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

3. a) $2z_1^2 + z_2^2 = 3$.
b) Elliptische cilinder.

4. a) $\left\{\int_y^\infty f(x)dx\right\}^n = \{1 - F(y)\}^n$.

5. 1) $\underset{1 \leqslant k \leqslant 100}{\text{maximum}}\ a[k]$.

   2) De grootste index k waarvoor a[k] = MIN.

6. a) $-\pi$.
   b) -2π .
   c) nee.

21 januari 1967

1. $x^2 + 2xy - y^2 + 2x = C$.

2. $\frac{2}{\pi} - \sin x - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$

3. $z_1^2 + 16z_2^2 - 9z_3^2 = 1$

   éénbladige hyperboloïde.

4. locale minima 0 voor $\begin{cases} y = 0 \\ x > 0 \end{cases}$

   locale maxima 0 voor $\begin{cases} y = 0 \\ x < 0 \end{cases}$.

5. -6π .

6. a) 0.9772
   b) aantal bruikbare exemplaren < 75.

21 juni 1967

1. $2x^3y^3 - 3x^2 + 6 \cos y = 3$.

2. $4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$.

3. a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
   b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1,0,1)$ en $\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1,0,-1)$.

4. a) $\underline{w} = -(e^y, e^z, e^x) = -\underline{u}$.

   b) div $\underline{u} = 0$ en $\underline{u}$ is overal gedefinieerd.

   c) $(e^z - ye^x, -ze^y, 0)$.

5. a) 0.0746 .

   b) 0.0375 (zonder continuïteitscorrectie 0.0526).

   c) $\lambda = \frac{1}{2}$.

<u>22 januari 1968</u>

1. $4x^3y + 9x^2y^2 - 10x = C$.

2. $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2(-1)^{n+1}}{n} \sin \pi nx$.

3. a) $\begin{pmatrix} 1 & (\underline{a}, \underline{b}) & (\underline{a}, \underline{c}) \\ (\underline{b}, \underline{a}) & 1 & (\underline{b}, \underline{c}) \\ (\underline{c}, \underline{a}) & (\underline{c}, \underline{b}) & 1 \end{pmatrix}$.

4. globale minima $-\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1,-1)$ en $\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1,1)$
   globale maxima $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1,1)$ en $\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1,-1)$.

5. $\begin{cases} n = 10 & : \text{ geen twijfel (binomiaal)} \\ n = 100 & : \text{ net geen twijfel (Poisson)} \\ n = 250 & : \text{ wel twijfel, } p < 0.95 \text{ (normaal).} \end{cases}$

6. De priemgetallen < 45.