TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken en Tentamenopgaven

bij de Colleges

Wiskunde IIIa en IV

Cursusjaar 1963-1964

Inhoudsbeschrijving Vraagstukken en Tentamenopgaven Wiskunde IIIa:

Inhoudsbeschrijving Vraagstukken en Tentamenopgaven Wiskunde IV:

(18 Mei 2005, JdG)

Jan de Graaf. N 2010

Vraagstukken bij het college wiskunde IIIa

HOOFDSTUK I. DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

§ 1 t/m § 4 :

1. $xy' + 2y = xy\, y'$
2. $xy^2 - x - (yx^2 - y)\, y' = 0.$
3. $y' = \dfrac{\log x - y}{x \log x}.$
4. $(x^2 + 1)\, y' = (y + 2)(x + \sqrt{x^2 + 1}).$
5. $x^2 - y^2 + 2xy\, y' = 0.$
6. $y'(x - \sin y) + y = 0.$
7. $y + xy^2 - xy' = 0.$ (Int. factor : $\mu(y)$).
8. $y' + \dfrac{x}{1 + x^2}\, y = \dfrac{1}{x(1 + x^2)}.$
9. $x(y - x)\, y' = y^2.$
10. $\{\tan(x + y) - 1\}\, y' = 1.$
11. $(3x^2 - 1)y + (x^3 - x + 2y)y' = 0.$
12. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{y}{x^2} + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{x}\right) y' = 0.$
13. $y' - \frac{1}{2}y = y^3 e^{-x}.$
14. $2y' - y = 10x^3y^5.$
15. $(x - y)^2 y' = (x - y + 1)^2.$
16. $e^x y \log y = (e^x + y \log^2 y)y'.$
17. $2x^3y^2 - y + (2x^2y^3 - x)\, y' = 0.$ (Int. factor : $\mu(xy)$).
18. $\dfrac{y'}{y} - x^2 y = \dfrac{1}{x}.$
19. $x - y^2 + 2xy\, y' = 0.$
20. $y + xy + \sin y + (x + \cos y)\, y' = 0.$ (Int. factor : $\mu(x)$).
21. $3xy^2y' + 2y^3 = 2$
22. $(3x + 5y + 6)\, y' = x + 7y + 2.$

23. $y' \cos y + \sin y = x$.

24. $y^2(xy\, y' - 1) = 1 - x^2(1 + y^2)$.

25. $(x - 3y)\, y' + 3x - y = 0$.

26. $y(y')^2 = 2x(y')^3 + 1$.

27. $x(1 - x^2)\, y' + (3x^2 - 1)\, y = 2x^3$.

28. $(2x - 4y + 5)\, y' = 2y - x - 3$.

29. $3x^2 + 6xy^2 + (6x^2y + 4y^3)\, y' = 0$.

30. $(x - y + 1)\, y' = 1$.

31. $2xy + (y^2 - 3x^2)\, y' = 0$.

32. $y = xy' + y' - (y')^2$.

33. $xy' + 2y - \sin x = 0$.

34. $y \sin x - 1 + y' \cos x = 0$.

35. $y'(y^2 - x) - y = 0$.

36. $x = \left(1 - \frac{1}{y'}\right)^2$.

37. $y' + 2y = 2xy\sqrt{y}$.

38. $y^2 + (xy + 1)\, y' = 0$.

§ 6:

39. $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y\ ; \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 3y. \end{cases}$$

40. $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 2y + e^t\ ; \\ \frac{dy}{dt} = 6x - 3y + e^{-t}\ . \end{cases}$$

41. $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + y = 2e^t \\ \frac{dy}{dt} + z = e^t \\ \frac{dz}{dt} + x = e^t \end{cases}$$

Analoge Vraagstukken

Sales I

IX §2 1 t/m 8

§3

§4 7, 8, 9

§6 : 1, 3, 6, 7, 10–15

Sales II

XI §2 1 t/m 4 6 t/m 9, 14

§3, §4 10, 11, 12 §6 1, 3, 7, 11

§8 2, 3, 5, 7

9 t/m 15

18, 19

22, 24

25, 20

29, 33

35, 37, 42, 44

Analoge Vraagstukken

* $y'' - 2xy' + 4y = 0$

$$y = a_0 (1 - 2x^2) + a_1 \left\{ x e^{x^2} + (1 - 2x^2) \int e^{x^2} dx \right\}$$

ontwikkel!

* $y'' + x^2 y = 0$

$$y = a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k}}{3.4.7.8 \ldots (4k-1)4k} \right] +$$

$$+ a_1 \left[x + \sum_{1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+1}}{4.5.8.9 \ldots 4k(4k+1)} \right]$$

42. $$\begin{cases} 7\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2x = 0. \\ \dfrac{dx}{dt} + 3\dfrac{dy}{dt} + y = 0. \\ x(0) = 1 \ ; \ y(0) = 0. \end{cases}$$

Analoge vraagstukken
Salet II
XIII §6 : 1 t/m 5
§7 : 40.

43. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \alpha^2 y = \cos \alpha t \\ \dfrac{dy}{dt} + \alpha^2 x = \sin \alpha t. \end{cases}$$

44. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - 2y = \sin t \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = 3t. \end{cases}$$

§ 7:

45. $y'' - xy = 0.$

46. $y''' + xy = 0.$

47. $(1 - x^2)y'' + 6y = 0.$

48. $(1 - x^2)y'' - xy' + 9y = 0.$

49. $y'' - xy = 1.$

50. $xy'' - (1 + x)y' + y = 0.$

51. $2x^2(1 + x^2)y'' + xy' - 12x^2y = 0.$

52. $x^2y'' - xy' + y = 0.$

53. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$

54. $xy'' + 2y' + xy = 0.$

§ 9:

55. $y'''' - 5y'' + 10y' - 6y = 0$
$y(o) = 1 \ ; \ y'(o) = 0 \ ; \ y''(o) = 6 \ ; \ y'''(o) = -14.$

Analoge Vraagstukken

1) $f(x) = x \sin x \quad -\pi \leq x \leq \pi$

2) $\quad \text{''} \quad 0 \leq x \leq \pi$ Sinusreeks

3) $e^{x} \quad 0 < x < \pi$ Sin reeks
cos reeks

4) $\sin \alpha x \quad -\pi < x < \pi$

56. $y''' + y = \frac{1}{2}x^2e^x$

$y(o) = y'(o) = y''(o) = 0.$

57. $\ddot{x} + \ddot{y} + 2\dot{x} + \dot{y} + x + 2y = 0$

$\ddot{x} + \ddot{y} + \dot{x} \qquad + 2x + 3y = 4t + 5$

$x(o) = 31$; $y(o) = -22$; $\dot{x}(o) = 9$; $\dot{y}(o) = -5.$

58. $\ddot{x} = 3x + 4y$

$\ddot{y} + x + y = 0$

$x(o) = \dot{y}(o) = 1$

$y(o) = \dot{x}(o) = 0$

59. $y'' + 2y - 3z' = 5 \cos x + 5 \sin x$

$z'' - 8z + 2y' = 15 \cos x$

$y(o) = 3$; $y'(o) = 6$; $z(o) = -\frac{1}{3}$; $z'(o) = -\frac{2}{3}$.

HOOFDSTUK II. REEKSEN EN INTEGRALEN VAN FOURIER.

§ 1 t/m § 4 :

Bereken de Fourier-reeks van de volgende funkties (met periode 2π) :

60. $f(x) = \sin \frac{1}{2}x \qquad$ voor $-\pi \leqslant x < \pi$.

61. $\begin{cases} f(x) = x^3 & \text{voor } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \\ f(x) = -x^3 & \text{voor } -\pi \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$

62. $f(x) = \sinh x \qquad$ voor $0 \leqslant x < 2\pi$.

63. $f(x) = x \sin x \qquad$ voor $-\pi \leqslant x < \pi$.

64. $\begin{cases} f(x) = x \sin x & \text{voor } 0 \leqslant x < \pi. \\ f(x) = -x \sin x & \text{voor } -\pi \leqslant x < 0. \end{cases}$

Bereken de som van de volgende reeksen:

65. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}$ (aanw: gebruik het resultaat van vraagstuk 60).

66. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ (aanw: zie voorbeeld 5 van § 2).

67. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}$ (aanw: gebruik het resultaat van vraagstuk 63).

68. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)^2}$

69. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^4}$

Bereken de Fourier-reeks van de volgende funkties:

70. $f(x) = x - [x]$, als $[x]$ het grootste gehele getal $\leqslant x$ is.

71. $f(x) = x$ voor $0 \leqslant x < 1$.
$f(x) = 1$ voor $1 \leqslant x \leqslant 2$.
$f(x) = 3 - x$ voor $2 < x < 3$.
$f(x + 3) = f(x)$

72. $f(x) = e^x$ voor $-c \leqslant x < c$.
$f(x + 2c) = f(x)$ $(c > 0)$.

§ 5:

73. Een dunne gespannen snaar kan in een xy-vlak trillen om zijn evenwichtsstand: $0 \leqslant x \leqslant \ell$.

Als gegeven is: $y(x,0) = 0$ en $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = ax(\ell - x)$, bereken dan de uitwijking $y(x,t)$ ten tijde t.

Wat is de uitwijking van het midden van de snaar op het tijdstip $t = \frac{\ell}{2\alpha}$ als $\alpha^2 = \frac{P}{\rho}$ (dictaat blz. II.16).

74. Als opgave 73. Beginvoorwaarden:

$$y(x,0) = 0 \quad \text{en} \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = \begin{cases} 2\,a\alpha x & \text{voor } 0 \leqslant x < \ell/2. \\ 2\,a\alpha(\ell - x) & \text{voor } \ell/2 \leqslant x \leqslant \ell. \end{cases}$$

De Fouriergetransformeerde:

$$f_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-iut} \, dt$$

§ 7:

75. Bereken: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ux \sin u}{u}\,du$ voor $0 \leqslant x$.

76. Bewijs: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ux}{u^3}\,du \int_0^u \theta^2 \cos\theta\, d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x^2 & \text{voor } 0 \leqslant x < 1; \\ \frac{\pi}{4} & \text{voor } x = 1; \\ 0 & \text{voor } x > 1; \end{cases}$

(substitueer $\theta = ut$)

77. Bereken: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ux}{u^3}\,du \int_0^u \theta^2 \sin\theta\, d\theta$ voor $x \geqslant 0$.

§ 8:

78. Bereken de Fourier-getransformeerde $f_1(u)$ van de funktie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{voor } x = 0 \\ e^{-x} & \text{voor } x > 0. \end{cases}$$

79. Bereken de Fourier-getransformeerde $f_1(u)$ van de funktie:

$f(x) = (ax + b)e^{-|x|}$.

Bereken met behulp van het gevonden resultaat:

$$\int_0^\infty \frac{u \sin ux}{(1+u^2)^2}\,du \quad \text{en} \quad \int_0^\infty \frac{\cos ux}{1+u^2}\,du.$$

80. Als 79. met $f(x) = |x|\, e^{-|x|}$

Bereken: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ux}{(1+u^2)^2}\,du$ voor $x > 0$.

§ 9:

81. Bewijs, dat de rij funkties $g_n(x) = \dfrac{1}{1 + n^2x^2}$ uniform convergeert op elk interval $a \leqslant x \leqslant b$ dat $x = 0$ niet bevat.

Is de rij uniform convergent voor $0 < x \leqslant 1$?

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

82. Onderzoek de uniforme convergentie van de rij $g_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{2n}}$

83. Bewijs: $\sum_{n=0}^{\infty} x(1 - x)^n$ is uniform convergent voor $a \leqslant x \leqslant 3/2$ $(a > 0)$

Is de reeks uniform convergent op het interval $0 \leqslant x \leqslant 1$?

84. Bewijs: $\lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n a^n}{n!(1 + a^{2n}x^2)} = e^{-a}$.

85. Bewijs: $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{1 + x^n}$ is uniform convergent voor $x \geqslant 1 + c$ $(c > 0)$

86. Gegeven: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is absoluut convergent.

Bewijs: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ is uniform convergent voor alle x.

87. Bewijs: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\tfrac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \ldots\right]$

voor $k^2 < 1$.

88. Gegeven: $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n^2} \sin(2^{n^2}x)$ $(a > 1)$

Bewijs: a) $s(x)$ is een continue functie van x;

b) $s'(x)$ bestaat voor alle x, als $a > 2$;

c) $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2a^{-1})^{n^2} \cos(2^{n^2}x)$ $(a > 2)$

89. Gegeven: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3 + n^4x^2}$.

Bewijs: $f'(x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^4 x}{(n^3 + n^4x^2)^2}$.

Kan men $f''(x)$ vinden door nogmaals termsgewijs te differentieren?

90. Bewijs, dat in het antwoord van vraagstuk 73 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ en $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ door termsgewijze differentiatie kunnen worden gevonden.

91. Bewijs, dat $y(x,t)$ uit vraagstuk 74 een continue partiële afgeleide $\frac{\partial y}{\partial x}$ heeft, bij vaste t.

92. Gegeven: $f(x) = \int_0^{2\pi} \sin t \sin (x \sin t)dt.$

Bewijs: a) $x^2 f''(x) + xf'(x) + (x^2 - 1) f(x) \equiv 0;$

b) $f(x) = 2\pi J_1(x)$ (Besselfunktie van de eerste soort en orde 1)

93. Gegeven: $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)dt \qquad (x > 0).$

Bewijs: $f'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x \sin^2 t}{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t} dt$

Bereken $f(x)$

94. Bereken: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 - x^2 \sin^2 t)dt \qquad (|x| < 1).$

95. Gegeven: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} \qquad (x > 1).$

Bewijs: a) $f(x)$ is oneindig vaak differentieerbaar.

b) $f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\log n)^k n^{-x} \qquad (k = 1,2 \ldots)$

Opmerking: uit de uniforme convergentie van de afgeleidenreeks op het interval $x \geqslant p > 1$ bij elke vastgehouden p volgt de differentieerbaarheid op $x > p > 1$ voor elke vaste p, dus de differentieerbaarheid in elk punt $x > 1$.

HOOFDSTUK III: KWADRATISCHE VORMEN EN KWADRATISCHE OPPERVLAKKEN.

N.B.: In het volgende is met afbeeldingsmatrix steeds bedoeld de matrix t.o.v. de natuurlijke basis in R_n, tenzij het tegendeel uit de opgave blijkt.

96. De lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 heeft de matrix:

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Gevraagd:
a) dimensie beeldruimte;
b) dimensie nulruimte;
c) de vergelijking van de beeldruimte;
d) $\underline{x}$ uit $A\,\underline{x} = (1,2,3)$.

97. Gegeven zijn twee lineaire afbeeldingen van R_3 in R_3 met matrices:

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad [B] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -11 & 8 & -7 \\ -8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Bepaal de matrices behorende bij de afbeeldingen AB en BA.

98. Gegeven: lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 .

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bepaal alle vectoren in R_3 die op zichzelf worden afgebeeld.

99. Gegeven: lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 .

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Gevraagd: de matrix van A t.o.v. de basis:
$\underline{e}'_1 = (0,0,1)$, $\underline{e}'_2 = (1,1,0)$, $\underline{e}'_3 = (2,3,3)$.

100. Bepaal een onafhankelijk stelsel eigenvectoren van de lineaire afbeelding (R_3 in R_3) met matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

101. Van de lineaire afbeelding A is (1,-2,4) een eigenvector met eigenwaarde -2 en (1,1,1) een eigenvector met eigenwaarde 1. Verder is A(1,0,0) = (0,0,-6).

Bereken: a) de afbeeldingsmatrix [A].

b) $[A]^{-1}$

c) de derde eigenwaarde met bijbehorende eigenvectoren.

102. Voor welke waarden van a heeft de afbeelding A geen inverse?

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ a^2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

103. Bepaal de eigenvectoren van de afbeelding met matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Neem de gevonden eigenvectoren als basis voor R_3 en controleer dat $S^{-1}[A]S$ een diagonaalmatrix is.

104. Gegeven is de lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 .

A(1,0,2) = (-1,0,2); A(0,1,-4) = (2,2,-3); A(1,1,1) = (-1,1,1).

Bepaal de **matrix van A.**

Bewijs dat A orthogonaal is.

Bereken de inhoud van de parallelepipeda, opgespannen door de vectoren

$\underline{a}$ = (1,3,-1), $\underline{b}$ = (4,2,0) en $\underline{c}$ = (0,3,-1)

resp. A $\underline{a}$, A $\underline{b}$ en A $\underline{c}$.

105. In een driedimensionale ruimte zijn gegeven:

a) de deelruimte U bestaande uit de vectoren (x_1, x_2, x_3), waarvan de kentallen voldoen aan $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$;
b) de deelruimte V, die alle vectoren bevat die loodrecht staan op de deelruimte U.

1) Bepaal voor U resp. V een basis.

Bij een lineaire afbeelding A gaan de vectoren van U in zichzelf over en die van V in de vectoren met tegengestelde kentallen.

2) Bereken [A].

3) Bewijs dat A orthogonaal is.

4) Bewijs: $A^2 = I$ (identieke afbeelding).

5) Verklaar 4) meetkundig.

106. Gegeven is een lineaire afbeelding A van R_3 in R_3.

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Gevraagd: de matrix van A t.o.v. de basis

$\underline{e}'_1 = (1,2,-2)$; $\underline{e}'_2 = (2,1,2)$; $\underline{e}'_3 = (2,-2,-1)$

107. Als vraagstuk 106, met:

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$\underline{e}'_1 = (3,-2,0)$; $\underline{e}'_2 = (-1,1,-1)$; $\underline{e}'_3 = (0,-2,1)$

108. Bepaal een matrix S zodanig dat $S^{-1}AS$ een diagonaalmatrix is en bereken $S^{-1}AS$.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

10g) 1) $(BAB\underline{x}, \underline{y}) = (AB\underline{x}, B\underline{y}) = (B\underline{x}, AB\underline{y}) = (\underline{x}, BAB\underline{y})$

2) $(\underline{x}, \underline{y}) = (AA^{-1}\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}, AA^{-1}\underline{y})$

$$(AA^{-1}\underline{x}, \underline{y}) = (A^{-1}\underline{x}, A\underline{y}) \doteq (\underline{x}, A^{-1}A\underline{y})$$

$\therefore A^{-1}$ is symmetriek per definitionem

3) $(B^{-1}AB\underline{x}, \underline{y}) \overset{?}{=} (\underline{x}, B^{-1}AB\underline{y})$

Bewijs dat dit zo is: $\qquad (\underline{x}, \underline{x}') = (B\underline{x}, B\underline{x}')$

geg is $= (BB^{-1}AB\underline{x}, B\underline{y}) = (AB\underline{x}, B\underline{y}) = (B\underline{x}, AB\underline{y})$

$= (BB^{-1}B\underline{x}, BB^{-1}AB\underline{y}) = (B\underline{x}, BB^{-1}AB\underline{y}) =$

$(\underline{x}, B^{-1}AB\underline{y})$ quod erat demonstrandum.

109. A en B stellen lineaire afbeeldingen van R_n in zichzelf voor.
Bewijs: 1) Als A en B symmetrisch zijn, dan is BAB symmetrisch.
2) Als A symmetrisch is en niet singulier, dan is A^{-1} symmetrisch.
3) Als A symmetrisch is en B orthogonaal, dan is $B^{-1}AB$ symmetrisch.

110. Bewijs hetzelfde als in vraagstuk 109 als A en B $n \times n$ matrices zijn.

111. Bepaal de eigenwaarden en een orthonormaal stelsel eigenvectoren van de symmetrische lineaire afbeelding A in R_4, als

$$(A\underline{x},\ \underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_1x_4 + \\ + 10x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 .$$

(Een stelsel vectoren heet orthonormaal als het orthogonaal is en als bovendien alle vectoren de lengte 1 hebben.)

112. Als vraagstuk 111 voor de symmetrische lineaire afbeelding A in R_5:

$$(A\underline{x},\ \underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + 2x_3x_5 .$$

113. Bepaal van elk der volgende tweedegraadskrommen het (de) eventueel aanwezige middelpunt(en), een transformatie, die de kromme in standaardvorm doet overgaan, de standaardvorm en het type.

a) $7x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_1 - 12x_2 - 9 = 0.$

b) $4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2 - 7x_1 + 4x_2 + 9 = 0.$

c) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_1 - 12x_2 + 8 = 0.$

d) $3x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1 + 9 = 0.$

e) $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1 = 0.$

f) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 1 = 0.$

g) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 8 = 0.$

114. Bepaal van elk der volgende tweedegraadsoppervlakken het (de) eventueel aanwezige middelpunt(en), een transformatie, die het oppervlak in standaardvorm doet overgaan, de standaardvorm en het type.

a) $6x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_3 - 4x_1 - 2x_2 = 0.$

b) $x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_3 + 1 = 0.$

c) $x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 1 = 0.$

d) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 - 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 1 = 0.$

e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 0.$

f) $7x_1^2 + 4x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3 + 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 - 8 = 0.$

g) $x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 - x_3 = 0.$

h) $3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0.$

i) $2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0.$

j) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_1x_3 = 1.$

k) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0.$

Analoge Opgaven: (Ontaarde gevallen)

$5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 + 3 = 0.$

imaginaire ellips

$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 6x_1 + 12x_2 + 9 = 0.$

dubbelrechte

$x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_1 + 11x_2 - 15 = 0$

Reële snijdende lijnen.

$x_1^2 + (2m^2+1)(x_2^2+x_3^2) - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 2m^2 - 3m + 1$

$m < -1$	ellipsoïde
$m = -1$	ellips. cyl.
$-1 < m < \frac{1}{2}$	eenbl. hyperboloïde
$m = \frac{1}{2}$	kegel
$\frac{1}{2} < m < 1$	tweebl. hyperboloïde
$m = 1$	cylinder
$m > 1$	ellipsoïde.

Antwoorden bij de vraagstukken van het college wiskunde IIIa

HOOFDSTUK I. DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

1. $yx^2 = Ce^y$.
2. $y^2 - 1 = C(x^2 - 1)$.
3. $y = \frac{1}{2} \log x + \dfrac{C}{\log x}$.
4. $y = -2 + C(x\sqrt{x^2 + 1} + 1 + x^2)$.
5. $C(x^2 + y^2) = x$.
6. $xy + \cos y = C$.
7. $2x + yx^2 = Cy$; $y = 0$.
8. $y = \dfrac{C}{\sqrt{1 + x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \log \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{|x|}$
9. $y = Ce^{y/x}$.
10. $\sin (x + y) = Ce^y$.
11. $x^3y - xy + y^2 = C$.
12. $\sqrt{x^2 + y^2} + \dfrac{y}{x} = C$.
13. $e^x = Cy^2 - 2xy^2$; $y = 0$.
14. $y^4(Ce^{-2x} - 10x^3 + 15x^2 - 15x + \frac{15}{2}) = 1$; $y = 0$.
15. $(2x - 2y + 1)\, e^{2(x-y)^2+6x+2y} = C$.
16. $e^x = (y + C) \log y$; $y = 1$.
17. $xy(x^2 + y^2) + 1 = Cxy$; $y = 0$.
18. $4x = (C - x^4)y$.
19. $y^2 = Cx - x \log |x|$.
20. $(xy + \sin y)e^x = C$.
21. $(y^3 - 1)x^2 = C$.
22. $(y - x - 2)^4 = C(5y + x + 2)$; $5y + x + 2 = 0$. $y = -\dfrac{(x+2)}{5}$
23. $\sin y = Ce^{-x} + x - 1$.
24. $x^2(1 + y^2) = Ce^{x^2+y^2}$.
25. $(y + x)^2 (y - x) = C$.

26. $x = \frac{1}{p^3}(Cp - 2)$; $y = \frac{1}{p^2}(2Cp - 3)$.

27. $C\,x(1 - x^2) = y - x$.

28. $e^{4x+8y}(4x - 8y + 1) = C$.

29. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$.

30. $y - x = Ce^y$.

31. $x^2 - y^2 = Cy^3$; $y = 0$.

32. $y = Cx + C - C^2$; $4y = (x + 1)^2$.

33. $x^2y = C + \sin x - x\cos x$.

34. $y = \sin x + C\cos x$.

35. $y(3x - y^2) = C$.

36. $x = (1 - t)^2$; $y = 2t - 2\log|t| + C$.

37. $(Ce^x + x + 1)\sqrt{y} = 1$; $y = 0$.

38. $ye^{xy} = C$.

39. $$\begin{cases} x = e^{2t}(A\sin 3t + B\cos 3t) \\ y = \frac{1}{2}e^{2t}[(3B - A)\sin 3t - (3A + B)\cos 3t] \end{cases}$$

40. $$\begin{cases} x = A + (B + 4t)e^t - e^{-t} \\ y = 2A + \frac{3}{2}(B - 1 + 4t)e^t - \frac{5}{2}e^{-t}\ . \end{cases}$$

41. $$\begin{cases} x = Ae^{-t} + e^{\frac{1}{2}t}\{B\sin\frac{1}{2}t\sqrt{3} + C\cos\frac{1}{2}t\sqrt{3}\} + e^t \\ y = Ae^{-t} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}\{(C\sqrt{3} - B)\sin\frac{1}{2}t\sqrt{3} - (B\sqrt{3} + C)\cos\frac{1}{2}t\sqrt{3}\} + e^t \\ z = Ae^{-t} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}\{-(B + C\sqrt{3})\sin\frac{1}{2}t\sqrt{3} + (B\sqrt{3} - C)\cos\frac{1}{2}t\sqrt{3}\}. \end{cases}$$

42. $$\begin{cases} x = \frac{1}{3}e^{-2t/5} + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t} \\ y = -\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{5}t} + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t}\ . \end{cases}$$

43. $$\begin{cases} \left.\begin{aligned} x &= Ae^{\alpha^2 t} + Be^{-\alpha^2 t} + \frac{\alpha + 1}{\alpha(1 + \alpha^2)}\sin\alpha t \\ y &= -Ae^{\alpha^2 t} + Be^{-\alpha^2 t} + \frac{\alpha - 1}{\alpha(1 + \alpha^2)}\cos\alpha t \end{aligned}\right\}\ \alpha \neq 0. \\ \\ \left.\begin{aligned} x &= t + A \\ y &= B \end{aligned}\right\}\ \alpha = 0. \end{cases}$$

44. $$\begin{cases} x = A\cos t + B\sin t + \frac{1}{2}t\sin t + \frac{1}{2}t\cos t + 6t \\ y = \frac{1}{2}(A+B)\cos t + \frac{1}{2}(B-A)\sin t + \frac{1}{2}t\cos t + 3t + 3 + \frac{1}{4}\cos t + \\ \qquad - \frac{1}{4}\sin t. \end{cases}$$

45. $$y = a_0\left[1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} + \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9} + \ldots\right] + a_1\left[x + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^7}{3.4.6.7} + \frac{x^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \ldots\right]$$

46. $$y = a_0\left[1 - \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^8}{2.3.4.6.7.8} - \ldots\right] + a_1\left[x - \frac{x^5}{3.4.5} + \frac{x^9}{3.4.5.7.8.9} - \ldots\right] + a_2\left[x^2 - \frac{x^6}{4.5.6} + \frac{x^{10}}{4.5.6.8.9.10} - \ldots\right].$$

47. $$y = a_0\left[1 - 3x^2 + x^4 + \frac{1}{5}x^6 + \frac{3}{5.7}x^8 + \frac{3}{7.9}x^{10} + \frac{3}{9.11}x^{12} + \ldots\right] + a_1\left[x - x^3\right].$$

48. $$y = a_0\left(1 + 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n-2)!}{(2n-3)2^{2n}(n-1)!\,n!}x^{2n}\right) + a_1\left(x - \frac{4}{3}x^3\right).$$

49. $$y = a_0\left[1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} + \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9} + \ldots\right] + a_1\left[x + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^7}{3.4.6.7} + \frac{x^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \ldots\right] + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.4.5}x^5 + \frac{1}{2.4.5.7.8}x^8 + \frac{1}{2.4.5.7.8.10.11}x^{11} + \ldots .$$

50. $y = \lambda(1 + x) + \mu e^x.$

51. $$y = \lambda\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n(-3)(-1).1.3.\ldots.(2n-5)}{3.7.\ldots.(4n-1)}x^{2n}\right] + \mu\sqrt{x}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-5)(-1).3.7.\ldots.(4n-9)}{4^n\,n!}x^{2n}\right].$$

52. $y = \lambda x + \mu x \log|x|.$

53. $y = \lambda x^2 + \mu x^3.$

54. $y = \frac{1}{x}(\lambda\sin x + \mu\cos x).$

55. $y = e^{x}(\cos x + \sin x) - e^{-x} \sinh 2x.$

56. $y = \frac{1}{4}e^{x}(x^2 - 3x + \frac{3}{2}) - \frac{1}{24} e^{-x} - \frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}x} (\cos \frac{1}{2}x\sqrt{3} - \sqrt{3} \sin \frac{1}{2}x\sqrt{3}).$

57. $x = 8t + 30 + e^{t}$
$y = -4t - 21 - e^{t}.$

58. $2x = (3t - 1)\, e^{t} + (t + 3)\, e^{-t}$
$4y = (4 - 3t)\, e^{t} - (4 + t)\, e^{-t}.$

59. $y = 3 \cos x + 6 \sin x$
$3z = - \cos x - 2 \sin x.$

60. $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin n x}{4n^2 - 1}$.

61. $\frac{\pi^3}{4} + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^{n}(n^2\pi^2 - 2)}{n^4} \cos n x$.

62. $\frac{\cosh 2\pi - 1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cosh 2\pi - 1) \cos nx - n \sinh 2\pi \sin nx}{n^2 + 1}$

63 $1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n^2 - 1}$

64. $\frac{\pi}{2} \sin x - \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2n x}{(4n^2 - 1)^2}$

65. $\frac{\pi^2}{64}$

66. $\frac{1}{2}$

67. $\frac{1}{4}$

68. $\dfrac{4\pi^2 - 33}{48}$

69. $\dfrac{\pi^2(\pi^2 - 6)}{3.2^{10}}$

70. $\frac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2\pi nx}{n}$

71. $\dfrac{2}{3} - \dfrac{6}{\pi^2} \displaystyle\sum_{1}^{\infty} \dfrac{(\sin \frac{\pi n}{3})^2 \cos \frac{2\pi nx}{3}}{n^2}$

72. $\dfrac{\sinh c}{c} + 2c \sinh c \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{c^2 + n^2\pi^2} \cos \dfrac{\pi n x}{c} +$

$+ 2\pi \sinh c \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} n}{c^2 + n^2\pi^2} \sin \dfrac{\pi n x}{c}$

73. $y(x,t) = \dfrac{8a\ell^3}{\alpha\pi^4} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^4} \sin \dfrac{(2n+1)\pi x}{\ell} \sin \dfrac{(2n+1)\pi\alpha t}{\ell}$

$y(\ell/2, \dfrac{\ell}{2\alpha}) = \dfrac{a\ell^3}{12\alpha}$.

74. $y(x,t) = \dfrac{8a\ell^2}{\pi^3} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \sin \dfrac{(2n+1)\pi x}{\ell} \sin \dfrac{(2n+1)\pi\alpha t}{\ell}$

75. $\begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{voor } 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & \text{voor } x = 1 \\ 0 & \text{voor } 1 < x. \end{cases}$

77. $\begin{cases} \frac{\pi}{2}x^2 & \text{voor } 0 \leqslant x < 1; \\ \frac{\pi}{4} & \text{voor } x = 1; \\ 0 & \text{voor } 1 < x. \end{cases}$

78. $f_1(u) = \dfrac{1 - iu}{\sqrt{2\pi}(1 + u^2)}$.

79. $f_1(u) = \dfrac{2b}{(1 + u^2)\sqrt{2\pi}} - \dfrac{4\,aiu}{(1 + u^2)^2\sqrt{2\pi}}$

$\frac{\pi}{4}\, xe^{-|x|}$; $\frac{\pi}{2}\, e^{-|x|}$.

80. $f_1(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\; \dfrac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2}$

$\frac{\pi}{4}\,(1 + x)e^{-x}$.

81. Neen.

82. Uniform convergent op elk interval $a \leqslant x \leqslant b$ dat de punten $x = \pm 1$ niet bevat.

83. Neen.

89. Ja.

93. $\pi \log \dfrac{x + 1}{2}$.

94. $\pi \log \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{2}$.

96. a) 2; b) 1; c) $x + y - z = 0$; d) $\underline{x} = (\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 0) + \lambda(1,1,-1)$.

97. $[A][B] = [B][A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

98. $\underline{x} = \lambda(1,1,2)$.

99. $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

100. $(1,2,2)$, $(2,1,-2)$, $(2,-2,1)$.

101. a) $[A] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ b) $[A]^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

c) 3; $\lambda(1,3,9)$.

102. -1; $-4 \pm 3\sqrt{3}$.

103. $\rho(1,0,-1)$; $\sigma(2,-1,0)$; $\tau(0,1,-1)$.

104. $[A] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 2; 2.

105. 1) $(-1,1,0)$ en $(2,0,1)$; $(1,1,-2)$

2) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

106. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

107. $$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6 & 10 & -13 \\ -13 & 30 & -24 \\ -3 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

108. a) $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $S = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 4 \\ 0 & -15 & -5 \\ 0 & -9 & -5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

111. $\lambda_1 = \lambda_2 = -4$; $\underline{v}_1 = (\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ 0,\ 0,\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{2})$

$\underline{v}_2 = (0,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ 0)$

$\lambda_3 = 4$; $\underline{v}_3 = (\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2})$

$\lambda_4 = 8$; $\underline{v}_4 = (\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2})$.

112. $\lambda_{1,2,3} = 1$ $\quad \lambda_4 = 0$ $\quad \lambda_5 = 2$.

$\underline{v}_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$
$\underline{v}_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$
$\underline{v}_3 = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)$
$\underline{v}_4 = (0,\ 0,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ 0,\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{2})$
$\underline{v}_5 = (0,\ 0,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ 0,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2})$.

113. a) $M(1,2)$;

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \sqrt{\frac{1}{5}} - z_2 \sqrt{\frac{4}{5}} + 1 \\ x_2 = z_1 \sqrt{\frac{4}{5}} + z_2 \sqrt{\frac{1}{5}} + 2 \end{cases}$$

$3z_1^2 + 8z_2^2 - 24 = 0$, ellips.

b) geen middelpunt

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \underline{y} \ ; \qquad \underline{y} = \underline{z} + \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{13}} \\ -\frac{1}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

$13\, z_2^2 - \sqrt{13}\, z_1 = 0$, parabool.

113. c) $M\,(3,0) + \lambda(-2,1)$ rechte van middelpunten.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} z_2 + 3 \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} z_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} z_2 \end{cases}$$

$5z_2^2 - 1 = 0$, evenwijdig lijnenpaar.

d) $M\,(1,0)$

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + 1 \\ x_2 = z_2 \end{cases}$$

$3z_1^2 + 2z_2^2 + 6 = 0$, imaginaire ellips.

e) $M\,(1,1)$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} z_1 \sqrt{2} - \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} + 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} z_1 \sqrt{2} + \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

$\frac{1}{2} z_1^2 + \frac{3}{2} z_2^2 = 0$, imaginair snijdend lijnenpaar.

f) $M\,(-1,0) + \lambda(1,-1)$ rechte van middelpunten.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} z_1 \sqrt{2} + \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} - 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} z_1 \sqrt{2} + \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} \end{cases}$$

$2z_2^2 = 0$, reëel samenvattend lijnenpaar.

g) $M\,(1,1)$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 1 \\ x_2 = y_2 + 1 \end{cases}$$

$y_1^2 + y_2^2 + 6 = 0$, imaginaire cirkel.

114. a) $M\,(0,1,-\frac{1}{2})$

$$\begin{cases} x_1 = & -\frac{2}{\sqrt{5}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{5}} z_3 \\ x_2 = z_1 & + 1 \\ x_3 = & \frac{1}{\sqrt{5}} z_2 + \frac{2}{\sqrt{5}} z_3 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$z_1^2 + 8z_2^2 - 2z_3^2 - 1 = 0,$ éénbladige hyperboloïde.

b) $M\,(0,0,1)$

$$\begin{cases} x_1 = & \frac{1}{2}\sqrt{2}\, z_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, z_3 \\ x_2 = & \frac{1}{2}\sqrt{2}\, z_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\, z_3 \\ x_3 = z_1 & + 1 \end{cases}$$

$z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_3^2 = 0$ kegel.

c) $M\,(0,0,1) + \lambda(2,1,1)$ rechte van middelpunten

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{\sqrt{6}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} z_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} z_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} z_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} z_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} z_3 + 1 \end{cases}$$

$3z_2^2 + 4z_3^2 - 2 = 0$ elliptische cylinder.

d) $M\colon p_1 - 2p_2 + p_3 - 1 = 0$ vlak van middelpunten

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_3 + 1 \\ x_2 = -\frac{2}{\sqrt{6}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_3 \end{cases}$$

$6z_1^2 = 0$ samenvallend vlakkenpaar.

114. e) geen middelpunt

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{y} \; ; \qquad \underline{y} = \underline{z} - \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$z_1^2 + 2z_3^2 - 6z_2\sqrt{2} = 0,$ elliptische paraboloïde.

f) M (0,1,0)

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}z_1 + \frac{2}{3}z_2 - \frac{1}{3}z_3 \\ x_2 = -\frac{1}{3}z_1 + \frac{2}{3}z_2 + \frac{2}{3}z_3 + 1 \\ x_3 = \frac{2}{3}z_1 - \frac{1}{3}z_2 + \frac{2}{3}z_3 \end{cases}$$

$12z_1^2 + 3z_2^2 + 3z_3^2 - 12 = 0,$ ellipsoïde.

g) geen middelpunt

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \underline{y}; \quad \underline{y} = \underline{z} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\sqrt{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{16}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$2z_1^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, z_3 = 0,$ parabolische cylinder.

h) M (0,0,0)

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}z_1\sqrt{3} - \frac{1}{2}z_2\sqrt{2} + \frac{1}{6}z_3\sqrt{6} \\ x_2 = \frac{1}{3}z_1\sqrt{3} \qquad\qquad - \frac{1}{3}z_3\sqrt{6} \\ x_3 = \frac{1}{3}z_1\sqrt{3} + \frac{1}{2}z_2\sqrt{2} + \frac{1}{6}z_3\sqrt{6} \end{cases}$$

$7z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0,$ imaginaire kegel.

114. i) M $\lambda(1,-1,-1)$, rechte van middelpunten.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} z_1 \sqrt{3} + \frac{1}{3} z_3 \sqrt{6} \\ x_2 = -\frac{1}{3} z_1 \sqrt{3} + \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} + \frac{1}{6} z_3 \sqrt{6} \\ x_3 = -\frac{1}{3} z_1 \sqrt{3} - \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} + \frac{1}{6} z_3 \sqrt{6} \end{cases}$$

$-z_2^2 + 3z_3^2 = 0$, snijdend vlakkenpaar.

j) M $(0,0,0)$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{6} z_1 \sqrt{6} + \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} - \frac{1}{3} z_3 \sqrt{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} z_1 \sqrt{6} + \frac{1}{3} z_3 \sqrt{3} \\ x_3 = \frac{1}{6} z_1 \sqrt{6} - \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} - \frac{1}{3} z_3 \sqrt{3} \end{cases}$$

$6z_1^2 - 1 = 0$, evenwijdig vlakkenpaar.

k) M $(0,0,0)$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} z_1 \sqrt{3} + \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} - \frac{1}{6} z_3 \sqrt{6} \\ x_2 = \frac{1}{3} z_1 \sqrt{3} + \frac{1}{3} z_3 \sqrt{6} \\ x_3 = \frac{1}{3} z_1 \sqrt{3} - \frac{1}{2} z_2 \sqrt{2} - \frac{1}{6} z_3 \sqrt{6} \end{cases}$$

$z_1^2 - \frac{1}{2} z_2^2 - \frac{1}{2} z_3^2 = 0$, kegel.

Vraagstukken bij het college wiskunde IV

HOOFDSTUK IV : FUNKTIES VAN MEER VERANDERLIJKEN

1. Door de betrekkingen $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x + y \end{cases}$ is een vectorfunktie van R_2 in R_2 gedefinieerd.
Bewijs dat het beeld van elke vector $\underline{x} = (x,y)$ binnen of op de parabool met vergelijking $v^2 = 2u$ ligt. Wat is het beeld van het halfvlak $x \geqslant y$?

2. Bewijs dat de in vraagstuk 1 gegeven vectorfunktie overal differentieerbaar is (aanwijzing: in een willekeurig punt $\underline{a} = (a,b)$ is $\underline{f}(\underline{a}+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{a})$ te splitsen in $A(\underline{h})$ d.i. het eerste graadsdeel in de variabele $\underline{h} = (h,k)$, en de rest $|\underline{h}|\underline{e}(\underline{h})$). Bepaal de functionaalmatrix in een willekeurig punt (x,y).

3. Een vectorfunktie van R_2 in R_3 is gegeven door de betrekkingen:
$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \\ w = x^2 \end{cases}$$
Bewijs dat het xy-vlak wordt afgebeeld op het oppervlak met vergelijking
$$(u + v)^2 = 4w.$$

4. Bewijs dat de vectorfunktie van vraagstuk 3 overal differentieerbaar is.

5. Gegeven: vectorfunkties $\underline{y} = \underline{y}(\underline{x})$ en $\underline{v} = \underline{v}(\underline{u})$ resp. van R_2 in R_3 en van R_3 in R_2 :
$$\begin{cases} y_1 = x_1 x_2 \\ y_2 = 2x_1 \\ y_3 = -x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = u_1 - u_2 \\ v_2 = u_2 u_3 \end{cases}$$
Bewijs dat deze funkties differentieerbaar zijn. Bepaal de samengestelde funkties $\underline{y}(\underline{v}(\underline{u}))$ en $\underline{v}(\underline{y}(\underline{x}))$.
Bereken de funktionaalmatrices van de samengestelde funkties.

6. Zijn de volgende funkties continu in $\underline{x} = \underline{0}$?

a) $$\begin{cases} f(\underline{x}) = f(x,y) = \dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2} & \underline{x} \neq \underline{0}. \\ f(\underline{0}) = 2 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} f(\underline{x}) = e^{-\dfrac{|x-y|}{x^2 - 2xy + y^2}} & x \neq y \\ f(x,x) = x^3 \end{cases}$$

7. Bereken de funktionaalmatrices van de volgende vectorfunkties in de gegeven punten:

a) $f(x,y) = 3x^2y - xy^3 + 2$; $P = (1,2)$

b) $f(x,y,z) = x^2yz + 3xz^2$; $P = (1,2,-1)$

c) $$\begin{cases} f_1(\underline{x}) = x^2 + y - z \\ f_2(\underline{x}) = xyz^2 \\ f_3(\underline{x}) = 2xy - y^2z \end{cases}$$; $P = (1,1,1)$

d) $$\begin{cases} f_1(x,y,z) = xyz^2 - 4y^2 \\ f_2(x,y,z) = 3xy^2 - y^2z \end{cases}$$; $P = (1,-2,3)$

e) $$\begin{cases} f_1(\underline{x}) = x + 6y \\ f_2(\underline{x}) = 3xy \\ f_3(\underline{x}) = x^2 - 3y^2 \end{cases}$$; $P = (1,1)$

8. De funktie $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$ is gegeven door de betrekkingen:

$$\begin{cases} y_1 = x_1x_2x_3 \\ y_2 = x_1x_2 - x_1x_2x_3 \\ y_3 = x_2 - x_1x_2 \end{cases}$$

Bereken: $\dfrac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$.

9. Gegeven:
$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{x_1}{\sqrt{1 - r^2}} \\ u_2 = \dfrac{x_2}{\sqrt{1 - r^2}} \\ u_3 = \dfrac{x_3}{\sqrt{1 - r^2}} \\ r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 . \end{cases}$$

Bewijs: $\dfrac{\partial(u_1,u_2,u_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)} = (1-r^2)^{-\frac{5}{2}}$.

10. Een kromme in R_3 is gegeven door de parametervoorstelling:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 - 2t \\ z = t^3 + 2t^2. \end{cases}$$

Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn in het met $t = 1$ corresponderende punt van de kromme.

11. Een kromme in R_3 is gegeven door de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 - y^2 + 4z^2 = 16. \end{cases}$$

Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn in het punt (2,2,2).

12. Bereken de afgeleiden van de volgende funkties in het punt P en in de richting $\underline{v}$:

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy$; $P = (1,0)$; $\underline{v} = (1,-1)$.

b) $f(x,y,z) = xy^2 + yz$; $P = (1,1,2)$; $\underline{v} = (2,-1,2)$.

Verklaar het antwoord van b) meetkundig.

13. Gegeven: $\underline{x} = (x_1,x_2,x_3)$; $r = |\underline{x}|$.

Bewijs: $\nabla r^n = nr^{n-2}\underline{x}$.

14. Gegeven:

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{voor } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

a) Bewijs dat $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ overal bestaan.

b) Heeft $f(x,y)$, behalve $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, nog andere richtingsafgeleiden in (0,0) ?

c) Is $f(x,y)$ continu in (0,0) ?

15. Gegeven: $\underline{x} = (x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)\ );$
$\underline{y} = (y_1(t),\ y_2(t),\ y_3(t)\ ).$

Bewijs: a) $\dfrac{d(\underline{x},\underline{y})}{dt} = \left(\underline{x},\ \dfrac{d\underline{y}}{dt}\right) + \left(\dfrac{d\underline{x}}{dt},\ \underline{y}\right).$

b) $\dfrac{d(\underline{x} \times \underline{y})}{dt} = \underline{x} \times \dfrac{d\underline{y}}{dt} + \dfrac{d\underline{x}}{dt} \times \underline{y}\ .$

16. Gegeven is de kromme met parametervoorstelling:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \cdot t^4 \\ y = \frac{1}{3}\ t^3 \\ z = t \end{cases}$$

Bereken de punten waarin de raaklijn evenwijdig is met het vlak
$x + 3y - 4z = 0.$

17. Bewijs dat alle raaklijnen aan de kromme

$$\begin{cases} x = \sin\ t + \cos\ t \\ y = \sin\ t - \cos\ t \\ z = a\ e^{-t} \qquad\qquad (a \neq 0) \end{cases}$$

het xy-vlak op de cirkel $x^2 + y^2 = 4$ snijden.

18. Controleer de stelling van het gemiddelde voor de volgende funkties en de aangegeven punten

a) $f(\underline{x}) = e^{x+4y}$; $\underline{a} = (1,2)$; $\underline{b} = (2,5)$;

b) $f(\underline{x}) = x + y^3$; $\underline{a} = (2,1)$; $\underline{b} = (1,2)$.

19. Ontwikkel de volgende funkties in een Taylorreeks in de gegeven punten

a) $f(x,y) = y\ e^{x-y}$; $\underline{a} = (0,0)$.

b) $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 - 3x$; $\underline{a} = (2,3)$.

c) $f(x,y) = \sinh(\cos x + \sin y)$; $\underline{a} = (0,0)$.

20. De vectorfunktie van R_2 in R_2 gegeven door

$$\begin{cases} u = x \cos y \\ v = x \sin y \end{cases}$$

heeft in de omgeving van elk punt $\underline{x}_o = (x_o, y_o)$, met $x_o \neq 0$, een inverse. Geef expliciete uitdrukkingen voor deze vectorfunktie als nog gegeven is: $\pi/2 < y_o < 3\pi/2$. Controleer de betrekkingen tussen de funktionaalmatrices van beide funkties.

21. Onderzoek van de volgende vectorfunkties of ze locaal een inverse hebben.

a) $$\begin{cases} u = x^2 + 2xy + y^2; \\ v = 2x + 2y \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} u = x^2; \\ v = y/x. \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} y_1 = \log x_1 + e^{x_2}; \\ y_2 = x_1^2 + x_2. \end{cases} \qquad (x_1 > 0)$$

22. Gegeven is de vectorfunktie

$$\begin{cases} u = f(x) \\ v = -y + xf(x). \end{cases}$$

Hierin is $f(x)$ differentieerbaar en de afgeleide is nog continu. Bewijs dat de inverse funktie bestaat in de omgeving van elk punt (x,y) waar $f'(x) \neq 0$ is, en dat deze de volgende gedaante heeft:

$$\begin{cases} x = g(u) \\ y = -v + ug(u). \end{cases}$$

23. Gegeven:

$$\begin{cases} u = \log x; \\ v = x + y + z; \\ w = \log (x^2 + y^2). \end{cases}$$

Bewijs dat in de omgeving van het punt $\underline{x} = (1,1,r)$ x, y en z kunnen worden beschouwd als funkties van u, v en w. (r willekeurig). Bereken de funktionaalmatrix van $\underline{x} = \underline{f}(\underline{u})$ in het met $(1,1,r)$ corresponderende punt $\underline{u} = (u,v,w)$.

$$x = \psi_1(u, v, y, z)$$

$$t = \psi_2(u, v, y, z)$$

$$u = f_1(\psi_1(u,v,y,z), \psi_2(u,v,y,z), y, z)$$

$$v = f_2(\psi_1(u,v,y,z), \psi_2(u,v,y,z), y, z)$$

24. Gegeven:
$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 + z^2 + t; \\ v = xy + yz + xt^2. \end{cases}$$

Bewijs dat in een omgeving van het punt $(x,y,z,t) = (0,0,0,1)$ x en t als funkties van u, v, y en z kunnen worden opgevat. Bepaal de funktionaalmatrix van deze laatste vectorfunktie in het met $(x,y,z,t) = (0,0,0,1)$ corresponderende punt. Kan men hetzelfde doen voor x en y, x en z enz. ?

25. Onderzoek als in vraagstuk 24 het stelsel:
$$\begin{cases} u = \sinh xyz + \sin t \\ v = \cosh xyt + \cos z \end{cases}$$

in de omgeving van het punt
$$(x,y,z,t) = (0,0,\tfrac{\pi}{2},0).$$

26. Kan de kromme in R_2 met vergelijking $x^2 + y + \sin(xy) = 0$ worden beschreven met een vergelijking $y = f(x)$ in een omgeving van het punt $(0,0)$? Kan de kromme worden beschreven met een vergelijking van de vorm $x = g(y)$?

27. Gegeven: het oppervlak met vergelijking:
$$xy - z \log y + e^{xz} = 1.$$

Kan dit oppervlak in een omgeving van het punt $(0,1,1)$ worden voorgesteld door $z = f(x,y)$, door $y = g(x,z)$?

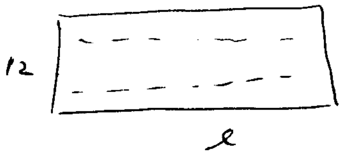
28. Het punt $(1,-1,2)$ ligt op de oppervlakken
$$x^2(y^2 + z^2) = 5 \quad \text{en} \quad (x - z)^2 + y^2 = 2.$$

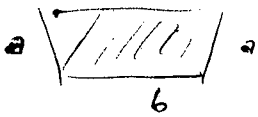
Bewijs dat in een omgeving van dit punt de doorsnijdingskromme kan worden beschreven door twee vergelijkingen:
$$y = f(x) \qquad \text{en} \qquad z = g(x).$$

29. Behandel dezelfde vraag als in vraagstuk 28 voor de oppervlakken
$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{en} \quad 2x^2 + y^2 - 8z^2 = 8$$

en het punt $(2,0,0)$.

VB) Stuk plaatijzer   goot met maximale inhoud





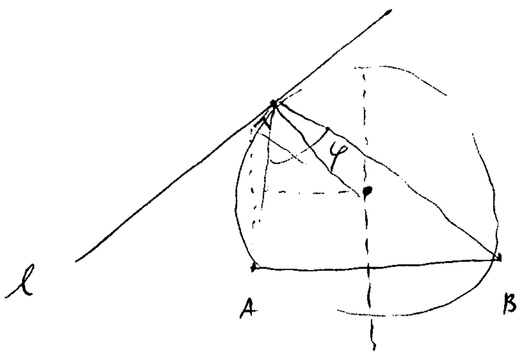
$2a + b = 12$ opp gelijkb. trap. maximaal.

VB) n punten $P_i(x_i\ y_i\ z_i)$

$Q(x, y, z)$

$f(x,y,z) = \sum_i (\text{afstand } P_i Q)^2$ minimaal.

VB) <u>Uit de meetkunde</u>



driehoek met AB als basis, top op l en maximale tophoek.

φ max

30. Bepaal de singuliere en reguliere punten van de volgende funkties:

a) $\begin{cases} u = \sin x + \cos x; \\ v = \sin x - \cos x; \\ w = e^{-x}. \end{cases}$ $(R_1 \text{ in } R_3)$

b) $u = y\, e^{x-y}.$ $(R_2 \text{ in } R_1)$

c) $\begin{cases} u = x^2 + 2xy + y^2; \\ v = x + y \end{cases}$ $(R_2 \text{ in } R_2)$

d) $\begin{cases} u = x^3 y; \\ v = 3x + y^3. \end{cases}$ $(R_2 \text{ in } R_2)$

e) $\begin{cases} u = (x + y)^3; \\ v = (y + z)^2; \\ w = (x + z)^2. \end{cases}$ $(R_3 \text{ in } R_3)$

31. Onderzoek of de volgende stelsels funkties afhankelijk zijn:

a) $\begin{cases} u = \dfrac{x + y}{x} \\ v = \dfrac{x + y}{y}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u = x + y \\ v = x^2 + y^2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u = \dfrac{1 - xy}{x + y} \\ v = \dfrac{(x + y)^2}{(1 + x^2)(1 + y^2)}. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u = x + y - z \\ v = x(x - 2y + 2z) \\ w = 2x - y + z. \end{cases}$

e) $\begin{cases} u = x - y \\ v = xy \\ w = xe^y. \end{cases}$

32. Bereken de extrema van de volgende funkties:

a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3ax - 3by.$

b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{a^3}{y}$ voor $x > 0,\ y > 0.$

c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy.$

d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ voor $0 \leqslant x \leqslant a;\ 0 \leqslant y \leqslant a,\ a > 3.$

e) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(ax^2 + by^2);\quad a > 0,\quad b > 0.$

f) $f(x,y) = \cos x \cos 2 + \sin x \sin 2 \cos(y - 3).$

g) $f(x,y) = -x - y$ voor $0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$

h) $f(x,y) = 2x^4 - 3x^2 y + y^2.$

i) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2x$ voor $x^2 + y^2 \leqslant 1.$

j) $f(x,y) = 5(x^4 + y^4) - 4x^5.$

k) $f(x,y) = (y^2 + x^4)^2(9 - 8x).$

33. Bereken de extrema van de volgende funkties met de gegeven bijvoorwaarden:

a) $f(x,y) = x + y; \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}. \quad (a > 0).$

b) $f(x_1,x_2) = x_1^m + x_2^m; \quad x_1 + x_2 = 2a; \quad x_1 > 0; \; x_2 > 0; \; m > 1.$

c) $f(x,y) = xy; \quad x^2 + y^2 = 1.$

d) $f(x,y,z) = xyz; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3.$

e) $f(x,y,z) = x^2y^3z^4; \quad 2x + 3y + 4z = 9.$

f) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3; \; x + y + z = 0.$

g) $f(x,y,z) = \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}; \quad x + y + z = \pi; \; x \geqslant 0, \; y \geqslant 0, \; z \geqslant 0.$

h) $f(x,y,z) = xy + yz; \quad x^2 + y^2 = 2; \; yz = 2.$

i) $f(x,y) = x^3y + xy^3 - 2xy - x^2 - y^2 + 2; \quad x^2 + y^2 = 1.$

35. Gegeven: de ellips $x^2 + 4y^2 = 4$ en de rechte $x + y - 4 = 0$.
Bereken de grootste en de kleinste afstand van een punt van de ellips tot de rechte.

38. Gegeven: de paraboloïde $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ $(a > 0, \; b > 0)$ en de cilinder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Bereken de oppervlakte van het deel van de paraboloïde, dat binnen de cilinder ligt.

39. Bereken $\iint (x^4 - y^4)\,dx\,dy$ over het in het eerste kwadrant gelegen gebied, ingesloten door de krommen: $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 16$.

40. Bereken $\iint_G xy\,dxdy$ als G het parallelogram is begrensd door

$$y = \tfrac{1}{2}x,\ y = \tfrac{1}{2}x + 2,\ y = 3x,\ y = 3x - 4.$$

41. Bereken de oppervlakte van het deel van het platte vlak gegeven door de betrekkingen:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 \leqslant \frac{x}{a} - \frac{y}{b};\quad y \geqslant 0;\quad (a > 0,\ b > 0).$$

Aanwijzing: substitueer: $x = ar\cos^2\varphi$; $y = br\sin^2\varphi$.

42. Bereken $\iint_G dxdy$ als G het gebied is begrensd door de krommen:

a) $xy = 1$; $xy = 4$; $x = y$; $x = 2y$; $(x > 0,\ y > 0)$.

b) $xy = 1$; $xy = 2$; $y^2 = x$; $y^2 = 2x$.

c) $y^2 = 1 - 2x$; $y^2 = 4 - 4x$; $y^2 = 1 + 2x$; $y^2 = 9 + 6x$; $(y > 0)$.

HOOFDSTUK V. VECTORANALYSE

43. Een oppervlak is bepaald door

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos u + v \sin u \\ y = \sin u - v \cos u \\ z = v + 1 \end{array}\right\} \qquad 0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2} \quad ; \quad 0 \leqslant v \leqslant 1.$$

Bereken de oppervlakte.

44. Bereken het zwaartepunt van de homogene kardioïde $r = 1 + \cos\varphi$ en van de kromme

$$\left\{\begin{array}{l} x = e^{-t} \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \\ z = e^{-t} \end{array}\right. \qquad 0 \leqslant t < \infty$$

45. Bereken het traagheidsmoment van de schroeflijn

$$\left\{\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{array}\right. \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

t.o.v. de z-as, als de massadichtheid x^2y^2z is.

46. Gegeven is de kromme :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \cosh t \cos t \\ y = \cosh t \sin t \\ z = t \end{array}\right.$$

Bereken de lengte van de kromme tussen de punten corresponderend met $t = 0$ en $t = 1$.

47. Gegeven is de kromme :

$$\left\{\begin{array}{l} y = \arcsin x \\ z = \frac{1}{4} \log \frac{1 + x}{1 - x} \end{array}\right. .$$

Bereken de booglengte $s(x)$ met $\underline{O}$ als beginpunt.
Bepaal de raakvector aan de kromme in $\underline{O}$.

48. Een oppervlak is gegeven door

$$\begin{cases} x = (2 - \cos v)\cos u \\ y = (2 - \cos v)\sin u \\ z = \sin v \end{cases} \qquad \begin{matrix} -\pi \leqslant u \leqslant \pi \\ -\pi \leqslant v \leqslant \pi \end{matrix}$$

Bereken de oppervlakte.

49. Als 48, met :

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi. \end{matrix}$$

Wat stelt dit oppervlak meetkundig voor ?

50. Gegeven :

kromme C : $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 2t^3 \end{cases} \qquad -\infty < t < \infty$

oppervlak V : $z = x^2 + 3y^2 - 2xy$.

Gevraagd : de hoek tussen C en de normaal op V in de snijpunten van C en V.

51. Bewijs :

$$\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| = \sqrt{EG - F^2} \quad , \text{ met}$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 .$$

52. Verifieer de formule van Stokes in de volgende gevallen:

a) S: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.
$\underline{a} = \underline{r} \times \underline{e}_3$; $\underline{r} = (x,y,z)$; $\underline{e}_3 = (0,0,1)$.

b) S: driehoek met hoekpunten (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).
$\underline{a} = (x,y,z)$.

c) S: deel van cilinder $x^2 + y^2 = 1$, waarvoor geldt
$z^2 \leqslant 2y$, $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.
$\underline{a} = (x + y + z)\underline{r}$ met $\underline{r} = (x,y,z)$.

d) S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $z \geqslant 0$.
$\underline{a} = (x,x,x)$.

53. Verifieer de formule van Gauss in de volgende gevallen:

a) G: kubus: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.
$\underline{a} = (x^2, y^2z, yz)$.

b) G: deel van de ruimte binnen de torus, die ontstaat als de cirkel $(x - 2)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ om de z-as wentelt.
$\underline{a} = (-xy, x^2, 0)$.

c) G: $x^2 + y^2 < (1 - z)^2$, $x > 0$, $y > 0$, $0 < z < 1$.
$\underline{a} = (x^2 + y^2)\underline{c}$ ($\underline{c}$ is een constante vector).

d) G: $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.
$\underline{a} = (x,y,z)$.

54. $\varphi(\underline{x})$ en $\phi(\underline{x})$ zijn scalaire funkties in R_3.
K is een gesloten ruimtekromme.

Bewijs: $$\int_K (\varphi \operatorname{grad} \phi, \underline{t})\,ds = -\int_K (\phi \operatorname{grad} \varphi, \underline{t})\,ds.$$

55. $\underline{r} = (x,y,z)$; G is een gebied in R_3, S het randoppervlak van G.

Bewijs: $$\int_S (\underline{r},\underline{r})(\underline{r},\underline{n})\,d\sigma = 5\int_G (\underline{r},\underline{r})\,d\tau.$$

56. G en S als in 55.
Bewijs:

1) $\int_G (\underline{a}, \text{rot } \underline{b})\, d\tau = \int_G (\underline{b}, \text{rot } \underline{a})\, d\tau - \int_S (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{n})\, d\sigma$.

2) $\int_G \varphi \text{ div } \underline{a}\, d\tau = \int_S (\varphi \underline{a}, \underline{n})\, d\sigma$, als nog gegeven is dat $\underline{a}$ in ieder punt raakt aan het door dat punt gaande niveauvlak van $\varphi(\underline{x})$.

57. Bewijs dat voor een gesloten oppervlak S en twee scalaire velden φ en ψ:

$$\int_S (\text{grad } \varphi \times \text{grad } \psi, \underline{n})\, d\sigma = 0.$$

58. $\underline{r} = (x,y,z)$; $r = |\underline{r}|$.

a) Bewijs: rot $r^\alpha \underline{r} = \underline{0}$.

b) Bereken α als gegeven is div $r^\alpha \underline{r} \equiv 0$.

59. Gegeven een vectorveld $\underline{a}$ met div $\underline{a} = 0$; rot $\underline{a} = \underline{0}$; $\underline{r} = (x,y,z)$.
Bewijs: div grad $(\underline{r},\underline{a}) = 0$.

60. Gegeven het scalaire veld:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}} .$$

S is het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 9/4$.

Bereken $\int_S (\text{grad } \varphi, \underline{n})\, d\sigma$.

61. Gegeven: een gesloten oppervlak S; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Bereken: $\int_S (\nabla r^2, \underline{n})\, d\sigma$.

62. Als $\underline{a} = \varphi \underline{v}$, bewijs dan:

$(\underline{v}, \text{rot } \underline{a}) = (\underline{a}, \text{rot } \underline{v})$.

63. Gegeven: $\Delta\varphi = \Delta\phi$ in R_3.
G is een gebied met randoppervlak S.
$\varphi = \phi$ op S.
Bewijs: $\varphi = \phi$ in G.

64. Gegeven: $\underline{a} = (x,y,z)$;
K is een willekeurige kromme van (1,1,1) naar (1,3,3).

Bereken: $\displaystyle\int_K (\underline{a},\underline{t})\,ds$.

65. Geef het vectorveld: $\underline{a} = (z,-2x,y)$ in cilindercoördinaten.

66. Gegeven de coördinatentransformatie

$$\left.\begin{aligned} x &= uv\cos\varphi \\ y &= uv\sin\varphi \\ z &= \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{aligned}\right\} \quad u > 0,\ v > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi .$$

Bewijs dat de coördinaten u, v en φ rechts orthogonaal zijn en schrijf grad α, rot $\underline{a}$, div $\underline{a}$ en $\Delta\alpha$ in deze coördinaten.

67. Als 66 voor de coördinaten (ξ,η,φ) gedefinieerd door

$$\left.\begin{aligned} x &= \sinh\xi\sin\eta\cos\varphi \\ y &= \sinh\xi\sin\eta\sin\varphi \\ z &= \cosh\xi\cos\eta \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\xi \geqslant 0,\ 0 \leqslant \eta \leqslant \pi \\ &0 \leqslant \varphi < 2\pi . \end{aligned}$$

68. Gegeven: $\underline{x} = (x(t),\ y(t),\ z(t))$.
Druk $\dfrac{d\underline{x}}{dt}$ en $\dfrac{d^2\underline{x}}{dt^2}$ uit in cilindercoördinaten (r,φ,z).

69. Bewijs dat voor elk vectorveld $\underline{a}$ en elk scalarveld φ geldt:

$$\text{div rot } \underline{a} = 0 \quad \text{en} \quad \text{rot grad } \varphi = \underline{0}.$$

70. Gegeven de coördinatentransformatie:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ y &= uv \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad -\infty < u < \infty;\ v \geqslant 0;\ -\infty < z < \infty.$$

Schrijf de vergelijking $\Delta\alpha + \{3 - \varphi(x,y,z)\}\alpha = 0$ in de coördinaten (u,v,z).

71. Gegeven: 1) $\underline{a} = (x + 2y + \alpha z, \beta x - 3y - z, 4x + \gamma y + 2z)$.
2) $\underline{a}$ is rotatievrij.

Bereken: 1) α, β en γ.
2) De potentiaal van $\underline{a}$, die nul is voor $\underline{x} = \underline{0}$.

72. Bepaal $\varphi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \varphi(r)$ zo, dat $\nabla\varphi = (\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3})$ en $\varphi(1) = 0$

73. Gegeven: $\underline{a} = (3y^4z^2, 4x^3z^2, -3x^2y^2)$.
Bereken een vectorpotentiaal $\underline{b}$ van $\underline{a}$, waarvoor $\underline{b}(\underline{0}) = \underline{0}$.

74. Bestaat er een veld $\underline{a}$ zodanig dat

a) rot $\underline{a} = (x,y,z)$?

b) rot $\underline{a} = (2,1,3)$?

HOOFDSTUK VI: STATISTIEK

75. Toon aan, dat bij spelen met 5 dobbelstenen de kans op één of géén 6 even groot is en dat de kans op 2 of meer zessen < 20% is.

76. Uit een vaas met 12 rode, 12 witte en 12 blauwe ballen wordt blindelings een greep gedaan van 3. Wat is de kans op rood, wit en blauw?

77. Maak een histogram van de relatieve frequenties (= kansen) van de uitkomsten

1, 2, 3, 4, 5, 6 bij werpen met 1 dobbelsteen.
2, 3, ..., 12 bij werpen met 2 dobbelstenen.
3, 4, ..., 18 bij werpen met 3 dobbelstenen.

78. Is het statistisch te verdedigen wanneer iemand 40 tegen 1 wedt, dat 1000 maal werpen van een zuivere munt meer van 400 maal kruis oplevert?

79. Voor twee van toeval afhankelijke gebeurtenissen V en W geldt $P(V|W) = 1$ en $P(W|V) \neq 1$. Welke der betrekkingen 1) $V \cup W = V$, 2) $V \cup W = W$, 3) $V \cap W = V$, 4) $V \cap W = W$ is geldig ?

80. Bij het werpen met een dobbelsteen onderscheiden we drieërlei type worp dat zich telkens al of niet realiseert.

A_1 :	oneven	(1,3,5)	$P(A_1) = \frac{1}{2}$
A_2 :	priem	(2,3,5)	$P(A_2) = \frac{1}{2}$
A_3 :	drietallig	(3,6)	$P(A_3) = \frac{1}{3}$

Toon aan: 1) A_1 en A_2 zijn afhankelijk.
2) A_1 en A_3 zijn onafhankelijk.
3) A_2 en A_3 zijn onafhankelijk.

Ga na of $P(A_1) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_3)$ en $P(A_1 \cup A_3)$ gelijk zijn of niet.

81. Laat P_i, P_{ij} $(i \neq j = 1,2,3)$ resp. P_{123} voorstellen de kans op gebeurtenis A_i, A_i èn A_j resp. A_1 èn A_2 èn A_3. Druk in deze P's uit:

1) de kans op tenminste één van A_1 en A_2;
2) de kans op tenminste één van A_1,A_2 en A_3. (Teken de kansen als gebieden - bijv. cirkels - die stukken gemeen hebben).

82. Welke gebeurtenis heeft de kans (vgl. opg. 81)

$$P_1 + P_2 + P_3 - 2(P_{12} + P_{13} + P_{23}) + 3\,P_{123}?$$

(Teken weer de kansen als gebieden). Controleer het antwoord met de gebeurtenissen A_1, A_2 en A_3 van opg. 80.

83. Laat de gebeurtenissen A_1, A_2 en A_3 van opg. 81. onafhankelijk zijn. Geef uitdrukkingen voor:
1) de kans op noch A_1 noch A_2;
2) de kans op noch A_1 noch A_2 noch A_3.
Verifieer dat deze uitdrukkingen met de overeenkomstige van opg. 81. complementair (= samen 1) zijn.
Opmerking: Het is niet noodzakelijk, dat er minstens één gebeurtenis plaatsvindt.

84. Bepaal gemiddelde en spreiding van de verdeling

met frequentiefunktie $e^{-\xi}$, $0 \leqslant \xi < \infty$

idem met $f(\xi) = \frac{1}{2}e^{-|\xi|}$, $-\infty < \xi < \infty$

85. Bepaal de marginale frequentiefunkties bij

1) $f(\xi,\eta) = \pi^{-1} e^{-\xi^2-\eta^2}$, $-\infty < \xi , \eta < \infty$

2) $f(\xi,\eta) = \pi^{-1}$, $\xi^2 + \eta^2 \leqslant 1.$

Wat valt bij 1) en 2) over de afhankelijkheid der stochastische variabelen x en y te zeggen ?

86. Als x over (0,1) gelijk verdeeld is, d.w.z. als $f(\xi) = 1,\ 0 \leqslant \xi \leqslant 1$, wat is dan de frequentiefunktie $f(\eta)$ van $y = \sqrt{x}$? (Bepaal eerst de kans $F(\eta)$ dat $y \leqslant \eta$ is).

87. Toon door berekening aan dat de spreiding van het worpgemiddelde bij 2 (3) dobbelstenen gelijk is aan $\sigma/\sqrt{2}$ $(\sigma/\sqrt{3})$ als σ = de spreiding van de worpen met één dobbelsteen. (zie opg. 77).

88. Gegeven 10 waarnemingen van dezelfde grootheid:
110,5 ; 110,1 ; 111,0 ; 109,2 ; 110,1 ; 110,3 ; 109,7 ; 110,1 ; 109,5 ; 110,5. Gemiddelde 110,1.
Overeenkomstige reeksen van 10 zouden andere gemiddelden geven. Welke zuivere schatting van de **variantie** dezer onbekende gemiddelden geeft de gegeven waarnemingsreeks ?

89. Een keuringsdienst neemt een steekproef van 300 flessen melk en bevindt dat 80% aan alle eisen voldoet. Bepaal de betrouwbaarheidsgrenzen voor het overeenkomstige percentage van de populatie en wel bij betrouwbaarheidsdrempel 0,05.

90. Bepaal uit de gegevens van opgave 88 de betrouwbaarheidsgrenzen voor de gemeten grootheid bij betrouwbaarheidsdrempel 0.05 (bij 9 vrijheidsgraden geeft de tabel van "Student" een waarde 2,3).

91. Er worden titraties in duplo uitgevoerd bij 10 monsters. Uitkomsten
1) 76,3 ; 77,2 ; 73,7 ; 75,8 ; 77,4 ; 74,8 ; 78,2 ; 73,8 ; 75,7 ; 76,1.
2) 77,0 ; 77,1 ; 74,9 ; 75,2 ; 77,7 ; 75,3 ; 78,5 ; 74,1 ; 75,4 ; 76,8.
De waarnemingen 2) die <u>na</u> 1) zijn genomen, lijken door een systematische invloed verhoogd. De verschillen geven betrouwbaarheidsgrenzen (drempel 0,05) voor het werkelijke verschil. Ga na of het verschil 0 nog binnen deze grenzen ligt. Welke conclusie valt te trekken ? (bij 9 vrijheidsgraden geeft de tabel van "Student" een waarde 2,3)

92. Laat x en y verdeeld zijn volgens de frequentiefunktie $f(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}$,
$\xi^2 + \frac{\eta^2}{4} \leqslant 1.$

Bepaal de correlatiecoëfficiënt ρ .
Zijn x en y onafhankelijk ? (vgl. opg. 85).

93. De frequentiefunctie van x en y is bepaald door

$f(\xi,\eta) = \frac{1}{2}$ als $|\xi| < 1$, $|\eta - \frac{1}{2}\xi| < \frac{1}{2}$; buiten dit gebied is $f(\xi,\eta) = 0$.

Bepaal μ_1, μ_2, σ_1, σ_2 en ρ.

94. Bepaal bij de twee tientallen gegevens (x_i en y_i, $i = 1,2,\ldots,10$) van vraagstuk 91 de steekproefschatting r voor de correlatiecoëfficiënt ρ van x en y.

Antwoorden behorende bij de vraagstukken bij het college wiskunde IV

1. $v^2 \leqslant 2u$

2. $A(\underline{h}) = \begin{pmatrix} 2ah + 2bk \\ h + k \end{pmatrix}$, $|\underline{h}|\underline{e}(\underline{h}) = |\underline{h}|\begin{pmatrix} |\underline{h}| \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} u_2u_3 & u_1u_3-2u_2u_3 & u_1u_2-u_2^2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -u_3 & -u_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_2-2 & x_1 \\ -2x_2 & -2x_1 \end{pmatrix}$

6. a) neen; b) ja.

7. a) (4,-9)
b) (-1,-1,-4)
c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -18 & 25 & -12 \\ 12 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

8. $x_1x_2^2$.

10. $\underline{x} = (2,-1,3) + \lambda(2,0,7)$.

11. $\underline{x} = (2,2,2) + \lambda(-5,3,2)$.

12. a) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; b) 0.

14. b) neen; c) neen.

16. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1)$ en $(4, -\frac{8}{3}, -2)$

19. a) $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} x^{n-j} y^{j+1}$;

b) $54 + 69(x-2) + 32(y-3) + 27(x-2)^2 + 36(x-2)(y-3) +$
$+ 4(y-3)^2 + 3(x-2)^3 + 12(x-2)^2(y-3) + 4(x-2)(y-3)^2 +$
$+ (x-2)^3(y-3) + (x-2)^2(y-3)^2$.

c) $\sinh 1 + y\cosh 1 - \frac{1}{2}x^2\cosh 1 + \frac{1}{2}y^2\sinh 1 + \ldots$

20. $x_0 > 0$: $\begin{cases} x = \sqrt{u^2 + v^2} \\ y = \arctan \frac{v}{u} + \pi \end{cases}$

$x_0 < 0$: $\begin{cases} x = - \sqrt{u^2 + v^2} \\ y = \arctan \frac{v}{u} + \pi . \end{cases}$

21. a) Nergens een inverse;
b) inverse funktie bestaat in de omgeving van elk punt (x,y) met $x \neq 0$;
c) inverse bestaat overal, behalve in de omgeving van punten op de kromme: $x_2 + 2 \log x_1 + \log 2 = 0$.

23. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

24. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ neen.

25. Alleen z en t kunnen worden "opgelost" als funkties van u, v, x en y. De funktionaalmatrix van deze vectorfunktie in het met $(x,y,z,t) = (0,0,\frac{\pi}{2},0)$ corresponderende punt is
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

26. ja; neen.

27. neen; ja.

29. Er bestaat geen voorstelling als in 28. (Teken de oppervlakken!).

30. a) Alle punten in R_1 zijn regulier van de rang 1;
b) alle punten in R_2 zijn regulier van de rang 1;
c) overal regulier; rang 1;
d) de punten op de y-as en op de kromme $x = 3y^3$ zijn singulier; alle andere punten zijn regulier van de rang 2;
e) singulier zijn de punten in de vlakken:

$$x + y = 0; \; x + z = 0; \; y + z = 0.$$

31. a) afhankelijk: $uv = u + v$.
b) onafhankelijk.
c) afhankelijk: $v = \dfrac{1}{1 + u^2}$.
d) afhankelijk: $3v = w^2 - u^2$.
e) afhankelijk: $x + y > 0$: $w = \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2 + 4v})\, e^{\frac{1}{2}(\sqrt{u^2 + 4v} - u)}$
$x + y < 0$: $w = \frac{1}{2}(u - \sqrt{u^2 + 4v})\, e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{u^2 + 4v} + u)}$
(van afhankelijkheid kan alleen sprake zijn in een gebied; op de lijn $x + y = 0$ is dus geen afhankelijkheid)

32. a) min. $-3(a^2 + b^2 - ab)$ voor $x = 2a - b$; $y = 2b - a$,
b) $a \leqslant 0$: geen extrema.
$a > 0$: min. $3^{4/3} a^2$ voor $x = y = 3^{-1/3} a$.
c) $a < 0$: max. $-a^3$ voor $x = y = a$.
$a = 0$: geen extrema.
$a > 0$: min. $-a^3$ voor $x = y = a$.
d) min. 0 voor $x = y = 3$.
globaal max. $a^3 + 27$ in de punten $(a,0)$ en $(0,a)$, rel.max. $2a^3 - 9a^2 + 27$ in het punt (a,a) als $a < 9$.
globaal max. $2a^3 - 9a^2 + 27$ in het punt $(a,0)$, rel.max. $a^3 + 27$ in de punten $(a,0)$ en $(0,a)$ als $a > 9$.
globaal max. 756 in de punten $(a,0)$, $(0,a)$ en (a,a) als $a = 9$.

e) min. 0 bij $x = y = 0$.
verder
$a < b$: max. be^{-1} voor $x = 0$, $y = \pm 1$.
$a = b$: max. ae^{-1} voor $x^2 + y^2 = 1$.
$a > b$: max. ae^{-1} voor $x = \pm 1$, $y = 0$.

f) max. 1 voor $x = 2 + 2k\pi$, $y = 3 + 2\ell\pi$.
en voor $x = -2 + 2k\pi$, $y = 3 + (2\ell + 1)\pi$.
min. -1 voor $x = 2 + (2k + 1)\pi$, $y = 3 + 2\ell\pi$.
en voor $x = -2 + (2k + 1)\pi$, $y = 3 + (2\ell + 1)\pi$.

g) min. -2 voor $x = y = 1$.
max. 0 voor $x = y = 0$.

h) geen extrema.

i) min. $-\frac{1}{2}$ in $(-\frac{1}{2}, 0)$.
max. 4 in $(1,0)$.

j) min. 0 in $(0,0)$.

k) min. 0 in $(0,0)$.

33. a) min. $2a\sqrt{2}$ voor $x = y = a\sqrt{2}$.
max. $-2a\sqrt{2}$ voor $x = y = -a\sqrt{2}$.

b) min. $2a^m$ voor $x_1 = x_2 = a$.

c) max. $\frac{1}{2}$ in $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$.
min. $-\frac{1}{2}$ in $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

d) max. 1 in $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$ en $(-1,1,-1)$.
min. -1 in $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$ en $(-1,-1,-1)$.

e) max. 1 in $(1,1,1)$;
verder extrema op de doorsnijdingen van het vlak $2x + 3y + 4z = 9$ met de coördinaatvlakken: $x = 0$ en $z = 0$, namelijk:
min. 0 voor $y > 0$ en max. 0 voor $y < 0$. (In vlak $y = 0$ geen extrema)

f) **max.** $6 + \sqrt{3}$ **in** $\pm(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3},\ 1,\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3})$
min. $6 - \sqrt{3}$ **in** $\pm(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3},\ 1,\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3})$

g) max. $\frac{1}{8}$ voor $x = y = z = \frac{\pi}{3}$.
min. 0 voor $x = 0$, $y = 0$ of $z = 0$.

h) min. 1 in $(1,-1,-2)$ en $(-1,1,2)$.
max. 3 in $(1,1,1)$ en $(-1,-1,-2)$.

i) min. $\frac{1}{2}$ in $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$
max. $\frac{3}{2}$ in $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$

35. $\dfrac{4 \pm \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

38. $\frac{2}{3}\pi ab(2\sqrt{2} - 1)$.

39. $\frac{1}{12}[255\sqrt{255} + 65\sqrt{65} - 960\sqrt{15} - 320\sqrt{5}]$.

40. $\dfrac{2624}{375}$.

41. $\dfrac{ab}{12}$.

42. a) $\frac{3}{2}\log 2$; b) $\frac{1}{3}\log 2$; c) $\frac{1}{3}(2 - 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{6})$.

43. $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}\log(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

44. $(\frac{4}{5},0)$ en $(\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{2})$.

45. $\frac{1}{4}\pi^2\sqrt{2}$.

46. $\sqrt{2}\sinh 1$.

47. $x + \frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x}$; $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.

48. $8\pi^2$.

49. $\pi\sqrt{2}$; deel van een kegel.

50. Er zijn drie snijpunten: $(0,0,0)$, $(1,1,2)$ en $(\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{2}{27})$.
De hoeken: $\frac{\pi}{2}$, $\arccos\frac{2}{\sqrt{697}}$ en $\arccos\frac{6}{\sqrt{1649}}$.

58. $\alpha = -3$.

60. -4π.

61. 6 maal het volume van het door S ingesloten gebied.

64. 8.

65. $$a_r = z\cos\varphi - r\sin 2\varphi.$$
$$a_\varphi = -z\sin\varphi - 2r\cos^2\varphi .$$
$$a_z = r\sin\varphi.$$

66. $$\operatorname{grad}\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial\alpha}{\partial u}, \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial\alpha}{\partial v}, \frac{1}{uv}\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}\right).$$
$$(\operatorname{rot}\underline{a})_u = \frac{1}{v\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(va_\varphi) - \frac{1}{uv}\frac{\partial a_v}{\partial\varphi} \text{ enz.}$$

67. $h_1 = \sqrt{\sinh^2\xi + \sin^2\eta} = h_2$; $h_3 = \sinh\xi\sin\eta$; enz.

68. $$\frac{d\underline{x}}{dt} = \left(\frac{dr}{dt}, r\frac{d\varphi}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$
$$\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

70. $$\frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2}\right] + \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} + \{3 - X(u,v,z)\}\alpha = 0,$$
waarbij $X(u,v,z) = \varphi(x,y,z)$.

71. 1) $\alpha = 4$; $\beta = 2$; $\gamma = -1$.

2) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 + z^2 + 2xy + 4xz - yz$.

72. $\varphi = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{r^3}\right)$.

73. $\underline{b} = (x^2y^3 + \frac{4}{3}x^3z^3, -y^4z^3, 0)$.

74. a) neen.

b) ja; bijv. $\underline{a} = (z - 3y, -2z, 0)$.

76. 144 / 595.

77. frequenties $6^{-1}(1,1,1,1,1,1)$.

$6^{-2}(1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1)$.

$6^{-3}(1,3,6,10,15,21,25,27,27,25,21,15,10,6,3,1)$.

78. $P(\varepsilon) < \frac{1}{40}$, dus verantwoord.

79. 1) en 4) geldig;

80. Altijd geldt $P(V) + P(W) - P(V \cap W) = P(V \cup W)$.

81. $P_1 + P_2 - P_{12}$.

$P_1 + P_2 + P_3 - P_{12} - P_{23} - P_{31} + P_{123}$.

82. De kans op precies één der gebeurtenissen A_1, A_2, A_3.

83. $(1 - P_1)(1 - P_2) = 1 - (P_1 + P_2 - P_1P_2)$.

$(1 - P_1)(1 - P_2)(1 - P_3) = 1 -$ etc.

84. $\mu = 1$, $\sigma = 1$; $\mu = 0$, $\sigma = \sqrt{2}$.

85. $\pi^{-\frac{1}{2}}e^{-\xi^2}$: $\frac{2}{\pi}\sqrt{1 - \xi^2}$

1) onafhankelijk; 2) afhankelijk.

86. $f(\eta) = 2\eta$. $(0 \leqslant \eta \leqslant 1)$

87. $\sigma = \sqrt{35/12}$.

88. $s^2/n = 1/6$.

89. $p = \frac{121}{152} \pm \frac{7}{152} = 79{,}6 \pm 4{,}6$.

90. 109,7 en 110,5.

91. 0 ligt nog binnen de grenzen -0,08, + 0,68.

92. $\rho = 0$; afhankelijk.

93. $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\sigma_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\sigma_2 = \frac{1}{6}\sqrt{6}$, $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

94. $r^2 = \frac{(17{,}67)^2}{(19{,}94)(17{,}90)} = 0{,}875 = (0{,}935)^2$.

GEMENGDE VRAAGSTUKKEN OVER STATISTIEK

1. x en y zijn twee onafhankelijke stochastische variabelen, elk met dezelfde verdelingsfunktie $F(\xi)$ resp. $F(\eta)$.

   Bepaal de verdelingsfunktie van

   a) Max. (x,y) b) Min. (x,y).

2. Een roulette bevat de nummers 1, ..., 36. Alle hebben gelijke kans. Hoe vaak moet een speler op één van deze nummers spelen om een kans $\geqslant \frac{1}{2}$ te hebben, dat hij minstens één keer wint ?

3. x en y zijn twee onafhankelijke, rechthoekig verdeelde stochastische variabelen op $[0,1]$, dwz. beide frequentiefunkties zijn 1 op het interval $[0,1]$, nul er buiten.

   Bereken $P(x + y < 1\frac{1}{2})$, alsmede gemiddelde en spreiding van x + y.

4. x en y zijn twee stochastische variabelen met correlatiecoëfficiënt ρ. Definieer $u = ax + b$, $v = cy + d$, waarbij $a, b, c, d > 0$.

   Bereken de correlatiecoëfficiënt ρ' van de stochastische variabelen u en v.

5. Ter keuring van een grote partij blikjes conserven, die lang bij een grossier zijn opgeslagen geweest, wordt hieruit een steekproef van 120 blikjes genomen. De grossier is van plan alleen dan de partij te verkopen, als alle gekeurde blikjes goed blijken te zijn. Hij vraagt zich echter af hoe groot het percentage bedorven blikjes in dat geval toch nog zou kunnen zijn.

   a) Beantwoord deze vraag (drempel 0,05).
   b) Indien hij eist, dat het percentage bedorven blikjes in de partij (bij goedkeuring van de steekproef) niet hoger dan 1% mag zijn, hoe grote steekproef moet hij dan nemen ? (drempel 0,05)

6. Op een kantoor komen gemiddeld drie telefoongesprekken per uur binnen (Poissonverdeling). De telefoniste is gedurende tien minuten afwezig. Hoe groot is de kans dat er in die tijd minstens één persoon geen gehoor heeft gekregen ?

7. Bij een telefooncentrale registreert men gemiddeld vier internationale gesprekken per uur (Poissonverdeling). Vergelijk de kans op vier gesprekken per uur met die op twee gesprekken per half uur.

8. In een doos zitten zes loten, genummerd 1, 2, 3, 4, 5, 6. Twee personen A en B trekken achter elkaar een lot. Bereken het gemiddelde van het nummerverschil (absolute waarde)

a) met terugleggen
b) zonder terugleggen.

9. Men heeft drie laden, elk met twee munten, goud en/of zilver volgens onderstaand schema.

G	G	Z
G	Z	Z

Men trekt blindelings een la open, en haalt hieruit blindelings een munt. Deze blijkt G te zijn. Hoe groot is de kans dat de andere munt in deze la eveneens G is ?

10. Twee grote en even grote partijen kogels worden bij elkaar gevoegd tot één gemengde partij. De diameters van de kogels hebben resp. frequentiefunkties f_1 en f_2, met gemiddelden resp. $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2{,}2$ en spreidingen $\sigma_1 = 0{,}2$ en $\sigma_2 = 0{,}3$.

a) Bereken gemiddelde en spreiding van de gemengde partij.
b) Als f_1 en f_2 beide normaal zijn, is de frequentiefunktie van de gemengde partij dan ook normaal ?

11. In een magazijn (320 cm hoog) ligt een groot aantal platte schijven, waarvan de dikte normaal is verdeeld met gemiddelde 12 en spreiding 2 cm. Men heeft de gewoonte 25 schijven op elkaar te stapelen. Hoe groot is de kans dat dat mislukt ?

12. De gewichtsinhoud van een pakje margarine heeft een standaardafwijking van 3 gram. Een regeringsinstantie neemt ter controle af en toe een steekproef van 25 pakjes. De fabrikant krijgt een boete als de gemiddelde gewichtsinhoud van deze steekproef minder is dan 250 gram. Op welk gemiddelde moet de verpakkingsmachine worden ingesteld om het risico van een boete tot 1% te reduceren ? ($\lambda = 2{,}3$ n.b. éénzijdig)

13. Van een grote partij assen is de diameter normaal verdeeld ($\mu_1 = 14{,}82$ $\sigma_1 = 0{,}03$). Van een even grote partij boringen is de diameter eveneens normaal verdeeld ($\mu_2 = 14{,}89$, $\sigma_2 = 0{,}04$). Een as "past" in een boring als z'n diameter minstens 0,05 en hoogstens 0,15 mm kleiner is dan die van de boring.

a) Bereken welk percentage assen in boringen zal passen als as en boring aselect aan elkaar worden toegevoegd.
b) Hoe kan dit percentage worden verhoogd, indien men wèl de gemiddelden van as en boring door gewijzigde instelling van de machine waarmee ze worden vervaardigd, kan wijzigen, maar niet de spreidingen ? Welk percentage kan men dan maximaal bereiken ?

14. Op het spitsuur staan twee even grote treinen op een fabrieksemplacement gereed om 1000 arbeiders naar Amsterdam te brengen. De arbeiders kiezen een trein "at random". De N.S. willen niet teveel materieel inzetten. Hoeveel zitplaatsen moet elke trein minstens hebben opdat hoogstens 1 op de 20 dagen één of meer arbeiders moeten staan ? (Normale verdeling)
Zelfde vraag als de N.S. hoogstens 1 op de 100 dagen één of meer arbeiders wil laten staan.

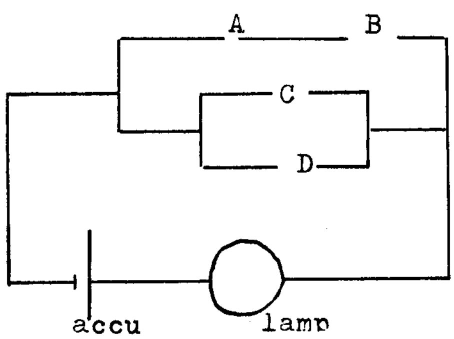
15. **Bij een firma beloopt de vraag naar televisietoestellen gemiddeld 3 per maand. Elke maand worden 5 nieuwe toestellen in huis genomen; eventuele restanten worden niet verkocht. Hoe groot is de kans op "uitverkocht" vóór het eind van de maand? (Poissonverdeling; gebruik de goede benadering $e = \sqrt[3]{20}$).**

16. Gegeven twee urnen.

Urn 1 bevat 5 witte, 3 zwarte ballen.
Urn 2 bevat 7 zwarte, 3 witte ballen.

Men trekt at random een urn, en daaruit at random 1 bal. Gevraagd de kans dat deze wit is.

17.



A, B, C en D zijn onafhankelijke schakelaars. Kans op open of gesloten zijn is $\frac{1}{2}$ voor elk.

Hoe groot is de kans dat de lamp brandt ?

Antwoorden gemengde vraagstukken statistiek

1. a) $F^2(\xi)$ b) $2F(\xi) - F^2(\xi)$.

2. 25

3. $P(x + y < 1\frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$, $\mu = 1$, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{6}}$.

4. $\rho' = \rho$.

5. $p \leqslant 2{,}5\%$ (uit $1 - p \geqslant (0{,}05)^{1/120}$); 298.

6. $1 - e^{-\frac{1}{2}}$.

7. $\frac{32}{3} e^{-4}$ resp. $2e^{-2}$.

8. $\frac{35}{18}$, $\frac{7}{3}$.

9. $\frac{2}{3}$.

10. a) $\mu = 2{,}1$ $\sigma = 0{,}27$.
    b) neen.

11. 2,3%.

12. 251,4 gram.

13. a) 60%.
    b) Als $\mu_1 = \mu_2 - 0{,}10$, 68,3%.

14. 532 zitplaatsen, 541 zitplaatsen.

15. $1 - \frac{18{,}4}{20} = 8\%$.

16. $\frac{37}{80}$.

17. $\frac{13}{16}$.

N.B. Van enkele tentamens zijn één of meer opgaven weggelaten, welke betrekking hebben op onderwerpen, die niet meer tot de tentamenstof behoren. Het onderzoek van kwadratische vormen is aanvankelijk in IV, later in IIIa ondergebracht.

Wiskunde IIIa

24 januari 1959

1. Bepaal met behulp van machtreekssubstitutie de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

2. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$x \cos y \frac{dy}{dx} + \sin y\,(1 - x^2 \sin y \tan x) = 0.$$

Aanwijzing: het zoeken naar een integrerende factor is niet voordelig.

3. Bereken van de functie $f(x)$, die gedefinieerd is door

$$f(x) = \cos x \qquad \text{voor } -\tfrac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{voor } x < -\tfrac{1}{2}\pi \text{ en voor } x > \tfrac{1}{2}\pi,$$

de Fourier-coefficienten $A(u)$ en $B(u)$, behorende bij de voorstelling

$$f(x) = \int_0^\infty \{A(u)\cos ux + B(u)\sin ux\}\,du.$$

4. a) Geef de definitie van uniforme convergentie van een rij functies.
   b) Bewijs, dat de rij functies $g_n(x) = x \cos \frac{x}{x+n}$ voor $0 \leqslant x \leqslant 1$ uniform convergeert.

10 juni 1959

1. Los op

$$(y + x^2)dy + x(1 - y)dx = 0.$$

Aanwijzing: zoek een integrerende factor van de gedaante $f(x^2 + y^2)$.

2. Gegeven

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 2\frac{dz}{dt} = -2x - 2y - z\ ;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \quad - \frac{d^2z}{dt^2} \quad + 2\frac{dz}{dt} = -2x \quad + z\ ;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2z}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 2\frac{dz}{dt} = \quad -2y + z\ ;$$

$$x(0) = z(0) = 0\ ;$$

$$y(0) = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 1.$$

Gevraagd de funkties x, y en z te berekenen met behulp van Laplace-transformatie.

3. Bewijs $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ux \sin^2(\frac{1}{2}u)}{u^2}\,du = \begin{cases} \frac{\pi}{4}(1 - |x|) & \text{voor } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{voor } |x| \geqslant 1. \end{cases}$

4. a) Bewijs de stelling:

als de reeks $\sum_1^\infty f_n(x)$ uniform convergeert met som f(x) en als alle funkties $f_n(x)$ en f(x) eigenlijk integreerbaar zijn voor $a \leqslant x \leqslant b$, dan geldt:

$$\int_a^b \left(\sum_1^\infty f_n(x)\right)dx = \sum_1^\infty \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

b) Bereken $\displaystyle\int_0^1 \left\{\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(n^2 - x)^2}\right\} dx.$

Motiveer de bewerkingen, die U uitvoert.

12 januari 1960

1. De funktie f(x) met periode π is gegeven door

$$f(x) = \sin x \qquad \text{voor } 0 < x < \frac{\pi}{2}\ ;$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{voor } \frac{\pi}{2} < x < \pi\ .$$

a) Bepaal de Fourier-reeks van f(x).

b) Bepaal $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$.

2. a) Bepaal de algemene oplossing van de D.V.

$$(x^2 + y^2)\, y' = xy.$$

b) Bepaal met Laplace-transformatie de oplossing van de D.V.

$$y''' + y'' + y' + y = 1 + x,$$

die voldoet aan

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

3. a) Onderzoek of de rij funkties e^{-nx^2} voor $x > 0$ uniform convergeert.

b) Bewijs dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^3}$ termsgewijs mag worden gedifferentieerd voor alle $x \geqslant 0$.

4. Vervalt.

<u>13 juni 1960</u>

1. Van de funktie $f(x)$ is gegeven

$$f(x) = 1 - 2x \quad \text{voor } 0 < x < \tfrac{1}{2},$$
$$f(x) = 0 \quad \text{voor } \tfrac{1}{2} < x < 1,$$

$f(x)$ is periodiek met periode 1.

a) Bepaal de Fourier-reeks van $f(x)$.
b) Wat vindt U door substitutie van $x = 0$ in deze reeks ?

2. Vervalt.

3. Los de volgende differentiaalvergelijking op

$$y = \frac{x\,\{1 + (y')^2\}}{2y'}.$$

4. Bewijs dat $\lim\limits_{x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^3 x^2}}{2^n} = 1.$

16 januari 1961

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op voor $x > 0$

$$x^2 + y^2 + 4 + 4xy\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

2. Van de funktie $f(x)$ is gegeven

$$f(x) = x^2 \text{ voor } 0 < x < \pi,$$

$$f(x) = - f(-x),$$

$$f(x) \text{ is periodiek met periode } 2\pi.$$

a) Bepaal de Fourier-reeks van $f(x)$.

b) Bereken $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ door middel van substitutie van $x = \frac{1}{2}\pi$ in de Fourier-reeks van $f(x)$.

3. Bereken $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x^2+n)^2}\,dx.$

4. Bepaal formules voor een coördinatentransformatie (rotatie en translatie in één stel formules), waardoor de vergelijking van het kwadratische oppervlak

$$x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3 - 4x_1 + 4x_3 = 0$$

standaardgedaante krijgt.

Geef de vergelijking van het oppervlak in de nieuwe coördinaten en bepaal de aard van het oppervlak.

13 juni 1961

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op

$$y^2 + 3x + 2y + (5y^2 + 4xy + x)\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

<u>Aanwijzing</u>: zoek een integrerende factor, die een funktie van $x + y^2$ is.

2. a) Bewijs, dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nx = \frac{\pi \cosh x}{2 \sinh \pi} - \frac{1}{2}$$

geldt voor $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

b) Bereken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

3. Bij het kwadratische oppervlak, gegeven door

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 6x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 10 = 0,$$

wordt gevraagd een coordinatentransformatie (rotatie en translatie), zodat de vergelijking van het oppervlak in standaardgedaante overgaat. Bepaal de vergelijking in de nieuwe coordinaten en het type van het oppervlak.

4. Een rij funkties $g_n(x)$ is gegeven door $g_n(x) = \frac{1}{n^2} \log \{1 + n^2(1-x)\}$.

a) Bewijs dat deze rij funkties voor $0 \leqslant x \leqslant 1$ uniform convergeert.

b) Als a een getal is met $0 < a < 1$, dan is de rij funkties $\frac{dg_n(x)}{dx}$ uniform convergent voor $0 \leqslant x \leqslant a$. Toon dit aan. Geldt de uniforme convergentie van deze rij ook voor $0 \leqslant x \leqslant 1$? Geef een beredenering van Uw antwoord.

<u>15 januari 1962</u>

1. a) De differentiaalvergelijking

$$4x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

heeft een oplossing van de gedaante $y = x^\alpha (1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n)$

met $\alpha > 0$. Bepaal α, u_1 en u_2.

b) Los de volgende differentiaalvergelijking op

$$(y + x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = 2x (y - x^2 - 1).$$

2. Een lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is vastgelegd door

$$A(1,0,0) = (3,-2,-1),$$
$$A(0,1,0) = (4,-3,-1),$$
$$A(0,0,1) = (-2,2,0) .$$

a) Laat zien, dat er een basis bestaat, zo dat de matrix van A ten opzichte van die basis diagonaalvorm heeft.

b) Bepaal een basis als in punt a) bedoeld, en geef de matrix behorende bij de overgang van de natuurlijke basis naar die basis.

3. a) Bereken $\int_0^1 t \cos ut \, dt$ uit $\int_0^1 \sin ut \, dt$, door te differentieren onder het integraalteken. Waarom mag dit ?

3. b) De functie f(x) is gedefinieerd door

$$f(x) = |x|\,,\ \text{als } |x| < 1,$$
$$f(x) = \tfrac{1}{2}\,,\ \text{als } |x| = 1,$$
$$f(x) = 0\,,\ \text{als } |x| > 1.$$

Bepaal de integraal van Fourier behorende bij f(x) en laat zien, dat deze gelijk is aan f(x).

4. a) Onderzoek de uniforme convergentie van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan nx}{n\sqrt{n + x^2}}\ .$$

b) Bewijs het volgende:
als een rij $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... van funkties convergeert voor $-1 \leqslant x \leqslant 1$, en wel uniform voor $-1 \leqslant x \leqslant 0$ en ook uniform voor $0 \leqslant x \leqslant 1$, dan convergeert die rij uniform voor $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

14 juni 1962

1. Een oppervlak van de tweede graad in R_3 is bepaald door de vergelijking

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_3^2 - 2x_1 + 12x_2 - 2x_3 - 3 = 0$$

a) Onderzoek, of het oppervlak een middelpunt bezit.
b) Bepaal de formules van een dusdanige coordinatentransformatie, dat het oppervlak in de nieuwe coordinaten een vergelijking in standaardvorm heeft.
c) Bepaal de vergelijking van het oppervlak in de in b) ingevoerde nieuwe coordinaten en tevens het type van het oppervlak.

2. Van de functie f(x) is gegeven

f(x) is periodiek met periode 2π,
$f(x) = x$ voor $0 \leqslant x \leqslant \pi$,
$f(x) = 0$ voor $\pi < x < 2\pi$.

a) Bereken de Fourierreeks van f(x).
b) Voor welke waarden van x $(0 \leqslant x < 2\pi)$ is de som van de Fourierreeks gelijk aan f(x) en waarom ?

3. Bepaal met reekssubstitutie voor $x > 0$ de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

4. De functie f(x) is voor $x \geq 0$ gedefinieerd door

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\cos xt}{t^2+1}\,dt.$$

a) Bewijs, dat f(x) tweemaal differentieerbaar is en dat

$$f''(x) - f(x) + g(x) = 0,$$

waarin g(x) gedefinieerd is door

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{voor } x > 0,$$
$$g(0) = 1.$$

b) Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' - y + g(x) = 0.$$

Bepaal de vergelijking, waaraan de Laplacegetransformeerde van y voldoet; hierin behoeft de Laplacegetransformeerde van g(x) niet te worden uitgerekend.

c) Bewijs met behulp van het resultaat van a) en b) dat

$$f(x) = \frac{1}{8}\pi(e^x+e^{-x}) + \frac{1}{2}e^{-x}\int_0^x e^t \frac{\sin t}{t}\,dt - \frac{1}{2}e^x\int_0^x e^{-t}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

15 januari 1963

1. a) Bepaal de algemene oplossing van

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+2x^2y^2}{x^3y}.$$

b) Bepaal de algemene oplossing van

$$(1-x^3)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x^2\frac{dy}{dx} + 3xy = 0$$

en ook de oplossing, die voldoet aan $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2. a) Bepaal de fouriergetransformeerde van de functie f(x), die gegeven is door

$$f(x) = \cos x \quad \text{voor } |x| < 2\pi,$$
$$f(x) = 5 \quad \text{voor } |x| = 2\pi,$$
$$f(x) = 0 \quad \text{voor } |x| > 2\pi.$$

b) Bepaal met behulp van laplacetransformatie de oplossingen $y(x)$, $z(x)$ van

$$\left.\begin{aligned} y - \frac{dz}{dx} &= 2 \sin x \\ \frac{dy}{dx} + z &= 2e^x + 2 \cos x \end{aligned}\right\},$$

die voldoen aan $y(0) = 1$, $z(0) = 2$.

3. In R_3 zij $\underline{p} = (1,1,1)$. De lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is gegeven door

$$A\underline{x} = (\underline{p},\underline{x})\underline{p} - \underline{x}.$$

a) Bewijs dat A symmetrisch is.

b) Bepaal alle eigenvectoren van A met bijbehorende eigenwaarden.

c) Wat is het type van het kwadratische oppervlak in R_3, dat bepaald wordt door de vergelijking

$$2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0\ ?$$

4. a) Bepaal de reële waarden van x, waarvoor de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(n-x)}$ convergeert. Toon aan, dat de reeks voor die waarden van x termsgewijs mag worden gedifferentieerd.

b) Toon aan dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}^{1}\log(n+x)}{n^2}$ voor $x \geq 0$ convergent maar niet uniform convergent is.

<u>6 juni 1963</u>

1. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$x - y + (x+y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

a) Bepaal de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking.
b) Bepaal een integrerende factor van deze differentiaalvergelijking, die een funktie is van x^2+y^2.

2. Van de funktie $f(x)$ is gegeven: $f(x) = x(2\pi-x)$ voor $0 < x < 2\pi$,
$f(x)$ is periodiek met periode 2π.

a) Bewijs dat $f(-x) = f(x)$ voor $0 < x < 2\pi$.
b) Bepaal de fourierreeks van $f(x)$.

c) Toon aan, dat de fourierreeks van $f(x)$ som 0 heeft voor $x = 2k\pi$, k geheel (n.b.: $f(2k\pi)$ is niet gegeven).
d) Bepaal de som van de reeks, die als termen de kwadraten der fouriercoëfficiënten van $f(x)$ heeft.

3. Het kwadratische oppervlak K is gegeven door de vergelijking

$$5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 8x_3^2 - 1 = 0.$$

a) Bepaal de richtingen, waaraan ten opzichte van K hetzelfde vlak is toegevoegd als aan de richting, die bepaald is door de vector (1,0,0).
b) Bepaal een dusdanige coördinatentransformatie, dat de vergelijking van K in de nieuwe coördinaten standaardgedaante heeft; geef de vergelijking van K in deze nieuwe coördinaten en noem het type van K.

4. Gegeven is de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n} e^{-nx^2}}{n}$.

a) Bepaal, voor welke reële waarden van x de reeks convergeert.
b) Onderzoek, of de reeks in de onder a) gevonden waardenverzameling uniform convergeert.

Wiskunde IV

15 juni 1959

1. Vervalt.

2. Gegeven is het vectorveld $\underline{a} = \left(\frac{z}{x^2+y^2}, 0, \frac{x^2y + y^3 + xz^2}{(x^2+y^2)^2} \right)$.

a) Bewijs, dat dit veld divergentievrij is.
b) Bepaal een vectorpotentiaal van $\underline{a}$, die in een omgeving van het punt (0,1,0) gedefinieerd is. Geef aan in welk gedeelte van de ruimte het gevonden veld een vectorpotentiaal van $\underline{a}$ is.
c) Bereken de oppervlakte-integraal $\int_S (\underline{a}, \underline{n})\, d\sigma$, waarin S de halve bol $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$, $y \geq 1$ is en $\underline{n}$ de van het middelpunt van de bol af wijzende normaalvector van S.

3. Voor het kwadratische oppervlak met vergelijking

$$2x_1^2 + 4x_1x_2 - 7x_2^2 + 16x_1x_3 - 20x_2x_3 - 4x_3^2 - 4x_1 + 32x_2 + 56x_3 - 43 = 0$$

wordt gevraagd:

a) de formules van een coordinatentransformatie, die de vergelijking in standaardvorm brengt,
b) de standaardvorm, die bij de onder a) gevonden coordinatentransformatie behoort,
c) het type van het oppervlak.

4. Op de eenheidscirkel $x^2 + y^2 = 1$ zijn gegeven de punten $(1,0)$, (x,y) en (ξ,η) met $y > 0$ en $\eta < 0$.

Deze punten vormen de hoekpunten van een driehoek. Gevraagd wordt de punten zo te kiezen, dat de oppervlakte van de driehoek maximaal is. Beredeneer, waarom de door U gevonden uitkomst inderdaad een maximale oppervlakte oplevert.

Aanwijzing: het gebruik van trigonometrische formules is niet gewenst.

<u>4 januari 1960</u>

1. Bepaal het type van de kegelsnede met vergelijking

$$9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 36x_1 - 48x_2 - 64 = 0.$$

2. Berekem met behulp van de coordinatentransformatie

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{v}{u^2 + v^2}$$

de integraal

$$\iint_G \frac{dx\,dy}{(x^2 + y^2)^2}$$

waarin G het gedeelte van het eerste kwadraat ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) is, gelegen buiten beide cirkels met vergelijkingen

$$x^2 + y^2 - 5x = 0$$
$$2x^2 + 2y^2 - 5y = 0.$$

3. Gegeven is het vectorveld

$$\underline{a} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + e^z, \ \frac{y}{x^{2\,2} + y^2} - 2ye^z, \ (x - y^2)\, e^z \right)$$

a) Bewijs, dat dit veld rotatievrij is.

3. b) Bereken de integraal

$$\int_K (\underline{a},\underline{t})\, ds,$$

waarin K de van (-1,0,0) tot (1,0,0) doorlopen boog van de parabool

$$\left.\begin{aligned} y &= 1 - x^2 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

is en $\underline{t}$ de raakvector van K is.

4. Bepaal de extrema van

$$6x^4 - x^3y - x^3 + 9x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y + 1.$$

<u>20 juni 1960</u>

1. Bepaal het type van het oppervlak bepaald door de kwadratische vergelijking

$$x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 6x_1x_3 + 2x_1 - 6x_3 + 1 = 0$$

en geef de standaardvorm van deze vergelijking.

2. Gegeven is het vectorveld $\underline{a} = (e^y - 4z + \dfrac{2}{\cos^2 x},\ xe^y + 6y,\ 3z^2 - 4x)$.

Bepaal rot $\underline{a}$.

Bepaal $\int_K (\underline{a}, \underline{t})\, ds$, als K de kromme is gegeven

door $\left\{\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{\pi^2}{16} \\ y &= z \\ y &\geqslant 0 \end{aligned}\right.$ met beginpunt $(-\frac{\pi}{4},0,0)$ en eindpunt $(\frac{\pi}{4},0,0)$.

3. De vectorfunctie $\underline{x} = \underline{f}(\underline{u})$ van R_3 in R_3 is gegeven door de componentfunkties

$$\begin{aligned} x &= 2uw + 2vw\ ; \\ y &= u^2 + 2uv + v^2 - w^2 ; \\ z &= u^2 + 2uv + v^2 + w^2 . \end{aligned}$$

Bepaal de singuliere punten van deze afbeelding. Op welke meetkundige figuur in de $\underline{x}$-ruimte liggen de beeldpunten ?

4. Bewijs dat de functie $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 4) \cdot (x^2 + y^2 + 2x)$ extrema aanneemt in de punten $(\frac{1 + \sqrt{17}}{4}, 0)$ en $(\frac{1 - \sqrt{17}}{4}, 0)$ en in geen ander punt.

11 januari 1961

1. Gegeven is het kwadratische oppervlak

$$41x_1^2 + 25x_2^2 - 24x_1x_3 + 34x_3^2 - 82x_1 + 100x_2 + 24x_3 + 116 = 0.$$

Gevraagd de formules voor een coordinatentransformatie (rotatie en translatie samen in één stel formules), waardoor de vergelijking van dit oppervlak in standaardgedaante overgaat.
Geef de vergelijking van het oppervlak in de nieuwe coordinaten.
Wat is het type van het oppervlak?

2. Bewijs, dat het vectorveld

$$\underline{a} = (y\,e^{yz},\ -\sin(x+z) + y,\ x^2 - z)$$

divergentievrij is.

Bepaal een vectorpotentiaal van $\underline{a}$.
Bereken de oppervlakte-integraal

$$\int_S (\underline{a}, \underline{n})\, d\sigma,$$

waarin S de halve bol $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geqslant 0 \end{array}\right\}$

is en $\underline{n}$ de van de oorsprong af wijzende normaalvector op S.

3. Bepaal de punten van de kromme $\left.\begin{array}{l} 8x^2 + 3y^2 = 1 \\ z = 0 \end{array}\right\}$

waarvoor de afstand tot de rechte met parametervoorstelling $\underline{x} = \lambda(1,1,1)$ een extreme waarde heeft. Geef in elk van de gevonden punten aan of het extremum een maximum of een minimum is.

4. Bereken met behulp van de substitutie $\left.\begin{array}{l} x = u + v \\ y = \sqrt{uv} \end{array}\right\}$

de integraal

$$\iint_G \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2 - 4y^2}},$$

waarin G het gedeelte van het eerste kwadrant ($x > 0$, $y > 0$) is, dat begrensd wordt door het lijnstuk $1 \leqslant x \leqslant 2$ van de X-as en bogen van de parabolen $y^2 - x + 1 = 0$ en $y^2 - 2x + 4 = 0$.

19 juni 1961

1. Bepaal de extrema van de funktie $f(x,y)$, die in het gebied $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x+y \leqslant \frac{1}{2}\pi \end{cases}$ gegeven is door

$$f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y).$$

2. Een handelaar verkoopt een grote partij goederen en deelt de koper mee, dat er 5% ondeugdelijke exemplaren in zitten. De koper neemt om dit te verifiëren een steekproef van 150 exemplaren en vindt er 10 ondeugdelijke in. Als hij een betrouwbaarheidsdrempel aanhoudt van 0,05, heeft hij dan het recht om te reclameren of niet ?
Hoe groot moet het aantal ondeugdelijke exemplaren in een steekproef van 150 stuks minstens zijn om reclame te rechtvaardigen ?
Bij de berekening mag van een benadering met een normale verdeling gebruik worden gemaakt; bij een overschrijdingskans van 0,05 hoort dan een factor 2 bij de spreiding.

3. Het vectorveld $\underline{a}$ is gegeven door

$$\underline{a} = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3} + xz, \frac{z}{r^3} - xy\right), \text{ waarin } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bereken div $\underline{a}$.
Bereken de oppervlakte-integraal

$$\int_S (\underline{a}, \underline{n})\, d\sigma,$$

waarin S de halve ellipsoïde $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4z^2 = 1 \\ z \geqslant 0 \end{cases}$
is en $\underline{n}$ de normaalvector op S is, die in het snijpunt van S met de z-as $(0,0,1)$ is.

4. Bereken

$$\iint_G \sqrt{x}\, e^{-x-y^2}\, dx\, dy,$$

waarin het integratiegebied G gegeven is door $\begin{cases} x + y^2 \leqslant 1 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

<u>Aanwijzing</u>: zoek een dusdanige transformatie

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1\ (u,v) \\ y &= f_2\ (u,v) \end{aligned}\right\}$$

dat hierdoor het binnengebied van de eenheidscirkel afgebeeld wordt op G.

10 januari 1962

1. Bepaal van de kromme, die is gegeven door de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{16}x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right\}$$

het punt (of de punten) met maximale afstand tot het vlak met vergelijking $x = 0$.

2. Van de stochastische vectorveranderlijke (x,y) is de frequentiefunktie $f(\xi,\eta)$ gegeven door

$$f(\xi,\eta) = \tfrac{1}{4}(1 + \xi\eta), \quad \text{als } |\xi| \leqslant 1 \text{ en } |\eta| \leqslant 1,$$
$$f(\xi,\eta) = 0 \quad , \quad \text{als dit niet zo is.}$$

a) Bepaal de marginale frequentiefunkties van x en van y.
b) Bepaal de correlatiecoefficient van x en y.
c) Zijn x en y onafhankelijk ?

3. Het vectorveld $\underline{a}$ is gegeven door

$$\underline{a} = (\log(r+x), \log(r+y), 1),$$

waarin $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

a) Bereken div $\underline{a}$.
b) Bereken de oppervlakte-integraal $\int_S (\underline{a}, \underline{n})\, d\sigma$, waarin S het gedeelte van een boloppervlak is, dat bepaald is door $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geqslant \frac{1}{2} \end{array}\right\}$ en $\underline{n}$ de van het middelpunt van de bol afwijzende normaalvector van S is.

4. Een stelsel krommen in het (x,y)-vlak is gegeven door $x^3 = uy$ (d.w.z. voor elke waarde van u ontstaat een kromme van het stelsel). Op analoge wijze is een tweede stelsel krommen gegeven door $y^3 = vx$.
Bepaal de oppervlakte van het gedeelte van het eerste kwadrant ($x > 0$, $y > 0$), bestaande uit die punten, waardoor een kromme van het eerste stelsel gaat met $1 \leqslant u \leqslant 4$ en tevens een kromme van het tweede stelsel met $\frac{1}{4} \leqslant v \leqslant 1$.

18 juni 1962

1. Het gebied G in het platte vlak is bepaald door

$$x^2 + 4y^2 \leqslant 72.$$

De funktie $f(x,y)$ is gedefinieerd op G en is daar bepaald door

$$f(x,y) = x^2 + 6xy + 4y^2.$$

Bepaal de lokale extrema van $f(x,y)$. Welk van deze lokale extrema zijn globale extrema en waarom ?

2. G is een gebied in de ruimte R_3, dat wordt begrensd door een gesloten oppervlak S.

a) Bewijs dat

$$\int_G (x^2 + y^2)\, d\tau$$

gelijk is aan

$$\tfrac{1}{4}\int_S (x^2 + y^2)(x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2, \underline{n})\, d\sigma;$$

hierin zijn $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$ de eenheidsvectoren in de richting van de positieve x-as en y-as en $\underline{n}$ de normaalvector op S, die t.o.v. G naar buiten wijst.

b) Controleer de gelijkheid van de twee integralen in a door directe berekening voor het geval dat G het binnengebied is van de kubus, die (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0) en (0,0,1) als hoekpunten heeft.

3. Laat x een stochastische veranderlijke zijn met verdelingsfunktie

$$F(\xi) = \alpha + \beta\left(\frac{\xi}{1+\xi^2} + \arctan \xi\right);$$

hierin zijn α en β constanten.

a) Bepaal α en β.
b) Bepaal $P(|x| \geqslant 1)$.
c) Bepaal het gemiddelde en de spreiding van x.

4. Een afbeelding $\underline{x} = \underline{f}(\underline{u})$ van R_2 in R_3 ($\underline{x} = (x,y,z)$, $\underline{u} = (u,v)$) is gegeven door

$$\left.\begin{aligned} x &= (1 + \cos u)\cos v \\ y &= (1 + \cos u)\sin v \\ z &= \sin u \end{aligned}\right\}$$

a) Bepaal de rang van de funktionaalmatrix in (u,v) = (0,0).

b) Bepaal de singuliere punten van de vectorfunktie $\underline{f}$ en bepaal de beeldvector $\underline{x}$ in die singuliere punten.

c) Bereken de oppervlakte van het oppervlak, dat bepaald wordt door de parametervoorstelling $\underline{x} = \underline{f}(\underline{u})$, $-\pi \leqslant u \leqslant \pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$. Hierbij behoeft niet gecontroleerd te worden, dat door deze parametervoorstelling een enkelvoudige overdekking van het oppervlak tot stand wordt gebracht.

<u>7 januari 1963</u>

1. Het gebied G in het (x,y)-vlak is gegeven door $x^2 + y^2 \leqslant \frac{7}{3}$. In G is de functie f gegeven door

$$f(x,y) = 3x^4 - 4x^3 - 3xy^2 + y^2 - 1.$$

Gevraagd wordt, in welke punten van G de functie f een globaal maximum of een globaal minimum bezit.

2. Door de betrekkingen

$$\left.\begin{array}{l} x = e^{v} \cos u \\ y = e^{v} \sin u \end{array}\right\}$$

wordt een gebied G' in het (u,v)-vlak afgebeeld op een gebied G in het (x,y)-vlak.

a) Als G' gegeven is door $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}\pi \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 1 \end{array}\right\}$, bepaal dan G. Toon aan,

dat de afbeelding van G' op G een enkelvoudige overdekking van G tot stand brengt.

b) Bereken

$$\iint_G \frac{\arctan(y/x)}{x^2 + y^2}\, dxdy.$$

3. Gegeven is $f(x,y,z) = \sin x \cosh y + z^2$.

a) Bereken $\int_S (\text{grad } f, \underline{n})\, d\sigma$, waarin S het halve boloppervlak is,

bepaald door $\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \\ z \geqslant 1 \end{cases}$ en $\underline{n}$ de van het middelpunt van de bol afwijzende normaalvector is.

b) Bepaal het getal α zo, dat voor de functie $g(x,y,z) = f(x,y,z) - \alpha r^2$ geldt, dat grad g een vectorpotentiaal bezit en bepaal zo'n vectorpotentiaal die $\underline{0}$ is in (0,0,1). Hierin is $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4. In een logaritmentafel zijn alle logaritmen afgerond in 4 decimalen. Aangenomen wordt, dat de afrondingsfout gelijkelijk verdeeld is tussen -0,00005 en 0,00005.

a) Bepaal de frequentiefunctie, het gemiddelde en de spreiding der afrondingsfouten.

b) Men beschouwt 48-tallen van logaritmen, waarvan de afrondingsfouten onafhankelijk zijn. De door afronding der logaritmen ontstane fout in de sommen der 48-tallen beschouwen wij als nieuwe stochastische veranderlijke; bepaal van deze de spreiding.

c) Onder dezelfde voorwaarden als in b) beschouwen we nu n-tallen (i.p.v. 48-tallen). Hoe groot mag n hoogstens zijn, opdat de kans, dat de som van het n-tal niet in 3 decimalen nauwkeurig is, $\leqslant$ 0,05 is ? Bij de berekening mag gebruik worden gemaakt van benadering met een normale verdeling.

<u>14 juni 1963</u>

1. Gegeven is het vectorveld $\underline{a} = (x,y,z)$ en het oppervlak S door $\left.\begin{matrix} y^2 + z^2 = 6-x \\ x \geqslant 2 \end{matrix}\right\}$. Bereken $\int_S (\underline{a},\underline{n})d\sigma$; hierin is $\underline{n}$ de normaalvector op S, zo georiënteerd dat $\underline{n} = (1,0,0)$ in het punt $(6,0,0)$.

2. a) De vectorfunktie $\underline{u} = \underline{f}(\underline{x})$ ($\underline{u} = (u,v)$, $\underline{x} = (x,y)$) is gegeven door

$$u = \frac{x}{y},\ v = xy.$$

Bereken de funktionaaldeterminant.

b) Bereken $\iint_G \sqrt{\frac{v}{u}} \sin v \, du \, dv$,

waarin G het gebied is bepaald door $\left.\begin{matrix} 1 \leqslant uv \leqslant 16 \\ 0 \leqslant v \leqslant 4\pi^2 u \end{matrix}\right\}$.

3. Men heeft een stel van 48 kaarten; op elk der kaarten staat een der letters A, B, C, D en een der gehele getallen van 1 tot en met 12, dusdanig dat elke combinatie van letter en getal precies één keer voorkomt. Men doet trekkingen uit het pak kaarten zo dat iedere kaart dezelfde kans heeft om getrokken te worden. De uitkomst U is het trekken van een kaart, waarop het getal 2 staat. De uitkomst V is het trekken van een kaart, die minstens één der volgende kenmerken heeft: de kaart vermeldt het getal 3 of 7, de kaart vermeldt de letter B of D.
Gevraagd wordt P(V) en P(V/U) te berekenen. Zijn U en V onafhankelijk?

4. De funktie $z = f(x,y)$ is gegeven door de impliciete vergelijking

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0.$$

Bepaal de lokale extrema van deze funktie.

ANTWOORDEN TENTAMENOPGAVEN

Wiskunde IIIa

24 januari 1959

1. $y = \dfrac{\lambda + \mu x}{1 - x^2}.$

2. $x \sin y \,[\log |\cos x| + \lambda] = 1$
   $y = k\pi.$

3. $A(u) = 2\,\dfrac{\cos \frac{\pi u}{2}}{\pi\,(1-u^2)}.$ $\qquad B(u) = 0.$

4. $g(x) = x$
   $|g_n(x) - g(x)| \leqslant \dfrac{1}{2n^2}\,.$

10 juni 1959

1. $y - 1 = C\sqrt{x^2 + y^2}.$

2. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\sin t\sqrt{2}$
   $y = e^t \cos t$
   $z = t\,e^t.$

4b. $\frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6}.$

12 januari 1960

1a) $f(x) \sim \dfrac{1}{\pi} + \sum_{1}^{\infty} \left\{ \dfrac{-2\cos 2nx}{(4n^2 - 1)\pi} + \dfrac{4(-1)^{n+1}\, n \sin 2nx}{(4n^2 - 1)\pi} \right\}.$

b) $x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4n^2 - 1}\,.$

2a) $y = C\,e^{\frac{1}{2}x^2 y^{-2}}.$

2b) $L\{y\} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}$, $y = x - \sin x$.

3a) neen.

b) $-2\sum\limits_1^\infty \frac{x\ e^{-nx^2}}{n^2}$ is uniform convergent

nl. $0 \leqslant x\ e^{-nx^2} \leqslant (2ne)^{-\frac{1}{2}}$.

<u>13 juni 1960</u>

1a) $f(x) \sim \frac{1}{4} + \sum\limits_1^\infty \frac{\{1-(-1)^n\}\cos 2\pi nx + \pi n \sin 2\pi nx}{\pi^2 n^2}$.

b) $x = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \sum\limits_1^\infty \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}$

of $\frac{1}{4} = \sum\limits_0^\infty \frac{2}{\pi^2(2n+1)^2}$.

3. $y = \pm x$
$y = \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2}\lambda x^2$.

<u>16 januari 1961</u>

1. $y^2 = C\ x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{5}x^2 - 4$.

2a) $f(x) \sim 2\sum\limits_1^\infty \left\{\frac{\pi(-1)^{k+1}}{k} + 2\frac{(-1)^k}{\pi k^3} - \frac{2}{\pi k^3}\right\} \sin kx$.

b) $\frac{\pi^3}{32}$.

3. $\frac{1}{2}$.

4. $$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}z_1\sqrt{2} + \frac{1}{3}z_2\sqrt{3} - \frac{1}{6}z_3\sqrt{6} + 1 \\ x_2 = \qquad\qquad\; - \frac{1}{3}z_2\sqrt{3} - \frac{1}{3}z_3\sqrt{6} \\ x_3 = -\frac{1}{2}z_1\sqrt{2} + \frac{1}{3}z_2\sqrt{3} - \frac{1}{6}z_3\sqrt{6} - 1 \end{cases}$$

$2z_1^2 + 3z_2^2 - 6z_3^2 - 4 = 0$ eenbladige hyperboloïde.

<u>13 juni 1961</u>

1. $y^5 + xy^4 + 2xy^3 + 2x^2y^2 + x^2y + x^3 = C$
   cf $(x+y)(x+y^2)^2 = C$.

2b) $x = \pi \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi}{2}\coth\pi - \frac{1}{2}$.

3. $$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}z_1\sqrt{3} + \frac{1}{2}z_2\sqrt{2} - \frac{1}{6}z_3\sqrt{6} - 3 \\ x_2 = \frac{1}{3}z_1\sqrt{3} - \frac{1}{2}z_2\sqrt{2} - \frac{1}{6}z_3\sqrt{6} - 3 \\ x_3 = -\frac{1}{3}z_1\sqrt{3} \qquad\qquad\; - \frac{1}{3}z_3\sqrt{6} \end{cases}$$

$z_2^2 + 3z_3^2 - 8 = 0$ elliptische cylinder.

4b) geen uniforme convergentie voor $0 \leqslant x \leqslant 1$.

<u>15 januari 1962</u>

1a) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{120}$ $(y = \sin\sqrt{x})$.

b) $C\,(x^4 + 2x^2 + y^2 + 1)\, e^{2\arctan\frac{y}{x^2+1}} = 1$.

2a) Er zijn drie <u>verschillende</u> eigenwaarden: $0, \pm 1$.

b) $$\left.\begin{array}{l} \lambda = 0 \rightarrow (-2,2,1) \\ \lambda = 1 \rightarrow (-3,2,1) \\ \lambda = -1 \rightarrow (1,-1,0) \end{array}\right\} \qquad S = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3a) $\dfrac{u \sin u + \cos u - 1}{u^2}$

$t \cos ut$ is voor $0 \leqslant t \leqslant 1$ en alle u continu in beide variabelen samen.

b) $f(x)$ is gelijk aan zijn Fourier-integraal, omdat

$$f(\ 1) = \tfrac{1}{2}(f(1+0) + f(1-0)) \text{ en}$$
$$f(-1) = \tfrac{1}{2}(f(-1+0)+ f(-1-0))$$

terwijl $f(x)$ verder continu is.

4a) De reeks is uniform convergent.

14 juni 1962

1a) Er is een rechte van middelpunten $\underline{x} = (3,1,0) + \rho(1,0,-1)$.

b)
$$\lambda_1 = 0 \rightarrow v_1 = (\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\quad 0,\quad -\tfrac{1}{2}\sqrt{2})$$
$$\lambda_2 = -2 \rightarrow v_2 = (\tfrac{1}{6}\sqrt{6},\quad -\tfrac{1}{3}\sqrt{6},\quad \tfrac{1}{6}\sqrt{6})$$
$$\lambda_3 = +4 \rightarrow v_3 = (-\tfrac{1}{3}\sqrt{3},\quad \tfrac{1}{3}\sqrt{3},\quad -\tfrac{1}{3}\sqrt{3})$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2} z_1 \sqrt{2} + \tfrac{1}{6} z_2 \sqrt{6} - \tfrac{1}{3} z_3 \sqrt{3} + 3$$
$$x_2 = \quad - \tfrac{1}{3} z_2 \sqrt{6} + \tfrac{1}{3} z_3 \sqrt{3} + 1$$
$$x_3 = -\tfrac{1}{2} z_1 \sqrt{2} + \tfrac{1}{6} z_2 \sqrt{6} - \tfrac{1}{3} z_3 \sqrt{3}$$

c) $-2z_2^2 + 4z_3^2 = 0$, reëel snijdend vlakkenpaar.

2a) $f(x) \sim \frac{1}{4}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right]$

b) $x \neq \pi$.

3. $y = \sqrt{x} \,.\, \{ A + B \log x \}$.

4b) $- p \frac{\pi}{I_+} + (p^2 - 1) Y + \mathcal{L}\{g\} = 0$.

c) met convoluties.

<u>15 januari 1963</u>

1a) $x^4 y^2 + x^2 = C.$

b) $y = a_1 x - a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3n-1}$, $y = x$.

2a) $f_1(u) = \frac{2u \sin 2\pi u}{\sqrt{2\pi}(u^2 - 1)}$ voor $|u| \neq 1$ en $= \sqrt{2\pi}$ voor $|u| = 1$.

b) $y = e^x + \sin x$, $z = e^x + \cos x$.

3a) $(\underline{y}, A\underline{x}) = (A\underline{y}, \underline{x})$.

b) $\lambda_1 = 2$, $\underline{x} = \alpha(1,1,1) = \alpha\underline{p}$

$\lambda_{2,3} = -1$, alle $\underline{x}$ met $(\underline{x}, \underline{p}) = 0$.

c) $2y_1^2, -y_2^2 - y_3^2 = 6$
2-bladige hyperboloïde.

4a) $|x| \leqslant 1$.

<u>6 juni 1963</u>

1a) $\log(x^2 + y^2) + 2 \arctan \frac{y}{x} = C$.

b) $\frac{1}{x^2 + y^2}$.

2a) N.b. $f(-x) \neq -x(2\pi + x)$.

b) $a_0 = \frac{4}{3}\pi^2$, $a_k = \frac{-4}{k^2}$, $b_k = 0$.

d) $\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \frac{16}{15}\pi^4$.

3a) Aan $\underline{v} = (1,0,0)$ is toegevoegd $(A\underline{v},\underline{x}) = 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0$. De richtingen $\underline{w}$ met hetzelfde toegevoegde vlak voldoen aan $A\underline{w} = (5,-4,-2)$; $\underline{w} = (1,0,0) + \lambda(2,2,1)$.

b)
$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{2}{3}y_1 + \tfrac{1}{5}\sqrt{5}\,y_2 - \tfrac{4}{15}\sqrt{5}\,y_3 \\ x_2 &= \tfrac{2}{3}y_1 \phantom{+ \tfrac{1}{5}\sqrt{5}\,y_2} + \tfrac{5}{15}\sqrt{5}\,y_3 \\ x_3 &= \tfrac{1}{3}y_1 - \tfrac{2}{5}\sqrt{5}\,y_2 - \tfrac{2}{15}\sqrt{5}\,y_3 \end{aligned}$$

$9(y_2^2 + y_3^2) - 1 = 0$

elliptische cylinder

4a) voor alle reële x.

b) ja.

Wiskunde IV

15 juni 1959

2b) $b_1 = -\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$

$b_2 = -\frac{1}{2}\frac{z^2}{x^2 + y^2}$

$b_3 = 0.$

$\underline{b}$ is een vectorpotentiaal van $\underline{a}$ buiten de z-as.

c) 0.

3a) $x_1 = -1 + \frac{1}{3}z_1 - \frac{2}{3}z_2 + \frac{2}{3}z_3$

$x_2 = 2 - \frac{2}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 + \frac{2}{3}z_3$

$x_3 = -\frac{2}{3}z_1 - \frac{2}{3}z_2 - \frac{1}{3}z_3$

b) $-18z_1^2 + 9z_2^2 - 9 = 0.$

c) hyperbolische cylinder.

4. $x = \xi = -\frac{1}{2}$; $y = -\eta = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

4 januari 1960

1. $(3x_1 + 4x_2 + 4)(3x_1 + 4x_2 - 16) = 0$
evenwijdig lijnenpaar.

2. G': $(0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{5},\quad 0 \leqslant v \leqslant \frac{2}{5}).$

$\frac{2}{25}.$

3. 2.

4a) $\left.\begin{array}{l} x = \pm 2\sqrt{6} \\ y = \pm 18\sqrt{6} - 1 \end{array}\right\}$ $\Delta < 0$ geen extreem.

b) $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \Delta = 0 \\ f = 0 \end{array}$ Stel $x = h,\ y = -1 + k.$ minimum

<u>.. juni 1960</u>

1. middelpunt bijv. (-1,0,0)

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{10}}$ (3,0,1)

$\lambda_2 = 1 \Rightarrow$ (0,1,0)

$\lambda_3 = 10 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{10}}$ (-1,0,3)

$z_2^2 + 10z_3^2 = 0$ imaginair snijdend vlakkenpaar.

2. $\underline{0}$

$4 + \frac{\pi}{2}$.

3. rang funktionaalmatrix = 2 in het algemeen
= 0 als w = u + v = 0.

singuliere punten $\underline{u} = \lambda(1,-1,0)$.

beeldpunten $x^2 + y^2 = z^2$ kegel met top in O.

<u>11 januari 1961</u>

1. $x_1 = 1 + \frac{3}{5}z_2 + \frac{4}{5}z_3$

$x_2 = -2 + z_1$

$x_3 = \frac{4}{5}z_2 - \frac{3}{5}z_3$

$z_1^2 + z_2^2 + 2z_3^2 = 1$. ellipsoïde.

2. $\begin{cases} b_1 = \cos(x+z) + yz - x^2y \\ b_2 = -e^{yz} \\ b_3 = 0 \end{cases}$

$\frac{\pi}{4}$.

3a) $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, $y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\lambda = \pm\frac{5}{18}\sqrt{\frac{3}{7}}$.

b) $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{14}}$, $y = \mp 2\sqrt{\frac{1}{14}}$, $\lambda = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{14}}$.

a) geeft afstand $\frac{1}{6}\sqrt{2}$, b) geeft afstand $\frac{1}{2}$

dus

a) minimum, b) maximum.

4. $2(\sqrt{2} - 1)$.

<u>19 juni 1961</u>

1. Absoluut minimum 0 in $(0,0)$
   Absoluut maximum $1 + \sqrt{2}$ in $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$.

2. neen, 13.

3. 0 (niet gedefinieerd in de oorsprong)
   2π.

4. $\frac{\pi}{2}(1 - \frac{2}{e})$.

<u>10 januari 1962</u>

1. $(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ en $(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

2a) $g_1(\xi) = \frac{1}{2}$ als $|\xi| \leqslant 1$
   $g_1(\xi) = 0$ elders
   $g_2(\eta) = \frac{1}{2}$ als $|\eta| \leqslant 1$
   $g_2(\eta) = 0$ elders.

 b) $\frac{1}{3}$.

 c) neen.

3a) $\frac{2}{r}$.

 b) $\frac{5}{4}\pi$.

4. $\frac{1}{4}$.

<u>18 juni 1962</u>

1. Absoluut minimum -36 in $(-6,3)$ en $(6,-3)$
   Absoluut maximum 180 in $(6,3)$ en $(-6,-3)$.

2b) $\frac{2}{3}$.

3a) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{\pi}$.

 b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$.

 c) $m = 0$, $\sigma = 1$.

4a) 2.

 b) $u = (2k+1)\pi$, v willekeurig (k geheel). (rang = 1) beeldvector $(0,0,0)$.

 c) $4\pi^2$.

   <u>Opm</u>. De beeldpunten liggen op een torus, waarvan de oorsprong singulier punt is.

7 januari 1963

1) Globaal maximum in $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}},0\right)$, globaal minimum in $(1, \pm\frac{2}{3}\sqrt{3})$.

2a) $G: 0 < x \leqslant y \leqslant x \tan 1,\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant e^2$.
Bij elk punt van G' behoort één punt van G, en ook omgekeerd:

$$u = \arctan(y/x),\quad v = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2).$$

b) $\frac{1}{2}(1 - \frac{\pi^2}{16})$.

3a) $\displaystyle\int_{S^*_{z=1}} (\text{grad } f, \underline{n})d\sigma + \int_G \Delta f\, d\tau = 2\pi + 2.\frac{2\pi}{3} = \frac{10}{3}\pi.$

b) $\alpha = \frac{1}{3}$
$(z \sin x \sinh y - \frac{2}{3}yz, -z\cos x\cosh y + \frac{2}{3}xz + 1, 0)$.

4a) $f(\zeta) = 10000$ voor $|\zeta| \leqslant 5.10^{-5}$ en $= 0$ voor $|\zeta| > 5.10^{-5}$
$\mu = 0,\ \sigma = 10^{-4}.\ \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

b) 2.10^{-4}.

c) $n \leqslant 75$.

14 juni 1963

1) 32π.

2a) $2x/y$

b) 6.

3) $P(V) = \frac{7}{12}$, $P(V|U) = \frac{1}{2}$; neen.

4) Locaal minimum 1 in $(-2,0)$,
Locaal maximum $-\frac{8}{7}$ in $(\frac{16}{7},0)$.