

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE IV

Gegeven in het Voorjaarssemester 1964

**Onderafdeling
der Wiskunde**

Wiskunde IV

GEGEVEN IN HET

VOORJAARSSEMESTER 1964

TYPENR. VERZORGD DOOR MEJ.A.N.M. VAN DE GRIENDT



**TECHNISCHE HOGESCHOOL
EINDHOVEN**

Aanvullende Inhoudsbeschrijving Wiskunde IV:

Hoofdstuk VI	STATISTIEK	VI.1 t/m VI.59
§.1	Inleiding. Kansrekening en statistiek	VI.1
§.2	<i>Permutaties, variaties, combinaties</i>	VI.6
§.3	Grondslagen der kansrekening	VI.13
§.4	Numerieke populaties of verdelingen	VI.28
§.5	Continue toevalsvariabelen	VI.38
§.6	Toepassingen in de statistiek	VI.57

(20 Mei 2005, JdG)

Jan de Graaf.

ONDERAFDELING DER WISKUNDE

W I S K U N D E I V

Gegeven in het voorjaarssemester 1964

T e c h n i s c h e H o g e s c h o o l E i n d h o v e n

Hoofdstuk IV	<u>Functies van meer veranderlijken</u>	IV.1 t/m IV.45
§.1	Vectornotatie. Functionaalmatrix.	IV.1
§.2	Stelling van het gemiddelde. Formule van Taylor.	IV.11
§.3	Parametervoorstellingen en impliciete functies. Afhankelijkheid.	IV.15
§.4	Extrema bij functies van meer veranderlijken.	IV.29
§.5	Transformatie van meervoudige integralen.	IV.41
Hoofdstuk V	<u>Vectoranalyse</u>	V.1 t/m V.38
§.1	Lijn- en oppervlakte-integralen.	V.1
§.2	De integraalstellingen.	V.8
§.3	Toepassingen. De formules van Green.	V.21
§.4	Transformatie van coördinaten.	V.27
§.5	De scalaire potentiaal en de vectorpotentiaal.	V.32
Hoofdstuk VI	<u>Statistiek</u> volgt nog	

HOOFDSTUK IV FUNCTIES VAN MEER VERANDERLIJKEN

§.1 Vectornotatie. Functionaalmatrix.

We beschouwen een functie $f(x,y)$ van twee veranderlijken. Deze voegt aan een getallenpaar (x,y) een getal $f(x,y)$ toe. Getallenparen (x,y) kunnen we opvatten als vectoren van R_2 . We kunnen dus ook zeggen, dat de functie aan een vector \underline{x} van R_2 een getal $f(\underline{x})$ toevoegt.

Algemener kunnen we bij een functie $f(x_1, \dots, x_n)$ van n veranderlijken het n -tal (x_1, \dots, x_n) als een vector \underline{x} van R_n opvatten en zeggen, dat de functie aan een vector \underline{x} van R_n een getal $f(\underline{x})$ toevoegt.

We kunnen dit nog verder uitbreiden, door een stelsel $f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$ van m functies van n veranderlijken te beschouwen. Aan een n -tal (x_1, \dots, x_n) zijn dan m functiewaarden

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$$

toegevoegd; deze y_1, \dots, y_m kunnen we weer opvatten als een vector in R_m .

Met het stelsel van m functies correspondeert dan één vectorfunctie $\underline{f}(\underline{x})$, die aan een vector \underline{x} van R_n een vector $\underline{f}(\underline{x})$ van R_m toevoegt.

De in het eerstejaars college besproken lineaire afbeeldingen zijn voorbeelden van dergelijke vectorfuncties.

Een vectorfunctie hoeft niet voor alle vectoren \underline{x} van R_n gedefinieerd te zijn. (Dit is analoog met het feit, dat een gewone getallenfunctie niet voor alle reële getallen gedefinieerd hoeft te zijn). Het kan zijn dat dit slechts voor zekere geoorloofde vectoren \underline{x} het geval is.

Als voorbeeld beschouwen we de transformatieformules voor de overgang op bolcoördinaten

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} .$$

Dit is op te vatten als een vectorfunctie die aan de vector (r, θ, φ) een andere vector (x, y, z) toevoegt. Daar de formules voor alle (r, θ, φ) zinvol zijn, kunnen we al deze vectoren als geoorloofde vectoren toelaten. Men beperkt zich echter vaak tot $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Als men dit doet, behoort men dit er, om misverstand te vermijden, echter bij te vermelden.

Een ander voorbeeld is een parametervoorstelling van een ruimtekromme: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Deze geeft een vectorfunctie $\underline{x} = \underline{x}(t)$, die aan een getal t (ééndimensionale vector) een vector $\underline{x}(t)$ toevoegt, nl. de vector \overrightarrow{OP} als P het punt van de kromme is.

We willen nu voor vectorfuncties begrippen als continuïteit en differentieerbaarheid invoeren. Om dit te doen, maken we gebruik van het begrip lengte $|\underline{a}|$ van een vector \underline{a} . Deze is in R_n ingevoerd met behulp van het inwendige product $(\underline{a}, \underline{b})$ en wel door

$$|\underline{a}| = \sqrt{(\underline{a}, \underline{a})}.$$

Deze lengte heeft de volgende eigenschappen

$$|\underline{a}| \geq 0 \text{ en alleen dan } = 0, \text{ als } \underline{a} = \underline{0},$$

$$|\lambda \underline{a}| = |\lambda| |\underline{a}|,$$

$$|\underline{a} + \underline{b}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}|.$$

Deze eigenschappen volgen uit eigenschappen van het inwendige product. Voor de derde tonen we dit aan. We gaan uit van de ongelijkheid van Schwarz

$$(\underline{a}, \underline{b})^2 \leq (\underline{a}, \underline{a}) (\underline{b}, \underline{b}).$$

Hieruit volgt

$$(\underline{a}, \underline{b}) \leq |\underline{a}| |\underline{b}|;$$

let wel dat dit ook goed is als $(\underline{a}, \underline{b})$ negatief is. Nu is

$$\begin{aligned} |\underline{a} + \underline{b}|^2 &= (\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \underline{b}) = (\underline{a}, \underline{a}) + 2(\underline{a}, \underline{b}) + (\underline{b}, \underline{b}) \leq \\ &\leq |\underline{a}|^2 + 2|\underline{a}| |\underline{b}| + |\underline{b}|^2 = (|\underline{a}| + |\underline{b}|)^2, \end{aligned}$$

waaruit door worteltrekking $|\underline{a} + \underline{b}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}|$ volgt (beide leden zijn ≥ 0).

Meetkundig is het de bekende ongelijkheid van de zijden van een driehoek.

Als $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, dan volgt uit $|\underline{a}| = \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}$ direct, dat

$$|a_j| \leq |\underline{a}| \text{ voor } j = 1, \dots, n.$$

We zeggen nu dat twee vectoren \underline{a} en \underline{b} weinig verschillen als $|\underline{a} - \underline{b}|$ klein is.

Een vectorfunctie $\underline{f}(\underline{x})$ noemen we continu in \underline{a} als $\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{a})$ willekeurig klein gemaakt kan worden door \underline{x} voldoende dicht bij \underline{a} te nemen.

Nauwkeuriger: bij iedere $\epsilon > 0$ bestaat een $\delta > 0$, zo dat voor alle geoorloofde vectoren \underline{x} met $|\underline{x} - \underline{a}| < \delta$ geldt $|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{a})| < \epsilon$.

Noemen we $\underline{x} - \underline{a} = \underline{h}$, dan kunnen we dit ook zo formuleren: voor die $|\underline{h}| < \delta$ waarvoor $\underline{a} + \underline{h}$ een geoorloofde vector is, geldt

$$|\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a})| < \epsilon.$$

In het speciale geval, dat $\underline{f}(\underline{x})$ een gewone functie $f(x_1, \dots, x_n)$ van n veranderlijken is (dus functie van R_n in R_1) komt de hier gegeven definitie op hetzelfde neer als de in het eerste jaar gegeven definitie, die als volgt luidde (toen slechts voor twee veranderlijken geformuleerd):

$f(x_1, \dots, x_n)$ is continu in (a_1, \dots, a_n) , als

$$|f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n)| < \varepsilon$$

te krijgen is door h_1, \dots, h_n klein genoeg te nemen.

Het verschil is slechts, dat toen gezegd werd, dat h_1, \dots, h_n klein zijn, terwijl nu gezegd wordt dat voor de vector $\underline{h} = (h_1, \dots, h_n)$ geldt dat $|\underline{h}|$ klein is. Daar echter $|\underline{h}| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$, volgt uit $|\underline{h}| < \delta$, direct dat $|h_1| < \delta, \dots, |h_n| < \delta$ en omgekeerd uit

$$|h_1| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}, \dots, |h_n| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}, \text{ dat } |\underline{h}| < \delta.$$

We kunnen een vectorfunctie $f(\underline{x})$ weer in componenten splitsen $\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x}))$; deze m functies $f_1(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x})$ heten de componentfuncties van $\underline{f}(\underline{x})$.

Stelling | Een vectorfunctie $\underline{f}(\underline{x})$ is dan en slechts dan continu in \underline{a} als al haar componentfuncties in \underline{a} continu zijn.

Bewijs. Stel $\underline{f}(\underline{x})$ continu in \underline{a} . Dan is voor iedere $\varepsilon > 0$

$$|\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a})| < \varepsilon$$

te krijgen door $|\underline{h}|$ klein genoeg te nemen.

Daar echter voor iedere j met $1 \leq j \leq m$ geldt

$$|f_j(\underline{a} + \underline{h}) - f_j(\underline{a})| \leq |\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a})|,$$

geldt hetzelfde voor alle componentfuncties $f_j(\underline{x})$.

Stel nu omgekeerd, dat alle componentfuncties continu in \underline{a} zijn, d.w.z. bij iedere $\varepsilon > 0$ en iedere j met $1 \leq j \leq m$ kan men

$$(1) \quad |f_j(\underline{a} + \underline{h}) - f_j(\underline{a})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

krijgen door $|\underline{h}|$ voldoende klein te nemen. Stel dat dit voor $|\underline{h}| < \delta_j$ het geval is. Als δ de kleinste van de getallen $\delta_1, \dots, \delta_m$ is, is, voor $|\underline{h}| < \delta$, (1) voor alle j vervuld. Maar dan is

$$|\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a})| = \sqrt{\sum_{j=1}^m (f_j(\underline{a} + \underline{h}) - f_j(\underline{a}))^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon,$$

dus $\underline{f}(\underline{x})$ is continu in \underline{a} .

Stelling | Als A een lineaire afbeelding van R_n in R_m is, bestaat er een positief getal M , zo dat $|A\underline{x}| \leq M|\underline{x}|$ voor alle \underline{x} in R_n .

Bewijs: Laat $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ de natuurlijke basis van R_n zijn. Hiermee is bedoeld, dat $\underline{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ met een 1 op de j^e plaats en elders nullen. Voor

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \text{ geldt dan } \underline{x} = \sum_{j=1}^n x_j \underline{e}_j.$$

$$\begin{aligned} \text{Nu is } \underline{Ax} &= \sum_{j=1}^n x_j \underline{Ae}_j, \text{ dus } |\underline{Ax}| = \left| \sum_{j=1}^n x_j \underline{Ae}_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j \underline{Ae}_j| = \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j| |\underline{Ae}_j| \leq \sum_{j=1}^n |\underline{x}| |\underline{Ae}_j| = |\underline{x}| \sum_{j=1}^n |\underline{Ae}_j|. \end{aligned}$$

Stellen we nu $M = \sum_{j=1}^n |\underline{Ae}_j|$, dan is $|\underline{Ax}| \leq M|\underline{x}|$ voor alle \underline{x} in R_n .

Stelling Een lineaire afbeelding A van R_n in R_m is overal continu.

Bewijs: Laat M een positieve constante zijn, zo dat $|\underline{Ax}| \leq M|\underline{x}|$ voor alle \underline{x} in R_n . Neem nu een willekeurige \underline{a} in R_n . Dan geldt

$$|A(\underline{a} + \underline{h}) - A\underline{a}| = |A(\underline{a} + \underline{h} - \underline{a})| = |\underline{Ah}| \leq M|\underline{h}|.$$

Dus voor $|\underline{h}| < \frac{\epsilon}{M}$ geldt $|A(\underline{a} + \underline{h}) - A\underline{a}| < \epsilon$, waaruit de continuïteit volgt.

Opm. We hadden de continuïteit van A ook kunnen bewijzen, door op componenten over te gaan.

We gaan nu over op differentieerbaarheid. We zullen een vectorfunctie differentieerbaar in \underline{a} noemen als zij dicht bij \underline{a} bij benadering lineair is. We zullen dit nu nader preciseren. Als $\underline{f}(\underline{x})$ een vectorfunctie van R_n in R_m is en \underline{a} een vector van R_n , dan zullen we voor differentieerbaarheid in \underline{a} eisen dat er een lineaire afbeelding A van R_n in R_m bestaat, zo dat

$$\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a}) - \underline{Ah} = \underline{r}$$

de eigenschap heeft dat $|\underline{r}| < |\underline{h}|\epsilon$ als $|\underline{h}|$ voldoende klein is. Men noemt dan A de functionaaloperator van $\underline{f}(\underline{x})$ in \underline{a} .

We kunnen het ook anders formuleren. Voeren we de functie $\underline{e}(\underline{h})$ in door de volgende definitie

$$\underline{e}(\underline{0}) = \underline{0},$$

$$\underline{e}(\underline{h}) = \frac{1}{|\underline{h}|} \{ \underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a}) - \underline{Ah} \} \text{ voor die } \underline{h} \neq \underline{0}, \text{ waarvoor}$$

$\underline{f}(\underline{a} + \underline{h})$ gedefinieerd is, dan geldt voor de hierboven gedefinieerde \underline{r} dat $\underline{r} = |\underline{h}| \underline{e}(\underline{h})$, ook voor $\underline{h} = \underline{0}$. De aan \underline{r} opgelegde voorwaarde komt nu hierop neer, dat $\underline{e}(\underline{h})$ continu is in $\underline{0}$. Dus:

Een vectorfunctie $\underline{f}(\underline{x})$ is differentieerbaar in \underline{a} als er een lineaire afbeelding A en een vectorfunctie $\underline{e}(\underline{h})$ bestaat, zo dat $\underline{e}(\underline{0}) = \underline{0}$, $\underline{e}(\underline{h})$ continu is in $\underline{0}$ en

$$(2) \quad \underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) = \underline{f}(\underline{a}) + \underline{Ah} + |\underline{h}| \underline{e}(\underline{h}).$$

Stelling | Een vectorfunctie $\underline{f}(\underline{x})$, die differentieerbaar is in \underline{a} , is continu in \underline{a} .

Bewijs: Uit (2) volgt

$$|\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a})| = |A\underline{h} + \underline{e}(\underline{h})| \leq |A\underline{h}| + |\underline{e}(\underline{h})|.$$

Uit $A\underline{0} = \underline{0}$, $\underline{e}(\underline{0}) = \underline{0}$ en de continuïteit van A en \underline{e} voor $\underline{h} = \underline{0}$ volgt direct dat dit $< \epsilon$ te krijgen is voor voldoende kleine \underline{h} .

We gaan nu na, wat het voor de componentfuncties betekent, dat $\underline{f}(\underline{x})$ differentieerbaar is in \underline{a} . Stel dat $\underline{y} = A\underline{x}$ er in componenten uitgeschreven als volgt uitziet

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad \text{voor } i = 1, \dots, m,$$

en dat $e_1(\underline{x}), \dots, e_m(\underline{x})$ de componentfuncties van $\underline{e}(\underline{x})$ zijn. Dan is

$$f_i(\underline{a} + \underline{h}) - f_i(\underline{a}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} h_j + |\underline{h}| e_i(\underline{h});$$

hierin is $e_i(\underline{0}) = 0$ en $e_i(\underline{h})$ continu in $\underline{0}$. Dit betekent echter juist, dat de functie f_i differentieerbaar is (ook in de zin, waarin in het eerste jaar differentieerbare functies van meer veranderlijken zijn ingevoerd); de a_{ij} zijn nl. juist de partiële afgeleiden van f_i naar x_j . Houd nl. alle x_j vast op één na, bv.

$$x_1 \text{ variabel, } x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n, \text{ dus } h_1 \text{ variabel, } h_2 = \dots = h_n = 0.$$

Dan is $|\underline{h}| = |h_1|$ en

$$f_i(a_1 + h_1, a_2, \dots, a_n) - f_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_{i1} h_1 + |h_1| e_i(\underline{h}),$$

$$\frac{f_i(a_1 + h_1, a_2, \dots, a_n) - f_i(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h_1} = a_{i1} + e_i(\underline{h}),$$

met \dagger naar gelang $h_1 > 0$ of $h_1 < 0$. Neemt men hiervan de limiet voor $h_1 \rightarrow 0$, dan vinden we

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right)_{\underline{x}=\underline{a}} = a_{i1}.$$

Met de andere variabelen gaat dit analoog, dus

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\underline{x}=\underline{a}}$$

De matrix van de functionaaloperator heet functionaalmatrix; deze ziet er dus als volgt uit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Als $m = n$, kan men van deze matrix de determinant vormen, die functionaaldeterminant, of determinant van Jacobi of Jacobiana genoemd wordt. Voor deze determinant bestaat nog de volgende notatie

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

De rijen van de functionaalmatrix corresponderen met de componentfuncties.

Op grond van het voorafgaande is de volgende stelling duidelijk

Stelling | Een vectorfunctie is dan en slechts dan differentieerbaar als al haar componentfuncties differentieerbaar zijn.

We moeten in gedachten houden dat de functionaaloperator A van een differentieerbare functie $\underline{f}(\underline{x})$ niet alleen van de functie afhangt, maar ook van de plaats \underline{a} , waar de differentieerbaarheid is beschouwd. Als de functie niet alleen in \underline{a} , maar in een heel gebied differentieerbaar is, dan wordt de functionaaloperator zelf weer afhankelijk van de plaats waar de differentiatie is uitgevoerd. Hetzelfde geldt natuurlijk voor de functionaalmatrix en eventueel de functionaaldeterminant. De elementen van de functionaalmatrix zijn partiële afgeleiden; in het eerste jaar is al opgemerkt dat zulke partiële afgeleiden zelf weer functies van alle veranderlijken zijn.

Vb.1 We beschouwen de transformatieformules van overgang op poolcoördinaten $\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\}$ als vectorfunctie van (r, φ) naar (x, y) .

De functionaalmatrix is $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$, de functionaaldeterminant

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = r.$$

Een speciaal geval is één functie van n veranderlijken (dus een afbeelding van R_n in R_1). De functionaalmatrix wordt een matrix met één rij en n kolommen, dat is een rijvector, die er als volgt uitziet

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

en die de gradiënt van de functie f genoemd wordt.

Notatie: $\text{grad } f$, of ∇f .

Een ander speciaal geval is een vectorfunctie $\underline{x}(t)$ van één veranderlijke (afbeelding van R_1 in R_n ; parametervoorstelling van een kromme). De functionaalmatrix is nu een matrix met n rijen en één kolom, dat is een kolomvector van de volgende gedaante

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, \text{ dié ook wel met } \frac{d\underline{x}}{dt} \text{ genoteerd wordt.}$$

Meetkundig geeft deze vector de richting van de raaklijn aan de kromme. Immers de vector $\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)$ geeft de richting van de koorde die de punten $\underline{x}(t)$ en $\underline{x}(t+h)$ verbindt. De vector $\frac{1}{h} \{ \underline{x}(t+h) - \underline{x}(t) \}$ heeft dezelfde richting; de limiet hiervan voor $h \rightarrow 0$ is $\frac{d\underline{x}}{dt}$.

Vb.2 Schroeflijn bepaald door de parametervoorstelling

$$\left. \begin{array}{l} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{array} \right\}. \text{ Deze schroeflijn ligt op de cilinder } x^2 + y^2 = a^2 \text{ en}$$

heeft de spoed $2\pi b$. De raaklijn heeft de richting

$(\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \frac{dy}{dt} = a \cos t, \frac{dz}{dt} = b)$, die gelegen is in het raakvlak aan de cilinder. Immers dit raakvlak heeft $(a \cos t, a \sin t, 0)$ als normaal.

→ We gaan nu na, wat de functionaaloperator van een samengestelde functie is. Laat $\underline{f}(\underline{x})$ een vectorfunctie zijn van R_n in R_m , die differentieerbaar is in \underline{a} met functionaaloperator A , dus

$$\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) = \underline{f}(\underline{a}) + A\underline{h} + |\underline{h}| \underline{e}_1(\underline{h}),$$

waarbij $\underline{e}_1(\underline{0}) = \underline{0}$ en $\underline{e}_1(\underline{h})$ continu in $\underline{0}$. Noem $\underline{f}(\underline{a}) = \underline{b}$. Laat $\underline{g}(\underline{y})$ een vectorfunctie zijn van R_m in R_p , die differentieerbaar is in \underline{b} met functionaaloperator B , dus

$$\underline{g}(\underline{b} + \underline{k}) = \underline{g}(\underline{b}) + B\underline{k} + |\underline{k}| \underline{e}_2(\underline{k}),$$

waarbij $\underline{e}_2(\underline{0}) = \underline{0}$ en $\underline{e}_2(\underline{k})$ continu in $\underline{0}$. Neem nu $\underline{k} = \underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a})$, dan komt er

$$\begin{aligned} \underline{g}(\underline{f}(\underline{a} + \underline{h})) &= \underline{g}(\underline{f}(\underline{a})) + B(\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a})) + \\ &\quad + |\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a})| \underline{e}_2(\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a})) = \\ &= \underline{g}(\underline{f}(\underline{a})) + BA\underline{h} + |\underline{h}| \underline{e}_3(\underline{h}), \text{ waarbij } \underline{e}_3(\underline{h}) \text{ als volgt} \end{aligned}$$

gedefinieerd is:

$$\underline{e}_3(\underline{0}) = \underline{0}.$$

$$\underline{e}_3(\underline{h}) = B(\underline{e}_1(\underline{h})) + \frac{|\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a})|}{|\underline{h}|} \underline{e}_2(\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a})) \text{ voor } \underline{h} \neq \underline{0}.$$

Om aan te tonen, dat $\underline{g}(\underline{f}(\underline{x}))$ differentieerbaar is in \underline{a} met functionaaloperator BA behoeven we slechts te bewijzen, dat $\underline{e}_3(\underline{h})$ continu is in $\underline{0}$.

Om dit uit te voeren bedenken we dat er een positieve constante M is, zo dat $|\underline{A}\underline{h}| \leq M|\underline{h}|$ voor alle \underline{h} . Nu geldt voor $\underline{h} \neq \underline{0}$:

$$\frac{|f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a})|}{|\underline{h}|} = \frac{|\underline{A}\underline{h} + |\underline{h}| \underline{e}_1(\underline{h})|}{|\underline{h}|} \leq \frac{|\underline{A}\underline{h}| + |\underline{h}| |\underline{e}_1(\underline{h})|}{|\underline{h}|} \leq M + |\underline{e}_1(\underline{h})|.$$

Dus

$$|\underline{e}_2(\underline{h})| \leq |B(\underline{e}_1(\underline{h}))| + (M + |\underline{e}_1(\underline{h})|) |\underline{e}_2(f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}))|,$$

en op grond van de continuïteit van de hierin voorkomende functies is dit kleiner dan ϵ te krijgen door $|\underline{h}|$ voldoende klein te kiezen. Hiermee is de volgende belangrijke stelling bewezen:

Stelling De samengestelde functie $\underline{g}(f(\underline{x}))$ van twee differentieerbare functies $\underline{g}(\underline{y})$ en $f(\underline{x})$ is differentieerbaar en haar functionaaloperator is het product van de functionaaloperatoren van \underline{g} en f en dus is haar functionaalmatrix het product van de functionaalmatrices van \underline{g} en f (Kettingregel).

In deze stelling zijn alle in het eerste jaar behandelde kettingregels voor afgeleiden van de eerste orde samengevat. B.v. als $z = z(x, y)$ en $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ dan geldt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix},$$

$$\text{dus } \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Evenals vroeger kunnen we nu ook differentialen invoeren. De differentiaal $d\underline{x}$ van een vector \underline{x} is ook een vector. Als $\underline{z} = f(\underline{x})$, met functionaaloperator A dan definiëren we de differentiaal $d\underline{z}$ door $d\underline{z} = A(d\underline{x})$.

We kunnen dan ook symbolisch $\frac{d\underline{z}}{d\underline{x}} = A$ schrijven. Een quotiënt van twee

differentialen is dus nu een lineaire afbeelding. We krijgen nu de formule $d\underline{z} = \frac{d\underline{z}}{d\underline{x}} d\underline{x}$. De kettingregel is dan als volgt in formule te brengen:

$$\frac{d\underline{z}}{d\underline{u}} = \frac{d\underline{z}}{d\underline{x}} \frac{d\underline{x}}{d\underline{u}}. \text{ Bij het rekenen met differentialen moeten we er steeds}$$

goed op letten, wat onafhankelijke en wat afhankelijke veranderlijken zijn.

Op grond van de productregel voor determinanten, geldt, als alle betrokken vectoren in ruimten met dezelfde dimensie liggen, dat de functionaaldeterminant van een samengestelde functie het product is van de functionaaldeterminanten van de samenstellende functies:

$$\frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

Gaan we bij een kromme $\underline{x} = \underline{x}(t)$ over op een andere parameter s door

$t = t(s)$, dan is $\frac{d\underline{x}}{ds} = \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{dt}{ds}$; d.w.z. de vector in de raakrichting wordt met een scalaire factor $\frac{dt}{ds}$ vermenigvuldigd en verandert dus niet van

richting. Het is meetkundig ook plausibel, dat de richting van de raaklijn niet van de parameterkeuze op de kromme afhangt.

We beschouwen nog eens één functie van n veranderlijken $f(\underline{x})$. Bij de bepaling van een partiële afgeleide zoals $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ wordt alleen x_1 gevarieerd en de overige variabelen x_2, \dots, x_n vastgehouden. Dit komt er op neer dat we de variatie van \underline{x} beperken tot de richting van de x_1 -as en zo een functie van één veranderlijke overhouden. We kunnen dit echter ook voor andere richtingen doen.

Neem een vector \underline{v} en beschouw de rechte lijn door \underline{a} met richting \underline{v} ; deze heeft een parametervoorstelling $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{v}$ met parameter t . Als $|\underline{v}| = 1$, is $|t|$ de afstand van \underline{x} tot \underline{a} . We beschouwen de functie f nu op deze lijn; het gedrag wordt beschreven door $g(t) = f(\underline{a} + t\underline{v})$, hetgeen één functie van één veranderlijke is met als functionaalmatrix een matrix met één rij en één kolom, die dus uit één element bestaat, dat juist de afgeleide $\frac{dg}{dt}$ is. Met behulp van de kettingregel toegepast op de samengestelde functie van $f(\underline{x})$ en $\underline{a} + t\underline{v}$, vinden we

$$\frac{dg}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} = (\text{grad } f, \underline{v}). \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}$$

Als $|\underline{v}| = 1$, heet dit de richtingsafgeleide van $f(\underline{x})$ in de richting \underline{v} . Nemen we de richting van een coördinaatas bv. $\underline{v} = (1, 0, \dots, 0)$, dan krijgen we de gewone partiële afgeleiden terug. De richtingsafgeleiden in een punt hangen nu op grond van bovenstaande formule op eenvoudige wijze met de gradiënt samen. Meetkundig is de richtingsafgeleide in de richting \underline{v} de lengte van de projectie van grad f op \underline{v} met plus- of minteken, naar gelang de projectie in dezelfde richting of in de tegengestelde richting van \underline{v} valt. Immers de hoek φ tussen grad f en \underline{v} wordt bepaald door

$$\cos \varphi = \frac{(\text{grad } f, \underline{v})}{|\text{grad } f| |\underline{v}|}.$$

We hebben echter $|\underline{v}| = 1$ verondersteld, dus $(\text{grad } f, \underline{v}) = |\text{grad } f| \cos \varphi$, hetgeen inderdaad de lengte van de projectie is. De projectie zelf kunnen we ook als volgt tot stand brengen. Stel $\underline{b} = (\text{grad } f, \underline{v})\underline{v}$ en $\underline{c} = \text{grad } f - (\text{grad } f, \underline{v})\underline{v}$, dan is blijkbaar $\text{grad } f = \underline{b} + \underline{c}$,

$(\underline{b}, \underline{c}) = (\text{grad } f, \underline{v})^2 - (\text{grad } f, \underline{v})^2 = 0$ (omdat $|\underline{v}| = 1$). Dus grad f is geschreven als de som van twee onderling loodrechte vectoren, waarvan de ene \underline{b} in de richting van \underline{v} valt en dus de projectie van grad f op \underline{v} voorstelt. Tenslotte is $|\underline{b}| = |(\text{grad } f, \underline{v})|$.

De richtingsafgeleide is dus het grootst in de richting van grad f en is nul in de richtingen loodrecht op grad f . Hiermee hebben we een interpretatie van de vector grad f gevonden: hij geeft de richting waarin f het sterkst toeneemt. In de richtingen loodrecht op grad f is f in eerste benadering constant.

In de vectoranalyse komen we nog terug op de gradiënt. Hierop vooruitlopend maken we hier reeds enige opmerkingen. Een vectorfunctie wordt vaak niet geïnterpreteerd als een afbeelding van een vectorruimte, maar als een vectorveld (dit kan alleen als de dimensies van \underline{x} en $\underline{f}(\underline{x})$ dezelfde zijn). Laten we het in de gewone ruimte R_3 beschouwen en laat een vectorfunctie $\underline{f}(\underline{x})$ gegeven zijn van R_3 in R_3 .

Bij de invoering van vectoren in het eerstejaarscollege was een vector een pijl uitgaande van een vast punt O (oorsprong). We behoeven dan ook geen onderscheid te maken tussen vectoren en punten: het eindpunt van de pijl en de door de pijl voorgestelde vector kunnen we vrijelijk door elkaar gebruiken. In plaats van deze gebonden vectoren kan men echter ook vrije vectoren beschouwen, waarvan het beginpunt van de pijl niet in O hoeft te liggen; pijlen die door evenwijdige verschuiving uit elkaar kunnen ontstaan stellen dan dezelfde vector voor. We zeggen dan wel, dat we de vector gehecht hebben aan het punt, dat als beginpunt van de pijl is gekozen. Als we echter een correspondentie tussen punten en vectoren tot stand willen brengen, kiezen we bij een punt P evenals vroeger de vector \underline{OP} , die de positievector van P wordt genoemd. We zullen het onderscheid tussen een punt en zijn positievector echter in de toekomst toch niet altijd maken; we spreken wel van het punt a als we eigenlijk bedoelen: het punt met positievector a. We keren nu terug tot de vectorfunctie $\underline{f}(\underline{x})$ in R_3 . De vector \underline{x} beschouwen we als vroeger als positievector van een punt P . De beeldvector $\underline{f}(\underline{x})$ hechten we nu echter aan P . Zo wordt aan ieder punt P een vector gehecht; het zo ontstane beeld noemen we een vectorveld. Deze vectorvelden zijn zeer gebruikelijk in de fysica: elektrisch veld, magnetisch veld, gravitatieveld, snelheidsveld in een stromende vloeistof, enz. Het hechten van de beeldvector aan het punt is trouwens ook gebruikelijk in het reeds behandelde geval van een ruimtekromme $\underline{x} = \underline{x}(t)$. De vector \underline{x} wordt als een positievector opgevat (punt van de kromme). De vector $\frac{d\underline{x}}{dt}$ echter, die de richting van de raaklijn in het punt van de kromme aangeeft, hechten we natuurlijk aan dat punt.

Ook de gradiënt van een functie $f(\underline{x})$ vatten we op natuurlijke wijze op als een vectorveld. De functie $f(\underline{x})$ noemt men dan wel een scalarveld; aan elk punt is een getal toegevoegd. Fysische voorbeelden: dichtheid van massa of lading, temperatuur. Als het vectorveld $\underline{v}(\underline{x})$ te schrijven is in de vorm $\underline{v} = \text{grad } \varphi$, waarbij $\varphi(\underline{x})$ een scalarveld is, dan heet φ een potentiaal van \underline{v} (in de fysica noemt men meestal $-\varphi$ een potentiaal van \underline{v}). Niet ieder vectorveld heeft een potentiaal; in de vectoranalyse zullen we voorwaarden voor \underline{v} afleiden, opdat \underline{v} een potentiaal heeft. Als dat lukt, vereenvoudigt dit de beschrijving van \underline{v} , want een scalaire functie is eenvoudiger dan een vectorfunctie.

Vb.3 Elektrisch veld van een puntlading in de oorsprong. De veldsterkte in een punt P is gericht langs de voerstraal OP en is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand. De richting van de veldsterkte is dus \underline{x} ; stellen we deze dus $\lambda \underline{x}$, dan moet $|\lambda \underline{x}| = |\lambda| |\underline{x}|$ evenredig zijn met

$$\frac{1}{|\underline{x}|^2}, \text{ dus } \lambda = \frac{\alpha}{|\underline{x}|^3} \text{ met constante } \alpha. \text{ De veldsterkte } \underline{E} \text{ is dus } \underline{E} = \frac{\alpha}{|\underline{x}|^3} \underline{x}.$$

Deze heeft een potentiaal, nl. $\varphi = -\frac{\alpha}{|\underline{x}|}$. Noemen we, zoals gebruikelijk $|\underline{x}| = r$ (voerstraal), dan is $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{r}$ en analoog

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}. \text{ Nu is } \varphi = -\frac{\alpha}{r}, \text{ dus } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\alpha x}{r^3}, \text{ en analoog}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\alpha y}{r^3}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\alpha z}{r^3}, \quad \text{dus } \text{grad } \varphi = \frac{\alpha}{r^3} \underline{x} = \underline{E}.$$

Dit veld heeft dus een potentiaal: zowel potentiaal als veldsterkte zijn niet gedefinieerd in O .

§.2 Stelling van het gemiddelde. Formule van Taylor.

De stelling van het gemiddelde voor differentieerbare functies bezit ook een analogon voor functies van meer veranderlijken. Bij een functie $f(x)$ van één veranderlijke hadden we $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$, waarbij ξ ergens tussen a en b ligt.

Nu gaan we uit van één functie $f(\underline{x})$ van n veranderlijken (R_n in R_1) en beschouwen $f(\underline{b}) - f(\underline{a})$. In plaats van het getal ξ tussen de getallen a en b zal nu komen een punt op het verbindende lijnstuk tussen \underline{a} en \underline{b} .

We nemen daarom de rechte lijn tussen de punten \underline{a} en \underline{b} , die als parameterstelling heeft $\underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$ met parameter t . De waarden van t tussen 0 en 1 geven de punten van het lijnstuk tussen \underline{a} en \underline{b} . Vullen we de parameterstelling in de functie in, dan krijgen we een functie $g(t) = f(\underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}))$. Met behulp van de stelling van het gemiddelde toegepast op de functie $g(t)$ krijgen we $g(1) - g(0) = g'(\theta)$ met θ tussen 0 en 1. Nu is $g(1) = f(\underline{b})$, $g(0) = f(\underline{a})$. Verder vinden we

met de kettingregel dat $g'(t) = (\text{grad } f, \underline{b} - \underline{a}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} (b_j - a_j)$,

waarbij de partiële $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in $\underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$ moeten worden genomen; verder is $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ en $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$.

Zo vinden we dus:

$$f(\underline{b}) - f(\underline{a}) = \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{\underline{x}=\underline{\xi}},$$

waarbij $\underline{\xi}$ een punt is op het lijnstuk dat \underline{a} en \underline{b} verbindt. Dit is de stelling van het gemiddelde voor functies van meer dan één veranderlijke.

Voor de geldigheid van de afleiding van deze stelling moet worden aangenomen dat alle punten van het lijnstuk tussen \underline{a} en \underline{b} geoorloofd zijn voor de differentieerbare functie $f(\underline{x})$.

Men zou zich kunnen afvragen of er ook een soortgelijke stelling bestaat voor een algemene vectorfunctie $\underline{f}(\underline{x})$. Natuurlijk kan men bovenstaande stelling op elke componentfunctie afzonderlijk toepassen, maar de hierbij optredende $\underline{\xi}$ zullen voor de verschillende componentfuncties in het algemeen verschillend zijn. Het volgende voorbeeld illustreert dat.

Vb.1 Neem de functie $(u, v) = \underline{f}(x, y)$ bepaald door

$$\left. \begin{aligned} u &= e^x \cos y \\ v &= e^x \sin y \end{aligned} \right\}.$$

Neem $\underline{a} = (0, 0)$, $\underline{b} = (0, 2\pi)$, dan is $\underline{f}(\underline{b}) - \underline{f}(\underline{a}) = (1, 0)$.

Zou nu voor beide componentfuncties bovenstaande stelling met dezelfde (ξ, η) gelden, dan zou

$$\left. \begin{aligned} -2\pi e^{\xi} \sin \eta &= 0 \\ 2\pi e^{\xi} \cos \eta &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Daar $e^{\xi} \neq 0$, zijn deze twee betrekkingen met elkaar in strijd, zelfs als we voor (ξ, η) een ruimere keuze toelaten dan alleen het lijnstuk tussen \underline{a} en \underline{b} .

Met dezelfde methode kunnen we nu ook een analogon van de formule van Taylor afleiden. We nemen weer één functie $f(\underline{x})$ van n veranderlijken, die differentieerbaar is. Deze heeft dan n partiële afgeleiden, die weer functies van dezelfde n veranderlijken zijn. Als deze alle weer differentieerbaar zijn, noemen we $f(\underline{x})$ tweemaal differentieerbaar. Door herhaling komen we tot het begrip m maal differentieerbare functie. We beschouwen het lijnstuk van \underline{a} naar $\underline{a} + \underline{h}$ en voeren de hulpfunctie $g(t) = f(\underline{a} + t\underline{h})$ in; ook deze is m maal differentieerbaar. Daar $g(t)$ een functie van één veranderlijke is, kunnen we daarvoor de formule van Taylor opschrijven:

$$g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{1}{2!} t^2 g''(0) + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} g^{(m-1)}(0) + \frac{t^m}{m!} g^{(m)}(\tau),$$

met τ tussen 0 en t . We nemen nu speciaal $t = 1$:

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2!} g''(0) + \dots + \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(0) + \frac{1}{m!} g^{(m)}(\theta),$$

met θ tussen 0 en 1. We moeten de succesieve afgeleiden van g nu in f uitdrukken. Volgens de kettingregel is

$$\frac{dg}{dt} = \sum_{j=1}^n h_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{\underline{x}=\underline{a}+t\underline{h}}.$$

Om dit nogmaals naar t te differentiëren bedenken we dat de h_j niet van t afhangen en dat de partiële afgeleiden weer met de kettingregel kunnen worden behandeld. Dit geeft het volgende resultaat (de partiële afgeleiden zijn in $\underline{a} + t\underline{h}$ genomen):

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = \sum_{j=1}^n h_j \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

$$\frac{\partial^m g}{\partial t^m} = \sum_{j_1=1}^n h_{j_1} \sum_{j_2=1}^n h_{j_2} \dots \sum_{j_m=1}^n h_{j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_m}}.$$

Uiteraard correspondeert $t = 0$ met het nemen van partiële afgeleiden van f in \underline{a} .

We kunnen het resultaat wat korter opschrijven. Differentiëren naar t komt neer op het uitvoeren op f van de symbolische operator

$$\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \text{ Door herhaling vinden we}$$

$$\frac{d^m g}{dt^m} = \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^m f.$$

Dit is zo op te vatten dat bij uitwerking van de m^e macht een product van m factoren van de vorm $\frac{\partial}{\partial x_j}$ opgevat wordt als een partiële afgeleide van de m^e orde, die toegepast wordt op f .

Zo vinden we door invulling in de bovenstaande formule voor g :

$$f(\underline{a} + \underline{h}) = f(\underline{a}) + \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f(\underline{a}) + \frac{1}{2!} \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 f(\underline{a}) + \dots + \\ + \frac{1}{(m-1)!} \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{m-1} f(\underline{a}) + \frac{1}{m!} \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^m f(\underline{a} + \theta \underline{h}),$$

hetgeen de algemene formule van Taylor is voor een functie van n veranderlijken. De $\underline{a} + \theta \underline{h}$ in de laatste term is gelegen op het lijnstuk tussen \underline{a} en $\underline{a} + \underline{h}$.

Het geval van twee veranderlijken zullen we nog wat nader uitwerken. We nemen dan $\underline{x} = (x, y)$, $\underline{a} = (a, b)$ en $\underline{h} = (h, k)$. De uitdrukking die tot een macht moet worden verheven is nu een tweeterm, waarop de binominaal-formule kan worden toegepast:

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} h^{p-j} k^j \frac{\partial^p}{\partial x^{p-j} \partial y^j}.$$

Dit geeft ons voor de laagste orde termen (afgeleiden in (a, b) genomen):

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + \\ + \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{1}{6} \left(h^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2 k \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right) + \\ + \dots$$

De laatste term R_m in de formule van Taylor heeft het karakter van een restterm. Als de functie willekeurig vaak differentieerbaar is en als geldt dat $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = 0$, dan kan de formule van Taylor vervangen worden

door de reeks van Taylor:

$$f(\underline{a} + \underline{h}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^m f(\underline{a}).$$

Om vast te stellen, dat deze reeksontwikkeling geldig is zijn er in beginsel twee mogelijkheden. De eerste is om gebruik te maken van de hierboven in de formule van Taylor gegeven gedaante van de restterm R_m :

$$\frac{1}{m!} \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^m f(\underline{a} + \theta \underline{h}).$$

Men moet dan bewijzen dat dit naar nul gaat voor $m \rightarrow \infty$.

Een tweede methode is, voor de hulpfunctie $g(t)$, die hierboven bij de afleiding van de formule van Taylor is gebruikt, de geldigheid van de reeks van MacLaurin te bewijzen. Door dan weer op f terug te gaan krijgt men dan direct de reeksvoorstelling van f .

Vb.2 Ontwikkel $f(x,y) = e^{x+y}$ in $(0,0)$. Alle partiële afgeleiden van alle orden zijn weer e^{x+y} en dus in $(0,0)$ gelijk aan 1. De reeks van Taylor wordt dus

$$e^{x+y} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^{m-j} y^j.$$

Deze hadden we wel makkelijker kunnen krijgen. Stellen we nl. $x + y = z$ en ontwikkelen we e^z , dan vinden we

$$e^{x+y} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x+y)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^{m-j} y^j.$$

Vb.3 Ontwikkel $f(x,y) = \sin(xe^y)$ in $(0,0)$. Nu is $\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \cos(xe^y)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y \cos(xe^y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -e^{2y} \sin(xe^y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^y \cos(xe^y) - xe^{2y} \sin(xe^y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xe^y \cos(xe^y) - x^2 e^{2y} \sin(xe^y).$$

Dus in $(0,0)$ zijn deze $1, 0, 0, 1, 0$. Dus $\sin(xe^y) = x + xy + \dots$.

Rekent men ook nog de derde orde afgeleiden uit, dan blijken deze in

$$(0,0) \text{ te zijn } \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -1, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 1, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0, \text{ zodat als de}$$

termen van de derde graad ook worden opgenomen, de ontwikkeling luidt:

$$\sin(xe^y) = x + xy - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} xy^2 + \dots$$

§.3 Parametervoorstellingen en impliciete functies. Afhankelijkheid.

A. Inleiding. Omkeerstelling.

We hebben tot nu toe vaak te maken gehad met functies, die impliciet waren gegeven door een vergelijking, bv. $f(x,y) = 0$ in plaats van de expliciete vorm $y = y(x)$. Evenzo bij stelsels vergelijkingen hebben we ons sommige der veranderlijken soms als functie der overige gedacht; bv. $f(x,y,z,u) = 0$, $g(x,y,z,u) = 0$ dachten we ons opgelost tot $z = z(x,y)$, $u = u(x,y)$. Bovendien, als de gegeven functies differentieerbaar waren, namen we aan, dat dit met de opgeloste functies ook het geval was. Onder deze veronderstelling vielen de afgeleiden dan makkelijk met de kettingregel te bepalen. Bijvoorbeeld in het eerste geval: vul de expliciete vorm $y = y(x)$ in de vergelijking in, dan komt er $f(x,y(x)) = 0$ identiek in x . Differentiatie naar x geeft

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0, \text{ waaruit de gezochte } \frac{dy}{dx} \text{ is op te lossen.}$$

Hierin zitten echter enige onbewezen veronderstellingen opgesloten. We beginnen met het eenvoudigste geval $f(x,y) = 0$, dus bv.

$x^2 \sin(x+y) + ye^x = 0$. Kunnen we dit oplossen tot $y = y(x)$?

Een functie van x is een voorschrift, dat aan zekere waarden van x een functiewaarde toevoegt. Kiezen we een vaste waarde voor x en vullen we die in $f(x,y) = 0$ in, dan blijft er een vergelijking voor y over. Er behoeft echter geen enkele waarde van y te zijn, die aan deze vergelijking

voldoet; bv. als de vergelijking $1 + y^2 = 0$ of $e^y = 0$ is. Dit betekent dan blijkbaar, dat de gekozen waarde van x geen geoorloofde waarde was. Als de waarde van x zo gekozen is, dat er wel oplossingen zijn, kan er best meer dan één oplossing zijn; er kunnen er zelfs oneindig veel zijn, bv. als de vergelijking $\sin y = 0$ wordt. Voor iedere aldus geoorloofde x zou men een zo'n waarde y kunnen kiezen en zo tot een functie $y(x)$ komen, die voldoet aan $f(x,y(x)) = 0$ identiek voor alle (geoorloofde) x . Deze ene functie geeft dan echter nog niet alles wat we wensen, nl. alle paren (x,y) waarvoor $f(x,y) = 0$. Bovendien wordt het bij deze beschouwing zeer twijfelachtig, of continuïteit of differentieerbaarheid van $f(x,y)$ de overeenkomstige eigenschappen bij $y(x)$ induceert.

Op grond van meetkundige overwegingen koesteren we hieromtrent toch wel zekere verwachtingen. Als we een grafiek maken van $f(x,y) = 0$, waarbij $f(x,y)$ continu is, verwachten we als meetkundig beeld een kromme K . Als meetkundig beeld van een continue expliciete functie $y = y(x)$ verwachten we ook een kromme, maar deze laatste heeft een bijzondere eigenschap. Omdat bij iedere waarde van x hoogstens één waarde van y behoort, snijdt een rechte lijn evenwijdig met de y -as de kromme in hoogstens één punt. Bij K behoeft dat niet het geval te zijn (neem bv. $x^2 + y^2 = 1$). We hebben echter de indruk, dat het wel zal lukken K in een aantal takken te splitsen, zo dat elke tak afzonderlijk grafiek is van een expliciete functie en bovendien door elk punt van K minstens één tak gaat. We zullen deze kwestie alleen beschouwen onder de veronderstelling dat $f(x,y)$ differentieerbaar is met continue partiële afgeleiden.

Soortgelijke beschouwingen kan men houden voor meer functies van meer veranderlijken. We zullen nu beginnen met een geval, dat op het eerste gezicht een speciaal geval schijnt te zijn, maar waaruit achteraf toch alle andere gevallen zullen blijken te volgen.

We gaan uit van n functies van n veranderlijken:

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right\} , \text{ of in vectornotatie } \underline{y} = \underline{f}(\underline{x}).$$

We vragen ons af of het mogelijk is hieruit de x_1, \dots, x_n als functies van y_1, \dots, y_n op te lossen. M.a.w. we vragen ons af, of er bij de functie $\underline{f}(\underline{x})$ een functie $\underline{g}(\underline{y})$ bestaat, zo dat $\underline{f}(\underline{g}(\underline{y})) = \underline{y}$ voor alle \underline{y} geldt en $\underline{g}(\underline{f}(\underline{x})) = \underline{x}$ voor alle \underline{x} geldt. Dit probleem is precies het probleem van het vinden van een inverse functie, zoals dat ook al bij functies van één veranderlijke is beschouwd en in het vectorgeval al bij lineaire afbeeldingen. We zullen ons beperken tot het geval, dat de gegeven functie en de oplossingsfunctie beide differentieerbaar zijn. Als $\underline{f}(\underline{x})$ nu in \underline{a} functionaaloperator A heeft en $\underline{g}(\underline{y})$ in $\underline{b} = \underline{f}(\underline{a})$ functionaaloperator B , dan volgt uit $\underline{f}(\underline{g}(\underline{y})) = \underline{y}$ met behulp van de kettingregel dat $AB = I$ en uit $\underline{g}(\underline{f}(\underline{x})) = \underline{x}$ dat $BA = I$, waarin I de identieke afbeelding van R_n is.

Hieruit volgt, dat $B = A^{-1}$ en in het bijzonder dus, dat A regulier is. Hieraan zien we dus dat in ieder geval de functionaaloperator regulier moet zijn, opdat het probleem een oplossing toe kan laten. Een andere formulering van deze zelfde voorwaarde is, dat de functionaaldeterminant

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0.$$

Deze voorwaarde past goed in onze beschouwingswijze, die een differentieerbare functie opvat als een functie, die bij benadering lineair is. Voor deze lineaire benadering wordt dus de mogelijkheid van inversevorming als voorwaarde gesteld.

Bij één functie $f(x)$ van één veranderlijke, d.w.z. het geval $n = 1$, komen we met de voorwaarde ook uit. De voorwaarde is dan, dat $f'(x) \neq 0$ voor alle x . Dit is voldoende om te garanderen dat $f(x)$ een inverse functie bezit, die ook differentieerbaar is. We bewijzen dat niet; we merken slechts op dat uit $f'(x) \neq 0$ voor alle x volgt, dat $f(x)$ monotoon is.

Voorbeelden van inverse functies: e^x en $\log y$, x^n voor $x > 0$ en $y^{\frac{1}{n}}$, $\sin x$ voor $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ en $\arcsin y$.

Een ander geval, dat we al kennen, is dat van een lineaire afbeelding A van R_n in R_n . De functionaalmatrix van deze vectorfunctie is juist hetgeen we vroeger de matrix van A hebben genoemd. Nu is A dan en slechts dan inverteerbaar als de determinant van deze matrix, dat is de functionaaldeterminant $\neq 0$ is.

Bij de functies van meer dan één veranderlijke, die niet lineair zijn, komen we niet uit met bovenstaande voorwaarde. We beschouwen de functie $\underline{f}(x, y)$ van voorbeeld 1 in paragraaf 2. De functionaalmatrix hiervan is

$$\begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} ; \text{ de functionaaldeterminant is dus } e^{2x},$$

hetgeen $\neq 0$ is voor alle (x,y) in R_2 . Deze functie heeft echter geen inverse functie, want $f(0,0) = (1,0) = f(0,2\pi)$. Voor een functie $f(x)$, die een inverse functie $g(y)$ heeft, geldt echter dat uit $f(\underline{a}) = f(\underline{b})$ volgt $\underline{a} = \underline{b}$. Immers we hebben dan $\underline{a} = g(f(\underline{a})) = g(f(\underline{b})) = \underline{b}$. Passen we dit toe in ons voorbeeld met $\underline{a} = (0,0)$ en $\underline{b} = (0,2\pi)$, dan stuiten we op een tegenspraak.

Uit dit voorbeeld blijkt, dat een vectorfunctie, waarvan de functionaaloperator overal regulier is toch wel in twee verschillende punten dezelfde beelivector kan hebben. Dit komt, omdat het feit dat in een punt \underline{a} de functionaaloperator regulier is, alleen iets zegt over de functie zelf in de buurt van \underline{a} , omdat alleen daar de benadering met een lineaire afbeelding redelijk goed is. We zullen ons bij de vraag naar de mogelijkheid van de vorming van een inverse tot punten in de buurt van \underline{a} moeten beperken.

De hier beschouwde situatie is analoog met het hierboven geschetste geval van de kromme, bepaald door $f(x,y) = 0$. Hieruit is niet ondubbelzinnig één functie $y(x)$ op te lossen, omdat het best mogelijk is, dat men bij doorlopen van de kromme terugkeert tot een waarde van x , die men al eerder gehad heeft, echter met een andere y . Beperkt men zich echter tot een klein stukje van de kromme, dan ligt de oplosbaarheid tot $y(x)$, waarvoor overigens nog wel nadere voorwaarden moeten worden gesteld, meer in de lijn der verwachtingen.

Om dit formeel makkelijk te kunnen weergeven definiëren we voor $r > 0$ en een vector \underline{a} de r -omgeving van \underline{a} als de verzameling van die vectoren \underline{x} waarvoor geldt $|\underline{x} - \underline{a}| < r$. In R_2 , resp. R_3 , is dit het binnengebied van de cirkel (resp. bol) met middelpunt \underline{a} en straal r . Als we de straal van de r -omgeving in het midden willen laten, spreken we ook wel van een omgeving van \underline{a} .

Als we nu behalve de differentieerbaarheid en de regulariteit van de functionaaloperator ook nog eisen, dat de partiële afgeleiden continu zijn, kunnen we voor omgevingen tot het bestaan van de inverse functie besluiten. We drukken dit uit in de volgende stelling.

Stelling Als $f(x)$ een differentieerbare vectorfunctie van R_n in R_n is met continue partiële afgeleiden van de eerste orde, als alle vectoren \underline{x} van een omgeving van \underline{a} geoorloofd zijn voor f en als de functionaaloperator A van $f(x)$ in \underline{a} regulier is, dan is er een differentieerbare vectorfunctie $g(\underline{y})$ van R_n in R_n , waarvoor alle vectoren \underline{y} in een omgeving van $\underline{b} = f(\underline{a})$ geoorloofd zijn, dusdanig dat $f(g(\underline{y})) = \underline{y}$ voor \underline{y} in een zekere omgeving van \underline{b} en $g(f(\underline{x})) = \underline{x}$ voor \underline{x} in een zekere omgeving van \underline{a} . De functionaaloperator van $g(\underline{y})$ in \underline{b} is A^{-1} (omkeerstelling).

Het vrij moeilijke bewijs van deze stelling laten we achterwege. We zullen de inhoud van de stelling nu vertalen in componenten; gemakshalve zullen we ons daarbij tot $n = 2$ beperken. Gegeven zijn de functies $f_1(x_1, x_2)$ }
 $f_2(x_1, x_2)$ } , die differentieerbaar zijn met continue partiële afgeleiden in een omgeving van (a_1, a_2) en waarvan de functionaaldeterminant

$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0$ is in (a_1, a_2) . Dan bestaan er functies

$g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2)$, die differentieerbaar zijn in een omgeving van (b_1, b_2) , waarbij

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= f_1(a_1, a_2) \\ b_2 &= f_2(a_1, a_2) \end{aligned} \right\}, \text{ en zo dat}$$

$$\left. \begin{aligned} f_1(g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2)) &= y_1 \\ f_2(g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2)) &= y_2 \end{aligned} \right\}$$

voor alle (y_1, y_2) in een zekere omgeving van (b_1, b_2) en

$$\left. \begin{aligned} g_1(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) &= x_1 \\ g_2(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) &= x_2 \end{aligned} \right\}$$

voor alle (x_1, x_2) in een zekere omgeving van (a_1, a_2) .

Deze laatste beweringen zijn korter, maar iets minder precies zo uit te drukken:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} \text{ en } \left. \begin{aligned} x_1 &= g_1(y_1, y_2) \\ x_2 &= g_2(y_1, y_2) \end{aligned} \right\}$$

volgen uit elkaar (of zoals men ook wel zegt: zijn equivalent) voor \underline{x} dicht bij \underline{a} en \underline{y} dicht bij \underline{b} .

Uit het feit dat de functionaaloperator van \underline{g} de inverse is van die van \underline{f} volgt direct, dat de partiële afgeleiden van de eerste orde van \underline{g} ook continu zijn.

Vb.1 Als voorbeeld beschouwen we nogmaals de functie $\underline{f}(x, y)$ bepaald door

$$\left. \begin{aligned} u &= e^x \cos y \\ v &= e^x \sin y \end{aligned} \right\}. \text{ Hoewel de functie als geheel geen inverse bezit, is}$$

dat in een omgeving van iedere (a, b) wel het geval, daar de functionaal-determinant e^{2x} steeds $\neq 0$ is. De functionaalmatrix van de inverse functie vinden we door invertieren van de functionaalmatrix van de gegeven functie. Dit geeft:

$$\begin{pmatrix} e^{-x} \cos y & e^{-x} \sin y \\ -e^{-x} \sin y & e^{-x} \cos y \end{pmatrix}, \text{ dus } \frac{\partial x}{\partial u} = e^{-x} \cos y, \frac{\partial x}{\partial v} = e^{-x} \sin y,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -e^{-x} \sin y, \frac{\partial y}{\partial v} = e^{-x} \cos y.$$

Vb.2 Neem de formules voor overgang op poolcoördinaten $(x, y) = \underline{f}(r, \varphi)$,

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\}. \text{ Functionaalmatrix } \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}, \text{ functionaal-}$$

determinant = r . In een omgeving van een (r, φ) met $r \neq 0$, is dit omkeerbaar tot $(r, \varphi) = \underline{g}(x, y)$ met functionaalmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix}, \text{ dus } \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r},$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}$. Dat de omkeerbaarheid in de omgeving van een punt $(0, \varphi)$ niet opgaat, is meetkundig duidelijk.

We beschouwen nu het geval, dat het aantal functies niet gelijk is aan het aantal veranderlijken; dus m functies van n veranderlijken $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$. We nemen aan, dat deze functies differentieerbaar zijn met continue partiële afgeleiden van de eerste orde in een omgeving van $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$. De functionaalmatrix is een matrix met m rijen en n kolommen. Deze heeft in \underline{a} een of andere rang r , waarvoor geldt $r \leq m$, $r \leq n$. We behandelen nu achtereenvolgens de gevallen $r = m$ en $r < m$.

B. Rang = aantal functies.

We beginnen met het geval $r = m$. De functionaalmatrix heeft dus een onderdeterminant met m rijen en kolommen, die in \underline{a} niet nul is. Door eventueel de veranderlijken anders te nummeren kunnen we bereiken dat de onderdeterminant gevormd met de eerste m kolommen $\neq 0$ is. Dat is de functionaaldeterminant van de functies f_1, \dots, f_m opgevat als functies alleen van x_1, \dots, x_m :

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} \neq 0.$$

immers alle partiële afgeleiden zijn als continu aangenomen.

Deze determinant is echter een continue functie van (x_1, \dots, x_n) en dus niet alleen $\neq 0$ in \underline{a} , maar ook in een (voldoend kleine) omgeving van \underline{a} . We blijven in die omgeving en houden de veranderlijken x_{m+1}, \dots, x_n vast. Er blijven dan m veranderlijken over; op deze kunnen we de omkeerstelling toepassen. Als $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$, dan vinden we x_1, \dots, x_m als functies van y_1, \dots, y_m bij vaste x_{m+1}, \dots, x_n . Doen we het nu voor verschillende stelsels waarden van x_{m+1}, \dots, x_n , dan is het resultaat, dat we x_1, \dots, x_m vinden als functies van $y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n$. Het nadeel van deze methode is, dat we niet weten hoe de x_1, \dots, x_m van x_{m+1}, \dots, x_n afhangen; we kunnen niets zeggen over differentieerbaarheid of partiële afgeleiden.

Vb.3 Beschouw

$\left. \begin{array}{l} x = r \cos(\varphi - \lambda) \\ y = r \sin(\varphi - \lambda) \end{array} \right\}$. We kunnen hier λ als bijkomstige parameter opvatten.

We krijgen dan (x, y) als functie van (r, φ) ; daarop kunnen we de omkeerstelling toepassen. Maken we achteraf λ variabel dan hangt na omkering (r, φ) behalve van (x, y) ook nog van λ af, maar hoe blijft op grond van de omkeerstelling duister.

Door een kunstgreep, die bestaat uit het invoeren van een aantal hulp-functies en het toepassen van de omkeerstelling op n functies met n veranderlijken, kan de afhankelijkheid van x_{m+1}, \dots, x_n worden onderzocht. We doen dit alleen voor $m = 2, n = 3$. We vullen het stelsel tot 3 functies aan als volgt:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ y_3 = x_3 \end{array} \right\}; \text{ hierbij is } \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0 \text{ verondersteld. De}$$

functionaalmatrix der 3 functies luidt:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ de functionaaldeterminant is } \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0.$$

Volgens de omkeerstelling zijn er differentieerbare functies ψ_1, ψ_2, ψ_3 zo dat (1) equivalent is met

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \psi_1(y_1, y_2, y_3) \\ x_2 = \psi_2(y_1, y_2, y_3) \\ x_3 = \psi_3(y_1, y_2, y_3) \end{array} \right\} \text{ voor } (x_1, x_2, x_3) \text{ dicht bij } (a_1, a_2, a_3)$$

en (y_1, y_2, y_3) dicht bij (b_1, b_2, a_3) , waarin

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = f_1(a_1, a_2, a_3) \\ b_2 = f_2(a_1, a_2, a_3) \end{array} \right\} \text{ . Daar } y_3 = x_3 \text{ geldt dus ook dat}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \end{array} \right\} \text{ en } \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \psi_1(y_1, y_2, x_3) \\ x_2 = \psi_2(y_1, y_2, x_3) \end{array} \right\}$$

onder dezelfde omstandigheden equivalent zijn.

Voor willekeurige m en n vindt men op analoge wijze, dat

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right\} \text{ en } \left. \begin{array}{l} x_1 = \phi_1(y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_m = \phi_m(y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \end{array} \right\}$$

equivalent zijn voor (x_1, \dots, x_n) dicht bij (a_1, \dots, a_n) en (y_1, \dots, y_m) dicht bij (b_1, \dots, b_m) , waarin

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = f_1(a_1, \dots, a_n) \\ \dots \\ b_m = f_m(a_1, \dots, a_n) \end{array} \right\} \text{ .}$$

Bovendien zijn ϕ_1, \dots, ϕ_m differentieerbaar, ook naar de veranderlijken x_{m+1}, \dots, x_n .

We vragen ons nu af, hoe de partiële afgeleiden van de functies ϕ_1, \dots, ϕ_m te vinden. Voor de veranderlijken y_1, \dots, y_m kan men deze uit de omkeerstelling halen. Er is echter een andere methode, die ook voor de overige veranderlijken werkt en die bestaat in het substitueren van de functies ϕ in de functies f (of omgekeerd) en het toepassen van de kettingregel op de aldus verkregen identieke betrekkingen. Om dit toe te lichten volstaan we met het allereenvoudigste voorbeeld:

$y = f(x_1, x_2)$, dus $m = 1$, $n = 2$. Stel f differentieerbaar en $\frac{\partial f}{\partial x_1} \neq 0$ in (a_1, a_2) ; dan geldt $x_1 = \phi(y, x_2)$, dus $y = f(\phi(y, x_2), x_2)$ en $x_1 = \phi(f(x_1, x_2), x_2)$, alles voor (x_1, x_2) in een omgeving van (a_1, a_2) . De eerste van deze twee betrekkingen levert door differentiatie naar y en naar x_2 met behulp van de kettingregel

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{aligned} \right\} \text{, dus } \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} \text{, } \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} .$$

$x_1 = \psi(y, x_2)$
 $y = f(\psi(y, x_2), x_2)$
 $x_1 = \psi(f(x_1, x_2), x_2)$

← anders

De eerste van deze twee uitkomsten is van ouds bekend, als we x_2 als een bijkomstige parameter opvatten (één functie van één veranderlijke).

In het algemene geval gaat het analoog, zij het dat er dan voor het bepalen van de partiële afgeleiden van ϕ stelsels lineaire vergelijkingen moeten worden opgelost. Nemen we als voorbeeld de functies van voorbeeld 3, dan komt er voor de afgeleiden naar λ .

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \cos(\varphi - \lambda) \frac{\partial r}{\partial \lambda} - r \sin(\varphi - \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + r \sin(\varphi - \lambda) \\ 0 &= \sin(\varphi - \lambda) \frac{\partial r}{\partial \lambda} + r \cos(\varphi - \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - r \cos(\varphi - \lambda) \end{aligned} \right\} .$$

Hieruit volgt $\frac{\partial r}{\partial \lambda} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 1$. Dit is niet verwonderlijk, daar men klaarblijkelijk r en $\varphi - \lambda$ als functies van x en y kan oplossen.

C. Rang < aantal functies. Reguliere punten. Afhankelijkheid.

We beschouwen nu het geval $r < m$. In dat geval zullen we ons echter nog een beperking opleggen. We nemen natuurlijk weer aan, dat de functies differentieerbaar zijn met continue partiële afgeleiden van de eerste orde in een omgeving van \underline{a} . Dat de rang van de functionaalmatrix in \underline{a} gelijk aan r is betekent, dat er een onderdeterminant met r rijen en kolommen bestaat, die $\neq 0$ is en dat alle onderdeterminanten met meer rijen en kolommen $= 0$ zijn. Gaan we nu de functionaalmatrix in een omgeving van \underline{a} bekijken, dan blijft de onderdeterminant die in \underline{a} ongelijk aan nul was, wel ongelijk aan nul, als we de omgeving maar klein genoeg maken (op grond van de continuïteit), maar de onderdeterminanten die gelijk aan nul zijn behoeven dat niet te blijven. Dit heeft tot gevolg, dat de rang van de functionaalmatrix in de buurt van \underline{a} niet kleiner maar wel groter kan zijn dan in \underline{a} zelf. Als nu de rang constant gelijk aan r blijft noemen we \underline{a} een regulier punt voor het stelsel functies, en anders een singulier punt. Dit leidt tot de volgende definitie:

Als $\underline{f}(\underline{x})$ een differentieerbare vectorfunctie van R_n in R_m is met continue partiële afgeleiden van de eerste orde, als alle vectoren \underline{x} van een omgeving van \underline{a} geoorloofd zijn voor \underline{f} en als er een omgeving van \underline{a} bestaat, zo dat in alle \underline{x} van die omgeving de functionaaloperator van \underline{f} dezelfde rang r heeft, dan heet \underline{a} een regulier punt van de rang r voor de functie $\underline{f}(\underline{x})$. Als \underline{a} niet regulier is dan heet \underline{a} singulier.

Als voorbeeld nemen we de functies van voorbeeld 2. In de punten (r, φ) met $r \neq 0$ is de functionaaldeterminant $\neq 0$; deze punten zijn dus regulier omdat een punt (r, φ) met $r \neq 0$ zeker een omgeving heeft waar $r \neq 0$. In de punten met $r = 0$ is de rang = 1. Daar iedere omgeving van een punt $(0, \varphi)$ punten bevat met $r \neq 0$, zijn deze punten singulier.

Een nog eenvoudiger voorbeeld is de functie $f(x, y) = x^3 - y^2$ met functionaalmatrix $(3x^2, -2y)$; deze heeft overal rang 1, behalve in $(0, 0)$ waar de rang 0 is. Het punt $(0, 0)$ is een singulier punt. Alle andere punten zijn regulier.

Vb.4 Laat $(u, v) = \underline{f}(x, y)$ voor alle (x, y) met $x > 0$ gegeven zijn door

$$\left. \begin{aligned} u &= \log x + \sin y \\ v &= x e^{\sin y} \end{aligned} \right\} . \text{ De functionaalmatrix is } \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \cos y \\ e^{\sin y} & x \cos y e^{\sin y} \end{pmatrix}$$

Alle punten (x, y) met $x > 0$ zijn nu regulier van rang 1. Uit dit voorbeeld blijkt dat een regulier punt best een rang kan hebben die lager is dan het maximum dat door de afmetingen van de functionaalmatrix wordt voorgeschreven.

Men zou zich kunnen afvragen, waarom de onderscheiding van reguliere en singuliere punten in het geval $r = m$ geen rol heeft gespeeld. Dit komt, omdat het aantal rijen van de functionaalmatrix het dan onmogelijk maakt, dat de rang in een omgeving van \underline{a} groter wordt, dan hij in \underline{a} is, zodat, continuïteit der partiële afgeleiden aangenomen, de rang automatisch in een omgeving van \underline{a} constant is, en dus \underline{a} een regulier punt is. Iets analoogs krijgt men trouwens als $r = n$ door de kolommen van de functionaalmatrix te beschouwen.

We keren terug tot het geval van m functies van n veranderlijken en nemen aan, dat \underline{a} een regulier punt van rang r is voor deze functies, terwijl $r < m$. Gemakshalve nemen we $m = n = 2$, $r = 1$, dus twee functies $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$. Omdat de rang = 1 is, is één der partiële

afgeleiden $\neq 0$ in \underline{a} , bijv. $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0$. Stellen we nu

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} ,$$

dan kunnen we uit de eerste regel x_1 oplossen als functie van y_1 en x_2 : $x_1 = \phi(y_1, x_2)$. Substitueren we dit in de tweede regel, dan vinden we $y_2 = f_2(\phi(y_1, x_2), x_2)$. We gaan dit naar x_2 partiëel differentiëren, gebruik makend van het vroeger gevonden resultaat dat

$$\text{We bepalen dus } \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

Het is duidelijk, dat $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij}$, zo dat de functionaalmatrix eenvoudig de coëfficiëntenmatrix is. Als deze rang r heeft, en bv. $\frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)} \neq 0$, dan zijn inderdaad f_{r+1}, \dots, f_m elk functies van f_1, \dots, f_r en in dit speciale geval zijn deze functies zelfs lineair (in het algemeen niet homogeen). Inderdaad, op grond van de theorie van de lineaire vergelijkingen, kan men de homogene delen (dus zonder de b 's) van f_{r+1}, \dots, f_m schrijven als lineaire combinatie van de homogene delen van f_1, \dots, f_r . Door nog een constante bij het resultaat op te tellen kan men zorgen, dat het ook na toevoeging van de b 's uitkomt.

We gaan de gevonden resultaten nu toepassen op parametervoorstellingen en impliciete functies.

D. Parametervoorstellingen.

Een kromme in het platte vlak of in de ruimte kan worden bepaald met een parametervoorstelling met één parameter t . Voorbeeld:

$$\left. \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right\} \text{ geeft een parametervoorstelling van de cirkel } x^2 + y^2 = 1.$$

De expliciete voorstelling van een kromme: $y = f(x)$ kan echter ook als een parametervoorstelling worden opgevat met x als parameter:

$$\left. \begin{array}{l} x = t \\ y = f(t) \end{array} \right\} .$$

Ook oppervlakken laten een parametervoorstelling toe, nu echter met twee parameters. Als voorbeeld geven we de volgende parametervoorstelling van de eenheidsbol met parameters θ en φ :

$$\left. \begin{array}{l} x = \sin \theta \cos \varphi \\ y = \sin \theta \sin \varphi \\ z = \cos \theta \end{array} \right\} . \text{ Rang } 2 \quad \Rightarrow \quad z = f(x, y)$$

Ook hier is de expliciete voorstelling $z = f(x, y)$ op te vatten als een parametervoorstelling:

$$\left. \begin{array}{l} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{array} \right\} .$$

We kunnen nu echter proberen omgekeerd een parametervoorstelling weer door een expliciete voorstelling te vervangen. We gaan daarbij uit van een parametervoorstelling in R_n met k parameters.

Gemakshalve beginnen we met $n = 3$, $k = 2$:

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2) \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2) \\ x_3 = \varphi_3(t_1, t_2) \end{array} \right\} .$$

We nemen aan dat (c_1, c_2) een regulier punt van rang r is voor de functies $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. We stellen

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \varphi_1(c_1, c_2) \\ a_2 &= \varphi_2(c_1, c_2) \\ a_3 &= \varphi_3(c_1, c_2) \end{aligned} \right\} .$$

Gemakshalve nemen we $r = 1$ en $\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \neq 0$ in (c_1, c_2) . Er is dan een dif-

ferentieerbare functie ϕ , zo dat

$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2)$ en $t_1 = \phi(x_1, t_2)$
equivalent zijn voor (t_1, t_2) dicht bij (c_1, c_2) en x_1 dicht bij a_1 . Om-

dat $r = 1$ zijn er differentieerbare functies σ_2 en σ_3 zo dat

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2(t_1, t_2) &= \sigma_2(\varphi_1(t_1, t_2)) \\ \varphi_3(t_1, t_2) &= \sigma_3(\varphi_1(t_1, t_2)) \end{aligned} \right\}$$

geldt voor (t_1, t_2) dicht bij (c_1, c_2) . Hieruit volgt weer, dat de collec-
tie der punten (x_1, x_2, x_3) in een omgeving van (a_1, a_2, a_3) die door de
parametervoorstelling (4) met (t_1, t_2) in een omgeving van (c_1, c_2) worden
voorgesteld, dezelfde is als de collectie der punten (x_1, x_2, x_3) in een
omgeving van (a_1, a_2, a_3) , die voldoen aan

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \sigma_2(x_1) \\ x_3 &= \sigma_3(x_1) \end{aligned} \right\} .$$

Hiermee is de parametervoorstelling vervangen door een expliciete voor-
stelling, die $3 - 1 = 2$ der veranderlijken in de andere uitdrukt.

Op geheel analoge wijze behandelt men het geval van n functies met k
parameters en rang r . Dit leidt tot een expliciete voorstelling, die
 $n - r$ veranderlijken uitdrukt in de overige r . Dit wordt uitgedrukt in
de volgende stelling:

Stelling. Als (c_1, \dots, c_k) een regulier punt van rang r is voor de func-
ties $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ en als

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \varphi_1(c_1, \dots, c_k) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n &= \varphi_n(c_1, \dots, c_k) \end{aligned} \right\} , \text{ en } \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_r)}{\partial(t_1, \dots, t_r)} \neq 0 \text{ in } (c_1, \dots, c_k),$$

dan bestaan er differentieerbare functies $\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n$
zo dat voor (t_1, \dots, t_k) in een omgeving van (c_1, \dots, c_k)

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, \dots, t_k) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \varphi_n(t_1, \dots, t_k) \end{aligned} \right\} \text{ en } \left. \begin{aligned} x_{r+1} &= \sigma_{r+1}(x_1, \dots, x_r) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \sigma_n(x_1, \dots, x_r) \end{aligned} \right\}$$

dezelfde (x_1, \dots, x_n) in een omgeving van (a_1, \dots, a_n) beschrij-
ven (stelling over parametervoorstellingen).

Het meest gebruikelijke geval is, dat $r = k$; dan is, zoals vroeger al
opgemerkt, de eis van regulariteit automatisch vervuld, continuïteit der
partiële afgeleiden aangenomen. Daar een expliciete voorstelling als

parametervoorstelling is op te vatten, kan in het geval dat $r < k$ de gegeven parametervoorstelling door een andere met r parameters worden vervangen althans in een omgeving van een regulier punt.

De stelling leert ons, dat een parametervoorstelling equivalent is met een expliciete voorstelling, althans locaal, d.w.z. in een omgeving van een punt. Uiteraard geldt dit slechts onder de gemaakte veronderstellingen over differentieerbaarheid en rang van de functionaalmatrix.

E. Impliciete functies.

We gaan nu impliciete functies beschouwen, die gegeven zijn door m vergelijkingen in n veranderlijken:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\} .$$

Gemakshalve nemen we $m = 2$, $n = 3$. We nemen aan dat $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ aan de vergelijkingen voldoet:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(a_1, a_2, a_3) = 0 \\ f_2(a_1, a_2, a_3) = 0 \end{array} \right\} , \text{ en dat } \underline{a} \text{ een regulier punt van rang } r \text{ is voor } f_1 \text{ en } f_2.$$

Gemakshalve nemen we $r = 1$ en $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0$ in \underline{a} . Er is dan een differentieerbare functie σ_2 zo dat

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \sigma_2(f_1(x_1, x_2, x_3))$$

geldt voor (x_1, x_2, x_3) dicht bij (a_1, a_2, a_3) . Vullen we hierin $\underline{x} = \underline{a}$ in, dan komt er $0 = \sigma_2(0)$. Nemen we nu een punt \underline{x} , dat voldoet aan

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \text{ dan is } f_2(x_1, x_2, x_3) = \sigma_2(f_1(x_1, x_2, x_3)) = \sigma_2(0) = 0.$$

Men kan dus straffeloos de vergelijking $f_2(x_1, x_2, x_3) = 0$ weglaten!

In het algemene geval dat \underline{a} een regulier punt van rang r is, dat voldoet aan m vergelijkingen met n veranderlijken, kan men $m - r$ vergelijkingen weglaten. De r overblijvende vergelijkingen horen bij onafhankelijke rijen van de functionaalmatrix.

Let wel, dat dit geldt onder de veronderstelling, dat \underline{a} aan het oorspronkelijke stelsel voldoet! Als dat niet zo is, hoeft het niet te gelden; in het bijzonder is het niet voldoende, dat \underline{a} aan het deelstelsel van r vergelijkingen voldoet.

Deze omstandigheden zijn ons uit het geval van inhomogene lineaire vergelijkingen al bekend. Als dan namelijk f_{r+1}, \dots, f_m afhankelijk zijn van f_1, \dots, f_r , dan maken de oplossingen van $f_1 = 0, \dots, f_r = 0$ in ieder geval alle f_{r+1}, \dots, f_m constant. Als deze constanten alle $= 0$ zijn, heten de vergelijkingen afhankelijk, zo niet, dan zijn er geen gemeenschappelijke oplossingen en heten de vergelijkingen strijdig.

⇒ We kunnen ons dus nu verder beperken tot het geval dat de rang gelijk is aan het aantal vergelijkingen. Gemakshalve nemen we $r = m = 2$,

$n = 3$ en $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0$. Dan zijn er differentieerbare functies ϕ_1, ϕ_2 , zo dat

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \right\} \text{ en } \left. \begin{aligned} x_1 &= \phi_1(y_1, y_2, x_3) \\ x_2 &= \phi_2(y_1, y_2, x_3) \end{aligned} \right\}$$

equivalent zijn voor (x_1, x_2, x_3) dicht bij (a_1, a_2, a_3) en (y_1, y_2) dicht bij $(0, 0)$. Vult men $y_1 = 0, y_2 = 0$ in, dan ziet men dat

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } \left. \begin{aligned} x_1 &= \phi_1(0, 0, x_3) = g_1(x_3) \\ x_2 &= \phi_2(0, 0, x_3) = g_2(x_3) \end{aligned} \right\}$$

equivalent zijn voor (x_1, x_2, x_3) dicht bij (a_1, a_2, a_3) , terwijl de ter afkorting van de notatie ingevoerde functies g_1 en g_2 differentieerbaar zijn.

Het geval van m functies met n veranderlijken kunnen we op analoge wijze behandelen, hetgeen de volgende stelling oplevert.

Stelling Als (a_1, \dots, a_n) een regulier punt van rang r is voor de functies f_1, \dots, f_m en als

$$\left. \begin{aligned} f_1(a_1, \dots, a_n) &= 0 \\ \dots\dots\dots & \\ f_m(a_1, \dots, a_n) &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ en } \frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)} \neq 0 \text{ in } (a_1, \dots, a_n),$$

dan bestaan er differentieerbare functies g_1, \dots, g_r zo dat

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ \dots\dots\dots & \\ f_m(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x_1 &= g_1(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots & \\ x_r &= g_r(x_{r+1}, \dots, x_n) \end{aligned} \right\} \text{ en } \dots\dots\dots$$

voor dezelfde (x_1, \dots, x_n) in een omgeving van (a_1, \dots, a_n) gelden (stelling over impliciete functies).

Het meest gebruikelijke geval is, dat $r = m$; dan is de eis van regulariteit automatisch vervuld, continuïteit der partiële afgeleiden aangenomen. Als $r < m$, kunnen de vergelijkingen $f_{r+1} = 0, \dots, f_m = 0$ worden weggelaten, althans in een omgeving van een regulier punt.

In deze stelling zit het speciale geval opgesloten, waarvan we in het begin van deze paragraaf waren uitgegaan. De impliciete betrekking $f(x, y) = 0$ is opgelost tot $y = g(x)$, echter met bepaalde beperkingen. De voornaamste zijn, dat $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ moet zijn, en dat ook als dat het geval is, de equivalentie van $f(x, y) = 0$ en $y = g(x)$ alleen locaal, d.w.z. in een zekere omgeving van een punt, goed is.

F. Toepassingen.

De stelling over impliciete functies kan gebruikt worden voor het eliminieren van veranderlijken. Neem als voorbeeld twee vergelijkingen met

drie veranderlijken $f(x,y,z) = 0$ } . Als nu $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$, kan uit de eerste ver-
 $g(x,y,z) = 0$ }

gelijking z als functie van x en y opgelost worden. Substitueert men dit in de tweede vergelijking, dan ontstaat een betrekking van de vorm $h(x,y) = 0$. Men zegt dan, dat z is geëlimineerd. De betekenis hiervan is de volgende: de paren (x,y) , die aan $h(x,y) = 0$ voldoen, zijn dezelfde, als die, waarbij een z bestaat, zo dat (x,y,z) aan $0 = f(x,y,z) = g(x,y,z)$ voldoet. Ook dit geldt natuurlijk slechts lokaal.

Iets analoogs doet men met meer vergelijkingen. In het algemeen kan men zeggen, dat bij eliminatie van k veranderlijken, het aantal vergelijkingen met k afneemt. Dit geldt natuurlijk slechts, als aan beperkende voorwaarden voor de rang is voldaan.

De hierboven besproken stellingen leveren twee locale equivalenties op. In de eerste plaats een equivalentie van hetgeen door vergelijkingen wordt voorgesteld met expliciete functies en in de tweede plaats een equivalentie van hetgeen door parametervoorstellingen wordt bepaald met expliciete functies. Hieruit blijkt nu ook, dat er een equivalentie is tussen hetgeen door vergelijkingen en hetgeen door parametervoorstellingen wordt bepaald. In het geval dat de rang maximaal is (gelijk aan het aantal vergelijkingen resp. het aantal parameters) corresponderen k parameters en $n - k$ vergelijkingen met elkaar. Drie omstandigheden moeten hierbij echter in het oog gehouden worden:

- 1^o De differentieerbaarheidseisen die worden gesteld.
- 2^o De eisen betreffende de rang van de functionaalmatrix.
- 3^o Het locale karakter van de overeenstemming.

Als de parametervoorstelling van één parameter t afhangt en de rang van de functionaalmatrix = 1 is, hebben we een kromme. Een dergelijke kromme kan dus in R_n ook door $n-1$ vergelijkingen worden gegeven. In het platte vlak bepaalt dus één vergelijking, zoals we hierboven al zagen, een kromme; in de ruimte bepalen twee vergelijkingen een kromme (mits de rang van de functionaalmatrix van de linkerleden = 2 is).

Als de parametervoorstelling van twee parameters afhangt en de rang van de functionaalmatrix = 2 is, spreken we van een oppervlak. In R_n is dit door $n-2$ vergelijkingen vast te leggen; dat is in de gewone ruimte door één vergelijking. Voorbeeld: de eenheidsbol met als vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en als parametervoorstelling

$$\left. \begin{aligned} x &= \sin \theta \cos \varphi \\ y &= \sin \theta \sin \varphi \\ z &= \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{denk aan de bolcoördinaten!}).$$

Dat een kromme in R_n door twee vergelijkingen is vast te leggen kan meetkundig ook zo worden geïnterpreteerd, dat de kromme doorsnijding is van twee oppervlakken. Elk van de beide vergelijkingen geeft een oppervlak; de punten, wier coördinaten aan beide vergelijkingen voldoen, vormen de doorsnijding.

Voorbeeld: de kromme $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ } is doorsnijding van de bol
 $x - y + 2z = 0$ }

$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ en het platte vlak $x - y + 2z = 0$.
 De kromme is dus een cirkel.

De omzetting van impliciete functies in parameteraanpakkingen en omgekeerd lukt uiteraard ook, als er rangverlaging is. Zo is een stelsel van m vergelijkingen met n veranderlijken in de buurt van een regulier punt van rang r te vervangen door een parameteraanpakking met $n-r$ parameters en rang $n-r$.

Het omzetten van impliciete functies in parameteraanpakkingen heeft soms voordelen boven de omzetting in expliciete functies, omdat de laatste omzetting een zekere asymmetrische behandeling van de optredende variabelen met zich meebrengt. Bij het expliciet maken moet nl. eerst een onderdeterminant $\neq 0$ worden gezocht, waarna de bij die determinant gebruikte variabelen in de overige worden uitgedrukt. Gebruikt men echter een parameteraanpakking, dan zijn hierin alle oorspronkelijke variabelen op gelijkberechtigde wijze uitgedrukt.

8.4 Extrema bij functies van meer veranderlijken.

A. Vrije extrema.

Evenals bij functies van één veranderlijke komt bij functies van meer veranderlijken vaak de vraag naar voren naar maxima of minima van een functie. Een dergelijk maximum is een grootste waarde; als deze in (a_1, \dots, a_n) aangenomen wordt, dan betekent dit dat $f(x_1, \dots, x_n) \leq f(a_1, \dots, a_n)$ voor alle (x_1, \dots, x_n) . Analogoos bij het minimum. Voorbeeld: $x^2 + y^2$ heeft een minimum in $(0, 0)$, want $x^2 + y^2 \geq 0$ voor alle x en y . Vaak stellen we echter de eis voor een maximum alleen locaal; we spreken dan van een locaal (of relatief) maximum in (a_1, \dots, a_n) van $f(x_1, \dots, x_n)$, als er een omgeving van (a_1, \dots, a_n) bestaat, zo dat voor alle (x_1, \dots, x_n) in die omgeving geldt $f(x_1, \dots, x_n) \leq f(a_1, \dots, a_n)$. Als het voor alle (geoorloofde) x geldt spreekt men van een globaal (of absoluut) maximum. Analogoos bij het minimum. Voorbeeld bij functies van één veranderlijke:

Vb.1 $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$. Aan dit voorbeeld repeteren we tevens de algemene situatie bij functies van één veranderlijke. Als een functie ergens een maximum heeft, is haar afgeleide daar $= 0$. Nu is $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$; dus $f'(x) = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$. Dit is onder meer nul voor $x = 0$. Voor x in de buurt van 0 is $2x^2 - 5 < 0$ en dus $f'(x) > 0$ als $x < 0$ en $f'(x) < 0$ voor $x > 0$, dus $f(x)$ stijgend voor $x < 0$ en dalend voor $x > 0$. Hieruit volgt dat $f(x)$ een lokaal maximum in 0 heeft. Het is inderdaad geen globaal maximum, want $f(x)$ is willekeurig groot te maken door x voldoende groot te kiezen. Voor ons doel is $x = 3$ al voldoende, want $f(3) = 40 > 4 = f(0)$.

De gevolgde methode om te bewijzen, dat $x = 0$ een maximum levert, kan soms samengevat worden in een voorwaarde voor de tweede afgeleide (als deze bestaat). Laat gegeven zijn, dat $f'(a) = 0$. Als dan $f''(a) < 0$, dan geldt voor x dicht bij a dat $\frac{f'(x)}{x - a} < 0$, dus voor $x < a$ is $f'(x) > 0$, dus $f(x)$ stijgend en voor $x > a$ is $f'(x) < 0$, dus $f(x)$ dalend. Dus heeft $f(x)$ een lokaal maximum voor $x = a$. Op analoge wijze leidt $f''(a) > 0$ tot een lokaal minimum voor $x = a$. In ons voorbeeld is $f''(x) = 12x^2 - 10$, dus $f''(0) = -10 < 0$, hetgeen klopt.

Het geval, dat $f''(a) = 0$, blijft onbeslist. Het kan dan zijn, dat er geen extremum is voor $x = a$. Voorbeeld: $f(x) = x^3$; de afgeleide is nul in $x = 0$, maar de functie heeft geen extremum.

Het kan ook zijn, dat de functie wel een extremum heeft, maar dat de tweede afgeleide nul is en dus geen uitsluitsel geeft.

Voorbeeld: $f(x) = x^4$; in $x = 0$ heeft de functie een minimum, maar de tweede afgeleide is nul.

De hierboven gegeven beschouwingen gelden niet voor randextrema. Als de functie $f(x)$ gegeven is voor $a \leq x \leq b$, dan geldt het bovenstaande alleen voor extrema die aangenomen worden in punten ξ met $a < \xi < b$. Neemt men bv. $f(x) = x$ voor $0 \leq x \leq 1$, dan is er een maximum bij $x = 1$, maar $f'(1) \neq 0$.

We gaan nu over tot functies van meer veranderlijken en zullen daarbij voorlopig de kwestie van de randextrema voor het gemak buiten beschouwing laten. We nemen dus aan, dat voor een beschouwd punt \underline{a} alle punten \underline{x} in een zekere omgeving van \underline{a} geoorloofd zijn voor de functie. Een extremum in een dergelijk punt heet een inwendig extremum. We brengen nu weer de beschouwingen eerst terug op het geval van één veranderlijke. Als we bv. een functie $f(x,y)$ van twee veranderlijken hebben, die in (a,b) een maximum heeft, dan heeft de functie van één veranderlijke $f(x,b)$ natuurlijk ook een maximum voor $x = a$; de afgeleide van deze functie is daar dus $= 0$. Dus $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ in (a,b) . Op analoge wijze vinden we $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Samengevat $\text{grad } f = \underline{0}$. Voor een minimum geldt natuurlijk hetzelfde.

Vb.2 $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$; $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}$. Beide afgeleiden zijn $= 0$ in $(0,0)$. Daar heeft de functie inderdaad een minimum, want $e^{x^2+y^2} \geq 1$ voor alle (x,y) en $e^0 = 1$.

Geheel analoog gaat het met functies van n veranderlijken $f(x_1, \dots, x_n)$. Als deze een extremum heeft in (a_1, \dots, a_n) dan heeft de functie $f(x, a_2, \dots, a_n)$ voor $x = a_1$ een extremum, dus $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$ in (a_1, \dots, a_n) . Evenzo bij de andere veranderlijken. Dus:

Stelling | Als de differentieerbare functie $f(\underline{x})$ voor $\underline{x} = \underline{a}$ een lokaal maximum of minimum heeft en er een omgeving van \underline{a} is, die geheel uit geoorloofde punten van $f(\underline{x})$ bestaat, dan is $\text{grad } f = \underline{0}$ voor $\underline{x} = \underline{a}$.

Geheel analoog met functies van één veranderlijke is het, dat het omgekeerde niet geldt. In een punt \underline{a} waar $\text{grad } f = \underline{0}$ behoeft de functie geen maximum of minimum te bezitten. Voorbeeld: $f(x,y) = x^3 + y^3$; in $(0,0)$ is $\text{grad } f = \underline{0}$, maar het is duidelijk dat willekeurig dicht bij 0 de functie zowel positieve als negatieve waarden aanneemt, zodat $f(0,0) = 0$ noch een maximum noch een minimum kan zijn.

Het enige wat we dus tot nu toe weten, is dat extrema alleen daar kunnen worden gevonden, waar $\text{grad } f = \underline{0}$ (randextrema nog steeds buiten beschouwing gelaten, benevens uiteraard punten waar de functie niet differentieerbaar is).

De volgende meetkundige interpretatie kan nog worden gegeven aan de voorwaarde $\text{grad } f = \underline{0}$. Neem weer een functie van twee veranderlijken $f(x,y)$ en denk de grafische voorstelling in de ruimte van $z = f(x,y)$. Dat is een oppervlak. Het raakvlak aan dit oppervlak in het punt behorende bij $(x,y) = (a,b)$ is $z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x} (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y} (y-b)$, met $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ genomen in (a,b) . Als dus $\text{grad } f = \underline{0}$, dan is het raakvlak

eerst de twee zijvlakken $u = \text{constant}$. De normale component van \underline{a} is daar a_u en de oppervlakte bij benadering $h_2 h_3 \Delta v \Delta w$, dus de integraal bij benadering $h_2 h_3 a_u \Delta v \Delta w$; bij het zijvlak dat bij de kleinere u -waarde behoort moet dit nog van een minteken worden voorzien; de twee uitdrukkingen behoren bovendien bij verschillende waarden van u . Samen geven ze dus bij benadering $\frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 a_u) \Delta v \Delta w \Delta u$. De andere zijvlakken behandelt men op analoge wijze. Deelt men nu nog door de inhoud, dan vindt men voor de divergentie de volgende formule:

$$\text{div } \underline{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 a_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_3 h_1 a_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_1 h_2 a_w) \right\}.$$

Deze formule kan ook streng worden bewezen, als men gebruik maakt van de volgende identiteit voor drie vectoren \underline{p} , \underline{q} , \underline{r} in R_3 en een lineaire afbeelding A :

$$(A\underline{p}, \underline{q} \times \underline{r}) + (A\underline{q}, \underline{r} \times \underline{p}) + (A\underline{r}, \underline{p} \times \underline{q}) = (a_{11} + a_{22} + a_{33}) D(\underline{p}, \underline{q}, \underline{r});$$

hierin zijn a_{11} , a_{22} , a_{33} elementen van de matrix van A . Stelt men hierin $\underline{p} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$, $\underline{q} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$, $\underline{r} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$, $A = \frac{d\underline{a}}{d\underline{x}}$ en maakt men gebruik van (1) en (2), dan vindt men de formule voor $\text{div } \underline{a}$. We voeren dit niet uit.

In bolcoördinaten krijgen we

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{a} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta a_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta a_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r a_\varphi) \right\} = \\ &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} a_r + \frac{\cot \theta}{r} a_\theta; \end{aligned}$$

in cilindercoördinaten

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{a} &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} (r a_z) \right\} = \\ &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{1}{r} a_r. \end{aligned}$$

Door samenstelling van de formules voor gradiënt en divergentie krijgen we een formule voor Δ :

$$\Delta \alpha = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \alpha}{\partial w} \right) \right\}.$$

In bol- en cilindercoördinaten geeft dit al van vroeger bekende formules. Bolcoördinaten:

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \frac{\partial \alpha}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \right) \right\} = \\ &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}; \end{aligned}$$

cilindercoördinaten:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\alpha}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial\alpha}{\partial z} \right) \right\} = \\ &= \frac{\partial^2\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\alpha}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\alpha}{\partial r}.\end{aligned}$$

We merken ten slotte nog op, dat de regel dat men $\Delta\mathbf{a}$ voor een vectorveld \mathbf{a} kan verkrijgen door Δ op de afzonderlijke componenten van \mathbf{a} toe te passen, in kromlijnige orthogonale coördinaten niet meer opgaat. Men kan echter $\Delta\mathbf{a}$ uit de vorenstaande formules wel afleiden door gebruik te maken van de formule

$$\Delta\mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \text{rot rot } \mathbf{a}.$$

§.5 De scalaire potentiaal en de vectorpotentiaal.

A. Scalaire potentiaal.

In paragraaf 2 hebben we de volgende drie uitspraken betreffende een vectorveld \mathbf{a} met elkaar vergeleken.

1° Het veld heeft een potentiaal, d.w.z. $\mathbf{a} = \text{grad } \alpha$.

2° Het veld is conservatief, d.w.z. $\int_K (\mathbf{a}, \mathbf{t}) ds = 0$ voor iedere gesloten kromme K in het veld.

3° Het veld is rotatievrij, d.w.z. $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

We hebben al afgeleid: uit 1° volgt 2° en uit 2° volgt 3°. Aan het voorbeeld van het magneetveld van de oneindig lange rechte stroomgeleider hebben we gezien, dat uit 3° niet 2° hoeft te volgen. We zullen nu aantonen dat 1° uit 2° volgt.

We nemen dus aan, dat $\int_K (\mathbf{a}, \mathbf{t}) ds = 0$ voor iedere gesloten kromme K in het veld. We nemen een vast punt \mathbf{p} in het veld aan; een willekeurig punt \mathbf{x} verbinden we door een binnen het veld verlopende kromme $K_{\mathbf{x}}$ met het punt \mathbf{p} . We denken ons deze kromme van \mathbf{p} naar \mathbf{x} doorlopen. De integraal $\int_{K_{\mathbf{x}}} (\mathbf{a}, \mathbf{t}) ds$ hangt echter alleen van \mathbf{x} en niet van de gekozen kromme af.

Nemen we nl. nog een tweede dergelijke kromme $K'_{\mathbf{x}}$ en lopen we langs $K_{\mathbf{x}}$ van \mathbf{p} naar \mathbf{x} en langs $K'_{\mathbf{x}}$ van \mathbf{x} naar \mathbf{p} terug, dan hebben we een gesloten kromme doorlopen, waarlangs de integraal nul is. De integralen over $K_{\mathbf{x}}$ en $K'_{\mathbf{x}}$ (beide van \mathbf{p} naar \mathbf{x} doorlopen) zijn dus gelijk. De uitkomst is dus een functie van \mathbf{x} :

$$\alpha(\mathbf{x}) = \int_{K_{\mathbf{x}}} (\mathbf{a}, \mathbf{t}) ds.$$

Nu is $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 8$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8$, dus in $(-1, 1)$ zijn deze resp. -14 , -4 , -8 , $\Delta > 0$ en $-14 < 0$, dus een maximum ter waarde $f(-1, 1) = 9$. In $(3, -1)$ zijn ze resp. 10 , -4 , -8 , dus $\Delta < 0$, zodat in dit punt geen extremum is.

Als $\Delta = 0$, geeft de stelling geen uitsluitel. Soms kan men dan echter met andere overwegingen toch tot een resultaat komen.

Vb.4 $f(x, y) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 2y + 3$.

Als oplossing van $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ vindt men alleen het punt $(1, 0)$. Nu is

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 24x + 14$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$; dus in $(1, 0)$ is $\Delta = 0$.

Om echter de omgeving van $(1, 0)$ beter te overzien stellen we $x = 1 + h$, dan gaat $f(x, y)$ over in $h^4 + h^2 + 2hy + y^2 + 1$, dus $f(1 + h, y) - f(1, 0) = h^4 + (h + y)^2 \geq 0$, dus in $(1, 0)$ heeft de functie zelfs een globaal minimum.

Vaak is het niet eens nodig om Δ uit te rekenen, omdat we het karakter van het punt zonder dat ook makkelijk kunnen bepalen. Dit geldt in het bijzonder als het punt geen extremum geeft.

Vb.5 $f(x, y) = x^4 + x^2 - y^2$. Als oplossing van $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ vindt men alleen $(0, 0)$. Dit geeft echter geen extremum, want voor $x = 0$, $y \neq 0$ is de functie negatief en voor $y = 0$, $x \neq 0$ is de functie positief.

We maken nu nog enige opmerkingen over de randextrema. Hiervoor maken we gebruik van een stelling, die analoog is met een stelling over functies van één veranderlijke, die in het eerste jaar genoemd is. Deze luidde, dat een functie $f(x)$, die continu is op $a \leq x \leq b$, minstens één globaal maximum en minstens één globaal minimum bezit. D.w.z. er bestaat een ξ met $a \leq \xi \leq b$, zodat $f(x) \leq f(\xi)$ voor alle x met $a \leq x \leq b$ en er bestaat een η met $a \leq \eta \leq b$, zodat $f(x) \geq f(\eta)$ voor alle x met $a \leq x \leq b$.

Belangrijk hierbij is, dat de eindpunten van het interval meetellen en dat de functie continu is. Verder kan ξ best $= a$ of $= b$ zijn, zoals het voorbeeld $f(x) = x$ voor $0 \leq x \leq 1$ bewijst.

Een soortgelijke stelling geldt nu ook voor functies van meer veranderlijken. Het moeilijkste hierbij is het vaststellen, wat hier in de plaats van het interval $a \leq x \leq b$ moet komen. De verzameling V in R_n zal in de eerste plaats begrensd moeten zijn, d.w.z. er moet een positieve constante K zijn, zo dat $|\underline{x}| \leq K$ voor alle \underline{x} in V (d.w.z. V is geheel te vangen binnen een bol met voldoende grote straal). Hier komt nu nog een eis bij, die we niet precies zullen formuleren, maar die ongeveer hierop neer komt, dat als we een gebied met een zekere begrenzing beschouwen, we de begrenzing altijd mee moeten tellen om een voor de stelling bruikbare verzameling te krijgen. Als het gebied dus het binnengebied van de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ is, dan nemen we niet alleen dat binnengebied (bepaald door $x^2 + y^2 < a^2$), maar ook de cirkel zelf erbij (bepaald door $x^2 + y^2 \leq a^2$). Voor zulke begrensde gebieden met rand in R_n geldt nu ook de stelling, dat een op zo'n verzameling V gedefinieerde

continue functie $f(x)$ minstens één maximum en minstens één minimum bezit. Deze stelling bewijzen we niet (we hebben haar trouwens niet eens exact geformuleerd, omdat we niet gepreciseerd hebben hoe V er uit mag zien).

Deze stelling kan op verschillende manieren gebruikt worden. Als met de vroegere methoden bv. gevonden is dat er binnen het gebied geen maximum is, leert de stelling, dat er beslist een maximum op de rand moet zijn, dat dan nog apart opgespoord kan worden.

Vb.6 Gevraagd de maxima en minima van $f(x,y) = x + y^2$ binnen of op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$. Daar $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \neq 0$, is er binnen de cirkel geen extremum aanwezig. Er moet dus zeker een maximum en een minimum van de functie zijn op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$; daar is dan $y^2 = 1 - x^2$ en de functie $x + 1 - x^2$. Voor de punten op de cirkel geldt de beperking dat $-1 \leq x \leq 1$. De functie $-x^2 + x + 1$ heeft een maximum voor $x = \frac{1}{2}$. Dit geeft tevens het maximum voor $f(x,y)$ in de punten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$; de functiewaarde is daar $\frac{5}{4}$. Het minimum van $-x^2 + x + 1$ is blijkbaar een randminimum, dat dus bij $x = 1$ of $x = -1$ moet liggen; substitutie van deze waarden van x leert, dat bij $x = -1$ het minimum ligt. De oorspronkelijke functie heeft dus een minimum in het punt $(-1,0)$; de waarde is daar -1 .

Men bedenke, dat de methode met de afgeleiden alleen lokale extrema oplevert, zodat als we met deze methode binnen het gebied een lokaal maximum hebben gevonden er op de rand ook nog wel een maximum kan liggen.

Men kan dit bv. zien aan de functie $f(x,y)$ van voorbeeld 3 die een lokaal maximum heeft in $(-1,1)$ ter waarde 9. Beschouwt men nu deze functie op en binnen de cirkel $x^2 + y^2 = 36$, dan is $f(6,0) = 33$, dus er is op de rand zeker nog een maximum aanwezig.

Een andere toepassing van bovenstaande stelling is, dat men haar juist gebruikt om aan te tonen dat er extrema in het inwendige zijn. Het volgende eenvoudige voorbeeld is typisch voor de methode.

Vb.7 Gevraagd de extrema van de functie $f(x,y) = (x-y)(x^2+y^2-1)$.

We stellen eerst $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Dit geeft

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 - 2xy + y^2 - 1 &= 0 \\ -x^2 + 2xy - 3y^2 + 1 &= 0 \end{aligned} \right\} . \text{ Door optellen vinden we dat } y = \frac{1}{2}x \text{ en zo}$$

komen we tot de oplossingen $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{6}\sqrt{6})$, $(-\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6})$. Men kan nu met behulp van Δ wel uitmaken welke hiervan extrema zijn. We willen het anders doen, nl. met behulp van een hoogtekaart van de functie. De functie is nul in de punten van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ en de rechte $y = x$. Deze verdelen samen het platte vlak in vier delen. Het is van elk van deze delen makkelijk aan te geven welk teken f daar heeft.

De eerste twee hierboven gevonden punten zijn de snijpunten van de lijn en de cirkel. Aan de figuur ziet men direct, dat daar geen extrema zijn. We beschouwen nu een van de twee gebieden binnen de cirkel, bv. het deel links boven. Op dit gebied passen we de stelling toe, op grond waarvan er een maximum van de functie moet zijn binnen het gebied of op de rand. Maar op de rand is de functie nul en erbinnen positief, dus het maximum moet binnen het gebied liggen. Zo vinden we dat $(-\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6})$ een maximum van f levert. Op analoge wijze levert $(\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{6}\sqrt{6})$ een minimum.

Een van de aspecten van de methode van voorbeeld 7 komt hierop neer, dat de stelling over het bestaan van extrema toegepast kan worden op gebieden die kleiner zijn dan het eigenlijke gebied dat beschouwd wordt. Dit levert alleen dan een bruikbaar resultaat als het extremum in het inwendige van dit kleinere gebied terecht komt. Als het nl. op de rand komt, behoeft het geen extremum te blijven bij vergroting van het gebied. Dit laat zich duidelijk demonstreren aan hetzelfde gebied (halve cirkel), dat in voorbeeld 7 is beschouwd. In dit gebied heeft de functie ook een minimum; daar de functie binnen het gebied positief is en op de rand nul, wordt het minimum in elk punt van de rand aangenomen. Zo'n randpunt is echter zelfs geen lokaal minimum van de functie als we de beperking tot dit gebied laten vallen, want in iedere omgeving van zo'n punt liggen buiten de halve cirkel ook punten, waar de functie negatief is.

B. Extrema onder voorwaarden.

We bespreken nu een ander type van extremumproblemen, dat we eerst met een eenvoudig voorbeeld inleiden.

Vb.8 Gevraagd in het platte vlak de kortste afstand van het punt $(1,0)$ tot de parabool $y^2 = 4x$. In plaats van de afstand zelf kunnen we natuurlijk ook wel het kwadraat van de afstand beschouwen.

We moeten dus van $(x-1)^2 + y^2$ het minimum bepalen echter onder de bijvoorwaarde, dat we ons beperken tot die (x,y) , die voldoen aan $y^2 - 4x = 0$. Voor deze punten geldt nu, dat $y^2 = 4x$, dus dat de functie $(x-1)^2 + 4x = (x+1)^2$ is. Dit is kennelijk minimaal voor $x = -1$, maar hierbij is geen y te vinden, waarvoor $y^2 = 4x$. Meer succes hebben we als we in plaats van de y de x elimineren: stel $x = \frac{1}{4}y^2$, dan wordt de functie $(\frac{1}{4}y^2 - 1)^2 + y^2 = (\frac{1}{4}y^2 + 1)^2$, hetgeen minimaal is bij $y = 0$.

De methode, die we hier ter oplossing gevolgd hebben, is dat we uit de bijvoorwaarde een der veranderlijken hebben opgelost en gesubstitueerd in de functie, die daardoor in een functie van één veranderlijke overging. Het merkwaardige daarbij is, dat bij oplossen van y het bestaande minimum niet werd gevonden en bij oplossen van x wel. We vragen ons af, hoe dat komt. Volgens de resultaten van paragraaf 3 kan uit een vergelijking $g(x,y) = 0$, de y netjes als functie van x worden opgelost als $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$. Nu is in ons geval $g(x,y) = y^2 - 4x$, dus $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$ en in het minimum is dit juist $= 0$. Inderdaad is in de buurt van $(0,0)$ y niet oplosbaar als functie van een vrij variabele x , want x moet ≥ 0 zijn. Dit resulteert in het feit dat er in de gevonden functie van x een randextremum moet worden beschouwd. Dat kan in dit geval nog wel uitgevoerd worden, maar is in moeilijker gevallen vervelend; bovendien treedt bij oplossen van x helemaal geen randextremum op!

We beschouwen nu de extrema van een functie $f(x,y)$ onder de voorwaarde $g(x,y) = 0$. We weten van te voren niet, waar deze extrema komen. Gaan we dus als boven y uit $g(x,y) = 0$ oplossen, dan lopen we de kans, dat het gezochte extremum juist in een punt zit waar $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$. Dit kunnen we dan ondervangen door ook naar x op te lossen. Doen we beide, dan missen we alleen nog de punten waar $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$, hetgeen echter singuliere punten zijn. Dit twee keer oplossen ziet er echter nodeloos omslachtig uit; we zoeken een methode die symmetrisch is in alle optredende variabelen.

Stel dat in (a,b) $f(x,y)$ een lokaal extremum heeft onder de voorwaarde $g(x,y) = 0$ en dat (a,b) een regulier punt van rang 1 is van $g(x,y)$. Volgens de resultaten van paragraaf 3 zijn de punten in een zekere omgeving van (a,b) , die aan $g(x,y) = 0$ voldoen voor te stellen met een parametervoorstelling

$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \end{array} \right\}$, waarbij de matrix $\begin{pmatrix} \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{d\phi}{dt} \end{pmatrix}$ rang 1 heeft. Stel dat $\varphi(c) = a$,

$\phi(c) = b$, dan heeft de functie $f(\varphi(t), \phi(t))$ een lokaal extremum voor $t = c$, dus haar afgeleide is daar nul:

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d\phi}{dt} = 0.$$

Aan de andere kant is $g(\varphi(t), \phi(t)) = 0$ identiek in t , dus

$$(2) \quad \frac{\partial g}{\partial x} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{d\phi}{dt} = 0.$$

Omdat $\frac{d\varphi}{dt}$ en $\frac{d\phi}{dt}$ niet beide = 0 zijn volgt uit (1) en (2):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \text{ (afgeleiden in (a,b))}. \text{ Omdat } \frac{\partial g}{\partial x} \text{ en } \frac{\partial g}{\partial y} \text{ niet beide} \\ = 0 \text{ zijn in (a,b), bestaat er een } \lambda, \text{ zo dat } \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}.$$

We hebben dus gevonden dat bij een lokaal extremum in een regulier punt van de voorwaarde een getal λ bestaat, zo dat

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{array} \right\}$$

in dat punt gelden. Dit zijn echter drie vergelijkingen voor de drie onbekenden x , y en λ . Men merke verder op, dat de eerste twee vergelijkingen juist de partiële afgeleiden zijn van de functie

$$f(x,y) - \lambda g(x,y).$$

We passen dit eens toe in het geval van voorbeeld 8. Nu is $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ en $g(x,y) = y^2 - 4x$. We krijgen de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} 2(x-1) + 4\lambda &= 0 \\ 2y - 2\lambda y &= 0 \\ y^2 &= 4x \end{aligned} \right\} , \text{ met als enige oplossing}$$

$x = 0, y = 0, \lambda = \frac{1}{2}$, waarvan we natuurlijk nog niet weten of er een minimum bij hoort.

Vb.9 Gevraagd de maxima en minima van $2x + 3y$ onder de bijvoorwaarde $x^2 + 4y^2 = 4$. Op te lossen is het stelsel

$$\left. \begin{aligned} 2 - 2\lambda x &= 0 \\ 3 - 8\lambda y &= 0 \\ x^2 + 4y^2 &= 4 \end{aligned} \right\} \text{ met als oplossingen } x = \frac{8}{5}, y = \frac{3}{5}, \lambda = \frac{5}{8} \text{ en}$$

$x = -\frac{8}{5}, y = -\frac{3}{5}, \lambda = -\frac{5}{8}$. De meetkundige betekenis is de volgende:

$2x + 3y = \text{constant}$ is de vergelijking van een rechte. Als de constante groot in absolute waarde is, zal de rechte de ellips $x^2 + 4y^2 = 4$ niet snijden, d.w.z. de functie $2x + 3y$ die waarde op de ellips niet aannemen. De maximale waarde van de constante waarvoor de lijn nog iets met de ellips gemeen heeft, levert een raaklijn.

De punten $(\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$ en $(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5})$ zijn dus de raakpunten van de raaklijnen aan de ellips evenwijdig met de rechte $2x + 3y = 0$. Uit de meetkundige beschouwing volgt, dat het eerste punt de functie $2x + 3y$ maximaal en het tweede punt de functie minimaal maakt. We merken nog op dat het enige singuliere punt voor $x^2 + 4y^2 - 4$ het punt $(0,0)$ is, dat echter niet aan $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ voldoet.

Met nadruk wijzen we erop, dat de hierboven gegeven methode alleen het vinden van die extrema garandeert, die in een regulier punt van de bijvoorwaarde optreden. Het volgende voorbeeld diene ter waarschuwing.

Vb.10 Gevraagd de minimale afstand van het punt $(-1,0)$ tot de kromme $x^3 = y^2$. We moeten dus $(x+1)^2 + y^2$ minimaal maken onder de bijvoorwaarde $x^3 = y^2$. Dit is heel eenvoudig: een (x,y) , die aan de bijvoorwaarde voldoet, heeft altijd $x \geq 0$, dus $x+1 \geq 1$, dus $(x+1)^2 + y^2 \geq 1$. Aan de andere kant voldoet $(0,0)$ aan de bijvoorwaarde en is de functie daar $= 1$. Dus in $(0,0)$ hebben we een minimum met waarde 1. Ook als men een grafiek tekent, ziet men dit duidelijk. Probeert men de hierboven gegeven methode echter, dan krijgt men de vergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} 2(x+1) - 3\lambda x^2 &= 0 \\ 2y + 2\lambda y &= 0 \\ x^3 &= y^2 \end{aligned} \right\} , \text{ die geen enkele oplossing hebben. Inderdaad}$$

is $(0,0)$ een singulier punt van de functie $x^3 - y^2$.

We kunnen nu ook functies van meer dan twee veranderlijken beschouwen en bovendien meer dan één bijvoorwaarde toelaten. We krijgen dan de volgende stelling.

Stelling Als de functie $f(x_1, \dots, x_n)$ in een omgeving van (a_1, \dots, a_n) differentieerbaar is en in (a_1, \dots, a_n) een lokaal extremum bezit onder de bijvoorwaarden

$$\left. \begin{array}{l} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\}$$

en als (a_1, \dots, a_n) een regulier punt (van rang r) is van de functies g_1, \dots, g_k , dan bestaan er getallen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, dusdanig dat

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} - \dots - \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_1} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} - \dots - \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_n} = 0 \end{array} \right\}$$

waarbij alle partiële afgeleiden in (a_1, \dots, a_n) genomen zijn (Multiplicatorenstelling van Lagrange).

We merken op, dat de $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ multiplicatoren genoemd worden.

De linkerleden van de gevonden betrekkingen zijn de partiële afgeleiden van de functie $f - \lambda_1 g_1 - \dots - \lambda_k g_k$. Als men de stelling gebruikt om extrema op te sporen, dan leveren de gevonden betrekkingen plus de bijvoorwaarden $n+k$ vergelijkingen met de $n+k$ onbekenden x_1, \dots, x_n en $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Het bewijs is analoog met het hierboven geleverde bewijs voor $n = 2$, $k = 1$. We kunnen in een omgeving van (a_1, \dots, a_n) de (x_1, \dots, x_n) , die aan de bijvoorwaarden voldoen, voorstellen met een parametervoorstelling met $n-r$ parameters:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_{n-r}) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_{n-r}) \end{array} \right\}, \text{ waarbij } \left. \begin{array}{l} a_1 = \varphi_1(c_1, \dots, c_{n-r}) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_n = \varphi_n(c_1, \dots, c_{n-r}) \end{array} \right\}$$

en de rang van de functionaalmatrix van $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ gelijk is aan $n-r$. Nu heeft de functie $f(\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-r}), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_{n-r}))$ een extremum voor $(t_1, \dots, t_{n-r}) = (c_1, \dots, c_{n-r})$, zodat daar geldt

$$(3) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_\mu} = 0 \text{ voor } \mu = 1, \dots, n-r.$$

Omdat de parametervoorstelling de punten voorstelt, die aan de bijvoorwaarden voldoen, geldt ook

$$(4) \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_{\kappa}}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_{\mu}} = 0 \quad \text{voor } \kappa = 1, \dots, k \text{ en } \mu = 1, \dots, n-r.$$

We beschouwen nu het stelsel lineaire vergelijkingen met onbekenden u_1, \dots, u_n :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n} u_n &= 0 \\ \dots & \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial g_k}{\partial x_n} u_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\alpha).$$

Dit stelsel heeft klaarblijkelijk rang r . De oplossingsruimte heeft dus dimensie $n-r$. Volgens (4) zijn de volgende $n-r$ vectoren echter oplossingsvectoren:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} \right) \\ \dots \\ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_{n-r}}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_{n-r}} \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{. Daar de functionaalmatrix van}$$

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ rang $n-r$ heeft, zijn deze vectoren lineair onafhankelijk.

Wegens (3) zijn deze zelfde vectoren ook oplossingen van de vergelijking

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} u_n = 0 \quad (\beta).$$

Het stelsel lineaire vergelijkingen (α) en (β) samen heeft dus minstens $n-r$ lineair onafhankelijke oplossingen; de dimensie van de oplossingsruimte is dus minstens $n-r$. Aan de andere kant kan deze dimensie natuurlijk nooit groter zijn, dan die van het stelsel (α) . Dus de dimensie is $n-r$; dus de rang van de coëfficiëntenmatrix is r , evenals die van de coëfficiëntenmatrix van (α) alleen. Hieruit volgt dat de coëfficiëntenrijvector van (β) een lineaire combinatie is van de coëfficiëntenrijvectoren van (α) . Maar dat is precies de te bewijzen betrekking.

Vb.11 Gevraagd de extrema van $x - y - 3z$ onder de bijvoorwaarden

$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned} \right\}$ Het volgende stelsel vergelijkingen wordt verkregen:

$$\left. \begin{aligned} 1 - 2\lambda x - \mu &= 0 \\ -1 - 2\lambda y - \mu &= 0 \\ -3 - 2\lambda z + \mu &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &\text{met als oplossingen} \\ &x = 0, y = \frac{1}{2}\sqrt{2}, z = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \lambda = -\sqrt{2}, \mu = 1; \\ &x = 0, y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, z = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \lambda = \sqrt{2}, \mu = 1. \end{aligned}$$

Een soortgelijke meetkundige interpretatie als in voorbeeld 9 kan hier gegeven worden: de gevonden punten zijn raakpunten van raakvlakken aan de cirkel evenwijdig met $x - y - 3z = 0$. Er zijn geen singuliere punten die aan de bijvoorwaarden voldoen.

Vb.12 Gevraagd het rechthoekig blok met gegeven totale oppervlakte K van de zijvlakken en maximale inhoud. Noem lengte, breedte en hoogte van het blok x , y , z , dan moeten we de functie xyz beschouwen onder de bijvoorwaarde $xy + yz + xz = \frac{1}{2}K$.

Toepassing van de multiplicatorenmethode levert

$$\left. \begin{aligned} yz - \lambda(y + z) &= 0 \\ xz - \lambda(x + z) &= 0 \\ xy - \lambda(x + y) &= 0 \\ xy + yz + xz &= \frac{1}{2}K \end{aligned} \right\} . \text{ We mogen ons tot positieve waarden van } x, y, z$$

beperken en vinden dan als enige oplossing $x = y = z = \frac{1}{6} \sqrt{6K}$,
 $\lambda = \frac{1}{12} \sqrt{6K}$. De inhoud is dan $\frac{1}{36} K \sqrt{6K}$. Het enige singuliere punt $(0,0,0)$

voldoet niet aan de bijvoorwaarde. De vraag is nu of dit inderdaad een maximum is. Dit trachten we nu aan te tonen door gebruik te maken van stelling, die de existentie van een maximum waarborgt. Als gebied van toepassing zouden we geneigd zijn te nemen het gebied bepaald door $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ (het eerste octant) omdat dit de waarden van x , y , z zijn die meetkundig in aanmerking komen. Om de stelling te kunnen toepassen moeten we echter ook begrenzingspunten meetellen, dus bv. punten met $x = 0$. Dit kan zonder bezwaar omdat de inhoud dan $= 0$ is en dus zeker niet maximaal. We nemen dus de verzameling van $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, die voldoet aan $xy + yz + xz = \frac{1}{2}K$. Deze verzameling is echter helaas niet begrensd, want hoe groot z ook is, er kunnen altijd x en y dicht bij 0 bij gevonden worden zodat (x,y,z) aan de bijvoorwaarde voldoet. We proberen echter aan te tonen, dat deze ver weg gelegen punten niet tot een maximum kunnen bijdragen.

Als $z \neq 0$, dan geldt voor (x,y,z) die aan de bijvoorwaarde en aan $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ voldoen dat $x \leq \frac{K}{2z}$, $y \leq \frac{K}{2z}$, dus $xyz \leq \frac{K^2}{4z}$. Dus als $z \geq 3 \sqrt{6K}$, dan is de inhoud $\leq \frac{1}{72} K \sqrt{6K}$ en dus zeker kleiner dan de hierboven gevonden waarde $\frac{1}{36} K \sqrt{6K}$. Hetzelfde kunnen we met x en y doen. We beperken ons nu tot die (x,y,z) , die voldoen aan

$$0 \leq x \leq 3 \sqrt{6K}, \quad 0 \leq y \leq 3 \sqrt{6K}, \quad 0 \leq z \leq 3 \sqrt{6K}, \\ xy + yz + xz = \frac{1}{2}K.$$

Dit is geoorloofd, want de punten die hierbuiten vallen, positieve x , y , z hebben en aan de bijvoorwaarde voldoen, geven een kleinere inhoud dan $\frac{1}{36} K \sqrt{6K}$. Op de nu verkregen verzameling passen we de stelling toe, die ons de existentie van een globaal maximum waarborgt, dat ook niet op de begrenzing gelegen is en dus juist de oplossing moet zijn die met de methode van Lagrange gevonden is. De kubus is dus de oplossing van het gestelde meetkundige probleem.

§.5 Transformatie van meervoudige integralen.

Als we een meervoudige integraal moeten bepalen, doen we dit vaak door andere coördinaten in te voeren. Hiervan zijn in het eerste jaar al vele voorbeelden behandeld. Ter opfrissing van het geheugen nog een voorbeeld.

Vb.1 Gevraagd de integraal van $\sqrt{x^2+y^2}$ over het binnengebied G van de eenheidscirkel $x^2+y^2=1$, dus $\int_G \sqrt{x^2+y^2} dx dy$. Ter vereenvoudiging van de berekening voeren we poolcoördinaten in; dan gaat $dx dy$ over in $r dr d\varphi$ en de integraal wordt

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \frac{2}{3} \pi.$$

Analoog gaat dit in drie dimensies. We trachten nu de algemene situatie te beschouwen; we doen dit eerst eens in drie dimensies. Te berekenen is een integraal

$$(1) \int_G f(x,y,z) dx dy dz,$$

uitgestrekt over een gebied G in de driedimensionale ruimte. We gaan nu transformeren met transformatieformules:

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi_1(u,v,w) \\ y = \varphi_2(u,v,w) \\ z = \varphi_3(u,v,w) \end{array} \right\} ; \text{voorbeeld : } \left. \begin{array}{l} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{array} \right\} \text{ (bolcoördinaten).}$$

We kunnen dit zo opvatten dat het punt (x,y,z) door deze formules "nieuwe" coördinaten (u,v,w) krijgt. We kunnen het ook zo opvatten, dat de formules een afbeelding van de (u,v,w) -ruimte in de (x,y,z) -ruimte tot stand brengen, waardoor met een gebied G' in de (u,v,w) -ruimte een beeldgebied G in de (x,y,z) -ruimte correspondeert.

Bij deze correspondentie moeten we erop letten of bij de afbeelding niet sommige stukken twee of meer malen aan bod komen. Neemt men bij de bolcoördinaten $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ dan krijgen we de massieve eenheidsbol. Nemen we echter voor φ de grenzen $0 \leq \varphi < 4\pi$ dan krijgen we ook dezelfde bol, nu echter twee maal geteld.

Ons doel is om integratie over x,y,z om te zetten in integratie over (u,v,w) . Zouden we niet letten op deze mogelijkheid van meervoudige overdekking bij de afbeelding, dan zouden we foutieve uitkomsten krijgen.

We hebben dus nu een gebied G' in de (u,v,w) -ruimte en een corresponderend gebied G in de (x,y,z) -ruimte. Om de integraal (1) te bepalen moeten we G in brokken verdelen, van elke brok de inhoud met een functie-waarde van f vermenigvuldigen en de resultaten optellen. Vervolgens moeten we de limiet nemen als de brokken steeds kleiner worden.

In plaats van G in brokken te verdelen, verdelen we nu eerst in de (u,v,w) -ruimte de G' in brokken B' en nemen de corresponderende brokken B van G in de (x,y,z) -ruimte. We moeten dan echter weten, wat er met de inhoud gebeurt bij de overgang van B' op B . We veronderstellen nu, dat de transformatiefuncties $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ differentieerbaar zijn, dus bij

benadering lineair in een omgeving van een punt. Nemen we nu een kleine brok, dan mogen we misschien wel aannemen, dat de afbeelding lineair is. We moeten dus eerst nagaan wat er met inhouden gebeurt bij een lineaire afbeelding.

We nemen daartoe een parallelepipedum dat opgespannen wordt door de vectoren \underline{p} , \underline{q} , \underline{r} . De inhoud hiervan is de absolute waarde van $D(\underline{p}, \underline{q}, \underline{r})$, dat is de absolute waarde van de determinant van de matrix waarvan de kolommen juist de vectoren \underline{p} , \underline{q} , \underline{r} in R_3 zijn. We gaan nu R_3 lineair afbeelden. Dit hoeft niet homogeen lineair te zijn en het parallelepipedum hoeft geen hoekpunt in de oorsprong te hebben. Laat de afbeelding aan het punt \underline{x} toevoegen het punt $A\underline{x} + \underline{c}$, waarin \underline{c} een constante vector is en A een lineaire afbeelding zoals in het eerstejaarscollege gedefinieerd. Een zijde van het parallelepipedum behorende bij \underline{p} moge als hoekpunten hebben \underline{a} en $\underline{a} + \underline{p}$. De beelden hiervan zijn $A\underline{a} + \underline{c}$ en $A(\underline{a} + \underline{p}) + \underline{c}$. De opspannende vector van de nieuwe zijde is dus $A\underline{p}$. Het is dus duidelijk, dat het beeld een parallelepipedum is opgespannen door $A\underline{p}$, $A\underline{q}$, $A\underline{r}$. We moeten dus nu $D(A\underline{p}, A\underline{q}, A\underline{r})$ bepalen. Dit is echter de determinant van de matrix, die het product is van de matrix van A en de hierboven uit \underline{p} , \underline{q} , \underline{r} gevormde matrix. We krijgen nl. de kolomvector $A\underline{p}$ uit het schema

$$\begin{bmatrix} [A] & \underline{p} \end{bmatrix} ,$$

door matrixvermenigvuldiging van de matrix $[A]$ van A met de kolomvector \underline{p} .

Op grond van de productregel voor determinanten vinden we nu dat de inhoud met de absolute waarde van de determinant van A wordt vermenigvuldigd.

Dit geldt voor parallelepipeda, maar dan ook voor willekeurige verzamelingen, want de inhoud daarvan kan men approximeren door ze in kleine kubusjes te verdelen. De inhoud van elk van deze kubusjes wordt dan met $|\det A|$ vermenigvuldigd en dus ook de som van deze inhouden.

Hetgeen we hier voor drie dimensies hebben gedaan kan geheel analoog voor een ander aantal dimensies geschieden. In R_2 wordt de inhoud natuurlijk vervangen door de oppervlakte; in R_n door de n -dimensionale inhoud. Dus we vinden de volgende stelling.

Bij een lineaire afbeelding van R_n in R_n worden n -dimensionale inhouden vermenigvuldigd met de absolute waarde van de determinant van de afbeelding.

We keren terug tot een brok B' in de (u, v, w) -ruimte en het corresponderende brok B in de (x, y, z) -ruimte. B ontstaat uit B' door toepassing van de functies $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die we differentieerbaar veronderstellen met continue partiële afgeleiden. Deze afbeelding is nu bij benadering lineair; beperken we ons tot het lineaire stuk, dat als determinant de functionaaldeterminant van de functies $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ heeft, dan is dus bij benadering de inhoud van B gelijk aan de inhoud van B' maal $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|$.

Voor de approximatiesom van de integraal (1) moeten we dit nog met een functiewaarde van f in dit brok vermenigvuldigen en over alle brokken optellen. We hebben dan echter bij elke brok nog een fout gemaakt, omdat de afbeelding niet precies lineair was, doch slechts bij benadering.

De som van deze fouten over alle brokken samen blijkt nu echter naar nul te gaan, als we de afmetingen van de brokken tot nul laten naderen; dit bewijzen we niet. We hebben de approximatiesom van de integraal (1) nu vervangen door een approximatiesom van de integraal

$$(2) \int_{G'} f(\varphi_1(u,v,w), \varphi_2(u,v,w), \varphi_3(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du dv dw.$$

Door de brokken steeds kleiner te maken vinden we dat (1) en (2) aan elkaar gelijk zijn.

Hetgeen hier in drie dimensies is uitgevoerd kunnen we in ieder ander aantal dimensies geheel analoog uitvoeren.

Stelling Als de afbeelding $x_1 = x_1(u_1, \dots, u_n)$
 \dots
 $x_n = x_n(u_1, \dots, u_n)$ } een differentieer-

bare afbeelding $\underline{x} = \underline{x}(\underline{u})$ van R_n in R_n tot stand brengt, met continue partiële afgeleiden en als hierdoor het gebied G' op G zo afgebeeld wordt, dat G enkelvoudig overdekt wordt, en als $f(\underline{x})$ continu is op G , dan geldt

$$\int_G f(\underline{x}) dx_1 \dots dx_n = \int_{G'} f(\underline{x}(\underline{u})) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right| du_1 \dots du_n.$$

$$\text{Korter geformuleerd: } dx_1 \dots dx_n = \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right| du_1 \dots du_n.$$

Speciale gevallen hiervan hebben we al lang toegepast. Bv. in het platte vlak is bij overgang op poolcoördinaten $dx dy = r dr d\varphi$; maar de functionaaldeterminant van $\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\}$ is $\begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$.

Evenzo in de ruimte bij cylindercoördinaten $dx dy dz = r dr d\varphi dz$ en bij de bolcoördinaten $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$. In beide gevallen zijn de factoren r en $r^2 \sin \theta$ juist de functionaaldeterminant (mits de veranderlijken in een passende volgorde worden genomen; anders op het teken na).

Vb.2 Beschouw de transformatie

$$\left. \begin{array}{l} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{array} \right\}.$$

Om een overzicht te krijgen van deze transformatie beschouwen we eerst wat het beeld is van de lijnen $u = \text{constant}$ en $v = \text{constant}$. Nemen we $u = c$ dan krijgen we een kromme (v is parameter), die de volgende vergelijking heeft: $y^2 = -4c^2(x - c^2)$. Dit is een parabool met top op de positieve x -as en de opening naar links. Kennelijk geven $u = c$ en $u = -c$ dezelfde parabool. Terwille van de verkrijging van een enkelvoudige overdekking beperken we ons tot $u \geq 0$. Dan is echter ook bij ieder punt (x, y) een $c \geq 0$ te vinden zodat de bijbehorende parabool dit punt bevat.

Let bij de bepaling van de coörd. transformatie in de eek plaats op de integrand. (?)

Nu beschouwen we $v = c$; dit leidt tot $y^2 = 4c^2(x + c^2)$. Dit is een parabool met top op de negatieve x -as en de opening naar rechts. Blijkbaar geven $v = c$ en $v = -c$ dezelfde parabool. Dit betekent echter niet, dat we, nu we ons al tot $u \geq 0$ beperkt hebben, ook zonder meer $v \geq 0$ kunnen stellen. Dat is zelfs beslist niet zo, want als $y < 0$ moeten u en v verschillend teken hebben. We kunnen het ook zo zeggen, dat als we $v > 0$ zouden kiezen bij gegeven x en y , de bijbehorende $u < 0$ zou kunnen uitvallen.

We hadden natuurlijk wel $v \geq 0$ kunnen kiezen als we u willekeurig zouden laten. We beschouwen nu het gebied G in het platte vlak dat begrensd wordt door de bogen van de parabolen $y^2 = -4x + 4$ en

$y^2 = 4x + 4$. Gevraagd wordt de integraal $\int_G \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$. We zetten

dit om in een integraal over u en v . Het gebied G wordt bepaald door de ongelijkheden

$$\left. \begin{aligned} y^2 + 4x - 4 &\leq 0 \\ y^2 - 4x - 4 &\leq 0 \end{aligned} \right\}, \text{ die overgaan in } \left. \begin{aligned} 4(u^2 - 1)(v^2 + 1) &\leq 0 \\ 4(u^2 + 1)(v^2 - 1) &\leq 0 \end{aligned} \right\}, \text{ dus}$$

$u^2 \leq 1$ en $v^2 \leq 1$. Omdat we ons tot $u \geq 0$ beperkt hebben, levert dit de rechthoek $0 \leq u \leq 1$, $-1 \leq v \leq 1$. De functionaaldeterminant is

$$\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2 + v^2). \text{ Verder is } x^2 + y^2 = (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2.$$

Dus de integraal gaat over in

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 du \int_{-1}^1 (u^2 + v^2)^2 dv &= 4 \int_0^1 du \left[u^4 v + \frac{2}{3} u^2 v^3 + \frac{1}{5} v^5 \right]_{-1}^1 = \\ &= 4 \int_0^1 \left(2u^4 + \frac{4}{3} u^2 + \frac{2}{5} \right) du = 4 \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{9} + \frac{2}{5} \right) = \frac{224}{45}. \end{aligned}$$

We zijn in dit voorbeeld begonnen met een transformatie en hebben vervolgens een integraal berekend. Meestal is het zo, dat het probleem gesteld is, de integraal uit te rekenen en dat daarbij de passende transformatie moet worden gezocht. Meestal is dat veel moeilijker. In het hier behandelde geval had ook transformatie op poolcoördinaten vrij snel tot resultaat geleid.

De hierboven gegeven stelling is natuurlijk ook goed voor $n = 1$; in dit geval is de functionaaldeterminant gelijk aan de afgeleide. Er komt dan dus

$$dx = \left| \frac{dx}{du} \right| du,$$

hetgeen al van vroeger bekend is, echter zonder de absoluutstrepen!

Dit komt, omdat er bij gewone, enkelvoudige integralen afspraken over oriëntering worden gemaakt, die we bij meervoudige integralen niet hebben.

Als $a < b$, dan duiden we een integraal uitgestrekt over het interval

$a \leq u \leq b$ aan met \int_a^b ; echter kennen we in dat geval ook aan \int_b^a een

betekenis toe, en wel $\int_b^a = - \int_a^b$. Passen we nu een substitutie $x = x(u)$

toe, en is $\frac{dx}{du} > 0$, dus $x(u)$ stijgend, dan volgt uit $a < b$ dat $x(a) < x(b)$, dus in beide gevallen een gelijke oriëntering. Is echter $\frac{dx}{du} < 0$ dan is $x(a) > x(b)$.

Dit wordt nu juist opgevangen door geen absoluutstrepen te zetten, dus met de formule

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx = \int_a^b f(x(u)) \frac{dx}{du} du.$$

hetgeen in alle gevallen overeenkomt met

$$\int_G f(x) dx = \int_{G'} f(x(u)) \left| \frac{dx}{du} \right| du,$$

waarin G' het interval $a \leq u \leq b$ is en G het beeldinterval bij de afbeelding $x = x(u)$.

Bij meervoudige integralen lukt dit oriënteren niet zo eenvoudig, zodat daar alleen de formule met de absoluutstrepen overblijft.

HOOFDSTUK V VECTORANALYSE

§.1 Lijn- en oppervlakte-integralen.

A. Lijnintegralen.

We beschouwen een kromme in R_3 , die we gegeven denken door een parametervoorstelling

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\} . \text{ Hier kunnen we ook het geval van een kromme in } R_2$$

onder laten vallen door $z(t)$ identiek nul te stellen. In het eerste jaar is al behandeld, hoe de integraal van een functie $\varphi(x,y,z)$ over zo'n kromme moet worden uitgerekend.

We zullen dit nogmaals behandelen, nu met gebruikmaking van de vectornotatie. In deze notatie schrijven we de parametervoorstelling als $\underline{x} = \underline{x}(t)$. Stel dat t het interval $a \leq t \leq b$ doorloopt. We verdelen de kromme in kleine stukjes door eerst het t -interval in stukjes te verdelen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. We krijgen nu een approximatiesom van de integraal van $\varphi(\underline{x})$ over de kromme door bij elk stukje de lengte van het verbindende lijnstuk van de eindpunten $|\underline{x}(t_i) - \underline{x}(t_{i-1})|$ te vermenigvuldigen met de waarde van φ in een punt ergens op dit stukje:

$$\varphi(\underline{x}(\tau_i)) \text{ met } t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i. \quad \text{Dus}$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi(\underline{x}(\tau_i)) |\underline{x}(t_i) - \underline{x}(t_{i-1})|.$$

We nemen nu aan dat de vectorfunctie $\underline{x}(t)$ differentieerbaar is met continue afgeleiden van de eerste orde. Dan is

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(\tau) + (t-\tau) \left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)_{t=\tau} + \dots$$

Dus

$$\underline{x}(t_i) - \underline{x}(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1}) \left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)_{t=\tau_i} + \dots$$

We bewijzen niet, dat de bijdrage afkomstig van het gedeelte dat hier met stippeltjes is aangeduid tot nul nadert als de verdeling steeds fijner wordt gemaakt. Zo zien we, dat we de volgende integraal verkrijgen:

$$\int_a^b \varphi(\underline{x}(t)) \left| \frac{d\underline{x}}{dt} \right| dt = \int_a^b \varphi(\underline{x}(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} dt,$$

hetgeen de lijnintegraal is van de functie $\varphi(\underline{x})$ over de kromme $\underline{x} = \underline{x}(t)$.

Vb.1 Gevraagd de integraal van x^2 uitgestrekt over de cirkel $x^2 + y^2 = 1$.

De cirkel kunnen we voorstellen door $\left. \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right\}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.

Dan is $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, $\frac{dy}{dt} = \cos t$, dus $\left| \frac{d\underline{x}}{dt} \right| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$.

We krijgen dus $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi$.

Uit de wijze waarop we aan de lijnintegraal zijn gekomen volgt al, dat deze onafhankelijk moet zijn van de parameterkeuze. Dit blijkt echter ook bij verificatie in de formule te kloppen. Gaat men van de parameter t over op de parameter u dan vinden we volgens de kettingregel dat

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} \frac{dx}{du}, \quad \text{dus} \quad \left| \frac{dx}{dt} \right| = \left| \frac{du}{dt} \right| \left| \frac{dx}{du} \right|, \quad \text{dus}$$

$$\int \varphi(\underline{x}(t)) \left| \frac{dx}{dt} \right| dt = \int \varphi(\underline{x}(t)) \left| \frac{dx}{du} \right| \left| \frac{du}{dt} \right| dt, \quad \begin{array}{l} t = t(u) \\ \text{de Jacobiaan } \frac{dt}{du} \text{ nu} \end{array}$$

maar dit laatste is op grond van de transformatiestelling voor integralen juist gelijk aan

$$\int \varphi(\underline{x}(t(u))) \left| \frac{dx}{du} \right| du.$$

Let wel dat hierbij steeds over het positief geöriënteerde interval geïntegreerd wordt, zodat we inderdaad de transformatieformule met absoluutstrepen moeten gebruiken (zie de opmerkingen aan het eind van §.5 van hoofdstuk IV).

Een bij vlakke krommen vaak gebruikte speciale parametervoorstelling is de expliciete vorm $y = y(x)$, dus met x als parameter. In dat geval wordt de lijnintegraal dus

$$\int \varphi(x, y(x)) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

In bovenstaand voorbeeld krijgen we twee expliciete voorstellingen

$$y = \pm \sqrt{1-x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\mp x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \text{De gevraagde integraal}$$

is dus

$$2 \int_{-1}^{+1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{hetgeen ook } \pi \text{ oplevert.}$$

Als we de geïntegreerde functie gelijk aan 1 nemen, dan is de lijn-integraal de booglengte van de beschouwde kromme:

$$\int_a^b \left| \frac{dx}{dt} \right| dt. \quad \text{Deze gebruiken we nu om een speciale parameterkeuze}$$

op de kromme tot stand te brengen. We nemen een variabel punt $\underline{x} = \underline{x}(t)$ op de kromme en meten de booglengte van een vast punt $\underline{x}(a)$ tot dit variabele punt (de integratieveranderlijke vervangen we door τ):

$$s = \int_a^t \left| \frac{dx}{d\tau} \right| d\tau. \quad \text{Dit getal, dat aan het punt van de kromme wordt toe-}$$

gevoegd, kunnen we nu als parameter van dit punt opvatten.

Het verband tussen deze parameter s en de oorspronkelijke parameter t wordt gegeven door

$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|$. Men zegt wel, dat met s als parameter de booglengte als parameter is gekozen. Let wel dat deze parameter s slechts op een additieve constante na bepaald is: het beginpunt van waaruit de booglengte wordt gemeten kan anders worden gekozen. Met de parameter s wordt de lijnintegraal eenvoudig:

$$\int \varphi(\mathbf{x}(s)) ds.$$

Vb.2 De ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kan in de volgende parametervoorstelling worden geschreven: $\left. \begin{array}{l} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{array} \right\}$. Nu is $\frac{dx}{dt} = -a \sin t$, $\frac{dy}{dt} = b \cos t$,

dus $\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$. Nemen we als beginpunt het punt $t = 0$, dan krijgen we

$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} du$, welke integraal echter helaas niet met elementaire hulpmiddelen uit te rekenen is.

Er is nog een dubbelzinnigheid in de keuze van s . Als men van een vast punt van de kromme uit de booglengte gaat meten, kan men dat nog in twee richtingen doen. Hierboven is het zo gedaan, dat de richting van toenemende t ook als richting van toenemende s is gekozen. Dat kan ook andersom; doet men het andersom dan krijgt men, dat

$$\frac{ds}{dt} = - \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|.$$

Van de kolomvector $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ hebben we vroeger gezien, dat zijn richting de richting van de raaklijn in het betreffende punt van de kromme aangeeft. Een vector ter lengte 1 in deze richting wordt nu een raakvector \underline{t} van de kromme genoemd. Deze is door deze eisen op het teken na bepaald. Kiezen we dit teken zo, dat $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ een positief veelvoud van \underline{t} is, dan is de raakvector \underline{t} van de kromme dus gedefinieerd door

$$\underline{t} = \frac{1}{\left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right).$$

(Hierin is voor het gemak van de notatie de kolomvector door een rijvector vervangen). Hierbij is verondersteld dat $\frac{d\mathbf{x}}{dt} \neq \underline{0}$, dus dat de rang van de functionaalmatrix van $\mathbf{x}(t)$ één is.

Op te merken is, dat in deze bepaling van de raakvector een kleine invloed van de parameter opgesloten zit, nl. in het teken. Vervangt men de parameter t bv. door $-t$ dan gaat de raakvector in zijn tegengestelde over. Blijkbaar hangt dit af van de vraag in welke richting de kromme bij de toenemende parameter doorlopen wordt.

Omdat $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{dx}{dt} \right|$ en $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt}$, geldt blijkbaar dat $\underline{t} = \frac{dx}{ds}$.

Bij de keuze van de booglengte als parameter wordt $\frac{dx}{ds}$ vanzelf een eenheidsvector.

In het geval van voorbeeld 2 wordt de raakvector \underline{t} klaarblijkelijk

$$\left(\frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}, \frac{b \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \right).$$

Vb.3 We beschouwen weer de schroeflijn (zie voorbeeld 2 in §.1 van hoofdstuk IV):

$$\left. \begin{array}{l} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = ht \end{array} \right\} \text{ Dan is } \frac{dx}{dt} = -a \sin t, \frac{dy}{dt} = a \cos t, \frac{dz}{dt} = h.$$

$\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 + h^2}$. De raakvector is

$$\left(\frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right).$$

III We merken nog op, dat overgang op andere coördinaten $\underline{x} = \underline{x}(u)$ in de ruimte in de formule voor de lijnintegraal kan worden bewerkstelligd door gebruik te maken van

← $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \frac{du}{dt}$, waarin $\frac{dx}{du}$ de functionaaloperator van de functie $\underline{x}(u)$ is. Zo bv. bij de overgang op poolcoördinaten:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \cos \varphi \frac{dr}{dt} - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{dy}{dt} = \sin \varphi \frac{dr}{dt} + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \end{array} \right\},$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}.$$

Op analoge wijze berekent men voor bolcoördinaten in de ruimte

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}.$$

B. Oppervlakte-integralen.

We beschouwen nu een oppervlak in R_3 , dat we gegeven denken door een parametervoorstelling met twee parameters:

$$\left. \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{array} \right\}, \text{ of in vectornotatie } \underline{x} = \underline{x}(u). \text{ We nemen aan, dat de rang}$$

van de functionaalmatrix 2 is. Deze matrix met 3 rijen en 2 kolommen splitsen we in twee kolomvectoren. De eerste kolomvector bestaat uit partiële afgeleiden naar u en de tweede uit partiële afgeleiden naar v .

Met een voor de hand liggende notatie noemen we deze vectoren daarom $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$ en $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$. De rangvoorwaarde betekent, dat deze vectoren lineair onafhankelijk zijn.

De meetkundige betekenis hiervan is de volgende. Als we v constant houden ($v = c$) dan blijft er nog één veranderlijke parameter u over, zodat we dan een kromme krijgen, die natuurlijk op het oppervlak ligt en waarvan de richting van de raaklijn in een punt juist bepaald wordt door de vector $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$. Voor elke c levert $v = c$ dus een kromme op het oppervlak; deze krommen samen vullen het oppervlak op. We kunnen hetzelfde nu doen met verwisseling van de rollen van u en v . Zo krijgen we in ieder punt twee krommen op het oppervlak, nl. één waarop v constant is en één waarop u constant is; vectoren in de raakrichting van deze krommen zijn $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$ en $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$. Daar deze vectoren lineair onafhankelijk zijn bepalen ze een plat vlak: het raakvlak aan het oppervlak. Inderdaad is het raakvlak in een punt opgebouwd uit alle raaklijnen aan willekeurige krommen door dat punt op het oppervlak. Een dergelijke kromme kan bepaald worden door u en v als functie van één parameter t te geven. We krijgen dan $\underline{x} = \underline{x}(u(t))$, Blijkbaar is dan

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \frac{dv}{dt},$$

dus de raaklijnrichting is een lineaire combinatie van $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$ en $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$, dus ligt in het hierboven bepaalde platte vlak.

De rechte door het raakpunt loodrecht op het raakvlak wordt de normaal van het oppervlak in dat punt genoemd. De richting van de normaal wordt bepaald door

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v},$$

want dit is een vector loodrecht op $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$ en $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$.

We voeren nu een normaalvector in, als een eenheidsvector in de richting van de normaal. Hiervoor kunnen we nemen

$$\underline{n} = \frac{1}{\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right|} \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right),$$

maar ook het tegengestelde van deze vector voldoet aan de vereisten. Als we trouwens de rollen van u en v verwisselen, gaat de hier gegeven \underline{n} al in zijn tegengestelde over.

Vb.4 We beschouwen het eenheidsboloppervlak gegeven door de parameter-voorstelling

$$\left. \begin{aligned} x &= \sin \theta \cos \varphi \\ y &= \sin \theta \sin \varphi \\ z &= \cos \theta \end{aligned} \right\}. \text{ Dus is } \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Dus}$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \varphi \\ \sin^2 \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}, \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \right| = \sin \theta, \underline{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Dit is juist de vector \underline{x} . Dit klopt, want de normaalvector ligt op de voerstraal uit 0 en heeft lengte 1. Blijkbaar is deze vector bij de hier gemaakte keuze naar buiten gericht. De vector $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta}$ geeft de raaklijn-richting voor meridianen en $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}$ voor parallelcirkels.

Analoog met wat we hierboven voor krommen gedaan hebben willen we nu ook voor oppervlakken de oppervlakte-integraal van een functie $\varphi(\underline{x})$ bepalen. Hiertoe gaan we het oppervlak in kleine stukjes verdelen, hetgeen we kunnen doen door eerst het (u,v) -vlak in kleine stukjes te verdelen. Het ligt voor de hand daarvoor in het (u,v) -vlak vierkanten te nemen. Brengen we zo'n vierkant over naar het oppervlak, dan wordt dit een stuk gekromd oppervlak. Analoog met de gang van zaken bij lijnintegralen willen we dat met iets approximeren dat "recht" is. De beelden van de hoekpunten van het vierkant zijn vier punten op het oppervlak, die echter in het algemeen niet in één plat vlak zullen liggen. Ter vermindering van deze moeilijkheid verdelen we het (u,v) -vlak liever in driehoeken. De beeldpunten van de hoekpunten van een driehoek zijn drie punten op het oppervlak, die we weer als hoekpunten van een driehoek kunnen nemen, welks oppervlakte ter benadering van de maat van het stukje krom oppervlak kan dienen.

We nemen aan, dat de functie $\underline{x}(u)$ differentieerbaar is met continue partiële afgeleiden van de eerste orde. Deze afbeelding is dus bij benadering lineair en voor een kleine driehoek doen we voorlopig net alsof zij lineair is, met als matrix de functionaalmatrix A.

De driehoek in het (u,v) -vlak zij opgespannen door de vectoren $\underline{a} = (a_1, a_2)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2)$. Na de afbeelding gaan ze over in de vectoren \underline{Aa} en \underline{Ab} , die nu echter vectoren in R_3 zijn. De oppervlakte van de driehoek opgespannen door deze vectoren is $\frac{1}{2} |\underline{Aa} \times \underline{Ab}|$. Nu is echter

$$\underline{Aa} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} + a_2 \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \quad \text{en evenzo}$$

$\underline{Ab} = b_1 \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} + b_2 \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$. Gebruik makend van de eigenschappen van het vectorproduct vinden we nu

$$\underline{Aa} \times \underline{Ab} = \left(a_1 \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} + a_2 \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right) \times \left(b_1 \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} + b_2 \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right),$$

dus

$$\frac{1}{2} |\underline{Aa} \times \underline{Ab}| = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1| \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right|, \quad \text{maar } \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

is juist de oppervlakte van de driehoek in het (u,v) -vlak, opgespannen door \underline{a} en \underline{b} .

Vermenigvuldigen we dit nu nog met een functie φ en sommeren we dit over de driehoekjes van de verdeling van het (u,v) -vlak, dan krijgen we een approximatiesom van de integraal

$$(1) \iint \varphi(\underline{x}(u)) \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| du dv.$$

Witwendige vectorproduct

$$\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$$

$$(\underline{a}, \underline{b} \times \underline{c}) = D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}) + (\underline{a} \times \underline{c})$$

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a}, \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a}, \underline{b}) \underline{c}$$

Hierbij hebben we echter het feit verwaarloosd, dat de afbeelding slechts bij benadering lineair was. Hierdoor wordt bij ieder driehoekje een fout gemaakt. Op grond van onze ervaringen in vroegere gevallen verwachten we nu echter, dat de invloed van de totale fout in de approximatiesom tot nul nadert als de verdeling in driehoeken willekeurig fijn gemaakt wordt. Het blijkt echter, dat dit in deze algemeenheid onjuist is; er moet om dit in orde te krijgen nog een beperking opgelegd worden aan de verdeling in driehoeken. We eisen, dat bij de limietovergang bij iedere gebruikte driehoek het quotiënt van het kwadraat van de langste zijde en de oppervlakte beneden een vaste eindige grens blijft. Dit komt hierop neer, dat de driehoeken niet te smal en spits mogen worden. Leggen we deze restrictie op, dan blijkt alles goed te gaan. Op grond hiervan noemen we integraal (1) de oppervlakte-integraal van de functie $\varphi(\underline{x})$ over het oppervlak $\underline{x} = \underline{x}(u)$.

Als de functie φ gelijk aan 1 genomen wordt, krijgen we de oppervlakte van het oppervlak.

Zo krijgen we voor de oppervlakte van de eenheidsbol in voorbeeld 4:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 4\pi.$$

Uit de wijze waarop we tot de oppervlakte-integraal zijn gekomen blijkt al, dat het resultaat onafhankelijk is van de parameterkeuze. Dit is echter ook weer rechtstreeks na te rekenen met behulp van formule (1). Deze onafhankelijkheid stelt ons in staat een symbolisch oppervlakte-element $d\sigma$ in te voeren:

$$d\sigma = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| du dv,$$

en de oppervlakte-integraal korter te noteren met $\int \varphi(\underline{x}) d\sigma$.

Vaak wordt een oppervlak gegeven in een expliciete vorm $z = z(x, y)$; $\left. \begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = z(x, y) \end{array} \right\}$ hetgeen betekent, dat x en y als parameters zijn gekozen. We krijgen dan

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x} \\ -\frac{\partial z}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{en de oppervlakte-}$$

integraal wordt

$$\iint \varphi(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

hetgeen een formule is, die ook al in het eerste jaar is behandeld.

Men kan bv. ook poolcoördinaten in het (x, y) -vlak als parameters nemen: $\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z(r, \varphi) \end{array} \right\}$ Er blijkt dan uit te komen:

$$d\sigma = \sqrt{r^2 + r^2 \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} dr d\varphi$$

8.2 De integraalstellingen.

A. Eerste integraalformule. Potentiaal. Conservatieve velden.

Er zijn drie fundamentele integraalstellingen in de vectoranalyse, die behoren bij dimensies 1, 2 en 3. We beginnen met het eendimensionale geval van een kromme.

Uitgangspunt is de hoofdstelling van de integraalrekening, die als volgt luidt: Als $\varphi(x)$ een differentieerbare functie is voor $a \leq x \leq b$, met continue afgeleide, dan is

$$\int_a^b \frac{d\varphi}{dx} dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

We nemen nu een kromme K in de ruimte (of het platte vlak), gegeven door een parametervoorstelling $\underline{x} = \underline{x}(t)$ ($a \leq t \leq b$). Verder is een functie $\alpha(\underline{x})$ gegeven (op te vatten als een scalarveld; zie paragraaf 1 van hoofdstuk IV). Zowel $\alpha(\underline{x})$ als $\underline{x}(t)$ worden differentieerbaar verondersteld met continue (partiële) afgeleiden. Op de functie $\varphi(t) = \alpha(\underline{x}(t))$ passen we nu bovenstaande stelling toe. Dit geeft, onder toepassing van de kettingregel

$$\int_a^b (\text{grad } \alpha, \frac{d\underline{x}}{dt}) dt = \alpha(\underline{x}(b)) - \alpha(\underline{x}(a)).$$

Van het linkerlid willen we een lijnintegraal maken. Hiertoe maken we gebruik van de raakvector \underline{t} , die bepaald is door

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \left| \frac{d\underline{x}}{dt} \right| \underline{t}. \text{ Vullen we dit in de integraal in en brengen we } \left| \frac{d\underline{x}}{dt} \right|$$

buiten het inwendig product, dan komt er $\left| \frac{d\underline{x}}{dt} \right| dt = ds$ en ontstaat er inderdaad de lijnintegraal van $(\text{grad } \alpha, \underline{t})$ over de kromme K . In de keuze van \underline{t} zit nog een tekendubbelzinnigheid; deze weerspiegelt zich uiteraard ook in het rechterlid van de formule. Bij de parameterkeuze waarmee de formule is opgesteld fungeert bij het doorlopen der kromme $\underline{x}(a)$ als beginpunt en $\underline{x}(b)$ als eindpunt. Bij een andere parameterkeuze had dit andersom kunnen zijn. We krijgen zo de volgende formule:

$$(1) \quad \int_K (\text{grad } \alpha, \underline{t}) ds = \alpha(\text{eindpunt}) - \alpha(\text{beginpunt}).$$

Hierbij is de raakvector \underline{t} zo georiënteerd, dat hij past bij het doorlopen van de kromme K van beginpunt naar eindpunt.

Daar \underline{t} een eenheidsvector is, kan $(\text{grad } \alpha, \underline{t})$ opgevat worden als richtingsafgeleide van α in de richting van \underline{t} . Daar \underline{t} de raakvector is, noemt men daarom $(\text{grad } \alpha, \underline{t})$ ook wel de tangentiële afgeleide van α op K .

De belangrijkste fysische toepassing van (1) is, het vectorveld $\text{grad } \alpha$ op te vatten als een krachtveld en α als een potentiaal van dit krachtveld. De integraal in het linkerlid van (1) is op te vatten als de arbeid, die verricht wordt bij doorlopen van de kromme K ; immers als $\underline{a} = \text{grad } \alpha$ de kracht is, dan is $(\underline{a}, \underline{t})$ de tangentiële component van de kracht. Op grond van (1) is de potentiaal α een maat voor de energie in het veld, want de arbeid, die verricht wordt als men van het punt P naar het punt Q gaat, is $\alpha(Q) - \alpha(P)$. Blijkbaar hangt deze arbeid dus niet af van de weg die men kiest, maar alleen van begin- en eindpunt. Dit laatste kan ook

De driehoek van Pascal

$n = 0$									1				
$n = 1$								1	1				
$n = 2$								1	2	1			
$n = 3$								1	3	3	1		
$n = 4$								1	4	6	4	1	
$n = 5$								1	5	10	10	5	1

Vraagstukken

2.2.1 De letters AABBB kunnen op $\binom{5}{2} = 10$ manieren worden gerangschikt. Schrijf deze 10 rangschikkingen volledig uit.

2.2.2 Bereken $\binom{7}{0}$, $\binom{7}{1}$, $\binom{7}{2}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{10}{5}$, $\binom{52}{2}$. $1 - 7 - 21 - 35 - 252 - 1326$

2.2.3 Ga na dat $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$ (Hierdoor kan men $n!$ ook voor niet-gehele positieve n definiëren)

2.2.4 Hoeveel combinaties van 3 letters kan men vormen uit de letters van de woorden

- a) paard, 7
 b) aantal, 8
 c) evenaar, 10
 d) telefoon. 30

2.2.5 Bewijs:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-2}{r} + 2\binom{n-2}{r-1} + \binom{n-2}{r-2}, \quad 2 \times \text{Pascal}$$

2.2.6 Bewijs:

$$\sum_{r=0}^n r \binom{n}{r} = n 2^{n-1}, \quad \text{en} \quad \sum_{r=0}^n r(r-1) \binom{n}{r} = n(n-1)2^{n-2}.$$

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r$$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

Subst $x=1$

2.2.7 Bewijs:

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \binom{n}{n} \binom{n}{0} + \binom{n}{n-1} \binom{n}{1} + \binom{n}{n-2} \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{0} \binom{n}{n} \\ &= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2. \end{aligned}$$

2.2.8 Ga na dat $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$ de reeksontwikkeling van $(1-4x)^{-1/2}$ is.

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) =$$

2.2.9 Bewijs:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{2n}{n} \sqrt{\pi n} / 2^{2n} = 1.$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2n-1) 2n}{2 \cdot 4 \dots (2n-2) 2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}$$

2.3 Een generalisatie; de multinomiaal coëfficiënten

Gegeven n_1, n_2, \dots, n_k zijn k positieve gehele getallen en

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n,$$

dan is

$$\boxed{\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}} \quad (2.3.1)$$

het aantal manieren, waarop n_1 objecten A_1, n_2 objecten A_2, \dots, n_k objecten A_k op een rij kunnen worden gerangschikt

Men kan bv. de letters van het woord "negen" op

*Het alternatief, zie
links onderaan*

$$\frac{5!}{2!2!1!} = 30$$

verschillende manieren achter elkaar zetten. We kunnen de grootheden (2.3.1) de multinomiaal coëfficiënten noemen. Het zijn de coëfficiënten van de term

$$a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k} \quad a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$$

in de ontwikkeling van het gedurig produkt

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n.$$

Men kan de formule (2.3.1) ook als volgt schrijven

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k}. \quad (2.3.2)$$

D.w.z. we kiezen uit n objecten eerst een niet gerangschikte groep van n_1 , dan uit de resterende $(n-n_1)$ objecten een niet gerangschikte groep van n_2 , enz. Bij de toepassingen van formule (2.3.1) moet men er echter goed om denken, dat zij permutaties van gelijkvallige groepen onderling meetelt. Uit de letters ABCD kan men bv. volgens (2.3.1) op

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

manieren 2 groepen van 2 kiezen, te weten

$$AB - CD, AC - BD, AD - BC, BC - AD, BD - AC, CD - AB.$$

Hierbij worden formaties als AB - CD en CD - AB afzonderlijk geteld.

als we $\underline{a}(\underline{x})$ vervangen door zijn lineaire stuk, is dit dus de corresponderende benadering voor de integraal.

We nemen een gebied G in het platte vlak, dat we nu niet meer klein veronderstellen en maken een analoge afspraak over het doorlopen van de randkromme K van G . We gaan nu G in kleine brokken verdelen; bij elke brok maken we de integraal op over de op passende wijze georiënteerde randkromme. Door de verdeling in brokken zijn er randkrommen bijgekomen. De nieuwe randkrommen echter, die niet met K samenvallen, zijn stuksgewijs rand van twee brokken, en wel worden ze bij elk der brokken juist op tegengestelde wijze doorlopen. Telt men dus de integralen voor alle brokken bij elkaar op, dan vallen de integralen over alle nieuw ingevoerde randen tegen elkaar weg en blijft toch alleen de integraal over K over. De som over alle brokken geeft, als men elke term vervangt door bovengenoemde benadering, een approximatiesom van de integraal over G van $\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}$. De fouten die men hierbij maakt, naderen tot nul bij verfijning van de verdeling in brokken, als men aanneemt, dat de verdeling in brokken voldoende netjes gebeurt: veronderstel dat

$$\frac{(\text{booglengte randkromme van brok})^2}{\text{oppervlakte brok}}$$

beneden een vaste grens blijft bij de limietovergang (de brok moet niet te "slangachtig" zijn). We vinden dus het resultaat

$$(2) \quad \iint_G \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_K (\underline{a}, \underline{t}) ds,$$

waarbij de oriëntering van de raakvector \underline{t} van de randkromme K van het gebied G behoort bij een doorlopen van K waarbij G aan de linkerkant ligt.

Het in voorbeeld 1 gevonden resultaat klopt met deze formule, want daar is $\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = 2$ en de oppervlakte van G is π .

Nemen we aan dat $\underline{a} = \text{grad } \varphi$, dan is $\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$, hetgeen nul is, omdat de betrokken tweede afgeleiden continu verondersteld zijn. Inderdaad hebben we vroeger ook voor de integraal in het rechterlid in dit geval gevonden, dat hij nul is.

We merken nog op, dat het gebied G ook een rand mag hebben, die uit meer dan één kromme bestaat; dit verschijnsel treedt op als er "gaten" in G zitten. Een eenvoudig voorbeeld is het ringgebied tussen twee concentrische cirkels. De integraal over K moet over alle optredende randkrommen gesommeerd worden, waarbij elke randkromme van passende oriëntering moet worden voorzien. Bij de zoëven genoemde cirkels moet de buitenste cirkel tegen de wijzers van het uurwerk en de binnenste met de wijzers van het uurwerk mee doorlopen worden.

Passen we formule (2) toe op een klein gebiedje dat het punt p bevat dan is het linkerlid bij benadering gelijk aan

$$\left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right)_{\underline{x}=p} \cdot \text{opp. } G.$$

Door nu G op p samen te trekken vinden we de uitkomst

$$\left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right)_{\underline{x}=p} = \lim_{G \rightarrow p} \frac{\int_K (\underline{a}, \underline{t}) ds}{\text{opp. } G}.$$

C. Tweede integraalformule in de ruimte (Stokes).

We gaan nu over tot het geval dat de gesloten kromme K gelegen is in de ruimte en daar de rand vormt van een stuk gekromd oppervlak S . We denken ons S gegeven door een parametervoorstelling $\underline{x} = \underline{x}(u, v) = \underline{x}(u)$, waarbij S het beeld is van een gebied S' in het (u, v) -vlak met rand K' , die afgebeeld wordt op K . Verder zij in R_3 een vectorveld $\underline{b}(\underline{x})$ gegeven. De parametervoorstelling veronderstellen we twee maal differentieerbaar met continue partiële afgeleiden van de tweede orde en het vectorveld eenmaal differentieerbaar met continue partiële afgeleiden. We gaan nu (2) toepassen in het (u, v) -vlak; we moeten daartoe eerst nog een vectorveld $\underline{a} = (a_1, a_2)$ in het (u, v) -vlak aangeven. Dit definiëren we door $a_1 = (\underline{b}(\underline{x}(u)), \frac{\partial \underline{x}}{\partial u})$, $a_2 = (\underline{b}(\underline{x}(u)), \frac{\partial \underline{x}}{\partial v})$.

We beschouwen nu eerst het rechterlid van (2). Om misverstand te voorkomen zullen we booglengte en raakvector op K' met s' resp. \underline{t}' en op K met s resp. \underline{t} aanduiden. Nu is

$$\begin{aligned} (\underline{a}, \underline{t}') &= \left(\underline{b}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \right) \frac{du}{ds'} + \left(\underline{b}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right) \frac{dv}{ds'} = \underline{t} = \frac{d\underline{x}}{ds} \\ &= \left(\underline{b}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \frac{du}{ds'} + \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \frac{dv}{ds'} \right) = \left(\underline{b}, \frac{d\underline{x}}{ds'} \right). \end{aligned}$$

— over de randkromme $\underline{x} = \underline{x}(u, v) \rightarrow \begin{matrix} u = u(s') \\ v = v(s') \\ \underline{x} = \underline{x}(s') \end{matrix}$

(let wel dat $(\underline{a}, \underline{t}')$ een tweedimensionaal inwendig product is, maar $(\underline{b}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u})$ enz. driedimensionale inwendige producten zijn).

Daar echter de parameter s' bij overgang van de kromme K' op de kromme K geen booglengte behoeft te blijven, werken we liever met een willekeurige parameter t :

$$\int_{K'} (\underline{a}, \underline{t}') ds' = \int_{K'} \left(\underline{b}, \frac{d\underline{x}}{ds'} \right) ds' = \int \left(\underline{b}, \frac{d\underline{x}}{dt} \right) dt$$

Gaan we nu echter over op integratie over de kromme K , dan wordt dit blijkbaar, als we op K de booglengte s als parameter kiezen:

$\int_K (\underline{b}, \underline{t}) ds$, dus juist de lijnintegraal die we wensen. We gaan nu het linkerlid van (2) uitrekenen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_2}{\partial u} - \frac{\partial a_1}{\partial v} &= \left(\frac{\partial \underline{b}(\underline{x}(u))}{\partial u}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right) + \left(\underline{b}, \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial u \partial v} \right) + \\ &- \left(\frac{\partial \underline{b}(\underline{x}(u))}{\partial v}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \right) - \left(\underline{b}, \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial v \partial u} \right) = \\ &= \left(\frac{d\underline{b}}{d\underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right) - \left(\frac{d\underline{b}}{d\underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

Hierin is gebruik gemaakt van de notatie met differentiaal: $\frac{db}{dx}$ is de functionaaloperator van $\underline{b}(\underline{x})$. Het resultaat is dus van de vorm

$$(\underline{A}p, \underline{q}) = (\underline{A}q, \underline{p}) \text{ met } \underline{A} = \frac{d\underline{b}}{d\underline{x}}, \underline{p} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u}, \underline{q} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}.$$

In componenten uitgeschreven geeft dit

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} p_j q_i - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} q_j p_i.$$

Rangschikken we dit naar de a_{ij} , dan zien we dat de termen met gelijke indices wegvallen terwijl bij $i \neq j$ de termen met a_{ij} en a_{ji} elkaars tegengestelde zijn. Zo vinden we:

$$\begin{aligned} > (a_{32} - a_{23})(p_2 q_3 - p_3 q_2) + (a_{13} - a_{31})(p_3 q_1 - p_1 q_3) + \\ & \quad + (a_{21} - a_{12})(p_1 q_2 - p_2 q_1). \end{aligned}$$

Nu is de vector

$$(a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{31}, a_{21} - a_{12}) = \left(\frac{\partial b_3}{\partial y} - \frac{\partial b_2}{\partial z}, \frac{\partial b_1}{\partial z} - \frac{\partial b_3}{\partial x}, \frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y} \right)$$

juist de in het eerste jaar al ingevoerde rotatie van \underline{b} , terwijl de andere factoren juist de componenten van $\underline{p} \times \underline{q}$ zijn. Zo vinden we dus,

$$\text{dat } \frac{\partial a_2}{\partial u} - \frac{\partial a_1}{\partial v} = \left(\text{rot } \underline{b}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right). \text{ We willen van de integraal hiervan}$$

over u en v nu een oppervlakte-integraal over S maken.

Hiertoe maken we gebruik van de normaalvector \underline{n} van S , die bepaald is door

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| \underline{n}.$$

Dan vinden we, gebruik makend van de formule voor een oppervlakte-integraal uit paragraaf 1:

$$\iint_{S'} \left(\frac{\partial a_2}{\partial u} - \frac{\partial a_1}{\partial v} \right) du dv = \int_S (\text{rot } \underline{b}, \underline{n}) d\sigma.$$

Toepassing van formule (2) geeft ons nu (als we \underline{b} weer door \underline{a} vervangen):

$$(3) \quad \boxed{\int_S (\text{rot } \underline{a}, \underline{n}) d\sigma = \int_K (\underline{a}, \underline{t}) ds} \quad \text{(formule van Stokes).}$$

Hierin is S een stuk oppervlak in R_3 en K de randkromme van S , \underline{n} de normaalvector van S en \underline{t} de raakvector van K . Zowel in \underline{n} als in \underline{t} zit echter een oriënteringsdubbelzinnigheid. We moeten dus nog nagaan, hoe voor beide een bij elkaar passende keuze moet worden gemaakt.

De richting van \underline{n}_M is die van $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$. Nu is $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$ de richting van de raaklijn aan een kromme $v = \text{constant}$; dit correspondeert in het (u, v) -vlak met de richting van de positieve u -as. Evenzo correspondeert $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$ met de richting van de positieve v -as. Als we in de ruimte een w -as erbij kiezen,

symbolische vector $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ grad $\varphi = \nabla \varphi$ als $\varphi = \varphi(x, y, z)$

$$\text{div } \underline{a} = (\nabla, \underline{a}) = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$$

$$\text{rot } \underline{b} = (\nabla \times \underline{b}) = \left(\frac{\partial b_3}{\partial y} - \frac{\partial b_2}{\partial z}, \frac{\partial b_1}{\partial z} - \frac{\partial b_3}{\partial x}, \frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y} \right)$$

zodat u-as, v-as en w-as een rechts stelsel vormen, dan correspondeert met $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$ de positieve w-as. De richting van \underline{t} past bij een doorlopen van K' in het (u,v)-vlak zo dat G' links ligt, dus een doorlopen in een omloopszin tegen de wijzers van het uurwerk. Deze omloopszin tezamen met de richting van de positieve w-as geeft een schroefzin behorende bij een rechtse schroef. Dit blijft behouden bij de overgang naar \underline{n} en \underline{t} . Dus moeten \underline{t} en \underline{n} zo worden gekozen, dat de omloopszin van K behorende bij \underline{t} tezamen met \underline{n} de schroefzin van een rechtse schroef vormen.

Daar \underline{n} een eenheidsvector is, is $(\text{rot } \underline{a}, \underline{n})$ de projectie van $\text{rot } \underline{a}$ op de normaal, of, zoals men ook wel zegt, de normale component van $\text{rot } \underline{a}$.

Vb.2 Neem het vectorveld $\underline{a} = (z-y, x-z, y-x)$; dan is $\text{rot } \underline{a} = (2, 2, 2)$. We nemen de halve bol, die bestaat uit het stuk boven het (x,y)-vlak van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Deze is voor te stellen met de parametervoorstelling van voorbeeld 4 in paragraaf 1, waarbij nu θ van 0 tot $\frac{1}{2}\pi$ loopt. Het linkerlid van de formule van Stokes wordt dus

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (2 \sin \theta \cos \varphi + 2 \sin \theta \sin \varphi + 2 \cos \theta) \sin \theta d\theta = 2\pi.$$

De kromme in het rechterlid is de eenheidscirkel in het (x,y)-vlak. Voor punten in dit vlak is $\underline{a} = (-y, x, y-x)$. Deze moet op een raaklijn in het (xy)-vlak geprojecteerd worden; het komt op hetzelfde neer als we dit met de vector $(-y, x, 0)$ doen. Hieruit volgt, dat het rechterlid van de formule van Stokes juist de integraal van voorbeeld 1 is. Ook de omloopszin klopt, want de normaal die bij de berekening van bovenstaande integraal is gebruikt wijst naar buiten en deze richting past juist als een rechtse schroef bij de omloopszin van voorbeeld 1.

Het is makkelijk in te zien dat formule (2) een speciaal geval van de formule van Stokes is, als voor S een stuk van het (xy)-vlak wordt gekozen met de positieve z-as als richting van \underline{n} .

D. Oriënteerbaarheid.

Bij de afleiding van de formule van Stokes hebben we van een parametervoorstelling gebruik gemaakt, waarmee het oppervlak met een stuk plat vlak geparametriseerd werd. Dit kan alleen dan, als het beschouwde stuk oppervlak zich inderdaad op een stuk plat vlak laat "uitspreiden". Dit is zeker niet met ieder oppervlak mogelijk.

Als eenvoudig voorbeeld kiezen we het gedeelte van de mantel van een rechte cirkelcilinder gelegen tussen twee vlakken loodrecht op de as, dus in een speciaal coördinatenstelsel de punten die voldoen aan $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq h$. Dit is een oppervlak met twee cirkels als randkrommen. Dit oppervlak is niet zonder meer op een plat vlak uit te spreiden; toch kennen we een parametervoorstelling met twee parameters φ en z :

$$\left. \begin{array}{l} x = a \cos \varphi \\ y = a \sin \varphi \\ z = z \end{array} \right\} \text{ met } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h.$$

In het (φ, z) -vlak krijgen we dus een rechthoek. Bekijken we de rand van deze rechthoek dan corresponderen de stukken op $z = 0$ en $z = h$ juist met de randcirkels op de cilinder, maar de stukken $\varphi = 0$ en $\varphi = 2\pi$

corresponderen met dezelfde beschrijvende op de cilindermantel, die echter in het geheel geen randkromme is! Dit komt dus hierop neer, dat we, om de cilinder in een plat vlak uit te kunnen spreiden, deze eerst langs een meridiaan hebben opengeknipt. Dit openknippen is een onschuldige bezigheid, zolang we ons met oppervlakte-integralen bezighouden, maar als we integralen langs randkrommen in het platte vlak gaan beschouwen, dan komen er integralen langs krommen op het oppervlak, die helemaal geen randkrommen zijn. Nu loopt dit in het geval van de cilinder wel goed af, omdat bij omlopen langs de rechthoek in het (φ, z) -vlak de corresponderende beschrijvende op de cilinder twee maal in tegengestelde richting wordt doorlopen, zodat de bijbehorende integralen tegen elkaar wegvallen. Alleen de integralen over de echte randkrommen blijven over: de formule van Stokes is geldig voor de cilindermantel.

De vraag rijst nu of een soortgelijk verhaal voor ieder oppervlak opgaat. Dit nu is zeker niet het geval. We gaan weer uit van een rechthoek, waarvan we de lengte flink wat groter dan de breedte nemen: een strook papier. Hiervan kunnen we de einden aan elkaar plakken, zo dat een oppervlak ontstaat dat hetzelfde karakter heeft als een cilindermantel. Draaien we echter een van beide uiteinden voor het aan elkaar plakken eerst een halve slag om, dan komt er een geheel ander soort oppervlak, dat lint van Möbius genoemd wordt en waarvan men zich de merkwaardige eigenschappen het makkelijkst duidelijk kan maken door het in werkelijkheid eens met papier en lijmpot te maken.

Ook het lint van Möbius is weer parametrizeerbaar met een rechthoek, door nl. hetgeen we zojuist aan elkaar geplakt hebben, weer los te knippen. De randlijnen van de rechthoek, die aan elkaar geplakt worden, worden nu echter op het oppervlak juist in dezelfde richting doorlopen (ze zijn "verkeerd" aan elkaar geplakt), waardoor de bijbehorende integralen niet tegen elkaar wegvallen: de formule van Stokes geldt niet.

We krijgen trouwens ook moeilijkheden met het linkerlid van de formule van Stokes. Daar hebben we nl. een keuze van een normaalvector \underline{n} op het oppervlak nodig. Bij een lint van Möbius is geen dergelijke over het hele oppervlak continu verloopende keuze mogelijk. Begint men in een punt met een bepaalde normaalkeuze en loopt men eenmaal het lint rond, de normaal daarbij continu meenemend, dan wijst deze bij terugkeer in het oude punt de tegengestelde kant op: het oppervlak heeft geen twee kanten. Bij de cilindermantel gaat dat wel goed: als de normaal bij vertrek naar buiten wees, wijst hij bij aankomst ook naar buiten.

Oppervlakken waarop over het gehele oppervlak een continu veranderlijke normaalkeuze mogelijk is, heten oriënteerbaar. Als dat zo is, dan blijken bij verknippen ter uitspreiding in een plat vlak inderdaad de bijdragen van de knippen tegen elkaar weg te vallen, hetgeen we hier niet zullen bewijzen. Conclusie:

Voor oriënteerbare oppervlakken geldt de formule van Stokes.

We zullen ons in het vervolg tot oriënteerbare oppervlakken beperken en het woord oriënteerbaar voortaan weer weglaten.

E. Conservatieve en rotatievrije velden.

Nemen we nu een gesloten oppervlak, bv. de bol, dan heeft deze in het geheel geen randkromme. Bij de parametrisering met de gewone bolcoördinaten met $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ en $0 \leq \theta \leq \pi$ is de bol opengeknipt langs de nulmeridiaan; de lijnen $\theta = 0$ en $\theta = \pi$ in het (θ, φ) -vlak corresponderen elk met één punt (de polen) van de bol, hetgeen klopt met het feit dat de integralen langs deze lijnen nul zijn, omdat er een factor $\sin \theta$ in de integrand staat. De bijdragen van de door knippen ontstane randkrommen

vallen weg en we vinden voor een gesloten oppervlak, dat

$$\int_S (\text{rot } \underline{a}, \underline{n}) d\sigma = 0.$$

We keren terug tot het uitgangspunt bij de afleiding van de formule van Stokes. Dit was het onderzoek van velden, die niet conservatief zijn. We kunnen echter achteraf de formule van Stokes ook toepassen op velden die wel conservatief zijn. Dan is het rechterlid van (3) altijd nul en dus ook het linkerlid. Noemt men een veld \underline{a} , waarvoor identiek geldt $\text{rot } \underline{a} = \underline{0}$, rotatievrij, dan bewijzen we:

Een conservatief veld is rotatievrij.

Immers, als een veld \underline{a} niet rotatievrij is, bestaat er een punt p waar $\text{rot } \underline{a} \neq \underline{0}$. Nemen we nu een oppervlak S door p , dat in p loodrecht op $\text{rot } \underline{a}$ staat dan is, bij passende oriëntering van \underline{n} , $(\text{rot } \underline{a}, \underline{n}) = |\text{rot } \underline{a}| > 0$ in p . Kiezen we S voldoende klein, dan is op grond van de continuïteit $(\text{rot } \underline{a}, \underline{n}) > 0$ overall op S en dus het linkerlid van (3) ook > 0 . Dit is echter in strijd met het gegeven dat \underline{a} conservatief is.

Men zou geneigd zijn te denken, dat de omkering van bovenstaande bewering ook uit de formule van Stokes volgt. Als namelijk het veld rotatievrij is, is het linkerlid van (3) altijd nul en dus ook het rechterlid. Hieruit kan echter nog niet worden geconcludeerd dat het veld conservatief is, omdat (3) niet geldt voor alle gesloten krommen K , maar alleen voor die gesloten krommen die randkrommen zijn van een binnen het veld verloopend oppervlak. We geven nu een fysisch voorbeeld, waaruit blijkt, dat er inderdaad moeilijkheden kunnen optreden.

Vb.3 We beschouwen het magneetveld van een oneindig lange rechte stroomgeleider. De veldsterkte in een punt staat loodrecht op de stroomgeleider en op de loodlijn uit het punt op de stroomgeleider en is omgekeerd evenredig met de afstand van het punt tot de stroomgeleider. Laat de stroomgeleider langs de z -as lopen. Dan is makkelijk na te gaan dat het magneetveld de gedaante $\underline{H} = \left(\frac{-cy}{x^2+y^2}, \frac{cx}{x^2+y^2}, 0 \right)$ met constante c heeft. Directe verificatie leert dat $\text{rot } \underline{H} = \underline{0}$. Op de z -as, is \underline{H} niet gedefinieerd. We nemen nu echter als gesloten kromme de cirkel $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Voor deze cirkel is $\int (\underline{H}, \underline{t}) ds = 2\pi c$. Het veld is dus niet conservatief; dit is echter ook fysisch bekend, want door met een magneetpool om de stroomgeleider heen te lopen valt inderdaad energie te winnen of te verliezen. Door een dergelijke om de z -as heen lopende kromme kan ook geen oppervlak gelegd worden zonder daarbij de z -as, waar het veld oneindig wordt, te snijden. Neemt men echter een gesloten kromme die niet om de z -as heen loopt dan kan daar wel een oppervlak doorgelegd worden en levert de formule van Stokes, dat de energie nul is.

Bij de eerste integraalstelling hebben we gevonden dat een veld, dat een potentiaal bezit, conservatief is en nu hebben we gevonden, dat een conservatief veld rotatievrij is. Door combinatie van deze resultaten vinden we, dat uit $\underline{a} = \text{grad } \varphi$ volgt dat $\text{rot } \underline{a} = \underline{0}$, dus de formule

$$\text{rot grad } \varphi = \underline{0},$$

die door directe berekening ook makkelijk te verifiëren is.

F. Vectorpotentiaal. Bronvrije velden.

We beschouwen nu het linkerlid van de formule van Stokes nog wat nader of nog iets algemener

$$(4) \quad \int_S (\underline{b}, \underline{n}) d\sigma$$

voor een willekeurig vectorveld \underline{b} . We zeggen nu, dat, als $\underline{b} = \text{rot } \underline{a}$, \underline{a} een vectorpotentiaal van \underline{b} is. Vatten we het veld \underline{b} op als een stromingsveld of snelheidsveld, dan geeft (4) juist de door het oppervlak S stromende vloeistof, positief geteld in de richting van \underline{n} . Als \underline{b} een vectorpotentiaal heeft is voor een gesloten oppervlak de totale hoeveelheid in- en uitstromende vloeistof dus nul. De totale hoeveelheid materie blijft dus in elk ruimtestuk constant; het veld is bronvrij.

Definitie. Een veld \underline{b} heet bronvrij als voor ieder in het veld verlopend gesloten oppervlak geldt

$$\int_S (\underline{b}, \underline{n}) d\sigma = 0.$$

We hebben aangetoond:

Een veld, dat een vectorpotentiaal bezit, is bronvrij.

Op de omkering hiervan komen we nog terug.

We gaan nu echter ook vectorvelden $\underline{a}(\underline{x})$ bekijken, die geen vectorpotentiaal bezitten en waarvoor $\int_S (\underline{a}, \underline{n}) d\sigma$ niet nul behoeft te zijn.

Vb.4 Neem het veld $\underline{a}(x,y,z)$ gedefinieerd door $\underline{a} = (x,y,z)$. Als oppervlak nemen we de eenheidsbol met middelpunt in O (zie voorbeeld 4 van paragraaf 1). Dan is

$$\underline{a} = \underline{n}, (\underline{a}, \underline{n}) = 1, \text{ dus} \\ \int_S (\underline{a}, \underline{n}) d\sigma = \int_S d\sigma = \text{opp. } S = 4\pi.$$

G. Derde integraalformule (Gauss).

We nemen een gebied G in de ruimte, waarvan de begrenzing een gesloten oppervlak S is. De keuze van de normaal op S maken we zo, dat deze naar buiten wijst t.o.v. het gebied G . We beginnen met het geval dat het gebied G klein is, dus in een kleine omgeving van een vast punt \underline{p} ligt. In de omgeving van \underline{p} nemen we een vectorveld $\underline{a}(\underline{x})$ dat differentieerbaar is met continue partiële afgeleiden. Verder nemen we aan dat S parametrizeerbaar is met een differentieerbare parametervoorstelling met continue partiële afgeleiden. Voor de berekening van $\int_S (\underline{a}, \underline{n}) d\sigma$

gaan we eerst van de lineaire benadering van $\underline{a}(\underline{x})$ in de omgeving van \underline{p} gebruik maken; we stellen dus

$$\underline{a}(\underline{x}) = \underline{a}(\underline{p}) + A(\underline{x} - \underline{p}) + |\underline{x} - \underline{p}| \underline{e}(\underline{x} - \underline{p}).$$

De constante termen $\underline{a}(\underline{p})$ en $A\underline{p}$ geven een bijdrage tot de integraal die nul is, immers voor een constante vector \underline{b} geldt $\underline{b} = \text{rot } \frac{1}{2}(\underline{b} \times \underline{x})$; men passe nu de formule van Stokes toe.

We beschouwen nu $(A\underline{x}, \underline{n}) =$

$$= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} x + \frac{\partial a_1}{\partial y} y + \frac{\partial a_1}{\partial z} z \right) n_1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} x + \frac{\partial a_2}{\partial y} y + \frac{\partial a_2}{\partial z} z \right) n_2 + \\ + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x} x + \frac{\partial a_3}{\partial y} y + \frac{\partial a_3}{\partial z} z \right) n_3.$$

$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 x - b_2 y \\ b_2 x - b_1 y \\ b_1 y - b_2 x \end{pmatrix}$

Overeenkomstig deze schrijfwijze splitsen we de integraal in negen termen, waarvan er echter zes direct nul blijken te zijn; er blijven alleen de termen met $\frac{\partial a_1}{\partial x}$, $\frac{\partial a_2}{\partial y}$, $\frac{\partial a_3}{\partial z}$ over. We zullen aantonen, dat de term met $\frac{\partial a_1}{\partial y}$ nul levert; de overige gaan analoog. Hiertoe beschouwen we het veld $(0, 0, \frac{1}{2}y^2)$; de rotatie hiervan is $(y, 0, 0)$ en dus volgens de formule van Stokes

$$\int_S y n_1 d\sigma = \int_S ((y, 0, 0), \underline{n}) d\sigma = 0. \quad = \int_S (rdA(0, 0, \frac{1}{2}y^2), \underline{n}) d\sigma$$

We beschouwen nu $\int_S x n_1 d\sigma$. Daar $\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| \underline{n} = \pm \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$, is deze integraal gelijk aan $\pm \iint x \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) dudv = \pm \iint x \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} dudv$.

We splitsen het oppervlak in stukken waar $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} > 0$ of < 0 is (= 0 geeft geen bijdrage tot de integraal). Op elk van deze stukken voeren we y en z als parameters in. De integraal wordt dan op het teken na gelijk aan $\iint x dy dz$, hetgeen de inhoud is van de projecterende cilinder van het stuk oppervlak op het (y, z) -vlak (aannemende dat het stuk aan de kant van de positieve x -as ligt). Het teken is het teken van $x n_1$ en is dus positief als het gebied G ter plaatse onder het oppervlak en negatief als het gebied boven het oppervlak ligt. (onder en boven in de richting van de x -as gemeten). Op analoge wijze als in het tweedimensionale geval volgt hieruit dat de totale uitkomst gelijk is aan de inhoud van G : $\int_S x n_1 d\sigma = \text{inh. } G$. Dit geldt ook als het oppervlak niet aan de kant van de positieve x -as ligt. Bovendien geldt een soortgelijke beschouwing ook voor de andere integralen; dus we vinden als lineaire benadering:

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \right) \cdot \text{inhoud } G,$$

waarbij $\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$ juist de in het eerste jaar al ingevoerde divergentie van \underline{a} is.

We nemen nu een gebied G in de ruimte, dat we niet langer klein veronderstellen. We verdelen G in brokken en maken voor het randoppervlak met passende normaaloriëntering naar buiten de integraal $\int_S (\underline{a}, \underline{n}) d\sigma$ op. De nieuwe randoppervlakken echter, die er door de verdeling bijgekomen zijn, zijn randoppervlak van twee brokken, in beide gevallen met tegengestelde normaaloriëntering, dus ook met tegengestelde integralen. Tellen we de bijdragen van alle brokken bij elkaar op, dan blijft er alleen de integraal over het randoppervlak van G over. Nemen we voor elke brok de hierboven gegeven lineaire benadering en gaan we tot de limiet over als de brokken willekeurig klein worden, dan vinden we (door bepaalde netheidsveronderstellingen aan de brokken bij de limietovergang op te leggen):

$$(5) \quad \int_G \operatorname{div} \underline{a} \, d\tau = \int_S (\underline{a} \cdot \underline{n}) \, d\sigma \quad (\text{formule van Gauss}).$$

Hierin is G een gebied in R_3 , en S het randoppervlak van G , \underline{n} de naar buiten gerichte normaalvector van S , $d\tau = dx dy dz$.

Het in voorbeeld 4 gevonden resultaat klopt met deze formule, want daar is $\operatorname{div} \underline{a} = 3$ en de inhoud van G is $\frac{4}{3}\pi$.

Het gebied G mag een rand hebben, die uit meer dan één oppervlak bestaat; in het rechterlid van (5) moeten de bijdragen van deze randoppervlakken opgeteld worden, waarbij elk oppervlak voorzien is van de normaaloriëntering, die ten opzichte van G naar buiten wijst. Neemt men voor G bv. het gebied tussen twee concentrische bollen, dan wijst de normaal bij de buitenste bol naar buiten, maar bij de binnenste bol wijst de normaal naar buiten t.o.v. G , dat is naar de binnenkant van de bol.

Passen we (5) toe op een klein gebiedje dat het punt \underline{p} bevat, dan is het linkerlid bij benadering gelijk aan

$$(\operatorname{div} \underline{a})_{\underline{x}=\underline{p}} \cdot \text{inhoud } G.$$

Door nu G op \underline{p} samen te trekken vinden we de uitkomst

$$(\operatorname{div} \underline{a})_{\underline{x}=\underline{p}} = \lim_{G \rightarrow \underline{p}} \frac{\int_S (\underline{a}, \underline{n}) \, d\sigma}{\text{inh } G}.$$

Deze formule wordt soms wel als definitie van de divergentie gebruikt; de formule geeft de interpretatie van de divergentie als brondichtheid van het vectorveld, omdat de teller van de breuk in het rechterlid de hoeveelheid in en uit G stromende vloeistof bij een stromingsveld is.

Ook bij de rotatie is een soortgelijke formule mogelijk, zij het dat de zaak wat ingewikkelder is door het vectoriële karakter van de rotatie. Nemen we in het punt \underline{p} een eenheidsvector \underline{v} vast aan en passen we (3) toe op een klein oppervlakje door \underline{p} loodrecht op \underline{v} met dusdanige normaal- en randoriëntering, dat in \underline{p} geldt $\underline{n} = \underline{v}$, dan is het linkerlid van (3) bij benadering gelijk aan

$$(\operatorname{rot} \underline{a}, \underline{v})_{\underline{x}=\underline{p}} \cdot \text{opp. } S.$$

Door nu S op \underline{p} samen te trekken vinden we de uitkomst

$$(\operatorname{rot} \underline{a}, \underline{v})_{\underline{x}=\underline{p}} = \lim_{\substack{S \rightarrow \underline{p} \\ S \perp \underline{v}}} \frac{\int_K (\underline{a}, \underline{t}) \, ds}{\text{opp. } S}.$$

Door voor \underline{v} eenheidsvectoren in de richtingen van de coördinaatassen te kiezen krijgen we zo formules voor de componenten van $\operatorname{rot} \underline{a}$. Nemen we bv. $\underline{v} = (1, 0, 0)$, dan komt links de eerste component van $\operatorname{rot} \underline{a}$; rechts moet dan S evenwijdig met het (y, z) -vlak worden genomen.

H. Bronvrije en divergentievrije velden.

Het uitgangspunt bij de afleiding van de formule van Gauss was het beschouwen van velden, die niet bronvrij zijn. We kunnen de formule echter ook toepassen als dat wel zo is, dus als het rechterlid van (5) altijd nul is. Het linkerlid is dan ook altijd nul. Noemt men een veld \underline{a} , waarvoor identiek geldt $\text{div } \underline{a} = 0$, divergentievrij, dan bewijzen we:

Een bronvrij veld is divergentievrij.

Immers, als een veld \underline{a} niet divergentievrij is, bestaat er een punt p waar $\text{div } \underline{a} \neq 0$, bijv. $\text{div } \underline{a} > 0$. Nemen we nu voor G een voldoende kleine omgeving van p , dan is ook $\text{div } \underline{a} > 0$ in G op grond van de continuïteit, dus het linkerlid van (5) ook > 0 . Dit is echter in strijd met het gegeven dat \underline{a} bronvrij is. Het geval dat $\text{div } \underline{a} < 0$ in p gaat analoog.

Als omgekeerd gegeven is, dat het veld divergentievrij is, is het linkerlid van (5) en dus ook het rechterlid altijd nul. Hieruit volgt nog niet dat het veld bronvrij is, want (5) geldt alleen voor die gesloten oppervlakken waarvan het binnengebied geheel in het veld ligt. We geven een fysisch voorbeeld, waaruit blijkt, dat er moeilijkheden kunnen optreden.

Vb.5 We beschouwen het elektrisch veld van een puntlading, of, hetgeen op hetzelfde neerkomt, het gravitatieveld van een massapunt. De veldsterkte in een punt is gericht langs de verbindslijn met de puntlading en is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot de lading. Stel dat de puntlading in de oorsprong van het coördinatenstelsel zit. Dan heeft het veld de gedaante

$$\underline{E} = \left(\frac{cx}{r^3}, \frac{cy}{r^3}, \frac{cz}{r^3} \right) \quad \text{met constante } c \text{ en } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Directe verificatie leert, dat $\text{div } \underline{E} = 0$. In de oorsprong is \underline{E} niet gedefinieerd. We nemen als gesloten oppervlak de eenheidsbol met middelpunt in de oorsprong. In het punt (x,y,z) op deze bol is $r = 1$ en $\underline{n} = (x,y,z)$, dus $(\underline{E}, \underline{n}) = c$ en

$$\int_S (\underline{E}, \underline{n}) d\sigma = c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 4\pi c.$$

Het veld is dus niet bronvrij; in het binnengebied van het gesloten oppervlak is het veld niet overal gedefinieerd. Voor een gesloten oppervlak dat de oorsprong niet in zijn inwendige bevat, is de corresponderende integraal wel nul.

We vergelijken de situatie in dit voorbeeld nog even met die in voorbeeld 3. Voor het veld in voorbeeld 3 geldt nu ook $\text{div } \underline{H} = 0$; dit veld is echter bovendien bronvrij, want als een gesloten oppervlak de z -as niet snijdt, heeft ook het binnengebied niets met de z -as gemeen, zodat nu op ieder gesloten oppervlak de formule van Gauss kan worden toegepast. Aan de andere kant geldt in voorbeeld 5 dat $\text{rot } \underline{E} = \underline{0}$; dit veld is bovendien conservatief, omdat iedere gesloten kromme, die niet door 0 gaat, als randkromme op te vatten is van een oppervlak, dat niet door 0 gaat, zodat op iedere gesloten kromme de formule van Stokes kan worden toegepast.

Uit de formule van Stokes hebben we geconcludeerd, dat een veld, dat een vectorpotentiaal bezit, bronvrij is en uit de formule van Gauss, dat een bronvrij veld divergentievrij is. Door combinatie van deze resultaten vinden we, dat uit $\underline{b} = \text{rot } \underline{a}$ volgt dat $\text{div } \underline{b} = 0$, dus de formule

$$\text{div rot } \underline{a} = 0,$$

die door directe berekening ook makkelijk te verifiëren is.

K. Slotopmerking.

Bij de afleiding van de integraalstellingen hebben we steeds geëist, dat de optredende oppervlakken en krommen differentieerbare parameter-voorstellingen bezitten. Deze eisen kunnen wel wat verzwakt worden, zonder aan de geldigheid van de integraalstellingen afbreuk te doen. In krommen mogen hier en daar wel hoeken zitten en in oppervlakken scherpe kanten.

§.3 Toepassingen. De formules van Green.

A. Betrekkingen tussen vectoroperaties.

De in de vorige paragraaf behandelde integraalstellingen hebben het belang van gradiënt, rotatie en divergentie in het licht gesteld. We behandelen daarom nu enkele formules, die op deze grootheden betrekking hebben.

Allereerst nog iets over de notatie. In plaats van grad φ schrijft men ook wel $\nabla\varphi$, waarbij ∇ als een symbolische vector $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ wordt opgevat. Van deze symbolische vector vormen we nu het inwendige product met een vectorveld \underline{a} : $(\nabla, \underline{a}) = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = \text{div } \underline{a}$. Evenzo kan men

het vectorproduct $\nabla \times \underline{a}$ vormen, hetgeen juist rot \underline{a} blijkt te zijn. De notaties (∇, \underline{a}) voor $\text{div } \underline{a}$ en $\nabla \times \underline{a}$ voor rot \underline{a} worden veel gebruikt.

We gaan nu het effect na van het na elkaar uitvoeren van twee van de operaties grad, rot en div. Hierbij moeten we bedenken, dat grad op een scalar en rot en div op een vector werken en dat grad en rot een vector en div een scalar opleveren. Dit geeft de volgende mogelijkheden van samenstelling:

rot grad φ , div grad φ , rot rot \underline{a} , div rot \underline{a} , grad div \underline{a} .

Twee van deze zijn in de vorige paragraaf al als nul gesignaleerd:

$$(1) \text{ rot grad } \varphi = \underline{0}.$$

$$(2) \text{ div rot } \underline{a} = 0.$$

Verder heeft men voor div grad een apart symbool Δ ingevoerd:

$$(3) \Delta\varphi = \text{div grad } \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Deze operator Δ laat men ook op een vectorveld \underline{a} werken met als resultaat een vectorveld waarvan de componenten ontstaan door Δ op de overeenkomstige componenten van \underline{a} te laten werken:

$$(4) \Delta \underline{a} = (\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3).$$

Tussen de overgebleven uitdrukkingen bestaat nog de volgende betrekking:

$$(5) \text{ grad div } \underline{a} = \text{rot rot } \underline{a} + \Delta \underline{a}.$$

We beschouwen om dit te bewijzen, de eerste component van rot rot \underline{a} :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) = \\ & = \frac{\partial^2 a_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} = \end{aligned} \quad (\nabla, \nabla) = \Delta$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} \right),$$

hetgeen de eerste component van $\text{grad div } \underline{a} - \Delta \underline{a}$ is. De andere componenten gaan analoog, hetgeen tot (5) leidt.

Verder zijn er nog verbanden tussen rot, grad en div en de algebraïsche vectoroperaties. We noemen de volgende betrekkingen:

- (6) $\text{grad } (\varphi\psi) = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi. = \frac{\partial \varphi \psi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi \psi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi \psi}{\partial z}$
- (7) $\text{rot } (\varphi \underline{a}) = \varphi \text{ rot } \underline{a} + (\text{grad } \varphi) \times \underline{a}.$
- (8) $\text{div } (\varphi \underline{a}) = \varphi \text{ div } \underline{a} + (\text{grad } \varphi, \underline{a}).$
- (9) $\text{div } (\underline{a} \times \underline{b}) = (\underline{b}, \text{rot } \underline{a}) - (\underline{a}, \text{rot } \underline{b}).$

De geldigheid hiervan is zeer eenvoudig te verifiëren. Ten slotte blijkt de operatie Δ verwisselbaar te zijn met grad, rot en div:

$$(10) \text{ grad } \Delta \varphi = \Delta \text{ grad } \varphi.$$

$$(11) \text{ rot } \Delta \underline{a} = \Delta \text{ rot } \underline{a}.$$

$$(12) \text{ div } \Delta \underline{a} = \Delta \text{ div } \underline{a}.$$

wisk II hoofdst 7

Men krijgt (10) door in (5) $\underline{a} = \text{grad } \varphi$ te stellen en (1) en (3) te gebruiken. Men krijgt (12) door op (5) links en rechts div toe te passen en (2) en (3) te gebruiken. Voor (11) vervangt men eerst in (5) \underline{a} door $\text{rot } \underline{a}$ en gebruikt (2):

$$\underline{0} = \text{rot rot rot } \underline{a} + \Delta \text{ rot } \underline{a};$$

vervolgens past men op (5) links en rechts rot toe en gebruikt (1):

$$\underline{0} = \text{rot rot rot } \underline{a} + \text{rot } \Delta \underline{a}.$$

Door combinatie vindt men (11).

B. De drie formules van Green.

Amerikaanse literatuur
 $(\nabla, \nabla) = \Delta = \nabla^2$

We behandelen nu enige toepassingen van de integraalstellingen. Neemt men in de formule van Gauss $\underline{a} = \text{grad } \varphi$, dan komt er

$$\int_G \Delta \varphi d\tau = \int_S (\text{grad } \varphi, \underline{n}) d\sigma.$$

Hierin is $(\text{grad } \varphi, \underline{n})$ de richtingsafgeleide van φ in de richting van \underline{n} ; deze wordt de normale afgeleide van φ genoemd en met $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ aangeduid.

We vinden dus

$$(13) \int_G \Delta \varphi d\tau = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma.$$

We passen nu de formule van Gauss toe met $\underline{a} = \varphi \text{ grad } \varphi$. Volgens (8) is $\text{div } (\varphi \text{ grad } \varphi) = \varphi \Delta \varphi + (\text{grad } \varphi, \text{grad } \varphi)$, dus

$$(14) \int_G \{ \varphi \Delta \varphi + (\text{grad } \varphi, \text{grad } \varphi) \} d\tau = \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma$$

(eerste formule van Green).

Door hetzelfde met $\underline{a} = \varphi \text{ grad } \varphi$ te doen en af te trekken vindt men

$$(15) \int_G (\varphi \Delta \varphi - \varphi \Delta \varphi) d\tau = \int_S \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma \quad (\text{tweede formule van Green}).$$

We gaan nu een speciale keuze voor ϕ doen en wel één waarvoor $\Delta\phi = 0$. We willen een dergelijke ϕ hebben, die alléén afhangt van de afstand

tot een vast punt p . Stel $r = \sqrt{(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2 + (z-p_3)^2}$ en $\phi(x) = f(r)$. Nu is $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-p_1}{r}$ dus $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{(x-p_1)}{r}$,

$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dr^2} \cdot \frac{(x-p_1)^2}{r^2} + \frac{df}{dr} \cdot \frac{1}{r} - \frac{df}{dr} \frac{(x-p_1)^2}{r^3}$. Differentiëren naar y en z

gaat analoog. Zo vinden we $\Delta\phi = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{df}{dr} \cdot \frac{2}{r}$. Stellen we nu $\Delta\phi = 0$,

dan heeft de D.V. voor $f(r)$ als algemene oplossing $f(r) = C_1 + \frac{C_2}{r}$.

Kiest men de oplossing $\phi = \frac{1}{r}$, dan krijgt men bij invullen in (15) weer (13) terug. We beschouwen nu $\phi = \frac{1}{r}$; deze functie voldoet aan $\Delta\phi = 0$, maar is in het punt p niet gedefinieerd. Alle moeilijkheden kunnen we ontgaan door het punt p geheel buiten het gebied G (dus ook niet op S) te kiezen. Dan komt er

$$(16) \int_G \frac{\Delta\phi}{r} d\tau = \int_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\sigma \quad (p \text{ buiten } G).$$

We beschouwen nu het geval, dat p binnen G ligt (p op S beschouwen we niet). In dat geval is de integrand in het linkerlid van (15) niet overal gedefinieerd. We redden ons nu door een klein bolletje B met straal ρ en middelpunt p uit het gebied G weg te laten. Dit heeft tot gevolg, dat in het linkerlid van (15) over een kleiner gebied G' geïntegreerd wordt; in het rechterlid van (15) komt er een term bij, doordat het oppervlak R van de uitgesneden bol nu ook rand van het gebied G' is.

Op R is ϕ echter constant, $\phi = \frac{1}{\rho}$; verder is de normaal \underline{n} gericht langs de straal naar p en wel naar binnen. Hieruit volgt direct dat $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{1}{\rho^2}$ (immers $\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}$, hetgeen de afgeleide is in de richting van de van p afwijzende voerstraal). Zo vinden we

$$\int_{G'} \frac{\Delta\phi}{r} d\tau = \int_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\sigma + \frac{1}{\rho} \int_R \frac{\partial\phi}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{\rho^2} \int_R \phi d\sigma.$$

We willen nu ρ naar nul laten naderen. Als we $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ continu veronderstellen is $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ zeker een constante $K > 0$ zodat $\left| \frac{\partial\phi}{\partial n} \right| < K$, dus

$$\left| \int_R \frac{\partial\phi}{\partial n} d\sigma \right| \leq K \int_R d\sigma = K \cdot \text{opp. } R = 4\pi K \rho^2. \text{ Dit geeft } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \int_R \frac{\partial\phi}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Omdat φ continu is is $|\varphi - \varphi(\underline{p})| < \varepsilon$ op R te krijgen door ρ voldoende klein te kiezen, dus

$$\frac{1}{\rho^2} \left| \int_R (\varphi - \varphi(\underline{p})) d\sigma \right| \leq \frac{\varepsilon}{\rho^2} \int_R d\sigma = 4\pi\varepsilon. \text{ Verder is}$$

$$\frac{1}{\rho^2} \int_R \varphi d\sigma = \frac{1}{\rho^2} \int_R (\varphi - \varphi(\underline{p})) d\sigma + \frac{\varphi(\underline{p})}{\rho^2} \int_R d\sigma, \text{ dus } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^2} \int_R \varphi d\sigma = 4\pi\varphi(\underline{p}).$$

Het linkerlid nadert dus ook tot een limiet voor $\rho \rightarrow 0$; deze limiet noemen we $\int_G \frac{\Delta\varphi}{r} d\tau$. Dit is een oneigenlijke integraal, omdat \underline{p} binnen G ligt; de betekenis van deze integraal is juist de hier uitgevoerde limietovergang. Zo vinden we

$$(17) \varphi(\underline{p}) = -\frac{1}{4\pi} \int_G \frac{\Delta\varphi}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\sigma \quad (\underline{p} \text{ binnen } G)$$

(derde formule van Green). *Je vinden door in 2 in te vullen $\psi = \frac{1}{r} = \frac{1}{|\underline{x} - \underline{p}|}$*

Het is de gewoonte om in deze formule de \underline{p} nu veranderlijk te maken en gelijk aan \underline{x} te stellen. De grootheid r wordt dan de afstand tussen twee variabele punten, waarvan het ene, het voormalige punt \underline{p} , het veldpunt genoemd wordt; het andere punt is het als integratieveranderlijke fungerende punt van G of S , het integratiepunt. Als men alles in componenten uitschrijft, moeten deze punten verschillend worden aangeduid, bv. door aan de componenten van het integratiepunt accenten te hangen: x', y', z' .

Een speciaal geval van (17) ontstaat door voor G de bol $B(\rho)$ met middelpunt in het veldpunt en straal ρ te nemen; het randoppervlak is het boloppervlak $S(\rho)$. Op $S(\rho)$ geldt nu $\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}$ en $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = -\frac{1}{\rho^2}$ (de normaal wijst naar buiten), hetgeen constanten zijn. Zo krijgen we

$$\varphi(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{B(\rho)} \frac{\Delta\varphi}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi\rho} \int_{S(\rho)} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{S(\rho)} \varphi d\sigma.$$

Op de middelste term passen we (13) toe; zo vinden we

$$(18) \varphi(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{B(\rho)} \Delta\varphi \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} \right) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{S(\rho)} \varphi d\sigma.$$

C. Harmonische functies.

Een belangrijke toepassing vinden bovenstaande formules in de potentiaaltheorie. Deze bestudeert oplossingen van de potentiaalvergelijking

$$\Delta\varphi = 0;$$

de oplossingen heten harmonische functies. Uit (13) volgt, dat, als φ harmonisch is in het binnengebied van het gesloten oppervlak S , dan

$$(19) \int_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma = 0.$$

B.V. $\varphi = e^x \cos y + z$

Neem nu in (14) $\psi = \varphi$ en $\Delta\varphi = 0$; dit geeft voor harmonische functies:

$$(20) \int_G |\text{grad } \varphi|^2 d\tau = \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma.$$

Harmonische functies.

Stel nu dat de harmonische functie φ identiek nul is op S . Dan is het rechterlid en dus ook het linkerlid van (20) nul. Daar $|\text{grad } \varphi|^2 \geq 0$ volgt hieruit, dat $\text{grad } \varphi = 0$ overal in G , dus φ constant. Daar $\varphi = 0$ op S , is deze constante nul en dus $\varphi = 0$ overal in G .

Dit heeft ten gevolge, dat, als twee harmonische functies φ_1 en φ_2 op S overeenstemmen, ze ook in G overeenstemmen. Immers $\varphi_2 - \varphi_1$ is ook een harmonische functie, die identiek nul is op S en dus in G .

Een harmonische functie in een gebied G is dus door zijn waarden op de rand S van G geheel vastgelegd.

Hieruit volgt nog niet, dat het gedrag van φ op S willekeurig kan worden voorgeschreven. Het probleem om bij een gegeven functie φ op S een harmonische functie in G te vinden, die op S met φ overeenstemt, is veel moeilijker en wordt hier niet besproken (eerste randwaardeprobleem van de potentiaaltheorie). Wij hebben hier dus aangetoond, dat dit probleem niet meer dan één oplossing kan hebben.

Stel nu dat $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ identiek nul is op S ; dan volgt hieruit op dezelfde wijze als hierboven, dat φ constant is in G . Dit heeft ten gevolge dat als voor twee harmonische functies φ_1 en φ_2 geldt, dat $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ op S , φ_2 en φ_1 slechts een constante C verschillen: $\varphi_2 = \varphi_1 + C$. Dit bewijst men weer door $\varphi_2 - \varphi_1$ te beschouwen.

Een harmonische functie in een gebied is door zijn normale afgeleide op de rand S van G op een additieve constante na vastgelegd.

Hieruit volgt niet, dat $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ op S willekeurig kan worden voorgeschreven; dit is zelfs zeker niet zo wegens (19). Het probleem om φ te vinden in G bij gegeven $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ op de rand heet het tweede randwaardeprobleem van de potentiaaltheorie.

Dat een harmonische functie, als φ en $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ beide op S gegeven zijn, in G vastgelegd is, volgt direct uit de derde formule van Green, die er voor harmonische functies als volgt uitziet

$$\varphi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\sigma \quad (\underline{x} \text{ binnen } G).$$

Past men (18) toe op een harmonische functie, dan vindt men

$$(21) \varphi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{S(\rho)} \varphi d\sigma.$$

Daar $4\pi\rho^2$ juist de oppervlakte van $S(\rho)$ is, kunnen we (21) opvatten als het gemiddelde van φ over $S(\rho)$. Een harmonische functie is in een punt dus gelijk aan het gemiddelde van deze functie over het oppervlak

van een bol met dat punt als middelpunt. Hieruit volgt, dat een functie die harmonisch is in een gebied G met rand S , niet maximaal of minimaal kan zijn in het inwendige van G , maar alleen op de rand S , behalve in het triviale uitzonderingsgeval dat de functie constant is. Immers als we een maximum in een punt p van G hebben in de omgeving waarvan de functie niet constant is, dan wordt de functie daar dus kleiner dan in p . De integraal, in het rechterlid van (21) wordt dan ook kleiner dan $\varphi(p)$, als men p als middelpunt van $S(\rho)$ kiest, hetgeen een contradictie oplevert. Analoog met een minimum in plaats van een maximum.

D. Vergelijking van Poisson.

In voorbeeld 5 van paragraaf 2 is het electrisch veld van een puntlading beschouwd. Voor dit veld bleek te gelden $\text{div } \underline{E} = 0$. Verder heeft dit veld een potentiaal $\varphi = -\frac{c}{r}$ (zie voorbeeld 3 in paragraaf 1 van hoofdstuk IV). Uit $\text{grad } \varphi = \underline{E}$ en $\text{div } \underline{E} = 0$ volgt $\Delta\varphi = 0$, hetgeen geen nieuw resultaat is, want $\frac{1}{r}$ is al als harmonische functie gesignaleerd.

Het gevonden resultaat geldt echter in een algemenere situatie dan bij een puntlading. Ook bij andere statische ladingsverdelingen geldt voor een ruimtestuk waar geen lading aanwezig is, dat $\text{div } \underline{E} = 0$ en dat \underline{E} een potentiaal heeft, die dan natuurlijk wederom een harmonische functie is.

In een gedeelte van de ruimte, waar continu verdeelde lading aanwezig is (ladingsdichtheid ρ), wordt $\text{div } \underline{E} = 0$ vervangen door $\text{div } \underline{E} = 4\pi\rho$. Ook dan nog bezit \underline{E} een potentiaal φ , die voldoet aan de vergelijking van Poisson $\Delta\varphi = 4\pi\rho$. Dit brengt ons ertoe ook deze vergelijking, waarbij ρ een gegeven scalarveld is, te beschouwen. Dat deze voor een gegeven veld ρ een oplossing bezit, zullen we niet bewijzen; het blijkt onder zekere netheidsveronderstellingen voor ρ wel zo te zijn. Nemen we dit echter aan, dan kunnen we makkelijk een oplossing aangeven. We passen op een of andere oplossing ϕ van de vergelijking van Poisson de derde formule van Green toe, hetgeen het volgende resultaat levert:

$$\phi(\underline{x}) = - \int_G \frac{\rho}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\sigma.$$

Omdat $\frac{1}{r}$ een harmonische functie is, is ook

$\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\sigma$ een harmonische functie; bedenk dat in deze

integraal alleen $\frac{1}{r}$ van het veldpunt afhangt. Hieruit volgt direct dat

$$\Delta\phi = \Delta \left(- \int_G \frac{\rho}{r} d\tau \right), \text{ zodat we de oplossing } - \int_G \frac{\rho}{r} d\tau \text{ van de vergelijking}$$

van Poisson gevonden hebben. Men zou nu kunnen denken, dat we achteraf wel kunnen verifiëren of deze inderdaad aan de vergelijking van Poisson voldoet, waardoor we ons zouden hebben losgemaakt van de a priori veronderstelling, dat deze vergelijking een oplossing ϕ bezit. Dit blijkt echter niet mee te vallen, omdat de integraal oneigenlijk is in het veldpunt, waardoor differentiëren naar het veldpunt zeer omzichtig dient te geschieden.

E. Functie van Green.

Als we in de tweede formule van Green voor φ en ϕ beide harmonische functies nemen, dan krijgen we

$$(22) \quad \int_S \phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \int_S \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\sigma.$$

We beschouwen, nu de derde formule van Green voor harmonische φ . De term in het rechterlid met $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ willen we proberen weg te werken. Dit zou op grond van (22) lukken als we een functie ϕ kunnen vinden, die harmonisch is in G en waarvoor $\phi = \frac{1}{r}$ op S geldt. Let wel dat deze functie, evenals r , van veldpunt en integratiepunt afhangt. Voor een dergelijke functie geldt dan

$$\int_S \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \int_S \varphi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\sigma,$$

dus de derde formule van Green wordt

$$(23) \quad \varphi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi \frac{\partial(\phi - \frac{1}{r})}{\partial n} d\sigma.$$

Als dus ϕ gevonden is, is hiermee φ in het veldpunt uitgedrukt in φ op de rand (dus kennis van $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ is niet meer nodig).

De functie $\frac{1}{r} - \phi = \omega$ noemt men nu functie van Green behorende bij het gebied G . Deze heeft de eigenschappen nul te zijn op de rand S van G , harmonisch te zijn in G , behalve in het veldpunt, waar ω niet gedefinieerd is; evenwel is $\omega - \frac{1}{r}$ wel gedefinieerd en harmonisch in het veldpunt.

Kennis van de functies van Green voor alle veldpunten van G leidt, met behulp van (23), tot oplossing van het eerste randwaardeprobleem van de potentiaaltheorie. Men bedenke daarbij, dat de bepaling van φ (waardoor ω ook vastligt) neerkomt op het oplossen van een speciaal geval van het eerste randwaardeprobleem. We gaan hier niet verder op in.

§.4 Transformatie van coördinaten.

De vectoroperaties grad, rot en div zijn zo belangrijk, dat we hiervoor ook formules willen hebben als we niet met gewone rechte lijnige rechte hoekige coördinaten werken, maar met andere coördinatenstelsels zoals bolcoördinaten of cilindercoördinaten.

We beschouwen dus een coördinatentransformatie

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u, v, w) \\ y &= y(u, v, w) \\ z &= z(u, v, w) \end{aligned} \right\} \text{ , of } \underline{x} = \underline{x}(\underline{u}), \text{ die we tweemaal differentieerbaar met}$$

continue partiële afgeleiden van de tweede orde veronderstellen. We maken echter nog een veronderstelling, nl. dat de coördinaten u, v, w rechts

orthogonaal zijn. We kunnen dit zo uitdrukken, dat in ieder punt de drie vectoren $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$ twee aan twee loodrecht zijn en in de hier gegeven volgorde een rechts stelsel vormen. Iets meetkundiger kunnen we dit als volgt uitdrukken. De vector $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$ geeft de richting van de raaklijn aan de kromme, die ontstaat door v en w constant te nemen. Zulke krommen heten parameterkrommen van het coördinatenstelsel. In elk punt zijn er drie: v en w constant, w en u constant, u en v constant. Geëist wordt nu, dat in ieder punt deze drie parameterkrommen loodrecht op elkaar staan.

Bij bolcoördinaten klopt dit inderdaad, want θ en φ constant zijn halve lijnen uit de oorsprong, φ en r constant zijn halve cirkels met middelpunt in de oorsprong en middellijn langs de z -as, r en θ constant zijn cirkels evenwijdig met het (x,y) -vlak en met middelpunt op de z -as. In elk punt staan de drie krommen van elk soort loodrecht op elkaar. Men kan het ook formeel narekenen:

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Deze vectoren zijn inderdaad twee aan twee loodrecht. Verder vormen ze in de volgorde $\frac{\partial \underline{x}}{\partial r}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}$ een rechts stelsel, hetgeen men bv. verifiëren kan door na te gaan dat $\frac{\partial \underline{x}}{\partial r} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta}$ een positief veelvoud van $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}$ is (het is trouwens ook meetkundig in te zien).

Ook bij cilindercoördinaten klopt het; het stelsel is rechts als we de volgorde r , φ , z nemen.

De vectoren $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$ zijn nu onderling loodrecht, maar het behoeven geen eenheidsvectoren te zijn. De lengtes van deze vectoren heten schaalfactoren:

$$h_1 = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \right|, \quad h_2 = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right|, \quad h_3 = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} \right|.$$

Voor de bolcoördinaten zijn deze schaalfactoren

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \theta;$$

voor de cilindercoördinaten luiden ze

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1.$$

We trekken nog enige conclusies uit de orthogonaliteit. Hieruit volgt dat $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$ dezelfde richting heeft als $\frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$, dus $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} = \lambda \frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$. Omdat het stelsel rechts is, is $\lambda > 0$. Neemt men nu hiervan de lengte, dan is $h_1 h_2 = \lambda h_3$. Hieruit volgt de derde van de volgende drie gelijkheden (de andere gaan analoog):

$$(1) \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} = \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial w}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} = \frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} = \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}.$$

Ten slotte de determinant van de drie vectoren: $D\left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial w}\right)$. Omdat het stelsel rechts is, is deze positief en verder gelijk aan de inhoud van het door de drie vectoren opgespannen parallelepipedum. Omdat de vectoren echter loodrecht zijn wordt dit eenvoudig:

$$(2) \quad D\left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial w}\right) = h_1 h_2 h_3.$$

Als er nu een vectorveld \underline{a} gegeven is, dan gaan we dit in een bepaald punt niet ontbinden in zijn gewone rechthoekige componenten a_1, a_2, a_3 , maar nu op een wijze die aangepast is aan de nieuwe coördinaten: we nemen de projecties op de vectoren $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$. Gebruik makend van de schaal-factoren h_1, h_2, h_3 komen we dan tot de definities:

$$\underline{a}_u = \frac{1}{h_1} \left(\underline{a}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \right), \quad \underline{a}_v = \frac{1}{h_2} \left(\underline{a}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right), \quad \underline{a}_w = \frac{1}{h_3} \left(\underline{a}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} \right).$$

Dit komt als volgt inderdaad op een ontbinding neer. Als $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ eenheidsvectoren zijn in de richtingen resp. van $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$, dan is

$$\underline{a} = a_u \underline{e}_1 + a_v \underline{e}_2 + a_w \underline{e}_3.$$

We kunnen grad α nu direct in de nieuwe componenten ontbinden.

$$(\text{grad } \alpha)_u = \frac{1}{h_1} \left(\text{grad } \alpha, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \right) = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \underline{y}}{\partial u} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial \underline{z}}{\partial u} \right) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u}$$

en analoog voor v en w . Dus:

$$(\text{grad } \alpha)_u = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \quad (\text{grad } \alpha)_v = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \quad (\text{grad } \alpha)_w = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \alpha}{\partial w}.$$

We gaan nu over tot de rotatie en wel beginnen we met de u -component.

$$(\text{rot } \underline{a})_u = \frac{1}{h_1} \left(\text{rot } \underline{a}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \right) = \frac{1}{h_2 h_3} \left(\text{rot } \underline{a}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} \right).$$

Bij de afleiding van de formule van Stokes hebben we echter afgeleid dat

$$\left(\text{rot } \underline{a}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\underline{a}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} \right) - \frac{\partial}{\partial w} \left(\underline{a}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right). \quad \text{Dus}$$

$$(\text{rot } \underline{a})_u = \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} (h_3 a_w) - \frac{\partial}{\partial w} (h_2 a_v) \right\}.$$

Op analoge wijze vindt men

$$(\text{rot } \underline{a})_v = \frac{1}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial w} (h_1 a_u) - \frac{\partial}{\partial u} (h_3 a_w) \right\},$$

$$(\text{rot } \underline{a})_w = \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (h_2 a_v) - \frac{\partial}{\partial v} (h_1 a_u) \right\}.$$

Past men dit toe op bolcoördinaten, dan vindt men

$$\begin{aligned}(\text{rot } \underline{a})_r &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta a_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r a_\theta) \right\} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\cot \theta}{r} a_\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{rot } \underline{a})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta a_\varphi) \right\} = \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} a_\varphi,\end{aligned}$$

$$(\text{rot } \underline{a})_\varphi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right\} = \frac{\partial a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} a_\theta.$$

De formules voor cilindercoördinaten kunnen met behulp van de algemene formule ook direct opgeschreven worden.

Bovenstaande algemene formule laat ook een meetkundige interpretatie toe. De component $(\text{rot } \underline{a})_u$ is met de uit de formule van Stokes afgeleide limietformule ook te verkrijgen door een klein vlakje loodrecht op de richting van $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$ te nemen en daarop de formule van Stokes toe te passen. Op grond van de orthogonaliteit kunnen we het vlak $u = \text{constant}$ met een kromlijnige "rechthoek" gevormd door bij v en w behorende parameterkrommen gebruiken. Als de verschillen in v en w op de "evenwijdige" zijden van deze rechthoek Δv en Δw zijn is de oppervlakte van de rechthoek bij benadering $h_2 h_3 \Delta v \Delta w$. Op een rechthoekszijde $w = \text{constant}$, is de tangentiële component van \underline{a} juist a_v en de lengte $h_2 \Delta v$, dus de lijnintegraal bij benadering $h_2 a_v \Delta v$. Er zijn twee evenwijdige rechthoekszijden die echter bij een verschillende waarde van w behoren en die bovendien in tegengestelde richting doorlopen worden (aan een figuur make men zich dit duidelijk). De twee integralen samen geven dus bij benadering een bijdrage $-\frac{\partial}{\partial w} (h_2 a_v) \Delta v \Delta w$. Dat hier een minteken komt, ziet men aan een figuur; men bedenke dat u, v, w een rechts stelsel vormen. Op analoge wijze vindt men een bijdrage van de rechthoekszijden $v = \text{constant}$, die bij benadering gelijk is aan $\frac{\partial}{\partial v} (h_3 a_w) \Delta w \Delta v$. Deelt men het totaal door de oppervlakte van de rechthoek, dan komt er juist

$$\frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} (h_3 a_w) - \frac{\partial}{\partial w} (h_2 a_v) \right\}.$$

De andere componenten worden op analoge wijze behandeld.

Op een soortgelijke meetkundige wijze kunnen we tot een formule voor de divergentie komen. We nemen een "rechthoekig blok", dat parameterkrommen als ribben heeft. De optredende verschillen in u, v en w stellen we $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, dan is de inhoud van het blok bij benadering gelijk aan $h_1 h_2 h_3 \Delta u \Delta v \Delta w$. Om nu de formule van Gauss te kunnen toepassen moeten we de oppervlakte-integralen over de zes zijvlakken uitrekenen. We nemen

eerst de twee zijvlakken $u = \text{constant}$. De normale component van \underline{a} is daar a_u en de oppervlakte bij benadering $h_2 h_3 \Delta v \Delta w$, dus de integraal bij benadering $h_2 h_3 a_u \Delta v \Delta w$; bij het zijvlak dat bij de kleinere u -waarde behoort moet dit nog van een minteken worden voorzien; de twee uitdrukkingen behoren bovendien bij verschillende waarden van u . Samen geven ze dus bij benadering $\frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 a_u) \Delta v \Delta w \Delta u$. De andere zijvlakken behandelt men op analoge wijze. Deelt men nu nog door de inhoud, dan vindt men voor de divergentie de volgende formule:

$$\text{div } \underline{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 a_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_3 h_1 a_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_1 h_2 a_w) \right\}.$$

Deze formule kan ook streng worden bewezen, als men gebruik maakt van de volgende identiteit voor drie vectoren \underline{p} , \underline{q} , \underline{r} in R_3 en een lineaire afbeelding A :

$$(A\underline{p}, \underline{q} \times \underline{r}) + (A\underline{q}, \underline{r} \times \underline{p}) + (A\underline{r}, \underline{p} \times \underline{q}) = (a_{11} + a_{22} + a_{33}) D(\underline{p}, \underline{q}, \underline{r});$$

hierin zijn a_{11} , a_{22} , a_{33} elementen van de matrix van A . Stelt men

$$\text{hierin } \underline{p} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u}, \underline{q} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}, \underline{r} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial w}, A = \frac{d\underline{a}}{d\underline{x}} \text{ en maakt men gebruik van (1)}$$

en (2), dan vindt men de formule voor $\text{div } \underline{a}$. We voeren dit niet uit.

In bolcoördinaten krijgen we

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{a} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta a_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta a_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r a_\varphi) \right\} = \\ &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} a_r + \frac{\cot \theta}{r} a_\theta; \end{aligned}$$

in cilindercoördinaten

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{a} &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} (r a_z) \right\} = \\ &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{1}{r} a_r. \end{aligned}$$

Door samenstelling van de formules voor gradiënt en divergentie krijgen we een formule voor Δ :

$$\Delta \alpha = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \alpha}{\partial w} \right) \right\}.$$

In bol- en cilindercoördinaten geeft dit al van vroeger bekende formules. Bolcoördinaten:

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \frac{\partial \alpha}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \right) \right\} = \\ &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}; \end{aligned}$$

cilindercoördinaten:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\alpha}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial\alpha}{\partial z} \right) \right\} = \\ &= \frac{\partial^2\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\alpha}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\alpha}{\partial r}.\end{aligned}$$

We merken ten slotte nog op, dat de regel dat men $\Delta\mathbf{a}$ voor een vectorveld \mathbf{a} kan verkrijgen door Δ op de afzonderlijke componenten van \mathbf{a} toe te passen, in kromlijnige orthogonale coördinaten niet meer opgaat. Men kan echter $\Delta\mathbf{a}$ uit de vorenstaande formules wel afleiden door gebruik te maken van de formule

$$\Delta\mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \text{rot rot } \mathbf{a}.$$

§.5 De scalaire potentiaal en de vectorpotentiaal.

A. Scalaire potentiaal.

In paragraaf 2 hebben we de volgende drie uitspraken betreffende een vectorveld \mathbf{a} met elkaar vergeleken.

1° Het veld heeft een potentiaal, d.w.z. $\mathbf{a} = \text{grad } \alpha$.

2° Het veld is conservatief, d.w.z. $\int_K (\mathbf{a}, \underline{t}) ds = 0$ voor iedere gesloten

kromme K in het veld.

3° Het veld is rotatievrij, d.w.z. $\text{rot } \mathbf{a} = \underline{0}$.

We hebben al afgeleid: uit 1° volgt 2° en uit 2° volgt 3°. Aan het voorbeeld van het magneetveld van de oneindig lange rechte stroomgeleider hebben we gezien, dat uit 3° niet 2° hoeft te volgen. We zullen nu aantonen dat 1° uit 2° volgt.

We nemen dus aan, dat $\int_K (\mathbf{a}, \underline{t}) ds = 0$ voor iedere gesloten kromme K in het veld. We nemen een vast punt \underline{p} in het veld aan; een willekeurig punt \underline{x} verbinden we door een binnen het veld verlopende kromme $K_{\underline{x}}$ met het punt \underline{p} . We denken ons deze kromme van \underline{p} naar \underline{x} doorlopen. De integraal $\int_{K_{\underline{x}}} (\mathbf{a}, \underline{t}) ds$ hangt echter alleen van \underline{x} en niet van de gekozen kromme af.

Nemen we nl. nog een tweede dergelijke kromme $K'_{\underline{x}}$ en lopen we langs $K_{\underline{x}}$ van \underline{p} naar \underline{x} en langs $K'_{\underline{x}}$ van \underline{x} naar \underline{p} terug, dan hebben we een gesloten kromme doorlopen, waarlangs de integraal nul is. De integralen over $K_{\underline{x}}$ en $K'_{\underline{x}}$ (beide van \underline{p} naar \underline{x} doorlopen) zijn dus gelijk. De uitkomst is dus een functie van \underline{x} :

$$\alpha(\underline{x}) = \int_{K_{\underline{x}}} (\mathbf{a}, \underline{t}) ds.$$

We zullen aantonen, dat $\alpha(\underline{x})$ de gezochte potentiaal is. We gaan daartoe $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ uitrekenen. Dit is $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ \alpha(x+h, y, z) - \alpha(x, y, z) \}$. We bepalen $\alpha(x, y, z)$ met een kromme $K_{\underline{x}}$; $\alpha(x+h, y, z)$ bepalen we met een kromme, die ontstaat door eerst $K_{\underline{x}}$ te doorlopen en vervolgens evenwijdig met de x-as van $\underline{x} = (x, y, z)$ naar $(x+h, y, z)$. In het verschil van de beide functiewaarden vallen de integralen over $K_{\underline{x}}$ tegen elkaar weg. Als we even aannemen dat $h > 0$, dan is langs de resterende integratieweg $\underline{t} = (1, 0, 0)$, dus

$$\frac{1}{h} \{ \alpha(x+h, y, z) - \alpha(x, y, z) \} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} a_1(\xi, y, z) d\xi.$$

Ook voor $h < 0$ is dit echter juist omdat dan weliswaar $\underline{t} = (-1, 0, 0)$ en dus a_1 van een minteken wordt voorzien, maar ook de integratiegrenzen moeten worden verwisseld. Als we nu h tot nul laten naderen zien we direct dat $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = a_1$. Analoog vinden we $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = a_2$, $\frac{\partial \alpha}{\partial z} = a_3$, dus $\text{grad } \alpha = \underline{a}$.

De potentiaal van een veld is op een additieve constante na bepaald. De keuze, die hierboven is gedaan, is dusdanig dat de potentiaal in \underline{p} nul is.

Hiermee hebben we dus gevonden, dat de beweringen 1° en 2° volledig equivalent zijn: uit 1° volgt 2° en uit 2° volgt 1°.

We beschouwen nu weer 3°. We hebben gezien, dat uit 3° niet 2° (en dus ook niet 1°) volgt. Uit de formule van Stokes volgt echter, dat, als 3° geldt, de integraal wel nul is voor die gesloten krommen K , die randkrommen zijn van een binnen het veld verlopend oppervlak. Als de meetkundige structuur van het gebied, waar het veld gedefinieerd is, dusdanig is, dat iedere gesloten kromme in dat gebied randkromme is van een oppervlak, dat binnen dat gebied verloopt, dan volgt uit 3° wel 2°. Een nader onderzoek van deze meetkundige structuur voeren we niet uit. We merken slechts op, dat het voor de gebieden, die door een bol of een kubus worden begrensd en ook voor de hele ruimte juist is.

Dit heeft ten gevolge, dat ook in een willekeurig gebied de zaak in orde is, als we ons tot een voldoende kleine omgeving van een punt \underline{p} beperken; m.a.w. als we een lokaal standpunt innemen. We formuleren dit voor de overgang van 3° op 1°: als een veld rotatievrij is, heeft het lokaal een potentiaal. D.w.z. bij ieder punt in het veld is er een omgeving, waar een potentiaal van het veld bestaat. Deze situatie is analoog met die, welke we bij het expliciet maken van impliciete functies hebben ontmoet.

Het bepalen van de potentiaal kunnen we in dit geval met dezelfde integraal doen, als we hierboven hebben gebruikt. We kunnen nu echter een speciale keuze voor de integratieweg maken. Om van (p_1, p_2, p_3) naar (x, y, z) te gaan, gaan we eerst evenwijdig met de x-as van (p_1, p_2, p_3) naar (x, p_2, p_3) , dan evenwijdig met de y-as van (x, p_2, p_3) naar (x, y, p_3) en tenslotte evenwijdig met de z-as van (x, y, p_3) naar (x, y, z) . Het spreekt vanzelf, dat we alleen zeker zijn dat dit lukt als (x, y, z) voldoende dicht bij (p_1, p_2, p_3) ligt, omdat we anders de

kans lopen, dat deze weg buiten het veld komt te liggen. De met deze weg corresponderende integraal schrijven we nu zonder moeite op:

$$(1) \quad \alpha(x, y, z) = \int_{p_1}^x a_1(\xi, p_2, p_3) d\xi + \int_{p_2}^y a_2(x, \eta, p_3) d\eta + \int_{p_3}^z a_3(x, y, \zeta) d\zeta.$$

We zullen nog even verifiëren, dat uit $\text{rot } \underline{a} = \underline{0}$ volgt, dat deze α een potentiaal van \underline{a} is.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= a_1(x, p_2, p_3) + \int_{p_2}^y \frac{\partial a_2(x, \eta, p_3)}{\partial x} d\eta + \int_{p_3}^z \frac{\partial a_3(x, y, \zeta)}{\partial x} d\zeta = \\ &= a_1(x, p_2, p_3) + \int_{p_2}^y \frac{\partial a_1(x, \eta, p_3)}{\partial \eta} d\eta + \int_{p_3}^z \frac{\partial a_1(x, y, \zeta)}{\partial \zeta} d\zeta = \\ &= a_1(x, p_2, p_3) + a_1(x, y, p_3) - a_1(x, p_2, p_3) + a_1(x, y, z) - a_1(x, y, p_3) = \\ &= a_1(x, y, z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= a_2(x, y, p_3) + \int_{p_3}^z \frac{\partial a_3(x, y, \zeta)}{\partial y} d\zeta = \\ &= a_2(x, y, p_3) + \int_{p_3}^z \frac{\partial a_2(x, y, \zeta)}{\partial \zeta} d\zeta = a_2(x, y, p_3) + a_2(x, y, z) - a_2(x, y, p_3) = \\ &= a_2(x, y, z), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = a_3(x, y, z).$$

Het gevonden resultaat is een tegenhanger van de formule $\text{rot grad } \alpha = \underline{0}$. Als namelijk $\text{rot } \underline{a} = \underline{0}$, dan bestaat, althans lokaal, een scalarveld α , waarvoor $\underline{a} = \text{grad } \alpha$. Zulk een α kan met de formule (1) worden gevonden.

Passen we bovenstaande formule toe op het veld $\underline{E} = \left(\frac{cx}{r^3}, \frac{cy}{r^3}, \frac{cz}{r^3} \right)$ van voorbeeld 5 in paragraaf 2, dan vinden we

$$= \int_{p_1}^x \frac{c \xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 + p_2^2 + p_3^2}^3} + \int_{p_2}^y \frac{c \eta d\eta}{\sqrt{x^2 + \eta^2 + p_3^2}^3} + \int_{p_3}^z \frac{c \zeta d\zeta}{\sqrt{x^2 + y^2 + \zeta^2}^3} =$$

$$= -\frac{c}{\sqrt{x^2+p_2^2+p_3^2}} + \frac{c}{\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}} - \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+p_3^2}} + \frac{c}{\sqrt{x^2+p_2^2+p_3^2}} +$$

$$- \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+p_3^2}} = -\frac{c}{r} + \frac{c}{\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}}.$$

Dit resultaat was te verwachten, omdat we al wisten, dat $-\frac{c}{r}$ een potentiaal is; deze is hier met een dusdanige constante vermeerderd, dat de potentiaal nul is in p .

We beschouwen nu het veld $\underline{H} = \left(\frac{-cy}{x^2+y^2}, \frac{cx}{x^2+y^2}, 0 \right)$ van voorbeeld 3 in paragraaf 2. We weten hier, dat er geen over het gehele veld gedefinieerde potentiaal bestaat. We bepalen nu de lokale oplossing met behulp van formule (1):

$$\alpha = \int_{p_1}^x \frac{-cp_2 d\xi}{\xi^2 + p_2^2} + \int_{p_2}^y \frac{cx d\eta}{x^2 + \eta^2} =$$

$$= -c \arctan \frac{x}{p_2} + c \arctan \frac{p_1}{p_2} + c \arctan \frac{y}{x} - c \arctan \frac{p_2}{x}.$$

Dit hangt niet van z af, evenmin als het gegeven veld \underline{H} . We laten daarom de derde component z maar helemaal weg en beschouwen het resultaat alleen in het (x,y) -vlak. Dan is het gegeven veld \underline{H} alleen in de oorsprong niet gedefinieerd. We kiezen $(p_1, p_2) = (0, 1)$, dan is

$$\alpha = -c \arctan x + c \arctan \frac{y}{x} - c \arctan \frac{1}{x}.$$

De integratieweg loopt van $(0, 1)$ evenwijdig met de x -as naar $(x, 1)$ en dan evenwijdig met de y -as naar (x, y) . Alleen als $x = 0$, $y \leq 0$ loopt deze weg door O . De punten van de negatieve y -as sluiten we dus uit. Als we dat doen, moet bovenstaande formule een nette uitkomst voor de potentiaal geven. In de gevonden formule komt x in de noemer voor; er zijn dus moeilijkheden te verwachten als $x = 0$. Neemt men echter $y > 0$ dan hebben $\frac{y}{x}$ en $\frac{1}{x}$ hetzelfde teken, dus $\lim_{x \rightarrow 0} (c \arctan \frac{y}{x} - c \arctan \frac{1}{x}) = 0$, omdat $\arctan \frac{y}{x}$ en $\arctan \frac{1}{x}$ beide naar $\frac{1}{2}\pi$ of beide naar $-\frac{1}{2}\pi$ convergeren, naar gelang x van de positieve of de negatieve kant naar nul gaat. Voor $y < 0$ loopt dit niet zo mooi. Nemen we $x \downarrow 0$ dan geldt blijkbaar $\alpha \rightarrow -\pi c$; voor $x \uparrow 0$ vinden we $\alpha \rightarrow \pi c$. Bij het passeren van de negatieve y -as van links naar rechts maakt α een sprong van $-2\pi c$. Dit klopt nu echter precies met het in voorbeeld 3 van paragraaf 2 gevonden resultaat, dat bij het eenmaal tegen de wijzers van het uurwerk doorlopen van de eenheidscirkel $\int_K (\underline{H}, \underline{t}) ds = 2\pi c$. Begint men deze nu bij $(0, -1)$ te doorlopen dan is de potentiaal bij terugkeer in dit punt met $2\pi c$ toegenomen en springt dus bij overschrijden van de negatieve y -as met een bedrag $-2\pi c$.

B. Vectorpotentiaal.

We gaan nu over naar de vectorpotentiaal. In paragraaf 2 hebben we de volgende drie uitspraken betreffende een vectorveld \underline{a} met elkaar vergeleken.

- 1° Het veld heeft een vectorpotentiaal, d.w.z. $\underline{a} = \text{rot } \underline{b}$.
- 2° Het veld is bronvrij, d.w.z. $\int_S (\underline{a}, \underline{n}) d\sigma = 0$ voor ieder gesloten oppervlak S in het veld.
- 3° Het veld is divergentievrij, d.w.z. $\text{div } \underline{a} = 0$.

We hebben al afgeleid: uit 1° volgt 2° en uit 2° volgt 3°. Aan het voorbeeld van het elektrische veld van een puntlading hebben we gezien, dat uit 3° niet 2° hoeft te volgen. Het is nu zo, dat 1° uit 2° volgt. We bewijzen dit hier niet. Er volgt uit, dat 1° en 2° volledig equivalent zijn: uit 1° volgt 2° en uit 2° volgt 1°.

We hebben gezien, dat uit 3° niet 2° (en dus ook niet 1°) volgt. Uit de formule van Gauss volgt echter, dat, als 3° geldt, de integraal wel nul is voor die gesloten oppervlakken S , waarvan het omsloten gebied geheel binnen het veld ligt. Als de meetkundige structuur van het gebied, waar het veld gedefinieerd is, dusdanig is, dat bij ieder gesloten oppervlak binnen het veld het door dit oppervlak omsloten gebied ook binnen het veld ligt, dan volgt uit 3° wel 2°. We zullen dit niet nader onderzoeken; we merken slechts op, dat het voor de binnengebieden van een bol of een kubus en ook voor de hele ruimte juist is.

Dit heeft ten gevolge, dat de zaak ook in een willekeurig gebied in orde is, als we weer een lokaal standpunt innemen. Als een veld divergentievrij is, heeft het lokaal een vectorpotentiaal. We zullen dit nu expliciet narekenen.

Een vectorpotentiaal van een veld \underline{a} is door \underline{a} nog niet vastgelegd. Stel $\text{rot } \underline{b} = \underline{a}$ en $\text{rot } \underline{c} = \underline{a}$, dan is $\text{rot } (\underline{c} - \underline{b}) = \underline{0}$. Hieruit volgt, dat we bij een vectorpotentiaal altijd nog een rotatievrij veld (dat is lokaal iets van de vorm $\text{grad } \alpha$) kunnen optellen. Hiervan kunnen we gebruik maken om te eisen, dat voor een \underline{b} met $\text{rot } \underline{b} = \underline{a}$ de derde component $b_3 = 0$.

Gegeven is dus een veld \underline{a} met $\text{div } \underline{a} = 0$. Gezocht \underline{b} met $\text{rot } \underline{b} = \underline{a}$, dus expliciet uitgeschreven

$$\frac{\partial b_3}{\partial y} - \frac{\partial b_2}{\partial z} = a_1, \quad \frac{\partial b_1}{\partial z} - \frac{\partial b_3}{\partial x} = a_2, \quad \frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y} = a_3.$$

Stellen we $b_3 = 0$, dan wordt dit

$$-\frac{\partial b_2}{\partial z} = a_1, \quad \frac{\partial b_1}{\partial z} = a_2, \quad \frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y} = a_3.$$

We beschouwen oplossingen in een omgeving van een punt p . De eerste twee vergelijkingen leveren door rechtstreekse integratie

$$b_2 = - \int_{p_3}^z a_1(x, y, \zeta) d\zeta + \phi(x, y).$$

$$b_1 = \int_{p_3}^z a_2(x, y, \zeta) d\zeta + \psi(x, y),$$

met willekeurige functies φ en ψ , die echter niet van z afhangen. We stellen nu ook nog $\varphi = 0$. De gevonden uitdrukkingen voor b_1 en b_2 substitueren we in de derde vergelijking:

$$- \int_{p_3}^z \frac{\partial a_1(x, y, \zeta)}{\partial x} d\zeta - \int_{p_3}^z \frac{\partial a_2(x, y, \zeta)}{\partial y} d\zeta - \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = a_3(x, y, z).$$

Gebruik makend van $\text{div } \underline{a} = 0$ kunnen we de eerste twee termen hiervan samen vervangen door

$$\int_{R_3}^z \frac{\partial a_3(x, y, \zeta)}{\partial \zeta} d\zeta = a_3(x, y, z) - a_3(x, y, p_3),$$

zodat de volgende vergelijking voor ψ overblijft:

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = - a_3(x, y, p_3),$$

met als één particuliere oplossing $\psi(x, y) = - \int_{p_2}^y a_3(x, \eta, p_3) d\eta$.

We vinden dus

$$(2) \quad \begin{cases} b_1 = - \int_{p_2}^y a_3(x, \eta, p_3) d\eta + \int_{p_3}^z a_2(x, y, \zeta) d\zeta \\ b_2 = - \int_{p_3}^z a_1(x, y, \zeta) d\zeta \\ b_3 = 0. \end{cases}$$

Het is makkelijk te verifiëren, dat dit inderdaad voldoet aan $\text{rot } \underline{b} = \underline{a}$.

De formule is alleen bruikbaar voor die punten, waarvoor het lijnstuk evenwijdig met de y -as van (x, p_2, p_3) tot (x, y, p_3) en het lijnstuk evenwijdig met de z -as van (x, y, p_3) tot (x, y, z) geheel binnen het veld liggen.

Het gevonden resultaat is een tegenhanger van de formule $\text{div rot } \underline{b} = 0$. Als namelijk $\text{div } \underline{a} = 0$, dan bestaat, althans lokaal, een vectorveld \underline{b} , waarvoor $\underline{a} = \text{rot } \underline{b}$. Zulk een \underline{b} kan met formule (2) worden gevonden.

We passen de formule toe op het veld $\underline{H} = \left(\frac{-cy}{x^2+y^2}, \frac{cx}{x^2+y^2}, 0 \right)$.

We vinden dan:

$$b_1 = \int_{p_3}^z \frac{cx}{x^2+y^2} d\zeta = \frac{cx(z - p_3)}{x^2+y^2}$$

$$b_2 = - \int_{p_3}^z \frac{-cy}{x^2+y^2} d\zeta = \frac{cy(z - p_3)}{x^2+y^2}$$

$$b_3 = 0.$$

Dit veld is, behalve op de z-as, overal gedefinieerd. Dit klopt met het al vroeger geconstateerde feit, dat het veld \underline{H} bronvrij is.

Ten slotte nog het geval $\underline{E} = \left(\frac{cx}{r^3}, \frac{cy}{r^3}, \frac{cz}{r^3} \right)$. We weten al, dat er geen in het hele veld gedefinieerde vectorpotentiaal kan bestaan. Lokaal kunnen we het met (2) uitrekenen. Als we bedenken dat

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}} = \frac{t}{a^2 \sqrt{t^2+a^2}} + C,$$

dan vinden we, als we $p_2 = p_3 = 0$ nemen

$$b_1 = \frac{cyz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad b_2 = \frac{-cxz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad b_3 = 0.$$

Dit veld is niet gedefinieerd op de z-as, terwijl het oorspronkelijke veld \underline{E} alleen in de oorsprong niet gedefinieerd was. Door $p_3 \neq 0$ te nemen, worden de formules wat ingewikkelder, maar men kan dan nog de helft van de z-as erbij krijgen.

B.v. bij de keuze $p_3 = 1$ vindt men, dat het veld \underline{b} nog continu is op de positieve z-as, maar op de negatieve z-as niet gedefinieerd is.

Jan de Graaf.

ONDERAFDELING WISKUNDE

AANVULLING DICTAAT

W I S K U N D E I V

voorjaar 1964

T e c h n i s c h e H o g e s c h o o l E i n d h o v e n

HOOFDSTUK VI WAARSCHIJNLIJKHEIDSREKENING§.1 Inleiding. Kansrekening en statistiek

De mathematische statistiek houdt zich bezig met het systematisch behandelen van regelmatigigheden die optreden bij gebeurtenissen waarvan de uitslag onzeker is. In de statistiek wordt gebruik gemaakt van stellingen en begrippen uit de waarschijnlijkheidsrekening = kansrekening. Deze worden in dit hoofdstuk behandeld. Over statistiek worden slechts enkele opmerkingen gemaakt terwijl voor een uitgebreide behandeling wordt verwezen naar het college "Toegepaste Statistiek" van Prof.dr. H.C.Hamaker. In (1.3) wordt het verschil tussen de twee vakken duidelijk gemaakt

1.1 Het begrip populatie

We beschouwen een verzameling van 60 hardpapieren schijffjes, waarvan de dikte op 0.01 mm nauwkeurig is bepaald. De schijffjes zijn niet alle even dik; de aantallen met een bepaalde dikte zijn in Tabel 1.1.1 gegeven.

Tabel 1.1.1

Aantal schijffjes met voorgeschreven dikte in een partij van 60 stuks

Klasse i	Dikte in mm x_i	Aantal of frequentie n_i	Fractie $p_i = n_i/N$	Percentage $p = 100 n_i/N \%$
1	3.01	1	0.0167	1.67
2	.02	3	0.0500	5.00
3	.03	7	0.1167	11.67
4	.04	7	0.1167	11.67
5	.05	8	0.1333	13.33
6	.06	7	0.1167	11.67
7	.07	10	0.1667	16.67
8	.08	8	0.1333	13.33
9	.09	4	0.0667	6.67
10	.10	3	0.0500	5.00
11	.11	2	0.0333	3.33
Totaal N=60			1.0001	100.01
Gemiddelde = $\mu = 3.060$ mm.				

Een dergelijke verzameling noemen we een populatie, de schijfjes zelf de elementen van deze populatie. De dikte van de schijfjes is een kenmerk van de elementen. Soms vatten we een specifieke dikte, bv. 3.05 mm, als kenmerk op. In andere gevallen beschouwen we de dikte als algemeen kenmerk; de elementen van de in Tabel 1.1.1 gegeven populatie zijn dan naar dit kenmerk ingedeeld in 11 klassen.

Het aantal elementen met een bepaald kenmerk of in een bepaalde klasse heet de frequentie n en het totaal aantal elementen N heet de omvang van de populatie. Het quotiënt $p = n/N$ is de fractie en $p = 100 n/N$ is het percentage van de populatie met een bepaald kenmerk of tot een bepaalde klasse behorend. Fracties en percentages geven dezelfde grootte weer en men gebruikt voor beide hetzelfde symbool p . Doorgaans is uit tekst en formules voldoende duidelijk welke van beide wordt bedoeld. Statistische formules zijn meestal gebaseerd op fracties; in de industriële praktijk rekent men daarentegen bij voorkeur met percentages.

1.2 Het statistische experiment

We voeren nu een experiment uit, waarbij we de elementen van de populatie van Tabel 1.1.1 eerst grondig dooreen schudden en daarna willekeurig één element uit de populatie trekken. De dikte van het getrokken element noemen we de uitkomst van het experiment, of de waarneming.

De uitkomst van zo'n experiment ligt natuurlijk van te voren niet vast; zij kan iedere waarde tussen 3.01 en 3.11 mm aannemen. De werkelijke uitkomst wordt door toevallige omstandigheden bepaald. Daarom noemen we de uitkomst van ons experiment een toevalsvariabele of stochastische variabele, x , hetgeen we aanduiden door onderstrepen van het desbetreffende symbool.

Uit Tabel 1.1.1 besluiten we dan, dat de kans dat de uitkomst x de waarde 3.07 zal hebben gelijk is aan 10/60. We schrijven dit

$$P(\underline{x} = 3.07 \text{ mm}) = \frac{10}{60} = 0.1667. \quad (1.1.1)$$

Het symbool P stamt van het engelse "Probability".

Evenzo geldt

$$P(\underline{x} \leq 3.07 \text{ mm}) = \frac{43}{60} = 0.717, \quad (1.1.2)$$

want er zijn 43 elementen waarvoor de dikte kleiner is dan of gelijk aan 3.07 mm.

Een definitie van het kansbegrip is in deze gevallen niet moeilijk:

$$\boxed{\text{de kans} = \frac{\text{het aantal gunstige elementen}}{\text{het totaal aantal elementen}}} \quad (1.1.3)$$

Onder gunstige elementen verstaan we die elementen die aan de gestelde eis, $\underline{x} = 3.07$ resp. $\underline{x} \leq 3.07$ mm, voldoen.

Zoals gezegd geeft het onderstreepte symbool \underline{x} een toevalsvariabele; het niet onderstreepte symbool x gebruiken we voor een bepaalde waarde, die deze variabele kan aannemen. Dan is bv.

$$P(\underline{x} = x) \text{ of ook } P(x) \quad (1.1.4)$$

de kans dat \underline{x} de waarde x zal aannemen. (Daar in dit hoofdstuk niet over vectoren zal worden gesproken is er geen bezwaar tegen de onderstrepingsgewoonte van de nederlandse statistici over te nemen.)

De definitie (1.1.3) gaat uit van de onderstelling dat alle elementen in de populatie een gelijke kans bezitten het getrokken element te zijn. Men noemt de trekking dan een aselecte trekking. Wat we hier onder gelijke kansen verstaan zullen we niet nader definiëren; we nemen aan dat dit intuïtief duidelijk is en dat we in bepaalde gevallen weten dat aan deze eis is voldaan. Dit houdt bv. in dat alle elementen nagenoeg gelijk van vorm en gewicht moeten zijn en dat de kleine verschillen in dikte geen invloed hebben op het resultaat van een trekking.

We gaan nu het experiment enige malen herhalen, waarbij we telkens voor iedere volgende trekking het te voren getrokken element weer bij de populatie voegen en deze opnieuw grondig schudden; we voeren dus een serie aselecte trekkingen uit met teruglegging. Het resultaat ziet er bv. als volgt uit:

Tabel 1.2.2

2 series van 10 aselecte trekkingen met teruglegging uit de populatie van Tabel 1.1.1.

x_1	3.04	x_{11}	3.06
x_2	3.08	x_{12}	3.09
x_3	3.11	x_{13}	3.04
x_4	3.05	x_{14}	3.11
x_5	3.07	x_{15}	3.07
x_6	3.07	x_{16}	3.10
x_7	3.09	x_{17}	3.04
x_8	3.05	x_{18}	3.09
x_9	3.05	x_{19}	3.07
x_{10}	3.06	x_{20}	3.11
\bar{x}	= 3.067	\bar{x}	= 3.078

Een dergelijke serie heet een aselecte steekproef met teruglegging getrokken uit de gegeven populatie. Het toevallige karakter van de waarnemingsuitkomsten komt in deze gegevens duidelijk tot uitdrukking; de uitkomsten variëren van waarneming tot waarneming en de eerste steekproef verschilt van de tweede.

1.3 Kansrekening en statistiek

Kansrekening en statistiek zijn nu takken van wetenschap, die zich bezighouden met het verband tussen populaties en daaruit getrokken steekproeven. Beschouwen we bv. de gemiddelde dikte, dan vinden we voor de gehele door Tabel 1.1.1 gedefinieerde populatie een

$$\text{populatiegemiddelde} = \mu = 3.060 \text{ mm};$$

uit de beide steekproeven van Tabel 1.2.2 vinden we de

$$\text{steekproefgemiddelden} = \bar{x} = 3.067 \text{ resp. } 3.078 \text{ mm.}$$

Voor de populatiegemiddelden is de griekse letter μ een gebruikelijk symbool. Steekproefgemiddelden geeft men algemeen aan door een horizontale streep boven het symbool dat de waarnemingen weergeeft.

De steekproefgemiddelden verschillen onderling en wijken beide af van het populatiegemiddelde. De samenstelling van de steekproef wordt door de speling van het toeval bepaald en dientengevolge treden in de steekproefgemiddelden toevallige fluctuaties op. Men kan echter verwachten dat deze fluctuaties binnen bepaalde grenzen zullen blijven en dat de steekproefgemiddelden in de regel des te minder zullen afwijken van het populatiegemiddelde naarmate de steekproef meer waarnemingen omvat.

De kansrekening houdt zich dan bezig met de vraag hoe de steekproeven zich zullen gedragen, wanneer de populatie gegeven is. Men onderstelt dus Tabel 1.1.1 is bekend en vraagt zich af welke fluctuaties dan in de steekproefgemiddelden van Tabel 1.2.2 kunnen optreden en hoe die van de steekproefgrootte afhangen.

In de statistiek staat men voor het omgekeerde probleem namelijk dat een steekproef bekend is, doch de populatie onbekend. De steekproef geeft dan wel een zeker beeld van die onbekende populatie en het hoofdprobleem van de statistiek is welke conclusies men uit een steekproef kan trekken ten aanzien van de populatie waaruit zij is voortgekomen. Men onderstelt dus bv. de eerste steekproef uit Tabel 1.2.2 gegeven en Tabel 1.1.1 onbekend. Het is duidelijk dat het populatiegemiddelde μ in de buurt moet liggen van het steekproefgemiddelde $\bar{x} = 3.067$ mm. Welke uitspraak kunnen we dan met betrekking tot μ doen op grond van de gegeven steekproef. In principe hetzelfde probleem kan zich in tal van verschillende vormen voordoen.

Dat de statistische gedachtengang bij de interpretatie van waarnemingen een belangrijke rol speelt is goed te begrijpen. Want vele waarnemingen vertonen bij herhaling van het experiment dergelijke fluctuaties als die in Tabel 1.2.2. De waarnemingen gedragen zich alsof zij door aselecte trekkingen uit een populatie zijn ontstaan, ook in gevallen waar het niet mogelijk is die populatie concreet aan

te geven. Dit heeft geleid tot de thans algemeen aanvaarde onderstelling, dat zulke waarnemingsreeksen inderdaad als aselechte steekproef uit een populatie mogen worden opgevat en dat het in wezen de karakteristieke kenmerken van deze populatie zijn die we wensen te kennen. Dit is het model dat we bij de interpretatie van waarnemingsreeksen zullen toepassen.

Hier volgt een eenvoudig en illustratief voorbeeld. Bij het tossen met een geldstuk wordt altijd waargenomen dat de kansen op een uitkomst "Kruis" of "Munt" beide $\frac{1}{2}$ bedragen. D.w.z. we stellen het tossen met een munt gelijk aan aselechte trekkingen uit een populatie, waarvan de helft der elementen met "Kruis" en de andere helft met "Munt" is gemerkt. Een serie van 20 worpen geeft bv.:

K K M M M K M K K M M M K M K K K K M K , (1.3.1)

waarbij Kruis 11x en Munt 9x is waargenomen.

Zetten we echter een gulden op een horizontaal vlak te tolleren en nemen we waar of "Kruis" of "Munt" boven ligt wanneer zij is uitgetold dan vinden we reeksen als de volgende:

M M M M M M M M M M M M K M M M M K M M . (1.3.2)

Nu is Kruis slechts 2x, Munt 18x voorgekomen.

In eerste aanleg zal men geneigd zijn te denken dat ook bij tolleren de kansen op kruis en munt gelijk zullen zijn, doch het resultaat (1.3.2) doet ons twijfelen. Wel kan dit model bij hoge uitzondering een dergelijke serie voortbrengen. Maar het vermoeden is gerechtvaardigd dat bij het tolleren een ander model behoort nl. één met veel groter kans op "Munt" dan op "Kruis". We mogen dan veronderstellen dat onze waarnemingsreeks gelijkwaardig is met een serie aselechte trekkingen uit dit model. We beschikken echter niet over mechanische beschouwingen, waaruit a priori kan worden afgeleid hoe groot die kansen dan wel zijn. We kunnen deze alleen indirect door waarneming bepalen. In de reeks (1.3.2) is "Kruis" in 2 van de 20 gevallen waargenomen en de kans op deze uitkomst zal dus wel in de buurt van de waarde $P(K) = 0.10$ liggen. Op de vraag welke conclusie de reeks (1.3.2) ten aanzien van $P(K)$ toelaat geeft de statistische theorie een antwoord.

1.4 Enige aanvullende opmerkingen

De steekproeven uit Tabel 1.2.2 werden getrokken met teruglegging. In vele praktische gevallen trekt men de steekproef zonder teruglegging bv. bij keuren van een partij producten op grond van een steekproef. Tussen beide methoden van steekproeftrekken bestaat een belangrijk verschil. Trekt men uit de populatie van Tabel 1.1.1 elementen zonder teruglegging en heeft het eerste element een dikte 3.01 mm, dan kan geen van de volgende elementen deze zelfde dikte bezitten, want er komt slechts één element met deze waarde voor.

Algemeen zal bij trekken zonder teruglegging de populatie veranderen, omdat steeds meer elementen aan de populatie worden onttrokken. Ook kan

de steekproef nooit groter zijn dan de populatie zelf. De omvang van de populatie N is mede bepalend voor het resultaat. Bij trekken met teruglegging daarentegen blijft de populatie steeds hetzelfde. De steekproef kan elk willekeurig aantal elementen bevatten en de omvang van de populatie speelt geen rol. Wanneer men de populatie van Tabel 1.1.1 verdubbelt door alle frequenties met 2 te vermenigvuldigen, zal dit op het resultaat van trekkingen met teruglegging geen enkele invloed hebben. Alleen de fracties in kolom 3, of de kansen op de verschillende uitkomsten, zijn nu bepalend. Men kan dit ook zó uitdrukken, dat aselekt trekken met teruglegging gelijkwaardig is met trekking zonder teruglegging uit een oneindige populatie.

We wijzen er verder nog op, dat kansen geen karakteristieke kenmerken zijn van de in Tabel 1.1.1 gegeven populatie. We hebben deze populatie alleen gebruikt om de kansen op eenvoudige wijze te definiëren. De kansen zelf echter hebben uitsluitend betrekking op de waarneming, die men verkrijgt door aselechte trekkingen met teruglegging uit de gegeven populatie; dus op waarnemingsreeksen als die van Tabel 1.2.2. Dit zijn dus steeds reeksen waarnemingen die in principe onbeperkt kunnen worden voortgezet.

Het heeft ook zin de kansrekening als hier beschouwd de "objectieve" kansrekening te noemen, in tegenstelling tot een "subjectieve" kansrekening, die persoonlijke karakterverschillen tussen mensen mede in rekening brengt. De vraag bv. hoe groot is de kans dat het morgen mooi weer zal zijn, of hoe groot is de kans dat een boodschappendoende vrouw met een nieuwe hoed thuis zal komen, hangt van een subjectieve instelling af. De pessimist heeft een andere kanswaardering dan de optimist. Men heeft getracht ook deze subjectieve kansen in een wiskundig geformuleerde kansrekening te vangen. Dit heeft zin, omdat ons menselijk handelen sterk door dergelijke subjectieve kanswaarderingen wordt bepaald. Van onze beschouwingen sluiten wij deze subjectieve kansrekening echter nadrukkelijk uit.

§.2 Permutaties, variaties, combinaties

2.1 De functie $n!$

We herinneren aan de definitie van $n!$:

$$0! = 1! = 1 \quad \text{en} \quad n! = n.(n-1)! \quad \text{voor } n > 1 \quad (2.1.1)$$

De waarde van $n!$ of $\log n!$ voor $n \leq 1000$ kan men in verschillende tabellen vinden (bijv. A.Hald, Statistical Tables and Formulas.) Een benadering van $n!$ is gegeven door Stirling:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}} = 1 \quad (2.1.2)$$

(N.B. bedenk dat het verschil van teller en noemer in 2.1.2) groot kan zijn).

Ook voor kleine waarden van n geeft (2.1.2) een redelijke benadering zoals uit onderstaande tabel blijft

Tabel 2.1.1

$n!$ exact en volgens de formule van Stirling.

$n =$	$n!$	Stirling
5	120	118.02
10	3.6288×10^5	3.5988×10^5
20	2.4329×10^{18}	2.4228×10^{18}

2.2 Permutaties, variaties, combinaties

Het aantal Permutaties = $n!$

n verschillende objecten kunnen op $n!$ manieren op een rij worden gerangschikt. Dit heet het aantal permutaties.

Het aantal Variaties van r uit $n = \frac{n!}{(n-r)!}$ (2.2.1)

Kiezen we uit n verschillende objecten er r uit en plaatsen deze op een rij dan kan dit op

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (2.2.2)$$

verschillende manieren geschieden. Dit heet het aantal variaties van r uit n .

Het aantal Combinaties van r uit $n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

In (2.2.2) is de volgorde van belang. Voor iedere groep van r elementen zijn de $r!$ mogelijke volgorden alle meegeteld. Zijn we alleen in de samenstelling van de groep maar niet in de volgorde geïnteresseerd, dan tellen we het aantal combinaties van r uit n objecten. Dit aantal wordt gevonden door (2.2.2) door $r!$ te delen;

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (2.2.3)$$

Het aantal combinaties $\binom{n}{r}$ is het aantal manieren, waarop men uit n objecten een groep van r objecten kan samenstellen.

Of ook: het aantal combinaties $\binom{n}{r}$ is het aantal manieren, waarop men r elementen A en $(n-r)$ elementen B op een rij kan rangschikken.

Beschouwen we bv. de elementen a, b, c, d, dan kunnen we hieruit op $\binom{4}{2} = 6$ manieren een groep van twee vormen; te weten

ab, ac, ad, bc, bd en cd.

Of alternatief: de letters AABB kunnen op $\binom{4}{2} = 6$ manieren op een rij worden gerangschikt:

AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA.

Uit (2.2.3) volgt onmiddellijk

$$\boxed{\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}}, \quad (2.2.4)$$

een belangrijke eigenschap.

De grootheden $\binom{n}{r}$ heten ook binomiaal coëfficiënten, omdat zij de coëfficiënten zijn van de successieve termen in het binomium van Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n. \quad (2.2.5)$$

Hieruit kunnen op eenvoudige wijze vele algemene relaties tussen binomiaal coëfficiënten worden afgeleid. Bijvoorbeeld:

$$a = 1, b = 1, \text{ geeft: } \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad (2.2.6)$$

$$a = 1, b = -1, \text{ geeft: } \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0. \quad (2.2.7)$$

Schrijven we

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1},$$

dan vinden we door de coëfficiënt van $a^r b^{n-r}$ aan beide zijden gelijk te stellen

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}, \quad \text{Pascal} \quad (2.2.8)$$

hetgeen ook rechtstreeks kan worden bewezen. Hierop berust de bekende driehoek van Pascal voor de successieve berekening van de binomiaal coëfficiënten.

De driehoek van Pascal

$n = 0$									1				
$n = 1$								1	1				
$n = 2$								1	2	1			
$n = 3$								1	3	3	1		
$n = 4$								1	4	6	4	1	
$n = 5$								1	5	10	10	5	1

Vraagstukken

- 2.2.1 De letters ABBBB kunnen op $\binom{5}{2} = 10$ manieren worden gerangschikt. Schrijf deze 10 rangschikkingen volledig uit.
- 2.2.2 Bereken $\binom{7}{0}$, $\binom{7}{1}$, $\binom{7}{2}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{10}{5}$, $\binom{52}{2}$. $1 - 7 - 21 - 35 - 252 - 1326$
- 2.2.3 Ga na dat $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$ (Hierdoor kan men $n!$ ook voor niet-gehele positieve n definiëren.)
- 2.2.4 Hoeveel combinaties van 3 letters kan men vormen uit de letters van de woorden
- paard, 7
 - aantal, 8
 - evenaar, 10
 - telefoon, 30

2.2.5 Bewijs:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-2}{r} + 2\binom{n-2}{r-1} + \binom{n-2}{r-2}, \quad 2 \times \text{Pascal}$$

2.2.6 Bewijs:

$$\sum_{r=0}^n r \binom{n}{r} = n 2^{n-1}, \quad \text{en} \quad \sum_{r=0}^n r(r-1) \binom{n}{r} = n(n-1) 2^{n-2}.$$

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r$$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

Subst $x=1$

2.2.7 Bewijs:

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \binom{n}{n} \binom{n}{0} + \binom{n}{n-1} \binom{n}{1} + \binom{n}{n-2} \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{0} \binom{n}{n} \\ &= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2. \end{aligned}$$

2.2.8 Ga na dat $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$ de reeksontwikkeling van $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ is.

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) =$$

2.2.9 Bewijs:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{2n}{n} \sqrt{\pi n} / 2^{2n} = 1.$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2n-1) 2^n}{2 \cdot 4 \dots (2n-2) 2^n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

2.3 Een generalisatie; de multinomiaal coëfficiënten

Gegeven n_1, n_2, \dots, n_k zijn k positieve gehele getallen en

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n,$$

dan is

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (2.3.1)$$

het aantal manieren, waarop n_1 objecten A_1, n_2 objecten A_2, \dots, n_k

objecten A_k op een rij kunnen worden gerangschikt

*Het alternatief, zie
links onderaan*

Men kan bv. de letters van het woord "negen" op

$$\frac{5!}{2!2!1!} = 30$$

verschillende manieren achter elkaar zetten. We kunnen de grootheden (2.3.1) de multinomiaal coëfficiënten noemen. Het zijn de coëfficiënten van de term

$$a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k} \quad a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$$

in de ontwikkeling van het gedurig produkt

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n.$$

Men kan de formule (2.3.1) ook als volgt schrijven

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k}. \quad (2.3.2)$$

D.w.z. we kiezen uit n objecten eerst een niet gerangschikte groep van n_1 , dan uit de resterende $(n-n_1)$ objecten een niet gerangschikte groep van n_2 , enz. Bij de toepassingen van formule (2.3.1) moet men er echter goed om denken, dat zij permutaties van gelijktallige groepen onderling meetelt. Uit de letters ABCD kan men bv. volgens (2.3.1) op

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

manieren 2 groepen van 2 kiezen, te weten

$$AB - CD, AC - BD, AD - BC, BC - AD, BD - AC, CD - AB.$$

Hierbij worden formaties als $AB - CD$ en $CD - AB$ afzonderlijk geteld.

Vragen we naar het aantal manieren, waarop n objecten in een aantal groepen met resp. n_1, n_2, \dots, n_k objecten kunnen worden verdeeld, dan moeten permutaties van gelijkvallige groepen niet apart worden meegeteld en behoeft formule (2.3.1) een correctie.

Gegeven: a_1, a_2, \dots, a_k en n_1, n_2, \dots, n_k (verschillend) zijn positieve gehele getallen en

$$a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k = n,$$

dan is

$$\frac{n!}{(n_1!)^{a_1} (n_2!)^{a_2} \dots (n_k!)^{a_k}} \times \frac{1}{a_1! a_2! \dots a_k!} \quad (2.3.3)$$

het aantal manieren, waarop we n objecten kunnen splitsen in a_1 groepen van n_1 , a_2 van n_2, \dots, a_k van n_k objecten

De letters ABCD kan men op

$$\frac{4!}{(2!)^2} \times \frac{1}{2!} = 3$$

manieren in twee groepen van 2 verdelen:

$$AB - CD, AC - BD, AD - BC.$$

Het spel van 52 kaarten kan op

$$\frac{52!}{(13!)^4} \times \frac{1}{4!}$$

manieren in 4 groepen van 13 kaarten worden verdeeld en op

$$\frac{52!}{(13!)^4}$$

manieren onder 4 bridgespelers worden verdeeld. Deze laatste formule sluit dus de permutaties van de 4 groepen van 13 kaarten over de 4 spelers in.

Vraagstuk

2.3.1 Op hoeveel manieren kan men de letters van de volgende woorden rangschikken?

a) paard, d) $\frac{5!}{2!1!1!1!} = 60$ b) $\frac{6!}{3!1!1!1!} = 120$
 b) aantal, c) $\frac{8!}{2!2!} = 10080$ d) $\frac{9!}{3!2!2!}$
 c) telefoon,
 d) kenmerken.

2.3.2 Op hoeveel manieren kan men de volgende groeperingen vormen:

- | | | |
|----|---|------|
| a) | van 5 objecten in 1 groep van 2 en 3 van 1, | 10 |
| b) | " 6 " " 1 " " 3 " 3 " 1, | 20 |
| c) | " 8 " " 2 groepen " 2 " 4 " 1, | 210 |
| d) | " 9 " " 1 groep van 3, 2 van 2 en 2 van 1. | 3780 |
| d) | $\frac{9!}{3!(2!)^2(1!)^2 \cdot 1!2!2!}$ | |

In leerboeken over waarschijnlijkheidsrekening treft men wel de formule (2.3.1) aan, maar nooit (2.3.3), terwijl onvoldoende wordt uiteengezet dat (2.3.1) de permutaties van gelijkvallige groepen alle meetelt. Bij de toepassing in de kansrekening geeft dit tot fouten aanleiding, redenen waarom we hier het essentiële verschil tussen beide formules uitvoerig hebben besproken.

2.4 Het aantal combinaties met herhalingen

Onder het aantal combinaties met herhalingen van r uit n elementen verstaat men het aantal groepen van r ongerangschikte elementen, die men uit n elementen kan vormen wanneer deze meer dan eens mogen voorkomen.

Uit de 3 elementen a, b, c kan men bv. 6 combinaties van 2 elementen met herhalingen vormen, nl.

$$aa, bb, cc, ab, ac, bc. \quad (2.4.1)$$

Een alternatieve definitie luidt: Het aantal combinaties van r uit n elementen met herhalingen is het aantal manieren, waarop men r niet onderscheidbare objecten over n onderscheidbare cellen kan verdelen.

Het aantal combinaties van r uit n elementen met herhalingen bedraagt

$$\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} \quad (2.4.2)$$

Het bewijs is als volgt. Denken we ons de n cellen op een rij gerangschikt, dan worden zij gescheiden door $(n-1)$ tussenschotten. Een verdeling van r objecten over de cellen komt dan overeen met een rangschikking van de r objecten en de $(n-1)$ tussenschotten op een rij. Er zijn

$$\frac{(n-1+r)!}{(n-1)!r!} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

rangschikkingen mogelijk.

Men lette er goed op, dat in de tweede definitie de n cellen onderscheidbaar zijn. In de groepering (2.4.1) tellen de configuraties waarbij de 2 objecten in cel a , cel b , of cel c zitten alle drie mee. Laat men de onderscheidbaarheid van de cellen vervallen, dan laat het probleem geen eenvoudige oplossing toe.

We merken verder nog op, dat het aantal combinaties met herhalingen gelijk is aan de coëfficiënten van x^r in de reeksontwikkeling van $(1 - x)^{-n}$.

Voorbeelden

A. Wanneer we tussen de dobbelstenen geen onderscheid maken zijn bij een worp met 2 stenen

$$\binom{6+2-1}{2} = 21$$

verschillende worpen mogelijk.

B. Een functie van 3 variabelen bezit

$$\binom{3+3-1}{3} = 10$$

partiële differentiaalquotiënten van de 3de orde.

Vraagstukken

- 2.4.1 Welke zijn de 21 worpen met 2 dobbelstenen van voorbeeld A? 21
- 2.4.2 Hoeveel verschillende worpen zijn mogelijk met 3 dobbelstenen, wanneer men deze niet van elkaar onderscheidt? 56
- 2.4.3 Hoeveel termen heeft een homogene vergelijking van de m-de graad in k variabelen? Verifiëer een uitkomst voor $m = 2, k = 2, 3$. $\binom{m+k-1}{k+m}$
- 2.4.4 Hoeveel termen heeft een algemene vergelijking van de m-de graad in k variabelen?

§.3 Grondslagen der kansrekening

3.1 Attributen en twee-deligen

Een kenmerk A, dat een populatie in twee delen verdeelt, de elementen die het kenmerk A wel en die het niet bezitten, noemen we een attribuut A. Alle elementen met het kenmerk A vormen samen de deelpopulatie A; de elementen die het kenmerk A niet bezitten vormen samen de deelpopulatie \bar{A} (= niet-A). \bar{A} heet ook de ontkenning van A, of het complement van A. Ieder element van de populatie behoort tot één en slechts één van de beide deelpopulaties A en \bar{A} . \bar{A} kan evengoed als attribuut worden opgevat als A. A en \bar{A} definieert een twee-deligen van de populatie.

Vaak kan eenzelfde populatie naar verschillende attributen A, B, C, ... worden gesplitst. Dan geven we de deelpopulatie van elementen die de attributen A en B beide bezitten aan met

$$AB = (A \text{ en } B).$$

Men noemt AB de doorsnede van A en B. Evenzo is

$$\boxed{ABC = \text{de doorsnede van A, B en C}} = \quad (3.1.1)$$

de deelpopulatie met de attributen A, B en C. Het is duidelijk dat

$$AB = BA, \quad (AB)C = A(BC) = ABC,$$

waarin we met $(AB)C$ de doorsnede van C met de doorsnede AB bedoelen.

Verder kunnen de symbolen voor doorsnede en complement ook worden gecombineerd. Deelpopulaties

$$AB, \bar{A}B, A\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \bar{A}BC, \bar{A}\bar{B}C$$

hebben een betekenis: $\bar{A}B$ is het complement van AB; $\bar{A}BC$ de doorsnede van A met het complement van BC.

Twee attributen A en B verdelen een populatie in 4 deelpopulaties,

$$AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$$

zódanig, dat ieder element tot één en slechts één van deze deelpopulaties behoort. Met 3 attributen krijgen we 8 deelpopulaties:

$$ABC, \bar{A}BC, A\bar{B}C, AB\bar{C}, \bar{A}\bar{B}C, \bar{A}B\bar{C}, A\bar{B}\bar{C}, \bar{A}\bar{B}\bar{C},$$

enz. We zullen dit een splitsing in elementaire deelpopulaties noemen. In onderstaande figuren is de splitsing in deelpopulaties en elementaire deelpopulaties op overzichtelijke wijze in beeld gebracht. De rechthoek stelt de gehele populatie voor, de met A, B en C gemerkte cirkels de deelpopulaties A, B en C enz.

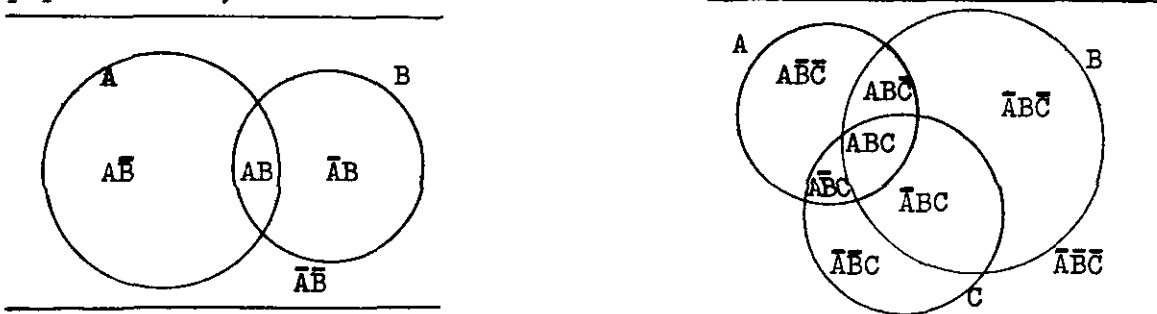


Fig. 3.1.1 Schematische voorstelling van een verdeling in elementaire deelpopulaties.

We kunnen symbolisch schrijven:

$$A = AB + A\bar{B} = ABC + ABC\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C}, \text{ enz.} \quad (3.1.2)$$

Het + teken heeft hier echter alleen zin, indien de deelpopulaties, die we bij elkaar optellen, geen elementen gemeen hebben; dus een lege doorsnede bezitten. Een som $A+B$ heeft alleen betekenis als $AB = \emptyset$; de som wil dan zeggen de elementen van A en van B samengevoegd.

We definiëren nu verder

$$A \cup B = A \text{ of } B = \text{de vereniging van A en B} = \quad (3.1.3)$$

de deelpopulatie van elementen, die tenminste één van beide attributen A en B bezitten; dus

$$A \cup B = AB + A\bar{B} + \bar{A}B = A + \bar{A}B = B + A\bar{B}.$$

Men lette goed op deze definitie. Met "A of B" wordt niet die deelpopulatie bedoeld die één en slechts één van de attributen A of B bezit (d.i. $A\bar{B} + \bar{A}B$) maar tenminste één van deze en eventueel beide.

We kunnen (3.1.3) nu verder uitbreiden tot meer dan twee attributen. Zo betekent bv.

$$A \cup B \cup C \cup D$$

de deelpopulatie die tenminste één van de attributen A, B, C of D bezit. Ook voor de vereniging geldt

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

De haakjes kunnen worden weggelaten zonder dat dubbelzinnigheid ontstaat.

Dit geldt niet meer wanneer we vereniging en doorsnede combineren, zo is bv.

$$A \cup (BC) \neq (A \cup B)C,$$

want de linker deelpopulatie omvat alle elementen van A, de rechter alleen die elementen van A, die ook tot C behoren.

Wel geldt:

$$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C), \quad (3.1.4)$$

en $(A \cup B)C = (AC) \cup (BC) \quad (3.1.5)$

zoals men gemakkelijk inziet.

Men kan verder iedere deelpopulatie gedefinieerd met behulp van A, B en C schrijven als som van elementaire deelpopulaties. Bv.:

$$A \cup (BC) = A + \bar{A}BC = ABC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC.$$

Een belangrijke relatie is

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B \cup \dots \cup K} = \overline{A} \overline{B} \dots \overline{K},$$

(3.1.6)

want de elementen die niet ten minste één van de attributen A, B, \dots, K bezitten, zijn de elementen die geen van hen bezitten. Ga na dat \overline{AB} en $\overline{A} \overline{B}$ niet hetzelfde zijn.

Bovenstaande beschouwingen zullen de lezer wellicht wat abstract en theoretisch voorkomen. Als grondslag van de kansrekening spelen zij echter een belangrijke rol. Een van de moeilijkheden is nl. vaak het scherp definiëren van attributen, en het onderkennen in hoeverre zij elkaar al dan niet uitsluiten of welke elementen zij gemeen hebben.

Vraagstukken

3.1.1 Bewijs

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \overline{B}$, *IM*
- $\overline{A \cup B \cup \dots \cup K} = \overline{A} \overline{B} \dots \overline{K}$
- $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$,
- $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$.

3.1.2 Schrijf de volgende deelpopulaties als som van elementaire deelpopulaties.

- $A(B \cup C)$,
- $A \cup (BC)$,
- $A \cup B \cup C$,
- \overline{ABC} ,
- $A \cup (\overline{B \cup C})$

3.1.3 A, B en C zijn drie willekeurige attributen. Geef een uitdrukking voor de deelpopulaties, waarin

- A en B voorkomen maar C niet,
- tenminste één van de drie voorkomen,
- één en slechts één voorkomt,
- twee en niet meer dan 2 voorkomen,
- niet meer dan 2 voorkomen.

3.1.4 Met N , $N(A)$, $N(B)$ etc. geven we het aantal elementen in de gehele populatie en in de tussen haakjes gedefiniëerde deelpopulaties weer. Men noemt dit de omvang van de populaties.

Gegeven: $N = 50$, $N(A) = 14$, $N(B) = 12$, $N(C) = 14$, $N(AB) = 4$,
 $N(AC) = 7$, $N(BC) = 5$, $N(ABC) = 4$.

Gevraagd: a) de omvang van de 8 elementaire deelpopulaties.

b) de omvang van \overline{ABC} , $A \cup B$, $A \cup B \cup \overline{C}$, $A(\overline{B \cup C})$.

3.2 Enige elementaire formules voor kansen

Uit een populatie die naar één of meerdere attributen in tweeën is gedeeld, trekken we aselect één element. A, B, AB, $\bar{A}B$, $A\bar{B}$ enz. zijn dan mogelijke uitkomsten van waarnemingen die we aan het getrokken element kunnen verrichten en we kunnen dienovereenkomstig spreken van kansen $P(A)$, $P(B)$ enz. De betrekkingen tussen populaties leiden dan tot betrekkingen tussen de overeenkomstige kansen.

A, B en C heten elkaar uitsluitende attributen, indien geen tweetal van hen samen bij één element voorkomt. Dan geldt

$$A \cup B \cup C = A + B + C$$

en dienovereenkomstig

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \quad (3.2.1)$$

Dit is de somregel voor elkaar uitsluitende attributen.

A, B en C heten een volledig stelsel elkaar uitsluitende attributen indien ieder element één en slechts één van deze attributen bezit. Dan geldt

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \quad (3.2.2)$$

Zo geldt bv.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \quad \rightarrow P(A \cup B \cup C) + P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1$$

$$+ P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C})$$

en ook als gevolg van (3.1.6)

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) \quad (3.2.3)$$

een nuttige formule. Deze formule geldt ook voor elkaar niet uitsluitende attributen.

We beschouwen vervolgens twee populaties, samengesteld als volgt:

Populatie I: N_1 elementen, M_1 elementen A,

" II: N_2 " , M_2 " B.

We trekken nu aselect één element uit ieder dezer populaties en beschouwen die twee elementen tezamen als één element uit een nieuwe populatie. A, B, AB, \bar{A} , $\bar{A}B$, enz. zijn mogelijke attributen van dit samengestelde element.

De nieuwe populatie bevat $N_1 \times N_2$ elementen en hieronder zijn $M_1 \times M_2$ elementen met het attribuut AB. Dus geldt

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \quad P(AB) = \left(\frac{N_1 \times N_2}{M_1 \times M_2} \right)^{-1} = P(A) \cdot P(B) \quad (3.2.4)$$

Trekken we nog een derde element erbij uit een populatie met attribuut C dan is evenzo

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \quad (3.2.5)$$

en (3.2.4) is dan ook van toepassing op $P(AC)$ en $P(BC)$.

We noemen A , B en C in dit geval onderling onafhankelijk en (3.2.5) heet de produktregel voor onderlinge onafhankelijke attributen.

Zijn A , B en C onderling onafhankelijk dan geldt dit eveneens voor \bar{A} , \bar{B} en \bar{C} , of voor \bar{A} , B , C enz. In dat geval leidt (3.2.3) tot

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) \quad (3.2.6)$$

een formule, die veelvuldig wordt toegepast.

(3.2.5) is ook van toepassing bij aselekt trekken met teruglegging uit éénzelfde populatie. De elementaire formules hierboven omlijnd stellen ons in staat reeds een grote variëteit van vraagstukken uit de kansrekening op te lossen. Hier volgen voorbeelden en vraagstukken.

Voorbeelden

A) De kans met een dobbelsteen een even getal te werpen is

$$P(2 \cup 4 \cup 6) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{3}{6}.$$

B) De kans met twee dobbelstenen dubbel zes te gooien is

$$P(66) = P(6) \cdot P(6) = \frac{1}{36}.$$

Dit is eveneens de kans op dubbel zes bij twee maal werpen met één dobbelsteen.

C) De kans om met twee dobbelstenen een som 8 te gooien is

$$P(26) + P(35) + P(44) + P(53) + P(62) = \frac{5}{36}.$$

D) De kans om met 3 dobbelstenen tenminste één zes te gooien is

$$P(\bar{6} \cup \bar{6} \cup \bar{6}) = 1 - \{P(\bar{6})\}^3 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}.$$

E) Wat is de kans dat bij een worp met 4 dobbelstenen de hoogste worp een 5 is? We noemen nu

$A \equiv$ de hoogste worp is een 6,
 $B \equiv$ " " " " " 5.

elkaar uitsluitende attributen!

Dan sluiten A en B elkaar uit. We hebben

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4, \quad P(A \cup B) = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^4,$$

en dus voor de gevraagde kans

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 - \left(\frac{4}{6}\right)^4 = \frac{41}{144}.$$

F) Hoe groot is de kans met 3 dobbelstenen 3 ongelijke puntentallen te gooien?

De kans bv. een 1, een 2 en een 3 te gooien is

$$3! \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36}.$$

Uit de 6 vlakken van één dobbelsteen kunnen we

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

combinaties van 3 vlakken aanwijzen. De gevraagde kans is dus

$$\frac{20}{36}.$$

Vraagstukken

3.2.1 We werpen met 3 dobbelstenen. Bereken de kansen

- a) dat een 3, een 4 en een 5 wordt geworpen,
- b) dat drie opeenvolgende puntentallen worden geworpen,
- c) dat het produkt der 3 puntentallen even is,
- d) dat de laagste worp een 1 is,
- e) dat de laagste worp een 3 is.

3.2.2 Wanneer de kansen op een jongen of een meisje gelijk zijn, hoe groot zijn dan de kansen, dat een gezin van 4 kinderen bestaat uit

- a) 4 jongens,
- b) 3 jongens en 1 meisje,
- c) 2 jongens en 2 meisjes.

3.2.3 Indien 5% van de mensen linkshandig is, hoe groot is dan de kans dat in een klas van 20 leerlingen geen linkshandigen voorkomen?

3.2.4 We werpen met 2 dobbelstenen, een zwarte en een witte; de puntentallen noemen we Z en W.
Bereken de verdeling van

- a) de som $Z+W$,
- b) het verschil $Z-W$,
- c) het verschil in absolute waarde $|Z-W|$.

Onder verdeling verstaan we de waarden, die een grootheid kan aannemen, met de erbijbehorende kansen.

3.2.5 Bereken de verdeling van het totaal aantal punten geworpen met 3 dobbelstenen, door combinatie van de worpen met een derde steen met de verdeling berekend onder a) van het voorgaande vraagstuk.

3.2.6 Teken een grafiek van de verdelingen van het totaal aantal punten geworpen met resp. één, twee en drie dobbelstenen.

3.2.7 Toevalscijfers zijn cijfers verkregen door aselechte trekkingen met teruglegging uit de cijfers 0 tot 9.

Hoe groot zijn de kansen dat een groep van 3 toevalscijfers bestaat uit

- a) 3 gelijke: AAA.
- b) 2 gelijke en 1 verschillend AAB,
- c) 3 verschillende: ABC.

De som van deze 3 kansen moet = 1 zijn; dit levert een controle.

3.2.8 Bereken voor een groep van 4 toevalscijfers de kans op

- a) 4 gelijke: AAAA,
- b) 3 gelijke, 1 verschillend: AAAB,
- c) 2 paren : AABB,
- d) 2 gelijke, 2 verschillend: AABC,
- e) 4 verschillende : ABCD.

*denk aan permutaties
van gelijkvallige groepen.*

De som van deze 5 kansen moet = 1 zijn. Men lette op het verschil tussen de formules (2.3.1) en (2.3.3).

3.2.9 A en B gooien om beurten met één dobbelsteen. Wie het eerst een 6 gooit wint. Als A mag beginnen, hoe groot zijn dan de winstkansen van A en B?

3.2.10 Hoe groot zijn de kansen

- a) om bij 4 worpen met één dobbelsteen tenminste één maal 6 te gooien?
- b) om bij 24 worpen met twee dobbelstenen tenminste één maal dubbel 6 te gooien?

Dit is een beroemd vraagstuk. De franse edelman Chevalier de Méré constateerde al dobbelende dat het ene spel tot winst het andere tot verlies leidde en stelde hierover een vraag aan Pascal. Dit gaf aanleiding tot de vroegste beschouwingen over kansrekening.

3.2.11 A en B spelen een tennismatch van 3 sets. Wie het eerst twee sets gewonnen heeft is winnar. We nemen aan dat de kans om een set te winnen niet wordt beïnvloed door de resultaten van vorige sets.

- a) Als A een kans p heeft een set te winnen, hoe groot is dan A's kans de match te winnen?
- b) Zet deze kans uit als functie van p . De verkregen kromme geeft een beeld van het onderscheidingsvermogen van de match.
- c) Hoe groot moet p zijn, opdat A's winstkans 0.90 bedraagt?

3.2.12 Beantwoord dezelfde vragen, wanneer de match bestaat uit 5 sets en 3 sets moeten worden gewonnen om de match te winnen.

3.2.13 Een relais heeft een kans p_1 niet goed in te schakelen en een kans p_2 niet goed uit te schakelen.

- a) Wat is de kans, dat het relais één maal goed in en uitschakelt?
- b) Wat is de kans, dat het 100x achtereen goed in- en uitschakelt?
- c) Aan welke eis moeten p_1 en p_2 voldoen opdat de onder b) berekende kans groter dan 95% is?

3.2.14 Twee relais als in het voorgaande vraagstuk worden in serie geschakeld en tegelijk bekrachtigd.

- a) Hoe groot is de kans, dat het samenstel één maal goed in- en uitschakelt?
- b) Is het mogelijk, dat beide relais in serie beter zullen functioneren dan één relais alleen, en zo ja, onder welke voorwaarden?

3.2.15 Beantwoord dezelfde vragen, wanneer twee relais parallel geschakeld worden.

3.3 De binomiale verdeling

Uit een populatie met kans p op een attribuut A trekken we met teruglegging een aselechte steekproef van n elementen. We beschouwen deze steekproef nu als één element van een nieuwe populatie, de steekproefpopulatie. Als kenmerk van de steekproef beschouwen we verder het aantal x elementen A dat onder de n elementen van de steekproef wordt aangetroffen.

De kans dat we x elementen A en $(n-x)$ elementen \bar{A} trekken in tevoren voorgeschreven volgorde is

$$p^x(1-p)^{n-x} = p^x q^{n-x} \quad (3.3.1)$$

wanneer we, als algemeen gebruikelijk

$$(1-p) = q$$

stellen.

De x elementen A en $(n-x)$ elementen \bar{A} kunnen echter in $\binom{n}{x}$ verschillende volgorden worden getrokken die elkaar uitsluiten en ieder de kans (3.3.1) bezitten. Hieruit volgt

$$P(\underline{x} = x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad (3.3.3)$$

$$x = 0, 1, \dots, n.$$

Dit heet de binomiale verdeling. Het symbool $P(\underline{x} = x; n, p)$ betekent de kans dat de toevalsvariabele \underline{x} de waarde x aanneemt, bij gegeven steekproefgrootte n en elementaire kans p .

De binomiale kansen worden gegeven door de termen uit de binomiale ontwikkeling van $(p+q)^n$. Hieruit volgt

$$\sum_{x=0}^n P(\underline{x} = x; n, p) = (p+q)^n = 1, \quad (3.3.4)$$

zoals te verwachten was.

We kunnen de binomiale verdeling ook als volgt definiëren. We beschouwen een experiment, dat een uitkomst 1 of 0 geeft met kansen p en $q = 1-p$. Dan is de binomiale verdeling, de verdeling van de som van n onafhankelijke waarnemingen volgens dit experiment verricht.

De binomiale verdeling speelt in de toegepaste statistiek een zeer belangrijke rol.

Voorbeelden

A) De kans om met 10 dobbelstenen 3 zessen te gooien is

$$\binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{120 \times 5^7}{6^{10}} = 0.1554.$$

B) De kans dat een gezin van 6 kinderen bestaat uit 3 jongens en 3 meisjes is

$$\binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{2^6} = \frac{5}{16}.$$

(Opmerking: We nemen hierbij aan dat de kans op een jongen steeds $\frac{1}{2}$ is. Dit is niet juist.)

Vraagstukken

3.3.1 Hoe groot zijn de kansen om bij een worp met 5 dobbelstenen

- a) exact 2 zessen te gooien,
- b) ten minste 2 zessen te gooien,
- c) ten hoogste 2 zessen te gooien?

3.3.2 Bereken de verdeling van het aantal malen, dat kruis wordt geworpen bij 10 maal tossen met een munt. Geef het resultaat grafisch weer.

0 3.3.3 Een set bij tennis wordt gewonnen als een speler tenminste 6 games heeft gewonnen en tevens twee games meer heeft gewonnen dan zijn tegenstander. Een set heet een "long set" wanneer de winnaar meer dan 6 games heeft moeten winnen om de set te beëindigen.

Als A een kans p heeft een game te winnen en B een kans $(1-p)$, hoe groot is dan de kans op een "long set"? Zet deze kans uit als functie van p .

3.3.4 Een "quiz" bestaat uit 8 vragen die men ieder op 3 verschillende manieren kan beantwoorden. Wanneer de beantwoording uitsluitend op een gissing berust, hoe groot zijn dan de kansen, dat men resp. 6, 7 of 8 goede antwoorden geeft?

3.3.5 Indien 5% van de mensen linkshandig is, hoe groot zijn dan de kansen, dat in een klas van 20 leerlingen 0, 1, 2 en 3 linkshandige kinderen zullen worden aangetroffen?

3.3.6 n relais worden parallel geschakeld en samen bekrachtigd. Ieder relais heeft een kans p_1 niet goed in te schakelen en een kans p_2 niet goed uit te schakelen wanneer het ingeschakeld is. Bereken de kans, dat het gehele samenstel één maal goed in- en weer uitschakelt?

Hint: Bereken eerst de kans, dat x relais goed inschakelen en goed uitschakelen. Sommeer daarna over x en vereenvoudig de verkregen som met behulp van het binomium van Newton.

3.4 De algemene somregel

De somregel (3.2.1) geldt alleen voor elkaar uitsluitende attributen. Sluiten A en B elkaar niet uit, dan geldt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad , \quad (3.4.1)$$

want in de som $P(A) + P(B)$ is de deelpopulatie AB twee maal in rekening gebracht en hiervoor moeten we één maal corrigeren.

Uit (3.4.1) volgt

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B}),$$

en door combinatie met

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(AB) \quad (3.4.2)$$

vinden we

$$P(AB) = 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) + P(\bar{A}\bar{B}). \quad (3.4.3)$$

Door snijding met \bar{C} volgt hieruit verder

$$P(AB\bar{C}) = P(\bar{C}) - P(\bar{A}\bar{C}) - P(\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) \quad (3.4.4)$$

en wanneer we (3.4.4) van (3.4.3) aftrekken

$$P(ABC) = 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) - P(\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}) + P(\bar{A}\bar{C}) + P(\bar{B}\bar{C}) - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}). \quad (3.4.5)$$

De formules (3.4.3) en (3.4.5) kunnen we samenvatten in de algemene formule

$$P(AB\dots K) = P\{(1-\bar{A})(1-\bar{B})\dots(1-\bar{K})\}, \quad (3.4.6)$$

wanneer we het rechterlid zó interpreteren dat we eerst het gedurig produkt tussen de accolades uitwerken en daarna het symbool P aan iedere term afzonderlijk toevoegen, waarbij $P(1) = 1$ wordt gesteld. Door volledige inductie volgens de hierboven gevolgde methode bewijst men gemakkelijk dat (3.4.6) algemeen geldt.

Meestal wordt deze algemene somregel in statistische leerboeken in enigszins andere vorm gegeven. We kunnen deze formule evengoed schrijven

$$P(\bar{A}\bar{B}\dots\bar{K}) = P\{(1-A)(1-B)\dots(1-K)\},$$

en daar

$$P(AUBU\dots UK) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}\dots\bar{K}),$$

volgt

$$P(AUBU\dots UK) = 1 - P\{(1-A)(1-B)\dots(1-K)\}, \quad (3.4.7)$$

hetgeen weer opgevat moet worden op de manier van (3.4.6).

Dit is de gebruikelijke vorm. Voor 2 attributen geeft ze (3.4.1), voor 3 attributen

$$P(AUBUC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \quad (3.4.8)$$

De vorm (3.4.6) is echter eenvoudiger algemeen te bewijzen, makkelijk te onthouden, en bij toepassingen ook vaak doelmatiger, hetgeen de volgende voorbeelden mogen toelichten.

Voorbeelden

- A) Hoe groot is de kans bij een worp met 4 dobbelstenen tenminste een 1 en een 2 te gooien?

We definiëren: $A \equiv$ tenminste een 1,
 $B \equiv$ tenminste een 2.

$$\text{Dan is } P(\bar{A}) = P(\bar{B}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4, P(\bar{A}\bar{B}) = \left(\frac{4}{6}\right)^4$$

en de gevraagde kans volgens (3.4.3)

$$P(AB) = 1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \left(\frac{4}{6}\right)^4 = \frac{302}{1296}.$$

- B) Hoe groot is de kans om met 4 dobbelstenen tenminste een 1, een 2, en een 3 te gooien?

We definiëren nu: $A \equiv$ tenminste een 1,
 $B \equiv$ " " 2,
 $C \equiv$ " " 3.

Dan geeft (3.4.5) op dezelfde wijze als in het voorgaande voorbeeld

$$P(ABC) = 1 - 3\left(\frac{5}{6}\right)^4 + 3\left(\frac{4}{6}\right)^4 - \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{108}{1296} = \frac{1}{12}.$$

- C) Hoe groot is de kans, dat bij een worp met 4 dobbelstenen de hoogste worp een 5 en de laagste worp een 1 is?

We definiëren: $A \equiv$ tenminste een 1,
 $B \equiv$ " " 5,
 $C \equiv$ " " 6.

Dan wordt gevraagd $P(ABC\bar{C})$.

Passen we (3.4.3) toe op de deelpopulatie \bar{C} dan vinden we

$$P(ABC\bar{C}) = P(\bar{C}) - P(\bar{A}\bar{C}) - P(\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}),$$

en volgens dezelfde redenering als in de voorgaande vraagstukken

$$P(ABC\bar{C}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 - 2\left(\frac{4}{6}\right)^4 + \left(\frac{3}{6}\right)^4 = \frac{194}{1296}.$$

|| Het essentiële principe in deze voorbeelden is, dat de kansen $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(\bar{A}\bar{B})$, $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$ eenvoudig en direct kunnen worden aangegeven en dat men dus moet proberen de gevraagde kans volledig in deze kansen uit te drukken.

Vraagstukken

3.4.1 Bewijs de volgende formules:

- a) $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) + P(\bar{A}\bar{B})$,
 b) $P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) - P(\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}) + P(\bar{A}\bar{C}) + P(\bar{B}\bar{C}) - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$.

3.4.2 Schrijf $P(\bar{A}\bar{B})$, $P(\bar{A}\bar{B})$ en $P(A \cup B)$ als functie van resp.

- a) $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$;
 b) $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$;
 c) $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(\bar{A}\bar{B})$;
 d) $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

- 3.4.3 Bij een worp met 4 dobbelstenen kan het verschil tussen het hoogste en het laagste puntental de waarden 0, 1, 2, 3, 4 en 5 aannemen. Bereken de kansen op ieder van deze waarden.
- 3.4.4 Geef een algemene formule voor de kans, dat bij een worp met n dobbelstenen het verschil tussen de hoogste en de laagste worp k bedraagt. *form 3.4.4*
- 3.4.5 Geef een formule voor de kans, dat bij een worp met n dobbelstenen, de cijfers 1, 2, ..., 6 alle minstens één maal voorkomen. *form 3.4.5*

3.5 Voorwaardelijke kansen, afhankelijkheid en onafhankelijkheid

We beschouwen een populatie met twee attributen A en B. Ieder element van deze populatie behoort dan tot één van de 4 elementaire deelpopulaties. Wanneer we aselekt een aantal elementen achtereen trekken krijgen we een serie waarnemingen, die er bv. als volgt uitziet:

$\bar{A}\bar{B}, AB, A\bar{B}, \bar{A}B, A\bar{B}, AB, \bar{A}\bar{B}, A\bar{B}, A\bar{B}, AB, A\bar{B}, AB, \dots$

Men kan nu vragen naar de voorwaardelijke kans

$$P(A|B), \quad (3.5.1)$$

d.w.z. de kans op attribuut A, wanneer gegeven is dat het getrokken element B bezit.

Dan vallen alle elementen \bar{B} uit de boven gegeven serie weg en blijft alleen de serie

$\bar{A}\bar{B}, AB, AB, AB, AB, \dots$

over; op deze serie heeft de voorwaardelijke kans $P(A|B)$ betrekking. Deze serie bestaat uit aselekte trekkingen uit de deelpopulatie B. We komen zo tot de definitie:

De voorwaardelijke kans $P(A|B)$ is de kans op A bij aselekte trekking uit de deelpopulatie B.

De betekenis van voorwaardelijke kansen

$$P(A|\bar{B}), P(A|B), P(B|A), \text{ enz}$$

is dan zonder meer duidelijk.

De gegeven definitie betekent hetzelfde als:

$$P(A|B) = \frac{N(AB)}{N(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (3.5.2)$$

en evenzo

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(C|AB) = \frac{P(ABC)}{P(AB)} \text{ enz.}$$

of ook

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B), \\ P(ABC) &= P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB). \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Voorbeelden

A) We werpen twee maal met één dobbelsteen en definiëren:

$A \equiv$ de eerste worp is een even getal,

$B \equiv$ de som der twee worpen = 8.

Dan is $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{5}{36}$, $P(AB) = \frac{3}{36}$

en dus $P(A|B) = \frac{3}{36} : \frac{5}{36} = \frac{3}{5}$,

$P(B|A) = \frac{3}{36} : \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

B) Vier loten worden genummerd 1, 2, 3, 4, dooreen geschud en daarna één voor één getrokken zonder teruglegging. De kans, dat zij in natuurlijke volgorde getrokken worden is

$$P(1) \cdot P(2|1) \cdot P(3|12) \cdot P(4|123) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4!}$$

C) Worpen met 4 dobbelstenen kunnen worden gesplitst in

$A \equiv$ worpen, waarbij tenminste één 6 voorkomt;

$\bar{A} \equiv$ worpen, waarbij geen zes voorkomt.

Binnen de deelpopulatie \bar{A} is de kans dat $B \equiv$ tenminste één 5 voorkomt.

$$P(B|\bar{A}) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4.$$

Daar $P(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$ is

$$P(\bar{A}B) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left\{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4\right\} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 - \left(\frac{4}{6}\right)^4.$$

Dit is de kans, dat bij een worp met 4 dobbelstenen de hoogste worp een 5 is. Dit is hetzelfde antwoord als in 3.2 Voorbeeld E langs andere weg verkregen.

Onafhankelijkheid

We noemen nu A stochastisch onafhankelijk van B, wanneer

$$P(A|B) = P(A),$$

of wel wanneer de kans op A binnen de deelpopulatie B dezelfde waarde heeft als binnen de gehele populatie. Wat onze kennis van A betreft maakt het dan geen verschil of we al dan niet weten, dat we met een element uit de deelpopulatie B te maken hebben.

Uit (3.5.4) volgt met (3.5.3)

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

(3.5.5)

Hieruit zien we dat als A onafhankelijk is van B, B eveneens onafhankelijk is van A. (We zeggen voortaan onafhankelijk i.p.v. stochastisch onafhankelijk).

Voorbeeld. Trekken we aselect een kaart uit een spel van 52 kaarten en definiëren we

A \equiv een schoppenkaart,

B \equiv een honneur,

C \equiv een zwarte kaart,

D \equiv een aas,

dan zijn A en B, A en D, B en C, en C en D onderling onafhankelijk, A en C, en B en D niet.

Het attribuut A heet onafhankelijk van B en C, indien A onafhankelijk is van ieder attribuut dat door middel van B en C kan worden gedefinieerd. Hiertoe is voldoende en noodzakelijk dat

$$P(A) = P(A|B) = P(A|C) = P(A|BC). \quad (3.5.6)$$

A, B en C heten onderling onafhankelijk indien ieder van hen in de zin van (3.5.6) onafhankelijk is van de beide andere. Men vindt gemakkelijk dat dan naast de drie betrekkingen van de vorm (3.5.5) ook moet gelden

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \quad (3.5.7)$$

Algemeen noemt men de attributen A, B, ..., K onderling onafhankelijk indien de betrekking (3.5.7) geldt voor iedere combinatie van attributen die uit A, B, ..., K kan worden gevormd.

In 3.2 is reeds bewezen dat waarnemingen verricht aan onafhankelijk van elkaar getrokken elementen (d.w.z. aselect getrokken met teruglegging) altijd onafhankelijk zijn, een resultaat dat bij onze verdere theoretische beschouwingen nog een zeer belangrijke rol zal spelen.

Vraagstukken

3.5.1 Bewijs dat wanneer A en B onafhankelijk zijn, dit eveneens geldt voor A en \bar{B} , \bar{A} en B, en \bar{A} en \bar{B} .

3.5.2 Bewijs dat uit (3.5.6) volgt

$$P(A) = P(A|\bar{B}C) = P(A|B\bar{C}) = P(A|\bar{B}\bar{C}).$$

3.5.3 Bewijs

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}).$$

3.5.4 Een munt wordt 2x getost. Hoe groot is de kans, dat 2x "Munt" is geworpen wanneer gegeven is

a) dat de eerste worp "Munt" was; $\frac{1}{2}$

b) dat tenminste één maal "Munt" werd geworpen? $\frac{1}{3}$

3.5.5 Hoe groot is de kans, dat een gezin van 4 kinderen bestaat uit 3 jongens en 1 meisje, wanneer resp. gegeven is

a) dat het gezin tenminste 3 jongens omvat; $\frac{4}{5}$

b) dat de oudste 3 kinderen jongens zijn. $\frac{1}{2}$

3.5.6 Gegeven een populatie waarvoor

$$P(A) = 0.60, P(B) = 0.45, P(C) = 0.55,$$

$$P(AB) = 0.30, P(AC) = 0.35, P(BC) = 0.30,$$

$$P(ABC) = 0.25.$$

Gevraagd: a) $P(\bar{A}|B)$,

b) $P(A|BC)$,

c) $P(A|B \cup C)$, $\frac{4}{7}$

d) $P(AB|A \cup B)$.

3.5.7 Bij een worp met 2 dobbelstenen definiëren we:

- A \equiv een even worp met de eerste steen,
 B \equiv " oneven " " " tweede " ,
 C \equiv " oneven som.

Toon aan dat A, B en C paarsgewijze onafhankelijk zijn, maar A, B en C gedrieën niet.

3.5.8 Uit een vaas, die 4 witte en 6 zwarte knikkers bevat, worden eerst 2 knikkers getrokken en opzij gelegd zonder de kleur te kijken en daarna wordt een derde knikker getrokken.

- a) Hoe groot is de kans, dat de 3e knikker wit is?
 b) Hoe groot is de kans, dat de 3e knikker wit is, wanneer gegeven is dat onder de eerste twee knikkers tenminste één witte getrokken werd?

$\frac{7}{20}$

§.4 Algemene beschouwingen over numerieke populaties of verdelingen

4.1 Gemiddelde, variantie, standaardafwijking

Gegeven: een serie kansen

$$p_i, i = 1, \dots, n, p_i \geq 0, \sum p_i = 1 \text{ en}$$

een reeks willekeurige getallen $x_i, i = 1, \dots, n$, dan is het steeds mogelijk een loterij te construeren zódanig dat bij aselechte trekking met teruglegging

$$P(\underline{x} = x_i) = p_i. \quad (4.1.1)$$

Tezamen definiëren p_i, x_i een oneindige populatie. Men noemt het samenstel van waarden p_i, x_i ook de verdeling in de populatie en gebruikt het woord verdeling dikwijls i.p.v. populatie.

Denken we ons de waarden x_i naar opklimmende grootte gerangschikt dan is

$$P(\underline{x} \leq x_i) = \sum_{j=1}^i p_j. \quad (4.1.2)$$

De kansen $P(\underline{x} \leq x_i)$ worden tezamen de cumulatieve verdeling genoemd.

Vaak is men niet geïnteresseerd in een verdeling in detail, maar voornamelijk in een paar karakteristieke grootheden, zg. parameters, van een verdeling. De belangrijkste parameters, die in de statistiek een grote rol spelen, zijn:

de verwachtingswaarde of het populatiegemiddelde:

$$E(x) = \mu = \sum_i p_i x_i, \quad (4.1.3)$$

de variantie:

$$\text{var}(\underline{x}) = \sigma^2 = \sum_i p_i (x_i - \mu)^2, \quad (4.1.4)$$

en de standaardafwijking (= spreiding):

$$\sigma = \sqrt{\text{var}(\underline{x})}. \quad (4.1.5)$$

Voor de verwachtingswaarde zijn $E(\underline{x})$ en μ beide gangbare symbolen, die we door elkaar zullen gebruiken. $E(\dots)$ stamt van het engelse "Expectation", dat in het nederlands met "verwachtingswaarde" is vertaald. Spelen we een spel met kansen p_i op winst x_i , dan is $E(\underline{x})$ de te verwachten gemiddelde winst per spel. Ook bij functies van \underline{x} gebruiken we het symbool E .

Zo is bv.

$$E(\underline{x}^2) = \sum_i p_i x_i^2 = \text{de verwachtingswaarde van } \underline{x}^2,$$

$$E(a\underline{x} + b) = \sum_i p_i (ax_i + b) = aE(\underline{x}) + b = \text{de verwachtingswaarde van } a\underline{x} + b.$$

Variantie en standaardafwijking zijn beide maten voor de spreiding in de populatie. De variantie bezit, zoals we zullen zien, theoretisch bijzonder prettige eigenschappen. Bij technische toepassingen is de standaardafwijking vaak de maatgevende grootte. Ook deze beide parameters zullen we door elkaar gebruiken.

Voor de variantie kunnen we ook schrijven

$$\text{var}(\underline{x}) = E(\underline{x} - \mu)^2 = E(\underline{x}^2) - \{E(\underline{x})\}^2. \quad (4.1.6)$$

De laatste uitdrukking wordt doorgaans gebruikt om de variantie te berekenen. Voor een stochastische variabele \underline{x} met waarde 1 of 0 met kansen p resp. $1-p$ vinden we

$$E(\underline{x}) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p, \quad (4.1.7)$$

$$\text{var}(\underline{x}) = p(1-p)^2 + (1-p)p^2 = p(1-p). \quad (4.1.8)$$

Vraagstukken

4.1.1 Bereken $E(\underline{x})$, $E(\underline{x}^2)$ en $\text{var}(\underline{x})$ voor de volgende populaties.

a) Worpen met een dobbelsteen.

b) Toevalscijfers.

c) $p_i = 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4$

$x_i = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

d) Aselecte trekkingen met teruglegging uit de getallen:

1, 2, 3, 5, 9.

4 - 2 4 - 8

e) Aselecte trekking uit de populatie

$$n_i = 3 \quad 7 \quad 4 \quad 1$$

$$x_i = 5 \quad 10 \quad 15 \quad 20$$

waarin n_i het aantal elementen, waarvoor $\underline{x} = x_i$.

$$f) x_i = 1 \quad 0 \quad p \quad p \quad p - p^2$$

$$p_i = p \quad (1-p).$$

4.1.2 Bewijs

$$\text{var}(a\underline{x} + b) = a^2 \text{var}(\underline{x}).$$

4.1.3 Bewijs formule (4.1.6).

4.1.4 Bereken $\text{var}(\underline{x}^2)$ voor de populaties a), c) en e) van vraagstuk 4.1.1.

4.2 Twee-dimensionale verdelingen, de covariantie en de correlatie-coëfficiënt

Vaak kan men aan één element uit een populatie meerdere kenmerken meten, bv. een lengte, een diameter, een gewicht. Beperken we ons voorlopig tot twee kenmerken \underline{x}_1 en \underline{x}_2 , dan wordt de populatie nu gedefinieerd door kansen p_i en getallenparen x_{1i}, x_{2i} ; $i = 1, \dots, n$.

Dit heet een twee-dimensionale populatie.

De definities uit de voorgaande paragraaf zijn op \underline{x}_1 en \underline{x}_2 zonder meer van toepassing. Daarnaast onderscheidt men nu bovendien de

covariantie van \underline{x}_1 en $\underline{x}_2 =$

$$\text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = E \{ (\underline{x}_1 - \mu_1)(\underline{x}_2 - \mu_2) \} =$$

$$\boxed{\text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = E(\underline{x}_1 \underline{x}_2) - \mu_1 \mu_2,} \quad (4.2.1)$$

waarin μ_1 en μ_2 de verwachtingswaarden zijn van \underline{x}_1 en \underline{x}_2 .

De covariantie is een maat voor de lineaire samenhang tussen \underline{x}_1 en \underline{x}_2 . Wanneer in het merendeel der gevallen gelijktijdig $\underline{x}_1 > \mu_1$ en $\underline{x}_2 > \mu_2$ of $\underline{x}_1 < \mu_1$, $\underline{x}_2 < \mu_2$ dan zal het produkt $(\underline{x}_1 - \mu_1)(\underline{x}_2 - \mu_2)$ meestal positief zijn en is de covariantie eveneens positief. Wanneer daarentegen $\underline{x}_2 > \mu_2$ meestal correspondeert met $\underline{x}_1 < \mu_1$ en omgekeerd is de covariantie negatief.

Het bewijs dat

$$\text{cov}(a_1 \underline{x}_1, a_2 \underline{x}_2) = a_1 a_2 \text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \quad (4.2.2)$$

wordt aan de lezer overgelaten. Uit deze formule volgt, dat de covariantie afhangt van de schaal, waarin \underline{x}_1 en \underline{x}_2 worden gemeten; de covariantie wordt bv. 10x zo groot wanneer we \underline{x}_1 in mm uitdrukken i.p.v. in cm.

De correlatiecoëfficiënt

$$\rho(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \rho_{12} = \frac{\text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)}{\sqrt{\text{var}(\underline{x}_1) \cdot \text{var}(\underline{x}_2)}} \quad (4.2.3)$$

is een maat voor de samenhang tussen \underline{x}_1 en \underline{x}_2 die van de schaal onafhankelijk is.

De correlatiecoëfficiënt bezit de volgende belangrijke eigenschappen:

a) $-1 \leq \rho \leq 1$ (4.2.4)

b) $\rho = \pm 1$ dan en slechts dan als er een lineair verband

$$\underline{x}_2 = a\underline{x}_1 + b \text{ bestaat tussen } \underline{x}_1 \text{ en } \underline{x}_2. \quad (4.2.5)$$

Bewijs. De kwadratische vorm (in de variabele t)

$$\sum_i p_i \{t(x_{1i} - \mu_1) - (x_{2i} - \mu_2)\}^2 = t^2 \text{var}(\underline{x}_1) - 2t \text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) + \text{var}(\underline{x}_2)$$

is positief definit en dus is de discriminant $4\text{var}(\underline{x}_1)\text{var}(\underline{x}_2)(\rho^2 - 1)$ ~~niet~~ negatief.

Hiermee is (4.2.4) aangetoond. Bovendien zien we dat $\rho = \pm 1$ betekent dat er een t_0 is zodat $t_0(x_{1i} - \mu_1) = (x_{2i} - \mu_2)$ voor alle i d.w.z. dat er een lineair verband is tussen \underline{x}_1 en \underline{x}_2 .

Is omgekeerd $\underline{x}_2 = a\underline{x}_1 + b$ dan is

$$\rho_{12}^2 = \frac{\text{cov}^2(\underline{x}_1, \underline{x}_2)}{\text{var}(\underline{x}_1) \cdot \text{var}(\underline{x}_2)} = \frac{a^2 \text{var}^2(\underline{x}_1)}{\text{var}(\underline{x}_1) \cdot a^2 \text{var}(\underline{x}_1)} = 1.$$

Daarmee is ook (4.2.5) bewezen.

Vraagstukken

Bereken $\text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ en $\rho(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ voor ieder der volgende populaties.

4.2.1

p_i	=	0.1	0.2	0.3	0.4
x_{1i}	=	1	2	3	4
x_{2i}	=	4	3	2	1.

4.2.2 Aselecte trekking uit de paren

x_{1i}	=	2	1	3	3	0	3	2	2	1	0
x_{2i}	=	2	2	0	1	3	2	1	1	2	2.

$$E(x_{1i}) = 1,7$$

$$E(x_{2i}) = 1,6$$

4.2.3 Aselecte trekking uit de paren

x_{1i}	=	1	3	4	0	2	2	4	1
x_{2i}	=	0	3	2	1	1	3	0	2.

$$\rho = \frac{-31}{54}$$

4.2.4 Aselecte trekking uit de paren

$$\begin{array}{l} x_{1i} = 5 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 0 \\ x_{2i} = 3 \quad 5 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 5. \end{array}$$

4.2.5 $p_i = p_1 \quad p_2 \quad p_3$

$$\begin{array}{l} x_{1i} = 1 \quad 0 \quad 0, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1. \\ x_{2i} = 0 \quad 1 \quad 0. \end{array}$$

4.2.6 Zet voor de vraagstukken 4.2.2, 4.2.3 en 4.2.4 x_{1i} en x_{2i} tegen elkaar uit en vergelijk de verkregen punten groepering met de waarde van de correlatiecoëfficiënt. *4.2.4 punten op een parabool*

4.3 Twee-dimensionale verdeling (vervolg)

Een twee-dimensionale verdeling kan altijd worden weergegeven in de vorm van Tabel 4.3.1 of Tabel 4.3.2.

Tabel 4.3.1

Een twee-dimensionale verdeling weergegeven als twee-dimensionale tabel van kansen.

	j=	1	2	...	k	
i=		x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}	
1	x_{11}	p_{11}	p_{12}	...	p_{1k}	$p_{1\cdot}$
2	x_{12}	p_{21}	p_{22}	...	p_{2k}	$p_{2\cdot}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	x_{1r}	p_{r1}	p_{r2}	...	p_{rk}	$p_{r\cdot}$
		$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$...	$p_{\cdot k}$	$p_{\cdot\cdot} = 1$

Tabel 4.3.2

Een twee-dimensionale verdeling weergegeven als twee-dimensionale frequentie-tabel.

	j=	1	2	...	k	
i=		x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}	
1	x_{11}	n_{11}	n_{12}	...	n_{1k}	$n_{1\cdot}$
2	x_{12}	n_{21}	n_{22}	⋮	n_{2k}	$n_{2\cdot}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	x_{1r}	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rk}	$n_{r\cdot}$
		$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$...	$n_{\cdot k}$	n

\underline{x}_1 kan r verschillende waarden x_{1i} ($i = 1, \dots, r$) aannemen en \underline{x}_2 k verschillende waarden x_{2j} ($j = 1, \dots, k$). De kans

$$P(\underline{x}_1 = x_{1i}, \underline{x}_2 = x_{2j}) = p_{ij}. \quad (4.3.1)$$

De kansen

$$p_{i.} = \sum_j p_{ij} \quad \text{en} \quad p_{.j} = \sum_i p_{ij} \quad (4.3.2)$$

zijn de zg. marginale kansen. We hebben

$$P(\underline{x}_1 = x_{1i}) = p_{i.}, \quad P(\underline{x}_2 = x_{2j}) = p_{.j}. \quad (4.3.3)$$

Deze marginale kansen bepalen de marginale verdeling van \underline{x}_1 en \underline{x}_2 , d.w.z. de verdeling van deze variabelen ongeacht de waarde, die de andere bezit. Verder is de som van alle kansen

$$p_{..} = \sum_i p_{i.} = \sum_j p_{.j} = \sum_i \sum_j p_{ij} = 1. \quad (4.3.4)$$

We gebruiken hier een notatie die we nog vaak zullen toepassen. Wanneer we een index (zoals i en j) door een punt vervangen betekent dit de grootte door sommeren over deze index verkregen. (4.3.2) en (4.3.4) lichten dit voldoende toe.

De notatie in Tabel 4.3.2 is in wezen hetzelfde; alleen geeft deze tabel frequenties i.p.v. kansen. De twee-dimensionale verdeling is nu gedefiniëerd door aselechte trekking met teruglegging uit een populatie bestaande uit n_{ij} elementen x_{1i}, x_{2j} . Het verband tussen de beide tabellen wordt bepaald door

$$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{..}}, \quad p_{i.} = \frac{n_{i.}}{n_{..}} \quad \text{enz.}$$

Vaak is het rekenen met frequenties eenvoudiger omdat dit gehele getallen zijn, terwijl kansen altijd breuken zijn.

In aansluiting op het in 3.5 behandelde definiëren we nu verder

$$P(x_{1i} | x_{2j}) = P(\underline{x}_1 = x_{1i} | \underline{x}_2 = x_{2j}) = \frac{p_{ij}}{p_{.j}} = \quad (4.3.5)$$

de voorwaardelijke verdeling van \underline{x}_1 , wanneer $\underline{x}_2 = x_{2j}$ gegeven is; het is de verdeling van \underline{x}_1 binnen de deelpopulatie waarvoor $\underline{x}_2 = x_{2j}$.

Evenzo is

$$P(x_{2j} | x_{1i}) = P(\underline{x}_2 = x_{2j} | \underline{x}_1 = x_{1i}) = \frac{p_{ij}}{p_{i.}} = \quad (4.3.6)$$

de voorwaardelijke verdeling van \underline{x}_2 , gegeven $\underline{x}_1 = x_{1i}$.

Dan is bv. ook

$$E(\underline{x}_1 | x_{2j}) = \frac{\sum_i p_{ij} x_{1i}}{p_{.j}} \quad (4.3.7)$$

de voorwaardelijke verwachtingswaarde van \underline{x}_1 , enz.

De berekening van $E(\underline{x}_1)$, $E(\underline{x}_2)$, $\text{var}(\underline{x}_1)$ en $\text{var}(\underline{x}_2)$ kan geschieden door middel van de marginale verdelingen, bv. is

$$E(\underline{x}_1) = \sum_i \sum_j p_{ij} x_{1i} = \sum_i p_{i.} x_{1i}. \quad (4.3.8)$$

De verwachtingswaarde van het produkt $\underline{x}_1 \underline{x}_2$ bepaalt men met behulp van een van de volgende relaties

$$\begin{aligned} E(\underline{x}_1 \underline{x}_2) &= \sum_i \sum_j p_{ij} x_{1i} x_{2j} = \\ &= \sum_i x_{1i} \sum_j p_{ij} x_{2j} = \sum_j x_{2j} \sum_i p_{ij} x_{1i}. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Men berekent bv. eerst voor iedere kolom

$$S_{.j} = \sum_i p_{ij} x_{1i}$$

en dan daaruit

$$E(\underline{x}_1 \underline{x}_2) = \sum_j x_{2j} S_{.j}$$

Vraagstukken

4.3.1 Geef de populaties van de vraagstukken 4.2.1 - 4.2.5 weer in een Tabel van de vorm van Tabel 4.3.1 of 4.3.2.

4.3.2 Bij het werpen met twee dobbelstenen is

\underline{x}_1 = de laagste worp, \underline{x}_2 = de hoogste worp.

Worden gelijke punten geworpen dan hebben \underline{x}_1 en \underline{x}_2 dezelfde waarde.

Bereken $\text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ en $\rho(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$.

4.3.3 Uit 4 loten genummerd 1, 2, 3, 4 worden na elkaar zonder teruglegging twee loten getrokken.

We noemen

\underline{x}_1 = het nummer op het eerste lot,

\underline{x}_2 = " " " " tweede lot.

Bereken $\text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ en $\rho(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$.

$$\left(-\frac{5}{12} \quad -\frac{1}{3} \right)$$

4.4 Onafhankelijkheid

In aansluiting op 3.5 heet \underline{x}_2 onafhankelijk van \underline{x}_1 wanneer

$$P(x_{2j} | x_{1i}) = P(x_{2j}) = p_{.j}, \text{ voor } i = 1, \dots, r, \quad (4.4.1)$$

m.a.w. wanneer de voorwaardelijke verdeling van \underline{x}_2 voor iedere waarde van \underline{x}_1 steeds dezelfde is en dan ook gelijk is aan de marginale verdeling van \underline{x}_2 .

Uit (4.4.1) volgt

$$p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j}, \quad (4.4.2)$$

en uit de symmetrie van deze formule zien we dat wanneer \underline{x}_2 onafhankelijk is van \underline{x}_1 , \underline{x}_1 eveneens onafhankelijk is van \underline{x}_2 .

Zijn \underline{x}_1 en \underline{x}_2 onderling onafhankelijk dan is

$$E(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \sum_i \sum_j p_{i.} \cdot p_{.j} x_{1i} x_{2j} = \sum_i p_{i.} x_{1i} \sum_j p_{.j} x_{2j},$$

of wel

$$E(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = E(\underline{x}_1) \cdot E(\underline{x}_2), \quad (4.4.3)$$

en dus ingevolge (4.2.1)

$$\text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = 0, \quad (4.4.4)$$

een resultaat dat we vaak zullen toepassen. Het omgekeerde is niet waar; wanneer (4.4.4) geldt, volgt daaruit niet noodzakelijk dat \underline{x}_1 en \underline{x}_2 onderling onafhankelijk zijn. Vraagstuk 4.2.4 geeft een voorbeeld waar dit niet zo is.

Uit (4.4.4) leiden we nog een belangrijk resultaat af. Als \underline{x}_1 en \underline{x}_2 onderling ongecorreleerd zijn dan is

$$\begin{aligned} \text{var}(a\underline{x}_1 + b\underline{x}_2) &= E\{[a(\underline{x}_1 - \mu_1) + b(\underline{x}_2 - \mu_2)]^2\} = \\ &= E(a^2(\underline{x}_1 - \mu_1)^2) + E(b^2(\underline{x}_2 - \mu_2)^2) + E(2ab(\underline{x}_1 - \mu_1)(\underline{x}_2 - \mu_2)) = \\ &= a^2 \text{var}(\underline{x}_1) + b^2 \text{var}(\underline{x}_2). \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

4.5 Uitbreiding naar meer dan 2 dimensies

De uitbreiding naar meer dan 2 dimensies ligt voor de hand. Worden aan de elementen van een populatie 3 kenmerken \underline{x}_1 , \underline{x}_2 en \underline{x}_3 gemeten dan kunnen we algemeen stellen

$$P(\underline{x}_1 = x_{1i}, \underline{x}_2 = x_{2j}, \underline{x}_3 = x_{3k}) = p_{ijk}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, r_1 \\ j = 1, \dots, r_2 \\ k = 1, \dots, r_3 \end{array} \quad (4.5.1)$$

Dan is

$$P(\underline{x}_1 = x_{1i}, \underline{x}_2 = x_{2j}) = p_{ij.} = \sum_k p_{ijk},$$

$$P(\underline{x}_2 = x_{2j}) = p_{.j.} = \sum_i \sum_k p_{ijk},$$

en

$$p_{...} = 1 = \sum_j p_{.j.} = \sum_i \sum_j p_{ij.} = \sum_i \sum_j \sum_k p_{ijk}.$$

De toevalsvariabelen \underline{x}_1 , \underline{x}_2 en \underline{x}_3 heten dan onderling onafhankelijk indien voor ieder i , j , en k

$$\boxed{p_{ijk} = p_{i..} p_{.j.} p_{...k}} \quad (4.5.2)$$

Dit houdt dan vanzelf in dat ook

$$p_{ij.} = p_{i..} p_{.j.}$$

hetgeen we bewijzen door (4.5.2) naar k te sommeren. Is aan (4.5.2) voldaan, dan zijn dus \underline{x}_1 , \underline{x}_2 en \underline{x}_3 ook paarsgewijs onafhankelijk.

Verder bewijst men gemakkelijk dat, bij onafhankelijkheid,

$$\boxed{E(\underline{x}_1 \underline{x}_2 \underline{x}_3) = E(\underline{x}_1) E(\underline{x}_2) E(\underline{x}_3)} \quad (4.5.3)$$

of nog algemener

$$E\{g_1(\underline{x}_1) g_2(\underline{x}_2) g_3(\underline{x}_3)\} = E\{g_1(\underline{x}_1)\} E\{g_2(\underline{x}_2)\} E\{g_3(\underline{x}_3)\} \quad (4.5.4)$$

waarin g_1 , g_2 en g_3 willekeurige funkties zijn van \underline{x}_1 , \underline{x}_2 en \underline{x}_3 respectievelijk.

Zijn \underline{x}_1 , \underline{x}_2 en \underline{x}_3 onderling onafhankelijk, dan volgt hieruit

$$\boxed{\text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_3) = \text{cov}(\underline{x}_2, \underline{x}_3) = 0} \quad (4.5.5)$$

Deze formule vindt uitgebreide toepassing in de theorie van steekproeven. Zijn nl. \underline{x}_i , $i=1, \dots, n$ metingen aan de elementen van

een aselekt met teruglegging getrokken steekproef, dan zijn de \underline{x}_i 's alle onderling onafhankelijk. Dit geldt niet alleen voor metingen van eenzelfde soort, doch ook voor metingen van verschillende aard.

Trekken we bv. een aselechte steekproef met teruglegging uit de populatie van hard papieren schijfjes van Tabel 1.1.1 en meten we aan ieder element

$$\begin{aligned} \text{de dikte} &= \underline{x}_i, \\ \text{het gewicht} &= \underline{y}_i, \\ \text{de diameter} &= \underline{z}_i, \end{aligned}$$

dan kunnen \underline{x}_i , \underline{y}_i en \underline{z}_i onderling afhankelijk zijn, maar ze zijn onafhankelijk van \underline{x}_j , \underline{y}_j en \underline{z}_j wanneer $i \neq j$, dus is bv.

$$\text{cov}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = \text{cov}(\underline{x}_i, \underline{y}_j) = \text{cov}(\underline{x}_i, \underline{z}_j) = 0, \text{ enz.}$$

4.6 Kans

Tot slot van deze paragraaf komen we terug op het begrip kans. In §.1 hebben we gezegd dat we de bewering "de kans dat we met een dobbelsteen een 6 gooien is $\frac{1}{6}$ " kunnen we interpreteren als "de populatie van alle worpen met een dobbelsteen bestaat voor één zesde deel uit worpen = 6".

Beschouw een stochastische variabele \underline{x} met waarden 1 en 0 met kansen p en $1-p$. We nemen een aselechte steekproef met teruglegging uit deze populatie (grootte n). Met onze terminologie van boven zouden we zeggen: we gooien de dobbelsteen n keer. We definiëren nu

$$\bar{\underline{x}} = \frac{\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \dots + \underline{x}_n}{n}$$

en vatten deze $\bar{\underline{x}}$ op als één waarde van de stochastische variabele $\bar{\underline{x}}$. Uit de resultaten van deze paragraaf volgt

$$E(\bar{\underline{x}}) = \frac{E(\underline{x}_1) + \dots + E(\underline{x}_n)}{n} = E(\underline{x}) = p$$

en

$$\text{var}(\bar{\underline{x}}) = \frac{1}{n} \text{var}(\underline{x}) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Daar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(1-p)}{n} = 0$$

is dus hier bewezen dat de gemiddelde kwadratische afwijking van $\bar{\underline{x}}$

t.o.v. p willekeurig klein wordt als we n laten toenemen. (Dit heet de "wet van de grote aantallen".)

Dit betekent dat als we met de bovengenoemde dobbelsteen zeer vaak gooien (n keer) en het aantal zessen tellen (k) de volgende uitspraak kan worden gedaan. Bij gegeven ϵ wordt de ongelijkheid

$\left| \frac{k}{n} - \frac{1}{6} \right| > \epsilon$ steeds onwaarschijnlijker. Op deze wijze wordt de uitspraak "de kans op een 6 is $\frac{1}{6}$ " ook wel geïnterpreteerd.

§.5 Continue toevalsvariabelen

5.1 Definities

Tot zover hebben we toevalsvariabelen x ondersteld, die slechts een aantal discrete waarden x_i met kansen p_i aannemen. Vele metingen die we uitvoeren zoals lengte, diameter, gewicht, bezitten echter geen discrete maar een continue schaal. Weliswaar zijn we meestal genoodzaakt de metingen op een eindig aantal decimalen af te ronden, maar dit is alleen het gevolg van de technische onvolmaaktheden van de ons ter beschikking staande middelen. In principe denken we steeds aan continue variabelen.

De populatie van een continue toevalsvariabele wordt beschreven door de functie

$$F(x) = P(\underline{x} \leq x)$$

die we cumulatieve kans of cumulatieve verdeling noemen. Uit deze definitie volgt dat

$$P(a < \underline{x} \leq b) = F(b) - F(a). \quad (5.1.1)$$

Daar dit ≥ 0 moet zijn moet F een monotoon niet-dalende functie zijn. Verder zien we direct in dat

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} F(\xi) = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} F(\xi) = 0. \quad (5.1.2)$$

We zullen ons gewoonlijk beperken tot het geval dat $F(x)$ een differentieerbare functie is met continue afgeleide $f(x)$ (eventueel met uitzondering van een eindig aantal punten waar dan $F(x)$ nog wel continu is.) De functie $f(x)$ noemen we kansdichtheid van x . We spreken nu dus niet meer van de kans dat \underline{x} een bepaalde waarde x aanneemt ($P(\underline{x} = x) = 0$)

maar kunnen wel spreken van de kans $P(x < \underline{x} \leq x+h)$. Deze is bij benadering $h \cdot f(x)$ als h klein is.

Als we alles in f willen uitdrukken krijgen we de volgende formules

$$P(a < \underline{x} \leq b) = \int_a^b f(\xi) d\xi, \quad (5.1.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 1. \quad (\text{de totale kans}) \quad (5.1.4)$$

De definities van verwachtingswaarde en variantie ~~worden~~ ^{worden} nu

$$E(\underline{x}) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi) d\xi \quad (5.1.5)$$

$$\text{var}(\underline{x}) = E\{(\underline{x} - E(\underline{x}))^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \mu)^2 f(\xi) d\xi \quad (5.1.6)$$

en algemener

$$E(g(\underline{x})) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) f(\xi) d\xi. \quad (5.1.7)$$

(Opm. Ga na dat deze definitie inderdaad een generalisatie van (4.1.3) is. Denk aan de definitie van integraal.)

De formule

$$\text{var}(\underline{x}) = E(\underline{x}^2) - \{E(\underline{x})\}^2 \quad (5.1.8)$$

blijft van kracht.

Welke betekenis de waarde van $\text{var}(\underline{x})$ heeft zien we aan het volgende.

Laat \underline{x} een continue toevalsvariabele zijn met gemiddelde μ en variantie σ^2 . We vragen nu naar de kans dat \underline{x} meer dan k maal de standaardafwijking σ van het gemiddelde afwijkt, d.i.

$$P(|\underline{x} - \mu| > k\sigma).$$

Deze kans is

$$\int_{|\xi - \mu| > k\sigma} f(\xi) d\xi$$

en dus ook afhankelijk van de functie f . Een schatting vinden we door achter het integraalteken de faktor $\frac{(\xi - \mu)^2}{k^2 \sigma^2}$ op te nemen. (Deze is groter dan 1).

Dus

$$\begin{aligned} P(|\underline{x} - \mu| > k\sigma) &< \int_{|\xi - \mu| > k\sigma} \frac{(\xi - \mu)^2}{k^2 \sigma^2} f(\xi) d\xi \\ &\leq \frac{1}{k^2 \sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \mu)^2 f(\xi) d\xi = \frac{1}{k^2} \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

$f(x)$ kansdichtheid

$$P(x < \xi < x+h) = \int_x^{x+h} f(\xi) d\xi \approx h \cdot f(x)$$

Dit is een grove schatting, dus zal i.h.a. deze kans nog veel kleiner zijn.

Dit betekent dus dat het i.h.a. "niet waarschijnlijk" is dat een waarde van \underline{x} meer dan 2 à 3 maal σ van μ afwijkt. (Zie wat dit betreft ook §.4.6, opgave 5.2.9 en §.6.)

Vraagstukken

5.1.1 Bereken de constante A , $E(\underline{x})$, $E(\underline{x}^2)$ en $\text{var}(\underline{x})$ voor ieder der volgende gevallen.

- a) $f(x) = A$ voor $-\frac{1}{2}a \leq x \leq +\frac{1}{2}a$ en $f(x) = 0$ voor andere x ,
 b) $f(x) = Ax$ voor $0 \leq x \leq 2$ " " " " "
 c) $f(x) = Axe^{-x}$ voor $0 \leq x < \infty$ " " " " ".

5.1.2 Bereken voor de verdelingen a) en b) uit vraagstuk 5.1.1 $E(\underline{x}^3)$, $E(\underline{x}^4)$ en $\text{var}(\underline{x}^2)$.

5.2 Enige belangrijke continue verdelingen

Er is natuurlijk een onbepaalde variëteit van continue verdelingen denkbaar. Als voorbeelden vermelden we hier 3 verdelingen die veelvuldig worden toegepast en die we nog vaak zullen tegenkomen.

A) De normale verdeling of verdeling volgens Gauss:

$$f(x) = \varphi(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (5.2.1)$$

Dit is een symmetrische klokvormige verdeling als geschetst in Fig. 5.2.1, die volledig door het gemiddelde μ en de standaardafwijking σ wordt bepaald. Dit zijn de zg. parameters van de verdeling. De factor $1/\sqrt{2\pi}$ zorgt ervoor dat aan (5.1.4) is voldaan.

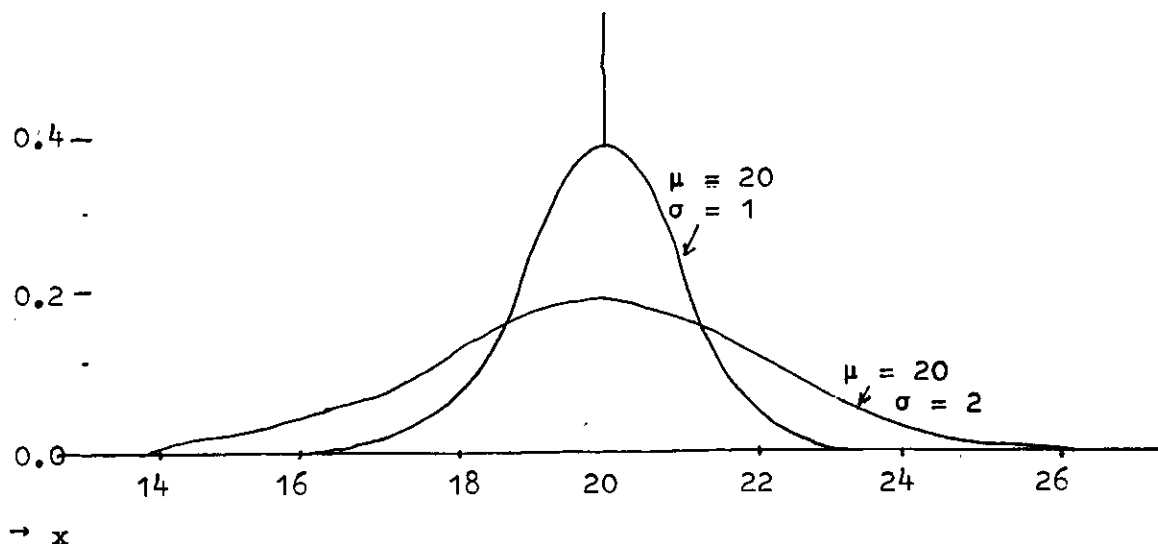


Fig. 5.2.1 Twee normale verdelingen

Stellen we

$$\underline{u} = \frac{x-\mu}{\sigma}, \quad u = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad (5.2.2)$$

dan volgt uit (5.2.1):

$$P(\underline{x} \leq x) = P(\underline{u} \leq u) = \int_{-\infty}^u \varphi(\underline{t}; 0, 1) d\underline{t}$$

met

commentaar
←

$$\varphi(u; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), \quad -\infty < u < +\infty \quad (5.2.3)$$

De variabele \underline{u} bezit een standaard normale verdeling, d.w.z. een normale verdeling met gemiddelde $\mu = 0$ en standaardafwijking $\sigma = 1$. Iedere normale variabele kan door de lineaire transformatie (5.2.2) in een standaard normale variabele worden omgezet.

Voor de cumulatieve normale verdeling vinden we

$$\begin{aligned} \Phi(x; \mu, \sigma) &= \int_{-\infty}^x \varphi(\xi; \mu, \sigma) d\xi = \int_{-\infty}^u \varphi(t; 0, 1) dt = \\ &= \Phi(u; 0, 1). \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

De functie $\Phi(u; 0, 1)$ is uitvoerig getabelleerd. Cp blz VI.43 is zo'n tabel afgedrukt.

Daar

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u) \quad (5.2.5)$$

kunnen waarden van $\Phi(u)$ voor negatieve u uit de waarden voor positieve u worden afgeleid.

De normale verdeling speelt in de toegepaste statistiek een belangrijke rol. Daarom hebben we voor deze verdeling een apart symbool ingevoerd. In het vervolg zullen we met

$$\varphi(x; \mu, \sigma) = \varphi(x) \quad \text{en} \quad \Phi(x; \mu, \sigma) = \Phi(x)$$

steeds een normale of cumulatieve normale verdeling bedoelen en met \underline{u} , of u een standaard normale variabele.

B) De exponentiële verdeling:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (5.2.6)$$

Dit is een verdeling met slechts één parameter λ . De vorm van de verdeling geeft Fig.5.2.2 weer.

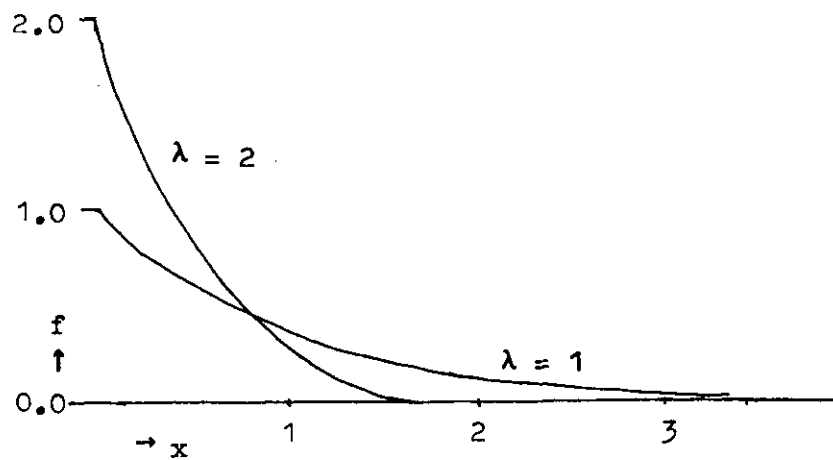


Fig.5.2.2 Twee exponentiële verdelingen

Voor de exponentiële verdeling gelden

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad (5.2.7)$$

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}, \quad (5.2.8)$$

$$\text{var}(x) = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (5.2.9)$$

Zij vindt uitgebreid toepassing bij wachttijdtheorieën e.d.

C) De rechthoekige verdeling

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{voor } a \leq x \leq b, \quad (5.2.10)$$

Zie fig.5.2.3.

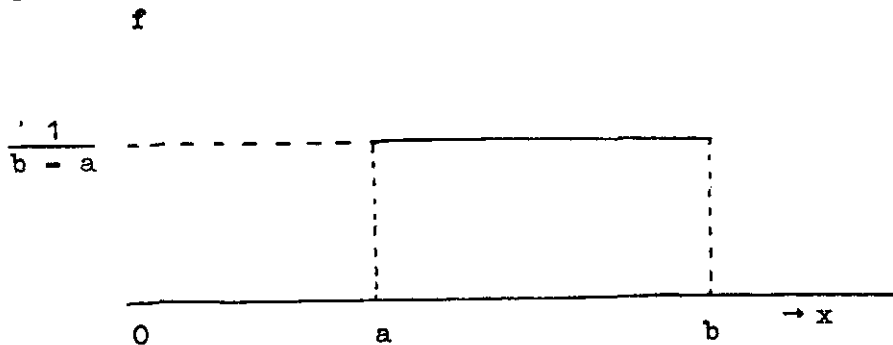


Fig. 5.2.3 Een rechthoekige verdeling

Afleesvoorbeeld, verklaring van symbolen

Als bijvoorbeeld $u = 2.02$, dan neemt men de rij aangeduid met 2.0 en de kolom met 0.2. Het gevonden getal geeft dan aan: $F(u)$ D.I. Het oppervlak onder de normale curve van $-\infty$ tot u . In formule

$$F(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-u^2}{2} du, \text{ waarin } u = \frac{x-\mu}{\sigma};$$

μ is het gemiddelde, σ is de standaardafwijking.

Voor negatieve waarden van u geldt: $F(-u) = 1 - F(u)$.

$f(u)$ is de ordinat behorende bij de waarden van u in de eerste kolom.

Vraagstukken

5.2.1 Gegeven \underline{x} heeft een normale verdeling met $\mu = 20$, $\sigma = 2$.

Gevraagd:

- a) $P(\underline{x} > 25)$, $0,0062$
 b) $P(\underline{x} < 17)$, $0,0668$
 c) $P(17 < \underline{x} < 23)$, $0,0664$

5.2.2 Zelfde verdeling als van vraagstuk 5.2.1.

- a) Voor welke waarde van x is $P(\underline{x} > x) = 0.01$,
 b) " " " " d is $P(\mu-d < \underline{x} < \mu+d) = 0.95$.

5.2.3 Zelfde verdeling als in 5.2.1

- a) Hoe groot is de kans dat 5 waarnemingen alle < 24 uitvallen?
 b) Hoe groot moet x zijn opdat de kans = 0.95 is dat 5 waarnemingen alle $< x$ uitvallen?
 $(0,9772)^5$

5.2.4 Een automatische draaibank produceert assen waarvan de diameter \underline{x} een normale verdeling bezit met

$$\mu = 5.010 \text{ mm}, \quad \sigma = 0.006 \text{ mm}.$$

De tolerantie-eisen zijn $5.000 \leq x \leq 5.020$ mm.

als $\mu = 5,005 \rightarrow 20,85\%$

- Vragen: a) Welk percentage producten valt buiten de toleranties?
 b) Wanneer het gemiddelde μ verloopt, doch σ constant blijft, hoe zal dan het percentage uitval met μ veranderen?
 c) Tot welke waarde moet men σ verkleinen, opdat bij een juiste instelling van μ het percentage uitval tot 1% wordt teruggebracht.

5.2.5 Bewijs dat voor een normale verdeling

$$E(\underline{x}) = \mu, \quad \text{var}(\underline{x}) = \sigma^2.$$

5.2.6 Bewijs formules (5.2.8) en (5.2.9).

5.2.7 Gegeven \underline{x} bezit een exponentiële verdeling met $\lambda = 2.0$.

- Gevraagd: a) $P(\underline{x} < 3.0)$,
 b) $P(\underline{x} > 0.5)$,
 c) $P(1.0 < \underline{x} < 4.0)$.

5.2.8 Bewijs formules (5.2.12) en (5.2.13).

5.2.9 Als \underline{x} een normale verdeling heeft met $E(\underline{x}) = \mu$ en $\text{var}(\underline{x}) = \sigma^2$ dan is

$$a) P(|\underline{x} - \mu| > 2\sigma) = 0.0456;$$

$$b) P(|\underline{x} - \mu| > 3\sigma) = 0.0026.$$

Vergelijk dit met formule (5.1.9). We passen dit toe in §.6.

5.3 Twee-dimensionale continue verdelingen

Vaak kan men aan één element van een populatie meer dan één kenmerk meten; bv. \underline{x}_1 = lengte, \underline{x}_2 = diameter. De gezamenlijke verdeling van \underline{x}_1 en \underline{x}_2 vormt dan een twee-dimensionale continue verdeling met een twee-dimensionale kansdichtheid, d.i. een functie $f(x_1, x_2)$ zodat voor ieder gebied R geldt:

$$P((\underline{x}_1, \underline{x}_2) \in R) = \iint_R f(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (5.3.1)$$

Dan is natuurlijk $f(x_1, x_2) \geq 0$ en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = 1. \quad (5.3.2)$$

De marginale verdelingen van \underline{x}_1 en \underline{x}_2 worden gegeven door

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \xi_2) d\xi_2,$$

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, x_2) d\xi_1. \quad (5.3.3)$$

De cumulatieve verdeling is

$$P(\underline{x}_1 \leq x_1, \underline{x}_2 \leq x_2) = F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (5.3.4)$$

De verwachtingswaarde van \underline{x}_1 wordt

$$\mu_1 = E(\underline{x}_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1 f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_1 f_1(\xi_1) d\xi_1. \quad (5.3.5)$$

De waarde van $E(\underline{x}_1)$ wordt dus geheel door de marginale verdeling van \underline{x}_1 bepaald. Hetzelfde geldt voor $E(\underline{x}_1^2)$, $\text{var}(\underline{x}_1)$. Evenzo worden $E(\underline{x}_2)$, $E(\underline{x}_2^2)$ en $\text{var}(\underline{x}_2)$ door de marginale verdeling van \underline{x}_2 bepaald.

De covariantie wordt gegeven door

$$\text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi_1 - \mu_1)(\xi_2 - \mu_2) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (5.3.6)$$

Is $g(\xi_1, \xi_2)$ een functie van ξ_1 en ξ_2 dan is

$$E(g(\underline{x}_1, \underline{x}_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi_1, \xi_2) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (5.3.7)$$

De formule

$$\text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = E\{(\underline{x}_1 - \mu_1)(\underline{x}_2 - \mu_2)\} = E(\underline{x}_1 \underline{x}_2) - \mu_1 \mu_2, \quad (5.3.8)$$

blijft van kracht.

De voorwaardelijke cumulatieve verdeling van \underline{x}_1 wordt als volgt gedefinieerd:

$$P(\underline{x}_1 \leq x | \underline{x}_2 = x_2) = \lim_{h \rightarrow 0} P(\underline{x}_1 \leq x | x_2 < \underline{x}_2 \leq x_2 + h).$$

Men kan bewijzen dat dan geldt

$$f_1(x_1 | x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)}, \quad (5.3.9)$$

en analoog voor de voorwaardelijke verdeling van \underline{x}_2

$$f_2(x_2 | x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)}. \quad (5.3.10)$$

\underline{x}_1 heet onafhankelijk van \underline{x}_2 indien de voorwaardelijke verdeling van \underline{x}_1 onafhankelijk is van \underline{x}_2 . Dan moet

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \quad (5.3.11)$$

en \underline{x}_2 is eveneens onafhankelijk van \underline{x}_1 . Zijn \underline{x}_1 en \underline{x}_2 onderling onafhankelijk dan is

$$E(\underline{x}_1 \underline{x}_2) = E(\underline{x}_1) \cdot E(\underline{x}_2) = \mu_1 \mu_2, \quad (5.3.12)$$

en dus

$$\text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = 0. \quad (5.3.13)$$

Evenals bij de discrete verdelingen is het omgekeerde niet waar; $\text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = 0$ bewijst geen onafhankelijkheid.

De uitbreiding van de boven gegeven beschouwingen naar meer dan twee dimensies ligt voor de hand en wordt daarom niet verder in detail weergegeven.

Vraagstukken

5.3.1 Gegeven de twee-dimensionale verdelingen.

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } f(x_1, x_2) = k \\ \text{b) } f(x_1, x_2) = kx_1 \\ \text{c) } f(x_1, x_2) = kx_1 x_2 \\ \text{en } f(x_1, x_2) = 0 \text{ buiten dit gebied.} \end{array} \right\} \text{ voor } \begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 1 \end{array}$$

Bereken voor ieder dezer verdelingen k en bereken de marginale verdelingen van \underline{x}_1 en van \underline{x}_2 . Bewijs dat \underline{x}_1 en \underline{x}_2 onafhankelijk zijn.

5.3.2 Beschouw dezelfde verdelingen als in vraagstuk 5.3.1 maar nu in het gebied

$$0 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2, \quad x_1 + x_2 \leq 1.$$

Bereken k , $\text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ en $\rho(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$. $\sim \frac{1}{2}$

$$k=2$$

$$E(\underline{x}_1) = \frac{1}{3} = E(\underline{x}_2)$$

$$E(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \frac{1}{12}$$

5.3.3 Bereken voor de verdelingen van vraagstuk 5.3.2

a) $P(\underline{x}_1 > \frac{1}{2}), \quad \frac{1}{4}$

d) $P(\underline{x}_1 > \frac{1}{2}, \underline{x}_2 > \frac{2}{3}) = 0$

b) $P(\underline{x}_2 > \frac{1}{3}), \quad \frac{4}{9}$

c) $P(\underline{x}_1 > \frac{1}{2}, \underline{x}_2 > \frac{1}{3}), \quad \frac{1}{36}$

5.3.4 Gegeven: $f(x_1, x_2) = kx_1 e^{-(x_1 + x_2)}$.

Beschouw deze functie

a) voor $0 \leq x_1 < \infty, \quad 0 \leq x_2 < \infty,$

b) voor $0 \leq x_1 \leq x_2 < \infty, \quad \text{---} \quad k=4$

$$f(x_1) = 4x_1 e^{-2x_1}$$

$$f(x_2) = 4e^{-x_2} (1 - e^{-x_2} - x_2 e^{-x_2})$$

met $f(x_1, x_2) = 0$ buiten deze gebieden.

Bereken in beide gevallen k , de marginale verdelingen van \underline{x}_1 en \underline{x}_2 en $\text{cov}(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$.

5.4 De twee-dimensionale normale verdeling

Onder de vele denkbare twee-dimensionale verdelingen is er één die in de statistische theorie een belangrijke rol speelt; dat is de twee-dimensionale verdeling;

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \exp\left(-\frac{G}{2}\right) \quad (5.4.1)$$

waarin

$$G = \frac{1}{1-\rho^2} \left\{ \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{2\rho(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right\}. \quad (5.4.2)$$

Deze verdeling wordt bepaald door 5 parameters:

de verwachtingswaarden μ_1 en μ_2 ,

de standaardafwijkingen σ_1 en σ_2 ,

en de correlatiecoëfficiënt ρ .

\underline{x}_1 en \underline{x}_2 hebben beide normale marginale verdelingen met respectievelijk μ_1, σ_1 en μ_2, σ_2 als parameters.

We zullen deze verdeling verder niet in detail behandelen.

5.5 Transformaties van toevalsvariabelen

Soms rijst de vraag: gegeven een toevalsvariabele \underline{x} , wat is de verdeling van $\underline{y} = g(\underline{x})$ wanneer $g(\underline{x})$ een gegeven functie is.

Is \underline{x} een discrete variabele dan moeten we eenvoudig de waarden x_i die \underline{x} kan aannemen vervangen door $y_i = g(x_i)$; de bijbehorende kansen p_i blijven ongewijzigd.

Is \underline{x} een continue variabele dan werken we met de cumulatieve verdeling. Laat $x = h(y)$ de inverse zijn van de monotoon toenemende en differentieerbare functie $y = g(x)$. Dan is

$$P(\underline{y} \leq y) = P(\underline{x} \leq h(y)) = \int_{-\infty}^{h(y)} f(\xi) d\xi \quad (5.5.1)$$

en de getransformeerde kansdichtheid is dus

$$\frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{h(y)} f(\xi) d\xi = f[h(y)] \cdot h'(y). \quad (5.5.2)$$

Is $h(y)$ dalend dan vinden we dezelfde formule met $|h'(y)|$ i.p.v. $h'(y)$.
Immers, dan is

~~Immers, dan is~~

$$P(\underline{y} \leq y) = P(\underline{x} \geq h(y)) = 1 - P(\underline{x} < h(y)). \quad (5.5.3)$$

Als $g(x)$ niet monotoon is dan moeten we het gebied waarover x kan variëren splitsen in deelgebieden waarin $g(x)$ wel monotoon is, de transformatie in deze gebieden apart uitvoeren en de verkregen functies samenvoegen.

Voorbeelden

$$A) \quad f(x) = e^{-x}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad y = x^2, \quad x = \sqrt{y}.$$

De getransformeerde verdelingsfunctie is

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, \quad 0 \leq y < \infty.$$

$$B) \quad f(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad y = x^2, \quad \begin{array}{l} x = \sqrt{y} \quad \text{voor } 0 \leq x \leq 1, \\ x = -\sqrt{y} \quad \text{voor } -1 \leq x \leq 0. \end{array}$$

We vinden nu als kansdichtheid voor y :

$$2 \cdot \frac{1}{4\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Ook bij meer-dimensionale verdelingen zijn dergelijke transformaties mogelijk. Is bv. gegeven een twee-dimensionale verdeling $f_{\underline{x}}(x_1, x_2)$ en een transformatie

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_1(x_1, x_2) \quad \underline{v}_2 = \underline{v}_2(x_1, x_2)$$

met een inverse transformatie

$$x_1 = x_1(v_1, v_2), \quad x_2 = x_2(v_1, v_2),$$

dan is

$$f_v(v_1, v_2) = f_x(x_1(v_1, v_2), x_2(v_1, v_2)) \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(v_1, v_2)} \right| \quad (5.5.4)$$

waarin $\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(v_1, v_2)}$ de determinant van Jacobi is. Voorwaarde is, dat x_1, x_2 en v_1, v_2 elkaar over en weer éénduidig bepalen.

Voorbeeld

$$f_x(x_1, x_2) = e^{-(x_1 + x_2)}, \quad 0 \leq x_1 < \infty, \quad 0 \leq x_2 < \infty. \quad (5.5.5)$$

Stel

$$v_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad v_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

dan is

$$x_1 = v_1 + v_2, \quad x_2 = v_1 - v_2,$$

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(v_1, v_2)} = -2,$$

en dus

$$f_v(v_1, v_2) = 2e^{-2v_1}$$

met

$$0 < v_1 \leq \infty, \quad -v_1 \leq v_2 \leq v_1.$$

De moeilijkheid zit voornamelijk in het vaststellen van het gebied waarbinnen v_1 en v_2 moeten liggen.

Vraagstukken

5.5.1 Gegeven: \underline{x} heeft een standaard rechthoekige verdeling:

$$f(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Gevraagd: De verdeling van $\underline{y} = -\ln \underline{x}$.

5.5.2 Gegeven: \underline{x} heeft een continue verdeling $f(x)$.

Gevraagd: de verdeling van $\underline{y} = F(x)$,

$$\text{waarin } F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi.$$

5.5.3 Gegeven u heeft een standaard normale verdeling.

Gevraagd: de verdeling van u^2 .

5.5.4 Gegeven voor x_1 en x_2 de volgende grenzen.

A) $0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1,$

B) $0 < x_1, \quad 0 < x_2, \quad x_1 + x_2 < 1.$

C) $0 < x_1 < \infty, \quad 0 < x_2 < \infty,$

D) $-\infty < x_1 < +\infty, \quad 0 < x_2 < \infty,$

E) $-\infty < x_1 < +\infty, \quad -\infty < x_2 < +\infty.$

Gevraagd: wat is voor ieder van deze gebieden het corresponderende gebied voor

a) $v_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad v_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$

b) $v_1 = x_1 x_2, \quad v_2 = \frac{x_1}{x_2}.$

In hoeverre is er een eenduidig verband tussen x_1, x_2 en v_1, v_2 ?

5.5.5 Gegeven:

$$f_x(x_1, x_2) = 4x_1 x_2, \quad 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1.$$

Gevraagd de twee-dimensionale verdeling van

$$v_1 = \sqrt{x_1 x_2}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}.$$

Wat zijn de grenzen voor v_1 als v_2 gegeven is, en wat de grenzen voor v_2 als v_1 gegeven is?

5.6 Afgeleide verdelingen

Een probleem verwant aan de voorgaande § dat veelvuldig voorkomt, is het volgende:

Gegeven x_1, x_2, \dots, x_n zijn n toevalsvariabelen met gezamenlijke kansdichtheid

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

Gevraagd de verdeling van

$$g = g(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

In principe is de oplossing eenvoudig. De kans

$$P(g_1 < g < g_2)$$

wordt gegeven door

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

(5.6.1)

te integreren over het gebied waarvoor

$$g_1 < g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < g_2. \quad (5.6.2)$$

Of alternatief vinden we de cumulatieve kans

$$P(g < g)$$

door integratie van (5.6.1) over het gebied waarvoor

$$g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < g. \quad (5.6.3)$$

Dit is niet anders dan een toepassing van de somregel voor elkaar uitsluitende uitkomsten.

Voorbeelden

A) x_1, x_2 zijn twee onafhankelijke waarnemingen uit een standaard rechthoekige verdeling. Stel y_1 is de kleinste, y_2 de grootste.

Gevraagd wordt de verdeling van

$$a) y_1 \quad b) y_2 - y_1 \quad c) \frac{1}{2}(y_2 + y_1).$$

De gezamenlijke verdeling van x_1 en x_2 is

$$f(x_1, x_2) = 1, \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1. \quad (5.6.4)$$

Daar x_1 en x_2 gelijke kansen hebben om de kleinste of de grootste te zijn wordt de gezamenlijke verdeling van y_1 en y_2 gegeven door

$$f(y_1, y_2) = 2, \quad 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1. \quad (5.6.5)$$

Door integratie naar y_2 vinden we het antwoord op vraag a)

$$f(y_1) = 2 \int_{y_1}^1 dy_2 = 2(1 - y_1). \quad (5.6.6)$$

Voeren we nu als nieuwe variabelen in

$$v_1 = y_1, \quad v_2 = y_2 - y_1, \quad y_2 = v_1 + v_2$$

dan vinden we

$$f(v_1, v_2) = 2, \quad (5.6.7)$$

met $0 \leq v_1 \leq 1, \quad 0 \leq v_2 \leq 1, \quad v_1 + v_2 \leq 1.$

Integratie naar v_1 geeft het antwoord op vraag b)

$$b) f(v_2) = 2(1 - v_2). \quad (5.6.8)$$

Dit is dezelfde verdeling als onder (a) gevonden. Wanneer we dus een lijnsegment door middel van twee willekeurig gekozen punten in 3 stukken verdelen hebben deze drie stukken dezelfde statistische verdeling. Voeren we als nieuwe variabelen in

$$v_1 = y_1, \quad v_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

dan volgt

$$f(v_1, v_2) = 4 \quad (5.6.9)$$

met $0 \leq v_1 \leq 2v_2 - v_1 \leq 1.$

Uit deze voorwaarden volgt

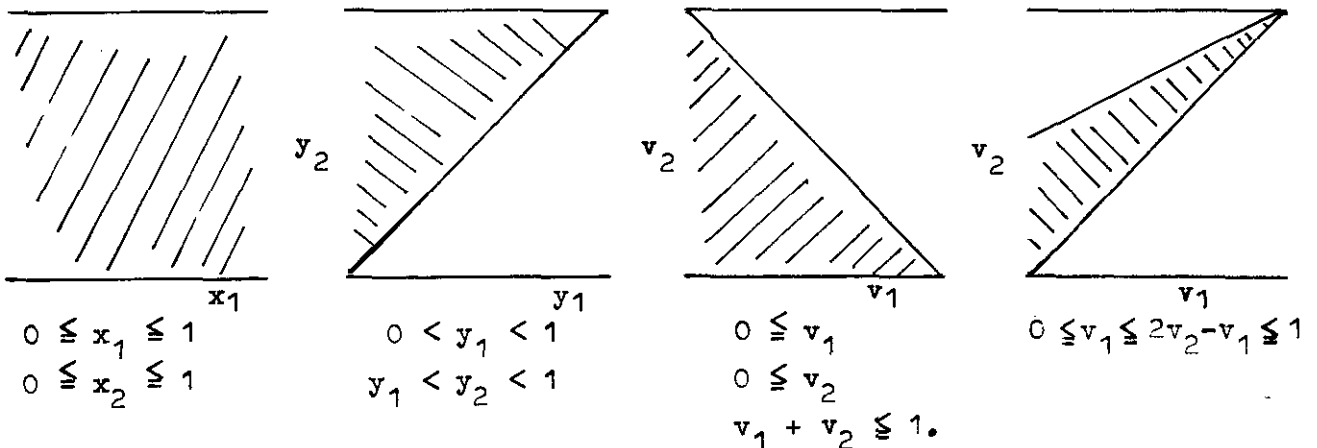
$$0 \leq v_1 \leq v_2, \quad \text{voor } v_2 \leq \frac{1}{2},$$

$$2v_2 - 1 \leq v_1 \leq v_2, \quad \text{voor } v_2 \geq \frac{1}{2}$$

en door integratie van (5.6.9) tussen deze grenzen vinden we

$$f(v_2) \begin{cases} = 4v_2 & \text{voor } 0 \leq v_2 \leq \frac{1}{2} \\ = 4(1-v_2), & \frac{1}{2} \leq v_2 \leq 1. \end{cases} \quad \text{en} \quad (5.6.10)$$

Hieronder volgt nog een tekening van de integratiegebieden, die bij de verschillende variabelen behoren. Een dergelijke tekening kan de situatie vaak zeer veel verduidelijken.



B) Gegeven: \underline{x}_1 en \underline{x}_2 zijn onafhankelijke standaard normale variabelen. Gevraagd de verdeling van

$$y_1 = a_1 \underline{x}_1 + a_2 \underline{x}_2.$$

We hebben

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \right\}. \quad (5.6.11)$$

$-\infty < x_1 < +\infty, \quad -\infty < x_2 < +\infty.$

Voeren we in

$$y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad y_2 = a_2 x_1 - a_1 x_2$$

dan wordt

$$f^*(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi(a_1^2 + a_2^2)} \exp \left\{ -\frac{y_1^2 + y_2^2}{2(a_1^2 + a_2^2)} \right\} \quad (5.6.12)$$

met $-\infty < y_1 < +\infty, \quad -\infty < y_2 < +\infty,$

hetgeen we kunnen splitsen in

$$f^*(y_1, y_2) = f^*(y_1) \cdot f^*(y_2) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(a_1^2 + a_2^2)}} \exp \left\{ -\frac{y_1^2}{2(a_1^2 + a_2^2)} \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(a_1^2 + a_2^2)}} \exp \left\{ -\frac{y_2^2}{2(a_1^2 + a_2^2)} \right\} \quad (5.6.13)$$

We zien hieruit dat y_1 en y_2 beide een normale verdeling bezitten met standaardafwijking $\sigma = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. (Dit laatste was al on 4.4.5 aangetoond)

Dit resultaat kunnen we nu verder generaliseren.

Stel

$$\underline{x}_1 = \mu_1 + \underline{u}_1 \sigma_1, \quad \underline{x}_2 = \mu_2 + \underline{u}_2 \sigma_2$$

zijn twee onafhankelijke normale variabelen met gemiddelden μ_1, μ_2 en standaardafwijkingen σ_1 en σ_2 .

is

$$\underline{y} = a_1 \underline{x}_1 + a_2 \underline{x}_2,$$

dan is

$$(y - a_1 \mu_1 - a_2 \mu_2) = a_1 \sigma_1 \frac{\underline{x}_1 - \mu_1}{\sigma_1} + a_2 \sigma_2 \frac{\underline{x}_2 - \mu_2}{\sigma_2}.$$

Verder hebben $(\underline{x}_1 - \mu_1)/\sigma_1$ en $(\underline{x}_2 - \mu_2)/\sigma_2$ standaard normale verdelingen. Dus heeft

$$(\underline{y} - a_1 \mu_1 - a_2 \mu_2)$$

een normale verdeling met gemiddelde 0 en standaardafwijking

$$\sigma = \sqrt{a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2} \quad \text{en} \quad \underline{y} = a_1 \underline{x}_1 + a_2 \underline{x}_2 \quad \text{een normale verdeling met}$$

$$\mu_Y = a_1\mu_1 + a_2\mu_2, \quad \sigma_Y = \sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2}.$$

Door volledige inductie vinden we algemeen

$$\text{is } Y = \sum a_i x_i, \quad x_i = \mu_i + u_i \sigma_i,$$

$$\text{dan is } Y = \sum a_i \mu_i + u \sqrt{\sum a_i^2 \sigma_i^2}.$$

(5.6.14)

C) Een ander belangrijk voorbeeld is het volgende.
Gegeven

$$u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

is een serie van n onafhankelijke standaard normale variabelen.

Gevraagd: de verdeling van $\underline{x}_n^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2$.

We hebben

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = (2\pi)^{-n/2} \exp\{-\frac{1}{2} \sum u_i^2\}.$$

Voor $x \leq 0$ is $P(\underline{x}_n^2 \leq x) = 0$ en voor $x > 0$ is

$$P(\underline{x}_n^2 \leq x) = \int \dots \int_G f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n$$

waarin G de n -dimensionale bol is met straal \sqrt{x} .

(Ga m.b.v. Wiskunde II Hfdst. XI §.4 en Hfdst. X §.3 na dat een

n -dimensionale bol met straal r inhoud $\frac{2^n}{n!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{[n/2]} r^n = A_n r^n$ heeft.)

Door op "bol"-coördinaten over te gaan vinden we

$$P(\underline{x}_n^2 \leq x) = \int_0^{\sqrt{x}} (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot n A_n r^{n-1} dr.$$

Stel $B_n = (2\pi)^{-n/2} \frac{n A_n}{2}$ en differentieer bovenstaand resultaat naar x .

We vinden als kansdichtheid voor \underline{x}_n^2 :

$$f(x) = B_n \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot x^{\frac{n-2}{2}} \quad (5.6.15)$$

Dit heet de χ^2 -verdeling. Deze verdeling is door één parameter n bepaald die bekend staat als het aantal vrijheidsgraden.

De χ^2 -verdeling speelt in de statistiek een grote rol.

D) We beschouwen een variabele met exponentiële verdeling

$$f(x) = e^{-x} \quad \text{voor } 0 \leq x < \infty.$$

Laat x_1, x_2, \dots, x_n een aselechte steekproef uit deze verdeling zijn.
 We beschouwen $Y = \sum x_i$ en vragen naar de verdeling van deze variabele.
 Nu is

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp(-x_1 - x_2 - \dots - x_n)$$

en dus

$$P(Y \leq y) = \int_G \dots \int \exp(-x_1 - x_2 - \dots - x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

waarbij G het gebied:

$$\{x_i \geq 0 \text{ voor } i = 1, 2, \dots, n; x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq y\}$$

is.

De integraal bepalen we door het gebied in schijven te verdelen loodrecht op $(1, 1, 1, \dots, 1)$. Daar

$$\int_G \dots \int dx_1 \dots dx_n = \frac{y^n}{n!}$$

vinden we

$$P(Y \leq y) = \int_0^y e^{-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt \quad (5.6.16)$$

De kansdichtheid van Y is dus

$$f(y) = \frac{1}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-y}. \quad (5.6.17)$$

Deze verdeling staat bekend als de Γ -verdeling. Door vergelijking met (5.6.15) zien we dat de variabele $\frac{1}{2} x_n^2$ een Γ -verdeling heeft.

Vraagstukken

5.6.1 x_1 en x_2 zijn onafhankelijke variabelen met een standaard rechthoekige verdeling. y_1 is de kleinste, y_2 de grootste.

Gevraagd $E(y_1)$, $E(y_2)$, $\text{var}(y_1)$, $\text{var}(y_2)$, $\text{cov}(y_1, y_2)$, $\rho(y_1, y_2)$.

5.6.2 Bepaal in het voorgaande vraagstuk de verdeling van $\frac{1}{2}(y_2 + y_1)$ door middel van de transformatie:

$$y_1 = \frac{1}{2}(y_2 + y_1), \quad y_2 = \frac{1}{2}(y_2 - y_1)$$

Teken het integratiegebied. Deze transformatie is symmetrisch in y_1 en y_2 en geeft een eenvoudiger integratiegebied dan de transformatie gebruikt in voorbeeld A.

5.6.3 \underline{x}_1 , \underline{x}_2 en \underline{x}_3 zijn onafhankelijke variabelen met een standaard rechthoekige verdeling. Zij \underline{y}_1 de kleinste, \underline{y}_2 de middelste en \underline{y}_3 de grootste.

Vragen:

- Wat is de gezamenlijke verdeling van \underline{y}_1 en \underline{y}_2 ?
- Wat is de verdeling van \underline{y}_1 alleen en \underline{y}_2 alleen?
- Bereken $E(\underline{y}_1)$, $E(\underline{y}_2)$, $\text{var}(\underline{y}_1)$, $\text{var}(\underline{y}_2)$, $\text{cov}(\underline{y}_1, \underline{y}_2)$ en $\rho(\underline{y}_1, \underline{y}_2)$.

5.6.4 \underline{x}_1 en \underline{x}_2 zijn onafhankelijke variabelen met de exponentiële verdeling

$$f(x) = e^{-x}, \quad 0 \leq x < \infty.$$

Vraag: Wat is de verdeling van $\underline{x}_1 - \underline{x}_2$?

5.6.5 \underline{x}_1 en \underline{x}_2 zijn onafhankelijk met exponentiële verdelingen

$$f_1(x_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}, \quad 0 \leq x_1 < \infty,$$

$$f_2(x_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}, \quad 0 \leq x_2 < \infty,$$

\underline{y} is de kleinste van \underline{x}_1 en \underline{x}_2 .

Bewijs dat \underline{y} een exponentiële verdeling bezit met

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$$

5.6.6 \underline{x}_i , $i=1, \dots, n$ zijn n onafhankelijke waarnemingen met exponentiële verdeling

$$f_i(x_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i x_i}, \quad 0 \leq x_i < \infty.$$

Is \underline{y} de kleinste van de \underline{x}_i 's dan heeft \underline{y} een exponentiële verdeling

$$f(y) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad 0 \leq y < \infty$$

met $\lambda = \sum_i \lambda_i$.

Bewijs dit¹

5.6.7 \underline{x}_1 en \underline{x}_2 zijn onafhankelijk met standaard rechthoekige verdelingen.

Gevraagd:

a) wat is de verdeling van $\frac{\underline{x}_1}{\underline{x}_2}$?

b) wat is de verdeling van $\underline{x}_1 \underline{x}_2$?

§.6 Enige opmerkingen over toepassingen in de statistiek

6.1 Steekproeven

Zoals al eerder opgemerkt komen we in de praktijk vaak stochastische variabelen \underline{x} tegen waarvan de verdeling niet bekend is. I.h.a. willen we dan toch een uitspraak doen over het gemiddelde van deze variabele. We nemen een aselechte steekproef van n waarden en bepalen het gemiddelde

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

We doen dit één maal maar kunnen ons indenken dat we het zeer vele malen zouden kunnen doen. We zouden dan steeds andere steekproefgemiddelden vinden. De waarde van \bar{x} is zelf weer één waarde van een stochastische variabele!

Laat $f(x)$ de kansdichtheid van \bar{x} zijn. Daar we onafhankelijkheid hebben is de verdelingsfunctie van het n -tal (x_1, x_2, \dots, x_n)

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_1)f(\xi_2)\dots f(\xi_n).$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} E(\bar{x}) &= E \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n \\ &= \mu \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

en

$$\text{var}(\bar{x}) = E [(\bar{x} - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{6.1.2}$$

We zien dus dat \bar{x} een waarde is van een stochastische variabele die hetzelfde gemiddelde heeft als \underline{x} en een standaardafwijking gelijk aan

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ maal die van \underline{x} . (Zie ook §.4.6.)

De waarde \bar{x} is dus een goede schatting voor μ . Zonder bewijs vermelden we nog dat de variantie binnen de steekproef een goede schatting is voor σ^2 als n groot is, d.w.z. we benaderen

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \tag{6.1.3}$$

Deze resultaten gecombineerd met formule (5.1.9) en vraagstuk (5.2.9) zijn de grondslag van de theorie van steekproeven. Aan de hand van enkele voorbeelden zullen we dit toelichten. We noemen eerst nog een tweede principe dat zeer veel toepassing vindt in de statistiek.

We hebben gezien dat $\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sigma}$ waarde is van een stochastische variabele met gemiddelde 0 en standaardafwijking 1. Men kan bewijzen dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\lambda_1 < \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sigma} < \lambda_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (6.1.4)$$

(centrale limietstelling)

onafhankelijk van de verdeling van \underline{x} . Dit betekent dus dat voor grote n (we laten in het midden wat dit betekent) de verdeling van de variabele "steekproefgemiddelde" benaderd wordt door de normale verdeling. In de praktijk neemt men aan dat deze benadering gebruikt mag worden. Ook bij discrete verdelingen wordt van dit principe gebruik gemaakt zoals we aan enkele voorbeelden zullen zien.

Voorbeelden

A) Van een zeer grote populatie voorwerpen is het gemiddelde gewicht 100 gram met standaardafwijking 5 gram. Men heeft een partij van 400 van deze voorwerpen met gemiddelde gewicht 100,3 gram. Is het redelijkerwijs aannemelijk dat we te maken hebben met een aselechte steekproef uit de gegeven populatie?

Antwoord: Als we een steekproef van 400 nemen en daarvan \bar{x} bepalen is dit een waarde van een stochastische variabele met $\mu = 100$ en

$$\sigma = \frac{5}{\sqrt{400}} = 0,25.$$

De waarde 100,3 wijkt 0,3 af van μ , dat is een afwijking van iets meer dan σ . Het is dus heel goed mogelijk dat we met een steekproef uit de gegeven populatie te maken hebben.

B) Een fysische grootheid wordt 36 keer gemeten met als resultaat

meting	0,97	0,98	0,99	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04
frekwentie	2	4	6	8	9	3	3	1

We willen nu een uitspraak doen en zeer weinig risico lopen dat deze uitspraak onjuist is. We gebruiken bijv. vraagstuk (5.2.9)b.

We hebben: $\bar{x} = \frac{1}{36} (2 \times 0,97 + 4 \times 0,98 + \dots + 1,04) = 1,002.$

We schatten σ via $\sigma \approx \sqrt{\frac{1}{36} \sum (x_i - 1,002)^2} = 0,017.$

Voor $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ vinden we dus 0,003.

Als we bij al onze uitspraken een afwijking van het gemiddelde kleiner dan 3 keer de standaardafwijking aanhouden is in 99 $\frac{1}{2}$ % van de gevallen onze uitspraak juist. We durven met grote zekerheid te beweren dat de te meten grootte tussen 0,993 en 1,011 ligt.

Als we het resultaat van vraagstuk (5.2.9)a gebruiken zullen we in ~~5~~ 5% van de gevallen een foute uitspraak doen maar de uitspraken zijn dan scherper. In dit geval zouden we de grenzen 0,996 en 1,008 vinden.

C) (Uit C.E. Weatherburn: Mathematical Statistics, Cambridge 1952). Een steekproef van 6400 engelsen heeft een gemiddelde lengte van 67.85 inches met standaardafwijking 2.56 inches. Een steekproef van 1600 australiërs een gemiddelde van 68.55 met standaardafwijking 2.52 inches. Kunnen we hieruit concluderen dat australiërs waarschijnlijk gemiddeld langer zijn dan engelsen?

Antwoord: Noem de steekproefgemiddelden \bar{x} resp. \bar{y} en beschouw $\bar{y} - \bar{x}$ als waarde van een stochastische variabele. De vraag is dan of deze variabele een positief gemiddelde heeft. Zoals boven uiteengezet nemen we aan dat

\bar{x} en \bar{y} uit normale verdelingen komen met $\sigma_1 = \frac{2.56}{80} = 0.032$ en

$\sigma_2 = 0.063$. Volgens §.5.6 voorbeeld B heeft $\bar{y} - \bar{x}$ een normale verdeling met $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = 0.07$.

De waarde van $\bar{y} - \bar{x}$ die is gemeten is $68.55 - 67.85 = 0.70$ dat is 10 σ meer dan 0. Dat betekent dat het uiterst onwaarschijnlijk is dat het gemiddelde van $\bar{y} - \bar{x}$ niet positief zou zijn.

D) We tollen 100 maal met een munt en krijgen 84 keer munt. Kunnen we hieruit concluderen dat de kans op munt groter is dan $\frac{3}{4}$?

Antwoord: Stel de kans op munt p . Dan is de kans dat het gemiddelde \bar{x} van n worpen méér van p afwijkt dan 2 keer de spreiding $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ circa 5%. Met $\bar{x} = 0.84$ en $p = 0,75$ vinden we inderdaad

$$0,84 - 0,75 > 2 \sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{100}} .$$

Bij $p = \frac{3}{4}$ is de kans op de gevonden uitkomst dus gering.

De conclusie $p > \frac{3}{4}$ is dus gerechtvaardigd; de "kans dat deze conclusie onjuist is" is nl. gering.