TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE V

Syllabus van het College van

Prof. Dr. J.H. van Lint

Gegeven in het Najaarssemester 1963

Onderafdeling der Wiskunde

Afd. Algemene Wetenschappen

WISKUNDE V

SYLLABUS VAN HET COLLEGE
COMPLEXE-FUNCTIETHEORIE
GEGEVEN IN HET
NAJAARSSEMESTER 1963
DOOR
PROF. DR. J.H. VAN LINT

TYPEWERK VERZORGD DOOR MEJ. A.N.M. VAN DE GRIENDT

TECHNISCHE HOGESCHOOL
EINDHOVEN

ENKELE (BIBLIOGRAFISCHE) NOTITIES
bij
Wiskunde V (1963)

Het college Wiskunde V was standaard hetzelfde voor alle afdelingen, hoewel niet verplicht voor Werktuigbouw en Chemische Technologie. In de alleroudste versie (t/m 1961) staat een paragraaf over de Kramers-Kronig relaties. In 1962 is deze versie herzien en komen de K.-K.-relaties niet meer voor. Op wat kleine interne herverkavelingen na treden er, zeker tot 1985, geen veranderingen meer op in Wiskunde V. Vanaf begin jaren 80 is er wel een naamswisseling: Vanaf dan heet dit vak Wiskunde 50, dan wel Wiskunde 52.

JdG, 9 Juni 2005.

Wiskunde
Complexe-functietheori
Prof. van Lin
Prijs f 1,3

ONDERAFDELING DER WISKUNDE

AFD. ALGEMENE WETENSCHAPPEN

W I S K U N D E V

Syllabus van het college complexe-functietheorie
gegeven in het najaarssemester 1963

door

PROF. DR. J. H. VAN LINT

Technische Hogeschool Eindhoven

I N H O U D

LITERATUUR

Knopp, Funktionentheorie I, II. Sammlung Göschen Nrs 668, 703.
Aufgabensammlung zur Funktionentheorie I, II. Sammlung Göschen Nrs 877, 878.

Whittaker-Watson, A course of modern analysis.

HOOFDSTUK I. Grondbegrippen

§.1 Complexe getallen

De definitie en eigenschappen van de complexe getallen zoals in het college wiskunde I-II ingevoerd worden bekend verondersteld. We herhalen de belangrijkste punten.
Door in de 2-dimensionale vectorruimte R_2 een operatie "vermenigvuldiging" in te voeren door: $(a,b) \times (c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$ kregen we een systeem van dingen waarmee gerekend kan worden precies als met de reële getallen. Deze dingen zijn toen complexe getallen genoemd. Het bleek zinvol de complexe getallen $(a,0)$ te identificeren met de reële getallen (door a te schrijven i.p.v. $(a,0)$). Voor het getal $(0,1)$ werd de afkorting i ingevoerd. Daardoor kunnen we ieder complex getal z eenduidig schrijven als $x+iy$ waarin x en y reële getallen zijn, genaamd reële deel en imaginaire deel van z.

Notatie: $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$. Het getal $x-iy$ werd complex-geconjugeerde van z genoemd,

notatie: $\bar{z} = x - iy$.

Men kan complexe getallen ook representeren door argument en modulus (absolute waarde), waartoe men wordt geleid als men in het complexe vlak poolcoördinaten invoert: r = afstand tot de oorsprong, φ = hoek van de voerstraal met de positieve x-as. De richting van toenemende φ is die tegen de beweging van de wijzers van een klok. De hoek φ is door (x,y) op gehele veelvouden van 2π na bepaald, en wel geldt

$$x = r \cos \varphi,\quad y = r \sin \varphi.$$

Onder modulus of absolute waarde van z wordt verstaan het niet-negatieve getal

$$r = |z| = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant 0.$$

De hoek φ noemt men het argument van z:

$$\varphi = \arg z.$$

Een complex getal kunnen we dus schrijven als

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Met behulp hiervan heeft men in het eerstejaarscollege de eenvoudige eigenschappen van complexe getallen leren verwerken.

Een nieuw begrip voor U is dat van HOOFDWAARDE van arg z. Zoals reeds opgemerkt, is het argument van z pas op een geheel veelvoud van 2π na eenduidig bepaald. Men spreekt nu van hoofdwaarde van arg z als men zich beperkt tot het interval (links open, rechts gesloten)

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi .$$

Onder arg z zonder meer zullen we in dit college steeds deze hoofdwaarde verstaan. Het belang daarvan zal later ter sprake komen.

§.2 Verzamelingen van complexe getallen

De totaliteit van alle complexe getallen is een "verzameling" U, het universum. Andere verzamelingen van complexe getallen kunnen we vormen door uit te gaan van een voorschrift, een wet, een afspraak, enz. Complexe getallen die daaraan voldoen stoppen we in één pot. De rest der complexe getallen blijft er buiten. In plaats van pot spreken we dan liever van verzameling. De woorden: complex getal, element, en punt zijn in het vervolg synoniemen.

Zij V een of andere verzameling van complexe getallen. Om uit te drukken dat een bepaald complex getal a tot V behoort, gebruiken we de notatie $a \in V$; we zeggen ook: a is element van V. Willen we uitdrukken dat a niet tot V behoort, dan schrijven we $a \notin V$.

Eindige verzameling: een verzameling met eindig veel elementen.

Oneindige verzameling: een verzameling met oneindig veel elementen.

Begrensde verzameling: een verzameling V heet begrensd als we een constante C kunnen vinden zodanig dat $|z| < C$ voor alle $z \in V$. Zo'n begrensde verzameling kunnen we altijd overdekken met een cirkel om de oorsprong en eindige straal; ook door een vierkant van eindige afmetingen.

Deelverzameling: A is deelverzameling van B als ieder element van A element van B is. De notatie hiervoor is $A \subset B$ (A is bevat in B) of $B \supset A$ (B omvat A). De mogelijkheid dat A = B is, is niet uitgesloten in deze notatie $A \subset B$. Is $A \neq B$, dan is A een echte deelverzameling van B (tenzij A leeg is).

Doorsnede van A en B is de verzameling waarvan de elementen zowel tot A als tot B behoren. De notatie hiervoor is $A \cap B$, of A.B, of AB. Als $AB = \emptyset$ ($\emptyset$ = lege verzameling), dan heten A en B disjunct.

Vereniging van A en B, notatie $A \cup B$ of A + B, is de verzameling van complexe getallen die tot A, tot B, of tot beide behoren.

De begrippen doorsnede en vereniging kunnen op een willekeurige collectie van verzamelingen worden toegepast.

Complement van A: verzameling van complexe getallen die niet tot A behoren. Notatie voor complement van A is A'.

Omgeving

Zij a een complex getal, en p positief. De getallen z met de eigenschap $|z-a| < p$ zijn gelegen binnen de cirkel met middelpunt a en straal p. Als p klein is, zegt men in het spraakgebruik: deze z liggen in de omgeving van a. Daarom definiëren we:
Omgeving van a is de verzameling van getallen z die voldoen aan $|z-a| < p$.
De omgeving hangt van a en p af.
Daarom: p-omgeving van a. Het punt a behoort tot ieder van zijn omgevingen. Men spreekt van gereduceerde omgeving als a uitdrukkelijk wordt uitgesloten.
Dus: gereduceerde p-omgeving van a is verzameling van getallen z met $0 < |z-a| < p$.

Verdichtingspunt

Het getal a noemt men verdichtingspunt van de verzameling V als in iedere omgeving van a oneindig veel elementen van V liggen.

Opgave: a is verdichtingspunt van V als in iedere gereduceerde omgeving van a tenminste één punt van V ligt.

Opmerking: een verdichtingspunt van V is niet noodzakelijk punt van V.

Gesloten verzameling

Een verzameling V heet gesloten als ieder verdichtingspunt van V tevens punt van V is. Een gesloten verzameling bevat dus al haar verdichtingspunten.

Inwendig punt

Het getal a is inwendig punt van V als er een omgeving van a te vinden is die geheel tot V behoort. Een inwendig punt van V behoort tot V.

Open verzameling

Een verzameling die louter uit inwendige punten bestaat, heet een open verzameling.

Opgave: maakt U zich vertrouwd met deze begrippen door het tekenen van plaatjes.

Samenhangende verzameling

Een verzameling V heet samenhangend als ieder paar van haar punten kan worden verbonden door een kromme die geheel in V is gelegen.

Gebied

Dit is voor ons een zeer belangrijk begrip. Een gebied G in het complexe vlak is een verzameling van complexe getallen die

(1) niet leeg is,
(2) open is,
(3) samenhangend is.

Elk punt van G is een inwendig punt van G, omdat een gebied per definitie open is. Twee willekeurige punten van G kunnen door een kromme worden verbonden die geheel in G ligt, omdat G samenhangend is. Een verdichtingspunt van G behoort tot G of behoort niet tot G. In het eerste geval is het verdichtingspunt een punt van G, en dus inwendig punt van G. In het tweede geval is het verdichtingspunt een zogenaamd <u>randpunt</u> van G. De verzameling van verdichtingspunten van G die zelf niet tot G behoren vormen tezamen de <u>rand</u> van G. De vereniging van G met zijn rand is een gesloten verzameling, welke we aanduiden met $\bar{G}$. Men noemt $\bar{G}$ wel een <u>gesloten gebied</u>. Wij zullen daarvoor het woord <u>domein</u> kiezen. Dus domein = gebied + rand.

<u>Twee belangrijke stellingen</u>:

A. <u>Overdekkingsstelling van Heine en Borel</u>

Deze zeer belangrijke stelling luidt:

> Indien een begrensde gesloten verzameling A van complexe getallen is bevat in de vereniging van een collectie van open verzamelingen, dan is A reeds bevat in (kan worden overdekt door) een eindig aantal van die open verzamelingen.

<u>Bewijs</u>. Als de collectie zelf eindig is, is er niets te bewijzen. Verder uit het ongerijmde. A is begrensd, A kan dus worden overdekt door een vierkant V_0 (rand inbegrepen) geheel in het eindige z-vlak gelegen.
Stel dat de stelling onjuist was. Verdeel V_0 in vier gelijke vierkanten. Dan is onder deze vierkanten tenminste één (zeg V_1, rand inbegrepen) met de eigenschap: het deel van A gelegen in V_1 kan niet worden overdekt door een eindig aantal uit de collectie van open verzamelingen waarvan sprake is.
Herhaal: V_1 wordt verdeeld in vier gelijke vierkanten. Tenminste één daarvan (V_2, rand inbegrepen) heeft de eigenschap dat AV_2 (doorsnede van A en V_2) niet kan worden overdekt door een eindig aantal van de bewuste open verzamelingen. Enzovoort.
We krijgen zo een rij vierkanten: V_0, V_1, V_2, ..., met

$V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots$, welke inkrimpt tot één gemeenschappelijk punt P.

Dit punt behoort tot elke V_n, en is verdichtingspunt van A (waarom?).

Omdat A gesloten is, behoort P tot A.

In de gegeven collectie van open verzamelingen is er tenminste één die P bevat, en dus inwendig bevat. Dan is er ook een p-omgeving van P (als we p klein genoeg nemen) met de eigenschap dat haar doorsnede met A geheel wordt overdekt door deze ène open verzameling.
Dit nu leidt tot een tegenspraak. Op den duur (n voldoende groot) liggen alle V_n binnen die p-omgeving. Enerzijds zou V_n niet kunnen worden overdekt door een eindig aantal, anderzijds wordt ze (van zeker rangnummer n af) overdekt door één der open verzamelingen.
Uit de tegenspraak volgt dat de stelling wèl juist is.

B. De stelling van Bolzano en Weierstrass

> Een begrensde oneindige verzameling heeft tenminste één verdichtingspunt.

Bewijs. Geef dit bewijs zelf door de in A gebruikte vierkantenmethode nog eens te gebruiken.

Definitie. Een rij van getallen z_n ($n = 1,2,3,\ldots$; er mogen gelijke onder voorkomen) heeft de limiet a (convergeert naar a) indien bij willekeurig voorgeschreven $\varepsilon > 0$ een rangnummer N kan worden gevonden zodanig dat $|z_n - a| < \varepsilon$ voor $n \geqslant N$.

Opgave. Bewijs het convergentie-criterium van Cauchy: nodig en voldoende opdat de rij $\{z_n\}$ een eenduidig bepaalde limiet heeft is: bij gegeven $\varepsilon > 0$ kan worden gevonden rangnummer N zodanig dat $|z_n - z_m| < \varepsilon$ voor $n, m \geqslant N$.
Aanwijzing: bewijs eerst de begrensdheid van z_n en gebruik de stelling van Bolzano-Weierstrass en laat zien dat de limiet eenduidig is.

Opgave. Als toepassing van Heine-Borel bewijze men de volgende stelling.

> Zij G een gebied, D een gesloten begrensde deelverzameling van G. Dan komt de rand van D niet willekeurig dicht bij de rand van G.

Definitie. Is de rij a_n niet naar boven begrensd dan definiëren we: $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Is de rij wel begrensd dan verstaan we onder $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ het grootste verdichtingspunt van de rij.

Opgave. Bewijs dat een begrensde rij inderdaad een grootste verdichtingspunt heeft. Toon aan dat als $\beta > \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ ten hoogste eindig veel termen van de rij groter dan β zijn.

§.3 Boog, kromme, weg in complexe vlak

Onder een gladde boog zullen we in dit college verstaan: het continu differentieerbare beeld in R_2 van een lijnsegment. Hiermee bedoelen we het volgende: als voor $a \leqslant t \leqslant b$ de funkties $x(t)$ en $y(t)$ continue afgeleiden hebben dan noemen we de verzameling punten $z = f(t) = x(t) + iy(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ een gladde boog. Het punt $z_1 = f(a)$ heet beginpunt van de boog, $z_2 = f(b)$ eindpunt.
De variabele t heet parameter en $z = x(t) + iy(t)$ een parametervoorstelling van de boog. Eenzelfde boog kan vele verschillende parametervoorstellingen hebben.
(Meestal eisen we nog dat $\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 > 0$.)
Als we i.h.v. boog schrijven bedoelen we steeds: gladde boog.

Een kromme is een aaneensluiting van een eindig aantal bogen. Een kromme kan zichzelf oversnijden. Een enkelvoudige kromme is een kromme zonder zelfoversnijding. Ze heeft beginpunt en eindpunt, en kan worden georienteerd. Bij zelfoversnijding kan dit ook en wel op verschillende manieren. Gesloten kromme: dan vallen begin- en eindpunt samen.

Jordankromme: een enkelvoudige gesloten kromme.

Eigenschappen: een Jordankromme verdeelt het complexe vlak in twee disjuncte delen, het inwendige en het uitwendige. Beide delen zijn gebieden, die de kromme tot rand hebben. De Jordankromme heet positief georienteerd (met pijl aan te geven) als we in de pijlrichting bewegend het inwendige aan onze linkerhand hebben (tegen de wijzers van de klok).

Weg

Later hebben we het begrip van weg in het complexe vlak nodig. Een weg is een aaneensluiting van een rij bogen of krommen in een niet-noodzakelijk-eindig aantal. Een weg kan "naar het oneindige" lopen, of daar vandaan komen (bv. uit zekere richting), etc.

We herinneren aan een stelling uit het college wiskunde II.

Stelling

Zij K een boog met parametervoorstelling $z = x(t) + iy(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$. Dan is de lengte van K gelijk aan

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b \left|\frac{dz}{dt}\right| dt.}$$

Gebied van enkelvoudige samenhang

Een gebied G heet enkelvoudig samenhangend, als met iedere Jordankromme J die geheel tot G behoort ook óf het inwendige óf het uitwendige van J geheel tot G behoort.

Anders heet G meervoudig samenhangend.

Voorbeelden

(1) alle z met $|z| < 1$,
(2) het inwendige van een Jordankromme,
(3) het uitwendige van een Jordankromme,
(4) alle z met $|z| > 1$.

Tweevoudig samenhangend is bijvoorbeeld het gebied tussen twee concentrische cirkels.

HOOFDSTUK II. Het funktiebegrip

§.1 Funkties van een complexe variabele

Zij gegeven:
(1) een verzameling A van complexe getallen,
(2) een voorschrift, waarmee we aan elke $z \in A$ een bepaald complex getal w toevoegen.

We schrijven $w = f(z)$, en zeggen: f is als (eenwaardige) complexe funktie van z gedefinieerd op A. Het noemen van de verzameling waarop de funktie is gedefinieerd, is essentieel. Vgl. de vroegere term van "geoorloofde" waarden van de onafhankelijke variabele.

Als we stellen $z = x + iy$, $w = u + iv$, kunnen we $f(z)$ splitsen in reëel en imaginair deel: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. De funkties u en v zijn reële funkties van twee reële variabelen, gedefinieerd voor $(x,y) \in A$. Een complexe funktie is dus niet anders dan een geordend paar van twee reële funkties van twee reële veranderlijken. Het is duidelijk dat we het funktiebegrip dienen te vernauwen, als we nog iets interessants willen krijgen; anders zouden we reële-funktietheorie bedrijven.

<u>Limietbegrip</u>

De definitie van <u>limiet</u> is formeel dezelfde als die in de reële analyse: $f(z)$ heeft limiet L voor z naar a als $|f(z) - L| < \varepsilon$ voor $0 < |z-a| < \delta$ en $z \in A$.
(In de zin van: er bestaat een getal L, zodanig dat men bij ieder gegeven positief getal ε kan vinden een positief getal δ zodanig dat voor elke z uit A met $0 < |z-a| < \delta$ geldt $|f(z) - L| < \varepsilon$.)
We schrijven

$$\lim_{z \to a} f(z) = L, \text{ of ook } f(z) \to L \quad (z \to a).$$

Een equivalente definitie (bewijs ?) van limiet is: $f(z)$ heeft limiet L voor z naar a als $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = L$ voor <u>elke</u> rij $\{z_k\}$ met $z_k \in A$ en $z_k \to a$ $(k \to \infty)$.

Stellingen aangaande som, verschil, product, en quotient van limieten net als in reële analyse.

<u>Continuiteitsbegrip</u>

De funktie $f(z)$ heet <u>continu</u> in het punt $a \in A$ als $f(a) = \lim_{\substack{z \to a \\ z \in A}} f(z)$.

Hierbij is A de definitieverzameling van f; $f(a)$ heeft dus betekenis.

Equivalente definitie: f is continu in $a \in A$ als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een δ is zodat $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ voor $|z-a| < \delta$ en $z \in A$.

$f(z)$ heet continu op (of in) A als $f(z)$ continu is in ieder punt van A. In de meeste gevallen is A een gebied, een domein, of een kromme.

f(z) heet continu in het punt a ten aanzien van $B \subset A$, als (1) $a \in B$, (2) $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ voor $|z-a| < \delta$ en $z \in B$. Voorbeeld: f(z) gedefinieerd in een gebied en aldaar continu. Beperking van f gedefinieerd op een kromme K in het gebied. Dan is f continu op K ten aanzien van K.

Opmerking: Som, verschil, product, en quotient van continue funkties zijn continue funkties (met de bekende uitzondering: niet delen door nul), net als in de reële-funktietheorie.

Is f(z) een continue funktie van z, dan zijn de reële funkties u(x,y) en v(x,y), gedefinieerd door $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, continue funkties van x en y. Het omgekeerde geldt ook (ga dit na). Om werkelijk interessante complexe-funktietheorie te krijgen, moeten we meer eisen dan continuiteit alleen.

Opgave. Is f(z) continu, dan zijn ook Re(f), Im(f), en $|f|$ continue funkties van z. De hoofdwaarde arg z is niet continu in de omgeving van de negatief-reële as; wel continu op die as ten aanzien van die as (daar is arg z gelijk aan π).

Stelling (zonder bewijs)
Is f(z) gedefinieerd en continu op een gesloten begrensde verzameling A, dan is f(z) op A begrensd, en $|f(z)|$ neemt zowel haar maximum als haar minimum op A aan.

§.2 Differentieerbare funkties

We hebben reeds opgemerkt dat we met continue funkties niet ver komen. We zullen daarom differentieerbaarheid eisen. A priori is het niet duidelijk dat er dan wel iets interessants komt, omdat we toch in de reële analyse ook wel funkties van twee veranderlijken x en y naar deze veranderlijken kunnen differentiëren.

We zullen de afgeleide f'(z) van f(z) definiëren op een manier geheel analoog aan die in de reële analyse van funkties van één reële veranderlijke. De resultaten blijken zeer verrassend te zijn. Het blijkt namelijk dat een funktie die éénmaal differentieerbaar is, automatisch oneindig-vaak differentieerbaar is.

We zullen de afgeleide alleen definieren in een inwendig punt van de definitieverzameling der funktie. Voor deze verzameling A nemen we dus een open verzameling. Men kan bewijzen dat een open verzameling bestaat uit een collectie van disjuncte gebieden. Daarom is het voldoende, differentieerbaarheid te definieren voor een funktie die in een gebied (open + samenhangend) is gedefinieerd.

Definitie. Een funktie f(z), gedefinieerd in een gebied G, heet differentieerbaar in het punt a van G als het differentiequotient

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (h \neq 0)$$

een limiet L(a) heeft voor $h \to 0$.

Voor $|h|$ klein genoeg ligt $a+h$ ook in G. Bovenbedoelde limiet $L(a)$ duiden we ook aan met $f'(a)$, en men noemt $f'(a)$ de afgeleide van $f(z)$ in het punt a. Dit is geheel analoog aan het geval van de reële analyse. (Bedenk echter dat h hier complex is!)

Gelijkwaardige definities

(1) $f(z)$ gedefinieerd in G heeft afgeleide $L(a)$ in punt $a \in G$ als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een δ is zodat $\left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a} - L(a)\right| < \varepsilon$ voor elke z met $0 < |z-a| < \delta$.

(2) Als in de omgeving van a geldt

$$f(z) = f(a) + (z-a)\,L(a) + (z-a)\,\eta(z,a),$$

met $\eta(z,a) \to 0$ voor $z \to a$, dan kunnen we $L(a)$ definieren als de afgeleide van $f(z)$ in het punt a.

Opgave. Bewijs de gelijkwaardigheid der drie gegeven definities.

Stelling. Is $f(z)$ differentieerbaar in het punt a, dan is $f(z)$ continu in a.

Bewijs. f differentieerbaar in a, dus f gedefinieerd in volle omgeving van a. We kunnen dan getallen $L = f'(a)$ en δ_1 vinden zodanig dat (neem $\varepsilon = 1$)

$$\left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a} - L\right| < 1 \text{ voor alle } z \text{ met } 0 < |z-a| < \delta_1.$$

Dus ook

$$|f(z) - f(a) - (z-a)\,L| \leqslant |z-a| \text{ voor } 0 \leqslant |z-a| < \delta_1.$$

Dan is onder deze omstandigheden

$$\begin{aligned} |f(z) - f(a)| &= |f(z) - f(a) - L(z-a) + L(z-a)| \\ &\leqslant |f(z) - f(a) - L(z-a)| + |L|\,|z-a| \\ &\leqslant (1 + |L|)\,|z-a| \leqslant (1 + |L|)\delta_1. \end{aligned}$$

Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Kies $\delta = \min\left(\delta_1, \frac{\varepsilon}{(1+|L|)\delta_1}\right)$. Dan geldt

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon \text{ mits } |z-a| < \delta.$$ Dus f continu in a. QED.

We hebben het bewijs hier in alle nauwkeurigheid opgeschreven. Het inzicht dat de stelling juist is krijgen we sneller: als $z \to a$ heeft $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ een eindige limiet. Daar de noemer tot 0 nadert moet ook de teller tot 0 naderen.

Opmerking: natuurlijk geldt niet de omkering der bovengenoemde stelling.

Voorbeeld. Re(z) is een continue funktie van z, maar ze heeft in geen enkel punt een afgeleide. Verifieer dat $f(z) = \bar{z} = x - iy$ geen differentieerbare funktie is.

Opmerking: de bekende regels voor het differentieren van som, verschil, product en quotient (noemer niet nul) van funkties gaan gewoon door.

Opgave. Bewijs de kettingregel. Is $\varphi(z)$ differentieerbaar in z_o, $f(\varphi)$ differentieerbaar in $\varphi_o = \varphi(z_o)$, dan is $F(z) = f(\varphi(z))$ differentieerbaar in z_o en

$$F'(z_o) = f'(\varphi_o)\ \varphi'(z_o).$$

Aanwijzing: gebruik definitie (2) van differentieerbaarheid (waarom ?).

Definitie. Is f(z) gedefinieerd in een gebied G, en is f(z) in elk punt van G differentieerbaar, dan heet f(z) differentieerbaar in G. Dan noemt men f(z) een (eenwaardige) analytische funktie, of ook wel holomorfe funktie, in G. Ook de naam reguliere funktie wordt vaak gebruikt in plaats van holomorf.

Analytisch in een punt, op een kromme

Analytisch in een punt = differentieerbaar in het punt èn differentieerbaar in een volle omgeving van dat punt.

Analytisch op een kromme = analytisch in ieder punt van die kromme.

Ergo: bij analytisch in een punt of op een kromme moeten we dat punt of die kromme inbedden in een gebied, en eisen dat de funktie differentieerbaar is in dat gebied.

Opgave. Definieer $f(z) = x^2y + ixy^2$. Bewijs: f(z) is differentieerbaar in z = 0, maar f(z) is niet analytisch in z = 0.

Als geen misverstand is te duchten, verstaan we onder een complexe funktie f(z) een funktie die eenwaardig is gedefinieerd in een gebied G en aldaar holomorf is. Wel is belangrijk dat we steeds G expliciet aangeven.

Fundamentele stelling
Is f(z) holomorf in G, dan is ook f'(z) holomorf in G.

Het bewijs wordt uitgesteld. We citeren de stelling onder de naam: stelling nul (stelling 0). Gevolg van stelling 0: is f(z) holomorf in G, dan bestaan al haar afgeleiden f'(z), f"(z), ..., in G en deze zijn allen holomorf in G.

Voorbeelden van analytische funkties

$f(z) = \text{constant},\qquad f'(z) = 0.$

$f(z) = z,\qquad f'(z) = 1.$

$f(z) = z^n,\qquad f'(z) = n\,z^{n-1}$ (n geheel getal).

$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n,\qquad f'(z) = \sum_{n=1}^{N} n\,a_n z^{n-1}$ (polynoom).

Een polynoom is een analytische funktie in G = hele z-vlak.

Opgave. Waar zijn de funkties z^{-2}, $(1+z)^{-1}$, holomorf?
Idem voor quotient van twee polynomen in z.

§.3 Funkties gedefinieerd door machtreeksen

Machtreeksen zijn uitermate belangrijk voor de complexe-funktie-theorie.

Machtreeks om het punt z_o is van de vorm $\sum_{n=o}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$.

Machtreeks om de oorsprong is $\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$.

Stelling

De machtreeks $\sum_{o}^{\infty} a_n z^n$ is absoluut en uniform convergent voor $|z| \leqslant \rho < R$, divergent voor $|z| > R$. Hierbij is R een getal dat bepaald is door de rij $\{a_n\}$, en wel geldt volgens Cauchy-Hadamard:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Bewijs.

Eerst het triviale geval dat R = 0 is

Voor z = 0 is de machtreeks altijd convergent, met som a_o. Dat is dan in het geval R = 0 ook het enige punt van convergentie, omdat onder deze omstandigheden de algemene term der reeks niet eens naar nul gaat (hetgeen nodig is voor convergentie). Immers: $(z \neq 0)$

$$\lim \sup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \lim \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \text{oneindig.}$$

Dus $a_n z^n$ nadert niet tot nul als $n \to \infty$.

Tweede geval, R > 0

Neem z met $|z| < R$. Dan is een getal ρ te vinden met $|z| \leqslant \rho < R$, en dus $|a_n z^n| \leqslant |a_n|\rho^n$. Kies verder β zo dat $\rho < \beta < R$, dan $\frac{1}{R} < \frac{1}{\beta}$. Nu is $\frac{1}{R}$ gelijk aan lim sup $\sqrt[n]{|a_n|}$. Rechts van $\frac{1}{\beta}$ liggen dus maar een eindig aantal der getallen $\sqrt[n]{|a_n|}$. Dan volgt er:
er is een m te vinden zodanig dat $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\beta}$ voor $n \geqslant m = m(\beta)$. Dan is van dat rangnummer af $|a_n| < \beta^{-n}$. Dus geldt $|a_n z^n| < (\rho/\beta)^n$ voor $n \geqslant m$,

uniform in z voor $|z| \leqslant \rho$. $\sum_{0}^{\infty} |a_n\ z^n|$ heeft dus voor $|z| \leqslant \rho$ de convergente majorante $\sum_{0}^{\infty} (\rho/\beta)^n$. De reeks $\sum_{0}^{\infty} a_n\ z^n$ is dus absoluut convergent èn uniform convergent (majorante hangt niet van z af) voor $|z| \leqslant \rho < R$.

Is $|z| > R$, dan is $\lim\sup \sqrt[n]{|a_n\ z^n|} = \frac{|z|}{R} > 1$, zodat dan de algemene term der reeks niet naar nul gaat voor $n \to \infty$. Dit betekent dat de reeks divergent is. Hiermede is de stelling volledig bewezen.

Opmerking: De grootheid R noemt men convergentiestraal; de punten z met $|z| = R$ vormen de convergentiecirkel.

Opgave: een machtreeks convergeert uniform op iedere gesloten verzameling gelegen binnen de convergentiecirkel.

Voorbeelden:

$R = 0$: $\quad \sum_{0}^{\infty} (-1)^n\ n!\ z^n$

$R = \infty$: $\quad \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$R = 1$: $\quad \sum_{0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Het gedrag van de machtreeks op de convergentiecirkel kan van alles zijn. Zo is $\sum_{0}^{\infty} z^n$ divergent voor $|z| = R = 1$.

$\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ is absoluut en uniform convergent voor $|z| = R = 1$.

$\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ is convergent voor $z = -1$, divergent voor $z = 1$.

Stelling: De functie $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n\ z^n$ is binnen de convergentiecirkel $|z| < R$ een holomorfe functie van z, en haar afgeleide wordt gevonden door termsgewijze differentiatie: $f'(z) = \sum_{0}^{\infty} n\ a_n z^{n-1}$. Deze laatste reeks heeft dezelfde convergentiestraal als de eerste reeks.

Bewijs: Door termsgewijze differentiatie vindt men de nieuwe machtreeks

$\sum_{1}^{\infty} n\ a_n\ z^{n-1} = \sum_{0}^{\infty} (n+1)\ a_{n+1}\ z^n = \sum_{0}^{\infty} b_n\ z^n$, met $b_n = (n+1)\ a_{n+1}$.

Deze heeft dezelfde convergentiestraal, want

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{n+1}\ \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \sqrt[n]{n+1}\ [\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}]^{(1+\frac{1}{n})}, \text{ en}$$

dus $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Is de zo verkregen functie $g(z) = \sum_{0}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}$ werkelijk de afgeleide van de functie $f(z)$?

Neem z binnen convergentiecirkel van de twee reeksen. Kies $\rho > 0$ zò dat alle punten ζ van de cirkel $|z - \zeta| \leqslant \rho$ binnen de convergentiecirkel liggen. Stel $\zeta = z+h$, met dus $|h| \leqslant \rho$, en $h \neq 0$, dan heeft het volgende zin:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n\, z^{n-1}\right\}.$$

Nu is

$$\left|\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\right| = |h|\ \left|\binom{n}{2} z^{n-2} + \binom{n}{3} hz^{n-3} + \dots + \binom{n}{n} h^{n-2}\right|$$

$$\leqslant |h| \left\{\binom{n}{2} |z|^{n-2} + \binom{n}{3}\rho\, |z|^{n-3} + \dots + \binom{n}{n} \rho^{n-2}\right\}$$

$$\leqslant \frac{|h|}{\rho^2} \left\{\binom{n}{2} \rho^2\, |z|^{n-2} + \binom{n}{3} \rho^3 |z|^{n-3} + \dots + \binom{n}{n} \rho^n\right\}$$

$$\leqslant \frac{|h|}{\rho^2} \left\{|z|^n + \binom{n}{1} \rho\, |z|^{n-1} + \binom{n}{2} \rho^2\, |z|^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} \rho^n\right\} =$$

$$= \frac{|h|}{\rho^2} (|z| + \rho)^n.$$

Derhalve

$$\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z)\right| \leqslant \frac{|h|}{\rho^2} \sum_{0}^{\infty} |a_n|\ (|z| + \rho)^n.$$

De reeks in het rechterlid convergeert omdat $|z| + \rho < R$ is. De reeks is onafhankelijk van h. Het rechterlid gaat dus naar nul voor $h \to 0$. Dus limiet van h^{-1} $(f(z+h) - f(z))$ bestaat en is gelijk aan $g(z)$. Dus f is differentieerbaar en heeft $g(z)$ tot afgeleide. Hiermee bewijs klaar.

Opmerkingen

Een machtreeks definieert dus een funktie die holomorf is in het cirkelvormige gebied der convergentie. Voor deze bijzondere holomorfe funktie is het bestaan van alle afgeleiden van hogere orde duidelijk. Deze afgeleiden worden verkregen door termsgewijze differentiatie; al deze reeksen hebben een en dezelfde convergentiestraal. Voor machtreeksen is hiermee stelling O bewezen. We zullen later een omkering van bovenstaande stellingen tegenkomen nl. de stelling dat een funktie die in een cirkelvormig gebied holomorf is de som is van een machtreeks die binnen die cirkel convergeert. In zekere zin is de funktietheorie dus theorie van de machtreeksen.

Exponentiële funktie

Definitie

$$\exp z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}.$$

De convergentiestraal is oneindig groot. Dus exp z is holomorf in het hele eindige z-vlak.

Eigenschappen

(1) additietheorema: $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2$. (Bewijs ?)

(2) exp z heeft geen nulpunten in het eindige. (Bewijs ?)

(3) $(d/dz) \exp z = \exp z$.

(4) $\exp z = \lim (1 + \frac{z}{n})^n \quad (n \to \infty)$.

(5) notatieverandering: $\exp z = e^z$.

Hiermee zijn we gekomen op bekende zaken uit de reële analyse.

De trigonometrische funkties worden gedefinieerd door

$$\sin z = \sum_0^\infty (-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)!$$

$$\cos z = \sum_0^\infty (-1)^n z^{2n}/(2n)!$$

Ze zijn overal analytisch. Er gelden de formules:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \qquad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),$$

$$(d/dz) \sin z = \cos z, \qquad (d/dz) \cos z = -\sin z,$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

overal in het eindige z-vlak. Dit sluit geheel aan bij de elementaire theorie. We zeggen: de exponentiele en trigonometrische funkties van een reële veranderlijke hebben we analytisch voortgezet in het complexe vlak. (Zie hoofdstuk VI.)

HOOFDSTUK III. Integreren in het complexe vlak

§.1 Complexe integratie

We gaan uit van de definitie van bepaalde integraal van een reële funktie die we bekend veronderstellen uit het college wiskunde I evenals de(toen niet bewezen) stelling:

is $g(x)$ continu voor $a \leqslant x \leqslant b$ dan bestaat $\int_a^b g(x)\,dx$.

Zij nu K een gladde boog met parametervoorstelling $z = \varphi(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$. We herinneren er aan dat in I.§.3 is geëist dat $\varphi'(t)$ continu is. Laat verder $f(z)$ een continue funktie van z zijn op de boog K. Dan definieren we

$$\boxed{\int_K f(z)\,dz = \int_a^b f\{\varphi(t)\}\,\varphi'(t)\,dt.}$$

(Merk op: de integrand is een complexe funktie van de reële variabele t.)

Op grond van bovengenoemde stelling uit wiskunde I bestaat de integraal in het rechterlid (U ziet waarom ter vereenvoudiging is geëist dat bogen steeds continu differentieerbaar zijn.)
We definieren de integraal van $f(z)$ over een <u>kromme</u> K als de som van de integralen over de bogen waaruit K is <u>opgebouwd</u>. (Ga na dat bovenstaande definitie onafhankelijk is van de keuze van de parametervoorstelling.)

<u>Enkele voorbeelden</u>

a) $f(z) = 1$, K gegeven door $\varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ met beginpunt $A = \varphi(a)$, eindpunt $B = \varphi(b)$.

$$\int_K f(z)\,dz = \int_a^b 1 \cdot \varphi'(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a) = B-A.$$

b) $f(z) = z$, K als in a).

$$\int_K f(z)\,dz = \int_a^b \varphi(t) \cdot \varphi'(t)\,dt = [\tfrac{1}{2}\varphi^2(t)]_{t=a}^{t=b} = \frac{B^2-A^2}{2}\,.$$

In a) en b) is de waarde van de integraal afhankelijk van begin- en eindpunt van K maar niet van de gekozen weg van A naar B.
Dit is niet altijd het geval (en dat zal één van de hoofdpunten van dit college worden).
Ga dit na aan de hand van de voorbeelden c) en d).

Kies $f(z) = \frac{1}{z}$, $A = 1$, $B = -1$ en als kromme K nemen we

c) $|z| = 1$, $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$ resp.

d) $|z| = 1$, $\mathrm{Im}\, z \leqslant 0$.

Toon nu aan dat de integralen over deze krommen verschillend zijn.

Een toepassing die in het vervolg een grote rol zal spelen (uit het hoofd leren!):

zij K een cirkel met middelpunt z_0 en straal a. Voor K kunnen we dus $z = z_0 + a\, e^{it}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ kiezen als parametervoorstelling. Zij m geheel. Dan is

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K (z - z_0)^m\, dz = \begin{cases} 0 \text{ als } m \neq -1 \\ 1 \text{ als } m = -1 \end{cases}$$

Bewijs. Pas de definitie toe.

Opmerking. De waarde van de integraal hangt niet van de straal a van de cirkel af.

De bekende stellingen over integralen van reële funkties zijn direkt over te brengen op complexe integralen. We noemen slechts één voorbeeld

$$\int_K \{\lambda\, f(z) + \mu\, g(z)\}\, dz = \lambda\int_K f(z)\, dz + \mu\int_K g(z)\, dz.$$

Het zal in het vervolg veel voorkomen dat een grove schatting nodig is voor de waarde van een integraal. Daarvoor gebruiken we de

Stelling Als $|f(z)| \leqslant M$ voor $z \in K$ en als L de lengte van de kromme K is dan geldt (aangenomen dat de integraal bestaat)

$$\boxed{\left|\int_K f(z)\, dz\right| \leqslant M.L}$$

Bewijs. Zij $z = \varphi(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$ een parametervoorstelling van K. Dan is

$$\left|\int_K f(z)\, dz\right| = \left|\int_a^b f\{\varphi(t)\}\, \varphi'(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f\{\varphi(t)\}\, \varphi'(t)|\, dt \leqslant M\int_a^b |\varphi'(t)|\, dt = M.L$$

(vgl. I.§.3).

Een analogon van wat bij de integraalrekening van reële funkties de hoofdstelling heette kan ook voor complexe funkties geformuleerd worden en wel

Stelling Als de kromme K (beginpunt A, eindpunt B) binnen het gebied G ligt en in G geldt $f(z) = F'(z)$ dan is

$$\boxed{\int_K f(z)\,dz = F(B) - F(A)}$$

Bewijs. $$\int_K f(z)\,dz = \int_a^b f\{\varphi(t)\}\,\varphi'(t)\,dt = \int_a^b F'\{\varphi(t)\}\,\varphi'(t)\,dt =$$
$$= F\,\{\varphi(b)\} - F\,\{\varphi(a)\} = F(B) - F(A).$$

(We gebruiken dus de kettingregel voor reële integralen.)

Opmerking. Dat de integraal bestaat volgt uit stelling 0 die zegt dat f, als afgeleide van F, zelf weer differentieerbaar, dus zeker continu is.

Voorbeelden

1) $f(z) = z^2$, $F(z) = \frac{1}{3}z^3$ en $\int_K z^2\,dz = \frac{B^3 - A^3}{3}$ als A en B beginpunt resp. eindpunt van K zijn.

2) $f(z) = z^m$, m geheel, $m \neq -1$. Dan is $F(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1}$. De funkties $f(z)$ en $F(z)$ zijn voor alle z gedefinieerd voor niet-negatieve exponenten, anders alleen voor $z \neq 0$. Voor een gesloten kromme (ev. niet door 0) is dan $\int_K f(z)\,dz = 0$ zoals we boven al met behulp van de definitie aantoonden.

§.2 Hoofdstelling der complexe integratie

We hebben in vele gevallen gezien dat de keuze der integratieweg geen invloed heeft op de waarde der integraal, zolang de eindpunten der integratieweg vast blijven. Dit geldt voor een grote klasse van integreerbare funkties, en wel met name voor holomorfe funkties.

Stelling

Zij $f(z)$ holomorf in gebied G; α en β begin- en eindpunt van een kromme K die geheel in G ligt. Zij K' een kromme met hetzelfde begin- en eindpunt, ook geheel binnen G liggend. Verder zal K' door continue vervorming met K tot dekking kunnen worden gebracht, zonder dat bij die vervorming enig punt wordt gepasseerd dat niet tot G behoort. Dan geldt

$$\int_K f(z)\,dz = \int_{K'} f(z)\,dz.$$

De integraal is dus niet afhankelijk van de keuze van de verbindende kromme, maar alleen van de eindpunten α en β.

Stelling

Zij $f(z)$ holomorf in gebied G. Zij K een Jordankromme die, met haar inwendige, geheel in G ligt. Dan bestaat $\int_K f(z)\,dz$ en is gelijk aan nul.

Bovenstaande twee stellingen zijn equivalente formuleringen van de hoofdstelling der complexe integratie. (Niet te verwarren met wat bij de reële integratie hoofdstelling werd genoemd.)
Alvorens we deze stellingen bewijzen eerst een opmerking in de vorm van een

opgave: ga na dat de stelling voor machtreeksen eenvoudig te bewijzen is met behulp van het laatste voorbeeld van de vorige paragraaf. (De opmerkingen na de tweede stelling van II.§.3 maken deze opgave nog interessanter!)

We geven nu het bewijs van de stelling in de tweede formulering en wel in drie stappen: (1) K is de rand van een driehoek,
(2) K is de rand van een veelhoek, en
(3) K is willekeurig.

Bewijs, eerste stap

Uit het ongerijmde. Zij K_0 de positief-georienteerde rand van driehoek D_0 met omtreklengte L_0. Stel $\int_{K_0} f(z)\,dz$ ongelijk nul; dan zullen we een tegenspraak afleiden. Uit het gestelde volgt:

$$p_0 \overset{\text{def}}{=} \left|\int_{K_0} f(z)\,dz\right| > 0.$$

Verdeel D_o in vier driehoeken, ieder met omtrek $\frac{1}{2}L_o$, door de middens van de zijden van D_o twee aan twee te verbinden. De randen dezer vier driehoeken noemen we C_1, C_2, C_3, en C_4; ze hebben de orientatie van K_o. Dan is duidelijk

$$\int_{K_o} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \ldots + \int_{C_4} f(z)\,dz,$$

omdat de inwendige zijden bij integratie tweemaal, maar in tegengestelde zin, worden doorlopen.

De vier integralen in het rechterlid kunnen in absolute waarde niet allemaal kleiner dan $\frac{1}{4}p_o$ zijn, omdat anders het linkerlid in absolute waarde kleiner dan p_o zou zijn; en die absolute waarde is p_o. Noem de bijbehorende deeldriehoek D_1 met positief-georienteerde rand K_1 en omtreklengte $L_1 = \frac{1}{2}L_o$. Dan is

$$p_1 \overset{\text{def}}{=} \left| \int_{K_1} f(z)\,dz \right| \geqslant \tfrac{1}{4}p_o.$$

Dit proces van deling herhalen we onbeperkt. We vinden zo een rij driehoeken D_n met omtreklengte $L_n = \frac{1}{2}L_{n-1}$ en georienteerde rand K_n zodanig dat

$$p_n \overset{\text{def}}{=} \left| \int_{K_n} f(z)\,dz \right| \geqslant \tfrac{1}{4}p_{n-1}.$$

Er geldt

$$L_n = \frac{L_o}{2^n}, \qquad p_n \geqslant \frac{p_o}{4^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

De rij driehoeken D_n convergeert naar een gemeenschappelijk punt ζ. Het is duidelijk dat ζ op of binnen de rand van D_o ligt. Dus ζ is inwendig punt van G. Er is dus een ρ-omgeving van ζ die geheel binnen G ligt. Nu is f(z) holomorf in het punt ζ. Kies ε willekeurig positief. Dan is te vinden een $\delta > 0$ zodanig dat

$$|f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)| \leqslant \varepsilon\,|z - \zeta| \text{ voor alle } z \text{ met } |z - \zeta| < \delta < \rho .$$

Het is verder duidelijk dat bij die ε en δ een rangnummer N kan worden gevonden, zodanig dat D_n voor $n \geqslant N$ geheel binnen de cirkel $|z - \zeta| = \delta$ ligt. Voor $n \geqslant N$ geldt dan het volgende:

$$\int_{K_n} f(z)\,dz = \int_{K_n} \{f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)\}\,dz + \\ + \{f(\zeta) - \zeta f'(\zeta)\} \int_{K_n} dz + f'(\zeta) \int_{K_n} z\,dz.$$

De laatste twee integralen zijn nul voor de gesloten weg K_n. Dus

$$\int_{K_n} f(z)\,dz = \int_{K_n} \{f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)\}\,dz.$$

Nu is

$$\underset{z \in K_n}{\text{maximum}} |f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)| \leqslant \varepsilon \max_{z \in K_n} |z - \zeta|$$

en zeker

$$\underset{z \in K_n}{\text{maximum}} |z - \zeta| \leqslant L_n.$$

De absolute waarde van de integraal boven is ten hoogste gelijk aan bovengrens van |integrand| maal weglengte, en dus

$$\left|\int_{K_n} \{f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)\}\,dz\right| \leqslant \varepsilon L_n^2$$

en dus ook

$$p_n = \left|\int_{K_n} f(z)\,dz\right| \leqslant \varepsilon \frac{L_o}{4^n}.$$

Dit zou voor $n \geqslant N$ en willekeurige positieve ε moeten gelden (als onze onderstelling $p_o > 0$ juist zou zijn geweest).

Kies echter ε zodanig dat $\varepsilon < p_o/L_o^2$, dan wordt $p_n < \frac{p_o}{4^n}$ voor $n \geqslant N$.

Dit nu is in strijd met ons vroeger resultaat: $p_n \geqslant p_o/4^n$, geldig voor $n \geqslant 0$, verkregen op grond van de onderstelling $p_o > 0$. Ziehier de gevraagde tegenspraak. Onze onderstelling $p_o > 0$ is onjuist; $p_o = 0$, dus $\int_{K_o} f(z)\,dz = 0$.

Tweede stap

Zij nu K de rand van een veelhoek zonder zelfoversnijding, die met zijn inwendige geheel in G ligt. Het inwendige van K kunnen we uit een eindig aantal driehoeken zonder overlapping opbouwen. De randen kunnen we allemaal positief orienteren (als die van K). Zij K_ν de georienteerde rand van enige driehoek D_ν. Dan geldt

$$\int_K f(z)\,dz = \sum_\nu \int_{K_\nu} f(z)\,dz,$$

omdat de gemeenschappelijke zijde van twee aangrenzende driehoeken tweemaal maar in tegengestelde zin wordt doorlopen, en in het rechterlid dus alleen de bijdragen van de rand K overblijven. Ieder van de integralen in het rechterlid is nul, op grond van de eerste stap. Dus het linkerlid is nul, waarmee de tweede stap is bewezen.

Derde stap

Een willekeurige kromme kunnen we willekeurig goed benaderen door een polygoontrek. Ligt die kromme K in een gebied G, dan kunnen we het zo maken dat de polygoontrek T ook geheel in G ligt. En bovendien kunnen we het zo inrichten dat

$$\left| \int_K f(z)\, dz - \int_T f(z)\, dz \right| \text{ willekeurig klein wordt.}$$

Aan het echte bewijs van deze beweringen gaan we voorbij, maar het resultaat is alleszins plausibel. Volgens stap 2 is, als K gesloten is, en dus ook T gesloten is, de integraal langs T gelijk aan nul. Dus is de integraal langs K willekeurig klein. Dan moet $\int_K f(z)\, dz = 0$ zijn. Hiermee is de hoofdstelling der integratie bewezen.

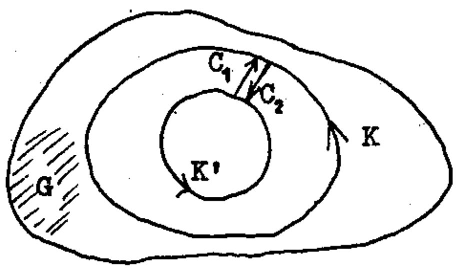
Een gevolg van de hoofdstelling is de

Stelling

Zij f(z) holomorf in gebied G. Zijn K en K' gesloten krommen die geheel in G liggen en die door continue vervorming in elkaar kunnen worden overgevoerd zonder dat bij die vervorming punten buiten G worden gepasseerd, dan is

$$\int_K f(z)\, dz = \int_{K'} f(z)\, dz.$$

Bewijs. We gebruiken een hulpmiddel dat verder "kanaalmethode" zal heten. Zie figuur. K en K' worden door een "kanaal" verbonden d.w.z. 2 lijnstukken C_1 en C_2 die hier gescheiden getekend zijn maar waarvan we verder veronderstellen dat ze samenvallen (dit geschiedt via een limietovergang).



Op de weg gevormd door K, C_2, K' in negatieve zin doorlopen en C_1 kunnen we de hoofdstelling toepassen. De bijdragen over C_1 en C_2 vallen tegen elkaar weg en het gestelde blijft als resultaat over.

Een toepassing hebben we gezien in het voorbeeld op blz.16.

De hoofdstelling wordt vaak in de volgende vorm gebruikt

Zij K een enkelvoudige gesloten kromme (Jordankromme), f(z) holomorf op en binnen K, dan geldt $\int_K f(z)\, dz = 0$.

Opmerking: holomorf op K betekent: holomorf in een volle omgeving van K. We kunnen dus K inbedden in een gebied G bestaande uit het inwendige van K, K zelf, en een strook aan de buitenkant van K. In G is f(z) dan holomorf. Hiermee weer terug op de tweede formulering der hoofdstelling.

Er is een omkering van de hoofdstelling, bekend als
Stelling van Morera

> Is $f(z)$ in een gebied G continu en is voor iedere gesloten weg in G de integraal van f over deze weg nul, dan is $f(z)$ holomorf in G.

Bewijs. Volgens stelling 0 is de afgeleide van een holomorfe funktie zelf weer holomorf. Dan is de stelling van Morera een direkt gevolg van de volgende stelling.

Stelling

> Zij $f(z)$ continu in gebied G. Zij bij vaste $\alpha \in G$ en variabele $z \in G$ de integraal
>
> $$\int_\alpha^z f(\zeta)\,d\zeta$$
>
> onafhankelijk van de integratieweg (die in G verloopt) en dus een funktie van z, zeg $F(z)$. Dan is $F(z)$ holomorf in G en $F'(z) = f(z)$.

Bewijs. $F(z)$ is eenduidig gedefinieerd in G. Neem een vaste z van G; dan is er een ρ-omgeving van z, dus $|z-z'| < \rho$, met alle z' in G. Verder is $f(z)$ continu; dus bij $\varepsilon > 0$ is een $\delta > 0$ te vinden (kies $\delta < \rho$) zodat $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ mits z' voldoet aan $0 < |z - z'| < \delta$. Voor die z en z' geldt dan

$$\frac{F(z) - F(z')}{z - z'} - f(z) = \frac{\int_\alpha^z f(\zeta)\,d\zeta - \int_\alpha^{z'} f(\zeta)\,d\zeta}{z - z'} - f(z)$$

$$= \frac{\int_{z'}^{z} f(\zeta)\,d\zeta}{z - z'} - f(z) = \frac{\int_{z'}^{z} \{f(\zeta) - f(z)\}\,d\zeta}{z - z'},$$

waarbij de integratieweg rechtlijnig van z' naar z mag worden genomen. Op die weg is de integrand in absolute waarde ten hoogste gelijk aan ε. Dus geeft de bekende schatting voor integralen:

$$\left|\frac{F(z) - F(z')}{z - z'} - f(z)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|z-z'|}\,|z-z'| = \varepsilon. \quad (0 < |z-z'| < \delta)$$

Dit betekent: F is differentieerbaar in het punt z en $F'(z) = f(z)$. Dus $F(z)$ is holomorf in G.

Een fraaie toepassing van de stelling van Morera zullen we later zien bij de stelling van Weierstrass (blz.31).

§.3 Residu; integraalformule van Cauchy; stelling 0

Stel $f(z)$ is in gereduceerde omgeving van punt a holomorf. Dan is er een cirkel C_a (straal ρ_a, middelpunt a) zodat $f(z)$ differentieerbaar is voor ieder punt $z \neq a$ binnen C_a. De verzameling $0 < |z - a| < \rho_a$ is een gebied G van tweevoudige samenhang. Beschouw twee Jordankrommen, K_1 en K_2, die het punt a in hun inwendige hebben en verder geheel binnen C_a liggen. Deze krommen kunnen door continue vervorming in elkaar worden overgevoerd zonder dat ze G verlaten. Beide krommen zullen positief zijn georienteerd. Dan weten we:

$$\int_{K_1} f(z)\,dz = \int_{K_2} f(z)\,dz.$$

Beschouw dan de uitdrukking

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K f(z)\,dz,$$

waarbij K een willekeurige Jordankromme is die het punt a in positieve zin omsluit en geheel binnen C_a ligt. Dan is duidelijk dat deze uitdrukking door a en f eenduidig is bepaald, en niet van K afhangt. We noemen deze uitdrukking het residu van f in het punt a. Is $f(z)$ in a zelf ook holomorf, dan is het residu blijkbaar nul.

Definitie: een punt waar $f(z)$ holomorf is, heet regulier punt van $f(z)$. Anders heet z een singulier punt. Er geldt dus de

Stelling: Is $f(z)$ in een gereduceerde omgeving van a holomorf, dan heeft $f(z)$ een residu in a. Dit residu is nul als a een regulier punt van f is.

Residustelling van Cauchy:

Is $f(z)$ op en binnen een gesloten kromme K holomorf, met uitzondering van een eindig aantal singuliere punten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die binnen K liggen, dan geldt

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_K f(z)\,dz = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \{\text{Res. } f(z)\}_{z=a_\nu}} .$$

Bewijs: met de "kanaalmethode".

Met behulp van de residustelling kunnen we dus integralen berekenen als we een andere manier hebben om deze residuen te bepalen. Hoe doen we dat ?

Stel $f(z)$ is holomorf in een gereduceerde omgeving van a, en aldaar geldt $f(z) = g(z) + h(z)$, waarbij $h(z)$ holomorf is in het punt a. Dan is duidelijk dat het residu van f in a gelijk is aan het residu van g in a, omdat het residu van h in a nul is.

In §.2 werd gevonden dat $\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{dz}{(z-a)^m} = 0$ is voor m geheel $\geqslant 2$, met K = cirkel om z = a. We weten nu dat dit resultaat geldt voor willekeurige K die a omsluit. De funktie $f(z) = (z-a)^{-m}$, $m \geqslant 2$, is overal analytisch behalve in z = a, waar f niet is gedefinieerd. Het punt a is dus singulier punt van f. In a heeft f een residu. Maar het residu is nul. Dus niet geldt: als residu nul is, hebben we een regulier punt.

De funktie $f(z) = (z-a)^{-1}$ heeft blijkbaar in a een residu gelijk aan 1. Om deze normering te krijgen werd juist de factor $1/2\pi i$ ingevoerd. Beschouw nu

$$f(z) = \sum_{m=1}^{k} \frac{A_m}{(z-a)^m} + h(z),$$

met k een positief geheel getal, A_m onafhankelijk van z, en h(z) holomorf in a; f(z) is niet gedefinieerd voor z = a. Wel is f(z) in een gereduceerde omgeving van a holomorf. Het residu van f in a is de som van de residuen der afzonderlijke termen. Dus

$$\{\text{Res. } f(z)\}_{z=a} = A_1,$$

de coefficient van $(z-a)^{-1}$.

Definitie (zie ook IV.5)

Is f(z) regulier in een gereduceerde omgeving van a en $\lim\limits_{z\to a} (z-a)^k f(z)$ eindig en $\neq 0$ dan zeggen we dat f(z) in z = a een pool van de orde k heeft (k geheel, > 0).
Een voorbeeld is de hierboven genoemde funktie f(z).

We kunnen nu van een funktie het residu in een pool berekenen door de funktie in bovengenoemde vorm voor te stellen. Het residu is dan A_1. Hoe we in algemenere gevallen te werk gaan zullen we in IV.5 zien.

Voorbeeld

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^3(z+1)}.$$

f(z) is overal analytisch, behalve in z = 0 en z = -1. In de omgeving van z = 0 geldt

$$f(z) = z^{-3}(1 + z^2)(1 - z + z^2 - z^3 + \ldots)$$
$$= z^{-3} - z^{-2} + 2/z + \text{funktie holomorf in } z = 0.$$

Dus

$$\{\text{Res. } f(z)\}_{z=0} = 2.$$

Op dezelfde manier vindt men $\{\text{Res. } f(z)\}_{z=-1} = -2$.

Overigens geeft splitsing in partiële breuken direkte resultaten:

$$\frac{z^2+1}{z^3(z+1)} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z} + \frac{2}{z} - \frac{2}{z+1}.$$

Opgave. Wat is de uitkomst als we deze funktie integreren over een gesloten kromme K die de punten 0 en -1 vermijdt ?

Stelling

Is $\varphi(z)$ holomorf in $z = a$, dan geldt

$$\boxed{\left\{\text{Res. } \frac{\varphi(z)}{z - a}\right\}_{z=a} = \varphi(a).}$$

Bewijs. Definieer f door

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - a}.$$

Dan is f(z) holomorf in de omgeving van a, met eventuele uitzondering van a zelf. Dus heeft f een residu in a:

$$\{\text{Res. } f(z)\}_{z=a} = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\varphi(z)}{z - a}\,dz.$$

Neem voor K een cirkel met middelpunt a en straal $\rho > 0$. Dan is

$$\begin{aligned}\{\text{Res. } f(z)\}_{z=a} &= \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\varphi(a)}{z - a}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{z - a}\,dz \\ &= \varphi(a) + \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{z - a}\,dz.\end{aligned}$$

Nu is $\varphi(z)$ holomorf, dus continu in a. Bij $\varepsilon > 0$ is dus een $\delta > 0$ te vinden, met $|\varphi(z) - \varphi(a)| < \varepsilon$ voor alle z uit $|z-a| < \delta$. Kies $\delta < \rho$, dan

$$|\{\text{Res.} f(z)\}_{z=a} - \varphi(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_K \left|\frac{\varphi(z)-\varphi(a)}{z-a}\right| |dz| \leqslant \frac{1}{2\pi}\varepsilon\frac{1}{\delta}\,2\pi\delta = \varepsilon.$$

Het residu is onafhankelijk van ε; dus voor $\varepsilon \to 0$ volgt

$$\{\text{Res. } f(z)\}_{z=a} = \varphi(a). \qquad \text{QED}$$

Integraalformule van Cauchy

Is $\varphi(z)$ op en binnen de gesloten kromme K holomorf, dan geldt

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\varphi(z)}{z - a}\,dz = \begin{cases} \varphi(a), & \text{a binnen K} \\ 0, & \text{a buiten K}\end{cases}}$$

Bewijs. Volgens de residustelling is de integraal gelijk aan de som der residuen in de singuliere punten binnen K. Ligt a buiten K, dan is er geen singulier punt binnen K; en dan is de integraal nul. Ligt a binnen K, dan is het residu in a gelijk aan $\varphi(a)$. QED.

Opmerking. We mogen niet door een singulier punt van de integrand integreren. De integraal heeft geen betekenis als a punt van K is.

Opmerking. Bovenstaande formule is "merkwaardig". De analytische funktie $\varphi(z)$ is binnen K reeds volledig bepaald door haar waarden op K.

Stelling Zij K een willekeurige kromme; $\varphi(z)$ continu op K; a niet op K. Dan is

$$f(a) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(z)}{z-a}\, dz$$

een holomorfe functie van a.

Bewijs: Zij

$$g(a) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(z)}{(z-a)^2}\, dz.$$

Deze integraal bestaat voor a buiten K; we verwachten dat $g(a) = f'(a)$ is, omdat de tweede integraal uit de eerste wordt verkregen door formele differentiatie onder het integraalteken.

Omdat a buiten K ligt, kunnen we een cirkel C aangeven met middelpunt a zodanig dat K en C elkaar niet snijden. Noem ρ de straal van die cirkel. Zij $|h| < \rho$. Dan ligt a+h binnen C. Voor $h \neq 0$ geldt

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - g(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \varphi(z)\{\frac{1}{h}[\frac{1}{z-a-h} - \frac{1}{z-a}] - \frac{1}{(z-a)^2}\}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_K \varphi(z)\{\frac{h}{(z-a)^2(z-a-h)}\}\, dz.$$

Derhalve geldt:

Absolute waarde linkerlid $\leqslant \frac{|h|}{2\pi} \max_{z\in K} \left|\frac{\varphi(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}\right|$. lengte van K.

Nu heeft C een positieve afstand D tot K. Dus $|z - a| > D$, $|z-a-h| > D$. $\varphi(z)$ is continu, dus begrensd op K: $|\varphi(z)| \leqslant p$, met p constante. Derhalve is

$$\max_{z\in K} \left|\frac{\varphi(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}\right| < \frac{1}{D^3}\, p = \text{constante onafhankelijk van h.}$$

De absolute waarde van het "linkerlid" is dus kleiner dan een geschikte constante maal $|h|$, waarbij de constante niet van h afhangt.

Derhalve: $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ bestaat en is gelijk aan g(a).

Dit betekent: f(a) is differentieerbaar in a, en bovendien geldt

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(z)}{(z-a)^2}\, dz.$$

Het bewijs geldt voor willekeurige a niet op K gelegen. Dus f(a) is een holomorfe functie van a in elk gebied dat met K geen punt gemeen heeft.

Opmerking: Als K een kromme is zonder zelfoversnijding, dan is het gebied: het hele z-vlak verminderd met K. Is K een Jordankromme, dan is in elk der twee gebieden door K bepaald (binnen- en buitengebied) f(a) een holomorfe functie.

Stelling ‖ In elk gebied buiten K heeft de functie f(a) uit de vorige stelling afgeleiden van elke orde, en er geldt

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_K \frac{\varphi(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Bewijs: Voor n = 0 hebben we de definitie van f(a). Voor n = 1 hebben we de stelling boven bewezen. Nu voor $n \geqslant 2$ bewijzen met volledige inductie. Stel de formule is bewezen voor $n = 1, 2, \ldots, m-1$ $(m \geqslant 2)$. Dan blijft nog te bewijzen dat ze ook voor n = m geldt.

Volgens inductieonderstelling geldt

$$f^{(m-1)}(a) = \frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_K \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}\,dz,$$

en eenzelfde formule met a vervangen door a+h. Dus

$$\frac{f^{(m-1)}(a+h) - f^{(m-1)}(a)}{h} - \frac{m!}{2\pi i}\int_K \frac{\varphi(z)}{(z-a)^{m+1}}\,dz =$$

$$= \frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_K \varphi(z)\left\{\frac{1}{h}\left[\frac{1}{(z-a-h)^m} - \frac{1}{(z-a)^m}\right] - \frac{m}{(z-a)^{m+1}}\right\}dz.$$

De integrand kunnen we omvormen tot

$$\varphi(z) \text{ maal } \frac{(z-a)^{m+1} - (z-a)(z-a-h)^m - mh(z-a-h)^m}{h(z-a)^{m+1}\,(z-a-h)^m}.$$

Bij uitwerking van de teller met de binomiumformule blijkt dat de integrand in absolute waarde kleiner is dan een constante maal $|h|$, waarbij de constante niet van h afhangt. Voor $h \to 0$ volgt het gewenste resultaat.

Nu komt eindelijk het bewijs van de fundamentele stelling:

Stelling 0 ‖ Is f(z) holomorf in G, dan is ook f'(z) holomorf in G.

Bewijs: Zij a een punt van G. Dan kunnen we een Jordankromme K vinden die a inwendig bevat, binnengebied van K geheel in G, en positief georienteerd. Volgens de vorige stelling is de functie

$$g(a) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

een oneindig-vaak differentieerbare functie van a in het binnengebied van K. Anderzijds is op grond van de integraalformule van Cauchy de integraal in het rechterlid precies gelijk aan f(a), omdat f op en binnen K holomorf is en a binnen K ligt. Dus g(a) = f(a). Dan is ook f(a) oneindig vaak differentieerbaar voor a binnen K. In het bijzonder is f'(a) aldaar differentieerbaar, en dus f'(a) holomorf. QED.

Opmerking. Tot hier hebben we enige uitspraken gedaan, die berustte op de nog niet bewezen stelling 0. (Ga na.)
Het boven gegeven bewijs van stelling 0 is onafhankelijk van deze uitspraken. We zijn niet in een kringetje rondgedraaid. Nu we eenmaal stelling 0 hebben bewezen, zijn bedoelde uitspraken geheel gerechtvaardigd.

Ongelijkheid van Cauchy

Zij M het maximum van $|f(z)|$ op de cirkel C met straal r en middelpunt a. Zij f(z) op en binnen C analytisch. Dan hebben we de volgende schatting voor de afgeleiden van f in het punt a:

$$\boxed{|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!\,M}{r^n}\,.}$$

Opgave. Bewijs dit.

Opgave. g(t) zij holomorf in een volle omgeving van $a \leqslant t \leqslant b$.

$$f(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{g(t)}{t-z}\,dt \qquad \text{(rechtlijnig geintegreerd)}$$

Dan is f(z) een holomorfe funktie van z in het gebied buiten het reële segment [a,b]. Zij x een getal met $a < x < b$. Dan is

$$f(x+i0) - f(x-i0) = g(x).$$

Bewijs dit.

§.4 Constructie van analytische funkties door integralen en reeksen

In II.§.3 is aangetoond dat eèn machtreeks binnen de convergentiecirkel een holomorfe funktie voorstelt. In deze paragraaf behandelen we enkele andere manieren om holomorfe funkties te maken.

Stelling

Laat t de kromme K doorlopen en z het z het begrensde domein D ($= \overline{G}$ = gebied G + rand van G). De verzameling paren (z,t) noemen we $D \times K$. Veronderstel dat f(z,t) en $\frac{\partial f}{\partial z}$ op $D \times K$ continu zijn (als funkties van 2 veranderlijken). Dan is de voor $z \in G$ gedefinieerde funktie

$$F(z) = \int_K f(z,t)\,dt$$

in G holomorf en de afgeleide van F is

$$F'(z) = \int_K \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,dt.$$

(We vinden F' dus door integratie en differentiatie te verwisselen.)

Bewijs. We moeten bewijzen dat $\lim\limits_{h\to o} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \int\limits_K \frac{\partial f}{\partial z}\,dt$.

Hiervoor is het voldoende aan te tonen dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een δ is zodat voor $0 < |h| < \delta$ geldt

$$\left|\frac{f(z+h,t)-f(z,t)}{h} - \frac{\partial f(z,t)}{\partial z}\right| < \varepsilon$$

voor alle t op K. (We gebruiken dan dat K een eindige lengte L heeft.) Om bovenstaande ongelijkheid te bewijzen stellen we het linkerlid voor als integraal. Dit kan omdat $\frac{\partial f}{\partial z}$ voor iedere $t \in K$ bestaat, d.w.z. $f(z,t)$ is analytisch en dus kan de integraalformule van Cauchy gebruikt worden. Voor het schatten van de integraal gebruiken we dan de stelling van blz.16. Neem $z \in G$. Er is een cirkel C met middelpunt z die geheel binnen G ligt (noem de straal ρ),

$$\frac{f(z+h,t) - f(z,t)}{h} = \frac{1}{2\pi i h}\int\limits_C f(\zeta,t)\left\{\frac{1}{\zeta-z-h} - \frac{1}{\zeta-z}\right\}d\zeta$$

en

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta,t)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta.$$

Dus

$$\frac{f(z+h,t) - f(z,t)}{h} - \frac{\partial f(z,t)}{\partial z} = \frac{h}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta,t)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-h)}\,d\zeta.$$

Laten we nog even bedenken wat we willen aantonen. Bij iedere $\varepsilon > 0$ moeten we aantonen dat er een δ is zodat voor $0 < |h| < \delta$ en alle t geldt dat de absolute waarde van het rechterlid $< \varepsilon$ is. De integraal willen we schatten, dus eerst de integrand en wel: teller niet te groot, noemer niet te klein. Welnu: de funktie $f(z,t)$ is continu op de begrensde gesloten verzameling $D \times K$ en daar dus begrensd $|f(\zeta,t)| \leqslant M$ voor alle ζ en t waar we over praten; op C is $|\zeta-z| = \rho$ en om er voor te zorgen dat $|\zeta-z-h|$ niet te klein wordt, d.w.z. z+h niet te dicht bij de cirkel C ligt, kiezen we $0 < |h| < \delta \leqslant \frac{1}{2}\rho$ want dan is $|\zeta-z-h| \geqslant \frac{1}{2}\rho$ en we vinden

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta,t)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-h)}\,d\zeta\right| \leqslant \frac{|h|}{2\pi}\cdot\frac{M}{\rho^2(\frac{1}{2}\rho)}\cdot 2\pi\rho = \frac{2M|h|}{\rho^2}.$$

Als we er dus voor zorgen dat ook nog $\delta < \frac{\rho^2\varepsilon}{2M}$ geldt, dan is aan onze eis voldaan.
We moeten dus kiezen $\delta = \min\left(\frac{1}{2}\rho, \frac{\rho^2\varepsilon}{2M}\right)$. Het bewijs is hiermee voltooid.

Voorbeeld. Zij $f(t)$ een continue funktie van t, K een kromme. Dan is $\int\limits_K f(t)\,e^{zt}dt$ een analytische funktie van z, gedefinieerd voor alle z.

Voorbeeld. Het vroeger behandelde speciale geval $\int_K \frac{f(t)}{t-z}\,dt$.

Opmerking

Als we in plaats van K een oneindig lange weg W kiezen geldt de stelling ook nog mits aan nog enige voorwaarden is voldaan. We gaan daarop hier niet in maar wijzen er op dat dit voor vele toepassingen later belangrijk zal zijn (speciale funkties).

Constructie van analytische funkties door reeksen

Het begrip uniforme convergentie is bekend uit het college wiskunde IIIa. We geven hier de analoge definitie voor complexe funkties. Een reeks van funkties $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, allen gedefinieerd op een gebied G noemen we convergent met som $F(z)$ als bij iedere $\varepsilon > 0$ een N_0 gevonden kan worden worden zodat

$$|F(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z)| < \varepsilon \quad \text{als } N > N_0.$$

Dit moet voor iedere $z \in G$ mogelijk zijn. In het algemeen zal N_0 niet alleen van ε afhangen, maar ook van z. Als we echter bij iedere $\varepsilon > 0$ een N_0 kunnen vinden zodat voor alle z en $N > N_0$ aan bovenstaande ongelijkheid is voldaan heet de reeks uniform convergent. (Dat betekent dus dat N_0 dan alleen van ε afhangt.)

Opm. Een veel gemaakte fout is het verwarren van "convergent voor iedere z" en "uniform convergent". Uit het bovenstaande ziet U heel duidelijk dat uniform convergent veel meer betekent dan alleen maar "convergent voor iedere z". Voorbeeld: de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ is convergent voor iedere z binnen de eenheidscirkel. De reeks is binnen de eenheidscirkel niet uniform convergent.

We zullen nu een aantal prettige eigenschappen van uniform convergente reeksen behandelen.

Stelling

De som van een uniform convergente reeks van continue funkties is een continue funktie.

Bewijs. Precies als in wiskunde IIIa, hoofdstuk II.

Stelling

Een uniforme convergente reeks van continue funkties mag termsgewijs worden geintegreerd over elke kromme liggende in het gebied van uniforme convergentie, d.w.z.

$$\int_K \{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\}\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \{\int_K f_n(z)\, dz\}.$$

Bewijs. Laat F(z) de som van de reeks zijn en L de lengte van de kromme K. Bij iedere $\varepsilon > 0$ is een N_0 zodat voor $N > N_0$ en alle z op K geldt

$$|F(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z)| < \varepsilon .$$

Dan is volgens de bekende schatting voor integralen:

$$|\int_K F(z)\, dz - \sum_{n=1}^{N} \{\int_K f_n(z)\, dz\}| = |\int_K \{ F(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z)\}\, dz|$$

$$\leqslant \varepsilon \, . \, L.$$

Hiermee is het gestelde reeds bewezen.

Als de funkties $f_n(z)$ holomorf zijn kunnen we nog meer bewijzen.

Stelling van Weierstrass

De som van een in een gebied uniform convergente reeks holomorfe funkties is holomorf.

Bewijs. Laat G het gebied van uniforme convergentie zijn, G' een willekeurig enkelvoudig samenhangend deelgebied van G en K een willekeurige kromme in G'. Dan is volgens de hoofdstelling $\int_K f_n(z)\, dz = 0$ voor iedere n, dus volgens de vorige stelling $\int_K F(z)\, dz = 0$. We hebben reeds bewezen dat F(z) continu is en kunnen nu besluiten dat F(z) holomorf is op grond van de stelling van Morera (III.3.2).

Een bijzonder geval van de stelling van Weierstrass: een machtreeks in een gebied binnen de convergentiecirkel.

Opmerking

Ga aan het voorbeeld $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ na dat uit uniforme convergentie voor $|z| \leqslant 1$ (géén gebied!) niet volgt dat de som ook voor $|z| \leqslant 1$ een analytische funktie is. (In z = 1 is de somfunktie niet differentieerbaar, dus zeker niet analytisch!)

Bij de behandeling van reële funkties is gewaarschuwd niet de bekende fout te maken: een uniforme convergente reeks term voor term differentiëren. We zien het trouwens aan het vorige voorbeeld:

de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ is voor $-1 \leqslant x \leqslant 1$ uniform convergent maar de som is in x = 1 niet eens differentieerbaar. Voor complexe funkties, gedefinieerd op een gebied, gaat dit echter wel volgens de

Stelling

Is op het gebied G de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ uniform convergent met som F(z) en zijn alle $f_n(z)$ holomorf, dan is

$$F^{(p)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(z) \qquad (p = 1,2,\ldots)$$

<u>Bewijs</u>. In de vorige stelling is aangetoond dat F(z) holomorf is en dus bestaan de afgeleiden $F^{(p)}(z)$. Zij nu C een cirkel om z die binnen G ligt. Dan is

$$F^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\int_C \frac{F(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}\,d\zeta = \frac{p!}{2\pi i}\int_C \frac{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}\,d\zeta.$$

Op C is $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\zeta)$ uniform convergent, verder: $|\zeta-z|$ = straal van C = ρ, dus is ook $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}$ uniform convergent en dus

$$F^{(p)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}\,d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(z).$$

HOOFDSTUK IV. Holomorfe funkties; reeksen

§.1 Stelling van Taylor

De in het college wiskunde I voor reële funkties bewezen stelling van Taylor kunnen we nu ook voor complexe funkties formuleren:

Stelling

Is $f(z)$ holomorf in het gebied G en a een willekeurig punt van G, dan geldt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{met} \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

en de convergentiestraal van deze machtreeks is tenminste even groot als de afstand van a tot de rand van G.

Bewijs. Zij r de afstand van a tot de rand van G; kies twee getallen ρ en ρ_1 met $0 < \rho_1 < \rho < r$. Dan ligt de cirkel C met straal ρ en middelpunt a met zijn inwendige geheel binnen G. Laat z voldoen aan $|z-a| \leqslant \rho_1$. Dan geldt volgens de integraalformule van Cauchy (III, §.3)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Nu is

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{1}{w-a} \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}.$$

Verder

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \frac{1}{\rho}|z-a| \leqslant \frac{\rho_1}{\rho} < 1,$$

en dus

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n.$$

Deze reeks convergeert uniform in $w \in C$ omdat ze de van w onafhankelijke majorante $\sum_{n=0}^{\infty} (\rho_1/\rho)^n$ heeft. Omdat $f(w)$ op C begrensd is, is ook de reeks voor $\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}$ uniform convergent in $w \in C$. Deze reeks kan termsgewijs worden geintegreerd, en we vinden

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \text{met} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw.$$

Van vroeger weten we dat $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ is. Hiermee is het bewijs af.

Gehele funkties

Definitie
Een funktie f(z) heet geheel als f(z) voor iedere z holomorf is.

Stelling
Is f(z) geheel, a willekeurig, dan is f(z) te ontwikkelen in een machtreeks om z = a met convergentiestraal ∞.

Bewijs. Zie boven. Merk op dat we de eigenschap van deze stelling ook als definitie van geheel kunnen nemen.

Definitie
Een funktie waarvan de machtreeks afbreekt heet gehele rationale funktie (veelterm). Is dit niet het geval dan noemen we de funktie transcendent.

Voorbeelden van gehele (transcendente) funkties zijn de exponentiële en trigonometrische funkties (II.3).

§.2 Laurentreeksen

We weten dat $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ voor alle z, dus $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$.

Analoog: $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1}$ voor $|z| > 1$ en verder

$$\frac{\sin z}{z^6} = z^{-5} - \frac{1}{3!} z^{-3} + \frac{1}{5!} z^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k+5)!} .$$

Dit zijn drie voorbeelden van reeksen die op machtreeksen lijken maar ook negatieve machten van z bevatten. Het zijn generalisaties van machtreeksen die we Laurentreeksen zullen noemen. We bewijzen een ontwikkelingsstelling die een uitbreiding is van de stelling van Taylor.

Zij G het gebied tussen twee concentrische cirkels c en C (het ringgebied G is tweevoudig samenhangend) met stralen r en R. Zij f(z) gedefinieerd en holomorf in G. Construeer twee andere concentrische cirkels γ en Γ binnen G, en neem z in de ring tussen γ en Γ. De stralen van γ en Γ zijn ρ en P.
Het gemeenschappelijk middelpunt van alle cirkels zij a. Dan geldt volgens afspraak:

$$0 < r < \rho < |z-a| < P < R.$$

De integralen

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \quad \text{en} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

hebben beide betekenis. Alle cirkels zijn positief georienteerd. Met een hulpkanaal en de integraalformule van Cauchy vinden we

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Nu is

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{1}{w-a}\,\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = -\frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}}$$

(de laatste uitdrukking krijgt men uit de voorlaatste door verwisseling van w en z).

Ligt w op γ dan geldt $\left|\frac{w-a}{z-a}\right| < 1$; ligt w op Γ dan geldt $\left|\frac{z-a}{w-a}\right| < 1$.
Dus

w op γ, dan $\frac{1}{w-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$,

en deze reeks is uniform convergent in w voor alle w op γ;

w op Γ, dan $\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$,

en deze reeks is uniform convergent in w voor alle w op Γ.

De funktie f(w) is begrensd op γ en ook op Γ, dus $|f(w)| \leq M$.
Dus

w op γ: $\frac{f(w)}{w-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^{-n-1} f(w)(w-a)^n$,

en deze reeks convergeert uniform in w voor $w \in \gamma$.

w op Γ: $\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n f(w)(w-a)^{-n-1}$,

en deze reeks convergeert uniform in w ($w \in \Gamma$).

Uniform-convergente reeksen mogen termsgewijs worden geintegreerd.
Derhalve

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)(w-a)^n\,dw.$$

Hiermee is f(z) geschreven als som van twee reeksen; de ene is een machtreeks in z-a, de andere een machtreeks in 1/(z-a). Ze convergeren respectievelijk binnen Γ en buiten γ.

In plaats van Γ of γ in de integralen mogen we een willekeurige Jordan-kromme J nemen die geheel in het binnengebied tussen c en C verloopt en in positieve zin is georienteerd, want we kunnen Γ en γ tot J deformeren zonder dat singulariteiten van de respectieve integranden worden gepasseerd. Dus kunnen we schrijven

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \text{ met } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \qquad (n \gtreqless 0).$$

De coefficienten c_n zijn onafhankelijk van z en door f eenduidig bepaald. We kunnen $f(z)$ splitsen als $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, met

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \text{een machtreeks in } z-a,$$

$$f_2(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}, \quad \text{een machtreeks in } \frac{1}{z-a}.$$

De reeks voor $f_1(z)$ convergeert voor $|z-a| < R$, ook daar waar $f(z)$ niet is gedefinieerd (binnen c); die voor $f_2(z)$ convergeert voor $|z-a| > r$, ook daar waar $f(z)$ niet is gedefinieerd (buiten C). In de cirkelring tussen c en C convergeren beide reeksen, en hun som stelt $f(z)$ voor.

Deze reeksontwikkeling heet Laurent-ontwikkeling van $f(z)$. Deze Laurent-ontwikkeling is uniform convergent in z op elk domein gelegen binnen G.

Opmerking. Een bijzonder geval doet zich voor als $f(z)$ holomorf is binnen C. Dan blijft alleen de Taylorreeks over: $c_n = 0$ voor $n = -1, -2, \ldots$.

Definitie

De reeks voor $f_1(z)$ noemen we het positieve deel der Laurent-ontwikkeling. De reeks voor $f_2(z)$ noemen we het negatieve deel of wel het hoofddeel der Laurent-ontwikkeling.

Een ander speciaal geval doet zich voor als de cirkel c zich tot een punt a samentrekt. Dan geldt blijkbaar de

Stelling

Is $f(z)$ holomorf in de omgeving van a, het punt a zelf uitgesloten, dan is in die gereduceerde omgeving van a de funktie $f(z)$ ontwikkelbaar in een Laurent-reeks. Het positieve deel van de Laurent-ontwikkeling convergeert in een volle omgeving van a (dus a zelf inbegrepen); het negatieve deel convergeert voor alle $z \neq a$.

§.3 Extreme waarden van een funktie

Zij f(z) eenwaardig gedefinieerd in een gebied G en aldaar een holomorfe funktie van z. Zij verder f(z) niet constant in G. Dan kunnen we vragen naar extreme waarden van $|f(z)|$ als z in G varieert, en waar die worden aangenomen. Informatie hierover geeft de

Stelling

In een (inwendig) punt van G neemt $|f|$ geen maximale waarde aan.

Bewijs. Stel $|f(z)|$ is maximaal in het punt a van G; f(z) is in a holomorf, en in de omgeving van a geldt dus de ontwikkeling

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots .$$

Hierbij is $c_0 \neq 0$ (anders zou f(a) = 0 zijn, en dus f identiek nul omdat bij onderstelling $|f(z)|$ maximaal in a is). De coefficienten $c_1, c_2, \dots$ kunnen niet allemaal nul zijn, omdat anders f(z) constant zou zijn. Zij c_k de eerste der coefficienten die niet nul is. Dan

$$f(z) = c_0 + c_k(z-a)^k + c_k(z-a)^k \{d_1(z-a) + d_2(z-a) + \dots\} .$$

Door $|z-a|$ klein genoeg te kiezen, kunnen we bereieken dat

$$|d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + \dots| < \tfrac{1}{2} \text{ wordt.}$$

Er is dus om het punt a een cirkel te vinden zodanig dat

$$f(z) = c_0 + c_k(z-a)^k + \theta c_k(z-a)^k \quad \text{met } |\theta| < \tfrac{1}{2}$$

voor z binnen die cirkel.

Stel $c_0 = A\,e^{iB}$ $(A > 0)$, $c_k = U\,e^{iV}$ $(U > 0)$, $z-a = \rho\, e^{i\varphi}$,

dan is

$$c_0 + c_k(z-a)^k = A\,e^{iB} + U\,\rho^k\,e^{i(V+k\varphi)} .$$

Kies z (of φ) zodanig dat $B = V + k\varphi$ $(\varphi = \frac{B-V}{k})$.
Dan is op het lijnsegment [a,z]

$$|c_0 + c_k(z-a)^k| = A + U\rho^k = |c_0| + |c_k||z-a|^k,$$

en dus

$$\begin{aligned}|f(z)| &\geqslant |c_0 + c_k(z-a)^k| - |\theta||c_k||z-a|^k \\ &> |c_0| + |c_k||z-a|^k - \tfrac{1}{2}|c_k||z-a|^k \\ &> |f(a)| + \tfrac{1}{2}|c_k||z-a|^k \qquad (c_k \neq 0) \quad (z \neq a)\end{aligned}$$

Hier staat dat $|f(z)|$ op het interval $(a,z]$ groter is dan $|f(a)|$. Dit is een tegenspraak, want $|f(a)|$ zou maximaal zijn. Hiermee is de stelling bewezen.

Zij D een begrensd domein (gebied + rand) dat geheel binnen G ligt. Dan is $|f(z)|$ op D begrensd, en neemt dus ergens op D een maximum aan. Volgens de stelling kan dat niet in een inwendig punt van D gebeuren. Dus ligt het maximum in een randpunt van D.

Is $f(z)$ op en binnen een Jordankromme holomorf, dan wordt het maximum van $|f(z)|$, voor z op en binnen de kromme, noodzakelijk in een punt van die kromme aangenomen.

Analoge beschouwingen gelden voor het minimum van $|f(z)|$, met dit verschil dat wel degelijk het minimum van $|f(z)|$ in een inwendig punt van G kan worden aangenomen. Het absolute minimum is natuurlijk 0, en dit wordt aangenomen in elk nulpunt van $f(z)$ in G.
Stel a is inwendig punt van G, en stel $f(a) \neq 0$. Beschouw $g(z) = 1/f(z)$ in de omgeving van a. Dan is $g(z)$ niet constant, omdat $f(z)$ niet constant is; $g(z)$ is holomorf in a. Volgens vorige stelling is $|g(z)|$ niet maximaal in a, dus $|f(z)|$ niet minimaal in a.
Als $f(z)$ geen nulpunt binnen D heeft, dan wordt het minimum van $|f(z)|$ ergens op de rand van D aangenomen.

Opgave
Ook de funkties $\mathrm{Re}(f)$ en $\mathrm{Im}(f)$ kunnen maximale waarden niet anders aannemen dan op de rand van D (eventueel G). Dit is welbekend in de potentiaaltheorie. Idem voor minimale waarden.

§.4 Stelling van Liouville

Een begrensde gehele funktie is noodzakelijk constant.

Bewijs. Zij $f(z)$ een gehele funktie. Dan bezit $f(z)$ een machtreeksontwikkeling om de oorsprong, waarvan de convergentiestraal oneindig groot is

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{met} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw.$$

Hierbij is C een willekeurige positief-georienteerde Jordankromme om de oorsprong. We kunnen voor C een cirkel nemen met straal R. Uit de integraalvoorstelling volgt (zie ook ongelijkheid van Cauchy)

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{R^n} \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

als M het maximum van $|f(z)|$ is voor z op C. Is $f(z)$ begrensd, dus $|f(z)| \leqslant M'$ (alle z) dan is $M \leqslant M'$ en dus $|a_n| \leqslant M'/R^n$, waarbij M' niet meer van R afhangt. De coefficienten a_n zijn onafhankelijk van R. Hun bovengrens M'/R^n gaat naar nul voor $R \to \infty$, tenzij $n = 0$ is. Dus $a_n = 0$ behalve voor $n = 0$. Dan is $f(z)$ inderdaad constant. QED.

Toepassing, hoofdstelling der algebra

Een n-degraads vergelijking heeft tenminste één wortel.

Bewijs. Beschouw de vergelijking

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = 0, \quad a_n \neq 0, \quad n \geqslant 1.$$

Noem het polynoom in het linkerlid f(z). Stel dat f(z) geen nulpunt heeft, dan is 1/f(z) een gehele funktie en wel een gehele transcendente funktie. Nu is

$$f(z) = a_n z^n (1 + d_1/z + \dots + d_n/z^n), \quad \text{met } d_k = a_{n-k}/a_n .$$

Voor grote waarden van $|z|$ nadert de uitdrukking tussen haakjes tot één. Dus $|1/f(z)|$ nadert tot nul voor $|z| \to \infty$. Dan is 1/f(z) in de omgeving van $z = \infty$ begrensd. Dus 1/f(z) overal begrensd. Met Liouville volgt dan dat 1/f(z) constant is, en dit is onmogelijk.
Dus f(z) heeft wèl een nulpunt. QED.

Opmerking. Een gehele transcendente funktie behoeft geen nulpunten te hebben; voorbeeld: e^z.

§.5 Singuliere punten

We zullen nu de verschillende gevallen van zgn. geisoleerde singuliere punten beschouwen. We bekijken hier dus funkties f(z) die in een gereduceerde omgeving van een punt $z = a$ regulier zijn en gaan na wat er in $z = a$ aan de hand kan zijn.

Opmerking. In hoofdstuk IV zullen we een andere soort singuliere punten ontmoeten nl. vertakkingspunten.

Bij de Laurentontwikkeling van een funktie die in een gereduceerde omgeving van a regulier is kunnen we drie gevallen onderscheiden:

Eerste geval

Het hoofddeel ontbreekt. Dan geldt in de gereduceerde omgeving van a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n .$$

In dit geval spreken we van een ophefbare singulariteit. Definieren we nl. $f(a) = c_0$ dan is f(z) ook in $z = a$ regulier.

Tweede geval

In de Laurentreeks zijn slechts eindig veel termen met negatieve exponent:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$$

met $k \geqslant 1$ en $c_k \neq 0$.

We zeggen in dit geval: $f(z)$ heeft in $z = a$ een pool van de orde k, of ook wel k-voudige pool. De funktie $(z-a)^k f(z)$ is holomorf in een omgeving van a.

Derde geval
Het hoofddeel bevat oneindig veel termen. Het hoofddeel is dan een gehele transcendente funktie van $1/(z-a)$. Het punt $z = a$ is natuurlijk singulier, veel "sterker" singulier dan de pool in het tweede geval. Daarom noemt men $z = a$ een essentieel-singulier punt.

Over het gedrag van de funktie $f(z)$ in de buurt van het punt a kunnen we het volgende opmerken.

1° Is a regulier punt, dan is $f(z)$ in de omgeving van a begrensd en omgekeerd. (Ga na!)

2° Is a een pool, dan is $|f(z)|$ voor alle z groot in de omgeving van a. Duidelijker: is G een willekeurig groot getal, dan kan men $\delta > 0$ vinden, zodanig dat $|f(z)| > G$ voor $0 < |z-a| < \delta$.

3° In de omgeving van een essentieel-singulier punt wordt elk getal α willekeurig dicht benaderd door $f(z)$. Dat wil zeggen: bij willekeurige $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, α, kan men tenminste één punt z vinden waarvoor geldt: $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$ en $0 < |z-a| < \delta$.

De bewijzen van 1° en 2° zijn triviaal. Het bewijs van 3° is zeer lastig. We laten het achterwege.

Het punt $z = \infty$
Om het spreken te vereenvoudigen voeren we formeel "het punt ∞" in. Wat we bedoelen blijkt uit het volgende.
In bovenstaande discussie, en ook vroeger, werd a eindig ondersteld. Nu zullen we de begrippen holomorf, pool, etc. definieren voor het ene oneigenlijke punt, $z = \infty$. De algemene regel is: het gedrag van een funktie $f(z)$ in $z = \infty$ wordt gedefinieerd aan de hand van het gedrag van de funktie $g(z) = f(1/z)$ in het punt $z = 0$.

Een model van het zo uitgebreide complexe vlak kunnen we krijgen door een bol te beschouwen die in de oorsprong van het complexe vlak raakt en het complexe vlak dan op deze bol te projecteren vanuit het hoogste punt (de "noordpool" N). Het punt N beschouwen we dan als beeld van ∞. Aan dit model (stereografische projectie) zien we dat het zinvol is om bijv. het buitengebied van een Jordankromme een "omgeving van ∞" te noemen. Immers de projectie op de bol is een omgeving van N.
We gaan hier verder niet op in.

Bovenstaande regel houdt dus in (met $g(z) = f(\frac{1}{z})$):

$f(z)$ is holomorf in $z = \infty$, als $g(z)$ holomorf is in $z = 0$.
$f(z)$ heeft in $z = \infty$ een pool van de orde k als $g(z)$ in $z = 0$ een pool van de orde k heeft.
$f(z)$ heeft in $z = \infty$ een essentieel-singulier punt als $g(z)$ een essentieel-singulier punt heeft in $z = 0$.

N.B. We definieren niet: het residu van $f(z)$ in ∞ is het residu van $f(\frac{1}{z})$ in $z = 0$. We kunnen dit begrip op de gewone manier invoeren. Is $f(z)$ regulier op en buiten de Jordankromme K dan definieren we

$$\mathrm{Res}_\infty\ f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_K f(z)\,dz.$$

Het minteken wordt verklaard door het feit dat als we K als rand van het buitengebied beschouwen de omloopszin negatief is.

Dus: de funktie $\frac{1}{z}$ is regulier in $z = \infty$, maar heeft in ∞ als residu -1.

Voorbeelden

Een gehele niet constante rationale funktie heeft een pool in het oneindige; een gehele transcendente funktie heeft een essentieel-singulier punt in het oneindige. Zo heeft $f(z) = z^2$ een tweevoudige pool in $z = \infty$; $f(z) = 1/z$ heeft een enkelvoudig nulpunt in $z = \infty$; $f(z) = z^{-3} + z^{-2}$ heeft een tweevoudig nulpunt in $z = \infty$. En $\sin z$ heeft een essentieel-singulier punt in $z = \infty$, enz.

In III, §.3 hebben we de residustelling van Cauchy besproken, en geillustreerd aan funkties die als singulariteiten polen hebben. De residustelling geldt voor willekeurige geïsoleerde singuliere punten. We kunnen dus ook essentiële singulariteiten toelaten. Heeft $f(z)$ een essentieel-singulier punt in $z = a$, dus

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \text{(in omgeving van a)}$$

dan is $\{\mathrm{Res.}\ f(z)\}_{z=a} = c_{-1}$, omdat $\int f(z)dz$ langs een contour om a in de omgeving van a gelijk is aan $2\pi i\ c_{-1}$, want we mogen termsgewijs integreren. Ook bij een essentieel-singulier punt is dus het residu gelijk aan de coefficient van $1/(z-a)$ in de Laurent-ontwikkeling.

Aantal nulpunten binnen een kromme

Zij $f(z)$ holomorf op en binnen de Jordankromme J, en $f \neq 0$ op J. Dan is het aantal nulpunten van f binnen J, wanneer we een k-voudig nulpunt ook k-maal tellen:

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_J \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

<u>Bewijs</u>: Definieer de functie g door $g(z) = f'(z)/f(z)$. Deze functie is continu op J, en dus bestaat de integraal. Binnen J liggen slechts een eindig aantal nulpunten van f. Zij a zo'n nulpunt, en laat het een k-voudig nulpunt zijn. Dan geldt in de omgeving van a:

$$f(z) = a_k(z-a)^k\ (1 + \dots)\ ,$$

$$f'(z) = k\ a_k(z-a)^{k-1}\ (1 + \dots)\ ,$$

en dus

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a}\ \{1 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots\}\ .$$

Het residu van g(z) in een nulpunt van f(z) is dus gelijk aan de multipliciteit van dat nulpunt. Pas de residustelling toe, en het gewenste resultaat is verkregen.

<u>Opgave</u>: Zij f(z) op en binnen J holomorf met uitzondering van een (eindig, waarom ?) aantal polen, niet op J liggende, en $f \neq 0$ op J, dan geldt:

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_J \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Hierbij is N het aantal nulpunten van f binnen J, P het aantal polen van f binnen J (meervoudige ook meervoudig geteld). Een pool van de orde k is in zekere zin een nulpunt van de orde -k, en omgekeerd.

<u>Toepassing</u>:
Een polynoom van de graad n heeft precies n nulpunten.

<u>Bewijs</u>: Zij $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n\ z^n \quad (n \geqslant 1,\ a_n \neq 0)$

Voor $|z|$ voldoende groot is $|f(z)| > 1$. De eventuele nulpunten liggen dus allen binnen een zekere cirkel J met middelpunt in de oorsprong. Dit aantal is

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_J g(z)dz, \text{ met } g(z) = f'(z)/f(z) =$$

$$= \frac{n\ a_n\ z^{n-1} + \dots}{a_n\ z^n + \dots} = \frac{n}{z}(1 + b_1/z + b_2/z^2 + \dots)$$

Deze reeks is de Laurent-ontwikkeling van g(z) in de omgeving van het punt $z = \infty$, en men kan J zo kiezen dat ze op en buiten J uniform convergeert. De reeks mag termsgewijs worden geintegreerd, en de uitkomst is n, de coefficient van $1/z$.

<u>Opmerking</u>: g(z) heeft in $z = \infty$ een enkelvoudig nulpunt.

<u>Opgave</u>: Heeft f(z) slechts reguliere punten en polen ($z = \infty$ meegerekend) dan is f(z) rationaal. Een rationale functie kan in partiële breuken worden gesplitst.

Opgave: Zij $\varphi(z)$ op en binnen J holomorf, $f(z)$ op en binnen J holomorf, en $f \neq 0$ op J. Zij verder z_k nulpunt van f binnen J met multipliciteit m_k. Dan geldt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_J \varphi(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_k \varphi(z_k)\,m_k .$$

HOOFDSTUK V. Toepassing der residuen

§.1 Bepaalde integralen

In dit hoofdstuk gaan we complexe-functietheorie toepassen op de berekening van bepaalde integralen. In de elementaire analyse kunnen we eigenlijk alleen een bepaalde integraal uitrekenen als we de onbepaalde integraal kennen, als we dus de primitieve functie kennen. In die zin is dan integreren ook het omgekeerde van differentiëren. De complexe-functietheorie is veel machtiger. Daar kunnen we bepaalde integralen uitrekenen met de theorie der residuen.

Stel we willen uitrekenen: $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$, waarbij R een rationale functie van zijn twee argumenten is. Vroeger hebben we geleerd hoe we door de substitutie $t = \tan\frac{1}{2}\theta$ en partiële-breukensplitsing de uitkomst kunnen vinden. We gaan nu anders te werk: we stellen $z = e^{i\theta}$, $dz = i\,z\,d\theta$, en dan wordt de integraal

$$\int_C R\left\{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right\}\frac{dz}{iz} = \int_C R_1(z)\,dz$$

waarbij C de eenheidscirkel is en R_1 een andere rationale functie, nu van z. We zoeken nu de singuliere punten van R_1 binnen C en passen de residustelling toe.

Voorbeeld: $$J(a) \overset{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta} \qquad (0 < a < 1)$$

Stel $z = e^{i\theta}$; z loopt dan langs de eenheidscirkel C in positieve zin; $dz = i\,e^{i\theta}\,d\theta = i\,z\,d\theta$, dus $d\theta = -(i/z)dz$. Verder

$$1 + a\cos\theta = 1 + \tfrac{1}{2}a\,(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 1 + \tfrac{1}{2}a(z + 1/z).$$

Daarmee vinden we

$$\frac{d\theta}{1 + a\cos\theta} = -\frac{2i}{a}\,\frac{dz}{z^2 + \frac{2}{a}z + 1} = -\frac{2i}{a}\,\frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)},$$

waarbij z_1 en z_2 de wortels zijn van $z^2 + (2/a)z + 1 = 0$:

$$z_1 = -\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} = \frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a},$$

$$z_2 = -\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} = \frac{-\sqrt{1-a^2} - 1}{a} \qquad (< -\frac{1}{a}).$$

Het getal z_1 ligt binnen C, het getal $z_2 = 1/z_1$ ligt buiten C. We hebben alleen te maken met het singuliere punt binnen C, dus met z_1. Het residu van de integrand daar is

$$-\frac{2i}{a}\,\frac{1}{z_1 - z_2} = -\frac{2i}{a}\,\frac{a}{2\sqrt{1-a^2}}.$$

Vermenigvuldig dit met $2\pi i$, en we krijgen de gevraagde uitkomst

$$J(a) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Deze formule geldt ook voor $-1 < a < 1$.

(Na lezing van hoofdstuk VI is dit nog uit te breiden tot complexe a. Ga na!)

Opgave: $$I(a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} (1 - 2a\cos t + a^2)^{-1}\,dt \qquad (a \text{ complex, } |a| \neq 1)$$

Dan geldt:

$$I(a) = 2\pi/(1-a^2) \qquad \text{voor } |a| < 1,$$
$$= 2\pi/(a^2-1) \qquad \text{voor } |a| > 1.$$

(Integraal is divergent voor $|a| = 1$.)

Opgave: $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos mt}{1 + a\cos t}\,dt = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^m$$

met m geheel ≥ 0, $0 < a < 1$.

Opgave: $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos mt}{1 - 2a\cos t + a^2}\,dt = 2\pi a^m (1-a^2)^{-1} \qquad \text{voor } |a| < 1,$$
$$= 2\pi a^{-m}(a^2-1)^{-1} \qquad \text{voor } |a| > 1.$$

(Integraal divergeert voor $|a| = 1$.)

Opgave:

Bereken $J = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3t}{1 - 2a\cos 2t + a^2}\, dt$

(Voor complexe a, zie hoofdstuk VI)

Opgave:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b\cos t)^2} &= 2\pi a(a^2 - b^2)^{-3/2} \\ \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b\cos^2 t)^2} &= ? \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant b < a)$$

(Uitbreiding tot complexe a en b ? Zie hoofdstuk VI)

We gaan nu integralen berekenen van de vorm $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$.

Onderstel van de functie $f(z)$:

(1) $f(z)$ is holomorf op en boven de reële as, met eventuele uitzondering van een eindig aantal polen, waarvan niet één op de reële as ligt;

(2) $z\, f(z) \to 0$, uniform in arg z, als $z \to \infty$, voor $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$;

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ bestaat.

Opmerkingen: Voorwaarde (2) garandeert nog niet het bestaan van de integraal. Neem maar een functie $f(x)$ waarvoor $f(x) \sim 1/(x \log x)$ $(x \to \infty)$. Eis (3) houdt in dat $\int^{\infty}$ en $\int_{-\infty}$ beide bestaan. Uit (1) volgt dat voor eindige a en b de integraal $\int_a^b f(x)\, dx$ bestaat. (3) eist dus dat de laatste integraal een limiet heeft voor $a \to -\infty$ en $b \to \infty$, onafhankelijk van elkaar.

Berekening:

Teken halve cirkel Γ met middelpunt in oorsprong en straal ρ. Neem ρ zo groot dat buiten Γ geen singulariteiten van $f(z)$ liggen. Dan:

$$\int_{-\rho}^{\rho} f(x)\, dx + \int_{\Gamma} f(z)\, dz = 2\pi i\ \Sigma \text{ Res. } f(z) \text{ in bovenvlak.}$$

Geen van beide leden hangt van ρ af. Laat $\rho \to \infty$. De limiet van de eerste integraal bestaat en is gelijk aan de gevraagde. De tweede integraal moet voor $\rho \to \infty$ dus ook een limiet hebben. We laten zien dat die limiet nul is.

Neem $\varepsilon > 0$, dan $|zf(z)| < \varepsilon$ voor $|z| > \rho_0$. Kies $\rho > \rho_0$; dan geldt op

Γ : $|zf(z)| < \varepsilon$, dus $|f(z)| < \varepsilon/|z|$. Dan wordt

$$\left| \int_\Gamma f(z)\, dz \right| \leqslant (\varepsilon/\rho)\pi\rho = \varepsilon\pi, \text{ dus } \lim_{\rho\to\infty} \int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

We vinden aldus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \; \Sigma \text{ Res. } f(z) \qquad (\text{Im } z > 0),$$

waarbij de som zich uitstrekt over alle polen van $f(z)$ in het bovenvlak.

<u>Voorbeelden</u>:

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$; alle voorwaarden zijn vervuld.

$f(z) = 1/(1+z^2)$ heeft een enkelvoudige pool in het bovenhalfvlak voor $z = i$. Het residu is daar $\lim\limits_{z\to i} (z-i)/(1+z^2) = 1/(2i)$.

De integraal is dus gelijk aan π.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-3}\, dx$; $f(z) = (1+z^2)^{-3}$ heeft in $z = i$ een drievoudige pool. De Laurent-ontwikkeling om het punt $z = i$ is:

$$\frac{1}{(z+i)^3}\,\frac{1}{(z-i)^3} \overset{(z-i=u)}{=} \frac{1}{(u+2i)^3}\,\frac{1}{u^3} = \frac{1}{8i^3}\,\frac{1}{u^3}\,\frac{1}{(1+\frac{u}{2i})^3}$$

$$= \frac{i}{8}\, u^{-3}\, (1 - \tfrac{1}{2}iu)^{-3} = \frac{i}{8}\, u^{-3} (1 + \frac{3}{2}\, i\, u - \frac{3}{2}\, u^2 + \dots)$$

$$= \dots - \frac{3}{16}\, i\, \frac{1}{u} + \dots$$

Het residu in deze pool is dus $-(3/16)i$. Vermenigvuldig dit met $2\pi i$, en we krijgen de waarde der integraal gelijk aan $3\pi/8$.

<u>Opgave</u>:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{(a+bx^2)^4}\, dx = \frac{\pi}{16}\, a^{-3/2}\, b^{-5/2} \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

<u>Bespreek ook eventuele uitbreiding tot complexe a en b (zie hfdst.VI).</u>

Vervolgens berekenen we integralen van de vorm $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\alpha x}\, dx$.

Voor $\alpha = 0$ reeds behandeld. Stel $\alpha > 0$ (geen essentiële beperking, zolang we reële m bekijken). Neem aan:

(1) $f(z)$ op en boven de reële as holomorf, behalve eventueel in een eindig aantal singuliere punten, geen waarvan op de reële as.
(2) $f(z)\to 0$, uniform in het gesloten bovenvlak, als $z\to\infty$.
(3) de integraal bestaat.

Neem Γ net als in het geval $\alpha = 0$. Dan

$$\int_{-\rho}^{\rho} f(x)\, e^{i\alpha x} dx + \int_{\Gamma} f(z)\, e^{i\alpha z} dz = 2\pi i\ \Sigma\ \text{Res.}\ \{f(z)\, e^{i\alpha z}\},$$

waarbij de som wordt uitgestrekt over de singuliere punten van $f(z)$ in het bovenvlak. We gaan de integraal langs Γ schatten:

$$A \overset{\text{def}}{=} \int_{\Gamma} f(z)\, e^{i\alpha z} dz = \int_{0}^{\pi} f(\rho e^{it})\, e^{i\alpha\rho e^{it}}\, i\,\rho\, e^{it}\, dt;$$

$$|A| = \left|\int_{0}^{\pi} f(\rho e^{it})\, e^{i\alpha\rho(\cos t + i \sin t)}\, \rho e^{it} dt\right|$$

$$\leqslant \int_{0}^{\pi} |f(\rho e^{it})|\, e^{-\alpha\rho \sin t}\, \rho\, dt.$$

Volgens onderstelling (2) is bij $\varepsilon > 0$ een ρ_0 te vinden zodat $|f(\rho e^{it})| < \varepsilon$ voor $\rho > \rho_0$ en $0 \leqslant t \leqslant \pi$ (uniform in t). Kies $\rho > \rho_0$, dan

$$|A| \leqslant \varepsilon\rho \int_{0}^{\pi} e^{-\alpha\rho \sin t} dt = 2\varepsilon\rho \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\alpha\rho \sin t} dt$$

$$< 2\varepsilon\rho \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\alpha\rho(2/\pi)t} dt < 2\varepsilon\rho \int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha\rho t/\pi} dt = 2\varepsilon\rho(\pi/2\alpha\rho) = \pi\varepsilon/\alpha.$$

Dus $\lim\limits_{\rho\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)\, e^{i\alpha z} dz = 0$. Dan volgt gemakkelijk

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\alpha x} dx = 2\pi i\ \Sigma\ \text{Res.}\ \{f(z)\, e^{i\alpha z}\} \text{ in bovenvlak.}$$

<u>Voorbeeld (1)</u>

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{a^2 + x^2} dx \qquad (a > 0).$$

De integrand is een even funktie van x, dus $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2} dx$.

Dezelfde integraal met sin x in plaats van cos x is nul, omdat de integrand dan oneven is. Dus eveneens geldt

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{a^2+x^2} dx.$$

Deze kunststukjes moeten we goed onthouden!

We passen het algemene geval toe voor $f(z) = \frac{1}{2}(a^2+z^2)^{-1}$.
Er is aan alle voorwaarden voldaan, en de enige pool van $f(z)$ in het bovenvlak ligt bij $z = ia$ $(a > 0)$. Verder is

$$\{\text{Res. } f(z)\, e^{iz}\}_{z=ia} = \lim_{z\to ia} e^{iz}\, \frac{1}{2}\, \frac{z - ia}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{e^{ia}}{4ia}.$$

Dus $I = 2\pi i \frac{e^{ia}}{4ia} = (\pi/2a)\ e^{-a}$.

<u>Opgave</u>:

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2+k^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-ak} \qquad (a > 0,\ k > 0).$$

(Wat is de uitkomst als $a < 0$?)

<u>Voorbeeld (2)</u>

$$J = \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2}\,dx.$$

De funktie $\frac{\sin x}{x^2}$ is wel oneven, maar niet integreerbaar in de buurt van $x = 0$. Daarom komt een nieuw kunststukje. We nemen nu een integratieweg als volgt: van $-\rho$ naar $-\varepsilon$, van $-\varepsilon$ naar ε langs een cirkelboogje met straal ε, om de oorsprong te vermijden, dan van ε naar ρ, en verder met Γ terug naar $-\rho$. Deze weg noemen we W. En we integreren langs W de funktie $f = (1 - e^{iz})/z^2$. Als we het boogje om de oorsprong in het bovenvlak nemen, heeft de integrand binnen W geen singulier punt, en $\int_W f(z)dz$ is dus nul. De bijdrage van Γ gaat naar nul als $\rho \to \infty$. Dan geldt

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \quad f(z)\,dz + \int_\varepsilon^\infty f(x)\,dx = 0,$$

waarbij de middelste integraal over het kleine boogje is (in negatieve zin om de oorsprong). In de limiet $\varepsilon \to 0$ nadert deze integraal tot $2\pi i$ maal min het halve residu van $f(z)$ in $z = 0$, dus tot $(2\pi i)(-\frac{1}{2})(-i) = -\pi$. De twee overblijvende integralen kunnen we samentrekken tot

$$2\int_\varepsilon^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2}\,dx, \text{ en we vinden voor } \varepsilon \to 0 \text{ dan } J = \tfrac{1}{2}\pi.$$

In bovenstaande opgave is een principe gebruikt dat we nog vaker kunnen benutten. We formuleren het als

<u>Stelling</u>

Is a een <u>enkelvoudige</u> pool van de funktie $f(z)$ en C_ρ de halve cirkel: $|z-a| = \rho$, $0 \leqslant \arg (z-a) \leqslant \pi$, dan is

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} f(z)\,dz = \frac{1}{2}\,\mathrm{Res}_a\,\{f(z)\}.$$

(Denk aan orientatie van de halve cirkel.)

<u>Opgave</u>: bewijs deze stelling.

HOOFDSTUK VI. Analytische voortzetting

§.1 Analytische voortzetting

Identiteitsstelling

Stel $f(z)$ en $g(z)$ zijn gedefinieerd en holomorf in gebied G. Zij z_o enig punt van G.
Laat in iedere gereduceerde omgeving van z_o tenminste één punt z liggen waarvoor $f(z) = g(z)$ is.
Dan geldt: $f(z) = g(z)$ overal in G.

Bewijs

Eerste stap

We laten zien dat f en g overeenstemmen in de omgeving van z_o. Construeer een cirkel C, met middelpunt z_o, die met zijn inwendige geheel tot G behoort. Dan zijn f en g binnen C analytisch en kunnen aldaar in een machtreeks worden ontwikkeld.

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n(z-z_o)^n, \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_o),$$

$$g(z) = \sum_{n=o}^{\infty} b_n(z-z_o)^n, \qquad b_n = \frac{1}{n!} g^{(n)}(z_o).$$

Als we kunnen bewijzen dat $a_n = b_n$ $(n = 0,1,2,\dots)$ zijn we klaar. Stel dit was niet waar; noem dan k de kleinste waarde van n waarvoor $a_n \neq b_n$ is. Dan is, met $c_k = a_k - b_k \neq 0$,

$$f(z) - g(z) = c_k(z-z_o)^k \{1 + d_1(z-z_o) + d_2(z-z_o)^2 + \dots\},$$

waarbij de reeks tussen accolades binnen C convergeert en aldaar een continue funktie voorstelt. Voor $z = z_o$ is die funktie gelijk 1. We kunnen dus een omgeving van z_o vinden waar $|1 + d_1(z-z_o) + \dots| > \frac{1}{2}$. In die omgeving is dan $f(z) - g(z) \neq 0$, tenzij $z = z_o$. Dit is in tegenspraak met het gegevene.
Dus wel geldt $a_n = b_n$ voor alle n, dus $f(z) = g(z)$ binnen C.

Tweede stap

We bewijzen dat $f(z) = g(z)$ overal in G. Als er punten in G waren waarvoor $f(z) \neq g(z)$ dan zou er ook een punt p zijn zodat in iedere omgeving van p punten liggen waar f en g gelijk zijn en ook punten waar f en g verschillend zijn. Uit het eerste volgt (daar f en g continu zijn) dat $f(p) = g(p)$. Dan is echter volgens de eerste stap $f(z) = g(z)$ in een volle omgeving van p. Tegenspraak. Dus is $f(z) = g(z)$ overal in G.

Deze identiteitsstelling maakt complexe-funktietheorie zo eenvoudig. We geven een aantal toepassingen.

Definitie
Een a-punt van $f(z)$ is een punt z waar $f(z) = a$ is (nulpunt als $a = 0$ is).

Stelling

Zij $f(z)$ holomorf in gebied G. Zij D een begrensde gesloten deelverzameling van G. Dan is het aantal a-punten van $f(z)$ in D eindig, tenzij $f(z)$ identiek gelijk aan a is.

Bewijs. Stel D bevat oneindig veel verschillende a-punten; deze vormen dan een begrensde verzameling, met tenminste één verdichtingspunt b; b is punt van D, dus punt van G. Er is in iedere gereduceerde omgeving van b tenminste één punt z met $f(z) = a$. Neem $g(z)$ identiek gelijk aan a. Dan is $f(z) = g(z)$ overal in G. Dus $f(z)$ identiek aan a.

Stelling

Zijn $f(z)$ en $g(z)$ holomorf in G, en geldt voor enig punt z_0 van G:

$$f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \qquad (n = 0,1,2,\dots),$$

dan is $f(z) = g(z)$ in G.

Bewijs. f en g zijn holomorf in G; dus in het bijzonder in de omgeving van z_0. Aldaar bezitten ze convergente machtreeksontwikkelingen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n,$$

waarbij

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{n!} g^{(n)}(z_0) = b_n \qquad (n = 0,1,2,\dots).$$

Dus $f(z) = g(z)$ in omgeving van z_0, en dus $f(z) = g(z)$ overal in G.

Multipliciteit van een nulpunt

Stel $f(z)$ holomorf in G, en $f(z)$ niet identiek 0. Beschouw $z_0 \in G$. In de omgeving van z_0 geldt: $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. De coëfficiënten

a_n zijn niet allemaal nul, anders zou $f(z)$ identiek nul zijn, volgens de identiteitsstelling. Stel k is de kleinste waarde waarvoor $a_k \neq 0$ is. Dan

$$f(z) = (z-z_o)^k \{a_k + a_{k+1}(z-z_o) + \dots\} \overset{\text{def}}{=} (z-z_o)^k\, h(z)$$

Dan is $h(z)$ holomorf binnen een zekere cirkel rond z_o, en $h(z_o) = a_k \neq 0$. Het getal k is eenduidig bepaald, bij gegeven f en z_o. We hebben precies zoveel factoren $z-z_o$ uit $f(z)$ gehaald dat $h(z_o) \neq 0$ is en toch $h(z)$ holomorf in z_o is. Is $k = 0$, dan heeft f geen nulpunt in z_o. Is $k \geqslant 1$, dan heeft f een k-voudig nulpunt in z_o: k heet <u>multipliciteit</u> van het beschouwde nulpunt.
De functie $f(z)/(z-z_o)^k$ is niet gedefinieerd voor $z = z_o$. Voor $z \neq z_o$ stemt ze overeen met $h(z)$. Daarom geven we bovenstaande breuk de waarde $h(z_o)$ voor $z = z_o$. Dan is $f(z)/(z-z_o)^k$ holomorf in het punt z_o, en verder overal analytisch in gebied G.

<u>Analytische voortzetting</u>
Gegeven twee gebieden G_1 en G_2 met doorsnede D die niet leeg is, en we nemen aan dat D een gebied is. Stel in G_1 is een functie $f_1(z)$ gedefinieerd, in G_2 een functie $f_2(z)$; beide holomorf in hun respectieve gebieden. Zij a een punt van D. Stel in iedere omgeving van a is een punt $z \neq a$ aan te wijzen met $f_1(z) = f_2(z)$. Dan is $f(z) = g(z)$ voor $z \in D$ op grond van de identiteitsstelling. Beschouw nu de vereniging $G_1 + G_2$. Dit is een gebied G. Definieer in G een nieuwe functie $f(z)$:

$$f(z) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f_1(z) & z \in G_1 \\ f_2(z) & z \in G_2 \end{cases}$$

Dat mag, want in de gemeenschappelijke punten van G_1 en G_2 (dus in D) is het in orde. Dus $f(z)$ is in geheel G gedefinieerd, en is aldaar holomorf. We zeggen: $f_1(z)$ is analytische voortzetting van $f_2(z)$, een analytische voortzetting in G_1. Omgekeerd: $f_2(z)$ is analytische voortzetting van $f_1(z)$, analytische voortzetting in G_2. Ook: f_1 en f_2 zijn elkaars analytische voortzettingen.

<u>Voorbeeld</u>:

$$f_1(z) = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n z^n \quad \text{in } G_1: \quad |z| < 1$$

$$f_2(z) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} (z-i)^n \quad \text{in } G_2: \quad |z-i| < 2^{\frac{1}{2}}$$

$f(z) = 1/(1+z)$, niet alleen in $G_1 + G_2$, maar overal.

Het proces van analytische voortzetting kunnen we <u>langs een kromme</u> doen. Stel we hebben $f_1(z)$ als holomorfe functie gedefinieerd in de omgeving (cirkelgebied G_1) van het punt a, en laat a met een ander punt b zijn verbonden door een kromme K. Laat een eindige reeks van gebieden (bijvoorbeeld cirkelomgevingen) G_1, G_2, ..., G_n de weg K overdekken, zodanig dat twee opvolgende gebieden als doorsnede een gebied hebben. Dan kunnen we $f_1(z)$, oorspronkelijk gedefinieerd in G_1, misschien analytisch voortzetten in $G_1 + G_2$, $G_1 + G_2 + G_3$, ..., $G_1 + G_2 + \ldots + G_n$, en dan hebben we in de omgeving van b, het eindpunt van K, een analytische functie gevonden.
Dit proces kan in principe onmogelijk zijn; als het proces wèl mogelijk is, dan behoeft het resultaat waarmee we bij het punt b arriveren, niet eenduidig bepaald te zijn. Het resultaat kan namelijk van de keuze van K afhangen. Bij vaste K komt men steeds bij b met dezelfde functie uit.
<u>Bij het proces van analytische voortzetting moet men dus steeds de kromme of de weg aangeven, waarlangs de voortzetting is geschied.</u>

Volgens de identiteitsstelling is een functie in haar gebied van analyticiteit ondubbelzinnig bepaald door haar waarden op een oneindige rij van punten met een verdichtingspunt dat tot het gebied behoort. Wanneer we dus de functie $f(x) = 1/(x^2+1)$, gedefinieerd op de reële as, analytisch voortzetten in het complexe vlak, dan is het antwoord $f(z) = 1/(z^2+1)$ ondubbelzinnig bepaald. Deze laatste functie is overal analytisch, behalve in de punten $z=i$ en $z = -i$. Algemeen: het probleem van analytische voortzetting van een <u>rationale functie</u> van x, $T(x)/N(x)$ met T en N polynomen in x, is triviaal en leidt ondubbelzinnig tot $T(z)/N(z)$ overal in het z-vlak met uitzondering van de nulpunten van $N(z)$.

§.2 De logarithme

log x is in de reële analyse gedefinieerd voor $x > 0$. Kan ze analytisch in het complexe vlak worden voortgezet ?

We weten $\log(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 - \ldots \qquad (-1 < h \leqslant 1)$,

dus $\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots \qquad (0 < x \leqslant 2)$.

Vervang nu x door z, en beschouw

$$f(z) \overset{\text{def}}{=} (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \ldots$$

De reeks convergeert binnen de cirkel $|z-1| = 1$ en stelt aldaar een holomorfe functie $f(z)$ voor; $f(z)$ is aldaar de analytische voortzetting van log x.

We kunnen ook om $x = a > 0$ ontwikkelen:

$$f(z) = \log a + \frac{1}{a}(z-a) - \frac{1}{2a^2}(z-a)^2 + \frac{1}{3a^3}(z-a)^3 - \dots$$

Door middel hiervan is log x analytisch voortgezet in het gebied binnen de cirkel om a als middelpunt en gaande door de oorsprong. Door a groot genoeg te kiezen kunnen we log x voortzetten in elk punt van het open rechter halfvlak. Hoe komen we nu in het linker halfvlak ?

Neem een punt c in het rechter halfvlak (dus $\mathrm{Re}(c) > 0$). In de omgeving van c is f(z) analytisch, en dus geldt in een zekere cirkelomgeving

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n.$$

Deze reeks heeft een zekere convergentiestraal R, tenminste gelijk aan Re(c), de afstand van c tot de imaginaire as, omdat f(z) holomorf is in het rechter halfvlak. Als we even narekenen, blijkt bovenstaande reeks te zijn:

$$f(z) = \log c + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\, c^n} (z-c)^n$$

en deze reeks convergeert binnen de cirkel met straal $|c|$ en middelpunt c. In deze cirkel kiezen we een nieuw basispunt en we gaan f(z) om dat punt in een machtreeks ontwikkelen, enz. Zodoende kunnen we via een keten van cirkels om de oorsprong $z = 0$ heenlopen. Al die convergentiecirkels gaan door de oorsprong. Zijn we éénmaal rond de oorsprong gedraaid, zodat we weer in de buurt van de positief-reële as komen, dan blijkt dat we met een andere functie arriveren vergeleken met onze uitgangsfunctie log x. Vooruitlopende op een resultaat van een later te bespreken methode van analytische voortzetting blijkt: starten we met log x voor $x > 0$, en zetten we log x analytisch voort langs een kromme die de oorsprong éénmaal in positieve zin omsluit, dan eindigen we met de functie $\log x + 2\pi i$. Gaan we éénmaal in negatieve zin om de oorsprong, dan eindigen we met $\log x - 2\pi i$. Algemeen: de analytische voortzetting van log x is eenduidig op een geheel veelvoud van $2\pi i$ na.

<u>Eenvoudiger methode voor analytische voortzetting van de logarithme</u>

We weten

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \qquad (x > 0)$$

Beschouw daarom de functie

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^z \frac{1}{u}\, du$$

met een integratieweg W die het punt $u = 0$ vermijdt. Op W is $\frac{1}{u}$ een continue functie; f(z) bestaat dus in elk gebied G dat enkelvoudig samenhangend is, het punt 1 inwendig bevat en het punt 0 niet bevat, <u>terwijl f(z) niet afhangt van de keuze van W voor zover W maar in G ligt en 1 en z verbindt</u>.

In G is f(z) holomorf, volgens een stelling bewezen aan het einde van III, §.2, en kennelijk geldt $f'(z) = 1/z$.

Er is één gebied van eenvoudige aard dat aan alle bovenstaande eisen voldoet, en wel dat wat ontstaat als we uit het complexe vlak de punten van de negatief-reële as, inclusief de oorsprong, verwijderen. We zeggen: we brengen een snede aan in het complexe vlak langs de negatief-reële as. Dit opengesneden z vlak is een enkelvoudig-samenhangend gebied G. In G is de functie

$$f(z) \overset{\text{def}}{=} \int_1^z \frac{1}{u}\,du$$

eenwaardig analytisch, onafhankelijk van de keuze van de integratieweg mits deze maar in G verloopt (en dus onmogelijk rond de oorsprong kan lopen, omdat ze anders punten van de snede zou moeten passeren, terwijl de snede niet tot G behoort). Deze functie is de analytische voortzetting van log x die we in het vervolg met log z noteren; log z is niet gedefinieerd voor $-\infty < z \leqslant 0$.

In G is f(z) onafhankelijk van het verloop van de integratieweg. Om f(z) te berekenen kunnen we W nemen: rechtlijnig van 1 naar $|z|$, en dan van $|z|$ naar z langs een cirkelboog met middelpunt in de oorsprong. Stel $z = |z|\, e^{i\varphi}$, waarin $-\pi < \varphi < \pi$. Dan is

$$f(z) = \int_1^{|z|} \frac{dt}{t} + \int_{|z|}^{|z|e^{i\varphi}} \frac{du}{u}$$

De eerste integraal is eenvoudig log $|z|$ (de gewone logarithme uit de reële analyse). In de tweede integraal substitueren we $u = |z|e^{i\theta}$, $du = i|z|e^{i\theta}\, d\theta = i\, u\, d\theta$, zodat de tweede integraal gelijk aan $i\varphi$ is. Derhalve $f(z) = \text{Log}\,|z| + i\varphi$, of wel

$$\log z = \log |z| + i \arg z \qquad -\pi < \arg z < \pi.$$

Dit is een verrassend-eenvoudig resultaat; veel gemakkelijker te overzien dan bij de cirkel-ketenmethode, en direct geldig voor alle z buiten de negatief-reële as.

Hoofdwaarde van de logarithme

Deze wordt gedefinieerd door $\log z = \log |z| + i \arg z$, waarbij arg z de hoofdwaarde van argument van z is ($-\pi < \arg z \leqslant \pi$). Nu is de log van een negatief getal wel gedefinieerd.

Opgave:

Voor x negatief-reëel geldt

$$\log x \overset{\text{def}}{=} \log (x + i0) = \log (-x) + i\pi,$$

$$\text{verder}: \log (x - i0) = \log (-x) - i\pi,$$

zodat log z aan de snede een sprong vertoont van $2\pi i$ (waarde boven de snede min waarde onder de snede).

Behalve als we uitdrukkelijk anders vermelden, zullen we voortaan onder log z de hoofdwaarde der logarithme nemen, die dus gebonden is aan de hoofwaarde van arg z.

Men kan zich op een ruimer standpunt stellen, en alle mogelijke analytische voortzettingen van log x beschouwen. Dat leidt dan tot een functie log z die oneindig-veelwaardig is; de diverse takken der functie verschillen dan een geheel veelvoud van $2\pi i$. Het punt $z = 0$ is een singulier punt van de functie. Men noemt het het logarithmisch vertakkingspunt. Voor toepassingen is het echter beter dat men deze oneindig-veelwaardige functie eenwaardig maakt door het aanbrengen van een snede (ook wel coupure genoemd) en in het aldus opengesneden z-vlak de hoofdtak van de functie beschouwt. Als het nodig is kunnen we deze hoofdtak gemakkelijk analytisch voortzetten over de snede heen. Trouwens die snede kan een willekeurige kromme zijn die $z = 0$ met $z = \infty$ verbindt. En log x, oorspronkelijk gedefinieerd op een klein interval van de positief-reële as, kan dan altijd, maar op vele manieren, analytisch worden voortgezet. Langs een voorgeschreven weg is de voortzetting altijd ondubbelzinnig. Dit is duidelijk omdat hetzelfde geldt voor arg z, die we altijd continu kunnen voortzetten.

Met behulp van de logarithme kunnen we nu ook willekeurige machten definieren.

Zij α een complex getal, dan is per definitie

$$z^\alpha \overset{\text{def}}{=} e^{\alpha \log z}.$$

Men krijgt de hoofwaarde van z^α als men de hoofdwaarde van log z kiest. Dan is dus

$$z^\alpha = e^{\alpha \log |z| + i\alpha \arg z} = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}$$

met $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. Is α geheel dan zijn we op bekend terrein; z^m, m geheel, is eenwaardig. Is α rationaal: $\alpha = p/q$ dan is z^α q-waardig.

Opgave:

Wat is de hoofdwaarde van $\sqrt{i} = (i)^{\frac{1}{2}}$, van i^i, van $(-i)^i$.

Opgave:

$$\frac{d}{dz} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1},$$

$$z^\alpha \cdot z^\beta = z^{\alpha+\beta},$$

$$z^{-\alpha} = 1/z^\alpha .$$

Bij sommige bewerkingen moeten we oppassen:

$$\begin{aligned} z_1^\alpha z_2^\alpha &= e^{\alpha(\log z_1 + \log z_2)} \\ &= e^{\alpha(\log |z_1| + \log |z_2| + i \arg z_1 + i \arg z_2)} \\ &= |z_1 z_2|^\alpha e^{i\alpha(\arg z_1 + \arg z_2)}. \end{aligned}$$

Als arg z_1 + arg z_2 = arg $(z_1 z_2)$, dan geldt ook $z_1^{\alpha} z_2^{\alpha} = (z_1 z_2)^{\alpha}$ (allemaal in de zin van hoofdwaarden). Maar in het algemeen is arg z_1 + arg z_2 = arg $(z_1 z_2) + 2k\pi i$, waarbij k de waarden -1, 0, en 1 kan aannemen.

Bijvoorbeeld:

$$(-1)^{\frac{1}{2}} (-1)^{\frac{1}{2}} = i\ i = -1; \quad [(-1)(-1)]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ (hoofdwaarden).}$$

<u>Opgave</u>:

$f(z) = z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}$ voor $0 < z < 1$ als de gewone rekenkundige waarde gedefinieerd. Bespreek de analytische voortzetting van f(z) in het complexe vlak opengesneden langs de rest van de reële as, en bereken de grenswaarden van f(z) aan beide kanten van de snede.

<u>Opgave</u>:

Zij $\quad f(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2 \qquad |z| \leqslant 1.$

Onderzoek de analytische voortzetting van f(z) in het complexe vlak opengesneden langs $1 \leqslant x < \infty$. Bereken de sprong aan de snede.
Leidt een formule af voor $f(z) + f(1/z)$ (bij welke snede?).
Aanwijzing: differentieer binnen eenheidscirkel. Daar geldt $f'(z) = -(1/z)\log(1-z)$, en integreer van 0 naar z, bv. rechtlijnig.

HOOFDSTUK VII. Diversen

§.1 Differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann

B.Riemann (1826-1865), A.L.Cauchy (1789-1857)

Stel $f(z)$ holomorf in gebied G; $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ met $z = x + iy$.
Hoe wordt $f'(z)$ uitgedrukt in partiële afgeleiden van u en v naar x en y?

Beschouw speciaal twee gevallen van limietovergang in het differentiequotient:
(1) $z' \to z$ in horizontale richting, (2) $z' \to z$ in vertikale richting.

Het differentiequotient

$$\frac{f(z) - f(z')}{z - z'}$$

is in het eerste geval

$$\frac{u(x,y) - u(x',y)}{x - x'} + i\,\frac{v(x,y) - v(x',y)}{x - x'} \qquad (x' \neq x).$$

Deze uitdrukking moet een limiet hebben voor $x' \to x$. Daarvoor is dus nodig dat $\partial u/\partial x$ en $\partial v/\partial x$ bestaan in het punt (x,y). De waarde van die limiet precies $f'(z)$ zijn:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

In het tweede geval is het differentiequotient

$$\frac{u(x,y) - u(x,y')}{i(y - y')} + i\,\frac{v(x,y) - v(x,y')}{i(y - y')} \qquad (y' \neq y).$$

Noodzakelijkerwijze bestaan dus ook $\partial u/\partial y$ en $\partial v/\partial y$ en geldt

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Uit de twee gelijkheden volgen dan de identiteiten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad \text{(CR)}$$

Daarmee is bewezen de

<u>Stelling</u>

Is $f(z) = u + iv$ holomorf in G, dan bestaan in G de partiële afgeleiden der eerste orde van u en v naar x en y, en er gelden de <u>partiële differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann</u> (CR).

Een soort omkering van deze stelling is:

Stelling

Zijn in een gebied G de reële funkties u(x,y) en v(x,y) continu-differentieerbaar naar x en y tezamen, en voldoen ze in G aan de vergelijkingen van Cauchy-Riemann, dan is f(z) = u + iv een holomorfe funktie van z in G.

Opmerking
Continu-differentieerbaar wil zeggen: de vier partiële afgeleiden van de eerste orde van u en v naar x en y bestaan en zijn continue funkties van x en y.

Opgave: bewijs de laatste stelling.

Op grond van stelling O, weten we dat een holomorfe funktie oneindig-vaak differentieerbaar is. Dan zijn de componenten u en v van een holomorfe funktie ook oneindig-vaak differentieerbaar, en alle afgeleiden van alle ordes zijn ook continue funkties van x en y.
In het bijzonder gelden de formules

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Stelling

Is f(z) holomorf in G, dan voldoen u = Re(f) en v = Im(f) als funkties van x en y in G aan de potentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Men zegt: u en v zijn harmonische funkties (d.i. oplossingen van de twee-dimensionale potentiaalvergelijking) in G.

Conclusie
Theorie van complexe funkties van één complexe variabele is identiek met de potentiaaltheorie in twee dimensies. Vandaar het belang van complexe-funktietheorie voor fysica en techniek.

Stelling

Een holomorfe funktie is op een constante na éénduidig bepaald door haar reëel (of haar imaginair) deel.

Bewijs. Stel f(z) = u(x,y) + iv(x,y), en u(x,y) bekend in een zekere omgeving van (x_0,y_0). Dan geldt voor die omgeving het volgende.
Wegens $v_y = u_x$, is ook $v_y(x,y)$ bekend. Dan kunnen we integreren naar y:

$$\int_{y_0}^{y} u_x(x,\eta)\,d\eta = v(x,y) - v(x,y_0) = \text{bekend}.$$

Dus

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x,\eta)\, d\eta + F(x), \text{ met } F(x) = - v(x,y_0).$$

We zijn klaar als we F(x) kunnen aangeven. F(x) is zeker differentieerbaar naar x, en wel geldt

$$F'(x) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} u_x(x,\eta)\, d\eta = v_x - \int_{y_0}^{y} u_{xx}(x,\eta)\, d\eta$$

$$= - u_y - \int_{y_0}^{y} u_{xx}(x,\eta)\, d\eta = \text{bekend.}$$

Is deze bekende funktie alleen van x afhankelijk? Ja, want

$$- \frac{\partial}{\partial y} F'(x) = \frac{\partial}{\partial y} [u_y + \int_{y_0}^{y} u_{xx}(x,\eta)\, d\eta] = u_{yy} + u_{xx} = 0.$$

Dus $F'(x)$ is een bekende funktie van x. Door integratie vinden we F(x), eenduidig bepaald op een constante na. Dus v(x,y) bekend op een additieve constante na.

Opgave: bepaal f(z) als $u(x,y) = x/(x^2 + y^2)$.

Opgave: bewijs dat de kromme u = constant en v = constant elkaar loodrecht snijden.

§.2 Conforme afbeelding

Zij $w = f(z)$ holomorf in gebied G van het z-vlak. Bij ieder punt van G behoort een punt van het w-vlak. Het funktionele verband $w = f(z)$ geeft dus een afbeelding van een deel van het z-vlak op een deel van het w-vlak. Zij G' het beeld van G. Men kan bewijzen dat G' een gebied is, als $f \neq$ constant.

Zij $f(z) = u + iv$; $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Zoals bekend is, speelt de funktionaaldeterminant van de transformatie een rol. Deze is

$$D = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = (u_x)^2 + (v_x)^2 \\ \\ \begin{vmatrix} v_y & u_y \\ -u_y & v_y \end{vmatrix} = (u_y)^2 + (v_y)^2 \end{array} \right\} = |f'(z)|^2 .$$

Stel $f'(z) \neq 0$ voor $z = z_0$. Noem $w_0 = f(z_0)$ het beeldpunt van z_0.

Uit $D \neq 0$ volgt (geen bewijs hier) dat de transformatie $(x,y) \to (u,v)$ ééneénduidig en in beide richtingen continu-differentieerbaar is, in de respectieve omgevingen van de punten z_0 en w_0. In deze omgevingen stellen we

$$z = z_0 + \Delta z, \qquad w = w_0 + \Delta w.$$

Dan is $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\,\Delta z + \varepsilon\,\Delta z$, met $\varepsilon \to 0$ voor $z \to 0$.
Voor $|\Delta z|$ voldoende klein, geldt bij benadering $\Delta w = f'(z_0)\Delta z$, omdat $f'(z_0)$ van nul verschilt. Stellen we vervolgens $\Delta z \overset{o}{=} \xi + i\eta$, $\Delta w = \sigma + i\tau$, dan zijn (ξ,η) en (σ,τ) lokale cartesiaanse coördinaten, en we hebben

$$\sigma + i\tau = f'(z_0)\,(\xi + i\eta).$$

We schrijven nu $f'(z_0)$ uit in modulus en argument: $f'(z_0) = \rho e^{i\varphi}$. Dan vinden we

$$\sigma = \rho(\xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi),$$
$$\tau = \rho(\xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi),$$

waarbij ρ en φ onafhankelijk van de (ξ,η) en (σ,τ) zijn.

Bovenstaande transformatie $(\xi,\eta) \to (\sigma,\tau)$ is een eenvoudige lineaire transformatie met funktionaaldeterminant ρ^2. Het is een combinatie van een draaiing over de hoek φ en een vermenigvuldiging van de oorsprong uit met de factor ρ.

Stel we hebben in het z-vlak twee georienteerde krommen die elkaar in z_0 onder een hoek α snijden (raaklijnvectoren $\underline{s}_1$ en $\underline{s}_2$; als we $\underline{s}_1$ over een hoek α in positieve zin draaien krijgen we $\underline{s}_2$). Als beeld in het w-vlak krijgen we weer twee krommen, door w_0, wier raaklijnvectoren $\underline{t}_1$ en $\underline{t}_2$ ten opzichte van $\underline{s}_1$ en $\underline{s}_2$ beide over de hoek φ zijn gedraaid. De hoek waaronder zij elkaar snijden is dus weer α. De hoek φ kan positief of negatief zijn, maar de volgorde $(\underline{t}_1,\underline{t}_2)$ is dezelfde als $(\underline{s}_1,\underline{s}_2)$ wat de draaizin betreft. Conclusie: de afbeelding is hoektrouw en wel rechtstreeks hoektrouw.

Verder worden lengtes getransformeerd met de factor $\rho = |f'(z_0)|$. Een klein driehoekje (met hoekpunt in z_0, zijden 1 en 2 die een hoek α insluiten) wordt getransformeerd in eên gelijkvormig driehoekje (met hoekpunt in w_0, zijden 1' en 2' die ρ maal zo lang zijn als zijden 1 en 2, terwijl de hoek tussen zijden 1' en 2' weer α is). De afbeelding is dus conform. Daarmee is bewezen de

Stelling

Is $f(z)$ holomorf in het punt z_0, en $f'(z_0) \neq 0$, dan is de afbeelding $w = f(z)$ in de buurt van z_0 conform en rechtstreeks hoektrouw.

Stelling

Er zijn geen andere (continu-differentieerbare) rechtstreeks hoektrouwe afbeeldingen dan die door holomorfe funkties.

Stelling

Er zijn in twee dimensies geen andere conforme afbeeldingen dan die door holomorfe funkties van z of van $\bar{z}$.

Op het bewijs van deze twee stellingen gaan we niet in.

Enkele eenvoudige afbeeldingen

De lineaire transformatie: $w = az + b$ $(a \neq 0)$

De inversie: $w = 1/z$.

Dit zijn 1-1-afbeeldingen van het hele complexe z-vlak op het hele complexe w-vlak. Bij de lineaire afbeelding blijft het punt ∞ op zijn plaats. Bij de inversie zijn 0 en ∞ elkaars beeld.

Transformatie van Möbius (A.F.Möbius, 1790-1868)

Deze is de algemene gebroken lineaire transformatie: $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, met a, b, c, en d complexe constanten. De afgeleide is

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}.$$

Onderstel daarom

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

dan is dw/dz nergens nul (met uitzondering van $z = \infty$). De omkering is

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a}, \text{ met determinant } \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{ad-bc}{(cw-a)^2} \qquad \text{(nergens nul)(uitgezonderd } w = \infty\text{)}.$$

Bij deze Möbiustransformatie wordt dus het hele z-vlak ééneenduidig afgebeeld op het w-vlak. Het beeldpunt van $z = \infty$ is $w = a/c$; dat van $z = -d/c$ is $w = \infty$. Ook hier zien we het voordeel van de invoering van één oneigenlijk complex getal ∞.

De Möbiustransformatie kan men opvatten als een "product" van elementaire transformaties. Als $c = 0$, dan is ze lineair; als $c \neq 0$ dan

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\,\frac{1}{z+\frac{d}{c}}.$$

De Möbiustransformaties vormen een zg. groep. Als

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad u = \frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}, \quad \text{dan geldt } u = \frac{Az+B}{Cz+D}$$

met

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(Bewijs ?).

Stelling | Bij een Möbiustransformatie worden cirkels in cirkels overgevoerd (een rechte wordt opgevat als een ontaarde cirkel).

Bewijs. met bovenstaande product-splitsing. Voor elk der afzonderlijke factoren geldt de stelling. De enige niet-triviale verificatie is voor de inversie $w = 1/z$.

Opgave: De algemene vergelijking van de cirkel is

$$p z \bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + q = 0, \quad p \text{ en } q \text{ reëel.}$$

Bewijs de voorafgaande stelling door aan te tonen dat deze vergelijking invariant is voor een Möbiustransformatie.

Van de vier parameters die voorkomen in de algemene Möbiustransformatie zijn er drie onafhankelijk (het komt slechts op de verhouding der parameters aan). Dan is duidelijk de

Stelling | Er is één en slechts één Möbiustransformatie waarbij drie gegeven punten A, B, C in het z-vlak worden afgebeeld respectievelijk op drie gegeven punten P, Q, R in het w-vlak. Expliciet kan men deze transformatie schrijven als

$$\frac{w - P}{w - R} : \frac{Q - P}{Q - R} = \frac{z - A}{z - C} : \frac{B - A}{B - C} \qquad (= t).$$

Voor de verificatie neemt men het t-vlak als tussenstap, waarbij t gelijk is aan de gemeenschappelijke waarde van linker en rechter lid:

$$w = P \longleftrightarrow t = 0 \longleftrightarrow z = A$$

$$w = Q \longleftrightarrow t = 1 \longleftrightarrow z = B$$

$$w = R \longleftrightarrow t = \infty \longleftrightarrow z = C$$

Dubbelverhouding van vier punten

Neem vier punten in het complexe vlak: z, A, B, C. De dubbelverhouding (z, A, B, C) van dit geordend viertal punten is per definitie dat getal welke het beeld van z is onder de Möbiustransformatie die A, B, C overvoert in respectievelijk 0, 1, ∞.

Opgave:
$$(z, A, B, C) = \frac{z - A}{z - C} : \frac{B - A}{B - C}.$$

Stelling | De dubbelverhouding van vier punten is invariant voor elke Möbiustransformatie.

Bewijs. Noem de vier punten in het z-vlak: z, A, B, en C. Laten hun beelden zijn, in deze volgorde: w, P, Q, en R. Dan is

$$(w, P, Q, R) = \frac{w - P}{w - R} : \frac{Q - P}{Q - R} \text{ en } (z, A, B, C) = \frac{z - A}{z - C} : \frac{B - A}{B - C}$$

De rechterleden zijn gelijk (zie expliciete formule voor de Möbiustransformatie). Dus ook de linkerleden.

Men kan met behulp van Möbiustransformaties, waarbij cirkels in cirkels overgaan, allerlei meetkundige eigenschappen van systemen van cirkels bewijzen. Als voorbeeld moge men zijn krachten gebruiken op het

<u>Sluitingsprobleem van Steiner</u>

Gegeven: twee cirkels, waarvan de kleinste binnen de grootste ligt.

Begin ergens een cirkel te tekenen, die de kleinste cirkel uitwendig en de grootste cirkel inwendig raakt.
Construeer een tweede cirkel die raakt aan alle drie.
Vul zo de tussenruimte tussen de twee originele cirkels op met rakende cirkels.
Er zijn nu twee mogelijkheden:
(1) de ketting sluit (de laatste raakt precies aan de eerste),
(2) de ketting sluit niet.
Men zou kunnen denken dat dat afhankelijk is van de keuze van de eerste cirkel uit de ketting. Dat is echter niet zo. Het is altijd (1) of altijd (2), onafhankelijk van de begincirkel. Het bewijs is zeer doorzichtig. Voor een stel concentrische cirkels is de stelling triviaal. En men kan de twee gegeven cirkels gemakkelijk transformeren in twee concentrische. Bij die transformatie (een Möbiustransformatie) gaan cirkels over in cirkels, en rakende cirkels in rakende cirkels, omdat de afbeelding conform is.