TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken en Tentamenopgaven

met Antwoorden en Oplossingen

bij het College

Wiskunde V

September 1968

wsk

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken en Tentamenopgaven

WISKUNDE V - MET ANTWOORDEN EN OPLOSSINGEN

NAJAARSSEMESTER 1968

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

DICT. NR. 228
PRIJS f 2,--

Inhoudsbeschrijving Vraagstukken en Tentamenopgaven Wiskunde V met oplossingen:

(23 Mei 2005, JdG)

Vraagstukken en tentamenopgaven Wiskunde V.

Dit opgavenboek beoogt te voorzien in de behoefte aan oefenstof voor het tentamen Functietheorie. Bij de antwoorden en oplossingen is getracht verraderlijkheden, die dit terrein onveilig maken, onder de aandacht te brengen. De stof is als volgt ingedeeld:

Blz. 1 - 18, nrs. 1 - 75:	vraagstukken met antwoorden
blz. 19 - 41, A t/m W :	geselecteerde tentamenopgaven 1960 - 1964, met oplossingen
blz. 42 - 87 :	tentamens oktober 1964 t/m juni 1967 met oplossingen.

Enkele aleen voor WSK-studenten bestemde opmerkingen (betreffende het bestaan van integralen) zijn tussen [ ] geplaatst.

VRAAGSTUKKEN

1. Bepaal Re, Im, modulus, argument van

$$\frac{1-i}{1+i}, \quad \left(\frac{2+i}{3-i}\right)^2, \quad \frac{3-i}{2+i} + \frac{3+i}{2-i} \quad .$$

2. a) Bepaal $(z^3 - 2z + 3)/(z-1)$ voor $z = 1+i$ en $z = 1-i$.

   b) Evenzo $(z^3 + 2z - 3i)/(z-i)$.

3. Toon aan dat $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$ en dat $(\bar{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$.

   Leid hieruit af dat $(\bar{z})^n = \overline{z^n}$ (ook voor gehele $n < 0$).

4. Voor een rationale functie met reële coëfficiënten $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_p$

$$f(z) = (a_0 z^n + \ldots + a_n)(b_0 z^p + \ldots + b_p)^{-1}$$

   geldt $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

5. a) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}\, z_1 \bar{z}_2$

   b) De vectoren z_1 en z_2 zijn onderling loodrecht als $\mathrm{Re}\, z_1 \bar{z}_2 = 0$.

6. Als $(z_1 - z_2)i = \lambda(z_1 + z_2)$, λ reëel, dan heeft het parallelogram 0, z_1, z_2, $z_1 + z_2$ vier even lange zijden; reken dit na.

7. Leid uit $|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ af: $|z_1 \pm z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$,

   en gebruik dit in:

$$1^e \qquad |z^2 + 2z + 3i| \geqslant R^2 - 2R - 3 > 0$$

$$2^e \qquad \left|\frac{z-4}{z^2 + 2iz + 3}\right| \leqslant \frac{R+4}{R^2 - 2R - 3}$$

   als $|z| = R > 3$.

8. Het punt r is randpunt bij een verzameling V als in iedere omgeving van r punten van V en punten van V' liggen. Toon aan dat de verzameling R der randpunten bij een verzameling V een gesloten verzameling is.

9. Teken de getallen $s_n = \frac{1+i}{2} + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ voor $n = 1, 2, 3, 4$.

   Toon aan dat $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = i$ (bepaal $N(\varepsilon)$ zó dat $|s_n - i| < \varepsilon$ voor alle $n > N(\varepsilon)$).

10. Teken de getallen $z_n = (1 + \frac{i}{n})^n$ voor $n = 1,2,3,4$.

Toon aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \cos 1 + i \sin 1$.

11. Bepaal de verdichtingspunten van $z_n = 1 + (\frac{1 - i\sqrt{3}}{2})^n$.

12. Hoeveel verdichtingspunten heeft $z_n = \frac{1}{n} + i^n$?

Idem voor $x_n = \mathrm{Re}(\frac{1}{n} + i^n)$; wat is $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$?

13. Ga na dat $\cos t + 2i \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}t^2 + i\sqrt{4-t^4}$, $0 \leq t \leq \sqrt{2}$ een gladde boog voorstellen. Dezelfde? Hetzelfde begin- en eindpunt? Welke kromme? $\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 > 0$?

14. Bepaal $\lim\limits_{z\to 1} \frac{z^2-1}{z-1}$ en $\lim\limits_{z\to 1} \frac{z^2-1}{|z-1|}$ als $z \in \{1 + \frac{1}{n}\}$; idem als $z \in \{1 + \frac{i}{n}\}$; idem als $z \in \{1 + \frac{i^n}{n}\}$.

15. Toon aan dat $\frac{1}{z}$ continu is in $z = i$ ($z \in$ omgeving van i). Toon aan met de derde definitie dat $\frac{1}{z}$ differentieerbaar is in $z = i$.

16. Toon aan dat $z\bar{z}$, hoewel differentieerbaar in 0 (waarom?), aldaar niet analytisch is.

17. De functie $f(z) = \frac{1}{z^2+z} + \frac{1}{z+1}$ is behalve in 0 en -1 overal gedefinieerd en analytisch.

Kan $f(z)$ worden gecompleteerd tot een functie die analytisch is in 0; in -1? Hoe?

18. Bepaal met $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ de convergentiestraal van

$$1 - 2z + 3^2z^2 + z^3 - 2^4z^4 + 3^5z^5 + z^6 - 2^7z^7 + 3^8z^8 + z^9 - \quad \text{enz.}$$

19. a) Toon aan dat als $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergeert ook $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is.

b) Ga na dat $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ niet behoeft te convergeren als $|a_n|$ convergeert.

20. Toon aan dat als $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergent is $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

21. Gegeven twee absoluut convergente reeksen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = S$, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^* = S^*$. Dan is een reeks $\sum_{i,j} a_i a_j^*$ waarin elke combinatie $i \geq 0$, $j \geq 0$ aan de orde komt ook absoluut convergent, met SS^* als som.

22. Gegeven: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^* z^j$ hebben convergentiestralen ≥ 1.

Dan is $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_j^* z^j = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n^* + a_1 a_{n-1}^* + \dots + a_n a_0^*) z^n$ met convergentiestraal $R \geq 1$.

Als in het onderstelde $\geq \rho$ komt i.p.v. ≥ 1, dan $R \geq \rho$.

23. Bewijs $\exp z_1 \cdot \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$.

24. Is er een z_0 die voldoet aan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^n}{n!} = 0$? idem aan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^{2n}}{(2n)!} = 0$?

Zo neen, toon dat dan aan; zo ja, geef een z_0 die voldoet.

25. Teken de hoogtekaart van $|e^z|$; idem van $|e^{iz}|$.

26. Toon aan dat $|\cos z|$ en $|\sin z|$ niet begrensd zijn in het bovenhalfvlak; en in het benedenhalfvlak?

27. Als $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 - z + 1}$ toon dan aan

1^e. dat $|f(z)| \leq \dfrac{1}{R^2 - R - 1}$ voor $|z| = R > 2$ en $\operatorname{Im} z \geq 0$

2^e. dat $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_{\substack{|z| = R \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} f(z)\,dz = 0$.

28. Bereken $\displaystyle\int_K \frac{dz}{z}$ als K is: 1^e de $\frac{1}{4}$ cirkelboog om 0 van 1 naar i
2^e de rechte lijn van 1 naar i.

29. Gegeven de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$ met convergentiestraal R. Toon aan zonder de hoofdstelling te gebruiken dat voor iedere Jordankromme K in een gebied $|z| < \rho < R$ geldt

$$\int_K f(z)dz = 0 .$$

30. Leid $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx$ af uit $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ door e^{-z^2} te integreren over de rechthoek $-N, N, N+ib, -N+ib$.

31. Bepaal de residuën in de singuliere punten van de functie $\dfrac{z^2+1}{(z^2-1)(z+1)^2}$.

32. Idem voor de functie $\dfrac{e^{iz}}{z^2+4}$.

33. Idem voor de functie $\dfrac{e^{z}}{(z+1)^2(z-2)}$.

34. Laat zonder residuberekening zien dat

$$\int_{|z|=5} \frac{zdz}{z^3+z^2-2} = 0 .$$

35. Bereken $\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{dz}{(z^2+1)^8(z+3)}$

a) als $R > 3$
b) als $1 < R < 3$
c) als $0 < R < 1$.

36. Bereken de residuën in de singuliere punten van de functie $\dfrac{z}{\sin z}$. (Het punt $z = \infty$, een niet geïsoleerd punt, buiten beschouwing laten.)

37. Idem voor de functie $\dfrac{1}{z(e^{3z}-1)}$.

38. Geef een schatting voor $|f^n(0)|$ als $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$ (met de ongelijkheid van Cauchy; $r < 1$).

39. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1 - e^{-z})^n$ is uniform convergent in de omgeving U van $z = 0$ bepaald door $|1 - e^{-z}| < \frac{1}{2}$. De som van de reeks is z; toon dit aan.

40. Voor elk begrensd domein D (= gebied G + rand) in het z-vlak is de functie

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \cos(z \cos t)dt \qquad t \text{ reëel}$$

holomorf in G. Toon dit aan en tevens dat in G

$$F'(z) = -z \int_0^{2\pi} \cos(z \cos t)\sin^2 t dt$$

en

$$zF(z) + F'(z) + zF''(z) = 0 \quad .$$

Geef de machtreeks in z^n voor F(z). Wat is de convergentiestraal?

41. Bepaal de machtreeks in $(z - \frac{\pi i}{2})^n$ voor cosh z.

42. Welke van de volgende functies is geheel?

$$\frac{1}{e^z}, \; e^{\frac{1}{z}}, \; \frac{\sin z}{z}, \; \frac{\sqrt{3}\cos z}{z^4} - \frac{\sin(z\sqrt{3})}{z^5} \quad .$$

43. Toon aan dat de functie

$$\frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z - \pi} - \frac{1}{z + \pi}$$

in 0, π en $-\pi$ ophefbare singulariteiten heeft, en ontwikkeld kan worden in een machtreeks om $z = 0$ met convergentiestraal 2π. Welke breuken dienen te worden afgetrokken om een convergentiestraal $n\pi$ te verkrijgen?

44. Hoeveel Laurentreeksen "om" $z = 0$ heeft $\dfrac{6}{z(z-1)(z-2)(z-3)}$?
Bepaal van de reeks die voor $z = 1\frac{1}{2}$ convergeert de coëfficiënten c_{-1}, c_0 en c_1.

45. Bepaal de Laurentreeks voor $\dfrac{1}{1+z^2}$ om $1+i$ die convergeert voor $z=0$.

46. Van een Laurentreeks $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ die in minstens één punt convergeert is gegeven dat $c_n = c_{-n} = c^{-n}$ $(n \geqslant 0)$. Aan welke eis moet c (complex) voldoen? Wat is het convergentiegebied, en wat is daar de som?

47. Toon aan dat $|e^{z^2+2iz}| \leqslant e^{\frac{3}{2}}$ voor $|z| \leqslant 1$. Voor welke z wordt het maximum bereikt?

48. Toon aan dat $\mathrm{Re}f(z) + \mathrm{Im}f(z)$ maximaal wordt op de rand van een domein D in een gebied waar $f(z)$ holomorf is; aanwijzing: beschouw $e^{(1-i)f(z)}$.
Voorbeeld: D is $|z| \leqslant 1$, $f(z) = (1+i)z^2 - 2(1-i)z$ (zie 47).

49. f is een gehele functie van z waarvoor gegeven is dat

$$|f(z)| \leqslant M|z|^n \qquad M \text{ zekere constante} > 0.$$

Toon aan dat $f(z) = az^n$ waarin a een complex getal voorstelt met $|a| \leqslant M$.

50. Toon aan dat $\lim\limits_{z\to 0} z \cos \dfrac{1}{z}$ <u>niet</u> bestaat.

51. Er zijn binnen elke ε - omgeving van $z=0$ oneindig veel punten waar $e^{1/z}$ een gegeven waarde $c = a + bi$ $(\neq 0)$ aanneemt. Ga dit na (d.w.z. bepaal deze punten) als $c = -e^{\pi}$ en $\varepsilon = 1/10\pi$.

52. Onderzoek de aard van de singulariteit van $f(z) = \{(z-\pi)\sin z\}^{-1}$ bij $z = \pi$. Wat is het residu?

53. Bepaal de constanten A, B, C zó dat

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{A}{z} - \frac{B}{z-\pi} - \frac{C}{z+\pi}$$

slechts ophefbare singulariteiten heeft bij $z = 0$, π en $-\pi$.
Noem de overige singulariteiten.

54. Bepaal de residuën in $z = 0$ van $1/\sin z$ en van $\sin(1/z)$.
Is $1/\sin z - \sin(1/z)$ regulier in $z = 0$?
Noem de singuliere punten van deze functie.

55. Bepaal het residu van $f(z) = z^2 e^{1/z} - z(z+1)$ in $z = \infty$.
Waar is $f(z)$ niet regulier?

56. Als $f(z)$ holomorf en $\neq 0$ is in een gereduceerde p-omgeving van a en als $f(z) = (z-a)^k g(z)$ (k geheel, > 0 of < 0) dan geldt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\right) dz = k \qquad 0 < \rho < p$$

57. Bereken $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1 + 2\cos x}{5 + 4\cos x}\, dx$; $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x}\, dx$; $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{5 - 4\cos x}\, dx$.

58. Bereken $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos mt}{1 + i\sqrt{3}\cos t}\, dt$, m geheel ≥ 0 .

59. Bereken voor gehele n

$$\int_0^{\pi} \cos^n \varphi \cos n\varphi\, d\varphi \quad ; \quad \int_0^{\pi} \cos^{2n} \varphi\, d\varphi \quad .$$

60. Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+4}\, dx$; $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4+4)^2}$; $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^3+3x-2i)}$.

61. Bereken $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}\, dx$, $a \geq 0$; $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} - 1}{x(1+a^2x^2)}\, dx$, $a > 0$; $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\, dx$

62. Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{(x-i)(x+2i)}$; $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\, dx}{(x-i)(x-2i)^3}$.

63. De functie $\cos\sqrt{x}$, $x \geq 0$, kan analytisch worden voortgezet tot een functie $f(z)$ door middel van een machtreeks; bepaal deze en de convergentiestraal ervan. Ga na dat $f(2i\pi^2)$ reëel is en < -10. Druk $f(x)$, $x \leq 0$, uit in reële machten van e. Schets $f(x)$ voor $-\infty < x < \infty$.

64. Zij $f(x) = \arctan x$ voor reële x. Zet $f(x)$ analytisch voort: 1^e^ door een machtreeks om $z = 0$; 2^e^ door een machtreeks om $z = 1$; hierbij eerst te bewijzen dat $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\, i(n-1)!\ \{(i-x)^{-n} - (-i-x)^{-n}\}$. Bepaal de convergentiestralen.

65. Zet $f(x) = \arctan x$ analytisch voort - ook buiten de cirkels van opgave 64 - door een integraal $\int\limits_{K(z)} \varphi(\zeta)d\zeta$, $K(z)$ = weg van 0 naar z. Ga na welke moeilijkheid $z = i$ en $-i$ opleveren; hoe is deze moeilijkheid op te heffen?

66. Toon aan dat $\sqrt[3]{x}$, x reëel, niet analytisch voortgezet kan worden; wel daarentegen $\sqrt[3]{x}$, $x > 0$.

67. In welke gebieden bepaalt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z^2-1)^n$ een analytische functie? Welk verband bestaat er met $\log z$? (Elk gebied afzonderlijk beschouwen.)

68. Toon aan dat voor $z \neq 0$ en niet negatief reëel $\int\limits_0^{\infty} (\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+z})dt = \log z$ (hoofdwaarde).

69. Bereken $\int\limits_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+a^2}\,dx$, $a > 0$ (contour: $\rho \to R \to$ bovenboog $\to -R \to -\rho \to$ bovenboogje $\to \rho$).

70. Stel $f(z) = \log(z + \frac{1}{z})$; hoofdwaarde van de logarithme.

a) Voor welke z is $f(z)$ niet gedefinieerd?

b) Voor welke z is $f(z)$ niet holomorf?

71. Gegeven $f(x) = \sqrt{-x}$ voor $x < 0$.
Hoe wordt deze functie analytisch voortgezet in het complexe vlak met snede langs de positieve reële as. Bepaal de sprong aan de snede.

72. Van een analytische functie $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ is gegeven dat $u(x,y) = x^2 + 4x - y^2 + 2y$. Bepaal $v(x,y)$ en $f(z)$.

73. a) Welke Moebiustransformatie beeldt $z = 1, -1, \infty$ af op $w = 1+i,\ 1-i,\ 1$? Welk punt z heeft $w = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$ tot beeld? Bepaal het beeld van $|z| = 1$. Tekenen.

b) Welke Moebiustransformatie beeldt $1, -i, 2$ af op $0, 2, -i$? Bepaal het beeld van $-2i$. Welke krommen worden afgebeeld op de reële en imaginaire as?

74. Bepaal de Moebiustransformatie die $z = 0$, 1 en $|z| = 1$ afbeeldt op $w = -1, 0$ en $|w-1| = 1$. Bepaal de beelden van i en $-i$.
Op welk gebied wordt $|z| < 1$, $\mathrm{Im} > 0$ afgebeeld?

75. Bepaal bij de Moebiustransformatie die $z = 1, i, -1$ afbeeldt op $w = i, 0, -i$ de beelden van a) $|z| < 1$, b) $|z| \leqslant \rho < 1$.

ANTWOORDEN

1. (Re, Im, mod, arg) : $(0, -1, 1, -\frac{1}{2}\pi)$, $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\pi)$, $(2, 0, 2, 0)$.

2. a) i resp. $-i$; b) i resp. $\frac{7}{5}(2-i)$ (waarom niet toegevoegd complex?).

3. $(x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$ uitwerken.
   $\bar{z} \cdot \overline{z^{-1}} = \overline{zz^{-1}} = 1$, dus $\overline{z^{-1}}$ is de inverse van $\bar{z}$.
   Als $(\bar{z})^n = \overline{z^n}$, dan $(\bar{z})^{n+1} = \bar{z}(\bar{z})^n = \bar{z}\,\overline{z^n} = \overline{zz^n} = \overline{z^{n+1}}$.
   Als $n = -m$ ($m > 0$, geheel) dan $(\bar{z})^n = (\bar{z}^m)^{-1} = (\overline{z^m})^{-1} = \overline{(z^m)^{-1}} = \overline{z^n}$.

4. $f(\bar{z}) = (a_0\bar{z}^n + \ldots a_n)(b_0\bar{z}^p + \ldots b_p)^{-1} = \overline{(a_0 z^n + \ldots a_n)}\,\overline{(b_0 z^p + \ldots b_p)}^{-1}$.

5. a) $(z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2$; b) Pythagoras.

6. $z_1(i-\lambda) = z_2(i+\lambda) \rightarrow |z_1| = |z_2|$.

7. 1° Algemeen: $|z^2 + 2z + 3i| \geqslant |z|^2 - |2z + 3i|$ (rechterlid kan < 0 zijn. bijv. als $|z| = 1$); a fortiori $|z^2 + 2z + 3i| \geqslant |z|^2 - 2|z| - 3$. Als $|z| = R > 3$ dan is dit > 0.
   2° $|z-4| \leqslant |z| + |-4| = R + 4$; $|z^2 + 2iz + 3| \geqslant R^2 - 2R - 3 > 0$, als in 1°.

8. Zij p een verdichtingspunt van R; dan bevat elke omgeving van p oneindig veel randpunten van V. Zij M een omgeving van p; neem daarin zo'n randpunt r, en neem een omgeving O van r die geheel in M ligt. In O liggen punten van V en V'; dus ook in M. Dit geldt voor elke omgeving M van p. Dus is p randpunt bij V; dus $p \in R$. Dus elk verdichtingspunt van R is element van R, m.a.w. R is een gesloten verzameling.

9. $s_n = \dfrac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)\{1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^n\}}{1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)} = i\{1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^n\}$; $|s_n - i| = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n < \varepsilon$ als
   $n > \log(1/\varepsilon) \cdot 2/\log 2$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$ want $1 < \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}n} < \sqrt[2n]{e}$
    $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n = 1$ want $n \arctan \dfrac{1}{n} \rightarrow 1$.

11. $0,\ 2,\ \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3},\ 1\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

12. z_n heeft 4 verdichtingspunten, x_n 3; $\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n = 1$.

13. Dezelfde ellipsboog; van 1 naar 2i resp. omgekeerd.
De tweede parametervoorstelling heeft bezwaren: $(\sqrt{4-t^4})'$ is niet continu bij $t = \sqrt{2}$, en $\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 = 0$ bij $t = 0$.

14. 2, 2; 2, 2i; 2, geen limiet.

15. $\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{i}\right| = \frac{|z-i|}{|z|}$; beperk z tot $|z-i| < \frac{1}{2}$, dan is $|z| > \frac{1}{2}$ dus
$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{i}\right| < 2|z-i|$ en dit is kleiner te maken dan iedere gegeven $\varepsilon > 0$ door $|z-i| < \frac{1}{2}\varepsilon$ te nemen. Dus $\frac{1}{z}$ is continu in i. Differentieerbaar:
$\frac{1}{z} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2}(z-i) + (z-i)\eta(z)$; toon aan dat $\eta(z) \to 0$ als $z \to i$.

16. $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{z\bar{z} - z_0\bar{z}_0}{z - z_0}$ bestaat niet (tenzij $z_0 = 0$); neem bijv. $z = z_0 t$ (t reëel $\to 1$) en $z = z_0 e^{i\varphi}$ (φ reëel $\to 0$).

17. $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ bestaat niet; $\lim\limits_{z\to -1} f(z) = -1$, definieer $f(-1) = -1$.

18. $\lim\sup \sqrt[n]{|a_n|} = 3$ want voor oneindig vele n is $\sqrt[n]{|a_n|} > 3-\delta$, maar slechts in eindig veel gevallen (nl. 0) is $\sqrt[n]{|a_n|} > 3+\delta$.

19. a) Wiskunde II; b) Bij $a_0 = e^i$, $a_n = e^{in+i} - e^{in}$ convergeert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ niet, terwijl $|s_n| = 1$.

20. De ongelijkheid geldt voor elke eindige som; dan kan het tegendeel ($>$) niet voor de limiet gelden.

21. $\sum\limits_{i=0}^{n} |a_i| = T_n \to T$; $\sum\limits_{j=0}^{n} |a_j^*| = T_n^* \to T^*$ (zie gegeven).

Zij $\sum\limits_{i,j}^{N} a_i a_j^*$ een som waarin alle producten met i,j beide $\leq$ N reeds voorkomen.
Dan is (ga na)

$$|SS^* - \sum_{i,j}^{N} a_i a_j^*| \leqslant (T - T_N)T^* + T(T^* - T_N^*)$$

Bij elke $\varepsilon > 0$ kan N zó groot worden genomen dat het rechterlid $< \varepsilon$ wordt. Hieruit volgt het gestelde.

22. De reeksen zijn voor elke z met $|z| < 1$ absoluut convergent. De productreeks is dat (volgens 21) ook. Dus heeft de productreeks een convergentiestraal van tenminste 1.

23. Eerste manier: pas 22 toe. Tweede manier: toon aan dat $\exp(z_1 + z) \cdot \exp(z_2 - z)$ niet afhangt van z (differentieer).

24. $e^{z_0} = 0$ is onmogelijk; dan zou voor elke z : $e^z = e^{z-z_0} \cdot e^{z_0} = e^{z-z_0} \cdot 0 = 0$.
De tweede som is $\frac{1}{2}(e^{z_0} + e^{-z_0}) = \cosh z_0$; $\cosh \frac{i\pi}{2} = 0$.

25. $|e^z| = e^x$ naar links afhellend; $|e^{iz}| = e^{-y}$ naar boven afhellend.

26. $|\cos z| = \frac{1}{2}|e^{iz} + e^{-iz}| = \frac{1}{2}|(e^y + e^{-y})\cos x - i(e^y - e^{-y})\sin x|$.
Neem $x = 0$: $\cos iy = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$, niet begrensd als $|y| \to \infty$.

27. 1° Als $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ dan $|e^{iz}| \leqslant 1$, $|z^2 - z + 1| \geqslant |z|^2 - |z - 1| \geqslant |z|^2 - |z| - 1 > 0$ als $|z| = R > 2$.
2° $\left|\int\right| \leqslant \dfrac{\pi R}{R^2 - R - 1} \to 0$ als $R \to \infty$.

28. Substitueer resp. $z = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ en $z = 1 - t + it$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
Het laatste leidt tot $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t - 1 + i}{2(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}}\, dt = 0 + i\,\frac{\pi}{2}$.

29. In $|z| < \rho < R$ is de reeks uniform convergent, d.w.z. bij iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een N zó dat $|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n| < \varepsilon$ voor alle $n_0 > N$. Neem zo'n n_0 dan is $|\int_K \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n dz| < \varepsilon L$ (L: lengte K). Alle machten z^n met $n < n_0$ geven stuk voor stuk 0 bij integratie over K. Dus $|\int_K f(z)dz| < \varepsilon L$. Hierin is ε willekeurig. De integraal is dus 0.

30. Langs twee wegen van $-N$ naar $N+ib$

$$\int_{-N}^{N} e^{-x^2}dx + \int_0^b e^{-(N+iy)^2} i\,dy = \int_0^b e^{-(-N+iy)^2} i\,dy + \int_{-N}^{N} e^{-(x+ib)^2}dx$$

$$\int_{-N}^{N} e^{-x^2}dx + 2e^{-N^2}\int_0^b e^{y^2}\sin 2Ny\,dy = e^{b^2}\int_{-N}^{N} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx \ .$$

$N\to\infty$ geeft voor de gevraagde integraal: $\sqrt{\pi}\, e^{-b^2}$.

31. $\mathrm{Res}_1 = \frac{1}{4}$; $\mathrm{Res}_{-1} = \frac{1}{2!}\{(z^2+1)/(z-1)\}''_{z=-1} = -\frac{1}{4}$.

32. $\mathrm{Res}_{2i} = -\frac{i}{4}e^{-2}$, $\mathrm{Res}_{-2i} = \frac{i}{4}e^{2}$.

33. $\mathrm{Res}_2 = \frac{1}{9}e^2$, $\mathrm{Res}_{-1} = \frac{1}{1!}\left(\frac{e^z}{z-2}\right)'_{z=-1} = -\frac{4}{9}e^{-1}$.

34. Toon aan en gebruik daarna dat $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{z\,dz}{z^3+z^2-2} = \int_{|z|=5}\frac{z\,dz}{z^3+z^2-2}$.

35. a) 0; b) $-2\pi i\cdot 10^{-8}$; c) 0.

36. $\mathrm{Res}_{k\pi}\frac{z}{\sin z} = (-1)^k k\pi$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$; geldt ook bij $k=0$ (ophefbare singulariteit).

37. $\mathrm{Res}_{\frac{2}{3}k\pi i} = \frac{1}{2k\pi i}$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$

$\mathrm{Res}_0 = \frac{1}{1!}\left(\frac{z}{e^{3z}-1}\right)'_{z=0} = \left(\frac{1}{3+3^2z/2}\right)'_{z=0} = -\frac{1}{2}$.

38. $\frac{n!}{(1-r)(2-r)r^n}$ (vergelijk met $f^{(n)}(z) = n!\{(1-z)^{-n-1} - (2-z)^{-n-1}\}$) .

39. Bepaal de afgeleide reeks; toon aan dat deze uniform convergent is in U; integreer term voor term.

40. Stelling! $F'(z) = -\int_0^{2\pi} \sin(z\cos t)d\sin t$ enz.

$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2\pi z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ (waarom is termsgewijs integreren geoorloofd? betreft de uniforme convergentie z of t?).

41. $\frac{1}{2}\left(e^{z-\frac{\pi i}{2}+\frac{\pi i}{2}} + e^{-z+\frac{\pi i}{2}-\frac{\pi i}{2}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{(2n+1)!}\left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^{2n+1}$.

42. $e^{\frac{1}{z}}$ is geen gehele functie.

43. De limiet voor $z \to 0$ bestaat, want $\frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z} = \frac{(z\cos z - \sin z)/z^2}{\sin z/z}$ heeft in 0 geen singulariteit (alleen ophefbaar) in teller en noemer ($\neq 0$).
Evenzo bij π en $-\pi$ ($\frac{\cos z}{\sin z}$ heeft de periode π).
$\frac{1}{z-k\pi}$, $\frac{1}{z+k\pi}$ met $k = 2,3,\ldots,n-1$.

44. Convergent voor $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$, $2 < |z| < 3$, $3 < |z|$.
Splits in partieelbreuken; ontwikkel naar z en z^{-1}; $c_{-1} = 2$, $c_0 = \frac{7}{6}$, $c_1 = \frac{23}{36}$.

45. $\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{-1}{w})^n + \frac{2+i}{10} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{-w}{1+2i})^n$ waarin $w = z - 1 - i$.

46. $\sum_{n=0}^{\infty} c^{-n}z^n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} c^{-n}z^{-n}$ convergeren voor $|z| < |c|$ resp. $> |c^{-1}|$; dus moet $|c^{-1}| < |c|$; $|c| > 1$; ring $|c^{-1}| < |z| < |c|$; som $\frac{c}{c-z} + \frac{1}{cz-1}$.

47. Het maximum wordt bereikt als $\mathrm{Re}(e^{2i\varphi} + 2ie^{i\varphi})$ maximaal is d.i. als $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$ dus als $z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2}$.

48. $e^{(1-i)f(z)}$ is holomorf in hetzelfde gebied; dus wordt $|e^{(1-i)f(z)}| = \exp\{\mathrm{Re}\, f(z) + \mathrm{Im}\, f(z)\}$ maximaal op de rand van D.

49. Stel $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ $(R = \infty)$. Noem de eerste a_i die $\neq 0$ is a_k. Dan is $f(z) = z^k h(z)$ met $h(z)$ holomorf in 0 (en overal) en $h(0) = a_k$. In $|z^k||h(z)| \leq M|z|^n$ is $n > k$ onmogelijk want dan zou $\lim_{z \to 0} h(z) = 0 \neq a_k$. Dus $n \leq k$, dus $f(z)/z^n$ geheel en begrensd; Liouville.

50. Nader 0 bijv. langs de imaginaire as.

51. $e^{1/z} = -e^{\pi} \to z = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(2k+1)i}$, k geheel; $\frac{1}{\sqrt{1+(2k+1)^2}} < \frac{1}{10}$ voor alle $k \geq 5$ of ≤ -6.

52. $\lim_{z \to \pi} (z-\pi)^2 f(z)$ bestaat en is $\neq 0$; pool van 2e orde.

$$\operatorname{Res}_{\pi} f(z) = \frac{1}{1!}\left(\frac{z-\pi}{\sin z}\right)'_{z=\pi} = -\left(\frac{w}{\sin w}\right)'_{w=0} = -\left(\frac{1}{h(w)}\right)'_{w=0} = \left(\frac{h'(w)}{h^2(w)}\right)_{w=0} .$$

Dit geeft 0 want $h(w) = 1 - \frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} - \dots$.

53. $\lim_{z \to 0} f(z)$ moet bestaan, d.w.z. $\lim_{z \to 0} \frac{z - A\sin z}{z \sin z}$ dus $\lim_{z \to 0} \frac{z - A \sin z}{z^2}$ moet bestaan: $\to A = 1$. Analoog $B = -1$, $C = -1$.
Bij $z = k\pi$ $(k = \pm 2, \pm 3, \dots)$ zijn enkelvoudige polen.

54. $\operatorname{Res}_0 (1/\sin z) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} = 1$; $\operatorname{Res}_0 \sin(1/z) = 1$ volgt uit de Laurentreeks (n.b. $\lim_{z \to 0} z \sin(1/z)$ bestaat <u>niet</u>).
$1/\sin z - \sin(1/z)$ kan niet regulier zijn in $z = 0$ want de limiet voor $z \to 0$ bestaat niet (dat het residu 0 is doet niet terzake). Singuliere punten: 0 (essentieel), $k\pi$ met $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ (polen van de eerste orde); $z = \infty$ is een niet geïsoleerd singulier punt (in élke omgeving oneindig veel polen).

55. In het eindige is alleen 0 singulier, met residu $\frac{1}{3!}$; het residu in $z = \infty$ is dus $-\frac{1}{3!}$. In $z = \infty$ is $f(z)$ holomorf want $f(\frac{1}{w}) = \frac{e^w}{w^2} - \frac{1}{w}(\frac{1}{w}+1) = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}w + \dots$ is holomorf in 0 ($f(\frac{1}{w})$ ophefbare singulariteit).

56. Ga na dat de integrand $= \frac{k}{z-a}$.

57. $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} = 0;\ 2\pi(2-\sqrt{3});\ \frac{\pi}{12}$.

58. $\pi(-i/\sqrt{3})^m$ vgl. april 1966.

59. $\frac{\pi}{2^n}$; $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi$, gebruik het binomium.

60. $\frac{\pi}{4}$; $\mathrm{Res}_{z_1=1+i} = \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)\}^{-2}_{z=z_1} = \frac{3}{256}(-1-i)$, analoog bij $z_2 = -1+i$, uitkomst $\frac{3\pi}{64}$; $\frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{1}{(z+i)(z+2i)}\right]''_{z=i} = \pi i\left[\frac{i}{z+2i} - \frac{i}{z+i}\right]''_{z=i} =$
$= 2\pi i(\frac{1}{8} - \frac{1}{27})$.

61. $\frac{\pi i}{1!}\left\{\frac{e^{iaz}}{(z+i)^2}\right\}'_{z=i} = \frac{(a+1)\pi}{4}e^{-a}$, $\pi i(1-e^{-1/a})$; $\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}-1}{x(x^2+1)}dx -$
$- \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}-1}{x(x^2+1)}dx = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}-1}{x(x^2+1)}dx = \pi(1-e^{-1})$.

62. $\frac{\pi i}{3}(e^{-2} - e^{-1})$, vgl. okt. 1966; $2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{(-i)^3} + 2\pi i \cdot \frac{1}{2!}\left(\frac{e^{iz}}{z-i}\right)''_{z=2i} = 2\pi e^{-1} - 5\pi e^{-2}$, vgl. okt. 1966.

63. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{2n!}$; $f(2i\pi^2) = f((\pi+i\pi)^2) = \cos(\pi+i\pi) = -\cos(i\pi) =$
$= -\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi}) < -10$. Voor $x \leq 0$: $f(x) = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{-x}} + e^{-\sqrt{-x}})$.

64. $g(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots$ is in $|z| < 1$ een analytische functie; voor reële z (tussen -1 en 1) stemt g met arctan x overeen.
$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}i\{(i-x)^{-1} - (-i-x)^{-1}\}$; inductie.
$h(z) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{2n}\{(i-1)^{-n} - (-i-1)^{-n}\}(z-1)^n$ is in $|z-1| < \sqrt{2}$ een analytische functie; voor reële z (tussen $-\sqrt{2}+1$ en $\sqrt{2}+1$) stemt h met arctan x overeen, want $h(1) = \frac{\pi}{4} = \arctan 1$ en $h'(x) = (\arctan x)'$.

65. $\int\limits_{K(z)} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}$. Laat men toe dat K om i of -i loopt, dan zijn er méér uitkomsten (veelvouden van π verschillend). Maak sneden vanuit i en -i naar ∞ (niet noodzakelijk langs de imaginaire as), die niet de reële as snijden (want daarop moet de integraal met arctan x overeenstemmen, dus geen sprong maken).

66. Stel er was een analytische functie f(z) in een gebied G dat de reële as omvat en zó dat $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Dan zou ook f'(z) analytisch zijn in G. In het bijzonder zou $\lim\limits_{x \downarrow 0} f'(x)$ moeten bestaan; dat is niet zo. Wel wordt $\sqrt[3]{x}$, $x > 0$ analytisch voortgezet door $g(z) = e^{\frac{1}{3}\log z}$ (hoofdw. log); want g(z) is analytisch in het complexe vlak met snede langs $x \leqslant 0$ en stemt voor $z = x > 0$ met $\sqrt[3]{x}$ overeen.

67. De reeks is convergent als $|z^2 - 1| < 1$ d.i. binnen de lussen van $r = \sqrt{2\cos 2\varphi}$; uniform convergent voor alle z met $|z^2-1| < 1-\delta$ (δ willekeurig klein). Voor $0 < x < \sqrt{2}$ stelt de reeks 2 log x voor. In de rechterlus bepaalt de reeks dus een analytische functie f(z) die 2 log x voortzet. In de linkerlus geeft de (even!) reeks: f(-z); daar wordt de functie 2 log(-x) voortgezet.

68. $$\int_0^R \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+z}\right)dt = \int_1^{R+1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{R+z}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_K \frac{d\zeta}{\zeta} - \int_{R+1}^{R+z} \frac{d\zeta}{\zeta} .$$

Hierin stelt K de gebroken rechte $1 \to R+1 \to R+z \to z$ voor. De integraal langs K is blijkbaar log z; de tweede integraal is in absolute waarde $< \frac{|z-1|}{R+1-|z-1|}$; laat $R \to \infty$.

69. $$\int_\rho^R \frac{\log x\,dx}{x^2+a^2} + \int_0^\pi \frac{\log R + i\varphi}{R^2e^{2i\varphi}+a^2} Rie^{i\varphi}d\varphi + \int_{-R}^{-\rho} \frac{\log|x| + i\pi}{x^2+a^2}dx + \int_\pi^0 \frac{\log\rho + i\varphi}{\rho^2e^{2i\varphi}+a^2}\rho ie^{i\varphi}d\varphi$$

$= 2\pi i \operatorname{Res}_{ia}\left(\frac{\log z}{z^2+a^2}\right) = \frac{\pi}{a}(\log a + \frac{1}{2}\pi i)$. De 2e en 4e integraal $\to 0$ (bewijzen!).

Uitkomst $\frac{\pi}{2}\frac{\log a}{a}$.

70\. a) $z = 0$, $z + \frac{1}{z} = 0 \rightarrow i$ en $-i$.

b) $z + \frac{1}{z} = -p$ (p positief) 1° $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z < 0$ als $p \leqslant 2$

2° $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z < 0$ als $p \geqslant 2$.

71\. $g(z) = e^{\frac{1}{2}\log(-z)}$ (hoofdwaarde log) is analytisch in het complexe vlak met snede langs de positieve reële as; voor $x < 0$ is $g(x) = f(x)$.

Sprong bij $a > 0$: $\lim\limits_{h \downarrow 0} \{g(a+ih) - g(a-ih)\} = e^{\frac{1}{2}\log a - \frac{1}{2}\pi i} - e^{\frac{1}{2}\log a + \frac{1}{2}\pi i} = -2i\sqrt{a}$

72\. $v(x,y) = 2xy + 4y - 2x + c$ (reëel); $f(z) = z^2 + 4z - 2iz + ci$.

73\. a) $w = \frac{z+i}{z}$; $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$; gebruik bijv. het feit dat 2 beeld is van i.

b) $w = \frac{z-1}{\frac{1}{2}(1+i)z-1}$; $2-i$; gebruik bijv. het feit dat ∞ het beeld is van $1-i$.

74\. $w = \frac{z-1}{2z+1}$; $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$, $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$; $|w-1| > 1$, $\operatorname{Im} w > 0$.

75\. $w = \frac{i-z}{i+z}$; a) $\operatorname{Re}(w) > 0$; b) $\left|w - \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\right| \leqslant \frac{2\rho}{1-\rho^2}$ (= inwendige en rand van de cirkel om $\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}$ met straal $\frac{2\rho}{1-\rho^2}$).

A. Gegeven: $f(z)$ is een gehele functie van z
$|f(z)| \leq |z|$ voor alle z.

Te bewijzen: $f(z) = az$ met $|a| \leq 1$.

Bewijs: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ convergent voor alle z $(R = \infty)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = c_0 \\ |f(0)| \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_0 = 0 \ ,$$

derhalve $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ convergent voor alle z $(R = \infty)$.

Definieer nu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} z^n = g(z) \ \left(= \frac{f(z)}{z} \text{ voor } z \neq 0\right) \quad (R = \infty) \ .$$

$g(z)$ is ook een gehele functie, en begrensd voor alle z (voor $z \neq 0$ geldt $|g(z)| = |\frac{f(z)}{z}| \leq 1$, voor $z = 0$ geldt $|g(0)| = |c_1|$, dus voor alle z is $|g(z)| \leq \mathrm{Max}\{1, |c_1|\}$). Volgens Liouville is derhalve $g(z) = a$ = constant dus $f(z) = az$. Het gegeven impliceert $|a| \leq 1$.

B. Beschouw $\int_K e^{-z^2} dz$. Hierin is K de in positieve zin doorlopen gesloten kromme in het z-vlak, bestaande uit de volgende delen:

a) $z = x \qquad 0 \leq x \leq R$

b) $z = Re^{i\varphi} \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

c) $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} x \qquad R \geq x \geq 0$.

Bewijs nu

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \ .$$

Bewijs: K is de omtrek van een cirkelsector met openingshoek $\frac{\pi}{4}$. e^{-z^2} is overal holomorf, dus de integraal over K is nul (hoofdstelling). Wat gebeurt er nu als $R \to \infty$?

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (zie Wiskunde II).

c) $$\int_{x=R}^{0} e^{-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}x\right)^2} \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,dx = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R e^{-ix^2}dx$$

$$= -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R (\cos x^2 - i\sin x^2)dx .$$

De limiet wordt

$$-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty (\cos x^2 - i\sin x^2)dx .$$

b) We hopen dat de integraal over de cirkelboog naar nul gaat. Dit is niet zonder meer met de schattingsstelling te argumenteren: Integratielengte $= \frac{\pi R}{4}$, $\mathrm{Max}\{|e^{-z^2}|\} = \mathrm{Max}\{e^{-R^2\cos 2\varphi}\} = 1$ (wordt bereikt op de bissectrice van het eerste quadrant) dus op de cirkelboog geldt $\mathrm{Max}|f(z)| \cdot \frac{\pi R}{4} = \frac{\pi R}{4} \not\to 0 \quad (R \to \infty)$. We doen daarom voorzichtiger en paasen parametrisering in φ toe: Dit geeft (ga na!)

$$\left|\int_{\varphi=0}^{\pi/4} e^{-R^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi)} Rie^{i\varphi}d\varphi\right| \leqslant$$

$$\leqslant R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\cos 2\varphi}d\varphi = (2\varphi = \theta)$$

$$= \tfrac{1}{2}R\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\cos\theta}d\theta = \tfrac{1}{2}R\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin\theta}d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2}R\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}R^2\theta}\,d\theta = -\frac{\pi}{4R}\,e^{-\frac{2}{\pi}R^2\theta}\Big|_0^{\pi/2} \leqslant \frac{\pi}{4R} \to 0 \quad \text{als } R \to \infty .$$

Dus de integraal langs de cirkelboog nadert inderdaad tot nul als $R \to \infty$. Samenvattend vinden we door de limietovergang

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{1+i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty (\cos x^2 - i\sin x^2)dx = 0.$$

Neem nu reëel en imaginair gedeelte. Hieruit volgt $\int_0^\infty \cos x^2dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

C. We beschouwen de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - z^2}$.

De punten $z = \pm n$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ worden uitgesloten.

a) Bewijs dat de reeks in het gebied G bepaald door $|z| < R$ en $z \neq \pm 1, \pm 2, \ldots$ een holomorfe functie f voorstelt.

b) Zijn de punten $z = \pm n$ singulariteiten van f? Zo ja, van welke soort? Zo neen, waarom niet?

Oplossing. a) $f_n(z) = \dfrac{1}{n^2 - z^2} = \dfrac{1}{(n+z)(n-z)}$ heeft als enkelvoudige polen de punten $z = \pm n$ en is verder regulier $(n = 1,2,3\ldots)$. $f_n(z)$ is dus holomorf in G als $n > R$. Beperken we ons daarom voorlopig tot

$$\sum_{n>R} \frac{1}{n^2 - z^2} ,$$

een reeks van in G holomorfe functies. Omdat in G geldt $|z| < R$ mogen we schrijven

$$\left|\frac{1}{n^2 - z^2}\right| \leq \frac{1}{n^2 - R^2} = \frac{2}{n^2 + (n^2 - 2R^2)} \leq \frac{2}{n^2} \quad \text{als} \quad n \geq R\sqrt{2} .$$

Daar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2}$ een in G uniform convergente reeks is (waarom?) is dus volgens Weierstrass $\sum\limits_{n \geq R\sqrt{2}} \dfrac{1}{n^2 - z^2}$ uniform convergent in G en heeft een holomorfe som. Om de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 - z^2}$ te krijgen moeten nog eindig veel termen, alle holomorf in G, worden toegevoegd. De som van eindig veel holomorfe functies is weer holomorf, dus $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 - z^2}$ is holomorf in G.

Opmerking: Het bovenstaande geldt voor elke R, dus f(z) is overal holomorf behoudens in $z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

b) In een vast punt $\pm m$ zijn alle $f_n(z)$ holomorf, behalve $f_m(z)$ die aldaar een enkelvoudige pool heeft $\Rightarrow f(z)$ heeft een enkelvoudige pool.

D. Zij C_R de cirkel met middelpunt O en straal R.
Zij $I(R) = \displaystyle\int_{C_R} \frac{\sin(\pi/z)}{(1+z)^2}\, dz$.

a) Bereken I(R) voor $R > 1$.

b) Bepaal hieruit I(R) voor $R < 1$.

Oplossing. a) De integrand heeft als singulariteiten $z = 0$ (essentieel) en $z = -1$ (pool). Dus (kanaalmethode) I(R) is constant voor $R > 1$. Mogelijk kunnen we $\lim\limits_{R \to \infty} I(R)$ uitrekenen, waarmee tevens het antwoord op a) is verkregen.

We proberen een indruk van de orde van grootte van de integrand te krijgen als $|z| = R \to \infty$. $\sin w = w - \frac{w^3}{3!} + \ldots$ lijkt op w als $w \to 0$. Dus $\sin \frac{\pi}{z}$ lijkt op $\frac{\pi}{z}$ als $|z| \to \infty$. Dus de orde van grootte van de integrand is $\frac{1}{R^3}$ $(R \to \infty)$.
De integratieweg heeft lengte $2\pi R$ dus we verwachten $\lim_{R\to\infty} I(R) = 0$. Nu exact.
Omdat $\sin \frac{\pi}{z} \Big/ \frac{\pi}{z} \to 1$ als $|z| \to \infty$ bestaat er een R_0 zó dat

$$\left|\sin \frac{\pi}{z}\right| \leqslant 2\left|\frac{\pi}{z}\right| = \frac{2\pi}{R} \quad \text{als} \quad |z| = R > R_0 \ .$$

$$|z+1|^2 \geqslant \{|z|-1\}^2 = (R-1)^2 \quad \text{als} \quad |z| = R > 1 \ ,$$

dus $$|I(R)| \leqslant 2\pi R \ \frac{2\pi/R}{(R-1)^2} \to 0 \quad \text{als} \quad R \to \infty \ .$$

Conclusie: $I(R) = 0$ voor alle $R > 1$.

b) $$- I(R)_{0<R<1} + I(R)_{R>1} = 2\pi i \ \mathrm{Res}_{z=-1} \frac{\sin \frac{\pi}{z}}{(z+1)^2}$$

volgens de residustelling met de kanaalmethode
Dus met a):

$$I(R)_{0<R<1} = -\ 2\pi i \ \mathrm{Res}_{z=-1} \frac{\sin \frac{\pi}{z}}{(z+1)^2} \ .$$

Op het eerste gezicht lijkt de pool in $z = -1$ tweevoudig. Maar de teller $\sin \frac{\pi}{z}$ heeft een enkelvoudig nulpunt, dus de pool is in feite enkelvoudig!
Ergo:

$$\text{Residu} = \lim_{z\to -1} \frac{\sin \frac{\pi}{z}}{(z+1)^2}(z+1) =$$

$$= \lim_{z\to -1} \frac{\sin \frac{\pi}{z}}{z+1} = \lim_{z\to -1} \frac{\sin \frac{\pi}{z} - \sin \frac{\pi}{-1}}{z-(-1)} =$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{z}\right)'_{z=-1} = \cos \frac{\pi}{z}\left(-\frac{\pi}{z^2}\right)_{z=-1} = \pi$$

$$\therefore \quad I(R)_{0<R<1} = -\ 2\pi^2 i \ .$$

<u>Opmerking</u>: We kunnen ook op $I(R)$ de transformatie $z = \frac{1}{w}$ toepassen. Let op: Als $|z| = R > 1$ positief doorlopen wordt geldt: $|w| = \frac{1}{R} < 1$ negatief doorlopen, dus

$$\int\limits_{|z|=R(pos)} \frac{\sin\frac{\pi}{z}}{(z+1)^2}\,dz = \int\limits_{|w|=\frac{1}{R}(neg)} \frac{\sin\pi w}{(\frac{1}{w}+1)^2}\cdot -\frac{dw}{w^2} =$$

$$= \int\limits_{|w|=\frac{1}{R}(pos)} \frac{\sin\pi w}{(1+w)^2}\,dw \begin{cases} = 0 \text{ volgens hoofdstelling als } R > 1 \\ = 2\pi i \operatorname{Res}_{w=-1} \dfrac{\sin\pi w}{(1+w)^2} \text{ als } R < 1 . \end{cases}$$

E. Zij $F(z) = \dfrac{2}{z(1+z^2)}$.

a) Ontwikkel $F(z)$ in een Laurentreeks voor $|z| > 1$. We brengen een snede aan, rechtlijnig van i tot $-i$ en definiëren

$$G(z) = \int_1^z F(w)\,dw$$

onder vermijding van de snede met de integratieweg.

b) Toon aan dat $G(z)$ eenduidig is gedefinieerd en dat $G'(z) = F(z)$ (z niet op snede).

<u>Oplossing</u>: a)

$$F(z) = \frac{2}{z^3}\left(\frac{1}{\frac{1}{z^2}+1}\right) = \text{(meetkundige reeks)}$$

$$= \frac{2}{z^3}\left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} - \dots\right) \quad \left(\frac{1}{|z|} < 1\right)$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-2k-3} \qquad (|z| > 1) .$$

b) $G(z)$ is eenduidig gedefinieerd, als de definiërende integraal voor $G(z)$ niet afhangt van de weg waarlangs we van 1 naar z integreren. Neem 2 wegen I en II:

$$\int_{1\,(I)}^{z} F(w)\,dw - \int_{1\,(II)}^{z} F(w)\,dw = \int_W F(w)\,dw ,$$

waarbij W de weg is via I heen, via II terug, d.w.z. een weg die een aantal keren de snede omsluit, waarop de singulariteiten $z_1 = 0$, $z_{2,3} = \pm i$ liggen. De som der residuen in deze punten is nul (ga na!) dus $\int_W F(w)\,dw = 0 \Rightarrow \int_{(I)} = \int_{(II)}$

Opmerking: We kunnen ook de weg W "opblazen" tot een cirkel om 0 met voldoende grote straal, enige malen doorlopen (kanaalmethode), en de integraal schatten. Doe dit zelf.

Volgens een stelling uit het diktaat is bij continue $f(w)$ de integraal

$$\int_1^z f(w)dw \quad ,$$

mits onafhankelijk van de weg van integratie van 1 naar z een holomorfe functie $g(z)$ zo dat $g'(z) = f(z)$. Dus hier $G'(z) = F(z)$.

F. Gegeven: $f(z)$ kan voor $|z| > 1$ worden ontwikkeld in een Laurentreeks van de vorm

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n} \quad .$$

$f(z)$ heeft nulpunten voor $z = 2,3,4,\ldots$.
Bepaal $f(z)$.

Oplossing: Noem $z = \frac{1}{w}$. Dus $|z| > 1 \Leftrightarrow 0 < |w| < 1$ en

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n \underset{\text{def}}{\equiv} g(w) \ .$$

$g(w)$ is dus voor $0 < |w| < 1$ ontwikkelbaar in een Laurentreeks, die een Taylorreeks blijkt te zijn. Ergo is $g(w)$ analytisch voor $0 < |w| < 1$ met een ophefbare singulariteit in $w = 0$.
$g(w)$ heeft nulpunten in $w = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, een puntrij die zich verdicht in $w = 0$ (een inwendig punt van het holomorfiegebied van g).
De functie $h(w) = 0$ (identiek) heeft dezelfde eigenschappen.
Conclusie: $g(w) \equiv 0$ voor $0 \leqslant |w| < 1$ volgens de identiteitsstelling. (Ga na!)
of: $f(z) = 0$ voor alle z ($|z| > 1$).

G. Een functie $f(z)$ is analytisch voor $0 < |z| \leqslant 1$ en daar begrensd. (In $z = 0$ is $f(z)$ niet gedefinieerd.) Laat C_ρ de cirkel met straal ρ, middelpunt 0 voorstellen ($0 < \rho \leqslant 1$).

a) Bewijs dat $\int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$ als z buiten C_ρ ligt.

b) Bepaal $\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ voor $0 < |z| < 1$.

c) Toon aan dat $f(z)$ in $z = 0$ een ophefbare singulariteit heeft.

Oplossing: a) Een beroep op de hoofdstelling is uitgesloten omdat $f(z)$ binnen C_ρ niet overal is gedefinieerd, laat staan holomorf is. Wél geldt bij gegeven z voor alle $\rho < |z|$ dat

$$(*) \qquad \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \text{constant} \quad \text{(kanaalmethode!)} .$$

Uit het gegeven volgt $|f(\zeta)| \leqslant M$ voor alle ζ. $(0 < |\zeta| \leqslant 1)$. Voor ζ op C_ρ met $\rho < |z|$ is voorts $|\zeta - z| \geqslant |z| - \rho > 0$ dus op C_ρ geldt de ongelijkheid

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| \leqslant \frac{M}{|z| - \rho}$$

dus met de schattingsstelling

$$\left| \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leqslant \frac{2\pi\rho M}{|z| - \rho} \to 0 \quad \text{als } \rho \to 0 .$$

Dit laatste resultaat, samen met (*) geeft de gevraagde identiteit.

b) Volgens de residustelling is voor $\rho < |z| < 1$ (kanaalmethode)

$$\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{-C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i \operatorname{Res}_z \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = 2\pi i\, f(z) .$$

De tweede integraal in deze formule is 0 (zie a)). Derhalve

$$\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i\, f(z) \qquad (0 < |z| < 1) .$$

c) De integraal $\displaystyle\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ stelt, daar $f(\zeta)$ op C_1 een continue functie is, binnen en buiten C_1 een analytische functie $g(z)$ voor (stelling!), dus ook in $z = 0$. Voor $0 < |z| < 1$ is de waarde van $g(z)$ gelijk aan $2\pi i\, f(z)$. De waarde $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\, g(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta$ is dus de waarde die men aan $f(z)$ in $z = 0$ moet toekennen om de singulariteit aldaar op te heffen.

Opmerking: Men kan de opgave ook oplossen door een beroep op een in het diktaat wel genoemde, maar niet bewezen stelling (Casorati-Weierstrass) als volgt: $f(z)$ is volgens het gegeven Laurent-ontwikkelbaar in het gebied $0 < |z| < 1$. $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n$. Er zijn drie mogelijkheden:

(i) Het hoofddeel $\sum_{-\infty}^{-1} c_n z^n$ bevat ∞ veel termen (essentiële singulariteit) $\Rightarrow$ in de buurt van $z = 0$ neemt $f(z)$ bijna alle waarden aan, is dus niet begrensd (Casorati-Weierstrass).

(ii) Het hoofddeel bevat minstens één term $\neq 0$, maar het totale aantal is eindig $\Rightarrow$ pool $\Rightarrow |f(z)| \to \infty$ als $|z| \to 0$ dus $f(z)$ niet begrensd.

Resteert de derde mogelijkheid:

(iii) Het hoofddeel is identiek $0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (Taylorreeks) en heeft een ophefbare singulariteit in $z = 0$ (def. $f(0) = c_0$). Hiermee is c) bewezen.
a) en b) volgen nu uit hoofdstelling en residustelling.

H. De functie $f(z)$ is analytisch voor alle waarden van z behalve $z = 0$ en $z = 1$, en verder geldt:

In $z = 0$ heeft $f(z)$ een pool van orde 2 met residu 0.
In $z = 1$ heeft $f(z)$ een pool van orde 1 met residu 1.
In $z = 2$ heeft $f(z)$ een nulpunt.
$\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 1.$
Bepaal $f(z)$.

Oplossing: $f(z)$ heeft als hoofddelen in $z = 0$ resp. $z = 1$ de uitdrukkingen
$\frac{A}{z^2} + \frac{0}{z}$ en $\frac{1}{z-1}$ (A constant).
Beschouw nu $g(z) = f(z) - \frac{A}{z^2} - \frac{1}{z-1}$.

(1) $g(z)$ is analytisch voor alle z (ook in $z = 0$ en $z = 1$, daar hier voor $g(z)$ ophefbare singulariteiten optreden (ga dit na!)).

(2) $\lim\limits_{|z|\to\infty} g(z) = \lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) - \lim\limits_{|z|\to\infty} \frac{A}{z^2} - \lim\limits_{|z|\to\infty} \frac{1}{z-1} = 1$, dus $g(z)$ is begrensd.

Uit (1) en (2) volgt (Liouville): $g(z)$ = constant = 1, dus

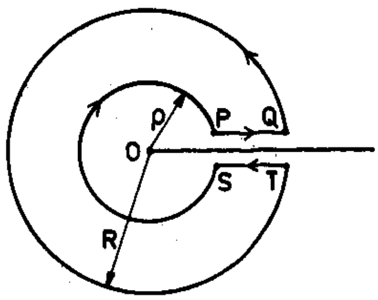
$$f(z) = 1 + \frac{A}{z^2} + \frac{1}{z-1}$$

$$f(2) = 1 + \frac{A}{4} + 1 = 0 \Rightarrow A = -8$$

ergo $$f(z) = 1 - \frac{8}{z^2} + \frac{1}{z-1} .$$

I. Zij α reëel, $0 < \alpha < 1$. In het langs de <u>positieve</u> reële as opengesneden complexe vlak beschouwen we de holomorfe functie $f(z)$ die aan de "bovenkant" van de snede de reële waarden $f(x) = x^{\alpha-1}$ aanneemt.

a) Welke waarden neemt $f(z)$ aan op de "onderkant" van de snede?



Neem nu voor C de volgende contour: 2 cirkels met middelpunt in O en straal OP = ρ, resp. OQ = R, verbonden door stukken PQ resp. TS langs de "bovenkant" van de reële as resp. de "onderkant" van de reële as.

b) Bepaal $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{1+z}\,dz$.

c) Druk $\displaystyle\int_T^S \frac{f(z)}{1+z}\,dz$ uit in $\displaystyle\int_P^Q \frac{f(z)}{1+z}\,dz$.

d) Bewijs nu: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

<u>Oplossing</u>: a) Voor $z = x + io$ $(x > 0)$ geldt

$$f(z) = x^{\alpha-1} = \exp((\alpha-1)\log x) \quad \text{met de gewone logarithmen.}$$

Zet men de gewone logarithmen voort met snede langs de positieve reële as, dan moeten we kiezen $\log z = \log|z| + i \arg z$, $0 < \arg z < 2\pi$ en met deze definitie krijgen we

$$f(z) = \exp((\alpha-1)\log|z| + i(\alpha-1)\arg z)$$

$$= |z|^{\alpha-1}\exp(i(\alpha-1)\arg z) \qquad 0 < \arg z < 2\pi \; .$$

In het bijzonder

$$f(x-i0) = |x|^{\alpha-1}\exp(i(\alpha-1)2\pi)$$

$$= e^{2\pi i(\alpha-1)}x^{\alpha-1}$$

$$= e^{2\pi i\alpha}x^{\alpha-1} \qquad (x > 0) \; .$$

b) $$\int_C \frac{f(z)}{z+1}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{-1} \frac{f(z)}{z+1} \qquad \text{mits } \rho < 1 < R \; .$$

$z = -1$ is een enkelvoudige pool, dus residu $= f(-1)$.

Volgens a) is

$$f(-1) = |-1|^{\alpha-1}\exp(i(\alpha-1)\arg(-1)) = e^{\pi i(\alpha-1)}$$

$$= -e^{\pi i\alpha} \; ,$$

Dus $$\int_C \frac{f(z)}{z+1}\,dz = -2\pi i\, e^{\pi i\alpha}\,.$$

c) Volgens a) is

$$\int_T^S \frac{f(z)}{z+1}\,dz = -\int_S^T \frac{f(z)}{z+1}\,dz =$$

$$= -\int_\rho^R \frac{f(x-i0)}{x+1}\,dx = -e^{2\pi i\alpha}\int_\rho^R \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx =$$

$$= -e^{2\pi i\alpha}\int_P^Q \frac{f(z)}{z+1}\,dz\,.$$

d) De gevraagde integraal is $\lim\limits_{\substack{P\to 0\\ Q\to\infty}} \int_P^Q \frac{f(z)}{z+1}\,dz$,

Hiertoe berekenen we $\lim\limits_{\substack{\rho\downarrow 0\\ R\to\infty}} \int_C \frac{f(z)}{z+1}\,dz$.

(*) Enerzijds is volgens b) deze laatste limiet gelijk aan $-2\pi i\, e^{\pi i\alpha}$.
Anderzijds splitsen we $\int_C$ in vier stukken

$$(**)\qquad \int_C = \int_P^Q + \int_Q^T + \int_T^S + \int_S^P\,.$$

Nu is volgens c)

$$(1)\qquad \int_P^Q + \int_T^S = (1-e^{2\pi i\alpha})\int_\rho^R \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx\,.$$

We maken een schatting van $\int_Q^T$ en van $\int_S^P$ d.m.v. a)

$$(2)\qquad \left|\int_Q^T \frac{f(z)}{z+1}\,dz\right| \le 2\pi R\,\frac{R^{\alpha-1}}{R-1} = \frac{2\pi R^\alpha}{R-1} \to 0$$

als $R\to\infty$ omdat $\alpha < 1$. (Ga de ongelijkheid in deze afleiding na!)

$$(3) \qquad \Big| \int_S^P \frac{f(z)}{z+1}\,dz \Big| \leq 2\pi\rho\,\frac{\rho^{\alpha-1}}{1-\rho} = \frac{2\pi\rho^{\alpha}}{1-\rho} \to 0$$

als $\rho \downarrow 0$ omdat $\alpha > 0$. (Ga de ongelijkheid na!)

Combinatie van (*), (**), (1), (2) en (3) geeft

$$(1 - e^{2\pi i\alpha}) \lim_{\substack{R\to\infty \\ \rho\downarrow 0}} \int_\rho^R \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx = -2\pi i\, e^{\pi i\alpha}$$

$$\frac{e^{-\pi i\alpha} - e^{\pi i\alpha}}{2i} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx = -\pi$$

$$-\sin\pi\alpha \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx = -\pi \qquad \text{Q.E.D.}$$

J. Bereken met behulp van het vorige vraagstuk op analoge wijze de integraal

$$A = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log x}{x+1}\,dx \qquad (0 < \alpha < 1,\ \text{reële log})\ .$$

<u>Oplossing</u>: Laat $g(z)$ de analytische functie zijn met snede langs de positieve reële as zo dat

$$g(x+io) = x^{\alpha-1}\log x\ .$$

Ga na dat in dit geval

$$g(z) = |z|^{\alpha-1}\exp\{i(\alpha-1)\arg z\}\cdot\{\log|z| + i\arg z\}\ ,\ \text{waarbij}$$
$$0 < \arg z < 2\pi\ .$$

In het bijzonder vinden we

$$g(-1) = \exp\pi i(\alpha-1)\cdot i\pi = -\pi i e^{\pi i\alpha}$$

$$(*) \qquad g(x-io) = x^{\alpha-1}\exp 2\pi i(\alpha-1)\cdot\{\log x + 2\pi i\}$$
$$= e^{2\pi i\alpha}\,x^{\alpha-1}\{\log x + 2\pi i\} \qquad (x > 0)\ .$$

We berekenen voor dezelfde contour C als in het vorige vraagstuk

$$\int_C \frac{g(z)}{z+1}\,dz = 2\pi i\, g(-1) = 2\pi^2 e^{\pi i\alpha} \qquad (\rho < 1 < R)\ .$$

Voor de stukken waaruit C is samengesteld

$$\lim_{R\to\infty}\int_Q^T \frac{g(z)}{z+1}\,dz = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{\rho\downarrow 0}\int_S^P \frac{g(z)}{z+1}\,dz = 0$$

door integraalschattingen:

(1) Op QT is $\left|\frac{g(z)}{z+1}\right| \leqslant \frac{R^{\alpha-1}\sqrt{\log^2 R + 4\pi^2}}{R-1} \leqslant \frac{2R^{\alpha-1}\log R}{R-1}$ (R groot genoeg)

dus $\left|\int_Q^T \frac{g(z)}{z+1}\,dz\right| \leqslant \frac{4\pi R^{\alpha}\log R}{R-1} \to 0$ als $R\to\infty$ (Wisk. II!) omdat $\alpha < 1$

(2) Op SP is $\left|\frac{g(z)}{z+1}\right| \leqslant \frac{\rho^{\alpha-1}\sqrt{\log^2\rho + 4\pi^2}}{1-\rho} \leqslant \frac{2\rho^{\alpha-1}|\log\rho|}{1-\rho}$ (ρ klein genoeg)

dus $\left|\int_S^P \frac{g(z)}{z+1}\,dz\right| \leqslant \frac{4\pi\rho^{\alpha}|\log\rho|}{1-\rho} \to 0$ als $\rho\downarrow 0$ (Wisk. II!) omdat $\alpha > 0$.

Analoog als in de vorige opgave vinden we nu door limietovergang ($R\to\infty$, $\rho\downarrow 0$)

$$2\pi^2 e^{\pi i\alpha} = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \rho\downarrow 0}}\int_C \frac{g(z)}{z+1}\,dz =$$

$$= \lim_{\substack{R\to\infty\\ \rho\downarrow 0}}\left\{\int_P^Q \frac{g(z)}{z+1}\,dz + \int_T^S \frac{g(z)}{z+1}\,dz\right\} \quad ,$$

waarbij

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \rho\downarrow 0}}\int_P^Q \frac{g(z)}{z+1}\,dz = \int_0^\infty \frac{g(x+io)}{x+1}\,dx = A \quad ,$$

en

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \rho\downarrow 0}}\int_T^S \frac{g(z)}{z+1}\,dz = \int_\infty^0 \frac{g(x-io)}{x+1}\,dx = -\int_0^\infty \frac{g(x-io)}{x+1}\,dx$$

$$= (\text{volgens } (*)) = -e^{2\pi i\alpha}\left[\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log x}{x+1}\,dx + 2\pi i\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx\right]$$

$=$ (volgens de uitkomst van de vorige opgave) $=$

$$= -e^{2\pi i\alpha}A - 2\pi i\, e^{2\pi i\alpha}\frac{\pi}{\sin\pi\alpha} \quad .$$

Samengevat:

$$2\pi^2 e^{\pi i\alpha} = A(1-e^{2\pi i\alpha}) - 2\pi i\, e^{2\pi i\alpha}\frac{\pi}{\sin\pi\alpha} \quad .$$

Uit deze vergelijking moet het (reële!) getal A worden opgelost: Deel links en rechts door $e^{\pi i\alpha}$ (breng één term naar links)

$$2\pi^2 + 2\pi^2 i \frac{e^{\pi i\alpha}}{\sin \pi\alpha} = A(e^{-\pi i\alpha} - e^{\pi i\alpha})$$

$$2\pi^2(1 + i \frac{\cos \pi\alpha + i \sin \pi\alpha}{\sin \pi\alpha}) = -2i A \sin \pi\alpha$$

$$2i\pi^2 \frac{\cos \pi\alpha}{\sin \pi\alpha} = -2i A \sin \pi\alpha$$

dus $$A = -\pi^2 \frac{\cos \pi\alpha}{\sin^2 \pi\alpha} \ .$$

<u>Nabeschouwing</u>: Merk op dat de uitkomst van A ook uit de vorige opgave kan worden verkregen door differentiatie naar α (ook achter het integraalteken). De verklaring hiervan wordt niet geheel gedekt door de stellingen van Wiskunde V, maar het principe is wel juist. Voor het vlot berekenen van integralen in de praktijk is het handig.

K. Bereken $$\int_{|z|=2} \frac{z^{11}\,dz}{z^8 + z^4 + 1} \ .$$

<u>Oplossing</u>: De integrand is te schrijven als

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{z^{12}}{z^8 + z^4 + 1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^{12} - 1}{z^8 + z^4 + 1} + \frac{1}{z(z^8 + z^4 + 1)}$$

$$= \frac{1}{z} \cdot (z^4 - 1) + \frac{1}{z(z^8 + z^4 + 1)}$$

$$= z^3 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z(z^8 + z^4 + 1)} \ .$$

De integraal bestaat uit drie termen, verkregen door integratie van de laatste uitdrukking: twee zijn er direct te zien:

$$\int_{|z|=2} z^3 dz = 0 \ , \qquad \int_{|z|=2} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \ .$$

Omdat $\frac{1}{z(z^8 + z^4 + 1)}$ alleen singulariteiten heeft voor $|z| \leq 1$ geldt

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z(z^8 + z^4 + 1)} = \int_{|z|=R\geq 2} \frac{dz}{z(z^8 + z^4 + 1)} \ .$$

Met schatting:

$$\left| \int_{|z|=R\geq 2} \frac{dz}{z(z^8+z^4+1)} \right| \leq 2\pi R \, \frac{1}{R(R^8-R^4-1)} \to 0$$

als $R \to \infty$. De derde integraal is dus nul en het antwoord van de opgave luidt: $-2\pi i$.

Opmerking: De transformatie $z = \frac{1}{w}$ doet hier (anders dan in opgave S) geen goed. Ga na waarom niet.

L. Bereken $A = \int_0^{2\pi} (\sin t)^{2n} dt$ met contourintegratie.

Oplossing: Stel $z = e^{it} \Rightarrow |z| = 1$ positief doorlopen;

gevolg: $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$

$$dz = ie^{it}dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}.$$

$$A = \int_{|z|=1} \left(\frac{1}{2i}\right)^{2n} (z - z^{-1})^{2n} \frac{dz}{iz} = \text{(Binomium)}$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \int_{|z|=1} \sum_{k=0}^{2n} z^{2n-k} \binom{2n}{k} (-1)^k (z^{-1})^k \frac{dz}{iz} = \qquad n \text{ geheel} \geq 1$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{i} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k \int_{|z|=1} z^{2n-2k-1} \, dz .$$

Alleen $\frac{1}{z}$ levert bij integratie over $|z| = 1$ een bijdrage $\neq 0$ nl. $2\pi i$. Dit correspondeert met $k = n$, dus

$$A = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{i} \binom{2n}{n} (-1)^n \, 2\pi i = \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \, 2\pi .$$

M. Gegeven $f(z) = (\text{Re } z)^3$

Waar is $f(z)$ differentieerbaar? Waar holomorf?

Bereken de afgeleide in de punten waar ze bestaat.

Oplossing: $z = x + iy$ $\quad$ x reëel, y reëel

$f(z) = u + iv$ $\quad$ u reëel, v reëel $\quad$ $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$

In ons geval $f(z) = x^3$, dus $u = x^3$, $v = 0$.

Wil $f(z)$ differentieerbaar zijn, dan moet (Cauchy-Riemann)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \; .$$

Hier: $\quad 3x^2 = 0 \;$ en $\; 0 = 0$.

Als mogelijke punten voor differentieerbaarheid komen dus alleen in aanmerking de punten op de imaginaire as. Deze punten hebben geen van alle een volle omgeving (bijv. cirkel-omgeving) die uit zuiver imaginaire getallen bestaat dus holomorf is $f(z)$ in geen enkel punt.
Wil $f(z)$ differentieerbaar zijn in $z = iy$ dan is Cauchy-Riemann geen voldoende voorwaarde en zijn we op de differentieerbaarheidsdefinitie aangewezen:
Stel h en k reëel:

$$\frac{f(iy + h + ik) - f(iy)}{h + ik} = \frac{h^3 - 0}{h + ik} \; .$$

De absolute waarde van deze uitdrukking is hoogstens $\left|\frac{h^3}{h}\right| = h^2 < \varepsilon$ als $0 < |h| < \sqrt{\varepsilon}$. (Voor $h = 0$ is de uitdrukking reeds nul). Dus populair gezegd:
$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{f(iy + h + ik) - f(iy)}{h + ik} = 0$ onafhankelijk van de wijze waarop h en k (onafhankelijk van elkaar) naar nul gaan.
Conclusie: Voor $z = iy$ is $f(z)$ differentieerbaar, $f'(iy) = 0$.

N. Bereken $\displaystyle\int_{|z|=1} \log z \, dz$, waarbij de hoofdwaarde van $\log z$ wordt gekozen en de kromme in positieve zin wordt doorlopen.

Oplossing: Daar $\log z$ een snede heeft die binnen de integratiekromme doordringt is beroep op de residustelling binnen de eenheidscirkel uitgesloten.
Dus: parameteroplossing:
$|z| = 1$ overeenkomstig de hoofdwaarde geparametriseerd geeft:

$$z = e^{i\varphi} \qquad -\pi < \varphi \leqslant \pi$$

$$dz = ie^{i\varphi} d\varphi$$

$$\log z = \log|e^{i\varphi}| + i \arg(e^{i\varphi}) = 0 + i\varphi = i\varphi \; .$$

Dus:

$$\int_{|z|=1} \log z \, dz = \int_{\varphi=-\pi}^{+\pi} i\varphi . ie^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= (i\varphi e^{i\varphi} - e^{i\varphi}) \Big|_{-\pi}^{+\pi} = -2\pi i \; .$$

Opmerking: Omdat voor reële x log x kan worden beschouwd als afgeleide van x log x - x is ook door analytische voortzetting log z (hoofdwaarde) de afgeleide van z $\log_{\text{hoofdw}}$ z - z. Noem F(z) = z $\log_{\text{hoofdw}}$ z - z. Dan is met de hoofdstelling van de integraalrekening

$$\int_{|z|=1} \log z\, dz = F(-1+io) - F(-1-io) = -\pi i - \pi i \quad .$$

Ga dit na!

0. Toon aan, door gebruik te maken van

$$(*) \qquad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\, dt \ ,$$

waarin C een in positieve zin doorlopen enkelvoudige gesloten kromme rond t = a is, dat

$$(a) \qquad \left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{z^n e^{zt}}{n!\ t^{n+1}}\, dt$$

waarin K een in positieve zin doorlopen enkelvoudige gesloten kromme rond t = 0 is;

$$(b) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2z\cos\varphi} d\varphi \ .$$

Bewijs: (a) Gezien de integratie over t in (a) moet z een constante voorstellen. Stel daarom a = 0, $f(t) = e^{zt}$, dus $f^{(n)}(t) = z^n e^{zt}$, in het bijzonder dus $f^{(n)}(0) = z^n$. Invullen in (*) geeft

$$z^n = \frac{n!}{2\pi i} \int_K \frac{e^{zt}}{t^{n+1}}\, dt$$

waaruit (a) onmiddellijk volgt.

(b) Volgens (a) geldt

$$(**) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_K \frac{z^n e^{zt}}{n!\ t^{n+1}}\, dt \ .$$

Kies voor K de eenheidscirkel: $t = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, dan is

$$(***) \qquad \int_K \frac{z^n e^{zt}}{n!\ t^{n+1}}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{z^n}{n!} \exp(ze^{i\varphi}) i e^{-in\varphi} d\varphi \ .$$

Vooruitlopend op een verwisseling van integratie en sommatie in het substitutieresultaat van (***) in (**), nl.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{z^n}{n!}\exp(ze^{i\varphi})e^{-in\varphi}d\varphi$$

vinden we

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(ze^{i\varphi})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ze^{-i\varphi})^n}{n!}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(ze^{i\varphi})\exp(ze^{-i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(2z\cos\varphi)d\varphi\ .$$

Het gevraagde is dus bewezen als de integratie-sommatieverwisseling geoorloofd is, dus als we kunnen aantonen dat

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\exp(ze^{i\varphi})e^{-in\varphi}$$

voor $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ uniform in φ convergeert (z constant!). Schatting geeft voor de n-de term

$$\left|\frac{z^n}{n!}\exp(ze^{i\varphi})e^{-in\varphi}\right| \leqslant \frac{|z|^n}{n!}\exp|z| \qquad \text{(ga dit na!)}$$

waarbij $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}\exp|z| = \exp 2|z|$ convergeert, en elke term uit de laatste reeks onafhankelijk van $\varphi \Rightarrow$ uniforme convergentie volgens Weierstrass Q.E.D.

P. Bereken $A = \int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}dx$.

Oplossing: De integraal bestaat omdat de integrand voor reële x ($|x| \to \infty$) van de orde $\frac{1}{|x|^3}$ is, en overal continu is op de reële as

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}dx\ .$$

Beschouw $\int_K \frac{ze^{iz}}{(z^2+1)^2}dz$, waarbij K de positief doorlopen omtrek van de halve cirkel met straal $R > 1$ om 0, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ is.

a) $$\int_{-R}^{+R} \frac{xe^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_{-R}^{R} \frac{x\cos x + ix\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \int_{-R}^{+R} \frac{ix\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx$$ (de andere integrand is oneven en wordt over $[-R,R]$ geïntegreerd $\Rightarrow$ nul)

$$\lim_{R\to\infty} = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx\,.$$

b) Voor $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ is $|e^{iz}| \leqslant 1$ (ga na!).
Dus met schattingsstelling

$$\Bigg|\int_{\substack{|z|=R\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} \frac{ze^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz\Bigg| \leqslant \pi R\,\frac{R}{(R^2-1)^2} \to 0 \quad \text{als } R\to\infty\,.$$

c) $$\int_K \frac{ze^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_i \frac{ze^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2} = \text{(dubbele pool!)}$$

$$= 2\pi i \left\{\frac{ze^{iz}}{(z+i)^2}\right\}'_{z=i} = 2\pi i \left\{\frac{e^{iz}(1+iz)(z+i)^2 - 2(z+i)ze^{iz}}{(z+i)^4}\right\}_{z=i}$$

$$= 2\pi i\,\frac{0 - 4i^2e^{-1}}{(2i)^4} = \tfrac{1}{2}\pi i\, e^{-1}\,.$$

Samenvattend na limietovergang: $A = \dfrac{\pi}{4e}$.

Q. Bereken $A = \displaystyle\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z\log z}$, waarbij de integratieweg in positieve zin wordt doorlopen en aan de logarithme de hoofdwaarde wordt toegekend.

<u>Oplossing</u>: De integratieweg plus zijn inwendige ligt geheel binnen het gebied waar $\log z$ holomorf is. $\log z$ heeft een enkelvoudig nulpunt in $z = 1$ (Taylor-ontwikkeling om $z = 1$!), dus $\dfrac{1}{z\log z}$ heeft voor $z = 1$ een enkelvoudige pool, en verdere singulariteiten zijn er niet voor $|z-1| \leqslant \frac{1}{2}$.

Conclusie: $A = 2\pi i \operatorname{Res}_1 \dfrac{1}{z\log z} =$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z\log z} = 2\pi i \lim_{w\to 0} \frac{w}{(w+1)\log(1+w)} = 2\pi i\,.$$

R. Gegeven is $z = re^{i\varphi}$. Bij vaste φ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ laat men r aangroeien van 0 tot ∞. Voor welke φ bestaat

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\sin z}{\cos z} \quad ?$$

Bepaal in deze gevallen de limiet.

Oplossing: Voor reële x heeft $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ singulariteiten in $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ zodat de limiet zeker niet bestaat voor $\varphi = 0$ (pos. reële as) en $\varphi = \pi$ (negatief reële as). We zullen aantonen dat de limiet voor alle andere φ wel bestaat. Uitgangspunt is steeds het feit dat de uitdrukking $\exp r(a + ib)$ bij constante a en b voor positieve a in modulus onbeperkt stijgt $(r \to \infty)$ en voor negatieve a naar nul convergeert:

$$z = re^{i\varphi} = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$$

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i} \{e^{-r(\sin \varphi - i \cos \varphi)} - e^{+r(\sin \varphi - i \cos \varphi)}\}$$

$$\cos z = \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \tfrac{1}{2}\{e^{-r(\sin \varphi - i \cos \varphi)} + e^{r(\sin \varphi - i \cos \varphi)}\}$$

dus
$$\frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{-r(\sin \varphi - i \cos \varphi)} - e^{r(\sin \varphi - i \cos \varphi)}}{e^{-r(\sin \varphi - i \cos \varphi)} + e^{r(\sin \varphi - i \cos \varphi)}} .$$

Als $0 < \varphi < \pi$ dan is $\sin \varphi > 0$, dus worden de laatste termen uit teller en noemer dominant. Deel teller en noemer door $e^{r(\sin \varphi - i \cos \varphi)}$

$$\frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{-2r(\sin \varphi - i \cos \varphi)} - 1}{e^{-2r(\sin \varphi - i \cos \varphi)} + 1} \to \frac{1}{i} \frac{0 - 1}{0 + 1} = i \quad \text{als } r \to \infty .$$

Analoog gaat bij $\pi < \varphi < 2\pi$ de uitdrukking $\frac{\sin z}{\cos z}$ naar $-i$ als $r \to \infty$. Dit laatste is ook wel af te leiden uit de eerste redenering met gebruikmaking van het feit dat $\tan z$ een oneven functie is. Ga dit na!

S. Bereken: $A = \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^7 \, dz}{(2z^6 + 1)(2z - 1)(3z - 1)}$.

Oplossing: De eindige singulariteiten van de integrand liggen allemaal (8 stuks!) binnen $|z| = 1$ en bieden dus ruimschoots gelegenheid tot tijdverspilling bij de residuberekening! Dan staan er twee wegen open:

(1) Door een transformatie $z = \frac{1}{w}$ doorloopt w de eenheidscirkel negatief! Daarom het minteken vóór de integraal.

$$A = -\int_{|w|=1} \frac{\frac{1}{w^7}\cdot -\frac{dw}{w^2}}{(\frac{2}{w^6}+1)(\frac{2}{w}-1)(\frac{3}{w}-1)} =$$

$$= \int_{|w|=1} \frac{dw}{w(w^6+2)(w-2)(w-3)} =$$

$$= 2\pi i\ \mathrm{Res}_0\left(\frac{1}{w(w^6+2)(w-2)(w-3)}\right) = \frac{2\pi i}{12} = \frac{\pi i}{6}\ .$$

(2) $$A = \int_{\substack{|z|=R\\(R>1)}} \frac{z^7\,dz}{(2z^6+1)(2z-1)(3z-1)}$$ (volgens kanaalmethode verandert Σ residuen niet) =

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \frac{z^7\,dz}{(2z^6+1)(2z-1)(3z-1)}\ .$$

De integrand laat zich omwerken door afsplitsing van de term $\frac{1}{12z}$ (welke voor grote $|z|$ de belangrijkste term is) tot

$$\frac{1}{12z}\,\frac{12z^8}{12z^8-10z^7+2z^6+6z^2-5z+1} = \frac{1}{12z} + \frac{10z^7-2z^6-6z^2+5z-1}{12z(2z^6+1)(2z-1)(3z-1)}$$

De eerste term levert bij integratie over $|z| = R$ de bijdrage $\frac{\pi i}{6}$, de tweede term kan worden afgeschat (teller vergroten, noemer verkleinen) zodat de bijdrage tot de integraal gemajoreerd wordt door

$$2\pi R\ \frac{10R^7+2R^6+6R^2+5R+1}{12R(2R^6-1)(2R-1)(3R-1)}\ ,$$

een uitdrukking die naar nul gaat als $R\to\infty$. De integraal zelf is voor $R > 1$ constant, dus nul $\Rightarrow A = \frac{\pi i}{6}$.

T. Gegeven: $f(x) = \arctan x$ voor $-\infty < x < \infty$.
Zet deze functie analytisch voort in het complexe z-vlak, opengesneden langs de imaginaire as van i tot $i\infty$ en van $-i\infty$ tot $-i$. Bereken de sprong aan de snede.

Aanwijzing: $\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ voor reële x.

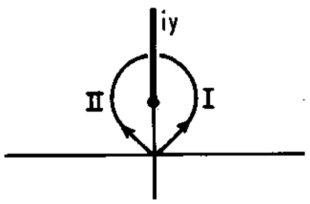
<u>Oplossing</u>: Formeel ligt voor de hand te definiëren $g(z) = \int_0^z \frac{dw}{w^2+1}$ als analytische voortzetting van $f(x)$.

a) Dit is een analytische functie van z als de gebruikte integraal niet afhangt van de weg die we van 0 naar z doorlopen. Dit laatste is het geval, omdat de ingevoerde sneden beletten de singulariteiten $\pm$ i te omsluiten.

b) Voor reële $z = x$ kunnen we de integratie (die onafhankelijk van de weg is!) ook rechtlijnig uitvoeren: $\int_0^x \frac{dw}{w^2+1} = g(x)$, waarmee bewezen is dat $g(z)$ op de reële as met de oude functie overeenstemt.

Uit a) en b) volgt: $g(z)$ is analytische voortzetting van $f(x)$.

c) $$g(iy+0) - g(iy-0) = \int_I \frac{dw}{w^2+1} - \int_{II} \frac{dw}{w^2+1} =$$



$$= \left(\int_I + \int_{-II}\right)\frac{dw}{w^2+1} = 2\pi i \operatorname{Res}_i \left(\frac{1}{w^2+1}\right) = \pi$$

voor $y > 1$.

Analoog $\quad g(iy+0) - g(iy-0) = \pi$ voor $y < -1$.

<u>Opmerking</u>: Van vroeger weten we reeds dat de vergelijking $\tan\alpha = p$ bij gegeven p wortels α heeft die op een π-voud na bepaald zijn. π is precies de sprongwaarde!

U. Bewijs, voor $z \neq 0$

$$\exp\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

waarbij $\quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\cos 2\varphi} \cos n\varphi \, d\varphi$.

<u>Oplossing</u>: $\exp\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$ heeft singulariteiten in $z = 0$, $z = \infty$.

Voor de Laurentcoëfficiënten geldt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\exp\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)}{z^{n+1}} dz \qquad (n = \ldots,-1,0,1,\ldots)$$

waarbij K de singulariteit $z = 0$ positief omsluit. Neem voor K de eenheidscirkel: $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ en werk de integraal om:

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi} = 2\cos 2\varphi$$

$$dz = ie^{i\varphi}d\varphi$$

$$z^{-n-1} = e^{(-n-1)i\varphi} = e^{-i\varphi}(\cos n\varphi - i \sin n\varphi) \quad ,$$

derhalve

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(2 \cos 2\varphi) \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) d\varphi \ .$$

Dit is de gevraagde vorm met als extra term:

$$- i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2 \cos 2\varphi} \sin n\varphi \, d\varphi = \text{(door periodiciteit } (2\pi))$$

$$= - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{2 \cos 2\varphi} \sin n\varphi \, d\varphi = 0 \quad ,$$

omdat de integrand als oneven functie van φ over een t.o.v. $\varphi = 0$ symmetrisch interval wordt geïntegreerd.

Q.E.D.

V. Zij $f(z) = \log \log z$, waarbij met log de hoofdwaarde wordt bedoeld. Bepaal de snede van $f(z)$ en bereken de sprong aan de snede in het punt $z = -2$.

Oplossing: log z heeft zijn snede, waar z reëel $\leqslant 0$ is. $\log(\log z)$ heeft zijn snede, waar log z een snede heeft èn bovendien voor die z, waar log z reëel $\leqslant 0$. Nu is $\log z = \log|z| + i \arg z \quad (-\pi < \arg z \leqslant \pi)$, dus $\log z \leqslant 0$ als $\arg z = 0$ èn $\log|z| \leqslant 0$, m.a.w. als z reëel, $0 < z \leqslant 1$. De totale snede wordt dus $-\infty < z \leqslant 0$ aangevuld met $0 < z \leqslant 1$. Samen: $-\infty < z \leqslant 1$.

Beschouw nu het punt $z = -2$

$$\log(-2 + io) = \log|-2| + i\pi = \log 2 + i\pi \ .$$

Hiervan nemen we weer de (hoofdwaarde) logarithme

$$\log(\log 2 + i\pi) = \log|\log 2 + i\pi| + i \arg(\log 2 + i\pi)$$

$$= \log|\log 2 + i\pi| + i \arctan \frac{\pi}{\log 2} \ .$$

$$\log(-2 - io) = \log|-2| - i\pi = \log 2 - i\pi \ ,$$

dus $$\log(\log(-2 - io)) = \log|\log 2 - i\pi| + i \arg(\log 2 - i\pi)$$

$$= \log|\log 2 - i\pi| - i \arctan \frac{\pi}{\log 2} \ .$$

omdat $|\log 2 + i\pi| = |\log 2 - i\pi| = \sqrt{\log^2 2 + \pi^2}$ vinden we

$$f(-2 + io) - f(-2 - io) = 2i \arctan \frac{\pi}{\log 2} \ .$$

W. Stel $f(x) = (x-1)^x$ voor $x > 1$.

Zet deze functie analytisch voort in het complexe z-vlak opengesneden volgens $-\infty < z \leqslant 1$ en bereken de sprong in een willekeurig punt van de snede.

Oplossing: Voor $x > 1$ geldt $f(x) = e^{x \log(x-1)}$ met de gewone reële logarithme. Nu is $\log_{\text{hoofdw.}}(z-1)$ een analytische functie van z buiten de gegeven snede, en stemt voor $z-1 > 0$ (dus $z = x > 1$) met de gewone logarithme overeen. $f(z) = e^{z \log_{\text{hoofdw.}}(z-1)}$ is derhalve de analytische voortzetting van de gegeven functie (identiteitsstelling).

De definitie van de $\log_{\text{hoofdw.}}(z-1)$ luidt

$$\log_{\text{hoofdw.}}(z-1) = \log|z-1| + i \arg(z-1) \qquad (-\pi < \arg(z-1) \leqslant \pi).$$

Dus voor $x < 1$ moeten we kiezen:

$$\arg(x+io-1) = \pi , \quad \arg(x-io-1) = -\pi ,$$

m.a.w.

$$\begin{aligned} f(x+io) &= \exp[x(\log|x-1| + i\pi)] \\ &= (1-x)^x \exp i\pi x \\ f(x-io) &= \exp[x(\log|x-1| - i\pi)] \\ &= (1-x)^x \exp(-i\pi x) . \end{aligned}$$

Conclusie:

$$\begin{aligned} f(x+io) - f(x-io) &= (1-x)^x(\exp(i\pi x) - \exp(-i\pi x)) \\ &= 2i(1-x)^x \sin \pi x \qquad (x < 1). \end{aligned}$$

Oktober 1964.

1. Bepaal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{4+x^4}\,dx$.

2. Toon aan dat voor $z \neq 0$ geldt

$$e^{\frac{1+z^2}{2z}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

met $\quad a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \cos n\varphi\, d\varphi$.

3. Onderzoek of 0 een pool is van

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} + \frac{z-1}{z} .$$

Is 0 een essentiële singulariteit?
Kan $f(z)$ holomorf in 0 worden gemaakt door aan $f(0)$ een bepaalde waarde toe te kennen, en zo ja, welke?
Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ voor $f(z)$.

4. Toon aan dat de hoofdwaarde van $\log(\frac{i-z}{i+z})$ in een omgeving van $z = 0$ gelijk is aan de analytische voortzetting van $2i \arctan x$.

Oplossingen

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{4+x^4}\,dx = 2\pi i[\text{som der residuen van } \frac{z^2}{4+z^4} \text{ in bovenhalfvlak}].$

Dit geldt omdat voldaan is aan drie voorwaarden.

1) $\lim\limits_{z\to\infty} z \cdot \dfrac{z^2}{4+z^4} = 0$, uniform in arg z; want $\left|\dfrac{z^3}{4+z^4}\right| \leqslant \dfrac{|z|^3}{|z|^4-4}$ als $|z| > \sqrt{2}$,

en dit geeft $\left|\dfrac{z^3}{4+z^4}\right| \leqslant \dfrac{1}{|z|-4/|z|^3} \leqslant \dfrac{1}{|z|-\sqrt{2}} < \varepsilon$ als $|z| > \sqrt{2} + \frac{1}{\varepsilon}$ (waarin arg z niet voorkomt).

2) $\dfrac{z^2}{4+z^4}$ is analytisch op en boven de reële as, op een eindig aantal singulariteiten na, niet liggende op de reële as.

Inderdaad vindt men uit $z^4 = -4 = 4e^{i\pi+2k\pi i}$ de volgende nulpunten van de noemer

$z_1 = \sqrt{2}\,e^{\frac{1}{4}\pi i} = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi i} = -1 + i$ en $z_3 = -1 - i$, $z_4 = 1 - i$.

Er zijn dus twee singulariteiten in het bovenhalfvlak.

3) De integraal bestaat, want $\lim\limits_{R\to\infty}\int^{R}$ en $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}$ bestaan [omdat $\dfrac{x^2}{4+x^4} = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ als $x \to \pm\infty$].

De residuen bij $1 + i$ en $-1 + i$ vindt men als volgt

$$\lim_{z\to 1+i}(z-1-i)\frac{z^2}{4+z^4} = \lim_{z\to 1+i}\frac{z^2}{(z+1-i)(z+1+i)(z-1+i)} = \frac{(1+i)^2}{2(2+2i)2i} = \frac{1}{8}(i-i)$$

$$\lim_{z\to -1+i}(z+1-i)\frac{z^2}{4+z^4} = \lim_{z\to -1+i}\frac{z^2}{(z-1-i)(z+1+i)(z-1+i)} =$$

$$= \frac{(-1+i)^2}{(-2)(2i)(-2+2i)} = \frac{1}{8}(-1-i) \quad .$$

De integraal is dus $2\pi i\left(\dfrac{1-i-1-i}{8}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. De functie $e^{\frac{1+z^2}{2z}}$ is overal analytisch behalve in 0; in elk ander punt hebben we immers te maken met een analytische functie e^w van de (overal behalve in 0) analytische functie $w = \dfrac{1+z^2}{2z}$.

De coëfficiënten van de Laurentontwikkeling rond $z = 0$ zijn

$$a_n = \frac{-1}{2\pi i}\int_J \frac{f(z)dz}{z^{n+1}} \qquad \text{J: Jordankromme om 0.}$$

We nemen voor J de eenheidscirkel; dan komt er

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\varphi}\, e^{-(n+1)i\varphi}\, ie^{i\varphi}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\varphi}(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)d\varphi \quad .$$

Hierin valt het imaginair gedeelte weg ($e^{\cos\varphi}\sin n\varphi$ is oneven); dus

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi} \cos n\varphi \, d\varphi \quad .$$

3. $\lim\limits_{z\to 0} z^k f(z) = \lim\limits_{z\to 0} z^{k-1}\left(\frac{z}{\sin z} - 1 + z\right) = 0$.

Dit geldt voor $k = 1,2,\ldots$ dus 0 is géén pool van welke k-de orde ook. Evenmin is 0 een essentiële singulariteit, want dan zou er geen limiet zijn.
Wel bestaat $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$, want

$$\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} + 1 = \frac{z - \sin z}{z \sin z} + 1 = \frac{z^3(1/3! - z^2/5! + \ldots)}{z^2(1 - z^2/3! + \ldots)} + 1 = zh(z) + 1$$

waarin $h(z)$ een in 0 holomorfe functie voorstelt (teller en noemer in $z = 0$ holomorf en noemer $\neq 0$). Kennelijk is $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 1$.

Door te definiëren $f(0) = 1$ wordt de singulariteit opgeheven. Dan is $f(z)$ holomorf in het gehele complexe vlak met uitzondering van singulariteiten (polen) in $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ...
De dichtst bij 0 gelegen singulariteiten zijn $\pm\pi$. De machtreeks $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ heeft dus de convergentiestraal π.

4. Per definitie wordt onder de hoofdwaarde van $f(z) = \log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$ verstaan $\int\limits_K \frac{d\zeta}{\zeta}$ waarin K een weg van 1 naar $\frac{i-z}{i+z}$ voorstelt die de negatieve reële as of het punt 0 <u>niet</u> passseert.
Blijkbaar is $f(0) = 0$; de afgeleide vinden we met de kettingregel:

$$f'(z) = \frac{i+z}{i-z} \cdot \frac{-i-z-i+z}{(i+z)^2} = \frac{2i}{1+z^2} \quad .$$

Voor reële $z = x$ vinden we dus $f(0) = 2i \arctan 0$ en $f'(x) = (2i \arctan x)'$, dus $f(x) = 2i \arctan x$.
Dus is $f(z)$ de analytische voortzetting van $2i \arctan x$ in een omgeving van $z = 0$. Volledigheidshalve gaan we na, waar $f(z)$ analytisch is.
De punten waar geen analyticiteit meer is, zijn de z waarbij $\frac{i-z}{i+z}$ negatief of 0 wordt, want daar en daar alleen is de hoofdwaarde van de logarithme niet analytisch.

$$\frac{i-z}{i+z} = -p \quad , \quad p \geqslant 0 \ .$$

Dit geeft $z = i\,\frac{1+p}{1-p}$.

Hieruit blijkt dat z niet op de imaginaire as in of boven i mag liggen ($0 \leq p < 1$); en ook niet in of beneden $-i$ ($p > 1$). Dus is $f(z)$ holomorf in het gehele z-vlak uitgezonderd genoemde stukken imaginaire as, beginnend bij $\pm i$; dus heeft $f(z)$ rond 0 een reeksontwikkeling met convergentiestraal 1 nl.

$$2iz - \frac{2i}{3} z^3 + \frac{2i}{5} z^5 \dots \; .$$

Deze reeks geeft immers voor reële $z = x$ de functie $2i \arctan x$.

Januari 1965

1. Toon aan dat elke even functie die in een gereduceerde omgeving van 0 holomorf is, in 0 residu 0 heeft. Motiveer Uw antwoord.

2. Bereken $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 2t}{1 + a\cos t}\, dt \quad (0 < a < 1)$.

3. Ontwikkel $\dfrac{\sin z}{1 + z}$

   in een Laurentreeks om het punt $z = -1$. Wat is het convergentiegebied van deze reeks?

4. Bepaal $\displaystyle\int_C \log z\, dz$

   als C de eenheidscirkel voorstelt, doorlopen van -1 tot in -1 in positieve richting.

5. Zij $\quad f(z) = \dfrac{e^{\pi z^{-2}} - 1}{z - 1}$.

   a) Wat zijn de nulpunten van f ?

   b) Wat zijn de singuliere punten van f ? Van welk soort zijn deze? Bepaal het residu van f in deze punten. Wat is het residu van f in $z = \infty$?

Oplossingen

1. Stel $f(z)$ heeft voor $|z| \leq \rho$ geen singulariteit behalve (misschien) in 0. Dan vinden we, als $f(z) = f(-z)$:

$$2\pi i\{\text{Residu } f(z)\}_{z=0} = \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\varphi})\rho i e^{i\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} f(-\rho e^{i\varphi})\rho i e^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= -\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\varphi - i\pi})\rho i e^{i\varphi - i\pi} d\varphi = -\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi})\rho i e^{i\varphi} d\varphi = -2\pi i\{\text{Residu } f(z)\}_{z=0} .$$

Dus $\quad \{\text{Residu } f(z)\}_{z=0} = 0$.

Opmerking. Het is juist, dat $f(z)$ een Laurentontwikkeling $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ moet hebben, waarin alléén even machten van z voorkomen. Het bewijs hiervan is echter niet gemakkelijker, maar vrijwel gelijk aan het voorafgaande:

$$2\pi i\ c_{2n-1} = \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\varphi})\rho^{1-2n} i e^{i\varphi(1-2n)} d\varphi \quad \text{blijkt } 0 \ .$$

2. Uit $\cos^3 2t = \frac{1}{8}(e^{2it} + e^{-2it})^3 = \frac{1}{8}(e^{6it} + e^{-6it}) + \frac{3}{8}(e^{2it} + e^{-2it}) =$

$$= \tfrac{1}{4}\cos 6t + \tfrac{3}{4}\cos 2t$$

zien we (n.b. de noemer is even) dat de integraal gelijk is aan

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\frac{1}{4}e^{6it} + \frac{3}{4}e^{2it}}{1 + \frac{1}{2}a(e^{it} + e^{-it})} dt = \frac{1}{2a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{6it} + 3e^{2it}}{e^{2it} + \frac{2}{a}e^{it} + 1} e^{it} dt \ .$$

De gebruikelijke substitutie $e^{it} = z$, $ie^{it}dt = dz$ geeft nu

$$\frac{-i}{2a} \int_{|z|=1} \frac{z^6 + 3z^2}{z^2 + \frac{2}{a}z + 1} dz = \frac{-i}{2a} \int_{|z|=1} \frac{z^6 + 3z^2}{(z-z_1)(z-z_2)} dz \text{ met } \begin{cases} z_1 = -\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} \\ z_2 = -\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} \end{cases}$$

z_1 ligt binnen $|z| = 1$, $z_2 = \frac{1}{z_1}$ dus er buiten. De integraal is dus

$$\frac{-i}{2a} 2\pi i \operatorname{Residu}_{z=z_1} = \frac{\pi}{a} \frac{z_1^6 + 3z_1^2}{z_1 - z_2} = \frac{\pi(z_1^6 + 3z_1^2)}{2\sqrt{1-a^2}} \ .$$

Men kan dit zo laten staan. Volledigheidshalve gaan we verder:

$$z_1^6 + 3z_1^2 = z_1^3(z_1^3 + 3z_2) = \left(\frac{-4}{a^3} + \frac{3}{a} + \left(\frac{4}{a^2} - 1\right)\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}\right)\left(\frac{-4}{a^3} + \left(\frac{4}{a^2} - 4\right)\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}\right) =$$

$$= 4\left(\frac{2}{a^2} - 1\right)^3 - \left(\frac{32}{a^6} - \frac{32}{a^4} + \frac{12}{a^2}\right)\sqrt{1-a^2}$$, wat in de gevonden uitkomst kan worden gesubstitueerd.

3. $$\frac{\sin z}{1+z} = \frac{\sin(z+1)\cos 1 - \cos(z+1)\sin 1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+1)^{2n}}{(2n+1)!}\cos 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+1)^{2n-1}}{(2n)!}\sin 1 \ .$$

Het hoofddeel is: $-\frac{\sin 1}{1+z}$; de reeks der positieve machten convergeert overal, zoals de reeksen van sinus en cosinus. Het convergentiegebied is het complexe vlak met uitzondering van $z = -1$.

4. Als $z = e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ dan is $\log z = \log|z| + i \arg z = i\varphi$.
De integraal is dus

$$\int_{-\pi}^{\pi} i\varphi . ie^{i\varphi} d\varphi = \left[i\varphi e^{i\varphi} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} ie^{i\varphi} d\varphi = -2\pi i \quad \text{(zie ook opgave N).}$$

5. a) $e^{\pi z^{-2}} - 1 = 0$ als $e^{\pi z^{-2}} = e^{2k\pi i}$, k geheel.

$z^{-2} = 2ki = 2k.e^{\frac{1}{2}\pi i + 2\ell\pi i}$ $\quad k \neq 0 \quad \ell$ geheel

$z^2 = \frac{1}{2k} e^{-\frac{1}{2}\pi i - 2\ell\pi i} = \frac{1}{2|k|} e^{-\frac{1}{2}\pi i + m\pi i}$ $\quad$ m geheel

$z = \frac{1}{\sqrt{2|k|}} e^{-\frac{1}{4}\pi i + \frac{1}{2}m\pi i}$.

Deze punten liggen telkens met 4 tegelijk op een afstand $\frac{1}{\sqrt{2|k|}}$ van 0, op de bissectricen van de assen.

Het punt $z = \infty$ is ook een nulpunt want $f(\frac{1}{w}) = \frac{(e^{\pi w^2} - 1)w}{1 - w}$ heeft voor $w = 0$ een (drievoudig) nulpunt.

b) $z = 1$ is een pool van de eerste orde, want

$$\lim_{z \to 1} (z-1)f(z) = e^{\pi} - 1 \neq 0 \; ; \quad \text{het residu is } e^{\pi} - 1.$$

$z = 0$ is een essentieel singulier punt, want het is een essentieel singulier punt van $e^{\pi z^{-2}}$. Het residu volgt uit dat bij $z = \infty$.

Het residu in $z = \infty$: $\frac{-1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z)dz$ met $R > 1$ vinden we met de schatting

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{e^{\pi z^{-2}} - 1}{z - 1} dz \right| \leq 2\pi R \frac{\max\left| e^{\frac{\pi}{R^2}(\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi)} - 1 \right|}{R - 1} .$$

Voor $R \to \infty$ gaat het rechterlid naar 0. De integraal links is onafhankelijk van R. Dus moet de integraal 0 zijn d.w.z. $\{\text{Residu } f(z)\}_{z=\infty} = 0$.

Omdat $\quad \text{Residu}_{z=0} + \text{Residu}_{z=1} = 0 \quad (= -\text{Residu}_{z=\infty})$

volgt nu $\text{Residu}_{z=0} = -e^{\pi} + 1$.

Men vindt dit ook door de coëfficiënt van z^{-1} te zoeken in

$$-\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!z^{2n}}\right) .$$

Dat dit geoorloofd is, staat niet in het dictaat, en vraagt een motivering die hier achterwege wordt gelaten.

Betrekkelijk eenvoudig is de volgende bepalingswijze.

$$\{\text{Residu } f(z)\}_{z=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n\left(e^{\pi z^{-2}} - 1\right)dz \qquad 0 < \rho < 1 .$$

De reeks is in een ringgebied $R: 0 < \rho_0 \leq |z| \leq a < 1$ uniform convergent want daar is

$$\left|z^n\left(e^{\pi z^{-2}} - 1\right)\right| \leq a^n M$$

waarin M het maximum van $|e^{\pi z^{-2}} - 1|$ in R voorstelt, en $\sum_{n=0}^{\infty} a^n M$ is een convergente reeks.

We mogen sommatie en integratie dus verwisselen. Nu is

$$\int_{|z|=\rho} z^n\left(e^{\pi z^{-2}} - 1\right)dz = \begin{cases} 0 \text{ als } n = 2k \\ 2\pi i \dfrac{\pi^k}{k!} \text{ als } n = 2k - 1 \end{cases} .$$

We vinden dus voor het $\text{Residu}_{z=0}$: $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k}{k!} = 1 - e^{\pi}$.

April 1965

1. Voor welke waarden van z is de Laurentreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{1 + (-1)^n 3^{n-1}\} z^{-n}$$

convergent?

De som van de reeks noemen we f(z). Bepaal f(z).

Zet f voort in de rest van het complexe vlak en bepaal de Laurentreeks-ontwikkeling van f om z = 0 die in een omgeving van z = 2 convergeert.

2. Bepaal $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{1-z^2}\,dz$

waarin C de van onder naar boven doorlopen imaginaire as voorstelt.

3. De functie f is holomorf voor $z \neq 0$. Verder is gegeven dat

$$\lim_{z \to 0} z^2 f(z) = 0 \quad .$$

Zij C_ρ de halve cirkel met 0 als middelpunt en straal ρ (doorlopen in positieve richting, in het bovenhalfvlak gelegen).

Bewijs dat $\displaystyle\lim_{\rho \to 0} \int_{C_\rho} f(z)dz$ bestaat.

4. Zij C_z het lijnstuk met 0 en z als eindpunten. We definiëren de functie f door

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{C_z} \frac{\zeta^n}{n}\, d\zeta \quad \text{(als de reeks convergeert).}$$

a) Voor welke waarden van z is f(z) hierdoor gedefinieerd?

b) Mag de volgorde van sommatie en integratie worden verwisseld?

c) Kan f buiten het in a) bedoelde gebied analytisch worden voortgezet?

Oplossingen

1. Door $z^{-1} = w$ te stellen, verkrijgt men een machtreeks met

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{n-1} + (-1)^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3} + \left(\frac{-1}{3}\right)^n} = 3 \quad .$$

De reeks is dus convergent voor $|w| < \frac{1}{3}$, de Laurentreeks dus voor $|z| > 3$.
De som is

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-3}{z}\right)^n = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1+3z^{-1}} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3} = f(z) \quad .$$

Daardoor wordt de oorspronkelijke reeks analytisch voortgezet in het gebied binnen $|z| = 3$, met uitzondering van $z = 1$.

Om $z = 0$ laat $\frac{1}{z-1}$ zich ontwikkelen in een Laurentreeks die voor $z = 2$ convergeert: $\frac{1}{z-1} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$.

Daarentegen laat $\frac{1}{z+3}$ zich in een Taylorreeks ontwikkelen met convergentiestraal 3, dus convergeert voor $z = 2$:

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{3}\right)^n \quad .$$

Voor $f(z)$ hebben we dus om $z = 0$ en voor $z = 2$ de Laurentreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1} z^n \quad .$$

2. Door $z = iy$ te stellen wordt de integraal

$$i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iy}}{1+y^2}\,dy = i \cdot 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} = \pi i e^{-1} \quad .$$

Aan de voorwaarden voor toepassing van de betreffende residustelling is namelijk voldaan:

1) $\lim \frac{1}{1+z^2} = 0$, uniform in arg z, als $z \to \infty$, immers $\left|\frac{1}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{|z|^2 - 1} < \varepsilon$ als $|z| > \sqrt{1 + \varepsilon^{-1}}$ (waarin arg z niet voorkomt).

2) $\frac{1}{1+z^2}$ heeft in het bovenvlak slechts één pool en geen singulariteit op de reële as.

3) De integraal bestaat want $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2}$ bestaat, dus ook $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos y}{1+y^2} dy$ en $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{1+y^2} dy$ (= 0).

3. f heeft voor alle $z \neq 0$ een Laurentontwikkeling $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Omdat $\lim_{z \to 0} z^2 f(z) = 0$ is 0 géén essentieel singulier punt, géén pool van een orde ≥ 2, maar óf een pool van de eerste orde óf een ophefbare singulariteit. Dus

$$f(z) = \frac{a_1}{z} + h(z) \quad \text{waarin } h(z) \text{ overal holomorf.}$$

Nu vinden we

$$\int_{C_\rho} f(z)dz = \int_0^\pi [a_1 \rho^{-1} e^{-i\varphi} + h(\rho e^{i\varphi})] i\rho e^{i\varphi} d\varphi = \pi a_1 i + i\rho \int_0^\pi h(\rho e^{i\varphi}) e^{i\varphi} d\varphi \; .$$

Dit geeft

$$\left| \int_{C_\rho} f(z)dz - \pi a_1 i \right| \leq \rho \cdot \pi \cdot \max |h(z)| \qquad (z \text{ op } C_\rho) \; .$$

Voor $\rho \to 0$ blijft $\max|h|$ begrensd, dus gaat het rechterlid naar 0, maar dat wil juist zeggen dat de gestelde limiet bestaat (en $\pi a_1 i$ is).

4. a) $$\int_{C_z} \frac{\zeta^n}{n} d\zeta = \frac{z^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{0^{n+1}}{n(n+1)} \; .$$

Dus is f(z) gedefinieerd als $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)}$ convergeert; dat is voor $|z| \leq 1$, want $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ is convergent.

b) Bij de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n}$ mag men binnen het convergentiegebied, voor $|\zeta| \leq a < 1$, sommatie en integratie verwisselen (de reeks is daar namelijk uniform convergent). Dat betekent hier: als $|\zeta| < 1$, zodat C_z geheel binnen de eenheidscirkel blijft, dan mag integratie en sommatie worden verwisseld; dan is dus

$$f(z) = \int_{C_z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n} \, d\zeta = \int_{C_z} g(\zeta) d\zeta \quad .$$

c) Voor reële $\zeta = x$, tussen -1 en 1, geldt

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) \quad .$$

Als C_x loopt van 0 naar x, $|x| < 1$, dan geldt dus

$$f(x) = \int_0^x -\log(1-t)dt = (1-x)\log(1-x) + x \quad .$$

De corresponderende functie $f^*(z) = (1-z)\log(1-z) + z$ is holomorf in het gehele complexe vlak, met snede langs $x \geqslant 1$ (dit is de meest voor de hand liggende snede; het zou anders kunnen). Voor reële $z = x$, $|x| < 1$, geldt $f^*(x) = f(x)$. Dus is $f^*(z)$ een analytische voortzetting buiten $|z| \leqslant 1$.

Juni 1965

1. Bepaal $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi}{2 + \cos\varphi}\, d\varphi$

2. Zij C de cirkel met vergelijking $|z| = \frac{3\pi}{2}$ (doorlopen in positieve richting). Bepaal

$$\int_C \frac{dz}{z^2 \sin z} \quad .$$

3. De functie f is holomorf voor alle waarden van z. De functie heeft een tweevoudige pool in $z = \infty$.
Bewijs dat f een polynoom van de tweede graad is.

4. Gegeven is

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1} \qquad \text{voor} \quad x > 1 \ .$$

We zetten f analytisch voort in het complexe z-vlak langs de cirkel met vergelijking $|z - 2| = 2$, in positieve richting, te beginnen in $z = 4$.
Gevraagd de waarde van f in $z = 0$ na de voortzetting.

Oplossingen

1. $$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi}{2 + \cos\varphi}\, d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\varphi}{2 + \cos\varphi}\, d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi}{2 + \cos\varphi}\, d\varphi \ ;$$

de laatste toevoeging van een oneven functie, geïntegreerd over een t.o.v. 0 symmetrisch interval, verandert de integraal namelijk niet, en geeft aanmerkelijke vereenvoudiging bij de substitutie $e^{i\varphi} = z$, $ie^{i\varphi} d\varphi = dz$:

$$I = -i \int_{|z|=1} \frac{zdz}{2 + \frac{1}{2}(z + z^{-1})} = -2i \int_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{z^2 + 4z + 1} = -2i \int_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{(z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3}}$$

De integrand heeft blijkbaar één pool nl. $-2 + \sqrt{3}$ binnen $|z| = 1$. Volgens de residustelling geldt dus

$$I = 4\pi \operatorname{Res}_{-2+\sqrt{3}} \frac{z^2}{(z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3})} = 4\pi \frac{(-2+\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}} = (-8 + \tfrac{14}{3}\sqrt{3})\pi \ .$$

2. De integrand heeft binnen C drie polen:

$z = 0$: drievoudige pool want $\lim\limits_{z\to 0} z^3 \dfrac{1}{z^2 \sin z} = 1$ d.i. $\neq 0$.

$z = \pi$: enkelvoudige pool want

$$\lim_{z\to\pi} (z-\pi)\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{\pi^2} \lim_{z\to\pi} \frac{z-\pi}{\sin(\pi - z)} = -\frac{1}{\pi^2} = \text{residu in } \pi .$$

$z = -\pi$: eveneens enkelvoudige pool met residu $-\dfrac{1}{\pi^2}$.

Volgens de residustelling is de integraal

$$2\pi i\left(\mathrm{Res}_0 \frac{1}{z^2 \sin z} - \frac{2}{\pi^2}\right) .$$

Om het residu in $z = 0$ te bepalen schrijven we er voor

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho<\pi} \frac{dz}{z^2 \sin z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} \frac{z/\sin z}{z^3} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^3} dz = \frac{1}{2!} f''(0)$$

waarin $f(z)$ voorstelt de in 0 holomorfe functie $\dfrac{z}{\sin z} = \dfrac{1}{h(z)}$ met $h(z) =$ $= 1 - z^2/3! + z^4/5! -$ eveneens holomorf in 0 en aldaar $\neq 0$.

Te bepalen dus $\left(\dfrac{1}{h}\right)''_{z=0} = \left(-\dfrac{h'}{h^2}\right)'_{z=0} = \dfrac{-h''h^2 + 2h(h')^2}{h^4}\Bigg|_{z=0} = \dfrac{1}{3} + 0$.

De integraal is dus $2\pi i\left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{\pi^2}\right)$.

3. Omdat f holomorf is voor alle z is er een Taylorreeks

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

We voeren nu in $g(w) = f(1/w) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w^{-n}$.

Als $f(z)$ in $z = \infty$ een tweevoudige pool heeft, dan wil dat zeggen dat $g(w)$ in 0 een tweevoudige pool heeft.

Dus $g(w) = a_0 + a_1 w^{-1} + a_2 w^{-2} = f(1/w)$.

Dit geeft $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$.

4. De functie $z^3 + 1$ heeft nulpunten in -1, $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Deze punten zijn singuliere punten van $e^{\frac{1}{3}\log(z^3+1)}$. De halve cirkel $z = 2 + 2e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, gaat tussen -1 en $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ door. In het vraagstuk is sprake van analytische voortzetting langs die halve cirkel. We beschouwen daarom een volle omgeving G ervan, zó smal dat de punten -1 en $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ er buiten liggen.

In G ligt $z = 4$ en een reële omgeving daarvan. Daar is $f(x)$ bepaald en gelijk aan $e^{\frac{1}{3}\log(x^3+1)}$. Deze functie gaan we in G analytisch voortzetten.

Voorop staat dan de vraag: als z de halve cirkel doorloopt, vanaf $z = 4$ $(\varphi = 0)$, wat is dan de baan van $z^3 + 1$?

Duidelijk is dat z^3 een spiraal beschrijft, die bij 64 begint en de negatieve reële as bereikt als $\arg z = \frac{\pi}{3}$ d.i. als $z = 2 + 2\cos\frac{2\pi}{3} + 2i\sin\frac{2\pi}{3} = 1 + i\sqrt{3}$; dan is $z^3 = -8$; daarna komt z^3 in het derde kwadraat om, als z tot 0 nadert, d.w.z. arg z tot $\frac{\pi}{2}$, naar 0 te gaan, terwijl $\arg z^3$ nadert tot $\frac{3\pi}{2}$.

De baan van $z^3 + 1$ is dezelfde spiraal, één eenheid naar rechts verschoven, beginnend in 65, via -7 eindigend in 1.

De bij $z^3 + 1$ behorende hoofdwaarde $\log(z^3+1)$ is een analytische functie van z, zolang $0 \leq \arg(z^3+1) \leq \pi$, d.i. $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$ (tekening!); dan overschrijdt $z^3 + 1$ de negatieve reële as; zet men nu $\log(z^3+1)$ analytisch voort (met: hoofdwaarde $\log(z^3+1) + 2\pi i$), dan bereikt deze $\log(z^3+1)$ de eindwaarde $\log 1 = 2\pi i$.

Aldus is een analytische functie $f(z) = e^{\frac{1}{3}\log(z^3+1)}$ bepaald, die in de reële omgeving van 4 met $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1}$ overeenstemt (dus deze analytisch voortzet) en die bij $z = 0$ de waarde $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ oplevert. Dit is de gevraagde waarde van f.

Oktober 1965

1. Bepaal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}dx}{(x-i)(x-2i)^2}$.

Als U stellingen gebruikt, ga dan na of aan de voorwaarden hiervan is voldaan.

2. Bereken de waarde van de integraal

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1 + a\cos t}{1 + 2a\cos t + a^2}\,dt$$

voor $|a| < 1$ en voor $|a| > 1$.

3. Het gebied G bestaat uit alle z met $-2\pi < \operatorname{Re} z < 2\pi$ behalve de reële punten van de gesloten intervallen $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ en $[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$. Bewijs dat de integraal

$$\int_0^z \frac{dw}{\cos w}$$

een functie f(z) in G bepaalt, die onafhankelijk is van de integratieweg.

4. Bepaal bij de functie

$$f(z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z} + \frac{z^2+1}{z^2-1}$$

1e de singuliere punten en hun aard ($z = \infty$ blijft buiten beschouwing)

2e de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ voor f(z).

Oplossingen

1. $$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}dx}{(x-i)(x-2i)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} f(x)dx \;.$$

De aldus bepaalde functie f(z) voldoet aan

1) $f(z) \to 0$, uniform in arg z, als $z \to \infty$, want

$$|f(z)| = \frac{1}{|z-i|\,|z-2i|^2} \leq \frac{1}{(|z|-1)(|z|-2)^2} \leq \frac{1}{|z|-1} \quad \text{als } |z| > 3\;;$$

dus $|f(z)| < \varepsilon$ als $|z| > 1 + \frac{1}{\varepsilon}$ (hierin komt arg z niet voor).

2) $f(z)$ is analytisch op en boven de reële as op een eindig aantal singulariteiten na, niet op de as gelegen.
Inderdaad: er zijn alleen de polen i en 2i.

3) De integraal bestaat want $\lim_{R\to\infty} \int^{R}$ en $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}$ bestaan

$\left[\frac{e^{ix}}{(x-i)(x-2i)^2} = O\left(\frac{1}{x^3}\right), \ x \to \pm\infty\right]$.

Omdat aan de voorwaarden voldaan is geldt

$$I = 2\pi i\left[\{\text{Residu } e^{iz}f(z)\}_{z=i} + \{\text{Residu } e^{iz}f(z)\}_{z=2i}\right] .$$

$$\text{Res}_{z=i} = \lim_{z\to i} (z-i)e^{iz}f(z) = e^{-1}/(-i)^2 = -e^{-1} .$$

$$\text{Res}_{z=2i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-2i|=\rho} \frac{e^{iz}/(z-i)}{(z-2i)^2}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-2i|=\rho} \frac{\varphi(z)dz}{(z-2i)^2}$$

waarin $\varphi(z)$ analytisch is in 2i; dus

$$\text{Res}_{z=2i} = \frac{1}{1!}\,\varphi'(2i) = \left[\frac{ie^{iz}(z-i) - e^{iz}}{(z-i)^2}\right]_{z=2i} = \frac{e^{-2}(-1-1)}{i^2} = 2e^{-2} .$$

$$I = 2\pi i(2e^{-2} - e^{-1}) .$$

2. Door de substitutie $z = e^{it}$, $dz = ie^{it}dt$, $dt = \frac{dz}{iz}$ wordt

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1+\frac{1}{2}a(z+z^{-1})}{1+a(z+z^{-1})+a^2}\,\frac{dz}{iz} = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{(2z+a(z^2+1))dz}{(a+(1+a^2)z+az^2)z} =$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{(2z+a(z^2+1))dz}{a(z+a)(z+a^{-1})z}$$

$|a| < 1$ $\quad I = \pi(\text{Res}_{z=0} + \text{Res}_{z=-a}) = \pi\left(1 + \frac{-2a+a^3+a}{-a^2(-a+a^{-1})}\right) = 2\pi .$

(a = 0 apart bekijken; geeft kennelijk ook $I = 2\pi$.)

$|a| > 1$ $\quad I = \pi(\text{Res}_{z=0} + \text{Res}_{z=-a^{-1}}) = \pi\left(1 + \frac{-a^{-1}+a}{-(-a^{-1}+a)}\right) = 0 .$

Opmerking. Veel vlugger gaat (toevoegen van oneven functie)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(1+ae^{it})dt}{1 + a(e^{it}+e^{-it}) + a^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + ae^{-it}} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}dt}{e^{it} + a} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z+a} .$$

Dit geeft voor $|a| < 1$: $I = \frac{1}{i} 2\pi i = 2\pi$

$|a| > 1$: $I = 0$.

3. Met w_1 en w_2 duiden we een weg aan van 0 naar z resp. een weg van z naar 0 (geen van beide over $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ of $[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$). Dan is $w_1 + w_2$ een contour die een zeker aantal malen om $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ en/of $[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ heen loopt. Integreert men $\frac{1}{\cos w}$ langs een weg die $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ éénmaal positief omsluit, dan levert dit

$$2\pi i\left(\operatorname{Res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos w} + \operatorname{Res}_{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\cos w}\right) .$$

Nu is $\lim\limits_{w\to\frac{\pi}{2}} (w - \frac{\pi}{2})\frac{1}{\cos w} = \lim\limits_{w\to\frac{\pi}{2}} \frac{w - \frac{\pi}{2}}{\sin(\frac{\pi}{2} - w)} = -1$, d.w.z. $\frac{1}{\cos w}$ heeft in $\frac{\pi}{2}$ een pool van de eerste orde met residu -1.

Analoog $\lim\limits_{w\to\frac{3\pi}{2}} (w - \frac{3\pi}{2})\frac{1}{\cos w} = \lim\limits_{w\to\frac{3\pi}{2}} \frac{w - \frac{3\pi}{2}}{\sin(w - \frac{3\pi}{2})} = 1$.

De integraal is dus 0.

Analoog bij $[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ (cos w is even!).

We vinden dus langs de weg $w_1 + w_2$ integrerend: 0; d.w.z. langs verschillende wegen w_1 en $-w_2$ van 0 naar z: dezelfde uitkomst. De integraal in kwestie is dus onafhankelijk van de integratieweg.

4. 1) Omdat $\sin \pi z = 0$ voor $z = k$ (geheel), komen allereerst de punten $z = 0$ en $z = \pm 1$ voor nader onderzoek in aanmerking.

$z = 0$. Hier bestaat $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$. Dus ophefbare singulariteit.

$z = 1$. Stel $z = 1 + w$, dan is $f(z) = g(w) = \frac{\pi w + \pi}{-\sin \pi w} + 1 + \frac{1}{w} - \frac{1}{w+2}$.
Voor $w \to 0$ gaan twee termen naar ∞, maar tezamen geven zij

$$\lim_{w\to 0} \left(\frac{-\pi}{\sin w\pi} + \frac{1}{w}\right) = \lim_{w\to 0} \frac{\sin \pi w - \pi w}{w \sin \pi w} = \lim_{w\to 0} \frac{(\pi w)^3(-1/3! + \pi^2 w^2/5!\ldots)}{w \sin \pi w} =$$

$$= \lim_{w\to 0} \pi^2 w(-1/3! + \ldots) = 0 \ .$$

Dus bestaat $\lim_{w\to 0} g(w) = \lim_{z\to 1} f(z)$ d.w.z. ook $z = 1$ is een ophefbare singulariteit.
Analoog -1: $f(z)$ is een even functie.

Opmerking. Nagaan dat het residu in $z = 1$ nul is, bewijst niets. Zo heeft bijv. $\frac{1}{z^2}$ in $z = 0$ ook het residu 0, terwijl $z = 0$ géén ophefbare singulariteit is.

De overige punten $z = k$ (geheel) zijn polen van de eerste orde want

$$\lim_{z\to k} (z-k)f(z) = \lim_{z\to k} \frac{(z-k)\pi z}{\sin \pi(z-k)(-1)^k} = (-1)^k k \neq 0 \ .$$

2) Binnen een cirkel met straal 2 heeft $f(z)$ blijkens het voorgaande alleen ophefbare singulariteiten.
De punten ± 2 daarentegen zijn polen.

Dus heeft de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de convergentiestraal 2.

Januari 1966

1. In welk gebied is de Laurentreeks

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

convergent, als $c_n = 1$ $(n \geqslant 0)$, $c_n = 3^n$ $(n < 0)$?
Met welke rationale functie stemt de som van deze reeks overeen?
Bepaal van deze functie het residu in $z = \infty$.

2. Bepaal $\displaystyle\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{3iz}}{z^2}\,dz$ voor 1) $a > 0$; 2) $a < 0$.

Hierbij is de integratieweg de rechte parallel aan de reële as door ia doorlopen van links naar rechts.
Aanwijzing: Herleid dóor een geschikte substitutie de integraal tot de vorm

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx \quad .$$

3. Gegeven de functie $g(z) = \dfrac{z-1}{z^3}$ $(z \neq 0)$, en een getal $M > 0$.

Bepaal een getal ρ (als uitdrukking in M) zó, dat voor alle z in de gereduceerde ρ-omgeving van 0 geldt: $|g(z)| \geqslant M$.

4. Bereken $\displaystyle\int_k f(z)\,dz$ in de volgende gevallen:

a) k is de eenheidscirkel, éénmaal doorlopen in positieve richting, te beginnen bij -1, $f(z)$ is de hoofdwaarde van $z^{1/3}$;

b) k is de eenheidscirkel, éénmaal doorlopen in positieve richting, te beginnen bij $+1$, $f(z)$ is in het bovenhalfvlak de hoofdwaarde van $z^{1/3}$, in het benedenhalfvlak de analytische voortzetting daarvan met inachtneming van een snede langs de <u>positieve</u> reële as.

1. De reeks bestaat uit $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, convergent voor $|z| < 1$, en het hoofddeel $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}z^{-n}$, convergent voor $|3^{-1}z^{-1}| < 1$. De reeks convergeert dus in de ring $\frac{1}{3} < |z| < 1$.
De som is daar $\frac{1}{1-z} + \frac{3^{-1}z^{-1}}{1-3^{-1}z^{-1}} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{3z-1}$.
Deze functie heeft polen $z = 1$ en $z = \frac{1}{3}$ met residuen -1 resp. $\frac{1}{3}$. Het residu in $z = \infty$ is dus

$$-(-1 + \tfrac{1}{3}) = \tfrac{2}{3}$$

zoals volgt uit de definitie

$$\{\operatorname{Res} f(z)\}_{z=\infty} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z)dz$$

waarin R zó groot is, dat buiten de cirkel geen singulariteiten liggen.

2. 1) $a > 0$. Stel $z = x + ia$, dan wordt de integraal

$$e^{-3a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix}}{(x+ia)^2}\,dx = e^{-3a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{3ix} f(x)dx \quad .$$

De aldus bepaalde functie $f(z)$ voldoet aan

1. $f(z) \to 0$, uniform in arg z, als $z \to \infty$ want

$$|f(z)| = \frac{1}{|z+ia|^2} \leq \frac{1}{(|z|-a)^2} < \varepsilon \quad \text{als} \quad |z| > a + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad ,$$

waarin arg z niet voorkomt.

2. $f(z)$ heeft op en boven de reële as geen singulariteiten (de enige is een pool in $-ia$).

3. De integraal bestaat want $\lim_{R\to\infty} \int^{R}$ en $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}$ bestaan.

$$\left[\frac{e^{3ix}}{(x+ia)^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{voor } x \to \pm\infty\right] .$$

De integraal is dus 0.

2) $a < 0$. Nu is er één pool van de tweede orde in het bovenhalfvlak, nl. $-ia$.
We vinden daar

$$\int_{|z+ia|=\rho} \frac{e^{3iz}}{(z+ia)^2}\,dz = \int_{|z+ia|=\rho} \frac{\varphi(z)}{(z+ia)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\,\varphi'(-ia) = 2\pi i \cdot 3ie^{+3a}$$

Het antwoord is dus -6π.

3. $|g(z)| = \frac{|z-1|}{|z|^3} \geq \frac{||z|-1|}{|z|^3}$; dit is $\frac{1-|z|}{|z|^3}$ als $|z| < 1$; en als we $|z| \leq \frac{1}{2}$ nemen is $\frac{1-|z|}{|z|^3} \geq \frac{\frac{1}{2}}{|z|^3}$. Dus

$$|g(z)| \geq \frac{\frac{1}{2}}{|z|^3} \quad \text{als} \quad |z| \leq \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{|z|^3} \geq M \quad \text{als} \quad |z| \leq \sqrt[3]{1/2M} .$$

Dus als we $|z| \leq \min(\frac{1}{2}, \sqrt[3]{1/2M})$ nemen, dan is $|g(z)| \geq M$.

4. a) De hoofdwaarde van $z^{1/3}$ is $e^{\frac{1}{3}\log z}$ met hoofdwaarde $\log z$; en dit is $i\varphi$ als $z = e^{i\varphi}$ en $-\pi < \varphi \leq \pi$.
De gevraagde integraal is dus

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{1}{3}i\varphi} \cdot ie^{i\varphi} d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{4}{3}i\varphi} i d\varphi = \left[\frac{3}{4} e^{\frac{4}{3}i\varphi}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{3}{4}\left(e^{\frac{4}{3}i\pi} - e^{-\frac{4}{3}i\pi}\right) =$$

$$= \frac{3i}{2}\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{3i}{2}\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{3\sqrt{3}\,i}{4} .$$

b) Voor $0 \leq \varphi \leq \pi$ geldt $z^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}i\varphi}$; deze functie blijft bij analytische voortzetting in een gebied, dat de beneden helft van de cirkel $z = e^{i\varphi}$ (dus $\pi < \varphi < 2\pi$) omvat, de voorstelling $e^{\frac{1}{3}i\varphi}$ behouden. De integraal wordt dus

$$\int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{3}i\varphi} \cdot ie^{i\varphi} d\varphi = \left[\frac{3}{4} e^{\frac{4}{3}i\varphi}\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{4}\left(e^{\frac{8}{3}\pi i} - 1\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\left(e^{\frac{2}{3}\pi i} - 1\right) = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - 1\right) = -\frac{9}{8} + \frac{i3\sqrt{3}}{8} .$$

Analytische voortzetting van $e^{\frac{1}{3}\log z} = e^{\frac{1}{3}\log|z| + \frac{1}{3}i\arg z}$ over de negatieve reële as komt neer op gebruik van $\log z = \int_K \frac{d\zeta}{\zeta} = i \arg z$ (K cirkelboog vanaf 1 positief doorlopen tot z), uiteraard zónder discontinuïteit in arg z.

April 1966

1. Bereken met behulp van residuen de integraal

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos\varphi d\varphi}{1 - i\sqrt{3}\cos\varphi} .$$

2. Bepaal van de functie $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ de coëfficiënten c_n en d_n van de Laurent-reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-1-i)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n(z-1-i)^{-n} ,$$

die convergeert in een ringgebied, dat het punt $z = 0$ bevat.
(Suggestie: gebruik bijv. breuksplitsing.)

3. Theorievraag: $f(z)$ is analytisch voor $|z| < 2$, heeft in $z = 0$ een tweevoudig nulpunt, en heeft verder geen nulpunten. Leid af, dat

$$\int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 4\pi i .$$

4. Beschouw $F(z) = \int_{\pi/2}^{z} \frac{d\zeta}{\sin\zeta}$, waarbij $0 < \operatorname{Re} z < \pi$, terwijl de integratieweg eveneens tussen de verticalen $x = 0$ en $x = \pi$ blijft (de sinusfunctie heeft uitsluitend reële nulpunten). Toon aan dat

1) $F(z)$ door deze definitie ondubbelzinnig bepaald is.

2) $F(z)$ de analytische voortzetting is van de op $0 < x < \pi$ bepaalde functie $\log\tan\frac{x}{2}$.

3) $F(\frac{\pi}{2} + iy) = 2i \arctan e^y - \frac{\pi i}{2}$ (y reëel).

Oplossingen

1. De substitutie $e^{i\varphi} = z$, $ie^{i\varphi}d\varphi = dz$, $d\varphi = \frac{dz}{iz}$ geeft

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\varphi d\varphi}{1 - i\sqrt{3}\cos\varphi} = \int_{|z|=1} \frac{z+z^{-1}}{2 - i\sqrt{3}(z+z^{-1})} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{(z^2+1)dz}{(\sqrt{3}z^2 + 2iz + \sqrt{3})z}$$

We ontbinden de kwadratische factor in de noemer

$$\sqrt{3}(z^2 + \frac{2i}{\sqrt{3}} z - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}) = \sqrt{3}(z + \frac{i}{\sqrt{3}} + \frac{2i}{\sqrt{3}})(z + \frac{i}{\sqrt{3}} - \frac{2i}{\sqrt{3}}) = \sqrt{3}(z + i\sqrt{3})(z - \frac{i}{\sqrt{3}}) .$$

De integrand heeft binnen $|z| = 1$ twee polen van de eerste orde, nl. 0 en $i/\sqrt{3}$, met residuen $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en $-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}$; dus

$$I = \int_{|z|=1} \frac{(z^2+1)dz}{\sqrt{3}(z+i\sqrt{3})(z-i/\sqrt{3})z} = \frac{2\pi i}{\sqrt{3}}(1-\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi i}{\sqrt{3}} .$$

Opmerking. De integraal verandert niet wanneer men bij de integrand $i \sin\varphi/(1 - i\sqrt{3}\cos\varphi)$ (oneven functie) telt zodat de teller $e^{i\varphi}$ wordt. De integraal in z wordt dan eenvoudiger:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{i + \frac{1}{2}\sqrt{3}(z+z^{-1})} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{2z\,dz}{(z+i\sqrt{3})(z-i/\sqrt{3})} = \frac{2\pi i}{\sqrt{3}} \frac{2i/\sqrt{3}}{4i/\sqrt{3}} = \frac{\pi i}{\sqrt{3}} .$$

2. $$f(z) = \frac{1}{(1-z)(1+z)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-z} + \frac{\frac{1}{2}}{1+z} .$$

De pool -1 van $\frac{\frac{1}{2}}{1+z}$ ligt verder van $1+i$ (dat is het punt waar<u>omheen</u> we moeten ontwikkelen) dan 0; dus nemen we de Taylorontwikkeling

$$\frac{\frac{1}{2}}{1+z} = \frac{\frac{1}{2}}{2+i+(z-1-i)} = \frac{\frac{1}{2}}{2+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{z-1-i}{2+i})^n .$$

De pool 1 van $\frac{\frac{1}{2}}{1-z}$ daarentegen ligt dichterbij $1+i$ dan 0; hier nemen we dus de reeks der negatieve machten

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-z} = \frac{\frac{1}{2}}{-i-(z-1-i)} = \frac{-\frac{1}{2}/(z-1-i)}{1+i/(z-1-i)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{(z-1-i)^n} .$$

We hebben dus gevonden: $c_n = \frac{\frac{1}{2}}{2+i}(\frac{-1}{2+i})^n = -\frac{1}{2}(\frac{-1}{2+i})^{n+1} = -\frac{1}{2}(\frac{-2+i}{5})^{n+1}$

$$d_n = -\tfrac{1}{2}(-i)^{n-1} .$$

3. $f(z)$ heeft rond $z = 0$ de Taylorontwikkeling $\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $a_2 \neq 0$. Hieruit volgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots}{a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots} = \frac{1}{z} \frac{2a_2 + 3a_3 z + \dots}{a_2 + a_3 z + \dots} = \frac{\varphi(z)}{z}$$

waarin $\varphi(z)$ analytisch is voor $|z| < 2$ (teller en noemer analytisch en noemer $\neq 0$) en $\varphi(0) = 2$. Dus

$$\int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_{|z|=1} \frac{\varphi(z)}{z}\,dz = 2\pi i\varphi(0) = 4\pi i \quad .$$

4\. 1) De integrand is tussen de verticalen $x = 0$ en $x = \pi$ analytisch (de noemer is dat en wordt niet 0). Dus is de integraal onafhankelijk van de weg van $\frac{\pi}{2}$ naar z (hoofdstelling der complexe integratie). De definitie is dus ondubbelzinnig.

2) Op $0 < x < \pi$ geldt

$$\int_{\pi/2}^{x} \frac{d\zeta}{\sin\zeta} = \left[\log\tan\frac{\zeta}{2}\right]_{\zeta=\pi/2}^{\zeta=x} = \log\tan\frac{x}{2} \quad .$$

Op $0 < x < \pi$ geldt dus $F(x) = \log\tan\frac{x}{2}$.
Er kan geen andere analytische functie $F^*(z)$ bestaan waarvoor $F^*(x) = \log\tan\frac{x}{2}$. Dan zouden immers $F^*(z)$ en $F(z)$ beide analytisch zijn in een gebied G dat $0 < x < \pi$ bevat en gelijk in tenminste één punt (zelfs alle reële punten) van elke omgeving (in G) van $\frac{\pi}{2}$ (of een ander punt van $0 < x < \pi$); volgens de identiteitsstelling kunnen $F^*(z)$ en $F(z)$ dus niet verschillen in G.

3) $F(\frac{\pi}{2} + iy)$ heeft tot afgeleide naar y (kettingregel)

$$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} + iy)}\,i = \frac{i}{\cos(iy)} = \frac{2i}{e^{y} + e^{-y}} \quad .$$

Eveneens vinden we: $(2i \arctan e^{y})' = 2i\,\frac{e^{y}}{1+e^{2y}} = \frac{2i}{e^{y}+e^{-y}}$.

Verder geeft $y = 0$: $F(\frac{\pi}{2}) = 0$ resp. $2i \arctan 1 - \frac{\pi i}{2} = 0$. Het constante verschil tussen de functies is dus 0.

Juni 1966

1. Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-ix}}{(x^2+1)^2}\,dx$.

2. Stel $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ is de Laurentreeks van een functie f, die holomorf is voor $|z| > 1$ en in $z = \infty$ een tweevoudig nulpunt heeft (voor $|z| \leq 1$ is f *niet* gedefinieerd).

   a) Laat zien: $c_n = 0 \quad (n \geq -1)$
   $c_{-2} \neq 0$.

   b) Bewijs $\displaystyle\int_{|z|=R} f(z)dz = 0$ voor elke $R > 1$.

3. Bereken de limiet van $e^{\sqrt{z}}$, waarbij $\sqrt{z}$ de hoofdwaarde voorstelt, in twee gevallen:

   a) z nadert tot -1 langs de eenheidscirkel in het bovenhalfvlak,

   b) z nadert tot -1 langs de eenheidscirkel in het onderhalfvlak.

4. Theorievraag:
   a) Wat is een gehele functie?
   b) Noem en bewijs de stelling van Liouville over begrensde gehele functies.

Oplossingen

1. We kunnen de integraal herleiden tot de gedaante $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx$, met $\alpha > 0$,

door te substitueren $x = -u$; maar hier lukt het *ook* door er een integraal met waarde 0 (oneven integrand) van af te trekken:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-ix}}{(x^2+1)^2}\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx \quad .$$

Nu is $\displaystyle |f(z)| = \left|\frac{z}{(z^2+1)^2}\right| \leq \frac{|z|}{(|z|^2-1)^2} < \frac{(|z|+1)^2}{(|z|^2-1)^2} = \frac{1}{(|z|-1)^2} < \varepsilon$

als $\displaystyle |z| > 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Dus

a) $f(z) \to 0$, uniform in arg z (het gaat alléén om $|z|$), als $z \to \infty$.

Ook is voldaan aan:

b) $f(z)$ is holomorf op en boven de reële as, op een eindig aantal singulariteiten na, nl. één pool (van de tweede orde) bij $z = i$.

c) De integraal bestaat want $\lim\limits_{R\to\infty} \int_0^R$ en $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^0$ bestaan.

$\left[\frac{xe^{ix}}{(x^2+1)^2} = O\left(\frac{1}{x^3}\right) \text{ voor } x \to \pm\infty\right]$

Dus kunnen we I vinden uit

$$I = -2\pi i \left\{\text{Residu } f(z)e^{iz}\right\}_{z=i} .$$

Nu heeft $f(z)e^{iz}$ de vorm $\frac{\varphi(z)}{(z-i)^2} = \frac{ze^{iz}/(z+i)^2}{(z-i)^2}$ waarin $\varphi(z)$ holomorf is in $z = i$. Dit geeft

$$\text{Residu}_{z=i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-i|=\rho} \frac{\varphi(z)}{(z-i)^2}\, dz = \varphi'(z)_{z=i} = \left\{\frac{ze^{iz}}{(z+i)^2}\right\}'_{z=i} =$$

$$= \left\{\frac{(e^{iz} + ize^{iz})(z+i)^2 - 2(z+i)ze^{iz}}{(z+i)^4}\right\}_{z=i} = \frac{(e^{-1} - e^{-1})(-4) + 4e^{-1}}{16} = \frac{1}{4e}$$

Dus $\quad I = -\frac{\pi i}{2e}$.

2. a) Als $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ holomorf is voor $|z| > 1$, met tweevoudig nulpunt in $z = \infty$, dan is $g(w) = f(\frac{1}{w}) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} w^n$ holomorf in $|w| < 1$, met tweevoudig nulpunt in $z = 0$. Dus heeft $g(w)$ rond $w = 0$ een Taylorontwikkeling, beginnend met w^2, d.w.z. $c_{-n} = 0$ voor $n \leqslant 1$ en $c_{-2} \neq 0$.

b) De reeks $g(w) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_{-n} w^n$ is uniform convergent op en binnen elke cirkel $|w| = \rho < 1$, of wat hetzelfde is: de reeks $f(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$ is uniform convergent voor $|z| \geqslant R > 1$.

De integratie

$$\int_{|z|=R} \sum_{n=2}^{\infty} c_{-n} z^{-n} dz$$

kan dus term voor term worden uitgevoerd. Alle termen geven 0; daarmee is het gestelde bewezen.

3. Als $z = e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ dan is hoofdwaarde $\log z = \log|z| + i \arg z = i\varphi$, en dus is $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} i\varphi}$.

We moeten bepalen $\lim\limits_{\varphi \uparrow \pi} e^{\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2}}$ en $\lim\limits_{\varphi \downarrow -\pi} e^{\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2}}$. Vanwege de continuïteit der betrokken functies zijn deze limieten resp. $e^{0+i} = \cos 1 + i \sin 1$ en $e^{0-i} = \cos 1 - i \sin 1$.

4. Zie dictaat.

Ander bewijs voor Liouville.

Voor een gehele functie $f(z)$ vindt men voor willekeurige a en b

$$2\pi i(f(a) - f(b)) = \int_K \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - a} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - b}\right) d\zeta = \int_K \frac{(a-b)f(\zeta)}{(\zeta - a)(\zeta - b)}\, d\zeta \quad ,$$

waarin K bijv. een cirkel om $\frac{1}{2}(a+b)$ is met straal $R > \frac{1}{2}|a-b|$. Als $f(z)$ begrensd is, $|f(z)| < M$, dan volgt

$$|f(a) - f(b)| \leq R \, \frac{|a-b|M}{(R - \frac{1}{2}|a-b|)^2} \to 0 \quad \text{als} \quad R \to \infty \quad .$$

Dus $f(a) = f(b)$, d.w.z. $f(z)$ is constant.

Oktober 1966

1. Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x+i)(x-2i)}\,dx$.

2. Gegeven de functie $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z-k)(z-k-1)}$ $\quad (z \neq 0,1,2,\dots)$.

a) Bewijs dat $f(z)$ voor elke $z \neq 0,1,2,\dots$ een holomorfe functie is.

b) Bepaal het residu van $f(z)$ in $z = 0$ en in $z = n$ $(n = 1,2,3,\dots)$.

c) Toon aan dat de punten $z = n$ $(n = 1,2,3,\dots)$ ophefbare singulariteiten van $f(z)$ zijn. (Bedenk welke termen de singulariteit in $z = n$ veroorzaken.)

3. Theorievraag. Bewijs het volgende speciale geval van de identiteitsstelling: Als $f(z)$ en $g(z)$ analytisch zijn voor $|z| < 1$ en $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$ voor $n = 2,3,4,\dots$ dan stemmen $f(z)$ en $g(z)$ overeen voor alle z $(|z| < 1)$.

4. Laat $F(z)$ op het domein $|z| \leq 1$ gegeven zijn door $F(z) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{tz}-1}{t}\,dt$ (t reëel).

a) Motiveer dat $F(z)$ analytisch is voor $|z| < 1$.

b) Bepaal $F^{(n)}(0)$ en geef de machtreeksontwikkeling van $F(z)$ rond $z = 0$.

c) Leid uit het voorgaande af dat $F(z)$ analytisch kan worden voortgezet tot een gehele functie.

Oplossingen

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x+i)(x-2i)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})dx}{(x+i)(x-2i)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\frac{1}{2}}{(x+i)(x-2i)} + \frac{\frac{1}{2}}{(-x+i)(-x-2i)}\right)e^{ix}dx$$

$$= 2\pi i \ (\Sigma \text{ residuen in bovenhalfvlak}) = 2\pi i\left(\frac{e^{-2}}{6i} + \frac{e^{-1}}{6i}\right) = \frac{\pi}{3}\,(e^{-2} + e^{-1}) \ .$$

We gaan na dat $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx$ inderdaad aan de vereisten voor de aangegeven berekeningswijze voldoet:

1) $f(z)$ heeft alleen bij $2i$ en i polen in het bovenhalfvlak en is daar overigens, en ook op de reële as, holomorf.

2) $|f(z)| \leq \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{(|z|-1)(|z|-2)} < \frac{1}{|z|-2}$ voor $|z| > 2$; dus $|f(z)| < \varepsilon$ als $|z| > 2 + \varepsilon^{-1}$; dus als $z \to \infty$ dan $f(z) \to 0$, uniform in arg z, want in $|z| > 2 + \varepsilon^{-1}$ komt arg z niet voor.

3) De integraal bestaat want $\lim_{R\to\infty} \int_0^R$ en $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^0$ bestaan [want $\frac{\cos x}{(x+i)(x-2i)} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ voor $x \to \pm\infty$].

2. a) Beschouw $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-n)(z-n-1)}$ in een ρ-omgeving van een punt z_0, waarin géén der punten 0,1,2,.... ligt. Dan zijn alle termen van de reeks daar holomorfe functies van z; en de functie f(z) is er ook holomorf want de reeks is in die ρ-omgeving van z_0 uniform convergent omdat

$$\left|\frac{1}{(z-n)(z-n-1)}\right| < \frac{1}{(n-|z_0|-\rho)(n+1-|z_0|-\rho)} \quad \text{voor alle } n > |z_0| + \rho \,;$$

hierin is het rechterlid de term van een convergente reeks; de oorspronkelijke reeks is dus (Weierstrass) uniform convergent in de ρ-omgeving van z_0 en stelt daar een holomorfe functie voor.
Conclusie: f(z) is in elk punt $z_0 \neq 0,1,2,...$ analytisch; wat voor singulariteiten er in 0,1,2,3,... zijn, moet nader worden bekeken.

b) In een ρ-omgeving van $z = n$ geldt

$$* \qquad f(z) = \frac{1}{(z-n+1)(z-n)} + \frac{1}{(z-n)(z-n-1)} + h(z)$$

waarin h(z) holomorf is (zie a)). Er is kennelijk geen pool van hogere orde in n. Dus vinden we het residu met

$$\lim_{z\to n} (z-n)f(z) = 1 - 1 + 0 = 0 \quad .$$

Voor het residu in 0 vindt men -1 (de eerste term van * ontbreekt daar).

c) Bij n = 1,2,3,... is niet alleen het residu 0, maar bestaat zelfs $\lim_{z\to n} f(z)$ (géén gevolg van "residu = 0"; bedenk dat z^{-2} in 0 het residu 0 heeft, terwijl 0 een pool is); uit * volgt nl.

$$f(z) = \frac{2}{(z-n+1)(z-n-1)} + h(z) \quad ,$$

waaruit blijkt dat $\lim_{z\to n} f(z)$ bestaat. De punten n = 1,2,3,... zijn dus ophefbare singulariteiten.

Opmerking. Dat $f(z) = -\frac{1}{z}$ (na opheffing der singulariteiten in 1,2,...) blijkt uit:

$$f(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{z-k-1} - \frac{1}{z-k}\right) = \lim_{N\to\infty} \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{z-N-1}\right) .$$

Dus $f(z) + \frac{1}{z} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{z-N-1}$. Het rechterlid is in elke ρ-omgeving van elk punt z_0 gelijk aan 0, en stelt dus de holomorfe functie 0 voor.

3. $f(z)$ en $g(z)$ zijn analytisch in $|z| < 1$, dus te ontwikkelen in machtreeksen: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ resp. $\sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$. Stel $a_i = b_i$ voor $i < N$ en $a_N \neq b_N$. Dan is

$$f(z) - g(z) = \sum_{i=N}^{\infty} (a_i - b_i) z^i = (a_N - b_N) z^N \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j\right) .$$

Voor $z \to 0$ heeft de laatste term de limiet 1; dus voor voldoend kleine $|z|$, stel $0 < |z| < \delta$, geldt $\left|1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j\right| > \frac{1}{2}$, en dus $f(z) - g(z) \neq 0$ voor $0 < |z| < \delta$.
Dit komt in strijd met $f(\frac{1}{n}) - g(\frac{1}{n}) = 0$ voor $n = 1,2,3,\ldots$. Een getal N, als ondersteld, bestaat dus niet. Dus $a_i = b_i$ voor alle $i = 0,1,2,\ldots$, dus $f(z) = g(z)$ in $|z| < 1$.

4. a) $F(z) = \int_0^1 \frac{e^{tz}-1}{t}\,dt$ is analytisch voor $|z| < 1$ omdat de integrand $f(z,t) = \frac{e^{tz}-1}{t}$ en $\frac{\partial f}{\partial z} = e^{tz}$ voor $|z| \leq 1$ en $0 \leq t \leq 1$ - als $f(z,t)$ aangevuld wordt door de waarde z bij $t = 0$ - continu zijn in z en t.

b) Op grond van het voorgaande is $F'(z) = \int_0^1 e^{tz}\,dt$; dit geeft voor $z = 0$: $F'(0) = 1$.
Algemeen: $F^{(n)}(z) = \int_0^1 t^{n-1} e^{tz}\,dt$; dus $F^{(n)}(0) = \frac{1}{n}$ terwijl $F(0) = 0$.

De machtreeksontwikkeling van $F(z)$ rond $z = 0$ is dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{z^n}{n!} .$$

Men vindt dit ook door termsgewijs integreren bij

$$F(z) = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n t^{n-1}}{n!}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^1 t^{n-1}dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!n} \quad .$$

Dit termsgewijs integreren is geoorloofd omdat de integrand bij elke vaste z een voor $0 \leq t \leq 1$ uniform convergente reeks is (met majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$).

c) De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!n}$ stelt een gehele functie voor [de convergentiestraal is oneindig, zoals van e^z], die voor $|z| < 1$ overeenstemt met $F(z)$, en dus de analytische voortzetting van $F(z)$ is.

Januari 1967

1. Bereken de integralen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+i} \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3-i} \;.$$

2. a) Toon aan dat de functie $\dfrac{z}{e^z-1}$ in $z = 0$ een ophefbare singulariteit heeft.

   b) Bepaal van de functie $f(z) = \dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$ de singulariteiten (aard nader aan te geven).

   c) Bepaal van deze functie $f(z)$ de residuen in de gevonden singuliere punten.

3. Theorievraag. Een functie $f(a)$ is gedefinieerd door

$$f(a) = \int_{|z|=1} \frac{\varphi(z)}{z-a}\,dz \qquad (|a| < 1) \;,$$

waarbij $\varphi(z)$ continu is voor $|z| = 1$.
Bewijs dat $f(a)$ in het gebied $|a| < 1$ een holomorfe functie van a is.

4. De functies $f_1(z)$ en $f_2(z)$ zijn gegeven door

$$f_1(z) = \log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad ,$$

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n \quad .$$

   a) In welke gebieden zijn $f_1(z)$ resp. $f_2(z)$ gedefinieerd?

   b) Toon aan dat $f_1(z)$ en $f_2(z)$ elkaars analytische voortzettingen zijn.

Oplossingen

1. Bij de integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^3+i}$ is voldaan aan de eisen:

   1) $f(z) = \dfrac{z}{z^3+i}$ is holomorf op en boven de reële as behalve in een eindig aantal singulariteiten, niet op de reële as.

Inderdaad blijkt uit $z^3 + i = (z-i)(z^2+iz-1) = (z-i)(z+\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}\sqrt{3})(z+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}\sqrt{3})$ dat slechts één pool (van de eerste orde) in het bovenhalfvlak ligt.

2) $zf(z) \to 0$, uniform in arg z, als $z \to \infty$.
Inderdaad geldt $|z^3+i| \geqslant |z|^3 - 1 > 0$ voor $|z| > 1$ dus

$$|zf(z)| \leqslant \frac{|z|^2}{|z|^3-1} = \frac{1}{|z| - 1/|z|^2} \leqslant \frac{1}{|z|-1} < \varepsilon \quad \text{als } |z| > 1 + \frac{1}{\varepsilon} \quad .$$

Dus als $|z|$ buiten de cirkel $|z| = 1 + \varepsilon^{-1}$ ligt, onverschillig arg z, dan is $|zf(z)| < \varepsilon$.

3) De integraal bestaat want $\lim\limits_{R\to\infty} \int_0^R$ en $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^0$ bestaan

$[\,|\frac{x}{x^3+i}| = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ voor $x \to \pm\infty]$.

$$\text{Dus geldt} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^3+i} = 2\pi i \ \mathrm{Res}_i \frac{z}{z^3+i} = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{z}{z^2+iz-1} = \frac{2}{3}\pi \quad .$$

De integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^3-i}$ moet het aan $\frac{2}{3}\pi$ toegevoegde complexe getal opleveren; dat is $\frac{2}{3}\pi$. De gelijkheid van de twee integralen blijkt ook uit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{x^3+i} - \frac{x}{x^3-i}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2ix}{x^6+1}\,dx = 0 \qquad \text{(oneven integrand)} \ .$$

2. a) In $\frac{z}{e^z-1}$ zijn teller én noemer analytische functies; bij $z = 0$ heeft de noemer een geïsoleerd nulpunt; de breuk heeft daar dus een geïsoleerde singulariteit. Deze is ophefbaar want de limiet voor $z \to 0$ bestaat:

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z-1} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}z^2+\ldots} = 1 \quad .$$

b) $f(z) = \frac{1}{z^2(e^z-1)}$ heeft een singulariteit in elk punt waar $e^z = 1$, dus in $z = 2k\pi i$ (k geheel); in $z = 0$ is het een pool van de derde orde want $\lim\limits_{z\to 0} z^3 f(z)$ bestaat en is $\neq 0$ (zie a)); in $z = 2k\pi i$ (met $k \neq 0$) vinden we polen van de eerste orde, want

$$\lim_{z\to 2k\pi i} (z-2k\pi i)f(z) = -\frac{1}{4k^2\pi^2} \lim_{z\to 2k\pi i} \frac{z-2k\pi i}{e^{z-2k\pi i}-1} = -\frac{1}{4k^2\pi^2} \quad .$$

c) Het residu in $z = 2k\pi i$ $(k \neq 0)$ is $-\dfrac{1}{4k^2\pi^2}$ (zie b)). Voor $z = 0$ is het

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} \frac{z/(e^z-1)}{z^3}dz = \frac{1}{2!}\,\frac{2!}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{\varphi(z)}{z^3}dz = \frac{1}{2!}\varphi''(0) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)''_{z=0}$$

Dit wordt, als we $1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2 + \ldots = h(z)$ stellen:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{h}\right)''_{z=0} = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{h'}{h^2}\right)'_{z=0} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{-h''\cdot h^2 + 2(h')^2h}{h^4}\right)_{z=0} = \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{3}\cdot 1^2 + 2(\tfrac{1}{2})^2\cdot 1) = \frac{1}{12} \quad .$$

3. $$f(a+h) - f(a) = \int_{|z|=1}\left(\frac{\varphi(z)}{z-a-h} - \frac{\varphi(z)}{z-a}\right)dz = \int_{|z|=1}\frac{h\varphi(z)dz}{(z-a-h)(z-a)} \quad ;$$

hierbij nemen we h zó klein dat $a + h$ nog binnen $|z| = 1$ ligt; bijv. $|h| < \frac{1}{2}(1-|a|)$ zodat $|z-a-h| \geqslant |z| - |a| - |h| > \frac{1}{2}(1-|a|)$ blijft.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \int_{|z|=1}\frac{\varphi(z)dz}{(z-a-h)(z-a)} = \int_{|z|=1}\frac{\varphi(z)dz}{(z-a)^2} + \int_{|z|=1}\frac{h\varphi(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2} \;,$$

dus $$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \int_{|z|=1}\frac{\varphi(z)dz}{(z-a)^2}\right| \leqslant |h|\cdot 2\pi\cdot\frac{m}{\frac{1}{2}(1-|a|)^3}$$ met $|\varphi(z)| \leqslant m$ op $|z| = 1$.

Als $h \to 0$ dan gaat het rechterlid naar 0, d.w.z. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ bestaat, en is $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\varphi(z)dz}{(z-a)^2}$.

$f(a)$ is dus voor elke a binnen $|z| = 1$ differentieerbaar; bij elke a behoort dus een omgeving van punten waar f differentieerbaar is; d.w.z. f is holomorf in $|z| < 1$.

4. a) De reeks voor $f_1(z)$ heeft (wegens $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$) de convergentiestraal 1. Voor alle $|z| < 1$ is $f_1(z)$ dus gedefinieerd. Voor reële $|x| < 1$ geldt $f_1(x) = \log 2 - \log(1+x)$.
Evenzo is $f_2(z)$ gedefinieerd voor alle z waarvoor

$$\left|\frac{1-z}{1+z}\right| < 1 \quad \text{d.i.} \quad |z-1| < |z+1| \quad ,$$

dus voor alle z in het rechter halfvlak. Voor $z = x > 0$ vinden we
$f_2(x) = \log(1 + \frac{1-x}{1+x}) = \log 2 - \log(1+x)$.

b) Voor $0 < x < 1$ geldt dus $f_1(x) = f_2(x)$. De doorsnede der twee definitiegebieden bevat dus bijv. het punt $z = \frac{1}{2}$, met in iedere omgeving een punt (zelfs ∞ vele) waarvoor $f_1(z) = f_2(z)$. Dit geldt dus (identiteitsstelling!) in de hele doorsnede. In de vereniging der twee gebieden is dus één $f(z)$ bepaald; deze zet $f_1(z)$ analytisch voort in het definitiegebied van $f_2(z)$ en omgekeerd.

April 1967

1. Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\cos x}{x^2-2i}\,dx$.

2. Gegeven $f(z) = \dfrac{8-2z}{2-z^2+z^3}$.

   a) Bepaal van $f(z)$ de Laurentontwikkeling van de vorm

   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} ,$$

   die convergeert voor $z = 1 + \frac{1}{2}i$.
   (Aanwijzing: gebruik eventueel partieelbreuksplitsing.)

   b) Bepaal van $f(z)$ het residu in $z = \infty$.

3. Gegeven: $\varphi(z)$ is een holomorfe functie van z in het gebied $|z| > \frac{1}{2}$ en $\lim\limits_{z\to\infty} \varphi(z) = 0$ (uniform in arg z voor $-\pi < \arg z \leq \pi$).
   De functie $f(w)$ is gedefinieerd voor $|w| \neq 1$ door de betrekking

   $$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\varphi(z)}{z-w}\,dz .$$

   a) Bewijs: $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{\varphi(z)}{z-w}\,dz = 0$ voor elke w .

   b) Bepaal $f(w)$ voor $|w| < 1$.

   c) Bepaal $f(w)$ voor $|w| > 1$.

4. Twee functies $f(z)$ en $g(z)$ zijn gegeven door

   $$f(z) = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{t+z} \quad ; \qquad g(z) = \log\frac{z+1}{z-1} \ \text{(hoofdwaarde)}.$$

   a) Toon aan dat voor alle z buiten het interval $[-1,1]$ geldt $f(z) = g(z)$.

   b) Bepaal de sprong

   $$f(x+i0) - f(x-i0)$$

   voor een willekeurig punt x, $-1 < x < 1$.

Oplossingen

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\cos x}{x^2-2i}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2-2i}\,dx + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2i}\,dx = \tfrac{1}{2}I_1 + \tfrac{1}{2}I_2 \ .$$

In het gesloten bovenhalfvlak geldt $|e^{2iz}| = |e^{2ix-2y}| = e^{-2y} \leqslant 1$, dus $\left|\frac{e^{2iz}}{z^2-2i}\right| \leqslant \frac{1}{|z^2-2i|} \leqslant \frac{1}{|z|^2-2}$, want $|z^2-2i| \geqslant |z|^2-2 > 0$ mits $|z| > \sqrt{2}$.

Beide integralen vallen dus onder het type $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ met een f die voldoet aan $|zf(z)| \leqslant \frac{1}{|z|-2/|z|} < \frac{1}{|z|-\sqrt{2}} < \varepsilon$ als $|z| > \sqrt{2} + \frac{1}{\varepsilon}$ en $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (bij de tweede integrand doet het argument niet terzake; dus is voldaan aan de eis a):

a) $zf(z) \to 0$, uniform in arg z voor $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, als $z \to \infty$.
Verder is voldaan aan de twee andere eisen:

b) $f(z)$ is holomorf op en boven de reële as, op een eindig aantal singulariteiten na, niet op de reële as (één pool, $1+i$, in bovenhalfvlak).

c) $\int_{-\infty}^{\infty}$ bestaat, d.w.z. $\lim_{R\to\infty}\int_0^R$ en $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^0$ bestaan

[Beide integranden zijn $O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ als $x \to \infty$ en als $x \to -\infty$] .

Volgens de betreffende residustelling geldt dus

$$I_1 = 2\pi i \,\mathrm{Res}_{1+i} \frac{e^{2iz}}{z^2-2i} = 2\pi i \frac{e^{2i-2}}{2+2i} = \frac{\pi}{2}(1+i)e^{-2+2i}$$

$$I_2 = 2\pi i \,\mathrm{Res}_{1+i} \frac{1}{z^2-2i} = 2\pi i \frac{1}{2+2i} = \frac{\pi}{2}(1+i) \ .$$

De gevraagde integraal is dus $\frac{\pi}{4}(1+i)(e^{-2+2i}+1)$.

Opmerking. Natuurlijk is I_1 ook van het type $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx$, $\alpha > 0$. Men kan dus volstaan met de eis $f(z) \to 0$; maar dank zij de kwadratische noemer geldt zelfs $zf(z) \to 0$, zodat we beide integralen op dezelfde manier kunnen behandelen. I.p.v. zich te beroepen op de stelling kan men ook, als in het dictaat, bewijzen dat de integralen over een halfcirkel van R naar $-R$ (in het bovenvlak) voor $R \to \infty$ naar 0 gaan (ga na waarom $\alpha > 0$ moet zijn).

2. a) $$f(z) = \frac{8-2z}{2-z^2+z^3} = \frac{8-2z}{(z+1)\,(z^2-2z+2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{Bz+C}{z^2-2z+2}$$

$8 - 2z = A(z^2-2z+2) + Bz(z+1) + C(z+1)$

$z = -1$ geeft $10 = 5A$, dus $A = 2$

$z = 0$ geeft $8 = 2A + C$, dus $C = 4$

de coëfficiënt van z^2 geeft $B = -A = -2$

$$f(z) = \frac{2}{1+z} + \frac{-2z+4}{z^2-2z+2} = \frac{2}{1+z} + \frac{-2z+4}{(z-1-i)(z-1+i)} \;.$$

De residuen in $z = 1+i$ en $z = 1-i$ zijn $\frac{2-2i}{2i} = -1-i$ en $\frac{2+2i}{-2i} = -1+i$; dus

$$f(z) = \frac{2}{1+z} - \frac{1+i}{z-1-i} - \frac{1-i}{z-1+i} \;.$$

Men kan deze splitsing wel zo vlug vinden door rechtstreeks de residuen van $f(z)$ te bepalen; de gewone breuksplitsingsmethode vergt door het optreden van complexe getallen wat meer rekenwerk.

Omdat het punt $1+\frac{1}{2}i$ verder van 0 ligt dan -1, maar dichterbij dan $1+i$ en $1-i$, moeten we de eerste breuk ontwikkelen in negatieve machten z^{-n}, maar beide andere in Taylorreeksen (hier meetkundige reeksen):

$$f(z) = \frac{2z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{1}{1-z/(1+i)} + \frac{1}{1-z/(1-i)} =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} [(1-i)^n + (1+i)^n](\tfrac{z}{2})^n \;.$$

Deze Laurentreeks convergeert voor elke z in de ring $1 < |z| < \sqrt{2}$.

b) Het residu in $z = \infty$ is: $-$(som der residuen in -1, $1+i$ en $1-i$) $=$ $= -(2-1-i-1+i) = 0$.

Men kan ook uitgaan van de definitie: $-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)dz$ waarbij $|z| = R$ alle singulariteiten moet omvatten.

Op de integraal passen we de formule $\left|\int_K f(z)dz\right| \leq LM$ toe, waarin hier $L = 2\pi R$, en $|f(z)| \leq M$ op de cirkel $|z| = R$.

Algemeen geldt $|8-2z| \leq 8 + 2|z|$ en $|z^3-z^2+2| \geq |z|^3 - |z^2-2| \geq |z|^3 - |z|^2 - 2$ en dit is zeker > 0 als $|z| > 2$.

Dus geldt op elke cirkel $|z| = R > 2$

$$\left|\int_{|z|=R} f(z)dz\right| \leqslant 2\pi R \frac{8+2R}{R^3-R^2-2} = 2\pi \frac{8/R+2}{R-1-2/R^2} < \frac{12\pi}{R-1-\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

als $\quad R > \frac{3}{2} + \frac{12\pi}{\varepsilon} \quad$ (en > 2).

De integraal hangt niet af van R (want $|z| = R$ omvat alle singulariteiten); de waarde is absoluut $< \varepsilon$ d.i. een willekeurig positief getal; de waarde is dus 0.

3\. a) We beschouwen $\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{\varphi(z)}{z-w}dz$ bij vaste w en verschillende $R > |w|$. De integraal heeft dan een vaste, van R onafhankelijke waarde (tussen de cirkels liggen géén singulariteiten), stel a.
Volgens het gegeven kunnen we bij iedere willekeurige $\varepsilon > 0$ R zó groot nemen dat $|\varphi(z)| < \varepsilon$ voor alle $|z| = R$. Dit geeft

$$|a| < 2\pi R \frac{\varepsilon}{R-|w|} < \frac{2\pi\varepsilon}{1-|w|/R} < \frac{2\pi\varepsilon}{1-\frac{1}{2}} \quad \text{als} \quad R > 2|w| \quad .$$

Dus moet $|a|$ kleiner zijn dan een willekeurig klein positief getal; d.w.z. $a = 0$. De integraal is dus voor alle $R > |w|$ gelijk 0; dus is de limiet in kwestie inderdaad 0.

b) Als $|w| < 1$ dan doet zich het onder a) genoemde geval $R > |w|$ voor; dus $f(w) = 0$ voor $|w| < 1$.

c) Als $|w| > 1$ en $R > |w|$ dan geldt (kanaalmethode)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{\varphi(z)}{z-w}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\varphi(z)}{z-w} = \varphi(w)$$

ofwel $\quad 0 - f(w) = \varphi(w) \;;\quad$ dus $\quad f(w) = -\varphi(w) \quad$ als $\quad |w| > 1$.

4\. a) Als $z = x > 1$ dan geldt de reële betrekking

$$(*) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t+x} = \log(t+x)\Big|_{t=-1}^{t=1} = \log\frac{x+1}{x-1} \quad \text{d.i.} \quad f(x) = g(x) \quad .$$

Nu is $f(z)$ een holomorfe functie voor alle niet op de integratieweg $[-1,1]$ gelegen z; verder is $\log\frac{z+1}{z-1}$ voor alle z ($\neq \pm 1$) holomorf, waarbij $\frac{z+1}{z-1}$ niet op de negatieve reële as ligt, m.a.w. waarbij $z+1$ en $z-1$ niet tegengesteld gericht zijn; d.w.z.: z niet op $[-1,1]$ ligt. De functies $f(z)$ en $g(z)$ zijn dus holomorf in hetzelfde gebied; verder zijn zij gelijk in oneindig veel punten $z = x > 1$; zij zijn dus beide de analytische voortzetting van de reële functies $f(x)$ en $g(x)$, die zoals is gebleken gelijk zijn voor $x > 1$. Dus buiten $[-1,1]$ geldt $f(z) = g(z)$.

b) $$f(x+i0) - f(x-i0) = \lim_{h \downarrow 0} \left(\log \frac{x+ih+1}{x+ih-1} - \log \frac{x-ih+1}{x-ih-1}\right) =$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \log\left(\left|\frac{x+ih+1}{x+ih-1}\right| \cdot \left|\frac{x-ih-1}{x-ih+1}\right|\right) + \lim_{h \downarrow 0} [i \arg(x+ih+1) - i \arg(x+ih-1)]$$

$$- \lim_{h \downarrow 0} [i \arg(x-ih+1) - i \arg(x-ih-1)] = \log 1 + [0 - i\pi] - [0 - (-i\pi)]$$

$$= -2\pi i \quad .$$

Opmerking. Rechtstreeks integreren

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t+z} = \log(z+1) - \log(z-1) \quad \text{(hoofdwaarden)}$$

is alleen geoorloofd als men zich beroept op (zie III.1)

$$\int_K f(t)dt = F(B) - F(A)$$

en dus nagaat of $F(t) = \log(z+t)$ in een omgeving van $[-1,1]$ analytisch is en $\frac{1}{t+z}$ tot afgeleide heeft.

Vervolgens moet men nog aantonen dat $\log(z+1) - \log(z-1)$ met $g(z)$ overeenstemt.

Juni 1967

1. Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\cos 2x}{x^2+a^2}\,dx \qquad (a > 0)$.

2. Gegeven $f(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{4z^2+\pi^2}$.

   a) Bepaal $\lim\limits_{z\to\frac{\pi i}{2}} f(z)$ en $\lim\limits_{z\to-\frac{\pi i}{2}} f(z)$.

   b) Bepaal de residuen van $f(z)$ in $\frac{\pi i}{2}$ en $-\frac{\pi i}{2}$.

   c) Wat is de convergentiestraal van de Taylorreeks van $f(z)$ om $z = 0$?

3. a) Bewijs dat voor $|z| = 1$ geldt

$$z + \frac{1}{z} = 2\mathrm{Re}\, z \ .$$

   b) Zij $\varphi(w)$ gedefinieerd door de betrekking

$$\varphi(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{Re}\, z}{z-w}\,dz \ .$$

   Bereken $\varphi(w)$ voor $0 < |w| < 1$.
   Bereken $\varphi(w)$ voor $|w| > 1$.

4. Voor het domein $|z| \leq \pi$ wordt gevraagd

   a) waar $|\cos z|$ en $|\sin z|$ maxima bereiken en welke waarden deze maxima hebben (gebruik de machtreeksontwikkelingen van cos z en sin z, en het feit dat $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ voor de beredenering van Uw antwoord);

   b) op welke lijnstukken cos z reëel is en welke extrema cos z daar heeft;

   c) op welke lijnstukken sin z reëel is en welke extrema sin z daar heeft.

Oplossingen

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\cos 2x}{x^2+a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix}}{x^2+a^2}\,dx + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2+a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}I_1 + \tfrac{1}{2}I_2 \quad .$$

Het minteken in I_2 verdwijnt door de substitutie $x = -u$

$$I_2 = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{iu}}{u^2+a^2}\,d(-u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iu}}{u^2+a^2}\,du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2}\,dx \quad .$$

Nu hebben I_1 en I_2 beide een integrand van de gedaante $e^{i\alpha x}f(x)$ met $\alpha > 0$, en kunnen we nagaan of voldaan is aan de vereisten voor de desbetreffende residustelling:

1) is $f(z) = \dfrac{1}{z^2+a^2}$ op en boven de reële as holomorf behalve in een eindig aantal punten, niet op de reële as?

Inderdaad: $f(z)$ is er alleen in ia niet-holomorf.

2) gaat $f(z) \to 0$ uniform in arg z, als $z \to \infty$, voor $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$?

Inderdaad geldt $|f(z)| = \dfrac{1}{|z^2+a^2|} \leqslant \dfrac{1}{|z|^2-a^2}$ zodra $|z| > a$, want dan is $|z^2+a^2| \geqslant |z|^2 - a^2 > 0$; dus

$$|f(z)| < \varepsilon \quad \text{als} \quad \frac{1}{|z|^2-a^2} < \varepsilon \quad \text{d.w.z. als} \quad |z| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+a^2} \quad ,$$

waarin arg z niet voorkomt (dus uniform in arg z).

3) bestaat de integraal?

Aangetoond moet worden dat $\lim\limits_{R\to\infty}\int_0^R$ en $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^0$ bestaan.

[volgt uit $\left|\dfrac{e^{i\alpha x}}{x^2+a^2}\right| = \dfrac{1}{x^2+a^2}$ en het bestaan van $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}$] .

Volgens de stelling is dus: $I_1 = 2\pi i\left\{\text{Residu } \dfrac{e^{3iz}}{z^2+a^2}\right\}_{z=ia}$.

Het residu is in dit geval gemakkelijk te bepalen, omdat we te doen hebben met een pool van de eerste orde:

$$I_1 = 2\pi i \lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{e^{3iz}}{z^2+a^2} = 2\pi i\,\frac{e^{-3a}}{2ai} = \frac{\pi}{a}e^{-3a} \quad .$$

Evenzo $I_2 = \frac{\pi}{a} e^{-a}$; de gevraagde integraal is dus $\frac{\pi}{2a}(e^{-3a}+e^{-a})$.

Opmerking. Toevoegen van $\frac{e^{ix}\, i \sin 2x}{x^2+a^2}$ (géén oneven functie) aan de integrand verandert de uitkomst!

2. a) Door $z = \frac{1}{2}\pi i + h$ te stellen vinden we

$$\lim_{z\to\frac{1}{2}\pi i} \frac{e^z+e^{-z}}{4z^2+\pi^2} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\frac{1}{2}\pi i+h}+e^{-\frac{1}{2}\pi i-h}}{4h(h+\pi i)} = \frac{1}{\pi i}\lim_{h\to 0}\frac{i(e^h-e^{-h})}{4h} = \frac{1}{2\pi} .$$

Omdat $f(z)$ een even functie is geeft $z \to -\frac{1}{2}\pi i$ dezelfde limiet $\frac{1}{2\pi}$.

b) Stellen we $f(\frac{1}{2}\pi i) = f(-\frac{1}{2}\pi i) = \frac{1}{2\pi}$ dan gaan de singuliere punten $z = \pm\frac{1}{2}\pi i$ (ophefbare singulariteiten van $f(z)$) over in reguliere; $f(z)$ wordt aldus een overal holomorfe functie.
De residuen in $\frac{1}{2}\pi i$ en $-\frac{1}{2}\pi i$ zijn dus 0.
Men kan dit ten overvloede narekenen met

$$\lim_{z\to\frac{1}{2}\pi i}(z-\tfrac{1}{2}\pi i)\frac{e^z+e^{-z}}{4(z-\frac{1}{2}\pi i)(z+\frac{1}{2}\pi i)} = \frac{i-i}{4\pi i} = 0 .$$

c) De Taylorreeks om $z = 0$ heeft een convergentiestraal R die gelijk is aan de afstand tot de dichtst bij $z = 0$ gelegen niet-ophefbare singulariteit; deze is er niet; dus $R = \infty$.

3. a) Als $|z| = 1$ dan $z = e^{i\varphi}$, $z + \frac{1}{z} = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi = 2\,\mathrm{Re}\, e^{i\varphi} = 2\,\mathrm{Re}\, z$.

b) Gebruik a): $\varphi(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{1+z^2}{2z(z-w)}\,dz$.

Als $0 < |w| < 1$ dan heeft de integrand twee polen, $z = 0$ en $z = w$, binnen de contour; $\varphi(w)$ is dus de som der bijbehorende residuen $-\frac{1}{2w}$ resp. $\frac{1+w^2}{2w}$: $\varphi(w) = \frac{w}{2}$.
Als $|w| > 1$, dan geeft de pool $z = 0$: $\varphi(w) = -\frac{1}{2w}$.

Opmerking 1. Bedenk dat $\mathrm{Re}\, z$ wel een continue maar <u>niet</u> een holomorfe functie is. De integraalformule van Cauchy kan dus niet worden toegepast; de antwoorden $\varphi(w) = \mathrm{Re}\, w$ resp. 0 zijn onjuist.

Opmerking 2. Voor $w = 0$ geeft $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left(\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{2}\right)dz$ ($z = 0$ is pool van tweede orde): $\varphi(0) = 0$.

4. a) Omdat $\cos z$ holomorf is op en binnen de cirkel $|z| = \pi$, wordt het maximum van $|\cos z|$ aangenomen in een punt op de rand. Nader moet nu worden bepaald in welk punt (of welke punten) van de rand $|\cos z|$ maximaal is.

We hebben: $|\cos z| = \left|\sum_{n=0} \frac{(-z^2)^n}{2n!}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{2n!}$.

Het gelijkteken geldt alleen als alle termen $\frac{(-z^2)^n}{2n!}$ niet-negatief zijn. De term $\frac{-z^2}{2!}$ is slechts dan niet-negatief, als z zuiver imaginair is (ga na). Dan zijn ook de volgende termen niet-negatief. Dus alléén $z = \pi i$ en $-\pi i$ geven de maximale waarde van $|\cos z|$:

$$\cos(\pi i) = \cos(-\pi i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n}}{2n!} = \tfrac{1}{2}(e^{\pi} + e^{-\pi}) \quad .$$

Op dezelfde manier vinden we uit

$$|\sin z| = |z|\left|1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

dat $|\sin z|$ op $|z| = \pi$ maximaal wordt in $z = \pm \pi i$:

$$\sin \pi i = -\sin(-\pi i) = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2i}(e^{-\pi} - e^{\pi}) \quad .$$

N.b. $|\cos z|$ en $|\sin z|$ nemen veel groter waarden dan 1 aan!

b) $$\cos z = \cos(x+iy) = \tfrac{1}{2}e^{ix-y} + \tfrac{1}{2}e^{-ix+y} =$$

$$= \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i \sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad .$$

Dit is reëel 1) als $y = 0$, d.w.z. als z op de reële as ligt; daar worden de extrema 1 (bij $x = 0$) en -1 (bij $x = \pm \pi$) bereikt;

2) als $x = 0$ ($x = \pm \pi$ geeft alleen de punten $(\pm \pi, 0)$, zie 1)), d.w.z. als $z = iy$ en dan is $\cos iy = \tfrac{1}{2}(e^y + e^{-y})$; dit geeft de extrema $\tfrac{1}{2}(e^{\pi} + e^{-\pi})$ (bij $z = \pm i\pi$) en 1 (bij $z = 0$).

c) $$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{ix-y} - e^{-ix+y}) = \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad .$$

Dit is reëel 1) als $y = 0$: z op de reële as, extrema ± 1;

2) als $\cos x = 0$, $x = +\frac{\pi}{2}$ of $-\frac{\pi}{2}$.

Bij $x = \frac{\pi}{2}$ is $\sin z = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ met minimum 1 (bij $y = 0$) en maximum $\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}} + e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}})$ bij $y = \pm\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}$; op het lijnstuk $x = -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{1}{2}\pi\sqrt{3} \leq y \leq \frac{1}{2}\pi\sqrt{3}$ neemt $\sin z$ tegengestelde waarden aan (oneven functie); dus een maximum -1 (bij $y = 0$); minima $-\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}} + e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}})$ bij $y = \pm\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}$.