TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

TOEGEPASTE WISKUNDE I

gegeven door

Prof. Dr. C.J. Bouwkamp

in de voorjaarssemesters

Bibl Wsk

Onderafdeling der Wiskunde

TOEGEPASTE WISKUNDE I

GEGEVEN DOOR

PROF. DR. C. J. BOUWKAMP

IN DE VOORJAARSSEMESTERS

TYPEWERK VERZORGD DOOR MEJ. A.N.M. VAN DE GRIENDT

TECHNISCHE HOGESCHOOL
EINDHOVEN

ENKELE NOTITIES

bij

Toegepaste Wiskunde I

Dit college is gegeven tot 1967. Eerst door Prof. Dr. C.J. Bouwkamp. Later door Prof Dr.G.W. Veltkamp. In 1967 werd het afgeschaft omdat Prof. Dr. L.J.F.Broer (Technische Natuurkunde) zelf een nieuw vak 'Mathematische Fysica' introduceerde.

JdG, 3 Juni 2005.

Onderafd. Wiskunde
Toegep. Wiskunde I
Prof. C.J. Bouwkamp

Prijs f 1,60

Onderafdeling der Wiskunde

TOEGEPASTE WISKUNDE I

gegeven door

PROF. DR. C.J. BOUWKAMP

in de voorjaarssemesters

Technische Hogeschool Eindhoven

INHOUD

bladz.

Toegepaste Wiskunde I

§.1	Inleiding	1
§.2	Potentiaalproblemen in één dimensie	4
§.3	Bewegingsvergelijking van de trillende snaar	11
§.4	Golfproblemen in één dimensie	15
§.5	Methode van "separatie"	21
§.6	Diffusie-problemen in één dimensie	29
§.7	Potentiaaltheorie in twee dimensies	35
§.8	Randwaardeproblemen voor de potentiaalvergelijking	43
§.9	Randwaardeproblemen voor het halfvlak	48
§.10	Randwaardeproblemen voor de cirkel	55
§.11	Potentiaalproblemen	59
§.12	Trillingsproblemen	64
§.13	Stelling van Van der Pauw	71

§.1 Inleiding

Een wiskundig probleem uit wetenschap of techniek kan men op verschillende manieren benaderen. De wijze van aanpak hangt niet alleen van het probleem af, maar ook van de ervaring en instelling van de onderzoeker. Geeft men een "existentiebewijs uit het ongerijmde" dan bewijst men: "uit de onderstelling dat het probleem geen oplossing heeft, volgt een logische tegenspraak". Het is duidelijk dat een "practicus" daarmee niet is geholpen: hij was van te voren overtuigd (misschien ten onrechte) van de existentie der oplossing, maar wilde liever een expliciete constructie der oplossing, met getallen als eindresultaat.

Sommige wiskundigen zijn zo "zuiver" dat zij zich onder geen beding met problemen van techniek en physica inlaten. Daar staat tegenover dat er practici zijn die wiskunde als een noodzakelijk kwaad beschouwen, met de nadruk eerder op kwaad dan op noodzakelijk. En daarbij jongleren zij met formules, integralen, reeksen, etc., waarvan zij bij toeval hebben gehoord, zonder er zich om te bekommeren of deze wel of niet mogen worden toegepast in de gegeven situatie.

De docenten in de wiskunde aan deze hogeschool zijn voorstanders van het compromis. De toekomstige ingenieurs moeten niet geheel vreemd staan tegenover de vakkennis van de zuiver-wiskundigen, en zij moeten hun taal (die van de wiskundigen) spreken en verstaan. Net zo als alle andere wetenschapsbeoefenaren moeten zij intuitie, routine, boerenverstand en humor kunnen combineren met begrip voor het standpunt en de moeilijkheden van de anderen.

Het isoleren van mathematische hoofdzaken uit physische en technische problemen is voor een docent in "toegepaste wiskunde" belangrijk. Ogenschijnlijk-zeer-verschillende probleemstellingen leiden tot één en hetzelfde mathematische proces. Behandel die hoofdpunten wiskundig-streng. Pas zo mogelijk deze methodes toe op nieuwe gebieden uit de praktijk. Er is voldoende stof: problemen van warmtegeleiding en isolatie, van diffusie, van hydro- en aerodynamika, van elektriciteit en magnetisme, van radio- en andere golven, van trillende snaren, platen, enz., van luidsprekers, kabels, antennes en golfpijpen. De wiskunde die hierbij optreedt omvat: reële- en complexe-functietheorie, speciale functies, lineaire algebra en operatoren, functionaaltransformaties, gewone en partiële differentiaalvergelijkingen, integraalvergelijkingen, variatie-rekening, numerieke methodes, -- te veel om op te noemen èn te veel voor elk van U om het te leren gedurende Uw verblijf aan deze instelling. Het zou trouwens ook de krachten van één docent te boven gaan.

Bij de wiskundige aanpak van problemen uit de techniek stuit men vaak op een <u>differentiaalvergelijking</u> in één of meer onafhankelijke veranderlijken, of ook op een systeem van dergelijke vergelijkingen. Het is vaak hopeloos, daarvan de algemene oplossing te construeren, of ook maar een speciale oplossing die aan zekere eisen voldoet te vinden. Misschien zegt de prakticus wel: "zet het op de machine",

daar hij van horen-zeggen weet dat er zulke monstrueuze rekenautomaten bestaan, waarvoor het probleem maar een peuleschil zou zijn. Hij vergist zich, en zijn instelling is gevaarlijk. Een eerste vereiste van de onderzoeker is dat hij zijn "hopeloos" probleem van alle kanten bekijkt en tracht door wiskundige analyse inzicht in de oplossing van zijn probleem te krijgen. Nadien pas zal hij zo nodig de hulp van de rekenmachine inroepen, om met de numericus (die òòk analyticus is) de gewilde eindresultaten in getalvorm ter beschikking te hebben.
Er zijn differentiaalvergelijkingen die men kàn "integreren" (d.w.z. oplossen) door middel van speciale functies, die òf speciaal voor dit doel zijn geconstrueerd òf reeds in ander verband zijn ontmoet. Voorbeelden hiervan zijn vroeger behandeld bij de gewone differentiaalvergelijkingen, vergelijkingen voor functies van één onafhankelijke veranderlijke. In dit college daarentegen zullen we ons voornamelijk bezighouden met partiële differentiaalvergelijkingen voor functies van meer dan één onafhankelijke veranderlijke, welke vergelijkingen dus de partiële afgeleiden van de onbekende functie bevat.
We zullen ons beperken tot zekere, zeer eenvoudige partiële differentiaalvergelijkingen, die van de tweede orde zijn (de hoogste afgeleide die voorkomt is van de orde twee). We onderscheiden verder drie verschillende types overeenkomstig de mogelijke standaardvorm der vergelijkingen (elliptisch, hyperbolisch, en parabolisch) met als representanten respectievelijk de potentiaalvergelijking, de golfvergelijking, en de diffusievergelijking. Al deze vergelijkingen zijn lineair: ze voldoen aan het superpositieprincipe, de oplossingen vormen een lineaire vectorruimte (in oneindig-veel dimensies). We zullen ons beperken tot vergelijkingen voor functies van ten hoogste vier onafhankelijke veranderlijken (drie plaatscoordinaten en één tijdscoordinaat). In het volgende is dus in het bijzonder gedacht aan n = 1, 2, of 3.

Zij $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ een functie van n+1 reële veranderlijken gedefinieerd in (eventueel: een deel van) de (n+1)-dimensionale ruimte met n cartesiaanse plaatscoordinaten $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ en één tijdscoordinaat t. Onderstel dat van deze functie alle partiële afgeleiden tot en met die van de tweede orde bestaan en continue functies zijn van alle veranderlijken tezamen. Dan zijn

$$v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

de rechthoekige componenten van een n-dimensionale vector $\underline{v}$ = grad f, die t als parameter bevat. De scalaire grootheid div $\underline{v}$ = div grad f is dan gelijk aan

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \Delta_n f ,$$

waarbij Δ_n de Laplace-operator is in n dimensies:

$$\Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} .$$

Uit de meetkundige interpretatie volgt dat Δ_n invariant is bij draaiing van het coordinatensysteem (wat betekent dat?)

De <u>potentiaalvergelijking</u> in n dimensies is

$$\Delta_n f = 0.$$

De <u>golfvergelijking</u> in n dimensies is

$$\Delta_n f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

De <u>diffusievergelijking</u> in n dimensies is

$$\Delta_n f - \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Het zijn dus in het bijzonder deze partiële differentiaalvergelijkingen en hun oplossingen die we in dit college gaan behandelen. Daarbij zullen we ons bezighouden met de gevallen $n = 1$, 2 en 3.
Overigens merken we op dat, onder invoering van de imaginaire tijdscoordinaat $\tau = it$ (i is de imaginaire eenheid), de golfvergelijking in n dimensies formeel overgaat in de potentiaalvergelijking in n+1 dimensies. Dit verband tussen potentiaal- en golf-vergelijking blijkt in vele gevallen van zeer groot nut te zijn (speciale relativiteitstheorie, bijv.).
Er bestaat ook een verband tussen de diffusievergelijking en de potentiaalvergelijking. Onder bepaalde omstandigheden zal een diffusieproces, na de eerste aanloopverschijnselen, in een stationaire toestand komen, of naar zo'n toestand streven ($t \to \infty$). In die toestand is dan $\partial f/\partial t = 0$, en de stationaire toestandsfunctie $f(x_1, \ldots, x_n, \infty)$ voldoet dan aan de potentiaalvergelijking.

Formulering van een probleem in een rechthoekig coordinatensysteem is niet altijd de aangewezen weg. In bepaalde geometrische configuraties of om redenen van symmetrie kunnen we beter algemene, kromlijnige coordinaten invoeren. Daarom is het nu al nuttig dat we de Laplace-operator in zulke coordinaten kennen. We zullen ons daarbij beperken tot <u>orthogonale kromlijnige coordinaten</u> (denk aan poolcoordinaten, bolcoordinaten, enz.). Zijn $u_1, u_2, \ldots, u_n$ zulke coordinaten, dan is de uitdrukking voor het lijnelement ds (afstand tussen twee naburige punten) gegeven door de positief-definite kwadratische vorm

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \, du_i^2$$

waarbij de functies h_i van $u_1, \ldots, u_n$ afhangen en niet-negatief zijn. De orthogonale projecties van de vector grad f in dit orthogonaal systeem zijn dan

$$(\text{grad } f)_i = v_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i}$$

en verder geldt

$$\text{div } \underline{v} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h}{h_i} v_i\right) ,$$

waarbij ter afkorting is gesteld:

$$h = h_1 h_2 \ldots h_n .$$

Daarmee vinden we voor de Laplace-operator de uitdrukking

$$\Delta_n = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{h}{h_i^2} \frac{\partial}{\partial u_i}\right) .$$

Zo vindt men in poolcoordinaten (r,φ), met $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2$,

$$\Delta_2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} ;$$

en in bolcoordinaten (r, θ, φ), met $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$,

$$\Delta_3 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} .$$

§.2 Potentiaalproblemen in één dimensie

Voor n = 1 reduceert zich de potentiaalvergelijking met y = f(x) tot

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

met algemene oplossing y = Ax + B, waarin A en B integratieconstanten zijn. Deze constanten moeten uit zekere bijvoorwaarden worden bepaald. Neem bijvoorbeeld het probleem van de vlakke condensator, voor het geval dat de onderlinge afstand der geleidende platen zeer klein is vergeleken met de afmetingen der platen. Als we van randcorrecties afzien (schutring!), kunnen we de capaciteit van de condensator berekenen door te kijken naar het ideale geval van twee oneindig grote platen. Laat de ruimte tussen de platen opgevuld zijn met een homogeen dielektricum met dielektrische constante ε. De ene plaat leggen we bij $x = 0$ aan aarde, de andere plaat brengen we bij $x = d$ op spanning V. De integratieconstanten A en B vinden we uit $y(0) = B = 0$ en $y(d) = Ad = V$, zodat geldt

$$y = (V/d)\, x \qquad (0 \leqslant x \leqslant d)$$

Het elektrisch veld is homogeen en gelijk aan $F = - y' = - V/d$, en de ladingsdichtheid op de positieve plaat is $\omega = \varepsilon y'(d) = \varepsilon V/d$. Is S de oppervlakte van de positieve plaat, dan is de totale lading op die plaat, afgezien van randcorrecties, dus gelijk aan $\varepsilon SV/d = CV$, als C de capaciteit van de condensator is. Daarmee vinden we dan de bekende formule (in praktische eenheden)

$$C = \varepsilon S/d.$$

Een beetje meer rekenwerk geeft het volgende probleem. De ruimte tussen de condensatorplaten zij nu opgevuld met twee lagen van verschillende dielektrische constante en verschillende dikte (ε_1 en ε_2; d_1 en d_2). Het scheidingsvlak der twee dielektrica leggen we bij $x = 0$, de positieve plaat (op spanning V) bij $x = d_2$, de andere plaat (aan aarde) bij $x = - d_1$. Dan is in het dielektricum de potentiaal gegeven door

$$y = y_1 = A_1\, x + B_1 \qquad (- d_1 \leqslant x \leqslant 0)\ ,$$
$$y = y_2 = A_2\, x + B_2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant d_2).$$

De vier integratieconstanten moeten weer uit de bijvoorwaarden worden bepaald. Dat zijn in de eerste plaats de voorwaarden $y(- d_1) = 0$ en $y(d_2) = V$; maar ook moeten de potentiaal èn de dielektrische verschuiving aan het scheidingsvlak der dielektrica continu doorlopen, zodat geldt: $y_1(0) = y_2(0)$ en $\varepsilon_1\, y_1'(0) = \varepsilon_2\, y_2'(0)$. Deze vier voorwaarden zijn juist voldoende om de vier integratieconstanten te bepalen: de vergelijkingen worden achtereenvolgens

$$- A_1 d + B_1 = 0,\ A_2 d + B_2 = 0,\ B_1 = B_2,\ \varepsilon_1 A_1 = \varepsilon_2 A_2.$$

De oplossing hiervan is gegeven door

$$A_1 = \frac{\varepsilon_2 V}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}\ ,\quad A_2 = \frac{\varepsilon_1 V}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}\ ,\quad B_1 = B_2 = \frac{\varepsilon_2 d_1 V}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}\ .$$

De ladingsdichtheid op de positieve plaat is gelijk aan $\varepsilon_2 y_2'(d_2) = \varepsilon_2 A_2$, zodat we nu voor de capaciteit vinden:

$$C = \frac{\varepsilon_1\ \varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}\, S.$$

Voor de reciproke grootheid geldt

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\ , \quad \text{met } C_1 = \varepsilon_1 S/d_1 \text{ en } C_2 = \varepsilon_2 S/d_2 .$$

Onze condensator is inderdaad een serieschakeling van twee condensatoren van het homogene, eerst-beschouwde type. Uitbreiding tot meer dan twee media tussen de platen is nu triviaal.

Opgave: Bereken de capaciteit van een vlakke condensator als tussen de platen de ruimte gedeeltelijk is opgevuld met een homogeen dielektricum dat geen van beide platen raakt. Antwoord:

$$C = C_o \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon} - 1\right) \frac{\delta}{d}\right]^{-1} ,$$

waarin C_o = capaciteit zonder dielektricum, δ = dikte van dielektricum, ε_o en ε de constanten van vacuum en dielektricum, d = afstand der platen.

Opgave: De capaciteit van een vlakke condensator (oppervlakte S, afstand der platen a) met een dielektricum waarvoor ε een continue functie van de plaats is (ε mag ook sectie-gewijs continu zijn) is

$$C = \frac{S}{\int_o^a \frac{dx}{\varepsilon(x)}} .$$

We kunnen ook potentiaalproblemen oplossen indien tussen de platen ruimtelading aanwezig is. We krijgen dan te maken met oplossingen van de inhomogene potentiaalvergelijking (vergelijking van Poisson). Neem weer de plaat bij x = 0 op potentiaal nul, de plaat bij x = a op potentiaal V. Zij ε_o f(x) de dichtheid der ruimtelading tussen de platen. Dan voldoet de elektrostatische potentiaal aan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\ f(x) \qquad\qquad (0 \leqslant x \leqslant a).$$

Natuurlijk kunnen we deze vergelijking gemakkelijk integreren:

$$y'(x) = y'(0) - \int_o^x f(\xi)\, d\xi ,$$

$$y(x) = y'(0)\, x + y(0) - \int_o^x d\eta \int_o^\eta f(\xi)\, d\xi .$$

Op de bekende manier (verwisselen van integratie-volgorde, of door partiële integratie) kunnen we de herhaalde integraal herleiden tot een enkelvoudige:

$$y(x) = y'(0)\,x + y(0) + \int_0^x (\xi - x)\, f(\xi)\, d\xi.$$

Uit de randvoorwaarden $y(0) = 0$ en $y(a) = V$ volgt de integratieconstante:

$$y'(0) = \frac{V}{a} + \int_0^a \left(1 - \frac{\xi}{a}\right) f(\xi)\, d\xi \ ,$$

zodat het eindresultaat gegeven is door

$$y = \frac{x}{a} V + \frac{x}{a} \int_0^a (a - \xi)\, f(\xi)\, d\xi + \int_0^x (\xi - x)\, f(\xi)\, d\xi \ .$$

Als $f(x)$ continu is op het interval $(0,a)$ dan heeft $y(x)$ daar continue afgeleiden van tot en met de tweede orde. Is $f(x)$ sectie-gewijs continu, dan springt de tweede afgeleide van y in de discontinuiteitspunten van f.

Bovenstaande oplossing gebruiken we om een algemeen procédé voor randwaardeproblemen te illustreren. Door invoering van een handige notatie kunnen we allereerst de twee integralen tot één integraal van 0 naar a herleiden. Zij $U(x)$ de zogenaamde eenheidsfunctie (Heaviside):

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \ , \\ \frac{1}{2} & \text{voor } x = 0 \ , \\ 1 & \text{voor } x > 0 \ . \end{cases}$$

Dan is $U(x-\xi) = 1$ voor $\xi < x$, en $U(x-\xi) = 0$ voor $\xi > x$. Dan geldt dus, voor $0 \leqslant x \leqslant a$, algemeen:

$$\int_0^a U(x-\xi)\, g(x,\xi)\, d\xi = \int_0^x g(x,\xi)\, d\xi \ .$$

Bovenstaande oplossing gaat dan over in

$$y = \frac{x}{a} V + \int_0^a G(x;\xi)\, f(\xi)\, d\xi \ ,$$

als $G(x;\xi)$ een afkorting is voor

$$G(x;\xi) = \frac{x}{a}(a-\xi) + (\xi - x)\, U(x-\xi).$$

Dit betekent:

$$G(x;\xi) = \begin{cases} \frac{x}{a}(a - \xi) & \text{voor } x \leqslant \xi \ , \\ \frac{\xi}{a}(a - x) & \text{voor } x \geqslant \xi \ , \end{cases}$$

en ook

$$G(x;\xi) = \text{Min}\ (x,\xi) - \frac{x\xi}{a}\ .$$

Deze functie, de zogenaamde Greense functie, heeft de volgende eigenschappen:

(1) $G(x;\xi)$, gedefinieerd in eerste instantie op het vierkant $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant \xi \leqslant a$, is een continue functie van x en ξ tezamen;

(2) $G(x;\xi)$ is gelijk aan nul op de rand van het vierkant;

(3) $G(x;\xi) = G(\xi;x)$; dus G is symmetrisch in de twee variabelen;

(4) $G(x;\xi)$ is bij vaste ξ oplossing van de homogene vergelijking $d^2y/dx^2 = 0$ voor $x \neq \xi$, en bij vaste x oplossing van de homogene vergelijking $d^2y/d\xi^2 = 0$ voor $\xi \neq x$, terwijl die oplossing in beide gevallen aan de einden van het interval $(0, a)$ nul is;

(5) $\partial G/\partial x$ heeft in het punt $x = \xi$ een sprong ter grootte van -1:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{x=\xi+0} - \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{x=\xi-0} = -1.$$

De Greense functie heeft overigens een eenvoudige physische interpretatie. Om dat in te zien, vertellen we eerst iets over de delta-functie (Dirac). Beschouw daartoe de volgende piek- of puls-functie:

$$P(\varepsilon,x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } |x| > \varepsilon, \\ 1/4\varepsilon & \text{voor } |x| = \varepsilon, \\ 1/2\varepsilon & \text{voor } |x| < \varepsilon. \end{cases}$$

De "geintegreerde waarde" van deze pulsfunctie is 1, voor elke $\varepsilon > 0$. Zij nu $f(x)$ een functie die in $x = 0$ continu is. Dit betekent: bij $\varepsilon_1 > 0$ kan ik vinden een ε_2 zodanig dat $|f(x) - f(0)| < \varepsilon_1$ is mits maar $|x| \leqslant \varepsilon_2$ is. Kies nu ε kleiner dan ε_2. Daarvoor geldt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ P(\varepsilon,x)\ dx = (1/2\varepsilon) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\ dx = f(0) + I(\varepsilon),$$

waarin

$$I(\varepsilon) = (1/2\varepsilon) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \{f(x) - f(0)\}\ dx\ ,$$

met $|I(\varepsilon)| < \varepsilon_1$. Daar men ε_1 zo klein kan kiezen als men wil (en daarbij dus ε voldoende klein kiest), volgt dat $I(\varepsilon)$ een limiet heeft voor $\varepsilon \to 0$ en dat die limiet gelijk aan nul is. De oorspronkelijke integraal heeft dus eveneens een limiet, en er geldt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ P(\varepsilon,x)\ dx = f(0).$$

Vertoont $f(x)$ een sprong bij $x = 0$, in die zin dat $f(-0)$ en $f(+0)$ beide bestaan, dan geldt bovenstaande formule ook nog wanneer het rechterlid maar door $\frac{1}{2}f(-0) + \frac{1}{2}f(+0)$ wordt vervangen.

Het is aantrekkelijk om in bovenstaande formule limietovergang en integratie te verwisselen. Definieren we een "functie" $\delta(x)$ door

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} P(\varepsilon, x) ,$$

dan is

$$\delta(x) = 0 \text{ voor } x \neq 0, \ \delta(x) = \infty \text{ voor } x = 0.$$

De formule zou dan overgaan in

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0).$$

Dit nu is, in wiskundige zin, niet geoorloofd: in geen enkel integraalbegrip is de waarde van een functie in één punt ($x = 0$) bepalend voor de waarde van de integraal; $\delta(x)$ is geen integreerbare functie, en de relaties

$$\delta(x) = 0 \ (x \neq 0), \ \delta(0) = \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

zijn in de wiskunde onderling strijdig. Niettemin heeft men veel nut van het formeel opereren met de delta-functie. Als men het goed doet, is er ook geen reden voor ongerustheid ten aanzien van de eindresultaten van een berekening. Eigenlijk moeten we steeds met $P(\varepsilon, x)$ in plaats van $\delta(x)$ werken, en dan helemaal op het laatst in onze uitkomst de limietovergang $\varepsilon \to 0$ uitvoeren. Het is echter gemakkelijker deze limietovergang maar direct te doen. Dat moge stap voor stap wiskundig niet zijn geoorloofd, maar toch blijkt meestal dat het resultaat van al die foutieve stappen precies de juiste uitkomst geeft. Natuurlijk moet men daarbij niet in het wilde weg te werk gaan. De ervaring leert dat de deltafunctietechniek zeer waardevol is. Het geeft vooral snel resultaten, die men achteraf zo nodig mathematisch-streng kan verifiëren of op andere manier afleiden.

Na deze voorbereiding, nu de physische interpretatie van $G(x;\xi)$. We nemen $V = 0$ (de term Vx/a is afkomstig van de opgedrukte spanning), zodat de werking van de ruimtelading wordt beschreven door het randwaardeprobleem

$$y''(x) = -f(x) \qquad (0 < x < a) \qquad y(0) = y(a) = 0$$

met als oplossing

$$y(x) = \int_0^a G(x;t)\, f(t)\, dt.$$

Neem in het bijzonder voor de bronfunctie $f(t)$ een deltafunctie met "drager" in het punt $\xi (0 < \xi < a)$, dus $f(t) = \delta(t-\xi)$. Dan geeft de integraalformule als resultaat $y(x) = G(x;\xi)$. Dit is het potentiaalveld van een lading die in het punt $x = \xi$ is geconcentreerd. De grootte van die lading is ε_0, want (in de bekende notatie)

$$\int D_n\, dS = \varepsilon_0 \int E_n\, dS = -\varepsilon_0 \int \frac{\partial y}{\partial n}\, dS = -\varepsilon_0 \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{x=\xi+0} - \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{x=\xi-0} \right] = \varepsilon_0 .$$

Derhalve is $U = (1/\varepsilon_0)\, G(x;\xi)$ precies gelijk aan de potentiaal op de plaats x tengevolge van een eenheidslading op de plaats ξ, als de randpunten op potentiaal 0 worden gehouden. De symmetrie-eigenschap van G komt overeen met een eigenschap van reciprociteit van bron en veld: de potentiaal in x tengevolge van een eenheidslading in ξ is gelijk aan de potentiaal in ξ tengevolge van een eenheidslading in x.
Elk der differentiaalvergelijkingen

$$U'' = -(1/\varepsilon_0)\delta(x-\xi), \quad G'' = -\delta(x-\xi)$$

moet men goed interpreteren, en wel in de geintegreerde vorm; let op de eenheidssprong van de eerste afgeleide in het punt ξ; en de zaak is in orde; overigens voldoen U en G buiten het kritieke punt aan de homogene vergelijking $y'' = 0$.

Is dus $(1/\varepsilon_0)\, G(x;\xi)$ de potentiaal in het punt x tengevolge van een eenheidslading in het punt ξ, en plaatst men in het interval $(\xi, \xi + d\xi)$ de lading $\varepsilon_0\, f(\xi)$, dan is tengevolge daarvan de potentiaal in het punt x gelijk aan $G(x;\xi)\, f(\xi)\, d\xi$. Bij een continue verdeling der lading over het interval (0,a) vinden we door superpositie voor de totale potentiaal

$$\int_0^a G(x;\xi)\, f(\xi)\, d\xi ,$$

in overeenstemming met het resultaat der wiskundige analyse.

Opgaven

(1) $G(x;y) > 0 \quad (0 < x < a,\ 0 < y < a)$.

(2) De potentiaal ten gevolge van positieve ruimtelading tussen twee evenwijdige geaarde platen is positief.

(3) Maak een tekening van het oppervlak $z = G(x;y)$ $(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a)$.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \delta(t)\, dt = U(x) = \tfrac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} x)$.

Aanvulling

Literatuur: Balth. van der Pol and H.Bremmer, "Operational calculus, based on the two-sided Laplace-integral", Cambridge University Press, 2nd edition, 1955, Chapter V, The delta or impulse function, pp. 56-84.

(a) Stelt men $U(\varepsilon,x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \qquad (\varepsilon > 0)$,
dan geldt

$$U(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} U(\varepsilon,x).$$

(b) Er geldt:

$$\frac{dU(\varepsilon,x)}{dx} = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}.$$

(c) De delta-functie afkomstig van Cauchy is

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}.$$

(d) Toets (4), (b) en (c) aan

$$\delta(x) = dU(x)/dx.$$

(e) Men kan de delta-functie ook definieren door

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp(-x^2/\varepsilon^2).$$

§.3 Bewegingsvergelijking van de trillende snaar

Het eenvoudigste ééndimensionale continue systeem met oneindig veel vrijheidsgraden dat trillingen kan uitvoeren is wel de dunne elastische snaar in zijn wiskundig geidealiseerde vorm. Laat in de rusttoestand de snaar horizontaal (langs de x as) zijn gespannen tussen $x = 0$ en $x = a$. Zij verder m de lineaire massadichtheid, S de spanning, en K de dichtheid der uitwendige kracht in vertikale richting naar boven (positieve y as). Deze drie grootheden mogen van de plaats x en de tijd t afhangen. We gaan kleine uitwijkingen van de snaar in de transversale richting bestuderen voor zover ze in één vlak (het xy vlak) liggen. Op het ogenblik t wordt de vorm van de snaar beschreven door de functie $y(x,t)$ gedefinieerd voor $0 \leqslant x \leqslant a$ $(-\infty < t < \infty)$. We nemen $y(0,t) = y(a,t) = K(0,t) = K(a,t) = 0$ voor alle tijden (d.w.z.: de snaar is aan zijn uiteinden vastgehouden en in die uiteinden is de uitwendige kracht gelijk aan nul).

De bewegingsvergelijking van de snaar leiden we af met behulp van het <u>principe van Hamilton</u> uit de mechanica. Daarvoor hebben we uitdrukkingen nodig voor de kinetische en de potentiële energie van de snaar. De kinetische energie ten tijde t is gelijk aan

$$T(t) = \tfrac{1}{2}\int_0^a m\,(\frac{\partial y}{\partial t})^2\,dx.$$

De potentiële energie (nul genomen voor de rusttoestand) bestaat uit twee delen, namelijk die tengevolge van de elastische vervorming van de snaar en die afkomstig van de uitwendige krachten. Het eerste deel is

$$\int_0^a \{\sqrt{1 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2} - 1\}\,S\,dx \approx \tfrac{1}{2}\int_0^a S\,(\frac{\partial y}{\partial x})^2\,dx\ ;$$

het tweede deel is

$$-\int_0^a K\,y\,dx.$$

De totale potentiële energie is dus gegeven door

$$U(t) = \tfrac{1}{2}\int_0^a S\,(\frac{\partial y}{\partial x})^2\,dx - \int_0^a K\,y\,dx.$$

Voor de kinetische potentiaal, $L = T - U$, vinden we dan

$$L(t) = \int_0^a \{\tfrac{1}{2}\,m\,(\frac{\partial y}{\partial t})^2 - \tfrac{1}{2}\,S\,(\frac{\partial y}{\partial x})^2 + K\,y\}\,dx,$$

en volgens Hamilton geldt nu

$$\delta\{\int_{t_1}^{t_2} L(t)\,dt\} = 0.$$

Dit betekent: voor de <u>werkelijke</u> beweging tussen twee <u>vaste</u> tijdstippen t_1 en t_2, van de begintoestand $y(x,t_1)$ naar de eindtoestand $y(x,t_2)$, is de uitdrukking

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t)\,dt$$

extremaal (maximaal, minimaal, of stationair) in de klasse van <u>virtuele</u> bewegingen $\bar{y}(x,t)$ die voldoen aan de volgende eigenschappen:

$\bar{y}$ continu $(0 \leqslant x \leqslant a,\ \ t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$;

$\partial\bar{y}/\partial x$ en $\partial\bar{y}/\partial t$ sectiegewijs continu $(0 \leqslant x \leqslant a,\ \ t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$;

$\bar{y}(0,t) = \bar{y}(a,t) = 0\ (t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$;

$\bar{y}(x,t_1) = y(x,t_1),\ \ \bar{y}(x,t_2) = y(x,t_2)\quad (0 \leqslant x \leqslant a).$

De mathematische uitwerking van het principe van Hamilton op het probleem van de trillende snaar doen we in de typische notatie van de variatie-rekening. Daarbij is δ het symbool voor een kleine variatie:

$$\delta y = \bar{y} - y,$$

waarbij y de werkelijke, $\bar{y}$ de virtuele beweging van de snaar voorstelt. Er gelden eenvoudige regels voor deze variaties:

$$\delta\{(\frac{\partial y}{\partial x})^2\} = 2\,\frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\delta y)\ ,$$

en de analoge relatie met x vervangen door t.

Het Hamilton principe zegt nu

$$\delta\left[\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^a dx\ \{\tfrac{1}{2}\,m\,(\frac{\partial y}{\partial t})^2 - \tfrac{1}{2}\,S\,(\frac{\partial y}{\partial x})^2 + K\,y\,\}\right] = 0,$$

onder de bijvoorwaarden:

(1) $\delta t_1 = \delta t_2 = 0$ (begin- en eindtijd vast);

(2) $\delta y(0,t) = \delta y(a,t) = 0$ voor $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ (rust aan uiteinden voor alle tijden);

(3) $\delta y(x,t_1) = \delta y(x,t_2) = 0$ voor $0 \leqslant x \leqslant a$ (voor begin- en eindtijd is de virtuele uitwijking gelijk aan de werkelijke).

Op grond van (1) kunnen we dan schrijven:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^a dx\ \delta\{\tfrac{1}{2}\,m\,(\frac{\partial y}{\partial t})^2 - \tfrac{1}{2}\,S\,(\frac{\partial y}{\partial x})^2 + K\,y\,\} = 0,$$

dus met bovengenoemde regel:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^a dx\left\{m\,\frac{\partial y}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\delta y) - S\,\frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\delta y) + K\,\delta y\right\} = 0.$$

De eerste term kunnen we partieel naar t integreren; op grond van (3) valt de stokterm weg. De tweede term kunnen we partiëel naar x integreren; op grond van (2) verdwijnt de stokterm. Dus vinden we:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^a dx\ \{-\frac{\partial}{\partial t}\,(m\,\frac{\partial y}{\partial t}) + \frac{\partial}{\partial x}\,(S\,\frac{\partial y}{\partial x}) + K\,\}\ \delta y = 0.$$

Nu is de variatie δy willekeurig; bovenstaande integraal kan alleen nul zijn indien de integrand zelf nul is. Dan volgt als nodige voorwaarde de <u>bewegingsvergelijking</u> van de snaar:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m\,\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(S\,\frac{\partial y}{\partial x}\right) + K.$$

Natuurlijk kan men deze bewegingsvergelijking op elementaire wijze afleiden uit de wet van Newton. We hebben ons echter op een hoger standpunt willen stellen, omdat bij ingewikkelder problemen de methode van Hamilton veel eenvoudiger is dan de elementaire methode. Overigens is voor constante m en S met $K = 0$ de bewegingsvergelijking van de snaar reeds in vroegere colleges op beide manieren afgeleid.

Het bovengevonden resultaat kunnen we nog iets anders formuleren, zonder te refereren aan het principe van Hamilton of de variatierekening. Laat op de rechthoek R: $0 \leqslant x \leqslant a$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ functies y en η zijn gedefinieerd, aldaar continu en sectiegewijs continu differentieerbaar, met de beperking dat η op de rand van R gelijk aan nul is. Dan geldt (ε is een constante):

$$\Phi[y + \varepsilon\eta] = \Phi[y] + \varepsilon\Psi[y,\eta] + \varepsilon^2 X[\eta],$$

waarbij de functionalen Φ, Ψ en X zijn gedefinieerd door

$$\Phi[y] = \int_R \left\{\tfrac{1}{2} m \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \tfrac{1}{2} S \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + K\,y\right\} dx\,dt,$$

$$\Psi[y,\eta] = \int_R \left\{-\frac{\partial}{\partial t}\left(m\,\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(S\,\frac{\partial y}{\partial x}\right) + K\right\} \eta\,dx\,dt,$$

$$X[\eta] = \tfrac{1}{2}\int_R \left\{ m \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - S\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \right\} dx\,dt.$$

Differentieren we naar ε en stellen we ε vervolgens gelijk aan nul, dan vinden we

$$\left\{\frac{d}{d\varepsilon}\,\Phi[y + \varepsilon\eta]\right\}_{\varepsilon=0} = \Psi[y,\eta]\,.$$

Het rechterlid nu is nul wanneer y aan de bewegingsvergelijking van de snaar voldoet. Ergo: de functionaal Φ is lokaal stationair voor de echte beweging van de snaar in de klasse van naburige virtuele bewegingen $\bar{y} = y + \varepsilon\eta$ (onder de beperking dat $\eta = 0$ is op de rand van R; dus bij vaste uiteinden in tijd en plaats). Daar, bij geschikte keuze van η, het teken van de term met ε^2 zowel positief, nul als negatief kan worden gemaakt, hebben we hier te maken met een extremum dat niet een maximum noch een minimum is.

Indien we ons beperken tot constante m en S, en stellen we

$$v = \sqrt{\frac{S}{m}} \;, \qquad K = S\, f(x,t) \;,$$

dan reduceert zich de bewegingsvergelijking van de snaar tot de inhomogene golfvergelijking in één dimensie:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\, f\,(x,t),$$

waarvan de theorie in de volgende paragraaf zal worden behandeld. Hier wijzen we nog op het bijzondere geval van de statische uitwijking van de snaar door een van de tijd onafhankelijke uitwendige kracht $K = Sf(x)$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\, f(x).$$

Volgens §.2 is, bij vaste uiteinden van de snaar, de uitwijking

$$y(x) = \int_0^a G(x;\xi)\, f(\xi)\, d\xi \;.$$

Als voorbeeld nemen we de doorbuiging van de snaar tengevolge van de zwaarte (versnelling der zwaartekracht g). Dan is $K = -\,mg$, dus $f(x) = -\,mg/S$, en dus de doorbuiging (naar beneden)

$$-\,y = (mg/S) \int_0^a G(x;\xi)\, d\xi = (mg/2S)\; x(a-x).$$

§.4 Golfproblemen in één dimensie

In de eerste plaats gaan we het homogene probleem beschouwen, waarbij dus de uitwendige krachten nul zijn:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0;$$

hierbij nemen we aan dat v niet van x en t afhangt. We kunnen in de gehele xt ruimte de algemene oplossing gemakkelijk aangeven. Door over te gaan op nieuwe onafhankelijke variabelen:

$$\xi = x - vt, \qquad \eta = x + vt,$$

gaat de differentiaalvergelijking over in

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0,$$

waarvan de algemene oplossing is: $y = f(\xi) + g(\eta)$, met f en g tweemaal continu-differentieerbaar maar verder willekeurig. De algemene oplossing der golfvergelijking is dus

$$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt).$$

De functie $f(x-vt)$ beschrijft een lopende golf in de positieve x richting met fasesnelheid v; de functie $g(x+vt)$ beschrijft een golf lopende in de negatieve richting met diezelfde snelheid. De oplossing geldt voor alle tijden, en voor elke x, als $f(u)$ en $g(u)$ bekend zijn voor $-\infty < u < \infty$. Op een oneindig lange snaar (spanning S, massadichtheid m) kunnen zich dus lopende golven zonder vormverandering met snelheid $\sqrt{S/m}$ voortplanten. In dit verband kan men ook aan het mathematisch equivalente probleem denken van de voortplanting van vlakke longitudinale golven in vloeistoffen of gassen (bijv. geluidsvoortplanting in lucht).

Om een specifiek fysisch probleem op te lossen, moeten we een speciale oplossing onder die algemene oplossing uitkiezen. Deze speciale oplossing is gekenmerkt door bijvoorwaarden. Deze zijn van tweeërlei aard: beginvoorwaarden zijn voorwaarden die voor alle x gelden bij één bepaalde waarde van t (bijv. $t = 0$); randvoorwaarden zijn voorwaarden die voor alle t gelden bij één of meer bepaalde waarden van x. In vele problemen heeft men een mengsel van deze twee soorten bijvoorwaarden. In de gecombineerde xt ruimte zijn beginvoorwaarden (gekoppeld aan het tijdsbegrip) niet anders dan randvoorwaarden, voorwaarden die gelden aan de rand van het beschouwde xt gebied.

We keren nu terug naar het probleem van de lopende golven op een snaar of touw, en nemen aan dat op het tijdstip $t = 0$ de uitwijking $y(x,t)$ en de transversale snelheid $\partial y(x,t)/\partial t$ bekend zijn:

$$y(x,0) = y_0(x), \qquad x_t(x,0) = y_1(x),$$

waarbij de functies $y_0(x)$ en $y_1(x)$ voorgeschreven zijn op het interval $-\infty < x < \infty$ en aan zekere eisen van gladheid voldoen (bijv. tweemaal continu-differentieerbaar). Nu is

$$y_t(x,t) = -\,v\, f'(x-vt) + v\, g'(x+vt),$$

waarbij een accent differentiatie naar het argument van de functie betekent. Door substitutie van $t = 0$ vinden we

$$y_t(x,0) = v\{\, g'(x) - f'(x) \}\,,$$

en de onbekende functies $f(x)$ en $g(x)$ moeten dus worden bepaald uit de betrekkingen

$$f(x) + g(x) = y_0(x), \qquad f'(x) - g'(x) = -\frac{1}{v}\, y_1(x).$$

Door integratie vinden we uit de laatste betrekking:

$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{v}\int_0^x y_1(\xi)\,d\xi + f(0) - g(0),$$

en daaruit volgt dan verder:

$$2f(x) = y_0(x) - \frac{1}{v}\int_0^x y_1(\xi)\,d\xi + f(0) - g(0),$$

$$2g(x) = y_0(x) + \frac{1}{v}\int_0^x y_1(\xi)\,d\xi - f(0) + g(0).$$

Substitutie van de zo gevonden functies in $y(x,t)$ geeft dan voor de beweging van het touw voor $t \geqslant 0$ de uitdrukking

$$y(x,t) = \tfrac{1}{2}\{y_0(x-vt) + y_0(x+vt)\} + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} y_1(\xi)\,d\xi.$$

We kunnen ook de gladheidseigenschappen van $y_0(x)$ en $y_1(x)$ laten vallen.

<u>Voorbeelden</u>: (A) Een pulsvormige beginuitwijking en beginsnelheid nul: $y_0(x) = \delta(x)$, $y_1(x) = 0$. De oplossing is dan

$$y(x,t) = \tfrac{1}{2}\{\delta(x-vt) + \delta(x+vt)\}.$$

De puls plant zich dan voor de helft voort naar links, voor de andere helft naar rechts, met snelheid v. In het xt vlak is y gelijk aan nul buiten de <u>karakteristieken</u> $x = vt$ en $x = -vt$ $(t \geqslant 0)$. Op deze karakteristieken is y gelijk aan $\tfrac{1}{2}\delta(0)$.

(B) Pulsvormige beginsnelheid in de rusttoestand: $y_0(x) = 0$, $y_1(x) = \delta(x)$. Dan wordt

$$y(x,t) = \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} \delta(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2v}\{U(x+vt) - U(x-vt)\}.$$

Nu is y gelijk aan $1/2v$ binnen de driehoek begrensd door de karakteristieken $x = vt$ en $x = -vt$ $(t \geqslant 0)$, op de karakteristieken is y gelijk aan $1/4v$, en in de rest van het halfvlak $t \geqslant 0$ is y gelijk aan nul.

Deze voorbeelden illustreren het volgende principe: De situatie in het punt $x = \xi$, $t = 0$ is van invloed slechts in die punten van de xt ruimte welke liggen binnen of op de rand van de karakteristieke driehoek begrensd door de lijnen $x = \xi \pm vt$ $(t \geqslant 0)$.

Ter illustratie van de theorie der karakteristieken beschouwen we de voortplanting van een pulsvormige storing over een <u>half-oneindig</u> lang touw $(x \geqslant 0)$ dat bij $x = 0$ wordt vastgehouden.

Allereerst kan men gemakkelijk inzien dat een puls die naar het vaste eind loopt, daar wordt gereflecteerd met omkering van teken (spiegelprincipe!).

Geef echter op tijd $t = 0$ in het punt $x = b > 0$ een pulsvormige uitwijking, terwijl we de beginsnelheid identiek nul stellen:

$$y(x,o) = \delta(x-b), \qquad y_t(x,o) = 0.$$

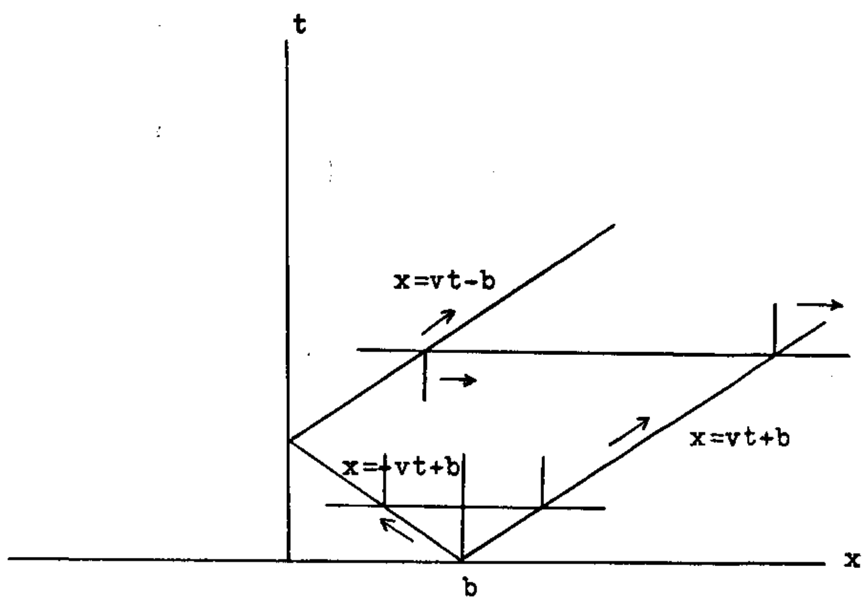
Deze puls-storing begint zich voor de ene helft naar rechts, voor de andere helft naar links voort te planten, want de puls merkt nog niets van het vastgehouden eind:

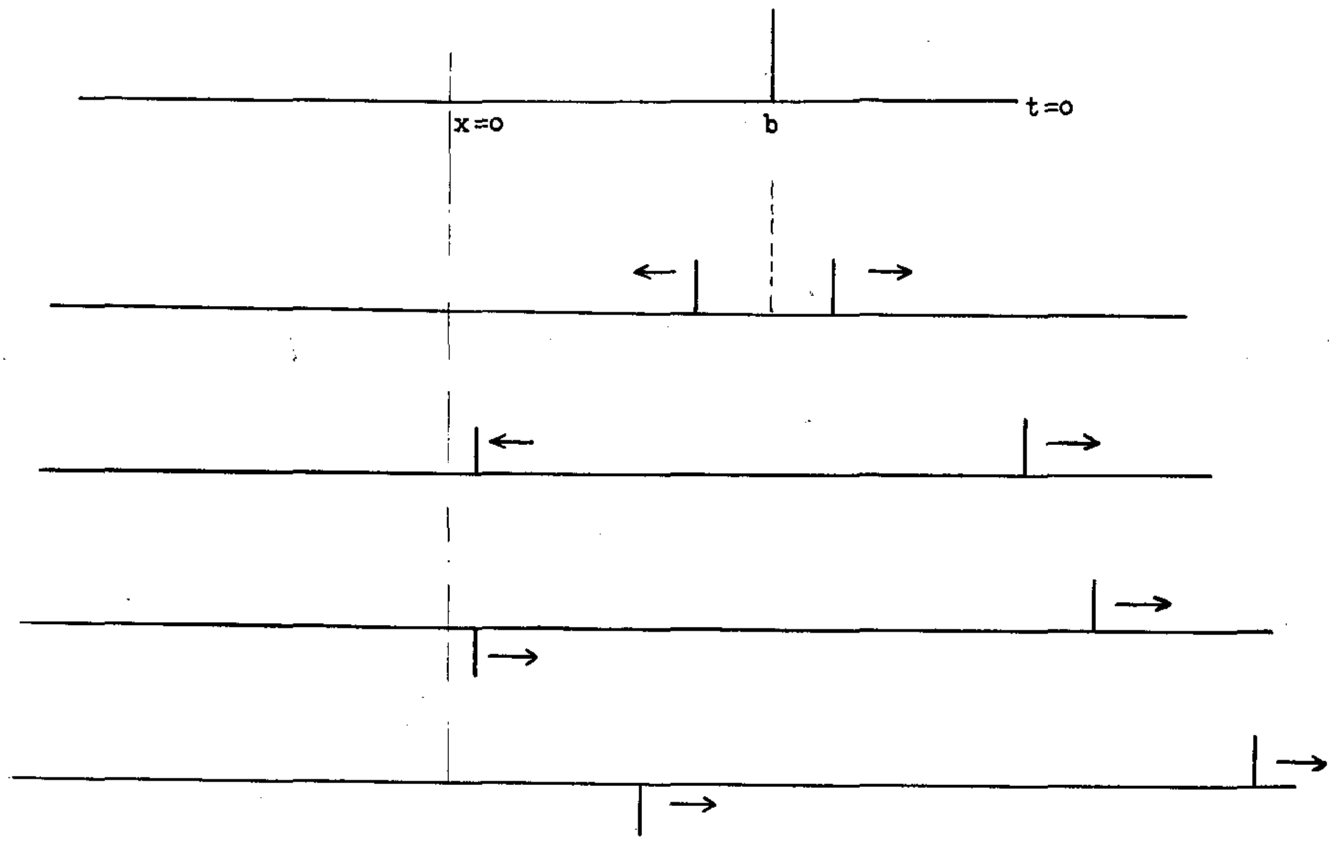
$$y(x,t) = \tfrac{1}{2}\,[\delta(x-vt-b) + \delta(x+vt-b)]\,.$$

Deze oplossing geldt voor $vt < b$. Op het tijdstip $t = b/v$ bereikt de naar links gaande puls het vaste uiteinde, wordt daar gereflecteerd, zodat ze naar rechts gaat, en keert van teken om. Dus

$$y(x,t) = \tfrac{1}{2}\,[\delta(x-vt-b) - \delta(x-vt+b)],$$

geldig voor $vt > b$. De onderlinge afstand der twee pulsen, die zich nu naar rechts voortplanten, is $2b$.





Een xt diagram kan worden gebruikt om een overzicht te krijgen van de twee zich voortplantende pulsen. Dit diagram is vooral duidelijk als het gaat om golfvoortplanting over één eindige snaar waarvan beide uiteinden ($x = 0$ en $x = a$) worden vastgehouden. Is op $t = 0$ de uitwijking $\delta(x-b)$ $(0 < b < a)$ en de snelheid nul, dan planten zich de halve pulsen eerst voort naar links en rechts, en vervolgens worden ze steeds teruggekaatst aan de uiteinden met behoud van grootte maar met omkering van teken. Op de tijd $t = 2a/v$ is de situatie weer precies zo als op tijd $t = 0$. Het verschijnsel is dus periodiek in t met periode $2a/v$.

Bij willekeurige beginvoorwaarden is het moeilijk de oplossing in analytische vorm te brengen, anders dan in het geval van de oneindige snaar met zijn expliciete oplossing van d'Alembert. Bij zeer speciale keuze van de beginvoorwaarden is ook de analytische voorstelling gemakkelijk. Daarbij denken we aan het spiegelingsprincipe, dat we reeds hebben toegepast bij de half-oneindige snaar. We kiezen de beginwaarden van y en

y_t zò dat ze de punten $x = 0$ en $x = a$ als inversie-punten hebben. Zij $f(x)$ een functie voor alle x gedefinieerd, zodanig dat $f(x)$ antisymmetrisch is ten opzichte van $x = 0$ en $x = a$; dat betekent: $f(x) = -f(-x)$ en $f(x) = -f(2a - x)$. Dan geldt ook: $f(x) = f(x + 2a)$, en dus is $f(x)$ periodiek met periode $2a$. Nu is de beginuitwijking en beginsnelheid alleen gedefinieerd voor $0 \leqslant x \leqslant a$; kunnen we deze functies echter vloeiend voortzetten buiten dit interval, zodanig dat de voortzetting de punten $x = 0$ en $x = a$ als inversiepunt hebben, dan kunnen we de eindige snaar als een stuk van een oneindige snaar opvatten, waar de situatie zich periodiek in x herhaalt met een periode $2a$, maar waar we de formule van d'Alembert op kunnen toepassen. De eenvoudigste functies die hieraan voldoen zijn de functies $\sin(n\pi x/a)$, welke nul zijn in de punten $x = 0$ en $x = a$ en die oneven zijn ten opzichte van deze beide punten; hierbij is n een natuurlijk getal.

Stel dus $y(x,0) = \sin(n\pi x/a)$ en $y_t(x,0) = 0$. Dan wordt

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= \tfrac{1}{2}[\sin\{\tfrac{n\pi}{a}(x-vt)\} + \sin\{\tfrac{n\pi}{a}(x+vt)\}] \\
&= \sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi vt}{a}\,.
\end{aligned}
$$

De snaar is nu in trilling of voert een <u>staande-golf</u>beweging uit. De trillingstijd is $T = 2a/nv$; de frequentie <u>van deze harmonische trilling</u> is $\nu = 1/T = nv/2a$. De grondfrequentie is $\nu_0 = v/2a = (1/2a)\sqrt{S/m}$.

Stellen we $y(x,0) = 0$ en $y_t(x,0) = \sin(n\pi x/a)$, dan vinden we door invullen in de formule van d'Alembert de analoge trillingsvorm:

$$
y(x,t) = \frac{a}{n\pi v}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi vt}{a}\,,
$$

die alleen in amplitude en fase van de vorige verschilt. Door lineaire combinatie vinden we een algemene oplossing:

$$
y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\{A_n\cos\frac{n\pi vt}{a} + B_n\sin\frac{n\pi vt}{a}\}\sin\frac{n\pi x}{a}\,,
$$

waarbij we onderstellen dat deze reeks plus de nodige afgeleiden convergeren. Inderdaad zien we dat deze functie periodiek in t is met periode $2a/v$:

$$
y(x,\,t + 2a/v) = y(x,t).
$$

De vraag of deze oplossing even algemeen is als die van d'Alembert, heeft vroegere onderzoekers veel hoofdbrekens gekost (Bernoulli versus d'Alembert). Het antwoord is gekomen door het werk van Fourier in de theorie der warmtegeleiding. Fourier liet zien dat een "willekeurige" periodieke functie in een, wat men nu noemt, Fourier-reeks kan worden ontwikkeld.

Het komt hierop neer dat de coefficienten A_n en B_n kunnen worden aangepast aan de beginvoorwaarden, die overigens willekeurig mogen zijn:

$$y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = y_1(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant a).$$

Er moet dan gelden:

$$\left.\begin{aligned} y_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/a) , \\ y_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi v/a)\, B_n \sin(n\pi x/a) , \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

zodat we met de formules van Euler vinden:

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a y_0(x) \sin(n\pi x/a)\, dx,$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^a y_1(x) \sin(n\pi x/a)\, dx.$$

§.5 Methode van "separatie"

In §.4 zijn we, via lopende golven op de oneindige snaar (d'Alembert), gekomen tot de harmonische trillingen van de eindige snaar (Bernoulli). Fourier legde de verbindende schakel, hetgeen aanleiding werd tot machtig puur-wiskundig onderzoek (Fourier-reeksontwikkeling). Pas later bleek dat dit maar een aanloopje was op het algemene probleem der spectraal-theorie (eigenwaarde-problemen, ontwikkeling in eigen-functies), van zo groot belang voor de theoretische natuurkunde (quantum-mechanika). Ziehier wel een duidelijk voorbeeld van de wisselwerking tussen de natuurwetenschap en de wiskunde, die alleen in samenwerking kunnen bestaan, en kunnen blijven bestaan.

Uit de boven geschetste historische ontwikkeling is een algemene methode te voorschijn gekomen, waarmee men randwaardeproblemen bij partiële differentiaalvergelijkingen in vele voorkomende gevallen kan oplossen. Dit is de methode van de scheiding der variabelen (separatie), welke we zullen illustreren aan het eenvoudige probleem van de trillende snaar.

Van de homogene golfvergelijking in één dimensie,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 ,$$

zoeken we een speciale oplossing van de gedaante:

$$y(x,t) = (\text{functie van } x) \text{ maal } (\text{functie van } t)$$
$$= f(x)\, g(t).$$

Dan is nodig, als we met een accent differentiatie naar het argument van de functie aangeven,

$$f''(x)\, g(t) = (1/v^2)\, f(x)\, g''(t),$$

of, na deling door $f(x)\, g(t)$,

$$f''(x)/f(x) = (1/v^2)\, g''(t)/g(t).$$

Het linkerlid is onafhankelijk van t, het rechterlid onafhankelijk van x. Gelijkheid kan alleen optreden als beide leden onafhankelijk van x en t zijn. Noem die constante $-k^2$, waarbij k willekeurig complex is. Dan volgt

$$f'' + k^2 f = 0, \qquad g'' + k^2v^2 g = 0.$$

Deze laatste twee (gewone) differentiaalvergelijkingen kunnen we algemeen oplossen. Daarmee vinden we dan een speciale oplossing van de één-dimensionale golfvergelijking, namelijk:

$$y = \{A(k) \sin kx + B(k) \cos kx\}\, \{C(k) \sin kvt + D(k) \cos kvt\},$$

waarbij de integratieconstanten A, B, C en D nog van k kunnen afhangen. Als deze "constanten" reguliere functies van k zijn, kunnen we, door integratie over k langs een of andere kromme in het complexe k vlak, een zeer algemene oplossing van de golfvergelijking construeren. Deze vier functies èn de integratieweg moeten in een gegeven geval zo worden gekozen dat aan alle randvoorwaarden wordt voldaan, en als dat gelukt is, hebben we de oplossing die we zoeken, althans in integraalvorm.

In vele gevallen is het niet nodig dat we integralen te hulp roepen: we kunnen vaak volstaan met oneindige sommen, zoals in het geval van de snaar.

Als randvoorwaarden hebben we $y(0,t) = y(a,t) = 0$, voor $t \geqslant 0$, en als beginvoorwaarden $y(x,0) = y_0(x)$, $y_t(x,0) = y_1(x)$ voor $0 \leqslant x \leqslant a$. Met andere woorden: de homogene randvoorwaarden en de beginvoorwaarden zijn separeerbaar, en dan kunnen we aan de randvoorwaarden op alle tijden voldoen door te eisen dat het x-gedeelte van de speciale oplossing nul wordt bij $x = 0$ en $x = a$: $f(0) = f(a) = 0$.

De vergelijking $f'' + k^2 f = 0$ heeft als algemene oplossing $A \sin kx + B \cos kx$. Wil deze functie nul zijn voor $x = 0$, dan moet $B = 0$ zijn. Wil ze tevens nul zijn voor $x = a$, dan moet k speciaal worden gekozen, en wel zo dat $\sin ka = 0$ is, dus $k = n\pi/a$ (n geheel). Het geval $k = 0$ geeft alleen de oplossing $y \equiv 0$, waar we niets aan hebben. De oplossingen voor $n = +m$ en $n = -m$ zijn essentieel dezelfde. We kunnen ons dus beperken tot $k = n\pi/a$ met $n = 1, 2, \ldots$.

Waarden van λ, zodanig dat $y'' + \lambda y = 0$ oplossingen heeft die aan $y = 0$ voor $x = 0$ en $x = a$ voldoen, heten eigenwaarden. Deze eigenwaarden zijn dus ($\lambda = k^2$)

$$\lambda = \lambda_n = (n\pi/a)^2 \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots\ )$$

en de bijbehorende oplossingen van het x-probleem (eigenfuncties) zijn evenredig met $\sin(\sqrt{\lambda_n}\, x)$. Vaak kiest men een evenredigheidsfactor zo dat het gemiddelde kwadraat op het interval (0,a) gelijk aan 1 is. Dan zijn de aldus genormeerde eigenfuncties in ons geval

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\frac{n\pi x}{a} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots\ ).$$

Dit oneindig systeem van eigenfuncties is compleet orthonormaal op (0,a). Dat de functies $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) orthonormaal zijn op het interval (0,a) betekent

$$\int_0^a f_n(x)\ f_m(x)\ dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases} \quad ;$$

dat ze compleet zijn, wil zeggen: iedere continue functie $f(x)$ op $[0,a]$ kan worden geapproximeerd door een eindige lineaire combinatie van deze functies zodanig dat het gemiddelde kwadratische verschil over het interval willekeurig klein is. Met andere woorden: bij $\varepsilon > 0$ kan men vinden een rangnummer n en coefficienten A_m ($m = 1, 2, \ldots, n$) zodanig dat geldt

$$\int_0^a \left| f(x) - \sum_{m=1}^{n} A_m \sin(n\pi x/a) \right|^2 dx < \varepsilon .$$

Is $f(x)$ fatsoenlijk genoeg, dan kan $f(x)$ zelfs in een convergente reeks van eigenfuncties worden ontwikkeld, een situatie die zich bij praktische problemen meestal wel voordoet. Ten hoogste zullen er in de praktijk een eindig aantal uitzonderingspunten zijn, waar de reeks de functie niet voorstelt, of waar de convergentie niet uniform is. Zou $f(x)$ niet aan de homogene randvoorwaarde $f(0) = 0$ voldoen, dan zou de reeks in de buurt van $x = 0$ niet uniform convergeren, enz.

De beweging $y(x,t)$ van de snaar kan op ieder ogenblik t naar deze eigenfuncties in de x-coordinaat worden ontwikkeld. De coefficienten zijn dan uiteraard functies van t, die we trouwens al kennen:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos(n\pi vt/a) + B_n \sin(n\pi vt/a)\} \sin(n\pi x/a) .$$

De onbekende coefficienten A_n en B_n worden dan, net als aan het slot van §.4, uit de beginuitwijking $y(x,0)$ en de beginsnelheid $y_t(x,0)$ bepaald.

We krijgen natuurlijk op deze wijze van separatie dezelfde oplossing als in §.4, maar de filosofie is een andere. Het is de laatste aanpak van het probleem die we in vele andere gevallen met vrucht kunnen toepassen. Dit zullen we nog eens illustreren aan het geval van de <u>inhomogene</u> golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - f(x,t) \qquad (t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a)$$

Hierbij is $f(x,t)$ een gegeven functie, met $f(0,t) = f(a,t) = 0$; bovendien zijn de beginwaarden van y en y_t voor $t = 0$ gegeven.

In de eerste plaats gaan we $f(x,t)$ naar de eigenfuncties van het x-probleem ontwikkelen:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin (n\, \pi x/a) \;.$$

Daarbij mogen we dus onderstellen dat we de coefficienten $c_n(t)$ kennen:

$$c_n(t) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x,t) \sin (n\pi x/a)\, dx.$$

In de tweede plaats gaan we de beginuitwijking en de beginsnelheid op dezelfde wijze ontwikkelen:

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin (n\pi\, x/a) \;,$$

$$y_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin (n\pi\, x/a) \;.$$

Daarbij zijn ook de getallen a_n en b_n bekend. Bij gegeven $y(x,0)$ en $y_t(x,0)$ kunnen we ze berekenen uit

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a y(x,0) \sin (n\pi x/a)\, dx, \quad b_n = \frac{2}{a} \int_0^a y_t(x,0) \sin (n\pi x/a)\, dx.$$

In de derde plaats gaan we de oplossing $y(x,t)$, naar welke we zoeken, ontwikkelen naar dezelfde functies:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin (n\pi x/a) .$$

Daarbij moeten we dan nog onbekende coefficienten $A_n(t)$ uit de bekende grootheden a_n, b_n en $c_n(t)$ berekenen.

De uitwerking van deze berekening is als volgt. Substitueer de laatste ontwikkeling in de differentiaalvergelijking. Daarvan wordt het linkerlid

$$y_{xx} - (1/v^2)\, y_{tt} = -\sum_{n=1}^{\infty} \{(n\pi/a)^2 A_n(t) + (1/v^2) A_n''(t)\} \sin (n\pi x/a).$$

Vergelijken we dit met het rechterlid, $-f(x,t)$, en wel diens ontwikkeling naar de eigenfuncties, en stellen we de coefficienten van $\sin(n\pi x/a)$ twee aan twee gelijk, dan vinden we een nodige voorwaarde voor de $A_n(t)$ in de vorm van een inhomogene, maar gewone differentiaalvergelijking:

$$A_n''(t) + (n\pi v/a)^2 A_n(t) = v^2 c_n(t).$$

Bij vaste n is de oplossing van deze vergelijking voor $t \geqslant 0$ eenduidig bepaald door de waarden van de functie en haar afgeleide in het punt $t = 0$, dus door $A_n(0)$ en $A_n'(0)$. Maar inderdaad kennen we deze laatsten:

$$A_n(0) = a_n, \qquad A_n'(0) = b_n.$$

Ergo, $A_n(t)$ is die oplossing van

$$y''(t) + k^2 y(t) = - f(t) ,$$

met $k = n\pi v/a$ en $f(t) = -v^2 c_n(t)$, welke voldoet aan $y(0) = a_n$ en $y'(0) = b_n$.

Allereerst gaan we een oplossing van de laatste vergelijking construeren met randvoorwaarden $y(0) = y'(0) = 0$. Deze speciale oplossing vinden we met de methode van de variatie van constanten:

$$y = \alpha(t) \sin kt + \beta(t) \cos kt,$$

$$y' = k\,\alpha(t) \cos kt - k\,\beta(t) \sin kt \qquad \text{als geldt}$$

$$\alpha'(t) \sin kt + \beta'(t) \cos kt = 0.$$

Dan wordt verder

$$y'' = -k^2 y + k\,\alpha'(t) \cos kt - k\,\beta'(t) \sin kt,$$

en voor $\alpha'(t)$ en $\beta'(t)$ vinden we de vergelijkingen

$$\alpha'(t) \cos kt - \beta'(t) \sin kt = -k^{-1} f(t)$$

$$\alpha'(t) \sin kt + \beta'(t) \cos kt = 0 ,$$

met oplossing

$$\alpha'(t) = -k^{-1} f(t) \cos kt, \ \beta'(t) = k^{-1} f(t) \sin kt,$$

en door integratie

$$\alpha(t) = - k^{-1} \int^t f(\tau) \cos k\tau \, d\tau,$$

$$\beta(t) = k^{-1} \int^t f(\tau) \sin k\tau \, d\tau.$$

Invullen geeft

$$y(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f(\tau) \sin k(\tau - t) \, d\tau,$$

waarbij de ondergrens 0 genomen is, zodat we automatisch een functie hebben met $y(0) = y'(0) = 0$.

Om nu een oplossing te vinden die de beginwaarden $y(0) = a_n$ en $y'(0) = b_n$ heeft, tellen we bij deze particuliere integraal de functie

$$a_n \cos kt + \frac{1}{k} b_n \sin kt$$

op. Deze laatste functie is oplossing van de homogene vergelijking. In de oorspronkelijke grootheden vinden we dan voor de coefficienten $A_n(t)$ de volgende uitdrukking:

$$A_n(t) = a_n \cos (n\pi vt/a) + (a/n\pi v) b_n \sin (n\pi vt/a) +$$

$$+ (av/n\pi) \int_0^t c_n(\tau) \sin \frac{n\pi v}{a} (t - \tau) \, d\tau.$$

Daarmee is in principe de oplossing van ons probleem aangegeven. Deze oplossing bestaat uit twee delen,

$$y(x,t) = \eta(x,t) + Y(x,t) ,$$

met

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{n\pi v}{a} t + \frac{a}{n\pi v} b_n \sin \frac{n\pi v}{a} t \right\} \sin \frac{n\pi x}{a} ,$$

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{va}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{a} \int_0^t c_n(\tau) \sin \frac{n\pi v}{a} (t - \tau) \, d\tau.$$

Het stuk $\eta(x,t)$ is de beweging van de snaar zonder uitwendige krachten trillende bij gegeven beginuitwijking en beginsnelheid; het stuk $Y(x,t)$ beschrijft de beweging van de snaar tengevolge van de uitwendige kracht $f(x,t)$ die bij $t = 0$ begint te werken als vóór dat ogenblik de snaar in absolute rust verkeert, en van die rusttoestand uit gaat trillen.

We beschouwen het stuk $Y(x,t)$ wat nader. Daarvoor kunnen we schrijven:

$$Y(x,t) = \int_0^t H(x,t;\tau)\, d\tau , \qquad (t > 0)$$

met

$$H(x,t;\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{va}{n\pi}\, c_n(\tau)\, \sin \frac{n\pi v}{a}(t-\tau)\, \sin \frac{n\pi x}{a} .$$

Verificatie van de volgende eigenschappen is triviaal:

(1) $H(x,t;\tau)$ voldoet als functie van x en t aan de homogene golfvergelijking $H_{xx} - (1/v^2)\, H_{tt} = 0$,

(2) $H(x,\tau;\tau) = 0$,

(3) $H_t(x,\tau;\tau) = v^2\, f(x,\tau)$.

De laatste gelijkheid volgt uit

$$H_t(x,t;\tau) = v^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\tau) \cos \frac{n\pi v}{a}(t-\tau)\, \sin \frac{n\pi x}{a}$$

en substitutie $t = \tau$.

Resumerende, hebben we de <u>stelling</u>:
Stel $Y(x,t)$ is oplossing van $y_{xx} - (1/v^2)\, y_{tt} = - f(x,t)$ met beginvoorwaarden $y = 0$ en $y_t = 0$ voor $t = 0$. Dan geldt

$$Y(x,t) = \int_0^t H(x,t;\tau)\, d\tau,$$

waarin $H(x,t;\tau)$ de oplossing is voor $t > \tau$ van $h_{xx} - (1/v^2)\, h_{tt} = 0$ met beginwaarden $h = 0$ en $h_t = v^2\, f(x,t)$ voor $t = \tau$.

Daarmee hebben we een gedwongen beweging uit de rusttoestand teruggebracht tot een vrije beweging met een geschikte begintoestand.

<u>Opgave</u>. Bewijs deze stelling direct; d.w.z. zonder gebruikmaking van Fourier-ontwikkeling.

Opmerking.
Deze stelling kunnen we fysisch gemakkelijk doorzien met de pulstechniek. We nemen een uitwendige kracht ter grootte van $-f(x,\tau)\ \delta(t-\tau)$, en onderstellen dat het systeem in rust verkeert voor $t < \tau$.
Dan geldt de "differentiaalvergelijking"

$$y_{xx} - v^{-2}\ y_{tt} = -\ f(x,\tau)\ \delta(t-\tau)\ ,$$

en de beginvoorwaarden $y \equiv 0\ (t < \tau)$, $y = 0\ (t = \tau)$.

Mijnheer Z begrijpt dit niet, en moet daarom integreren over t van $\tau - \varepsilon$ tot $\tau + \varepsilon$. Er zijn geen discontinuiteiten in y, y_x, y_{xx}, ..., maar wel in y_t. Dus

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} y_{xx}\ dt \to 0 \qquad (\varepsilon \downarrow 0)$$

en

$$-\ v^{-2}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} y_{tt}\ dt = -\ v^{-2}\left\{(y_t)_{\tau+\varepsilon} - (y_t)_{\tau-\varepsilon}\right\} \to -\ v^{-2}(y_t)_{\tau+0}\ .$$

Het rechterlid geeft na integratie $-\ f(x,\tau)$. Dus moet Z bovenstaande vergelijking met de beginvoorwaarden interpreteren als

$$y_{xx} - v^{-2}\ y_{tt} = 0\ (t > \tau), \qquad (y_t)_{\tau+0} = v^2\ f(x,\tau),$$

$$y \equiv 0\ (t < \tau), \qquad y = 0\ (t = \tau).$$

De oplossing hiervan is dus juist de functie $H(x,t;\tau)$, de respons van het systeem in rust op de piek-functie op tijd $t = \tau$. Een willekeurige functie $f(x,t)$ kunnen we schrijven als een continue som (integraal) van piek-functies op verschillende tijden:

$$f(x,t) = \int_0^{\infty} f(x,\tau)\ \delta(t-\tau)\ d\tau.$$

Hierbij is aangenomen dat $f(x,t) = 0$ is voor $t < \tau$, zodat de ondergrens 0 wordt in plaats van $-\infty$.

Door superpositie vindt men dan

$$Y(x,t) = \int_0^{\infty} H(x,t;\tau)\ d\tau = \int_0^{t} H(x,t;\tau)\ d\tau,$$

immers $H(x,t;\tau) = 0$ voor $t < \tau$, zodat in de eerste integraal de integrand nul is voor $\tau > t$.
Dit formalisme geldt zeer algemeen voor iedere lineaire differentiaaloperator (zoals hier $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$), en ook in meer dan een plaatsvariabele (hier x).

§.6 Diffusie-problemen in één dimensie

Bij de wiskundige behandeling van een diffusie-verschijnsel in een homogeen en isotroop medium gaat men uit van de vergelijking

$$\underline{S} = - D \text{ grad } C ,$$

waarin C de concentratie der diffunderende materie, $\underline{S}$ de dichtheid der materie-stroom, en D een diffusie-constante is. Uit de eis dat de materie niet verloren gaat (bij afwezigheid van bronnen en putten), mathematisch uitgedrukt in de continuiteits-vergelijking

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div } \underline{S} = 0,$$

volgt door eliminatie van $\underline{S}$ dat C moet voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \Delta C.$$

Deze vergelijking heet diffusie-vergelijking. Dezelfde vergelijking speelt een rol bij warmtegeleidings-verschijnselen, en ze heet daarom ook wel vergelijking van de warmtegeleiding:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \Delta T,$$

waarin T de temperatuur en $\varkappa$ een materiaal-constante is. Al deze vergelijkingen gelden bij afwezigheid van uitwendige bronnen.

We behandelen voorlopig één-dimensionale problemen, en dat maar zeer summier. De wiskundige technieken zijn analoog aan die ontmoet bij potentiaal- en golfproblemen in één dimensie. In één dimensie reduceert de vergelijking zich tot $\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$. Een speciale oplossing hiervan, geldig voor $- \infty < x < \infty$ en $t > 0$ is (ga dit zelf na)

$$C = A\, t^{-\frac{1}{2}} \exp\,(- x^2/4Dt),$$

met A een constante. Deze functie beschrijft de diffusie van een hoeveelheid materie M, die op tijd t = 0 geconcentreerd is in de oorsprong x = 0. Deze hoeveelheid is

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} C\, dx = 4\, A\, D^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-u^2}\, du = 2\, A\, (\pi D)^{\frac{1}{2}}.$$

Zetten we op t = 0 de eenheid van materie (M = 1) in het punt $x = \xi$, dan vindt diffusie plaats volgens de formule

$$C = \tfrac{1}{2}(\pi Dt)^{-\frac{1}{2}} \exp[-(x-\xi)^2/4Dt].$$

We kunnen nu ook het <u>beginwaardeprobleem</u> eenvoudig oplossen voor de gehele reële as. Laat op tijd $t = 0$ de concentratie-verdeling van de stof gegeven zijn door de functie $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, waarbij uit fysische overwegingen meestal $f(x) \geqslant 0$ en $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx < \infty$ is. Door superpositie vinden we dan onmiddellijk de verdeling op de tijd $t > 0$:

$$C(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/4Dt} f(\xi)\,d\xi .$$

Door een eenvoudige substitutie leidt men hieruit af:

$$C(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2u\sqrt{Dt})\, e^{-u^2}\,du .$$

<u>Opgave</u>: Ten tijde $t = 0$ is de concentratie gegeven door $C = C_o$ $(x < 0)$ en $C = 0$ $(x > 0)$. Dan is op tijd $t > 0$ de concentratie

$$C = \tfrac{1}{2}C_o \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{Dt}).$$

Voor $t \to \infty$ gaat C naar $\frac{1}{2}C_o$, onafhankelijk van x.

<u>Opmerking</u>.
Bij diffusie-problemen en warmtegeleiding stoot men herhaaldelijk op de volgende functies, waarvan uitgebreide tabellen zijn gemaakt:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\,du, \qquad \text{(error-function)},$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2}\,du, \qquad \text{(error-function-complement)}.$$

Natuurlijk kan men ook met superpositie en spiegelprincipe ingewikkelder problemen oplossen, maar evenals bij potentiaal- en golf-vergelijking maakt men beter gebruik van de methode van separatie, zoals we aan een aantal voorbeelden laten zien.

Bij deze methode van separatie substitueert men in de differentiaal-vergelijking $C = f(x)\,g(t)$ en vindt dan, met separatie-constante $-\lambda$,

$$f''(x)/f(x) = -\lambda = g'(t)/Dg(t),$$

en dus als particuliere oplossing

$$C = (\text{functie van } \lambda) \cdot \exp(-Dt\lambda + ix\sqrt{\lambda}).$$

Door integratie of sommatie over λ vinden we dan een algemene oplossing, bijvoorbeeld ($\lambda = \alpha^2$):

$$C(x,t) = \int \phi(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, e^{-\alpha^2 Dt}\, d\alpha .$$

In een gegeven geval moet men dan de functie $\phi(\alpha)$ en de integratieweg zodanig kiezen dat aan de voorgeschreven begin- en rand-voorwaarden wordt voldaan. Hierbij is het meestal voldoende om langs de reële as in het α-vlak te integreren. Dat vereist kennis van de Fourier-integraal. Bij sommatie over α stuit men op Fourier-reeksen en elliptische theta-functies. Ook kennis van Laplace-transformatie is vaak vereist. We kunnen hier voorlopig alleen enkele elementaire gevallen behandelen.

Voorbeeld 1. Stel op tijd $t = 0$: $C = C_o$ $(-a < x < a)$ en $C = 0$ $(|x| > a)$. Dan weten we

$$C(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\, C_o \int_{-a}^{a} e^{-(x-\xi)^2/4Dt}\, d\xi$$

$$= \tfrac{1}{2} C_o \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{2\sqrt{Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{2\sqrt{Dt}}\right) \right] .$$

Anderzijds kunnen we dit probleem ook met Fourier te lijf gaan. De Fourier-getransformeerde van de beginconcentratie is

$$C_o \int_{-a}^{a} e^{-i\alpha x}\, dx = 2C_o \frac{\sin a\alpha}{\alpha} ,$$

en dus met de omkeringsformule

$$C(x,0) = \frac{C_o}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\alpha}{\alpha}\, e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

en met de algemene formule vinden we voor $t > 0$ de uitdrukking

$$C(x,t) = \frac{C_o}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\alpha}{\alpha}\, e^{i\alpha x}\, e^{-\alpha^2 Dt}\, d\alpha.$$

De twee uitkomsten zijn natuurlijk aan elkaar gelijk; met andere woorden, we hebben de laatste integraal uitgedrukt in getabelleerde functies. Een bijzonder geval is het volgende. Neem $C_o = 1/2a$, en laat $a \to 0$. Dit komt overeen met een eenheidsbron-beginconcentratie. De integraal wordt, voor $a \to 0$, gelijk aan

$$\lim_{a \to o} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\alpha}{a\,\alpha}\, e^{i\alpha x}\, e^{-\alpha^2 Dt}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, e^{-\alpha^2 Dt}\, d\alpha .$$

Van vroeger kennen we reeds het concentratieverloop van een eenheidsbron. Gelijkstelling geeft de volgende identiteit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, e^{-\alpha^2 Dt}\, d\alpha = (\pi/Dt)^{\frac{1}{2}}\, e^{-x^2/4Dt}$$

Voorbeeld 2. Laat op $t = 0$ de volgende concentratie-verdeling zijn gegeven:

$$C = C_o \quad (0 < x < a) \qquad \text{(beginvoorwaarde)}$$

en laten we eisen

$$C = 0 \quad (x = 0,\ x = a;\ t > 0) \qquad \text{(randvoorwaarden)}$$

De eigenwaarden en eigenfuncties kunnen we gemakkelijk opschrijven; ze zijn identiek met die uit §.5. Met onbepaalde coefficienten α_n schrijven we dus voor de oplossing

$$C(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{a} \exp\,(-\, n^2 \pi^2 Dt/a^2).$$

Uit

$$C(x,0) = C_o = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{a} \qquad (0 < x < a)$$

volgen dan de coefficienten α_n met behulp van de formule van Euler. Die van even rangnummer zijn nul. Het slotresultaat wordt

$$C(x,t) = (4C_o/\pi) \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a}\, e^{-(2n+1)^2 \pi^2\, Dt/a^2} .$$

Deze reeks convergeert zeer snel voor grote waarden van t. Het feit dat $C(x,\infty) = 0$ is, voor $0 < x < a$, betekent dat alle materie op den duur is verdwenen uit dit interval. De materie is bij $x = 0$ en $x = a$ weggelekt, ondanks het feit dat daar voor alle tijden $t > 0$ de concentratie nul is. Natuurlijk is aan de uiteinden $\partial C/\partial x \neq 0$.

Voorbeeld 3. Beschouw het volgende probleem. Op tijd $t = 0$ is de halfruimte $x > 0$ op temperatuur $T = 0$, en op tijd $t = 0$ wordt de rand $x = 0$ op constante temperatuur T_0 gebracht en op die temperatuur gehouden voor $t > 0$. Er is dus een warmtebron (ergens in $x < 0$) die er voor zorgt dat de halfruimte $x > 0$ langzamerhand op temperatuur T_0 komt. Hoe is het temperatuurverloop als functie van plaats en tijd ?

Dit lossen we op met de Fourier-sinus-transformatie. De onbekende $T(x,t)$ voldoet aan

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,.$$

Vermenigvuldig links en rechts met $\sin(\xi x)$ en integreer over x. Het linkerlid geeft

$$\int_0^\infty \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t}\sin(\xi x)\,dx = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty T\sin(\xi x)\,dx = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\theta}{\partial t}\,,$$

waarbij we hebben gesteld:

$$\theta(\xi,t) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_0^\infty T(x,t)\sin(\xi x)\,dx\,.$$

Het rechterlid geeft, na tweemaal partieel te integreren,

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\cdot\sin(\xi x)\,dx = \left[\frac{\partial T}{\partial x}\sin(\xi x) - \xi T\cos(\xi x)\right]_0^\infty - \xi^2\int_0^\infty T\sin(\xi x)\,dx$$

$$= \xi T_0 - \xi^2\theta,$$

aangenomen dat de volgende relaties gelden:

(1) $\quad T \to T_0 \quad (x \downarrow 0)$,

(2) $\quad x\dfrac{\partial T}{\partial x} \to 0 \quad (x \downarrow 0)$,

(3) $\quad T \to 0\ (x \to \infty),\ \dfrac{\partial T}{\partial x} \to 0 \quad (x \to \infty)$,

alles genomen bij vaste $t > 0$. Voorwaarde (1) volgt uit het gegevene; voorwaarde (2) laat toe dat $\partial T/\partial x$ oneindig groot wordt voor $x \downarrow 0$; voorwaarden (3) zijn fysisch vereist. Let wel dat $T \to T_0$ $(t \to \infty)$ bij vaste x!

Voor θ vinden we dus de differentiaalvergelijking $\frac{\partial\theta}{\partial t} + \varkappa\,\xi^2\theta = \varkappa\,\xi\,T_o$.
Oplossen geeft: $\theta = T_o/\xi + f(\xi)\,e^{-\varkappa\xi^2 t}$. Omdat $T(x,0) = 0$ is, en dus $\theta(\xi,0) = 0$, volgt $f(\xi) = -\,T_o/\xi$. Dus vinden we tenslotte

$$\theta(\xi,t) = \frac{T_o}{\xi}\,(1 - e^{-\varkappa\xi^2 t}).$$

De Fourier-sinus-getransformeerde van de onbekende functie $T(x,t)$ is nu bekend. Dan vinden we met de omkeerformule voor deze onbekende functie

$$\begin{aligned} T(x,t) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \theta(\xi,t)\,\sin(x\xi)\,d\xi \\ &= \frac{2T_o}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(x\xi)}{\xi}\,(1 - e^{-\varkappa t\,\xi^2})\,d\xi \\ &= T_o\ \operatorname{erfc}\,(x/2\sqrt{\varkappa t}) \end{aligned}$$

<u>Opgave</u>. Controleer dat deze functie aan alle begin- en randvoorwaarden voldoet.

<u>Opgave</u>. Bewijs dat deze uitkomst ook als volgt kan worden geschreven:

$$\frac{2}{\pi}\,T_o\int_0^\infty \frac{\sin\xi x}{\xi}\,(1 - e^{-\varkappa\xi^2 t})\,d\xi = \frac{i}{\pi}\,T_o\int \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha}\ e^{-\alpha^2\varkappa t}\,d\alpha\,,$$

waarbij in de laatste integraal langs de <u>bovenkant</u> van de reële as wordt geïntegreerd (van $-\infty + i0$ naar $\infty + i0$), en de singulariteit van de integrand bij $\alpha = 0$ met een boogje naar boven wordt vermeden. Aldus is de oplossing in voorbeeld 3 teruggebracht onder de algemene formulering.

<u>Opgave</u>. Controleer aan de eerste opgave van §.6 dat de oplossing van voorbeeld 3 identiek is met die welke wordt verkregen door aan te nemen dat op tijd $t = 0$ de andere halfruimte $x < 0$ op temperatuur $2T_o$ is.

§.7 Potentiaaltheorie in twee dimensies

In twee dimensies, met x en y als rechthoekige coordinaten (rechts systeem), is de homogene potentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Deze vergelijking is dezelfde als de golfvergelijking in één dimensie (cf. §.4, met $v = i$). De algemene oplossing, in de hele ruimte, is dus

$$u(x,y) = f(x + iy) + g(x - iy),$$

waarin f en g "willekeurige" functies zijn van één complexe variabele.

Zo zien we duidelijk de samenhang van potentiaaltheorie in twee dimensies enerzijds en complexe-functietheorie anderzijds:
$u(x,y) = f(z) + g(\overline{z})$. Potentiaalproblemen in twee dimensies kan men inderdaad met functietheoretische middelen (cf. syllabus Wiskunde V) oplossen, waarbij conforme afbeeldingen een grote rol spelen. Onafhankelijk van Wiskunde V zullen we hier de onderlinge samenhang schetsen.

Zij G een (enkelvoudig-samenhangend) gebied in het (x,y)-vlak. Laten in G twee reële functies $u(x,y)$ en $v(x,y)$ eenwaardig gedefinieerd zijn, en neem aan dat alle vier eerste-orde partiële afgeleiden van deze functies bestaan en totaal-continu zijn in G. Voeg aan (x,y) het complexe getal $z = x+iy$ toe, en voeg aan (u,v) het complexe getal $w = u+iv$ toe. Dan is $w = w(z)$ een complexe functie van de complexe variabele z, gedefinieerd in G en aldaar een continue functie van z. Deze functie is in het algemeen geen analytische functie van z.

Definitie: $w = w(z)$ heet analytisch in G als w in ieder punt van G differentieerbaar is; w heet differentieerbaar in het punt z als

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}$$

bestaat en onafhankelijk is van de wijze waarop h naar nul gaat. In dat geval noemt men deze limiet de afgeleide van w; deze afgeleide wordt aangegeven met $w'(z)$.

In Wiskunde V werd bewezen dat een analytische functie van z automatisch oneindig-vaak differentieerbaar is, zodat alle afgeleiden $w'(z)$, $w''(z)$, ..., analytische functies van z zijn indien $w(z)$ analytisch is.

Nu kan men $w'(z)$ gemakkelijk uitdrukken in de partiële afgeleiden van u en v naar x en y. In horizontale richting gedifferentieerd krijgt men

$$w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\,, \qquad \left(= \frac{\partial}{\partial x}\,(u + iv)\right)$$

in verticale richting

$$w'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}\,, \qquad \left(= \frac{\partial}{\partial(iy)}\,(u + iv)\right)$$

Door gelijkstelling vindt men

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\,\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

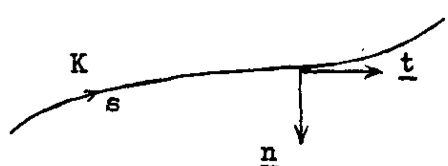
Dit zijn de partiële differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann, waaraan de componenten u en v van een analytische functie voldoen.

Definieer nu een vectorveld $\underline{a}(x,y)$ in G door de afspraak

$$a_x = u(x,y), \qquad a_y = -\,v(x,y)\ ;$$

a_x en a_y zijn dus de rechthoekige componenten van de vector $\underline{a}$.

Zij nu K een "gladde" kromme in G, met orientatie, booglengte s, raaklijnvector $\underline{t}$, normaalvector $\underline{n}$, als in figuur



De integraal

$$\int_K w(z)\ dz$$

heeft betekenis, omdat w(z) een continue functie van z is (zie Wiskunde V). De integraal is gedefinieerd als limiet van een Riemann-som. Formele omvorming tot lijnintegralen (Stieltjes-integralen) is onder de gegeven omstandigheden geoorloofd:

$$\int_K w(z)\ dz = \int_K (u+iv)(dx + idy) = \int_K (udx - vdy) + i \int_K (udy + vdx).$$

We kunnen hier ook Riemann-integralen van maken door de booglengte in te voeren:

$$\int_K w(z)\ dz = \int_K \left(u\,\frac{dx}{ds} - v\,\frac{dy}{ds}\right) ds + i \int_K \left(u\,\frac{dy}{ds} + v\,\frac{dx}{ds}\right) ds.$$

Nu geldt

$$u \frac{dx}{ds} - v \frac{dy}{ds} = a_x \cos(x,t) + a_y \cos(y,t)$$

$$= a_x t_x + a_y t_y = \underline{a} \cdot \underline{t} \,,$$

$$u \frac{dy}{ds} + v \frac{dx}{ds} = a_x t_y - a_y t_x = a_x n_x + a_y n_y = \underline{a} \cdot \underline{n} \,.$$

Dus
$$\int_K w(z)\, dz = \int_K a_t \, ds + i \int_K a_n \, ds \,,$$

waarin a_t en a_n de componenten zijn van $\underline{a}$ tangentieel respectievelijk normaal ten opzichte van K.

Is $\underline{a}$ een kracht, dan is de eerste integraal een arbeid: daarom heet de eerste integraal in het rechterlid de <u>arbeidsintegraal</u>. Is $\underline{a}$ een stroomsnelheid, dan is de tweede integraal gelijk aan de per tijdseenheid door de kromme K (van links naar rechts) heen gevloeide stof: daarom heet de tweede integraal in het rechterlid de <u>stromingsintegraal</u>.

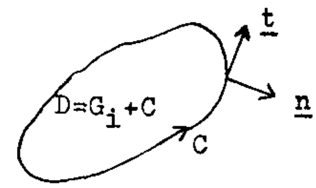
Definieer nu twee <u>scalaire</u> functies door

$$\text{Div } \underline{a} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \,,$$

$$\text{Rot } \underline{a} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) .$$

De scalaire Rot $\underline{a}$ is dus de component van de vector rot $\underline{a}$ normaal op het (x,y)-vlak:

$$\text{Rot } \underline{a} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ a_x & a_y & 0 \end{vmatrix} .$$



Stel C is een enkelvoudige gesloten weg (Jordan-kromme) geheel in G liggende, en positief georienteerd (zie figuur), met $D = G_i + C$ het gesloten domein bestaande uit het inwendige G_i en diens rand C (G_i is een enkelvoudig-samenhangend gebied). Dan kennen we uit de integraalrekening de volgende stellingen:

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\, dxdy = \int_C f\, dy, \quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\, dxdy = - \int_C f\, dx.$$

Het bewijs van deze formules is triviaal als C een rechthoek is met zijden evenwijdig aan de coordinaat-assen (partiële integratie). Voor "willekeurige" C volgen de stellingen door additie van de individuele bijdragen der rechthoeken waarin D kan worden verdeeld (en de nodige limiet-beschouwingen aan de rand). Toepassen van deze formules in ons geval geeft

$$\int_C (udx - vdy) = - \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy = \iint_D \text{Rot } \underline{a}\, dxdy,$$

$$\int_C (udy + vdx) = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D \text{Div } \underline{a}\, dxdy.$$

Daarmee kunnen we de integraal van een complexe continue functie langs een gesloten kromme uitdrukken als de som van twee oppervlakte-integralen over het door de kromme ingesloten domein:

$$\int_C w(z)\, dz = \iint_D \text{Rot } \underline{a}\, dxdy + i \iint_D \text{Div } \underline{a}\, dxdy,$$

waarin $\underline{a}$ de met w(z) corresponderende vector is. Anderzijds hadden we

$$\int_C w(z)\, dz = \int_C a_t\, ds + i \int_C a_n\, ds\ .$$

Door vergelijk vinden we

$$\int_C a_t\, ds = \iint_D \text{Rot } \underline{a}\, dxdy \qquad \text{(stelling van Stokes)}$$

$$\int_C a_n\, ds = \iint_D \text{Div } \underline{a}\, dxdy \qquad \text{(stelling van Gauss)}$$

in overeenstemming met de stellingen van Stokes en Gauss in twee dimensies (cf. Wiskunde IV).

Stel nu dat w(z) een analytische functie is. Dan voldoen u en v aan de vergelijkingen van Cauchy en Riemann: $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ en $\partial v/\partial x = - \partial u/\partial y$. Voor de vector $\underline{a}$ toegevoegd aan w(z) geldt dan

$$\text{Div } \underline{a} = 0, \text{ Rot } \underline{a} = \underline{0}\ ,$$

en dus

$$\int_C w(z)\, dz = 0\ .$$

Hiermee is de hoofdstelling der integratie (cf. Wiskunde V) nogmaals bewezen (echter onder de extra-aanname dat de eerste afgeleiden continu zijn):

> de integraal van een analytische functie langs een gesloten kromme is altijd nul.

Equivalent hiermee is:

> de integraal van een analytische functie langs een willekeurige kromme hangt niet af van het preciese verloop der kromme maar is alleen een functie van de eindpunten der kromme.

Zij $f(z)$ een of andere analytische functie in het gebied G, en splits $f(z)$ in reële en imaginaire componenten:

$$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y) \qquad (z = x + iy)$$

Dan zijn u en v harmonische functies in G, d.w.z. ze voldoen in G aan de vergelijking van Laplace:

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta v = 0.$$

De functies u en v voldoen ook aan de differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Hieruit volgt

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } v = u_x v_x + u_y v_y = 0.$$

De vectoren grad u en grad v staan dus loodrecht op elkaar. Dit betekent dat de lijnen u = const en v = const elkaar loodrecht snijden.

De twee potentiaalfuncties

$$u = \text{Re } f(z) \quad \text{en} \quad v = \text{Im } f(z)$$

hangen dus op zeer bijzondere manier met elkaar samen; deze samenhang is symmetrisch. Als we de lijnen u = constant als equipotentiaallijnen interpreteren dan zijn de bijbehorende krachtlijnen gegeven door de lijnen v = constant, èn omgekeerd. Men noemt daarom u en v geconjugeerde potentialen; u is de geconjugeerde van v, en v is de geconjugeerde van - u.

Voorbeelden:

$$f(z) = z^2, \qquad u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy$$

$$f(z) = \sin z, \quad u = \sin x \cosh y, \quad v = \cos x \sinh y$$

$$f(z) = \log z, \quad u = \log |z|, \quad v = \arg z$$

(Als we stellen: $z = r\, e^{i\theta}$, dan $\log z = \log r + i\theta$; deze functie is niet analytisch in de omgeving van de oorsprong en is oneindig-veelwaardig omdat θ dat is; hoofdwaarde van logarithme wordt verkregen als men θ beperkt tot $-\pi < \theta \leqslant \pi$; we bedoelen met log z altijd deze hoofdwaarde, tenzij anders uitdrukkelijk wordt gezegd; zie Wiskunde V.)

Het is gemakkelijk in te zien dat twee geconjugeerde potentialen elkaar ondubbelzinnig bepalen, afgezien van een additieve constante. Bewijs is als volgt. Zij O een vast punt in G, en P een variabel punt. We denken P met O verbonden door een kromme K in G. Dan geldt

$$u(P) - u(O) = \int_K \frac{\partial u}{\partial s}\, ds = \int_O^P \frac{\partial u}{\partial s}\, ds ,$$

waarbij de laatste notatie zinvol is omdat de integraal niet van K afhangt, zolang K maar loopt binnen G van O naar P. Voer nu in de normaal van K, zodanig dat de raaklijnvector $\underline{t}$ en de normaalvector $\underline{n}$ dezelfde orientatie hebben als de y en x assen (dus $\underline{n}$ en $\underline{t}$ vormen een rechts systeem, net als x en y). In de buurt van een punt van K kunnen we een nieuw rechthoekig coordinatensysteem invoeren met assen langs $\underline{n}$ en $\underline{t}$. Het is duidelijk dat in deze nieuwe coordinaten weer de Cauchy-Riemann relaties gelden. Ze zien er, in betrekking tot K, als volgt uit:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial s} .$$

Dan wordt dus

$$u(P) - u(O) = \int_O^P \frac{\partial u}{\partial s}\, ds = -\int_O^P \frac{\partial v}{\partial n}\, ds .$$

Derhalve

$$u(P) = \text{constante} - \int_O^P \frac{\partial v}{\partial n}\, ds.$$

Dit betekent: als v bekend is in het gebied G, zodat ook de integraal een bekende functie van P(x,y) is, dan is de geconjugeerde u van v op een additieve constante na eenduidig bepaald.

Omgekeerd ziet men:

$$v(P) = \text{constante} + \int_O^P \frac{\partial u}{\partial n}\, ds,$$

zodat we bij bekende u de functie v eenduidig kunnen bepalen afgezien van een additieve constante.

De hierboven bewezen stellingen komen overeen met een stelling behandeld in Wiskunde V, volgens welke het reële deel van een analytische functie eenduidig is bepaald door het imaginaire deel, en omgekeerd, natuurlijk afgezien van additieve constanten.

Een aantal formules uit de vector-analyse wordt in potentiaaltheorie veel gebruikt. De stellingen van Gauss en Stokes in twee dimensies hebben we reeds genoemd. We herhalen ook de formules van Green. De eerste formule van Green is

$$\int (U \,\Delta\, V + \text{grad } U \,.\, \text{grad } V)\, dxdy = \int U \frac{\partial V}{\partial n}\, ds.$$

De tweede formule van Green is

$$\int (U \,\Delta\, V - V \,\Delta U)\, dxdy = \int (U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n})\, ds.$$

Opmerkingen: De functies U en V zijn gedefinieerd in een gebied G plus zijn rand C, en voldoen aldaar aan zekere (voldoende) voorwaarden van continuiteit en differentieerbaarheid. De integraal links wordt uitgestrekt over het domein G+C, is dus oppervlakte-integraal. De integraal rechts wordt genomen langs de rand C, die positief is georienteerd, met s als booglengte en $\underline{n}$ de naar buiten wijzende normaal. De eerste formule volgt uit de formule van Gauss, toegepast op de vector $\underline{a}$ = U grad V; de tweede formule volgt uit de eerste door daarvan af te trekken de analoge eerste met U en V verwisseld.

Nu enkele fundamentele stellingen.

Stelling: Een in een begrensd gebied G harmonische functie die op de rand van het gebied de waarde nul aanneemt, is identiek nul.
Bewijs: Zij U die harmonische functie. Pas Green I toe voor V = U. Dan volgt, daar $\Delta U = 0$ is, en U = 0 op de rand van G,

$$\int |\text{grad } U|^2 \, dxdy = \int U \frac{\partial U}{\partial n}\, ds = 0.$$

De integrand in de eerste integraal is niet negatief. Dus grad U = $\underline{0}$ in G, dus U constant; en daar U = 0 op de rand geldt, moet deze constante waarde van U noodzakelijk nul zijn. Dus U = 0 overal in G.

Stelling: Een in een begrensd gebied G harmonische functie is door haar randwaarden ondubbelzinnig bepaald.
Bewijs: Stel U is een harmonische functie met zekere randwaarden, en zij V een andere harmonische functie, met diezelfde randwaarden. Dan is U-V een harmonische functie in G met randwaarden nul. Dan is op grond van de vorige stelling U-V = 0, dus U = V.

Opgave: Bewijs de volgende stellingen.

Stelling: Is U harmonische functie in G, en $\partial U/\partial n = 0$ op rand van G, dan is U constant binnen G.

Stelling: Een in een begrensd gebied harmonische functie is, door de waarden van haar normaal-afgeleide aan de rand, ondubbelzinnig bepaald op een additieve constante na.

Opmerking: Men kan zich afvragen of, bij gegeven begrensd gebied G met rand C, en voorgeschreven waarden van de functie respectievelijk van haar normaal-afgeleide, een in G harmonische functie bestaat, zodanig dat die functie die voorgeschreven waarden aan de rand aanneemt. Bij voldoend-gladde rand en voldoend-gladde randwaarden is het antwoord in het eerste geval: ja! In het tweede geval moet aan een extra eis zijn voldaan, namelijk dat de integraal over de randwaarden genomen langs C nul zij, en ook dan is het antwoord: ja! Deze stellingen aangaande de existentie van de oplossing kunnen we niet in dit college bewijzen. Stellingen over de eenduidigheid der oplossing zijn meestal eenvoudig. Deze stellingen hebben in eerste instantie niets te maken met complexe-functietheorie, want hun uitbreidingen in drie dimensies gaan onverminderd door als men voor Δ de Laplace-operator in drie dimensies neemt. Helaas (?) kunnen we echter alleen in het geval van twee dimensies in de potentiaaltheorie met vrucht gebruik maken van de idee van een analytische functie van een complexe variabele.

Tenslotte willen we nog iets zeggen over de potentiaal van een eenheidsbron. Zij r de afstand van het punt (x,y) tot de oorsprong (0,0). Dan is gemakkelijk in te zien dat

$$\log \frac{1}{r} = - \tfrac{1}{2} \log (x^2 + y^2)$$

buiten de oorsprong aan de potentiaalvergelijking voldoet. Deze functie is dus een harmonische functie met singulariteit in de oorsprong. Neem van deze functie de afgeleide in radiale richting en integreer over een cirkel van straal r om de oorsprong:

$$\int \frac{\partial}{\partial r} \log \frac{1}{r}\, ds = - \int \frac{1}{r}\, ds = - \frac{1}{r}\, 2\pi r = - 2\pi .$$

De functie

$$u = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r}$$

heeft dus de volgende eigenschap:

$$\int \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = -1,$$

waarbij de integratie zich uitstrekt over een cirkel met positieve straal om de oorsprong. In plaats van de cirkel kunnen we een willekeurige gesloten kromme nemen (Jordankromme) die (0,0) in zijn inwendige bevat (bewijs ?).
In één dimensie zijn we bij de bespreking van delta-functies gestoten op Greense functies die een sprong in de eerste afgeleide hebben ter grootte van

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{0+} - \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{0-} = - 1,$$

en oplossing zijn van $d^2y/dx^2 = - \delta(x)$.

Op dezelfde manier zeggen we nu dat u oplossing is van $\Delta u = - \delta(x)\delta(y)$. Controleer dat dit in overeenstemming is met de tweede formule van Green als we die domweg toepassen op $U = 1$, $V = u$:

$$\int (U\Delta V - V\Delta U)\, dxdy = \int \Delta u\, dxdy = -\int \delta(x)\, \delta(y)\, dxdy = -1,$$

$$= \int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) ds = \int \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \qquad = -1.$$

<u>Opgave</u>: Bewijs $\delta(x)\,\delta(y) = (\pi\, r)^{-1}\, \delta(r)$.

§.8 Randwaardeproblemen voor de potentiaalvergelijking

Zij $u(x,y)$ gedefinieerd in een zeker gebied en aldaar een harmonische functie, en zij C een enkelvoudige gesloten kromme die met het inwendige geheel tot het genoemde gebied behoort. Is (ξ,η) een punt binnen C, dan kunnen we $u(\xi,\eta)$ uitdrukken in de waarden die u en $\partial u/\partial n$ aannemen op C.

Bewijs: we weten dat

$$G_o(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$$

oplossing is van

$$\Delta G_o = -\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta) \qquad \text{met} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

We maken gebruik van de tweede formule van Green:

$$\iint (u\,\Delta G_o - G_o\,\Delta u)\, dxdy = \int_C \left(u \frac{\partial G_o}{\partial n} - G_o \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds .$$

De eerste term in het linkerlid geeft

$$-\iint u\, \delta(x-\xi)\, \delta(y-\eta)\, dxdy = -u(\xi,\eta).$$

De tweede term in het linkerlid geeft nul. Dit komt omdat de integrand overal nul is, met uitzondering van één punt (ξ,η), waar G_o logarithmisch oneindig wordt. Dus

$$u(\xi,\eta) = \int_C \left(G_o \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G_o}{\partial n}\right) ds,$$

en hiermee is inderdaad $u(\xi,\eta)$ uitgedrukt in de randwaarden van u en $\partial u/\partial n$ op C, en wel met behulp van de (bekende) functie G_o, de zg.

Greense functie van de twee-dimensionale ruimte.

Opgave: Als het punt ξ,η buiten C ligt, is de integraal in het rechterlid gelijk aan nul.

Opmerking.
We dienen plaats- en integratie-coordinaten steeds goed te onderscheiden. Is Q het symbool van het integratiepunt (Quellpunkt), P dat van het plaatspunt (Aufpunkt) waar we u willen berekenen, dan gaat de formule over in een duidelijker:

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_C \{ \log \frac{1}{r_{PQ}} \frac{\partial u(Q)}{\partial n_Q} - u(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \frac{1}{r_{PQ}} \} \, ds_Q .$$

Stelling: De gemiddelde waarde van een harmonische functie op een cirkel is gelijk aan de waarde van de harmonische functie in het middelpunt van de cirkel.

Bewijs: Neem, in de laatste formule, voor C een cirkel met straal R en middelpunt P. Dan staat er:

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\log \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} u(Q) - u(Q) \frac{\partial}{\partial R} \log \frac{1}{R}] \, R \, d\theta .$$

Stel

$$\bar{u} \overset{def}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Q) \, d\theta ,$$

dan is $\bar{u}$ de gemiddelde waarde van de harmonische functie op de cirkel. Deze $\bar{u}$ kan, bij vaste P, alleen van R afhangen. Formule boven uitschrijven geeft

$$u(P) = \bar{u} + R \log \frac{1}{R} \frac{d\bar{u}}{dR} .$$

In werkelijkheid hangt $\bar{u}$ niet van R af. Dat kan men op twee verschillende manieren aantonen. Eerste methode: Pas tweede formule van Green toe met $v = 1$. Dit geeft direct $d\bar{u}/dR = 0$. Tweede methode: Bovenstaande vergelijking is een differentiaalvergelijking voor $\bar{u}(R)$ met als algemene oplossing:

$$\bar{u} = A + B \log R,$$

met A en B onafhankelijk van R; $B = 0$, omdat de formule moet gelden voor $R \to 0$; dan volgt $A = u(P)$. Ergo, $u(P) = \bar{u}$, waarmee de stelling is bewezen. De grootheid $\bar{u}$ is het gemiddelde van u over alle richtingen, en heet ook wel: sferisch-gemiddelde.

Bovengenoemde stelling kunnen we ook als volgt in formule brengen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x + R\cos\theta,\ y + R\sin\theta)\,d\theta = u(x,y).$$

Randwaardeprobleem van de eerste soort (Dirichlet)

Boven hebben we, met behulp van $G_o(P,Q)$, $u(P)$ uitgedrukt in $U(Q)$ en $\partial U(Q)/\partial n_Q$ langs C. Omgekeerd: zijn deze twee functies op C voorgeschreven, dan is de functie gedefinieerd door de integraal in het rechterlid binnen C een harmonische functie. Echter: als we P laten naderen tot een punt van C, dan nadert de functie in het algemeen niet naar de daar ter plaatse voorgeschreven waarde, noch zal de normaalafgeleide naar de voorgeschreven waarde naderen. Bij een elliptische differentiaalvergelijking kunnen we de waarden van de functie en haar normaalafgeleide niet willekeurig en onafhankelijk van elkaar voorschrijven. Eerder: de randwaarden van de functie alleen zijn reeds voldoende. Dit gaan we nu duidelijk maken. We kunnen het hier niet bewijzen, maar zullen voor de existentie-vraag ons beroepen op het fysisch inzicht.

Eerste Greense functie

Op fysische gronden bestaat de eerste Greense functie $G(x,y;\ \xi,\eta)$, die aan de volgende eigenschappen voldoet:

(1) G is een harmonische functie van x,y met uitzondering van het punt ξ,η. Hierbij is gedacht aan punten binnen een enkelvoudige gesloten kromme C die aan zekere eisen van gladheid voldoet.

(2) G heeft in ξ,η een eenheidsbron. Dit betekent:

$G = G_o$ + functie die in de buurt van ξ,η een harmonische functie van x,y is.

(3) G = 0 voor x,y op C.

Men kan G interpreteren als de potentiaal van een eenheidslading binnen een kromme die zelf op aardpotentiaal (nul) is gehouden. Men zou G experimenteel kunnen bepalen. In elk geval nemen we zonder bewijs aan dat G existeert. Dat G ondubbelzinnig bepaald is, kunnen we wel bewijzen (zie vroegere stellingen over eenduidigheid).

Boven-gedefinieerde functie G voldoet aan $\Delta G = -\,\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta)$. Pas nu de tweede formule van Green toe op U = u met V = G. Dan blijft in het rechterlid maar één term over:

$$u(\xi,\eta) = \int_C \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right) ds = -\int_C u\frac{\partial G}{\partial n}\,ds.$$

Inderdaad geeft deze formule $u(\xi,\eta)$ uitgedrukt in alleen de randwaarden van u op C:

$$u(P) = - \int_C u(Q) \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q} ds_Q .$$

Hiermede is het zogenaamde eerste randwaardeprobleem (probleem van Dirichlet) voor de potentiaalvergelijking opgelost: een harmonische functie construeren uit haar randwaarden.
In werkelijkheid is de situatie minder rooskleurig, omdat het in het algemeen niet mogelijk is de functie G expliciet aan te geven. Alleen voor zeer eenvoudige C kunnen we dat (bijv. een cirkel: zie later). G heet de eerste Greense functie, of ook wel de functie van Dirichlet, behorende bij het inwendige van de kromme C.

We komen nu tot de behandeling van het tweede randwaardeprobleem (probleem van Neumann). Dit luidt als volgt. Bij gegeven enkelvoudige gesloten kromme C en "willekeurig" voorgeschreven waarden van de normaalafgeleide op C, te construeren een harmonische functie binnen C die op C die voorgeschreven randwaarden der normaalafgeleide aanneemt. Hierbij is echter een beperking in de toegelaten randwaarden van de normaalafgeleide te vermelden. Voor elke binnen C harmonische functie u geldt, op grond van de tweede formule van Green toegepast op U = u met V = 1,

$$\int_C \frac{\partial u(Q)}{\partial n_Q} ds_Q = 0 .$$

We zullen dus $\partial u(Q)/\partial n_Q$ op C voorschrijven zodanig dat het gemiddelde over de kromme C gelijk aan nul is. De oplossing van het probleem is dan ondubbelzinnig bepaald op een additieve constante na. Die constante zullen we zo kiezen dat de middelwaarde van u op C ook nul is:

$$\int_C u(Q)\, ds_Q = 0 .$$

Onder deze twee beperkende voorwaarden is dan u ondubbelzinnig bepaald. Dat "bewijzen" we door ons wederom te beroepen op de natuur en de existentie zonder mathematisch bewijs aan te nemen van de zogenaamde tweede functie van Green, of ook wel genoemd de functie van Neumann N, voor het binnengebied van een willekeurige enkelvoudige gesloten kromme C die voldoende glad is.

De functie van Neumann is gedefinieerd als volgt:

(1) $N(x,y;\ \xi,\eta)$ is een harmonische functie van x,y met uitzondering van het punt ξ,η.

(2) N heeft in ξ,η een eenheidsbron. Dit betekent:

$N = G_o$ + functie die in de buurt van ξ,η een harmonische functie van x,y is.

(3) $\partial N/\partial n$ = const. = $-1/L$ voor x,y op C, waarbij L de lengte van C is.

(4) $\int_C N(P,Q)\, ds_Q = 0$.

Aangaande eis (3) merken we het volgende op. We weten dat bij integratie van de normaalafgeleide van G_0 over een kromme rond het bronpunt de uitkomst -1 is. Dan zal dus ook gelden:

$$\int_C \frac{\partial N(P,Q)}{\partial n_Q}\, ds_Q = -1.$$

Omdat volgens (3) de integrand constant is op C, moet die constante de waarde $-1/L$ hebben. Is C een rechte, en het binnengebied van C dus een halfvlak, dan is de constante 0.

Door de eigenschappen (1), (2) en (3) is N op een additieve constante na eenduidig bepaald. Die constante kiezen we volgens (4) zodanig dat de gemiddelde waarde van N op C nul is. Door de eisen (1) t/m (4) is dan N ondubbelzinnig bepaald. De existentie van N nemen we zonder mathematisch bewijs aan. Op fysische gronden kunnen we aannemen dat we dan geen onzin beweren.

Het tweede randwaardeprobleem kunnen we nu oplossen met behulp van boven gedefinieerde functie van Neumann. Daarvoor passen we de tweede formule van Green toe op $U = u$ met $V = N$. Daar N voldoet aan

$$\Delta N = -\,\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta),$$

wordt het linkerlid van de formule van Green weer gelijk aan $-u(\xi,\eta)$. Het rechterlid wordt

$$\int_C \left(u\frac{\partial N}{\partial n} - N\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = -\frac{1}{L}\int_C u\, ds - \int_C N\frac{\partial u}{\partial n}\, ds.$$

De eerste integraal rechts is nul, op grond van een van de twee neven-eisen aan u opgelegd. Dan blijft dus over:

$$u(P) = \int_C N(P,Q)\,\frac{\partial u(Q)}{\partial n_Q}\, ds_Q$$

als oplossing van het tweede randwaardeprobleem met voorgeschreven waarden van de normaalafgeleide op C.

Bovenstaande randwaardeproblemen kunnen we ook in drie dimensies formuleren. Als we dan C interpreteren als een gesloten oppervlak met ds_Q als oppervlakte-element, dan gaan de formules door zoals ze hier staan. Het bijzondere in twee dimensies is nu dat de twee randwaardeproblemen van Dirichlet en Neumann op zeere eenvoudige wijze met elkaar samenhangen, zodat het voldoende is om onze aandacht te beperken tot het eenvoudigste der twee problemen: dat van Dirichlet, omdat er geen vervelende neveneisen worden gesteld aan u of G. Hoe men N uit G kan afleiden, kunt U vinden in Bergmann-Schiffer, Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics, Acad. Press, New York 1953, pp. 76-79. Daarbij is voldoende dat men de eerste beginselen van de complexe-functietheorie (Wiskunde V) kent. In het zelfde boek kunt U ook de existentietheorie mathematisch verantwoord vinden.

Opgave: Bewijs dat G en N symmetrisch zijn:

$$G(P,Q) = G(Q,P) \; ; \quad N(P,Q) = N(Q,P).$$

Aanwijzing: met formule van Green; zie zo nodig bovenvermeld boek.

§.9 Randwaardeproblemen voor het halfvlak

We gaan nu de problemen van Dirichlet en Neumann oplossen voor het geval dat C een oneindige rechte bevat en het "binnengebied" van C een halfvlak is. Dan is voorgaande theorie niet zonder meer bruikbaar, omdat dàár C een gesloten enkelvoudige, geheel in het eindige gelegen, kromme was. Eerst dus maar formeel te werk gaan, en later alles streng opzetten.
Allereerst Dirichlet: bepaal $u(x,y)$ voor $y \geqslant 0$ als $u(x,y)$ harmonisch is voor $y > 0$, en $u(x,0) = f(x)$ een voorgeschreven functie is.
De functie van Dirichlet (eerste Greense functie) kunnen we expliciet aangeven. Zij ξ,η punt in bovenhalfvlak; $\xi,-\eta$ zijn spiegelpunt t.o.v. de x-as. Zij x,y variabel punt met $y > 0$. Noem r en r' de afstanden van x,y tot respectievelijk ξ,η en $\xi,-\eta$:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \qquad r' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} .$$

Dan is de functie

$$G(x,y;\,\xi,\eta) = G_o(x,y;\,\xi,\eta) - G_o(x,y;\,\xi,-\eta)$$

$$= (1/2\pi)\log\,(r'/r)$$

de eerste Greense functie. Immers:

(1) G is harmonisch voor $y > 0$ met uitzondering van het punt ξ,η.

(2) G heeft in dit uitzonderingspunt een eenheidsbron.

(3) $G = 0$ op de x-as (daar is $r = r'$).

Ad (3): ook geldt $G = 0$ in het oneindige van het bovenhalfvlak. Dus is inderdaad G gelijk aan nul op de "rand" van het bovenhalfvlak.

Toepassing van de algemene formule geeft dan, als we aannemen dat het oneindige van het bovenvlak geen bijdrage geeft,

$$u(\xi,\eta) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \{ \frac{\partial}{\partial(-y)} \frac{1}{2\pi} \log \frac{r'}{r} \}_{y=o}\ dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \{ \frac{\partial}{\partial y} \log\ (r'/r)\ \}_{y=o}\ dx.$$

Verder heeft men

$$\frac{\partial}{\partial y} \log r = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{y-\eta}{r} = \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \log r' = \frac{y+\eta}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\ ,$$

en dus

$$\{ \frac{\partial}{\partial y} \log\ (r'/r)\}_{y=o} = \frac{2\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}\ .$$

Onze formule wordt dus tenslotte

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}\ dx\ .$$

Deze formule noemen we: formule van Stieltjes-Cauchy. We vermoeden: ze geeft ons de oplossing van het probleem van Dirichlet voor het halfvlak, onder zekere, voldoende maar nog niet nader genoemde voorwaarden.

We zullen nagaan onder welke voldoende voorwaarden deze formule geldig is en aldus het eerste randwaardeprobleem oplost. Pas daartoe de tweede formule van Green toe met $V = G$ op een gebied begrensd door een stuk $(-R,R)$ van de x-as en de halve cirkel Γ met straal R en middelpunt in de oorsprong, gelegen in het bovenhalfvlak. Dan vinden we $(\xi^2 + \eta^2 < R,\ \ \eta > 0)$:

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{R} u(x,0)\ \frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}\ dx + \int_{\Gamma} (G\ \frac{\partial u}{\partial R} - u\ \frac{\partial G}{\partial R})\ ds\ .$$

Als we nu R naar oneindig laten gaan, geeft de eerste term in het rechterlid de gezochte integraalvoorstelling (althans in hoofdwaarde). We moeten aan $u(x,y)$ dus zulke voorwaarden opleggen, dat de integraal langs Γ naar nul gaat voor $R \to \infty$. Daarvoor is nodig dat we het asymptotische gedrag kennen van G en $\partial G/\partial R$ op Γ. We voeren poolcoordinaten in: $\xi = \rho \cos\theta$, $\eta = \rho \sin\theta$, en

$$x = R\cos\phi, \qquad y = R\sin\phi \qquad (\text{op } \Gamma).$$

Dan geldt:

$$r^2 = R^2 - 2R\rho\cos(\phi-\theta) + \rho^2, \quad r'^2 = R^2 - 2R\rho\cos(\phi+\theta) + \rho^2,$$

en dus

$$G = \frac{1}{4\pi}\log\frac{1-(2\rho/R)\cos(\phi+\theta)+(\rho/R)^2}{1-(2\rho/R)\cos(\phi-\theta)+(\rho/R)^2}$$

$$= (\rho/\pi R)\sin\phi\sin\theta + O(R^{-2}) \qquad (R\to\infty).$$

Op dezelfde wijze:

$$\frac{\partial G}{\partial R} = -(\rho/\pi R^2)\sin\phi\sin\theta + O(R^{-3}) \qquad (R\to\infty).$$

Derhalve: G is van de orde van grootte $1/R$ en $\partial G/\partial R$ van de orde van grootte $1/R^2$ als $R\to\infty$. De integraal langs Γ gaat dus zeker naar nul voor $R\to\infty$ indien $u(x,y)$ voldoet aan:

$$\frac{u}{R}\to 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial R}\to 0 \qquad (\text{uniform in het bovenvlak voor } R\to\infty).$$

Daarmee is de volgende <u>stelling</u> aangetoond:

Is $u(x,y)$ harmonisch voor $y > 0$ en continu-differentieerbaar voor $y \geqslant 0$, en wordt voldaan aan:

$$\frac{u}{R} \text{ en } \frac{\partial u}{\partial R} \text{ beide } \to 0 \;\; (R = \sqrt{x^2+y^2}\to\infty) \text{ uniform in alle richtingen voor } y \geqslant 0,$$

dan heeft men de <u>representatie</u>

$$u(\xi,\eta) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} u(x,0)\,\frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}\,dx. \qquad (\eta \geqslant 0)$$

<u>Opm</u>. Het rechterlid kunnen we schrijven als

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\,\frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}\,dx,$$

als we de integraal als een hoofdwaardeintegraal opvatten (streepje in integraalteken). Convergeert de integraal in de gewone zin, dan is de integraal gelijk aan de hoofdwaardeintegraal.
Deze uitkomsten geven aanleiding tot de volgende uitspraak:

Indien een functie $u(x,y)$ bestaat met de eigenschappen:
$u(x,y)$ harmonisch in $y > 0$, continu-differentieerbaar voor $y \geqslant 0$,
u/R en $\partial u/\partial R \to 0$ uniform in $y \geqslant 0$ voor $R \to \infty$,
$u(x,0) = f(x)$,
dan geldt voor die functie de volgende voorstelling:

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi} \,⨍_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}\, dx \qquad (\eta \geqslant 0),$$

waarbij een streep door het integraalteken de hoofdwaarde (valeur principale van Cauchy) aanduidt.

We weten nog steeds niet dat die functie $u(x,y)$ bestaat. Om te kunnen zeggen dat we het eerste randwaardeprobleem hebben opgelost moeten we de volgende dingen aantonen: (in aanmerking genomen dat we vermoeden dat de functie in het bovenstaande rechterlid de juiste functie zal zijn)

(a) het rechterlid is een harmonische functie van ξ en η voor $\eta > 0$;

(b) deze functie nadert tot $f(\xi')$ als het punt (ξ,η) nadert tot het punt $(\xi',0)$ langs een weg die geheel in het bovenvlak verloopt;

(c) deze functie heeft voor $R \to \infty$ het genoemde asymptotische gedrag:

$$u/R \to 0 \text{ en } \partial u/\partial R \to 0 \qquad (R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \to \infty \text{ , uniform})$$

Dat kan allemaal precies worden uitgevoerd, onder zekere, voldoende voorwaarden voor $f(x)$. Aan dit detail-probleem kunnen we inderdaad alle facetten zien van een streng-mathematische behandeling van het eerste randwaardeprobleem, wat betreft existentie, eenduidigheid, voorwaarden aan de functies, voorwaarden aan de randwaarden die we voorschrijven, vorm van de rand, etc. Dat is een gecompliceerde materie, waarvan hier slechts de tip van de sluier kon worden opgelicht.

Opgave. Appeleer aan de deltafuntie van Cauchy (§.2) om eigenschap (b) te doorzien.

Een ander punt van uitgang voor de formule van Stieltjes-Cauchy ligt in de complexe-functietheorie. Stel $g(z)$ is een eenwaardige analytische functie van de complexe variabele $z = x + iy$ voor $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$. Volgens de formule van Cauchy geldt dan

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g(t)}{t-z}\, dt ,$$

waarbij de integratieweg bestaat uit het stuk $(-R,R)$ van de reële as en de sluitende halve cirkel Γ van zoëven. Hierbij ligt z binnen die integratieweg. Het punt $\bar{z} = x - iy$ ligt buiten deze integratieweg, en dan geldt dus

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g(t)}{t - \bar{z}}\, dt \qquad \text{(langs zelfde contour als boven)}$$

Onderstel nu dat $g(t)$ zich in het oneindige zodanig gedraagt dat de integraal langs Γ nul wordt voor $R \to \infty$. Voldoende daarvoor is dat

$$g(t) \to 0 \qquad (t \to \infty\ ,\ \text{uniform in arg } t \text{ voor } \operatorname{Im}(t) \geqslant 0).$$

Dan vinden we de identiteiten ($\operatorname{Im}(z) \geqslant 0$)

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t - z}\, dt, \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t - \bar{z}}\, dt.$$

Splits nu $g(t)$ op de reële as in reëel en imaginair deel:

$$g(t) = A(t) + i\, B(t),$$

en neem van de tweede formule het complex-geconjugeerde. Dan vindt men

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(t) + i\, B(t)}{t - (x+iy)}\, dt,$$

$$0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(t) - i\, B(t)}{t - (x+iy)}\, dt.$$

Optelling geeft

$$g(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(t)}{t - (x+iy)}\, dt,$$

en aftrekking geeft

$$g(x+iy) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(t)}{t - (x+iy)}\, dt.$$

Hiermede is bereikt dat we de analytische functie $g(z)$ hebben uitgedrukt in de randwaarden van haar imaginair deel òf haar reëel deel op de reële as. Splitsen we $g(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ in een paar van geconjugeerde potentialen, en bedenken we dat geldt (t reëel)

$$\frac{1}{t - (x+iy)} = \frac{t - x}{(t-x)^2 + y^2} + i \frac{y}{(t-x)^2 + y^2}$$

dan geven de twee vorige formules als resultaat:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(t) \frac{t - x}{(t-x)^2 + y^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \frac{y}{(t-x)^2 + y^2}\, dt,$$

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(t) \frac{y}{(t-x)^2 + y^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \frac{x - t}{(t-x)^2 + y^2}\, dt.$$

De laatste uitdrukking voor $u(x,y)$ en de eerste uitdrukking voor $v(x,y)$ zijn in overeenstemming met de Stieltjes-Cauchy formule, omdat $A(t) = u(t,0)$ en $B(t) = v(t,0)$ is. De twee overblijvende integralen bepalen de harmonische functie door de randwaarden van haar geconjugeerde harmonische functie.

Opm. Als in bovenstaande formules differentiatie en integratie van volgorde mogen worden verwisseld, dan gelden ook de volgende relaties:

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} B(t) \log [(t-x)^2 + y^2]\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \log [(t-x)^2 + y^2]\, dt,$$

$$v(x,y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} B(t) \log [(t-x)^2 + y^2]\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \log [(t-x)^2 + y^2]\, dt.$$

Nu nog enkele opmerkingen over het tweede randwaardeprobleem (Neumann) voor het halfvlak. De volgende functie

$$N(x,y;\ \xi,\eta) = G_0(x,y;\ \xi,\eta) + G_0(x,y;\ \xi,-\eta) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r\,r'}$$

is, als functie van x,y in het bovenhalfvlak, een harmonische functie, met uitzondering van het punt ξ, η, waar ze een eenheidsbron heeft. Op de reële as is $\partial N/\partial y$ gelijk aan nul. Daar de integraal van N langs de reële as niet convergeert, laat staan gelijk aan nul is, is N niet de Neumann-functie in de eigenlijke zin van het woord. Toch kan ze, in dit ontaarde geval van het halfvlak, wel dienen om een harmonische functie uit te drukken in de randwaarden van de normaal-afgeleide op de reële as. In de eindformule komt geen verandering. Men vindt, onder zekere voldoende voorwaarden, in plaats van de formule van Stieltjes-Cauchy,

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log\,[(x-\xi)^2 + \eta^2]\; h(x)\,dx\ ,$$

waarbij $-h(x)$ de voorgeschreven waarde van de normaalafgeleide,

$$-\,h(x) = -\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,0),$$

is.

<u>Opgave</u>: Onderzoek de details van het tweede randwaardeprobleem op de wijze zoals dat op college is gedaan met betrekking tot het eerste randwaardeprobleem.

<u>Opm</u>. De formules in de vorige opmerking zijn nu ook niet onverwacht, omdat de twee randwaardeproblemen onmiddellijk samenhangen door de complexe-functietheorie.

<u>Opgave</u>: Is $g(z)$ analytisch in het bovenhalfvlak $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$, dan geldt daar, onder zekere voorwaarden,

$$g(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\ g(t)}{t - z}\,dt = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\ g(t)}{t - z}\,dt.$$

(zie boven). Hoe luiden de analoge formules voor het benedenhalfvlak?

Antwoord: er komt voor beide integralen een minteken.

§.10 Randwaardeproblemen voor de cirkel

Zij nu C de cirkel met straal R en middelpunt in de oorsprong. Op C geeft men een "willekeurige" functie $f(\theta)$, waarbij θ de hoek van de voerstraal uit de oorsprong met (bijv.) de x-as is, zodat $f(\theta)$ is gedefinieerd voor het interval $(0, 2\pi)$. Het probleem van Dirichlet is: construeer binnen C een harmonische functie die op C de randwaarden f aanneemt.

Er zijn verschillende manieren van oplossing. Om eens wat anders te doen dan in de vorige paragraaf, passen we nu de methode der eigenfuncties toe. Druk de operator van Laplace uit in poolcoordinaten, en separeer de potentiaalvergelijking in die coordinaten. De potentiaalvergelijking is

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Door te stellen $u(r,\theta) = X(r)\,Y(\theta)$, worden de vergelijkingen voor X en Y:

$$\frac{r^2 X'' + r X'}{X} = -\frac{Y''}{Y} = n^2,$$

waarbij n^2 de separatie-constante is. De Y-vergelijking heeft als oplossing

$$Y = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, \qquad (n \neq 0)$$

de X-vergelijking heeft als oplossing

$$X = c_n r^n + d_n r^{-n}. \qquad (n \neq 0)$$

Voor $n = 0$ is $Y = a_o + b_o\theta$, $X = c_o + d_o \log r$.

Beperkt men zich tot functies Y die periodiek in θ zijn met periode 2π, dan moet men n= geheel getal kiezen. Bij ons randwaardeprobleem kunnen we ons beperken tot niet-negatieve gehele waarden van n. Voor het probleem binnen de cirkel moet bij de X-functies de coefficient d_n gelijk nul zijn. Aldus is (met nieuwe notatie)

$$u_n(r,\theta) = (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\, r^n/R^n$$

voor $n = 0, 1, 2, \ldots$ het systeem van eigenfuncties voor de potentiaalvergelijking binnen de cirkel O. Op grond van de algemene filosofie van eigenfunctie-ontwikkeling verwachten we dus dat we onze onbekende functie in een reeks van dergelijke functies kunnen ontwikkelen. We proberen dus

$$u(r,\theta) = \tfrac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\,(r/R)^n,$$

Op C moet deze ontwikkeling de functie $f(\theta)$ reproduceren. Dat is een gegeven waaruit we de onbekende coefficienten a_n en b_n moeten bepalen. Er zal dus gelden:

$$f(\theta) = \tfrac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Het komt weer neer op de Fourier-ontwikkeling van $f(\theta)$. De coefficienten vinden we met behulp van de formules van Euler:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_o^{2\pi} f(\theta') \cos n\theta' \, d\theta' \,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_o^{2\pi} f(\theta') \sin n\theta' \, d\theta' \,.$$

Vullen we deze coefficienten in de reeks voor $u(r,\theta)$ in, dan komt er, na verwisseling van sommatie en integratie,

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi} \int_o^{2\pi} f(\theta') \left\{ \tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (r/R)^n \cos n\,(\theta - \theta') \right\} d\theta' \,.$$

De uitdrukking tussen accolades kan nu in gesloten vorm worden gebracht:

$$\tfrac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} x^n \cos ny = \tfrac{1}{2} + \mathrm{Re} \sum_{1}^{\infty} x^n e^{niy} = \tfrac{1}{2} + \mathrm{Re} \sum_{1}^{\infty} (xe^{iy})^n$$

$$= \tfrac{1}{2} + \mathrm{Re} \frac{xe^{iy}}{1 - xe^{iy}} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re} \frac{1 + xe^{iy}}{1 - xe^{iy}} = \tfrac{1}{2} \frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos y + x^2} \,.$$

Deze transformatie is geldig voor y reëel en $-1 < x < 1$.

Stoppen we dit in onze formule voor $u(r,\theta)$, dan vinden we

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \theta') + r^2} f(\theta') \, d\theta' \,.$$

Met deze formule van Poisson hebben we het eerste randwaardeprobleem voor het binnengebied van een cirkel opgelost.

Vervolgens behandelen we het tweede randwaardeprobleem van de cirkel. Het probleem van Neumann is: construeer binnen C een harmonische functie die op C voorgeschreven waarden van de normaalafgeleide aanneemt. Noem deze laatste $g(\theta)$. Deze functie is periodiek in θ met periode 2π en gemiddelde waarde nul:

$$\int_0^{2\pi} g(\theta')\, d\theta' = 0.$$

We proberen de oplossing te schrijven als

$$v(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \left(\frac{r}{R}\right)^n ,$$

waarbij we de additieve constante maar weglaten. Nu moet gelden

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial r} = g(\theta) \qquad \text{voor } r = R.$$

Dit geeft

$$R\, g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

en met Euler vinden we

$$a_n = R\, \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta') \cos n\,\theta'\, d\theta' ,$$

$$b_n = R\, \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta') \sin n\,\theta'\, d\theta' .$$

Dit invullen in onze reeks voor v geeft, na verwisseling van sommatie en integratie,

$$v(r,\theta) = R\, \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta')\, d\theta' \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\,(\theta - \theta') \right\}.$$

De reeks tussen accolades kan in gesloten vorm worden gesommeerd. Bedenken we dat

$$\log\,(1 + s) = s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{4} + \dots , \qquad (|s| < 1)$$

dan vindt men ($0 \leqslant x < 1$, y reëel)

$$\log \frac{1}{1 - xe^{iy}} = - \log (1 - x\, e^{iy}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x\, e^{iy})^n,$$

en dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \cos ny = - \operatorname{Re} \log (1 - x\, e^{iy}) =$$

$$= - \log | 1 - x\, e^{iy} | = - \frac{1}{2} \log (1 - 2x \cos y + x^2).$$

Dan wordt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\tfrac{r}{R})^n \cos n(\theta - \theta') = - \frac{1}{2} \log [R^2 - 2rR \cos(\theta - \theta') + r^2] + \log R.$$

De term met log R kunnen we in de onbepaalde additieve constante opnemen, zodat als algemene oplossing van het tweede randwaardeprobleem wordt gevonden:

$$v(r,\theta) = \text{const.} - \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log [R^2 - 2Rr \cos(\theta - \theta') + r^2]\, g(\theta')\, d\theta'.$$

Tot nu toe beschouwden we slechts het zg. inwendige probleem, waarbij we zochten naar een harmonische functie binnen de cirkel onder voorgeschreven randcondities. Nu nog enkele woorden over het uitwendige probleem. Voor Dirichlet luidt dit: construeer buiten C een harmonische functie die op C gegeven randwaarden aanneemt. Het ligt voor de hand dat dit laatste probleem niet bepaald is zolang we nog geen randvoorwaarden in het oneindige voorschrijven. Immers, de functie A log (r/R), met A constant, is harmonisch buiten C en neemt op C de waarde nul aan. We eisen dan ook: de gevraagde functie is begrensd in het oneindige ($r \to \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$). Dan kunnen we naar analogie met het eerste geval aannemen:

$$U(r,\theta) = \tfrac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)(R/r)^n.$$

Noem $F(\theta)$ de randwaarden (voor $r = R$) door U op C aangenomen. Dan

$$F(\theta) = \tfrac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

En analoog aan een der vorige formules heeft men

$$U(r,\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta') \{ \tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{R}{r})^n \cos n\, (\theta' - \theta)\}\, d\theta'.$$

Het enige verschil met het eerste geval is dat r en R van rol zijn verwisseld. Het uitwendige Dirichlet probleem wordt dus voor de cirkel opgelost door

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - R^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta-\theta') + r^2}\, F(\theta')\, d\theta'.$$

Opgave: Los het probleem van Neumann op voor het buitengebied van de cirkel.

§.11 Potentiaalproblemen

Opgave: Oplossing van inhomogene probleem:

$$\Delta u = - f(x,y)$$

onder randvoorwaarde $u = 0$ op C is

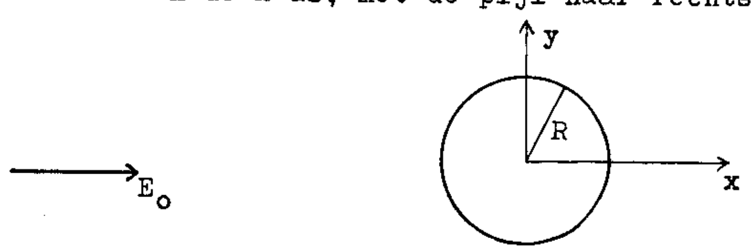
$$u(\xi,\eta) = \iint f(x,y)\, G(\xi,\eta;\, x,y)\, dx\, dy,$$

waarbij G de Greense functie is (§.8).

Metalen cylinder in homogeen veld

Een metalen cylinder, straal R, en ongeladen, wordt geplaatst in een homogeen elektrisch veld, loodrecht op de as van de cylinder. Bereken de potentiaalverdeling en de ladingsdichtheid geinduceerd op de cylinder.

Oplossing:
Laat het uitwendige, homogene veld, ter grootte van E_o, gericht zijn parallel aan de x-as, met de pijl naar rechts.



De potentiaal en het elektrisch veld hangen samen door middel van

$$E = - \text{grad } V.$$

Het constante homogene veld kan dus worden voorgesteld door de potentiaal

$$V_o = - E_o\, x,$$

want
$$-\frac{\partial V_o}{\partial x} = E_o, \quad -\frac{\partial V_o}{\partial y} = 0.$$

De potentiaal in aanwezigheid van de cylinder kunnen we stellen

$$V = -E_o\, x + U,$$

waarbij U de potentiaal voorstelt van de geinduceerde ladingen, en wel geldt dit buiten de cylinder. Zonder de algemeenheid te schaden, kunnen we de potentiaal binnen de cylinder gelijk aan nul stellen (we leggen de mantel aan aarde). Het veld binnen de cylinder is dan ook nul.
De functie U kunnen we ontwikkelen naar eigenfuncties van het buitengebied. Daar $U \to 0$ $(r \to \infty)$ en het probleem kennelijk <u>even</u> in θ is, is de algemene term in de reeks voor U gelijk aan

$$a_n\, r^{-n} \cos n\theta.$$

Omdat $x = r \cos \theta$ is, kunnen we met de term $n = 1$ volstaan.
We stellen dus

$$V = -E_o\, x + A\, r^{-1} \cos \theta.$$

De constante A kiezen we zò dat $V = 0$ is op de cylinder:

$$0 = -E_o\, R \cos \theta + (A/R) \cos \theta.$$

Dus
$$A = E_o\, R^2.$$

De oplossing van het potentiaalvraagstuk is dus

$$V = -E_o\, x + E_o\, R^2 \cos\theta / r = E_o \left(\frac{R^2}{r} - r\right) \cos \theta.$$

De ladingsdichtheid op de cylinder (per eenheid van lengte) is dus

$$\sigma = -\varepsilon_o \frac{\partial V}{\partial n} = -\varepsilon_o \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R} = 2\, \varepsilon_o\, E_o \cos \theta.$$

De totale lading der cylinder is nul: $\int_C \sigma\, ds = 0,$

maar het dipoolmoment in de x-richting is gelijk aan

$$\int_C x\, \sigma\, ds = \int_0^{2\pi} R \cos \theta \,.\, 2\, \varepsilon_o\, E_o \cos \theta \,.\, R d\theta = 2\pi\, \varepsilon_o\, E_o\, R^2$$

$$= 2\, \varepsilon_o\, E_o \text{ maal volume van de cylinder (1 meter lang).}$$

Metalen bol in homogeen veld

De separatie van de potentiaalvergelijking in bolcoördinaten r, θ, φ geeft als potentiaalfuncties

$$V = (A\,r^n + B\,r^{-n-1})(C\cos m\varphi + D\sin m\varphi)(E\,P_n^m(\cos\theta) + F\,Q_n^m(\cos\theta)),$$

waarbij P_n^m en Q_n^m Legendrefuncties zijn.

Bij rotatiesymmetrische problemen (z-as = symmetrie-as) is de potentiaalfunctie onafhankelijk van φ en we kunnen ons dan beperken tot de termen met m = 0. De overeenkomstige Legendrefuncties P_n^o en Q_n^o worden dan de Legendrepolynomen $P_n(\cos\theta)$ en de geassocieerde functies $Q_n(\cos\theta)$. Deze laatste zijn singulier op de z-as, en kunnen dus niet voorkomen als de volle omgeving van de bol $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ regulariteitsgebied van de potentiaal is.

Potentiaalfuncties die rotatiesymmetrisch ten opzichte van de z-as zijn, kunnen derhalve als volgt worden ontwikkeld:

$$V = \sum_{0}^{\infty} (A_n\,r^n + B_n\,r^{-n-1})\,P_n(\cos\theta).$$

Neem het homogene veld E_o in de richting van de positieve z-as. Dit veld heeft een potentiaal

$$V_o = -\,E_o\,z = -\,E_o\,r\cos\theta.$$

Daar $\cos\theta = P_1(\cos\theta)$ is, is het te verwachten dat we kunnen volstaan met de term n = 1. In het buitengebied kunnen we alleen negatieve machten van r gebruiken. Stel dus buiten de bol

$$V = -\,E_o\,r\cos\theta + A\,r^{-2}\cos\theta.$$

Uit de eis V = 0 voor r = R (bol op potentiaal nul) vinden we

$$A = E_o\,R^3.$$

De potentiaalfunctie buiten de bol wordt dus

$$V = E_o\left(\frac{R^3}{r^2} - r\right)\cos\theta.$$

Voor de ladingsdichtheid op de bol vinden we

$$\sigma = -\,\varepsilon_o\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R} = 3\,\varepsilon_o\,E_o\cos\theta.$$

De totale lading is nul, maar het totale dipoolmoment in de z-richting wordt

$$\int_{\text{Bol}} z\,\sigma\,dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \,.\, R\cos\theta \,.\, 3\,\varepsilon_o\,E_o\cos\theta \,.\, R^2\sin\theta$$

$$= 6\pi\,\varepsilon_o\,E_o\,R^3 \int_0^{\pi} \cos^2\theta\,\sin\theta\,d\theta = 4\pi\,\varepsilon_o\,E_o\,R^3$$

$$= 3\,\varepsilon_o\,E_o \text{ maal volume van de bol.}$$

Dielektrische cylinder in homogeen veld

Het medium buiten de cylinder heeft dielektrische constante ε_1, dat binnen de cylinder heeft ε_2 (is verder isotroop en homogeen). Binnen de cylinder geldt

$$V_1 = A\,r\cos\theta\;;$$

buiten de cylinder geldt

$$V_2 = -\,E_o\,r\cos\theta + \frac{B}{r}\cos\theta\,.$$

De potentiaal is continu op de cylinderwand, en de normaalcomponent van de dielektrische verschuiving is aldaar ook continu. Dit geeft de randvoorwaarden:

$$V_1 = V_2 \text{ en } \varepsilon_1\frac{\partial V_1}{\partial r} = \varepsilon_2\frac{\partial V_2}{\partial r} \qquad (r = R).$$

Dus, uitgewerkt,

$$A\,R = -\,E_o\,R + \frac{B}{R}\,,$$

$$\varepsilon_1 A = -\,\varepsilon_2\,(E_o + \frac{B}{R^2}).$$

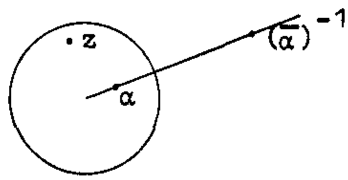
Oplossing is

$$A = -\,\frac{2\,\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\,E_o\,, \qquad B = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\,E_o\,R^2.$$

Controle: Als $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, dan $V_1 = V_2 = -\,E_o\,x$, en dan is er helemaal geen cylinder, en overal is een homogeen veld.

Opgave: Behandel het probleem van een dielektrische bol in een homogeen veld.

Greense functie voor cirkel (met complexe-functietheorie)
Zij α een complex getal binnen de eenheidscirkel (zie figuur).



Beschouw de functie $F(z) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1 - \bar{\alpha} z}{z - \alpha}$.

Deze functie is (meerwaardig) analytisch binnen de eenheidscirkel, afgezien van de singulariteit $z = \alpha$. Het punt $(\bar{\alpha})^{-1}$ ligt buiten de cirkel (spiegelpunt). Neem het reële deel van $F(z)$:

$$u = \operatorname{Re} F(z) = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{1 - \bar{\alpha} z}{z - \alpha} \right| = \text{oplossing van potentiaalvergelijking.}$$

Nu is $|z - \alpha|$ = afstand R van z tot α. Dus

$$u \sim \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{R} + \ldots \qquad (R \to 0).$$

u heeft dus een eenheidsbron in $z = \alpha$. Op de eenheidscirkel is de vorm $|\;|$ gelijk aan 1, dus $u = 0$ op $|z| = 1$.

Dus u is precies de Greense functie van het binnengebied van de eenheidscirkel.

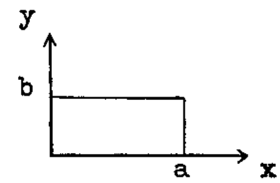
Met $z = r\,e^{i\theta}$, $\alpha = \rho e^{i\varphi}$ vindt men

$$G = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{1 - \bar{\alpha} z}{z - \alpha} \right| = \frac{1}{4\pi} \log \frac{1 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi) + \rho^2 r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi) + r^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \log \left[1 + \frac{(1 - \rho^2)(1 - r^2)}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi) + r^2} \right].$$

Opgave: Leid dan verder de formule van Poisson af.

§.12 Trillingsproblemen



Rechthoekig membraan, zijden a en b.
Bewegingsvergelijking voor de vrije trilling (geen uitwendige kracht)

$$\Delta z - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0.$$

Stel $z = u(x,y)\, e^{-i\omega t}$, dan $\Delta u + \lambda u = 0$, $\lambda = \omega^2/v^2$.

Door separatie: $u = f(x)\, g(y)$
volgt

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} = -\lambda .$$

Dan moeten f''/f en g''/g beide constant zijn. Stel die constanten gelijk aan $-k_1^2$ en $-k_2^2$; dus $\lambda = k_1^2 + k_2^2$:

$$f'' + k_1^2 f = 0, \quad g'' + k_2^2 g = 0.$$

De enige oplossingen die aan de randvoorwaarde $u = 0$ voldoen zijn

$$\sin k_1 x \quad \sin k_2 y \quad \text{met } k_1 = \frac{m\pi}{a}, \quad k_2 = \frac{n\pi}{b},$$

$(m, n = 1, 2, 3, \ldots)$.

De eigenwaarden zijn dus

$$\lambda_{mn} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right).$$

De eigenfrequenties zijn

$$\omega_{mn} = \pi v \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} .$$

Algemene vrije beweging van het membraan:

$$z(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\{A_{mn}\cos(\omega_{mn}t) + B_{mn}\sin(\omega_{mn}t)\}.$$

De coefficienten A_{mn} en B_{mn} kunnen we uit beginvoorwaarden berekenen:

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \varphi(x,y,0) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \, dx\, dy,$$

$$B_{mn} = \frac{4}{ab\omega_{mn}} \int_0^a \int_0^b \varphi_t(x,y,0) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \, dx\, dy.$$

Het systeem van eigenfuncties

$$u_{mn}(x,y) \equiv \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad ({}^{n}_{m} = 1,\ 2,\ \ldots)$$

is volledig en orthonormaal op de rechthoek. Fouriertheorie in twee dimensies.

Gedwongen trilling

Bewegingsvergelijking is nu

$$\Delta z - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = - f(x,y,t).$$

Net als vroeger voor de snaar gaan we de uitwendige kracht naar de eigenfuncties ontwikkelen:

$$f(x,y,t) = \Sigma\, \Sigma\, f_{mn}(t)\ u_{mn}(x,y),$$

waarbij we de coefficienten f_{mn} als bekend kunnen onderstellen. Vervolgens

$$z = \Sigma\, \Sigma\, z_{mn}(t)\ u_{mn}(x,y).$$

Dan is de differentiaalvergelijking voor $z_{mn}(t)$ van de vorm

$$\frac{1}{v^2} \frac{d^2 z_{mn}}{dt^2} - \lambda_{mn}\, z_{mn} = f_{mn}.$$

Deze integreren en term voor term aanpassen bij de beginvoorwaarden. Ook eventueel met de pulsmethode (§.5).

Speciaal geval: harmonische aandrijving

Neem als uitwendige kracht: $f(x,y,t) = \varphi(x,y)\, e^{-i\omega t}$,
en zoek de stationaire oplossing:

$$z = u(x,y)\, e^{-i\omega t} \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Dus afzien van beginwaarden; wèl randwaardeprobleem.
De functie u voldoet aan

$$\Delta u + \lambda u = -\varphi, \quad \text{met } \underline{\text{gegeven}}\ \lambda = \frac{\omega^2}{v^2}.$$

Ontwikkel φ in eigenfuncties:

$$\varphi(x,y) = \Sigma\,\Sigma\, \varphi_{mn}\, u_{mn}(x,y),$$

dus

$$\varphi_{mn} = \iint \varphi(\xi,\eta)\, u_{mn}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Stel dan

$$u = \Sigma\,\Sigma\, C_{mn}\, u_{mn}(x,y).$$

Invullen in de differentiaalvergelijking geeft:

$$-\varphi = \Delta u + \lambda u = \Sigma\,\Sigma\, (\Delta + \lambda)\, C_{mn}\, u_{mn}$$

of

$$-\Sigma\,\Sigma\, \varphi_{mn}\, u_{mn} = \Sigma\,\Sigma\, (-\lambda_{mn} + \lambda)\, C_{mn}\, u_{mn}.$$

Dan volgt, door vergelijking van coefficienten,

$$\varphi_{mn} = -C_{mn}\, (\lambda - \lambda_{mn}),$$

en dus

$$C_{mn} = \frac{\varphi_{mn}}{\lambda_{mn} - \lambda} = \frac{1}{\lambda_{mn} - \lambda} \iint \varphi(\xi,\eta)\, u_{mn}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Dan wordt de gevraagde oplossing:

$$u(x,y) = \iint \varphi(\xi,\eta) \sum_{m,n} \frac{u_{mn}(x,y)\, u_{mn}(\xi,\eta)}{\lambda_{mn} - \lambda}\, d\xi\, d\eta$$

$$= \iint \varphi(\xi,\eta)\, G(x,y;\, \xi,\eta;\, \lambda)\, d\xi\, d\eta,$$

met als Greense functie:

$$G(x,y;\ \xi,\eta;\ \lambda) = \sum_{m,n} \frac{u_{mn}(x,y)\ u_{mn}(\xi,\eta)}{\lambda_{mn} - \lambda} .$$

Opmerking. Deze oplossing is niet van toepassing in het geval van resonantie; dus $\lambda \neq \lambda_{mn}$ in de formule.

Opmerking. Dit formalisme geldt voor membraan van willekeurige vorm. Onderzoek dit voor cirkelvormig membraan (Besselfuncties en hun nulpunten).

Voor het statisch geval ($\lambda = 0$) komt er

$$G = \sum\sum \frac{u_{mn}(x,y)\ u_{mn}(\xi,\eta)}{\lambda_{mn}} .$$

Speciaal voor het rechthoekig membraan vindt men

$$G = \frac{4}{ab\pi^2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}}{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}} .$$

Voor $x \to \xi$ en $y \to \eta$ moet de reeks divergeren als

$$\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} .$$

Techniek met delta-functies

De statische G voldoet aan

$$\Delta G = -\ \delta(x-\xi)\ \delta(y-\eta).$$

We kunnen het rechterlid ook in eigenfuncties ontwikkelen:

$$\delta(x-\xi)\ \delta(y-\eta) = \sum d_{mn}\ u_{mn}(x,y) ;$$

dan volgt

$$d_{mn} = \iint u_{mn}(x,y)\ \delta(x-\xi)\ \delta(y-\eta)\ dx\ dy = u_{mn}(\xi,\eta).$$

Dus

$$\delta(x-\xi)\ \delta(y-\eta) = \sum\sum u_{mn}(x,y)\ u_{mn}(\xi,\eta).$$

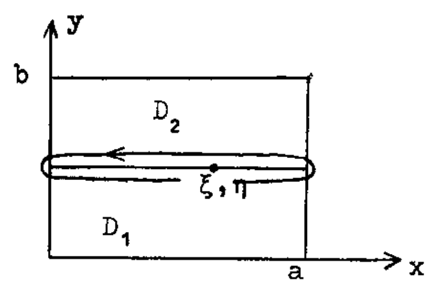
<u>Opgave</u>: Toets dit aan resultaten voor de snaarbeweging.

<u>Andere ontwikkeling van Greense functie</u>

Voor het rechthoekig membraan was de oplossing van $\Delta G = -\ \delta(x-\xi)\ \delta(y-\eta)$, met $G = 0$ op rand, gegeven door

$$G = \sum \frac{u_{mn}(x,y)\ u_{mn}(\xi,\eta)}{\lambda_{mn}} .$$

Hier is het zó dat de individuele termen zelf geen oplossing zijn van $\Delta u = 0$. We gaan nu G voorstellen door een andere reeks, waarbij de termen stuk voor stuk wèl aan $\Delta u = 0$ voldoen.



Ga uit van $\Delta u = 0$;
separeer $u = X(x)\ Y(y)$,

dus $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0.$

Dus $X(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x,$
$Y(y) = C \sinh \alpha y + D \cosh \alpha y.$

Splits rechthoek D in twee stukken, D_1 en D_2 (zie figuur).

In D_1 geldt $\Delta G_1 = 0$. Kies daar $\alpha = n\pi/a$:

$$G_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi y}{a} \qquad (0 \leqslant y < \eta)$$

voldoet aan alle randvoorwaarden.

Net zo in D_2, waar $\Delta G_2 = 0$,

$$G_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi}{a}(y-b) \qquad (\eta < y \leqslant b).$$

Neem aan dat deze ontwikkelingen ook nog convergeren op de horizontale lijn $y = \eta$. Dan moeten G_1 en G_2 continu aansluiten. Dat is zo als we eisen

$$a_n \sinh\frac{n\pi\eta}{a} = b_n \sinh\frac{n\pi}{a}(\eta-b).$$

Neem daarom

$$a_n = c_n \sinh \frac{n\pi}{a}(\eta - b),$$

$$b_n = c_n \sinh \frac{n\pi}{a}\eta .$$

Dus krijgen we

$$G_1 = \sum c_n \sinh \frac{n\pi}{a}(\eta - b) \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a},$$

$$G_2 = \sum c_n \sinh \frac{n\pi\eta}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi}{a}(y-b),$$

en ons rest nog het bepalen der coefficienten c_n.

We weten $\Delta G = -\delta(x-\xi)\,\delta(y-\eta)$; d.w.z.

$$\int\int \Delta G \, dx \, dy = \int \frac{\partial G}{\partial n} ds = -1,$$

geintegreerd over de contour (zie figuur) om de lijn $y = \eta$;

$$\int \frac{\partial G}{\partial n} ds = \underbrace{\int_0^a \frac{\partial G_1}{\partial(-y)} dx}_{\text{(onderkant)}} + \underbrace{\int_0^a \frac{\partial G_2}{\partial y} dx}_{\text{(bovenkant)}} = \int_0^a \left(\frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right)_{y=\eta} dx = -1.$$

Dus

$$\left(\frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial y}\right)_{y=\eta} = \delta(x-\xi).$$

Het linkerlid uitrekenend, verkrijgen we

$$\sum c_n \frac{n\pi}{a} \sinh \frac{n\pi}{a}(\eta - b) \sin \frac{n\pi x}{a} \cosh \frac{n\pi\eta}{a}$$

$$-\sum c_n \frac{n\pi}{a} \sinh \frac{n\pi\eta}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \cosh \frac{n\pi}{a}(\eta - b)$$

$$= \sum c_n \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \left\{ \sinh \frac{n\pi}{a}(\eta - b) \cosh \frac{n\pi\eta}{a} - \sinh \frac{n\pi\eta}{a} \cosh \frac{n\pi}{a}(\eta - b) \right\}$$

$$= -\sum c_n \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a}$$

$$= \delta(x-\xi) = \frac{2}{a} \sum \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi\xi}{a} .$$

Hieruit vindt men

$$c_n = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\frac{n\pi\xi}{a}}{n\sinh\frac{n\pi b}{a}}\;.$$

Daarmee hebben we gevonden:

$$G = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n\pi x/a)\,\sin(n\pi\xi/a)\,\sinh(n\pi y/a)\,\sinh[n\pi(b-\eta)/a]}{n\,\sinh(n\pi b/a)} & (0 \leqslant y \leqslant \eta) \\[2ex] \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n\pi x/a)\,\sin(n\pi\xi/a)\,\sinh(n\pi\eta/a)\,\sinh[n\pi(b-y)/a]}{n\,\sinh(n\pi b/a)} & (\eta \leqslant y \leqslant b) \end{cases}$$

<u>Verschil met vorige reeks</u>:

(1) laatste reeks is enkelvoudig;
(2) iedere term voldoet buiten singulariteit aan de potentiaalvergelijking;
(3) convergentie is sterker.

Een nadeel van de gevonden oplossing is: asymmetrie. De reeksen zijn symmetrisch in x en ξ, maar niet in y en η. Wel kunnen we de ene reeks uit de andere afleiden (hoe?). Onderzoek het effect van verwisseling van (x,y), (ξ,η) en (a,b). Wat betekent die verwisseling?

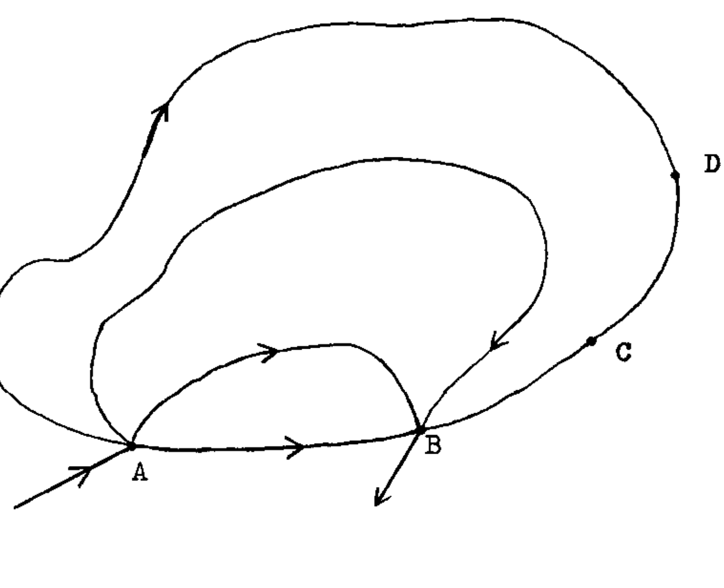
<u>Opmerking</u>. Men kan G in gesloten vorm brengen met behulp van elliptische functies.

§.13 Stelling van Van der Pauw

In vele gevallen wordt de specifieke weerstand van een elektrisch-geleidend materiaal gemeten aan een lange dunne draad van dit materiaal door stroomspanningsmeting. Deze methode gaat meestal niet op voor halfgeleiders, omdat men die niet in de vorm van draden kan maken. Halfgeleiders komen wel voor in de vorm van dunne plaatjes, maar dan met zeer grillige rand, ook al omdat het bij stroomspanningsmeting nodig is grotere uitstulpingen als soldeercontacten (laag-ohmige overgangsweerstand) beschikbaar te hebben. Een ingenieuze methode van meten is voor zo'n geval uitgewerkt door Van der Pauw, zoals onder wordt besproken.

Stel we hebben een dunne vlakke metalen plaat van homogeen en isotroop materiaal; dikte d, specifieke weerstand ρ. Deze plaat idealiseren we tot een oneindig-dunne plaat met oppervlaktegeleidingsvermogen $\sigma = d/\rho$. Dat wil zeggen, is $\underline{I}$ de oppervlaktestroomdichtheid en $\underline{E}$ de tangentiële elektrische veldsterkte, dan geldt $\underline{I} = \sigma\underline{E}$. Nu kunnen we wel ergens een spanning tussen twee "punten" opprikken en dan de stroom meten, dus de weerstand R bepalen, maar het is niet duidelijk hoe die weerstand samenhangt met σ. Wel is R evenredig met σ, maar de evenredigheidsconstante is een functie van de meetkundige configuratie. We kunnen nu laten zien dat we met twee zulke metingen kunnen volstaan om σ te bepalen.

Beschouw in het w-vlak een enkelvoudig samenhangend gebied G met gladde rand. Dit gebied met rand laten we als metalen plaat fungeren. Neem op de rand vier contactpunten A, B, C, D in positieve volgorde. We denken ons nu een elektrische stroom van 1 ampere die inkomt bij A en het plaatje bij B verlaat. Dat kan, bij contactpunten, alleen als er tussen A en B oneindig grote spanning wordt aangelegd, en dat betekent dat de weerstand tussen A en B oneindig groot is. Als A en B geen puntcontacten zijn (zoals in de praktijk), dan hangt de eindige weerstand af van de geometrie der contactpunten. Dat is te ingewikkeld, en daarom moeten we ook geen stroomspanningsmeting verrichten met alleen de punten A en B. Wat dan ? Als stroom bij A ingaat en bij B uitgaat, verdeelt de stroom zich over het plaatje, ongeveer als volgt



Tussen C en D zal zich een potentiaalverschil instellen. Het is duidelijk dat de potentiaal van A naar B langs de rand monotoon daalt, van ∞ naar $-\infty$. De potentiaal in D is hoger dan die in C. Dat potentiaalverschil kunnen we meten. Laat dit zijn:

$V_1 = V_{AB,CD} \overset{\text{def.}}{=}$ potentiaal van D min potentiaal van C, als bij A 1 ampere ingaat, bij B 1 ampere uitgaat.

Op dezelfde manier definiëren we, door cyclische opschuiving,

$V_2 = V_{BC,DA} \overset{\text{def.}}{=}$ potentiaal van A min potentiaal van D, als bij B 1 ampere ingaat, bij C 1 ampere uitgaat.

Ook V_2 is een positieve grootheid die we kunnen meten.

Nu geldt, en dit is de <u>stelling van Van der Pauw</u>,

$$e^{-\pi\sigma V_1} + e^{-\pi\sigma V_2} = 1,$$

<u>onafhankelijk van de vorm van het plaatje</u>. Met het resultaat van twee metingen (V_1 en V_2) kunnen we dus σ uit deze vergelijking berekenen.

We bewijzen de stelling eerst voor het eenvoudige geval dat G een halfvlak is, en passen dan later de afbeeldingsstelling van Riemann toe.

Neem dus het halfvlak H: $\mathrm{Im}\,(z) > 0$ met rand langs de reële as.

De veldsterkte $\underline{E}$ kunnen we afleiden uit een potentiaal: $\underline{E} = -\,\mathrm{grad}\, V$. Overal in de plaat is $\mathrm{div}\,\underline{I} = 0$, behalve in A en B, waar V singulier is (resp. ∞ en $-\infty$).
Dus

$$0 = \mathrm{div}\,\underline{I} = \mathrm{div}\,(\sigma\,\underline{E}) = \sigma\,\mathrm{div}\,\underline{E} = -\,\sigma\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,V$$
$$= -\,\sigma\Delta V.$$

Dus $\Delta V = 0$, en V is de oplossing van de twee-dimensionale potentiaalvergelijking. De normaalcomponent van $\underline{I}$ is aan de rand gelijk aan nul, dus $\partial V/\partial n = 0$ aan rand van G, behalve in A en B, waar $\partial V/\partial n$ een delta functie-achtige singulariteit vertoont. We moeten eerst die singulariteit in de hand hebben, dus de bronnen van het veld.

Beschouw de functie $v = \frac{1}{2\pi\sigma} \log \frac{1}{r}$, waar r de afstand tot de oorsprong is. Deze v is oplossing van de potentiaalvergelijking voor $r \neq 0$, en ook geldt $-\sigma\partial v/\partial r = 1/2\pi r$. Integreren we dit langs een cirkel met straal r om de oorsprong dan is het resultaat 1. De vector $\underline{i} = -\sigma\,\mathrm{grad}\, v$ heeft dus de eigenschap

$$\int i_n \, ds = 1 \quad \text{voor gesloten kromme om oorsprong.}$$

De functie v is dus de potentiaal behorende bij een eenheidsstroombron.

Als we in een naar alle richtingen oneindig grote plaat bij z = o een elektrode plaatsen en daar 1 ampere stroom invoeren, dan zijn de stroomlijnen radiaal. De totale stroom die door iedere cirkel met middelpunt z = 0 naar buiten vloeit is 1 ampere, en die stroom vloeit gelijkmatig weg naar het oneindige, waar de negatieve elektrode de 1 ampere stroom afvoert. Zo'n eenheidsbron voor het complete z-vlak wordt dus beschreven door de potentiaal v. Daarvan gaat een $\frac{1}{2}$ ampere naar boven, $\frac{1}{2}$ ampere naar beneden. Willen we in het halfvlak in de oorsprong 1 ampere pompen, dan moeten we v met 2 vermenigvuldigen. Dan is dus, in ons eerste probleem,

$$2v = \frac{1}{\pi\sigma} \log \frac{1}{r_1}$$

de potentiaal van de eenheidsbron in A als r_1 de afstand is van z naar A, en z in H ligt.

Pompen we diezelfde stroom uit in een ander punt (B), dan is de singulariteit van de put $-\frac{1}{\pi\sigma} \log \frac{1}{r_2}$, als r_2 de afstand van z naar B betekent. Doordat het probleem lineair is, geldt het superpositieprincipe. Als bij A 1 ampere ingaat en bij B 1 ampere uitgaat, dan heeft het resulterende stroomveld een potentiaal

$$V = \frac{1}{\pi\sigma} \log \frac{r_2}{r_1} .$$

Laten a en b de coordinaten zijn van respectievelijk A en B, en z een willekeurig punt van de plaat Im (z) $\geqslant$ 0. Dan is

$$V(z) = \frac{1}{\pi\sigma} \log \left| \frac{z - b}{z - a} \right| .$$

Laten analoog c en d de coordinaten zijn van C en D. Dan is de potentiaal in D gelijk aan

$$V(d) = \frac{1}{\pi\sigma} \log \left| \frac{d - b}{d - a} \right|$$

en die in C is gelijk aan

$$V(c) = \frac{1}{\pi\sigma} \log \left| \frac{c - b}{c - a} \right| .$$

Het potentiaalverschil tussen D en C is

$$V(d) - V(c) = \frac{1}{\pi\sigma} \log \left| \frac{d - b}{d - a} \, \frac{c - a}{c - b} \right| .$$

Derhalve geldt

$$V_1 = V_{AB,CD} = \frac{1}{\pi\sigma} \log \left|\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}\right| = \frac{1}{\pi\sigma} \log \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

onder de voorwaarden

$$a < b < c < d.$$

Door cyclische opschuiving vinden we analoog:

$$V_2 = V_{BC,DA} = \frac{1}{\pi\sigma} \log \left|\frac{(d-b)(a-c)}{(d-c)(a-b)}\right| = \frac{1}{\pi\sigma} \log \frac{(c-a)(d-b)}{(b-a)(d-c)} .$$

Derhalve

$$e^{-\pi\sigma V_1} = \frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)} ,$$

$$e^{-\pi\sigma V_2} = \frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)} .$$

Optellen geeft

$$e^{-\pi\sigma V_1} + e^{-\pi\sigma V_2} = \frac{(c-b)(d-a) + (b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)} = 1.$$

Hiermee is de stelling voor het bijzondere geval H bewezen.

Beschouw nu de complexe functie

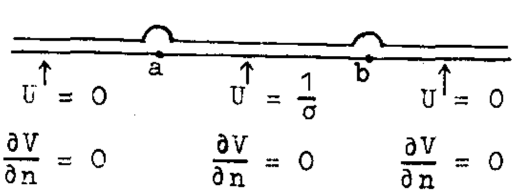
$$\Omega(z) = \frac{1}{\pi\sigma} \log \frac{z-b}{z-a}$$

waarbij voor de logarithme de hoofdwaarde is gekozen.
Het reële deel van $\Omega(z)$ is juist $V(z)$. Algemeen schrijven we

$$\Omega(z) = V(z) + i\,U(z),$$

en dan is

$$U(z) = \frac{1}{\pi\sigma} [\arg(z-b) - \arg(z-a)]$$



(hoofdwaarden) de geconjugeerde potentiaal. Deze is door V op een additieve constante na eenduidig bepaald. De lijnen U = constant zijn de stroomlijnen, de lijnen V = constant zijn de equipotentiaallijnen. Hier in H zijn het een bundel cirkels. De functie $\Omega(z)$ is holomorf voor Im $z > 0$ en heeft logarithmische singulariteiten in de punten a en b.

Om de stelling van Van der Pauw voor een "willekeurig" enkelvoudig-samenhangend gebied G te bewijzen, maken we gebruik van de afbeeldingsstelling van Riemann.
Er bestaat een functie $z = f(w)$ holomorf in G die G conform afbeeldt op H. We nemen aan dat de rand van G zò glad is, dat ook de randen van G en H corresponderen. Dan wordt

$$\Omega(z) = \frac{1}{\pi\sigma} \log \frac{z - b}{z - a} = \frac{1}{\pi\sigma} \log \frac{f(w) - b}{f(w) - a} = \Omega^*(w)$$

een holomorfe functie van w in G. We kunnen weer in reëel en imaginair deel splitsen:

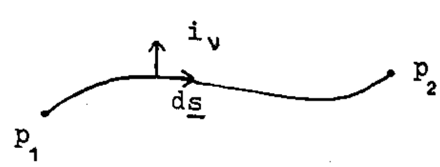
$$\Omega^*(w) = V^*(w) + i\, U^*(w),$$

en nu zijn V^* en U^* onderling geconjugeerde potentialen voor het probleem in het w-vlak, maar

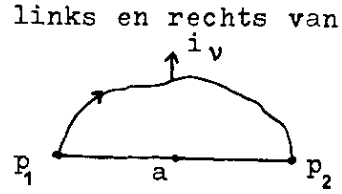
$$V(\text{origineelpunt}) = V^*(\text{beeldpunt}), \text{ etc.},$$

en dus lost $V^*(w)$ het probleem op voor G. Daarbij is $f(A) = a$, $f(B) = b$, etc. Ook het karakter van de singulariteiten in A en B is precies in orde. Om dit nog even te controleren, berekenen we de totale stroom die vloeit dwars door een kromme die twee punten p_1 en p_2 met elkaar verbindt. Dat is (gebruik Cauchy-Riemann)

$$\int_{p_1}^{p_2} i_\nu \, ds = -\sigma \int_{p_1}^{p_2} \frac{\partial V}{\partial \nu} ds = \sigma \int_{p_1}^{p_2} \frac{\partial U}{\partial s} ds = \sigma \, [U(p_2) - U(p_1)]$$



Voor twee punten, links en rechts van a, geldt



$U(p_2) = \frac{1}{\sigma}$, $U(p_1) = 0$, dus: totale stroom uit a is 1, zoals het behoort. Maar in G is de situatie

en ook nu is de totale stroom door $P_1 P_2$ gelijk aan

$$\sigma[U^*(P_2) - U^*(P_1)] = \sigma[U(p_2) - U(p_1)] = 1$$

Kortom, de hele zaak is invariant bij de conforme afbeelding, en dus is de vgl. van Van der Pauw invariant voor conforme afbeelding.

Als men uit symmetrie-overwegingen direct ziet dat $V_1 = V_2$ is, dan gaat de formule eenvoudig over in

$$\sigma = \frac{\log 2}{\pi V_1}$$

Merkwaardigerwijze was deze betrekking, echter in ander verband, impliciet in een artikel van Lampard, die echter de stelling van Van der Pauw juist heeft gemist !

Literatuur:

L.J.van der Pauw, A method of measuring specific resistivity and Hall effect of discs of arbitrary shape, Philips Res.Repts 13, 1-9, 1958. (R 334)

G.Lampard, A new theorem in electrostatics with application to calculate standards of capacitance, Proc. Instn elect. Engrs C 104, 240-250, 1957. (Monograph No. 213 R, dec. 1956)