

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 10

bestemd voor

BDK-I, WSK-I, N-I, E-I en T-I

Najaarssemester 1974

ENKELE NOTITIES

bij

WISKUNDE 10

De cursus Wiskunde 10 uit 1971 verschilt nauwelijks van de 1969 versie van Wiskunde I. De afdeling Bouwkunde wilde na 1970 niet meer meedoen met het algemene wiskundeonderwijs voor *alle* afdelingen. Als teken des ondersheids werd een dubbeltijferige codering voor de basis-wiskundevakken ingevoerd. Bouwkunde zou echter voorlopig de enige dissident blijven. De definitieve sloop van het algemeen wiskundeonderwijs op academisch niveau zou pas dik twintig jaar later, bij Werktuigbouwkunde, een aanvang nemen.

In 1973 werd een nieuwe opzet ontworpen voor het 1e-jaars wiskundeonderwijs zoals dat voor alle afdelingen zou moeten zijn: De commissie B74 bestaande uit dr. W. van der Meiden(voorzitter), drs. H.G. ter Morsche(secretaris), prof. dr. S.T.M. Ackermans, prof. dr. J. Boersma, dr. ir. M.L.J. Hautus, drs. Ligtmans, drs J.H. Timmermans en dr. P.G. Vroegindewij produceerde een manuscript met de gewenste 1e-jaarsstof. Voor de 1974-editie van Wis 10 werd al geput uit het B74-manuscript. In 1975 verscheen hiervan een flink uitgebreide versie om een betere aansluiting aan het VWO te verkrijgen. In 1978 verscheen de variant die stand zou houden tot in 1982 de 2-fasen structuur werd ingevoerd. Let, bijvoorbeeld, in de 1978-variant toch eens op dat schitterende en efficiënte hoofdstuk 6 over 2e-orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten. Vol illustratieve voorbeelden ten behoeve van de faculteiten. Dat was nog echt academische vorming!

JdG, 4 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 10 (nieuwe stijl)

bestemd voor

BDK-1, WSK-1, N-1, W-1, E-1 en T-1

Najaarssemester 1974

INHOUDSOPGAVE WISKUNDE 10

	blz.
Hoofdstuk 1. Inleiding	1
1.1. Symbolen en definities	1
1.2. Natuurlijke getallen, volledige inductie	3
1.3. Het tellen van verzamelingen en functies	6
1.4. De reële getallen	15
1.5. \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3	25
1.6. Coördinatenstelsels in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3	28
Hoofdstuk 2. Functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	33
2.1. Inleiding	33
2.2. Polynomen	34
2.3. Eigenschappen van functies	38
2.4. Limieten van functies	40
2.5. Continuïteit	46
2.6. Differentiaalrekening	51
2.7. Numerieke oplossing van vergelijkingen	62
2.8. Integraalrekening	68
2.9. Techniek van het integreren	81
2.10. Numerieke integratie	92
Hoofdstuk 3. Reeksen	99
3.1. Convergentie en divergentie	99
3.2. Reeksen met uitsluitend niet negatieve termen	102
3.3. Reeksen met zowel positieve als negatieve termen	105
3.4. Machtreeksen	108
3.5. Numerieke sommatie van reeksen	117
Hoofdstuk 4. Complexe getallen	122
4.1. Inleiding	122
4.2. Invoering der complexe getallen	122
4.3. Complexe polynomen, algebraïsche vergelijkingen	128
4.4. Analyse in het complexe vlak	133
4.5. De functie e^z	136
4.6. Meetkunde in het complexe vlak	139

Hoofdstuk 5.	Differentiaalvergelijkingen	142
5.1.	Inleiding	142
5.2.	Scheiding van variabelen	145
5.3.	Lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde	149
5.4.	Lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten	152
5.5.	Trillingen	161

INHOUDSOPGAVE WISKUNDE 20

Hoofdstuk 6.	Functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ en functies $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$	1
6.1.	Functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$	1
6.2.	Functies van twee variabelen	5
6.3.	Differentieerbaarheid van functies van twee variabelen	9
6.4.	Functies van drie variabelen	21
6.5.	Impliciete functies	23
6.6.	Richtingsafgeleide en gradiënt	27
6.7.	Extrema	30
6.8.	Extrema onder nevenvoorwaarden	34
Hoofdstuk 7.	Lineaire algebra	36
7.1.	Voorwoord	36
7.2.	Bewerkingen met matrices	36
7.3.	Voorbeelden en toepassingen	48
7.4.	Analytische meetkunde in \mathbb{R}^3 en meetkundige terminologie in \mathbb{R}^n met $n > 3$	58
7.5.	Vectorruimten	65
7.6.	Afhankelijkheid en onafhankelijkheid, bases	70
7.7.	Lineaire afbeeldingen	85
7.8.	Lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$	93
7.9.	Lineaire vergelijkingen en ongelijkheden	106

Hoofdstuk 8.	Meervoudige integralen	126
8.1.	Integratiegebieden en infinitesimale elementen	126
8.2.	Lijnintegralen	132
8.3.	Oppervlakte-integralen	136
8.4.	Volume-integralen	145
8.5.	Oneigenlijke meervoudige integralen	151
8.6.	Gammafunctie, betafunctie	157
8.7.	Integralen met een parameter	163

Hoofdstuk 1. Inleiding

1.1. Symbolen en definities

$A := B$ A is per definitie gelijk aan B
 \square einde van een bewijs.

Logische symbolen:

\Rightarrow implicatie ; als ... dan
 \Leftrightarrow coimplicatie; dan en slechts dan als
 \wedge en
 \vee of
 \neg niet
 \forall al-quantor ; voor alle ...
 \exists existentiële quantor; er is ...
 $\exists!$ er is precies één

Speciale verzamelingen:

\emptyset de lege verzameling
 \mathbb{N} de verzameling der natuurlijke getallen
 \mathbb{Z} " " " gehele "
 \mathbb{Q} " " " rationale "
 \mathbb{R} " " " reële "
 \mathbb{C} " " " complexe "
 \mathbb{R}^+ " " " reële getallen die ≥ 0 zijn
 \mathbb{P} " " " reële getallen die > 0 zijn.

Verzamelingstheoretische symbolen:

\in $a \in V$ a is element van V
 \notin $a \notin V$ a is geen element van V
 \subset $A \subset B$ A is deelverzameling van B ; $\forall_{x \in A} [x \in B]$
 \supset $A \supset B$ B is deelverzameling van A
 $\#$ $\#$ A het aantal elementen van A .

Het aangeven van verzamelingen (voorbeelden!):

- $\{a,b,c,d,e\}$ de verzameling met als elementen a, b, c, d en e;
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 10\}$ de verzameling van de reële getallen die aan $x^2 \leq 10$ voldoen;
- $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 10\}$ de verzameling van de natuurlijke getallen die aan $x^2 \leq 10$ voldoen, dus $\{1,2,3\}$;
- $\{(\cos \varphi, \sin \varphi) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ de verzameling van de punten in \mathbb{R}^2 die afstand 1 tot de oorsprong hebben.

Bewerkingen met verzamelingen:

- \cap doorsnede $A \cap B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
als $A \cap B = \emptyset$ dan heten A en B disjunct
- \cup vereniging $A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- \setminus verschil $A \setminus B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
- $*$ complement $A^* := \{x \mid x \notin A\}$
- \times cartesisch product $A \times B := \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$
 $A \times B \times C := \{(x,y,z) \mid x \in A, y \in B, z \in C\}$ enz.
 $A^2 := A \times A, A^3 := A \times A \times A$ enz.

Afbeeldingen

Definitie. Laat A en B verzamelingen zijn. Een afbeelding f van A in B - notatie $f: A \rightarrow B$ - is een voorschrift volgens hetwelk aan elk element van A precies één element van B wordt toegevoegd.

Is b ($\in B$) het element dat aan a ($\in A$) wordt toegevoegd, dan schrijven we $b = f(a)$ en ook wel $f: a \mapsto b$. We noemen b het beeld van a.

De afbeelding $f: A \rightarrow B$ is gelijk aan $g: C \rightarrow D$ indien:

(i) $A = C$; (ii) $B = D$; (iii) $f(a) = g(a)$ voor alle $a \in A$.

Slordig spreekt men vaak van de afbeelding f i.p.v. $f: A \rightarrow B$.

"Functie" is voor ons synoniem met "afbeelding".

Het beeld van een deelverzameling. Is $f: A \rightarrow B, A_0 \subset A$, dan is $f(A_0) := \{f(x) \mid x \in A_0\}$.

Injectief. De afbeelding $f: A \rightarrow B$ heet injectief (of één-éénduidig, ook wel een injectie) als voor alle $x, y \in A$ uit $f(x) = f(y)$ volgt $x = y$.

Surjectief. De afbeelding $f: A \rightarrow B$ heet surjectief (ook: f heet een surjectie; f beeldt A op B af) indien $f(A) = B$.

Bijjectief. Een afbeelding die zowel injectief als surjectief is heet bijjectief (ook: een bijjectie).

Inverse afbeelding. Als $f: A \rightarrow B$ een bijjectie is dan heet de afbeelding $f^{-1}: B \rightarrow A$ gedefinieerd door:

$f^{-1}(b) = a$ dan en slechts dan als $f(a) = b$, de inverse van f .

Samengestelde afbeelding. Laat $g: A \rightarrow B$ en $f: C \rightarrow D$ afbeeldingen zijn en laat $A_0 := \{x \in A \mid g(x) \in C\}$, dan heet de afbeelding $f \circ g: A_0 \rightarrow D$ gedefinieerd door $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ de samengestelde afbeelding van f en g .

1.2. Natuurlijke getallen, volledige inductie

De verzameling der natuurlijke getallen wordt gegeven door

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

N.B. In sommige leerboeken wordt ook het getal 0 tot de natuurlijke getallen gerekend.

We beschouwen de algebraïsche bewerkingen (optellen, aftrekken, enz.) en de ordening (ongelijkheden) voor natuurlijke getallen als bekend. We vermelden slechts de volgende eigenschap:

1.2.1. Beginsel der volledige inductie. Als voor een deelverzameling V van \mathbb{N} en voor zekere $n \in \mathbb{N}$ geldt

- 1) $n \in V$,
- 2) $\forall_{k \in V} [k+1 \in V]$,

dan is $V \supset \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$.

Men kan 2) ook formuleren met: "Als $k \in V$ dan $k+1 \in V$ "; de veronderstelling $k \in V$ heet inductieveronderstelling.

Deze eigenschap wordt vaak gebruikt op de volgende manier. Stel dat men van een bewering, die een veranderlijke bevat die de natuurlijke getallen doorloopt, kan bewijzen:

- 1) De bewering is waar voor $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Als de bewering waar is voor k , dan geldt zij ook voor $k+1$.

Dan kan men concluderen dat de bewering waar is voor alle natuurlijke

getallen $\geq n$. Een bewijs dat op deze redenering berust noemt men een bewijs door volledige inductie.

Voorbeeld 1. Beschouw de som

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 =: \sum_{i=1}^n i^2 .$$

We bewijzen door volledige inductie, dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) . \quad (1)$$

1) Voor $n = 1$ is formule (1) juist.

2) Laat formule (1) juist zijn voor $n = k$. Dan volgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \\ &= \frac{1}{6} (k+1)(k+2)(2k+3) , \end{aligned}$$

d.w.z. de formule geldt ook voor $n = k+1$. We concluderen dat formule (1) voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt.

Voorbeeld 2. Zij $h \geq -1$. We bewijzen dat voor $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh .$$

1) Als $n = 1$ geldt het gelijkteken.

2) Als de ongelijkheid geldt voor $n = k$, d.w.z. als $(1+h)^k \geq 1 + kh$, dan volgt:

$$(1+h)^{k+1} = (1+h)(1+h)^k \geq (1+h)(1+kh) = 1 + (k+1)h + kh^2 \geq 1 + (k+1)h .$$

Opgave. De bekende rij getallen van Fibonacci, d_1, d_2, \dots wordt gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} d_1 &:= 1 \\ d_2 &:= 1 \\ d_{n+1} &:= d_n + d_{n-1} \quad (n \geq 2) . \end{aligned}$$

De rij van Fibonacci begint dus als volgt: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,

De getallen van Fibonacci hebben vele fraaie eigenschappen die wiskundigen en puzzelaars eeuwenlang gefascineerd hebben. Bewijs bijv. door volledige inductie dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{k=1}^n d_k = d_{n+2} - 1; d_{3n} \text{ is even}; 2d_{n+1} = d_{n+3} - d_n.$$

Er bestaan verschillende varianten van het beginsel der volledige inductie.

1.2.2. Stelling. Als voor $V \subset \mathbb{N}$ geldt

- 1) $1 \in V$,
 - 2) uit $1 \in V, 2 \in V, \dots, k \in V$ volgt $k+1 \in V$,
- dan is $V = \mathbb{N}$.

Bewijs. Zij $W := \{k \in \mathbb{N} \mid \{1, 2, \dots, k\} \subset V\}$. Het is duidelijk dat $W \subset V$. We bewijzen dat W voldoet aan 1.2.1, voorwaarden 1) en 2) met $n = 1$.

- 1) $1 \in W$ omdat $1 \in V$.
- 2) Als $k \in W$, dan geldt $1 \in V, \dots, k \in V$. Uit het gegeven van de stelling volgt $k+1 \in V$. Dus: $1 \in V, \dots, k \in V, k+1 \in V$. We zien dat $k+1 \in W$.

We mogen dan het beginsel der volledige inductie toepassen en concluderen dat $W = \mathbb{N}$. Uit $W \subset V \subset \mathbb{N}$ volgt dan $V = \mathbb{N}$. □

1.2.3. Stelling. Een niet lege deelverzameling V van \mathbb{N} heeft een kleinste element.

Bewijs. Neem aan dat V géén kleinste element heeft. Zij $W := \mathbb{N} \setminus V$. Dan geldt: $1 \in W$ (anders was 1 het kleinste element van V). Verder, als $1 \in W, 2 \in W, \dots, k \in W$ dan is ook $k+1 \in W$ omdat anders $k+1$ het kleinste element van V zou zijn. Uit 1.2.2 volgt $W = \mathbb{N}$, dus $V = \emptyset$ in strijd met het gegeven. □

Merk op dat deze eigenschap niet geldt voor \mathbb{Z} , \mathbb{R} of \mathbb{P} , omdat deze verzamelingen zelf geen kleinste element hebben. Een ander tegenvoorbeeld is de verzameling $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ in \mathbb{Q} .

Stelling 1.2.3 wordt soms gebruikt om te bewijzen dat een verzameling leeg is. Men neemt nl. aan dat de verzameling niet leeg is en derhalve een kleinste element heeft. Uit beschouwingen m.b.t. het kleinste element komt men tot een tegenspraak.

Voorbeeld 3 (ontbinding in factoren). Een natuurlijk getal $p > 1$ heet een priemgetal als er geen getallen $a, b \in \mathbb{N}$ met $a < p$, $b < p$ bestaan waarvoor geldt: $ab = p$. De getallen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 zijn bijv. priemgetallen.

Stelling. Elk natuurlijk getal $n \geq 2$ is te schrijven als een product van priemgetallen (dit product kan bestaan uit één factor, als n zelf een priemgetal is; ook kan een priemgetal meerdere malen in het product voorkomen, bijv. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$).

Bewijs. Neem aan dat de verzameling V der natuurlijke getallen $n \geq 2$, die niet in zo'n gedaante te schrijven zijn, niet leeg is. Zij m het kleinste element van V . Dan is m geen priemgetal. Er bestaan dus getallen $a, b < m$ met $ab = m$. Omdat m het kleinste element van V is, geldt $a \notin V$, $b \notin V$. Er bestaan dus priemgetallen p_1, \dots, p_k met $a = p_1 \cdots p_k$, en q_1, \dots, q_ℓ met $b = q_1 \cdots q_\ell$. Maar dan is $m = p_1 \cdots p_k q_1 \cdots q_\ell$ ook een product van priemgetallen in strijd met het feit dat $m \in V$. We concluderen dat $V = \emptyset$, zodat de eigenschap bewezen is. \square

Het uitschrijven van een natuurlijk getal als product van priemgetallen noemt men ontbinding in factoren. Men kan bewijzen dat de ontbinding in factoren eenduidig is, afgezien van de volgorde waarin de priemfactoren worden geschreven.

1.3. Het tellen van verzamelingen en functies.

In deze paragraaf beschouwen we alleen eindige verzamelingen.

1.3.1. Eigenschappen.

Als er een bijectie $f: A \rightarrow B$ bestaat dan is $\#A = \#B$.

Als $\#A = \#B$ en $f: A \rightarrow B$ is een injectie, dan is f een bijectie.

Als $\#A = \#B$ en $f: A \rightarrow B$ is een surjectie, dan is f een bijectie.

Grondregel van het tellen. Indien er n mogelijke wijzen zijn om een handeling α te verrichten en als er na elke uitvoering van een handeling α , m mogelijke manieren zijn voor het verrichten van handeling β , dan zijn er nm mogelijke manieren om achtereenvolgens α en β te verrichten.

Een analoge regel geldt voor het aantal manieren om meer handelingen te verrichten.

1.3.2. Stelling. Zij $\#A = n$, $\#B = m$ met $n > 0$, $m > 0$, dan is het aantal afbeeldingen van A in B gelijk aan m^n .

Bewijs. Zij $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. We kunnen een afbeelding van A in B vormen door achtereenvolgens aan a_1, a_2, \dots, a_n een element van B toe te voegen. Aan a_1 kan men op m verschillende manieren een element van B toevoegen. Daarna kan men aan a_2 eveneens op m verschillende manieren een element toevoegen enz. Volgens de grondregel van het tellen kan men derhalve $m \cdot m \cdots m = m^n$ afbeeldingen vormen van A in B. □

Voorbeeld 1. Het invullen van een kolom van de voetbaltoto is equivalent met het geven van een afbeelding $t: V \rightarrow A$, waar V een verzameling is bestaande uit 13 te spelen wedstrijden en $A = \{1, 2, 3\}$. Er zijn dus 3^{13} manieren om de toto in te vullen.

Voorbeeld 2. Het werpen met meerdere dobbelstenen kan ook beschouwd worden als het geven van een afbeelding. Als we bijv. 4 dobbelstenen hebben, genummerd 1, 2, 3, 4, dan is een worp een afbeelding $w: D \rightarrow A$, waar $D = \{1, 2, 3, 4\}$ en $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Er zijn dus 6^4 worpen mogelijk.

Voorbeeld 3. Uit een kaartspel trekt men achtereenvolgens tien kaarten met teruglegging, d.w.z. elke kaart die getrokken is wordt teruggestoken voordat de volgende kaart wordt getrokken. Er is hier sprake van een afbeelding $t: A \rightarrow K$ waar $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ en K de verzameling der kaarten is. Als er 52 kaarten zijn, dan is het aantal mogelijke trekkingen 52^{10} .

1.3.3. Stelling. Het aantal deelverzamelingen van een verzameling A met $\#A = n$ is gelijk aan 2^n .

Bewijs. Elke deelverzameling B van A correspondeert met een afbeelding $\chi_B: A \rightarrow \{0, 1\}$ gedefinieerd door $\chi_B(a) := 1$ als $a \in B$ en $\chi_B(a) := 0$ als $a \notin B$. χ_B wordt de karakteristieke functie van B genoemd. Omgekeerd is elke afbeelding $\varphi: A \rightarrow \{0, 1\}$ de karakteristieke functie van een deelverzameling van A, nl. van $\{a \in A \mid \varphi(a) = 1\}$. Het aantal deelverzamelingen van A is dus gelijk aan het aantal afbeeldingen van A in $\{0, 1\}$. Uit 1.3.2 volgt nu het gestelde. □

Voorbeeld 4. De verzameling $\{1,2,3,4\}$ heeft als deelverzamelingen:

\emptyset	1
$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$	4
$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$	6
$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$	4
$\{1,2,3,4\}$	1

Het totale aantal is $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$.

Definitie. De functie $n!$ (spreek uit n faculteit) wordt gedefinieerd door: $0! := 1$; $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ ($n \in \mathbb{N}$).

1.3.4. Stelling. Zij $\# A = n$, $\# B = m$ met $n > 0$. Het aantal injecties $f: A \rightarrow B$ is gelijk aan

$$\begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} & \text{als } m \geq n \\ 0 & \text{als } m < n . \end{cases}$$

Bewijs. Het is duidelijk dat er geen injectie $f: A \rightarrow B$ bestaat als $m < n$. Beschouw vervolgens het geval $m \geq n$ dan is

$$\frac{m!}{(m-n)!} = m(m-1) \cdots (m-n+1).$$

Zij $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Aan elk element van A moeten we een element van B toevoegen, zodanig dat bij twee verschillende elementen van A niet hetzelfde element van B hoort. Aan a_1 kunnen we op m verschillende manieren een element toevoegen. Als we één zo'n toevoeging hebben gekozen, hebben we nog $m-1$ mogelijkheden om aan a_2 een element toe te voegen. Zo kunnen we doorgaan, totdat tenslotte nog $m-n+1$ mogelijkheden overblijven om aan het element a_n een element toe te voegen. In totaal vinden we dus $m(m-1) \cdots (m-n+1)$ mogelijke injecties. □

Gevolg. Zij $\# A = n$ met $n > 0$. Dan is het aantal bijecties $f: A \rightarrow A$ gelijk aan $n!$.

Bewijs. Uit 1.3.1 volgt dat injecties van A in A ook bijecties zijn. Het aantal injecties van A in A is $\frac{n!}{(n-n)!} = n!$. □

Een bijectie van een eindige verzameling A in zichzelf heet een permutatie van A . Als $A = \{1, \dots, n\}$, kunnen we zo'n permutatie φ als volgt aangeven:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix};$$

bijv. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ beschrijft de permutatie φ waarvoor $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 4$, $\varphi(4) = 3$. Soms laat men de bovenste rij weg omdat ze toch vast is. Men schrijft dan $(2 \ 1 \ 4 \ 3)$. Het geven van een permutatie van een verzameling $A = \{1, \dots, n\}$ is dus equivalent met het opschrijven van de elementen $1, 2, \dots, n$ in een bepaalde volgorde. Men kan derhalve bovenstaand gevolg ook als volgt formuleren: "Het aantal mogelijke volgorden waarin de getallen $1, 2, \dots, n$ kunnen staan is gelijk aan $n!$ ".

Voorbeeld 5. In een kaartspel met 52 kaarten kunnen de kaarten op $52!$ verschillende volgorden liggen.

Voorbeeld 6. Het aantal getallen van 5 cijfers bestaande uit de cijfers $1, 2, 3, 4, 5$ zonder herhaling is gelijk aan $5! = 120$.

Opgave 1. Op hoeveel manieren kunnen vier brieven in vier enveloppen worden gestoken?

Opgave 2. Elke dag ontbijten er acht mensen op een bank. Ze besluiten elke dag in een andere volgorde te gaan zitten. Wanneer zijn alle mogelijkheden uitgeput als ze beginnen op 1 september 1974?

We beschouwen nu weer de algemenere situatie van stelling 1.3.4. Een injectie van de verzameling $A := \{1, \dots, n\}$ in B zullen we een variatie van n uit de objecten van B noemen. Een variatie φ kan op de volgende manier aangegeven worden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

analoog als bij een permutatie. Als bijv. $n = 5$, $B = \{1, 2, \dots, 10\}$, dan is

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

een variatie. Ook hier kan zonder bezwaar de eerste rij weggelaten worden. Voor bovenstaande variatie schrijven we dus $(3 \ 7 \ 9 \ 2 \ 1)$. Het geven van een variatie van n uit de objecten b_1, \dots, b_m is dus equivalent met het vormen van een geordende rij van n verschillende objecten uit de gegeven verzameling $B = \{b_1, \dots, b_m\}$.

Voorbeeld 7. Uit een kaartspel trekt men achtereenvolgens 10 kaarten zonder teruglegging, d.w.z. een kaart die getrokken wordt, wordt niet meer teruggestoken. We krijgen zo een variatie van 10 uit de 52 kaarten. Het aantal mogelijke manieren om dit te doen is: $\frac{52!}{42!} = 52 \cdot 51 \cdots 43$. Let wel, dat de volgorde van trekken hier van belang is. Als dezelfde verzameling van 10 kaarten in een andere volgorde wordt getrokken, dan noemen we dat een andere variatie.

Voorbeeld 8. Een getal van vijf cijfers gekozen uit de cijfers $1, 2, \dots, 9$ zonder herhaling is een variatie van 5 uit de getallen $1, 2, \dots, 9$. Het aantal getallen van deze gedaante is dus: $\frac{9!}{4!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$.

Opgave 3. Op hoeveel verschillende manieren is het mogelijk in een gezelschap bestaande uit 6 jongens en 9 meisjes, dat alle jongens een meisje trouwen?

1.3.5. Stelling. Het aantal deelverzamelingen van k elementen uit een verzameling met n elementen is

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot$$

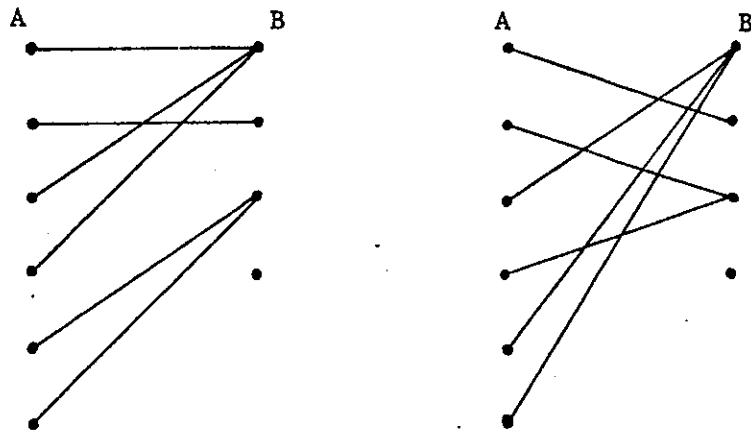
Bewijs. Het aantal injecties van $\{1, 2, \dots, k\}$ in $\{a_1, \dots, a_n\}$ is $\frac{n!}{(n-k)!}$. (De elementen a_i zijn alle verschillend.) Het aangeven van een injectie kan opgevat worden als het verrichten van twee handelingen: eerst het bepalen van een deelverzameling van $\{a_1, \dots, a_n\}$ met k elementen; daarna het aangeven van een injectie van $\{1, \dots, k\}$ in deze deelverzameling.

Voor de eerste handeling is het aantal mogelijkheden x ; voor de tweede is het $k!$. Volgens de grondregel van het tellen is: $xk! = \frac{n!}{(n-k)!}$.

$$\text{Dus } x = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot$$

□

Zij $A = \{a_1, \dots, a_n\}$; $B = \{b_1, \dots, b_m\}$. Laat k_1, \dots, k_m een rij niet negatieve gehele getallen zijn ($k_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$) met de eigenschap $k_1 + \dots + k_m = n$. We zijn geïnteresseerd in het aantal afbeeldingen van A in B met de eigenschap dat er precies k_i elementen in A zijn die op b_i worden afgebeeld. Als bijv. $A = \{1, \dots, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $k_1 = 3$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$, $k_4 = 0$, dan geeft de navolgende figuur twee toegestane afbeeldingen.



Voordat we het aantal van zulke afbeeldingen bepalen geven we een paar voorbeelden.

Voorbeeld 9. In een rij met 10 huizen moeten 4 deuren wit, 3 deuren groen en 3 deuren rood geverfd worden. Op hoeveel manieren kan dit? Het betreft hier afbeeldingen van de verzameling bestaande uit 10 huizen, die we gemakshalve met $\{1, 2, \dots, 10\}$ aanduiden, in de verzameling $\{\text{wit}, \text{groen}, \text{rood}\}$. Hierbij is $k_1 = 4$, $k_2 = 3$, $k_3 = 3$.

Voorbeeld 10. Hoeveel woorden kan men vormen uit de letters van het woord "koekoek". Hierbij is het niet van belang of het woord al of niet betekenis heeft, bijv. kkkooee is een toegestaan woord. Hier kunnen we een woord interpreteren als een afbeelding van de verzameling $\{1, \dots, 7\}$ (de plaats van de letter in het woord) in de verzameling $\{e, k, o\}$. Hierbij is $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$.

Om een heuristische afleiding voor het aantal toegestane afbeeldingen te krijgen beschouwen we voorbeeld 10. We zullen daarin een letter die meermalen voorkomt van een index voorzien: $k_1 o_1 e_1 k_2 o_2 e_2 k_3$. Nu zijn alle symbolen verschillend. Er zijn $7!$ volgordes waarin deze symbolen kunnen staan. Als we de

indices weglaten vallen sommige van die mogelijkheden samen, bijv. $k_1 k_2 o_1 e_1 k_3 o_2 e_2$ en $k_3 k_1 o_1 e_1 k_2 o_2 e_2$. Vervanging van k_1, k_2, k_3 door een willekeurige permutatie ($3!$ stuks) laat het woord dus onveranderd. Op grond daarvan moeten we het oorspronkelijke aantal mogelijke volgordes door $3!$ delen. Op dezelfde manier moeten we het aantal door $2!$ delen vanwege de permutaties van o_1, o_2 en analoog door $2!$ vanwege e_1 en e_2 . Het aantal woorden dat gevormd kan worden is dus: $\frac{7!}{2!2!3!} = 210$.

In het algemeen geldt:

- 1.3.6. Stelling. Als $\#A = n$ met $n > 0$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, $\#B = m$ en k_1, \dots, k_m niet negatieve gehele getallen zijn met de eigenschap $k_1 + \dots + k_m = n$, dan is het aantal afbeeldingen $A \rightarrow B$ met de eigenschap dat er voor $i = 1, \dots, m$ precies k_i elementen op b_i worden afgebeeld, gelijk aan

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Bewijs. Een afbeelding met de gewenste eigenschap is te verkrijgen als het resultaat van m achtereenvolgens uit te voeren handelingen: eerst het aangeven van de k_1 originelen van b_1 ; daarna het aangeven van de k_2 originelen van b_2 onder de $n - k_1$ overgebleven elementen van A ; vervolgens het aangeven van de k_3 originelen van b_3 onder de $n - k_1 - k_2$ overgebleven elementen van A enz. Stelling 1.3.5 geeft het aantal mogelijkheden voor elk van deze handelingen. De grondregel van het tellen geeft voor het totaal aantal toegelaten afbeeldingen:

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{k_1! (n - k_1)!} \cdot \frac{(n - k_1)!}{k_2! (n - k_1 - k_2)!} \dots \frac{(n - k_1 - \dots - k_{m-1})!}{k_m! 0!} = \\ & = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}. \end{aligned}$$

□

In voorbeeld 9 zien we dat er $\frac{10!}{4!3!3!} = 4200$ mogelijkheden zijn om de deuren te verven.

Voorbeeld 11. Een spel van 52 speelkaarten wordt gedeeld. Vier personen krijgen ieder 13 kaarten. Op hoeveel manieren kan dit gebeuren? Hier is een afbeelding gegeven die de verzameling der kaarten afbeeldt op de spelers:

Door vergelijken van 1.3.3 en 1.3.5 volgt

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n .$$

Beide leden geven het totale aantal deelverzamelingen van een verzameling A met $\# A = n$. Bovengenoemde gelijkheid is een speciaal geval van het binomium van Newton:

1.3.7. Stelling. Als $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, dan geldt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Vanwege deze gelijkheid worden de getallen $\binom{n}{k}$ binomiaalcoëfficiënten genoemd.

Intuïtief kunnen we deze stelling als volgt inzien: Werk het n-voudige product

$$(a + b) \cdots (a + b)$$

uit op de bekende wijze. Maak daartoe in elke factor een keuze: a of b, en vermenigvuldig de gekozen waarden. We krijgen op die manier een term van de gedaante $a^{n-k} b^k$. Deze term komt tot stand door n-k keer a en k keer b te kiezen. Bij vaste k correspondeert deze keuze met een afbeelding van $\{1, \dots, n\}$ in $\{a, b\}$ waarbij precies k elementen worden afgebeeld op b. Op grond van 1.3.6 zijn er $\binom{n}{k}$ van deze afbeeldingen, d.w.z. er zijn $\binom{n}{k}$ termen $a^{n-k} b^k$ die tezamen de bijdrage $\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ leveren. Na sommatie over k volgt het gestelde.

Formeel kunnen we de stelling als volgt bewijzen:

Bewijs. We gebruiken volledige inductie. Als $n = 1$ is het gestelde evident. Laat de stelling juist zijn voor $n-1$, d.w.z.

$$(a + b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k ,$$

oftewel

$$(a + b)^{n-1} = \binom{n-1}{0} a^{n-1} + \binom{n-1}{1} a^{n-2} b + \dots + \binom{n-1}{n-2} a b^{n-2} + \binom{n-1}{n-1} b^{n-1} .$$

Vermenigvuldig met a, b ,

$$a(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0}a^n + \binom{n-1}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n-1}{n-1}ab^{n-1}$$

$$b(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0}a^{n-1}b + \dots + \binom{n-1}{n-2}ab^{n-1} + \binom{n-1}{n-1}b^n$$

en tel op, dan is

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de formule van Pascal $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, terwijl verder $\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n} = 1$. □

Er geldt de volgende generalisatie van het binomium van Newton:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

waar gesommeerd wordt over alle m -tupels k_1, k_2, \dots, k_m van niet negatieve gehele getallen met $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. We laten het bewijs achterwege.

De getallen $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$ heten multinomiaalcoëfficiënten.

1.4. De reële getallen

We gaan er van uit dat de verzamelingen van de gehele, rationale en reële getallen - notatie \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} - bekend zijn van de middelbare school.

We richten de aandacht nu op de reële getallen. De algebraïsche bewerkingen (optelling, vermenigvuldiging, deling) en de ordening (ongelijkheden, absolute waarde of modulus) van de reële getallen beschouwen we als bekend. De reële getallen corresponderen met de punten op een rechte: de getallenrechte. Van twee getallen a en b is $|a-b|$ de afstand van hun beeldpunten op de getallenrechte.

Drie belangrijke stellingen over ongelijkheden zijn:

- 1) $|a+b| \leq |a| + |b|$
- 2) $||a| - |b|| \leq |a-b|$
- 3) $|a| \leq |b|$ dan en slechts dan als $a^2 \leq b^2$.

Bekende deelverzamelingen van \mathbb{R} zijn de zg. intervallen. We geven een lijst van typen en hun notaties:

$$\{x \mid a < x < b\} =: (a,b)$$

$$\{x \mid a \leq x < b\} =: [a,b)$$

$$\{x \mid a < x \leq b\} =: (a,b]$$

$$\{x \mid a \leq x \leq b\} =: [a,b]$$

$$\{x \mid a < x\} =: (a,\infty)$$

$$\{x \mid a \leq x\} =: [a,\infty)$$

$$\{x \mid x < b\} =: (-\infty,b)$$

$$\{x \mid x \leq b\} =: (-\infty,b] .$$

De eerste vier van deze intervallen heten begrensd, de andere onbegrensd. (a,b) , (a,∞) , $(-\infty,b)$ heten open intervallen; $[a,b]$, $[a,\infty)$ en $(-\infty,b]$ heten gesloten intervallen (zie ook onder).

Bij de notatie (a,b) enz. wordt stilzwijgend verondersteld dat a en b zo zijn dat het betreffende interval niet leeg is.

Open verzamelingen in \mathbb{R}

1.4.1. Definitie. Een verzameling V heet open als er bij elke $a \in V$ een open interval (c,d) is met $a \in (c,d) \subset V$.

Gelijkwaardige formulering: V is open als er bij elke $a \in V$ een getal $\delta > 0$ bestaat zodat

$$(a-\delta, a+\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\} \subset V .$$

Het is deze laatste formulering die we in 1.5 zullen generaliseren. Merk op dat open intervallen, \emptyset , \mathbb{R} , open zijn. Een interval $[a,b]$ is niet open. Het is evident dat elke vereniging van open verzamelingen open is. We zullen bewijzen:

1.4.2. Stelling. De doorsnede van twee open verzamelingen is open.

Bewijs. Laat V en W open zijn en neem aan dat $V \cap W \neq \emptyset$ (als $V \cap W = \emptyset$ is $V \cap W$ open). Zij $a \in V \cap W$, dan is er een $\delta_1 > 0$ zodat $(a-\delta_1, a+\delta_1) \subset V$ en er is een $\delta_2 > 0$ zodat $(a-\delta_2, a+\delta_2) \subset W$. Als nu $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$, dan is $(a-\delta, a+\delta) \subset V \cap W$. Deze redenering geldt voor elke $a \in V \cap W$. $V \cap W$ is derhalve open. □

Definitie. Is V open en $a \in V$, dan heet V een omgeving van a .

Als $p \neq q$ dan zijn er open verzamelingen U en V met $p \in U$, $q \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

Met het oog op een generalisering in 1.5 merken we op dat voor een willekeurig open interval (a,b) geldt:

$$\begin{aligned}(a,b) &= \left(\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b-a), \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\right) = \\ &= (m-\delta, m+\delta) = \{x \mid |x-m| < \delta\}\end{aligned}$$

waarin $m = \frac{1}{2}(a+b)$, $\delta = \frac{1}{2}(b-a)$.

Het open interval (a,b) is dus de verzameling van alle x die tot m een afstand kleiner dan δ hebben.

Definitie. Een punt p uit een verzameling A heet een inwendig punt van A als er een omgeving V van p bestaat met $V \subset A$.

Gevolg. Is W open en $p \in W$ dan is p inwendig punt van W . De inwendige punten van zowel $[a,b]$ als $(a,b]$ als $[a,b)$ zijn alle punten uit (a,b) .

Definitie. Een punt p uit een verzameling A heet een geïsoleerd punt van A als er een omgeving V van p bestaat met $V \cap A = \{p\}$.

Intervallen hebben geen geïsoleerde punten. Van \mathbb{N} en \mathbb{Z} is elk punt geïsoleerd. Ook van $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ is elk punt geïsoleerd (ga na!).

Definitie. Zij A een verzameling en p een punt, dan heet p een randpunt van A als voor elke omgeving V van p geldt $V \cap A \neq \emptyset$ en $V \cap A^* \neq \emptyset$.

Van een interval $[a,b]$ of $(a,b]$ of (a,b) zijn de randpunten a en b . Een geïsoleerd punt is ook randpunt. Van $B := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ is de verzameling der randpunten $B \cup \{0\}$.

Definitie. Zij A een verzameling en p een punt, dan heet p een verdichtingspunt van A als voor elke omgeving V van p geldt $A \cap (V \setminus \{p\}) \neq \emptyset$.

Elk inwendig punt van een verzameling is ook verdichtingspunt. Alle punten van $[a,b]$ zijn verdichtingspunten van zowel $[a,b]$ als $(a,b]$ als (a,b) . Als een randpunt van A niet tot A behoort is het een verdichtingspunt van A . Van $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ is 0 het enige verdichtingspunt.

1.4.3. Definitie. Een verzameling W heet gesloten indien $\mathbb{R} \setminus W$ open is.

Gesloten intervallen, \mathbb{R} en \emptyset , zijn voorbeelden van gesloten verzamelingen. Merk op dat er verzamelingen zijn die noch open noch gesloten zijn, zoals het interval $[a,b)$. \mathbb{R} en \emptyset zijn zowel open als gesloten.

1.4.4. Stelling. Is W gesloten en p een verdichtingspunt van W dan is $p \in W$.

Bewijs. Neem aan $p \notin W$ dan is $p \in \mathbb{R} \setminus W = W^*$. W^* is open, p is inwendig punt van W^* zodat er een omgeving V van p bestaat met $V \subset W^*$. Voor deze omgeving V geldt dan $W \cap (V \setminus \{p\}) = \emptyset$, in tegenspraak met de definitie van verdichtingspunt. Dus is $p \in W$. □

Definitie. Een verzameling U heet begrensd indien er een getal $M > 0$ bestaat z6 dat $U \subset [-M, M]$.

Begrensd intervallen zijn begrensd verzamelingen.

Rijen reële getallen

1.4.5. Een oneindige rij reële getallen is een afbeelding $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Als $1 \mapsto a_1, 2 \mapsto a_2, \dots$ noteren we de rij op een van de volgende wijzen:

$$a_1, a_2, \dots; \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}}; \quad (a_n).$$

De getallen a_i heten de elementen van de rij.

Voorbeelden. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$; $a_n = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$1, 1, 1, \dots; \quad a_n = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\left\{ \frac{1}{n^2} \right\} \text{ is de rij } 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots$$

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \text{ even}} \text{ is de rij } \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$$

N.B. In het laatste voorbeeld wordt een uitbreiding van de notatie geïntroduceerd.

Een oneindige rij reële getallen a_1, a_2, \dots heet begrensd indien er een getal M bestaat zodat $|a_n| \leq M$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

De rij a_1, a_2, \dots met $a_n = (-1)^n$ is begrensd; de rij met $a_n = n$ is niet begrensd.

Als voor de rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geldt: $\exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} [a_n < M]$, dan heet de rij naar boven begrensd. Analoog is te definiëren het begrip naar beneden begrensd rij.

Een rij a_1, a_2, \dots is begrensd dan en slechts dan als de verzameling $\{a_1, a_2, \dots\}$ begrensd is.

N.B. Omdat de elementen van een rij niet noodzakelijk verschillend zijn, kan $\{a_1, a_2, \dots\}$ best een eindige verzameling zijn.

Als $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, dan heet de rij (a_n) monotoon stijgend; als $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$, dan heet de rij monotoon niet dalend. Analoog zijn te definiëren de begrippen monotoon dalend en monotoon niet stijgend.

We zeggen dat de elementen van de rij (a_n) op den duur (afgekort o.d.d.) in de verzameling V liggen indien

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad [a_n \in V].$$

Gelijkwaardig geformuleerd: a_n ligt o.d.d. in V indien voor slechts eindig veel waarden van n geldt $a_n \notin V$.

Analoog: a_n heeft o.d.d. de eigenschap E .

Voorbeelden. $2^n > 1000$ o.d.d.

Voor elke $\delta > 0$ geldt $\frac{1}{n} \in (-\delta, \delta)$ o.d.d.

Het is niet waar, dat $(-1)^n > 0$ o.d.d.

Lemma. Als voor (a_n) geldt $a_n \in V$ o.d.d. en ook $a_n \in W$ o.d.d., dan geldt $a_n \in V \cap W$ o.d.d.

Bewijs. Krachtens het gegeven bestaan er getallen $N_1 \in \mathbb{N}$ en $N_2 \in \mathbb{N}$ zodat voor $n > N_1$ geldt $a_n \in V$, en voor $n > N_2$ $a_n \in W$; voor $n > N := \max(N_1, N_2)$ geldt derhalve zowel $a_n \in V$ als $a_n \in W$, dus $a_n \in V \cap W$. \square

Limieten van rijen reële getallen

Dit begrip is reeds bekend; we geven eerst een van de vele vormen van de definitie.

1.4.6. Definitie. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ betekent dat voor elke omgeving V van a geldt $a_n \in V$ o.d.d.

In plaats van $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ zeggen we ook: $a_n \rightarrow a$ als $n \rightarrow \infty$; a_n nadert tot a .

1.4.7. Stelling. De volgende beweringen zijn gelijkwaardig:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

2) Voor elke $\epsilon > 0$ geldt $a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ o.d.d.

3) Voor elke $\epsilon > 0$ is er een $N \in \mathbb{R}$ zodanig dat voor $n > N$ geldt $|a_n - a| < \epsilon$.

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0.$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0.$$

Het bewijs is triviaal.

Voorbeelden. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Om het laatste resultaat te bewijzen moeten we bij elke $\epsilon > 0$ een $N \in \mathbb{R}$ aangeven zodat voor $n > N$ geldt $\left| \frac{1}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Het is duidelijk dat $N = \lceil \log_2 \frac{1}{\epsilon} \rceil$ voldoet.

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ bestaat niet; $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2$ bestaat ook niet.

In de situatie van het laatste voorbeeld zeggen we wel: $n^2 \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$.

Definitie. $a_n \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$, betekent dat voor elke $M \in \mathbb{R}$ geldt $a_n > M$ o.d.d.; $a_n \rightarrow -\infty$ als $n \rightarrow \infty$, betekent dat voor elke $M \in \mathbb{R}$ geldt $a_n < M$ o.d.d.

Voorbeelden. $\sqrt{n} \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$; $-\sqrt{n} \rightarrow -\infty$ als $n \rightarrow \infty$;

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n}$ bestaat niet, ook is niet: $(-1)^n \sqrt{n} \rightarrow \infty$ of

$(-1)^n \sqrt{n} \rightarrow -\infty$ als $n \rightarrow \infty$.

Als de rij (a_n) een limiet $a \in \mathbb{R}$ heeft, dan heet de rij convergent; als de rij geen limiet in \mathbb{R} heeft, dan heet de rij divergent; in het bijzonder zegt men in geval $a_n \rightarrow \infty$ (resp. $-\infty$) als $n \rightarrow \infty$, dat a_n naar ∞ (resp. $-\infty$) divergeert.

1.4.8. Stelling (standaardlimieten).

1) Als $p > 0$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$;

2) als $|q| < 1$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$;

3) als $a > 0$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Bewijs. 1) Zij $\epsilon > 0$; opdat $\left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| = \frac{1}{n^p} < \epsilon$ is het voldoende dat $n > \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/p} =: N$.

Met deze waarde van N is dus aan formulering 3) van 1.4.7 voldaan.

2) Als $q = 0$ is het triviaal; neem verder aan dat $q \neq 0$ is.

Zij $\epsilon > 0$; opdat $|q^n - 0| < \epsilon$ ofwel $|q|^n < \epsilon$ is het voldoende dat $\log|q|^n < \log \epsilon$. Met $N := \frac{\log \epsilon}{\log|q|}$ is aan formulering 3) voldaan.

3) Zij $\epsilon > 0$; volgens 1.2, voorbeeld 2 is $(1+\epsilon)^n \geq 1+n\epsilon$, zodat $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+\epsilon)^n = \infty$. Daaruit volgt

$$\frac{1}{(1+\epsilon)^n} < a < (1+\epsilon)^n \text{ o.d.d.}$$

$$\frac{1}{1+\epsilon} < \sqrt[n]{a} < 1+\epsilon \text{ o.d.d.}$$

$$-\frac{\epsilon}{1+\epsilon} < \sqrt[n]{a} - 1 < \epsilon \text{ o.d.d.}$$

en

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon \text{ o.d.d.}$$

□

1.4.9. Stelling (bewerkingen met limieten). Als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, dan is

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$ mits $a \neq 0$;

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|a_n|} = \sqrt{|a|}$.

Bovendien geldt:

5) Als $a_n \leq b_n$ o.d.d. dan is $a \leq b$.

Bewijs. We schrijven alleen de bewijzen van 1) en 5) uit.

1) Zij $\epsilon > 0$; nu is $|a_n - a| < \frac{1}{2}\epsilon$ o.d.d. zeg voor $n > N_1$; $|b_n - b| < \frac{1}{2}\epsilon$ o.d.d. zeg voor $n > N_2$. Voor $n > \max(N_1, N_2)$ is dan

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon.$$

5) Bewijs uit het ongerijmde: stel $b < a$ dan geldt $b_n \in (-\infty, \frac{1}{2}(b+a))$ o.d.d., $a_n \in (\frac{1}{2}(b+a), \infty)$ o.d.d. en dus $b_n < \frac{1}{2}(b+a) < a_n$ o.d.d., tegenspraak. \square

Voorbeelden.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n + 5}{2n^2 - 5n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 2}{\sqrt{n^2 + n - 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{1 + 1} = 1. \end{aligned}$$

1.4.10. Stelling (insluitstelling). Zij $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = p$; laat voor (y_n) gelden: $a_n \leq y_n \leq b_n$ o.d.d.. Dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$.

Bewijs. Zij $\epsilon > 0$; dan is $a_n \in (p-\epsilon, p+\epsilon)$ o.d.d. (zeg voor $n > N_1$), $b_n \in (p-\epsilon, p+\epsilon)$ o.d.d. (zeg voor $n > N_2$), terwijl $a_n \leq y_n \leq b_n$ o.d.d. (zeg voor $n > N_3$). Op den duur (nl. voor $n > \max(N_1, N_2, N_3)$) is dan $p-\epsilon < a_n \leq y_n \leq b_n < p+\epsilon$, dus $y_n \in (p-\epsilon, p+\epsilon)$ o.d.d. \square

Voorbeelden.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \text{ daar } -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3 \text{ daar}$$

$$3 = \sqrt[n]{3^n} < \sqrt[n]{2^n + 3^n} < \sqrt[n]{3^n + 3^n} = 3\sqrt[n]{2} \text{ en } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1.$$

Stelling. Is (a_n) convergent, dan is (a_n) begrensd.

Bewijs. Zij $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, dan is $a_n \in (a-1, a+1)$ o.d.d., zeg voor $n > N \in \mathbb{N}$.

Dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$,

$$\min\{a_1, a_2, \dots, a_N, a-1\} \leq a_n \leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_N, a+1\}.$$

\square

1.4.11. Grondeigenschap der reële getallen. Een monotone begrensde rij in \mathbb{R} is convergent

Deze grondeigenschap zullen we opvatten als een axioma. Ze postuleert het bestaan van de limiet; ze geeft ons geen middel de limiet ook te berekenen.

N.B. Een monotoon niet dalende rij is begrensd (en dus convergent) dan en slechts dan als de rij naar boven begrensd is. Een analoge bewering geldt voor monotoon niet stijgende rijen.

Voorbeeld. De rij (a_n) zij gedefinieerd door: $a_1 := 0$, $a_{n+1} := \frac{2a_n + 4}{3}$ ($n \in \mathbb{N}$). De rij (a_n) is convergent.

(i) We bewijzen door volledige inductie dat (a_n) monotoon stijgend is.

1) $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{4}{3}$, dus $a_1 < a_2$.

2) We zullen laten zien dat uit $a_n < a_{n+1}$ volgt $a_{n+1} < a_{n+2}$.

Nu is

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{2a_{n+1} + 4}{3} - \frac{2a_n + 4}{3} = \frac{2}{3} (a_{n+1} - a_n) > 0.$$

ii) We bewijzen eveneens door volledige inductie dat (a_n) naar boven begrensd is. We moeten daartoe een bovengrens M vinden die zo ruim is, dat uit $a_n \leq M$ volgt

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 4}{3} \leq \frac{2M + 4}{3} \leq M;$$

dus $M \geq 4$. Het inductiebewijs van $\forall_{n \in \mathbb{N}} [a_n \leq 4]$ verloopt dan aldus:

1) $a_1 = 0 \leq 4$.

2) Als $a_n \leq 4$, dan is $a_{n+1} = \frac{2a_n + 4}{3} \leq \frac{2 \cdot 4 + 4}{3} = 4$.

Overeenkomstig de grondeigenschap 1.4.11 bestaat nu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: \ell$.

Uiteraard is ook $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \ell$; maar dan is

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 4}{3} = \frac{2\ell + 4}{3}$$

waaruit volgt $\ell = 4$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$.

Opmerking. In \mathbb{Q} bestaan er begrensde monotone rijen die niet naar een element van \mathbb{Q} convergeren.

Voorbeeld. Beschouw de rij (b_n) gedefinieerd door: $b_1 := 2$, $b_{n+1} := \frac{1}{2}(b_n + \frac{2}{b_n})$. We bewijzen eerst door volledige inductie dat $b_n \in \mathbb{Q}$ en $2 \leq b_n^2 \leq 4$.

1) $b_1 = 2$, dus $b_1 \in \mathbb{Q}$ en $2 \leq b_1^2 \leq 4$.

2) Zij $b_n \in \mathbb{Q}$ en $2 \leq b_n^2 \leq 4$. Dan is $\frac{2}{b_n} \in \mathbb{Q}$, $b_n + \frac{2}{b_n} \in \mathbb{Q}$ en dus $b_{n+1} \in \mathbb{Q}$.

Schrijf $b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 2}{2b_n}$, dan is $b_{n+1}^2 - 2 = \frac{(b_n^2 + 2)^2}{4b_n^2} - 2 = \frac{(b_n^2 - 2)^2}{4b_n^2}$.

Als $2 \leq b_n^2 \leq 4$, dan volgt $0 \leq b_{n+1}^2 - 2 \leq \frac{(4-2)^2}{4 \cdot 2} = 2$ oftewel $2 \leq b_{n+1}^2 \leq 4$.

Uit het voorgaande volgt tevens $b_{n+1} - b_n = \frac{2 - b_n^2}{2b_n} \leq 0$. De rij (b_n) is dus monotoon niet stijgend.

Stel nu dat er een limiet $l \in \mathbb{Q}$ zou bestaan, dan was $l = \frac{1}{2}l + \frac{1}{l}$, dus $l^2 = 2$. Er is echter geen rationaal getal waarvan het kwadraat gelijk aan 2 is.

Opmerking. Beschouwt men (b_n) als een rij in \mathbb{R} dan is deze wel convergent en $b_n \rightarrow \sqrt{2}$ als $n \rightarrow \infty$. De rij getallen (b_n) is de rij die men verkrijgt als men beginnend met $b_1 = 2$, $\sqrt{2}$ benadert volgens de methode van Newton-Raphson (zie 2.7, voorbeeld 1).

Uit 1.4.11 volgen vele belangrijke eigenschappen van de reële getallen. We bespreken er één van.

1.4.12. Stelling (stelling van het intervallen-nest). Laat de rijen (a_n) en (b_n) voldoen aan

$$\forall n \in \mathbb{N} [a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n]$$

d.w.z.

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1,$$

en zij $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

Dan is er precies één c met $c \in [a_n, b_n]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs. De rij (a_n) is monotoon niet dalend en naar boven begrensd. Volgens 1.4.11 bestaat dan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: a$, terwijl $a_n \leq a$ voor elke n . Daar tevens $a_m \leq b_n$ voor elke m , is $a \leq b_n$ (b_n is de limiet van de constante rij b_n, b_n, \dots). We vinden zo: $a \in [a_n, b_n]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Analoog is in te zien dat $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: b$ bestaat en $b \in [a_n, b_n]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Uit $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ volgt $b = a$.

Definieer nu $c := a = b$, dan is: $c \in [a_n, b_n]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

We tonen nog aan dat c eenduidig is. Als immers voor een zekere d geldt:

$d \in [a_n, b_n]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dan volgt $a \leq d \leq b$ en dus $d = a = b = c$. \square

Maximum, minimum

Zij V een begrensde verzameling van reële getallen.

Dan heet $M \in V$ het maximum van V indien $x \leq M$ voor elke $x \in V$; analoog:

$m \in V$ heet het minimum van V als $m \leq x$ voor elke $x \in V$.

Niet elke begrensde verzameling heeft een maximum (of minimum). Als voorbeeld noemen we $V := (0,1)$. Indien $M \in V$ het maximum van V zou zijn dan was $M < 1$. In dat geval is echter $M < \frac{M+1}{2} < 1$ zodat $\frac{M+1}{2} \in V$ en M niet het maximum is.

Conclusie: V heeft geen maximum; V heeft evenmin een minimum.

1.5. \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3

We zullen nu een deel van de beschouwingen uit 1.4 uitbreiden tot

$$\mathbb{R}^2 := \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

en

$$\mathbb{R}^3 := \{(x,y,z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}.$$

Het getallenpaar (x,y) resp. getallentripel (x,y,z) wordt opgevat als de kentallen van een vector. \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 zijn dan vectorruimten. In deze ruimten kiezen we voorlopig als vaste bases,

$$\mathbb{R}^2 : \underline{e}_1 = (1,0), \underline{e}_2 = (0,1)$$

$$\mathbb{R}^3 : \underline{e}_1 = (1,0,0), \underline{e}_2 = (0,1,0), \underline{e}_3 = (0,0,1).$$

De kentallen van de vectoren stemmen dan overeen met de componenten t.o.v. de orthogonale bases $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$, $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \subset \mathbb{R}^3$.

In \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 is een afstand gedefinieerd die met de stelling van Pythagoras eenvoudig berekend kan worden:

is $\underline{a} = (a_1, a_2)$, $\underline{b} = (b_1, b_2)$, dan is de afstand van \underline{a} tot \underline{b} in \mathbb{R}^2 :

$$d(\underline{a}, \underline{b}) := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} ;$$

is $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\underline{d} = (d_1, d_2, d_3)$, dan is de afstand van \underline{c} tot \underline{d} in \mathbb{R}^3 :

$$d(\underline{c}, \underline{d}) := \sqrt{(c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2 + (c_3 - d_3)^2} .$$

Merk op dat deze afstand voldoet aan de zg. driehoeksongelijkheid:

$$d(\underline{a}, \underline{b}) \leq d(\underline{a}, \underline{c}) + d(\underline{c}, \underline{b}) .$$

$d(\underline{a}, \underline{0}) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ noteren we als $|\underline{a}|$, de lengte van \underline{a} .

Dan is $d(\underline{a}, \underline{b}) = |\underline{a} - \underline{b}|$.

Open verzamelingen in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3

Definitie. Zij $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ (of $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$) en $\delta > 0$, dan heet

$$B(\underline{a}, \delta) := \{\underline{x} \mid d(\underline{a}, \underline{x}) < \delta\}$$

de open bol (schijf, bal) met middelpunt \underline{a} en straal δ .

Het begrip open bol is een analogon in \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 van het begrip open interval uit \mathbb{R} .

We gaan verder ook analoog te werk:

1.5.1. Definitie. Een verzameling $V \subset \mathbb{R}^2$ (of $V \subset \mathbb{R}^3$) heet open indien bij elke $\underline{a} \in V$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat $B(\underline{a}, \delta) \subset V$.

Gelijkwaardige formulering: V is open als V een vereniging is van open ballen.

1.5.2. Definitie. Is V open en $\underline{a} \in V$, dan heet V een omgeving van \underline{a} .

Stelling. Een open bol is een open verzameling.

Bewijs. Zij $\underline{b} \in B(\underline{a}, \delta)$, dan is $d(\underline{a}, \underline{b}) < \delta$. Nu is: $\delta_1 := \delta - d(\underline{a}, \underline{b}) > 0$.

We zullen laten zien dat $B(\underline{b}, \delta_1) \subset B(\underline{a}, \delta)$. Is $\underline{c} \in B(\underline{b}, \delta_1)$ dan is $d(\underline{b}, \underline{c}) < \delta_1$ en derhalve $d(\underline{a}, \underline{c}) \leq d(\underline{a}, \underline{b}) + d(\underline{b}, \underline{c}) < d(\underline{a}, \underline{b}) + \delta_1 = \delta$, dus $\underline{c} \in B(\underline{a}, \delta)$. \square

Voorbeelden van open verzamelingen:

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}.$$

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4\}.$$

$$V(\underline{a}, \delta) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - a_1| < \delta, |x_2 - a_2| < \delta\}, \underline{a} \in \mathbb{R}^2, \delta > 0.$$

$$V(\underline{a}, \delta) := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1 - a_1| < \delta, |x_2 - a_2| < \delta, |x_3 - a_3| < \delta\}, \underline{a} \in \mathbb{R}^3, \delta > 0.$$

De definities van de begrippen inwendig punt, geïsoleerd punt, randpunt en verdichtingspunt zijn letterlijk dezelfde als in 1.4.

1.5.3. Stelling. 1) \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 en \emptyset zijn open.

2) De doorsnede van twee open verzamelingen is open.

3) Is $\underline{a} \neq \underline{b}$, dan zijn er open verzamelingen U en V met $\underline{a} \in U$, $\underline{b} \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

4) W is dan en slechts dan open als bij elke $\underline{a} \in W$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat $V(\underline{a}, \delta) \subset W$.

Bewijs. De bewijzen zijn niet moeilijk; we volstaan met enkele opmerkingen.

2) Als $\underline{a} \in V \cap W$ en $B(\underline{a}, \delta_1) \subset V$, $B(\underline{a}, \delta_2) \subset W$, dan is $B(\underline{a}, \min\{\delta_1, \delta_2\}) \subset V \cap W$.

3) Als $\underline{a} \neq \underline{b}$, dan is $B(\underline{a}, \frac{1}{2}d(\underline{a}, \underline{b})) \cap B(\underline{b}, \frac{1}{2}d(\underline{a}, \underline{b})) = \emptyset$.

4) $B(\underline{a}, \delta) \subset V(\underline{a}, \delta) \subset B(\underline{a}, \delta\sqrt{k})$ ($\underline{a} \in \mathbb{R}^k$, $k = 2, 3$, $\delta > 0$). □

1.5.4. Definitie. Een verzameling $W \subset \mathbb{R}^2$ of $W \subset \mathbb{R}^3$ heet gesloten indien $\mathbb{R}^2 \setminus W$ resp. $\mathbb{R}^3 \setminus W$ open is.

Voorbeelden: \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , \emptyset , $\{\underline{x} \mid d(\underline{a}, \underline{x}) \leq \delta\}$ zijn gesloten.

Definitie. Een verzameling U heet begrensd indien er een $M > 0$ bestaat zó dat $U \subset B(\underline{0}, M)$.

Voorbeelden: $B(\underline{a}, \delta)$, $V(\underline{a}, \delta)$ zijn begrensd.

Rijen punten in \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3

1.5.5. Definitie. $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n = \underline{a}$ in \mathbb{R}^2 (of \mathbb{R}^3) betekent dat voor elke omgeving U van \underline{a} geldt $\underline{a}_n \in U$ o.d.d.

Zij $\underline{a}_n = (a_{1n}, a_{2n})$, $\underline{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ of $\underline{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, a_{3n})$, $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.

1.5.6. Stelling. De volgende beweringen zijn gelijkwaardig:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n = \underline{a}$.
- 2) Voor elke $\varepsilon > 0$ geldt $\underline{a}_n \in B(\underline{a}, \varepsilon)$ o.d.d.
- 3) Voor elke $\varepsilon > 0$ geldt $\underline{a}_n \in V(\underline{a}, \varepsilon)$ o.d.d.
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{a}_n - \underline{a}) = \underline{0}$.
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\underline{a}_n, \underline{a}) = \underline{0}$.
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{1n} = a_1$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a_2$ (en $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{3n} = a_3$) .

Het bewijs is niet moeilijk.

Een rij (\underline{a}_n) heet begrensd indien $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots\}$ een begrensde verzameling is. Een aantal van de stellingen uit 1.4 zijn nog uit te breiden tot \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 . We zullen daar niet verder op ingaan.

1.6. Coördinatenstelsels in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3

Op de middelbare school is de analytische meetkunde meestal bedreven met cartesische coördinaten in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 (x, y resp. x, y, z). Als men problemen bestudeert met "cirkel- of bolsymmetrie", dan zijn andere coördinaten vaak handiger.

1.6.1. Poolcoördinaten in \mathbb{R}^2

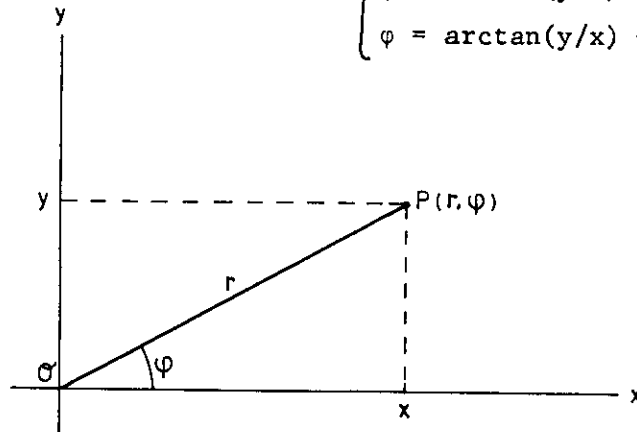
We leggen een punt P in het vlak vast door zijn afstand tot $O = (0,0)$ en door de hoek die de verbindingslijn OP maakt met de positieve x -as.

De afstand heet gewoonlijk r , de hoek φ ; uit de definitie volgt dat $r \geq 0$, φ onbepaald is in \mathcal{O} en dat in andere punten φ slechts bepaald is tot op veelvoud van 2π ((r, φ) en $(r, \varphi + 2\pi)$ is hetzelfde punt). Meestal wordt φ zo gekozen dat $0 \leq \varphi < 2\pi$ of $-\pi < \varphi \leq \pi$.

O noemt men wel de pool, de positieve x -as de poolas, r de voerstraal van P en φ het argument van P .

Het verband tussen cartesische coördinaten (x,y) en poolcoördinaten (r,φ) is

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctan(y/x) & \text{als } x \geq 0, \\ \varphi = \arctan(y/x) + \pi & \text{als } x < 0, y > 0, \\ \varphi = \arctan(y/x) - \pi & \text{als } x < 0, y < 0. \end{cases}$$



Voor problemen waarin cirkelsymmetrie voorkomt zijn poolcoördinaten erg handig:

De cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ heeft als vergelijking in poolcoördinaten: $r = a$.

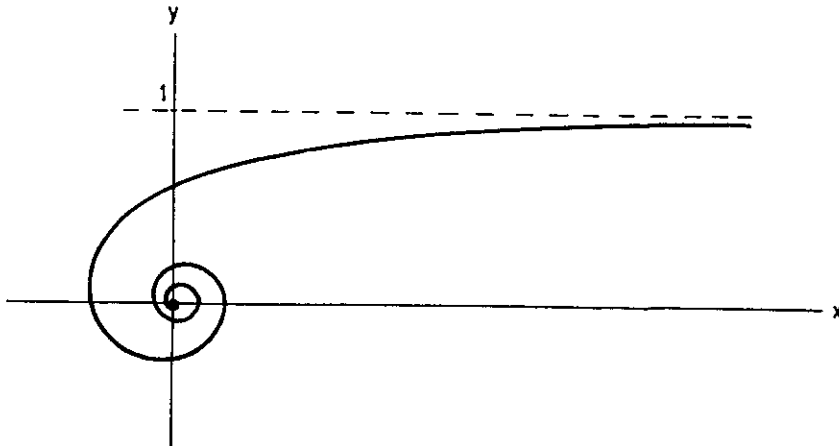
Krommen $r = \text{constant}$ zijn cirkels om O ; krommen $\varphi = \text{constant}$ half-rechten door O (O zelf uitgezonderd).

Een vergelijking $r = r(\varphi)$ stelt in het algemeen een kromme voor.

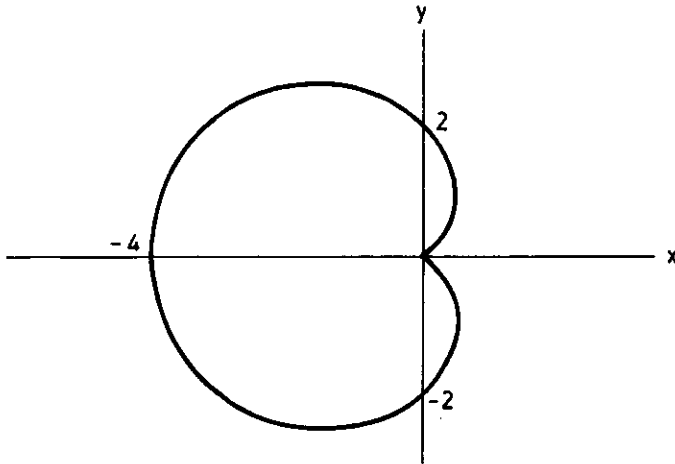
We geven enkele voorbeelden:

a) $r = \frac{1}{\varphi}$; $\varphi > 0$.

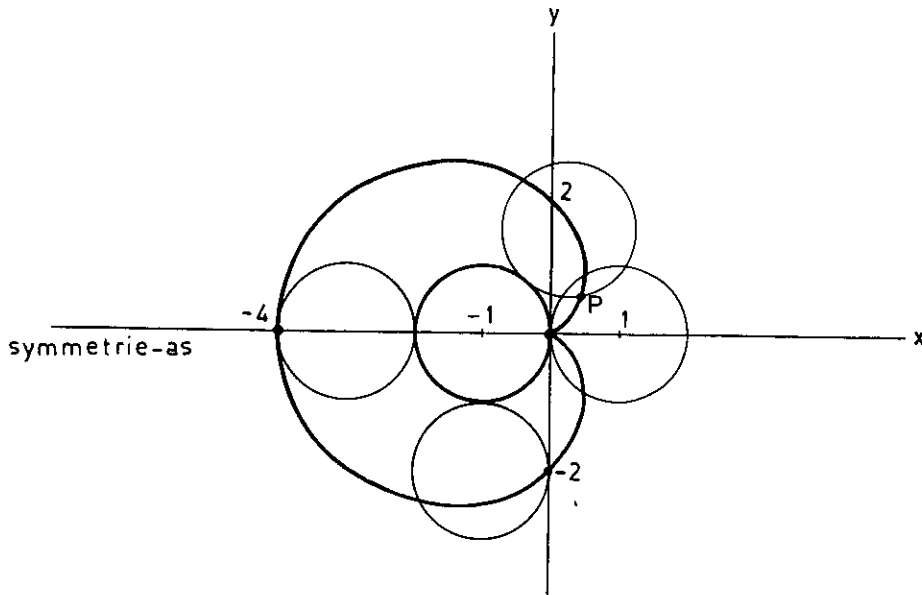
We zien dat $r \rightarrow \infty$ als $\varphi \rightarrow 0$ maar daar $y = r \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{\varphi}$, geldt $y \rightarrow 1$ als $\varphi \rightarrow 0$ (zie 2.4, voorbeeld 6); er is dus een horizontale asymptoot $y = 1$. De kromme heet hyperbolische spiraal.



b) $r = 2(1 - \cos \varphi)$. De kromme heet cardioïde.



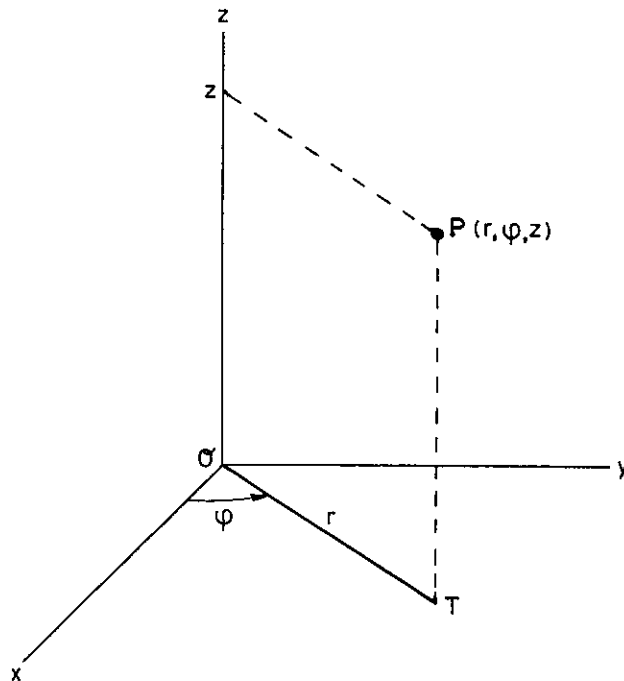
De kromme ontstaat (zie figuur) als de baan van het punt P op de rechter cirkel als deze cirkel (met straal 1) zonder slip langs de vaste cirkel met middelpunt $(-1,0)$ en straal 1 rolt.



In cartesische coördinaten is de vergelijking van de cardioïde:
 $(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$ hetgeen veel ingewikkelder is.

1.6.2. Cylindercoördinaten in \mathbb{R}^3

Deze zijn de uitbreiding van poolcoördinaten in het (x,y) -vlak met een z -coördinaat.



De cylindercoördinaten van P zijn (r, φ, z) ;
de samenhang met cartesische coördinaten is:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z. \end{cases}$$

Cylindercoördinaten zijn gemakkelijk bij meetkundige figuren die axiale symmetrie hebben (omwentelingsfiguren!).

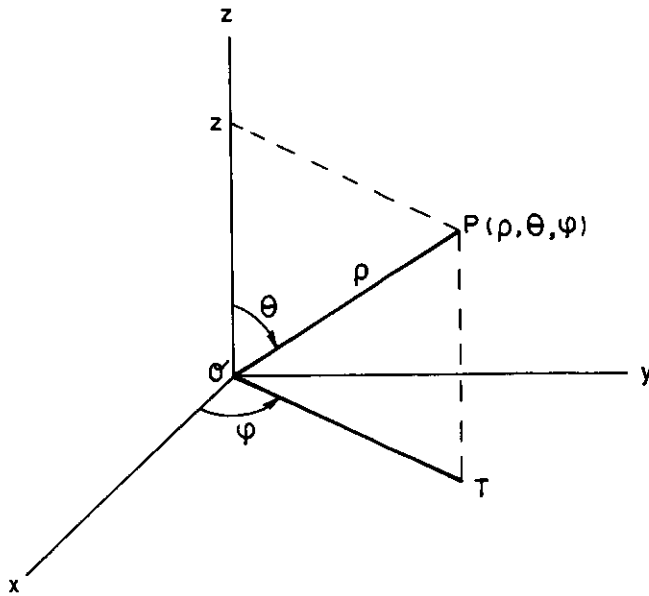
De cylinder $x^2 + y^2 = a^2$ heeft als vergelijking in cylindercoördinaten:

$$r = a.$$

De kegel $z^2 = x^2 + y^2$ heeft als vergelijking $z^2 = r^2$, $z = \pm r$.

1.6.3. Bolcoördinaten in \mathbb{R}^3

Voor figuren met een punt van symmetrie (bolsymmetrie) zijn de volgende coördinaten erg handig.



Een punt P in \mathbb{R}^3 wordt bepaald door: afstand ρ tot O , hoek θ van OP met de positieve z -as, hoek φ van de projectie van OP op het (x,y) -vlak met de positieve x -as.

Krachtens definitie is $\rho \geq 0$, θ tussen 0 en π te nemen en φ bepaald tot op veelvoud van 2π ; meestal wordt φ zo gekozen dat $0 \leq \varphi < 2\pi$. Voor O is θ noch φ bepaald; voor de andere punten op de z -as is $\theta = 0$ of $\theta = \pi$ en φ onbepaald. De samenhang met cartesische coördinaten is

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases}$$

Uit de bekende eigenschappen van een rechthoekige driehoek volgt namelijk $\overline{OT} = \rho \sin \theta$, $\overline{PT} = \rho \cos \theta$, zie figuur.

$\rho = \text{constant}$ is de vergelijking van een bol om O .

$\varphi = \text{constant}$ is de "helft" van een vlak door de z -as (de z -as zelf uitgezonderd).

$\theta = \text{constant}$ is een halve kegel (uitgezonderd de top O) met de z -as als as.

Hoofdstuk 2. Functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

2.1. Inleiding

Het begrip afbeelding is algemeen gedefinieerd in 1.1. In dit hoofdstuk beschouwen we meer in het bijzonder afbeeldingen van de gedaante $f : A \rightarrow B$, waarbij $A \subset \mathbb{R}$ en $B \subset \mathbb{R}$. We noemen f dan een reële functie van één reële variabele, of kortweg functie.

A heet de definitieverzameling van de functie f ; notatie $\text{DOM } f$.

Voorbeelden. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$;

$f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log x$;

$$f : [-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{als } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{als } x = 0 \\ -x^2 & \text{als } 0 < x < 2. \end{cases}$$

N.B. Met $\log x$ wordt de natuurlijke logaritmme van x bedoeld, d.i. de logaritmme met grondtal e . In sommige leerboeken wordt ook wel de notatie $\ln x$ gebruikt.

In het vervolg zullen we een functie f ook wel definiëren door middel van een formule zonder expliciete vermelding van de definitieverzameling. In dat geval zal $\text{DOM } f$ bestaan uit die waarden waarvoor de formule zinvol is.

Voorbeeld. $f(x) = \sqrt{x}$, dan is $\text{DOM } f = \mathbb{R}^+$.

Vaak wordt een functiewaarde $f(x)$ met een aparte letter y aangegeven; men schrijft dan $y = f(x)$.

We geven nog een korte samenvatting van de verdere inhoud van dit hoofdstuk. Eerste onderwerp vormen de polynomen of veeltermen als meest eenvoudige voorbeelden van functies. Daarna volgt een uitvoerige behandeling van functies waarbij achtereenvolgens aan de orde komen: eigenschappen van functies, limieten, continuïteit, differentiaal- en integraalrekening van functies van één variabele. Tenslotte wordt aandacht geschonken aan numerieke aspecten in een tweetal paragrafen over numerieke oplossing van vergelijkingen en over numerieke integratie.

2.2. Polynomen

2.2.1. Definitie. Een polynoom is een functie $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die we als volgt kunnen schrijven:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 ,$$

waarin a_0, a_1, \dots, a_n reële getallen zijn en $a_n \neq 0$. Deze getallen worden coëfficiënten genoemd. Het gehele getal $n \geq 0$ heet de graad van het polynoom (notatie $gr(p)$).

Ook de nulfunctie: $x \mapsto 0$, zullen we opvatten als een polynoom, het zg. nulpolynoom. We geven geen definitie voor de graad van het nulpolynoom. Een uitspraak zoals: zij p een polynoom met $gr(p) = n$, impliceert dat p niet het nulpolynoom is.

Voorbeelden. 1) $p(x) = 2$ is een polynoom met $gr(p) = 0$.

2) $p(x) = x^{10} + x^5 + 1$ is een polynoom met $gr(p) = 10$.

3) Als $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$, dan is de afgeleide van p het polynoom gegeven door

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + na_n x^{n-1} .$$

Ook de tweede afgeleide $p'' = (p')'$, de derde afgeleide p''' , in het algemeen de k -de afgeleide $p^{(k)}$ zijn polynomen. Men ziet gemakkelijk dat

$$p^{(k)}(x) = k! a_k + 2 \cdot 3 \cdots (k+1) a_{k+1} x + \dots + (n-k+1)(n-k+2) \cdots na_n x^{n-k}$$

2.2.2. Stelling. Zij p een polynoom met $gr(p) = n$ en d een polynoom met $gr(d) = m$, dan is er een polynoom r met $gr(r) < gr(d)$ of r is het nulpolynoom en er is een polynoom q zodat $p(x) = q(x)d(x) + r(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Als $m > n$ is q het nulpolynoom en $r = p$.

Als $m \leq n$ dan bewijzen we de stelling door volledige inductie naar n .

In geval $n = 0$ zal gelden: $p(x) = a_0 \neq 0$, $d(x) = b_0 \neq 0$, $q(x) = a_0/b_0$ en $r(x) = 0$.

Neem aan dat de bewering waar is voor polynomen met graad $\leq n-1$.

Stel $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ en $d(x) = b_m x^m + \dots + b_0$, dan is

$$p(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} d(x) + r_1(x),$$

waarin r_1 een polynoom is met $gr(r_1) \leq n-1$ of r_1 is het nulpolynoom.

Indien r_1 het nulpolynoom is of als $gr(r_1) < gr(d)$ dan voldoet $q(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ en $r = r_1$.

Zij nu $gr(d) \leq gr(r_1)$ dan (inductieveronderstelling) zijn er polynomen q_1 en r_2 met $gr(r_2) < gr(d)$ of r_2 is het nulpolynoom, z6 dat $r_1(x) = q_1(x)d(x) + r_2(x)$.

Na substitutie volgt

$$p(x) = \left[\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + q_1(x) \right] d(x) + r_2(x). \quad \square$$

Het polynoom r wordt in de regel de rest genoemd en we noteren

$$\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}. \text{ Als } r(x) = 0 \text{ voor alle } x \text{ dan heet } d \text{ een } \underline{\text{deler}} \text{ van } p.$$

Voorbeelden. 4) Neem $d(x) = x - a$, dan is $p(x) = (x-a)q(x) + r(x)$ waarbij

$r(x)$ een polynoom met graad 0 of het nulpolynoom is; $r(x)$ is dus een constante. Substitueer $x = a$ dan vinden we $r(x) = p(a)$, waarna volgt

$$p(x) = (x-a)q(x) + p(a) \text{ (reststelling)}.$$

Als $p(a) = 0$, dan is $(x-a)$ een deler van $p(x)$; we noemen $x = a$ dan een nulpunt van $p(x)$.

5) De waarde $x = 1$ is een nulpunt van $p(x) = x^3 - 2x^2 + x = (x-1)(x^2 - x)$.

We zien dat $x = 1$ ook nulpunt is van $x^2 - x$, en $p(x) = (x-1)^2 x$. We zeggen dat $x = 1$ een tweevoudig nulpunt van $p(x)$ is.

2.2.3. Definitie. Het getal $a \in \mathbb{R}$ heet een k-voudig nulpunt (òf: nulpunt met multipliciteit k) van een polynoom p , indien er een polynoom q bestaat met $q(a) \neq 0$ èn $p(x) = (x-a)^k q(x)$.

Opgave. Het getal $a \in \mathbb{R}$ is een k -voudig nulpunt van een polynoom p dan en slechts dan als $p(a) = p'(a) = \dots = p^{(k-1)}(a) = 0$ èn $p^{(k)}(a) \neq 0$; toon dit aan.

Het is bekend dat een vierkantsvergelijking hoogstens twee reële wortels bezit. Deze regel laat de volgende generalisatie toe:

2.2.4. Stelling. Een polynoom p met $gr(p) = n$ heeft ten hoogste n reële nulpunten.

Bewijs. We bewijzen deze stelling door volledige inductie naar n .

In geval $n = 0$ is $p(x) = a_0 \neq 0$, dus p heeft geen nulpunten.

Stel de bewering in de stelling is waar voor polynomen met graad $\leq n-1$.

Zij nu p een polynoom met $gr(p) = n$ en zij a een nulpunt van p , dan is er een polynoom q met $gr(q) = n-1$ zodat $p(x) = (x-a)q(x)$. Het polynoom q heeft ten hoogste $n-1$ reële nulpunten (inductieveronderstelling), dus p heeft ten hoogste $1+n-1 = n$ reële nulpunten. □

Voorbeelden. 6) In het (x,y) -vlak kunnen we door twee punten een rechte lijn construeren, door 3 punten (met verschillende x -coördinaten) een rechte lijn of een parabool. Algemeen: bij $n+1$ gegeven punten $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, waarvan de coördinaten x_0, x_1, \dots, x_n verschillend zijn, bestaat er precies één polynoom p met $gr(p) \leq n$, of p is het nulpolynoom, zodat $p(x_k) = y_k$ voor $k = 0, 1, \dots, n$.

Bewijs. We construeren eerst een polynoom p , dat aan de eisen voldoet en laten vervolgens zien dat p eenduidig bepaald is. Zij l_i het polynoom gegeven door

$$2.2.5. \quad \ell_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)},$$

dan is $\ell_i(x_k) = 0$ voor $k = 0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ en $\ell_i(x_i) = 1$. We nemen nu voor p het polynoom gegeven door $p(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \dots + y_n \ell_n(x)$. (Laat zien dat p aan de eisen voldoet.)

Laat q een polynoom zijn dat eveneens aan de eisen voldoet, dan geldt voor het polynoom $p - q$ dat $p(x_k) - q(x_k) = 0$ voor $k = 0, 1, \dots, n$. Het polynoom $p - q$ heeft dus $n+1$ verschillende nulpunten, hetgeen in strijd is met 2.2.4, tenzij $p - q$ het nulpolynoom is; dus $p = q$. \square

Het polynoom p heet het interpolatiepolynoom van Lagrange door de punten (x_k, y_k) , $k = 0, 1, \dots, n$.

7) We construeren vervolgens een polynoom waarvan de functiewaarde en de eerste tot en met de n -de afgeleide in een punt zijn voorgeschreven: $p(a) = b_0$, $p'(a) = b_1, \dots, p^{(n)}(a) = b_n$, waarin b_0, b_1, \dots, b_n gegeven reële getallen zijn. Een polynoom p met $\text{gr}(p) \leq n$ kunnen we aangeven door

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n.$$

Differentieer $p(x)$ k -maal dan vinden we

$$p^{(k)}(x) = k! a_k + 2 \cdot 3 \cdots (k+1) a_{k+1} (x-a) + \dots + (n-k+1)(n-k+2) \cdots n a_n (x-a)^{n-k},$$

dus

$$p^{(k)}(a) = k! a_k \quad (p^{(0)}(a) := p(a)).$$

Derhalve is $a_k = \frac{1}{k!} b_k$ voor $k = 0, 1, \dots, n$.

Het polynoom p is dus voor te stellen door

$$2.2.6. \quad p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Deze betrekking heet de formule van Taylor voor polynomen.

2.3. Eigenschappen van functies

In deze paragraaf releveren we een aantal deels bekende eigenschappen van functies.

2.3.1. Definitie (begrensdheid). Een functie f heet begrensd op een verzameling $V \subset \text{DOM } f$, indien

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in V} [|f(x)| \leq M]$$

of anders geformuleerd: $f(V) \subset \mathbb{R}$ is een begrensde verzameling.

Een functie f heet begrensd, indien f begrensd is op $\text{DOM } f$, dus als $f(\text{DOM } f)$ een begrensde verzameling is.

Voorbeelden. $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^{-x^2}$, $h(x) = \arctan x$, $l(x) = \sqrt{1-x^2}$ zijn voorbeelden van begrensde functies. De functie $f(x) = e^{-x}$ is begrensd op \mathbb{R}^+ , de functie zelf is echter niet begrensd.

2.3.2. Definitie (monotonie).

(i) Een functie f heet monotoon stijgend, indien

$$\forall_{x, y \in \text{DOM } f} [x < y \Rightarrow f(x) < f(y)].$$

(ii) Een functie f heet monotoon dalend, indien

$$\forall_{x, y \in \text{DOM } f} [x < y \Rightarrow f(x) > f(y)].$$

(iii) Een functie f heet monotoon niet dalend, indien

$$\forall_{x, y \in \text{DOM } f} [x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)].$$

(iv) Een functie f heet monotoon niet stijgend, indien

$$\forall_{x, y \in \text{DOM } f} [x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)].$$

De functie f heet monotoon, indien zich een van de gevallen (i), (ii), (iii) of (iv) voordoet. De functie f heet strikt monotoon, indien zich een der gevallen (i) of (ii) voordoet.

Voorbeelden. 1) $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{als } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$,

is een monotoon niet stijgende functie.

2) $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$, is een monotoon stijgende functie.

Strikt monotone functies zijn voorbeelden van injectieve afbeeldingen. Immers als $x \neq y$, dus $x < y$ of $x > y$, dan is $f(x) < f(y)$ of $f(x) > f(y)$, in ieder geval $f(x) \neq f(y)$. Is f bovendien surjectief, dan heeft f een strikt monotone inverse f^{-1} .

Voorbeelden. 3) $f: [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$.

De functie f heeft een inverse gegeven door

$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi], f^{-1}(x) = \arcsin x.$$

4) $f: (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$. De functie f heeft een inverse gegeven door

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), f^{-1}(x) = \pi + \arctan x.$$

5) $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \log(1+x^2)$. De functie f heeft een inverse gegeven door

$$f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}.$$

2.3.3. Definitie (convexiteit). Een functie f heet convex op een interval $I \subset \text{DOM } f$, indien

$$\forall_{x,y \in I} \forall_{\lambda \in [0,1]} [f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)].$$

Een functie f heet concaaf op I indien de functie $-f$ convex is op I .

We merken op dat voor de grafiek van f convexiteit betekent dat het lijnstuk, dat de punten $(x, f(x))$ en $(y, f(y))$ verbindt, boven de grafiek ligt.

Voorbeelden. (Ga na aan de hand van grafieken; zie ook 2.6.9.)

6) $f: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$. De functie f is convex op $[-1, 0]$ en concaaf op $[0, 1]$.

7) $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log x$. De functie f is concaaf op \mathbb{P} .

2.3.4. Definitie (even of oneven). Een functie f heet even indien

(i) $\forall_{x \in \mathbb{R}} [x \in \text{DOM } f \Rightarrow -x \in \text{DOM } f]$, d.w.z. $\text{DOM } f$ ligt symmetrisch t.o.v. 0;

(ii) $\forall_{x \in \text{DOM } f} [f(-x) = f(x)]$, dus de grafiek van f is symmetrisch t.o.v. de y -as.

Een functie f heet oneven indien (i) geldt en

$$(ii') \quad \forall_{x \in \text{DOM } f} [f(-x) = -f(x)].$$

(Wat betekent dit voor de grafiek van f ?)

Voorbeelden. 8) $f(x) = \arctan x$; de functie f is oneven.

9) $f(x) = \arccos x - \frac{\pi}{2}$; de functie f is oneven.

10) $f(x) = e^{-x^2}$; de functie f is even.

11) Polynomen waarin louter even machten van x voorkomen, zijn even functies.

Tenslotte introduceren we nog de hyperbolische functies: $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$ (spreek uit sinus hyperbolicus, cosinus hyperbolicus, enz.).

Deze functies worden gedefinieerd door

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

De hyperbolische functies zijn gedefinieerd voor alle $x \in \mathbb{R}$ behalve dat $\coth x$ niet gedefinieerd is voor $x = 0$. Schets de grafieken van deze functies en merk op dat $\cosh x$ een even functie is terwijl $\sinh x$ een oneven functie is. Omdat $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ is $x = \cosh t$, $y = \sinh t$, $-\infty < t < \infty$, een parameteraanpak van een tak van de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$. (Evenals $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$ een parameteraanpak van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ is, zie 6.1.) Dit verklaart de naam van de ingevoerde functies.

2.4. Limieten van functies

Reeds op de middelbare school is kennis gemaakt met het begrip limiet van een functie. We geven een aantal definities.

2.4.1. Definitie. Zij $a \in \mathbb{R}$ en a een verdichtingspunt van $\text{DOM } f$. Dan betekent $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, dat er voor iedere omgeving V van L een omgeving U van a bestaat zodat voor alle $x \in U \cap \text{DOM } f$ met $x \neq a$ geldt: $f(x) \in V$.

In plaats van $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ noteren we ook wel $f(x) \rightarrow L$ ($x \rightarrow a$).

Definitie. Zij $a \in \mathbb{R}$ en a een verdichtingspunt van $(a, \infty) \cap \text{DOM } f$.

Dan betekent $\lim_{x \downarrow a} f(x) = L$, dat er voor iedere omgeving V van L een omgeving U van a bestaat zodat voor alle $x \in U \cap \text{DOM } f$ met $x > a$ geldt: $f(x) \in V$.

Deze limiet heet de rechterlimiet van $f(x)$ in a .

Definitie. Zij $a \in \mathbb{R}$ en a een verdichtingspunt van $(-\infty, a) \cap \text{DOM } f$.

Dan betekent $\lim_{x \uparrow a} f(x) = L$, dat er voor iedere omgeving V van L een omgeving U van a bestaat zodat voor alle $x \in U \cap \text{DOM } f$ met $x < a$ geldt: $f(x) \in V$.

Deze limiet heet de linkerlimiet van $f(x)$ in a .

Bewijs zelf de stelling:

Stelling. Als $\lim_{x \downarrow a} f(x) = L$ en $\lim_{x \uparrow a} f(x) = L$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Opmerking. Indien de rechterlimiet en de linkerlimiet van $f(x)$ in a bestaan doch verschillend zijn, dan bestaat $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ niet.

We geven nu de definitie van limiet in geval $a = \pm \infty$.

2.4.2. Definities. Zij voor elke $b \in \mathbb{R}$: $(b, \infty) \cap \text{DOM } f \neq \emptyset$. Dan betekent $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, dat er voor iedere omgeving V van L een $M \in \mathbb{R}$ bestaat zodat voor alle $x \in \text{DOM } f$ met $x > M$ geldt: $f(x) \in V$.

Zij voor elke $b \in \mathbb{R}$: $(-\infty, b) \cap \text{DOM } f \neq \emptyset$. Dan betekent $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, dat er voor iedere omgeving V van L een $M \in \mathbb{R}$ bestaat zodat voor alle $x \in \text{DOM } f$ met $x < M$ geldt: $f(x) \in V$.

2.4.3. Stelling. Zij $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Voor iedere rij $(a_n) \subset \text{DOM } f$ met $a_n \neq a$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ geldt dan: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$.

Bewijs. Zij V een omgeving van L , dan is er volgens 2.4.1 een omgeving U van a zodat voor alle $x \in U \cap \text{DOM } f$ met $x \neq a$ geldt: $f(x) \in V$. Nu betekent

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ dat $a_n \in U$ o.d.d., dus $f(a_n) \in V$ o.d.d. Daaruit volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$. □

Opmerking. De stelling is ook geldig in geval $a = \infty$ (resp. $-\infty$) en $a_n \rightarrow \infty$ (resp. $-\infty$) als $n \rightarrow \infty$.

Met behulp van 2.4.3 is soms eenvoudig vast te stellen dat een limiet niet bestaat.

Voorbeeld. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ bestaat niet.

Beschouw namelijk de rijen (a_n) , (b_n) gegeven door $a_n = \frac{1}{n\pi}$, $b_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{a_n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{b_n} = 1$ en deze limieten zijn verschillend. Analoog kan men inzien dat $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ niet bestaat.

2.4.4. Stelling. De volgende beweringen zijn gelijkwaardig:

1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

2) a is een verdichtingspunt van $\text{DOM } f$ en

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \text{DOM } f [0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon].$$

3) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$.

4) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| = 0$.

Opgave. Bewijs deze stelling.

Voorbeelden. 1) $\lim_{x \rightarrow 2} (1 + \frac{1}{x^2}) = \frac{5}{4}$.

We gebruiken formulering 2) van 2.4.4. Voor $1 \leq x \leq 3$ geldt:

$$\left| 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{4} \right| = \frac{1}{4x^2} |4 - x^2| \leq \frac{1}{4} |2+x| |2-x| \leq \frac{5}{4} |2-x|.$$

Zij $\epsilon > 0$, dan geldt voor alle x met $0 < |x-2| < \delta := \min(1, \frac{4}{5}\epsilon)$ dat

$$\left| 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{4} \right| \leq \frac{5}{4} |2-x| < \epsilon.$$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. Zij $\epsilon > 0$, dan is

$$|1 - \cos x| = 2 \sin^2 \frac{1}{2}x \leq 2(\frac{1}{2}x)^2 = \frac{1}{2}x^2 < \epsilon$$

voor $|x| < \delta := \sqrt{2\epsilon}$.

Opmerking. We hebben gebruik gemaakt van de bekende ongelijkheid $|\sin x| \leq |x|$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ bestaat niet.

4) Twee standaardlimieten:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0 \text{ voor } p > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^p = 0 \text{ voor } p > 0. \text{ (Ga na.)}$$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$. We zeggen: $\frac{1}{(x-1)^2}$ divergeert naar ∞ als x tot 1 nadert.

Dit wordt gepreciseerd in de volgende definitie.

Definitie. Zij $a \in \mathbb{R}$ en a een verdichtingspunt van $\text{DOM } f$. Dan betekent $f(x) \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow a$, dat er voor alle $K \in \mathbb{R}$ een omgeving U van a bestaat zodat voor alle $x \in U \cap \text{DOM } f$ met $x \neq a$ geldt: $f(x) > K$.

Analoog is te definiëren $f(x) \rightarrow -\infty$ als $x \rightarrow a$. Ook de definities met $x \rightarrow \pm\infty$ i.p.v. $x \rightarrow a$ liggen onmiddellijk voor de hand.

2.4.5. Stelling (insluitstelling). Zij $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$. Laat er een omgeving U van a bestaan zō dat $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ voor alle $x \in U \cap A$ met $x \neq a$; hierin is A de gemeenschappelijke definitieverzameling van f , g , h . Dan geldt: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Bewijs. Zij V een omgeving van L , $V := (L-\epsilon, L+\epsilon)$ waarin $\epsilon > 0$. Dan bestaan er omgevingen $U_1, U_2 \subset U$ van a zodat voor alle $x \in U_1 \cap A$ met $x \neq a$ geldt $f(x) \in V$, en voor alle $x \in U_2 \cap A$ met $x \neq a$ geldt $h(x) \in V$. Voor alle $x \in U_1 \cap U_2 \cap A$ met $x \neq a$ is dan $f(x), h(x) \in V$ en vervolgens $L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$, dus $g(x) \in V$. □

De insluitstelling is gemakkelijk uit te breiden tot het geval $a = \pm\infty$. Indien $a = \infty$ bijv. dient er een $M \in \mathbb{R}$ te bestaan zō dat $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ voor alle $x \in A$ met $x > M$.

Voorbeelden. Twee standaardlimieten:

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Maak gebruik van de ongelijkheid

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \tag{1}$$

geldig voor $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ en $x \neq 0$. Deze volgt uit: $\sin x < x$ voor $x > 0$, $\tan x > x$ voor $0 < x < \frac{1}{2}\pi$; bedenk voorts dat de leden van (1) even functies zijn. Vanwege $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ is dan op grond van 2.4.5,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^p} = 0 \text{ voor } p > 0 .$$

Voor $y > 0$ is $\log y < y$, dus $\log(y^{\frac{1}{2}p}) < y^{\frac{1}{2}p}$, $\log y < \frac{2}{p} y^{\frac{1}{2}p}$. Voor $x > 1$ geldt dan de ongelijkheid

$$0 < \frac{\log x}{x^p} < \frac{2}{p} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}p}} .$$

Vanwege $\lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{p} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}p}} = 0$, voor $p > 0$, is dan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^p} = 0$.

Opmerking. De ongelijkheid $\log y < y$ voor $y > 0$, volgt uit 2.6, voorbeeld 4.

2.4.6. Stelling (bewerkingen met limieten). Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, dan is:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = L + M;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = LM;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ mits } M \neq 0;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L| \text{ en } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{|f(x)|} = \sqrt{|L|} .$$

(N.B. Stilzwijgend is ondersteld dat $f(x)$ en $g(x)$ dezelfde definitieverzameling hebben.)

Bewijs. We schrijven alleen het bewijs van 4) uit.

4) Zij $\epsilon > 0$, dan is er een omgeving U_1 van a zodat voor alle $x \in U_1 \cap \text{DOM } f$ met $x \neq a$ geldt: $|f(x) - L| < \epsilon$, dus ook $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \epsilon$.

Er is ook een omgeving U_2 van a zodat $|f(x) - L| < \epsilon^2$ voor alle $x \in U_2 \cap \text{DOM } f$ met $x \neq a$. Maak nu gebruik van de ongelijkheid $|p - q| \leq \sqrt{|p^2 - q^2|}$, geldig voor $p \geq 0, q \geq 0$ (verifieer deze ongelijkheid). Dan volgt

$$|\sqrt{|f(x)|} - \sqrt{|L|}| \leq \sqrt{||f(x)| - |L||} \leq \sqrt{|f(x) - L|} < \epsilon \text{ voor alle } x \in U_2 \cap \text{DOM } f \text{ met } x \neq a. \quad \square$$

Voorbeelden. 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{3 + 0}{\sqrt{1} + 1} = \frac{3}{2}.$$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x} \right)^2 = \frac{1}{2}.$

10) Standaardlimiet: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p e^{-x} = 0$ voor alle $p \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Als $p < 0$, dan is $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p = 0$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$, dus $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p e^{-x} = 0$.

Als $p = 0$, dan is $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$.

Zij $p > 0$. De functie $f(x) = e^x$ is monotoon stijgend; uit $\log y < y$ voor $y > 0$ volgt dan $e^{\log y} < e^y$, oftewel $e^y > y$. Derhalve is

$$e^{\frac{1}{2p}x} > \frac{1}{2p}x, \quad e^x > \left(\frac{1}{2p}\right)^{2p} x^{2p}.$$

Voor $x > 0$ geldt dus de ongelijkheid

$$0 < x^p e^{-x} < (2p)^{2p} \frac{1}{x^p}.$$

Vanwege $\lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0$ voor $p > 0$, is dan $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p e^{-x} = 0$. □

2.5. Continuïteit

2.5.1. Definitie. Een functie f heet continu in $a \in \text{DOM } f$ indien er voor iedere omgeving V van $f(a)$ een omgeving U van a bestaat zó dat voor alle $x \in U \cap \text{DOM } f$ geldt: $f(x) \in V$.

Bewijs zelf de stelling:

2.5.2. Stelling. Zij $a \in \text{DOM } f$ een verdichtingspunt van $\text{DOM } f$, dan is f continu in a dan en slechts dan als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Voorbeelden. 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 1 & \text{als } x = 0 \end{cases}$,

is continu in $x = 0$ omdat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$.

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{als } x \geq 0 \end{cases}$,

is niet continu in $x = 0$ omdat $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ en $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, dus $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ bestaat niet.

Definities. Een functie f heet continu op een verzameling V als f continu is in elk punt van V .

Een functie f heet continu als f continu is op $\text{DOM } f$.

Voorbeelden. Polynomen, de goniometrische functies $\sin x$, $\cos x$, de exponentiële functie e^x , de hyperbolische functies $\sinh x$, $\cosh x$, de cyclometrische functie $\arctan x$, zijn voorbeelden van functies die overall continu zijn. De functie $\log x$ is continu op \mathbb{P} . De cyclometrische functies $\arcsin x$, $\arccos x$, zijn continu op $[-1, 1]$.

De volgende stelling geeft ons een mogelijkheid om snel in te zien of een functie continu is.

2.5.3. Stelling. Zijn de functies f en g continu in a , dan zijn ook $f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), fg , f/g (mits $g(a) \neq 0$) continu in a . Is f continu in $b = g(a)$ en g continu in a , dan is $f \circ g$ continu in a .

Bewijs. Het eerste deel van de stelling volgt eenvoudig uit 2.5.2 en 2.4.6. We bewijzen nu dat $f \circ g$ continu in a is. Zij V een omgeving van $f(g(a))$ dan is er een omgeving U_1 van $g(a)$ zodat voor alle $y \in U_1 \cap \text{DOM } f$ geldt: $f(y) \in V$. De functie g is continu in a , dus bij de omgeving U_1 van $g(a)$ bestaat er een omgeving U_2 van a zodat voor alle $x \in U_2 \cap \text{DOM } g$ geldt: $g(x) \in U_1$. Voor $x \in U_2 \cap \text{DOM}(f \circ g)$ geldt dan: $f(g(x)) \in V$. \square

Voorbeelden. 3) Een rationale functie $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ waarin p en q polynomen zijn, is continu in a als $q(a) \neq 0$ is.

4) $f(x) = \log(x^2+1)$. De functie f is continu omdat de functies $h(x) = x^2+1$, $g(x) = \log x$ continu zijn en $f = g \circ h$.

Uit 2.5.3 volgt onmiddellijk:

1) Zij $f \circ g$ gedefinieerd in een omgeving van a , g continu in a en f continu in $g(a)$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(g(a))$.

2) Zij $f \circ g$ gedefinieerd in een interval van de vorm (M, ∞) met $M \in \mathbb{R}$ en zij f continu in b . Als $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$, dan is $\lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) = f(b)$.

(Analoog: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(g(x))$.)

Deze resultaten zijn bruikbaar bij het berekenen van limieten.

Voorbeelden. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan(\tan y)}{\tan y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} =$
 $= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \cos y = 1$.

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(1 + \frac{\sin x}{x}) = 0$, omdat $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ en $f(x) = \log(1+x)$ continu is in 0 met $f(0) = \log(1+0) = 0$.

Definitie (continue voortzetbaarheid). Zij a een verdichtingspunt van $\text{DOM } f$, $a \notin \text{DOM } f$. De functie f heet continu voortzetbaar in a , indien er een functie F met definitieverzameling $\text{DOM } f \cup \{a\}$ bestaat zó dat F continu is in a en $F(x) = f(x)$ voor alle $x \in \text{DOM } f$.

Eigenschap. Zij a een verdichtingspunt van $\text{DOM } f$, $a \notin \text{DOM } f$. Dan is f continu voortzetbaar in a , dan en slechts dan als $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bestaat.

Voorbeelden. 7) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$. Definiëren we $f(0) = 1$, dan is f continu (voortgezet) in 0 omdat $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

$$8) f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{als } x < 0, \\ x & \text{als } x > 0. \end{cases}$$

De functie f is niet continu voortzetbaar in 0 omdat $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ niet bestaat; immers $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

2.5.4. Stelling. Zij f continu op $[a, b]$ en zij (a_n) een rij getallen met $a_n \in [a, b]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$. Dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c)$.

Bewijs. De stelling volgt eenvoudig uit 2.5.2 en 2.4.3.

Voorbeelden. 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(1 + \frac{1}{n}) = 0$, omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ en $f(x) = \log(1+x)$ continu is in 0 met $f(0) = \log(1+0) = 0$.

10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, omdat $f(x) = e^x$ continu is en dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n} \log n\right) = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n}\right) = e^0 = 1,$$

(zie 2.4, voorbeeld 7). Hierbij is ingevoerd de notatie $\exp(x) := e^x$; deze wordt vooral gebruikt als de exponent een samengestelde uitdrukking is.

Laat de functie f continu zijn op een interval $[a, b]$. De grafiek van $y = f(x)$ is dan een "doorlopende" kromme die elke rechte $y = c$ met c tussen $f(a)$ en $f(b)$, snijdt. Deze eigenschap wordt geformuleerd in de volgende stelling.

2.5.5. Stelling (tussenwaardestelling). Zij f continu op $[a, b]$ en η een getal tussen $f(a)$ en $f(b)$, dan is er een $\xi \in (a, b)$ zó dat $f(\xi) = \eta$.

Bewijs. Beschouw eerst het geval $f(a) < \eta < f(b)$. We construeren een intervallen-nest (zie 1.4.12) dat de gezochte waarde ξ bevat.

Definieer $a_1 := a$, $b_1 := b$. Halveer $[a_1, b_1]$ en onderzoek $f(\frac{1}{2}(a_1 + b_1))$. Als $f(\frac{1}{2}(a_1 + b_1)) \leq \eta$ dan stellen we: $a_2 := \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$, $b_2 := b_1$; als $f(\frac{1}{2}(a_1 + b_1)) > \eta$ dan stellen we: $a_2 := a_1$, $b_2 := \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. In beide gevallen zal gelden $f(a_2) \leq \eta$, $f(b_2) > \eta$.

Pas dezelfde procedure opnieuw toe op $[a_2, b_2]$. Afhankelijk van $f(\frac{1}{2}(a_2 + b_2))$ definiëren we $[a_3, b_3]$ als die intervalhelft waarvoor $f(a_3) \leq \eta$, $f(b_3) > \eta$. Zet dit halveringsproces voort dan ontstaat er een rij van intervallen $[a_n, b_n]$ waarbij $f(a_n) \leq \eta$, $f(b_n) > \eta$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Deze intervallen vormen een intervallen-nest als beschouwd in 1.4.12; merk op dat $b_n - a_n = (b - a)/2^{n-1}$ zodat $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Volgens 1.4.12 is er precies één ξ met $\xi \in [a_n, b_n]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$; tevens geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$. Met 2.5.4 volgt dan tenslotte $f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq \eta$, $f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq \eta$, zodat $f(\xi) = \eta$.

In het geval $f(a) > \eta > f(b)$ is het bewijs op analoge wijze te voeren. \square

Opmerking. Indien f niet continu is op $[a, b]$ dan hoeft f niet elke waarde tussen $f(a)$ en $f(b)$ aan te nemen. Beschouw bijv. de functie f gedefinieerd op $[0, 1]$ volgens $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{als } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$ Er is dan geen $\xi \in (0, 1)$ waarvoor $f(\xi) = \frac{1}{2}$.

Voorbeeld. Zij f continu op $[a, b]$ met $f(a) \geq a$ en $f(b) \leq b$, dan is er een $\xi \in [a, b]$ zó dat $f(\xi) = \xi$. Dit volgt eenvoudig door toepassing van de tussenwaardstelling (2.5.5) op de functie $f(x) - x$.

We definiëren nu de begrippen maximum en minimum van een functie. In plaats van maximum en minimum gebruiken we ook wel de omvattende benaming extremum van een functie.

2.5.6. Definities. Een functie f heeft een locaal maximum in $c \in \text{DOM } f$, indien er een omgeving U van c bestaat zodat $f(x) \leq f(c)$ voor alle $x \in U \cap \text{DOM } f$.

Een functie f heeft een globaal maximum in $c \in \text{DOM } f$, indien $f(x) \leq f(c)$ voor alle $x \in \text{DOM } f$.

De definities van locaal minimum, globaal minimum in c zijn dezelfde met vervanging van $f(x) \leq f(c)$ door $f(x) \geq f(c)$.

De existentie van globale extrema wordt verzekerd door de volgende stelling van Weierstrass die we niet bewijzen.

2.5.7. Stelling (Weierstrass). Zij f continu op $[a,b]$, dan heeft f op $[a,b]$ een globaal maximum en een globaal minimum, d.w.z. er bestaan punten $c_1, c_2 \in [a,b]$ zodat $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ voor alle $x \in [a,b]$.

Opmerking. Als f niet continu is op $[a,b]$ dan hoeft f geen globaal maximum te hebben. Beschouw bijv. de functie f gedefinieerd op $[0,1]$ volgens

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{als } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{als } x = 1. \end{cases} \quad \text{Dan heeft } f \text{ geen maximum op } [0,1].$$

Ook als het interval begrensd maar niet gesloten is kan men een voorbeeld geven van een continue functie die geen maximum heeft; $f(x) = \tan x$ gedefinieerd op $[0, \frac{1}{2}\pi)$, heeft geen maximum.

Gevolg. Zij f continu op $[a,b]$ dan is $f([a,b]) = [m,M]$ waarbij m het globale minimum en M het globale maximum van f op $[a,b]$ is. Dit resultaat volgt uit de tussenwaardestelling (2.5.5) en de stelling van Weierstrass (2.5.7).

Laat f continu en monotoon stijgend zijn op $[a,b]$. Krachtens het gevolg is dan $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$, d.w.z. f is een surjectie. Uit de monotonie van f volgt dat f een injectie is (zie 2.3.2). De functie $f: [a,b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ is dus een bijectie en de inverse functie $f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a,b]$ bestaat. Het is duidelijk dat f^{-1} eveneens monotoon stijgend is. Zonder bewijs vermelden we dat f^{-1} continu is op $[f(a), f(b)]$. We vatten een en ander samen in de volgende stelling:

2.5.8. Stelling. Zij f continu en monotoon stijgend op $[a,b]$, dan bestaat de inverse functie f^{-1} en f^{-1} is continu en monotoon stijgend op $[f(a), f(b)]$.

Een analoge stelling geldt voor continue, monotoon dalende functies. Een functie die continu is op $[a,b]$ en een inverse bezit, is strikt monotoon (probeer dit zelf te bewijzen met behulp van de tussenwaardestelling 2.5.5), zodat we de stelling kunnen formuleren:

Stelling. Zij f continu op $[a,b]$. Als f een inverse bezit, dan is ook f^{-1} continu.

2.6. Differentiaalrekening

2.6.1. Definitie. Zij f gedefinieerd in een omgeving U van a . De functie f heet differentieerbaar in a , indien er een getal $A \in \mathbb{R}$ bestaat en een functie ρ gedefinieerd in een omgeving V van 0 , zodanig dat

(i) $f(a+h) = f(a) + Ah + h\rho(h)$ voor alle $h \in V$,

(ii) $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$.

Als f differentieerbaar is in a , dan is

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

We geven het getal A aan door $f'(a)$, de afgeleide van f in a .

Bewijs de volgende stelling:

2.6.2. Stelling. Zij f gedefinieerd in een omgeving van a , dan is f differentieerbaar in a dan en slechts dan als $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ bestaat. Deze limiet is gelijk aan $f'(a)$.

Definitie. Zij $[a, b) \subset \text{DOM } f$, dan heet $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ de rechterafgeleide van f in a ; notatie $f'(a+)$.

Analoog is te definiëren de linkerafgeleide van f in a ; notatie $f'(a-)$.

Bewijs zelf de stelling:

Stelling. Zij f gedefinieerd in een omgeving van a , dan is f differentieerbaar in a dan en slechts dan als $f'(a+) = f'(a-)$.

Definities. Een functie f heet differentieerbaar op (a, b) als f differentieerbaar is in elk punt van (a, b) .

Is bovendien de afgeleide f' continu op (a, b) dan heet f continu differentieerbaar op (a, b) .

Voorbeeld. De functie $f(x) = \sin x$ is differentieerbaar in elke $a \in \mathbb{R}$, immers

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{1}{2}h}{h} \cos(a+\frac{1}{2}h) = \cos a.\end{aligned}$$

We noteren $f'(x) = \cos x$ voor alle x .

Zij de functie f differentieerbaar in a . Indien we f benaderen door de lineaire functie $l(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, dan maken we in de buurt van a een fout gegeven door $(x-a)\rho(x-a)$, waarbij $\rho(x-a) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow a$). We zeggen dat f in a lineair benaderbaar is. Grafisch betekent dit dat de grafiek van l (de rechte: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$) raakt aan de grafiek van f in $x = a$.

Bewijs zelf nu de stelling:

Stelling. Als f differentieerbaar is in a , dan is f continu in a .

De omgekeerde bewering is niet waar, getuige het voorbeeld $f(x) = |x|$. Deze functie is continu in 0 , echter niet differentieerbaar. De functie heeft wel een rechter- en linkerafgeleide in 0 , gelijk aan 1 resp. -1 .

We kennen reeds de afgeleiden van een aantal functies:

2.6.3. Tabel

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log x $	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\int g(x)dx$	$g(x)$

Met behulp van de nu volgende regels voor het differentiëren en de voorafgaande tabel van afgeleiden zijn we in staat om de afgeleiden van een groot aantal functies te berekenen.

2.6.4. Regels voor het differentiëren. Als f , g differentieerbaar zijn in a , dan zijn ook $f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), fg , f/g (mits $g(a) \neq 0$) differentieerbaar in a en hun afgeleiden worden gegeven door

- 1) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- 2) $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$,
- 3) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
- 4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Als g differentieerbaar is in a en f differentieerbaar is in $g(a)$, dan is $f \circ g$ differentieerbaar in a met afgeleide

$$5) \quad (f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a) \quad (\text{kettingregel}) ,$$

Als f differentieerbaar is in a met $f'(a) \neq 0$, dan is f^\leftarrow differentieerbaar in $b := f(a)$ met afgeleide

$$6) \quad (f^\leftarrow)'(b) = \frac{1}{f'(a)} .$$

In plaats van $f'(x)$ noteren we ook wel $\frac{df}{dx}$ of $\frac{dy}{dx}$ of y' .

Een continue functie f gedefinieerd op $[a,b]$, heeft volgens de stelling van Weierstrass (2.5.7) op $[a,b]$ een globaal maximum en een globaal minimum. Een belangrijke stelling die het zoeken naar extrema vergemakkelijkt is de volgende.

2.6.5. Stelling. Zij f gedefinieerd op $[a,b]$. Als f een lokaal extremum heeft in $c \in (a,b)$ en f is differentieerbaar in c , dan is $f'(c) = 0$.

Bewijs. Onderstel dat f in c een lokaal maximum heeft. Dan is er een omgeving U van c zodat $f(x) \leq f(c)$ voor alle $x \in U$. Daaruit volgt voor de rechterafgeleide in c ,

$$f'(c+) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 ,$$

en voor de linkerafgeleide in c ,

$$f'(c-) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 .$$

De functie f is differentieerbaar in c zodat $f'(c+) = f'(c-) = f'(c)$, dus $f'(c) = 0$.

In het geval dat f in c een lokaal minimum heeft, is het bewijs op analoge wijze te voeren. □

Volgens 2.6.5 is " $f'(c) = 0$ " een nodige voorwaarde opdat een (differentieerbare) functie f een lokaal extremum heeft in c . De voorwaarde is echter niet

voldoende zoals blijkt uit het volgende tegenvoorbeeld: voor de functie $f(x) = x^3$ is $f'(0) = 0$ maar f heeft geen extremum in 0.

Is de functie f gedefinieerd op $[a,b]$ dan zijn alleen de randpunten a,b , de punten waarin f niet differentieerbaar is en de punten waarin de afgeleide f' gelijk is aan nul, kandidaten voor extrema. Zij $f'(c) = 0$ dan is met behulp van het teken van de afgeleide in een omgeving U van c vast te stellen of f in c een maximum dan wel een minimum heeft. Als $f'(x) > 0$ voor $x \in U$ en $x < c$ en $f'(x) < 0$ voor $x \in U$ en $x > c$, dan heeft f in c een lokaal maximum; als $f'(x) < 0$ voor $x \in U$ en $x < c$ en $f'(x) > 0$ voor $x \in U$ en $x > c$, dan heeft f in c een lokaal minimum; zie ook 2.6.8.

2.6.6. Stelling (Rolle). Zij f continu op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b) . Als $f(a) = f(b)$, dan is er een $\xi \in (a,b)$ met $f'(\xi) = 0$.

Bewijs. Als $f(x) = f(a)$ voor alle $x \in [a,b]$, dan kunnen we voor ξ ieder getal uit (a,b) nemen.

Als $f(x_1) > f(a)$ voor zekere $x_1 \in (a,b)$ dan heeft f een globaal maximum in een punt $\xi \in (a,b)$, en $f'(\xi) = 0$. Als $f(x_1) < f(a)$ voor zekere $x_1 \in (a,b)$ dan heeft f een globaal minimum in een punt $\xi \in (a,b)$, en $f'(\xi) = 0$. \square

Een belangrijk gevolg van deze stelling zullen we formuleren in de nu volgende middelwaardestelling.

2.6.7. Stelling (middelwaardestelling). Zij f continu op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b) , dan is er een $\xi \in (a,b)$ zodat $f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)$.

Bewijs. Zij $\psi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ de functie, gegeven door

$$\psi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a),$$

dan is ψ continu op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b) . Voorts geldt dat $\psi(a) = \psi(b) = f(a)$, dus er is een $\xi \in (a,b)$ met

$$0 = \psi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

2.6.8. Gevolgen. Als $f'(x) > 0$ voor alle $x \in (a,b)$, dan is f monotoon stijgend op (a,b) . Als $f'(x) < 0$ voor alle $x \in (a,b)$, dan is f monotoon dalend op (a,b) . Als $f'(x) = 0$ voor alle $x \in (a,b)$, dan is f een constante op (a,b) .

Immers, zij $a < x_1 < x_2 < b$, dan is er een $\xi \in (x_1, x_2)$ zodat $f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1)$. In de drie gevallen zal dan gelden resp. $f(x_2) > f(x_1)$, $f(x_2) < f(x_1)$, $f(x_2) = f(x_1)$.

Hogere afgeleiden. De afgeleide van een differentieerbare functie f kan opnieuw differentieerbaar zijn en we noemen de afgeleide hiervan de tweede afgeleide van f , genoteerd als f'' of $\frac{d^2 f}{dx^2}$ of $\frac{d^2 y}{dx^2}$. In het algemeen geven we de n -de afgeleide van f aan met $f^{(n)}$, dus $f^{(n)} = \left\{ f^{(n-1)} \right\}'$; naast $f^{(n)}$ komt ook voor de notatie $\frac{d^n f}{dx^n}$ of $\frac{d^n y}{dx^n}$ of $y^{(n)}$.

We zeggen dat een functie n -maal continu differentieerbaar is op (a,b) indien de functie n -maal differentieerbaar is op (a,b) en de n -de afgeleide continu is op (a,b) .

De regel voor het differentiëren van een product kunnen we uitbreiden tot:

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

(formule van Leibniz).

Opgaven. 1) Bewijs de formule van Leibniz.

2) Zij $f(x) = \arcsin x$. Bewijs dat voor alle $x \in (-1,1)$ en alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) = (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + n^2 f^{(n)}(x).$$

Met behulp van het teken van de tweede afgeleide kunnen we vaststellen of een functie convex of concaaf is; daarvoor de volgende stelling.

2.6.9. Stelling. Zij f tweemaal differentieerbaar op een open interval I , dan geldt: f is convex op $I \iff f''(x) \geq 0$ voor alle $x \in I$.

Bewijs. (\Leftarrow). Uit $f''(x) \geq 0$ volgt dat f' monotoon niet dalend is op I .

Zij $x, y \in I$ met $x < y$, en zij $\lambda \in (0,1)$. Op grond van de middelwaardestelling (2.6.7) is er een ξ met $x < \xi < \lambda x + (1-\lambda)y$ zodat

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x) = (1-\lambda)(y-x)f'(\xi), \quad (1)$$

en een η met $\lambda x + (1-\lambda)y < \eta < y$ zodat

$$f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda(y-x)f'(\eta). \quad (2)$$

Vermenigvuldig (1) met λ en (2) met $(1-\lambda)$, en trek af dan vinden we

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y) = \lambda(1-\lambda)(y-x)(f'(\xi) - f'(\eta)).$$

Wegens $\xi < \eta$ is $f'(\xi) \leq f'(\eta)$ waarna volgt

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) .$$

Conform de definitie 2.3.3 is f dan convex op I .

(\Rightarrow). Zij f convex op I dan geldt voor $x, y \in I$ met $x < y$, en $\lambda \in (0,1)$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) .$$

Herschrijf deze ongelijkheid als volgt:

$$\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} \leq \frac{f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)}{\lambda(y-x)} .$$

Neem hierin de limiet voor $\lambda \rightarrow 0$ resp. $\lambda \rightarrow 1$ dan vinden we

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \leq f'(y) .$$

Dus f' is monotoon niet dalend en daaruit volgt (ga na) $f''(x) \geq 0$ voor alle $x \in I$. □

Opgave. Onderzoek nogmaals de voorbeelden na 2.3.3.

Zij de functie f differentieerbaar op een open interval I en zij $a \in I$. Indien we f benaderen door de constante functie $g(x) = f(a)$, dan maken we een fout: $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$, waarin ξ een punt is gelegen tussen a en x . Is de functie f $(n+1)$ -maal differentieerbaar op I , dan kunnen we f benaderen door een polynoom p zodanig dat $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ voor $k = 0, 1, \dots, n$. Overeenkomstig 2.2, voorbeeld 7, is p voor te stellen door

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n .$$

De volgende stelling doet een uitspraak over de fout $f(x) - p(x)$, die we maken bij deze benadering.

2.6.10. Stelling (Taylor). Zij f $(n+1)$ -maal differentieerbaar op een open interval I en zij $a \in I$, $x \in I$. Dan is er een $\xi := a + \theta(x-a)$ met $\theta \in (0,1)$, zodat

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n ,$$

waarin

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} .$$

Bewijs. Indien $x = a$, dan is de stelling triviaal. Zij nu $x \neq a$. Definieer het getal $R(x)$ door

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} R(x) := R_n = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Veronderstel $x > a$ en voer in de functie $\varphi: [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door

$$\varphi(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!} (x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x-t)^n + \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} R(x).$$

Dan is φ continu op $[a, x]$ en differentieerbaar op (a, x) , terwijl

$\varphi(a) = \varphi(x) = f(x)$. Volgens de stelling van Rolle (2.6.6) is er dus een $\xi := a + \theta(x-a)$ met $\theta \in (0, 1)$, zodat $\varphi'(\xi) = 0$. Na uitwerking van φ' vinden we

$$\varphi'(\xi) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} [f^{(n+1)}(\xi) - R(x)],$$

waaruit volgt $R(x) = f^{(n+1)}(\xi)$.

In het geval $x < a$ dient in het voorgaande bewijs $[a, x], (a, x)$ te worden vervangen door $[x, a], (x, a)$. □

De in 2.6.10 gegeven betrekking voor $f(x)$ heet de formule van Taylor; R_n heet de restterm. Indien f een polynoom is met graad $\leq n$ dan is $R_n = 0$ en de formule gaat over in de formule van Taylor voor polynomen (zie 2.2.6).

Voorbeelden. 1) De functie $f(x) = e^x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op \mathbb{R} met $f^{(k)}(x) = e^x$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$. Uit de formule van Taylor met $a = 0$ volgt: voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n = 0, 1, 2, \dots$ is er een $\theta \in (0, 1)$ zodat

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}.$$

Nu is $e^{\theta x} > 0$, dus voor alle $x > 0$ geldt

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

2) De functie $f(x) = \sin x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op \mathbb{R} met $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{1}{2}n\pi)$ (bewijs dit door volledige inductie), dus $f^{(2k)}(0) = 0$ en $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$ is er een $\theta \in (0, 1)$ zodat

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \\ &+ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(\theta x + (n+\frac{1}{2})\pi). \end{aligned}$$

Neem $n = 4$; voor $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ geldt dan

$$\sin x > x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} .$$

- 3) De functie $f(x) = \cos x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op \mathbb{R} met $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{1}{2}n\pi)$ (ga na!), dus $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ en $f^{(2k+1)}(0) = 0$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n = 0, 1, 2, \dots$ is er een $\theta \in (0, 1)$ zodat

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \\ &+ \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\theta x + (n+1)\pi) . \end{aligned}$$

- 4) De functie $f(x) = \log(1+x)$ is willekeurig vaak differentieerbaar op $(-1, \infty)$ met

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) .$$

Voor alle $x > -1$ en $n \in \mathbb{N}$ is er een $\theta \in (0, 1)$ zodat

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \\ &+ \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} . \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat voor $x > 0$ geldt

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x .$$

- 5) Bereken $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}$.

Voor alle y is er een $\theta_1 \in (0, 1)$ zodat

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} e^{\theta_1 y} ,$$

dus voor alle x geldt

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} e^{\theta_1 x^2} .$$

Voor alle x is er een $\theta_2 \in (0,1)$ zodat

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cos \theta_2 x .$$

Bedenk dat de getallen θ_1, θ_2 van x afhangen! Nu geldt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} e^{\theta_1 x^2}}{\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cos \theta_2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{6} e^{\theta_1 x^2}}{\frac{1}{4!} - \frac{x^2}{6!} \cos \theta_2 x} = 12 . \end{aligned}$$

Bedenk hierbij dat

$$0 \leq x^2 e^{\theta_1 x^2} \leq x^2 e^{x^2}, \quad -x^2 \leq x^2 \cos \theta_2 x \leq x^2 ,$$

zodat

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\theta_1 x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \theta_2 x = 0 ,$$

op grond van de insluitstelling 2.4.5.

Interpolatieformule van Lagrange. Zij de functie f continu op $[a,b]$ en $(n+1)$ -maal differentieerbaar op (a,b) . We benaderen f door een polynoom p met $\text{gr}(p) \leq n$ of p is het nulpolynoom, zodanig geconstrueerd dat $p(x_k) = f(x_k)$ voor $k = 0, 1, \dots, n$. Hierin zijn x_0, x_1, \dots, x_n gegeven getallen met $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$. Overeenkomstig 2.2, voorbeeld 6 wordt p gegeven door

$$p(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x) ,$$

waarin

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1) \cdots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \cdots (x_k-x_n)} .$$

Het polynoom p heet het interpolatiepolynoom van Lagrange.

We voeren nog in de notatie

$$\ell(x) := (x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n) .$$

2.6.11. Stelling. Zij f continu op $[a,b]$ en $(n+1)$ -maal differentieerbaar op (a,b) .

Voor alle $x \in [a,b]$ is er dan een $\xi \in (a,b)$ zodat

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \ell_k(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \ell(x) .$$

(interpolatieformule van Lagrange).

Bewijs. Zij $x \in [a,b]$, $x \neq x_k$ ($k = 0,1,\dots,n$). Definieer het getal $R(x)$ door

$$\frac{\ell(x)}{(n+1)!} R(x) := f(x) - \sum_{k=0}^n f(x_k) \ell_k(x) .$$

Voer in de functie $\varphi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door

$$\varphi(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n f(x_k) \ell_k(t) - \frac{\ell(t)}{(n+1)!} R(x) .$$

Dan is φ continu op $[a,b]$ en $(n+1)$ -maal differentieerbaar op (a,b) . Uit de constructie van het interpolatiepolynoom en de definitie van ℓ volgt

$\varphi(x_k) = 0$ voor $k = 0,1,\dots,n$ (ga dit na). Tevens is $\varphi(x) = 0$. De functie φ heeft dus $n+2$ verschillende nulpunten in $[a,b]$.

Volgens de stelling van Rolle (2.6.6) ligt tussen elke twee opeenvolgende nulpunten van φ een nulpunt van φ' . De afgeleide φ' heeft dus minstens $n+1$ verschillende nulpunten in (a,b) . Op dezelfde gronden heeft φ'' minstens n verschillende nulpunten in (a,b) , enz. Na herhaald toepassen van de stelling van Rolle vinden we dat er een $\xi \in (a,b)$ is zodat $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Werk $\varphi^{(n+1)}$ uit en bedenk dat $\ell_k^{(n+1)}(t) = 0$ voor $k = 0,1,\dots,n$, $\ell^{(n+1)}(t) = (n+1)!$.

We vinden dan

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - R(x) ,$$

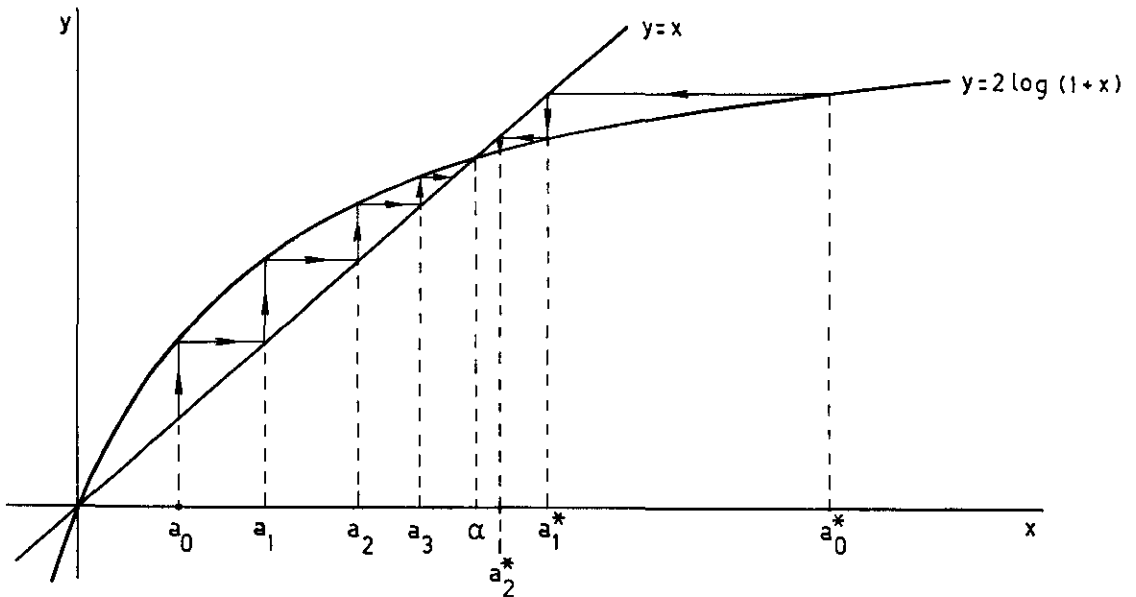
waaruit volgt $R(x) = f^{(n+1)}(\xi)$.

Als $x = x_k$ voor zekere $k \in \{0,1,\dots,n\}$ dan is de bewering triviaal en kan men voor ξ ieder getal uit (a,b) nemen. □

Opmerking. Het getal ξ in de interpolatieformule hangt af van x .

2.7. Numerieke oplossing van vergelijkingen

Methode van successieve substitutie. Als voorbeeld beschouwen we de vergelijking $F(x) = 2 \log(1+x) - x = 0$. Met behulp van de grafiek van F is eenvoudig in te zien dat de vergelijking slechts één wortel $\alpha > 0$ bezit. We wensen α numeriek te bepalen. Schrijf daartoe de vergelijking $F(x) = 0$ in de vorm $x = f(x)$, waarbij $f(x) = 2 \log(1+x)$. Ga nu uit van een beginschatting a_0 voor α en bepaal $a_1 := f(a_0)$ als een eerste, hopelijk betere, benadering. Als tweede benadering nemen we $a_2 := f(a_1)$, enz. De berekening van a_1, a_2, \dots is grafisch voorgesteld in onderstaande figuur. Uit de figuur blijkt dat de rij (a_n) convergeert naar α indien we uitgaan van een beginschatting $a_0 > 0$.



Beschouw nu algemeen een vergelijking van de vorm $x = f(x)$, waarin f continu is. Zij a_0 een schatting voor een wortel van deze vergelijking. Vorm dan met de methode van successieve substitutie de rij (a_n) bepaald door: $a_{n+1} := f(a_n)$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$. We hopen nu dat de rij (a_n) convergeert naar een wortel van de vergelijking.

2.7.1. Stelling. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, dan is $\alpha = f(\alpha)$.

Bewijs. Daar f continu is geldt

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\alpha).$$

□

Opmerking. Als de vergelijking $x = f(x)$ meer dan één wortel bezit en $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ bestaat, dan hangt het van de beginschatting a_0 af naar welke wortel de rij (a_n) convergeert. Een nadere precisering is te geven met behulp van de grafiek van $y = f(x)$.

De methode van successieve substitutie is voorbeeld van een zg. iteratiemethode. De formule $a_{n+1} := f(a_n)$ heet iteratieformule en men noemt a_0 de startwaarde van het iteratieproces.

Opgave 1. Voer de methode van successieve substitutie grafisch uit voor de vergelijking $x = f(x)$ in de volgende gevallen:

- 1) $f(x) = 0.9x + 0.1$, startwaarde $a_0 = 0$;
- 2) $f(x) = e^{-x}$, startwaarde $a_0 = 0$;
- 3) $f(x) = x^2$, startwaarde $a_0 = 2$;
- 4) $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, startwaarde $a_0 = 1$.

De figuren verkregen bij het uitwerken van opgave 1, suggereren dat het iteratieproces convergeert als $|f'(x)| < 1$ voor alle x in een omgeving van de wortel α , en divergeert als $|f'(x)| > 1$ in een omgeving van α . Voorts blijkt dat de rij (a_n) monotoon is als $f'(\alpha) > 0$ en oscillerend om α als $f'(\alpha) < 0$.

2.7.2. Stelling. Laat α een wortel zijn van de vergelijking $x = f(x)$. Zij f continu differentieerbaar op een interval $I := (\alpha - \rho, \alpha + \rho)$, $\rho > 0$ en zij $|f'(x)| \leq L < 1$ voor alle $x \in I$.

Zij $a_0 \in I$ en $a_n := f(a_{n-1})$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dan geldt:

$$(i) \quad |a_n - \alpha| \leq L^n |a_0 - \alpha|,$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha.$$

Bewijs. (i) Met de middelwaardestelling (2.6.7) volgt eenvoudig:

$$|a_1 - \alpha| = |f(a_0) - f(\alpha)| = |f'(\xi)(a_0 - \alpha)| \leq L |a_0 - \alpha|,$$

waarin ξ een getal is gelegen tussen a_0 en α . Wegens $L < 1$ is $a_1 \in I$.

Maak nu gebruik van volledige inductie. Onderstel dat $a_{n-1} \in I$ en $|a_{n-1} - \alpha| \leq L^{n-1} |a_0 - \alpha|$, dan volgt analoog aan het voorafgaande:

$$|a_n - \alpha| = |f(a_{n-1}) - f(\alpha)| \leq L |a_{n-1} - \alpha| \leq L^n |a_0 - \alpha|$$

en $a_n \in I$.

(ii) Wegens $0 \leq L < 1$ is $\lim_{n \rightarrow \infty} L^n = 0$, zodat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$. □

Opmerkingen. 1) Als f continu differentieerbaar is op een omgeving van α en $|f'(\alpha)| < 1$, dan is er een interval $I := (\alpha - \rho, \alpha + \rho)$ en een getal L met $0 \leq L < 1$ zodat $|f'(x)| \leq L$ voor alle $x \in I$; 2.7.2 is dan van toepassing. De stelling garandeert slechts locale convergentie, d.w.z. de rij (a_n) convergeert naar α mits de startwaarde a_0 voldoende dicht bij α gekozen wordt ($a_0 \in I$).

2) De ongelijkheid (i) uit 2.7.2 levert geen praktische schatting voor de fout omdat we α en dus het rechterlid van (i) niet kennen. In plaats van (i) beschouwen we de ongelijkheid

$$|a_n - \alpha| \leq L |a_{n-1} - \alpha| \leq L[|a_{n-1} + a_n| + |a_n - \alpha|],$$

waaruit volgt

$$(i') \quad |a_n - \alpha| \leq \frac{L}{1-L} |a_{n-1} - a_n|.$$

Als L bekend is, hebben we hiermee een bruikbare schatting van de fout in a_n , uitgedrukt in de waarden a_n en a_{n-1} .

Opgave 2. De rij (a_n) wordt bepaald door de iteratieformule

$$a_n := a_{n-1}^3 - 3a_{n-1}^2 + 3a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \text{ Bepaal de mogelijke waarden van } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Noem deze waarden $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, in opklimmende grootte. Bepaal een interval I zodat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha_2$, als $a_0 \in I$.

Uit de figuren verkregen bij de uitwerking van opgave 1, blijkt dat de rij (a_n) des te sneller convergeert naar de wortel α , naarmate $|f'|$ kleiner is in een omgeving van α . Als maat voor de convergentiesnelheid kiezen we

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha}.$$

2.7.3. Definitie. Een rij (a_n) met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ heet lineair convergent als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \alpha}{a_{n-1} - \alpha} = A \quad \text{met } 0 < |A| < 1.$$

A heet de asymptotische convergentiefactor.

De definitie drukt uit dat o.d.d. geldt $a_n - \alpha \approx A(a_{n-1} - \alpha)$. Als bijv. $A = 0.8$ dan neemt het aantal correcte cijfers in a_n met 1 toe bij elke 10 iteratiestappen ($^{10}\log 0.8 = -0.0197$).

We beschouwen nogmaals de methode van successieve substitutie toegepast op de vergelijking $x = f(x)$ met wortel α . Volgens 2.7.2 is $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, indien $|f'(x)| \leq L < 1$ voor alle x in een omgeving van α . Voorts geldt

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \alpha}{a_{n-1} - \alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_{n-1}) - f(\alpha)}{a_{n-1} - \alpha} = f'(\alpha),$$

zodat de rij (a_n) lineair convergeert als $f'(\alpha) \neq 0$ is, met asymptotische convergentiefactor $f'(\alpha)$.

Met behulp van (iii) bepalen we nog de limieten

$$(iv) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \alpha}{a_{n-1} - a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n - \alpha}{a_{n-1} - \alpha}}{1 - \frac{a_n - \alpha}{a_{n-1} - \alpha}} = \frac{f'(\alpha)}{1 - f'(\alpha)},$$

$$(v) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} - a_{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n - \alpha}{a_{n-1} - \alpha} - 1}{\frac{a_{n-1} - \alpha}{a_{n-2} - \alpha} - 1} \frac{a_{n-1} - \alpha}{a_{n-2} - \alpha} = f'(\alpha).$$

De laatste limiet is van groot belang omdat de getallen

$$A_n := \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} - a_{n-2}}$$

tijdens het iteratieproces berekend kunnen worden; voor voldoende grote n is A_n te gebruiken als benadering voor $f'(\alpha)$. Uit de limiet (iv) volgt dan dat o.d.d. geldt

$$a_n - \alpha \approx \frac{A_n}{1 - A_n} (a_{n-1} - a_n).$$

Hiermee is een schatting van de fout in a_n verkregen, uitgedrukt in enkel a_n , a_{n-1} en a_{n-2} . Vergelijken met de eerdere schatting (i') in opmerking 2 hoeft nu de waarde van L niet bekend te zijn.

Een getallenrij kan ook sneller dan lineair convergeren.

2.7.4. Definitie. Een rij (a_n) met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ heet kwadratisch convergent als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \alpha}{(a_{n-1} - \alpha)^2} = A \neq 0.$$

De definitie drukt uit dat o.d.d. geldt $A(a_n - \alpha) \approx [A(a_{n-1} - \alpha)]^2$. Het aantal correcte cijfers achter de komma in Aa_n wordt verdubbeld bij elke iteratiestap. Het is duidelijk dat kwadratische convergentie superieur is aan lineaire convergentie.

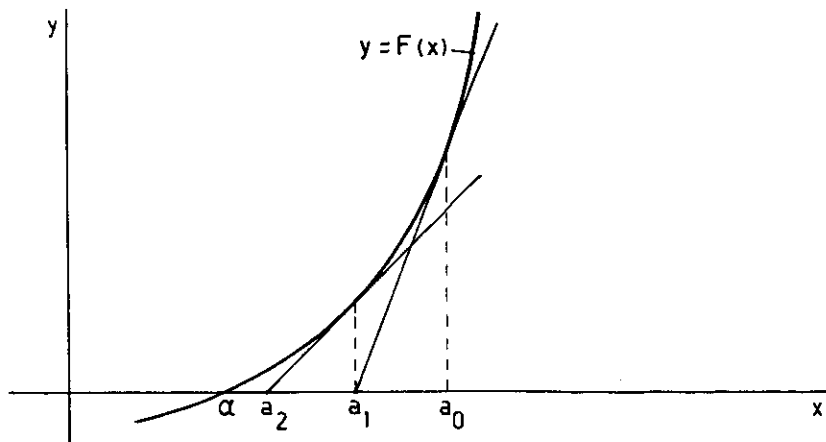
Methode van Newton-Raphson. Beschouw de vergelijking $F(x) = 0$ waarvan we een wortel α wensen te bepalen. Schrijf de vergelijking in de vorm $x = f(x)$, waarbij $f(x) = x - \varphi(x)F(x)$ met $\varphi(x) \neq 0$ in een omgeving van α . Los de vergelijking $x = f(x)$ op met de methode van successieve substitutie, i.e. construeer de rij (a_n) volgens $a_{n+1} := f(a_n)$. Deze rij zal snel convergeren indien $|f'(\alpha)|$ klein is. We kiezen daarom φ zodanig dat

$$f'(\alpha) = 1 - \varphi'(\alpha)F(\alpha) - \varphi(\alpha)F'(\alpha) = 1 - \varphi(\alpha)F'(\alpha) = 0$$

wordt. Als $F'(\alpha) \neq 0$ is vinden we $\varphi(\alpha) = 1/F'(\alpha)$, hetgeen we kunnen bereiken door $\varphi(x) = 1/F'(x)$ te kiezen. Met deze keuze van φ gaat de formule $a_{n+1} := f(a_n)$ over in de iteratieformule van Newton-Raphson:

2.7.5.
$$a_{n+1} := a_n - \frac{F(a_n)}{F'(a_n)}.$$

Meetkundig is a_{n+1} het snijpunt met de x-as van de raaklijn in het punt $(a_n, F(a_n))$ aan de grafiek van $y = F(x)$, zie figuur.



De rij (a_n) convergeert naar α mits de startwaarde a_0 voldoende dicht bij α ligt (locale convergentie).

De convergentie is kwadratisch als $F''(\alpha) \neq 0$ is. Met gebruikmaking van de stelling van Taylor (2.6.10) volgt namelijk

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \alpha}{(a_{n-1} - \alpha)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_{n-1}) - f(\alpha)}{(a_{n-1} - \alpha)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} f''(\xi_{n-1})(a_{n-1} - \alpha)^2}{(a_{n-1} - \alpha)^2} = \frac{1}{2} f''(\alpha) = \frac{F''(\alpha)}{2F'(\alpha)}, \end{aligned}$$

waarin ξ_{n-1} een getal is gelegen tussen α en a_{n-1} .

Voorbeelden. 1) Worteltrekken: $F(x) = x^2 - b = 0$ heeft een wortel $\alpha = \sqrt{b}$.

De iteratieformule van Newton-Raphson wordt in dit geval,

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 - b}{2a_n} = \frac{1}{2} \left[a_n + \frac{b}{a_n} \right].$$

Toon grafisch aan dat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{b}$ voor elke startwaarde $a_0 > 0$.

Uitwerken van het iteratieproces voor $b = 2$ en $a_0 = 1$ leidt tot de volgende benaderingen voor $\sqrt{2}$:

$a_0 = 1.000\ 000\ 000$	$a_3 = 1.\underline{414\ 215\ 686}$
$a_1 = 1.500\ 000\ 000$	$a_4 = 1.\underline{414\ 213\ 562}$
$a_2 = 1.\underline{416\ 666\ 667}$	$a_5 = 1.\underline{414\ 213\ 562}$

De onderstreepte decimalen zijn correct.

2) "Delen zonder te delen": $F(x) = \frac{1}{x} - b = 0$ heeft als wortel $\alpha = \frac{1}{b}$.

De iteratieformule van Newton-Raphson wordt in dit geval,

$$a_{n+1} = a_n + a_n^2 \left(\frac{1}{a_n} - b \right) = a_n (2 - ba_n).$$

Onderzoek grafisch de convergentie van de rij (a_n) in afhankelijkheid van de startwaarde a_0 .

Dit proces werd wel gebruikt bij automatische rekenmachines die geen ingebouwde deling hadden.

2.8. Integraalrekening

Op de middelbare school is reeds kennigemaakt met de Riemann-integraal

$$\int_a^b f(x)dx$$

van een begrensde functie f gedefinieerd op het interval $[a,b]$. Als de integraal bestaat dan heet f integreerbaar over $[a,b]$. De definitie wordt als volgt uitgebreid tot de gevallen waarin $a \geq b$.

Als $a > b$, dan $\int_a^b f(x)dx := - \int_b^a f(x)dx$ en als $a = b$, dan $\int_a^b f(x)dx := 0$.

2.8.1. Eigenschappen. (De functies in de volgende eigenschappen genoemd worden verondersteld integreerbaar te zijn over de betreffende intervallen.

I.
$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx \text{ voor alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

II.
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx .$$

III. Zij $b \geq a$ en $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a,b]$, dan is

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 .$$

IV. Als f integreerbaar is over $[a,b]$, dan is f integreerbaar over elk deelinterval $[c,d]$ van $[a,b]$.

Een aantal belangrijke gevolgen van deze eigenschappen zullen we nu gaan afleiden.

Gevolgen. 1) Zij $b \geq a$ en $f(x) \geq g(x)$ voor alle $x \in [a,b]$, dan is

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx .$$

Definieer de functie h door $h(x) = f(x) - g(x)$, dan is $h(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$, dus

$$0 \leq \int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx .$$

2) Zij $b \geq a$ en $m \leq f(x) \leq M$ voor alle $x \in [a, b]$, dan is

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a) .$$

3) Zij $b \geq a$, dan is

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

Voor alle $x \in [a, b]$ geldt $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, dus

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

4) Zij $b > a$, f continu op $[a, b]$ en $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$. Indien $f(\xi) > 0$ voor zekere $\xi \in [a, b]$, dan is

$$\int_a^b f(x) dx > 0 .$$

Omdat f continu is op $[a, b]$, bestaat er een deelinterval $[c, d]$ van $[a, b]$ met $\xi \in [c, d]$, zó dat $f(x) \geq \frac{1}{2}f(\xi)$ voor alle $x \in [c, d]$. Vervolgens is dan

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_c^d f(x) dx \geq \frac{1}{2}f(\xi)(d-c) > 0 .$$

Voorbeeld. We bewijzen nogmaals de ongelijkheid: $\log(1+x) < x$ voor alle $x > 0$. Voor alle $x > 0$ geldt

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} < \int_0^x 1 dt = x .$$

Bij het opschrijven van een integraal $\int_a^b f(x)dx$ dienen we te verifiëren of de integraal bestaat. De volgende stelling geeft aan dat voor een belangrijke klasse van functies de integreerbaarheid is verzekerd.

2.8.2. Stelling. Zij f begrensd op $[a,b]$ en continu op $[a,b]$ met uitzondering van een eindig aantal punten, dan bestaat $\int_a^b f(x)dx$.

Deze stelling bewijzen we niet.

Indien de integrand f continu is op $[a,b]$ geldt ook nog de volgende stelling.

2.8.3. Stelling (middelwaardestelling van de integraalrekening). Zij f continu op $[a,b]$, dan is er een $\xi \in [a,b]$ zodat

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) .$$

Bewijs. Volgens de stelling van Weierstrass (2.5.7) heeft f op $[a,b]$ een globaal maximum M en een globaal minimum m . Wegens $m \leq f(x) \leq M$ voor alle $x \in [a,b]$ geldt

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) .$$

Er is dan een $\mu \in \mathbb{R}$ met $m \leq \mu \leq M$, zodat

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) .$$

Met de tussenwaardestelling (2.5.5) volgt dat $\mu = f(\xi)$ voor zekere $\xi \in [a,b]$. □

Stelling 2.8.3 drukt uit dat de gemiddelde waarde

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

van een continue functie f op $[a,b]$, gelijk is aan een functiewaarde.

De verbinding tussen differentiaal- en integraalrekening wordt gelegd door de zg. hoofdstelling der integraalrekening. Deze stelling vormt tevens een belangrijk hulpmiddel voor de berekening van integralen. Als voorbereiding op de hoofdstelling bewijzen we eerst nog de volgende stelling.

2.8.4. Stelling. Zij f integreerbaar over $[a,b]$ en zij $F : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $F(x) := \int_a^x f(t)dt$.

Dan is F continu op $[a,b]$.

Als bovendien f continu is op $[a,b]$ dan is F differentieerbaar op (a,b) met $F' = f$.

Bewijs. (i) De functie f is begrensd op $[a,b]$, dus er is een $M > 0$ zodat $|f(x)| \leq M$ voor alle $x \in [a,b]$. Derhalve geldt voor alle $x,y \in [a,b]$:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq M|y-x|.$$

Daaruit volgt: $\lim_{y \rightarrow x} |F(y) - F(x)| = 0$, dus F is continu in x .

(ii) Zij bovendien f continu op $[a,b]$. Op grond van de middelwaardestelling (2.8.3) geldt dan voor alle $x,y \in (a,b)$ met $y \neq x$:

$$\left| \frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t)dt - f(x) \right| = |f(\xi) - f(x)|,$$

waarin ξ een getal is gelegen tussen x en y . Daaruit volgt:

$$\lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x) \right| = 0,$$

dus F is differentieerbaar in x met afgeleide $F'(x) = f(x)$. □

We bewijzen nu de hoofdstelling.

2.8.5. Hoofdstelling. Zij f continu op $[a,b]$, zij φ continu op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b) met $\varphi' = f$, dan is

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a) =: \varphi(x) \Big|_a^b.$$

Bewijs. We definiëren de functie $F : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ door $F(x) := \int_a^x f(t)dt$, dan is

$$F' = f, F(a) = 0, F(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

De functies φ en F hebben dezelfde afgeleide op (a,b) , dus $F - \varphi$ is constant op (a,b) , zie 2.6.8. Omdat F en φ continu zijn op $[a,b]$, is $F - \varphi$ ook constant op $[a,b]$.

Hieruit volgt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \varphi(b) - \varphi(a) . \quad \square$$

Door de hoofdstelling is de berekening van de integraal $\int_a^b f(x)dx$ met f continu op $[a,b]$, teruggebracht tot het vinden van een zg. primitieve functie van f , d.i. een functie met als afgeleide f . Nu volgt uit de middelwaardestelling 2.6.7 (zie ook 2.6.8) dat een primitieve functie op een constante na is bepaald. De verzameling van primitieve functies noteren we als de onbepaalde integraal $\int f(x)dx$ en we schrijven

$$\int f(x)dx = \varphi(x) + C \quad \text{als } \varphi'(x) = f(x) ;$$

hierin is C een willekeurige constante.

De hierna volgende regels voor het onbepaald integreren en tabel 2.6.3 maken het mogelijk om een groot aantal onbepaalde integralen te berekenen.

2.8.6. Regels voor het onbepaald integreren. 1) Voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ($(\lambda, \mu) \neq (0,0)$) is

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx.$$

2) Partiële integratie:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

3) Substitutieregel:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \varphi(g(x)) + C$$

als

$$\int f(y)dy = \varphi(y) + C .$$

Voorbeelden. 1) $\int \arcsin x \, dx = \int (x)'\arcsin x \, dx =$

$$= x \arcsin x - \int x(\arcsin x)'\, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx .$$

Substitueer $y = x^2$ dan gaat de integraal over in

$$x \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = x \arcsin x + \sqrt{1-y} + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$2) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan y + C = \arctan e^x + C,$$

waarbij de substitutie $y = e^x$ is toegepast.

3) Zij f $(n+1)$ -maal continu differentieerbaar op een open interval I en zij $a \in I$. Voor alle $x \in I$ is dan

$$2.8.7. \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \\ + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Bewijs. Door herhaalde partiële integratie vinden we

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt = f(a) - \int_a^x (x-t)' f'(t) dt = \\ = f(a) - (x-t) f'(t) \Big|_a^x + \int_a^x (x-t) f''(t) dt = \\ = f(a) + f'(a)(x-a) - \frac{1}{2} \int_a^x ((x-t)^2)' f''(t) dt = \\ = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f'''(t) dt, \text{ enz.}$$

Na n -maal partieel integreren ontstaat er juist de te bewijzen formule. \square

Opmerking. Formule 2.8.7 stemt overeen met de formule van Taylor (2.6.10), waarbij nu de restterm R_n wordt voorgesteld door een integraal.

Opgave. Bewijs 2.8.7 door volledige inductie.

Oneigenlijke integralen. De definitie van de Riemann-integraal $\int_a^b f(x)dx$ veronderstelt dat $[a,b]$ een begrensd interval is en dat de integrand f begrensd is op $[a,b]$. We gaan nu het integraalbegrip uitbreiden in twee richtingen.

De eerste uitbreiding betreft integralen over een onbegrensd interval van de vorm $[a,\infty)$ of $(-\infty,a]$.

2.8.8. Definitie. Zij f integreerbaar over $[a,A]$ voor elke $A > a$, dan definiëren we

$$\int_a^{\infty} f(x)dx := \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx ,$$

mits de limiet bestaat. In dat geval zeggen we dat de oneigenlijke integraal $\int_a^{\infty} f(x)dx$ bestaat of convergent is; indien de limiet niet bestaat heet de integraal divergent.

Analoog is te definiëren $-\infty \int_a^{\infty} f(x)dx$.

De tweede uitbreiding betreft integralen over een begrensd interval $[a,b]$ waarbij de integrand niet begrensd is in de buurt van één der eindpunten a of b .

2.8.9. Definities. Zij f integreerbaar over $[c,b]$ voor elke c met $a < c < b$, dan definiëren we

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c \downarrow a} \int_c^b f(x)dx ,$$

mits de limiet bestaat.

Zij f integreerbaar over $[a,c]$ voor elke c met $a < c < b$, dan definiëren we

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x)dx ,$$

mits de limiet bestaat.

Als de limiet bestaat dan zeggen we dat de oneigenlijke integraal $\int_a^b f(x)dx$ bestaat of convergent is; indien de limiet niet bestaat heet de integraal divergent.

Opmerking. Als f integreerbaar is over $[a, b]$ dan is

$$\lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

op grond van 2.8.4. De oneigenlijke integraal $\int_a^b f(x) dx$ stemt dan overeen met de (eigenlijke) integraal. Er is daarom geen bezwaar tegen om voor beide integralen dezelfde notatie te gebruiken.

Voorbeelden. 4)
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^A =$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \arctan A = \frac{1}{2}\pi.$$

5)
$$\int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \right) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \right) dx =$$

$$= \lim_{A \rightarrow -\infty} \log \left| \frac{x-1}{x-2} \right| \Big|_A^0 = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left(\log \frac{1}{2} - \log \left| \frac{A-1}{A-2} \right| \right) = -\log 2.$$

6)
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_\delta^1 =$$

$$= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{1-\alpha} (1 - \delta^{1-\alpha}) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{als } \alpha < 1, \\ \infty & \text{als } \alpha > 1. \end{cases}$$

Als $\alpha = 1$, dan is

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \downarrow 0} [-\log \delta] = \infty.$$

De integraal $\int_0^1 x^{-\alpha} dx$ is convergent voor $\alpha < 1$ en divergent voor $\alpha \geq 1$.

7) Toon zelf aan dat $\int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx$ convergent is voor $\alpha > 1$ en divergent voor $\alpha \leq 1$.

We kunnen het integraalbegrip nog verder uitbreiden, hetgeen we aan de hand van een aantal voorbeelden doen, zonder de definities expliciet op te schrijven.

Voorbeelden. 8)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx := \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

9)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx := \int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx .$$

Evenwel, $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ bestaat niet wegens

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log(1+A^2) = \infty,$$

dus $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ is divergent.

10)
$$\int_0^1 \frac{1}{x(1-x)} dx := \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(1-x)} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(1-x)} dx .$$

Nu is

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(1-x)} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \right) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \log \left(\frac{x}{1-x} \right) \Big|_{\delta}^{\frac{1}{2}} = \infty,$$

dus ook $\int_0^1 \frac{1}{x(1-x)} dx$ is divergent.

11)
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2 \sqrt{x}} dx := \int_0^1 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2 \sqrt{x}} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2 \sqrt{x}} dx = 2$$

omdat

$$\int_0^1 \frac{1}{(1 + \sqrt{x})^2 \sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{-2}{1 + \sqrt{x}} \Big|_{\delta}^1 = 1$$

en

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(1 + \sqrt{x})^2 \sqrt{x}} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{-2}{1 + \sqrt{x}} \Big|_1^A = 1 .$$

12)
$$\int_{-1}^1 \log|x| dx := \int_{-1}^0 \log|x| dx + \int_0^1 \log x dx = -2$$

omdat

$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} [x \log x - x] \Big|_{\delta}^1 = -1$$

en

$$\int_{-1}^0 \log|x| dx = \int_0^1 \log x dx = -1 .$$

We hebben steeds het integratie-interval zodanig gesplitst dat op elk van de delen één der definities 2.8.8 of 2.8.9 van toepassing is.

In de voorafgaande voorbeelden is de convergentie van oneigenlijke integralen vastgesteld door middel van expliciete berekening van de integraal. Deze methode is niet te gebruiken indien we de convergentie van bijv. $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ willen onderzoeken. Daarom zullen we nu een vergelijkingsstelling afleiden waarmee de convergentie van een grote klasse van oneigenlijke integralen eenvoudig kan worden vastgesteld.

2.8.10. Definitie. Een oneigenlijke integraal $\int_I f(x) dx$ heet absoluut convergent indien $\int_I |f(x)| dx$ convergent is. Hierbij is I een interval van de vorm $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$ of $[a, b]$. Impliciet onderstellen we dat f continu is op $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$ of (a, b) .

2.8.11. Stelling. Een absoluut convergente oneigenlijke integraal is tevens convergent.

Bewijs. We geven het bewijs alleen voor een oneigenlijke integraal van het type $\int_a^\infty f(x)dx$. De functie f is continu op $[a, \infty)$, dus is f en ook $|f|$ integreerbaar over $[a, A]$ voor elke $A > a$.

We schrijven $f(x) = [f(x) + |f(x)|] - |f(x)|$, dan is

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^A [f(x) + |f(x)|]dx - \int_a^A |f(x)|dx .$$

De tweede integraal in het rechterlid heeft voor $A \rightarrow \infty$ de limiet

$\int_a^\infty |f(x)|dx$, volgens het gegeven van de stelling.

Definieer nu

$$F(A) := \int_a^A [f(x) + |f(x)|]dx ,$$

dan is F monotoon niet dalend op $[a, \infty)$ wegens $f(x) + |f(x)| \geq 0$ voor alle $x \geq a$. F is tevens begrensd op $[a, \infty)$, immers

$$0 \leq F(A) = \int_a^A [f(x) + |f(x)|]dx \leq 2 \int_a^A |f(x)|dx \leq 2 \int_a^\infty |f(x)|dx .$$

Analoog aan de grondeigenschap der reële getallen (1.4.11) geldt de stelling: zij g monotoon en begrensd op $[a, \infty)$ dan bestaat $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

Pas deze stelling toe op F , dan bestaat

$$\lim_{A \rightarrow \infty} F(A) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A [f(x) + |f(x)|]dx .$$

Uit het voorgaande volgt dat $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx$ bestaat, dus $\int_a^\infty f(x)dx$ is convergent. □

2.8.12. Stelling (vergelijkingsstelling). Zij f continu op $[a, \infty)$. Laat er een $M \geq a$ bestaan zodat $|f(x)| \leq g(x)$ voor alle $x \geq M$. Indien $\int_M^\infty g(x)dx$ convergent is, dan is $\int_a^\infty f(x)dx$ absoluut convergent.

Bewijs. Definieer

$$F(A) := \int_a^A |f(x)|dx .$$

Voor alle $A \geq M$ geldt nu de ongelijkheid

$$\begin{aligned} 0 \leq F(A) &= \int_a^A |f(x)| dx = \int_a^M |f(x)| dx + \int_M^A |f(x)| dx \\ &\leq \int_a^M |f(x)| dx + \int_M^A g(x) dx \leq \int_a^M |f(x)| dx + \int_M^\infty g(x) dx . \end{aligned}$$

F is dus begrensd op $[M, \infty)$. Voorts is F monotoon niet dalend op $[a, \infty)$ wegens $|f(x)| \geq 0$ voor alle $x \geq a$. Daaruit volgt dat $\lim_{A \rightarrow \infty} F(A)$ bestaat, dus $\int_a^\infty |f(x)| dx$ is convergent. □

Bewijs zelf de volgende stelling.

2.8.13. Stelling (vergelijkingsstelling). Zij f continu op $(a, b]$. Laat er een interval $(a, a+\delta]$, $\delta > 0$ bestaan zodat $|f(x)| \leq g(x)$ voor alle $x \in (a, a+\delta]$. Indien $\int_a^{a+\delta} g(x) dx$ convergent is, dan is $\int_a^b f(x) dx$ absoluut convergent.

Voorbeelden. 13) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ is absoluut convergent (en dus convergent),

omdat $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ voor $x \geq 1$ en $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ convergent is.

14) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x\sqrt{x}} dx$ is convergent, omdat $0 \leq \frac{\log(1+x)}{x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ voor $0 < x \leq 1$

en $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ convergent is.

15) Zij f continu op $[a, \infty)$. Indien $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x)$ bestaat voor zekere $\alpha > 1$,

dan is $\int_a^\infty f(x) dx$ absoluut convergent en dus convergent.

Immers, zij $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = L$, dan bestaat er een getal $M > \max(a, 0)$ zodat voor alle $x \geq M$ geldt:

$$|x^\alpha f(x)| \leq |L| + 1 \text{ oftewel } |f(x)| \leq \frac{|L| + 1}{x^\alpha} .$$

Bedenk voorts dat $\int_M^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ convergent is voor $\alpha > 1$, zie voorbeeld 7.

16) Zij f continu op $(a, b]$. Indien $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^\alpha f(x)$ bestaat voor zekere $\alpha < 1$,

dan is $\int_a^b f(x) dx$ absoluut convergent en dus convergent. Toon dit zelf aan.

Opmerking. De omkering van 2.8.11 hoeft niet waar te zijn, i.e. een convergente oneigenlijke integraal hoeft niet absoluut convergent te zijn.

Als voorbeeld beschouwen we $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

We tonen eerst aan dat deze integraal convergent is. Met partiële integratie leiden we af,

$$\int_1^A \frac{\sin x}{x} dx = - \frac{\cos x}{x} \Big|_1^A - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx .$$

Omdat $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ absoluut convergent is (zie voorbeeld 13) en $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\cos A}{A} = 0$,

is $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ convergent. Dus ook $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ is convergent.

We tonen vervolgens aan dat $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ divergent is. Zij $N \in \mathbb{N}$ dan is

$$\int_0^{N\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_{n=1}^N \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_{n=1}^N \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y+(n-1)\pi} dy ,$$

waarbij de substitutie $x = y + (n-1)\pi$ is toegepast.

Nu geldt

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y+(n-1)\pi} dy \geq \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{n\pi} dy = \frac{2}{n\pi} \geq \frac{2}{\pi} \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx ,$$

waarna volgt

$$\int_0^{N\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{2}{\pi} \int_1^{N+1} \frac{1}{x} dx = \frac{2}{\pi} \log(N+1).$$

Het is dan duidelijk dat $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{N\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ niet bestaat, dus $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ is divergent.

2.9. Techniek van het integreren

In deze paragraaf bespreken we grotendeels aan de hand van voorbeelden, enige kunstgrepen en methoden voor het berekenen van onbepaalde en bepaalde integralen.

2.9.1. De volgende formules zijn door differentiëren direct te bewijzen.

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 \quad ; \quad \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad ; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C, a > 0, a \neq 1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad ; \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C \quad ; \quad \int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log|\tan \frac{1}{2}x| + C.$$

2.9.2. Herhaalde partiële integratie

Voorbeeld 1. $I = \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} \int (e^{ax})' \cos bx dx =$
 $= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx ,$

$$J = \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a} \int (e^{ax})' \sin bx dx =$$
$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx .$$

Dus $I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I$, waaruit volgt

$$I = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C,$$

$$J = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C.$$

Zo is, voor $a > 0$,

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{-a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \right]_0^N = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Voorbeeld 2. Voor $n \neq -1$ is

$$\begin{aligned} \int x^n \log x \, dx &= \frac{1}{n+1} \int (x^{n+1})' \log x \, dx = \frac{x^{n+1} \log x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx = \\ &= \frac{x^{n+1} \log x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C. \end{aligned}$$

Voorbeeld 3. Bereken $\int e^{-x} x^n \, dx =: I_n$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int e^{-x} x^n \, dx = - \int (e^{-x})' x^n \, dx = -x^n e^{-x} + n \int e^{-x} x^{n-1} \, dx = \\ &= -x^n e^{-x} + n I_{n-1}. \end{aligned}$$

Dit is een zg. recurrente betrekking voor I_n .

Zo is bijv.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-x^n e^{-x} \right]_0^N + n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} \, dx = n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} \, dx = \\ &= n(n-1) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-2} \, dx = n!. \end{aligned}$$

Voorbeeld 4. Bereken $\int (1+x^2)^{-n} \, dx =: J_n$.

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \\ &= \arctan x - \frac{1}{2} \int x \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} dx = \arctan x + \frac{1}{2} \int x \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' dx = \\ &= \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C. \end{aligned}$$

De berekening van J_n is analoog:

$$\begin{aligned} J_n &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx = J_{n-1} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n} = \\ &= J_{n-1} - \frac{1}{2} \int x \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^n} dx = J_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \int x \left[\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \right]' dx = \\ &= J_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} J_{n-1} = \\ &= \frac{2n-3}{2(n-1)} J_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Zo hebben we een recurrente betrekking gekregen, met behulp waarvan J_n te berekenen is, omdat J_1 bekend is ($J_1 = \arctan x + C$).

2.9.3. Rationale integrand, splitsing in partiële breuken

Voorbeeld 1. $\int \frac{7x-1}{x^2-2x+5} dx = \frac{7}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx + 6 \int \frac{dx}{x^2-2x+5} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{7}{2} \int \frac{(x^2-2x+5)'}{x^2-2x+5} dx + 6 \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \\ &= \frac{7}{2} \log(x^2-2x+5) + 3 \int \frac{\frac{1}{2}(x-1)'}{[\frac{1}{2}(x-1)]^2+1} dx = \\ &= \frac{7}{2} \log(x^2-2x+5) + 3 \arctan \frac{1}{2}(x-1) + C. \end{aligned}$$

Voorbeeld 2.
$$\int \frac{7x-1}{(x^2-2x+5)^2} dx = \frac{7}{2} \int \frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2} dx + 6 \int \frac{dx}{[(x-1)^2+4]^2} =$$
$$= \frac{7}{2} \int \frac{(x^2-2x+5)'}{(x^2-2x+5)^2} dx + \frac{3}{4} \int \frac{\frac{1}{2}(x-1)'}{[\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1]^2} dx =$$
$$= -\frac{7}{2(x^2-2x+5)} + \frac{3}{4} \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \text{ waarin } t = \frac{1}{2}(x-1).$$

Voor de laatste integraal verwijzen we naar 2.9.2, voorbeeld 4.

Uitkomst :
$$\frac{3}{8} \arctan \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3x-17}{4(x^2-2x+5)} + C .$$

Alle integralen van rationale functies zijn te herleiden tot de volgende vijf grondtypen:

- a) $\int p(x)dx$ waarbij $p(x)$ een polynoom is.
- b) $\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a| + C.$
- c) $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \quad (n \neq 1).$
- d) $\int \frac{Px+Q}{x^2+px+q} dx$ met positief definitieve noemer $x^2+px+q.$

De integraal is te herleiden tot

$$\frac{1}{2}P \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + (Q - \frac{1}{2}pP) \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2} .$$

De eerste integraal is gelijk aan $\frac{1}{2}P \log(x^2+px+q)$; de tweede integraal is te herleiden tot een arctan-functie na de substitutie $x + \frac{1}{2}p = t\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}.$

- e) $\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} dx$ met positief definitieve noemer x^2+px+q en $n > 1.$

De integraal is te herleiden tot

$$\frac{1}{2}P \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx + (Q - \frac{1}{2}pP) \int \frac{dx}{[(x+\frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2]^n} .$$

De eerste integraal is direct te berekenen, terwijl de tweede integraal door de substitutie $x + \frac{1}{2}p = t\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}$ overgaat in $\int (t^2+1)^{-n} dt$ welke in 2.9.2, voorbeeld 4 behandeld is.

We beschouwen nu algemeen de integraal met rationale integrand:

$$\int \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n} dx = \int \frac{T(x)}{N(x)} dx .$$

De berekening van de integraal geschiedt in vier stappen .

Stap 1 : Zorg, door deling, dat $m = \text{gr}(T) < n = \text{gr}(N)$.

Stap 2 : Ontbind de noemer $N(x)$ in reële factoren van de eerste graad en reële positief definitieve factoren van de tweede graad.

Stap 3 : Schrijf $T(x)/N(x)$ als de som van een aantal breuken, waarvan de noemers zijn de eerstegraadsfactoren van $N(x)$, de definitieve tweedegraadsfactoren van $N(x)$, of machten daarvan. De teller van deze breuken is constant in geval de noemer een eerstegraadsfactor is of een macht daarvan; de teller is van de eerste graad in geval de noemer een tweedegraadsfactor is of een macht daarvan. Deze herleiding van de integrand $T(x)/N(x)$ heet splitsing in partiële breuken. Zonder bewijs vermelden we dat een dergelijke splitsing altijd mogelijk is.

Stap 4 : Integreer de afzonderlijke partiële breuken; de betreffende integralen zijn juist de vijf genoemde grondtypen.

Voorbeeld 3.
$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^3 + x - x + 1}{x^2 + 1} dx = \int x dx - \int \frac{x-1}{x^2 + 1} dx =$$
$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{dx}{x^2 + 1} =$$
$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + \arctan x + C.$$

Voorbeeld 4.
$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} =$$
$$= \frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{2} \log|x+1| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

Voorbeeld 5.
$$\int \frac{x-1}{3x^2 + 5x - 2} dx = \int \frac{x-1}{(3x-1)(x+2)} dx..$$

Schrijf nu $\frac{x-1}{(3x-1)(x+2)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{x+2}$, dan is

$$x - 1 = A(x+2) + B(3x-1),$$

$$1 = A + 3B, \quad -1 = 2A - B, \quad \text{dus } A = -\frac{2}{7}, \quad B = \frac{3}{7}.$$

De integraal wordt nu

$$-\frac{2}{7} \int \frac{dx}{3x-1} + \frac{3}{7} \int \frac{dx}{x+2} = -\frac{2}{21} \log|3x-1| + \frac{3}{7} \log|x+2| + C.$$

Voorbeeld 6. $\int \frac{x+1}{x(x+5)^2} dx$; de noemer van de integrand bevat een meervoudige eerstegraadsfactor.

De breuksplitsing verloopt dan als volgt:

$$\frac{x+1}{x(x+5)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} + \frac{D}{(x+5)^2},$$

$$x + 1 = A(x^2 + 10x + 25) + B(x^2 + 5x) + Dx,$$

dus

$$A + B = 0, \quad 10A + 5B + D = 1, \quad 25A = 1,$$

$$A = \frac{1}{25}, \quad B = -\frac{1}{25}, \quad D = \frac{4}{5}.$$

De integraal wordt

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x(x+5)^2} dx &= \frac{1}{25} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{25} \int \frac{dx}{x+5} + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{(x+5)^2} = \\ &= \frac{1}{25} \log|x| - \frac{1}{25} \log|x+5| - \frac{4}{5(x+5)} + C. \end{aligned}$$

Voorbeeld 7. $\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + 3x + 5} dx = \int \frac{2x^2 + x + 1}{(x+1)(x^2 - 2x + 5)} dx$.

De breuksplitsing verloopt nu als volgt:

$$\frac{2x^2 + x + 1}{(x+1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + D}{x^2 - 2x + 5},$$

$$2x^2 + x + 1 = A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + D)(x+1),$$

dus

$$A + B = 2, \quad -2A + B + D = 1, \quad 5A + D = 1,$$

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{7}{4}, \quad D = -\frac{1}{4}.$$

De integraal wordt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{7x-1}{x^2-2x+5} dx = \\ & = \frac{1}{4} \log|x+1| + \frac{7}{8} \log(x^2-2x+5) + \frac{3}{4} \arctan \frac{1}{2}(x-1) + C ; \end{aligned}$$

op grond van voorbeeld 1 uit deze sub-paragraaf.

Voorbeeld 8. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$; de noemer van de integrand bevat een meervoudige tweedegraadsfactor.

De breuksplitsing verloopt dan als volgt:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2},$$

$$1 = A(x^4+2x^2+1) + (Bx+D)(x^3+x) + (Ex+F)x,$$

dus

$$A + B = 0, D = 0, 2A + B + E = 0, D + F = 0, A = 1,$$

$$A = 1, B = E = -1, D = F = 0.$$

De integraal wordt

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C. \end{aligned}$$

2.9.4. Goniometrische integralen

De integraal $\int R(\sin x, \cos x) dx$ waarin R een rationale functie voorstelt, is door de substitutie $\tan \frac{1}{2}x = t$ te herleiden tot een integraal met rationale integrand, immers

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Voorbeeld 1. } \int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \frac{1}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = 4 \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = \\ &= -2 \int t \left(\frac{1}{1+t^2} \right)' dt = -\frac{2t}{1+t^2} + 2 \arctan t + C_1 = -\sin x + x + C. \end{aligned}$$

Hoewel deze methode feilloos werkt, is zij meestal zeer omslachtig en is het aan te bevelen om haar slechts toe te passen wanneer alle andere middelen zijn uitgeput. Die andere middelen zijn:

eenvoudige substitutie;

gebruik van goniometrische formules;

graad verlagen door overgang op $\sin 2x$, $\cos 2x$;

substitutie $\tan x = t$.

$$\text{Voorbeeld 2. } \int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x} dx = x - \sin x + C.$$

$$\text{Voorbeeld 3. } \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = - \int \frac{(1 + \cos x)'}{1 + \cos x} dx = - \log(1 + \cos x) + C.$$

$$\begin{aligned} \text{Voorbeeld 4. } \int \sin px \sin qx dx &= \frac{1}{2} \int \cos(p-q)x dx - \frac{1}{2} \int \cos(p+q)x dx = \\ &= \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} + C, \end{aligned}$$

mits $p \neq q$ en $p \neq -q$ is.

$$\begin{aligned} \text{Voorbeeld 5. } \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} &= \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} \tan^2 x + 1} \frac{dx}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{ab} \int \frac{\frac{a}{b} (\tan x)'}{\frac{a^2}{b^2} \tan^2 x + 1} dx = \frac{1}{ab} \arctan \left[\frac{a}{b} \tan x \right] + C. \end{aligned}$$

Eigenlijk hebben we hier de substitutie $\tan x = t$ toegepast.

In het volgende voorbeeld blijkt dat de substitutie $\tan \frac{1}{2}x = t$ ook wel eens meevalt.

Voorbeeld 6.
$$\int \frac{dx}{1+2 \cos x} = \int \frac{1}{1 + \frac{2(1-t^2)}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{dt}{3-t^2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\int \frac{dt}{\sqrt{3}-t} + \int \frac{dt}{\sqrt{3}+t} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \log \left| \frac{\sqrt{3} + \tan \frac{1}{2}x}{\sqrt{3} - \tan \frac{1}{2}x} \right| + C.$$

Voorbeeld 7.
$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \int (1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1+2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$
$$= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx =$$
$$= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

Voorbeeld 8.
$$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 (\sin x)' dx =$$
$$= \int (1-2 \sin^2 x + \sin^4 x) (\sin x)' dx = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

Voorbeeld 9.
$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} dx =$$
$$= \int \tan^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x + C.$$

2.9.5. Integrand $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

De integraal $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ waarin R een rationale functie voorstelt, is door kwadraat afsplitsen te herleiden tot één van de volgende drie typen:

- a) $\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx$; verdere herleiding door de substitutie $x = \sin \varphi$.
- b) $\int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx$; verdere herleiding door de substitutie $x = \frac{1}{\cos \varphi}$.
- c) $\int R(x, \sqrt{x^2+1}) dx$; verdere herleiding door de substitutie $x = \tan \varphi$.

N.B. Let op het teken wanneer wortels worden getrokken!

We beperken ons tot enige voorbeelden van bepaalde integralen.

Voorbeeld 1. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$

Substitueer $x = \sin \varphi$ en neem φ zo, dat het integratie-interval $0 \leq x \leq 1$ overgaat in $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$. Op dit interval geldt $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi} = \cos \varphi$.

De integraal wordt dan

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right] \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{4}\pi; \end{aligned}$$

de integraal is te interpreteren als de oppervlakte van een kwart cirkel met straal 1.

Voorbeeld 2. $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^4 \sqrt{a^2+x^2}} \quad (a > 0).$

Substitueer $x = a \tan \varphi$ en neem φ zo, dat het interval $a \leq x < \infty$ overgaat in $\frac{1}{4}\pi \leq \varphi < \frac{1}{2}\pi$.

De integraal wordt dan

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^4 \sqrt{a^2+x^2}} &= \frac{1}{a^4} \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^4 \varphi} d\varphi = \frac{1}{a^4} \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(1-\sin^2 \varphi)(\sin \varphi)'}{\sin^4 \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{a^4} \left[-\frac{1}{3 \sin^3 \varphi} + \frac{1}{\sin \varphi} \right] \Big|_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2 - \sqrt{2}}{3a^4}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 3. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+4x}} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+4)\sqrt{(x+2)^2-4}}.$

Substitueer $x+2 = 2/\cos \varphi$ en neem φ zo, dat het interval $0 \leq x < \infty$ overgaat in $0 \leq \varphi < \frac{1}{2}\pi$.

De integraal wordt dan

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{2 \cos \varphi + 2} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{4 \cos^2 \frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{2} \tan \frac{1}{2}\varphi \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{2}.$$

Een functie $y(x)$ is een oplossing als de grafiek in ieder punt een raaklijn heeft waarvan de richting samenvalt met de richting van het richtingsveld in dat punt.

We kunnen ook zeggen: de grafiek raakt in elk punt aan het richtingsveld. Vanuit deze meetkundige beschouwingwijze wordt het duidelijk waarom men veelal krommen die overal aan het richtingsveld raken (zg. integraalkrommen) als oplossingen beschouwt (zie voorbeeld 4). Bovendien breidt men het richtingsveld uit met verticale richtingen; (zie ook voorbeeld 4). Van groot nut bij het bepalen van het richtingsveld zijn de meetkundige plaatsen van punten met een gelijke richting, de zg. isoklinen. De vergelijking van de isokline van de richting waarvan de tangens C is, is $f(x,y) = C$. We besluiten deze paragraaf met een aantal voorbeelden.

Voorbeeld.

4) $y' = -\frac{x}{y}$, we zien dat $y \neq 0$ moet zijn. Dan $2yy' = -2x$, dus door integratie vinden we

$$y^2 = -x^2 + C.$$

De constante C is ≥ 0 want $C = x^2 + y^2$. Met een zeer gebruikelijke slordigheid zegt men wel dat de oplossing is een stelsels concentrische cirkels: $x^2 + y^2 = C$.

Als men werkelijk functies als oplossingen aan wil geven, dan kan men bijv. op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ twee functies geven: $y = \sqrt{1-x^2}$ en $y = -\sqrt{1-x^2}$ die beide op $(-1,1)$ aan de differentiaalvergelijking voldoen.

In dit voorbeeld is de vergelijking van de isokline met richting C : $-\frac{x}{y} = C$; dus $y = -\frac{1}{C}x$, een rechte door \mathcal{O} met richting loodrecht op de richting van het veld in zijn punten. We merken apart op dat het richtingsveld horizontaal is in punten van de y -as en verticaal in punten van de x -as ($y = 0!$).

Van $y' = -\frac{x}{y}$ zijn dus de isoklinen rechten door de oorsprong; integraalkrommen zijn cirkels met de oorsprong als middelpunt.

Voor de figuur zie volgende bladzijde.

2.9.6. Integrand $R(x, \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)})$

De integraal $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$ waarin R een rationale functie voorstelt, is door de substitutie $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ te herleiden tot een integraal met rationale integrand.

Voorbeeld 1. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$.

Substitueer $\sqrt{x} = t$, dan is $x = t^2$, $\frac{dx}{dt} = 2t$, en de integraal wordt

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx &= 2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 2t - 2 \arctan t + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Voorbeeld 2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2(1-x)}} = \int_0^1 \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}} dx$.

Substitueer $t = \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}$, dan is $x = \frac{t^3}{t^3+1}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{3t^2}{(t^3+1)^2}$,

en de integraal wordt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}} dx &= 3 \int_0^\infty \frac{dt}{t^3+1} = \int_0^\infty \left[\frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1} \right] dt = \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{t+1} - \frac{t-\frac{1}{2}}{t^2-t+1} + \frac{3/2}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right] dt = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\log |t+1| - \frac{1}{2} \log(t^2-t+1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right] \Big|_0^N = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \log \frac{(N+1)^2}{N^2-N+1} + \sqrt{3} \arctan \frac{2N-1}{3} \right] + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2.10. Numerieke integratie

De Riemann-integraal $\int_a^b f(x)dx$ is niet altijd in gesloten vorm te berekenen. Zo kunnen we bijv. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ niet bepalen omdat er geen elementaire functie bestaat die primitieve functie is van e^{-x^2} . We bespreken daarom nu enige numerieke integratiemethoden voor de berekening van een benadering voor $\int_a^b f(x)dx$. Deze methoden komen er op neer dat we $\int_a^b f(x)dx$ benaderen door $\int_a^b p(x)dx$, waarin p het interpolatiepolynoom van Lagrange is bepaald door $p(x_k) = f(x_k)$ voor $k = 0, 1, \dots, n$; hierbij zijn x_0, x_1, \dots, x_n gegeven getallen met $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$. Overeenkomstig 2.2, voorbeeld 6, wordt p gegeven door

$$p(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + \dots + f(x_n)l_n(x) ,$$

waarin l_i , $i = 0, 1, \dots, n$, het polynoom is gegeven in 2.2.5. Integreer p over $[a, b]$ dan is de uitkomst van de gedaante

$$\int_a^b p(x)dx = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \dots + c_n f(x_n) ,$$

waarin c_0, c_1, \dots, c_n zekere getallen zijn, onafhankelijk van f . Als f een polynoom is met graad $\leq n$, dan is $f = p$. We kunnen nu de getallen c_0, c_1, \dots, c_n eenvoudig berekenen door middel van de voorwaarde

$$\int_a^b q(x)dx = c_0 q(x_0) + c_1 q(x_1) + \dots + c_n q(x_n)$$

voor alle polynomen q met $gr(q) \leq n$.

We beperken ons verder tot de afleiding van twee eenvoudige integratieformules.

1) Neem $n = 1$, $a = x_0 = 0$ en $x_1 = b = 1$.

Zij $q(x) = \alpha + \beta x$, dan worden de getallen c_0, c_1 bepaald door de voorwaarde

$$\int_0^1 q(x)dx = \alpha + \frac{1}{2}\beta = c_0 \alpha + c_1 (\alpha + \beta)$$

voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. We vinden dan $c_0 = \frac{1}{2}$ en $c_1 = \frac{1}{2}$, waarna volgt

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{2} [f(0) + f(1)]$$

als benadering voor de integraal.

Beschouw nu algemeen de integraal

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = h \int_0^1 f(a+hy) dy .$$

Toepassing van de zojuist afgeleide benadering leidt tot de trapeziumregel,

2.10.1.
$$\int_a^{a+h} f(x) dx = \frac{1}{2} h [f(a) + f(a+h)] + E_T ,$$

waarin E_T de fout voorstelt. Deze fout zal nog nader onderzocht worden.

De trapeziumregel is exact i.e. $E_T = 0$, indien f een polynoom is met graad ≤ 1 .

De benadering volgens de trapeziumregel is meetkundig te interpreteren als de oppervlakte van het trapezium met hoekpunten $(a,0)$, $(a+h,0)$ op de x -as, en $(a,f(a))$, $(a+h,f(a+h))$ op de grafiek van $y = f(x)$, aangenomen dat $f(x) \geq 0$ is op $[a,a+h]$.

2) Neem $n = 2$, $a = x_0 = -1$, $x_1 = 0$ en $x_2 = b = 1$.

Zij $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, dan worden de getallen c_0, c_1, c_2 bepaald door de voorwaarde

$$\int_{-1}^1 q(x) dx = 2\alpha + \frac{2}{3} \gamma = c_0(\alpha - \beta + \gamma) + c_1 \alpha + c_2(\alpha + \beta + \gamma)$$

voor alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. We vinden dan $c_0 = \frac{1}{3}$, $c_1 = \frac{4}{3}$ en $c_2 = \frac{1}{3}$, waarna volgt

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3} [f(-1) + 4f(0) + f(1)]$$

als benadering voor de integraal. Merk op dat $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$, zodat de benadering ook nog exact is als f een polynoom van de derde graad is.

Pas nu deze benadering toe op de algemenere integraal

$$\int_a^{a+2h} f(x) dx = h \int_{-1}^1 f(a+h+hy) dy ,$$

dan volgt de regel van Simpson,

$$2.10.2. \quad \int_a^{a+2h} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)] + E_S,$$

waarin E_S de fout voorstelt. De regel van Simpson is exact, i.e. $E_S = 0$, indien f een polynoom is met graad ≤ 3 .

We onderzoeken nu de fout E_T bij toepassing van de trapeziumregel. Als van de functie f slechts gegeven is dat ze integreerbaar is over $[a, a+h]$, kunnen we niets zeggen over de fout.

Onderstel nu dat f tweemaal continu differentieerbaar is op een open interval $I \supset [a, a+h]$. Laat p het interpolatiepolynoom zijn bepaald door $p(a) = f(a)$, $p(a+h) = f(a+h)$. Overeenkomstig 2.6.11 geldt dan voor alle $x \in [a, a+h]$:

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x-a)(x-a-h)$$

voor zekere $\xi \in (a, a+h)$; bedenk dat ξ afhangt van x . Zij M het globale maximum en m het globale minimum van f'' op $[a, a+h]$, dan volgt

$$\frac{1}{2} m(x-a)(a+h-x) \leq - [f(x) - p(x)] \leq \frac{1}{2} M(x-a)(a+h-x)$$

voor alle $x \in [a, a+h]$. Integreer de laatste ongelijkheid over $[a, a+h]$; wegens

$$\int_a^{a+h} (x-a)(a+h-x) dx = \frac{1}{6} h^3$$

vinden we dan

$$\frac{1}{12} mh^3 \leq -E_T \leq \frac{1}{12} Mh^3$$

oftewel $E_T = -\frac{1}{12} \mu h^3$, waarbij μ een zeker getal is uit $[m, M]$. Omdat f'' continu is op $[a, a+h]$, bestaat er volgens de tussenwaardstelling (2.5.5) een getal $\eta \in (a, a+h)$ zodat $\mu = f''(\eta)$ en daarmee

$$E_T = -\frac{1}{12} h^3 f''(\eta).$$

De fout E_S bij toepassing van de regel van Simpson is op analoge wijze te onderzoeken. In eerste instantie verwachten we een voorstelling voor E_S van de vorm $E_S = ch^4 f^{(3)}(\eta)$, waarin c een constante is en $\eta \in (a, a+2h)$. Door een subtielere analyse (waarop we hier niet ingaan) kan men echter afleiden de nauwkeurigere voorstelling:

$$E_S = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\eta)$$

voor zekere $\eta \in (a, a+2h)$. Hierbij is ondersteld dat f viermaal continu differentieerbaar is op een open interval $I \supset [a, a+2h]$. Merk op dat $f^{(4)}(\eta) = 0$ en dus $E_S = 0$, als f een polynoom is met graad ≤ 3 , in overeenstemming met een eerdere opmerking.

Uit de voorstellingen voor E_T en E_S volgt dat voor kleine h de regel van Simpson een nauwkeuriger benadering geeft dan de trapeziumregel.

De fout bij toepassing van de voorgaande integratieformules is des te kleiner naarmate h kleiner is. Bij de numerieke integratie van $\int_a^b f(x)dx$ zullen we daarom meestal het interval $[a, b]$ verdelen in gelijke delen ter lengte $h = (b-a)/n$ en vervolgens op ieder deelinterval de trapeziumregel of de regel van Simpson toepassen. Op deze wijze komen we tot de volgende samengestelde integratieformules:

$$2.10.3. \quad \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}h[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n] + E_T$$

met fout

$$E_T = -\frac{1}{12} h^3 \sum_{j=0}^{n-1} f''(\xi_j), \quad \xi_j \in (a+jh, a+(j+1)h) \text{ voor } j = 0, 1, \dots, n-1$$

$$2.10.4. \quad \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 4f_{n-1} + f_n] + E_S$$

met fout

$$E_S = -\frac{1}{90} h^5 \sum_{j=0}^{\frac{1}{2}n-1} f^{(4)}(\eta_j), \quad \eta_j \in (a+2jh, a+(2j+2)h)$$

voor $j = 0, 1, \dots, \frac{1}{2}n-1$.

Hierin is $f_k := f(a+kh)$, $k = 0, 1, \dots, n$, terwijl in 2.10.4 is ondersteld dat n even is.

Als f'' bekend is, kan men een schatting geven voor de fout E_T . Zij M_2 het globale maximum van $|f''|$ op $[a, b]$, dan geldt

$$|E_T| \leq \frac{n}{12} M_2 h^3 = \frac{1}{12} (b-a) M_2 h^2 .$$

Evenzo geldt voor de fout E_S :

$$|E_S| \leq \frac{\frac{1}{2}n}{90} M_4 h^5 = \frac{1}{180} (b-a) M_4 h^4 ,$$

waarin M_4 het globale maximum van $|f^{(4)}|$ op $[a, b]$ is.

In praktische gevallen zijn de voorgaande schattingen voor E_T , E_S meestal erg onrealistisch. Bovendien zijn de afgeleiden f'' of $f^{(4)}$ niet altijd eenvoudig beschikbaar.

In de (praktische) numerieke wiskunde wordt daarom een andere methode gevolgd waarbij een realistische schatting voor de fout wordt verkregen. Beschouw de integraal $I := \int_a^b f(x) dx$. Met behulp van de samengestelde trapeziumregel berekenen we twee benaderingen voor I :

$$I(h) := \frac{1}{2} h [f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n] ,$$

$$I(\frac{1}{2}h) := \frac{1}{4} h [f_0 + 2f_{\frac{1}{2}} + 2f_1 + \dots + 2f_{n-\frac{1}{2}} + f_n] ,$$

waarin $f_k := f(a+kh)$, $h = (b-a)/n$. De benadering $I(\frac{1}{2}h)$ correspondeert met een verdeling van $[a, b]$ in $2n$ gelijke delen ter lengte $\frac{1}{2}h$.

De fout E_T van deze benaderingen is voor te stellen door resp.

$$E_T(h) = - \frac{1}{12} h^3 \sum_{j=0}^{n-1} f''(\xi_j) , \quad \xi_j \in (a+jh, a+(j+1)h) ,$$

$$E_T(\frac{1}{2}h) = - \frac{1}{12} (\frac{1}{2}h)^3 \sum_{j=0}^{2n-1} f''(\xi_j^*) , \quad \xi_j^* \in (a+\frac{1}{2}jh, a+\frac{1}{2}(j+1)h) .$$

Veronderstel nu dat f'' op elk der deelintervallen $(a+jh, a+(j+1)h)$ weinig varieert (voor kleine h is dit een reële veronderstelling), dan geldt bij benadering

$$f''(\xi_j) \approx f''(\xi_{2j}^*) \approx f''(\xi_{2j+1}^*) , \quad j = 0, 1, \dots, n-1 ,$$

waaruit volgt

$$E_T(h) \approx 4E_T(\frac{1}{2}h) .$$

Nu is

$$I = I(h) + E_T(h) , \quad I = I(\frac{1}{2}h) + E_T(\frac{1}{2}h) ,$$

en dus

$$I(\frac{1}{2}h) - I(h) = E_T(h) - E_T(\frac{1}{2}h) \approx 3E_T(\frac{1}{2}h) .$$

Daarmee is verkregen

$$E_T(\frac{1}{2}h) \approx \frac{1}{3} [I(\frac{1}{2}h) - I(h)]$$

als schatting voor de fout $E_T(\frac{1}{2}h)$ bij benadering van I door $I(\frac{1}{2}h)$.

Opmerkingen. 1) Op analoge wijze als boven kan men een realistische schatting geven voor de fout E_S bij toepassing van de samengestelde regel van Simpson.

2) De verkregen schatting voor $E_T(\frac{1}{2}h)$ vormt in het algemeen een "goede" benadering voor de fout. Bedenk daarbij dat een foutschatting in veel gevallen best 10 - 50% mis mag zijn. De schatting voor $E_T(\frac{1}{2}h)$ is geen zekere schatting, d.w.z. ze kan er helemaal naast zijn als niet voldaan is aan de voorwaarde dat f'' weinig varieert op de deelintervallen. In de praktijk van het numerieke rekenen komt dit echter slechts sporadisch voor.

Voorbeeld. Numerieke integratie van $\int_0^1 f(x)dx$, $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$.

Verdeel $[0,1]$ in deelintervallen van gelijke lengte h , waarbij achtereenvolgens $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1/8, 1/16$. Bereken met behulp van de samengestelde trapeziumregel de bijbehorende benadering $I(h)$ voor de integraal:

h	$I(h)$	$\frac{1}{3} [I(h) - I(2h)]$	$\frac{1}{12} M_2 h^2 = \frac{2}{3} h^2$
1	3.0000		0.6667
0.5	3.1000	0.0333	0.1667
0.25	3.1312	0.0104	0.0417
0.125	3.1390	0.0026	0.0104
0.0625	3.1409	0.0006	0.0026

In de derde en vierde kolom is een schatting voor de fout gegeven, gebaseerd op de voorgaande theorie. In dit geval blijkt na eenvoudige berekening $M_2 = \max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = 8$. Vergelijk $I(h)$ met de exacte waarde van de integraal: $I = \pi = 3.141592\dots$, dan blijkt de foutschatting volgens de derde kolom zeer goed te zijn, terwijl de schatting volgens de vierde kolom ongeveer viermaal de werkelijke fout is.

Hoofdstuk 3. Reeksen

3.1. Convergentie en divergentie

Eindig veel getallen a_1, \dots, a_N hebben een som, zeg S_N , d.w.z.

$$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N = \sum_{n=1}^N a_n .$$

Beschouw nu de rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en vorm de rij $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ van de zg. partiële sommen: $S_1 := a_1$, $S_2 := a_1 + a_2$, $S_3 := a_1 + a_2 + a_3$, enz.

De uitdrukking

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

noemen we een reeks; S_N heet de N-de partiële som van de reeks; de getallen a_n heten de termen van de reeks.

3.1.1. Definitie. Als $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ bestaat en gelijk is aan S dan heet de reeks

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ convergent met som S en we schrijven $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$; als $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ niet bestaat dan heet de reeks divergent en dan heeft hij geen som.

Voorbeelden. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n$ is divergent omdat $S_N = 1 + 2 + \dots + N = \frac{1}{2}N(N+1) \rightarrow \infty (N \rightarrow \infty)$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ (= $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$) heet meetkundige reeks.

$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1-r^N}{1-r}$ als $r \neq 1$. Als $|r| < 1$ is de reeks convergent met

som $\frac{1}{1-r}$ en als $|r| \geq 1$ is de reeks divergent.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, want

$$S_N = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{N(N+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}) = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1 \quad (N \rightarrow \infty).$$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ is divergent omdat

$$S_N = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}} \geq \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}.$$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, de harmonische reeks, is divergent.

$$S_{2^k} - S_{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k} \geq \frac{2^k - 2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}, \text{ dus}$$

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= S_1 + (S_2 - S_1) + (S_4 - S_2) + (S_8 - S_4) + \dots + (S_{2^n} - S_{2^{n-1}}) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \geq \\ &\geq 1 + \frac{n}{2} > \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt $S_N \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$).

6) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ is divergent.

De partiële sommen zijn nl. afwisselend 1 en 0, dus $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ bestaat niet.

7) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Voor de partiële sommen van deze reeks geldt

$$S_1 > S_3 > S_5 > \dots > 0 \text{ en}$$

$$S_2 < S_4 < S_6 < \dots < 1.$$

Volgens de grondeigenschap der reële getallen (1.4.11) bestaan de limieten

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N-1} =: S_o \text{ en } \lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N} =: S_e.$$

Omdat $S_{2N} - S_{2N-1} = \frac{-1}{2N}$ zijn S_o en S_e gelijk en convergeert de reeks.

Noemen we $S_o = S_e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} =: S$ dan blijkt bovendien dat

$$|S - S_N| < \frac{1}{N+1}. \text{ Later (3.4, voorbeeld 9) zullen we afleiden dat } S = \log 2.$$

3.1.2. Stelling. Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent is, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bewijs. $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S \quad (n \rightarrow \infty)$. □

N.B. We kunnen deze stelling alleen gebruiken om van sommige reeksen te bewijzen dat ze divergent zijn. De voorbeelden 4 en 5 laten zien dat uit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ niet geconcludeerd kan worden dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent is.

Opmerkingen. 1) Zijn de reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent, dan is voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ eveneens convergent en

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad (\text{Opgave: bewijs dit.})$$

2) Als we in een convergente (divergente) reeks een eindig aantal termen wijzigen dan is de zo gevormde reeks weer convergent (divergent); hetzelfde geldt voor het toevoegen of weglaten van eindig veel termen. (Opgave: bewijs dit.)

3) We noemden de termen van de reeks a_1, a_2, \dots . Soms is het handiger de

nummering van de termen met 0 te beginnen: $a_0 + a_1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Een van de eerste doeleinden die we nastreven is stellingen te bewijzen die ons in staat stellen tot convergentie of divergentie van een reeks te besluiten op grond van direct te controleren eigenschappen van de termen en met omzeiling van het vaak moeizame of zelfs ondoenlijke uitrekenen van de partiële sommen. De zojuist bewezen stelling 3.1.2 is een voorbeeld van een dergelijke stelling. In 3.2 en 3.3 zullen we een aantal van zulke stellingen bewijzen. Tot nog toe waren de termen van een reeks getallen; men kan ook reeksen beschouwen waarvan de termen functies zijn. In 3.4 bestuderen we een speciale klasse van zulke reeksen; de termen zijn daar functies van de gedaante $f_n(x) = a_n x^n$. De reeksen uit 3.4 heten machtreeksen; de partiële sommen van een machtreeks zijn polynomen. Tenslotte is 3.5 gewijd aan numerieke berekeningen in verband met reeksen.

3.2. Reeksen met uitsluitend niet negatieve termen

N.B. Alle reeksen in deze paragraaf hebben niet negatieve termen.

3.2.1. Stelling. Een reeks met niet negatieve termen is convergent dan en slechts dan als de rij van de partiële sommen begrensd is.

Bewijs. De rij van de partiële sommen is monotoon niet dalend zodat de stelling uit de grondeigenschap der reële getallen (1.4.11) volgt. \square

3.2.2. Stelling (integraalkenmerk). Laat $f(x)$ een continue, monotoon dalende, niet negatieve functie zijn op $[1, \infty)$, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ dan en slechts dan convergent als $\int_1^{\infty} f(x)dx$ convergent is.

Bewijs. Zij $I_N := \int_1^N f(x)dx$ ($N \in \mathbb{N}$) dan ziet men gemakkelijk dat

$\int_1^{\infty} f(x)dx$ dan en slechts dan convergent is als $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N$ bestaat.

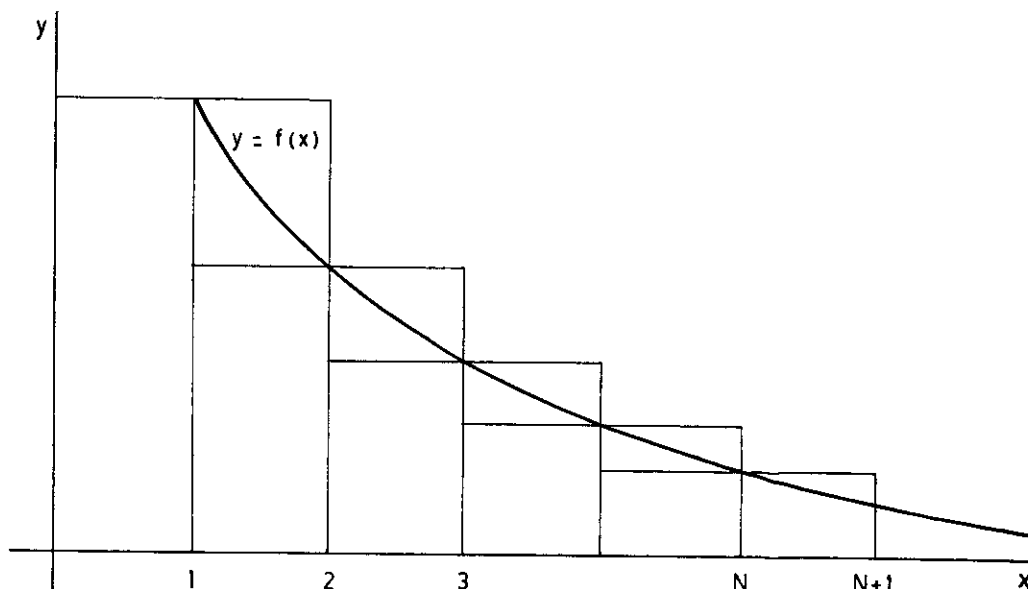
Zij $S_N := \sum_{n=1}^N f(n)$. De rijen I_1, I_2, I_3, \dots en S_1, S_2, S_3, \dots zijn beide

monotoon niet dalend. De begrensdheid (en dus convergentie) van een van beide heeft de begrensdheid van de andere tot gevolg omdat

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$$

en dus

$$I_{N+1} \leq S_N \leq f(1) + I_N \quad (\text{zie figuur}).$$



3.2.3. Stelling. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ is convergent als $p > 1$ en divergent als $p \leq 1$.

Bewijs. Voor $p \leq 0$ volgt de divergentie uit 3.1.2. Voor $p > 0$ passen we 3.2.2 toe met $f(x) = x^{-p}$, zie tevens 2.8, voorbeeld 7. □

3.2.4. Stelling (vergelijkingsstelling). Beschouw de reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

1) Als $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent is en $a_n \leq b_n$ o.d.d., dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent.

2) Als $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent is en $a_n \geq b_n$ o.d.d., dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Bewijs. 1) Stel $S_N := \sum_{n=1}^N a_n$, $T_N := \sum_{n=1}^N b_n$ en $T := \lim_{N \rightarrow \infty} T_N$.

Omdat $a_n \leq b_n$ vanaf zekere $N_1 \in \mathbb{N}$ en $T_N \leq T$ voor alle $N \in \mathbb{N}$ is

$S_N - S_{N_1} \leq T_N - T_{N_1}$ en $S_N \leq S_{N_1} + T - T_{N_1}$ voor alle $N \geq N_1$. De rij (S_N) is

dus begrensd. Uit 3.2.1 volgt nu de convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zou convergeren dan zou volgens 1) ook $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergeren;

tegenspraak. □

3.2.5. Gevolg. Indien voor de reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ geldt:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ bestaat en is $\neq 0$, dan zijn de reeksen beide convergent of beide

divergent.

Voorbeelden. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ is convergent, omdat $0 \leq \sin \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ voor alle

$n \in \mathbb{N}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergent is (3.2.3).

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan n)e^{-n}$ is convergent want $0 \leq (\arctan n)e^{-n} \leq \frac{1}{2}\pi e^{-n}$ en

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ is een convergente meetkundige reeks.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ is divergent want $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent.

Convergentiekenmerken voor reeksen met niet negatieve termen

3.2.6. Kenmerk van Cauchy:

Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, dan is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent als $\ell < 1$ en divergent als $\ell > 1$.

3.2.7. Kenmerk van d'Alembert:

Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, dan is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent als $\ell < 1$ en divergent als $\ell > 1$.

3.2.8. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ bestaat en $\neq 0$ is, dan is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent als $p > 1$ en divergent als $p \leq 1$.

Bewijzen. (3.2.6). Als $\ell < 1$ en $\rho := \frac{1}{2}(\ell+1)$ dan is o.d.d. $\sqrt[n]{a_n} < \rho < 1$,

dus $a_n \leq \rho^n$. Omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$ convergent is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent (3.2.4).

Als $\ell > 1$ dan is $1 < \rho < \ell$ en $\sqrt[n]{a_n} > \rho$ o.d.d., dus $a_n \geq \rho^n$ o.d.d. In dit geval is $a_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) en $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergent (3.1.2).

Opmerking. Als $\ell = 1$ of als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ niet bestaat, moeten we de convergentie op een andere manier onderzoeken. Voor de convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ zowel als voor de divergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is de limiet uit 3.2.6 gelijk aan 1.

(3.2.7). Als $\ell < 1$ en $\rho := \frac{1}{2}(\ell+1)$ dan is o.d.d. $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho < 1$, dus $\frac{a_{n+1}}{\rho^{n+1}} < \frac{a_n}{\rho^n}$.

De rij $\left\{ \frac{a_n}{\rho^n} \right\}$ is o.d.d. monotoon dalend. Er bestaat dan een constante C zodat o.d.d. $\frac{a_n}{\rho^n} \leq C$ oftewel $a_n \leq C\rho^n$. Door vergelijking met de convergente meetkundige reeks $C \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$ volgt het gestelde. Als $\ell > 1$ dan is o.d.d.

$a_{n+1} \geq \rho a_n$. Divergentie volgt nu uit 3.1.2.

Opmerking. Als $\ell = 1$ of als $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ niet bestaat, geeft het kenmerk van

d'Alembert geen uitsluitel. We verwijzen nogmaals naar de voorbeelden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ en } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ waarvoor de limiet uit 3.2.7 gelijk aan 1 is.}$$

(3.2.8). Combineer 3.2.5 en 3.2.3. □

Voorbeelden. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ is convergent volgens 3.2.7 omdat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! n^n}{n! (n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1 .$$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan n)^{-n}$ is convergent volgens 3.2.6 omdat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(\arctan n)^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\arctan n} = \frac{2}{\pi} < 1 .$$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ is convergent volgens 3.2.8 want $\frac{n^2}{n^2+1} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$). In dit voor-

beeld kan men de convergentie ook bewijzen door op te merken dat

$$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \text{ en 3.2.3 en 3.2.4 toe te passen, en ook door 3.2.2 te gebruiken}$$

$$\text{met } f(x) = \frac{1}{x^2+1} \text{ waarvoor } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi .$$

Opmerking. Voor reeksen waarvoor 3.2.8 tot een conclusie leidt, falen 3.2.7 en 3.2.6. Als voorbeeld van een reeks waarvoor ook 3.2.8 niet bruikbaar is

vermelden we $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$. Uit 3.2.2 en $\int_2^N \frac{dx}{x \log x} = \log \log N - \log \log 2 \rightarrow \infty$

($N \rightarrow \infty$) volgt dat de reeks divergent is.

3.3. Reeksen met zowel positieve als negatieve termen

Definitie. Een reeks van het type $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ waarin $a_n > 0$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, heet een alternerende reeks.

3.3.1. Stelling (Leibniz). Als de alternerende reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ voldoet aan

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$

(ii) $a_n \geq a_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N},$

dan is de reeks convergent en voor de som S geldt $0 \leq (-1)^N (S - S_N) \leq a_{N+1}$ voor alle $N \in \mathbb{N}.$

Bewijs. (Vergelijk 3.1, voorbeeld 7.) Voor de partiële sommen geldt:

$$S_1 \geq S_3 \geq S_5 \geq S_7 \geq \dots \geq 0.$$

$$S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq S_8 \leq \dots \leq a_1.$$

Volgens de grondeigenschap der reële getallen (1.4.11) bestaan de limieten $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N-1} =: S_o$ en $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N} =: S_e$. Omdat $S_{2N} - S_{2N-1} = -a_{2N}$ zijn S_o en S_e gelijk en convergeert de reeks. Men ziet gemakkelijk dat:

$$0 \leq (-1)^N (S - S_N) = a_{N+1} + (-a_{N+2} + a_{N+3}) + (-a_{N+4} + a_{N+5}) + \dots \leq a_{N+1}.$$

□

Voorbeeld 1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$ is convergent.

We beschouwen nu het algemene geval van reeksen met zowel positieve als negatieve termen.

3.3.2. Definitie. Een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ heet absoluut convergent indien $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ convergent is.

3.3.3. Stelling. Een absoluut convergente reeks is tevens convergent.

Bewijs. Laat $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ convergent zijn, dan is te bewijzen dat ook $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergent is, d.w.z. dat $S_N := \sum_{n=1}^N u_n$ naar een limiet nadert als $N \rightarrow \infty$.
Voer in de notaties

$$P_N := \sum_{n=1}^N |u_n|, \quad Q_N := \sum_{n=1}^N (u_n + |u_n|).$$

We schrijven $u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n|$, waaruit na sommatie volgt $S_N = Q_N - P_N$. Volgens het gegeven van de stelling is de rij (P_N) convergent, zeg $P_N \rightarrow P$ als $N \rightarrow \infty$. De rij (Q_N) is monotoon niet dalend wegens $u_n + |u_n| \geq 0$. De rij (Q_N) is tevens begrensd, immers

$$0 \leq Q_N = \sum_{n=1}^N (u_n + |u_n|) \leq 2 \sum_{n=1}^N |u_n| = 2P_N \leq 2P.$$

Daaruit volgt dat $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N$ bestaat.

Omdat $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N$ en $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N$ bestaan, bestaat ook $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$, i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is convergent. □

Uit 3.2.4 volgt onmiddellijk:

Stelling (vergelijkingsstelling). Als $|u_n| \leq v_n$ o.d.d. en $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ convergent is, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ absoluut convergent.

Voorbeelden. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n^2}$ is absoluut convergent (en dus convergent),

omdat $\left| (-1)^n \sin \frac{1}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergent is.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \cos n$ is absoluut convergent, omdat $|(\frac{1}{2})^n \cos n| \leq (\frac{1}{2})^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ convergent is.

Opmerking. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ is wel convergent maar niet absoluut convergent. Dergelijke reeksen noemt men relatief convergent.

Als we van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ weten dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$ is of $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$ is, dan volgt uit 3.2.6 of 3.2.7 dat $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ absoluut convergent is, en daarna uit 3.3.3 dat $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergent is. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} > 1$ of $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$, dan volgt uit 3.2.6 of 3.2.7 dat $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ divergent is. Ook de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ zelf is divergent omdat in beide gevallen u_n niet naar 0 nadert als $n \rightarrow \infty$ (3.1.2). Deze opmerking maakt duidelijk hoe de convergentiekenmerken van Cauchy en d'Alembert gebruikt kunnen worden bij reeksen met zowel positieve als negatieve termen.

3.3.4. Stelling (Cauchy-product). Zijn de reeksen $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ absoluut convergent met som S resp. T, dan is de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right) \quad (1)$$

absoluut convergent met som ST.

(De reeks (1) heet het Cauchy-product van $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.)

Het bewijs van deze stelling wordt achterwege gelaten.

3.4. Machtreeksen

Een reeks van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heet een machtreeks. We onderzoeken voor welke waarden van x deze reeks convergeert resp. divergeert. Elke machtreeks is convergent voor $x = 0$. We spreken namelijk af: $0^0 = 1$, zodat

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \text{ voor } x = 0.$$

3.4.1. Stelling. Als een machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergent is voor $x = \xi \neq 0$, dan is de reeks absoluut convergent voor alle x met $|x| < |\xi|$.

Bewijs. Omdat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ convergent is, is $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \xi^n = 0$. De rij $(a_n \xi^n)$ is dus begrensd, d.w.z. er bestaat een $M > 0$ zodat $|a_n \xi^n| \leq M$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$.

Dan is $|a_n x^n| = |a_n \xi^n| |x/\xi|^n \leq M |x/\xi|^n$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$. Omdat $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{\xi} \right|^n$ convergent is voor $|x| < |\xi|$, volgt dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absoluut convergent is voor $|x| < |\xi|$. □

Gevolg. Bij de convergentie van machtreeksen doen zich drie mogelijkheden voor.

- 1) De machtreeks is convergent alleen voor $x = 0$ en divergent voor alle $x \neq 0$.
- 2) De machtreeks is absoluut convergent voor alle x .
- 3) Er bestaat een getal $R > 0$ zó dat de machtreeks absoluut convergent is voor $|x| < R$ en divergent voor $|x| > R$. De existentie van een dergelijke R berust op de voorgaande stelling en de stelling van het intervallen-nest (1.4.12). We laten het bewijs achterwege.

Het getal R heet de convergentiestraal van de machtreeks. In de gevallen 1) en 2) stellen we $R = 0$ resp. $R = \infty$.

Er is geen algemene uitspraak te doen over de convergentie of divergentie van een machtreeks voor $x = \pm R$; deze dient bij elk voorbeeld apart onderzocht te worden.

3.4.2. Stelling. Laat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een convergentiestraal R hebben.

- 1) Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$, dan is $R = \frac{1}{\ell}$ als $\ell \neq 0$ en $R = \infty$ als $\ell = 0$ ($R = 0$ als $\ell = \infty$).
- 2) Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$, dan is $R = \frac{1}{\ell}$ als $\ell \neq 0$ en $R = \infty$ als $\ell = 0$ ($R = 0$ als $\ell = \infty$).

Bewijs. Het bewijs is eenvoudig te geven met behulp van 3.2.6, 3.2.7, ga dit na. □

Voorbeelden. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ is absoluut convergent voor $|x| < 1$ en divergent voor $|x| > 1$, dus $R = 1$. Voor $x = \pm 1$ is de reeks divergent.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ is absoluut convergent voor $|x| < 1$, wegens $|x^{n^2}| \leq |x|^n$ voor $|x| < 1$; derhalve is $R \geq 1$. Omdat de reeks divergent is voor $x = 1$, is ook $R \leq 1$, zodat $R = 1$. De reeks is ook divergent voor $x = -1$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$ heeft een convergentiestraal $R = e$ omdat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e}.$$

Voor $x = \pm e$ is de reeks divergent want

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} e^n = \left[\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}\right]^n > 1.$$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ heeft een convergentiestraal $R = 1$ omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Voor $x = 1$ is de reeks divergent, voor $x = -1$ relatief convergent.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ is convergent alleen voor $x = 0$ en divergent voor alle $x \neq 0$.

Laat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een convergentiestraal R hebben, dan is de reeks convergent voor $|x| < R$. De som is een functie van x die we noteren als

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

3.4.3. Stelling (termsgewijs differentiëren). De machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ hebben dezelfde convergentiestraal, R te noemen.

Zij $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ voor $|x| < R$, dan is S differentieerbaar op $(-R, R)$ met afgeleide $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Deze stelling bewijzen we niet.

De stelling drukt uit dat we een machtreeks binnen zijn convergentie-interval $(-R, R)$ termsgewijs mogen differentiëren.

Een onmiddellijk gevolg van 3.4.3 is dat de som S willekeurig vaak differentieerbaar is op $(-R, R)$. De k -de afgeleide $S^{(k)}$ wordt verkregen door termsgewijze differentiatie:

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

Een direct gevolg is ook de volgende stelling.

3.4.4. Stelling (termsgewijs integreren). Laat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een convergentiestraal R hebben, dan geldt voor $|x| < R$:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Voorbeelden. 6) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ heeft een convergentiestraal $R = 1$.

Voor $|x| < 1$ geldt dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ heeft een convergentiestraal $R = 1$.

Noem de som $S(x)$ dan is voor $|x| < 1$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}.$$

Integreer $S'(x)$ dan volgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t) dt = \log(1+x),$$

geldig voor $|x| < 1$; vergelijk met 2.6, voorbeeld 4.

8) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ heeft een convergentiestraal $R = 1$.

Noem de som $S(x)$ dan is voor $|x| < 1$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Integreer $S'(x)$ dan volgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t) dt = \arctan x,$$

geldig voor $|x| < 1$.

3.4.5. Stelling. Zij de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ resp. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ absoluut convergent voor $|x| < R_1$ resp. $|x| < R_2$, met som $S_1(x)$ resp. $S_2(x)$. Dan is de productreeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ waarin $c_n := \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$, absoluut convergent voor $|x| < \min(R_1, R_2)$ met som $S_1(x)S_2(x)$.

Bewijs. De stelling volgt eenvoudig uit 3.3.4. □

Zonder bewijs vermelden we nog de volgende stelling over de som van een machtreeks in een randpunt van het convergentie-interval.

3.4.6. Stelling (Abel). Laat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een convergentiestraal R hebben en zij $S(x)$ de som van de reeks. Als de reeks convergent is voor $x = R$, dan geldt: $\lim_{x \uparrow R} S(x) = S(R)$.

Uit 3.4.3, 3.4.6 en 2.5.2 volgt dat de som van een machtreeks continu is in elk punt waar de reeks convergeert.

Voorbeelden. 9) Volgens voorbeeld 7 is voor $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \log(1+x).$$

De machtreeks is ook nog convergent voor $x = 1$ (zie 3.1, voorbeeld 7), zodat

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

10) Volgens voorbeeld 8 is voor $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x.$$

De machtreeks is ook nog convergent voor $x = \pm 1$, zodat

$$\frac{1}{4} \pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Als de functie f willekeurig vaak differentieerbaar is in een omgeving van a dan heet de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ de Taylorontwikkeling van f rond a of Taylorreeks.

3.4.7. Stelling. Zij f willekeurig vaak differentieerbaar op $(a-l, a+l)$ en zij M_N het globale maximum van $f^{(N)}$ op $I := [a-\rho, a+\rho]$ waarbij $0 < \rho < l$.

Als $\lim_{N \rightarrow \infty} \rho^N M_N / N! = 0$ dan is de Taylorreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

convergent op I met som $f(x)$.

Bewijs. Volgens de stelling van Taylor (2.6.10) geldt voor elke $N \in \mathbb{N}$ en elke $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_N,$$

waarin

$$R_N = \frac{f^{(N+1)}(a+\theta(x-a))}{(N+1)!} (x-a)^{N+1}$$

voor zekere $\theta \in (0,1)$. Voor $x \in I$ is dan $|R_N| \leq \rho^{N+1} M_{N+1} / (N+1)!$, dus $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$. Daaruit volgt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

voor alle $x \in I$. □

Voorbeelden. 11) De functie $f(x) = e^x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op \mathbb{R} met $f^{(N)}(x) = e^x$ voor $N = 0, 1, 2, \dots$. Zij $\rho > 0$, dan is $|f^{(N)}(x)| \leq e^\rho$ voor alle $x \in I := [-\rho, \rho]$. Omdat $\lim_{N \rightarrow \infty} \rho^N e^\rho / N! = 0$, is de Taylorontwikkeling van e^x rond 0 convergent op I met som e^x . Aangezien ρ willekeurig te kiezen is, geldt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$; zie ook 2.6, voorbeeld 1.

12) De functie $f(x) = \sin x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op \mathbb{R} met $f^{(N)}(x) = \sin(x + \frac{1}{2}N\pi)$, zie 2.6, voorbeeld 2. Nu is $|f^{(N)}(x)| \leq 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Omdat $\lim_{N \rightarrow \infty} \rho^N / N! = 0$ voor elke $\rho > 0$, is de Taylorreeks van $\sin x$ convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$, i.e.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

13) Op grond van 3.4.3 is

$$\begin{aligned} \cos x &= (\sin x)' = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$; zie ook 2.6, voorbeeld 3.

14) De functie $f(x) = (1+x)^\mu$ is willekeurig vaak differentieerbaar op $(-1, \infty)$ met $f^{(k)}(x) = \mu(\mu-1) \dots (\mu-k+1)(1+x)^{\mu-k}$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$. Voer nu in de notatie

$$\binom{\mu}{0} := 1, \quad \binom{\mu}{k} := \frac{\mu(\mu-1) \dots (\mu-k+1)}{k!} \quad \text{voor } k \in \mathbb{N},$$

uit te spreken als " μ over k "; voor $\mu = n$, n geheel, $n \geq k$, stemt deze notatie overeen met de binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k}$ ingevoerd in 1.3. Dan is $f^{(k)}(0) = k! \binom{\mu}{k}$ en met behulp van de stelling van Taylor (2.6.10) volgt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^N \binom{\mu}{k} x^k + R_N$$

voor alle $x > -1$. Men kan nu bewijzen (met behulp van een meer verfijnde formule voor de restterm R_N) dat $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$ voor $|x| < 1$. We vinden dus de volgende Taylorontwikkeling

$$(1+x)^\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} x^k = 1 + \frac{\mu}{1!} x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!} x^3 + \dots,$$

geldig voor $|x| < 1$.

Deze reeks heet de binomiaalreeks. Indien $\mu = n$ met $n = 0, 1, 2, \dots$, breekt de binomiaalreeks af na de term met $k = n$ en gaat de reeks over in het binomium van Newton (1.3.7).

15) Zij $f(x) = \arcsin x$, dan is

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n},$$

geldig voor $|x| < 1$.

Integreer termsgewijs (3.4.4) dan volgt

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1} = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots,$$

geldig voor $|x| < 1$.

Zij $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ voor $|x-a| < R$, dan is $a_n = \frac{S^{(n)}(a)}{n!}$. Immers door termsgewijze differentiatie volgt:

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-a)^{n-k},$$

dus $S^{(k)}(a) = k! a_k$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$.

We zien hieruit dat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ de Taylorontwikkeling van zijn som S rond a is.

We geven nog enkele voorbeelden van Taylorontwikkelingen rond een punt verschillend van 0.

Voorbeelden. 16) De Taylorontwikkeling van $\sin x$ rond π wordt gegeven door

$$\sin x = -\sin(x-\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (x-\pi)^{2n+1},$$

geldig voor alle $x \in \mathbb{R}$.

17) De Taylorontwikkeling van $\log(4+x)$ rond 1 wordt gegeven door:

$$\log(4+x) = \log(5+x-1) = \log 5 + \log\left(1 + \frac{x-1}{5}\right) = \log 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n n} (x-1)^n,$$

geldig voor alle x met $|x-1| < 5$.

3.4.8. Berekening van limieten met behulp van machtreeksen. Laat de machtreeks

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een convergentiestraal R hebben, dan heeft ook $\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^{n-k}$ een convergentiestraal R . Voorts geldt op grond van continuïteit:

$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=k}^{\infty} a_n x^{n-k} = \lim_{x \rightarrow 0} (a_k + a_{k+1}x + a_{k+2}x^2 + \dots) = a_k$. Deze resultaten worden herhaaldelijk toegepast bij de berekening van limieten met behulp van machtreeksen.

Voorbeelden. 18)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \dots}{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \dots} = 1.$$

19)
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots) - x(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots)}{x^3 (1 - \frac{x^2}{2!} + \dots)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \dots}{x^3 (1 - \frac{x^2}{2} + \dots)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x) + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + \dots}{x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin x}{3!} + \dots \right) = \\
 &= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

3.5. Numerieke sommatie van reeksen

De som S van een convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is niet altijd in gesloten vorm te berekenen. Evenwel, elke partiële som $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$ is te gebruiken als numerieke benadering voor S . Bij deze benadering maken we een fout, de zg. afbreekfout $E := S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$. Aan de hand van voorbeelden introduceren we vier methoden om de afbreekfout te schatten:

- Maak gebruik van een expliciete formule voor E . In het geval van een Taylorreeks bijv. kan de formule voor de restterm (zie 2.6.10) als zodanig gebruikt worden.
- Vergroot de termen van de reeks $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ zodanig dat er een meetkundige reeks ontstaat.
- Geef een schatting voor $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ door middel van een integraal.
- In het geval van een altemerende reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ en $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, geldt: $0 \leq (-1)^N (S - S_N) \leq a_{N+1}$; zie 3.3.1.

Voorbeelden. 1) Bereken e met een fout van ten hoogste 10^{-4} .

Uitgaande van 2.6, voorbeeld 1 is

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{N!} + \frac{e^\theta}{(N+1)!}$$

voor zekere $\theta \in (0,1)$. Nu is $e^\theta < e < 3$ en we kiezen N zodanig dat

$$\frac{3}{(N+1)!} < 10^{-4} \text{ is. Hieraan is voldaan als } N = 7.$$

We vinden dan als benadering voor e:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = \frac{13700}{5040}$$

met een fout van ten hoogste $\frac{3}{40320}$.

Vaak vervangt men de gewone breuk door een decimale breuk, dus bijv. $\frac{13700}{5040}$ door 2,71825. Bij deze vervanging wordt meestal nog een afroundingsfout gemaakt. Door de decimale breuk op te geven in een voldoende aantal decimalen, kan men zorgen dat de afrondingsfout kleiner is dan de afbreekfout.

2) Bereken $\log 0.9$.

Met behulp van de reeksontwikkeling voor $\log(1+x)$ (3.4, voorbeeld 7) volgt

$$\log \frac{9}{10} = \log\left(1 - \frac{1}{10}\right) = -\left[\frac{1}{10} + \frac{1}{2 \cdot 10^2} + \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{4 \cdot 10^4} + \dots\right].$$

Breek de reeks af na de tweede term dan vinden we als benadering:

$\log 0.9 \approx -\frac{1}{10} - \frac{1}{200} = -0.105$, met afbreekfout E te schatten volgens

$$|E| = \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{4 \cdot 10^4} + \dots < \frac{1}{3} \left[\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \dots \right] = \frac{1}{2700}.$$

3) Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ met een fout van ten hoogste 10^{-2} .

Breek de reeks af na N termen dan geldt voor de afbreekfout (vergelijk met het bewijs van 3.2.2),

$$\frac{1}{2(N+1)^2} = \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^3} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{1}{(N+1)^3} + \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{(N+1)^3} + \frac{1}{2(N+1)^2}.$$

Als we de som van de reeks benaderen door S_N dan is de afbreekfout E ten hoogste $\frac{1}{(N+1)^3} + \frac{1}{2(N+1)^2}$. Een betere benadering voor de som wordt gegeven

gegeven door $S_N + \frac{1}{2(N+1)^3} + \frac{1}{2(N+1)^2}$; voor de fout geldt nu $|E| < \frac{1}{2(N+1)^3}$.

Nemen we bijv. $N = 4$ dan volgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{250} + \frac{1}{50} = 1.202,$$

met foutschatting $|E| < \frac{1}{250}$.

4) Uit de reeksontwikkeling voor $\arctan x$ (3.4, voorbeeld 8) volgt

$$\arctan \frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{5 \cdot 10^5} - \frac{1}{7 \cdot 10^7} + \dots$$

Bij afbreken na de derde term is $-\frac{1}{7} \cdot 10^{-7} \leq E \leq 0$ op grond van 3.3.1.

Afspraak. Zij S de som van een convergente reeks. De berekening van S in p decimalen zal als volgt worden uitgevoerd:

- 1) Breek de reeks af zodanig dat de absolute waarde van de afbreekfout ten hoogste $\frac{1}{2} \cdot 10^{-p}$ is.
- 2) Bepaal de aldus verkregen partiële som door in $p+1$ decimalen te rekenen (de extra decimaal dient om de invloed van afrondingsfouten verwaarloosbaar te maken; zonodig kan in meer extra decimalen worden gerekend).
- 3) Rond het verkregen resultaat af op p decimalen; hierbij treedt een afrondingsfout op van ten hoogste $\frac{1}{2} \cdot 10^{-p}$.

Indien de afrondingsfouten geïntroduceerd onder 2) verwaarloosbaar zijn t.o.v. de fouten gemaakt onder 1) en 3), dan heeft de aldus berekende waarde van S een fout van ten hoogste 10^{-p} .

Voorbeelden. 5) Bereken $\sin \frac{1}{10}$ in 5 decimalen.

Breek de reeksontwikkeling voor $\sin \frac{1}{10}$ af na twee termen, dan is

$$\sin \frac{1}{10} \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{3! \cdot 10^3} = \frac{599}{6000} = 0.099833,$$

met een afbreekfout van ten hoogste $\frac{10^{-5}}{5!} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$.

Dus $\sin \frac{1}{10} = 0.09983$ met een fout $\leq 10^{-5}$.

6) Ga uit van de betrekking $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \arctan 1 = \frac{1}{4} \pi$.

Met behulp van de reeksontwikkeling voor $\arctan x$ (3.4, voorbeeld 8) volgt

$$\frac{1}{4} \pi = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right) + \frac{1}{5} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^5\right) - \frac{1}{7} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{3}\right)^7\right) + \dots$$

Breek de reeks af na de derde term dan vinden we als benadering voor π :

$$\pi \approx 2 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right) + \frac{4}{5} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^5\right) = 3.146,$$

met een afbreekfout van ten hoogste $\frac{4}{7} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{3}\right)^7\right) = 0.0047 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$.

Dus $\pi = 3.15$ met een fout ≤ 0.01 .

Opmerking 1. Voor de praktische berekening van logaritmen is de reeksontwikkeling van $\log(1+x)$ (3.4, voorbeeld 7) niet erg geschikt, omdat de reeks alleen snel convergeert voor kleine waarden van $|x|$.

Door aftrekken van de reeksen

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots,$$

volgt

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right],$$

geldig voor $|x| < 1$. Stel hierin $x = \frac{1}{2y+1}$, dan vinden we

$$\log(y+1) = \log y + 2\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \dots\right],$$

geldig voor $y > 0$. De laatste reeksontwikkeling is zeer geschikt om uitgaande van een bekende waarde $\log y$ vervolgens $\log(y+1)$ te berekenen.

Voorbeeld 7. Bereken $\log 2$ in 2 decimalen.

Met behulp van de hierboven afgeleide reeksontwikkeling volgt

$$\log 2 = \log 1 + 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots\right].$$

Breek de reeks af na de tweede term dan is de afbreekfout E te schatten volgens

$$E = 2\left[\frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots\right] < \frac{2}{5}\left[\frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^7} + \dots\right] = \frac{1}{540} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}.$$

We vinden nu de volgende benadering voor $\log 2$:

$$\log 2 \approx \frac{2}{3} + \frac{2}{81} = 0.691,$$

dus $\log 2 = 0.69$ met een fout ≤ 0.01 ; nauwkeuriger onderzoek leert dat de fout ≤ 0.004 is.

Opmerking 2. Laat S de te berekenen som zijn van een convergente reeks

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Zij $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ een tweede reeks met bekende som en met de eigenschap dat $|u_n - v_n|$ klein is ten opzichte van $|u_n|$. In dat geval is S te benaderen

door $\sum_{n=1}^{\infty} v_n + \sum_{n=1}^N (u_n - v_n)$; deze benadering zal veelal nauwkeuriger zijn dan de benadering door de partiële som $\sum_{n=1}^N u_n$.

Voorbeeld 8. De som $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is nauwkeuriger te benaderen door eerst de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})}$ met som 2, af te trekken. Als benadering voor S vinden

$$\text{we dan: } 2 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} \right) = 2 - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2 (n^2 - \frac{1}{4})},$$

met afbreekfout

$$\frac{1}{4} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n^2 - \frac{1}{4})} < \frac{1}{4(N+1)^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4(N+1)^2 (N+\frac{1}{2})}.$$

Hoofdstuk 4. Complexe getallen

4.1. Inleiding

In de verzameling der reële getallen heeft de vergelijking $x^2 = -1$ geen oplossing. Op zichzelf hoeft dit feit nog geen aanleiding te zijn tot het ontwerpen van een nieuw getalsysteem. Maar al in de 16^e eeuw werd ontdekt, dat men, rekenend met een uitbreiding van het systeem der reële getallen, allerlei resultaten kon afleiden, die zonder deze nieuwe getallen niet of slechts met veel moeite te verkrijgen waren. Het bekendste voorbeeld vormen de formules van Cardano voor de wortels van een derdegraadsvergelijking. In tegenstelling tot de reële (= werkelijke) getallen, noemde men de nieuwe getallen imaginair (= denkbeeldig). Wij zullen om redenen, die na 4.2 vanzelfsprekend zullen zijn, de naam complexe getallen gebruiken. Het heeft geruime tijd geduurd voor men een mathematisch bevredigende beschrijving van de invoering van de complexe getallen gegeven heeft. De eerste geslaagde poging daartoe van Argand (± 1800) bleef onopgemerkt. Eerst na een publicatie van Gauss uit 1831 werd een goed gefundeerde opbouw van het complexe getallensysteem algemeen bekend.

4.2. Invoering der complexe getallen

We gaan uit van de twee-dimensionale ruimte \mathbb{R}^2 (zie 1.5). In dit hoofdstuk zullen we de elementen van \mathbb{R}^2 complexe getallen noemen. Een complex getal is dus een vector (a,b) , waarin a en b reële getallen zijn. De vector $(1,0)$ zullen we aangeven met 1 , de vector $(0,1)$ met i . Omdat we de vectoren als getallen zullen behandelen, laten we de onderstrepingen weg. De relatie $(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a1 + bi$ schrijven we als $(a,b) =: a + ib$. In het bijzonder schrijven we $(a,0) = a$. Dit houdt in, dat we de x -as in \mathbb{R}^2 identificeren met de reële getallenrechte \mathbb{R} . We zeggen dan ook dat $(a,0) = a$ een reëel getal is. Een getal van de gedaante $(0,b) = ib$ noemen we zuiver imaginair. Van een willekeurig getal $z = a + ib$ noemen we a het reële deel (notatie $a =: \operatorname{Re} z$) en b het imaginaire deel ($b =: \operatorname{Im} z$); bedenk dat $\operatorname{Im} z$ een reëel getal is! Twee complexe getallen z_1 en z_2 zijn gelijk, i.e. $z_1 = z_2$, als $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ en $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$. De verzameling der complexe getallen wordt in het vervolg aangegeven als \mathbb{C} (i.p.v. \mathbb{R}^2). Complexe getallen zijn meetkundig voor te stellen door punten in een vlak, het zgn. complexe vlak. Het getal $a + ib$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$) wordt voorgesteld door het punt met cartesische

coördinaten $x = a$, $y = b$ (dit punt is tevens eindpunt van de vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$). Verder noemen we de x -as de reële as en de y -as de imaginaire as in het complexe vlak.

In \mathbb{C} kunnen evenals in \mathbb{R} rekenkundige bewerkingen worden ingevoerd. Voor vectoren in \mathbb{R}^2 is al een optelling gedefinieerd. Deze zullen we handhaven, als we de vectoren als complexe getallen beschouwen:

4.2.1. Definitie. Als $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$), dan is

$$z_1 + z_2 := (a + c) + i(b + d) .$$

Verder zullen we in \mathbb{C} een vermenigvuldiging definiëren, hetgeen niet gebeurd is in \mathbb{R}^2 . Bij de definitie van de vermenigvuldiging gaan we uit van de volgende eisen:

- a) Voor reële getallen blijft de vermenigvuldiging zoals deze reeds bekend is.
- b) De voor de vermenigvuldiging van reële getallen bekende rekenregels blijven gelden ($z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$, enz.).
- c) $i^2 = -1$.

Als we deze voorwaarden toepassen bij de berekening van z_1z_2 met $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$, vinden we:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc) . \end{aligned}$$

Zo komen we tot de volgende definitie.

4.2.2. Definitie. Als $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$), dan is

$$z_1z_2 := (ac - bd) + i(ad + bc) .$$

Het is gemakkelijk in te zien, dat deze vermenigvuldiging inderdaad aan de gestelde eisen voldoet. De in b) geëiste rekenregels kunnen als volgt worden samengevat:

4.2.3. Stelling.

- 1) $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$
- 2) $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- 3) $1z = z, 0z = 0$
- 4) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Opmerking. In \mathbb{R}^2 is ook een scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd, d.w.z. een vermenigvuldiging van een reëel getal met een vector. Als we in 4.2.2 aannemen dat z_1 reëel is (d.w.z. $b = 0$) dan volgt onmiddellijk $z_1 z_2 = az_2 = ac + iad$, hetgeen overeenkomt met scalaire vermenigvuldiging.

In \mathbb{C} kan ook een deling worden gedefinieerd. Eerst laten we zien dat bij elk getal $z_1 = a + ib$ met $z_1 \neq 0$ er precies één getal $z_2 = x + iy$ bestaat met de eigenschap $z_1 z_2 = 1$. De vergelijking $z_1 z_2 = 1$ luidt $(a + ib)(x + iy) = 1$, dus

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 0. \end{aligned}$$

Als $z_1 \neq 0$, dan heeft dit stelsel een eënduidige oplossing:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

4.2.4. Definitie. 1) Als $z = a + ib \neq 0$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$), dan is

$$\frac{1}{z} := \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

2) Als $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \neq 0$, dan is

$$\frac{z_2}{z_1} := z_2 \cdot \frac{1}{z_1}.$$

Het is gemakkelijk in te zien dat z_2/z_1 de eënduidige oplossing is van de vergelijking $z_1 z = z_2$ in z . Ook kan men verifiëren dat voor reële getallen de deling overeenkomt met de reeds in \mathbb{R} bekende deling.

Een vector in \mathbb{R}^2 kan men behalve door cartesische coördinaten ook beschrijven met behulp van poolcoördinaten (zie 1.6.1): $\underline{x} = (a, b) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, waarin $r = |\underline{x}|$ de lengte van \underline{x} voorstelt en φ de hoek die de vector \underline{x} met de positieve x-as maakt. In de notatie van de complexe getallen schrijft men

$$z = r \cos \varphi + i(r \sin \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) .$$

Men noemt r de modulus of de absolute waarde van z (notatie $r =: |z|$), en φ het argument van z (notatie $\varphi =: \arg z$). Als $z = a + ib$, dan is dus $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Opmerkingen. 1) Voor het getal 0 wordt geen argument gedefinieerd.

2) Het argument φ van een complex getal z is slechts bepaald op veelvoud van 2π na. Een van de waarden van φ voldoet aan de eis $-\pi < \varphi \leq \pi$. Deze waarde heet de hoofdwaarde van het argument van z .

De volgende stelling is eenvoudig te bewijzen.

4.2.5. Stelling. Als $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, dan is

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \} .$$

Als verder $r_2 \neq 0$, dan is

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \} .$$

Gevolg. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$;

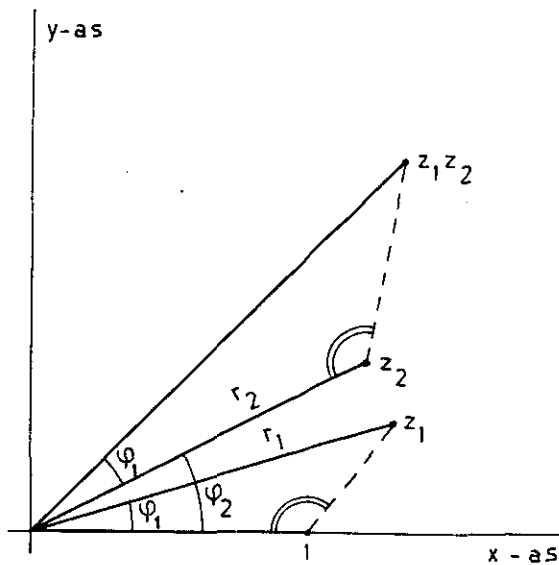
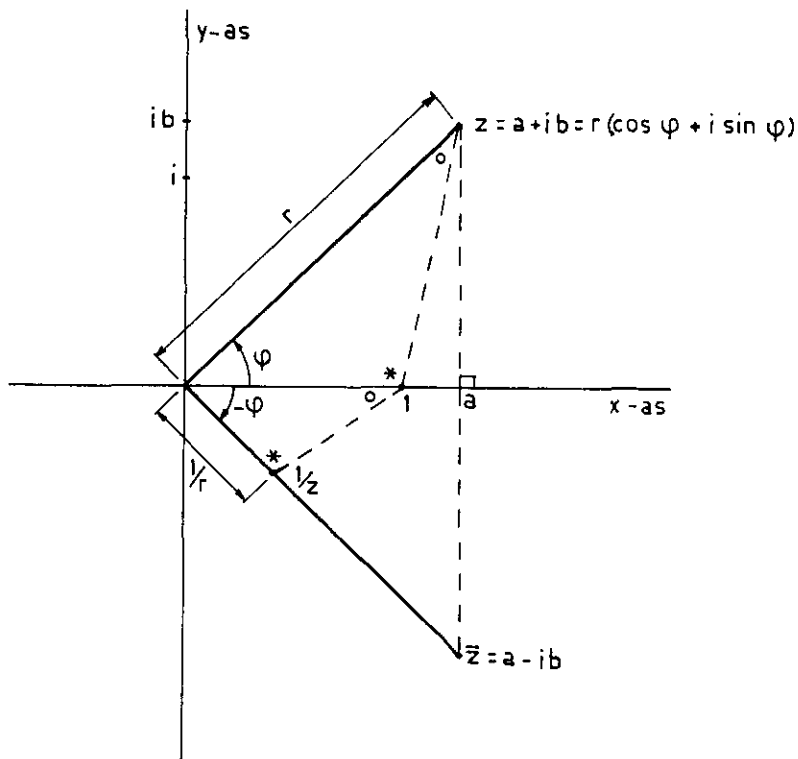
$$|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2| , \arg(z_1 / z_2) = \arg z_1 - \arg z_2 .$$

4.2.6. Definitie. Als $z = a + ib$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$), dan heet

$$\bar{z} = a - ib$$

de complex geconjugeerde van z .

In de navolgende figuren wordt de meetkundige betekenis van de verschillende begrippen geïllustreerd.



De volgende eigenschappen zijn gemakkelijk te bewijzen.

4.2.7. Stelling. Als $z \in \mathbb{C}$, $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$, dan geldt:

- 1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$,
- 2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- 3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$, $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$ mits $z_2 \neq 0$,
- 4) $\overline{\overline{z}} = z$,
- 5) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$,
- 6) $(z = \overline{z}) \iff (z \text{ is reëel})$,
- 7) $|\overline{z}| = |z|$, $\arg \overline{z} = -\arg z$,
- 8) $z \overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$.

Voorbeelden.

- 1) $(4 + 3i) + (5 - 4i) = 9 - i$;
- 2) $(4 + 3i) - (5 - 4i) = -1 + 7i$;
- 3) $(4 + 3i)(5 - 4i) = 32 - i$;
- 4) $\frac{4 + 3i}{5 - 4i} = \frac{8}{41} + \frac{31}{41}i$;
- 5) $(4 + 3i)\overline{(5 - 4i)} = 8 + 31i$;
- 6) $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^{4k} = 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) (N.B. $i^0 := 1$);
- 7) $\operatorname{Re}(3 + 2i) = 3$, $\operatorname{Im}(3 + 2i) = 2$ (niet $2i$), $\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$,
 $|3 + 2i| = \sqrt{13}$, $\arg(3 + 2i) = \arctan \frac{2}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);
- 8) $1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$;
- 9) $[\sqrt{r}(\cos \frac{1}{2}\varphi + i \sin \frac{1}{2}\varphi)]^2 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Door middel van volledige inductie volgt uit 4.2.5 dat

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hieruit volgt de formule van De Moivre

4.2.8. $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi .$

Het is gemakkelijk in te zien dat het binomium van Newton:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

ook geldt voor complexe getallen. Het bewijs gegeven in 1.3.7 kan nl. letterlijk worden overgenomen.

Combinatie van de binomiaalformule en de formule van De Moivre geeft een gemakkelijk methode om $\cos n\varphi$ en $\sin n\varphi$ uit te drukken in machten van $\cos \varphi$ en $\sin \varphi$.

Voorbeeld.

10) $\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 =$
 $= \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi .$

Splitsing in het reële en imaginaire deel geeft:

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi ,$$

$$\sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi .$$

4.3. Complexe polynomen, algebraïsche vergelijkingen

Analoog aan 2.2.1 is:

4.3.1. Definitie. Een complex polynoom is een functie $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die we als volgt kunnen schrijven:

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 ,$$

waarin a_0, a_1, \dots, a_n complexe getallen zijn en $a_n \neq 0$. Deze getallen worden coëfficiënten genoemd. Het gehele getal $n \geq 0$ heet de graad van het polynoom (notatie $gr(p)$).

Een aantal definities en eigenschappen uit 2.2 kunnen zonder meer worden overgedragen op complexe polynomen. Zo heet $z_0 \in \mathbb{C}$ een nulpunt van p als $p(z_0) = 0$. Voor complexe polynomen geldt ook de reststelling (zie 2.2, voorbeeld 4): Als $p(z_0) = 0$, dan bestaat er een complex polynoom $q(z)$ zodat $p(z) = (z - z_0)q(z)$.

Analoog aan 2.2.3 definiëren we:

- 4.2.3. Definitie. Het getal $z_0 \in \mathbb{C}$ heet een k-voudig nulpunt (òf: nulpunt met multipliciteit k) van een complex polynoom p , indien er een complex polynoom q bestaat met $q(z_0) \neq 0$ en $p(z) = (z - z_0)^k q(z)$.

De volgende belangrijke eigenschap van complexe polynomen geldt niet voor polynomen als beschouwd in 2.2.

- 4.3.3. Stelling (hoofdstelling van de algebra). Een complex polynoom met positieve graad heeft tenminste één nulpunt.
We zullen deze stelling niet bewijzen.

Uit 4.3.3 volgt:

- 4.3.4. Stelling. Zij $p(z)$ een complex polynoom met $\text{gr}(p) = n$, $n \geq 1$, en met coëfficiënt van z^n gelijk aan a . Dan is $p(z)$ te ontbinden in lineaire factoren:

$$p(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Bewijs. We bewijzen de stelling door volledige inductie naar n .

In geval $n = 1$ is $p(z) = az + b$ en de ontbinding wordt: $p(z) = a(z + b/a)$.

Veronderstel nu dat de stelling juist is voor polynomen met graad $n - 1$.

Zij $p(z)$ een complex polynoom met $\text{gr}(p) = n$ en met coëfficiënt van z^n gelijk aan a . Volgens 4.3.3 heeft $p(z)$ dan tenminste één nulpunt, z_n te noemen. Uit de reststelling volgt dat er een complex polynoom $q(z)$ bestaat zodat

$p(z) = (z - z_n)q(z)$. Het polynoom $q(z)$ is van de graad $n - 1$ en de coëfficiënt van z^{n-1} is gelijk aan a . Op grond van de inductieveronderstelling is $q(z)$ dan te ontbinden in lineaire factoren: $q(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{n-1})$.

Daaruit volgt: $p(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$. \square

De getallen z_1, z_2, \dots, z_n optredend in de ontbinding van $p(z)$, zijn juist de nulpunten van $p(z)$. Deze nulpunten hoeven niet alle verschillend te zijn.

Indien we een eventueel k -voudig nulpunt k keer tellen, dan heeft een complex polynoom met graad n dus precies n nulpunten. Indien een polynoom

$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ meer dan n nulpunten heeft, dan is $p(z)$ het nulpolynoom.

In de volgende stelling geven we een aantal eigenschappen van complexe polynomen met reële coëfficiënten.

4.3.5. Stelling. Zij $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ een polynoom met reële coëfficiënten a_0, a_1, \dots, a_n . Dan geldt:

- a) Als $z \in \mathbb{R}$, dan is $p(z) \in \mathbb{R}$.
- b) $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.
- c) Als $z_0 \in \mathbb{C}$ een k -voudig nulpunt is van $p(z)$, dan is ook \bar{z}_0 een k -voudig nulpunt van $p(z)$.
- d) $p(z)$ is te ontbinden in polynomen met graad ≤ 2 en met reële coëfficiënten.

Bewijs. a) Triviaal.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad p(\bar{z}) &= a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_0 = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} = \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} = \overline{p(z)}. \end{aligned}$$

c) Zij $z_0 \in \mathbb{C}$ een k -voudig nulpunt van $p(z)$, dan bestaat er een complex polynoom $q(z)$ met $q(z_0) \neq 0$ en $p(z) = (z - z_0)^k q(z)$. Met behulp van b) volgt nu:

$$p(z) = \overline{p(\bar{z})} = \overline{(\bar{z} - z_0)^k q(\bar{z})} = (z - \bar{z}_0)^k \overline{q(\bar{z})}.$$

Omdat $\overline{q(\bar{z}_0)} \neq 0$, is \bar{z}_0 dan k -voudig nulpunt van $p(z)$.

d) Onderscheid de nulpunten van $p(z)$ in reële nulpunten x_i , $i = 1, 2, \dots, r$, met multipliciteit m_i , en niet-reële nulpunten. De laatste komen voor in paren z_j, \bar{z}_j , $j = 1, 2, \dots, s$, met multipliciteit k_j . Bedenk nu dat

$$(z - z_j)(z - \bar{z}_j) = z^2 - (z_j + \bar{z}_j)z + z_j \bar{z}_j = z^2 - 2z \operatorname{Re} z_j + |z_j|^2.$$

Het polynoom is dan op grond van 4.3.4 als volgt te ontbinden:

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - x_1)^{m_1} (z - x_2)^{m_2} \dots (z - x_n)^{m_n} (z^2 - 2z \operatorname{Re} z_1 + |z_1|^2)^{k_1} \dots \\ &\dots (z^2 - 2z \operatorname{Re} z_2 + |z_2|^2)^{k_2} \dots (z^2 - 2z \operatorname{Re} z_s + |z_s|^2)^{k_s}. \quad \square \end{aligned}$$

Opmerking. Uit het bewijs van 4.3.5 d) volgt dat een polynoom met oneven graad en reële coëfficiënten, tenminste één reëel nulpunt heeft. Leid dit resultaat ook af met behulp van de tussenwaardestelling (2.5.5).

Een algebraïsche vergelijking is een vergelijking van de vorm $p(z) = 0$, waarbij $p(z)$ een complex polynoom is. Indien $\text{gr}(p) = n$, dan heet de vergelijking van de graad n .

Indien $z_0 \in \mathbb{C}$ een k -voudig nulpunt is van het polynoom p , dan heet $z = z_0$ een k -voudige wortel van de vergelijking $p(z) = 0$.

Uit 4.3.4, 4.3.5 volgt onmiddellijk:

- 4.3.6. Stelling. Een algebraïsche vergelijking van de graad n heeft n wortels; hierbij zijn meervoudige wortels net zo vaak geteld als hun multipliciteit bedraagt.
- 4.3.7. Stelling. Als $z_0 \in \mathbb{C}$ een k -voudige wortel is van een algebraïsche vergelijking met reële coëfficiënten, dan is ook \bar{z}_0 een k -voudige wortel van de vergelijking.

Als eenvoudigste voorbeeld van een algebraïsche vergelijking beschouwen we de binomische vergelijking

$$z^n = a ,$$

waarbij $a \in \mathbb{C}$ en $a \neq 0$ (voor $a = 0$ is de vergelijking triviaal).

Ter oplossing van deze vergelijking schrijven we

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) , \quad a = r_0(\cos \alpha + i \sin \alpha) ,$$

waarna de vergelijking $z^n = a$ overgaat in:

$$r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r_0(\cos \alpha + i \sin \alpha) .$$

Bedenk nu dat twee complexe getallen ($\neq 0$) dan en slechts dan gelijk zijn als ze dezelfde modulus en hetzelfde argument (afgezien van een veelvoud van 2π) hebben. We vinden dus

$$r^n = r_0 , \quad r = \sqrt[n]{r_0} ;$$

$$n\varphi = \alpha + 2k\pi , \quad \varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}) .$$

De vergelijking $z^n = a$ heeft dan de wortels

$$z_k := \sqrt[n]{r_0} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) \right] , \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Merk op dat $z_k = z_{k+n}$. We kunnen daarom volstaan met achtereenvolgens $k = 0, 1, \dots, n-1$ te stellen; aldus vinden we n verschillende wortels van de vergelijking $z^n = a$.

Voorbeelden. 1) Los op de vergelijking $z^3 = -i$.

Bepaal $|-i| = 1$, $\arg(-i) = -\frac{1}{2}\pi$, en stel $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, dan is de vergelijking te herleiden tot

$$r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = 1(\cos(-\frac{1}{2}\pi) + i \sin(-\frac{1}{2}\pi))$$

met oplossing $r = 1$, $\varphi = -\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Substitueer achtereenvolgens $k = 0, 1, 2$, dan vinden we de wortels

$$k = 0: z_1 = \cos(-\frac{1}{6}\pi) + i \sin(-\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i,$$

$$k = 1: z_2 = \cos \frac{1}{2}\pi + i \sin \frac{1}{2}\pi = i,$$

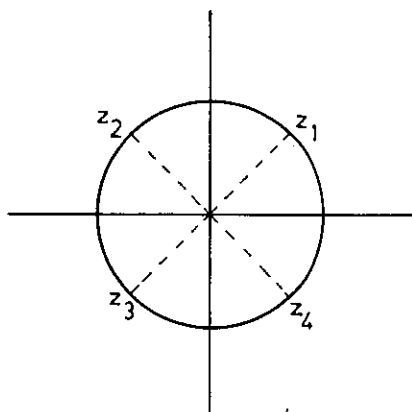
$$k = 2: z_3 = \cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i.$$

Substitutie van $k = 3$ levert opnieuw de wortel z_1 .

2) Los op de vergelijking $z^4 = -1$.

Bepaal $|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi$. Schrijf $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, dan vinden we als oplossing $r = 1$, $\varphi = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Substitutie van $k = 0, 1, 2, 3$ levert de wortels $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i)$, $z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1 + i)$, $z_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1 - i)$, $z_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - i)$; deze wortels zijn weergegeven in de navolgende figuur. Merk op dat $\bar{z}_1 = z_4$, $\bar{z}_2 = z_3$, in overeenstemming met 4.3.7. Overeenkomstig 4.3.5 d) is het polynoom $z^4 + 1$ te ontbinden in twee kwadratische factoren met reële coëfficiënten:

$$\begin{aligned} z^4 + 1 &= (z^2 - 2z \operatorname{Re} z_1 + |z_1|^2)(z^2 - 2z \operatorname{Re} z_2 + |z_2|^2) = \\ &= (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1). \end{aligned}$$



de wortels van $z^4 = -1$

De vergelijking

$$(az + b)^n = c ,$$

waarbij $a, b, c \in \mathbb{C}$ en $a \neq 0$, is eenvoudig te herleiden tot een binomische vergelijking. Stel nl. $w = az + b$, dan ontstaat er de vergelijking $w^n = c$ die op de hierboven beschreven wijze is op te lossen. In het bijzonder kan men aldus elke vierkantsvergelijking oplossen d.m.v. kwadraatplitsing.

Voorbeeld 3. De vergelijking $z^2 + z + 1 = 0$ kan worden beschreven als $(z + \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$. De wortels zijn $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ en $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

4.4. Analyse in het complexe vlak

We hebben \mathbb{C} gedefinieerd als \mathbb{R}^2 met als extra bewerking de vermenigvuldiging. We kunnen daarom alle bekende convergentiebegrippen uit \mathbb{R}^2 (zie 1.5) zonder meer in \mathbb{C} overnemen. We beschouwen dus de begrippen open bol, open verzameling, omgeving, gesloten verzameling, begrensde verzameling, rij, convergentie van een rij en begrensde rij bekend. We merken op dat we voor sommige begrippen een iets andere notatie zullen gebruiken dan in 1.5. Zo wordt bijv. de afstand van twee complexe getallen z_1 en z_2 aangegeven door $|z_1 - z_2|$. Alle eigenschappen die in 1.5 zijn afgeleid blijven geldig. Uit 1.5.6 volgt dat een rij complexe getallen (z_n) convergent is, dan en slechts dan als de reële rijen $(\operatorname{Re} z_n)$ en $(\operatorname{Im} z_n)$ convergent zijn. De bewijzen van de volgende stellingen zijn analoog aan die van 1.4.8, 1.4.9.

4.4.1. Stelling (standaardlimiet). Als $|a| < 1$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.

4.4.2. Stelling. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ($a_n \in \mathbb{C}$, $b_n \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$), dan is

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/a_n = 1/a$ mits $a \neq 0$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$.

Een complexe functie van één reële variabele is een afbeelding $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, waarbij $A \subset \mathbb{R}$. A heet de definitieverzameling van f ; notatie $\text{DOM } f$.

Onder de afbeelding f wordt aan elke $t \in \text{DOM } f$ een getal $f(t) \in \mathbb{C}$ toegevoegd.

De functie $f(t)$ is dan te schrijven als $f(t) = u(t) + iv(t)$, waarbij de reële functies $u(t)$, $v(t)$ het reële resp. imaginaire deel van $f(t)$ zijn.

De functiewaarde $f(t)$ is voor te stellen door een punt in het complexe vlak.

De puntverzameling $\{f(t) \mid t \in \text{DOM } f\}$ is een kromme in het complexe vlak. De functie $f(t)$ heet een parametervoorstelling van deze kromme, met parameter t .

Vaak wordt een functiewaarde $f(t)$ met een aparte letter z aangegeven; men schrijft dan $z = f(t)$.

Voorbeeld 1. De eenheidscirkel in het complexe vlak wordt beschreven door de parametervoorstelling $f(t) = \cos t + i \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$.

Voorbeeld 2. De parametervoorstelling van een rechte luidt $z = a + bt$, $t \in \mathbb{R}$, waarbij a en b complexe constanten zijn.

Voorbeeld 3. De functie $f(t) = a \cos t + ib \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$, met $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, is parametervoorstelling van een ellips.

De definitie van de afgeleide en van de integraal van een complexe functie ligt onmiddellijk voor de hand, Zij $f(t) = u(t) + iv(t)$, waarbij $u(t)$ en $v(t)$ reële functies zijn, dan is

$$f'(t) := \frac{df}{dt} := \frac{dz}{dt} := u'(t) + iv'(t) ,$$

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt ,$$

aangenomen dat de afgeleiden resp. integralen van u , v bestaan.

Analoog aan 2.6.4, 2.8.6 gelden de volgende regels voor het differentiëren en integreren van complexe functies.

4.4.3. Regels voor het differentiëren. Als de complexe functies f , g differentieerbaar zijn in a , dan zijn ook $f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{C}$), fg , f/g (mits $g(a) \neq 0$) differentieerbaar in a en hun afgeleiden worden gegeven door

1) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) ,$

- 2) $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$,
- 3) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
- 4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Bewijs. We bewijzen alleen regel 3). Schrijf $f(t) = u_1(t) + iv_1(t)$,
 $g(t) = u_2(t) + iv_2(t)$, waarbij u_1, u_2, v_1, v_2 reële functies zijn. Dan is

$$(fg)(t) = u_1(t)u_2(t) - v_1(t)v_2(t) + i(u_1(t)v_2(t) + u_2(t)v_1(t)) .$$

Voor de afgeleide $(fg)'(a)$ vinden we nu, met weglating van het argument a:

$$\begin{aligned} (fg)' &= u_1'u_2 + u_1u_2' - v_1'v_2 - v_1v_2' + i(u_1'v_2 + u_1v_2' + u_2'v_1 + u_2v_1') = \\ &= (u_1' + iv_1')(u_2 + iv_2) + (u_1 + iv_1)(u_2' + iv_2') = f'g + fg' . \end{aligned}$$

De overige regels volgen op analoge wijze uit de overeenkomstige regels 2.6.4. □

Ook de navolgende regels voor het integreren zijn eenvoudig af te leiden uit de overeenkomstige regels voor reële functies (zie 2.8.1, 2.8.6).

4.4.4. Regels voor het integreren. 1) Als de complexe functies f, g integreerbaar zijn over $[a, b]$, dan geldt voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$\int_a^b [\lambda f(t) + \mu g(t)] dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt .$$

2) Partiële integratie:

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = f(t)g(t) \Big|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt .$$

Een complexe reeks is een reeks waarvan de termen complex zijn. Evenals in 3.1 noemen we een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \in \mathbb{C}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$) convergent als de rij (S_N) van partiële sommen $S_N := \sum_{k=1}^N a_k$ een limiet heeft; indien $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$ dan heet S de som van de reeks.

Analoog aan 3.1.2 kan men bewijzen dat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent is.

We noemen een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absoluut convergent als $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergent is.

(N.B. Hier betekent $|a_n|$ de modulus van het complexe getal a_n .)

4.4.5. Stelling. Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absoluut convergent is, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent.

Bewijs. Er geldt $|\operatorname{Re} a_n| \leq |a_n|$ en $|\operatorname{Im} a_n| \leq |a_n|$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Uit

3.2.4 en 3.3.3 volgt dan dat $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ convergent zijn. Derhalve is ook

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n)$$

convergent. □

Opmerking. Stelling 3.3.4 (Cauchy-produkt) geldt ook voor complexe reeksen.

Een reeks van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ waarbij z een complexe variabele is, heet een complexe machtreeks.

Analoog aan 3.4.1 geldt de stelling: Als een complexe machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergent is voor $z = \zeta \neq 0$, dan is de reeks absoluut convergent voor alle z met $|z| < |\zeta|$. Het bewijs van deze stelling is gelijk aan dat van 3.4.1.

We concluderen dat bij de convergentie van machtreeksen zich de volgende drie mogelijkheden kunnen voordoen:

- 1) De machtreeks is convergent alleen voor $z = 0$ en divergent voor alle $z \neq 0$.
- 2) De machtreeks is absoluut convergent voor alle z .
- 3) Er bestaat een getal $R > 0$ zó dat de machtreeks absoluut convergent is voor $|z| < R$ en divergent voor $|z| > R$.

Het getal R heet weer de convergentiestraal van de machtreeks. In de gevallen 1) en 2) stellen we $R = 0$ resp. $R = \infty$.

Ook hier is geen algemene uitspraak te doen over de convergentie of divergentie van een machtreeks op de zgn. convergentiecirkel $|z| = R$; deze dient bij elk voorbeeld apart onderzocht te worden.

De waarde van R kan vaak worden bepaald door middel van de kenmerken van d'Alembert of Cauchy, zie 3.4.2.

Uit het voorgaande volgt in het bijzonder: Als de (reële) machtreeks

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een convergentiestraal R heeft, dan heeft ook de complexe machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ een convergentiestraal R . Dit geeft ons de mogelijkheid om

een functie f , die som is van een reële machtreeks met convergentiestraal R , ook te definiëren voor $|z| < R$ in het complexe vlak. Zo kunnen we bijv. voor willekeurige complexe z definiëren e^z , $\sin z$, $\cos z$, en voor $|z| < 1$ de functies $\log(1+z)$, $\arctan z$. We zullen ons in dit hoofdstuk beperken tot de bestudering van één van deze functies, nl. e^z .

4.5. De functie e^z

4.5.1. Definitie. $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ voor $z \in \mathbb{C}$.

Uit 4.4 volgt dat e^z is gedefinieerd voor alle $z \in \mathbb{C}$. De volgende eigenschap is fundamenteel.

4.5.2. Stelling. $e^z e^w = e^{z+w}$ voor alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Bewijs. Volgens 3.3.4 is

$$\begin{aligned}
e^z e^w &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w},
\end{aligned}$$

waarbij gebruik gemaakt is van het binomium van Newton (1.3.7). □

We bepalen het reële en imaginaire deel van e^z . Eerst beschouwen we het geval dat z zuiver imaginair is.

4.5.3. Stelling (formule van Euler). Als $y \in \mathbb{R}$, dan is

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Bewijs. Volgens 4.5.1 is $e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n y^n}{n!}$.

Daar $i^{2n} = (-1)^n$ en $i^{2n+1} = (-1)^n i$, vinden we

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos y + i \sin y . \quad \square$$

Gevolg. Voor willekeurige $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$, kunnen we schrijven:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) .$$

Hieruit kunnen we een aantal eigenschappen afleiden.

4.5.4. Stelling. 1) Als $y \in \mathbb{R}$, dan is $|e^{iy}| = 1$.

2) Als $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$, dan is

$$|e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y .$$

(Dit argument is in het algemeen niet de hoofdwaarde.)

3) Als $y \in \mathbb{R}$, dan is

$$\begin{aligned} \cos y &= \operatorname{Re} e^{iy} = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}) , \\ \sin y &= \operatorname{Im} e^{iy} = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}) . \end{aligned}$$

4) Een complex getal $z \neq 0$ is te schrijven als $z = re^{i\varphi}$, waarbij $r = |z|$,
 $\varphi = \arg z$.

Als we in de produktregel 4.5.2 stellen $z = iu$, $w = iv$, $u, v \in \mathbb{R}$, dan vinden we

$$\begin{aligned} \cos(u+v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v , \\ \sin(u+v) &= \sin u \cos v + \cos u \sin v , \end{aligned}$$

i.e. de bekende somformules voor goniometrische functies.

De formule van De Moivre (4.2.8) volgen direkt uit de formule van Euler (4.5.3), immers

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi .$$

We kunnen de relaties tussen de functie e^z en de goniometrische functies benutten om $(\cos x)^n$ en $(\sin x)^n$ te schrijven als een som van de gedaante $\cos kx$, $\sin kx$.

Voorbeeld 1.

$$\begin{aligned}\cos^5 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^5 = \\ &= \frac{1}{32} (e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}) = \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{1}{2}(e^{5ix} + e^{-5ix}) + 5 \cdot \frac{1}{2}(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 10 \cdot \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \right] = \\ &= \frac{1}{16} (\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x) .\end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\int \cos^5 x \, dx = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{5} \sin 5x + \frac{5}{3} \sin 3x + 10 \sin x \right) + C ;$$

vergelijk dit met 2.9.4, voorbeeld 8.

De functie e^z is ook nog op andere wijze te gebruiken om integralen te berekenen. We merken op dat voor $b \in \mathbb{R}$ geldt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (e^{ibt}) &= \frac{d}{dt} (\cos bt + i \sin bt) = -b \sin bt + ib \cos bt = \\ &= ib(\cos bt + i \sin bt) = ibe^{ibt} .\end{aligned}$$

Samen met de bekende eigenschap $\frac{d}{dt} e^{at} = ae^{at}$ voor $a \in \mathbb{R}$, volgt hieruit:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (e^{(a+ib)t}) &= \frac{d}{dt} (e^{at} e^{ibt}) = ae^{at} e^{ibt} + ibe^{at} e^{ibt} = \\ &= (a + ib)e^{(a+ib)t} .\end{aligned}$$

We zien dus dat

$$\frac{d}{dt} e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t} ,$$

geldig voor elke $\alpha \in \mathbb{C}$. Derhalve is ook

$$\int_a^b e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \Big|_a^b \quad \text{mits } \alpha \neq 0 .$$

Voorbeeld 2. Als $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, dan is

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-at} \cos bt \, dt &= \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{(-a+ib)t} \, dt = \operatorname{Re} \frac{1}{-a+ib} e^{(-a+ib)t} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{a-ib} = \operatorname{Re} \frac{a+ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2}, \end{aligned}$$

zoals we ook in 2.9.2, voorbeeld 1 vonden.

4.6. Meetkunde in het complexe vlak

Meetkundige figuren in het complexe vlak zijn vaak eenvoudig te beschrijven door middel van complexe getallen. We lichten dit toe aan de hand van een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 1. In de navolgende lijst is links aangegeven een verzameling van complexe getallen die aan een bepaalde voorwaarde voldoen, en rechts de bijbehorende meetkundige figuren in het complexe vlak:

- 1) $\operatorname{Re} z = 2$ rechte door 2 evenwijdig aan de imaginaire as;
- 2) $\operatorname{Im} z = -3$ rechte door $-3i$ evenwijdig aan de reële as;
- 3) $|z + 2i| = 1$ cirkel met middelpunt $-2i$ en straal 1;
- 4) $\arg(z - i) = \frac{\pi}{4}$ halfrechte door i (i zelf uitgezonderd) onder een hoek $\pi/4$ met de positieve reële as;
- 5) $\operatorname{Re} z > 2$ halfvlak rechts van de lijn $\operatorname{Re} z = 2$;
- 6) $|z + 2i| > 1$ gebied buiten de cirkel $|z + 2i| = 1$;
- 7) $|z + 3| = |z - i|$ middelloodlijn van het lijnstuk dat -3 en i verbindt;
- 8) $|z + 5| + |z + 3i| = 8$ ellips met brandpunten -5 en $-3i$ en lange as 8;
- 9) $\operatorname{Re} \frac{z-3}{z+i} = 0$ cirkel met het lijnstuk van $-i$ naar 3 als middellijn, en met uitzondering van $-i$;
- 10) $|e^z| = 1$ imaginaire as.

Een complexe functie van één complexe variabele is een afbeelding $f: A \rightarrow B$, waarbij $A \subset \mathbb{C}$, $B \subset \mathbb{C}$. Beschouw de complexe functie $w = f(z)$, dan zijn z en w meetkundig voor te stellen door punten in het complexe z -vlak resp. w -vlak. Als hulpmiddel voor het onderzoek van $f(z)$ kan men nu van bepaalde puntverzamelingen in het z -vlak (bijv. rechten evenwijdig aan de reële of imaginaire as, cirkels) het beeld in het w -vlak bepalen.

Voorbeeld 2. Bepaal het beeld van de volgende verzamelingen onder de afbeelding $w = e^z$:

- 1) rechte $\operatorname{Re} z = a$,
- 2) rechte $\operatorname{Im} z = b$,
- 3) halfrechte $\arg z = \alpha$,
- 4) halfvlak $\operatorname{Re} z < 0$,
- 5) verzameling $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| < \pi\}$.

Met gebruikmaking van de relaties $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$, $\arg e^z = \operatorname{Im} z$, vinden we als beeld in het w -vlak, achtereenvolgens:

- 1) Cirkel $|w| = e^a$, d.i. cirkel met middelpunt 0 en straal e^a .
- 2) Halfrechte $\arg w = b$.
- 3) Zij $e^{i\alpha} = a + ib$, dan heeft de halfrechte $\arg z = \alpha$ als parameterstelling: $z = (a + ib)t$, $t > 0$. Daaruit volgt $r := |w| = |e^z| = e^{at}$ en $\varphi := \arg w = \arg e^z = bt$. Door eliminatie van t vinden we $r = e^{a\varphi/b}$, d.i. de vergelijking van een spiraal mits $b \neq 0$. (Wat is het beeld als $b = 0$?)
- 4) Cirkelschijf $|w| < 1$, met uitzondering van 0.
- 5) Verzameling $\{w \mid |w| < 1, |\arg w| < \pi\}$, d.i. de cirkelschijf $|w| < 1$ met uitzondering van het lijnstuk van -1 naar 0.

Voorbeeld 3. Bepaal het beeld van de eenheidscirkel $|z| = 1$ onder de afbeelding $w = 1/(1+z)$. De eenheidscirkel wordt geparametriseerd door $z = e^{it}$, $-\pi < t \leq \pi$. We vinden dan

$$w = \frac{1}{1 + e^{it}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}it}}{e^{-\frac{1}{2}it} + e^{\frac{1}{2}it}} = \frac{\cos \frac{1}{2}t - i \sin \frac{1}{2}t}{2 \cos \frac{1}{2}t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \tan \frac{1}{2}t.$$

Het beeld is blijkbaar de rechte $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$. Merk op dat $\operatorname{Im} w \rightarrow -\infty$ (resp. ∞) als $t \rightarrow \pi$ (resp. $-\pi$) (d.w.z. $z \rightarrow -1$).

Opmerking. Men kan aantonen, dat bij een afbeelding van de vorm $w = \frac{az + b}{cz + d}$ met $ad \neq bc$, een rechte of een cirkel in het z -vlak wordt getransformeerd in een rechte of een cirkel in het w -vlak.

Opgave. Bepaal het beeld van de eenheidscirkel onder de afbeelding $w = \frac{z - 1}{z + 1}$.

Hoofdstuk 5. Differentiaalvergelijkingen

5.1. Inleiding

Een gewone differentiaalvergelijking van de eerste orde is een relatie van de vorm

$$y' = f(x,y) . \quad (1)$$

Hierbij is f een functie van twee variabelen, die aan elke (x,y) uit een verzameling in \mathbb{R}^2 een reëel getal $f(x,y)$ toevoegt. De verzameling waarop $f(x,y)$ is gedefinieerd zullen we in analogie met 2.1 aangeven met $\text{DOM } f$. Een functie $y(x)$ gedefinieerd en differentieerbaar op een interval (a,b) heet een oplossing van (1) op (a,b) , als $(x,y(x)) \in \text{DOM } f$ en $y'(x) = f(x,y(x))$ voor alle $x \in (a,b)$. Op analoge wijze noemen we

$$y^{(n)} = f(x,y',y'',\dots,y^{(n-1)})$$

een gewone differentiaalvergelijking van de n-de orde.

- Voorbeelden. 1) $y' = -y/x$. Alle functies van de vorm $y(x) = C/x$, waarbij C een willekeurige constante is, zijn oplossing op $(0,\infty)$ en op $(-\infty,0)$.
- 2) De functies $\sin x$ en $\cos x$ zijn op \mathbb{R} oplossingen van de tweede orde differentiaalvergelijking $y'' = -y$.
- 3) De vergelijking van Van der Pol (1927)

$$y'' - \mu(1-y^2)y' + y = 0$$

heeft als oplossing o.m. $y(x) = 0$ voor alle x . Er bestaan ook andere oplossingen van deze vergelijking, maar deze zijn niet in een eenvoudige gesloten vorm weer te geven (althans als $\mu \neq 0$).

Een differentiaalvergelijking van de vorm

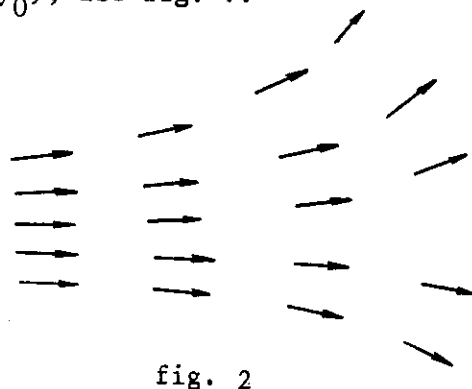
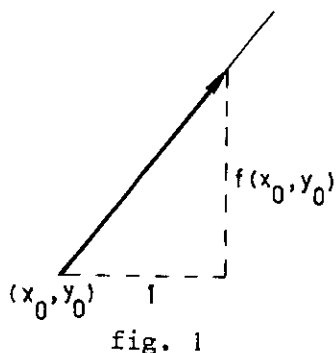
$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = f(x)$$

heet een lineaire differentiaalvergelijking. De functies $a_n(x), \dots, a_0(x)$ heten de coëfficiënten. Als deze constant zijn en $a_n \neq 0$, dan spreken we van een n-de orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.

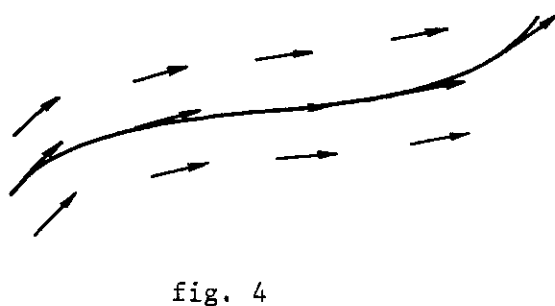
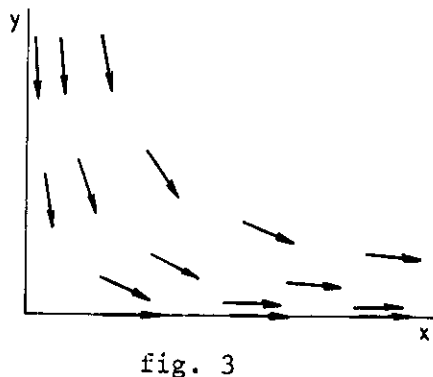
Als $f(x) = 0$ voor alle x , dan heet de vergelijking homogeen, anders inhomogeen.

De differentiaalvergelijking uit voorbeeld 1) is dus lineair homogeen van de eerste orde, met niet-constante coëfficiënten. De vergelijking uit voorbeeld 2) is lineair homogeen van de tweede orde met constante coëfficiënten. De vergelijking van Van der Pol uit voorbeeld 3) is niet-lineair (in dit geval spreekt men niet over homogeen of inhomogeen en over al dan niet constante coëfficiënten).

Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde laten een eenvoudige meetkundige interpretatie toe. Door de vergelijking wordt in ieder punt $(x_0, y_0) \in \text{DOM } f$ een richting gedefinieerd, nl. die van de rechte door (x_0, y_0) met richtingscoëfficiënt $f(x_0, y_0)$; zie fig. 1.



Men kan zeggen dat aan ieder punt $(x_0, y_0) \in \text{DOM } f$ een vector is toegevoegd, nl. $(1, f(x_0, y_0))$. Op deze manier is het vlak (voorzover de differentiaalvergelijking is gedefinieerd) bezaaid met pijlen; zie fig. 2. We spreken daarom van een richtingsveld. Voor de differentiaalvergelijking uit voorbeeld 1) is het bijbehorende richtingsveld getekend in fig. 3.



Een functie $y(x)$ is nu oplossing van de differentiaalvergelijking, indien de grafiek van $y(x)$ "past" in het richtingsveld, d.w.z. indien in elk punt van de grafiek de raaklijn de richting van de in dat punt gedefinieerde pijl heeft; zie fig. 4.

De grafiek van een oplossing $y(x)$ heet een oplossingskromme of integraalkromme van de differentiaalvergelijking. De meetkundige interpretatie van de differentiaalvergelijking (1) suggereert dat het hele (x,y) -vlak is opgevuld met oplossingskrommen, d.w.z. dat er door elk punt precies één oplossing gaat. Men kan bewijzen dat dit inderdaad het geval is onder redelijke aanamen over $f(x,y)$.

Het blijkt dat een differentiaalvergelijking in het algemeen vele oplossingen heeft. Vaak kan men alle oplossingen aangeven in één formule, waarin y behalve van x ook van een parameter C afhangt:

$$y = \varphi(x, C) ;$$

We zeggen dan dat deze formule de algemene oplossing van (1) voorstelt. Indien we voor C een bepaalde waarde substitueren dan vinden we een zg. particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking.

De differentiaalvergelijking (1) wordt vaak vergezeld door een zg. beginvoorwaarde van de vorm $y(a) = y_0$, waaraan de oplossing moet voldoen. Door deze voorwaarde wordt in het algemeen de parameter C vastgelegd.

Bij een differentiaalvergelijking van de n -de orde hangt de algemene oplossing van n parameters af:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) .$$

Deze parameters kunnen worden vastgelegd door het voorschrijven van n beginvoorwaarden $y(a) = y_0, y'(a) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = y_{n-1}$.

In 5.2 en 5.3 bespreken we twee typen van vergelijkingen van de eerste orde. In 5.4 worden hogere orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten behandeld. Tenslotte geven we in 5.5 een toepassing in de theorie van de lineaire trillingen.

5.2. Scheiding van variabelen

Een differentiaalvergelijking van het type

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \quad (1)$$

kunnen we schrijven als

$$g(y)y' = f(x) . \quad (2)$$

Zij G een onbepaalde integraal van g en F een onbepaalde integraal van f , dus

$$G(y) = \int g(y)dy, F(x) = \int f(x)dx .$$

Voor een oplossing $y(x)$ van (2) geldt dan volgens de kettingregel:

$$\frac{d}{dx} G(y(x)) = G'(y(x))y'(x) = g(y(x))y'(x) = f(x) = F'(x) ,$$

zodat

$$G(y(x)) = F(x) + C . \quad (3)$$

Door deze vergelijking is $y(x)$ impliciet als functie van x gegeven.

Gewoonlijk gaat men bij het oplossing van (1) op de volgende formele manier te werk. Men schrijft

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} ,$$

waaruit volgt

$$g(y)dy = f(x)dx , \quad (4)$$

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx ,$$

$$G(y) = F(x) + C .$$

Hoewel (4) alleen formele betekenis heeft zien we door vergelijken met (3), dat op deze manier toch het juiste resultaat wordt gevonden.

Een differentiaalvergelijking van de vorm

$$y'(x) = f(x)h(y) \tag{5}$$

wordt van de gedaante (1), als we $g(y) := 1/h(y)$ stellen. Hierbij nemen we dan aan dat $h(y) \neq 0$ is. Als voor zekere y_0 geldt $h(y_0) = 0$, dan is de constante functie $y(x) = y_0$ oplossing van (5). Deze oplossing wordt niet teruggevonden als men de vergelijking op de hierboven beschreven wijze oplost. Daarom moet deze oplossing apart worden vermeld.

Voorbeelden. 1) $y' = -x/y$.

We schrijven

$$2ydy = -2xdx ,$$

waaruit volgt

$$y^2 = -x^2 + C .$$

De integraalkrommen zijn cirkels met de oorsprong als middelpunt. Hierbij moeten punten op de x-as worden uitgezonderd omdat daar de differentiaalvergelijking niet is gedefinieerd. Voor iedere $C > 0$ vinden we dus twee oplossingen gedefinieerd op het interval $(-\sqrt{C}, \sqrt{C})$, nl. $y = \pm \sqrt{C - x^2}$.

2) $xy' - y = 0$.

We delen door xy :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} ,$$

dan volgt na integratie

$$\log|y| = \log|x| + C ,$$

$$|y| = e^C |x| .$$

Let wel, dat $y = 0$ voor alle x , ook een oplossing is, die we hebben verduisterd omdat we door y hebben gedeeld. Derhalve vinden we de algemene oplossing

$$y = Dx ,$$

waarbij D een willekeurige constante is.

- 3) $y' = 1 + y^2$ heeft als algemene oplossing $y = \tan(x+C)$. Merk op dat geen enkele oplossing over een interval met een lengte groter dan π is gedefinieerd, hoewel de differentiaalvergelijking overal is gedefinieerd.
- 4) Laat het aantal individuen van een bepaalde (dieren- of planten-) soort in een gegeven milieu op het tijdstip t gegeven worden door $p(t)$. Een eenvoudig model van het verloop van $p(t)$ als functie van t , krijgen we, als we veronderstellen dat de relatieve groei een positieve constante is:

$$\dot{p}(t)/p(t) = \lambda .$$

(N.B. Differentiatie naar t , in het bijzonder als t de tijd voorstelt, geeft men vaak aan door een punt in plaats van een accent.)

Dit levert de differentiaalvergelijking

$$\dot{p}(t) = \lambda p(t) ,$$

die volgens bovenstaande methode kan worden opgelost:

$$p(t) = Ce^{\lambda t} .$$

We zien dat de populatie "exponentieel" toeneemt. Gewoonlijk zal echter tengevolge van overbevolking de relatieve groei afnemen als de populatie toeneemt. Een eenvoudig model is

$$\dot{p}(t)/p(t) = a - bp(t) ,$$

waarbij a en b positieve constanten zijn. Dan is

$$\dot{p}(t) = ap(t) - bp^2(t) ,$$

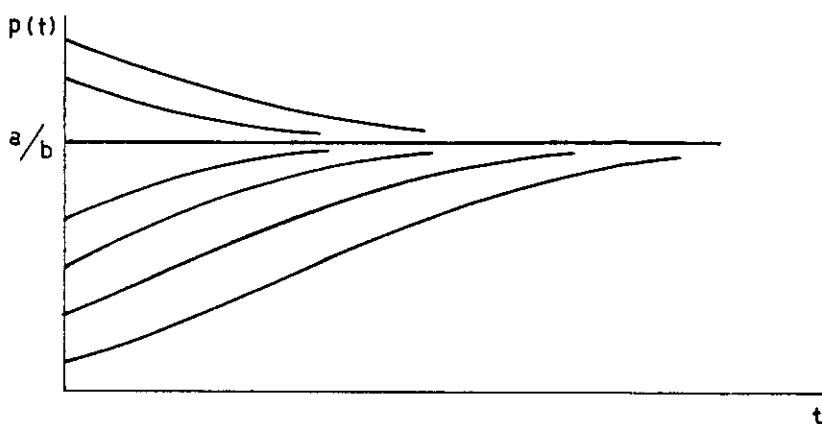
met oplossing

$$\int \frac{dp}{ap - bp^2} = \int dt ,$$

$$\frac{1}{a} \log \frac{p}{a - bp} = t + C ,$$

$$p(t) = \frac{a}{b + De^{-at}} ,$$

waarbij $D (= \pm e^{-aC})$ een willekeurige constante is. De waarde $D = 0$ correspondeert met de constante oplossing $p(t) = a/b$, die we in bovenstaande afleiding hebben verduisterd. In de navolgende figuur zijn een aantal oplossingskrommen geschetst.



Merk op dat $\dot{p} < 0$ als $p > a/b$ en $\dot{p} > 0$ als $p < a/b$. We zien dat in de stationaire toestand de populatie gelijk is aan a/b .

- 5) Een kapitaal staat uit tegen een constante rente $p\%$. Het beginkapitaal (op tijdstip $t = 0$) is K_0 . Op het tijdstip t is de kapitaalsgroei evenredig met het kapitaal:

$$\dot{K} = \mu K.$$

De oplossing is $K(t) = K_0 e^{\mu t}$. We kunnen μ bepalen uit

$$K(1) - K(0) = K_0 e^{\mu} - K_0 = K_0 \cdot \frac{P}{100},$$

dus

$$\mu = \log(1 + p/100).$$

- 6) De snelheid van desintegratie van een radioactieve stof is evenredig met de aanwezige hoeveelheid. Als dus $y(t)$ de op het tijdstip t aanwezige hoeveelheid radioactieve stof is, dan geldt

$$-\dot{y} = \lambda y.$$

De oplossing is $y(t) = y(0)e^{-\lambda t}$, λ heet de desintegratieconstante.

De halfwaardetijd $T_{\frac{1}{2}}$ berekent men uit $y(T_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}y(0)$, dus $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log 2}{\lambda}$.

5.3. Lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

We beginnen met de homogene lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde:

$$y'(x) + f(x)y(x) = 0 . \tag{1}$$

Deze vergelijking kunnen we oplossen d.m.v. scheiding van variabelen:

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx ,$$

$$\log|y| = -\int f(x)dx + C_1 ,$$

waaruit volgt

$$y(x) = D \exp(-\int f(x)dx) . \tag{2}$$

Zij nu $u(x)$ een willekeurige niet-triviale oplossing van (1), dus een functie van de vorm (2). De algemene oplossing van (1) is dan te schrijven als

$$y(x) = Cu(x) \tag{3}$$

waarbij C een willekeurige constante is.

Beschouw nu de inhomogene vergelijking

$$y' + f(x)y = g(x) . \tag{4}$$

Deze zullen we oplossen met de methode van variatie van constanten.

Vervang daartoe de constante C in (3) door een functie $c(x)$ en zoek een oplossing van (4) van de vorm

$$y(x) = c(x)u(x) . \tag{5}$$

Als we (5) in (4) substitueren en daarbij gebruiken dat $u'(x) + f(x)u(x) = 0$, dan vinden we

$$y' = c'u + cu' = -fcu + g ,$$

dus

$$c'u = g, \quad c' = g/u , \tag{6}$$

waaruit we $c(x)$ kunnen bepalen door integratie.

Merk op dat $u(x) \neq 0$ voor alle waarden van $x \in \text{DOM } f$ (zie (2)). Daarom is het geen beperking te veronderstellen, dat de oplossing $y(x)$ van (4) van de gedaante (5) is. Alle oplossingen van (4) zijn zo te schrijven.

We vinden de algemene oplossing van (4) door voor $c(x)$ de algemene oplossing van (6) te nemen. De algemene oplossing van (6) is van de gedaante

$$c(x) = c_0(x) + C ,$$

zodat de algemene oplossing van (4) wordt gegeven door

$$y(x) = c_0(x)u(x) + Cu(x) . \quad (7)$$

5.3.1. Conclusie. De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking (4) is gelijk aan een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking (nl. $c_0(x)u(x)$) plus de algemene oplossing van de homogene vergelijking (1).

Voorbeelden. 1) $y' - \frac{x+1}{x} y = x - x^2$.

De bijbehorende homogene vergelijking

$$y' - \frac{x+1}{x} y = 0 ,$$

heeft als oplossing

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x+1}{x} dx ,$$

$$\log|y| = x + \log|x| + C ,$$

$$y = Dxe^x .$$

De oplossing $y = 0$ correspondeert met $D = 0$. We kiezen $u(x) = xe^x$. Zoek nu een oplossing van de inhomogene vergelijking van de vorm

$$y(x) = c(x)u(x) = c(x)xe^x .$$

Na substitutie in de inhomogene vergelijking vinden we

$$c'(x)xe^x + c(x)(e^x + xe^x) - \frac{x+1}{x} c(x)xe^x = x - x^2 ,$$

waaruit volgt

$$c'(x) = \frac{x - x^2}{xe^x} = (1-x)e^{-x} ,$$

$$c(x) = \int (1-x)e^{-x} dx = xe^{-x} + C .$$

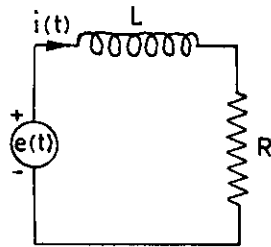
De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking luidt nu

$$y(x) = x^2 + Cxe^x ,$$

waarbij C een willekeurige reële constante is.

- 2) In een stroomkring met constante zelfinductie L en weerstand R loopt een stroom $i(t)$ onder invloed van een spanningsbron $e(t)$. Er geldt

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e(t) .$$



Zij $\lambda := R/L$. Dan is de algemene oplossing van de homogene vergelijking $Ce^{-\lambda t}$. Substitutie van $i(t) = c(t)e^{-\lambda t}$ in de inhomogene vergelijking levert

$$Lc' = e(t)e^{\lambda t} ,$$

dus

$$c(t) = \frac{1}{L} \int_0^t e(\tau)e^{\lambda\tau} d\tau + c(0)$$

en

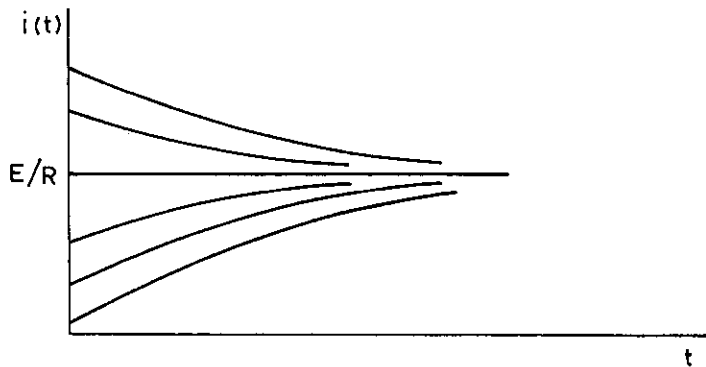
$$i(t) = i(0)e^{-\lambda t} + \frac{1}{L} \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} e(\tau) d\tau .$$

De eerste term stelt de stroom voor als $e(t) = 0$, de tweede term geeft de stroom als $i(0) = 0$. Als $e(t) = E$ ($t > 0$), dan vinden we

$$i(t) = \frac{E}{R} + Ce^{-\lambda t},$$

waarbij C een constante is, die van de beginwaarde $i(0)$ afhangt.

De voorgaande oplossing is verkregen door $e(t) = E$ te substitueren in de algemene oplossing en de integraal uit te rekenen. Men kan dit resultaat eenvoudiger afleiden door op te merken dat de constante stroom $i(t) = E/R$ een particuliere oplossing is van de inhomogene vergelijking. De algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking is dan te schrijven als de som van de particuliere oplossing $i(t) = E/R$ en de algemene oplossing $Ce^{-\lambda t}$ van de homogene vergelijking. In de navolgende figuur is het verloop van $i(t)$ als functie van t geschetst voor een aantal waarden van $i(0)$.



Merk op dat de algemene oplossing nadert tot de stationaire oplossing E/R als $t \rightarrow \infty$.

5.4. Lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

5.4.1. Vergelijkingen van de eerste orde. De vergelijking

$$y' - ay = f \tag{1}$$

waarin a een constante is, laat zich oplossen met de methode uit 5.3. We vinden als algemene oplossing: $y(x) = y_p(x) + Cy_h(x)$, waarbij y_p een particuliere oplossing is van (1), y_h een oplossing van de bijbehorende homogene vergelijking $y' - ay = 0$ en C een willekeurige constante. Gewoonlijk neemt men $y_h(x) = e^{ax}$.

Vaak is het eenvoudiger om een particuliere oplossing y_p te bepalen door "proberen", in plaats van met de methode uit 5.3 (vergelijk 5.3, voorbeeld 2). Zo ken men in geval $f = b = \text{constant}$, ook voor y een constante functie proberen. Substitutie van $y = \alpha$ in (1) levert $\alpha = -b/a$, dus $y_p = -b/a$ (als $a \neq 0$). Op analoge wijze kan men ook voor andere rechterleden f geschikte functies y_p proberen als particuliere oplossing van (1). Een en ander is samengevat in de volgende tabel:

$f(x)$	$y_p(x)$
$p(x), \text{gr}(p) = n, a \neq 0$	$q(x), \text{gr}(q) = n$
$p(x), \text{gr}(p) = n, a = 0$	$xq(x), \text{gr}(q) = n$
$b_1 \sin x + b_2 \cos x$	$\beta_1 \sin x + \beta_2 \cos x$
$e^{bx}, b \neq a$	αe^{bx}
e^{ax}	$x e^{ax}$
$p(x)e^{bx}, \text{gr}(p) = n, b \neq a$	$q(x)e^{bx}, \text{gr}(q) = n$
$p(x)e^{ax}, \text{gr}(p) = n$	$xq(x)e^{ax}, \text{gr}(q) = n$

In deze tabel zijn $p(x)$ en $q(x)$ polynomen. Als men op deze manier een particuliere oplossing y_p gevonden heeft, luidt de algemene oplossing van (1): $y_p + Ce^{ax}$.

We merken op dat deze procedure geldig blijft als a en f complex zijn. We vinden dan natuurlijk complexe functies $y(x)$ als oplossingen.

5.4.2. Vergelijkingen van hogere orde. Een differentiaalvergelijking van hogere orde met constante coëfficiënten is te herleiden tot een vergelijking van de eerste orde. We lichten dit toe aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld. 1) $y'' - 3y' + 2y = 0$. (1)

We voeren in de differentiaaloperator D :

$$Dy := y' ,$$

dan is

$$D^2y := D(Dy) = Dy' = y'' .$$

De differentiaalvergelijking (1) is nu als volgt te schrijven

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0$$

of

$$(D-1)(D-2)y = 0 .$$

Stel $(D-2)y = z$. Dan is $(D-1)z = 0$, dus $z = Ce^x$. De vergelijking voor y wordt dus

$$(D-2)y = Ce^x$$

of

$$y' - 2y = Ce^x .$$

Een particuliere oplossing van deze vergelijking wordt verkregen door te proberen: $y = \alpha e^x$. Dit levert $\alpha = 2 + C$. De algemene oplossing van de homogene vergelijking $y' - 2y = 0$ luidt: $y = \beta e^{2x}$. Derhalve is de algemene oplossing van (1):

$$y(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x} ,$$

waarin α, β willekeurige reële constanten zijn.

De formele rekenwijze die hier is gevolgd kan men eenvoudig verifiëren.

Zo is bijv.

$$\begin{aligned} (D-1)(D-2)y &= (D-1)(y' - 2y) = Dy' - D(2y) - y' + 2y = \\ &= y'' - 2y' - y' + 2y = y'' - 3y' + 2y . \end{aligned}$$

5.4.2.1. Stelling. De homogene lineaire differentiaalvergelijking

$$y'' + a_1y' + ay = 0 \tag{1}$$

heeft als algemene oplossing

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \tag{2}$$

waar C_1, C_2 willekeurige constanten zijn.

Als de karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{3}$$

twee verschillende oplossingen λ_1, λ_2 heeft, dan is $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$.
Als de oplossingen samenvallen ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$), dan is $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$.
De inhomogene lineaire differentiaalvergelijking

$$y'' + a_1 y' + by = f \quad (4)$$

heeft als algemene oplossing

$$y = y_p + y_{\text{hom}}$$

waar y_p een particuliere oplossing van (4) is en y_{hom} de algemene oplossing (2) van de corresponderende homogene vergelijking (1).

Bewijs. We schrijven (4) als

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = f$$

waarbij λ_1 en λ_2 wortels van de karakteristieke vergelijking (3) zijn.
Dan stellen we $(D - \lambda_2)y = z$, zodat z moet voldoen aan

$$z' - \lambda_1 z = f.$$

Op grond van 5.4.1 luidt de oplossing van deze vergelijking

$$z = z_p + C_1 e^{\lambda_1 x}$$

waarbij z_p een particuliere oplossing is en C_1 een willekeurige constante.
Derhalve moet y voldoen aan

$$y' - \lambda_2 y = z_p + C_1 e^{\lambda_1 x}. \quad (5)$$

Zij u een oplossing van

$$u' - \lambda_2 u = z_p \quad (6)$$

en v een oplossing van

$$v' - \lambda_2 v = e^{\lambda_1 x}. \quad (7)$$

Dan is $y = u + C_1 v$ een oplossing van (5), zoals men door substitutie kan verifiëren. Omgekeerd kan men elke oplossing van (5) op die manier verkrijgen. Als immers y een oplossing van (5) is en u een willekeurige oplossing van (6), dan voldoet $v := y - u$ aan (7). Het oplossen van (5) is dus herleid tot het oplossen van (6) en (7).

De algemene oplossing van (6) is

$$u = y_p + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

waar y_p een particuliere oplossing is. Als $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dan is de algemene oplossing van (7):

$$v = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 x} + C_3 e^{\lambda_2 x}.$$

De algemene oplossing van (5) (en dus van (4)) is dus

$$y = y_p + C_4 e^{\lambda_1 x} + C_5 e^{\lambda_2 x}$$

waar C_4 en C_5 willekeurige constanten zijn en y_p een particuliere oplossing van (4). (Dit laatste volgt uit het feit dat $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y_p := (D - \lambda_1)z_p = f$.) Als $\lambda_1 = \lambda_2$, dan is de algemene oplossing van (7) (zie 5.4.1)

$$v = x e^{\lambda_1 x} + C_3 e^{\lambda_1 x}$$

zodat de algemene oplossing van (4) gegeven wordt door

$$y = y_p + C_4 e^{\lambda_1 x} + C_5 x e^{\lambda_1 x}.$$

In het homogene geval is $y_p = 0$ een particuliere oplossing. □

Wanneer men nu de differentiaalvergelijking (4) wil oplossen, zoekt men eerst de algemene oplossing van de corresponderende homogene vergelijking (1). Daartoe lost men de karakteristieke vergelijking op, waarna de algemene oplossing van (1) de gedaante $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ of (als $\lambda_1 = \lambda_2$): $y = C_1 x e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_1 x}$ heeft.

Let wel dat deze oplossingen complex kunnen zijn ook al zijn de coëfficiënten a, b van de differentiaalvergelijking reëel. De karakteristieke vergelijking (3) kan immers complexe wortels hebben. Als echter a en b reëel zijn en y is een complexe oplossing van (1) (of (4)), dan zijn $\operatorname{Re} y$ en $\operatorname{Im} y$ reële oplossingen van (1) (resp. (4)). Dit volgt onmiddellijk door substitutie. Als dus $\lambda = \alpha + i\beta$ en $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ de wortels zijn van (3) met $\beta \neq 0$ (de wortels zijn toegevoegd complex, omdat a en b reëel zijn (zie 4.3.5)), dan zijn $e^{\lambda x}$ en $e^{\bar{\lambda} x}$ complexe oplossingen van (1). Maar dan zijn $e^{\alpha x} \cos \beta x$ en $e^{\alpha x} \sin \beta x$ reële oplossingen van (1) en de algemene reële oplossing van (1) luidt dan:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x ,$$

waarbij C_1 en C_2 willekeurige reële constanten zijn.

Als men de algemene oplossing van (1) heeft gevonden, dan zoekt men een particuliere oplossing y_p van (4), waarna volgens 5.4.2.1 de algemene oplossing van (4) wordt gegeven door

$$y = y_p + y_{\text{hom}} .$$

Een particuliere oplossing van (4) kan men vinden door "proberen" zoals in 5.4.1 is gedaan. We kunnen een analoge tabel geven:

$f(x)$	$y_p(x)$
$p(x), \operatorname{gr}(p) = n, (\lambda_1, \lambda_2 \neq 0)$	$q(x), \operatorname{gr}(q) = n$
$p(x), \operatorname{gr}(p) = n, (\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0)$	$xq(x), \operatorname{gr}(q) = n$
$p(x), \operatorname{gr}(p) = n, (\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$	$x^2 q(x), \operatorname{gr}(q) = n$
$b_1 \sin x + b_2 \cos x \quad (\lambda_1, \lambda_2 \neq i)$	$\beta_1 \sin x + \beta_2 \cos x$
$e^{tx} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \neq t)$	αe^{tx}
$e^{\lambda_1 x} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$	$\lambda_1 x e^{\lambda_1 x}$
$e^{\lambda_1 x} \quad (\lambda_1 = \lambda_2)$	$x^2 e^{\lambda_1 x}$
$p(x)e^{tx}, \operatorname{gr}(p) = n \quad (\lambda_1, \lambda_2 \neq t)$	$q(x)e^{tx}, \operatorname{gr}(q) = n .$

Ook hier zijn $p(x)$ en $q(x)$ polynomen.

Op analoge wijze kan men lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten van hogere orde oplossen. De karakteristieke vergelijking van

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \tag{8}$$

luidt

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 . \tag{9}$$

Als $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ verschillende wortels zijn dan is $y_j(x) := e^{\lambda_j x}$ voor $j = 1, \dots, n$ een oplossing en de algemene oplossing van (8) wordt gegeven door

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n . \tag{10}$$

Als $\lambda_1 = \dots = \lambda_k$ en $\lambda_j \neq \lambda_k$ voor $j > k$, dan zijn $e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$ oplossingen. Op deze manier krijgt men steeds n oplossingen y_1, \dots, y_n met de eigenschap dat de algemene oplossing van (8) wordt gegeven door (10). Als a_1, \dots, a_n reëel zijn en een van de wortels, bijv. $\alpha_1 = \alpha + i\beta$, complex is, dan is ook $\bar{\alpha}_1$ een wortel en $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ zijn reële oplossingen. Op deze manier kan men steeds n reële oplossingen van (8) vinden, zodat de algemene reële oplossing van (8) wordt gegeven door (10). De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f \tag{11}$$

wordt dan weer gegeven door

$$y = y_p + y_{\text{hom}}$$

waar y_p een particuliere oplossing van (11) is en y_{hom} de algemene oplossing van (8).

Voorbeeld 2. Bepaal de algemene reële oplossing van

$$y'' - y' + y = e^x .$$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Deze heeft wortels $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, zodat de algemene reële oplossing van de homogene vergelijking gegeven wordt door

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{1}{2}x\sqrt{3} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{1}{2}x\sqrt{3} ,$$

met C_1 en C_2 reëel.

Een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking is $y = e^x$.

De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking is dus

$$y = e^x + C_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{1}{2}x\sqrt{3} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{1}{2}x\sqrt{3}$$

met C_1 en C_2 reëel.

Voorbeeld 3. Bepaal de algemene oplossing van

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-2x} .$$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ en heeft als wortels $\lambda = -2$ en $\lambda = -3$. De algemene oplossing van de homogene vergelijking wordt dan gegeven door

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} .$$

Zoals aangegeven in de tabel van blz.158 is er een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking van de gedaante $y = axe^{-2x}$. Dan moet gelden

$$(-4ae^{-2x} + 4axe^{-2x}) + 5(ae^{-2x} - 2axe^{-2x}) + 6axe^{-2x} = e^{-2x} ,$$

$ae^{-2x} = e^{-2x}$, dus $a = 1$.

De algemene oplossing van de vergelijking is dus

$$y = xe^{-2x} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} ,$$

waarbij C_1 en C_2 willekeurige reële constanten zijn.

De volgende stelling is soms handig om een particuliere oplossing van de vergelijking $y'' + ay' + by = f$ te vinden als in f goniometrische functies voorkomen.

5.7.8. Stelling. Laat y_p een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking $y'' + ay' + by = f$ met a en b reëel zijn. Dan is $\operatorname{Re} y_p$ een particuliere oplossing van $y'' + ay' + by = \operatorname{Re} f$, en $\operatorname{Im} y_p$ een particuliere oplossing van $y'' + ay' + by = \operatorname{Im} f$.

Bewijs. Uit $y_p'' + ay_p' + by_p = f$ volgt

$$\operatorname{Re}(y_p'' + ay_p' + by_p) = \operatorname{Re} f ,$$

$$\operatorname{Re}(y_p'') + a\operatorname{Re}(y_p') + b\operatorname{Re} y_p = \operatorname{Re} f ,$$

$$(\operatorname{Re} y_p)'' + a(\operatorname{Re} y_p)' + b\operatorname{Re} y_p = \operatorname{Re} f .$$

Analoog tonen we aan dat $\operatorname{Im} y_p$ een particuliere oplossing is van $y'' + ay' + by = \operatorname{Im} f$. □

Voorbeeld 6. Bepaal alle reële oplossingen van

$$y'' + y = x \sin x .$$

De karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 1 = 0$ heeft wortels $\pm i$. De algemene oplossing van de homogene vergelijking is dus $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Daar $x \sin x = \operatorname{Im}(xe^{ix})$ zoeken we eerst een particuliere oplossing van de vergelijking

$$y'' + y = xe^{ix} .$$

Er is nu een particuliere oplossing $y = (ax^2 + bx)e^{ix}$. Substitutie levert

$$(2a + 2i(2ax + b) - (ax^2 + bx))e^{ix} + (ax^2 + bx)e^{ix} = xe^{ix} ,$$

$$(4aix + 2a + 2bi)e^{ix} = xe^{ix} ,$$

zodat $a = \frac{1}{4i} = -\frac{1}{4}i$, $b = \frac{1}{4}$.

Een particuliere oplossing van de vergelijking $y'' + y = xe^{ix}$ is dus $(-\frac{1}{4}ix^2 + \frac{1}{4}x)(\cos x + i \sin x)$, zodat een particuliere oplossing van $y'' + y = x \sin x$ is

$$\operatorname{Im}(-\frac{1}{4}ix^2 + \frac{1}{4}x)(\cos x + i \sin x) = -\frac{1}{4}x^2 \cos x + \frac{1}{4}x \sin x .$$

De algemene reële oplossing van $y'' + y = x \sin x$ is dus

$y = \frac{1}{4}x \sin x - \frac{1}{4}x^2 \cos x + \alpha \cos x + \beta \sin x$ met α en β reëel.

5.5. Trillingen

Voorbeeld 1. We beschouwen een stoffelijk punt met massa m , dat kan bewegen langs een rechte lijn (de x -as). We beschouwen x als functie van de tijd. Op het punt werken verschillende krachten. Een kracht die op het punt werkt noemen we positief als ze werkt in de richting van toenemende x . Als de kracht werkt in de richting waarin x afneemt (dus naar de negatieve x -as wijst), dan spreken we van een negatieve kracht (in positieve richting). De volgende krachten werken op het punt.

i) een veerkracht F_1 evenredig met x :

$$F_1 = -kx \text{ met } k > 0 .$$

Merk op dat de kracht steeds naar de oorsprong gericht is als $x \neq 0$.

ii) een dempingskracht F_2 evenredig aan de snelheid

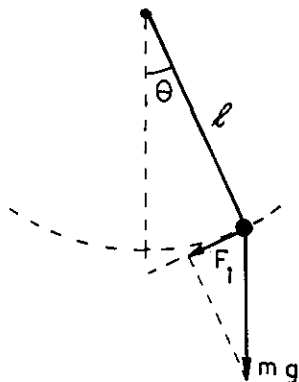
$$F_2 = -b\dot{x} = -b \frac{dx}{dt} \text{ met } b > 0 .$$

iii) een tijdsafhankelijke uitwendige kracht $F_3 = f(t)$.

Volgens de wet van Newton is de som van de krachten gelijk aan het product van massa en versnelling, dus

$$-kx - b\dot{x}(t) + f(t) = m\ddot{x}(t).$$

Voorbeeld 2. We beschouwen de uitwijkingshoek θ van een slinger als functie van de tijd (zie figuur).

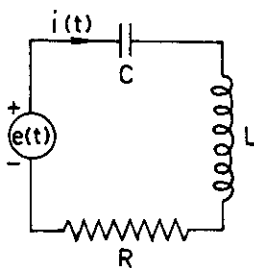


Met behulp van de wet van Newton vinden we op analoge manier als in voorbeeld 1:

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - b\ell\dot{\theta} + f(t)$$

waar ℓ de lengte van de slinger is, g de versnelling van de zwaartekracht, b een dempingscoëfficiënt en $f(t)$ een tijdsafhankelijke uitwendige kracht.

Voorbeeld 3. In een elektrisch circuit zijn opgenomen een spanningsbron met electromotorische kracht $e(t)$, een condensator met capaciteit C , een spoel met coëfficiënt van zelfinductie L en een weerstand R .



De grootte $e(t)$ wordt positief gerekend als aan de + kant de potentiaal hoger is dan aan de - kant. De stroomsterkte $i(t)$ door het circuit wordt positief geteld als de stroom loopt in de richting van de pijl. Het teken van de potentiaal over de passieve elementen (L , C , R) wordt zo gekozen dat een positieve stroom loopt van een hogere potentiaal naar een lagere. Met deze tekenafspraken is de spanning op het tijdstip t over de weerstand, spoel en condensator resp. Ri , $L \frac{di}{dt}$ en $V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$, waarbij V_0 de beginspanning (op het tijdstip $t=0$) over de condensator voorstelt.

We vinden hieruit

$$e(t) = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + Ri + L \frac{di}{dt}$$

en na differentiëren

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{de}{dt} .$$

In bovenstaande voorbeelden zijn we gestuit op een differentiaalvergelijking van de vorm

$$m\ddot{x} + a_1\dot{x} + b_1x = f_1(t) \quad (1)$$

met $a_1 \geq 0$, $b_1 \geq 0$, $m > 0$. We delen (1) door m en we voeren nieuwe grootheden in: $a := a_1/m$, $b := b_1/m$, $f(t) = f_1(t)/m$. Dan gaat (1) over in

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \quad (2)$$

met $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Eerst onderzoeken we het gedrag van de homogene vergelijking (d.w.z. het geval $f(t) = 0$ voor alle t). De karakteristieke vergelijking luidt

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \quad (3)$$

We onderscheiden vier gevallen:

- A) $a = 0$, $b > 0$. De karakteristieke wortels (d.w.z. de wortels van de karakteristieke vergelijking) zijn $\lambda = \pm i\omega_0$, waarbij $\omega_0 := \sqrt{b}$. De algemene reële oplossing van de homogene differentiaalvergelijking is

$$x(t) = p \cos \omega_0 t + q \sin \omega_0 t,$$

waarbij p en q willekeurige constanten zijn. Door de vector $(p, -q)$ in poolcoördinaten te schrijven, d.w.z. $(p, -q) = (A_0 \cos \varphi_0, A_0 \sin \varphi_0)$, vinden we als oplossing

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

d.w.z. een harmonische trilling met amplitude A_0 , beginfase φ_0 en hoekfrequentie ω_0 . De grootte $T := 2\pi/\omega_0$ heet de trillingstijd (of de periode) en $\nu := 1/T = \omega_0/(2\pi)$ heet de frequentie van de trilling. De trilling is grafisch weergegeven in figuur 1.

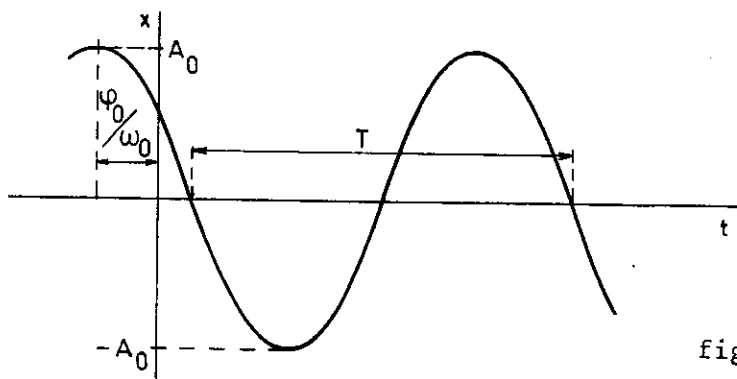


fig. 1

B) $0 < a^2 < 4b$. De karakteristieke wortels zijn nu $\lambda = -\frac{1}{2}a \pm i\omega_0$, waarbij $\omega_0 := \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}$. De algemene reële oplossing wordt

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{1}{2}at} (p \cos \omega_0 t + q \sin \omega_0 t) = \\ &= A_0 e^{-\frac{1}{2}at} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \end{aligned}$$

waarbij we weer $(p, -q) = (A_0 \cos \varphi_0, A_0 \sin \varphi_0)$ hebben geschreven. Dit is een gedempte trilling met beginamplitude A_0 , beginfase φ_0 en hoekfrequentie ω_0 . Ook hier heet $T := 2\pi/\omega_0$ de trillingstijd en $\nu := 1/T$ de frequentie. Een grafische voorstelling van de trilling wordt gegeven in figuur 2.

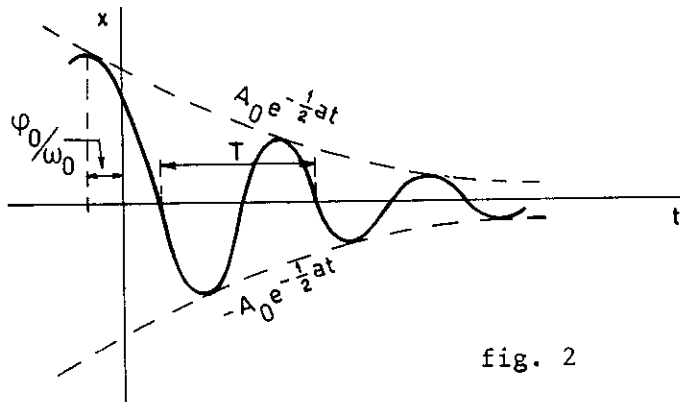


fig. 2

C) $0 < a^2 = 4b$. Er is één karakteristieke wortel $\lambda = -\frac{1}{2}a$. De algemene oplossing is

$$x(t) = (pt + q)e^{-\frac{1}{2}at},$$

zie figuur 3.

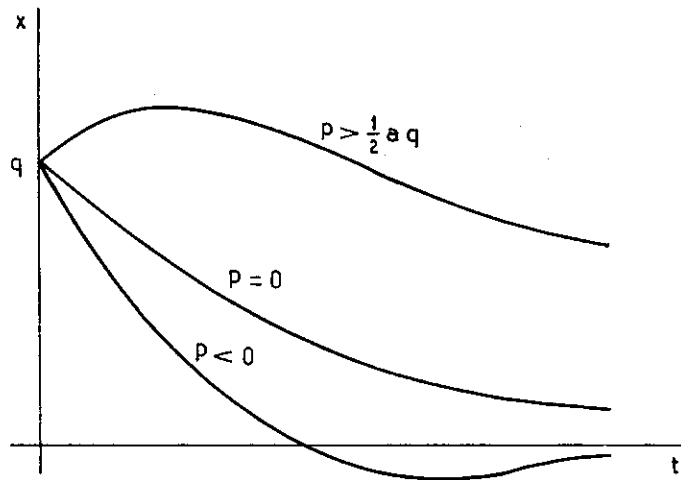


fig. 3

D) $a^2 > 4b > 0$. De karakteristieke wortels zijn $\lambda = -\frac{1}{2}a \pm c$, waarbij $c := \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$. De algemene oplossing is

$$x(t) = pe^{-\left(\frac{1}{2}a-c\right)t} + qe^{-\left(\frac{1}{2}a+c\right)t},$$

zie figuur 4.

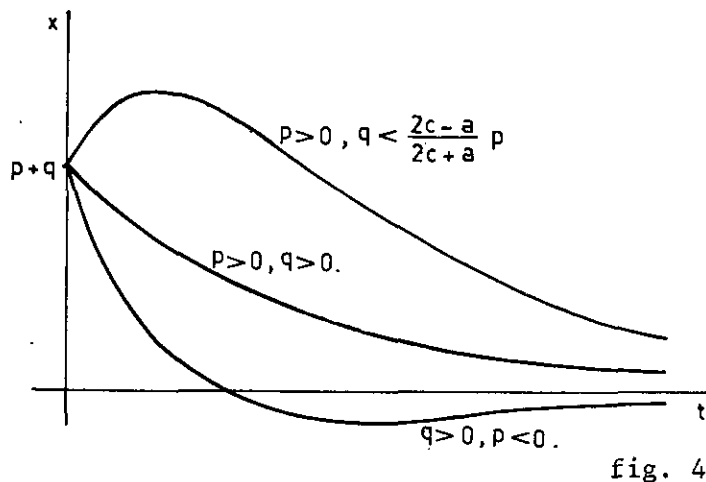


fig. 4

Men noemt het systeem in het geval

- A) ongedempt
- B) onderkritisch gedempt
- C) kritisch gedempt
- D) bovenkritisch gedempt.

In de gevallen A en B heeft de functie $x(t)$ oneindig veel nulpunten, d.w.z., de evenwichtsstand wordt oneindig vaak gepasseerd, terwijl dat in de gevallen C en D hoogstens één keer gebeurt (ga na).

We beschouwen nog twee bijzondere gevallen:

E) $b = 0$, $a > 0$. De karakteristieke wortels zijn $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -a$. De algemene oplossing is

$$x(t) = p + qe^{-at},$$

zie figuur 5.

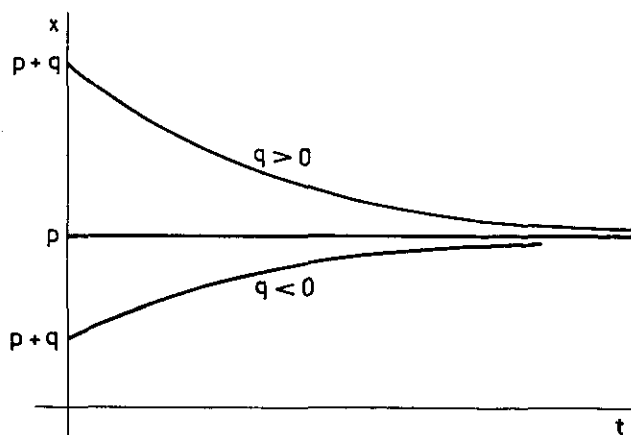


fig. 5

F) $a = b = 0$. Er is één karakteristieke wortel, nl. $\lambda = 0$.

De algemene oplossing is

$$x(t) = p + qt,$$

zie figuur 6.

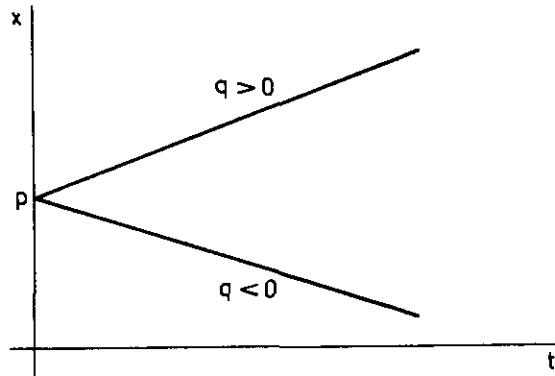


fig. 6

Figuur 7 geeft een overzicht van de verschillende gevallen in het eerste kwadrant van het (a,b)-vlak.

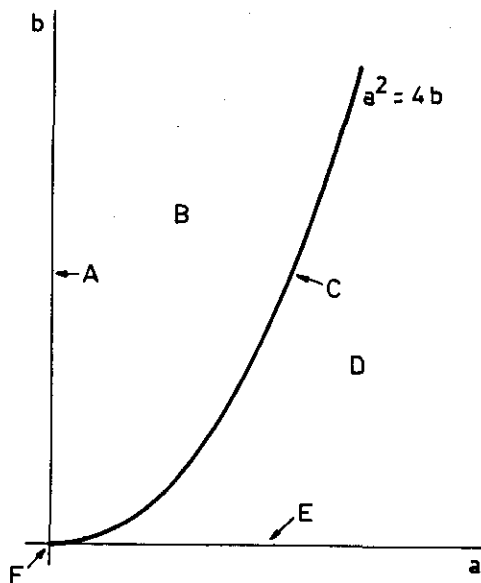


fig. 7

We beschouwen nu de inhomogene vergelijking (2) en wel voor het geval $f(t) = A \cos \omega t$ met $A > 0$, $\omega > 0$. We nemen eerst aan dat $a = 0$, $b > 0$. Dit correspondeert met het geval A bij de homogene vergelijking. We schrijven $f(t) = \text{Re } Ae^{i\omega t}$. We bepalen nu een particuliere oplossing x van

$$\ddot{x}(t) + bx(t) = A \cos \omega t \tag{4}$$

door de vergelijking

$$\ddot{y}(t) + by(t) = Ae^{i\omega t} \quad (5)$$

op te lossen en vervolgens $x(t) = \text{Re } y(t)$ te stellen. Probeer als particuliere oplossing van (5): $y(t) = Be^{i\omega t}$, dan volgt na substitutie in (5): $B(-\omega^2 + \omega_0^2) = A$, waarbij $\omega_0 := \sqrt{b}$. De laatste vergelijking heeft een oplossing als $\omega \neq \omega_0$. In dat geval vinden we

$$y(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega t}$$

als particuliere oplossing van (5).

De functie

$$x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

is derhalve een particuliere oplossing van (4).

De algemene oplossing van (4) is

$$x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \omega \neq \omega_0. \quad (6)$$

In het algemeen is de oplossing alleen periodiek als $A_0 = 0$.

De amplitude van de periodieke oplossing is $B = A/|\omega_0^2 - \omega^2|$, de fase is $\varphi_0 = 0$ als $\omega < \omega_0$, $\varphi_0 = \pi$ als $\omega > \omega_0$.

In figuur 8 is de amplitude uitgezet als functie van de hoekfrequentie ω .

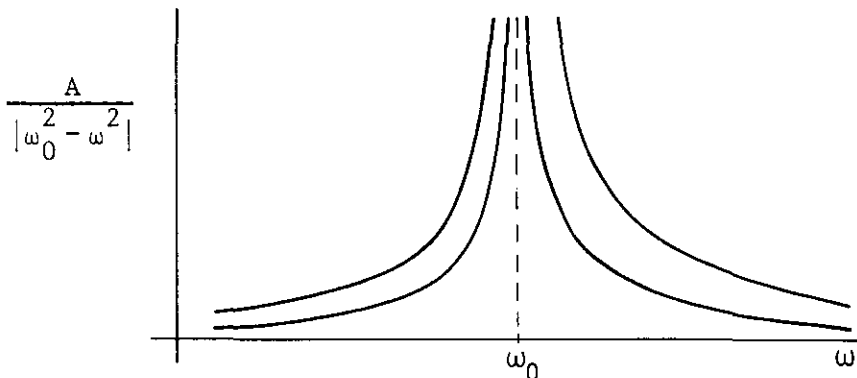


fig. 8

De algemene oplossing (6) is een combinatie van periodieke functies. Het gedrag van zo'n functie is in het algemeen zeer onregelmatig. We onderzoeken nu het speciale geval dat ω dicht bij ω_0 ligt. Het blijkt dat de amplitude periodiek varieert met periode $2\pi/|\omega - \omega_0|$. We kunnen dit als volgt inzien. Zij $\omega_0 = \omega + \delta$ en schrijf $\varphi(t) = \delta t + \varphi_0$. Dan vinden we

$$x(t) = B \cos \omega t + A_0 \cos(\omega t + \varphi(t)) = (B + A_0 \cos \varphi(t)) \cos \omega t - A_0 \sin \varphi(t) \sin \omega t = R(t) \cos(\omega t + \alpha(t)) ,$$

waarbij $R(t)$ en $\alpha(t)$ worden gegeven door

$$B + A_0 \cos \varphi(t) = R(t) \cos \alpha(t) ,$$

$$A_0 \sin \varphi(t) = R(t) \sin \alpha(t) ,$$

zie figuur 9.

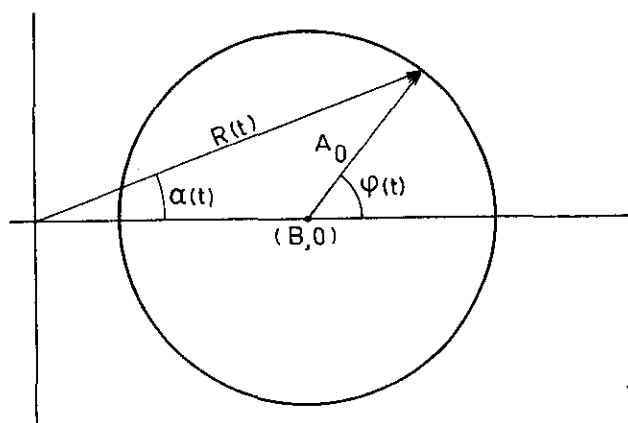


fig. 9

Als δ klein is, dan verandert φ en derhalve α erg langzaam. Verder geldt

$$R^2(t) = B^2 + A_0^2 + 2A_0 B \cos \varphi(t) .$$

In figuur 10 is de grafiek geschetst van de trilling $x(t)$ als gegeven door (6).

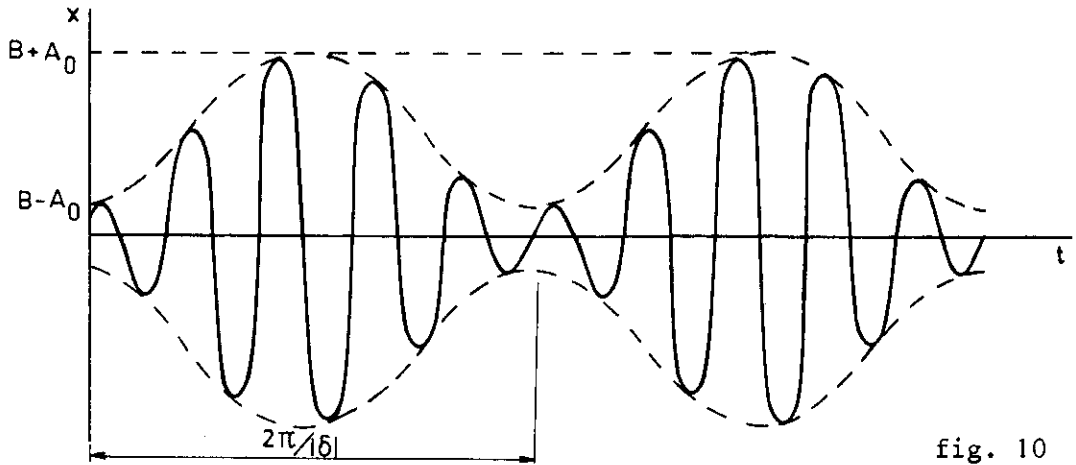


fig. 10

Als $\omega = \omega_0$, dan proberen we als particuliere oplossing van (5): $y = Bte^{i\omega t}$.
Substitutie in de vergelijking $\ddot{y} + \omega_0^2 y = Ae^{i\omega t}$ levert $B = \frac{A}{2i\omega_0}$. In dit geval is

$$x(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t + A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

de algemene oplossing van (2); zie figuur 11.

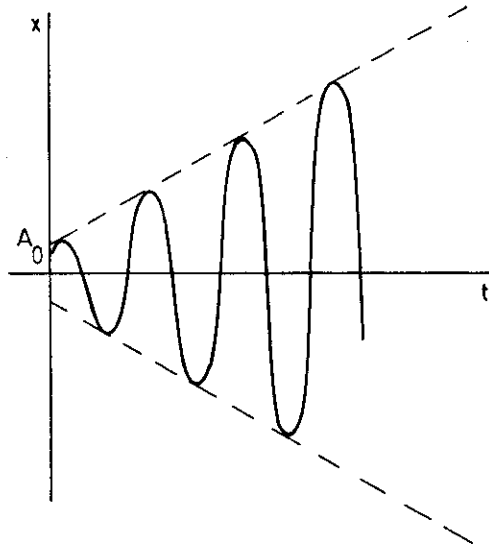


fig. 11

We kunnen ons deze situatie ontstaan denken door δ naar nul te laten naderen in het eerder genoemde geval (vergelijk fig. 10, 11).

We beschouwen nu het geval $a > 0$, $b > 0$, $f(t) = A \cos \omega t$. We zoeken eerst een particuliere oplossing van de vergelijking

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = Ae^{i\omega t},$$

van de vorm $y = Be^{i\omega t}$. Na substitutie volgt voor B de vergelijking

$$(-\omega^2 + ia\omega + b)B = A,$$

met oplossing

$$B = \frac{A}{b - \omega^2 + ia\omega} = Qe^{i\alpha},$$

waarbij

$$Q := \frac{A}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}}, \quad \alpha := \arg \frac{A}{b - \omega^2 + ia\omega}.$$

De algemene oplossing van de vergelijking $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = A \cos \omega t$ luidt dan

$$x(t) = Q \cos(\omega t + \alpha) + x_0(t)$$

waarbij $x_0(t)$ de algemene oplossing is van de homogene vergelijking. De expliciete gedaante van $x_0(t)$ hangt af van de parameters a en b (zie de gevallen B, C en D van de homogene vergelijking), maar steeds zal gelden $x_0(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$). We zien dat op den duur alle oplossingen heel veel gaan lijken op de particuliere oplossing

$$x(t) = Q \cos(\omega t + \alpha).$$

Deze oplossing is ook de enige periodieke oplossing van het systeem. Men noemt $Q \cos(\omega t + \alpha)$ de stationaire oplossing van de vergelijking; fysisch beschrijft deze oplossing de zg. gedwongen trilling van het systeem. De term $x_0(t)$ in de algemene oplossing correspondeert met een inschakelverschijnsel dat na zekere tijd verwaarloosbaar wordt t.o.v. de gedwongen trilling.

De grafiek van de functie $Q = Q(\omega)$ heet de resonantiekromme. Als $b \leq \frac{1}{2}a^2$, dan is Q maximaal voor $\omega = 0$. Als $b > \frac{1}{2}a^2$, dan is Q maximaal voor

$\omega = \omega_{\text{res}} := \sqrt{b - \frac{1}{2}a^2}$, de resonantiehoekfrequentie. In dit geval geldt

$\omega_{\text{res}} < \omega_0 := \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}$ (zie geval B van de homogene vergelijking).

We noemen ω_0 de eigenhoekfrequentie van het systeem. Verder noemen we $\nu_{\text{res}} := \omega_{\text{res}} / (2\pi)$ de resonantiefrequentie en $\nu_0 := \omega_0 / (2\pi)$ de eigenfrequentie van het systeem. Gewoonlijk is a^2 veel kleiner dan b . In dat geval is $\omega_{\text{res}} \approx \omega_0 \approx \sqrt{b}$. Merk op dat voor $\omega = \sqrt{b}$ geldt $B = A / (ia\sqrt{b})$, dus $Q = A / (a\sqrt{b})$ en $\alpha = -\pi/2$. In figuur 12 zijn een aantal resonantiekrommen getekend voor $a = 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ en $b = 1$.

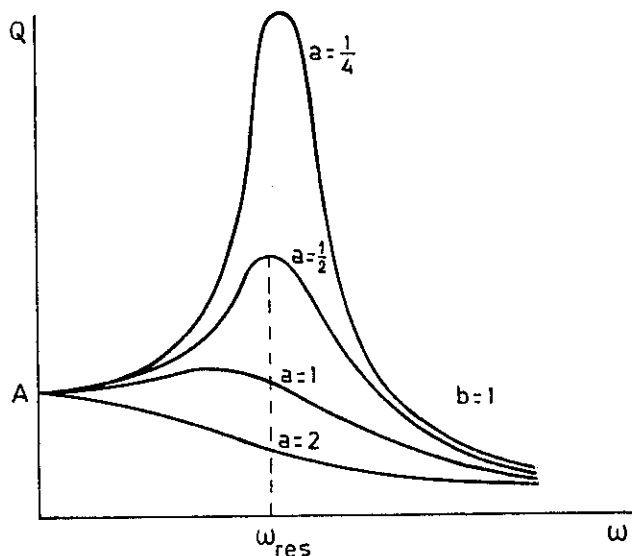


fig. 12

Tenslotte bespreken we nog een voorbeeld van een inhomogene differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten, waarbij het rechterlid een discontinue functie bevat.

Voorbeeld 4. $\ddot{x} + x = 1$ voor $0 \leq t \leq T$,

$$\ddot{x} + x = 0 \text{ voor } t > T,$$

onder de beginvoorwaarden $x(0) = \dot{x}(0) = 0$; (de constanten in de algemene oplossing dienen zo te worden gekozen, dat $x(0) = \dot{x}(0) = 0$). In dit geval kan men niet van de oplossing eisen dat ze twee keer differentieerbaar is in $t = T$. Wanneer in een differentiaalvergelijking het rechterlid een sprong maakt, dan neemt de hoogste afgeleide die in de differentiaalvergelijking voorkomt, deze sprong over. De lagere orde afgeleiden blijven continu in het sprongpunt. In bovenstaande vergelijking zal $\ddot{x}(t)$ een sprong vertonen in $t = T$, en $\dot{x}(t)$, $x(t)$ zullen daar continu zijn. We bepalen nu eerst de

oplossing op $[0, T)$ en we gebruiken daarna $x(T) = \lim_{t \uparrow T} x(t)$ en $\dot{x}(T) = \lim_{t \uparrow T} \dot{x}(t)$

als beginwaarden om het probleem op (T, ∞) op te lossen.

De algemene oplossing van de homogene vergelijking is

$$x(t) = a \cos t + b \sin t . \quad (7)$$

Een particuliere oplossing van de vergelijking $\ddot{x} + x = 1$ is $x(t) = 1$ voor alle t . De algemene oplossing van deze vergelijking luidt dan

$$x(t) = 1 + a \cos t + b \sin t .$$

We dienen nu a, b zodanig te bepalen dat de oplossing $x(t)$ voldoet aan $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$. Dit levert twee vergelijkingen voor a en b : $1 + a = 0, b = 0$. De gevraagde oplossing $x(t)$ luidt dus

$$x(t) = 1 - \cos t \text{ voor } 0 < t < T.$$

Bepaal nu

$$\lim_{t \uparrow T} x(t) = 1 - \cos T, \quad \lim_{t \uparrow T} \dot{x}(t) = \sin T .$$

Op het interval $t > T$ is de differentiaalvergelijking homogeen met algemene oplossing (7). De constanten a en b dienen zo bepaald te worden dat

$$x(T) = a \cos T + b \sin T = 1 - \cos T ,$$

$$\dot{x}(T) = -a \sin T + b \cos T = \sin T .$$

Uit deze twee vergelijkingen zijn a en b eenvoudig op te lossen: $a = \cos T - 1, b = \sin T$. De gezochte oplossing van de differentiaalvergelijking luidt dan

$$x(t) = (\cos T - 1)\cos t + \sin T \sin t = \cos(t - T) - \cos t \text{ voor } t > T.$$