TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 10

bestemd voor

BDK-I, WSK-I, N-I, E-I en T-I

Najaarssemester 1978

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Wiskunde 10

bestemd voor

BDK-I, WSK-I, N-I, W-I, E-I en T-I

Dictaatnr. 2.226 Prijs f10,50

ENKELE NOTITIES
bij
WISKUNDE 10

De cursus Wiskunde 10 uit 1971 verschilt nauwelijks van de 1969 versie van Wiskunde I. De afdeling Bouwkunde wilde na 1970 niet meer meedoen met het algemene wiskundeonderwijs voor *alle* afdelingen. Als teken des onderscheids werd een dubbelcijferige codering voor de basis-wiskundevakken ingevoerd. Bouwkunde zou echter voorlopig de enige dissident blijven. De definitieve sloop van het algemeen wiskundeonderwijs op academisch niveau zou pas dik twintig jaar later, bij Werktuigbouwkunde, een aanvang nemen.
In 1973 werd een nieuwe opzet ontworpen voor het 1e-jaars wiskundeonderwijs zoals dat voor alle afdelingen zou moeten zijn: De commissie B74 bestaande uit dr. W. van der Meiden(voorzitter), drs. H.G. ter Morsche(secretaris), prof. dr. S.T.M. Ackermans, prof. dr. J. Boersma, dr. ir. M.L.J. Hautus, drs. Ligtmans, drs J.H. Timmermans en dr. P.G. Vroegindeweij produceerde een manuscript met de gewenste 1e-jaarsstof. Voor de 1974-editie van Wis 10 werd al geput uit het B74-manuscript. In 1975 verscheen hiervan een flink uitgebreide versie om een betere aansluiting aan het VWO te verkrijgen. In 1978 verscheen de variant die stand zou houden tot in 1982 de 2-fasen structuur werd ingevoerd. Let, bijvoorbeeld, in de 1978-variant toch eens op dat schitterende en efficiënte hoofdstuk 6 over 2e-orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten. Vol illustratieve voorbeelden ten behoeve van de faculteiten. Dat was nog echt academische vorming!

JdG, 4 Juli 2005

M. Vriends
Wsk

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 10

bestemd voor

BDK-1, WSK-1, N-1, W-1, E-1 en T-1

Najaarssemester 1978

Inhoudsopgave blz.

Hoofdstuk 4. Oneigenlijke integralen en reeksen

Hoofdstuk 5. Complexe getallen

Hoofdstuk 6. Differentiaalvergelijkingen

Hoofdstuk 0. Inleiding

1. Enige notaties

0.1.1. In de wiskunde wordt gebruik gemaakt van bepaalde delen van de verzamelingenleer en de logica. Wij zullen deze theorieën niet behandelen; het begrip "verzameling" en het begrip "bewering" zullen we bekend veronderstellen.

Voor het aangeven van verzamelingen zullen we gebruik maken van de volgende symbolen:

$\emptyset$	de lege verzameling
$\mathbb{N}$	de verzameling der natuurlijke getallen, dit zijn de getallen 1,2,3,...
$\mathbb{Z}$	" " " gehele "
$\mathbb{Q}$	" " " rationale "
$\mathbb{R}$	" " " reële "
$\mathbb{C}$	" " " complexe "

Verder gaan we de volgende symbolen uit de verzamelingenleer gebruiken:

$\in$	$a \in V$	a is een element van V
$\notin$	$a \notin V$	a is geen element van V
$\subset$	$A \subset B$	A is een deelverzameling van B
$\supset$	$A \supset B$	B is een deelverzameling van A
$\cap$	$A \cap B$	de doorsnede van A en B
$\cup$	$A \cup B$	de vereniging van A en B
$\backslash$	$A \backslash B$	het verschil van A met B
$\times$	$A \times B$	het cartesisch product van A en B, dus de verzameling van alle mogelijke paren (a,b) met eerste element a uit A en tweede element b uit B. $A \times B \times C$, $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ voor $n = 2,3,4,\ldots$ worden analoog gedefinieerd. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wordt vaak afgekort tot $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tot $\mathbb{R}^3$, enzovoort.

Eindige verzamelingen zullen we ook aangeven door, tussen accoladen, alle elementen op te schrijven.

Voorbeelden:

$\{1,2,5\}$, de verzameling bestaande uit de getallen 1, 2 en 5;

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ (dit is een voorbeeld van een niet-eindige verzameling).

Bij een gegeven verzameling A beschouwen we soms de deelverzameling B bestaande uit die elementen van A, die een bepaalde eigenschap α hebben.
Notatie: $B = \{a \in A \mid a \text{ heeft eigenschap } \alpha\}$.
Voorbeelden:

$\{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$, de verzameling van alle positieve reële getallen

$\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1}{2}x \in \mathbb{N}\}$, de verzameling van alle positieve even getallen.

Aan de logica ontlenen we de volgende symbolen, die we slechts bij wijze van afkorting gebruiken:

$\wedge$	en
$\vee$	of (in de zin van: en/of)
$\neg$	niet
$\forall$	voor alle ...
$\exists$	er is ...
$\exists!$	er is precies één ... .

Van het teken $\Rightarrow$ zullen we geen gebruik maken.

Met het teken $\square$ geven we het einde van een bewijs aan.

0.1.2. <u>Opgave</u>. Ga na dat de volgende uitspraken alle juist zijn.

1) $\{2,3,4,5\} = \{3,5,2,4\}$
2) Het aantal elementen van de verzameling $\{2,3,7,3,1,2,3,4\}$ is 5.
3) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
4) $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$
5) $\emptyset \subset \mathbb{R}$
6) $0 \notin \mathbb{N}$
7) $-3 \in \mathbb{Z}$
8) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$
9) $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 3\} = \{2\}$
10) Laat A, B en C willekeurige deelverzamelingen zijn van een vaste verzameling U. Dan geldt

    a) $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$
    b) $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$
    c) $A \backslash B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
    d) als $A \subset B$ en $B \subset C$, dan geldt $A \subset C$
    e) $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$
    f) $(A \backslash B) \cup B = A \cup B$

11) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ ((x-1)(x+1) = x^2 - 1)$
12) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{y\in\mathbb{R}}\ (y > x)$
13) $\neg\ \exists_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{y\in\mathbb{R}}\ (y \leq x)$
14) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ is de cirkel om de oorsprong met straal 1 in $\mathbb{R}^2$
15) er bestaan verzamelingen A en B met $(A\setminus B) \cup (B\setminus A) \neq A \cup B$.

0.1.3. Gemakshalve zullen we een aantal slordigheden in de notaties begaan. Zo schrijven we bijvoorbeeld $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in plaats van $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists_{m\in\mathbb{N}}\ (n = 2m)\}$, $\{(x,x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ in plaats van $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, terwijl uitspraken als $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ bij afspraak steeds zullen betekenen:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ ((x+1)^2 = x^2 + 2x + 1)\ .$$

Spreken we over getallen, zonder aan te geven wat voor soort getallen, dan zijn reële getallen bedoeld.

2. Getalverzamelingen

0.2.1. Wanneer we de verzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ vergelijken, zien we: binnen $\mathbb{N}$ kunnen we optellen en vermenigvuldigen, maar in het algemeen niet aftrekken, niet delen; binnen $\mathbb{Z}$ kunnen we optellen, vermenigvuldigen en aftrekken, maar in het algemeen niet delen; binnen $\mathbb{Q}$ kunnen we optellen, vermenigvuldigen, aftrekken en delen (behalve door 0). Bovendien is er in deze verzamelingen een volledige ordening volgens grootte: voor ieder tweetal elementen x en y geldt steeds hetzij $x < y$, hetzij $x = y$, hetzij $x > y$. De uitbreiding van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{Z}$ en verder naar $\mathbb{Q}$ is zinvol, omdat we daardoor meer rekenoperaties onbeperkt kunnen gebruiken. De verdere uitbreiding naar $\mathbb{R}$ heeft echter ook een andere reden: de verzameling der reële getallen bezit een eigenschap meer dan die der rationale getallen, en wel dat hij "volledig" is in een bepaalde zin. Later komen we hierop nog terug: voorlopig volstaan we met de opmerking, dat de bedoelde "volledigheid" gevoelsmatig overeenkomt met het opvullen van de gehele getallenrechte, zonder nog ergens "gaatjes" achter te laten.

0.2.2. Vaak zullen we gebruik maken van verzamelingen van aaneengesloten reële getallen, zogenaamde <u>intervallen</u>. We onderscheiden de volgende typen intervallen: (a en b zijn reële getallen, $a < b$)

$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, notatie: (a,b)
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, notatie: $[a,b)$
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, notatie: $(a,b]$
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, notatie: $[a,b]$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$, notatie: (a,∞)
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$, notatie: $[a,\infty)$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$, notatie: $(-\infty,b)$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$, notatie: $(-\infty,b]$
$\mathbb{R}$, ook wel genoteerd door $(-\infty,\infty)$.

De eerste vier van deze intervallen heten <u>begrensd</u>, de andere <u>onbegrensd</u>. De intervallen (a,b), (a,∞), $(-\infty,b)$ en $(-\infty,\infty)$ heten <u>open intervallen</u>; $[a,b]$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ en $(-\infty,\infty)$ heten <u>gesloten intervallen</u>.

In het vervolg zullen we bij het gebruiken van de notaties (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ en $[a,b]$ steeds stilzwijgend aannemen dat $a < b$.

In deze inleiding bespreken we vervolgens een tweetal vaak voorkomende bewijsmethoden:

3. Bewijs uit het ongerijmde

0.3.1. Neem aan dat we een stelling van de volgende vorm willen bewijzen: "In een bepaalde situatie geldt, dat een of andere bewering B waar is". Soms kunnen we een bewijs hiervoor als volgt handig inkleden: Neem aan, dat B niet waar is. Toon vervolgens aan, dat deze aanname in die situatie tot een tegenspraak leidt. Dan moet de aanname dat B niet waar was onjuist geweest zijn, zodat B waar moet zijn.

0.3.2. <u>Voorbeeld</u>. Het getal $\sqrt{2}$ is niet rationaal: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

<u>Bewijs</u>. Neem aan dat $\sqrt{2}$ rationaal is. Dan is $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ met $p \in \mathbb{N}$ en $q \in \mathbb{N}$. Hieruit volgt: $p^2 = 2q^2$. Ontbind nu het getal p^2 en het getal $2q^2$ in factoren. Dan heeft p^2 een even aantal of geen factoren 2, en $2q^2$ een oneven aantal factoren 2. De gelijkheid $p^2 = 2q^2$ is dus onmogelijk. Uit deze tegenspraak volgt: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

0.3.3. Voorbeeld. Wanneer voor twee getallen a en b geldt $\forall_{\varepsilon>0}$ $(a < b + \varepsilon)$, dan is $a \le b$.

Bewijs. Stel $a > b$. Dan is $a - b > 0$. Kies voor ε het getal $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(a - b)$, dan is $\varepsilon_1 > 0$. Uit het gegeven, met $\varepsilon = \varepsilon_1$ volgt nu: $a - b < \varepsilon_1$. Dus $a - b < \frac{1}{2}(a - b)$. Dit is onmogelijk, zodat de aanname $a > b$ onjuist is. Dus $a \le b$. □

0.3.4. Opgave. Bewijs, dat er geen kleinste positief reëel getal bestaat.

4. Bewijs door volledige inductie

0.4.1. Wanneer we willen bewijzen, dat een bepaalde bewering B(n) waar is voor alle natuurlijke getallen n, dan kunnen we dit als volgt doen:

a) verifieer dat B(1) waar is

b) bewijs dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt: Als B(n) waar is, dan is B(n + 1) waar.

Uit a) en b) volgt dat B(n) waar is voor iedere $n \in \mathbb{N}$. Immers, B(1) is waar, dus uit b) met $n = 1$ weten we dat B(2) waar is. Weer uit b), nu met $n = 2$, volgt: B(3) is waar. Hiermee krijgen we uit b): B(4) is waar, dan B(5) is waar, enzovoort.

Opmerking. De bewijsstap: "Als B(n) waar is, dan is B(n + 1) waar" heet de inductiestap. De aanname dat B(n) waar is tijdens het bewijs in de inductiestap heet de inductieveronderstelling.

0.4.2. Voorbeeld. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $n^2 + n$ is deelbaar door 2. We bewijzen dit met volledige inductie.

Bewijs.

a) Voor $n = 1$ is $n^2 + n = 2$, dit is inderdaad deelbaar door 2.

b) Laat n een natuurlijk getal zijn. Neem aan (inductieveronderstelling) dat $n^2 + n$ deelbaar is door 2. Er geldt: $(n + 1)^2 + (n + 1) = n^2 + 3n + 2 = n^2 + n + {}$ $+ 2(n + 1)$ en dit is dan dus ook deelbaar door 2.

Volgens het bewijsprincipe van volledige inductie geldt dan $n^2 + n$ is deelbaar door 2 voor alle $n \in \mathbb{N}$. □

0.4.3. Voorbeeld. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Bewijs. Voor $n = 1$ is het linkerlid 1, het rechterlid $\frac{1}{2}.1.2$ zodat de bewering juist is voor $n = 1$. Zij $n \in \mathbb{N}$, neem aan dat $1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$. We zullen bewijzen, dat dan ook geldt:

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) .$$

Bewijs: $1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = (n+1)(\frac{1}{2}n+1) =$

$$= \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) .$$

Uit het principe van volledige inductie volgt het gestelde nu voor alle $n \in \mathbb{N}$.□

0.4.4. Voorbeeld. We bewijzen de z.g. ongelijkheid van Bernoulli: Zij $h \in \mathbb{R}$, $h \geq -1$. Dan geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$: $(1+h)^n \geq 1+nh$.

Bewijs. Voor $n = 1$ geldt het gelijkteken. Als de ongelijkheid geldt voor n, d.w.z. als $(1+h)^n \geq 1+nh$, dan is

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh) =$$

$$= 1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h$$

zodat dan de ongelijkheid ook geldt voor $n+1$. Via volledige inductie geldt hij dus voor alle $n \in \mathbb{N}$. □

0.4.5. Opgave. Bewijs, dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) .$$

0.4.6. Opmerking. Soms wil men een uitspraak $B(n)$ bewijzen niet voor alle natuurlijke getallen n, maar voor alle gehele getallen $n \geq N$, waarbij N een gegeven geheel getal is. Men kan dan analoog te werk gaan, waarbij dan in onderdeel a) uit 0.4.1 de juistheid van de bewering voor $n = N$ i.p.v. voor $n = 1$ wordt aangetoond, en in onderdeel b) de stap van n op $n+1$ voor $n \geq N$ bewezen wordt.

0.4.7. Voorbeeld. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 4$ geldt: $2^n \geq n^2$.

Bewijs: Voor $n = 4$ geldt het gelijkteken. Neem aan dat voor een $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 4$ geldt: $2^n \geq n^2$. Dan is

$$2^{n+1} = 2.2^n \geq 2n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + 4n =$$

$$= n^2 + 2n + 2n \geq n^2 + 2n + 8 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 .$$

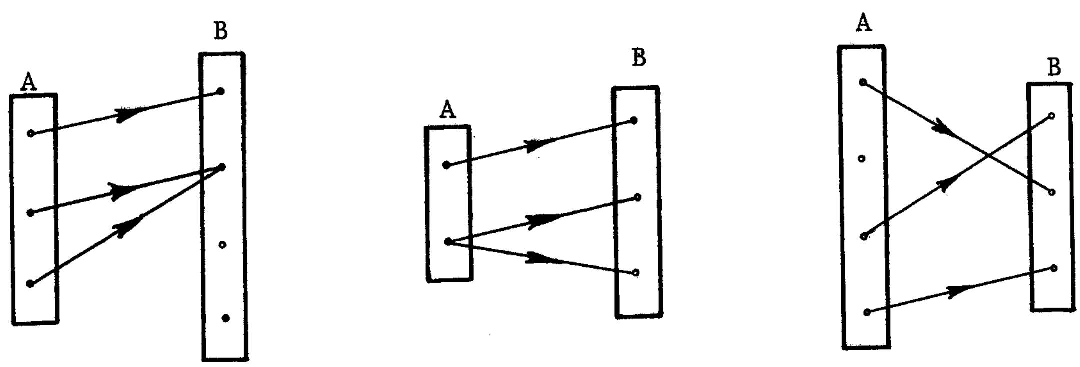
Via volledige inductie geldt de formule dus voor alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. □

5. Afbeeldingen

0.5.1. Definities. Laat A en B verzamelingen zijn. Een afbeelding f van A naar B - notatie $f: A \to B$ - is een voorschrift volgens hetwelk aan elk element van A precies één element van B wordt toegevoegd.
Is b ($\in$ B) het element dat aan a ($\in$ A) wordt toegevoegd, dan schrijven we $b = f(a)$. We noemen b het beeld van a.
A heet de definitieverzameling of het domein van f, notatie: DOM f.
De afbeelding $f: A \to B$ is gelijk aan de afbeelding $g: C \to D$ indien:

i) $A = C$;
ii) $B = D$;
iii) $f(a) = g(a)$ voor alle $a \in A$.

Notatie: $f = g$.
Gemakshalve spreekt men vaak over "de afbeelding f" i.p.v. over "de afbeelding $f: A \to B$".
"Functie" is voor ons synoniem met "afbeelding".

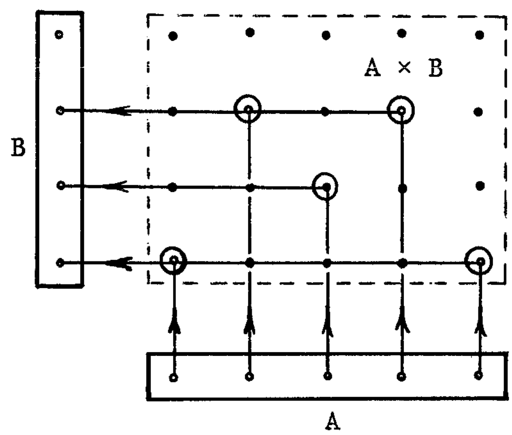


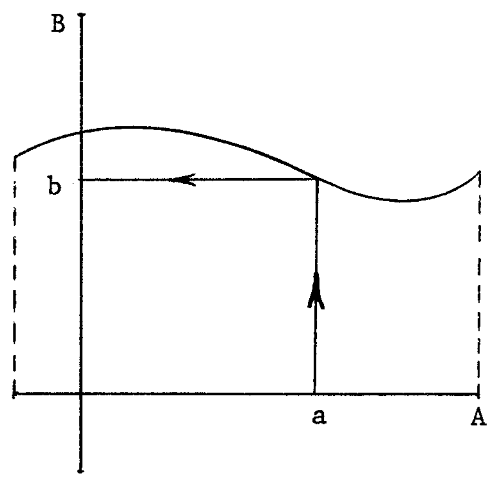
afbeelding — geen afbeelding — geen afbeelding

0.5.2. Bij een afbeelding f: $A \to B$ behoort een grafiek, dit is de volgende deelverzameling van het cartesisch product van A en B:

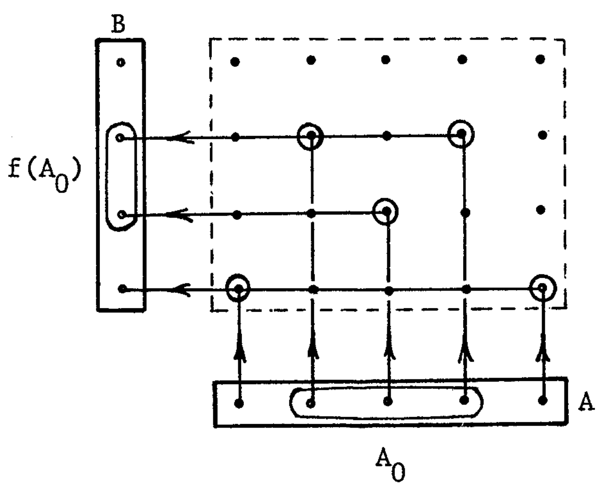
$$\{(x,y) \in A \times B \mid y = f(x)\} .$$

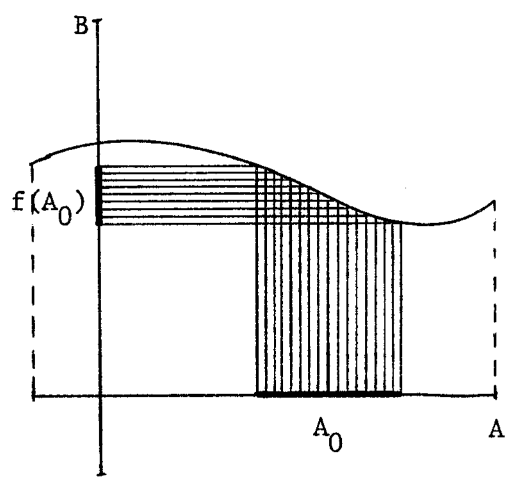
Het voorschrift in de afbeelding f: $A \to B$ kunnen we als volgt in de grafiek aflezen: zoek bij $a \in A$ het paar (a,b) uit de grafiek; b is dan het beeld van a.





0.5.3. Het beeld van een deelverzameling A_0 van A bij een afbeelding f: $A \to B$ is per definitie $\{f(x) \mid x \in A_0\}$.
Notatie: $f(A_0)$. Merk op dat $f(A_0) \subset B$.



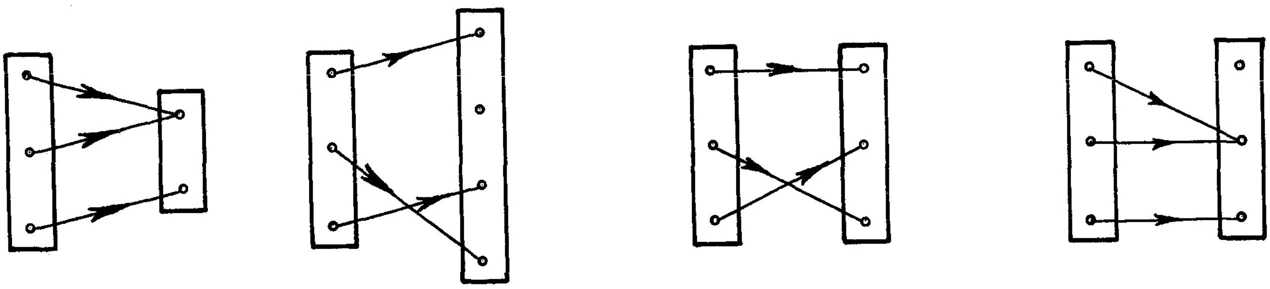


Een afbeelding f: $A \to B$ heet injectief (of één-éénduidig, ook wel een injectie) als voor alle $x \in A$, $y \in A$ met $x \neq y$ geldt: $f(x) \neq f(y)$. Anders gezegd: als voor alle $x \in A$, $y \in A$ geldt: uit $f(x) = f(y)$ volgt $x = y$.

Een afbeelding f: $A \to B$ heet <u>surjectief</u> (ook wel een surjectie; f beeldt A <u>op</u> B af) als $f(A) = B$. Anders gezegd: als geldt

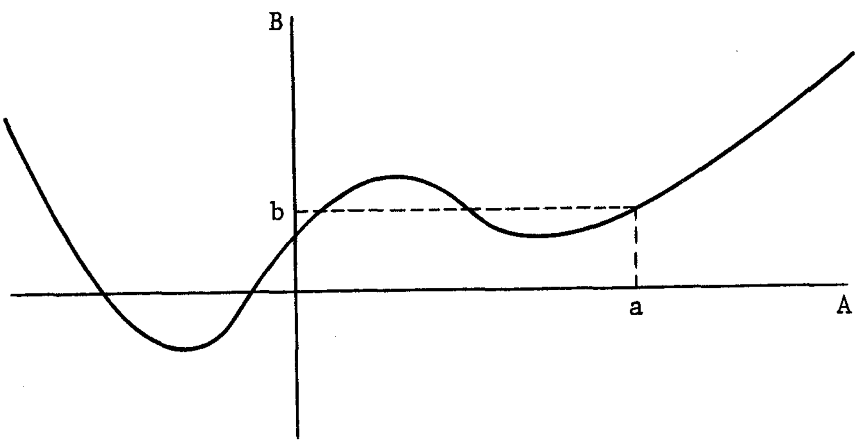
$$\forall_{b \in B} \; \exists_{a \in A} \; (f(a) = b) \; .$$

Een afbeelding die zowel injectief als surjectief is heet <u>bijectief</u>, ook wel een <u>bijectie</u>.



surjectief niet injectief	injectief niet surjectief	bijectief	niet injectief niet surjectief

0.5.4. Voor afbeeldingen f: $A \to B$ met $A \subset \mathbb{R}$ en $B \subset \mathbb{R}$ kan men de eigenschappen injectief, surjectief, bijectief zijn in de grafiek herkennen:

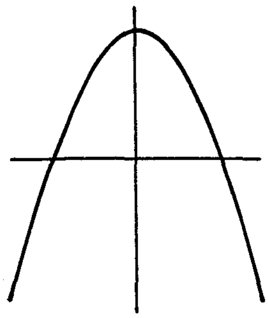


We snijden de horizontale lijn met vergelijking $y = b$ met de grafiek van f; dit doen we in gedachten voor iedere $b \in B$. Er geldt:

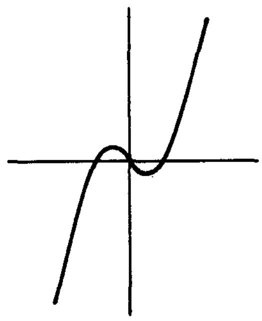
f is surjectief wanneer er steeds minstens één snijpunt is,
f is injectief wanneer er steeds hoogstens één snijpunt is,
f is bijectief wanneer er steeds precies één snijpunt is.

Merk op, dat uit de definitie van afbeelding reeds volgt, dat elke verticale lijn $x = a$ met $a \in A$ precies één snijpunt met de grafiek heeft.

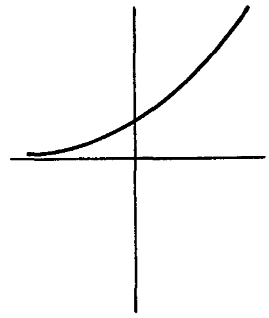
0.5.5. Voorbeelden.



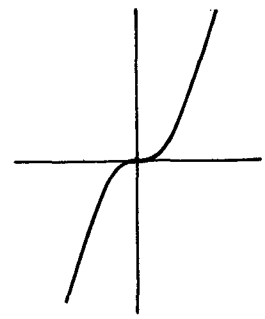
f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met
$f(x) = -x^2 + 1$
niet injectief
niet surjectief



f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met
$f(x) = x^3 - x$
niet injectief
wel surjectief



f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met
$f(x) = 2^x$
wel injectief
niet surjectief



f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met
$f(x) = x^3$
wel inj., wel surj.
dus bijectief

0.5.6. Opgave. Ga grafisch na of $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ al dan niet injectief, surjectief of bijectief is, als f wordt gedefinieerd door

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = 2x + 3$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \ln(|x| + 1)$.

Dezelfde vraag voor $f: [-1,1] \to [0,1]$ als f is gegeven door

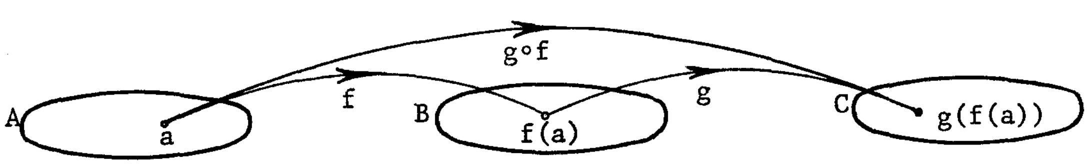
a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = \frac{1}{2}|x|$

c) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$

d) $f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)$.

0.5.7. Samengestelde afbeelding. Laten A, B en C verzamelingen zijn en $f: A \to B$ en $g: B \to C$ afbeeldingen. De samengestelde afbeelding is dan de afbeelding $g \circ f: A \to C$, gedefinieerd door $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ voor alle $a \in A$.



Merk op dat niet hoeft te gelden $f(A) = B$.

0.5.8. <u>Voorbeeld.</u> $f: \mathbb{R} \to [1,\infty)$ met $f(x) = x^2 + 1$, $g: [1,\infty) \to [0,\infty)$ met $g(x) = \ln x$ dan $g \circ f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$ met $(g \circ f)(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Merk op, dat als $g \circ f$ gedefinieerd is, $f \circ g$ nog niet behoeft te bestaan. Voorbeeld: $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to [2,3]$. Wanneer toevallig zowel $f \circ g$ als $g \circ f$ bestaan, zijn deze in het algemeen niet aan elkaar gelijk. Voorbeeld: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f(x) = x^2$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $g(x) = 2x + 3$. Dan $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 3$ en $(f \circ g)(x) = (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

0.5.9. <u>Opgave.</u> Geef $g \circ f$ als:

a) $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ met $f(x) = \ln x$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $g(x) = x + 1$.
b) $f: \mathbb{Z}\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$ met $f(x) = |x|$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ met $g(x) = \frac{1}{2}x$.

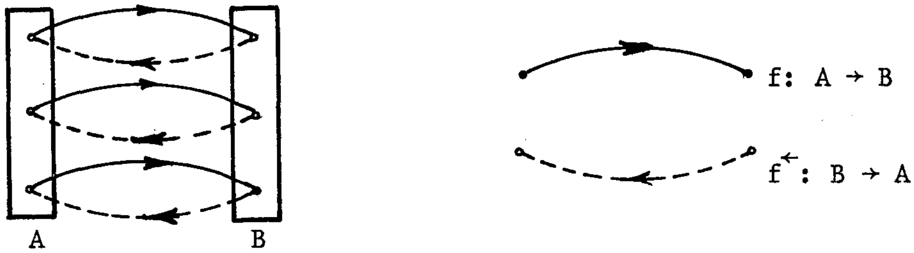
Geef $g \circ f$ en $f \circ g$ als:

a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ met $f(x) = 2^{|x|}$, $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ met $g(x) = x^2$.
b) $f: \mathbb{R} \to [0,\infty)$ met $f(x) = x^2$, $g: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ met

$$g(x) = \begin{cases} \ln x & \text{als } x > 0 \\ 0 & \text{als } x = 0\,. \end{cases}$$

0.5.10. Beschouw nu een bijectieve afbeelding $f: A \to B$. Daar f surjectief is, treedt ieder element van B als beeld op. Omdat f injectief is, geldt dat ieder element van B beeld is van ten hoogste één element van A. Dus ieder element van B is beeld van precies één element van A. Bij iedere $b \in B$ bestaat er zodoende één $a \in A$ met $f(a) = b$. Dit geeft ons een voorschrift, dus een afbeelding, van B naar A.

0.5.11. <u>Definitie.</u> Zij $f: A \to B$ een bijectie. Onder $\overleftarrow{f}: B \to A$ verstaan we die afbeelding waarvoor $\overleftarrow{f}(b) = a$ dan en slechts dan als $f(a) = b$. De afbeelding $\overleftarrow{f}$ noemen we de <u>inverse</u> van f.



Ga na dat een inverse afbeelding van een niet-bijectieve afbeelding niet zinvol gedefinieerd kan worden.

.5.12. Voorbeeld. De afbeelding $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ met $f(x) = x + 5$ is bijectief. De inverse afbeelding is $f^{\leftarrow}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ met $f^{\leftarrow}(x) = x - 5$.
De bijectieve afbeelding $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ met $f(x) = 2^x$ heeft als inverse $f^{\leftarrow}\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ met $f^{\leftarrow}(x) = {}^2\log x$. De bijectie $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ met $f(x) = x^2$ heeft als inverse $f^{\leftarrow}\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ met $f^{\leftarrow}(x) = \sqrt{x}$.

.5.13. Opgave. Zij $f\colon A \to B$ een bijectieve afbeelding. Bewijs:

a) $f^{\leftarrow}(f(x)) = x$ voor alle $x \in A$

b) $f(f^{\leftarrow}(y)) = y$ voor alle $y \in B$

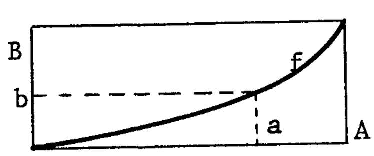
c) $f^{\leftarrow}\colon B \to A$ is ook bijectief

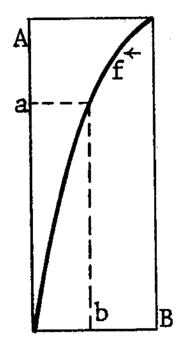
d) $(f^{\leftarrow})^{\leftarrow} = f$.

.5.14. We beschouwen nu de grafiek van een bijectieve afbeelding $f\colon A \to B$ en die van zijn inverse $f^{\leftarrow}\colon B \to A$. De grafiek van f is $\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}$. De grafiek van $f^{\leftarrow}$ is

$$\{(b,a) \in B \times A \mid f^{\leftarrow}(b) = a\} = \{(b,a) \in B \times A \mid f(a) = b\}\ .$$

We krijgen dus de grafiek van $f^{\leftarrow}$ uit die van f door in alle paren (a,b) de coördinaten te verwisselen.



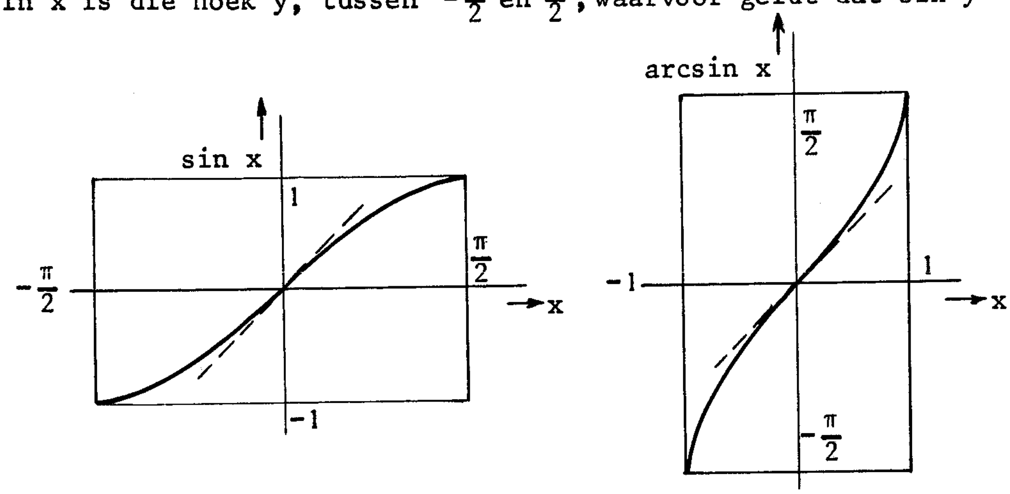


In $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kunnen we de verwisseling van de coördinaten zien als de spiegeling t.o.v. de lijn $y = x$.

0.5.15. Opgave. Schets de grafiek van de inverse afbeelding van $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ met $f(x) = 2^x$ resp. $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ met $g(x) = x^2$, uitgaande van de grafiek van f resp. g.

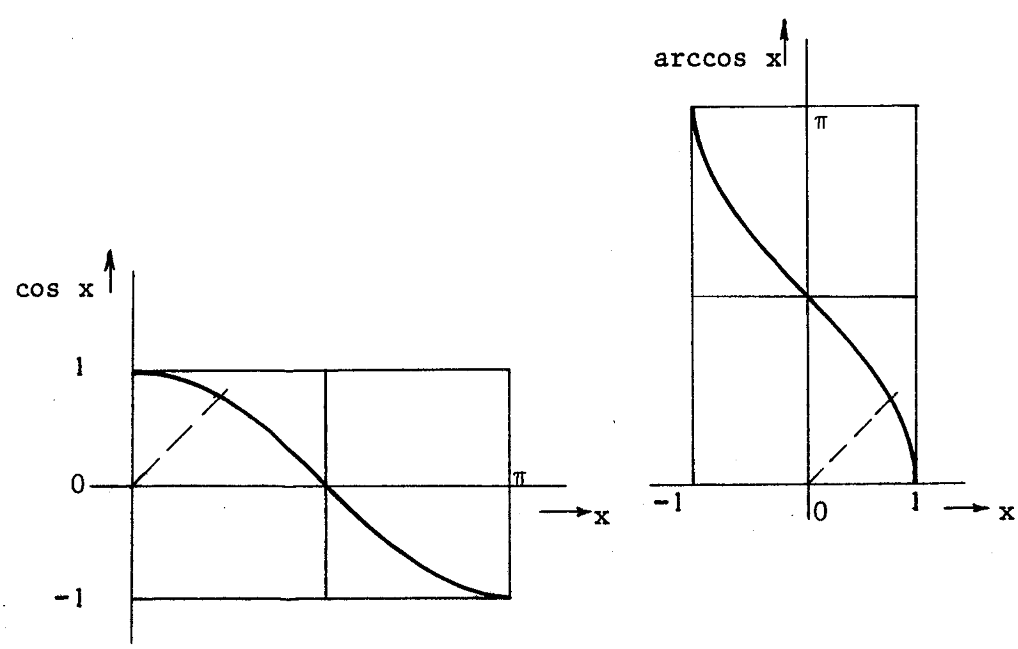
6. Cyclometrische functies

0.6.1. De afbeelding $f: [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ met $f(x) = \sin x$ is bijectief. Zijn inverse afbeelding $\overleftarrow{f}: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ heet de <u>arcsinus</u>, notatie: arcsin. Dus arcsin x is dié hoek y, tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$, waarvoor geldt dat $\sin y = x$.



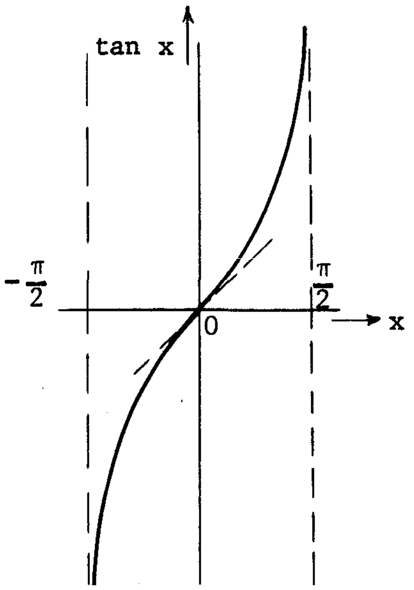
Merk op dat arcsin x slechts gedefinieerd is voor $-1 \leq x \leq 1$, en dat voor zijn functiewaarden geldt: $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$.

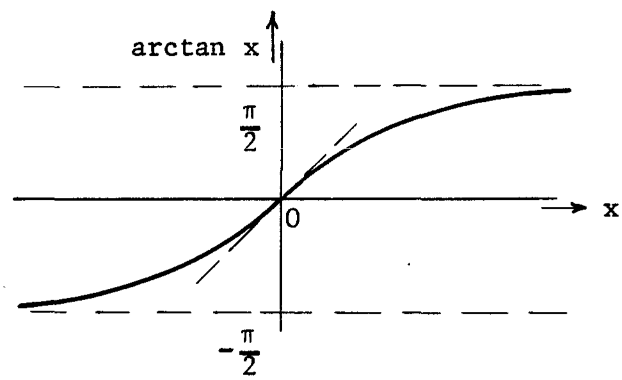
0.6.2. Voor de cosinus kunnen we hetzelfde doen, echter op een ander definitiegebied: $f: [0,\pi] \to [-1,1]$ met $f(x) = \cos x$ is bijectief. De inverse afbeelding heet de <u>arccosinus</u>, notatie: arccos. Dus $\arccos x = y$ betekent $\cos y = x$ én $0 \leq y \leq \pi$.



Er geldt: arccos x is gedefinieerd slechts voor $-1 \leq x \leq 1$, terwijl $0 \leq \arccos x \leq \pi$.

0.6.3. De functie f: $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ met $f(x) = \tan x$ is bijectief. Zijn inverse heet de <u>arctangens</u>, notatie: arctan. Dus arctan x is dië hoek, tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$, waarvan de tangens gelijk is aan x.





De functie arctan x is gedefinieerd voor alle $x \in \mathbb{R}$; verder is $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$.

0.6.4. <u>Voorbeelden.</u>

1) Te berekenen: $\arcsin \frac{1}{2}$. Stel $\arcsin \frac{1}{2} = p$, dan is $\sin p = \frac{1}{2}$ en $-\frac{\pi}{2} \le p \le \frac{\pi}{2}$. Dus $p = \frac{1}{6}\pi$.
2) Te berekenen: $\arccos(-\frac{1}{2})$. Stel $\arccos(-\frac{1}{2}) = q$, dan is $\cos q = -\frac{1}{2}$ en $0 \le q \le \pi$, dus $q = \frac{2}{3}\pi$.
3) Voor alle $x \in [-1,1]$ geldt: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

   <u>Bewijs</u>: stel $\arcsin x = p$ en $\arccos x = q$, dan is

$$x = \sin p \text{ en } -\frac{\pi}{2} \le p \le \frac{\pi}{2}$$

$$x = \cos q \text{ en } 0 \le q \le \pi ,$$

   ofwel

$$x = \sin(\frac{\pi}{2} - q) \text{ en } -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - q \le \frac{\pi}{2} .$$

   Hieruit volgt $p = \frac{\pi}{2} - q$. □

4) Te berekenen: $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$. Stel $\arctan \frac{1}{2} = p$ en $\arctan \frac{1}{3} = q$, dan is

$$\tan p = \frac{1}{2} \text{ en } -\frac{\pi}{2} < p < \frac{\pi}{2}, \text{ zelfs } 0 < p < \frac{\pi}{2}$$

$$\tan q = \frac{1}{3} \text{ en } -\frac{\pi}{2} < q < \frac{\pi}{2}, \text{ zelfs } 0 < q < \frac{\pi}{2}.$$

We zoeken $p+q$. Daar $\tan p$ en $\tan q$ bekend zijn, kunnen we $\tan(p+q)$ vinden:

$$\tan(p+q) = \frac{\tan p + \tan q}{1 - \tan p \tan q} = 1 .$$

Omdat $0 < p + q < \pi$, is dus $p + q = \frac{\pi}{4}$.

5) Voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt: $\tan(\arctan x) = x$. Maar $\arctan(\tan x) = x$ geldt niet algemeen. Voor sommige x (bijv. $x = \frac{\pi}{2}$) is $\arctan(\tan x)$ niet eens gedefinieerd; voor bijv. $x = \pi$ geldt

$$\arctan(\tan \pi) = \arctan 0 = 0 .$$

Slechts voor $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ is inderdaad $\arctan(\tan x) = x$.

0.6.5. In het vervolg zullen we vaak wat slordiger omgaan met het begrip afbeelding. Met name spreken we hier af, dat we een afbeelding f die we slechts geven door een of andere formule, zullen beschouwen als een afbeelding van de verzameling van die waarden van x, waarvoor de formule zinvol is, naar $\mathbb{R}$.
Ook zullen we kortweg over de functie 2^x spreken in plaats van over de functie f met $f(x) = 2^x$.

<u>Voorbeeld</u>. De functie $\frac{1}{x}$ is een functie van $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ naar $\mathbb{R}$; $f(x) = \ln(x+2)$ is een afbeelding van $(-2,\infty)$ naar $\mathbb{R}$; $\sin x$ is een afbeelding van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$.

0.6.6. <u>Opgave</u>. Schets de grafiek van $\arctan(\tan x)$.

7. Nog enige notaties

0.7.1. Van een eindig aantal getallen $a_1,\dots,a_n$ noteren we het grootste door $\max(a_1,\dots,a_n)$ en het kleinste door $\min(a_1,\dots,a_n)$.

Voorbeeld. $\max(1,-3,0,2,7) = 7$; $\min(1,-3,0,2,7) = -3$; $\max(1,-1) = 1$;

$$\min(0,x^2-x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \le 0 \\ x^2 - x & \text{als } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{als } x \ge 1 . \end{cases}$$

0.7.2. De absolute waarde van een getal x, notatie: $|x|$, definiëren we door:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \ge 0 \\ -x & \text{als } x < 0 . \end{cases}$$

0.7.3. Opgave. Ga na, dat de volgende regels gelden:

a) $x^2 = |x|^2$

b) $\sqrt{x^2} = |x|$

c) $|xy| = |x|\,|y|$

d) $-|x| \le x \le |x|$ en $-|x| \le -x \le |x|$

e) $|x| = \max(x,-x)$

f) $x^2 \le y^2$ dan en slechts dan als $|x| \le |y|$.

0.7.4. Eigenschap (driehoeksongelijkheid). Voor alle $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$ geldt:

$$||a| - |b|| \le |a + b| \le |a| + |b| .$$

Bewijs. $-|ab| \le ab \le |ab|$, dus

$$-2|a|\,|b| \le 2ab \le 2|a|\,|b| .$$

Door optellen van $a^2 + b^2$ $(= |a|^2 + |b|^2)$:

$$|a|^2 - 2|a|\,|b| + |b|^2 \le a^2 + 2ab + b^2 \le |a|^2 + 2|a|\,|b| + |b|^2$$

$$(|a| - |b|)^2 \le (a + b)^2 \le (|a| + |b|)^2 .$$

Worteltrekken levert met $\sqrt{x^2} = |x|$:

$$||a| - |b|| \le |a + b| \le |a| + |b| . \qquad \square$$

0.7.5. Opgave. Ga na dat ook geldt:

$$||a| - |b|| \le |a - b| \le |a| + |b| .$$

0.7.6. Het bewijzen van ongelijkheden vraagt vaak enige vaardigheid in het herkennen van kwadratische vormen. Bij wijze van voorbeeld behandelen we de volgende ongelijkheid, die zegt dat het rekenkundig gemiddelde minstens even groot is als het meetkundig gemiddelde: Voor alle $p > 0$ en $q > 0$ geldt

$$\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq}\ .$$

Bewijs. $(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 \geq 0$, dus $p + q \geq 2\sqrt{p}\sqrt{q}$ ofwel $\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq}$. □

0.7.7. Opgave. Bewijs dat voor alle $a,b,c \in \mathbb{R}$ geldt:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc\ .$$

0.7.8. Laat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (niet noodzakelijk verschillende) getallen zijn. Voor hun som $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ voeren we de volgende notatie in:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\ .$$

Voorbeelden.

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5\ ;$$

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2;\ \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1\ ;$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3;\ \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell .$$

Merk op dat de k in $\sum_{k=1}^{n} a_k$ slechts als hulpvariabele wordt gebruikt; de som hangt er niet van af.

Op dezelfde wijze definieert men

$$\sum_{k=2}^{n} a_k,\ \sum_{k=0}^{n} b_k,\ \sum_{k=-3}^{n} x_k,\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \text{ enz.}$$

Voorbeelden.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k \quad \text{voor } n \geq 2 \;;$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k ; \quad \sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \;;$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} ; \quad \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} ; \quad \sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k \;;$$

$$\sum_{k=1}^{n} a = na \;;$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \;.$$

0.7.9. Opgave. Bereken

$$\sum_{k=1}^{3} (2k+1), \quad \sum_{k=0}^{4} k, \quad \sum_{k=1}^{7} 1, \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k, \quad \sum_{k=1}^{n} (k+1) - \sum_{k=1}^{n} k \;.$$

Met behulp van volledige inductie kunnen we vaak bewijzen, dat een som $\sum_{k=1}^{n} a_k$ een bepaalde waarde heeft.

0.7.10. Voorbeeld. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \;,$$

Bewijs. Voor $n = 1$ is de som $1.2.3 = 6$, het rechterlid is eveneens 6. Neem aan dat voor een $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \;.$$

Dan is

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) = \\ &= \tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) + (n+1)(n+2)(n+3) = \\ &= \tfrac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \;.\end{aligned}$$

Via volledige inductie geldt de formule nu voor alle $n \in \mathbb{N}$. □

8. Combinatoriek

0.8.1. Definitie. Voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we $n!$ (spreek uit: n-faculteit) als volgt: $n! = 1.2\ldots n$. Verder definiëren we $0! = 1$.
Dus $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, enz. Merk op dat $n! = n(n-1)!$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

0.8.2. Definitie. Laat V een eindige verzameling zijn. Een permutatie van V is een bijectieve afbeelding van V naar V.

0.8.3. Voorbeeld. We kunnen een permutatie aangeven door onder elkaar de elementen van V en hun beelden op te schrijven. Zo is $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$ de permutatie van $V = \{a,b,c,d\}$ waarbij a overgaat in b, b in d, c in zichzelf en d in a.

0.8.4. Wanneer we de elementen van V een bepaalde volgorde geven, dan geven hun beelden bij het toepassen van een permutatie een nieuwe volgorde. Ook de afbeelding, die de elementen van V op hun plaats laat, is een permutatie, de zg. identieke permutatie. Uitgaande van een vaste volgorde in V kan men een permutatie dus gegeven zien door de volgorde van de beelden van de elementen van V. Het woord "permutatie" wordt daarom vaak ook gebruikt in de zin van een "volgorde" van de elementen.

0.8.5. Voorbeeld. Alle permutaties van de verzameling $\{a,b,c\}$ zijn:

$$(a,b,c),\ (a,c,b),\ (b,a,c),\ (b,c,a),\ (c,a,b),\ (c,b,a)\ .$$

0.8.6. Stelling. Zij $n \in \mathbb{N}$. Het aantal permutaties van een verzameling van n elementen is $n!$

Bewijs. Laat de verzameling zijn: $\{a_1,\ldots,a_n\}$. Voor het beeld van a_1 zijn er n mogelijkheden. Na ieder van deze keuzen zijn er voor het beeld van a_2 nog $n-1$ mogelijkheden over. Zo doorgaand vinden we na iedere keuze voor de beelden van $a_1,\ldots,a_{n-2}$ nog 2 mogelijkheden voor het beeld van a_{n-1}, terwijl daarna het beeld van a_n vastligt. In totaal zijn er dus $n(n-1)\ldots 2.1 = n!$ mogelijke permutaties. □

0.8.7. Voorbeeld. In een stok speelkaarten met 52 kaarten kunnen de kaarten op $52!$ verschillende volgorden liggen.

0.8.8. Opgave. Elke dag ontbijten er acht mensen op een rij op een bank. Ze besluiten elke dag in een andere volgorde te gaan zitten. Na hoeveel jaren zijn alle mogelijkheden uitgeput?

0.8.9. Definitie. Voor elk tweetal gehele getallen n en k met $0 \le k \le n$ definiëren we $\binom{n}{k}$ (spreek uit: n over k) als volgt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Deze getallen $\binom{n}{k}$ heten binomiaalcoëfficiënten.

Gevolg.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{n!} = 1; \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1; \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n;$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n .$$

In het algemeen is $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, want

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} .$$

0.8.10. Opgave.

a) Bereken $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{5}{4}$ en $\binom{5}{5}$.

b) Verifieer dat geldt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)}{k!} \qquad \text{voor } 1 \le k \le n .$$

0.8.11. Stelling. Voor $n,k \in \mathbb{Z}$ met $0 \le k \le n-1$ geldt:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \qquad \text{(Pascal)}$$

Bewijs.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1} . \qquad \square$$

0.8.12. Door van deze eigenschap en van $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, gebruik te maken, kunnen we snel een schema maken van alle $\binom{n}{k}$ voor n niet te groot.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
k=0 & & k=1 & & k=2 & & k=3 & & k=4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
n=0 \\ n=1 \\ n=2 \\ n=3 \\ n=4 \\ \\ \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
k=0 & & k=1 & & k=2 & & k=3 & & k=4
\end{array}$$

In iedere regel zetten we links en rechts een 1, verder is ieder getal de som van de twee getallen die er schuin boven staan. Dit schema heet de <u>driehoek van Pascal</u>.

0.8.13. <u>Definitie</u>. Laat n en k gehele getallen zijn met $0 \leq k \leq n$. Een <u>combinatie</u> van k elementen uit een verzameling V van n elementen is een deelverzameling van V met k elementen.

N.B. Bij een combinatie wordt dus niet op de volgorde van de elementen gelet.

0.8.14. <u>Voorbeeld</u>. Als $V = \{1,2,3,4\}$, dan zijn alle combinaties van 3 elementen uit V:

$$\{1,2,3\},\ \{1,2,4\},\ \{1,3,4\},\ \{2,3,4\}.$$

0.8.15. <u>Stelling</u>. Zij $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ met $0 \leq k \leq n$. Het aantal combinaties van k elementen uit een verzameling V van n elementen is $\binom{n}{k}$.

<u>Bewijs</u>. De stelling is juist voor $k = 0$, daar de enig mogelijke deelverzameling met nul elementen de lege verzameling is. Als $k > 0$ (en dus ook $n > 0$) verloopt het bewijs als volgt: We tellen eerst het aantal manieren waarop we k elementen kunnen kiezen en een volgorde kunnen geven, dus het aantal manieren waarop we k plaatsen in een rij kunnen bezetten met elementen van V. Voor de eerste plaats zijn er n mogelijkheden, daarna voor de tweede plaats nog $n-1, \ldots,$ voor de k^e plaats $n-k+1$. In totaal $n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ mogelijkheden. Nu is iedere combinatie echter zo vaak geteld als hij gepermuteerd kan worden, dus $k!$ maal. Het aantal combinaties is dus $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. □

0.8.16. Opgave. Verifieer door natellen de juistheid van bovenstaande stelling voor $n = 5$ en $k = 3$.

0.8.17. Stelling. Voor $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k ,$$

dus

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^3 + \ldots + nx^{n-1} + x^n .$$

We lezen hierbij $x^0 = 1$, ook als $x = 0$.

Bewijs: Voor $n = 0$ staat links en rechts 1. Voor $n > 0$: Bij uitwerken van

$$(1 + x)^n = (1+x)(1+x) \ldots (1+x) \qquad \text{(n factoren)}$$

krijgen we x^k door k maal een x en de overige $n-k$ maal een 1 te gebruiken uit de diverse factoren. Het aantal manieren waarop we x^k kunnen krijgen is dus het aantal manieren waarop we k factoren uit de n factoren kunnen nemen, dus het aantal deelverzamelingen van k elementen uit n elementen. Dit aantal is $\binom{n}{k}$, zodat de coëfficiënt van x^k na uitwerking $\binom{n}{k}$ moet zijn. Door sommatie volgt nu het gestelde. □

0.8.18. Laat A een verzameling bestaande uit n elementen zijn ($n \in \mathbb{N}$). Een deelverzameling van A kunnen we karakteriseren door bij ieder element van A aan te geven of het al dan niet tot deze verzameling behoort. We kunnen dit aanschouwelijk voorstellen door in n hokjes de woorden "ja" of "neen" in te vullen naar gelang de betrokken elementen van A tot deze deelverzameling behoren. Bij iedere deelverzameling behoort zo een rijtje van n woorden "ja" of "neen" en omgekeerd. Het totaal aantal mogelijke deelverzamelingen van A is dus het aantal mogelijke rijtjes "ja/neen"; dit is 2^n.

0.8.19. Het voorafgaande is ook als volgt in te zien. Er zijn $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ deelverzamelingen van resp. $0, 1, \ldots, n$ elementen. In totaal dus

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

deelverzamelingen (neem $x = 1$ in 0.8.17).

0.8.20. Stelling (Binomium van Newton). Voor $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$ geldt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Bewijs. Als $a = 0$ staat er links en rechts b^n. Voor $a \neq 0$: Stel $x = \frac{b}{a}$, dan is volgens 0.8.17.

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k ,$$

dus

$$(1 + \tfrac{b}{a})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\tfrac{b}{a})^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{-k} b^k .$$

Na vermenigvuldiging met a^n is het bewijs voltooid. □

0.8.21. Opgave. Schrijf het binomium van Newton uit voor $n = 1,2,3,4,5$ en 6. Gebruik desgewenst de driehoek van Pascal.

0.8.22. Opmerking. Het binomium van Newton kan ook als volgt met volledige inductie bewezen worden: Voor $n = 0$ en $n = 1$ is het gestelde evident. Laat de formule juist zijn voor $n \in \mathbb{N}$, d.w.z.

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Dan is

$$\begin{aligned}
(a + b)^{n+1} &= a(a + b)^n + b(a + b)^n = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} = \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} = \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k .
\end{aligned}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de relatie (uit 0.8.11)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} .$$

□

9. Polynomen

0.9.1. Definitie. Een polynoom of veelterm is een functie $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die we als volgt kunnen schrijven:

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0 ,$$

waarin $p_0, p_1, \ldots, p_n$ reële getallen zijn en $p_n \neq 0$. Deze getallen worden de coëfficiënten genoemd. Het gehele getal $n \geq 0$ heet de graad van het polynoom; notatie: $gr(p)$.

Ook de nulfunctie, dus de functie $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $p(x) = 0$ voor alle x, zullen we als een polynoom opvatten, het zg. nulpolynoom. We geven geen definitie van de graad van het nulpolynoom. Een uitspraak als: zij p een polynoom met $gr(p) = n$, impliceert dat p niet het nulpolynoom is.

0.9.2. Voorbeelden.

1) $p(x) = 2$ is een polynoom met $gr(p) = 0$.
2) $p(x) = x^{10} + x^5 + 1$ is een polynoom met $gr(p) = 10$.
3) Als $p(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_{n-1}x^{n-1} + p_n x^n$, dan is de afgeleide van p het polynoom, genoteerd door p', met

$$p'(x) = p_1 + 2p_2 x + \ldots + (n-1)p_{n-1}x^{n-2} + np_n x^{n-1} .$$

Ook de tweede afgeleide $p'' = (p')'$, de derde afgeleide p''', in het algemeen de k^e afgeleide $p^{(k)}$ zijn polynomen. Men ziet gemakkelijk in dat voor $k \leq n$

$$p^{(k)}(x) = k!p_k + 2.3\ldots(k+1)p_{k+1}x + \ldots + (n-k+1)(n-k+2)\ldots np_n x^{n-k} .$$

Voor $k > n$ is $p^{(k)}(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

0.9.3. Laat p en d polynomen zijn, d niet het nulpolynoom. Indien $gr(p) \geq gr(d)$, dan kan $\frac{p}{d}$ met behulp van een staartdeling herleid worden. We geven een voorbeeld, waarin $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$ en $d(x) = x^2 - x - 1$:

$$\begin{array}{r|l|l}
x^2 - x - 1 & x^3 + 2x^2 - x - 1 & x + 3 \\
 & \underline{x^3 - x^2 - x} & \\
 & 3x^2 \qquad - 1 & \\
 & \underline{3x^2 - 3x - 3} & \\
 & 3x + 2 &
\end{array}$$

zodat

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x - 1}{x^2 - x - 1} = x + 3 + \frac{3x + 2}{x^2 - x - 1} ,$$

ofwel

$$x^3 + 2x^2 - x - 1 = (x + 3)(x^2 - x - 1) + (3x + 2) .$$

De rest na deling was in dit geval $3x + 2$; in het algemeen is de rest ǒf het nulpolynoom (als de deling opgaat) ǒf een polynoom met een lagere graad dan die van d (anders zou de deling nog voortgezet kunnen worden). We formuleren en bewijzen deze eigenschap in de volgende stelling.

0.9.4. Stelling. Laten p en d polynomen zijn, d niet het nulpolynoom. Dan bestaan er polynomen q en r met:

1) $p(x) = q(x)d(x) + r(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$,
2) r is het nulpolynoom, ǒf $gr(r) < gr(d)$.

Bovendien zijn deze polynomen q en r eenduidig bepaald.

Bewijs. Als p het nulpolynoom is en ook als $gr(p) < gr(d)$ voldoet $r = p$ en q gelijk aan het nulpolynoom. Als $gr(p) \geq gr(d)$ leidt het boven geschetste staartdelingsproces tot de gevraagde polynomen q en r. Dat q en r eenduidig bepaald zijn zien we als volgt in: stel $p(x) = q_1(x)d(x) + r_1(x)$ en $p(x) = q_2(x)d(x) + r_2(x)$, waarbij r_1 het nulpolynoom is, of een graad kleiner dan die van d heeft en r_2 evenzo, dan is

$$(q_1(x) - q_2(x))d(x) = r_2(x) - r_1(x) ,$$

zodat $(q_1(x) - q_2(x))d(x)$ ofwel het nulpolynoom is, ofwel een lagere graad heeft dan die van d. Dit is slechts mogelijk als $q_1 = q_2$ en dus ook $r_1 = r_2$.□

0.9.5. Neem $d(x) = x - a$ in deze stelling, dan is

$$p(x) = (x - a)q(x) + r(x) ,$$

waarbij r het nulpolynoom is of een graad kleiner dan 1 heeft; r is dus een constante. We krijgen zo $p(x) = (x - a)q(x) + r$. Door invullen van $x = a$ vinden we $r = p(a)$, zodat

$$p(x) = (x - a)q(x) + p(a) \qquad \text{(Reststelling)} .$$

0.9.6. Stelling. Zij p een polynoom, niet het nulpolynoom, en zij $a \in \mathbb{R}$. Als $p(a) = 0$, dan bevat $p(x)$ de factor $x - a$, d.w.z. $p(x) = (x - a)q(x)$ waarin q weer een polynoom is.

Bewijs. Zie 0.9.5. □

0.9.7. Opgave. Ontbind het polynoom $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$ in factoren, door eerst nulpunten ervan te zoeken.

0.9.8. Definitie. Zij $k \in \mathbb{N}$. Het getal $a \in \mathbb{R}$ heet een k-voudig nulpunt (of: nulpunt met multipliciteit k) van een polynoom p, indien er een polynoom q bestaat met $q(a) \neq 0$ èn $p(x) = (x - a)^k q(x)$.

0.9.9. Opgave. Zij p een polynoom en zij $a \in \mathbb{R}$; we schrijven p in de vorm $p(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i (x - a)^i$. Bewijs, dat $b_i = \frac{1}{i!} p^{(i)}(a)$ voor $i = 0,1,\ldots,n$. Toon vervolgens aan, dat a een k-voudig nulpunt van p is dan en slechts dan als $p(a) = p'(a) = \ldots = p^{(k-1)}(a) = 0$ èn $p^{(k)}(a) \neq 0$.

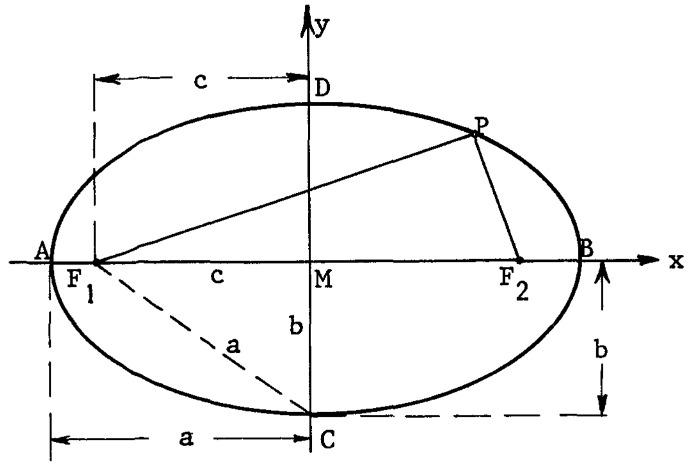
Het is bekend dat een vierkantsvergelijking hoogstens twee reële wortels bezit. Deze regel laat de volgende generalisatie toe:

0.9.10. Stelling. Een polynoom p met $gr(p) = n$ heeft ten hoogste n reële nulpunten.

Bewijs. We bewijzen deze stelling door volledige inductie naar n. In geval $n = 0$ is $p(x) = a_0 \neq 0$, dus p heeft geen nulpunten. Stel de bewering in de stelling is waar voor polynomen met graad $\leq n - 1$. Zij nu p een polynoom met $gr(p) = n$ en zij a een nulpunt van p, dan is er een polynoom q met $gr(q) = n - 1$ zodat $p(x) = (x - a)q(x)$. Het polynoom q heeft ten hoogste $n - 1$ reële nulpunten (inductieveronderstelling), dus p heeft ten hoogste $1 + n - 1 = n$ reële nulpunten. □

10. Kegelsneden

0.10.1. Definitie. Laten a en c gegeven reële getallen zijn met $0 \leq c < a$. Laten F_1 en F_2 punten in het platte vlak zijn met een onderlinge afstand 2c. De verzameling punten in het platte vlak, waarvan de som van de afstanden tot F_1 en tot F_2 gelijk is aan 2a, heet de ellips met brandpunten F_1 en F_2 en halve lange as a. Het getal $\varepsilon = \frac{c}{a}$ heet de excentriciteit van de ellips (merk op: $0 \leq \varepsilon < 1$).



0.10.2. De lijn door F_1 en F_2 en de middelloodlijn van het lijnstuk F_1F_2 heten de <u>hoofdassen</u> van de ellips; hun snijpunt M heet het <u>middelpunt</u> van de ellips. De ellips snijdt van de lijn door F_1 en F_2 een stuk af, groot $AB = AF_1 + AF_2 = 2a$. Van de andere as wordt een stuk CD afgesneden, groot 2b met $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Omdat $b \le a$, wordt AB de lange as en CD de korte as van de ellips genoemd. Merk op dat voor $c = 0$, dus $F_1 = F_2$, de ellips overgaat in de cirkel om F_1 met straal a. Voor de cirkel is de excentriciteit $\varepsilon = 0$.

0.10.3. Met gebruikmaking van de notaties als hierboven en van een assenstelsel als aangegeven in de figuur, heeft de ellips tot vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

<u>Bewijs</u>. Zij P een punt met coördinaten (x,y). De afstand van P tot F_1 is $\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$, die van P tot F_2 is $\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$. Volgens de definitie bestaat de ellips uit alle punten (x,y) met

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

ofwel

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$a^2(x + c)^2 + a^2y^2 = (a^2 + cx)^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

dus

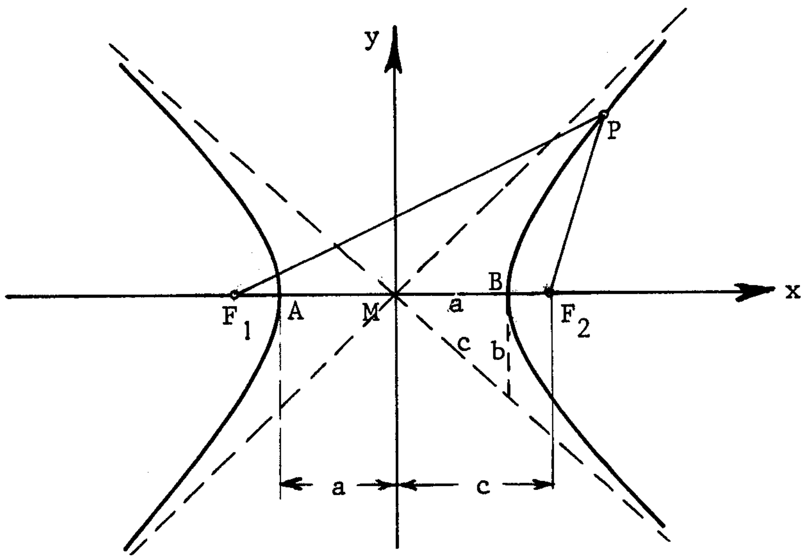
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

□

Merk op dat in het geval van de cirkel geldt b = a, zodat de vergelijking dan wordt: $x^2 + y^2 = a^2$.

Opgave. Ga na, dat bij het kwadrateren in bovenstaand bewijs géén punten zijn ingevoerd.

0.10.4. Definitie. Laat a en c getallen zijn met $0 < a < c$. Laat F_1 en F_2 punten in het platte vlak zijn met onderlinge afstand 2c. De verzameling punten, waarvan het (in absolute waarde genomen) verschil van de afstanden tot F_1 en F_2 gelijk is aan 2a, heet de hyperbool met brandpunten F_1 en F_2 en halve as a. Het getal $\varepsilon = \frac{c}{a}$ heet de excentriciteit van de hyperbool (N.b. $\varepsilon > 1$).



0.10.5. De lijn door F_1F_2 en de middelloodlijn van F_1F_2 heten weer de hoofdassen, hun snijpunt M het middelpunt. De hyperbool snijdt de lijn door F_1 en F_2 in de punten A en B die een onderlinge afstand 2a hebben. Analoog als bij de ellips kan men de vergelijking opstellen. Met het geschetste assenstelsel is deze

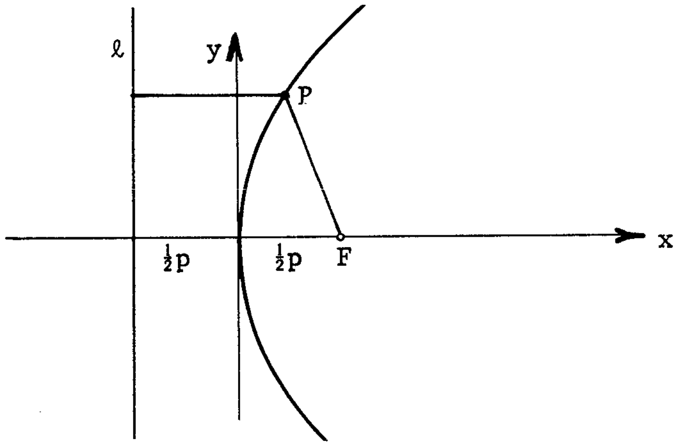
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ waarin } b = \sqrt{c^2 - a^2} .$$

Snijden we de hyperbool met de lijn $y = px$, dan vinden we uit deze vergelijking

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{p^2}{b^2}\right) = 1 ,$$

zodat er in het algemeen twee verschillende waarden voor x (met bijbehorende waarden voor $y = px$), voldoen. Maar voor $\frac{p^2}{b^2} \geq \frac{1}{a^2}$, dus voor $|p| \geq \frac{b}{a}$, zijn er geen snijpunten. De lijnen $y = \frac{b}{a}x$ en $y = -\frac{b}{a}x$ zijn <u>asymptoten</u> van de hyperbool.

0.10.6. <u>Definitie.</u> Laat in het platte vlak een lijn ℓ en een punt F met $F \notin \ell$ gegeven zijn; zij p de afstand van F tot ℓ. De verzameling van alle punten, die gelijke afstanden tot ℓ en tot F hebben, heet de <u>parabool</u> met brandpunt F en richtlijn ℓ. De <u>excentriciteit</u> van een parabool is per definitie gelijk aan 1.



0.10.7. Op een coördinatenstelsel als aangegeven in de figuur is de vergelijking van de parabool $y^2 = 2px$.

<u>Bewijs.</u> Zij P een punt met coördinaten (x,y). De afstand van P tot ℓ is dan $x + \frac{1}{2}p$, de afstand van P tot F is $\sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2}$. De parabool bestaat dus uit alle punten (x,y) met

$$x = \tfrac{1}{2}p = \sqrt{(x - \tfrac{1}{2}p)^2 + y^2}$$

ofwel

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 = (x - \tfrac{1}{2}p)^2 + y^2$$
$$2px = y^2 \; .$$

□

11. <u>Enige afspraken</u>

0.11.1. In het vervolg van deze cursus wordt van de V.W.O. stof bekend verondersteld: de stof uit de onderbouw, het gedrag van de kwadratische functie $ax^2 + bx + c$, de goniometrische functies met hun eigenschappen, het bestaan van het getal $e = 2{,}718\ldots$, het globale gedrag van de functies e^x en a^x $(a > 0)$, de natuurlijke logarithme, het globale gedrag van de functies $\log x$ en ${}^g\!\log x$ $(g > 0,$ $g \neq 1)$, alsmede de gebruikelijke rekenregels die voor deze functies gelden. Verder zullen we gebruiken dat $e^x > x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, en dat voor $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt $e^x > x^\alpha$ voor alle voldoend grote x; ook dat voor $\beta > 0$ geldt dat $\ln x < x^\beta$ voor x voldoende groot. Verder zal vanaf hoofdstuk 2 steeds per onderwerp een inventarisatie van reeds bekende eigenschappen gemaakt worden. Die eigenschappen zullen vanaf dat moment ook vrij gebruikt worden.

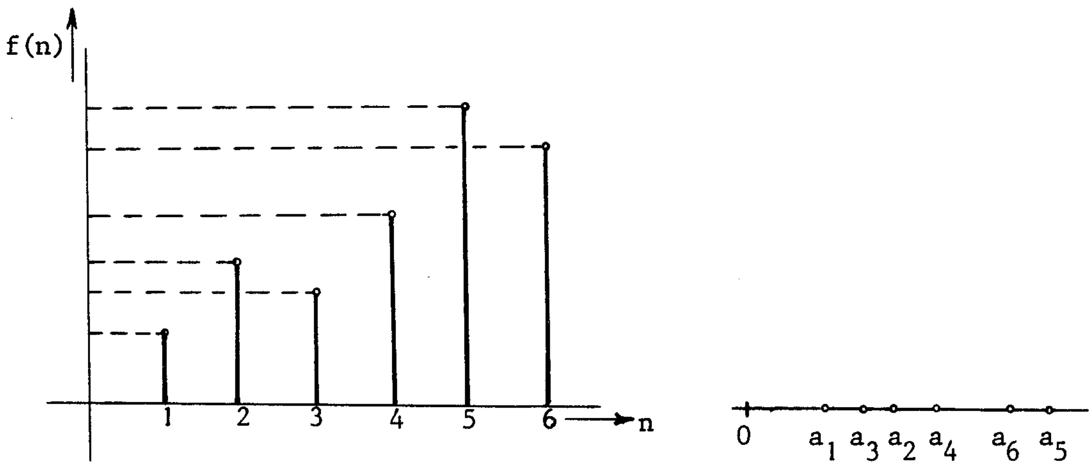
Hoofdstuk 1. Rijen

1. Enige begrippen

1.1.1. Definitie. Een oneindige rij reële getallen (kortweg: rij) is een afbeelding van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{R}$.

1.1.2. Laat $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ een rij zijn; stel $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots, f(n) = a_n, \ldots$. We kunnen de afbeelding f dan vastleggen door zijn beelden $a_1, a_2, a_3, \ldots$ te geven. Vaak noteren we een rij daarom met $a_1, a_2, a_3, \ldots$; afkortingen met dezelfde betekenis zijn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ en (a_n). De getallen a_i heten de elementen van de rij.

In de praktijk denken we bij een rij in de regel niet direct aan een afbeelding f van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{R}$, maar aan de beelden ervan, dus aan een genummerde serie punten a_n op de reële getallenrechte.



1.1.3. Voorbeelden. $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, dus $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$; $a_n = \frac{1}{n}$.
$((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$, dus $-1,+1,-1,+1,-1,+1,\ldots$; $a_n = (-1)^n$.
$\left(\frac{1}{n^2}\right)$, dus $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$; $a_n = \frac{1}{n^2}$.
Soms breiden we de notatie iets uit: $(a_n)_{n=3}^{\infty}$ is de rij $a_3, a_4, a_5, \ldots$, dus in feite de rij $(a_{n+2})_{n=1}^{\infty}$; $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ is $a_0, a_1, a_2, \ldots$, dus $(a_{n-1})_{n=1}^{\infty}$; $(a_n)_{n \text{ even}}$ is $a_2, a_4, a_6, \ldots$, dus $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

1.1.4. Bij iedere rij kan men de verzameling beschouwen van de elementen die tot die rij behoren. Bij de rij $(n+1)_{n=1}^{\infty}$ behoort zo $\mathbb{N}\backslash\{1\}$, bij $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ behoort $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$, bij $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ behoort $\{1,-1\}$. Merk op dat bij een (oneindige) rij $a_1, a_2, \ldots$ best een eindige verzameling $\{a_1, a_2, \ldots\}$ kan behoren, omdat de elementen van een rij niet noodzakelijk verschillend zijn.

1.1.5. Opgave. Zij (a_n) de rij met

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(-n+1) & \text{voor } n \text{ oneven ,} \\ \frac{1}{2}n & \text{voor } n \text{ even .} \end{cases}$$

Geef de verzameling van de elementen van deze rij.

1.1.6. Definitie. Een rij (a_n) heet begrensd als er een getal $M \in \mathbb{R}$ bestaat zó, dat $|a_n| \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Een rij (a_n) heet naar boven begrensd als geldt: $\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} (a_n \leq M)$, hij heet naar beneden begrensd indien geldt: $\exists_{N \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} (a_n \geq N)$.

1.1.7. Voorbeelden. $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ en $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ zijn begrensde rijen. De rij $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ is niet naar boven maar wel naar beneden begrensd. De rij uit opgave 1.1.5 is noch naar boven, noch naar beneden begrensd.

1.1.8. Opgave. Toon aan, dat een rij begrensd is dan en slechts dan als hij zowel naar boven als naar beneden begrensd is.

1.1.9. Definitie. Een rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heet

monotoon stijgend als $a_n < a_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$
monotoon niet-dalend als $a_n \leq a_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$
monotoon niet-stijgend als $a_n \geq a_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$
monotoon dalend als $a_n > a_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Een rij heet monotoon indien hij monotoon stijgend, monotoon niet-dalend, monotoon niet-stijgend of monotoon dalend is.

1.1.10. Voorbeelden. $(\frac{1}{n})$ is monotoon dalend; de rij 1,1,2,2,3,3,... is monotoon niet-dalend; de constante rij 0,0,0,... is zowel monotoon niet-dalend als monotoon niet-stijgend.

1.1.11. Opgaven.

1) Ga na, dat iedere monotoon niet-dalende rij naar beneden begrensd is, en iedere monotoon niet-stijgende rij naar boven begrensd is.
2) Bewijs, dat de rij (a_n) met $a_n = \sqrt{\frac{n+3}{n}}$ monotoon dalend en begrensd is.

1.1.12. Definitie. We zeggen dat de elementen van een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ op den duur (afgekort: o.d.d.) een bepaalde eigenschap α hebben, wanneer er een getal $N \in \mathbb{R}$ bestaat, zō, dat voor alle natuurlijke getallen n met $n > N$ geldt, dat a_n de eigenschap α heeft. Gelijkwaardig hiermee is: a_n heeft op den duur eigenschap α indien er slechts eindig veel natuurlijke getallen n zijn, zō, dat a_n de eigenschap α niet heeft.

1.1.13. Voorbeelden. 1) $\ln n > 1000$ o.d.d. (namelijk voor $n > e^{1000}$).
2) $\frac{1}{n} \in (-\frac{1}{100}, \frac{1}{100})$ o.d.d. (namelijk voor $n > 100$).
3) Voor iedere $\delta > 0$ geldt: $\frac{1}{n} \in (-\delta,\delta)$ o.d.d. (namelijk voor $n > \frac{1}{\delta}$).
4) Het is niet waar, dat $(-1)^n > 0$ o.d.d.
5) Voor iedere $a > 0$ geldt $e^n > n^a$ o.d.d.
6) Voor iedere $b > 0$ geldt $\ln n < n^b$ o.d.d.

1.1.14. Opgave. Als (a_n) o.d.d. eigenschap α heeft en ook o.d.d. eigenschap β heeft, dan heeft (a_n) o.d.d. de eigenschap $(\alpha \wedge \beta)$. Bewijs dit.

2. Convergentie

1.2.1. Definitie. Laat (a_n) een rij en a een reëel getal zijn. De rij (a_n) convergeert naar a (notatie: $a_n \to a$) wanneer voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt:

$$a_n \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon) \text{ o.d.d.}$$

Equivalente formuleringen:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{R}}\ \forall_{n>N}(a_n \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon))$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{R}}\ \forall_{n>N}(|a_n - a| < \varepsilon).$$

Slordig gezegd: een rij (a_n) convergeert naar a wanneer voor grote n geldt, dat a_n zeer dicht bij a ligt.

1.2.2. Voorbeelden.

1) De rij (a_n) met $a_n = \frac{10n+6}{2n+1}$ convergeert naar $a = 5$.
Werkwijze: We beschouwen de ongelijkheid $|a_n - a| < \varepsilon$ en trachten hieruit n op te lossen. Op klad werken we dit als volgt uit:

$$\left|\frac{10n+6}{2n+1} - 5\right| = \left|\frac{1}{2n+1}\right| = \frac{1}{2n+1}; \frac{1}{2n+1} < \varepsilon ,$$

$$2n+1 > \frac{1}{\varepsilon},\ n > \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{\varepsilon} - 1) .$$

Aan de hand van het gevonden resultaat wordt met een schijnbaar slim gekozen getal N begonnen met het

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Neem hierbij $N = \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} - 1)$. Voor iedere $n > N$ geldt dan $n > \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon} - 1)$, dus $2n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, dus $\frac{1}{2n+1} < \varepsilon$, dus $\left|\frac{1}{2n+1}\right| < \varepsilon$, dus $\left|\frac{10n+6}{2n+1} - 5\right| < \varepsilon$ zodat $|a_n - a| < \varepsilon$ voor $n > N$. $\square$

2) De rij $\left(\frac{n^2 + 2\sin n}{2n^3 + 5n + 1}\right)$ convergeert naar 0.

Werkwijze: Daar het te moeilijk is om de ongelijkheid $|a_n - a| < \varepsilon$ op te lossen, gaan we eerst schatten:

$$\left|\frac{n^2 + 2\sin n}{2n^3 + 5n + 1}\right| < \frac{n^2 + 2}{2n^3 + 5n + 1} < \frac{n^2 + 2}{2n(n^2 + 2)} = \frac{1}{2n},$$

dus $\left|\frac{n^2 + 2\sin n}{2n^3 + 5n + 1}\right| < \varepsilon$ geldt zeker als $\frac{1}{2n} < \varepsilon$, dus als $n > \frac{1}{2\varepsilon}$.

Het eigenlijke bewijs wordt analoog aan 1) geformuleerd.

3) De rij $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ convergeert naar 0.

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig, neem $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Voor $n > N$ is dan $n > \frac{1}{\varepsilon}$, dus $\frac{1}{n} < \varepsilon$, dus $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$. $\square$

4) De constante rij c,c,c,... convergeert naar c.

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig, neem $N = 0$. Voor alle $n > N$ is dan $|a_n - a| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. $\square$

5) De rij (q^n) met $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, convergeert naar 0.

Bewijs. Als $q = 0$ is (q^n) de constante rij (0), die volgens 4) naar 0 convergeert. Als $q \neq 0$: Zij $\varepsilon > 0$, neem hierbij $N = \left|\frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}\right|$. Dan is voor alle $n > N$ ook $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$, dus $n \ln |q| < \ln \varepsilon$ (n.b. $\ln |q| < 0$) zodat $\ln |q^n| < \ln \varepsilon$ ofwel $|q^n - 0| < \varepsilon$. $\square$

1.2.3. Opgave. Bewijs dat de rijen $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\frac{1}{\ln n})_{n=2}^{\infty}$ naar 0 convergeren.

1.2.4. Opgave. Bewijs dat voor $p > 0$ de rij $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ naar 0 convergeert.

1.2.5. Indien een rij (a_n) convergeert naar a, zeggen we ook:

1) a is limiet van de rij (a_n)
2) de rij (a_n) is convergent
3) de rij (a_n) heeft een limiet. .

Merk op, dat convergentie van een rij (a_n) naar een getal a een "staarteigenschap" van de rij (a_n) is: veranderen, weglaten of toevoegen van beginelementen heeft geen invloed op (bij een rij spreken we van elementen, bij een reeks van termen).

Een rij (a_n) heet <u>divergent</u> wanneer hij niet convergent is. We zeggen dan ook: "(a_n) heeft geen limiet".

N.B. Uitdrukkingen als $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ zullen later nog ter sprake komen. Voorlopig is de waarde van een limiet steeds eindig.

1.2.6. <u>Voorbeelden</u>.

1) De rij (n) divergeert.

<u>Bewijs</u>. Stel $a \in \mathbb{R}$ is limiet van (n). Voor iedere $\varepsilon > 0$ moet dan gelden $|n - a| < \varepsilon$ o.d.d. Neem $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Voor n voldoende groot zou dan $|n - a| < \frac{1}{2}$ en $|n + 1 - a| < \frac{1}{2}$. Dit is onmogelijk. Dus (n) divergeert. □

2) De rij $((-1)^n)$ is divergent.

<u>Bewijs</u>. Stel dat $a \in \mathbb{R}$ limiet is. Neem $\varepsilon = 1$. Dan zou voor alle voldoend grote n gelden $|(-1)^n - a| < 1$. Dit houdt in: $|1 - a| < 1$ en $|-1 - a| < 1$, hetgeen onmogelijk is. Er is dus geen limiet. □

1.2.7. <u>Stelling</u>. Een rij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ heeft hoogstens één limiet.

<u>Bewijs</u>. Stel dat er twee verschillende limieten a en b waren. Neem $\varepsilon = \frac{1}{2}|b - a|$, dan is $\varepsilon > 0$. Er geldt $|a_n - a| < \varepsilon$ o.d.d., en $|a_n - b| < \varepsilon$ o.d.d. Volgens 1.1.14 geldt dan o.d.d. zowel $|a_n - a| < \varepsilon$ als $|a_n - b| < \varepsilon$. Ingevuld: $|a_n - a| < \frac{1}{2}|b - a|$ en $|a_n - b| < \frac{1}{2}|b - a|$. Met de driehoeksongelijkheid levert dit:

$$|b - a| = |(a_n - a) - (a_n - b)| \le |a_n - a| + |a_n - b| <$$

$$< \tfrac{1}{2}|b - a| + \tfrac{1}{2}|b - a| = |b - a| \ .$$

Tegenspraak: Er is dus hoogstens één limiet. □

1.2.8. Als een rij (a_n) convergeert, dan heeft hij dus precies één limiet. Dit getal noteren we met $\lim_{n\to\infty} a_n$. Als de rij (a_n) divergeert zullen we zeggen: $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat niet. Zo geldt (vergelijk 1.2.2, 1.2.6) $\lim_{n\to\infty} \frac{10n + 6}{2n + 1} = 5$, $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} n$ bestaat niet, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ bestaat niet. Bovendien beschikken we reeds over de volgende standaardlimieten (zie 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4): $\lim_{n\to\infty} c = c$; $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ als $|q| < 1$; $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$; $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ als $p > 0$.

1.2.9. Opgave. Bewijs de volgende uitspraken:

1) als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dan is $\lim_{n\to\infty} (a_n - a) = 0$, en omgekeerd.
2) als $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dan is $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, en omgekeerd.
3) als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dan is $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$, en omgekeerd.
4) als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dan is $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Geef bovendien een tegenvoorbeeld waaruit blijkt dat in het laatste geval de omkering niet geldt.

1.2.10. Stelling (insluitstelling). Laten (a_n), (b_n) en (y_n) rijen zijn met $a_n \le y_n \le b_n$ o.d.d. Als $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = p$, dan is (y_n) convergent en $\lim_{n\to\infty} y_n = p$.

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is $a_n \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ o.d.d. (zeg voor $n > N_1$) en $b_n \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ o.d.d. (zeg voor $n > N_2$). Ook is $a_n \le y_n \le b_n$ o.d.d. (zeg voor $n > N_3$). Voor $n > \max(N_1,N_2,N_3)$ is dan

$$p - \varepsilon < a_n \le y_n \le b_n < p + \varepsilon ,$$

zodat $y_n \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ o.d.d. Dus (y_n) is convergent en $\lim_{n\to\infty} y_n = p$. □

1.2.11. Voorbeeld. $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n \ln n} = 0$, want $0 < \frac{n-1}{n \ln n} < \frac{1}{\ln n}$ voor $n \ge 2$ en $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ en $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$.

1.2.12. Opgave. Bewijs de volgende uitspraak. Als (a_n) en (b_n) rijen zijn met $|a_n| \le b_n$ o.d.d. en $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, dan bestaat $\lim_{n\to\infty} a_n$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

1.2.13. Opgave. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

3. Convergentie, monotonie en begrensdheid

1.3.1. Stelling. Iedere convergente rij is begrensd.

Bewijs. Zij (a_n) convergent naar a. Dan is $a_n \in (a-1, a+1)$ o.d.d., zeg voor $n > N$. Laat m de kleinste en M de grootste van de overgebleven termen uit het begin van de rij zijn. Dan is $\min(a-1,m) \le a_n \le \max(a+1,M)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. De rij (a_n) is dus naar beneden en naar boven begrensd, dus begrensd. □

1.3.2. Opgave. Geef een voorbeeld van een begrensde rij, die divergent is.

1.3.3. Stelling 1.3.1 wordt vaak gebruikt om aan te tonen, dat bepaalde rijen divergeren.

Voorbeeld. We bewijzen eerst dat de rij $(\ln n)_{n=1}^{\infty}$ niet begrensd is. Stel $\ln n \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$; dit is onmogelijk voor n voldoende groot, want voor $n > e^M$ is $\ln n > M$. De rij $(\ln n)$ is dus niet begrensd. Vervolgens bewijzen we dat $(\ln n)$ divergeert. Dit volgt direct uit stelling 1.3.1. Was $(\ln n)$ convergent, dan zou hij begrensd zijn wat volgens bovenstaande niet zo is. □

1.3.4. Opgave. Bewijs dat voor $q > 1$ de rij (q^n) niet begrensd is; concludeer dat hij dus divergeert. Doe hetzelfde voor de rij (n^p) met $p > 0$.

1.3.5. Stelling. Laat $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ convergeren naar a. Als p een getal is met $a_n \geq p$ o.d.d., dan is ook $a \geq p$.

Bewijs. Stel $a < p$. Kies $\varepsilon = p - a$, dan is $\varepsilon > 0$. Wegens $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ bestaat een $N \in \mathbb{R}$ met $|a_n - a| < \varepsilon$, dus $|a_n - a| < p - a$, voor alle $n > N$. Dan is $-(p - a) < a_n - a < p - a$, dus zeker $a_n < p$ o.d.d. Dit is in tegenspraak met $a_n \geq p$ o.d.d. Conclusie: $a \geq p$. □

1.3.6. Voorbeeld. In het bijzonder geldt: Als (a_n) convergeert naar a en als $a_n > 0$ o.d.d., dan is $a \geq 0$. Geef zelf aan, waarom een uitspraak als: "als $a_n > 0$, o.d.d., dan is $a > 0$" niet juist is.

1.3.7. Opgave. Formuleer en bewijs zelf het analogon van stelling 1.3.5 voor $a_n \leq p$ in plaats van $a_n \geq p$.

1.3.8. Opgave. Toon aan dat het volgende geldt: Als (a_n) monotoon niet-dalend is met limiet a, dan is $a_n \leq a$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Als (a_n) monotoon stijgend is met limiet a, dan is $a_n < a$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Formuleer en bewijs ook de versies, waarin "niet-dalend" door "niet-stijgend" en "stijgend" door "dalend" zijn vervangen.

1.3.9. Voor later gebruik vermelden we nog de volgende hulpstelling:
Als (a_n) convergeert naar a met $a \neq 0$, dan geldt: $|a_n| > \frac{1}{2}|a|$ o.d.d.

Bewijs. De rij $(|a_n|)$ convergeert naar $|a|$. Uit de definitie van convergentie, met $\varepsilon = \frac{1}{2}|a|$, volgt hieruit:

$$|a_n| \in (|a| - \tfrac{1}{2}|a|,\ |a| + \tfrac{1}{2}|a|) \text{ o.d.d.},$$

dus zeker $|a_n| > \frac{1}{2}|a|$ o.d.d. □

1.3.10. Grondeigenschap der reële getallen. Iedere monotone, begrensde rij is convergent.

Deze eigenschap beschrijft de in 0.2.1 bedoelde "volledigheid" van de verzameling der reële getallen. Ze zegt in feite, dat iedere rij die gevoelsmatig zeker voor convergentie in aanmerking komt, inderdaad ook een limiet heeft. Wij zullen deze grondeigenschap als axioma opvatten. Merk op, dat de grondeigenschap het bestaan van de limiet postuleert, maar dat ze ons geen middel geeft om die limiet ook te berekenen.

Daar een monotoon niet-dalende rij automatisch naar beneden begrensd is (bijvoorbeeld door zijn eerste element) kunnen we de grondeigenschap ook als volgt gebruiken: Iedere monotoon niet-dalende, naar boven begrensde rij is convergent. Analoog geldt ook: Iedere monotoon niet-stijgende, naar beneden begrensde rij is convergent.

1.3.11. Voorbeeld. De rij $(\arccos \frac{1}{n})$ is monotoon stijgend (ga na!) en naar boven begrensd (bijvoorbeeld door 100), dus convergent.

1.3.12. Opgave. Geef voorbeelden, waaruit blijkt dat geen van de beide voorwaarden in de grondeigenschap (monotonie, begrensdheid) gemist kan worden.

4. Bewerkingen met limieten

1.4.1. Stelling. Als (a_n) en (b_n) convergeren, dan convergeert ook $(a_n + b_n)$, en

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \; .$$

Bewijs. Stel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Er geldt:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le$$

$$\le |a_n - a| + |b_n - b| \; .$$

Zij $\varepsilon > 0$. Dan is $|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ o.d.d. en $|b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$ o.d.d., dus

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon \text{ o.d.d.}$$ □

1.4.2. Stelling. Als (a_n) convergeert en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan convergeert ook (λa_n) en

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Bewijs. Stel $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Voor $\lambda = 0$ is de uitspraak juist volgens 1.2.2.4).
Voor $\lambda \neq 0$ bedenken we, dat

$$|\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| |a_n - a| .$$

Zij $\varepsilon > 0$. Er geldt $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ o.d.d., zodat $|\lambda a_n - \lambda a| < \varepsilon$ o.d.d. □

1.4.3. Stelling. Als (a_n) en (b_n) convergeren, dan convergeert ook $(a_n b_n)$, en

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n .$$

Bewijs. Zij $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ en $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Er geldt

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b + a(b_n - b) + (a_n - a)(b_n - b)| \leq$$
$$\leq |b| |a_n - a| + |a| |b_n - b| + |a_n - a| |b_n - b| .$$

Wegens $\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$ en $\lim_{n\to\infty} (b_n - b) = 0$ geldt $\lim_{n\to\infty} |b| |a_n - a| = 0$ en $\lim_{n\to\infty} |a| |b_n - b| = 0$. Bovendien geldt voor n voldoende groot $|a_n - a| |b_n - b| \leq$ $\leq |b_n - b|$, zodat ook $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| |b_n - b| = 0$. Het rechterlid uit bovenstaande ongelijkheid convergeert dus naar 0.
Met de insluitstelling volgt nu: $\lim_{n\to\infty} |a_n b_n - ab| = 0$, zodat $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$. □

1.4.4. Bij een rij $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ zullen we in het vervolg ook de rij $(\frac{1}{b_n})_{n=1}^{\infty}$ beschouwen. Dit kan uiteraard zonder meer als $b_n \neq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. We zullen $(\frac{1}{b_n})$ ook gebruiken, indien $\frac{1}{b_n}$ gedefinieerd is vanaf een zekere index $N \in \mathbb{N}$, met andere woorden wanneer $b_n \neq 0$ voor alle $n \geq N$. In dat geval zal bij afspraak $(\frac{1}{b_n})$ de vorm $(\frac{1}{b_n})_{n=N}^{\infty}$ hebben. Op soortgelijke wijze interpreteren we $(\frac{a_n}{b_n})$. Als $\lim_{n\to\infty} b_n$ bestaat en ongelijk nul is, bestaat volgens 1.3.9 de rij $(\frac{1}{b_n})$ (in de bovenbedoelde zin).

1.4.5. <u>Stelling</u>. Als (b_n) convergeert met $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, dan convergeert ook $(\frac{1}{b_n})$ en $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n}$.

<u>Bewijs</u>. Zij $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Volgens 1.3.9 is dan $|b_n| \geq \frac{1}{2}|b|$ o.d.d., zeg voor $n > N_1$. Voor deze waarden van n is dan $b_n \neq 0$ en

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}|b|^2} |b_n - b| ,$$

zodat

$$0 \leq \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| .$$

Wegens $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ is $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| = 0$; uit de insluitstelling volgt $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = 0$ waarmee de stelling bewezen is. □

1.4.6. <u>Stelling</u>. Laten (a_n) en (b_n) convergeren met $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Dan convergeert ook $(\frac{a_n}{b_n})$ en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} .$$

<u>Bewijs</u>. Gebruik 1.4.5 en 1.4.3.

1.4.7. <u>Voorbeeld</u>.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-4n + 5}{2n^2 - 5n + 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{0}{2} = 0 .$$

Merk op dat bij dit voorbeeld al rekenend ook het bestaan van de limiet is aangetoond! Verifieer dit aan de hand van de gebruikte stellingen.

1.4.8. Afspraak: in het vervolg zullen we met $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ steeds bedoelen: de rij (a_n) convergeert én zijn limiet is a. De stellingen 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3, 1.4.5 en 1.4.6 laten zich dan als volgt samenvatten:

als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dan is $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dan is $\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a$

als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dan is $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

als $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, dan is $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, dan is $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

1.4.9. Stelling. Als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dan is $\lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|} = \sqrt{|a|}$.

Bewijs.

1) Als $a = 0$: Zij $\varepsilon > 0$. Wegens $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ geldt dan $|a_n| < \varepsilon^2$ o.d.d., dus $\sqrt{|a_n|} < \varepsilon$ o.d.d., zodat $\lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|} = 0$.

2) Als $a \neq 0$: Er geldt

$$0 \le \left|\sqrt{|a_n|} - \sqrt{|a|}\right| = \left|\frac{(\sqrt{|a_n|} - \sqrt{|a|})(\sqrt{|a_n|} + \sqrt{|a|})}{\sqrt{|a_n|} + \sqrt{|a|}}\right| =$$

$$= \left|\frac{|a_n| - |a|}{\sqrt{|a_n|} + \sqrt{|a|}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left||a_n| - |a|\right| \le \frac{|a_n - a|}{\sqrt{|a|}} .$$

Wegens $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ geldt $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$. Met 1.4.2 en de insluitstelling is het bewijs voltooid. □

Voorbeeld.

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n - 2}{\sqrt{n^2 + n - 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{1 + 1} = 1 .$$

1.4.10. Met de verkregen techniek bewijzen we vervolgens drie belangrijke limieten:

1) Voor $a > 0$ is $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Bewijs. We geven eerst een bewijs voor het geval waarin $a \geq 1$. Schrijf $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$, dan is $h_n \geq 0$. Volgens 0.4.4 is $a = (1+h_n)^n \geq 1 + nh_n > nh_n$. Dus $0 \leq h_n < \frac{a}{n}$, en wegens $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ is dus $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ zodat $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} (1 + h_n) = 1$. Als $0 < a < 1$ stellen we $a = \frac{1}{b}$, dan is $b > 1$ zodat $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$ al bewezen is. Nu is

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1 . \qquad \square$$

2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Bewijs. Stel $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, dan is $h_n \geq 0$. Voor $n \geq 2$ is

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > \binom{n}{2} h_n^2 = \tfrac{1}{2} n(n-1)h_n^2$$

dus $0 \leq h_n^2 < \frac{2}{n-1}$. Met de insluitstelling volgt: $\lim_{n\to\infty} h_n^2 = 0$. Uit 1.4.9 krijgen we: $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ zodat

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + h_n) = 1 . \qquad \square$$

3) Voor $p \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$ met $|a| < 1$ is $\lim_{n\to\infty} n^p a^n = 0$.

Bewijs. Voor $p \leq 0$ geldt $|n^p a^n| \leq |a^n|$, $n \in \mathbb{N}$, zodat het gestelde dan volgt uit $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ (zie 1.2.8) en de insluitstelling.

Als $p > 0$: Kies een $k \in \mathbb{N}$ zodanig dat $p < k$. Dan geldt $|n^p a^n| \leq n^k |a|^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Wegens $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ is $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k |a|^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} . |a| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \ldots \sqrt[n]{n} . |a| = |a|$.

Kies vervolgens een getal b zodanig dat $|a| < b < 1$. Dan is $\sqrt[n]{n^k |a|^n} < b$ o.d.d., dus $|n^p a^n| \leq n^k |a|^n < b^n$ o.d.d., waaruit met de insluitstelling volgt $\lim_{n\to\infty} n^p a^n = 0$. $\square$

1.4.11. Voorbeeld. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$. Immers,

$$3 = \sqrt[n]{3^n} < \sqrt[n]{2^n + 3^n} < \sqrt[n]{3^n + 3^n} = 3\sqrt[n]{2}$$

en $\lim_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{2} = 3.1 = 3$.

1.4.12. Voor sommigen is vanuit het V.W.O. de volgende limiet bekend: Voor iedere $a \in \mathbb{R}$ is $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{a}{n})^n = e^a$. In het bijzonder:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} .$$

Voor degenen, die dit niet gehad hebben zal later, bij het onderwerp differentiëren, een bewijs gegeven worden. Wij onderstellen deze limiet verder bekend.

1.4.13. We vatten de gevonden limieten samen in de volgende lijst van standaardlimieten:

voor alle $p > 0$ is $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$,

voor alle $q \in \mathbb{R}$ met $|q| < 1$ is $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$,

voor alle $a > 0$ is $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$,

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

voor alle $p \in \mathbb{R}$ en alle $a \in \mathbb{R}$ met $|a| < 1$ is $\lim_{n\to\infty} n^p a^n = 0$,

voor alle $a \in \mathbb{R}$ is $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{a}{n})^n = e^a$.

5. <u>Diversen</u>

1.5.1. Laat van een rij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gegeven zijn:

1) a_1
2) een voorschrift, waarmee a_{n+1} berekend kan worden als a_n al bekend is ($n \geq 1$) (soms ook: als $a_1,\ldots,a_n$ al bekend zijn).

Dergelijke rijen heten <u>recurrent gegeven</u> rijen.

<u>Voorbeeld.</u> De rij (a_n) wordt gegeven door: $a_1 = 2$ en $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 1)$ voor $n \geq 1$. Dus: $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{5}{4}$, $a_4 = \frac{9}{8}$, ... Bewijs zelf met volledige inductie dat

$$a_n = \frac{2^{n-1} + 1}{2^{n-1}} \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} .$$

<u>Voorbeeld.</u> De rij (d_n) geven we door: $d_1 = 1$, $d_2 = 1$ en $d_{n+1} = d_{n-1} + d_n$ voor $n \geq 2$. Deze rij is dus: 1,1,2,3,5,8,13,21,...; hij heet de <u>rij van Fibonacci.</u> Eeuwenlang zijn wiskundigen en puzzelaars door de eigenschappen van deze rij gefascineerd geweest. Bewijs zelf met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $\sum_{k=1}^{n} d_k = d_{n+2} - 1$; d_{3n} is even; $2d_{n+1} = d_{n+3} - d_n$.

1.5.2. Van recurrent gegeven rijen kan men soms bewijzen, dat ze bijvoorbeeld monotoon stijgend en naar boven begrensd zijn. Ze zijn dan op grond van 1.3.10. convergent. Bovendien kan men met behulp van de betrekking, die volgende termen uitdrukt in vorige, vaak de limiet berekenen.

1.5.3. Voorbeeld. Laat $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gegeven zijn door $a_1 = 1$ en $a_{n+1} = \sqrt{a_n\sqrt{3}}$ $(n = 1,2,\ldots)$.

1) De rij (a_n) is naar boven begrensd, namelijk: $a_n < \sqrt{3}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
Bewijs. Met volledige inductie. Er geldt $a_1 = 1 < \sqrt{3}$. Stel $a_n < \sqrt{3}$, dan is

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n\sqrt{3}} < \sqrt{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ .$$

Dus $a_n < \sqrt{3}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. □

2) De rij (a_n) is monotoon stijgend, dus: $a_{n+1} > a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
Bewijs. Met volledige inductie. Er geldt $a_2 = \sqrt[4]{3} > a_1$. Stel $a_{n+1} > a_n$. Dan is

$$a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}\sqrt{3}} > \sqrt{a_n\sqrt{3}} = a_{n+1}\ .$$

Dus $a_{n+1} > a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. □

3) De rij (a_n) is monotoon stijgend en naar boven begrensd, dus convergent.
Stel $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4) Er geldt $a = \sqrt{3}$.
Bewijs. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\sqrt{3} = a\sqrt{3}$, dus $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n\sqrt{3}} = \sqrt{a\sqrt{3}}$. Anderzijds is $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n\sqrt{3}} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Dus $a = \sqrt{a\sqrt{3}}$ ofwel $a(a - \sqrt{3}) = 0$. Daar $a = 0$ onmogelijk is ($a_n \geq a_1 = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$) is dus $a = \sqrt{3}$. □

1.5.4. Opgave. De rij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ is gegeven door $a_1 = 0$ en $a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 5}{4}$ voor $n \in \mathbb{N}$.
Bewijs dat (a_n) convergeert en bereken zijn limiet.

In het laatste deel van deze paragraaf beschouwen we z.g. oneigenlijke limieten.

1.5.5. Definitie. De rij (a_n) divergeert naar (plus) oneindig (gaat naar oneindig), notatie: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, wanneer voor iedere $M \in \mathbb{R}$ geldt: $a_n > M$ o.d.d., ofwel:

$$\forall_{M\in\mathbb{R}}\ \exists_{N\in\mathbb{R}}\ \forall_{n>N}\ (a_n > M)\ .$$

Analoog wordt divergentie naar min-oneindig gedefinieerd en genoteerd. In deze twee gevallen spreekt men van oneigenlijke limieten.

1.5.6. Voorbeelden. $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$; $\lim_{n\to\infty} -\sqrt{n} = -\infty$; $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ als $q > 1$.
De rij $((-1)^n n)$ gaat niet naar oneindig, ook niet naar min-oneindig.
De rij $(n + (-1)^n n)$ evenmin.

1.5.7. Merk op dat $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ een bijzonder soort divergentie van (a_n) inhoudt. De uitspraken: (a_n) is convergent, (a_n) heeft een limiet, de limiet van (a_n) bestaat, blijven gereserveerd voor rijen (a_n) met een reëel getal als limiet.

1.5.8. Opgave. Bewijs de volgende uitspraken:

1) Als $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, dan is $\lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\infty$.

2) Als $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, dan is $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

3) Als $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, dan is $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

4) Als $a_n > 0$ o.d.d. en $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dan is $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

5) Als $a_n < 0$ o.d.d. en $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dan is $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

Geef ook een voorbeeld van een rij (a_n) met $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, zodanig dat niet geldt: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$, en ook niet: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

Hoofdstuk 2. Functielimieten en continuiteit

1. Eigenschappen van functies

In deze paragraaf releveren we een aantal eigenschappen van functies. Alle te beschouwen functies zullen de gedaante $f: A \to B$ hebben met $A \subset \mathbb{R}$ en $B \subset \mathbb{R}$.

2.1.1. Definitie. Een functie f heet begrensd op een verzameling $V \subset \text{DOM } f$, indien

$$\exists_{M\in\mathbb{R}} \forall_{x\in V} \left(|f(x)| \leq M\right) .$$

Een functie f heet begrensd, indien f begrensd is op DOM f.

Voorbeelden. $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^{-x^2}$, $h(x) = \arctan x$, $\ell(x) = \sqrt{1 - x^2}$ zijn voorbeelden van begrensde functies. De functie $f(x) = e^{-x}$ is begrensd op $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, de functie zelf is echter niet begrensd.

2.1.2. Definitie. Een functie f heet monotoon stijgend op $V \subset \text{DOM } f$, wanneer voor alle $x,y \in V$ met $x < y$ geldt: $f(x) < f(y)$. De functie f heet monotoon stijgend wanneer hij monotoon stijgend is op DOM f. Een functie f heet monotoon niet-dalend op $V \subset \text{DOM } f$, wanneer voor alle $x,y \in V$ met $x < y$ geldt: $f(x) \leq f(y)$; f heet monotoon niet-dalend wanneer f monotoon niet-dalend is op DOM f.
De begrippen monotoon dalend en monotoon niet-stijgend worden analoog gedefinieerd. Een functie heet monotoon wanneer hij monotoon stijgend, monotoon niet-dalend, monotoon niet-stijgend of monotoon dalend is.
Een functie heet strikt monotoon wanneer hij monotoon stijgend of monotoon dalend is. Merk op, dat een monotoon stijgende functie ook monotoon niet-dalend is, en een dalende functie ook niet-stijgend.

2.1.3. Voorbeelden.

1) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ met

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{als } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

is een monotoon niet-stijgende functie.

2) f: $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ met $f(x) = \sin x$ is een monotoon stijgende functie.

3) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f(x) = x^2$ is monotoon dalend op $(-\infty,0]$ en monotoon stijgend op $[0,\infty)$.

2.1.4. Stelling. Laat $f: A \to B$ een bijectieve, monotoon stijgende (resp. monotoon dalende) functie zijn. Dan is $\overset{\leftarrow}{f}: B \to A$ ook monotoon stijgend (resp. monotoon dalend).

Bewijs. Voor het geval dat f monotoon stijgend is: Kies willekeurige getallen $b_1,b_2 \in B$ met $b_1 < b_2$. Te bewijzen is dan $\overset{\leftarrow}{f}(b_1) < \overset{\leftarrow}{f}(b_2)$. Stel $\overset{\leftarrow}{f}(b_1) = a_1$ en $\overset{\leftarrow}{f}(b_2) = a_2$, dan is $f(a_1) = b_1$ en $f(a_2) = b_2$. De ongelijkheid $a_1 > a_2$ is onmogelijk, want uit de monotonie van f zou volgen $f(a_1) > f(a_2)$ ofwel $b_1 > b_2$. Ook $a_1 = a_2$ is onmogelijk (dan zou gelden $b_1 = b_2$). Dus $a_1 < a_2$ ofwel $\overset{\leftarrow}{f}(b_1) < \overset{\leftarrow}{f}(b_2)$. Het geval waarin f monotoon dalend is wordt analoog bewezen. □

2.1.5. Gevolg. arcsin x is een monotoon stijgende functie; arccos x is monotoon dalend; arctan x is monotoon stijgend.

2.1.6. Definitie. Een functie f heeft een globaal maximum in $c \in$ DOM f, indien $f(x) \le f(c)$ voor alle $x \in$ DOM f. Een functie f heeft een globaal minimum in $c \in$ DOM f, indien $f(x) \ge f(c)$ voor alle $x \in$ DOM f.

2.1.7. Voorbeelden.

1) $f(x) = x^2$ heeft een globaal minimum in 0; er is geen globaal maximum.

2) f: $[0,2\pi] \to [-1,1]$ met $f(x) = \cos x$ heeft een globaal maximum zowel in 0 als in 2π en een globaal minimum in π.

2.1.8. De zg. hyperbolische functies sinh x, cosh x, tanh x, coth x (spreek uit sinus hyperbolicus, cosinus hyperbolicus, enz.) worden gedefinieerd door

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Ga na, dat hiermee de hyperbolische functies gedefinieerd zijn voor alle $x \in \mathbb{R}$, behalve dat coth x niet gedefinieerd is in 0.

2.1.9. Opgave. Schets de grafieken van de hyperbolische functies, onderzoek deze functies op monotonie en geef, voor zover ze bestaan, hun globale maxima en globale minima.

2. Functielimieten voor $x \to \infty$

2.2.1. Definitie. Zij f een functie die gedefinieerd is tenminste voor alle $x > b$ voor een of andere $b \in \mathbb{R}$ (dus f is een functie met $\exists_{b \in \mathbb{R}} ((b,\infty) \subset \text{DOM } f)$). Zij $L \in \mathbb{R}$. We zeggen f(x) gaat naar L voor $x \to \infty$ (notatie: $f(x) \to L$ $(x \to \infty)$ of $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$) wanneer geldt: voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een $N \in \mathbb{R}$ zó dat voor alle $x > N$ geldt $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Anders gezegd:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{R}}\ \forall_{x>N}\ (|f(x) - L| < \varepsilon) .$$

2.2.2. Merk op dat deze definitie zeer veel lijkt op die in 1.2.1 voor convergentie van een rij. Het is dan ook niet verwonderlijk, dat de meeste eigenschappen die voor rijen gelden ook voor functielimieten voor $x \to \infty$ bewezen kunnen worden. Wij zullen deze eigenschappen verderop gebruiken zonder nu de bewijsvoering over te doen. We formuleren slechts het equivalent van de grondeigenschap der reële getallen (zie 1.3.10). Daarna wijzen we nog op een kleine uitzondering in de analogie met rijen om vervolgens in een tweetal stellingen de overgang van rijlimieten naar functielimieten en terug te vergemakkelijken. Tenslotte recapituleren we enige uit het V.W.O. bekende limieten.

2.2.3. Analogie van de grondeigenschap der reële getallen

Laat f gedefinieerd zijn voor alle $x > b$ voor zekere $b \in \mathbb{R}$. Als f monotoon niet-dalend en begrensd is, dan bestaat $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Een soortgelijke bewering geldt voor monotoon niet-stijgende in plaats van niet-dalende functies f.

2.2.4. Stelling. Als $\lim_{x\to\infty} f(x)$ bestaat, dan is er een $b \in \mathbb{R}$ zo dat f begrensd is op (b,∞).

Bewijs. Zij $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. Kies $\varepsilon = 1$. Voor voldoend grote x is dan $f(x) \in (L - 1, L + 1)$. □

2.2.5. Opgave. Geef een voorbeeld van een niet begrensde functie f, waarvoor $\lim_{x\to\infty} f(x)$ bestaat.

2.2.6. Stelling. Als $\lim_{x\to\infty} f(x)$ bestaat, dan convergeert de rij $(f(n))_{n=1}^{\infty}$ en

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{x\to\infty} f(x) \ .$$

Bewijs. Dit volgt direct uit de definities. □

2.2.7. Het omgekeerde van stelling 2.2.6 is in het algemeen niet juist: er bestaan functies f, gedefinieerd voor alle voldoend grote x, zo dat $\lim_{n\to\infty} f(n)$ wel bestaat en $\lim_{x\to\infty} f(x)$ niet.

Voorbeeld. $f(x) = \sin \pi x$. Wel geldt:

2.2.8. Stelling. Laat f gedefinieerd zijn tenminste op (b,∞) voor zekere $b \in \mathbb{R}$. Als f monotoon is terwijl $\lim_{n\to\infty} f(n)$ bestaat, dan bestaat ook $\lim_{x\to\infty} f(x)$ en

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(n) \ .$$

Bewijs. Zij f monotoon niet-dalend (in het andere geval verloopt het bewijs analoog). Stel $L = \lim_{n\to\infty} f(n)$. Er geldt: $f(x) \le L$ voor alle $x \in \mathrm{DOM}\ f$. Immers, zij $x \in \mathrm{DOM}\ f$. Kies hierbij $n \in \mathbb{N}$ met $n \ge x$. Uit 1.3.8 volgt dat $f(n) \le L$, zodat ook $f(x) \le f(n) \le L$.
Zij nu $\varepsilon > 0$. Uit $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$ volgt dat $f(n) > L - \varepsilon$ o.d.d. Laat $N \in \mathbb{N}$, $N > b$ de eigenschap hebben: voor alle $n \ge N$ is $f(n) > L - \varepsilon$. Voor alle $x \ge N$ geldt nu:

$$L - \varepsilon < f(N) \le f(x) \le L \ ,$$

waaruit volgt $|f(x) - L| < \varepsilon$ voor alle $x \ge N$. Dus $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. □

2.2.9. Vanuit het V.W.O. zijn de volgende standaardlimieten bekend (hierbij zijn p en a vaste reële getallen)

Voor $p > 0$ is $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0$

Voor $0 < a < 1$ is $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ (in het bijzonder $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$)

voor $p > 0$ is $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$

(dus op den duur stijgt x^p veel sterker dan $\ln x$, hoe dicht p ook bij 0 ligt)

voor alle $p \in \mathbb{R}$ is $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$

(dus op den duur stijgt e^x veel sterker dan x^p, hoe groot p ook is).

Merk op dat uit de laatste limieten ongelijkheden volgen als

$\ln x < \sqrt{x}$ als x voldoende groot is en
$e^x > x^{1296}$ als x voldoende groot is.

2.2.10. Voor functies f, die gedefinieerd zijn tenminste voor alle $x < a$ voor zekere $a \in \mathbb{R}$, kan op soortgelijke wijze het begrip $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ gedefinieerd worden. Er gelden dezelfde soort eigenschappen als voor $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Ook oneigenlijke limieten als $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ enzovoort worden analoog aan het bij rijen behandelde ingevoerd.

3. Functielimieten voor $x \to a$

2.3.1. Definitie. Zij $\varepsilon > 0$ en $a \in \mathbb{R}$. De ε-omgeving van a is het interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; notatie: $U_\varepsilon(a)$. Dus $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$.

2.3.2. Definitie. Zij $A \subset \mathbb{R}$ en $p \in \mathbb{R}$, dan heet p een verdichtingspunt van A wanneer voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt:

$$(U_\varepsilon(p)\backslash\{p\}) \cap A \neq \emptyset \; .$$

D.w.z. p is verdichtingspunt van A wanneer iedere ε-omgeving van p minstens één punt x, $x \neq p$, van A bevat.
N.B. Een verdichtingspunt van A behoeft niet tot A te behoren.

2.3.3. Voorbeelden. Van het open interval (a,b) zijn alle punten p met $a \le p \le b$ verdichtingspunt. Van de verzameling $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ is 0 het enige verdichtingspunt. De verzameling $\mathbb{N}$ heeft geen verdichtingspunt.

2.3.4. Definitie. Laat f een functie zijn en a een reëel getal, zo dat f gedefinieerd is tenminste op $U_\eta(a)\backslash\{a\}$ voor een of andere $\eta > 0$. Dan betekent $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in U_\delta(a)\backslash\{a\}$ geldt: $f(x) \in U_\varepsilon(L)$. Anders geformuleerd: voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt: $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Slordig uitgedrukt: dicht bij a (maar niet noodzakelijk in a zelf) liggen de functiewaarden dicht bij L.

2.3.5. Opmerkingen.

1) De definitie kan wat algemener als volgt gegeven worden. Zij f een functie en $a \in \mathbb{R}$, zo dat a verdichtingspunt van DOM f is. Dan betekent $\lim_{x\to a} f(x) = L$, dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zo dat voor alle $x \in$ DOM f met $x \in U_\delta(a)\setminus\{a\}$ geldt: $f(x) \in U_\varepsilon(L)$. Bij ons zal DOM f in de praktijk steeds een (al dan niet begrensd) interval zijn, eventueel een eindig aantal punten hieruit uitgezonderd. Hiervoor is het gebruik van de meer algemene definitie niet nodig.
2) Merk op dat het voor de definitie van $\lim_{x\to a} f(x) = L$ irrelevant is of $a \in$ DOM f of $a \notin$ DOM f, en dat het als $a \in$ DOM f, niet ter zake doet welke waarde f(a) heeft.
3) Op soortgelijke wijze als bij rijen (zie 1.2.7) kan bewezen worden dat een functie voor $x \to a$ ten hoogste één limiet heeft. Indien er een limiet is, ligt hij dus eenduidig vast. Hiermee wordt het gebruik van de notatie $\lim_{x\to a} f(x)$ voor "de" limiet gerechtvaardigd.
4) Op welbekende wijze worden ook de oneigenlijke limieten $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ en $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ ingevoerd. Geef zelf de definities.
5) De bewijzen van de meeste eigenschappen, geldig voor functielimieten, kunnen gegeven worden analoog aan de corresponderende bewijzen voor rijlimieten. We zullen daarom volstaan met een wat verkorte behandeling van deze eigenschappen.
6) Opmerkingen als hierboven kunnen ook gemaakt worden voor de definities 2.3.6 en 2.3.7.

2.3.6. Definitie. Laat f een functie zijn en a een reëel getal, zo dat f gedefinieerd is tenminste op $(a,a+\eta)$ voor zekere $\eta > 0$. Dan betekent $\lim_{x\downarrow a} f(x) = L$, dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in (a,a+\delta)$ geldt $f(x) \in U_\varepsilon(L)$. Deze limiet heet de rechterlimiet van f in a.

2.3.7. Definitie. Laat f een functie zijn en a een reëel getal, zo dat f gedefinieerd is tenminste op $(a-\eta,a)$ voor zekere $\eta > 0$. Dan betekent $\lim_{x\uparrow a} f(x) = L$, dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zo dat voor alle $x \in (a-\delta,a)$ geldt $f(x) \in U_\varepsilon(L)$. Deze limiet heet de linkerlimiet van f in a.

2.3.8. Opgave. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

1) $\lim_{x\to a} f(x) = L$;

2) $\lim_{x\to a} (f(x) - L) = 0$;

3) $\lim_{x\to a} |f(x) - L| = 0$.

Bewijs ook dat geldt:

4) als $\lim_{x\to a} f(x) = L$, dan is $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$

5) als $\lim_{x\to a} f(x) = L$, dan is $\lim_{x\to a} \sqrt{|f(x)|} = \sqrt{|L|}$.

2.3.9. Uit het V.W.O. zijn de volgende eigenschappen bekend:

~~1) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ dan en slechts dan als $\lim_{x\downarrow a} f(x) = L$ en $\lim_{x\uparrow a} f(x) = L$.~~

2) als $f(x) \le y(x) \le g(x)$ voor $x \in U_\eta(a)\backslash\{a\}$ voor een $\eta > 0$, terwijl $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = L$, dan is $\lim_{x\to a} y(x) = L$ (Insluitstelling).

3) als $\lim_{x\to a} f(x) = L$ en $\lim_{x\to a} g(x) = M$, dan is $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M$.

4) als $\lim_{x\to a} f(x) = L$, dan is $\lim_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda L$.

5) als $\lim_{x\to a} f(x) = L$ en $\lim_{x\to a} g(x) = M$, dan is $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$.

6) als $\lim_{x\to a} g(x) = M$, $M \neq 0$, dan is $\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$.
(Merk op dat uit $M \neq 0$ volgt dat $g(x) \neq 0$ in $U_\varepsilon(a)\backslash\{a\}$ voor voldoende kleine positieve ε).

7) als $\lim_{x\to a} f(x) = L$ en $\lim_{x\to a} g(x) = M$, $M \neq 0$, dan is $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

8) als $f(x) \ge A$ in $U_\varepsilon(a)\backslash\{a\}$ voor zekere $\varepsilon > 0$, en $\lim_{x\to a} f(x) = L$, dan is $L \ge A$. Evenzo met $\le$ in plaats van $\ge$.

9) als f monotoon niet-dalend is op $(a - \delta, a)$ voor zekere $\delta > 0$, terwijl $\lim_{x\uparrow a} f(x) = L$, dan is $f(x) \le L$ voor $a - \delta < x < a$. Is f monotoon niet dalend op $(a, a + \delta)$ voor zekere $\delta > 0$ en geldt $\lim_{x\downarrow a} f(x) = L$, dan is $f(x) \ge L$ voor $a < x < a + \delta$. Soortgelijke uitspraken gelden voor monotoon niet-stijgende functies f.

10) $\lim_{x\to a} c = c$, $\lim_{x\to a} x = a$, $\lim_{x\to a} x^p = a^p$ voor $a > 0$, als $p > 0$ dan is $\lim_{x\downarrow 0} x^p = 0$,
$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$, $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$, $\lim_{x\to a} \ln x = \ln a$ voor $a > 0$,
$\lim_{x\to a} e^x = e^a$.

11) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Bovendien gelden 2) t/m 7) ook, indien overal $\lim_{x\to a}$ vervangen wordt door $\lim_{x\downarrow a}$ of door $\lim_{x\uparrow a}$.

2.3.10. Voorbeelden.

1) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \tfrac{1}{2}\ .$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2\,\frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin x}{x} = 2\ .$$

3) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{1+1} = 1\ .$$

2.3.11. Voor functielimieten voor $x \to a$ geldt de volgende eigenschap, analoog aan de grondeigenschap voor reële getallen: Laat f gedefinieerd zijn tenminste op $(a - \eta, a)$ voor zekere $\eta > 0$. Wanneer f monotoon én begrensd is op $(a - \eta, a)$, dan bestaat $\lim_{x\uparrow a} f(x)$. Ook geldt: Laat f gedefinieerd zijn tenminste op $(a, a + \eta)$ voor zekere $\eta > 0$. Wanneer f monotoon én begrensd is op $(a, a + \eta)$, dan bestaat $\lim_{x\downarrow a} f(x)$.

2.3.12. Opgave. Geef een voorbeeld van een functie f die monotoon én begrensd is in een omgeving van een punt a, terwijl $\lim_{x\to a} f(x)$ niet bestaat.

2.3.13. Opgave. Als f een functie is met $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ en $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij met $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, terwijl $a_n \neq a$ o.d.d., dan geldt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = L$. Bewijs dit. Laat ook zien dat de voorwaarde "$a_n \neq a$ o.d.d." niet gemist kan worden.

4. Continuiteit

2.4.1. Definitie. f heet continu in $a \in$ DOM f indien voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zo dat voor alle $x \in$ DOM f met $x \in U_\delta(a)$ geldt: $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$. Anders geformuleerd: voor alle $x \in$ DOM f met $|x - a| < \delta$ moet gelden $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Slordig gezegd: dicht bij a liggen alle functiewaarden dicht bij f(a).

f heet continu op $V \subset$ DOM f indien f continu is in ieder punt van V.

f heet continu wanneer f continu is op DOM f.

In het vervolg van deze paragraaf beschouwen we slechts functies, die tot definitiegebied hebben een (al dan niet begrensd) interval, hiervan eventueel een eindig aantal punten uitgezonderd.

2.4.2 Stelling. Zij $a \in$ DOM f. Er geldt: f is continu in a dan en slechts dan als $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Hierbij moet $\lim\limits_{x\to a}$ door $\lim\limits_{x\downarrow a}$ vervangen worden wanneer a linkereindpunt van DOM f zou zijn, en door $\lim\limits_{x\uparrow a}$ bij rechtereindpunt van DOM f.

Bewijs. Volgt direct uit de betrokken definities. □

2.4.3. Continuiteit van f in a kan nu ook als volgt gezien worden:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f(\lim_{x\to a} x) ,$$

dus "limiet" en "functie" mogen verwisseld worden.

2.4.4. Voorbeelden. De functies $f(x) = c$, $f(x) = x$ en verder x^p, cos x, sin x, ln x en e^x zijn continu, zoals met 2.4.2 uit 2.3.9.10) volgt. De functie f met

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{voor } x \neq 0 \\ 1 & \text{voor } x = 0 \end{cases}$$

is continu.

De functies $f(x) = \frac{1}{x}$ en $f(x) = \tan x$ zijn continu.

De functie f met

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{als } x \geq 0 \end{cases}$$

is niet continu in 0, omdat $\lim_{x \to 0} f(x)$ niet bestaat ($\lim_{x \uparrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 1$).

2.4.5. Uit 2.3.9, 3) t/m 7), volgt dat som, veelvoud, product, omgekeerde en quotiënt van continue functies weer continue functies oplevert. Merk hierbij op dat het nul worden van g(x) bij bijvoorbeeld het quotiënt $\frac{f(x)}{g(x)}$ geen probleem oplevert voor de uitspraak $\frac{f}{g}$ is continu. Is n.l. $g(a) = 0$, dan is $\frac{f(x)}{g(x)}$ niet gedefinieerd in a, dus $a \notin \text{DOM } \frac{f(x)}{g(x)}$, en bij continuiteit stellen we slechts eisen voor punten uit het domein.

2.4.6. <u>Stelling</u>. Laat $g: A \to B$ en $f: B \to C$ functies zijn en zij $a \in A$. Als g continu is in a en f continu in g(a), dan is de samengestelde afbeelding $f \circ g$ continu in a.

<u>Bewijs</u>. Zij $\varepsilon > 0$. Omdat f continu is in g(a) bestaat bij ε een $\delta > 0$, zo dat voor alle $y \in B$ met $y \in U_\delta(g(a))$ geldt: $f(y) \in U_\varepsilon(f(g(a)))$. Omdat g continu is in a, bestaat er bij deze δ een $\eta > 0$, zo dat voor alle $x \in A$ met $x \in U_\eta(a)$ geldt: $g(x) \in U_\delta(g(a))$. Totaal (met $y = g(x)$): voor alle $x \in A$ met $x \in U_\eta(a)$ geldt $f(g(x)) \in U_\varepsilon(f(g(a)))$. Dus $f(g(x))$ is continu in a. □

2.4.7. <u>Gevolg</u>. Samenstellen van continue functies levert weer continue functies. Men zegt ook wel: een continue functie van een continue functie is een continue functie.

2.4.8. <u>Opgave</u>. Zij f continu in a en laat (a_n) een rij zijn met $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ terwijl $a_n \in \text{DOM } f$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dan geldt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$. Bewijs dit. Vergelijk deze eigenschap met 2.3.13 en verklaar, waarom met het gegeven "f continu in a" de voorwaarde "$a_n \neq a$ o.d.d." niet meer nodig is.

2.4.9. Laat de functie f continu zijn op een gesloten interval [a,b]. De grafiek van f is dan een "doorlopende" kromme die elke rechte $y = c$ met c tussen f(a) en f(b) snijdt. Deze eigenschap wordt geformuleerd in de volgende stelling.

2.4.10. Stelling (tussenwaardestelling). Zij f continu op $[a,b]$ met $f(a) \neq f(b)$ en zij η een getal tussen $f(a)$ en $f(b)$. Dan is er een $\xi \in (a,b)$ zodat $f(\xi) = \eta$.

Bewijs. Beschouw eerst het geval $f(a) < \eta < f(b)$. We construeren twee rijen getallen (a_n) en (b_n) die de gezochte waarde ξ tot limiet zullen hebben. Definieer $a_1 = a$, $b_1 = b$. Halveer $[a_1,b_1]$ en onderzoek $f(\frac{1}{2}(a_1 + b_1))$. Als $f(\frac{1}{2}(a_1 + b_1)) \leq \eta$ dan stellen we $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ en $b_2 = b_1$; als $f(\frac{1}{2}(a_1 + b_1)) > \eta$ dan stellen we $a_2 = a_1$ en $b_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. In beide gevallen is $f(a_2) \leq \eta$, $f(b_2) > \eta$. Pas dezelfde procedure opnieuw toe op $[a_2,b_2]$. Afhankelijk van $f(\frac{1}{2}(a_2 + b_2))$ definiëren we a_3 en b_3 zodanig dat $[a_3,b_3]$ die interval helft is met $f(a_3) \leq \eta$ en $f(b_3) > \eta$. Zet dit halveringsproces voort; dan ontstaan er twee rijen (a_n) en (b_n) met (a_n) monotoon niet-dalend, (b_n) monotoon niet-stijgend, $f(a_n) \leq \eta$ en $f(b_n) > \eta$. Bovendien is $b_n - a_n = (b - a)/2^{n-1}$, zodat $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$. Daar (a_n) behalve monotoon niet-dalend ook naar boven begrensd is (door b) convergeert (a_n). Stel $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dan is ook

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (a_n + (b_n - a_n)) = \xi + 0 = \xi .$$

Met 2.4.8 volgt nu $f(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leq \eta$ en $f(\xi) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \geq \eta$, zodat $f(\xi) = \eta$. Het is duidelijk dat $\xi \in [a,b]$. Uit $f(\xi) = \eta$ en $f(a) < \eta < f(b)$ volgt dat ξ verschilt van a en van b, zodat $\xi \in (a,b)$. Wanneer $f(b) < \eta < f(a)$ verloopt het bewijs analoog. □

2.4.11. Opmerkingen.

1) Het kan voorkomen, dat er vele getallen $\xi \in (a,b)$ bestaan met $f(\xi) = \eta$. De constructie uit het bewijs van 2.4.10 leidt dan tot één van deze getallen.
2) Indien f niet continu is op $[a,b]$ dan hoeft f niet elke waarde tussen $f(a)$ en $f(b)$ aan te nemen. Beschouw bijv. de functie f gedefinieerd op $[0,1]$ volgens

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq x < \frac{1}{2} , \\ 1 & \text{als } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 . \end{cases}$$

Er is dan geen $\xi \in (0,1)$ waarvoor $f(\xi) = \frac{1}{2}$.

Zonder bewijs vermelden we de volgende stellingen.

2.4.12. Stelling. Laat I een (al dan niet begrensd) interval zijn. Als f injectief en continu is op I, dan is f strikt monotoon op I.

2.4.13. Stelling. Laat I een (al dan niet begrensd) interval zijn. Als $f\colon I \to B$ met $B \subset \mathbb{R}$ een bijectieve, continue afbeelding is, dan is zijn inverse afbeelding $\overset{\leftarrow}{f}\colon B \to I$ ook continu.

2.4.14. Een functie die we kunnen construeren door uitgaande van de functies c, x, x^p, cos x, sin x en e^x een eindig aantal malen de volgende bewerkingen (voor zover mogelijk) toe te passen: optellen, (reëel) veelvoud nemen, vermenigvuldigen, delen, samenstellen en inverse functie nemen, heet wel een elementaire functie.

Met de eerste voorbeelden van 2.4.4, opmerking 2.4.5, stelling 2.4.6 en stelling 2.4.13 kunnen we nu inzien: Iedere elementaire functie is continu.
Alle functies die door "gewone" formules voorgesteld worden, zijn elementaire functies. Zo is zeker iedere "formule functie" continu. In het bijzonder kunnen we limieten van de vorm $\lim_{x\to a}$ van dergelijke functies dus berekenen door (als dit mogelijk is) de waarde a in te vullen.

Soms zullen we functies f ontmoeten, die voor een zekere waarde van a niet gedefinieerd zijn, terwijl $\lim_{x\to a} f(x)$ wel bestaat. Voorbeeld: $\frac{\sin x}{x}$ met $a = 0$.
Voor deze situatie is de volgende definitie en daaropvolgende stelling van belang.

2.4.15. Definitie. Laat f gedefinieerd zijn tenminste op $U_\eta(a)\backslash\{a\}$ voor zekere $\eta > 0$, maar niet in a zelf. Dan heet f continu voortzetbaar in a, wanneer er een functie F met definitieverzameling DOM f $\cup \{a\}$ bestaat, zo dat F continu is in a terwijl $F(x) = f(x)$ voor alle $x \in$ DOM f.

2.4.16. Stelling. f is continu voortzetbaar in a dan en slechts dan als $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat.

Bewijs. Definieer $F(a) = \lim_{x\to a} f(x)$. □

2.4.17. Voorbeelden. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ is continu voortzetbaar in 0,

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

is niet continu voortzetbaar in 0 (immers $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 0$ en $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = 1$).

2.4.18. Laat f een functie zijn die gedefinieerd is op een gesloten interval $[a,b]$ en die daar continu is. Op grond van het "vloeiend" verlopen van de grafiek is gevoelsmatig duidelijk dat f begrensd moet zijn en bovendien een globaal maximum en een globaal minimum moet hebben. Dit wordt geformuleerd in de volgende stelling. Deze stelling zullen we niet bewijzen; een bewijs kan gegeven worden analoog aan het bewijs van de tussenwaardestelling 2.4.10.

2.4.19. Stelling (Weierstrass). Zij $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie. Dan heeft f een globaal maximum en een globaal minimum, d.w.z. er bestaan punten $c_1, c_2 \in [a,b]$ zodat $f(c_1) \le f(x) \le f(c_2)$ voor alle $x \in [a,b]$.

2.4.20. Opmerking. Als f niet continu is op $[a,b]$ dan hoeft f geen globaal maximum te hebben. Beschouw bijv. de functie f gedefinieerd op $[0,1]$ volgens

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{als } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{als } x = 1 \text{ .} \end{cases}$$

Dan heeft f geen maximum op $[0,1]$.
Ook als het interval begrensd maar niet gesloten is kan men een voorbeeld geven van een continue functie die geen maximum heeft; $f(x) = \tan x$ gedefinieerd op $[0,\frac{1}{2}\pi)$, heeft geen maximum.

2.4.21. Gevolg. Zij f continu op $[a,b]$ dan is $f([a,b]) = [m,M]$ waarbij m het globale minimum en M het globale maximum van f op $[a,b]$ is. Dit resultaat volgt uit de tussenwaardestelling 2.4.10 en de stelling van Weierstrass 2.4.19.

5. Substitutiestellingen

2.5.1. Laat gelden $\lim_{x\to a} g(x) = b$ en $\lim_{y\to b} f(y) = L$. We vermoeden dan dat $\lim_{x\to a} f(g(x)) = L$. Enige voorzichtigheid is echter geboden: wellicht bestaan er vele waarden voor x waarvoor $g(x) = b$ en $f(b)$ behoeft niet gedefinieerd te zijn of is wellicht zelfs "verkeerd" (d.w.z. verschillend van L) gedefinieerd. We geven daarom de volgende stelling.

2.5.2. Stelling. Laat $g: A \to B$ en $f: B \to C$ functies zijn met $\lim_{x\to a} g(x) = b$ en $\lim_{y\to b} f(y) = L$, terwijl aan minstens één van de volgende voorwaarden is voldaan:
1) f is continu in b
2) $g(x) \ne b$ voor alle $x \in U_\eta(a)\setminus\{a\}$ voor zekere $\eta > 0$.

Dan geldt:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = L \text{ .}$$

Bewijs. Eerst merken we op, dat er een $\zeta > 0$ bestaat zó, dat $f(g(x))$ gedefinieerd is in $U_\zeta(a)\backslash\{a\}$. We werken vervolgens stilzwijgend steeds met waarden van x uit $U_\zeta(a)\backslash\{a\}$. Zij

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{als } x \in A,\ x \neq a \\ b & \text{als } x = a \end{cases}$$

en

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } x \in B,\ x \neq b \\ L & \text{als } x = b\ . \end{cases}$$

Dan zijn G en F continu in a resp. b. We bewijzen eerst, dat voor alle $x \in A \cap U_\eta(a)$ met $x \neq a$ geldt: $f(g(x)) = F(G(x))$.
Voor zover $g(x) \neq b$ is dit duidelijk; als aan 2) voldaan is zijn er in $U_\eta(a)$ géén andere waarden van x; als aan 1) voldaan is geldt indien $g(x) = b$

$$f(g(x)) = f(b) = L = F(b) = F(G(x))\ .$$

Vervolgens merken we op dat dus $\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{x\to a} F(G(x))$. Uit de continuiteit van G en F in resp. a en b volgt dat $\lim_{x\to a} F(G(x)) = F(G(a)) = F(b) = L$, zodat $\lim_{x\to a} f(g(x)) = L$. □

2.5.3. Voorbeelden.

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1\ ;$$

lees $f(y) = \frac{\sin y}{y}$ en $g(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = 0$.

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\tan(\arctan x)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\tan y} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \cos y \,\frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1 \,.\, \frac{1}{1} = 1\ .$$

2.5.4. Er zijn vele, dergelijke, substitutiestellingen. Formuleren van alle versies zou te ver voeren. Wel zullen we het gebruik van een aantal van deze versies illustreren aan de hand van een aantal voorbeelden. Hierbij worden ook veelal oneigenlijke limieten gebruikt.

2.5.5. Voorbeelden.

1) $\lim\limits_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} = \lim\limits_{y \to \infty} \frac{1}{y} = 0$, $\lim\limits_{x \downarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} = \lim\limits_{y \to -\infty} \frac{1}{y} = 0$ dus zelfs: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} = 0$.

2) $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} = \lim\limits_{y \downarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$.

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(\ln \ln x)^2 + 1}{2(\ln \ln x)^2 + 3 \ln \ln x + 5} = \lim\limits_{y \to \infty} \frac{y^2 + 1}{2y^2 + 3y + 5} = \frac{1}{2}$.

4) Voor $\delta > 0$ geldt

$$\lim_{x \downarrow 0} x^{\delta} \ln x = \lim_{y \to \infty} \left(\frac{1}{y}\right)^{\delta} \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \to \infty} \left(- \frac{\ln y}{y^{\delta}}\right) = 0 \text{ .}$$

Hoofdstuk 3. Differentiëren en integreren

1. Differentieerbaarheid

We herinneren er aan, dat voor $\eta > 0$: $U_\eta(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a - \eta < x < a + \eta\}$.

3.1.1. Definitie. Laat f gedefinieerd zijn tenminste op $U_\eta(a)$ voor zekere $\eta > 0$. Dan heet f differentieerbaar in a indien er een getal $A \in \mathbb{R}$ bestaat, en een functie ρ, gedefinieerd op $U_\eta(0)$, zodanig dat geldt:

1) $f(a + h) = f(a) + hA + h\rho(h)$ voor alle $h \in U_\eta(0)$,
2) ρ is continu in 0 en $\rho(0) = 0$.

3.1.2. Opmerkingen.

1) Uit de continuiteit van ρ in 0, tesamen met $\rho(0) = 0$ volgt $\lim_{h\to 0} \rho(h) = 0$. Is omgekeerd van de functie ρ gegeven dat $\lim_{h\to 0} \rho(h) = 0$, dan kan ρ (zo nodig) voortgezet of aangepast worden in 0 zo dat ρ continu is in 0 en dat $\rho(0) = 0$. Differentieerbaarheid van f in a is dus equivalent met het bestaan van een getal A en een functie ρ zo dat

   1) $f(a + h) = f(a) + hA + h\rho(h)$ voor $0 < |h| < \eta$,
   2') $\lim_{h\to 0} \rho(h) = 0$.

2) Uit opmerking 1) volgt dat voor een in a differentieerbare functie f het getal A gelijk is aan

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} .$$

   Dit getal heet de afgeleide van f in a, notatie: $f'(a)$.

3) Met de substitutie $h = x - a$ vinden we voor een functie f, die differentieerbaar is in a

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} .$$

3.1.3. Zij f differentieerbaar in a. Dan is

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\rho(h)$$

voor h in een η-omgeving van 0, ofwel

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\rho(x - a)$$

voor x in een η-omgeving van a.

Indien we f benaderen door de lineaire functie $\ell(x) = f(a) + (x - a)f'(a)$, dan maken we in de buurt van a een fout gegeven door

$$f(x) - \ell(x) = (x - a)\rho(x - a) \ ,$$

waarbij $\rho(x - a) \to 0$ voor $x \to a$. We zeggen dat f lineair benaderbaar is in a. Grafisch houdt dit in dat de grafiek van ℓ (de rechte: $y = f(a) + (x-a)f'(a)$) raakt aan de grafiek van f in het punt $(a,f(a))$.

3.1.4. Definitie. Een functie f heet differentieerbaar op een open interval I wanneer f differentieerbaar is in elk punt van I. De afbeelding die aan elke $x \in I$ het getal $f'(x)$ toevoegt heet de afgeleide (functie) van f, notatie: f' of $\frac{df}{dx}$ of Df. Is f' bovendien continu op I, dan heet f continu differentieerbaar op I.

3.1.5. Definitie. Laat f gedefinieerd zijn tenminste op $[a,a + \eta)$ voor zekere $\eta > 0$. Dan heet, als hij bestaat,

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

de rechterafgeleide van f in a; notatie: $f'_R(a)$. Merk op dat

$$f'_R(a) = \lim_{x\downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ .$$

Analoog wordt de linkerafgeleide, notatie: $f'_L(a)$, ingevoerd.
Uit 2.3.9.1) volgt onmiddellijk:

3.1.6. Stelling. Zij f gedefinieerd tenminste op $U_\eta(a)$ voor zekere $\eta > 0$. Dan is f differentieerbaar in a dan en slechts dan als de rechterafgeleide en de linkerafgeleide van f in a bestaan en aan elkaar gelijk zijn. Is dit het geval, dan is $f'(a) = f'_R(a) = f'_L(a)$.

3.1.7. Voorbeelden.

1) De functie $f(x) = \sin x$ is differentieerbaar in elke $a \in \mathbb{R}$, immers

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(a + h) - \sin a}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2 \sin \frac{1}{2}h}{h} \cos(a + \tfrac{1}{2}h) = \cos a \ .$$

2) De functie $|x|$ is niet differentieerbaar in 0. Immers, hij heeft een rechterafgeleide en een linkerafgeleide in 0, die niet gelijk zijn:

$$f'_R(0) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_L(0) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x\uparrow 0} \frac{-x}{x} = -1 \ .$$

3.1.8. Stelling. Als f differentieerbaar is in a, dan is f continu in a.

Bewijs. Zij f differentieerbaar, dan is

$$f(a + h) = f(a) + hA + h\rho(h) \ ,$$

dus

$$\lim_{h\to 0} f(a + h) = f(a) \text{ ofwel } \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ . \qquad \square$$

3.1.9. Opmerking. De omgekeerde bewering is niet waar, getuige het voorbeeld $f(x) = |x|$. Deze functie is continu in 0 en niet differentieerbaar in 0 (zie 3.1.7.2)).

3.1.10. Vanuit het V.W.O. is bekend:

1) Zijn f en g differentieerbaar in a, dan is ook $f+g$ differentieerbaar in a en $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ (we schrijven kortweg $f+g$ voor de functie, die aan x toevoegt $f(x) + g(x)$; analoog in een aantal volgende gevallen).
2) Is f differentieerbaar in a en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan is λf differentieerbaar in a en $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.
3) Zijn f en g differentieerbaar in a, dan is fg differentieerbaar in a en $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
4) Zijn f en g differentieerbaar in a, $g(a) \neq 0$, dan is $\frac{f}{g}$ differentieerbaar in a en

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2} \ .$$

5) De volgende functies hebben de volgende afgeleiden:

f	f'	geldig voor
c	0	
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}$
x^a	ax^{a-1}	$x > 0,\ a \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$
$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$
e^x	e^x	
$\ln \lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$x \neq 0$

Ga zelf na dat $(\cosh x)' = \sinh x$ en $(\sinh x)' = \cosh x$.
Later (in 3.1.17 en 3.1.18) krijgen we nog

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{voor } |x| < 1 ,$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{voor } |x| < 1 ,$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R} .$$

3.1.11. Stelling (kettingregel). Als $g: A \to B$ differentieerbaar is in a en $f: B \to C$ differentieerbaar in $g(a)$, dan is $f \circ g: A \to C$ differentieerbaar in a en $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)).g'(a)$.

Bewijs. Bij g en f bestaan functies ρ en σ, gedefinieerd in omgevingen van 0, continu in 0 en met $\rho(0) = 0$, $\sigma(0) = 0$, zo dat

$$g(a + h) = g(a) + hg'(a) + h\rho(h)$$

en

$$f(g(a) + k) = f(g(a)) + kf'(g(a)) + k\sigma(k) .$$

Met $k = h(g'(a) + \rho(h))$ is dan

(1) $$f(g(a + h)) = f(g(a) + k) = f(g(a)) + hg'(a)f'(g(a)) + h\varepsilon(h)$$

waarin

$$\varepsilon(h) = \rho(h)f'(g(a)) + (g'(a) + \rho(h))\sigma(h(g'(a) + \rho(h))) .$$

Hierուit zien we dat ε continu is in 0 (immers ρ en σ zijn continu in 0) en dat $\varepsilon(0) = 0$ (want $\rho(0) = 0$ en $\sigma(0) = 0$). Met (1) volgt nu dat $f(g(x))$ differentieerbaar is in a met afgeleide $g'(a)f'(g(a))$. □

3.1.12. Opmerking. Schrijf $g(x) = y$ en $f(g(x)) = f(y)$; beschouw tevens f via $f(g(x))$ als functie van x. Slordig kunnen we dan de kettingregel weergeven in de vorm

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} .$$

3.1.13. Voorbeeld. Met $f(x) = e^x$ en $g(x) = x \ln(b)$ $(b > 0)$ is $f(g(x)) = e^{x \ln b} = b^x$. Uit 3.1.11 volgt $(b^x)' = e^{x \ln b}.\ln b = b^x.\ln b$. In de terminologie van 3.1.12 wordt dit:

$$(b^x)' = (e^{x \ln b})' = e^{x \ln b} \, . \, (x \ln b)' = b^x.\ln b \; ,$$

waarbij $y = x \ln b$ is gebruikt.

3.1.14. Opgave. Bewijs dat voor $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ geldt $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$; ook dat voor $g(x) = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|$ met $|x| > |a|$ geldt $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

3.1.15. Stelling (Inverse functiestelling). Laat I en J open intervallen zijn en zij $f\colon I \to J$ een bijectieve afbeelding die differentieerbaar is op I. Laat $a \in I$ een punt zijn met $f'(a) \neq 0$. Dan is $\overset{\leftarrow}{f}$ differentieerbaar in $b = f(a)$ en

$$(\overset{\leftarrow}{f})'(b) = \frac{1}{f'(a)} .$$

Bewijs. Met $b = f(a)$ is $a = \overset{\leftarrow}{f}(b)$. Zij $k \neq 0$; dan is $\overset{\leftarrow}{f}(b + k) = a + h$ voor zekere $h \neq 0$; nu is $f(a + h) = b + k$. Er geldt:

$$\frac{\overset{\leftarrow}{f}(b + k) - \overset{\leftarrow}{f}(b)}{k} = \frac{a + h - a}{b + k - b} = \frac{h}{f(a + h) - f(a)} = \frac{1}{\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}} .$$

Omdat f differentieerbaar is op I, is f continu op I. Volgens 2.4.13 is $\overset{\leftarrow}{f}$ dan continu op J zodat

$$\lim_{k\to 0} h = \lim_{k\to 0} (\overset{\leftarrow}{f}(b + k) - \overset{\leftarrow}{f}(b)) = 0 .$$

Uit $k \to 0$ volgt dus $h \to 0$. Daarmee is

$$(\overset{\leftarrow}{f})'(b) = \lim_{k\to 0} \frac{\overset{\leftarrow}{f}(b + k) - \overset{\leftarrow}{f}(b)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}} = \frac{1}{f'(a)} . \quad □$$

3.1.16. Opmerking. De inverse functiestelling wordt slordig ook wel geformuleerd als

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} .$$

3.1.17. Voorbeeld. Met $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $J = (-1,1)$ en $y = f(x) = \sin x$, dus $\overleftarrow{f}(y) = \arcsin y$, vinden we

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

(merk op dat $\cos x > 0$ voor $x \in I$).

Schrijven we weer x in plaats van y, dan krijgen we

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{voor } |x| < 1 .$$

3.1.18. Opgave. Toon op soortgelijke wijze aan, dat

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{voor } |x| < 1$$

en

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R} .$$

3.1.19. Hogere afgeleiden. De afgeleide van een differentieerbare functie f kan opnieuw differentieerbaar zijn en we noemen de afgeleide hiervan de tweede afgeleide van f, genoteerd als f'' of $\frac{d^2f}{dx^2}$ of $\frac{d^2y}{dx^2}$ of D^2y. In het algemeen geven we de n-de afgeleide van f aan met $f^{(n)}$, dus $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$; naast $f^{(n)}$ komt ook voor de notatie $\frac{d^nf}{dx^n}$ of $\frac{d^ny}{dx^n}$ of $y^{(n)}$ of D^ny. De functie f zelf geven we soms wel aan met $f^{(0)}$. We zeggen dat een functie n-maal continu differentieerbaar is op (a,b) indien de functie n-maal differentieerbaar is op (a,b) en de n-de afgeleide continu is op (a,b).

De regel voor het differentiëren van een product kunnen we uitbreiden tot:

3.1.20. Stelling (Regel van Leibniz). Als f en g n-maal differentieerbaar zijn op een open interval I (waarbij $n \in \mathbb{N}$) dan geldt voor $x \in I$

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) .$$

Bewijs. Analoog aan 0.8.22. $\square$

3.1.21. Voorbeeld. Zij $f(x) = \arcsin x$. We bewijzen dat voor alle $x \in (-1,1)$ en voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$(1 - x^2)f^{(n+2)}(x) = (2n + 1)xf^{(n+1)}(x) + n^2f^{(n)}(x) .$$

Rechtstreeks differentiëren leert dat

$$(1 - x^2)f''(x) = xf'(x) .$$

Door links en rechts n-maal te differentiëren met behulp van de regel van Leibniz vinden we

$$(1 - x^2)f^{(n+2)}(x) + \binom{n}{1}(-2x)f^{(n+1)}(x) + \binom{n}{2}(-2)f^{(n)}(x) =$$

$$= xf^{(n+1)}(x) + \binom{n}{1}.1.f^{(n)}(x)$$

waaruit door herleiding de gevraagde gelijkheid volgt.

3.1.22. Een aantal limieten kan bepaald worden door ze te zien als herformulering van de limiet, waarmee de afgeleide van een bepaalde functie in een of ander punt wordt gedefinieerd. Als voorbeeld bewijzen we

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1 .$$

Immers,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1 + h) - \ln 1}{h} = (\ln y)'_{y=1} = 1 .$$

Merk op, dat deze limiet zegt, dat $\ln(1 + x)$ bij benadering gelijk is aan x (notatie: $\ln(1 + x) \approx x$) voor x dicht bij 0.

3.1.23. Opgave. Toon aan, dat $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ en geef hiermee een benadering voor e^x voor x dicht bij 0.

3.1.24. Stelling. Laat f en g differentieerbaar zijn in a met $g'(a) \neq 0$ en zij $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Dan is

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} .$$

Bewijs. De functies f en g zijn continu in a (zie 3.1.8), dus

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{en} \quad g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \,,$$

zodat

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

op grond van 2.3.9, onderdeel 7). □

3.1.25. Opmerking. Er zijn vele stellingen, genoemd naar De l'Hôpital, die uitbreidingen en varianten van 3.1.24 geven.
Wij behandelen die hier uitdrukkelijk niet, aangezien gebleken is dat de kans op foutief toepassen groot is.

3.1.26. Voorbeelden.

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \frac{\dfrac{1}{1 + 0}}{1} = 1 \quad \text{(vergelijk met 3.1.22)} \,.$$

2) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{-\sin \frac{\pi}{2}}{1} = -1 \,.$$

3.1.27. Stelling. $\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$

Bewijs. We gaan uit van $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = 1.$

Herschrijven geeft

$$\lim_{h\to 0} \{\ln(1 + h)^{1/h}\} = 1 \,.$$

Wegens de continuiteit van e^x in 1 is dan

$$\lim_{h\to 0} (1 + h)^{1/h} = \lim_{h\to 0} e^{\ln(1 + h)^{1/h}} = e^1 = e \,.$$

Substitueer $x = \frac{1}{h}$, gebruik $h \downarrow 0$ zodat $x \to \infty$. Dit geeft

$$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \,.$$ □

3.1.28. Stelling. Voor alle $a \in \mathbb{R}$ is $\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$.

Bewijs. Voor $a = 0$ is de limiet duidelijk. Voor $a \neq 0$ gaan we weer uit van $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = 1$. Vermenigvuldigen met a en herschrijven levert

$$\lim_{h\to 0} \ln(1 + h)^{a/h} = a .$$

Wegens de continuïteit van e^x in a is dan ook

$$\lim_{h\to 0} (1 + h)^{a/h} = e^a .$$

Voor $a > 0$ substitueren we $x = \frac{a}{h}$; we gebruiken $h \downarrow 0$ zodat $x \to \infty$. Dit geeft $\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$. Voor $a < 0$ substitueren we ook $x = \frac{a}{h}$; we gebruiken nu echter $h \uparrow 0$ zodat weer $x \to \infty$. Dan krijgen we eveneens $\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$. □

3.1.29. Gevolg. De rij (a_n) met $a_n = (1 + \frac{a}{n})^n$ convergeert naar e^a. Hiermee is het in 1.4.12 beloofde bewijs geleverd.

2. Monotonie; extrema

3.2.1. Definitie (vergelijk 2.1.6). Een functie f heeft een locaal maximum in $c \in \mathrm{DOM}\, f$, indien er een $\eta > 0$ bestaat zo dat $f(x) \le f(c)$ voor alle $x \in \mathrm{DOM}\, f$ met $x \in U_\eta(c)$. Analoog wordt het begrip locaal minimum gedefinieerd. Een locaal extreem is een locaal maximum of locaal minimum.

3.2.2. Opmerkingen. Een globaal maximum is ook een locaal maximum, evenzo voor minimum. Er zijn functies, die wel locale, maar geen globale extrema hebben (verzin er één!). Het grootste locale maximum behoeft dus geen globaal maximum te zijn. Een locaal maximum in c wordt wel relatief genoemd wanneer er punten $x \in \mathrm{DOM}\, f$ bestaan met $f(x) > c$, evenzo voor minimum. Is f gedefinieerd op $[a,b]$, dan heet een maximum (minimum, extreem) in a of in b een randmaximum (randminimum, randextreem).

3.2.3. Stelling. Zij f gedefinieerd op $[a,b]$. Als f een locaal extremum heeft in $c \in (a,b)$ en f is differentieerbaar in c, dan is $f'(c) = 0$.

Bewijs. Onderstel dat f in c een locaal maximum heeft. Dan is er een omgeving U van c zodat $f(x) \leq f(c)$ voor alle $x \in U$. Daaruit volgt voor de rechterafgeleide in c,

$$f'_R(c) = \lim_{x \downarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \; ,$$

en voor de linkerafgeleide in c,

$$f'_L(c) = \lim_{x \uparrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \; .$$

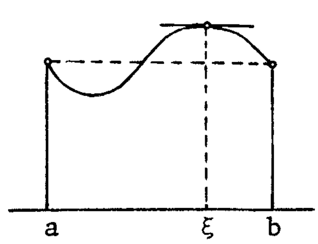
De functie f is differentieerbaar in c zodat $f'_R(c) = f'_L(c) = f'(c)$, dus $f'(c) = 0$.

In het geval dat f in c een locaal minimum heeft, is het bewijs op analoge wijze te voeren. □

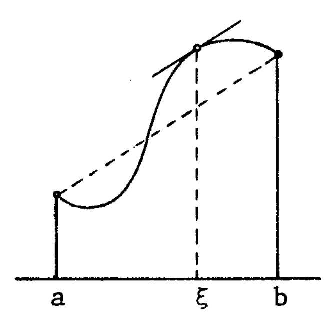
3.2.4. Stelling (Rolle). Zij f continu op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b). Als $f(a) = f(b)$, dan is er een $\xi \in (a,b)$ met $f'(\xi) = 0$.

Bewijs. Als $f(x) = f(a)$ voor alle $x \in [a,b]$, dan kunnen we voor ξ ieder getal uit (a,b) nemen.

Als $f(x_1) > f(a)$ voor zekere $x_1 \in (a,b)$ dan heeft f volgens 2.4.19 een globaal maximum in een punt $\xi \in (a,b)$, en $f'(\xi) = 0$. Als $f(x_1) < f(a)$ voor zekere $x_1 \in (a,b)$, dan heeft f een globaal minimum in een punt $\xi \in (a,b)$, en $f'(\xi) = 0$. □



Stelling van Rolle



Middelwaardestelling

3.2.5. Stelling (Middelwaardestelling). Zij f continu op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b), dan is er een $\xi \in (a,b)$ zodat $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$.

Bewijs. Zij ψ: $[a,b] \to \mathbb{R}$ de functie, gegeven door

$$\psi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) ,$$

dan is ψ continu op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b). Voorts geldt dat $\psi(a) = \psi(b) = f(a)$, dus is er een $\xi \in (a,b)$ met

$$0 = \psi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} . \qquad \square$$

We formuleren nu een aantal belangrijke gevolgen van de middelwaardestelling.

3.2.6. Stelling. Laat f differentieerbaar zijn op een open interval I. Dan geldt:

Is $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in I$, dan is f monotoon niet-dalend op I;
Is $f'(x) \leq 0$ voor alle $x \in I$, dan is f monotoon niet-stijgend op I;
Is $f'(x) > 0$ voor alle $x \in I$, dan is f monotoon stijgend op I;
Is $f'(x) < 0$ voor alle $x \in I$, dan is f monotoon dalend op I;
Is $f'(x) = 0$ voor alle $x \in I$, dan is f constant op I.

Bewijs. Laat $f'(x) \geq 0$ zijn voor alle $x \in I$. Kies $a \in I$, $b \in I$ met $a < b$. We bewijzen dat $f(a) \leq f(b)$. Omdat f continu is op $[a,b]$ (zelfs op I, zie 3.1.8) en differentieerbaar op (a,b), is volgens de middelwaardestelling $f(b) - f(a) =$ $= (b - a)f'(\xi)$ voor zekere $\xi \in (a,b)$. Uit $f'(\xi) \geq 0$ en $b > a$ volgt nu $f(b) - f(a) \geq 0$. Alle andere gevallen worden analoog bewezen. $\square$

3.2.7. Opmerkingen.

1) Als f monotoon stijgend is, kan $f'(x)$ voor sommige x nog wel nul zijn. Voorbeeld: $f(x) = x^3$ is monotoon stijgend, $f'(0) = 0$.
2) Uiteraard is $f'(x) = 0$ als f een constante is. Het laatste onderdeel van 3.2.6 zegt dus, dat de constante functies de enige functies zijn waarvan de afgeleide overal nul is.

3.2.8. Stelling. Laat f differentieerbaar zijn op een open interval I. Dan geldt:
Is f monotoon niet-dalend op I, dan is $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in I$.
Is f monotoon niet-stijgend op I, dan is $f'(x) \leq 0$ voor alle $x \in I$.

Bewijs. Laat f monotoon niet-dalend zijn. Zij $x \in I$. Voor $h > 0$ is $f(x + h) \geq f(x)$, dus $\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$. Voor $h < 0$ is $f(x + h) \leq f(x)$, dus weer $\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$. Dan is ook $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$. Indien f monotoon niet-stijgend is verloopt het bewijs analoog. $\square$

3.2.9. Volgens 3.2.3 is "$f'(c) = 0$" een nodige voorwaarde opdat een (differentieerbare) functie f een locaal extremum heeft in c. De voorwaarde is echter niet voldoende zoals blijkt uit het volgende tegenvoorbeeld: voor de functie $f(x) = x^3$ is $f'(0) = 0$ maar f heeft geen extremum in 0. Is de functie f gedefinieerd op $[a,b]$ dan zijn alleen de randpunten a,b, de punten waarin f niet differentieerbaar is en de punten waarin de afgeleide f' gelijk is aan nul, kandidaten voor extrema. Zij $f'(c) = 0$ dan is met behulp van het teken van de afgeleide in een omgeving U van c vast te stellen of f in c al dan niet een maximum dan wel een minimum heeft. Als $f'(x) > 0$ voor $x \in U$ en $x < c$ en $f'(x) < 0$ voor $x \in U$ en $x > c$, dan heeft f in c een locaal maximum; als $f'(x) < 0$ voor $x \in U$ en $x < c$ en $f'(x) > 0$ voor $x \in U$ en $x > c$, dan heeft f in c een locaal minimum; zie ook 3.2.6 en 2.3.9, onderdeel 9).
Voor het onderzoek naar een eventueel extreem in het linkerrandpunt a kan gebruikt worden: is f continu in a en is $f'(x) > 0$ op $(a,a + \eta)$ voor zekere $\eta > 0$, dan is er een locaal minimum in a; met $f'(x) < 0$ een locaal maximum. Voor het rechterrandpunt b geldt analoog: is f continu in b en is $f'(x) > 0$ op $(b - \eta,b)$ voor zekere $\eta > 0$, dan heeft f een locaal maximum in b; met $f'(x) < 0$ een locaal minimum.

3.2.10. Toepassing. We bewijzen eerst de (al bekende) ongelijkheid $\sin x \leq x$ voor $x \geq 0$. Zij $f(x) = \sin x - x$. Dan is $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$, zodat f monotoon niet-stijgend is. Met $f(0) = 0$ volgt $f(x) \leq 0$ voor $x \geq 0$. Vervolgens bewijzen we: $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$ voor $x \geq 0$. Zij $g(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$. Dan is $g'(x) = -\sin x + x \geq 0$, zodat g monotoon niet-dalend is. Omdat $g(0) = 0$ geldt $g(x) \geq 0$ voor $x \geq 0$.

3.2.11. Opgave. Bewijs dat $\sin x \geq x - \frac{1}{6}x^3$ voor $x \geq 0$ en dat $\cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ voor $x \geq 0$.

3.2.12. Stelling. Zij f continu in a en differentieerbaar op $U_\eta(a)\backslash\{a\}$ voor zekere $\eta > 0$ en zij $\lim_{x\to a} f'(x) = \ell$. Dan is f differentieerbaar in a en er geldt $f'(a) = \ell$.

Bewijs. Zij $h \in U_\eta(0)$, $h \neq 0$. Dan is volgens de middelwaardestelling

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(\xi)$$

voor zekere ξ tussen a en a + h.
Hieruit volgt

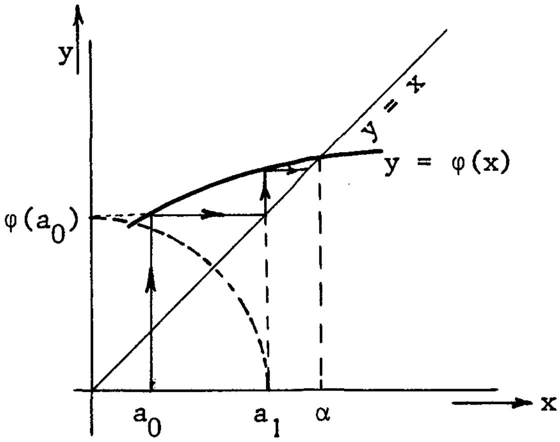
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(\xi) = \lim_{\xi\to a} f'(\xi) = \ell \;.$$

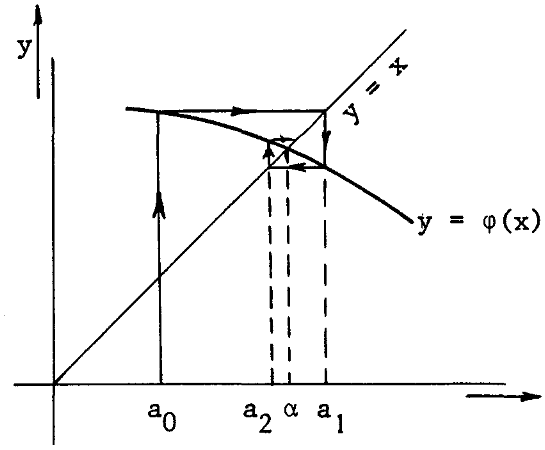
Dus f is differentieerbaar in a met $f'(a) = \ell$. □

3. Numeriek oplossen van vergelijkingen

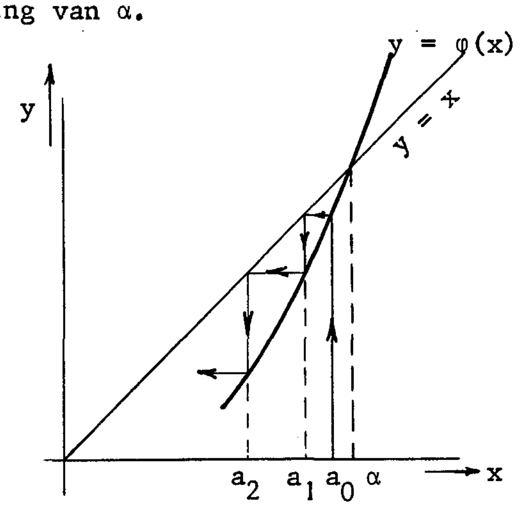
3.3.1. In deze paragraaf beschouwen we de vergelijking $F(x) = 0$ met wortel α. We nemen aan, dat α niet rechtstreeks berekend kan worden (bijvoorbeeld doordat F een te ingewikkelde structuur heeft) en we proberen daarom een numerieke benadering voor α te vinden. Hiervoor gebruiken we een zg. iteratiemethode: we gaan uit van een beginschatting a_0 voor α en we voeren een zekere bewerking uit waardoor we uit a_0 een volgende, betere benadering a_1 krijgen. Dit proces herhalen we totdat we α voldoende nauwkeurig gevonden hebben. Men noemt a_0 wel de startwaarde van het iteratieproces.
Laat φ de functie zijn waarmee de $(n+1)^e$ benadering wordt gevormd uit de n^e benadering. Dan bepaalt de iteratiemethode dus een recurrent gegeven rij: de rij (a_n) met $a_{n+1} = \varphi(a_n)$, met als beginelement de startwaarde a_0. Als φ continu is en als $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (wat uiteraard de bedoeling is) dan is $\alpha = \varphi(\alpha)$. Het nulpunt α van F is dan oplossing van de vergelijking $x = \varphi(x)$. Bij iedere iteratiemethode wordt de oorspronkelijke vergelijking $F(x) = 0$ dus op een of andere wijze omgevormd tot een nieuwe vergelijking $x = \varphi(x)$, waarvan α ook oplossing is, en waarbij het iteratieproces aansluit via $a_{n+1} = \varphi(a_n)$. We bespreken daarom eerst het numeriek oplossen van een vergelijking van de vorm $x = \varphi(x)$ via de iteratiemethode $a_{n+1} = \varphi(a_n)$, de zgn. methode van successieve substitutie.

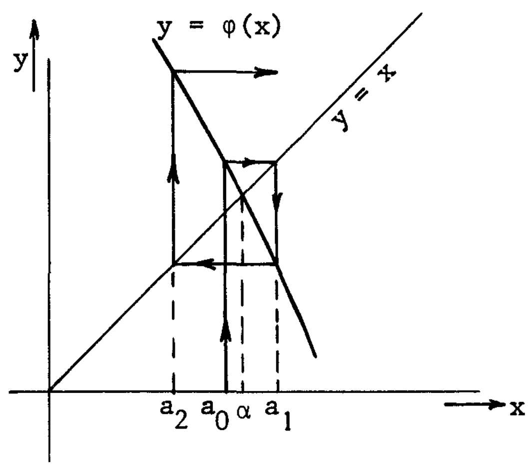
3.3.2. De gang van de iteratie kan eenvoudig afgelezen worden uit de volgende plaatjes:





Vergelijking van deze plaatjes met de onderstaande suggereert dat het proces <u>convergeert</u> als $|\varphi'(x)| < 1$ en <u>divergeert</u> als $|\varphi'(x)| > 1$ in de gebruikte omgeving van α.





3.3.3. <u>Opmerking</u>. Als de vergelijking $x = \varphi(x)$ meer dan één wortel bezit en als de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met $a_{n+1} = \varphi(a_n)$ convergeert, dan hangt het van de startwaarde a_0 af naar welke wortel de rij convergeert. Een nadere precisering is te geven met behulp van de grafiek van φ.

3.3.4. <u>Opgave</u>. Voer de methode van successieve substitutie grafisch uit voor de vergelijking $x = \varphi(x)$ in de volgende gevallen:

1) $\varphi(x) = 0{,}9x + 0{,}1$, startwaarde $a_0 = 0$;
2) $\varphi(x) = e^{-x}$, startwaarde $a_0 = 0$;
3) $\varphi(x) = x^2$, startwaarde $a_0 = 2$;
4) $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, startwaarde $a_0 = 1$.

3.3.5. Stelling. Laat α een wortel zijn van de vergelijking $x = \varphi(x)$. Zij φ differentieerbaar op een interval $I = (\alpha - \rho, \alpha + \rho)$, $\rho > 0$ en zij $|\varphi'(x)| \le L < 1$ voor alle $x \in I$.
Zij $a_0 \in I$ en $a_n = \varphi(a_{n-1})$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dan geldt:

i) $|a_n - \alpha| \le L^n |a_0 - \alpha|$, en $a_n \in I$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Bewijs.
i) Met de middelwaardestelling 3.2.5 volgt eenvoudig:

$$|a_1 - \alpha| = |\varphi(a_0) - \varphi(\alpha)| = |\varphi'(\xi)(a_0 - \alpha)| \le L|a_0 - \alpha| ,$$

waarin ξ een getal is gelegen tussen a_0 en α. Wegens $L < 1$ is $a_1 \in I$. Maak nu gebruik van volledige inductie. Onderstel dat $a_{n-1} \in I$ en $|a_{n-1} - \alpha| \le L^{n-1}|a_0 - \alpha|$, dan volgt analoog aan het voorafgaande:

$$|a_n - \alpha| = |\varphi(a_{n-1}) - \varphi(\alpha)| \le L|a_{n-1} - \alpha| \le L^n|a_0 - \alpha|$$

en $a_n \in I$.
ii) Wegens $0 \le L < 1$ is $\lim\limits_{n\to\infty} L^n = 0$, zodat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. □

3.3.6. Opmerkingen.

1) Als φ continu differentieerbaar is op een omgeving van α en $|\varphi'(\alpha)| < 1$, dan is er een interval $I = (\alpha - \rho, \alpha + \rho)$ en een getal L met $0 \le L < 1$ zodat $|\varphi'(x)| \le L$ voor alle $x \in I$; 3.3.5 is dan van toepassing. De stelling garandeert slechts locale convergentie, d.w.z. de rij (a_n) convergeert naar α mits de startwaarde a_0 voldoende dicht bij α gekozen wordt.
2) De ongelijkheid i) uit 3.3.5 geeft ons een mogelijkheid om de absolute waarde van de fout, die we krijgen als we α door a_n benaderen, naar boven te schatten. In de praktijk is deze ongelijkheid echter niet bruikbaar omdat doorgaans α, en dus het rechterlid van i), niet bekend is. In plaats van i) beschouwen we de ongelijkheid

$$|a_n - \alpha| \le L|a_{n-1} - \alpha| \le L\{|a_{n-1} - a_n| + |a_n - \alpha|\}$$

waaruit volgt

i') $|a_n - \alpha| \le \dfrac{L}{1 - L}\,|a_{n-1} - a_n|$.

Als L bekend is, hebben we hiermee een in de practijk bruikbare ongelijkheid verkregen.

3.3.7. <u>Opgave</u>. De rij (a_n) wordt bepaald door de iteratieformule $a_n = a_{n-1}^3 - 3a_{n-1}^2 + 3a_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Bepaal de mogelijke waarden van $\lim_{n\to\infty} a_n$. Noem deze waarden $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, in opklimmende grootte. Bepaal een interval I zodat $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha_2$, als $a_0 \in I$.

3.3.8. Uit de figuren verkregen bij de uitwerking van opgave 3.3.4, blijkt dat de rij (a_n) des te sneller convergeert naar de wortel α, naarmate $|\varphi'|$ kleiner is in een omgeving van α. Als maat voor de convergentiesnelheid beschouwen we

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha} .$$

3.3.9. Een rij (a_n) met $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ heet <u>lineair convergent</u> als

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha} = A \quad \text{met } 0 < |A| < 1 .$$

N.B. Als A = 0 is de convergentie "sneller dan lineair".

De definitie drukt uit, dat o.d.d. geldt $a_{n+1} - \alpha \approx A(a_n - \alpha)$. Als bijvoorbeeld $A = 0{,}8$, dan is $a_{n+10} - \alpha \approx (0{,}8)^{10}(a_n - \alpha) \approx \frac{1}{10}(a_n - \alpha)$ want ${}^{10}\log 0{,}8 = -0{,}096\ldots$ Benaderen we α door a_n, dan neemt het aantal correcte cijfers van deze benadering met 1 toe met iedere 10 iteratiestappen.

3.3.10. <u>Stelling</u>. Laat α wortel zijn van de vergelijking $x = \varphi(x)$, waarbij φ een functie is die continu differentieerbaar is in een omgeving van α, terwijl $|\varphi'(\alpha)| < 1$. Zij (a_n) een rij, verkregen door middel van de methode van successieve substitutie, met $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Als $\varphi'(\alpha) \neq 0$, dan is (a_n) lineair convergent naar α.

<u>Bewijs</u>.

$$\frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha} = \frac{\varphi(a_n) - \varphi(\alpha)}{a_n - \alpha} = \varphi'(\xi_n) ,$$

waarbij ξ_n ligt tussen a_n en α. Daar $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, is ook $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \alpha$, zodat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha} = \varphi'(\alpha) . \qquad \square$$

N.B. Als $\varphi'(\alpha) = 0$, dan is de convergentie "sneller dan lineair".

3.3.11. We keren nu terug tot de oorspronkelijke vergelijking $F(x) = 0$; we laten aan de hand van enige voorbeelden zien hoe deze in de vorm $x = \varphi(x)$ gebracht kan worden.

a) De vergelijking $e^x = (1 + x)^2$ heeft één wortel α tussen 2 en 3. We vormen om tot $x = 2\ln(1 + x)$ en we gebruiken de iteratieformule $a_{n+1} = 2\ln(1 + a_n)$ met als startwaarde bijvoorbeeld 2. Daar voor de afgeleide van $\varphi(x) = 2\ln(1 + x)$ geldt: $0 < \varphi'(x) \le \frac{2}{3}$ voor $x \ge 2$, zal de rij (a_n) monotoon naar α convergeren.

b) Omvormen van dezelfde vergelijking tot $x = e^{\frac{1}{2}x} - 1$ en gebruiken van de iteratie $a_{n+1} = e^{\frac{1}{2}a_n} - 1$ met een startwaarde in de buurt van α zal niet leiden tot convergentie naar α. Immers, nu is $\varphi(x) = e^{\frac{1}{2}x} - 1$ en

$$\varphi'(x) = \tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} \ge \tfrac{1}{2}e > 1 \qquad \text{voor } x \ge 2 .$$

c) De vergelijking $x^3 - 4x + 1 = 0$ heeft tussen 0 en 1 één wortel β. Vorm om tot $x = \frac{1}{4}(x^3 + 1)$ en gebruik $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n^3 + 1)$ met a_0 ergens tussen 0 en 1, dan krijgen we convergentie naar β. Immers, met $\varphi(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1)$, dus $\varphi'(x) = \frac{3}{4}x^2$, geldt op $[0,1]$ de ongelijkheid $0 \le \varphi'(x) \le \frac{3}{4}$.

d) Dezelfde vergelijking heeft tussen 1 en 2 één wortel γ. Vorm nu om tot $x = \varphi(x)$ met $\varphi(x) = (4x - 1)^{1/3}$. Voor $x \ge 1$ is dan

$$\varphi'(x) = \frac{4}{3}(4x - 1)^{-2/3} \le \frac{4}{3}.3^{-2/3} < 1 ,$$

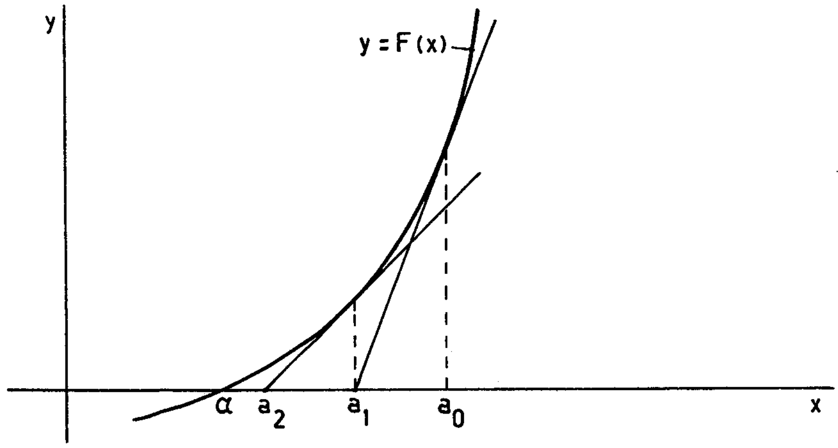
zodat de iteratieformule $a_{n+1} = (4a_n - 1)^{1/3}$ met $a_0 \ge 1$ leidt tot een rij, die naar γ convergeert.

Bij zowel a), c) als d) is er sprake van lineaire convergentie.

3.3.12. Een bijzonder efficiënte methode voor het numeriek benaderen van wortels van een vergelijking $F(x) = 0$ gebruikt de zg. <u>iteratieformule van Newton-Raphson</u>:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{F(a_n)}{F'(a_n)} .$$

Meetkundig is a_{n+1} het snijpunt met de x-as van de raaklijn in het punt $(a_n, F(a_n))$ aan de grafiek van F, zie figuur op volgende bladzijde.



Hierbij is de oorspronkelijke vergelijking $F(x) = 0$ omgevormd tot $x = \varphi(x)$ met $\varphi(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$. Merk op, dat

$$\varphi'(\alpha) = 1 - \frac{(F'(\alpha))^2 - F(\alpha)F''(\alpha)}{(F'(\alpha))^2} = \frac{F(\alpha)F''(\alpha)}{(F'(\alpha))^2} = 0 .$$

Op grond van 3.3.10 mogen we nu zeer snelle convergentie verwachten.

3.3.13. Een rij (a_n) met $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ heet <u>kwadratisch convergent</u> als

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - \alpha}{(a_n - \alpha)^2} = A \neq 0 .$$

De definitie drukt uit dat o.d.d. geldt $A(a_{n+1} - \alpha) \approx [A(a_n - \alpha)]^2$. Het aantal correcte cijfers achter de komma in Aa_n wordt verdubbeld bij elke iteratiestap. Het is duidelijk dat kwadratische convergentie superieur is aan lineaire convergentie.

3.3.14. <u>Stelling</u>. Laat α een wortel zijn van de vergelijking $F(x) = 0$, en laat F tweemaal continu differentieerbaar zijn in een omgeving van α. Zij (a_n) een rij, verkregen met de iteratieformule van Newton-Raphson, waarvoor $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Als $F'(\alpha) \neq 0$ en $F''(\alpha) \neq 0$, dan convergeert (a_n) kwadratisch naar α.

<u>Bewijs</u>. Wij zullen het bewijs niet uitschrijven. Men kan aantonen dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - \alpha}{(a_n - \alpha)^2} = \frac{F''(\alpha)}{2F'(\alpha)} .$$

□

3.3.15. Voorbeelden.

1) Worteltrekken: $F(x) = x^2 - b = 0$ heeft een wortel $\alpha = \sqrt{b}$. De iteratieformule van Newton-Raphson wordt in dit geval,

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 - b}{2a_n} = \tfrac{1}{2}[a_n + \frac{b}{a_n}] .$$

Toon grafisch aan dat $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{b}$ voor elke startwaarde $a_0 > 0$. Uitwerken van het iteratieproces voor $b = 2$ en $a_0 = 1$ leidt tot de volgende benaderingen voor $\sqrt{2}$:

$$\begin{array}{llll} a_0 = 1{,}000\ 000\ 000 & & a_3 = 1{,}\underline{414\ 21}5\ 686 \\ a_1 = 1{,}500\ 000\ 000 & & a_4 = 1{,}\underline{414\ 213\ 562} \\ a_2 = 1{,}\underline{41}6\ 666\ 667 & & a_5 = 1{,}\underline{414\ 213\ 562} . \end{array}$$

De onderstreepte decimalen zijn correct.

2) "Delen zonder te delen": $F(x) = \frac{1}{x} - b = 0$ heeft als wortel $\alpha = \frac{1}{b}$. De iteratieformule van Newton-Raphson wordt in dit geval,

$$a_{n+1} = a_n + a_n^2(\frac{1}{a_n} - b) = a_n(2 - ba_n) .$$

Onderzoek grafisch de convergentie van de rij (a_n) in afhankelijkheid van de startwaarde a_0.
Dit proces werd wel gebruikt bij automatische rekenmachines die geen ingebouwde deling hadden.

4. Integraalrekening

3.4.1. Op het V.W.O. is al kennis gemaakt met de z.g. Riemann-integraal van een begrensde functie f over een interval $[a,b]$. Wij zullen de invoering van dit integraalbegrip hier niet behandelen; we merken slechts op dat dit als volgt gebeuren kan: Verdeel het interval $[a,b]$ in kleine deelintervallen $[x_{i-1},x_i]$, waarbij $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Kies getallen $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ en vorm de som

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) ;$$

een dergelijke som heet een Riemann-som. Wanneer voor zeer fijne verdelingen (d.w.z. voor $\max_i (x_i - x_{i-1})$ zeer klein) de Riemann-som willekeurig dicht bij een getal R komt te liggen, heet f integreerbaar over [a,b] en R heet de (Riemann-)integraal van f over [a,b]. Deze integraal wordt genoteerd door $\int_a^b f(x)dx$. De meetkundige interpretatie van $\int_a^b f(x)dx$ in geval $f(x) \geq 0$ op [a,b] en f continu op [a,b] is de oppervlakte van

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\} .$$

3.4.2. Stelling. Laat $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ begrensd zijn op [a,b] en continu op [a,b] behalve eventueel in een eindig aantal punten. Dan bestaat $\int_a^b f(x)dx$.

Gevolg. Is f continu op [a,b], dan is volgens 2.4.19 f tevens begrensd op [a,b], zodat $\int_a^b f(x)dx$ bestaat.

3.4.3. Stelling. Is f integreerbaar over [a,b] en over [b,c], dan is f integreerbaar over [a,c], en

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx .$$

3.4.4. Stelling. Is f integreerbaar over [a,b], dan is f integreerbaar over ieder deelinterval [c,d] van [a,b].

3.4.5. Stelling. Is f integreerbaar over [a,b], dan is ook de functie $|f(x)|$ integreerbaar over [a,b].

3.4.6. Uit het V.W.O. zijn de volgende eigenschappen bekend:

1) als f en g integreerbaar zijn over [a,b], dan is f + g integreerbaar over [a,b] en

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx .$$

2) als f integreerbaar is over $[a,b]$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan is λf integreerbaar over $[a,b]$ en

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \; .$$

3) als $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a,b]$ en als f integreerbaar is over $[a,b]$, dan is

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \; .$$

4) als $f(x) = c$ op $[a,b]$, dan is

$$\int_a^b f(x)dx = c(b - a) \; .$$

3.4.7. Gevolgen. Wanneer f en g integreerbaar zijn over $[a,b]$, dan geldt

1) Zij $f(x) \geq g(x)$ voor alle $x \in [a,b]$, dan is

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \; .$$

Bewijs. Definieer de functie h door $h(x) = f(x) - g(x)$, dan is $h(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a,b]$, dus

$$0 \leq \int_a^b h(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \; . \qquad \square$$

2) Zij $m \leq f(x) \leq M$ voor alle $x \in [a,b]$, dan is

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a) \; .$$

Bewijs.

$$m(b - a) = \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M \, dx = M(b - a) \; . \qquad \square$$

3) $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \ .$$

<u>Bewijs</u>. Voor alle $x \in [a,b]$ geldt $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, dus

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx \ .$$ □

4) Is $|f(x)| \le M$ op $[a,b]$, dan geldt

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M(b - a) \ .$$

<u>Bewijs</u>.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b M\,dx = M(b - a) \ .$$ □

3.4.8. <u>Stelling</u>. Laat f continu zijn op $[a,b]$ en zij $f(x) \ge 0$ voor alle $x \in [a,b]$. Indien $f(\xi) > 0$ voor zekere $\xi \in [a,b]$, dan is $\int_a^b f(x)dx > 0$.

<u>Bewijs</u>. Omdat f continu is in ξ geldt voor waarden van x die voldoende dicht bij ξ liggen, dat $f(x)$ minder dan zeg $\frac{1}{2}f(\xi)$ van $f(\xi)$ afwijkt. Er bebestaat dus een deelinterval $[c,d]$ van $[a,b]$ met $\xi \in [c,d]$, zo dat $f(x) \ge \frac{1}{2}f(\xi)$ voor alle $x \in [c,d]$. Nu is

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_c^d f(x)dx \ge \tfrac{1}{2}f(\xi)(d - c) > 0 \ .$$ □

3.4.9. <u>Stelling</u> (middelwaardestelling van de integraalrekening). Zij f continu op $[a,b]$, dan is er een $\xi \in (a,b)$ zo dat

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a) \ .$$

Bewijs. Als f constant is, voldoet iedere $\xi \in (a,b)$. Als f niet constant is: Volgens de stelling van Weierstrass (2.4.19) heeft f op $[a,b]$ een globaal maximum M en een globaal minimum m. Omdat $f(x) - m \geq 0$ op $[a,b]$, met niet overal het gelijkteken, is volgens 3.4.8 $\int_a^b (f(x) - m)dx > 0$, zodat $\int_a^b f(x)dx > m(b - a)$. Evenzo is $\int_a^b f(x)dx < M(b - a)$. Er is dus een $\mu \in \mathbb{R}$ met $m < \mu < M$, zo dat $\int_a^b f(x)dx = \mu(b - a)$. Met de tussenwaardestelling (2.4.10) volgt dat $\mu = f(\xi)$ voor zekere $\xi \in (a,b)$. □

3.4.10. In het vervolg gebruiken we de notatie $\int_a^b f(x)dx$ ook in geval $b = a$ of $b < a$. Daartoe definiëren we $\int_a^a f(x)dx = 0$ en

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{als } b < a .$$

Merk op dat de formule in 3.4.3 na deze definitie geldt voor willekeurige ligging van a, b en c. Ook 3.4.6 1), 2) en 4) blijven geldig. Verder geldt in plaats van 3.4.7.4) de ongelijkheid

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M|b - a| .$$

De verbinding tussen de differentiaalrekening en de integraalrekening wordt gelegd door de z.g. hoofdstelling der integraalrekening. Hoewel deze al vanuit het V.W.O. bekend is, geven we hier toch een formulering en bewijs. Ter inleiding komt eerst nog de volgende stelling:

3.4.11. Stelling. Zij f integreerbaar over $[a,b]$ en zij $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Dan is F continu op $[a,b]$. Als bovendien f continu is in $c \in (a,b)$ dan is F differentieerbaar in c met $F'(c) = f(c)$.

Bewijs.

i) De functie f is begrensd op [a,b], dus er is een $M > 0$ zodat $|f(x)| \le M$ voor alle $x \in [a,b]$. Derhalve geldt voor alle $x,y \in [a,b]$:

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \le M|y - x| .$$

Zij $\varepsilon > 0$, neem x vast in [a,b]. Dan volgt dat $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$ voor alle $y \in [a,b]$ met $|y - x| < \frac{\varepsilon}{M}$, zodat f continu is in x.

ii) Zij bovendien f continu in $c \in (a,b)$. Zij $\varepsilon > 0$. Daar f continu is in c is er een $\delta > 0$ zodat voor alle $t \in U_\delta(c)$ geldt $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$. Nu is voor $0 < |h| < \delta$

$$\left|\frac{F(c + h) - F(c)}{h} - f(c)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)dt - f(c)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} (f(t) - f(c))dt\right| \le \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \varepsilon = \varepsilon .$$

Dus $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_h$ (als $0 < |h| < \delta$ dan is $\left|\frac{F(c + h) - F(c)}{h} - f(c)\right| < \varepsilon$). Hier staat:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(c + h) - F(c)}{h} = f(c) .$$ □

We bewijzen nu de hoofdstelling.

3.4.12. Hoofdstelling. Zij f continu op [a,b], zij φ continu op [a,b] en differentieerbaar op (a,b) met $\varphi' = f$, dan is

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a) . \tag{1}$$

Bewijs. We definiëren de functie $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ door $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, dan is

$$F' = f,\ F(a) = 0,\ F(b) = \int_a^b f(t)dt .$$

De functies φ en F hebben dezelfde afgeleide op (a,b), dus $F - \varphi$ is constant op (a,b), zie 3.2.6. Omdat F en φ continu zijn op [a,b], is $F - \varphi$ ook constant op [a,b]. Hieruit volgt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \varphi(b) - \varphi(a) . \qquad \square$$

3.4.13. Opmerkingen.

1) Een gebruikelijke notatie voor het verschil van twee functiewaarden $\varphi(b) - \varphi(a)$ is $\varphi(x)\big|_a^b$.
2) Door de hoofdstelling is de berekening van de integraal $\int_a^b f(x)dx$ met f continu op [a,b], teruggebracht tot het vinden van een z.g. primitieve functie van f, d.i. een functie met als afgeleide f. Nu volgt uit 3.2.7.2) dat een primitieve functie op een constante na is bepaald. De verzameling van primitieve functies noteren we als de onbepaalde integraal $\int f(x)dx$. We geven een onbepaalde integraal in de regel weer door een willekeurige representant uit deze verzameling op te schrijven:

$$\int f(x)dx = \varphi(x) + C \quad \text{als } \varphi'(x) = f(x) ;$$

hierin is C een willekeurige constante.
3) Formule (1) uit stelling 3.4.12 geldt ook als $b \le a$. Ga dit na.

3.4.14. Uit het V.W.O. zijn de volgende onbepaalde integralen bekend:

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1 \ ; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \ ; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C \ ; \quad \int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \ ; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C .$$

Bovendien is door terugdifferentiëren direct te verifiëren dat

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\tan \tfrac{1}{2}x| + C \ ; \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\frac{1 + \tan \frac{1}{2}x}{1 - \tan \frac{1}{2}x}\right| + C$$

en dat voor $a > 0$ geldt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \ ; \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C .$$

3.4.15. De volgende rekenregels volgen voor continue functies direct uit 3.4.10:

1) $$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \ .$$

2) $$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \ , \quad \text{voor } \lambda \neq 0 \ .$$

3.4.16. Stelling (substitutieregel). Laat I en J open intervallen, $g: I \to J$ een continu differentieerbare en $f: J \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Dan is op I

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy$$

met $y = g(x)$ in de uitkomst gesubstitueerd.

Bewijs. Zij $\int f(y)dy = F(y) + C$; we moeten dan bewijzen:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \ .$$

Met de kettingregel 3.1.11 en met $F'(y) = f(y)$ kan dit direct geverifieerd worden:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x) \ . \qquad \square$$

3.4.17. Gevolg.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy \ .$$

Bewijs. Stel $\int f(y)dy = F(y) + C$, dan is

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(y)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy \ . \qquad \square$$

3.4.18. Opmerking. Vaak formuleert men de substitutieregel met behulp van de differentiaalnotatie: bij een differentieerbare functie $f(x)$ schrijven we formeel $d(f(x)) = f'(x)dx$; voorbeelden:

$$d(x^2) = 2xdx \ ; \quad d(\sin x) = \cos x \ dx \ ; \quad d(e^{x^2}) = 2xe^{x^2} dx \ .$$

Hiermee wordt de substitutieregel

$$\int f(g(x))d(g(x)) = \int f(y)dy \quad \text{met } y = g(x) \text{ .}$$

3.4.19. Voorbeelden.

1) $$\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}(5x)'dx = \frac{1}{5}\int e^{y}dy = \frac{1}{5}e^{y} + C = \frac{1}{5}e^{5x} + C \text{ .}$$

Met de differentiaalnotatie wordt dit:

$$\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}d(5x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C \text{ .}$$

2) $$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \text{ .}$$

3) $$\int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}d(x^2) = \tfrac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{2} \text{ .}$$

3.4.20. Stelling (regel voor partiële integratie). Laat f en g continu differentieerbaar zijn op een open interval I. Dan geldt op I

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \text{ .}$$

Bewijs. Gebruik

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x) \text{ .}$$

□

3.4.21. Opmerking. Met de differentiaalnotatie wordt de regel

$$\int f(x)d(g(x)) = f(x)g(x) - \int g(x)d(f(x)) \text{ .}$$

3.4.22. Gevolg.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \text{ .}$$

Bewijs. Stel $\int f'(x)g(x)dx = H(x) + C$, dan is

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \{f(x)g(x) - H(x)\}\Big|_a^b = f(x)g(x)\Big|_a^b - H(x)\Big|_a^b =$$

$$= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \,. \qquad \square$$

3.4.23. Voorbeelden.

1) $$\int xe^x dx = \int x d(e^x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

2) $$\int x^2e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2e^x - \int e^x d(x^2) = x^2e^x - 2\int xe^x dx =$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C \,.$$

3) $$\int_1^e \ln x \, dx = x \ln x\Big|_1^e - \int_1^e x \, d(\ln x) = e - 0 - \int_1^e 1 \, dx =$$

$$= e - x\Big|_1^e = e - (e-1) = 1 \,.$$

5. Techniek van het integreren

3.5.1. Ter inleiding laten we zien, dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ de integraal $I_n(x) = \int x^n e^{-x} dx$ recurrent berekend kan worden:

1) $$I_1(x) = \int xe^{-x}dx = -\int x d(e^{-x}) = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C \,.$$

2) Voor $n \in \mathbb{N}$ is

$$I_{n+1}(x) = \int x^{n+1}e^{-x}dx = -\int x^{n+1}d(e^{-x}) = -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)\int x^n e^{-x}dx =$$

$$= -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)I_n(x) \,.$$

Hiermee krijgen we:

$$I_2(x) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C \,,$$

$$I_3(x) = -x^3e^{-x} - 3x^2e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + C \,,$$

enzovoort.

3.5.2. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ kan $J_n(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$ recurrent berekend worden:

1) $$J_1(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \,.$$

2) Voor $n \in \mathbb{N}$ is

$$J_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nJ_n(x) - 2nJ_{n+1}(x).$$

Hieruit volgt

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n} J_n(x) + \frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n} \,.$$

Voor het gemak vermelden we:

$$J_2(x) = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + C \,,$$

$$J_3(x) = \frac{3}{8} \arctan x + \frac{3}{8} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{4} \frac{x}{(x^2+1)^2} + C \,.$$

3.5.3. De volgende vijf typen onbepaalde integralen kunnen we nu berekenen:

a) $\int p(x)\,dx$ waarbij $p(x)$ een polynoom is.

b) $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$

c) $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \quad (n \neq 1)\,.$

d) $\int \frac{Px+Q}{x^2+px+q}\,dx$ met positief definiete noemer x^2+px+q. De integraal is te herleiden tot

$$\tfrac{1}{2}P \int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + (Q - \tfrac{1}{2}pP) \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2} \,.$$

De eerste integraal is gelijk aan $\frac{1}{2}P \ln(x^2+px+q)$; de tweede integraal is te herleiden tot een arctan-functie na de substitutie $x + \frac{1}{2}p = t\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}$.

e) $\int \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n}\, dx$ met positief definiete noemer $x^2 + px + q$ en $n > 1$.

De integraal is te herleiden tot

$$\tfrac{1}{2}P \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n}\, dx + (Q - \tfrac{1}{2}pP) \int \frac{dx}{[(x + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2]^n}\,.$$

De eerste integraal is direct te berekenen, terwijl de tweede integraal door de substitutie $x + \frac{1}{2}p = t\sqrt{q - \frac{1}{4}p^2}$ overgaat in $\int (t^2 + 1)^{-n} dt$ welke in 3.5.2 behandeld is.

3.5.4. We beschouwen nu algemeen de integraal met rationale integrand:

$$\int \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}\, dx = \int \frac{T(x)}{N(x)}\, dx\,.$$

De berekening van de integraal geschiedt in vier stappen.

<u>Stap 1.</u> Zorg, door deling, dat $m = gr(T) < n = gr(N)$.

<u>Stap 2.</u> Ontbind de noemer $N(x)$ in reële factoren van de eerste graad en reële positief definiete factoren van de tweede graad. Zonder bewijs vermelden we dat dit altijd kan.

<u>Stap 3.</u> Schrijf $T(x)/N(x)$ als de som van een aantal breuken, waarvan de noemers zijn de eerstegraadsfactoren van $N(x)$, de definiete tweedegraadsfactoren van $N(x)$, of machten daarvan. De teller van deze breuken is constant in geval de noemer een eerstegraadsfactor is of een macht daarvan; de teller is van de eerste graad in geval de noemer een tweedegraadsfactor is of een macht daarvan. Deze herleiding van de integrand $T(x)/N(x)$ heet <u>splitsing in partiële breuken</u>. Zonder bewijs vermelden we dat een dergelijke splitsing altijd mogelijk is.

<u>Stap 4.</u> Integreer de afzonderlijke partiële breuken; de betreffende integralen zijn juist de vijf genoemde grondtypen uit 3.5.3.

3.5.5. <u>Voorbeeld.</u>

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}\, dx = \int \frac{x^3 + x - x + 1}{x^2 + 1}\, dx = \int x\, dx - \int \frac{x - 1}{x^2 + 1}\, dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx + \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2} \ln(x^2 + 1) +$$

$$+ \arctan x + C\,.$$

3.5.6. Voorbeeld.

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \tfrac{1}{2}\ln|x-1| - \tfrac{1}{2}\ln|x+1| + C =$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C\ .$$

3.5.7. Voorbeeld.

$$\int \frac{x-1}{3x^2+5x-2}\,dx = \int \frac{x-1}{(3x-1)(x+2)}\,dx\ .$$

Schrijf nu

$$\frac{x-1}{(3x-1)(x+2)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{x+2}\ ,$$

dan is

$$x - 1 = A(x+2) + B(3x-1)\ ,$$

$$1 = A + 3B,\ -1 = 2A - B$$

dus $A = -\frac{2}{7}$, $B = \frac{3}{7}$.
De integraal wordt nu

$$-\frac{2}{7}\int \frac{dx}{3x-1} + \frac{3}{7}\int \frac{dx}{x+2} = -\frac{2}{21}\ln|3x-1| + \frac{3}{7}\ln|x+2| + C\ .$$

3.5.8. Voorbeeld. $\int \frac{x+1}{x(x+5)^2}\,dx$; de noemer van de integrand bevat een meervoudige eerstegraadsfactor. De breuksplitsing verloopt dan als volgt:

$$\frac{x+1}{x(x+5)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} + \frac{D}{(x+5)^2}\ ,$$

$$x + 1 = A(x^2 + 10x + 25) + B(x^2 + 5x) + Dx\ ,$$

dus

$$A + B = 0,\ 10A + 5B + D = 1,\ 25A = 1\ ,$$

$$A = \frac{1}{25},\ B = -\frac{1}{25},\ D = \frac{4}{5}\ .$$

De integraal wordt

$$\int \frac{x+1}{x(x+5)^2}\,dx = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{25}\int \frac{dx}{x+5} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{(x+5)^2} =$$

$$= \frac{1}{25}\ln|x| - \frac{1}{25}\ln|x+5| - \frac{4}{5(x+5)} + C\ .$$

3.5.9. Voorbeeld.

$$\int \frac{2x^2+x+1}{x^3-x^2+3x+5}\,dx = \int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2-2x+5)}\,dx\ .$$

De breuksplitsing verloopt nu als volgt:

$$\frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+D}{x^2-2x+5}\ ,$$

$$2x^2+x+1 = A(x^2-2x+5) + (Bx+D)(x+1)\ ,$$

dus

$$A + B = 2,\ -2A + B + D = 1,\ 5A + D = 1\ ,$$

$$A = \frac{1}{4},\ B = \frac{7}{4},\ D = -\frac{1}{4}\ .$$

De integraal wordt

$$\tfrac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \tfrac{1}{4}\int \frac{7x-1}{x^2-2x+5}\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{7}{8}\int \frac{(x^2-2x+5)'}{x^2-2x+5}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2+4} =$$

$$= \tfrac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{7}{8}\ln(x^2-2x+5) + \frac{3}{4}\int \frac{\frac{1}{2}(x-1)'}{[\frac{1}{2}(x-1)]^2+1}\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{7}{8}\ln(x^2-2x+5) + \frac{3}{4}\arctan \tfrac{1}{2}(x-1) + C\ .$$

3.5.10. Voorbeeld. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$; de noemer van de integrand bevat een meervoudige tweedegraadsfactor. De breuksplitsing verloopt dan als volgt:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}\ ,$$

$$1 = A(x^4+2x^2+1) + (Bx+D)(x^3+x) + (Ex+F)x\ ,$$

dus

$$A + B = 0,\ D = 0,\ 2A + B + E = 0,\ D + F = 0,\ A = 1\ ,$$

$$A = 1,\ B = E = -1,\ D = F = 0\ .$$

De integraal wordt

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C\ .$$

3.5.11. De integraal $\int R(\sin x, \cos x)dx$ waarin R een rationale functie voorstelt, is door de substitutie $\tan \tfrac{1}{2}x = t$ te herleiden tot een integraal met rationale integrand, immers

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ ,\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}\ .$$

3.5.12. <u>Voorbeelden</u>.

1) $$\int \frac{dx}{4+5\cos x} = \int \frac{1}{4+5\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{9-t^2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-3} + \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+3} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\tan \frac{1}{2}x + 3}{\tan \frac{1}{2}x - 3}\right| + C\ .$$

2) $$\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\,\frac{1}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = 4\int \frac{t^2dt}{(1+t^2)^2} =$$

$$= -2\int t\left(\frac{1}{1+t^2}\right)'dt = -\frac{2t}{1+t^2} + 2\arctan t + C_1 = -\sin x + x + C\ .$$

3.5.13. Hoewel deze methode feilloos werkt, is zij meestal zeer omslachtig en is het aan te bevelen om haar slechts toe te passen wanneer alle andere middelen zijn uitgeput. Die andere middelen zijn: eenvoudige substitutie; gebruik van goniometrische formules; graad verlagen door overgang op sin 2x, cos 2x; substitutie tan x = t.

3.5.14. Voorbeelden.

1) $$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = -\int \frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}\,dx = -\ln(1+\cos x) + C\ .$$

2) $$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^2 (\sin x)'dx =$$

$$= \int (1-2\sin^2 x + \sin^4 x)(\sin x)'dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C\ .$$

3) $$\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}\,dx = x - \sin x + C\ .$$

4) $$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\,dx =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C\ .$$

5) $$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \tan^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C\ .$$

3.5.15. De integraal $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ waarin R een rationale functie voorstelt, is door kwadraat afsplitsen te herleiden tot één van de volgende drie typen:

a) $\int R(x,\sqrt{1-x^2})\,dx$; verdere herleiding door de substitutie $x = \sin\varphi$.

b) $\int R(x,\sqrt{x^2-1})\,dx$; verdere herleiding door de substitutie $x = \dfrac{1}{\cos\varphi}$.

c) $\int R(x,\sqrt{x^2+1})\,dx$; verdere herleiding door de substitutie $x = \tan\varphi$.

N.B. Let op het teken wanneer wortels worden getrokken!

3.5.16. Voorbeelden.

1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. Substitueer $x = \sin\varphi$ en neem φ zo dat het integratie-interval $0 \le x \le 1$ overgaat in $0 \le \varphi \le \frac{1}{2}\pi$. Op dit interval geldt

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2\varphi} = \cos\varphi\ .$$

De integraal wordt dan

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\varphi \; d\varphi = \tfrac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= [\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4} \sin 2\varphi]\Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} = \tfrac{1}{4}\pi \;;$$

de integraal is te interpreteren als de oppervlakte van een kwart cirkel met straal 1.

2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$. Substitueer $x = \tan\varphi$ en gebruik $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Dan is

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}} = \frac{1}{\cos\varphi} \,,$$

zodat

$$\int_{\frac{1}{3}\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\varphi \,\frac{1}{\cos\varphi}} \frac{1}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin\varphi)'}{\sin^2\varphi}\, d\varphi = -\frac{1}{\sin\varphi}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \sqrt{2} \,.$$

3.5.17. Aan het slot van deze paragraaf geven we nog een aantal ad hoc methoden en resultaten. Eerst berekenen we een tweetal integralen, namelijk

$$I(x) = \int e^{ax} \cos bx\, dx \text{ en } J(x) = \int e^{ax} \sin bx\, dx$$

voor $a \neq 0$, en wel door tweemaal partieel integreren:

$$I(x) = \frac{1}{a} \int (e^{ax})' \cos bx\, dx = \frac{1}{a}\, e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx\, dx =$$

$$= \frac{1}{a}\, e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} \int (e^{ax})' \sin bx\, dx =$$

$$= \frac{1}{a}\, e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2}\, e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx\, dx \,,$$

zodat

$$I(x) = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I(x) .$$

Hieruit volgt

$$I(x) = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C .$$

Op soortgelijke wijze leidt men af dat

$$J(x) = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C .$$

3.5.18. De integraal $I_n(x) = \int \cos^n x \, dx$ kan voor alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ recurrent berekend worden, waarbij steeds dubbele stappen genomen worden. Immers:

1) $$I_0(x) = \int 1 \, dx = x + C$$

2) $$I_1(x) = \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

3) voor alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ is

$$I_{n+2}(x) = \int \cos^{n+1} x \, d(\sin x) = \cos^{n+1} x \sin x + (n+1) \int \cos^n x \sin^2 x \, dx =$$

$$= \cos^{n+1} x \sin x + (n+1) \int \cos^n x (1 - \cos^2 x) dx,$$

zodat

$$I_{n+2}(x) = \cos^{n+1} x \sin x + (n+1) I_n(x) - (n+1) I_{n+2}(x) .$$

Hieruit volgt

$$I_{n+2}(x) = \frac{1}{n+2} \cos^{n+1} x \sin x + \frac{n+1}{n+2} I_n(x) .$$

Laat nu

$$I_n^* = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

zijn. Dan is $I_0^* = \frac{\pi}{2}$, $I_1^* = 1$ en voor $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ geldt

$$I_{n+2}^* = \frac{1}{n+2} \cos^{n+1} x \sin x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{n+1}{n+2} I_n^* = \frac{n+1}{n+2} I_n^* .$$

Hiermee berekenen we

$$I^*_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4}\,\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

en

$$I^*_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \qquad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

3.5.19. Opgave. Bereken

$$J^*_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx \qquad \text{voor alle } m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ .$$

3.5.20. Een functie f, gedefinieerd op een interval I, dat symmetrisch om de oorsprong ligt, heet *even* als voor alle $x \in I$ geldt $f(-x) = f(x)$. Hij heet *oneven* als $f(-x) = -f(x)$ voor alle $x \in I$. Voorbeelden van even functies zijn: x^2, $|x|$, cos x, Voorbeelden van oneven functies zijn: x, sin x, $e^x - e^{-x}$. Met de substitutie $y = -x$ zien we: Voor een even functie is

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-y)\,dy = \int_{0}^{a} f(y)\,dy \ .$$

Voor een oneven functie is

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-y)\,dy = -\int_{0}^{a} f(y)\,dy \ .$$

Gevolg: Voor een even functie is

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \ .$$

Voor een oneven functie is

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \ .$$

3.5.21. Voorbeeld.

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x + x}{\sqrt{1+x^2} + \cos x}\, e^{x^2}\, dx = 0 \; .$$

3.5.22. Opgave. Bereken

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \qquad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \; ,$$

uitgaande van 3.5.19.

6. Numerieke integratie

3.6.1. De Riemann-integraal $\int_a^b f(x)dx$ is niet altijd in gesloten vorm te berekenen. Zo kunnen we bijvoorbeeld $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ niet bepalen omdat er geen elementaire functie blijkt te bestaan die primitieve functie is van e^{-x^2}. We bespreken daarom nu enige numerieke integratiemethoden voor de berekening van een benadering van $\int_a^b f(x)dx$. We beperken ons daarbij tot twee eenvoudige integratieformules, namelijk de rechthoekregel en de trapeziumregel. Voor beide regels zullen we onderzoeken tot wat voor fout zij leiden, in vergelijking met de werkelijke waarde van $\int_a^b f(x)dx$.

3.6.2. Volgens de middelwaardestelling van de integraalrekening 3.4.9 geldt voor een continue functie f op $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad \text{voor zekere } \xi \in (a,b) \; .$$

Een voor de hand liggende benadering van ξ is het midden van het interval $[a,b]$, dus $\frac{a+b}{2}$. We krijgen dan de rechthoekregel:

(1) $$\int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + E_r \; ,$$

waarin E_r de (werkelijk gemaakte) fout voorstelt die optreedt wanneer we $\int_a^b f(x)dx$ door $f(\frac{a+b}{2})(b-a)$ benaderen. De invloed van (afrondings)fouten bij het berekenen van de functiewaarden van f laten we buiten beschouwing.
Merk op, dat als $f(x) \geq 0$, de integraal $\int_a^b f(x)dx$ wordt benaderd door de oppervlakte van de rechthoek met basis $b-a$ en hoogte $f(\frac{a+b}{2})$.
Men kan bewijzen (wij zullen dit later ook doen; zie 4.7.2) dat voor tweemaal continu differentieerbare functies f geldt:

(2) $$E_r = \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\eta) \quad \text{voor zekere } \eta \in [a,b] .$$

3.6.3. Een voor de hand liggend alternatief is een benadering van $\int_a^b f(x)dx$ door de oppervlakte van het rechthoekig trapezium met basis $b-a$ en zijden $f(a)$ en $f(b)$. We krijgen dan de <u>trapeziumregel</u>

(1) $$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) + E_t ,$$

waarin E_t de fout is die bij de benadering van $\int_a^b f(x)dx$ door $\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$ gemaakt wordt.
Voor tweemaal continu differentieerbare functies f geldt (we zullen dit later ook bewijzen; zie 4.7.7)

(2) $$E_t = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\zeta) \quad \text{voor zekere } \zeta \in [a,b] .$$

3.6.4. <u>Opmerking</u>. Wanneer we weten dat E_r en ook E_t, de volgende vorm heeft: $C(b-a)^p f^{(q)}(\xi)$ voor zekere $\xi \in [a,b]$, dan kunnen we de precieze uitdrukking ervoor al afleiden.

rechthoekregel　　　　trapeziumregel

Het is duidelijk, dat bij de rechthoekregel de integraal benaderd wordt door de integraal van een constante functie (namelijk $f(\frac{a+b}{2})$) en bij de trapeziumregel door de integraal van een lineaire functie (namelijk $f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$). Uit meetkundige overwegingen blijkt direct, dat beide regels exact zijn (dit is: fout 0 hebben) als f een lineaire functie is. Hieruit volgt al, dat $q \geq 2$ is voor beide regels. Met $f(x) = x^2$ vinden we voor de rechthoekregel

$$E_r = \int_a^b x^2 dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (b-a) = \frac{1}{12}(b-a)^3$$

en voor de trapeziumregel

$$E_t = \int_a^b x^2 dx - \frac{a^2+b^2}{2}(b-a) = -\frac{1}{6}(b-a)^3 .$$

Hieruit volgt voor de rechthoekregel

$$q = 2,\ p = 3,\ C = \frac{1}{24}$$

en voor de trapeziumregel

$$q = 2,\ p = 3,\ C = -\frac{1}{12}$$

waarmee 3.6.2 2) en 3.6.3 2) zijn ontstaan.

3.6.5. We mogen verwachten, dat we in het algemeen een betere benadering voor $\int_a^b f(x)dx$ zullen krijgen wanneer we het integratie-interval $[a,b]$ verdelen in een aantal deelintervallen en voor ieder van die deelintervallen de rechthoekregel of trapeziumregel toepassen. In het nu volgende passen we een verdeling toe in n deelintervallen met dezelfde lengte $h = \frac{b-a}{n}$, dus in de deelintervallen $[a,a+h]$, $[a+h, a+2h], \ldots, [a+(n-1)h, b]$. Ter afkorting schrijven we f_0 voor $f(a)$, $f_{\frac{1}{2}}$ voor $f(a+\frac{1}{2}h)$, f_1 voor $f(a+h)$, in het algemeen f_t voor $f(a+th)$. We vinden zo de <u>samengestelde rechthoekregel</u>:

$$\text{(1)} \qquad \int_a^b f(x)dx = h[f_{1/2} + f_{3/2} + \ldots + f_{n-(1/2)}] + E_R(h)$$

en de <u>samengestelde trapeziumregel</u>

$$\text{(2)} \qquad \int_a^b f(x)dx = \tfrac{1}{2}h[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n] + E_T(h) .$$

Merk op dat de samengestelde rechthoekregel een benadering voor de integraal geeft met een Riemann-som. Is f tweemaal continu differentieerbaar, dan geldt

(3) $$E_R(h) = \frac{1}{24} h^3(f''(\eta_1) + \ldots + f''(\eta_n))$$

waar $\eta_j \in [a + (j-1)h, a + jh]$ $(j = 1,\ldots,n)$ en

(4) $$E_T(h) = -\frac{1}{12} h^3(f''(\zeta_1) + \ldots + f''(\zeta_n))$$

waar $\zeta_j \in [a + (j-1)h, a + jh]$ $(j = 1,\ldots,n)$.

Als m en M het minimum en het maximum van f" op [a,b] zijn, dan is dus (met $nh = b - a$)

$$\frac{1}{24}(b-a)h^2 m \le E_R(h) \le \frac{1}{24}(b-a)h^2 M$$

en

$$-\frac{1}{12}(b-a)h^2 M \le E_T(h) \le -\frac{1}{12}(b-a)h^2 m .$$

Wanneer we voldoende weten van de functie f, kunnen we hiermee grenzen voor de gemaakte fout vinden. Het is duidelijk, dat deze grenzen dicht bij 0 liggen wanneer h voldoende klein, dus het aantal deelintervallen voldoende groot, gekozen wordt.

3.6.6. Voorbeeld. We berekenen π met behulp van numerieke integratie van $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$.

We delen het integratieinterval [0,1] op in 1,2,4,8 en 16 deelintervallen. We schrijven R(h) en T(h) voor de benadering met de rechthoekregel en de trapeziumregel bij deelintervallen ter lengte h. Daar

$$\left(\frac{4}{1+x^2}\right)'' = \frac{24x^2 - 8}{(1+x^2)^3}$$

is $m = -8$ and $M = 2$ zodat de grenzen voor de fout zijn: $-\frac{1}{3}h^2$ en $\frac{1}{12}h^2$ voor $E_R(h)$, $-\frac{1}{6}h^2$ en $\frac{2}{3}h^2$ voor $E_T(h)$.

h	R(h)	$-\frac{1}{3}h^2$	$\frac{1}{12}h^2$	T(h)	$-\frac{1}{6}h^2$	$\frac{2}{3}h^2$
1	3,200 000	-0,33	0,083	3,000 000	-0,17	0,67
0,5	3,162 353	-0,083	0,021	3,100 000	-0,042	0,17
0,25	3,146 801	-0,021	0,0052	3,131 176	-0,010	0,042
0,125	3,142 895	-0,0052	0,0013	3,138 988	-0,0026	0,010
0,0625				3,140 942	-0,00065	0,0026

We kunnen concluderen dat $3,1402 < \pi < 3,1436$; vergelijk dit met de exacte waarde 3,14159265 ... .

3.6.7. In de praktijk zijn de grenzen voor de gemaakte fout, zoals hierboven beschreven, in de regel zeer pessimistisch: de werkelijke fout is veel kleiner dan op grond van de grootte van de grenzen aangenomen mag worden. Bovendien is in de praktijk veelal te weinig van de functie f bekend, om van f" het minimum m en het maximum M te kunnen geven. In de praktische numerieke wiskunde wordt daarom een andere methode gevolgd. Deze methode leidt voor voldoend "nette" functies tot een realistische schatting van de fout: een benadering van de numerieke waarde van de fout, die in vele gevallen de juiste orde van grootte heeft. Deze realistische schatting van de fout kan dan gebruikt worden ter correctie van de verkregen benadering voor de waarde van de integraal. De "netheid" die vereist is voor de nu te behandelen methode is, dat de tweede afgeleide f" slechts langzaam varieert, d.w.z. op ieder deelinterval constant geacht mag worden.

3.6.8. We behandelen het verkrijgen van een realistische schatting van de fout bij de samengestelde trapeziumregel. De hiermee verkregen benadering voor de integraal $I = \int_a^b f(x)dx$ bij n deelintervallen ter lengte $h = \frac{b-a}{n}$ is

$$T(h) = \tfrac{1}{2}h[f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n] .$$

We verdubbelen nu het aantal deelintervallen en krijgen

$$T(\tfrac{1}{2}h) = \tfrac{1}{4}h[f_0 + 2f_{1/2} + 2f_1 + 2f_{3/2} + \ldots + 2f_{n-1} + 2f_{n-(1/2)} + f_n].$$

Merk op dat $T(\frac{1}{2}h) = \frac{1}{2}(T(h) + R(h))$, zodat we voor het berekenen van $T(\frac{1}{2}h)$ nadat $T(h)$ al bekend is, kunnen volstaan met het berekenen van $R(h)$. Uit 3.6.5, formule (4) volgt dat

$$E_T(h) = -\frac{1}{12}h^3(f''(\zeta_1) + \ldots + f''(\zeta_n)) = -\frac{1}{12}h^2(b-a)\frac{f''(\zeta_1) + \ldots + f''(\zeta_n)}{n}$$

en

$$E_T(\tfrac{1}{2}h) = -\frac{1}{12}(\tfrac{1}{2}h)^2(b-a)\frac{f''(\zeta_1') + f''(\zeta_1'') + \ldots + f''(\zeta_n') + f''(\zeta_n'')}{2n} ,$$

waar $\zeta_j, \zeta_j', \zeta_j'' \in [a + (j-1)h, a + jh]$.
Indien we f" per deelinterval $[a + (j-1)h, a + jh]$ vrijwel constant mogen onderstellen, krijgen we

$$E_T(h) \approx 4E_T(\tfrac{1}{2}h) .$$

Wegens

$$I = T(h) + E_T(h) = T(\tfrac{1}{2}h) + E_T(\tfrac{1}{2}h) ,$$

is

$$T(\tfrac{1}{2}h) - T(h) = E_T(h) - E_T(\tfrac{1}{2}h) \approx 3E_T(\tfrac{1}{2}h)$$

zodat

$$E_T(\tfrac{1}{2}h) \approx \frac{1}{3}(T(\tfrac{1}{2}h) - T(h)) \; .$$

Een vermoedelijk betere schatting voor de integraal is dus

$$T^*(\tfrac{1}{2}h) = T(\tfrac{1}{2}h) + \frac{1}{3}(T(\tfrac{1}{2}h) - T(h)) \; .$$

3.6.9. Opmerking. Men kan afleiden dat deze $T^*(\tfrac{1}{2}h)$ samenvalt met de samengestelde integratieformule die men verkrijgt door op elk deelinterval de functie f te benaderen door één parabool. Deze integratieformule heet de Simpsonregel.

3.6.10. Voorbeeld. We berekenen nogmaals π via $\int_0^1 \frac{4}{1 + x^2}\, dx$.

h	$T(h)$	$\frac{1}{3}(T(\frac{1}{2}h) - T(h))$	$T^*(\frac{1}{2}h)$
1	3,000 000	0,033 333	3,133 333
0,5	3,100 000	0,010 392	3,141 568
0,25	3,131 176	0,002 604	3,141 592
0,125	3,138 988	0,000 651	3,141 593
0,0625	3,140 942		

Vergelijk weer met de waarde 3,14159265 ... voor π. Vergelijk ook de verkregen nauwkeurigheid met die in 3.6.6.

Hoofdstuk 4. Oneigenlijke integralen en reeksen

1. Oneigenlijke integralen

4.1.1. Bij de definitie van de gewone Riemann-integraal $\int_a^b f(x)dx$ is verondersteld, dat het integratie-interval een begrensd en gesloten interval is en dat de integrand f begrensd is op dit interval. We gaan nu het integraalbegrip uitbreiden in twee richtingen.
De eerste uitbreiding betreft integralen over een onbegrensd interval van de vorm $[a,\infty)$ of $(-\infty,a]$.

4.1.2. <u>Definitie</u>. Zij f integreerbaar over $[a,A]$ voor elke $A > a$, dan definiëren we

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx \ .$$

Indien deze limiet bestaat, zeggen we dat de oneigenlijke integraal $\int_a^\infty f(x)dx$ bestaat of <u>convergent</u> is; indien de limiet niet bestaat heet de integraal <u>divergent</u>.
Analoog is te definiëren $\int_{-\infty}^a f(x)dx$.

De tweede uitbreiding betreft integralen over een begrensd interval $[a,b]$ waarbij de integrand niet begrensd is in de buurt van één der eindpunten a of b.

4.1.3. <u>Definities</u>. Zij f integreerbaar over $[c,b]$ voor elke c met $a < c < b$, dan definiëren we

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\downarrow a} \int_c^b f(x)dx \ .$$

Zij f integreerbaar over $[a,c]$ voor elke c met $a < c < b$, dan definiëren we

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\uparrow b} \int_a^c f(x)dx \ .$$

Als de limiet bestaat dan zeggen we dat de oneigenlijke integraal $\int_a^b f(x)dx$ bestaat of <u>convergent</u> is; indien de limiet niet bestaat heet de integraal <u>divergent</u>.

4.1.4. Opmerking. Als f integreerbaar is over [a,b] dan is

$$\lim_{c\uparrow b} \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

op grond van 3.4.11. De oneigenlijke integraal ${}_a\int^b f(x)\,dx$ stemt dan overeen met de (eigenlijke) integraal. Er is daarom geen bezwaar tegen om voor beide integralen dezelfde notatie te gebruiken.

4.1.5. Voorbeelden.

1)
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{A\to\infty} \arctan x\Big|_0^A = \lim_{A\to\infty} \arctan A = \tfrac{1}{2}\pi .$$

2)
$$\int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right)dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^0 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right)dx =$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|\Big|_A^0 = \lim_{A\to-\infty} \left(\ln \tfrac{1}{2} - \ln\left|\frac{A-1}{A-2}\right|\right) = -\ln 2 .$$

3)
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\delta\downarrow 0} \int_\delta^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha}\Big|_\delta^1 =$$

$$= \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{1}{1-\alpha}\,(1-\delta^{1-\alpha}) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{als } \alpha < 1 , \\ \infty & \text{als } \alpha > 1 . \end{cases}$$

Als $\alpha = 1$, dan is

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\delta\downarrow 0} [-\ln \delta] = \infty .$$

De integraal ${}_0\int^1 x^{-\alpha}\,dx$ is convergent voor $\alpha < 1$ en divergent voor $\alpha \geq 1$.

4) Toon zelf aan dat $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx$ convergent is voor $\alpha > 1$ en divergent voor $\alpha \leq 1$.

We kunnen het integraalbegrip nog verder uitbreiden, hetgeen we aan de hand van een aantal voorbeelden doen, zonder de definities expliciet op te schrijven. In deze voorbeelden splitsen we steeds het integratie-interval in delen, zódanig, dat op elk van de delen één der definities 4.1.2 of 4.1.3 van toepassing is.

4.1.6. Voorbeelden.

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx .$$

Evenwel, $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ bestaat niet wegens

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{A\to\infty} \tfrac{1}{2} \ln(1 + A^2) = \infty ,$$

dus $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ is divergent.

3) $$\int_{0}^{1} \frac{1}{x(1-x)}\,dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(1-x)}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x(1-x)}\,dx .$$

Nu is

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(1-x)}\,dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}\right)dx = \lim_{\delta\downarrow 0} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{\delta}^{\frac{1}{2}} = \infty ,$$

dus ook $\int_{0}^{1} \frac{1}{x(1-x)}\,dx$ is divergent.

4) $$\int_0^\infty \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}\,dx = 2$$

omdat

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\delta\downarrow 0} \left.\frac{-2}{1+\sqrt{x}}\right|_\delta^1 = 1$$

en

$$\int_1^\infty \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}\,dx = \lim_{A\to\infty} \left.\frac{-2}{1+\sqrt{x}}\right|_1^A = 1 .$$

5) $$\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx = \int_{-1}^0 \ln|x|\,dx + \int_0^1 \ln x\,dx = -2$$

omdat

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\delta\downarrow 0} [x \ln x - x]\Big|_\delta^1 = -1$$

en

$$\int_{-1}^0 \ln|x|\,dx = \int_0^1 \ln x\,dx = -1 .$$

2. Convergentie van reeksen

4.2.1. Eindig veel getallen $a_1,\ldots,a_N$ hebben een som, zeg S_N, d.w.z.

$$S_N = a_1 + a_2 + \ldots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n .$$

Beschouw nu de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en vorm de rij $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van de zg. partiële sommen: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, enz.
De uitdrukking

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

noemen we een reeks; S_N heet de N-de partiële som van de reeks; de getallen a_n heten de termen van de reeks. Men noemt a_n ook wel de algemene term van de reeks.

4.2.2. <u>Definitie</u>. Als $\lim_{N\to\infty} S_N$ bestaat en gelijk is aan S dan heet de reeks $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ <u>convergent</u> met <u>som</u> S en we schrijven $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$; als $\lim_{N\to\infty} S_N$ niet bestaat dan heet de reeks <u>divergent</u> en dan heeft hij geen som.

4.2.3. <u>Voorbeelden</u>.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n$ is divergent omdat $S_N = 1 + 2 + \ldots + N = \frac{1}{2}N(N+1) \to \infty \quad (N \to \infty)$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, want $S_N = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{N(N+1)} =$

$$= (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + \ldots + (\tfrac{1}{N} - \tfrac{1}{N+1}) = 1 - \frac{1}{N+1} \to 1 \qquad (N \to \infty) .$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ is divergent omdat

$$S_N = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{N}} \geq \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N} .$$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, de <u>harmonische reeks</u>, is divergent.

$$S_{2^k} - S_{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^k} \geq \frac{2^k - 2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2} ,$$

dus

$$S_{2^n} = S_1 + (S_2 - S_1) + (S_4 - S_2) + (S_8 - S_4) + \ldots + (S_{2^n} - S_{2^{n-1}}) =$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}) + \ldots + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}) \geq 1 + \frac{n}{2} > \frac{n}{2} .$$

Hieruit volgt $S_N \to \infty \quad (N \to \infty)$.

5) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ is divergent.

De partiële sommen zijn nl. afwisselend 1 en 0, dus $\lim_{N\to\infty} S_N$ bestaat niet.

6) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Voor de partiële sommen van deze reeks geldt

$$S_1 > S_3 > S_5 > \ldots > 0 \text{ en}$$

$$S_2 < S_4 < S_6 < \ldots < 1 .$$

Volgens de grondeigenschap der reële getallen (1.3.10) bestaan de limieten

$$\lim_{N\to\infty} S_{2N-1} = S_0 \quad \text{en} \quad \lim_{N\to\infty} S_{2N} = S_e \,.$$

Omdat $S_{2N} - S_{2N-1} = \frac{-1}{2N}$ zijn S_0 en S_e gelijk en convergeert de reeks. Later (4.5.14) zullen we afleiden dat de som van de reeks gelijk is aan ln 2.

4.2.4. Stelling. Zij $a_n = ar^{n-1}$ $(n = 1,2,\ldots)$ voor zekere $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ en $r \in \mathbb{R}$. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent indien $|r| < 1$; zijn som is dan gelijk aan $\frac{a}{1-r}$. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergent indien $|r| \geq 1$. (De hier beschouwde reeks heet de meetkundige reeks met beginterm a en reden r.)

Bewijs. Voor $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ geldt: $S_N = a\,\frac{1-r^N}{1-r}$ als $r \neq 1$, $S_N = Na$ als $r = 1$. (Bewijs dit, bijvoorbeeld met volledige inductie.) Wanneer $|r| < 1$ is $\lim_{N\to\infty} r^N = 0$, dus $\lim_{N\to\infty} S_N = a\,\frac{1}{1-r}$; wanneer $|r| > 1$ en wanneer $r = -1$, bestaat $\lim_{N\to\infty} r^N$ niet, zodat (S_N) divergeert. Voor $r = 1$ divergeert de rij (S_N) eveneens (ga na waarom). □

4.2.5. Stelling. Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent is, dan is $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bewijs. $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S$ $(n \to \infty)$. □

N.B. We kunnen deze stelling alleen gebruiken om van sommige reeksen te bewijzen dat ze divergent zijn. De voorbeelden 4.2.3 3) en 4) laten zien dat uit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ niet geconcludeerd kan worden dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent is.

4.2.6. Stelling. Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent zijn, dan is ook $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ convergent en voor zijn som geldt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,.$$

Bewijs. Pas 1.4.1 toe op de rij van de partiële sommen van $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$. □

4.2.7. Stelling. Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent is, dan is voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ ook $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)$ convergent en

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Bewijs. Pas 1.4.2 toe op de rij van de partiële sommen. □

4.2.8. Opmerkingen.

1) We noemden de termen van een reeks: $a_1, a_2, \ldots$. Soms is het handiger de nummering van de termen bij 0 te beginnen: $a_0 + a_1 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Soms beginnen we ook bij een willekeurig natuurlijk getal m: $a_m + a_{m+1} + \ldots = \sum_{n=m}^{\infty} a_n$. Merk op, dat voor een convergente reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en voor $m \in \mathbb{N}$ geldt: $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ is convergent en $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \ldots + a_{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} a_n$.
2) Als we in een convergente (divergente) reeks een eindig aantal termen wijzigen, dan is de zo ontstane reeks weer convergent (divergent). Uiteraard kan, in geval van convergentie, de som van de reeks wel veranderd zijn.

4.2.9. Een van de doeleinden die we nastreven is stellingen te bewijzen die ons in staat stellen tot convergentie of divergentie van een reeks te besluiten op grond van direct te controleren eigenschappen van de termen en met omzeiling van het vaak moeizame of zelfs ondoenlijke uitrekenen van de partiële sommen. De zojuist bewezen stelling 4.2.5 is een voorbeeld van een dergelijke stelling. We zullen nog een aantal van zulke stellingen bewijzen. Voorlopig zijn de termen van een reeks getallen; men kan ook reeksen beschouwen waarvan de termen functies zijn.

In een volgend deel van dit hoofdstuk beschouwen we een bepaald type van zulke reeksen, namelijk zg. machtreeksen; dit zijn reeksen waarvan de termen van de gedaante $f_n(x) = a_n x^n$ zijn. De partiële sommen van een machtreeks zijn polynomen.
Daarna schenken we nog aandacht aan numerieke berekeningen met reeksen.

3. Reeksen met uitsluitend niet-negatieve termen

4.3.1. Stelling. Een reeks met uitsluitend niet-negatieve termen is convergent dan en slechts dan als de rij van zijn partiële sommen naar boven begrensd is.

Bewijs. De rij van de partiële sommen is monotoon niet-dalend. De stelling volgt dus direct uit 1.3.1 en 1.3.10. □

4.3.2. Hulpstelling. Laat f een continue, monotoon niet-stijgende functie zijn op $[1,\infty)$. Dan geldt voor alle $N \in \mathbb{N}$ met $N \geq 2$

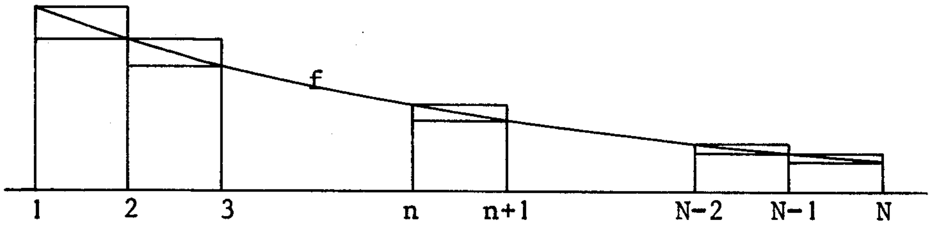
$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n) .$$

Bewijs. Op het interval $[n,n+1]$ geldt $f(x) \geq f(n+1)$, zodat

$$\int_1^N f(x)dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x)dx \geq \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) = \sum_{n=2}^{N} f(n) .$$

Ook geldt $f(x) \leq f(n)$ voor $n \leq x \leq n+1$, dus

$$\int_1^N f(x)dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n) .$$ □



4.3.3. Stelling (Integraalkenmerk). Laat f een continue, monotoon niet-stijgende, niet-negatieve functie zijn op $[1,\infty)$. Dan geldt: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ is convergent dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(x)dx$ convergeert.

Bewijs.

1) Neem aan dat $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ convergeert, stel $S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Dan is $\sum_{n=1}^{N-1} f(n) \le S$ voor alle $N \in \mathbb{N}$, $N \ge 2$; uit 4.3.2 volgt dat dan ook $\int_1^N f(x)dx \le S$ voor alle $N \in \mathbb{N}$, $N \ge 2$. Dit impliceert dat $F(y) = \int_1^y f(x)dx \le S$ voor alle $y \ge 2$. De functie F is monotoon niet-dalend (als integraal van een niet-negatieve functie) en naar boven begrensd door S. Dan (zie 2.2.3) bestaat

$$\lim_{y\to\infty} F(y) = \int_1^{\infty} f(x)dx .$$

2) Neem aan dat $\int_1^{\infty} f(x)dx$ convergeert; stel $I = \int_1^{\infty} f(x)dx$. Dan is $\int_1^N f(x)dx \le I$ voor alle $N \in \mathbb{N}$. Uit 4.3.2 volgt dat ook $\sum_{n=2}^{N} f(n) \le I$ voor alle $N \ge 2$, zodat de rij der partiële sommen van $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ naar boven begrensd is. Dus convergeert $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$, en ook $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. □

4.3.4. Stelling. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ is convergent als $p > 1$ en divergent als $p \le 1$.

Bewijs. Voor $p \le 0$ volgt de divergentie uit 4.2.5. Voor $p > 0$ passen we 4.3.3 toe met $f(x) = x^{-p}$, zie tevens 4.1.5, voorbeeld 4. □

4.3.5. Stelling (vergelijkingsstelling). Beschouw de reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ met $a_n \ge 0$ en $b_n \ge 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

1) Als $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent is en $a_n \le b_n$ o.d.d., dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent.

2) Als $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent is en $a_n \ge b_n$ o.d.d., dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Bewijs.

1) Stel $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, $T_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$ en $T = \lim_{N\to\infty} T_N$.

Omdat $a_n \le b_n$ vanaf zekere $N_1 \in \mathbb{N}$ en $T_N \le T$ voor alle $N \in \mathbb{N}$ is $S_N - S_{N_1} \le T_N - T_{N_1}$ en $S_N \le S_{N_1} + T - T_{N_1}$ voor alle $N \ge N_1$. De rij (S_N) is dus naar boven begrensd. Uit 4.3.1 volgt nu de convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zou convergeren dan zou volgens 1) ook $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergeren; tegenspraak. □

4.3.6. Voorbeelden.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + \cos n)\sin \frac{1}{n^2}$ is convergent, want $0 \le (2 + \cos n)\sin \frac{1}{n^2} \le 3 \sin \frac{1}{n^2} \le \frac{3}{n^2}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$ convergeert.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n}$ is divergent; immers, $\frac{2 + (-1)^n}{n} \ge \frac{1}{n}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent.

4.3.7. Stelling (limietkenmerk). Laten $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ reeksen zijn met niet-negatieve termen, zó, dat $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ bestaat en ongelijk nul is. Dan geldt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zijn beide convergent of beide divergent.

Bewijs. Stel $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, zodat $L > 0$. Dan is o.d.d.

$$\tfrac{1}{2}L \le \frac{a_n}{b_n} \le 2L$$

dus

$$b_n \le \frac{2}{L} a_n \quad \text{en} \quad a_n \le 2Lb_n .$$

Pas nu 4.2.7 en 4.3.5 toe. □

4.3.8. We gebruiken deze stelling door de te onderzoeken reeks te vergelijken met reeksen waarvan we de convergentie of divergentie al kennen. Veelal gebruiken we de reeksen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{(convergent als } p > 1\text{, divergent als } p \le 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \quad \text{(convergent als } |r| < 1\text{, divergent als } |r| \ge 1)$$

als vergelijkingsreeks.

4.3.9. Voorbeelden.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ is divergent, want $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan n)e^{-n}$ is convergent; immers

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\arctan n)e^{-n}}{e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$$

en $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ convergeert.

4. Reeksen met zowel positieve als negatieve termen

4.4.1. Definitie. Een reeks heet alternerend, indien zijn termen beurtelings positief en negatief zijn.

Een alternerende reeks kan steeds geschreven worden als $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ (als de eerste term positief is) of als $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ (als de eerste term negatief is) waarbij dan $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

4.4.2. Stelling (kenmerk van Leibniz). Als voor een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ geldt:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is alternerend

2) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

3) $|b_{n+1}| \leq |b_n|$ o.d.d.

dan is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent.

Bewijs. Daar een convergente reeks convergent blijft wanneer we aan het begin van de reeks een aantal termen toevoegen, mogen we in het bewijs aannemen dat $|b_{n+1}| \leq |b_n|$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Omdat convergentie ook behouden blijft wanneer de gehele reeks met -1 vermenigvuldigd wordt, mogen we ons bovendien beperken tot het geval waarin de eerste term positief is. We moeten dus de convergentie aantonen van een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ met $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ en $a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Voor de partiële sommen

$S_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} a_n$ geldt

$$S_{2N-1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2N-3} - a_{2N-2}) + a_{2N-1} \geq 0$$

zodat de rij (S_{2N-1}) naar beneden begrensd is. Ook is

$$S_{2N+1} - S_{2N-1} = -a_{2N} + a_{2N+1} \leq 0$$

zodat de rij (S_{2N-1}) monotoon niet-stijgend is. Uit beide resultaten volgt, dat (S_{2N-1}) convergent is (zie 1.3.10). Stel $S = \lim_{N\to\infty} S_{2N-1}$. Wegens $S_{2N} = S_{2N-1} - a_{2N}$ en $\lim_{N\to\infty} a_{2N} = 0$ is dan ook $\lim_{N\to\infty} S_{2N} = S$, zodat de rij (S_N) convergeert. Dit houdt in, dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ convergeert. □

4.4.3. <u>Opmerking</u>. Voor het in het bewijs beschouwde geval geldt, dat de rij (S_{2N-1}) monotoon niet-stijgend is met limiet S. Schrijven we $S = S_{2N-1} + R$, dan is dus $R \leq 0$. Ook geldt

$$R = -a_{2N} + (a_{2N+1} - a_{2N+2}) + (a_{2N+3} - a_{2N+4}) \ldots \geq -a_{2N} ,$$

zodat R inligt tussen 0 en $-a_{2N}$.
De rij (S_{2N}) is monotoon niet-dalend (ga na) met limiet S. Schrijven we nu $S = S_{2N} + R$, dan is $R \geq 0$ terwijl tevens

$$R = a_{2N+1} - a_{2N+2} + a_{2N+3} - \ldots = a_{2N+1} - (a_{2N+2} - a_{2N+3}) - \ldots \leq a_{2N+1} .$$

R ligt dus in tussen 0 en a_{2N+1}.
Voor N zowel oneven als even geldt zodoende $S = S_N + R$, waarbij R tussen 0 en $(-1)^N a_{N+1}$ inligt. Anders gezegd: breekt men een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, met $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ en $a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, af na N termen, dan krijgt men een benadering S_N voor de som S met een fout R die tussen 0 en de eerstvolgende term inligt.

4.4.4. <u>Voorbeeld</u>. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ en $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ zijn convergent.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ is convergent; voor zijn som S geldt $S = \sum_{n=1}^{9} \frac{(-1)^n}{n^3} + R$ met $0 < R < \frac{1}{10^3}$.

We beschouwen nu het algemene geval van reeksen met zowel positieve als negatieve termen.
De som van eindig veel getallen is onafhankelijk van de volgorde waarin we die getallen opschrijven, bijvoorbeeld

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_3 + a_2 = a_3 + a_2 + a_1 .$$

Als we echter in een convergente reeks met som S de volgorde van de termen veranderen, kan er een reeks ontstaan waarvan de som niet meer gelijk is aan S

4.4.5. Voorbeeld. We gaan uit van

(1) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ldots = \ln 2 \text{ (zie 4.2.3, voorbeeld 6)} ,$$

en beschouwen de reeks

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots ,$$

die dezelfde termen heeft als de vorige, echter in andere volgorde. We zullen laten zien dat deze reeks convergent is met som $\frac{3}{2}$ ln 2.
Uit

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \ldots = \ln 2$$

volgt (zie 4.2.7)

$$\frac{1}{2} \quad - \frac{1}{4} \quad + \frac{1}{6} \quad - \frac{1}{8} \quad + \frac{1}{10} \quad - \frac{1}{12} + \ldots = \tfrac{1}{2} \ln 2 ,$$

zodat (zie 4.2.6)

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots = \frac{3}{2} \ln 2 .$$

4.4.6. Opmerking. De reeks (1) in voorbeeld 4.4.5 is een bijzonder geval van een convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ waarvoor geldt dat $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ en $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ divergeren. Hierin zijn u_n^+ en u_n^- gedefinieerd door

$$u_n^+ = \max(0,u_n),\; u_n^- = \max(0,-u_n),\; n \in \mathbb{N} .$$

Merk op dat $u_n^+ = u_n$ als $u_n > 0$ en dat $u_n^- = -u_n$ als $u_n < 0$. Bovendien geldt $u_n = u_n^+ - u_n^-$, $n \in \mathbb{N}$. Voor reeksen met deze eigenschap geldt dat we de volgorde van de termen zodanig kunnen veranderen dat er een reeks ontstaat die convergent is met een willekeurig voorgeschreven som of zelfs een reeks die divergent is. We bewijzen dit niet.

4.4.7. Met de notatie van 4.4.6 formuleren we de volgende

Stelling. Als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergent is, dan zijn er twee mogelijkheden:

A: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ en $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ zijn beide convergent ,

R: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ en $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ zijn beide divergent .

Bewijs. De aanname $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ convergent en $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ divergent is in tegenspraak met $u_n^+ = u_n + u_n^-$, $n \in \mathbb{N}$, en stelling 4.2.6.
Ook $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ convergent en $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ divergent is onmogelijk. □

4.4.8. Stelling. Voor een reeks van type A geldt

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} u_n^- .$$

Bewijs. Volgt onmiddellijk uit $u_n = u_n^+ - u_n^-$, $n \in \mathbb{N}$, en de stellingen 4.2.7 en 4.2.6. □

4.4.9. Stelling. Zij $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ een reeks met uitsluitend niet-negatieve termen en zij $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ een reeks met dezelfde termen als $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, echter in een andere volgorde. Dan geldt

1) Als $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergent is, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ convergent en $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

2) Als $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ divergent is, dan is ook $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ divergent.

Bewijs.

1) De rij (S_n) van de partiële sommen van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is monotoon niet-dalend en convergeert naar de som S van de reeks. Dan geldt $S_n \le S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ (zie 1.3.8). Zij (T_n) de rij van de partiële sommen van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. De termen uit T_n komen voor in S_k voor k groot genoeg, zodat $T_n \le S_k \le S$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. De rij (T_n) is dus monotoon niet-dalend en begrensd, zodat hij convergeert. Laat T de limiet van (T_n) zijn, dan geldt dat $T = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \le S$. Verwissel nu Σu_n en Σv_n, dan vinden we evenzo $S \le T$, zodat $S = T$.

2) Als $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ convergent was, zou volgens 1) ook $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergent zijn. Tegenspraak. □

4.4.10. Opmerking. We kunnen stelling 4.4.9 als volgt kort samenvatten. In een reeks met uitsluitend niet-negatieve termen mag men de sommatievolgorde veranderen.

4.4.11. Gevolg. In een reeks van type A (zie 4.4.7) mag men de sommatievolgorde veranderen. Dit resultaat volgt uit stelling 4.4.8.

4.4.12. Definitie. Een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ heet absoluut convergent indien $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ convergent is.

4.4.13. Stelling. Een absoluut convergente reeks is tevens convergent.

Bewijs. Laat $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ convergent zijn. Dan volgt met de vergelijkingsstelling (4.3.5) dat ook de reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ en $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ convergent zijn. Immers, er geldt $0 \le u_n^+ \le |u_n|$, $0 \le u_n^- \le |u_n|$, $n \in \mathbb{N}$. Maar dan is $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ als som van de convergente reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ en $\sum_{n=1}^{\infty} (-u_n^-)$ ook convergent. □

4.4.14. <u>Stelling</u>. Een reeks van type A is absoluut convergent en omgekeerd.

<u>Bewijs</u>. Het eerste deel volgt direct uit $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ en stelling 4.2.6; het tweede deel volgt uit $u_n^+ \le |u_n|$ en $u_n^- \le |u_n|$ en de vergelijkingsstelling.□

4.4.15. <u>Gevolg</u>. In een absoluut convergente reeks mag men de sommatievolgorde veranderen.

De reeksen van type R (zie 4.4.7) zijn wel convergent maar niet absoluut convergent. Dergelijke reeksen noemt men <u>relatief convergent</u>.

We herformuleren de vergelijkingsstelling 4.3.5:

4.4.16. <u>Stelling</u>. Als $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ reeksen zijn met $|u_n| \le v_n$ o.d.d. en $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ convergent, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ absoluut convergent.

4.4.17. <u>Voorbeelden</u>.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n^2}$ is absoluut convergent (en dus convergent), omdat $|(-1)^n \sin \frac{1}{n^2}| \le \frac{1}{n^2}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergent is.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \cos n$ is absoluut convergent, omdat $|(\frac{1}{2})^n \cos n| \le (\frac{1}{2})^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ convergent is.

4.4.18. <u>Stelling</u> (convergentiekenmerk van Cauchy). Als voor een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ geldt, dat $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$ bestaat, dan is deze reeks absoluut convergent als $\ell < 1$ en divergent als $\ell > 1$.

Bewijs. Stel eerst $\ell < 1$; kies $\rho \in \mathbb{R}$ met $\ell < \rho < 1$. Er geldt nu o.d.d. $\sqrt[n]{|u_n|} < \rho$ ofwel $|u_n| < \rho^n$; daar volgens 4.2.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$ convergeert, is ook $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ convergent volgens 4.4.16.
Stel nu $\ell > 1$. Dan is $\sqrt[n]{|u_n|} > 1$ o.d.d. zodat ook $|u_n| > 1$ o.d.d.; dit sluit volgens 4.2.5 convergentie uit. □

4.4.19. Opmerkingen.

1) Als $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \infty$, dan gaat het bewijs als bij $\ell > 1$ gewoon door; ook in dat geval is er dus divergentie.
2) Wanneer $\ell = 1$ geeft het kenmerk geen uitsluitsel over convergentie. Inderdaad bestaan er reeksen die convergeren bij $\ell = 1$ (voorbeeld: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) en reeksen die divergeren bij $\ell = 1$ (voorbeeld: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

4.4.20. Stelling (convergentiekenmerk van d'Alembert). Als voor een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ geldt, dat $\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ bestaat, dan is deze reeks absoluut convergent indien $\ell < 1$ en divergent als $\ell > 1$.

Bewijs. Stel eerst $\ell < 1$. Zij ρ een getal met $\ell < \rho < 1$. Dan is $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \rho$ o.d.d., dus $|u_{n+1}| < \rho|u_n|$ voor zeg $n > N$ met een zekere $N \in \mathbb{N}$. Dit geeft

$$|u_{N+2}| < \rho|u_{N+1}|,\ |u_{N+3}| < \rho|u_{N+2}| < \rho^2|u_{N+1}|, \ldots$$

$$\ldots,\ |u_{N+k}| < \rho^{k-1}|u_{N+1}| \qquad \text{voor } k = 2,3,\ldots\ .$$

Daar de meetkundige reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k-1}|u_{N+1}|$ convergeert, is dan volgens 4.4.16 ook $\sum_{k=1}^{\infty} |u_{N+k}|$ ofwel $\sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n|$ convergent. Dus ook $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ moet convergent zijn.
Stel nu $\ell > 1$. Dan is $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$ o.d.d., dus $|u_{n+1}| > |u_n| > 0$ voor zeg $n > N$ met een zekere $N \in \mathbb{N}$. Dan is $|u_{N+1+k}| > |u_{N+1}| > 0$ voor $k = 1,2,\ldots$, zodat u_n niet limiet nul kan hebben. Volgens 4.2.5 is convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ onmogelijk. □

4.4.21. Opmerkingen.

1) Ook bij het kenmerk van d'Alembert geeft $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \infty$ divergentie; het bewijs gaat als in het geval $\ell > 1$.

2) $\ell = 1$ geeft ook hier geen uitsluitsel. We verwijzen nogmaals naar de voorbeelden $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ en $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

4.4.22. Voorbeelden.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\arctan n)^{-n}$ is convergent volgens 4.4.18 omdat

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\arctan n)^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\arctan n} = \frac{2}{\pi} < 1 .$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ is convergent volgens 4.4.20 omdat

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1 .$$

4.4.23. Opmerking. Wanneer bij een reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ zowel $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$ als $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ bestaan, dan zijn deze limieten aan elkaar gelijk. Dit zullen we hier niet bewijzen; we vermelden het slechts om aan te geven, dat het berekenen van één van beide limieten voldoende is. In de praktijk kiezen we de handigste manier.

4.4.24. Opmerking. Ook voor oneigenlijke integralen kunnen we het begrip absolute convergentie invoeren. Door de sterke gelijkenis van het gedrag van oneigenlijke integralen en reeksen lopen alle bewijzen analoog. Wij gaan hier zeer kort op in; we vermelden slechts enkele punten zonder bewijs.
Laat I een interval van de vorm $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ of $[a,b]$ zijn en laat f continu zijn op $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$, of $(a,b]$ of $[a,b)$. We beschouwen de oneigenlijke integraal $\int\limits_I f(x)\,dx$.

1) $\int\limits_I f(x)\,dx$ heet absoluut convergent indien $\int\limits_I |f(x)|\,dx$ convergeert.
2) Een absoluut convergente oneigenlijke integraal is ook convergent.
3) Een oneigenlijke integraal, die wel convergeert maar niet absoluut convergeert, heet relatief convergent.

4) Als f en g functies zijn met $|f(x)| \le g(x)$ op I terwijl $\int_I g(x)dx$ convergeert, dan is $\int_I f(x)dx$ absoluut convergent.

5) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$ is absoluut convergent, immers $|\frac{\sin x}{x^2}| \le \frac{1}{x^2}$ op $[1,\infty)$ en $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ is convergent.

5. Machtreeksen

4.5.1. Een reeks van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, waarin $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reële getallen zijn, heet een <u>machtreeks</u>. Merk op, dat we de nulde term $a_0 x^0$ lezen als a_0; ook in het geval dat $x = 0$. Elke machtreeks convergeert voor $x = 0$; dan is namelijk iedere term behalve misschien de nulde gelijk aan 0 zodat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0$ voor $x = 0$. We onderzoeken eerst voor welke waarden van x een machtreeks convergeert resp. divergeert. Daarna zullen we voor een aantal gevallen de som van de reeks bepalen.

4.5.2. <u>Stelling</u>. Voor een machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ is steeds één van de volgende drie uitspraken van toepassing:

1) de machtreeks convergeert alleen voor $x = 0$,
2) de machtreeks convergeert absoluut voor alle $x \in \mathbb{R}$,
3) er bestaat een getal $R > 0$, zó, dat de machtreeks absoluut convergent is voor $|x| < R$ en divergent voor $|x| > R$.

We geven van deze stelling geen bewijs; we tonen slechts het volgende deelresultaat aan:

Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergeert voor $x = x_0$ met $x_0 \neq 0$, dan is hij absoluut convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < |x_0|$.

<u>Bewijs</u>. Omdat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ convergent is, is $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. De rij $(a_n x_0^n)$ is dus begrensd, d.w.z. er bestaat een $M > 0$ zo, dat $|a_n x_0^n| \le M$ voor $n = 0,1,2,\ldots$ Voor $|x| < |x_0|$ is nu

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n|\,|x/x_0|^n \le M|x/x_0|^n \qquad \text{voor } n = 0,1,2,\ldots \,.$$

Omdat $\sum_{n=0}^{\infty} |x/x_0|^n$ convergeert, volgt dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absoluut convergent is. □

4.5.3. Opmerkingen.

1) Het getal R uit 3) heet de convergentiestraal van de machtreeks. In de gevallen 1) en 2) noemen we de convergentiestraal 0 resp. ∞ en we schrijven $R = 0$ resp. $R = \infty$.

2) Er is geen algemene uitspraak te doen over de convergentie of divergentie van een machtreeks voor $x = \pm R$; ieder van deze gevallen dient apart onderzocht te worden.

4.5.4. Voorbeelden.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ convergeert slechts voor $x = 0$, want voor $x \neq 0$ is $\sqrt[n]{|n^n x^n|} = |nx| \to \infty$ voor $n \to \infty$; volgens 4.4.19 is er nu divergentie. Dus $R = 0$ voor deze reeks.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ convergeert absoluut voor alle $x \in \mathbb{R}$. Immers, voor $x = 0$ is dit duidelijk en voor $x \neq 0$ is

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| \to 0 \qquad \text{voor } n \to \infty$$

zodat met 4.4.20 absolute convergentie volgt. Hier is dus $R = \infty$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$ heeft convergentiestraal $R = e$ want

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n\right|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |x| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} |x| \to \frac{1}{e}|x|$$

en er is dus absolute convergentie voor $\frac{1}{e}|x| < 1$, dus voor $|x| < e$, en divergentie voor $\frac{1}{e}|x| > 1$, dus voor $|x| > e$.

4) De reeksen $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ hebben alle convergentiestraal $R = 1$; dit volgt direct uit de convergentiekenmerken van Cauchy en d'Alembert, 4.4.18 en 4.4.20. In $x = 1$ is de eerste divergent, de tweede divergent en de derde convergent; in $x = -1$ is de eerste divergent, de tweede relatief convergent en de derde absoluut convergent.

4.5.5. Laat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergentiestraal $R > 0$ of $R = \infty$ hebben. Dan is deze reeks convergent op het interval $(-R,R)$. De som is een functie van x die we noteren met $S(x)$, dus: $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Deze functie S heet de somfunctie van de reeks. We onderzoeken nu de continuiteit, differentieerbaarheid en integreerbaarheid van S. We spreken daartoe drie stellingen uit, die we niet zullen bewijzen.

4.5.6. Stelling (continuiteitsstelling voor machtreeksen). Laat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergentiestraal $R > 0$ of $R = \infty$ hebben. Dan is zijn somfunctie $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ continu op $(-R,R)$.

4.5.7. Opmerking. Zij $x_0 \in (-R,R)$, dan zegt de stelling $\lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0)$, dus

$$\lim_{x\to x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x\to x_0} a_n x^n\right) .$$

De stelling spreekt dus uit, dat bij een machtreeks binnen $(-R,R)$ limiet en sommatie verwisseld mogen worden.
Vaak gebruikt men de stelling voor het punt 0:

$$\lim_{x\to 0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = S(0) = a_0 .$$

4.5.8. Stelling (differentiatiestelling voor machtreeksen). Laat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergentiestraal $R > 0$ of $R = \infty$ hebben. Dan is zijn somfunctie $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ differentieerbaar op $(-R,R)$ met als afgeleide

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} .$$

Deze laatste reeks heeft eveneens convergentiestraal R.

4.5.9. Opmerkingen.

1) De stelling zegt dus dat we een machtreeks binnen $(-R,R)$ termsgewijs mogen differentiëren: de afgeleide van de som is de som van de afgeleiden. Een onmiddellijk gevolg is dat de somfunctie S willekeurig vaak differentieerbaar is op $(-R,R)$. De k^e afgeleide $S^{(k)}$ wordt verkregen door k maal achtereen termsgewijs te differentiëren:

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} .$$

2) Merk op, dat 4.5.6 een gevolg is van 4.5.8. Immers, iedere differentieerbare functie is continu. Tevens volgt, dat de somfunctie binnen $(-R,R)$ integreerbaar is. Voor de integraal hebben we de volgende stelling:

4.5.10. Stelling (integratiestelling voor machtreeksen). Laat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergentiestraal $R > 0$ of $R = \infty$ hebben. Dan geldt voor $x \in (-R,R)$

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} .$$

Deze laatste reeks heeft eveneens convergentiestraal R.

4.5.11. Opmerking. De integratiestelling is in feite een herformulering van de differentiatiestelling. Ga dit zelf na, door de differentiatiestelling toe te passen op $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

4.5.12. Voorbeelden.

1) We gaan uit van $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ voor $-1 < x < 1$ en passen de differentiatiestelling toe. Deze geeft

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad \text{voor } -1 < x < 1 .$$

Hieruit volgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \text{voor } -1 < x < 1 .$$

In het bijzonder is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$ (kies nl. $x = \frac{1}{2}$).

2) We gaan uit van $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ voor $-1 < x < 1$; nu passen we de integratiestelling toe:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x (-1)^n t^n dt\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad \text{voor } -1 < x < 1 .$$

3) We gaan uit van

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad \text{voor } -1 < x < 1 .$$

Door te integreren vinden we

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{voor } -1 < x < 1 .$$

4) We berekenen $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$ met behulp van de zojuist verkregen reeksontwikkeling en de continuiteitsstelling:

$$\frac{\arctan x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} ;$$

deze reeks heeft een positieve convergentiestraal terwijl zijn somwaarde voor $x = 0$ gelijk is aan 1. Hieruit volgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} = 1 .$$

Zonder bewijs vermelden we nog de volgende stelling over de som van een machtreeks in een randpunt van het convergentie-interval.

4.5.13. Stelling (Abel). Laat de machtreeks $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een convergentiestraal $R > 0$ hebben en zij $S(x)$ de som van de reeks. Als de reeks convergent is voor $x = R$, dan geldt: $\lim\limits_{x\uparrow R} S(x) = S(R)$. Analoog voor $x = -R$.

Uit 4.5.6 en 4.5.13. volgt dat de som van een machtreeks continu is in elk punt waar de reeks convergeert.

4.5.14. Voorbeelden.

1) Volgens 4.5.12, voorbeeld 2 is voor $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1 + x) .$$

De machtreeks is ook nog convergent voor $x = 1$ (zie 4.2.3, voorbeeld 6, of 4.4.2) zodat

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots .$$

2) Volgens 4.5.12, voorbeeld 3 is voor $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x .$$

De machtreeks is ook nog convergent voor $x = \pm 1$ op grond van het kenmerk van Leibniz, zodat

$$\frac{1}{4}\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots .$$

4.5.15. Aan het slot van deze paragraaf formuleren en bewijzen we een stelling, die zegt dat wanneer een functie f een machtreeksontwikkeling heeft die convergeert naar de functie, dat dan de coëfficiënten in deze reeksontwikkeling stuk voor stuk geheel bepaald zijn door de functie f. In de volgende paragraaf zal deze stelling een belangrijk achtergrondgegeven zijn.

Stelling. Als $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ voor $|x| < \eta$ met zekere $\eta > 0$, dan geldt $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$ voor $k = 0,1,2,\ldots$.

Bewijs. Het is duidelijk dat $f(0) = a_0$. Daar f volgens de differentiatiestelling 4.5.8 differentieerbaar is met $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ is $f'(0) = 1.a_1 = a_1$. Herhaald differentiëren geeft:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}, \quad \text{dus } f^{(k)}(0) = k!a_k . \qquad \square$$

4.5.16. Gevolg. Een functie heeft hoogstens één machtreeksontwikkeling die naar deze functie convergeert.

4.5.17. Laat f een functie zijn, die willekeurig vaak differentieerbaar is in een omgeving van een punt a. Zij $g(t) = f(a + t)$; dan is g willekeurig vaak differentieerbaar in de corresponderende omgeving van 0, met $g^{(n)}(0) = f^{(n)}(a)$ voor $n = 0,1,2,\ldots$. Neem aan, dat g in een machtreeks ontwikkeld kan worden die convergeert naar $g(t)$ voor $|t| < r$ met $r > 0$, dus

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} t^n \quad \text{voor } |t| < r .$$

Dan is, met $x = a + t$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \quad \text{voor } |x - a| < r ;$$

deze laatste reeks convergeert dus naar $f(x)$ op een omgeving van a.

4.5.18. <u>Opgave</u>. Wanneer f willekeurig vaak differentieerbaar is op een omgeving van a, terwijl

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - a)^n$$

op zo'n omgeving, dan is

$$b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \text{voor } n = 0,1,2,\ldots .$$

Bewijs dit. Concludeer dat een functie ten hoogste één reeksontwikkeling heeft van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - a)^n$, die naar deze functie convergeert.

6. Taylorreeksen

4.6.1. <u>Stelling</u> (Taylor). Zij f $(n + 1)$-maal differentieerbaar op een open interval I en zij $a,b \in I$. Dan is er een $\theta \in \mathbb{R}$, met $0 < \theta < 1$, zodat

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + R_n$$

waarin

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$

met $\xi = a + \theta(b-a)$.

<u>Bewijs</u>. Indien $b = a$ is de stelling triviaal. Zij nu $b \neq a$. Laat het getal A gedefinieerd zijn door

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{A}{(n+1)!}(b-a)^{n+1};$$

we moeten dan bewijzen dat A de vorm $f^{(n+1)}(\xi)$ heeft. Definieer de functie $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ door

$$\varphi(x) = f(x) + f'(x)(b-x) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + \frac{A}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}.$$

Dan is φ differentieerbaar op I. Verder is $\varphi(b) = f(b)$ en $\varphi(a) = f(b)$. Volgens de stelling van Rolle (3.2.4) is er dus een punt ξ, tussen a en b, met $\varphi'(\xi) = 0$. Na uitwerking van φ' vinden we

$$\varphi'(\xi) = \frac{(b-\xi)^n}{n!}\{f^{(n+1)}(\xi) - A\}$$

waaruit volgt: $A = f^{(n+1)}(\xi)$. □

4.6.2. <u>Gevolg</u>. Zij f $(n+1)$maal differentieerbaar op een open interval I en zij $a \in I$. Dan geldt voor iedere $x \in I$

$$(1) \qquad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

waarin

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

met ξ tussen a en x (N.B. ξ hangt in het algemeen van x af!).

Formule (1) heet de <u>formule van Taylor</u>. We kunnen hem interpreteren als een formule, die de benadering geeft van een functie f door het zg. <u>interpolatie-polynoom van Taylor</u>:

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Bij deze benadering wordt een fout R_n gemaakt; R_n heet dan ook wel de <u>rest-term</u> of de <u>rest</u>. Het belang van de formule van Taylor is vooral daarin gelegen, dat voor vele functies f de restterm R_n voor n voldoende groot erg klein wordt. De benadering met behulp van het interpolatiepolynoom van Taylor levert daardoor vaak goede resultaten op.
Als f een polynoom is van de graad hoogstens n, dan is $f^{(n+1)}(\xi) = 0$ en dus $R_n = 0$. De benadering is in dit geval exact.

4.6.3. <u>Voorbeelden.</u>

1) De functie $f(x) = e^x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op $\mathbb{R}$ met $f^{(k)}(x) = e^x$ voor $k = 0,1,2,\ldots$. Uit de formule van Taylor met $a = 0$ volgt: voor elke $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$ is er een $\theta \in (0,1)$ zodat

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} .$$

2) De functie $f(x) = \sin x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op $\mathbb{R}$ met afgeleiden $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) =$ $= \sin x = f(x)$ enzovoort. Dit geeft:

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{en} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \qquad \text{voor } k = 0,1,2,\ldots .$$

Voor elke $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$ is er een $\theta \in (0,1)$ zodat

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + 0.x^{2n} + R_{2n}$$

waarin

$$R_{2n} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n \cos \theta x .$$

3) Op soortgelijke wijze krijgen we voor $f(x) = \cos x$: voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$ is

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta x,$$

waar $\theta \in (0,1)$.

4.6.4. <u>Opgave</u>. Bewijs zelf dat voor alle $x > -1$ en alle $n \in \mathbb{N}$ een $\theta \in (0,1)$ bestaat zo, dat

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} .$$

4.6.5. Als de functie f willekeurig vaak differentieerbaar is in een omgeving van a dan heet de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$ de <u>Taylorontwikkeling</u> van f rond a of <u>Taylorreeks</u>.
Is a = 0, dan wordt de dan verkregen machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ook wel de MacLaurinreeks genoemd.

4.6.6. <u>Stelling</u>. Zij f willekeurig vaak differentieerbaar op $(a - \ell, a + \ell)$ en zij M_N het globale maximum van $f^{(N)}$ op $I = [a - \rho, a + \rho]$ waarbij $0 < \rho < \ell$. Als $\lim_{N\to\infty} \rho^N M_N / N! = 0$ dan is de Taylorreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

convergent op I met som f(x).

<u>Bewijs</u>. Volgens 4.6.2 geldt voor elke $N \in \mathbb{N}$ en elke $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + R_N ,$$

waarin

$$R_N = \frac{f^{(N+1)}(a + \theta(x - a))}{(N + 1)!} (x - a)^{N+1}$$

voor zekere $\theta \in (0,1)$. Voor $x \in I$ is dan $|R_N| \le \rho^{N+1} M_{N+1} / (N + 1)!$, dus $\lim_{N\to\infty} R_N = 0$. Daaruit volgt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

voor alle $x \in I$. □

4.6.7. <u>Hulpstelling</u>. Voor alle $\rho > 0$ is $\lim_{N\to\infty} \frac{\rho^N}{N!} = 0$.

<u>Bewijs</u>. Zij $k \in \mathbb{N}$ het getal met $k - 1 \le \rho < k$. Dan geldt voor $N > k$:

$$0 < \frac{\rho^N}{N!} = \frac{\rho^k}{k!} \frac{\rho^{N-k}}{(k+1)\dots(N-1)N} < \frac{\rho^k}{k!} \left(\frac{\rho}{k+1}\right)^{N-k} \to 0 \text{ voor } N \to \infty .$$

Immers, $\frac{\rho^k}{k!}$ is een vast getal en $\lim_{N\to\infty} \left(\frac{\rho}{k+1}\right)^{N-k} = 0$ wegens $0 < \frac{\rho}{k+1} < 1$. □

4.6.8. Voorbeelden.

1) De functie $f(x) = e^x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op $\mathbb{R}$ met $f^{(N)}(x) = e^x$ voor $N = 0,1,2,\ldots$. Zij $\rho > 0$, dan is $|f^{(N)}(x)| \le e^\rho$ voor alle $x \in I = [-\rho,\rho]$. Omdat $\lim_{N\to\infty} \rho^N e^\rho/N! = 0$, is de Taylorontwikkeling van e^x rond 0 convergent op I met som e^x. Aangezien ρ willekeurig te kiezen is, geldt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots ,$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. In het bijzonder geldt $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$.

2) De functie $f(x) = \sin x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op $\mathbb{R}$ met $|f^{(N)}(x)| \le 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Omdat $\lim_{N\to\infty} \rho^N/N! = 0$ voor elke $\rho > 0$, is de Taylorreeks van sin x convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$ met als som sin x, dus

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots .$$

3) Voor $f(x) = \cos x$ vinden we geheel analoog

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$.

4.6.9. Opgave. Bewijs zelf, uitgaande van 4.6.4, dat de Taylorreeksontwikkeling rond 0 van $\ln(1 + x)$ convergeert naar $\ln(1 + x)$ voor $-\frac{1}{2} \le x \le 1$.
Aanwijzing: Bewijs dat $\left|\frac{x}{1 + \theta x}\right| \le 1$ voor $0 \le x \le 1$ en voor $-\frac{1}{2} \le x < 0$.
Merk op, dat in voorbeeld 4.5.12 de convergentie voor $-1 < x < 1$ al is aangetoond en dat de convergentie voor $x = 1$ in 4.5.14 met de stelling van Abel is behandeld.

4.6.10. Opgave. Differentieer de Taylorreeks voor sin x om $x = 0$; volgens 4.5.8 moet dit een machtreeks opleveren die naar cos x convergeert. Volgens 4.5.15 en 4.5.16 moet de verkregen reeks de Taylorreeks van cos x om $x = 0$ zijn. Controleer dit.

4.6.11. De functie $f(x) = (1+x)^\mu$ is willekeurig vaak differentieerbaar op $(-1,\infty)$ met $f^{(k)}(x) = \mu(\mu-1)\,\ldots\,(\mu-k+1)(1+x)^{\mu-k}$ voor $k = 1,2,3,\ldots$. Voer nu in de notatie

$$\binom{\mu}{0} = 1, \quad \binom{\mu}{k} = \frac{\mu(\mu-1)\,\ldots\,(\mu-k+1)}{k!} \qquad \text{voor } k \in \mathbb{N}\,,$$

uit te spreken als "μ over k"; voor $\mu = n$, n geheel, $n \ge k \ge 0$, stemt deze notatie overeen met de binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k}$ ingevoerd in 0.8.9. Dan is $f^{(k)}(0) = k!\binom{\mu}{k}$ en met behulp van de formule van Taylor (4.6.2) volgt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \binom{\mu}{k} x^k + R_N$$

voor alle $x > -1$. Men kan nu bewijzen (met behulp van een meer verfijnde formule voor de restterm R_N) dat $\lim_{N\to\infty} R_N = 0$ voor $|x| < 1$. We vinden dus de volgende Taylorontwikkeling

$$(1+x)^\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} x^k = 1 + \frac{\mu}{1!}\,x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}\,x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}\,x^3 + \ldots\,,$$

geldig voor $|x| < 1$.

Deze reeks heet de binomiaalreeks.

Indien $\mu = n$ met $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ breekt de binomiaalreeks af na de term met $k = n$; de reeks gaat dan over in de ontwikkeling uit 0.8.17.

Indien $\mu \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ breekt de reeks niet af. Met het kenmerk van d'Alembert ziet men direct dat zijn convergentiestraal dan 1 is.

4.6.12. Zij $f(x) = \arcsin x$, dan is

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}\,,$$

geldig voor $|x| < 1$.

Integreer termsgewijs, dan volgt

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1} = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \ldots\,,$$

geldig voor $|x| < 1$.

4.6.13. De Taylorontwikkeling van een functie f rond een punt a met a $\neq$ 0 kan men vinden door 4.6.2 toe te passen, waarbij $f^{(n)}(a)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ berekend moet worden. Vaak kan men sneller een "verschuiving" naar 0 toepassen en de Taylorontwikkeling rond 0 gebruiken.

Voorbeelden.

1) De Taylorontwikkeling van sin x rond π wordt gegeven door

$$\sin x = -\sin(x - \pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (x-\pi)^{2n+1} ,$$

geldig voor alle $x \in \mathbb{R}$.

2) De Taylorontwikkeling van $\ln(4 + x)$ rond 1 wordt gegeven door:

$$\ln(4+x) = \ln(5+x-1) = \ln 5 + \ln(1+\frac{x-1}{5}) = \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n n} (x-1)^n$$

geldig voor alle x met $|x-1| < 5$.

4.6.14. Samenvatting van de gevonden reeksontwikkelingen:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \frac{\mu}{1!} x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu}{n} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

4.6.15. We geven nog enige voorbeelden van het berekenen van limieten met behulp van machtreeksen. Evenals in voorbeeld 4.5.12, 4) gebruiken we de continuiteitsstelling 4.5.6.

Voorbeelden.

1)
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots}{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+\frac{x}{3!}+\ldots}{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+\ldots}=1\,.$$

2)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots)-x(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots}{x^3(1-\frac{x^2}{2!}+\ldots)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+\ldots}{x^3(1-\frac{x^2}{2}+\ldots)}=\frac{1}{3}\,.$$

Zonder bewijs geven we nog een tweetal stellingen die het bewijzen van de convergentie van een Taylorreeks naar de betrokken functie vaak vereenvoudigen.

4.6.16. Stelling. Laat de machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergentiestralen R_1 en R_2 hebben. Voor $|x| < \min(R_1,R_2)$ geldt dan:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,\ \text{waar}\ c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

(hierbij lezen we zo nodig $\min(R,\infty) = R$, $\min(\infty,\infty) = \infty$ en $|x| < \infty$ voor alle $x \in \mathbb{R}$).

4.6.17. Stelling. Laat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ en $\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$ convergentiestralen R_1 en R_2 hebben, waarbij $R_1 > 0$ of $R_1 = \infty$ en $R_2 > 0$ of $R_2 = \infty$. Stel $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ en $g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$ en laat gelden $g(0) = 0$ (dus: $b_0 = 0$). Zij $c_{p,n}$ de coëfficiënt van x^p in de machtreeksontwikkeling van $(\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m)^n$ (berekend met behulp van 4.6.16) en vorm de reeks $\sum_{p=0}^{\infty}(\sum_{n=0}^{p} a_n c_{p,n})x^p$. Dan is er een niet-leeg open interval om de oorsprong zó, dat deze reeks daar convergeert met als som $f(g(x))$.

4.6.18. Voorbeelden.

1) $$e^x \ln(1+x) = (1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \ldots)(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots) =$$
$$= x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots\ldots \qquad \text{met } R = 1 .$$

2) $$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \tfrac{1}{2}(\sin x)^2 + \tfrac{1}{6}(\sin x)^3 + \tfrac{1}{24}(\sin x)^4 + \ldots =$$
$$= 1 + (x - \tfrac{1}{6}x^3 + \ldots) + \tfrac{1}{2}(x^2 - \tfrac{1}{3}x^4 + \ldots) + \tfrac{1}{6}(x^3 + \ldots) + \tfrac{1}{24}(x^4 + \ldots) + \ldots =$$
$$= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 + \ldots \qquad \text{met } R > 0 .$$

4.6.19. Definitie. Laat f een functie zijn, die willekeurig vaak differentieerbaar is in a. Zij $k \in \mathbb{N}$. Dan heet a een k-voudig nulpunt van f (een nulpunt van de orde k, een nulpunt met multipliciteit k) indien

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0 \quad \text{en} \quad f^{(k)}(a) \neq 0 .$$

4.6.20. Opmerking. Als f een k-voudig nulpunt heeft in a, dan begint de Taylorreeks van f om a met de term

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k .$$

Indien deze Taylorreeks inderdaad naar f(x) convergeert, geldt dat de functie

$$g(x) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x - a) + \frac{f^{(k+2)}(a)}{(k+2)!}(x - a)^2 + \ldots$$

de eigenschap $f(x) = (x - a)^k g(x)$ en $g(a) \neq 0$ heeft. Vergelijk dit met 0.9.8.

7. Taylorinterpolatie en Lagrange-interpolatie

4.7.1. We grijpen even terug naar de formule van Taylor uit 4.6.2:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n$$

waarin

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1} .$$

Zoals al eerder opgemerkt, wordt hier $f(x)$ benaderd door het Taylorinterpolatiepolynoom p_n gegeven door

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Hierin heeft p_n de volgende eigenschappen:

1) p_n heeft de graad ten hoogste n (maar wanneer $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$ is p_n het nulpolynoom)
2) $p_n(a) = f(a)$, $p_n'(a) = f'(a), \ldots, p_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

Er is slechts één polynoom p_n met deze beide eigenschappen: Immers, stel dat twee verschillende polynomen p_n en q_n zouden voldoen; dan had $p_n - q_n$ graad hoogstens n terwijl $(p_n - q_n)(a) = 0$, $(p_n - q_n)'(a) = 0, \ldots, (p_n - q_n)^{(n)}(a) = 0$ zodat a een nulpunt van $p_n - q_n$ zou zijn met multipliciteit $\geq n+1$. Dit is onmogelijk op grond van 0.9.10.
Het Taylorinterpolatiepolynoom p_n is dus het éénduidig bepaalde polynoom met graad hoogstens n (of het nulpolynoom) dat in a voorgeschreven waarden voor $p_n, p_n', p_n'', \ldots, p_n^{(n)}$ heeft.

4.7.2. Ter illustratie geven we een bewijs van de formule waarop de rechthoekregel is gebaseerd (zie 3.6.2): Als f tweemaal continu differentieerbaar is, dan is

$$\int_a^b f(x)\,dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + E_r$$

met $E_r = \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\eta)$ voor zekere $\eta \in [a,b]$.

<u>Bewijs</u>.

1) We geven eerst een bewijs voor het speciale geval waarin $f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$. Zij p_1 het lineaire Taylorinterpolatiepolynoom met $p_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ en $p_1'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$. Dan is dus $p_1(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Uit de formule van Taylor volgt: $f(x) = p_1(x) + R_1$ met $R_1 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi)$, waarin R_1 en ξ van x afhangen. Laten m en M het globale minimum en het globale maximum van f'' op $[a,b]$ zijn; dan is $\frac{1}{2}m\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq R_1 \leq \frac{1}{2}M\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$. Integreer nu $f(x) = p_1(x) + R_1$ over $[a,b]$ en bedenk dat

$$\int_a^b p_1(x)\,dx = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) ,$$

en dat

$$\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 dx = \frac{1}{12}(b-a)^3 .$$

Dan krijgen we

$$\int_a^b f(x)dx = f(\frac{a+b}{2})(b-a) + E_r$$

met

$$\frac{1}{24}(b-a)^3 m \le E_r \le \frac{1}{24}(b-a)^3 M .$$

Dit levert $E_r = \frac{1}{24}(b-a)^3\mu$ met $m \le \mu \le M$. Uit de tussenwaardestelling (2.4.10) volgt nu:

$$E_r = \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\eta) \qquad \text{voor zekere } \eta \in [a,b].$$

2) Het algemene geval gaat nu met behulp van het al onder 1) bewezene als volgt: Zij

$$g(x) = f(x) - f'(\frac{a+b}{2})(x - \frac{a+b}{2}) .$$

Dan is

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx ,$$

immers

$$\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})dx = 0 .$$

Verder geldt: $g(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{a+b}{2})$, $g'(\frac{a+b}{2}) = 0$ en $g''(x) = f''(x)$. Met 1) toegepast op g krijgen we

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx = g(\frac{a+b}{2})(b-a) + E_r = f(\frac{a+b}{2})(b-a) + E_r$$

waarin

$$E_r = \frac{1}{24}(b-a)^3 g''(\eta) = \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\eta) \text{ voor zekere } \eta \in [a,b].\square$$

4.7.3. Interpolatiepolynomen van Taylor worden geconstrueerd, door voor één x-waarde voorgeschreven waarden voor dit polynoom en een aantal van zijn afgeleiden te geven. We kunnen ook polynomen construeren, die in een aantal verschillende waarden van x een voorgeschreven functiewaarde hebben. In het (x,y)-vlak gaat door twee punten precies één rechte, door drie punten (met verschillende x-coördinaten) een parabool of een rechte. Algemeen geldt:

4.7.4. Stelling. Bij $n+1$ gegeven punten $(a_0,b_0),(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)$, waarvan de coördinaten $a_0,a_1,\ldots,a_n$ verschillend zijn, bestaat er precies één polynoom p met $\mathrm{gr}(p) \le n$, of p is het nulpolynoom, zodat $p(a_k) = b_k$ voor $k = 0,1,\ldots,n$.

Bewijs. We construeren eerst een polynoom p, dat aan de eisen voldoet en laten vervolgens zien, dat p eenduidig bepaald is. Zij ℓ_i het polynoom gegeven door

$$(1) \qquad \ell_i(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_n)}{(a_i-a_0)(a_i-a_1)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)} ,$$

dan is $\ell_i(a_k) = 0$ voor $k = 0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n$ en $\ell_i(a_i) = 1$. We nemen nu voor p het polynoom gegeven door $p(x) = b_0\ell_0(x) + b_1\ell_1(x)+\ldots+b_n\ell_n(x)$. Dan voldoet p aan de gestelde eisen.
Stel dat q een van p verschillend polynoom is dat eveneens aan de gestelde eisen voldoet. Voor het polynoom $p-q$, dat graad hoogstens n heeft, geldt dan $(p-q)(a_k) = 0$ voor $k = 0,1,\ldots,n$. Het polynoom $p-q$ zou dus minstens $n+1$ reële nulpunten hebben, hetgeen onmogelijk is wegens 0.9.10. □

Het gevonden polynoom p heet het interpolatiepolynoom van Lagrange door de punten $(a_0,b_0),(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)$.

4.7.5. Zij f een functie die gedefinieerd is voor alle $x \in [a,b]$. Laat $a_0,a_1,\ldots,a_n$ gegeven getallen zijn met $a \le a_0 < a_1 < \ldots < a_n \le b$. We benaderen f door het interpolatiepolynoom van Lagrange door de punten $(a_0,f(a_0)),(a_1,f(a_1)),\ldots$ $\ldots,(a_n,f(a_n))$. Volgens 4.7.4 wordt dit interpolatiepolynoom gegeven door

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i)\ell_i(x)$$

waarin ℓ_i door 4.7.4, 1), gegeven is. We voeren nog in de notatie

$$\ell(x) = (x-a_0)(x-a_1)\ \ldots\ (x-a_n) .$$

4.7.6. Stelling. Laat f continu zijn op $[a,b]$ en $(n+1)$-maal differentieerbaar op (a,b). Voor alle $x \in [a,b]$ is er dan een $\xi \in (a,b)$ zodat, met de notaties uit 4.7.5,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i)\ell_i(x) + R_n, \text{ met } R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\ell(x) .$$

(Interpolatieformule van Lagrange). (N.B. R_n en ook ξ hangen van x af!)

Bewijs. We bewijzen de formule voor $x = c$ met $c \in [a,b]$. Als $c = a_i$ voor zekere i, $0 \le i \le n$, dan is de formule juist. Als $c \ne a_i$ voor $i = 0,1,\dots,n$: laat A het getal zijn met

$$f(c) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i)\ell_i(c) + \frac{A}{(n+1)!}\,\ell(c) .$$

We moeten dan bewijzen: $A = f^{(n+1)}(\xi)$ voor zekere $\xi \in (a,b)$. Zij

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} f(a_i)\ell_i(x) - \frac{A}{(n+1)!}\,\ell(x) .$$

Dan is $\varphi(a_i) = f(a_i) - f(a_i) - 0 = 0$ $(i = 0,1,\dots,n)$ en ook $\varphi(c) = 0$. De functie φ heeft dus minstens $n+2$ verschillende nulpunten op $[a,b]$. Volgens de stelling van Rolle (3.2.4) ligt tussen elk tweetal opeenvolgende nulpunten van φ een nulpunt van φ'. De afgeleide φ' heeft dus minstens $n+1$ verschillende nulpunten in (a,b). Op dezelfde gronden heeft φ'' minstens n verschillende nulpunten in (a,b), enzovoort. Uiteindelijk vinden we dat er een $\xi \in (a,b)$ is met $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Werk $\varphi^{(n+1)}$ uit en bedenk dat $\ell_i^{(n+1)}(x) = 0$ voor $i = 0,1,\dots,n$ en dat $\ell^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ We vinden dan $\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - A$, zodat $A = f^{(n+1)}(\xi)$. □

4.7.7. Ter illustratie bewijzen we vervolgens de formule waarop de trapeziumregel is gebaseerd (zie 3.6.3): Als f tweemaal continu differentieerbaar is, dan is

$$\int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + E_t ,$$

met $E_t = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\zeta)$ voor zekere $\zeta \in [a,b]$.

Bewijs. Laat p het interpolatiepolynoom van Lagrange zijn, bepaald door $p(a) = f(a)$ en $p(b) = f(b)$; de grafiek van p is dan de rechte door $(a,f(a))$ en $(b,f(b))$, zodat

$$\int_a^b p(x)\,dx = \tfrac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) .$$

Volgens 4.7.6 is $f(x) = p(x) + R$ met $R = \frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)(x-b)$, ofwel $-R = \frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)(b-x)$. Zij m het globale minimum en M het globale maximum van f'' op $[a,b]$, dan is dus

$$\tfrac{1}{2}m(x-a)(b-x) \le -R \le \tfrac{1}{2}M(x-a)(b-x) .$$

Integreren en gebruiken van

$$\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx = \frac{1}{6}(b-a)^3$$

levert

$$\int_a^b f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + E_t$$

met

$$\frac{1}{12}m(b-a)^3 \le -E_t \le \frac{1}{12}M(b-a)^3$$

zodat $-E_t = \frac{1}{12}\mu(b-a)^3$ voor een getal μ met $m \le \mu \le M$. Uit de tussenwaardestelling (2.4.10) volgt nu:

$$-E_t = \frac{1}{12}f''(\zeta)(b-a)^3 \qquad \text{met } \zeta \in [a,b]$$

waarmee het bewijs voltooid is. □

8. Numerieke sommatie

4.8.1. De som S van een convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is niet altijd in gesloten vorm te berekenen. Evenwel, elke partiële som $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ is te gebruiken als numerieke benadering voor S. Bij deze benadering maken we een fout, de zg. afbreekfout E, bepaald door $S = S_N + E$. Merk op, dat $E = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$. Aan de hand van voorbeelden introduceren we vier methoden om grenzen voor de afbreekfout te geven:

a) Maak gebruik van een expliciete formule voor E. In het geval van een Taylorreeks bijv. kan de formule voor de restterm (zie 4.6.2) als zodanig gebruikt worden.

b) Vergroot de termen van de reeks $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ zodanig dat er een meetkundige reeks ontstaat.

c) Vergelijk $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ met een integraal.

d) In het geval van een alternerende reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ met $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ en $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, geldt: E ligt in tussen 0 en de eerstvolgende term, dus tussen 0 en $(-1)^N a_{N+1}$ (zie 4.4.3).

4.8.2. Voorbeelden.

1) We berekenen e door de reeks $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$ af te breken na de term $\frac{1}{6!}$. We krijgen met behulp van 4.6.3, voorbeeld 1)

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{e^{\theta}}{5040} \quad \text{met } 0 < \theta < 1 .$$

Daar $e^{\theta} < e < 3$ is dus

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$$

met een afbreekfout E waarvoor geldt

$$0 < E < \frac{3}{5040} < 0{,}0006 .$$

2) Bereken ln 0,9.

Met behulp van de reeksontwikkeling voor $\ln(1 + x)$ (zie 4.6.14) volgt

$$\ln \frac{9}{10} = \ln(1 - \frac{1}{10}) = -\left[\frac{1}{10} + \frac{1}{2.10^2} + \frac{1}{3.10^3} + \frac{1}{4.10^4} + \ldots\right] .$$

Breek de reeks af na de tweede term dan vinden we als benadering: $\ln 0{,}9 \approx -\frac{1}{10} - \frac{1}{200}$ met afbreekfout E te schatten volgens

$$|E| = \frac{1}{3.10^3} + \frac{1}{4.10^4} + \ldots < \frac{1}{3}\left[\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right] = \frac{1}{2700} .$$

3) Bereken een benadering voor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Breek de reeks af na N termen dan geldt voor de afbreekfout (vergelijk 4.3.2)

$$E = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \int_N^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}\frac{1}{N^2} .$$

Neem bijvoorbeeld N = 5, dan volgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125}$$

met een afbreekfout E waarvoor geldt: $0 < E < 0{,}02$.

4) Uit de reeksontwikkeling voor arctan x (zie 4.6.14) volgt

$$\arctan \frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{3.10^3} + \frac{1}{5.10^5} - \frac{1}{7.10^7} + \ldots .$$

Bij afbreken na de derde term is $-\frac{1}{7} . 10^{-7} \leq E \leq 0$ op grond van 4.4.3.

4.8.3. Doorgaans wordt de benadering S_N voor S in decimale vorm berekend, door iedere term uit S_N af te ronden op een bepaald aantal decimalen en vervolgens op te tellen. Bij afronden van iedere term op k decimalen maken we per term een afrondingsfout die hoogstens $\frac{1}{2} . 10^{-k}$ is in absolute waarde. Bij N termen krijgen we zodoende een som B van N afrondingsfouten, waarvoor geldt $|B| \leq N . \frac{1}{2} . 10^{-k}$. Teneinde B klein te houden, gebruikt men (vooral bij grote N) wat meer decimalen dan het aantal waarin we het eindantwoord wensen op te geven. De verkregen som van de afgeronde termen wordt daarom uiteindelijk nog eens afgerond op zeg p decimalen ($p < k$) waarbij nog een afrondingsfout A met $|A| \leq \frac{1}{2} . 10^{-p}$ gemaakt wordt. De totale afrondingsfout is in absolute waarde hoogstens

$$|A| + |B| \leq \frac{1}{2} . 10^{-p} + N . \frac{1}{2} . 10^{-k} .$$

De totale fout T in het eindantwoord bestaat uit de afbreekfout E en de totale afrondingsfout; dit geeft

$$|T| \leq |E| + |A| + |B| .$$

4.8.4. In 4.8.2, voorbeeld 1, geeft afronden van de termen op 4 decimalen en afronden van het eindantwoord op 3 decimalen het volgende beeld:

$$e \approx 1{,}0000 + 1{,}0000 + 0{,}5000 + 0{,}1667 + 0{,}0417 + 0{,}0083 + 0{,}0014$$

$$= 2{,}7181 \approx 2{,}718$$

met hierin een totale fout T waarvoor geldt

$$|T| \leq |E| + |A| + |B| \leq$$

$$\leq 0{,}0006 + 0{,}0005 + 7.\tfrac{1}{2}.0{,}0001 < 0{,}0015 \;.$$

Ga na, dat het laten staan van het eindantwoord in 4 decimalen niet zinvol is. Ga ook na dat berekenen van de afzonderlijke termen in 3 decimalen een grotere totale fout zou opleveren.

4.8.5. <u>Afspraak</u>. Zij S de som van een convergente reeks. De berekening van S met een fout van ten hoogste α zal als volgt worden uitgevoerd:

1) Breek de reeks af na een voldoend aantal termen; hierbij krijgen we een afbreekfout E.
2) Bereken van iedere term uit het overgehouden beginstuk de decimale vorm en rond af tot op k decimalen. Hierbij krijgen we een som van afrondingsfouten B. Neem k voldoende groot.
3) Rond de verkregen uitkomst voor de som van het beginstuk van de reeks af op een geschikt aantal decimalen. Hierbij ontstaat een afrondingsfout A.
4) Zorg ervoor, dat $|E| + |A| + |B| < \alpha$.

4.8.6. <u>Voorbeelden</u>.

1) Bereken een benadering voor $\sin\frac{1}{10}$ door de reeksontwikkeling voor $\sin\frac{1}{10}$ na twee termen af te breken. We vinden

$$\sin\frac{1}{10} \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{3!\,.\,10^3}\,,$$

met een afbreekfout E waarvoor $0 < E < \dfrac{1}{5!\,.\,10^5} < 10^{-7}$. Het is dus redelijk het eindantwoord in 7 decimalen op te geven. Om de fout B niet nodeloos groot te maken, berekenen we de afzonderlijke termen in 8 decimalen (waren er bijvoorbeeld 20 termen geweest, dan hadden we 9 decimalen kunnen nemen). Dit geeft

$$\sin\frac{1}{10} \approx 0{,}10000000 - 0{,}00016667 = 0{,}09983333 \approx 0{,}0998333$$

met $|A| \le \frac{1}{2}.10^{-7}$ en $|B| \le 2.\frac{1}{2}.10^{-8} = 10^{-8}$. Voor de totale fout T geldt nu: $|T| < 1{,}6.10^{-7}$. Dus: $\sin\frac{1}{10} \approx 0{,}0998333$ met een fout van ten hoogste $1{,}6.10^{-7}$.

2) Ga uit van de betrekking $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Met behulp van de reeksontwikkeling voor arctan x (zie (4.6.14) volgt

$$\frac{1}{4}\pi = (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}) - \tfrac{1}{3}((\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{3})^3) + \tfrac{1}{5}((\tfrac{1}{2})^5 + (\tfrac{1}{3})^5) - \tfrac{1}{7}((\tfrac{1}{2})^7 + (\tfrac{1}{3})^7) + \ldots .$$

Breek de reeks af na de derde term, dan vinden we als benadering voor π:

$$\pi \approx 2 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3}(\tfrac{1}{2})^3 - \frac{4}{3}(\tfrac{1}{3})^3 + \frac{4}{5}(\tfrac{1}{2})^5 + \frac{4}{5}(\tfrac{1}{3})^5$$

met een afbreekfout die in absolute waarde hoogstens

$$\frac{4}{7}((\tfrac{1}{2})^7 + (\tfrac{1}{3})^7) = 0{,}0047\ \ldots < 5.10^{-3} \text{ is.}$$

Schrijven we

$$\pi \approx 2{,}0000 + 1{,}3333 - 0{,}1667 - 0{,}0494 + 0{,}0250 + 0{,}0033 =$$

$$= 3{,}1455 \approx 3{,}146 ,$$

dan vinden we afrondingsfouten A en B met $|A| \le \frac{1}{2}.10^{-3}$ en $|B| \le 6.\frac{1}{2}.10^{-4} = 0{,}3.10^{-3}$. Het resultaat wordt $\pi \approx 3{,}146$ met een fout hoogstens 6.10^{-3}.

4.8.7. Voor de practische berekening van logaritmen is de reeksontwikkeling van $\ln(1 + x)$ (zie 4.6.14) niet erg geschikt, omdat de reeks alleen snel convergeert voor kleine waarden van $|x|$.

Door aftrekken van de reeksen

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots ,$$

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots ,$$

volgt

$$\ln(\frac{1 + x}{1 - x}) = 2[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots] ,$$

geldig voor $|x| < 1$. Stel hierin $x = \frac{1}{2y + 1}$, dan vinden we

$$\ln(1 + \frac{1}{y}) = 2[\frac{1}{2y + 1} + \frac{1}{3(2y + 1)^3} + \frac{1}{5(2y + 1)^5} + \ldots] ,$$

geldig voor $y > 0$. De laatste reeksontwikkeling is zeer geschikt om logaritmen te berekenen.

4.8.8. Voorbeeld. Met de hierboven afgeleide reeksontwikkeling volgt met $y = 1$

$$\ln 2 \approx 2[\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5}]$$

met een afbreekfout E die te schatten is volgens

$$0 < E = 2[\frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} + \ldots] < \frac{2}{7}[\frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^9} + \ldots] = \frac{1}{4.3^5.7} < 1,5.10^{-4} .$$

Nu is

$$\ln 2 \approx 0,66667 + 0,02469 + 0,00165 \approx 0,6930$$

met een totale fout die in absolute waarde hoogstens

$$1,5.10^{-4} + 0,5.10^{-4} + 3.\tfrac{1}{2}.10^{-5} < 2,2.10^{-4}$$

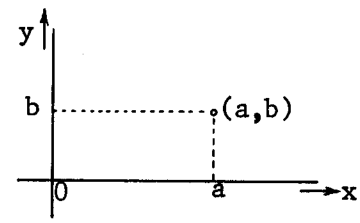
is.

Hoofdstuk 5. Complexe getallen

1. De tweedimensionale Euclidische ruimte $\mathbb{R}^2$

5.1.1. We brengen in herinnering dat $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$, waarbij a de eerste coördinaat en b de tweede coördinaat is. Als we in een plat vlak een tweetal onderling loodrechte coördinaatassen kiezen, kunnen we (a,b) meetkundig zien als het punt in het platte vlak waarvan a en b de coördinaten ten opzichte van dit (zg. cartesische) assenstelsel zijn.

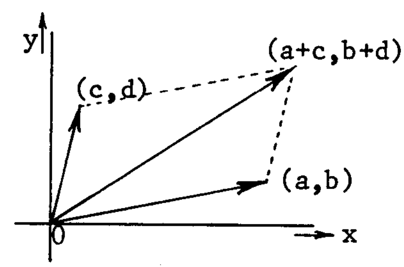
In $\mathbb{R}^2$ kunnen we een optelling en een vermenigvuldiging met reële getallen definiëren, namelijk als volgt:

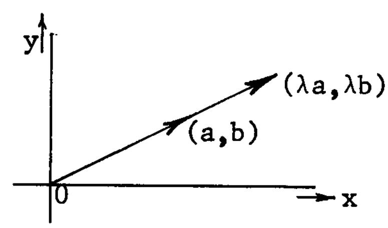


$$(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$$

$$\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)\ .$$

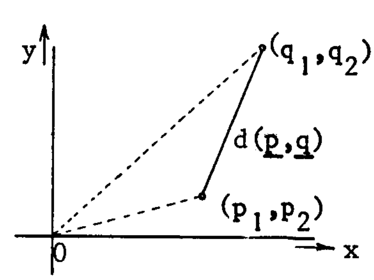
Soms beschouwt men punten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ als eindpunt van een lijnstuk vanuit de oorsprong, dus als een vector; de som van (a,b) en (c,d) kan men dan zien als de diagonaal in het parallellogram waarvan twee aanliggende zijden de lijnstukken zijn vanuit de oorsprong naar (a,b) en (c,d). Vermenigvuldiging van (a,b) met een reëel getal λ komt neer op vermenigvuldiging van het lijnstuk van de oorsprong naar (a,b) met dit getal λ. (Onderscheidt $\lambda \geq 0$ en $\lambda < 0$.) Merk op, dat iedere vector (a,b) op precies één manier geschreven kan worden als een combinatie van (1,0) en (0,1) van de volgende vorm:





$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1)\ .$$

In $\mathbb{R}^2$ hebben we verder de beschikking over het volgende afstandsbegrip: de afstand d tussen (a,b) en (c,d) is $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$. Vaak noteren we $(p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$ als $\underline{p}$, $(q_1,q_2) \in \mathbb{R}^2$ als $\underline{q}$. We schrijven $d(\underline{p},\underline{q})$ voor de afstand tussen $\underline{p}$ en $\underline{q}$.



5.1.2. Stelling (driehoeksongelijkheid). Voor $\underline{p},\underline{q},\underline{r} \in \mathbb{R}^2$ geldt:

$$d(\underline{p},\underline{r}) \le d(\underline{p},\underline{q}) + d(\underline{q},\underline{r}) \ .$$

Bewijs. Dit wordt aan de lezer overgelaten. □

5.1.3. De afstand van $\underline{p} = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$ tot $\underline{0} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, de lengte van $\underline{p}$, noteren we als $|\underline{p}|$. Dus:

$$|\underline{p}| = d(\underline{p},\underline{0}) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \ .$$

Ga na dat geldt: $|\underline{p} + \underline{q}| \le |\underline{p}| + |\underline{q}|$, en dat $d(\underline{p},\underline{q}) = |\underline{p} - \underline{q}|$.

5.1.4. Definitie. De open cirkelschijf om $\underline{p} \in \mathbb{R}^2$ met straal ε (notatie: $B_\varepsilon(\underline{p})$) is

$$B_\varepsilon(\underline{p}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\underline{x},\underline{p}) < \varepsilon\} \ .$$

Merk de analogie op met de definitie van $U_\varepsilon(a)$ uit 2.3.1.

In $\mathbb{R}^2$ kunnen we rijen beschouwen; een rij in $\mathbb{R}^2$ is formeel een afbeelding van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{R}^2$; in de praktijk beschouwen we een rij als een genummerde serie punten in $\mathbb{R}^2$, dus: $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots$; notatie: $((a_n,b_n))_{n=1}^\infty$ of $(\underline{a}_n)_{n=1}^\infty$.

5.1.5. Definitie. Een rij $(\underline{a}_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathbb{R}^2$ convergeert naar $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ als voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt:

$$\underline{a}_n \in B_\varepsilon(\underline{a}) \text{ o.d.d.}$$

Is dit het geval, dan ligt $\underline{a}$ eenduidig vast; $\underline{a}$ heet de limiet van $(\underline{a}_n)_{n=1}^\infty$, notatie: $\underline{a} = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n$.

5.1.6. Stelling. $\lim_{n\to\infty} (a_n,b_n) = (a,b)$ dan en slechts dan als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ én $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Bewijs.

1) Zij $\varepsilon > 0$. Uit $\lim_{n\to\infty} (a_n,b_n) = (a,b)$ volgt: $\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon$ o.d.d. dus zeker $|a_n - a| = \sqrt{(a_n - a)^2} < \varepsilon$ o.d.d., zodat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Analoog volgt $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

2) Zij $\varepsilon > 0$; wegens $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ geldt $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ o.d.d.; omdat $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ geldt ook $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ o.d.d. Voor n voldoende groot is dus

$$\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon ,$$

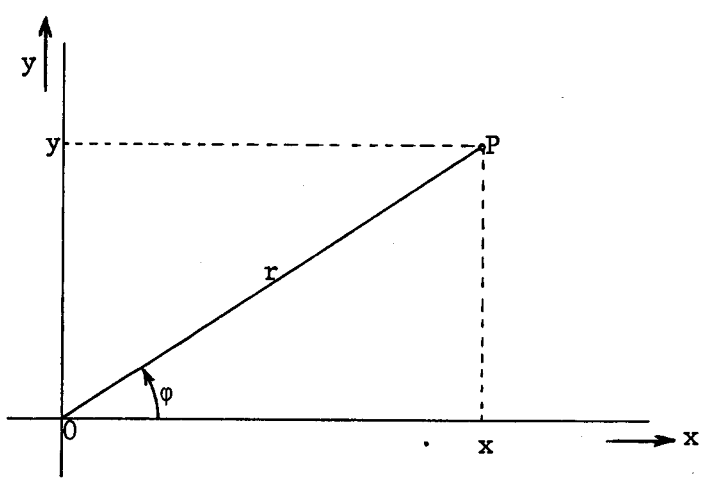
zodat $\lim_{n\to\infty} (a_n,b_n) = (a,b)$. □

Een rij in $\mathbb{R}^2$ gedraagt zich ten aanzien van convergentie dus als een tweetal rijen reële getallen tesamen.

5.1.7. Tot dusverre hebben wij een punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ beschreven met zijn coördinaten x en y. Voor sommige problemen echter is een andere beschrijvingswijze eenvoudiger: we leggen een punt vast door

1) zijn afstand tot de oorsprong
2) de hoek die de verbindingslijn van het punt naar de oorsprong maakt met de positieve x-as.

Dit zijn de zg. poolcoördinaten van een punt.



De afstand heet gewoonlijk r, de hoek φ. Merk op, dat $r \geq 0$ en dat φ bepaald is tot op veelvouden van 2π na. Meestal wordt φ zo gekozen dat $0 \leq \varphi < 2\pi$ of dat $-\pi < \varphi \leq \pi$.

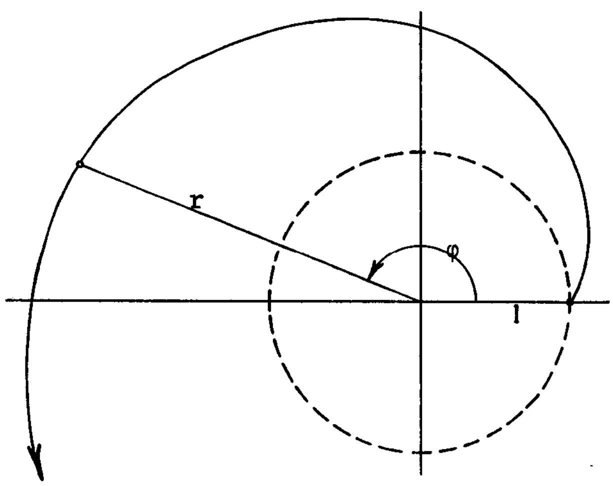
Met de keuze $-\pi < \varphi \leq \pi$ krijgen we de zg. hoofdwaarde van φ. Merk ook op, dat voor de oorsprong $r = 0$ en dat daar iedere waarde van φ voldoet.

De oorsprong heet wel de pool, de positieve x-as de poolas, r de voerstraal en φ het argument.

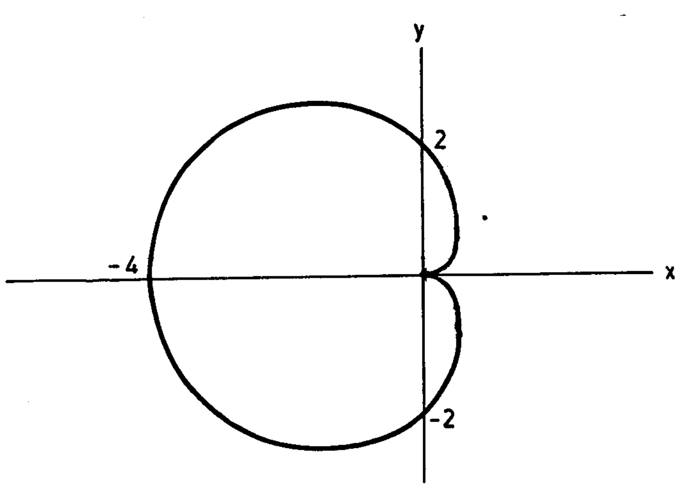
5.1.8. Voor het omrekenen van cartesische coördinaten naar poolcoördinaten en omgekeerd kan men de volgende formules gebruiken:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x}\,. \end{cases}$$

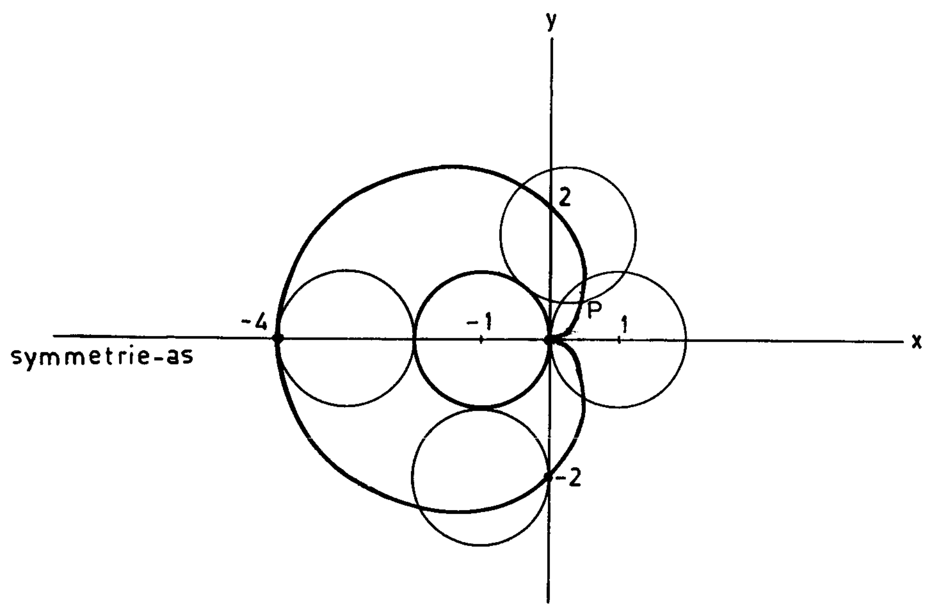
5.1.9. Voorbeelden. De cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ heeft als vergelijking in poolcoördinaten: $r = a$. De halfrechte vanuit de oorsprong die een hoek α maakt met de positieve x-as, heeft als vergelijking in poolcoördinaten: $\varphi = \alpha$. De kromme $r = 1 + \frac{1}{2}\varphi$ voor $\varphi \geq 0$ heeft een spiraalvorm als geschetst in onderstaande figuur.



5.1.10. De kromme met als vergelijking $r = 2(1 - \cos\varphi)$ heet cardioïde.



De kromme ontstaat (zie de figuur hierna) als de baan van het punt P op de rechter cirkel als deze cirkel (met straal 1) zonder slip langs de vaste cirkel met middelpunt (-1,0) en straal 1 rolt. Ga dit na.



In cartesische coördinaten is de vergelijking van de cardioïde:
$(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$ hetgeen veel ingewikkelder is.

5.1.11. Opgave. Leid deze laatste vergelijking af uit de vergelijking in poolcoördinaten.

2. Invoering van de complexe getallen

5.2.1. In de verzameling der reële getallen heeft de vergelijking $x^2 = -1$ geen oplossing. Op zichzelf hoeft dit feit nog geen aanleiding te zijn tot het ontwerpen van een nieuw getalsysteem. Maar al in de 16^e eeuw werd ontdekt, dat men, rekenend met een uitbreiding van het systeem der reële getallen, allerlei resultaten kon afleiden, die zonder deze nieuwe getallen niet of slechts met veel moeite te verkrijgen waren. Het bekendste voorbeeld vormen de formules van Cardano voor de wortels van een derdegraadsvergelijking. In tegenstelling tot de reële (= werkelijke) getallen, noemde men de nieuwe getallen imaginair (= denkbeeldig). Wij zullen om redenen, die straks vanzelfsprekend zullen zijn, de naam complexe getallen gebruiken. Het heeft geruime tijd geduurd voor men een mathematisch bevredigende beschrijving van de invoering van de complexe getallen gegeven heeft. De eerste geslaagde poging daartoe van Argand ($\pm$ 1800) bleef onopgemerkt. Eerst na een publicatie van Gauss uit 1831 werd een goed gefundeerde opbouw van het complexe getallensysteem algemeen bekend.

5.2.2. We gaan uit van $\mathbb{R}^2$ met de daarin al eerder gedefinieerde optelling: $(a,b) + (c,d) = (a + c,\ b + d)$, en scalaire vermenigvuldiging: $\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$. Hiernaast definiëren we de volgende vermenigvuldiging:

$$(a,b) \,.\, (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc) \,.$$

Reken zelf de volgende regels na:

1) $(a,b) \,.\, (c,d) = (c,d) \,.\, (a,b)$

2) $\{(a,b) \,.\, (c,d)\} \,.\, (e,f) = (a,b) \,.\, \{(c,d) \,.\, (e,f)\}$

3) $\{\lambda(a,b)\} \,.\, (c,d) = \lambda\{(a,b) \,.\, (c,d)\}$

4) $(a,b)\{(c,d) + (e,f)\} = (a,b) \,.\, (c,d) + (a,b) \,.\, (e,f)$

5) $(a,b) \,.\, (1,0) = (a,b)$

6) $(a,b)(0,0) = (0,0)$

7) $(0,1)(0,1) = (-1,0)$

8) voor $(a,b) \neq (0,0)$ is $(a,b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = (1,0)$.

5.2.3. Ieder element $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ kunnen we schrijven als $(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$. Terwille van een korte schrijfwijze vervangen we nu $(1,0)$ door 1 en $(0,1)$ door i, terwijl we ook $a.1$ tot a afkorten. Dus:

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a.1 + b.i = a + bi \,.$$

Door deze verkorte notatie kunnen we het reële getal a en het paar $(a,0) \in \mathbb{R}^2$ niet meer onderscheiden. Dit geeft echter geen verwarring, omdat optellen van paren van de vorm $(a,0)$ precies overeenkomt met optellen van reële getallen:

$$(a,0) + (b,0) = (a + b,\ 0)$$
$$a \quad + \quad b \quad = \quad a + b \,.$$

Ook vermenigvuldigen met paren van de vorm $(\lambda,0)$ komt precies overeen met scalaire vermenigvuldiging met λ:

$$(\lambda,0)(a,b) = (\lambda a - 0.b,\ \lambda b + 0.a) = (\lambda a, \lambda b)$$
$$\lambda(a,b) \qquad = \qquad (\lambda a, \lambda b) \,.$$

Door de identificatie van $(a,0)$ met a voor alle $a \in \mathbb{R}$ beschouwen we in feite de x-as in het platte vlak als reële rechte. In $(a,b) = a + bi$ heet a dan ook het <u>reële deel</u>, notatie: $\mathrm{Re}(a + bi)$. We noemen b het <u>imaginaire deel</u>, notatie: Im(a + bi). Een element van de vorm (0,b) = bi heet zuiver imaginair. We noemen in dit verband de x-as en de y-as ook wel reële as en imaginaire as.

5.2.4. Opgave. Formuleer de optelling, de vermenigvuldiging en de rekenregels uit 5.2.2 in de boven gegeven verkorte notatie. Merk op, dat nu 5.2.2. 3) een bijzonder geval van 5.2.2 2) is geworden.

5.2.5. Definitie. De verzameling van de elementen $(a,b) = a + bi \in \mathbb{R}^2$, met de optelling:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

en de vermenigvuldiging:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

heet de verzameling der complexe getallen (ook wel het complexe vlak), notatie: $\mathbb{C}$. Ieder der elementen $a + bi \in \mathbb{C}$ heet een complex getal.

Een complex getal wordt vaak door één enkele letter aangegeven, meestal door z of w. Dus: $z = a + bi$ (met $a,b \in \mathbb{R}$); Re $z = a$, Im $z = b$.

De rekenregels uit 5.2.2 laten zien, dat we met complexe getallen mogen rekenen alsof het reële getallen zijn, met als aanvulling de regel $i^2 = -1$. Op de rekentechniek gaan we zo nog verder in. Een uitzondering op de analogie met de reële getallen is het gebruik van ordeningseigenschappen. De complexe getallen bezitten nl. geen ordening naar grootte; we kunnen dus niet zeggen dat $2 + i > 1 + 3i$ of iets dergelijks. Tussen complexe getallen in het algemeen worden de tekens < en > dus niet gebruikt. Wanneer we verderop zonder nadere aanduiding bijvoorbeeld $z > 0$ schrijven, is stilzwijgend steeds bedoeld: $z \in \mathbb{R}$ én $z > 0$.

In $\mathbb{C}$ kan ook een deling worden gedefinieerd. Eerst laten we zien dat bij elk getal $z_1 = a + ib$ met $z_1 \neq 0$ er precies één getal $z_2 = x + iy$ bestaat met de eigenschap $z_1z_2 = 1$. De vergelijking $z_1z_2 = 1$ luidt $(a + ib)(x + iy) = 1$, dus

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \; . \end{cases}$$

Als $z_1 \neq 0$, dan heeft dit stelsel een éénduidige oplossing (vergelijk 5.2.2.8))

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}\ , \ y = \frac{-b}{a^2 + b^2}\ .$$

5.2.6. Definities.

1) Als $z = a + ib \neq 0$ $(a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R})$, dan wordt $\frac{1}{z}$ gedefinieerd door:

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}\ .$$

2) Als $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$, dan is $\frac{z_2}{z_1}$ het complexe getal gedefinieerd door:

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2 \cdot \frac{1}{z_1}\ .$$

Het is gemakkelijk in te zien dat z_2/z_1 de éénduidige oplossing is van de vergelijking $z_1 z = z_2$ in z. Ook kan men verifiëren dat voor reële getallen de deling overeenkomt met de reeds in $\mathbb{R}$ bekende deling.

5.2.7. Een vector in $\mathbb{R}^2$ kan men behalve door cartesische coördinaten ook beschrijven met behulp van poolcoördinaten (zie 5.1.7): $\underline{x} = (a,b) = (r \cos \varphi,\ r \sin \varphi)$, waarin $r = |\underline{x}|$ de lengte van $\underline{x}$ voorstelt en φ de hoek die de vector $\underline{x}$ met de positieve x-as maakt. In de notatie van de complexe getallen schrijft men

$$z = r \cos \varphi + i(r \sin \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\ .$$

Men noemt r de modulus of de absolute waarde van z (notatie $r = |z|$), en φ een argument van z (notatie $\varphi = \arg z$). Merk op, dat φ bepaald is tot op veelvouden van 2π na. Vaak wordt φ zo gekozen dat $-\pi < \varphi \leq \pi$; we spreken dan van de hoofdwaarde van het argument. Als $z = a + ib$, dan is dus $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ en $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ (tenzij $a = 0$; dan is $\varphi = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$ of $\varphi = \frac{3\pi}{2} + k.2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

De volgende stelling is eenvoudig te bewijzen.

5.2.8. Stelling. Als $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, dan is

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\}\ .$$

Als verder $r_2 \neq 0$, dan is

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\}\ .$$

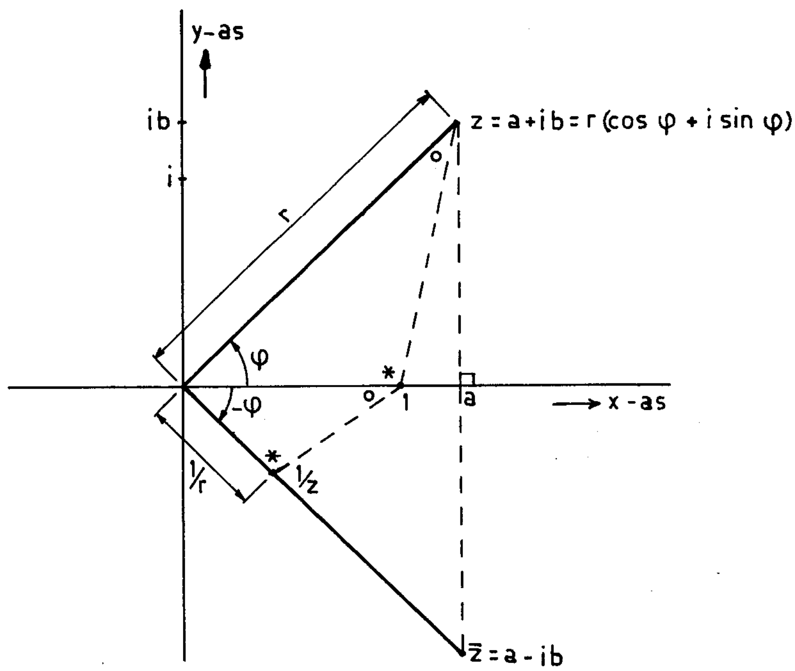
5.2.9. <u>Gevolg</u>. $|z_1z_2| = |z_1|.|z_2|$, $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$;

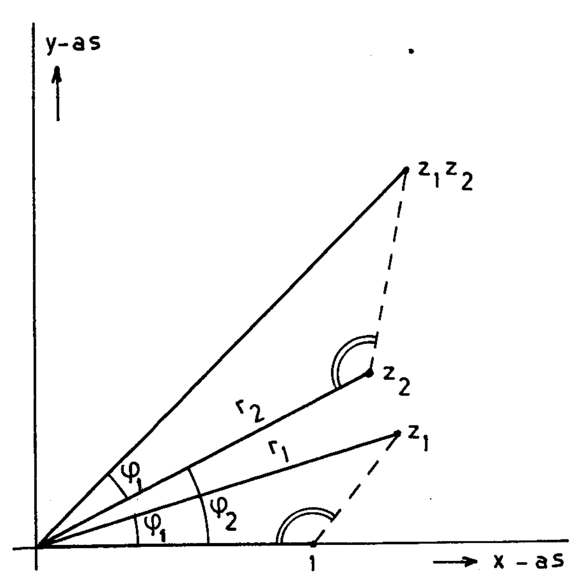
$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$, $\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$.

Merk op, dat de formules voor de argumenten gelden behoudens veelvouden van 2π. Geef bovendien een voorbeeld, dat laat zien dat ook bij het gebruik van slechts hoofdwaarden voor de argumenten verschillen van 2π kunnen optreden tussen linkerlid en rechterlid van de formules.

5.2.10. <u>Definitie</u>. Als $z = a + ib$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$), dan heet $\bar{z} = a - ib$ de <u>complex geconjugeerde</u> van z.

In de navolgende figuren wordt de meetkundige betekenis van de verschillende begrippen geïllustreerd.





De volgende eigenschappen zijn gemakkelijk te bewijzen.

5.2.11. Stelling. Voor $z \in \mathbb{C}$, $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ geldt:

1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$,

2) als $z_1 z_2 = 0$, dan is $z_1 = 0$ of $z_2 = 0$,

3) $|\bar{z}| = |z|$, $\arg \bar{z} = -\arg z$,

4) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,

5) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$, $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$ mits $z_2 \neq 0$,

6) $\bar{\bar{z}} = z$,

7) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$,

8) als $z = \bar{z}$ dan is z reëel, en omgekeerd ,

9) $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$.

5.2.12. Voorbeelden.

1) $(4 + 3i) + (5 - 4i) = 9 - i$,

2) $(4 + 3i) - (5 - 4i) = -1 + 7i$,

3) $(4 + 3i)(5 - 4i) = 32 - i$,

4) $\dfrac{4 + 3i}{5 - 4i} = \dfrac{8}{41} + \dfrac{31}{41} i$,

5) $(4 + 3i)\overline{(5 - 4i)} = 8 + 31i$,

6) $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^{4k} = 1$ $(k \in \mathbb{Z})$ (N.B. $i^0 = 1$) ,

7) $\operatorname{Re}(3 + 2i) = 3$, $\operatorname{Im}(3 + 2i) = 2$ (niet $2i$), $\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$,
$|3 + 2i| = \sqrt{13}$, $\arg(3 + 2i) = \arctan \frac{2}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$,

8) $1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$,

9) $[\sqrt{r}(\cos \frac{1}{2}\varphi + i \sin \frac{1}{2}\varphi)]^2 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Door middel van volledige inductie volgt uit 5.2.8 dat

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N} .$$

Hieruit volgt:

5.2.13. Stelling (De Moivre). Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi .$$

5.2.14. Het is gemakkelijk in te zien dat het binomium van Newton:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

ook geldt voor complexe getallen. Het bewijs gegeven in 0.8.17 en 0.8.20 kan nl. letterlijk worden overgenomen.

Combinatie van de binomiaalformule en de formule van De Moivre geeft een gemakkelijke methode om $\cos n\varphi$ en $\sin n\varphi$ uit te drukken in machten van $\cos \varphi$ en $\sin \varphi$.

5.2.15. Voorbeeld.

$$\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 =$$

$$= \cos^3\varphi + 3i \cos^2\varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2\varphi - i \sin^3\varphi .$$

Splitsing in het reële en imaginaire deel geeft:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3 \cos \varphi \sin^2\varphi = 4 \cos^3\varphi - 3 \cos \varphi ,$$

$$\sin 3\varphi = 3 \cos^2\varphi \sin \varphi - \sin^3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3\varphi .$$

3. Complexe polynomen

5.3.1. Definitie. Een complex polynoom is een functie $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die we als volgt kunnen schrijven:

$$p(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \ldots + p_1 z + p_0 ,$$

waarin $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ en waarin $p_0, p_1, \ldots, p_n$ complexe getallen zijn. Deze getallen worden de coëfficiënten van p genoemd. Is $p_n \neq 0$, dan heet het gehele getal $n \geq 0$ de graad van p, notatie: gr(p). Het polynoom p met $p(z) = 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ heet het nulpolynoom. Aan het nulpolynoom zullen we geen graad toekennen.

Een aantal definities en eigenschappen uit hoofdstuk 0, paragraaf 9, kunnen zonder meer worden overgedragen op complexe polynomen. Wij vermelden hier:

1) Bij twee complexe polynomen p en d, d niet het nulpolynoom, bestaan er complexe polynomen q en r met $p(z) = q(z)d(z) + r(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ (vergelijk 0.9.4). De polynomen q en r kunnen berekend worden door een staartdeling uit te voeren, analoog als in 0.9.3. Voer dit zelf uit met $p(z) = 2iz^4 + (3-i)z^3 + (-2+i)z^2 + 4z + 1$ en $q(z) = iz^2 + z - 2$.
2) Wanneer de polynomen p en d uit 1) reële coëfficiënten hebben, dan worden q en r ook polynomen met reële coëfficiënten. Verifieer dit aan de hand van het staartdelingsproces.
3) Een element $z_0 \in \mathbb{C}$ heet een nulpunt van een polynoom p, wanneer $p(z_0) = 0$.
4) Door toepassen van 1) met $d(z) = z - z_0$ vinden we, analoog aan 0.9.6: Is p een complex polynoom, niet het nulpolynoom, en is $z_0 \in \mathbb{C}$ een nulpunt van p, dan bestaat een complex polynoom q met $p(z) = (z - z_0)q(z)$.
5) Zij $k \in \mathbb{N}$. Een complex getal z_0 heet een k-voudig nulpunt (of: nulpunt met multipliciteit k) van een complex polynoom p, indien er een complex polynoom q bestaat met $p(z) = (z - z_0)^k q(z)$ en $q(z_0) \neq 0$.

Een belangrijk motief om complexe getallen te gebruiken is gelegen in de volgende stelling, waarvan het reële analogon niet geldt.

5.3.2. Stelling (hoofdstelling van de algebra). Zij p een complex polynoom met $gr(p) = n$, $n \geq 1$, en met coëfficiënt van z^n gelijk aan p_n. Dan is p te ontbinden in precies n lineaire factoren:

$$p(z) = p_n(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) .$$

Deze stelling zullen we niet bewijzen.

De getallen $z_1, z_2, \ldots, z_n$, optredend in de ontbinding van p, zijn juist de nulpunten van p. Deze nulpunten behoeven niet alle verschillend te zijn. Indien we k-voudige nulpunten k keer tellen, dan heeft een complex polynoom van de graad n dus precies n nulpunten.

5.3.3. Zij p het polynoom met $p(z) = az^2 + bz + c$, waarin $a,b,c \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$ en $D = b^2 - 4ac < 0$. Dan is p, beschouwd als reëel polynoom, niet te ontbinden. Als complex polynoom moet dit volgens de hoofdstelling van de algebra wel mogelijk zijn. De complexe ontbinding kunnen we als volgt vinden (we splitsen een kwadraat af):

$$p(z) = a(z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a}) = a\{(z + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\} =$$

$$= a\{(z + \frac{b}{2a})^2 - (i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a})^2\} =$$

$$= a\{z + \frac{b}{2a} - i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\}\{z + \frac{b}{2a} + i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\} .$$

De nulpunten van p zijn dus

$$\frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} .$$

Merk op, dat deze nulpunten toegevoegd complex zijn.

5.3.4. Stelling. Zij p een polynoom met reële coëfficiënten. Als $z_0 \in \mathbb{C}$ nulpunt is van p, dan is $\bar{z}_0$ ook nulpunt van p.

Bewijs. Stel $p(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \ldots + p_1 z + p_0$, zodat $p_0, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$. Nu is voor $z \in \mathbb{C}$

$$p(\bar{z}) = p_n \bar{z}^n + p_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \ldots + p_1 \bar{z} + p_0 =$$

$$= \bar{p}_n \bar{z}^n + \bar{p}_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \ldots + \bar{p}_1 \bar{z} + \bar{p}_0 =$$

$$= \overline{p_n z^n} + \overline{p_{n-1} z^{n-1}} + \ldots + \overline{p_1 z} + \overline{p_0} =$$

$$= \overline{p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \ldots + p_1 z + p_0} = \overline{p(z)} .$$

Daar $p(z_0) = 0$ is dus $p(\bar{z}_0) = \overline{p(z_0)} = \bar{0} = 0$. □

Gevolg. De verzameling nulpunten van een polynoom met reële coëfficiënten bestaat uit reële getallen en/of paarsgewijs toegevoegd complexe getallen. De verzameling nulpunten van een polynoom met reële coëfficiënten ligt dus symmetrisch ten opzichte van de reële as.

5.3.5. Laat z_0 een niet-reëel, complex getal zijn. We tonen aan, dat $(z-z_0)(z-\bar{z}_0)$ reële coëfficiënten heeft. Immers, zij $z_0 = a + bi$ met $a,b \in \mathbb{R}$; dan is

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 - 2az + (a^2 + b^2) .$$

Merk op, dat van deze kwadratische vorm de discriminant $D = 4a^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2$ negatief is; deze kwadratische vorm is dus irreducibel.

Gevolg. Zij p een polynoom met reële coëfficiënten. Wanneer z_0 een niet-reëel nulpunt van p is, dan bevat p de factoren $z - z_0$ en $z - \bar{z}_0$, dus dan is p deelbaar door de irreducibele kwadratische vorm $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ die reële coëfficiënten heeft.
Met 5.3.1, onderdeel 2) volgt daarna:

Zij p een polynoom met reële coëfficiënten en zij z_0 een niet-reëel nulpunt van p. Dan is $\frac{p(z)}{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)}$ een polynoom met reële coëfficiënten.

5.3.6. Stelling. Ieder polynoom van graad minstens 1 met reële coëfficiënten kan ontbonden worden in eerstegraads en irreducibele tweedegraads factoren met reële coëfficiënten.

Bewijs. Voor polynomen van graad 1 en graad 2 is de uitspraak duidelijk (in het laatste geval bestaat het polynoom uit twee lineaire factoren met reële coëfficiënten als zijn discriminant $D \geq 0$; het is zelf irreducibel als $D < 0$). Zij nu $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 3$. Laat de uitspraak juist zijn voor alle polynomen van graad kleiner dan n; we geven dan een bewijs voor de graad gelijk aan n. Zij p een polynoom met reële coëfficiënten van graad n. Laat z_0 een nulpunt van p zijn. Als $z_0 \in \mathbb{R}$, dan bevat p de factor $z - z_0$ en dan is $q_1(z) = \frac{p(z)}{z - z_0}$ een polynoom van graad $n - 1$ met reële coëfficiënten. Volgens de inductieonderstelling kan q_1 op de gewenste manier ontbonden worden; dan geldt dit ook voor p daar $p(z) = (z - z_0)q_1(z)$. Als $z_0 \notin \mathbb{R}$, dan bevat p volgens 5.3.5 de irreducibele kwadratische vorm $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$ die reële coëfficiënten heeft, terwijl $q_2(z) = \frac{p(z)}{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)}$ ook reële coëfficiënten heeft. De graad van q_2 is $n - 2$. Toepassing van de inductieonderstelling op q_2 geeft nu eveneens het gewenste resultaat. $\square$

5.3.7. Stelling. Zij p een polynoom met reële coëfficiënten. Als $z_0 \in \mathbb{C}$ een nulpunt van p is met multipliciteit k, dan is $\bar{z}_0$ een nulpunt van p eveneens van multipliciteit k.

Bewijs. Als $z_0 \in \mathbb{R}$, dan is $\bar{z}_0 = z_0$ zodat de uitspraak triviaal is. Als $z_0 \notin \mathbb{R}$ dan bevat p juist k factoren $z - z_0$, dus volgens 5.3.6 evenveel kwadratische factoren $(z - z_0)(z - \bar{z}_0)$, dus ook juist k factoren $z - \bar{z}_0$. □

5.3.8. Gevolg. De nulpunten van een polynoom met reële coëfficiënten vallen uiteen in reële nulpunten en paren toegevoegd complexe nulpunten. Hierbij tellen we ieder nulpunt zo vaak als zijn multipliciteit bedraagt.

Opmerking. Uit 5.3.8 volgt, dat een polynoom met reële coëfficiënten en oneven graad tenminste één reëel nulpunt heeft. Leid dit resultaat ook af met behulp van de tussenwaardestelling (2.4.10).

5.3.9. We behandelen nu een oplossingsmethode voor de zg. binomische vergelijking, dit is de vergelijking $z^n = a$, waarbij $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$ en $a \neq 0$ (voor $a = 0$ is $z = 0$ het enige, n-voudige, nulpunt).
Ter oplossing van deze vergelijking schrijven we

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad a = r_0(\cos \alpha + i \sin \alpha) ,$$

waarna de vergelijking $z^n = a$ overgaat in:

$$r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r_0(\cos \alpha + i \sin \alpha) .$$

Bedenk nu dat twee complexe getallen ($\neq 0$) dan en slechts dan gelijk zijn als ze dezelfde modulus en hetzelfde argument (afgezien van een veelvoud van 2π) hebben. We vinden dus

$$r^n = r_0, \quad r = \sqrt[n]{r_0} ;$$

$$n\varphi = \alpha + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad (k \in \mathbb{Z}) .$$

De vergelijking $z^n = a$ heeft dan de wortels

$$z_k = \sqrt[n]{r_0}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], \qquad k \in \mathbb{Z} .$$

Merk op dat $z_k = z_{k+n}$. We kunnen daarom volstaan met achtereenvolgens $k = 0,1,\ldots,n-1$ te stellen; aldus vinden we n verschillende wortels van de vergelijking $z^n = a$.

5.3.10. Voorbeelden.

1) Los op de vergelijking $z^3 = -i$. Bepaal $|-i| = 1$, $\arg(-i) = -\frac{1}{2}\pi$, en stel $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, dan is de vergelijking te herleiden tot

$$r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 1(\cos(-\tfrac{1}{2}\pi) + i\sin(-\tfrac{1}{2}\pi))$$

met oplossing $r = 1$, $\varphi = -\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Substitueer achtereenvolgens $k = 0,1,2$, dan vinden we de wortels

$$k = 0:\ z_1 = \cos(-\tfrac{1}{6}\pi) + i\sin(-\tfrac{1}{6}\pi) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i\ ,$$

$$k = 1:\ z_2 = \cos\tfrac{1}{2}\pi + i\sin\tfrac{1}{2}\pi = i\ ,$$

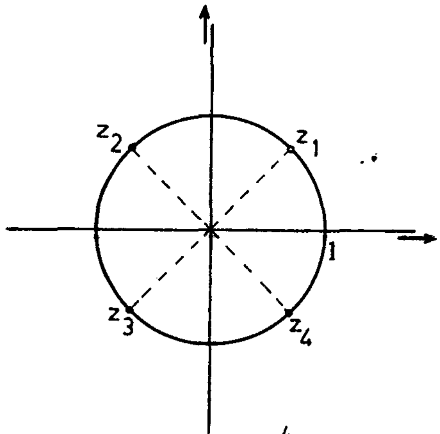
$$k = 2:\ z_3 = \cos\tfrac{7}{6}\pi + i\sin\tfrac{7}{6}\pi = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i\ .$$

Substitutie van $k = 3$ levert opnieuw de wortel z_1.

2) Los op de vergelijking $z^4 = -1$.
Bepaal $|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi$. Schrijf $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, dan vinden we als oplossing $r = 1$, $\varphi = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Substitutie van $k = 0,1,2,3$ levert de wortels $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i)$, $z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1 + i)$, $z_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1 - i)$, $z_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - i)$; deze wortels zijn weergegeven in de navolgende figuur.
Merk op dat $\bar{z}_1 = z_4$, $\bar{z}_2 = z_3$, in overeenstemming met 5.3.4. Overeenkomstig 5.3.6 is het polynoom $z^4 + 1$ te ontbinden in twee kwadratische factoren met reële coëfficiënten:

$$z^4 + 1 = (z^2 - 2z\,\mathrm{Re}\,z_1 + |z_1|^2)(z^2 - 2z\,\mathrm{Re}\,z_2 + |z_2|^2) =$$

$$= (z^2 - \sqrt{2}\,z + 1)(z^2 + \sqrt{2}\,z + 1)\ .$$



de wortels van $z^4 = -1$

Merk op, dat z_1, z_2, z_3 en z_4 op de cirkel $|z| = 1$ liggen, en ook dat $\arg z_{i+1} = \arg z_i + \frac{1}{2}\pi$ ($i = 1,2,3$; dit afgezien van veelvouden van 2π) zodat z_2, z_3 en z_4 uit z_1 verkregen kunnen worden door draaien om de oorsprong over resp. $\frac{1}{2}\pi, \pi$ en $\frac{3}{2}\pi$. De punten z_1, z_2, z_3 en z_4 zijn dus de hoekpunten van een regelmatige vierhoek.

5.3.11. De vergelijking

$$(az + b)^n = c ,$$

waarbij $a,b,c \in \mathbb{C}$ en $a \neq 0$, is eenvoudig te herleiden tot een binomische vergelijking. Stel nl. $w = az + b$, dan ontstaat er de vergelijking $w^n = c$ die op de hierboven beschreven wijze is op te lossen. In het bijzonder kan men aldus elke vierkantsvergelijking oplossen d.m.v. kwadraatafsplitsing.

5.3.12. <u>Voorbeeld</u>. De vergelijking $z^2 + z + 1 = 0$ kan worden geschreven als $(z + \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$. De wortels zijn $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ en $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

5.3.13. Meetkundige figuren in het complexe vlak zijn vaak eenvoudig te beschrijven door middel van complexe getallen. We lichten dit toe aan de hand van een aantal voorbeelden.

5.3.14. <u>Voorbeelden</u>. In de navolgende lijst is links aangegeven een verzameling van complexe getallen die aan een bepaalde voorwaarde voldoen, en rechts de bijbehorende meetkundige figuur in het complexe vlak:

1) $\operatorname{Re} z = 2$	rechte door 2 evenwijdig aan de imaginaire as;
2) $\operatorname{Im} z = -3$	rechte door $-3i$ evenwijdig aan de reële as;
3) $\|z + 2i\| = 1$	cirkel met middelpunt $-2i$ en straal 1;
4) $\arg(z - i) = \frac{\pi}{4}$	halfrechte door i onder een hoek $\pi/4$ met de positieve reële as;
5) $\operatorname{Re} z > 2$	halfvlak rechts van de lijn $\operatorname{Re} z = 2$;
6) $\|z + 2i\| > 1$	gebied buiten de cirkel $\|z + 2i\| = 1$;
7) $\|z + 3\| = \|z - i\|$	middelloodlijn van het lijnstuk dat -3 en i verbindt;
8) $\|z + 5\| + \|z + 3i\| = 8$	ellips met brandpunten -5 en $-3i$ en lange as 8.

4. Analyse in het complexe vlak

5.4.1. We hebben $\mathbb{C}$ gedefinieerd als $\mathbb{R}^2$ met als bewerkingen optelling en vermenigvuldiging. De eigenschappen van $\mathbb{R}^2$ zoals behandeld in 5.1.1 t/m 5.1.6 kunnen dus zonder meer op $\mathbb{C}$ toegepast worden. We kunnen dus in $\mathbb{C}$ spreken van de afstand tussen twee punten, van de open cirkelschijf $B_\varepsilon(z)$, van rijen en convergentie daarvan. Stelling 5.1.6 kan als volgt geformuleerd worden: voor een rij (z_n) in $\mathbb{C}$ geldt $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ dan en slechts dan als $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, z_n = \mathrm{Re}\, z$ én $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, z_n = \mathrm{Im}\, z$.

Door deze eigenschap kunnen stellingen over complexe rijen bewezen worden door terug te vallen op overeenkomstige stellingen over reële rijen.

5.4.2. Opgaven.

1) Toon aan, dat 1.2.9, 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3, 1.4.5 en 1.4.6 ook voor rijen complexe getallen gelden.
2) Ga na of de volgende rijen convergeren, en geef de limiet in geval van convergentie:

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\, i\right)_{n=1}^{\infty}; \quad \left((-1)^n + \frac{1}{n}\, i\right)_{n=1}^{\infty}; \quad \left(\sqrt[n]{2} + ni\right)_{n=1}^{\infty} .$$

3) Bewijs dat het analogon van 1.2.12, verkregen door (a_n) te vervangen door een complexe rij (z_n), ook geldt.
4) Bewijs dat voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < 1$ geldt: $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$.
5) Kan 1.3.5 zonder meer voor complexe rijen en voor $p \in \mathbb{C}$ uitgesproken worden?

5.4.3. Een complexe functie van één reële variabele is een afbeelding $f: A \to \mathbb{C}$, waarbij $A \subset \mathbb{R}$. A heet de definitieverzameling van f; notatie DOM f. Onder de afbeelding f wordt aan elke $t \in \mathrm{DOM}\, f$ een getal $f(t) \in \mathbb{C}$ toegevoegd. De functie $f(t)$ is dan te schrijven als $f(t) = u(t) + iv(t)$, waarbij de reële functies $u(t)$, $v(t)$ het reële resp. imaginaire deel van $f(t)$ zijn. De functiewaarde $f(t)$ is voor te stellen door een punt in het complexe vlak. De puntverzameling $\{f(t) \mid t \in \mathrm{DOM}\, f\}$ is een kromme in het complexe vlak. De functie f heet een parametervoorstelling van deze kromme, met parameter t. Vaak wordt een functiewaarde $f(t)$ met een aparte letter z aangegeven; men schrijft dan $z = f(t)$.

5.4.4. Voorbeelden.

1) De eenheidscirkel in het complexe vlak wordt beschreven door de parametervoorstelling $f(t) = \cos t + i \sin t$, $0 \le t < 2\pi$.
2) De parametervoorstelling van een rechte luidt $z = a + bt$, $t \in \mathbb{R}$, waarbij a en b complexe constanten zijn.
3) De functie $f(t) = a \cos t + ib \sin t$, $0 \le t < 2\pi$, met $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, is parametervoorstelling van een ellips.

De schrijfwijze $f(t) = u(t) + iv(t)$ gebruiken we nu om de afgeleide en de integraal van een complexe functie f te definiëren.

5.4.5. Definitie. Zij $f(t) = u(t) + iv(t)$. Dan is de afgeleide (notatie: f', $\frac{df}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, Df) van f de complexe functie f' met $f'(t) = u'(t) + iv'(t)$ en de integraal over $[a,b]$ van f is het complexe getal

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt ,$$

aangenomen dat de afgeleiden resp. integralen van u en v bestaan.

5.4.6. Door de definitie van afgeleide en integraal kunnen, net als bij complexe rijen, eigenschappen bewezen worden door terug te vallen op overeenkomstige eigenschappen in het reële geval. Ga na, dat bijvoorbeeld 3.1.10 1) t/m 4), 3.1.11 met $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ en $C \subset \mathbb{C}$, 3.4.6 1), 2) en 4), 3.4.12, 3.4.13, 3.4.16 en 3.4.20 blijven gelden voor complexe functies. We mogen complexe functies dus "gewoon" differentiëren en integreren.

5.4.7. Een complexe reeks is een reeks met complexe getallen als termen. Bij een complexe reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \in \mathbb{C}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$) behoren de partiële sommen $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$; de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heet convergent met som $S \in \mathbb{C}$ als de rij (S_N) naar S convergeert.
Alle gebruikelijke eigenschappen blijven gelden. We noemen een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absoluut convergent als $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergent is. (N.B. Hier betekent $|a_n|$ de modulus van het complexe getal a_n.)

5.4.8. <u>Stelling</u>. Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absoluut convergent is, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent.

<u>Bewijs</u>. Er geldt $|\mathrm{Re}\ a_n| \le |a_n|$ en $|\mathrm{Im}\ a_n| \le |a_n|$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Uit 4.4.14 en 4.4.16 volgt dan dat $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\ a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\ a_n$ convergent zijn. Derhalve is ook

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{Re}\ a_n + i\ \mathrm{Im}\ a_n)$$

convergent. □

Een reeks van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ met $a_n \in \mathbb{C}$ voor $n = 0,1,2,\ldots$ en $z \in \mathbb{C}$ heet een <u>complexe machtreeks</u>. Zonder bewijs geven we het analogon van 4.5.2:

5.4.9. <u>Stelling</u>. Voor een complexe machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is steeds één van de volgende uitspraken van toepassing:

1) De machtreeks is convergent alleen voor $z = 0$ en divergent voor alle $z \neq 0$.
2) De machtreeks is absoluut convergent voor alle z.
3) Er bestaat een (reëel) getal $R > 0$ zó dat de machtreeks absoluut convergent is voor $|z| < R$ en divergent voor $|z| > R$.

Het getal R heet weer de <u>convergentiestraal</u> van de machtreeks. In de gevallen 1) en 2) stellen we $R = 0$ resp. $R = \infty$.
Ook hier is geen algemene uitspraak te doen over de convergentie of divergentie van een machtreeks op de zg. <u>convergentiecirkel</u> $|z| = R$; deze dient bij elk voorbeeld apart onderzocht te worden.

5.4.10. De waarde van R kan vaak worden bepaald door middel van de complexe analoga van de kenmerken van d'Alembert of Cauchy, zie 4.4.18 en 4.4.20.
Uit het voorgaande volgt in het bijzonder: Als de (reële) machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een convergentiestraal R heeft, dan heeft ook de complexe machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ een convergentiestraal R. Dit geeft ons de mogelijkheid om een functie f, die som is van een reële machtreeks met convergentiestraal R, ook te definiëren voor $|z| < R$ in het complexe vlak. Zo kunnen we bijv. voor willekeurige complexe z definiëren e^z, $\sin z$, $\cos z$, en voor $|z| < 1$ de functies $\ln(1 + z)$, $\arctan z$. We zullen ons in dit hoofdstuk beperken tot de bestudering van één van deze functies, nl. e^z, en tot enkele eigenschappen van $\sin z$ en $\cos z$.

5.4.11. Definitie. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ voor $z \in \mathbb{C}$.

Uit 5.4.10 volgt dat e^z is gedefinieerd voor alle $z \in \mathbb{C}$. De volgende eigenschap is fundamenteel.

5.4.12. Stelling. $e^z e^w = e^{z+w}$ voor alle $z,w \in \mathbb{C}$.

We bewijzen deze stelling niet. Een bewijs kan via een variant van het complexe analogon van 4.6.16 gegeven worden, als volgt:

$$e^z e^w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w} ,$$

waarbij gebruik gemaakt is van het binomium van Newton 0.8.20.

We bepalen het reële en imaginaire deel van e^z. Eerst beschouwen we het geval dat z zuiver imaginair is.

5.4.13. Stelling (formule van Euler). Als $y \in \mathbb{R}$, dan is

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y .$$

Bewijs. Volgens 5.4.11 is $e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n y^n}{n!}$. Daar $i^{2n} = (-1)^n$ en $i^{2n+1} = (-1)^n i$, vinden we

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos y + i \sin y . \square$$

5.4.14. Gevolg. Voor willekeurige $z = x + iy$ met $x,y \in \mathbb{R}$, kunnen we schrijven:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) .$$

Hieruit kunnen we een aantal eigenschappen afleiden.

5.4.15. Stelling.

1) Als $y \in \mathbb{R}$, dan is $|e^{iy}| = 1$.
2) Als $z = x + iy$ met $x,y \in \mathbb{R}$, dan is

$$|e^z| = e^x, \ \arg e^z = y .$$

(Dit argument is in het algemeen niet de hoofdwaarde.)

3) $e^z \neq 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.

4) Als $y \in \mathbb{R}$, dan is

$$\cos y = \text{Re } e^{iy} = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}) ,$$

$$\sin y = \text{Im } e^{iy} = \frac{1}{2i} (e^{iy} - e^{-iy}) .$$

5) Een complex getal $z \neq 0$ is te schrijven als $z = re^{i\varphi}$, waarbij $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

6) $e^{z+2\pi i} = e^z$ voor alle $z \in \mathbb{C}$; e^z heet daarom periodiek met periode $2\pi i$.

7) als $e^{z_1} = e^{z_2}$, dan is er een $k \in \mathbb{Z}$ met $z_2 = z_1 + k.2\pi i$.

5.4.16. Als we in de productregel 5.4.12 stellen $z = iu$, $w = iv$, $u,v \in \mathbb{R}$, dan vinden we

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v ,$$
$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v ,$$

i.e. de bekende somformules voor goniometrische functies.
De formule van De Moivre 5.2.13 volgt direct uit de formule van Euler (5.4.13), immers

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi .$$

We kunnen de relaties tussen de functie e^z en de goniometrische functies benutten om $(\cos x)^n$ en $(\sin x)^n$ te schrijven als een som van termen van de gedaante $\cos kx$, $\sin kx$.

5.4.17. <u>Voorbeeld.</u>

$$\cos^5 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^5 =$$
$$= \frac{1}{32}(e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}) =$$
$$= \frac{1}{16}[\tfrac{1}{2}(e^{5ix} + e^{-5ix}) + 5.\tfrac{1}{2}(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 10.\tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})] =$$
$$= \frac{1}{16}(\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x) .$$

Hieruit volgt

$$\int \cos^5 x \, dx = \frac{1}{16}(\frac{1}{5} \sin 5x + \frac{5}{3} \sin 3x + 10 \sin x) + C ;$$

vergelijk dit met 3.5.14, voorbeeld 2.

5.4.18. De functie e^z is ook nog op andere wijze te gebruiken om integralen te berekenen. We merken op dat voor $b \in \mathbb{R}$ en voor een reële variabele t geldt

$$\frac{d}{dt}(e^{ibt}) = \frac{d}{dt}(\cos bt + i \sin bt) = -b \sin bt + ib \cos bt =$$

$$= ib(\cos bt + i \sin bt) = ibe^{ibt} .$$

Samen met de bekende eigenschap $\frac{d}{dt} e^{at} = ae^{at}$ voor $a \in \mathbb{R}$, volgt hieruit:

$$\frac{d}{dt}(e^{(a+ib)t}) = \frac{d}{dt}(e^{at}e^{ibt}) = ae^{at}e^{ibt} + ibe^{at}e^{ibt} =$$

$$= (a + ib)e^{(a+ib)t} .$$

We zien dus dat $\frac{d}{dt} e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t}$, geldig voor elke $\alpha \in \mathbb{C}$. Derhalve is ook

$$\int_a^b e^{\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}\Big|_a^b \quad \text{mits } \alpha \neq 0 .$$

5.4.19. <u>Voorbeeld.</u> Voor $a,b \in \mathbb{R}$ met $(a,b) \neq (0,0)$ is

$$\int e^{-at}\cos bt\, dt = \operatorname{Re} \int e^{(-a+ib)t}dt = \operatorname{Re}\{\frac{1}{-a+ib} e^{(-a+ib)t} + C\} =$$

$$= \operatorname{Re}\{\frac{-a-ib}{a^2+b^2} e^{-at}(\cos bt + i \sin bt) + C\} =$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2} (-ae^{-at}\cos bt + be^{-at}\sin bt) + C_1 .$$

5.4.20. Gebruikmakend van de bekende reeksontwikkelingen definiëren we sin z en cos z voor $z \in \mathbb{C}$ als volgt:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} .$$

De volgende eigenschappen zijn eenvoudig te verifiëren:

1) $\sin(-z) = -\sin z$

2) $\cos(-z) = \cos z$

3) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

4) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

5) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

We onderzoeken nu de ligging van de nulpunten van sin z voor $z \in \mathbb{C}$. Als $\sin z = 0$, dan is $e^{iz} = e^{-iz}$ zodat $iz = -iz + k.2\pi i$ voor $k \in \mathbb{Z}$, ofwel $2iz = k.2\pi i$ zodat moet gelden $z = k.\pi$. De nulpunten van de complexe functie sin z zijn dus slechts de nulpunten die we uit het reële geval al kennen. Op dezelfde wijze ziet men dat de nulpunten van cos z slechts de al bekende punten $z = \frac{\pi}{2} + k.\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$ zijn.

5.4.21. Opgave. Toon aan dat voor $x \in \mathbb{R}$ geldt $\sin ix = i \sinh x$ en $\cos ix = \cosh x$. Concludeer dat de functies sin z en cos z voor $z \in \mathbb{C}$ niet begrensd zijn.

5.4.22. Een complexe functie van één complexe variabele is een afbeelding $f: A \to B$, waarbij $A \subset \mathbb{C}$, $B \subset \mathbb{C}$. Beschouw de complexe functie $w = f(z)$, dan zijn z en w meetkundig voor te stellen door punten in het complexe z-vlak resp. w-vlak. Als hulpmiddel voor het onderzoek van f(z) kan men nu van bepaalde puntverzamelingen in het z-vlak (bijv. rechten evenwijdig aan de reële of imaginaire as, cirkels) het beeld in het w-vlak bepalen.

5.4.23. Voorbeeld. Bepaal het beeld van de volgende verzamelingen onder de afbeelding $w = e^z$:

1) rechte $\mathrm{Re}\, z = a$,
2) rechte $\mathrm{Im}\, z = b$,
3) halfrechte $\arg z = \alpha$,
4) halfvlak $\mathrm{Re}\, z < 0$,
5) verzameling $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z < 0, |\mathrm{Im}\, z| < \pi\}$.

Met gebruikmaking van de relaties $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$, $\arg e^z = \mathrm{Im}\, z$, vinden we als beeld in het w-vlak, achtereenvolgens:

1) Cirkel $|w| = e^a$, d.i. cirkel met middelpunt 0 en straal e^a.
2) Halfrechte $\arg w = b$.
3) Zij $e^{i\alpha} = a + ib$, dan heeft de halfrechte $\arg z = \alpha$ als parametervoorstelling: $z = (a + ib)t$, $t > 0$. Daaruit volgt: $r = |w| = |e^z| = e^{at}$ en $\varphi = \arg w = \arg e^z = bt$. Door eliminatie van t vinden we $r = e^{a\varphi/b}$, d.i. de vergelijking van een spiraal mits $b \neq 0$. (Wat is het beeld als $b = 0$?)
4) Cirkelschijf $|w| < 1$, met uitzondering van 0.
5) Verzameling $\{w \mid |w| < 1, |\arg w| < \pi\}$, d.i. de cirkelschijf $|w| < 1$ met uitzondering van het lijnstuk van -1 naar 0.

5.4.24. Voorbeeld. Bepaal het beeld van de eenheidscirkel $|z| = 1$ onder de afbeelding $w = 1/(1 + z)$. De eenheidscirkel wordt geparametriseerd door $z = e^{it}$, $-\pi < t \leq \pi$. We vinden dan

$$w = \frac{1}{1 + e^{it}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}it}}{e^{-\frac{1}{2}it} + e^{\frac{1}{2}it}} = \frac{\cos \frac{1}{2}t - i \sin \frac{1}{2}t}{2 \cos \frac{1}{2}t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \tan \frac{1}{2}t \; .$$

Het beeld is blijkbaar de rechte $\mathrm{Re}\, w = \frac{1}{2}$. Merk op dat $\mathrm{Im}\, w \to -\infty$ (resp. ∞) als $t \to \pi$ (resp. $-\pi$) (d.w.z. $z \to -1$).

5.4.25. Opmerking. Men kan aantonen, dat bij een afbeelding van de vorm $w = \frac{az + b}{cz + d}$ met $ad \neq bc$, een rechte of een cirkel in het z-vlak wordt getransformeerd in een rechte of een cirkel in het w-vlak.

5.4.26. Opgave. Bepaal het beeld van de eenheidscirkel onder de afbeelding $w = \frac{z - 1}{z + 1}$.

Hoofdstuk 6. Differentiaalvergelijkingen

1. Inleiding

6.1.1. Een (gewone) differentiaalvergelijking van de eerste orde is een relatie die geschreven kan worden in de vorm

$$y' = f(x,y) \ . \qquad (1)$$

Hierbij is f een functie van twee variabelen, die aan elke (x,y) uit een verzameling in $\mathbb{R}^2$ een reëel getal f(x,y) toevoegt. De verzameling waarop f(x,y) is gedefinieerd zullen we in analogie met 0.5 aangeven met DOM f. Een functie y(x) gedefinieerd en differentieerbaar op een interval (a,b) heet een oplossing van (1) op (a,b), als $(x,y(x)) \in$ DOM f en $y'(x) = f(x,y(x))$ voor alle $x \in (a,b)$. Op analoge wijze noemen we

$$y^{(n)} = f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})$$

een (gewone) differentiaalvergelijking van de n-de orde.

6.1.2. Voorbeelden.

1) $y' = -y/x$. Alle functies van de vorm $y(x) = C/x$, waarbij C een willekeurige constante is, zijn oplossing op $(0,\infty)$ en op $(-\infty,0)$.
2) De functies sin x en cos x zijn op $\mathbb{R}$ oplossingen van de tweede orde differentiaalvergelijking $y'' = -y$.
3) De vergelijking van Van der Pol (1927)

$$y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0$$

heeft als oplossing o.m. $y(x) = 0$ voor alle x. Er bestaan ook andere oplossingen van deze vergelijking, maar deze zijn niet in een eenvoudige gesloten vorm weer te geven (althans als $\mu \neq 0$).

6.1.3. Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde laten een eenvoudige meetkundige interpretatie toe. Door de vergelijking wordt in ieder punt $(x_0,y_0) \in$ DOM f een richting gedefinieerd, nl. die van de rechte door (x_0,y_0) met richtingscoëfficiënt $f(x_0,y_0)$; zie fig. 1.

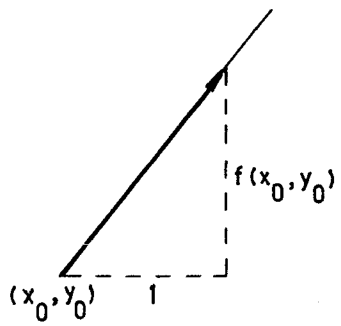


fig. 1

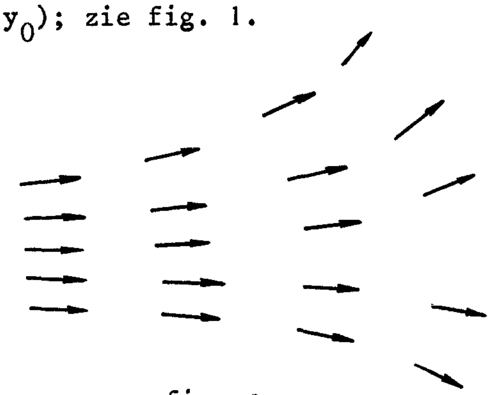


fig. 2

Men kan zeggen dat aan ieder punt $(x_0,y_0) \in$ DOM f een vector is toegevoegd, nl. $(1, f(x_0,y_0))$. Op deze manier is het vlak (voorzover de differentiaalvergelijking is gedefinieerd) bezaaid met pijlen; zie fig. 2. We spreken daarom van een <u>richtingsveld</u>. Voor de differentiaalvergelijking uit 6.1.2 1) is het bijbehorende richtingsveld getekend in fig. 3.

fig. 3

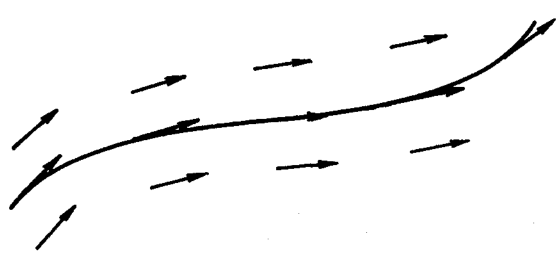


fig. 4

Een functie y(x) is nu oplossing van de differentiaalvergelijking, indien de grafiek van y(x) "past" in het richtingsveld, d.w.z. indien in elk punt van de grafiek de raaklijn de richting van de in dat punt gedefinieerde pijl heeft; zie fig. 4.

Vaak is het handig, de differentiaalvergelijking $y' = f(x,y)$ met de differentiaalnotatie weer te geven door $dy = f(x,y)dx$, ofwel $f(x,y)dx - dy = 0$. Dit heeft het voordeel, dat x en y meer symmetrisch voorkomen. Het richtingsveld krijgt nu de volgende vorm: aan ieder punt $(x_0,y_0) \in \mathrm{DOM}\, f$ is toegevoegd de richting van de vector (dx,dy). Voor y constant wordt dit de richting van $(1,0)$, dus de horizontale richting. Voor x constant krijgen we de richting van $(0,1)$, dus de verticale richting.

6.1.4. Opgave. Schets het richtingsveld van $xdx + ydy = 0$.

6.1.5. Krommen die de eigenschap hebben dat in ieder punt ervan de raaklijn de richting heeft van het richtingsveld ter plaatse, heten integraalkrommen. We kunnen dus ook zeggen: een oplossing van de differentiaalvergelijking is een functie, waarvan de grafiek samenvalt met (een deel van) een integraalkromme. (N.B. integraalkrommen kunnen gesloten krommen zijn.) De meetkundige interpretatie van de differentiaalvergelijking $y' = f(x,y)$ suggereert dat het hele (x,y)-vlak, voor zover f daar gedefinieerd is, is opgevuld met integraalkrommen, d.w.z. dat er door elk punt precies één integraalkromme gaat. Men kan bewijzen dat dit inderdaad het geval is onder redelijke aannamen over $f(x,y)$. Het blijkt dat een differentiaalvergelijking in het algemeen vele oplossingen heeft. Vaak kan men alle oplossingen aangeven in één formule, waarin y behalve van x ook van een parameter C afhangt:

$$y = \varphi(x,C) \ .$$

We zeggen dan dat deze formule de algemene oplossing van $y' = f(x,y)$ voorstelt. Indien we voor C een bepaalde waarde substitueren dan vinden we een zgn. particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking.
De differentiaalvergelijking $y' = f(x,y)$ wordt vaak vergezeld door een zgn. beginvoorwaarde van de vorm $y(a) = y_0$, waaraan de oplossing moet voldoen. Door deze voorwaarde wordt in het algemeen de parameter C vastgelegd.
Bij een differentiaalvergelijking van de n-de orde hangt de algemene oplossing van n parameters af:

$$y = \varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n) \ .$$

Deze parameters kunnen worden vastgelegd door het voorschrijven van n beginvoorwaarden $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_1,\ldots,y^{(n-1)}(a) = y_{n-1}$.

6.1.6. Eén zeer eenvoudig type differentiaalvergelijkingen vermelden we volledigheidshalve hier: de differentiaalvergelijking $y' = f(x)$, die volgens 3.4.13, opmerking 2), tot oplossingen heeft:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C \ .$$

Hierin is F een primitieve functie van f en C een willekeurige constante. In de volgende paragraaf bespreken we differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. Daarna worden lineaire differentiaalvergelijkingen behandeld, eerst van de eerste orde en vervolgens van de tweede orde met constante coëfficiënten. Tenslotte geven we een toepassing in de theorie van de lineaire trillingen. We spreken af, dat alle te beschouwen functies voldoende "net" zullen zijn, zodat alle te gebruiken technieken inderdaad toelaatbaar zijn. Gemakshalve zullen we de vereiste "netheid" niet steeds vermelden.

2. Scheiding van variabelen

6.2.1. Stelling. Laat f en g functies zijn met primitieven F en G. De differentiaalvergelijking $g(y)y' = f(x)$ heeft tot oplossingen precies alle differentieerbare functies y waarvoor een constante C bestaat zodat $G(y(x)) = F(x) + C$.

Bewijs.

1) Laat y voldoen aan $g(y(x))y'(x) = f(x)$. Dan is

$$\frac{d}{dx}(G(y(x))) = G'(y(x))y'(x) = g(y(x))y'(x) = f(x) \ ,$$

zodat $G(y(x)) = F(x) + C$ voor zekere $C \in \mathbb{R}$.

2) Laat nu y voldoen aan $G(y(x)) = F(x) + C$. Differentiëren geeft dan $g(y(x))y'(x) = f(x)$. □

6.2.2. Opmerkingen.

1) Gewoonlijk schrijven we formeel met de differentiaalnotatie

$$g(y)dy = f(x)dx \ .$$

Integreren geeft dan

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

dus $G(y) = F(x) + C$.

Hoewel de hier gegeven "afleiding" alleen formele betekenis heeft, is toch de juiste oplossing gevonden. Tevens zal de benaming van deze methode, oplossen door scheiding van variabelen, duidelijk geworden zijn.

2) In feite vinden we met behulp van de hier beschouwde methode niet de oplossingen van de differentiaalvergelijking, maar een (gewone) vergelijking $G(y) = F(x) + C$. Door deze vergelijking worden de integraalkrommen bepaald. Ook de oplossingsfuncties moeten eraan voldoen. Men zegt wel, dat de oplossingen impliciet door $G(y) = F(x) + C$ gegeven worden. Het oplossen van y uit deze vergelijking is soms eenvoudig, soms zeer ingewikkeld of zelfs ondoenlijk. Wij spreken daarom af, dat we de differentiaalvergelijking als opgelost beschouwen wanneer we een vergelijking gegeven hebben waardoor de oplossingen impliciet bepaald worden.

3) Een differentiaalvergelijking van de vorm

$$y'(x) = f(x)h(y) \qquad (*)$$

wordt van de gedaante $g(y)y' = f(x)$ als we $g(y) = 1/h(y)$ stellen. Hierbij nemen we dan aan dat $h(y) \neq 0$ is. Als voor zekere y_0 geldt $h(y_0) = 0$, dan is de constante functie $y(x) = y_0$ oplossing van (*). Deze oplossing wordt niet teruggevonden als men de vergelijking op de hierboven beschreven wijze oplost. Daarom moet deze oplossing apart worden vermeld.

6.2.3. Voorbeelden.

1) $y' = -x/y$. We schrijven $2ydy = -2xdx$, waaruit volgt

$$y^2 = -x^2 + C .$$

De integraalkrommen zijn cirkels met de oorsprong als middelpunt. Hierbij moeten punten op de x-as worden uitgezonderd omdat daar de differentiaalvergelijking niet is gedefinieerd. Voor iedere $C > 0$ vinden we dus twee oplossingen gedefinieerd op het interval $(-\sqrt{C}, \sqrt{C})$, nl. $y = \pm\sqrt{C - x^2}$.

2) $xy' - y = 0$. We delen door xy:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} ,$$

dan volgt na integratie

$$\ln|y| = \ln|x| + C ,$$

$$|y| = e^C|x| .$$

Let wel, dat $y = 0$ voor alle x, ook een oplossing is, die we hebben verduisterd omdat we door y hebben gedeeld. Derhalve vinden we de algemene oplossing $y = Dx$, waarbij D een willekeurige constante is.

3) $y' = 1 + y^2$ heeft als algemene oplossing $y = \tan(x + C)$. Merk op dat geen enkele oplossing over een interval met een lengte groter dan π is gedefinieerd, hoewel de differentiaalvergelijking overal is gedefinieerd.

6.2.4. Laat het aantal individuen van een bepaalde (dieren- of planten-) soort in een gegeven milieu op het tijdstip t gegeven worden door p(t).
Een eenvoudig model van het verloop van p als functie van t, krijgen we, als we veronderstellen dat de relatieve groei een positieve constante is:

$$\dot{p}(t)/p(t) = \lambda \ .$$

(N.B. Differentiatie naar t, in het bijzonder als t de tijd voorstelt, geeft men vaak aan door een punt in plaats van een accent.)
Dit levert de differentiaalvergelijking

$$\dot{p}(t) = \lambda p(t) \ ,$$

die volgens bovenstaande methode kan worden opgelost:

$$p(t) = Ce^{\lambda t} \ .$$

We zien dat de populatie "exponentieel" toeneemt. Gewoonlijk zal echter tengevolge van overbevolking de relatieve groei afnemen als de populatie toeneemt. Een eenvoudig model is

$$\dot{p}(t)/p(t) = a - bp(t) \ ,$$

waarbij a en b positieve constanten zijn. Dan is

$$\dot{p}(t) = ap(t) - bp^2(t) \ ,$$

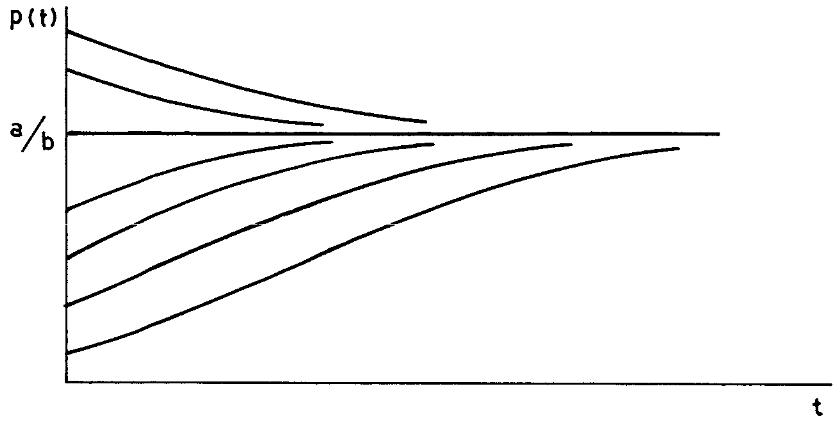
met oplossing

$$\int \frac{dp}{ap - bp^2} = \int dt \ ,$$

$$\frac{1}{a} \ln\left|\frac{p}{a - bp}\right| = t + C \ ,$$

$$p(t) = \frac{a}{b + De^{-at}} \ ,$$

waarbij D (= $\pm\, e^{-aC}$) een willekeurige constante is. De waarde D = 0 correspondeert met de constante oplossing p(t) = a/b, die we in bovenstaande afleiding hebben verduisterd. In de navolgende figuur zijn een aantal oplossingskrommen geschetst.



Merk op dat $\dot{p}(t) < 0$ als $p(t) > a/b$ en $\dot{p}(t) > 0$ als $p(t) < a/b$. We zien dat in de stationaire toestand de populatie gelijk is aan a/b.

6.2.5. Een kapitaal staat uit tegen een constante rente p%. Het beginkapitaal (op tijdstip t = 0) is K_0. Op het tijdstip t is de kapitaalsgroei evenredig met het kapitaal:

$$\dot{K}(t) = \mu K(t) \ .$$

De oplossing is $K(t) = K_0 e^{\mu t}$. We kunnen μ bepalen uit

$$K(1) - K(0) = K_0 e^{\mu} - K_0 = K_0 \cdot \frac{p}{100} \ ,$$

dus

$$\mu = \ln(1 + p/100) \ , \text{ zodat } K(t) = K_0 (1 + \frac{p}{100})^t \ .$$

6.2.6. De snelheid van desintegratie van een radioactieve stof is evenredig met de aanwezige hoeveelheid. Als dus y(t) de op het tijdstip t aanwezige hoeveelheid radioactieve stof is, dan geldt

$$-\dot{y}(t) = \lambda y(t) \ .$$

De oplossing is $y(t) = y(0)e^{-\lambda t}$, λ heet de desintegratieconstante. De halfwaardetijd $T_{\frac{1}{2}}$ berekent men uit $y(T_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}y(0)$, dus $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

3. Lineaire differentiaalvergelijkingen

6.3.1. Een differentiaalvergelijking van de vorm

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = f(x)$$

heet een lineaire differentiaalvergelijking. De functies $a_n(x),\ldots,a_0(x)$ heten de coëfficiënten. Als deze constant zijn en $a_n \neq 0$, dan spreken we van een n-de orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten. Als $f(x) = 0$ voor alle x, dan heet de vergelijking homogeen, anders inhomogeen.

6.3.2. Beschouw de inhomogene lineaire differentiaalvergelijking

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = f(x)$$

en de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = 0 \ .$$

Wanneer y_1 een oplossing van de inhomogene en y_0 een oplossing van de homogene vergelijking is, zien we door invullen dat $y_1 + y_0$ ook een oplossing van de inhomogene vergelijking is. Evenzo zien we, dat als y_1 en y_2 oplossingen van de inhomogene differentiaalvergelijking zijn, dat dan $y_0 = y_1 - y_2$ aan de homogene differentiaalvergelijking voldoet. Hieruit volgt:

6.3.3. Stelling. We verkrijgen alle oplossingen van de lineaire differentiaalvergelijking

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = f(x)$$

door bij één willekeurige oplossing (een zogenaamde particuliere oplossing) van deze differentiaalvergelijking, alle oplossingen van de corresponderende homogene vergelijking

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) = 0$$

op te tellen.
Deze stelling geeft ons de mogelijkheid het oplossen van een lineaire differentiaalvergelijking als volgt in te kleden:
Zoek eerst alle oplossingen van de corresponderende homogene vergelijking.
Geef vervolgens één particuliere oplossing, en tel op.

6.3.4. Voorbeelden.

1) $y'(x) + y(x) = e^{2x}$.

De oplossingen van de homogene vergelijking zijn $y(x) = ce^{-x}$ ($c \in \mathbb{R}$). Om een particuliere oplossing te vinden proberen we $y(x) = ae^{2x}$; invullen geeft $3ae^{2x} = e^{2x}$, dus $a = \frac{1}{3}$, zodat $y(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$ een particuliere oplossing is. De inhomogene differentiaalvergelijking heeft als oplossingen $y(x) = \frac{1}{3}e^{2x} + ce^{-x}$ ($c \in \mathbb{R}$). (Men noemt $\frac{1}{3}e^{2x} + ce^{-x}$ wel de algemene oplossing van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking.)

2) $y'(x) - 3y(x) = 3 \sin 6x$.

De algemene oplossing van de homogene vergelijking is $y(x) = ce^{3x}$. Een particuliere oplossing vinden we via het proberen van $y(x) = a \sin 6x + b \cos 6x$; invullen levert $a = -\frac{1}{5}$, $b = -\frac{2}{5}$, zodat $y(x) = -\frac{1}{5}\sin 6x + - \frac{2}{5}\cos 6x$ een particuliere oplossing is. De algemene oplossing van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking is dus $-\frac{1}{5}\sin 6x - \frac{2}{5}\cos 6x + ce^{3x}$.

3) De differentiaalvergelijking $y'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ heeft als oplossingen

$$y(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C .$$

Hierin is de functie $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ inderdaad een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking en alle oplossingen van de corresponderende homogene vergelijking $y' = 0$ zijn juist de constante functies.

6.3.5. We bespreken nu het oplossen van lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde:

$$y'(x) + f(x).y(x) = g(x) .$$

Daartoe beginnen we met het oplossen van de corresponderende homogene vergelijking

$$y'(x) + f(x)y(x) = 0 .$$

Deze vergelijking kunnen we oplossen d.m.v. scheiding van variabelen:

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx ,$$

$$\ln|y| = -\int f(x)dx = -F(x) + C_1 ,$$

waarin F een primitieve is van f. Hieruit volgt $|y(x)| = e^{C_1}e^{-F(x)}$, dus (rekening houdend met de verduisterde oplossing y = 0)

$$y(x) = Ce^{-F(x)} \qquad (C \in \mathbb{R}) .$$

Een particuliere oplossing van de oorspronkelijke vergelijking vinden we nu met de methode van variatie van constanten. Daartoe vervangen we de constante C in de oplossing van de homogene vergelijking door een functie c(x) en proberen een oplossing

$$y(x) = c(x)e^{-F(x)}$$

van de inhomogene vergelijking te vinden.
Substitutie in de differentiaalvergelijking geeft

$$(c'(x)e^{-F(x)} - c(x)f(x)e^{-F(x)}) + f(x)c(x)e^{-F(x)} = g(x) ,$$

dus $c'(x) = g(x)e^{F(x)}$.
Hieruit kunnen we c(x) door integratie vinden. Kiezen we nu een primitieve $c_0(x)$ van $g(x)e^{F(x)}$, dan is $c_0(x)e^{-F(x)}$ een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking. Alle oplossingen van deze vergelijking zijn dus

$$y(x) = c_0(x)e^{-F(x)} + Ce^{-F(x)} = (c_0(x) + C)e^{-F(x)} , \qquad C \in \mathbb{R} .$$

Merk op dat de functies $c_0(x) + C$ juist de oplossingen zijn van de gevonden differentiaalvergelijking voor c(x). De oplossingen van de differentiaalvergelijking krijgen we dus ook door de oplossingen van de vergelijking voor c(x) te vermenigvuldigen met $e^{-F(x)}$.

6.3.6. Voorbeeld. $y' - \frac{x+1}{x}y = x - x^2$. De bijbehorende homogene vergelijking

$$y' - \frac{x+1}{x}y = 0 ,$$

heeft als oplossing

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x+1}{x}\,dx ,$$

$$\ln|y| = x + \ln|x| + C_1 ,$$

$$y = Cxe^x .$$

De oplossing $y = 0$ correspondeert met $C = 0$. Zoek nu een oplossing van de inhomogene vergelijking van de vorm

$$y(x) = c(x)xe^{x} .$$

Na substitutie in de inhomogene vergelijking vinden we

$$c'(x)xe^{x} + c(x)(e^{x} + xe^{x}) - \frac{x+1}{x} c(x)xe^{x} = x - x^{2} ,$$

waaruit volgt

$$c'(x) = \frac{x - x^{2}}{xe^{x}} = (1 - x)e^{-x} ,$$

$$c(x) = \int (1 - x)e^{-x}dx = xe^{-x} + C .$$

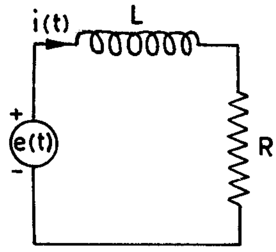
De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking luidt nu

$$y(x) = x^{2} + Cxe^{x} ,$$

waarbij C een willekeurige reële constante is.

6.3.7. Voorbeeld. In een stroomkring met constante zelfinductie L en weerstand R loopt een stroom $i(t)$ onder invloed van een spanningsbron $e(t)$. Er geldt

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e(t) .$$



Zij $\lambda = R/L$. Dan is de algemene oplossing van de homogene vergelijking $Ce^{-\lambda t}$. Substitutie van $i(t) = c(t)e^{-\lambda t}$ in de inhomogene vergelijking levert

$$Lc' = e(t)e^{\lambda t} ,$$

dus

$$c(t) = \frac{1}{L} \int_{0}^{t} e(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau + c(0)$$

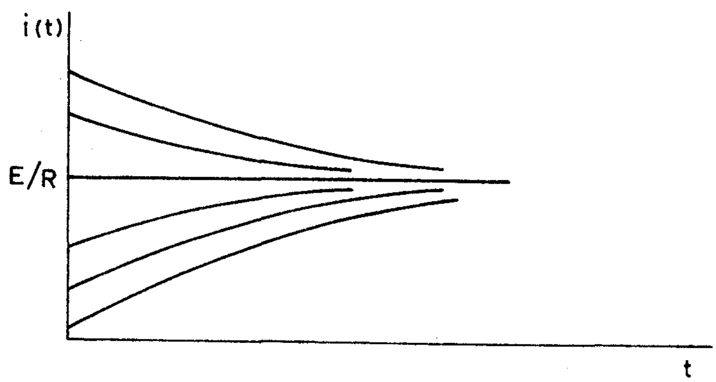
en

$$i(t) = i(0)e^{-\lambda t} + \frac{1}{L} \int_{0}^{t} e^{\lambda(\tau-t)}e(\tau)d\tau .$$

De eerste term stelt de stroom voor als $e(t) = 0$, de tweede term geeft de stroom als $i(0) = 0$. Als $e(t) = E$ $(t > 0)$, dan vinden we

$$i(t) = \frac{E}{R} + Ce^{-\lambda t} ,$$

waarbij C een constante is, die van de beginwaarde $i(0)$ afhangt.
De voorgaande oplossing is verkregen door $e(t) = E$ te substitueren in de algemene oplossing en de integraal uit te rekenen. Men kan dit resultaat eenvoudiger afleiden door op te merken dat de constante stroom $i(t) = E/R$ een particuliere oplossing is van de inhomogene vergelijking. De algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking is dan te schrijven als de som van de particuliere oplossing $i(t) = E/R$ en de algemene oplossing $Ce^{-\lambda t}$ van de homogene vergelijking. In de navolgende figuur is het verloop van i als functie van t geschetst voor een aantal waarden van $i(0)$.



Merk op dat de algemene oplossing nadert tot de stationaire oplossing E/R als $t \to \infty$.

4. Lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

6.4.1. In deze paragraaf zullen we de differentiaalvergelijking

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 y(x) = f(x)$$

beschouwen, waarin de coëfficiënten $a_{n-1}, \ldots, a_0$ constant zijn. De theorie over het oplossen van dit type differentiaalvergelijking blijkt veel gladder te verlopen als we aannemen dat alle functies complexe functies zijn van een reële variabele x en dat alle constanten complexe getallen zijn.

Uiteraard zijn we in feite alleen geinteresseerd in de reële oplossingen van de differentiaalvergelijking; we zullen dus na het vinden van alle complexe oplossingen van de differentiaalvergelijking hieruit de reële moeten selecteren. Hoe we dit doen bespreken we aan het eind van deze paragraaf.
Tenzij anders vermeld nemen we in deze paragraaf aan dat alle voorkomende functies en getallen complex zijn. Aangezien voor complexe functies van een reële variabele dezelfde rekenregels gelden als voor reële functies ten aanzien van het differentiëren (vgl. 5.4.5, 5.4.6) is ook in dit geval stelling 6.3.3 van toepassing.

6.4.2. We zullen ook gebruikmaken van de differentiaaloperator D, voor iedere functie y gedefinieerd door $Dy = y'$.
Voor iedere (complex) getal λ definiëren we verder

$$(D - \lambda)y = y' - \lambda y \; .$$

Merk op dat

$$\begin{aligned}(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y &= (D - \lambda_1)(y' - \lambda_2 y) \\ &= (y'' - \lambda_2 y') - \lambda_1(y' - \lambda_2 y) \\ &= y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y \; .\end{aligned}$$

Beschouw nu de tweede orde vergelijking

$$y'' + ay' + by = f \; .$$

Het hierbij behorende polynoom $\lambda^2 + a\lambda + b$ heet het <u>karakteristieke polynoom</u>; de vergelijking $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ heet de <u>karakteristieke vergelijking</u>. Laat λ_1 en λ_2 de (al dan niet samenvallende) nulpunten van het karakteristieke polynoom zijn.
Dan geldt $\lambda_1 + \lambda_2 = -a$, $\lambda_1\lambda_2 = b$, dus

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = y'' + ay' + by \; ,$$

en de differentiaalvergelijking kan dus ook geschreven worden als

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = f \; .$$

Deze differentiaalvergelijking kunnen we oplossen door tweemaal een eerste orde differentiaalvergelijking op te lossen. Stel namelijk $(D - \lambda_2)y = u$, en los op $(D - \lambda_1)u = f$. Bepaal dan y uit de vergelijking $(D - \lambda_2)y = u$.

6.4.3. De vergelijking $(D - \lambda)y = f$, ofwel $y' - \lambda y = f$, kunnen we oplossen met de methode gegeven in 6.3.5. Sneller gaat het op de volgende manier:

$$(D - \lambda)y = f$$

$$y'(x) - \lambda y(x) = f(x); \text{ vermenigvuldig met } e^{-\lambda x}$$

$$e^{-\lambda x}y'(x) - \lambda e^{-\lambda x}y(x) = e^{-\lambda x}f(x)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{-\lambda x}y(x)) = e^{-\lambda x}f(x)$$

$$e^{-\lambda x}y(x) = \int e^{-\lambda x}f(x)dx; \text{ stel dit is } G(x) + C .$$

Dan is $y(x) = e^{\lambda x}G(x) + Ce^{\lambda x}$.
Merk op dat de eerste term in het rechterlid een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking is en dat alle oplossingen van de corresponderende homogene vergelijking $y' - \lambda y = 0$ juist alle (complexe) veelvouden van $e^{\lambda x}$ zijn.

6.4.4. Als voorbeeld lossen we nu met gebruikmaking van de methodes uit 6.4.2 en 6.4.3 de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = xe^x .$$

De karakteristieke vergelijking $t^2 - 3t + 2 = 0$ heeft als oplossingen $t = 1$ en $t = 2$; de differentiaalvergelijking is dus

$$(D - 1)(D - 2)y(x) = xe^x .$$

Splits deze in $(D - 2)y(x) = u(x)$ en $(D - 1)u(x) = xe^x$. De laatste vergelijking is $u'(x) - u(x) = xe^x$; vermenigvuldig met e^{-x}, dan krijgen we $(e^{-x}u(x))' = x$ zodat

$$e^{-x}u(x) = \int x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + c_1 ,$$

$$u(x) = \tfrac{1}{2}x^2e^x + c_1e^x .$$

Vervolgens lossen we op: $(D - 2)y(x) = u(x)$, dus:

$$y'(x) - 2y(x) = \tfrac{1}{2}x^2e^x + c_1e^x .$$

Vermenigvuldig met e^{-2x}:

$$(e^{-2x}y(x))' = \tfrac{1}{2}x^2e^{-x} + c_1e^{-x}$$

$$e^{-2x}y(x) = \int (\tfrac{1}{2}x^2e^{-x} + c_1e^{-x})dx = -\tfrac{1}{2}x^2e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} + c_2 - c_1e^{-x}$$

zodat de oplossing van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking is

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}x^2e^x - xe^x + c_2e^{2x} + c_1'e^x ,$$

waarin $c_1' = -c_1 - 1$. Ga na, dat $-\tfrac{1}{2}x^2e^x - xe^x$ een particuliere oplossing is en dat $c_1'e^x + c_2e^{2x}$ voldoet aan de bijbehorende homogene vergelijking.

6.4.5. Opmerking. Analoog kunnen n^e orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten opgelost worden:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} +\ldots+ a_0y = f$$

heeft tot karakteristieke vergelijking

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} +\ldots+ a_0 = 0 ;$$

laten $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ hiervan de wortels zijn, dan is de differentiaalvergelijking

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \ldots (D - \lambda_n)y = f .$$

Stel

$$\begin{aligned} u_1 &= (D - \lambda_2) \ldots (D - \lambda_n)y \\ u_2 &= (D - \lambda_3) \ldots (D - \lambda_n)y \\ &\vdots \\ u_{n-1} &= (D - \lambda_n)y , \end{aligned}$$

dan vinden we alle oplossingen $y(x)$ door achtereenvolgens op te lossen:

$$\begin{aligned} (D - \lambda_1)u_1 &= f \\ (D - \lambda_2)u_2 &= u_1 \\ &\vdots \\ (D - \lambda_n)y &= u_{n-1} . \end{aligned}$$

6.4.6. We behandelen nu de algemene vorm van de oplossingen van de homogene vergelijking $y'' + ay' + by = 0$. Laat λ_1 en λ_2 de wortels van de karakteristieke vergelijking zijn; dan is de differentiaalvergelijking te schrijven als $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = 0$. Stel $(D - \lambda_2)y = u$. We lossen u op uit $(D-\lambda_1)u = 0$ en vinden

$$u(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} .$$

Vervolgens lossen we y op uit $(D - \lambda_2)y = u$, waarbij we 6.4.3 gebruiken en vinden

$$y(x) = e^{\lambda_2 x} \int c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx .$$

Als $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dan wordt

$$y(x) = c_1 \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = c_1' e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} .$$

Als $\lambda_1 = \lambda_2$, dan vinden we

$$y(x) = e^{\lambda_2 x}(c_1 x + c_2) = c_1 x e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} .$$

We vatten dit als volgt samen:

6.4.7. Stelling. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' + ay' + by = 0 .$$

Laat λ_1 en λ_2 de wortels van de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ zijn.

Dan zijn alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad \text{als } \lambda_1 \neq \lambda_2 ,$$

$$y(x) = c_1 x e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} \quad \text{als } \lambda_1 = \lambda_2 .$$

6.4.8. Voorbeelden.

1) Van de differentiaalvergelijking $y'' - 3y' + 2y = 0$ is de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.
Deze heeft wortels 1 en 2, zodat alle oplossingen zijn $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

2) Van de differentiaalvergelijking $y'' + y = 0$ is de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 1 = 0$. Deze heeft wortels i en $-i$, zodat alle oplossingen zijn

$$y(x) = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix} .$$

6.4.9. Opmerking. Hogere orde homogene lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten kunnen op dezelfde wijze opgelost worden. In de notatie van 6.4.5 vinden we:

$$e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

zijn oplossingen; is λ tweevoudig nulpunt van het karakteristieke polynoom, dan nemen we naast $e^{\lambda x}$ ook $xe^{\lambda x}$; bij drievoudig nulpunt naast $e^{\lambda x}$ ook $xe^{\lambda x}$ en $x^2 e^{\lambda x}$, enzovoort. De algemene oplossing krijgen we als combinatie van deze oplossingen.

6.4.10. Een inhomogene differentiaalvergelijking $y'' + ay' + by = f$ met constante coëfficiënten kan opgelost worden zoals in 6.4.4 is uitgevoerd. Als regel verloopt dit echter moeizaam, zodat we in de practijk een andere weg bewandelen. Hiertoe beroepen we ons op stelling 6.3.3; we geven dus de oplossingen van de corresponderende homogene vergelijking (met stelling 6.4.7 schrijven we die rechtstreeks op) en we bepalen een particuliere oplossing; optellen geeft dan de oplossingen van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking.

6.4.11. Voorbeeld. $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x + 2e^{3x}$. De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, met als oplossingen $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. De oplossingen van de homogene vergelijking zijn dus $c_1 xe^{-x} + c_2 e^{-x}$. Om een particuliere oplossing te vinden, proberen we $y(x) = ae^x + be^{3x}$; invullen geeft $a = \frac{1}{4}$ en $b = \frac{1}{8}$ met als particuliere oplossing $y(x) = \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{8} e^{3x}$. De algemene oplossing van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking is dus $\frac{1}{4} e^x + \frac{1}{8} e^{3x} + c_1 xe^{-x} + c_2 e^{-x}$.

6.4.12. We geven nu aan, hoe men steeds een particuliere oplossing van

(1) $\qquad y'' + ay' + by = f$

kan vinden, wanneer f de vorm $f(x) = e^{\alpha x} p(x)$ heeft, waarin p een polynoom is. Stel eerst

$$y(x) = u(x)e^{\alpha x} .$$

Na invullen levert dit

$$(2) \qquad u''(x) + (2\alpha + a)u'(x) + (\alpha^2 + a\alpha + b)u(x) = p(x) \;.$$

In eenvoudige gevallen "zien" we wel een oplossing $u(x)$ van (2); daarmee is dan ook een particuliere oplossing $y(x) = u(x)e^{\alpha x}$ van (1) gevonden.

Voorbeeld. $y'' - 3y' + 2y = e^x$. Stel $y(x) = u(x)e^x$; invullen geeft $u''(x) - u'(x) = 1$, waaraan (onder meer) $u(x) = -x$ voldoet. Een particuliere oplossing is dus $y(x) = -xe^x$. Met 6.4.8 zien we, dat alle oplossingen zijn: $y(x) = -xe^x + c_1e^x + c_2e^{2x}$.

In ingewikkelder gevallen bepalen we een oplossing van (2) als volgt: laat p de graad m hebben.
We onderscheiden drie gevallen:

a) α geen nulpunt van het karakteristieke polynoom, dus: $\alpha^2 + a\alpha + b \neq 0$. Probeer voor u een polynoom van de graad m, namelijk

$$u(x) = u_m x^m + u_{m-1}x^{m-1} + \ldots + u_1 x + u_0 \;.$$

Na invullen en uitwerken kunnen $u_m, u_{m-1}, \ldots, u_1$ en u_0 achtereenvolgens zodanig bepaald worden, dat $u(x)$ aan (2) voldoet.
Gevolg. Is α geen nulpunt van het karakteristieke polynoom, dan heeft (1) een particuliere oplossing van de vorm $e^{\alpha x}u(x)$ waarin u een polynoom is met $gr(u) = gr(p)$.

b) α enkelvoudig nulpunt van het karakteristieke polynoom, dus: $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$, $2\alpha + a \neq 0$. Probeer nu voor u een polynoom van de graad $m+1$ en bepaal de coëfficiënten als onder a). Merk op, dat voor de constante term van u een willekeurige waarde gebruikt kan worden (vaak nemen we 0).
Gevolg. Is α enkelvoudig nulpunt van het karakteristieke polynoom, dan heeft (1) een particuliere oplossing van de vorm $e^{\alpha x}u(x)$ waarin u een polynoom is met $gr(u) = gr(p) + 1$.

c) α tweevoudig nulpunt, dus: $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$, $2\alpha + a = 0$. Nu voldoet voor u een polynoom van de graad $m+2$. Merk op, dat (2) nu de vorm heeft $u''(x) = p(x)$, zodat u verkregen wordt door p tweemaal te integreren; ook, dat nu de laatste twee coëfficiënten in het polynoom u willekeurig gekozen mogen worden.

Gevolg. Is α tweevoudig nulpunt van het karakteristieke polynoom, dan heeft (1) een particuliere oplossing van de vorm $e^{\alpha x}u(x)$ waarin u een polynoom is met $gr(u) = gr(p) + 2$.

6.4.13. Voorbeelden.

1) $y''(x) + y(x) = xe^{2x}$. Om een particuliere oplossing te vinden, proberen we $y(x) = (ax + b)e^{2x}$. Invullen levert $a = \frac{1}{5}$ en $b = -\frac{4}{25}$, dus $y(x) = (\frac{1}{5}x - \frac{4}{25})e^{2x}$. De algemene oplossing van de homogene vergelijking is $c_1e^{ix} + c_2e^{-ix}$ (zie 6.4.8); de algemene oplossing van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking is dus $(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25})e^{2x} + c_1e^{ix} + c_2e^{-ix}$.
2) $y''(x) + 4y(x) = e^{2ix}$. Daar 2i enkelvoudig nulpunt van het karakteristieke polynoom is, proberen we $y(x) = (ax + b)e^{2ix}$. Na invullen vinden we $4ai = 1$, dus $a = -\frac{1}{4}i$ en b willekeurig. Met $b = 0$ krijgen we de particuliere oplossing $y(x) = -\frac{1}{4}ixe^{2ix}$. (Merk op, dat we hier dus net zo goed $y(x) = axe^{2ix}$ hadden kunnen proberen.) De algemene oplossing van de homogene vergelijking is $y(x) = c_1e^{2ix} + c_2e^{-2ix}$; de totale algemene oplossing wordt

$$y(x) = -\frac{1}{4}ixe^{2ix} + c_1e^{2ix} + c_2e^{-2ix} .$$

3) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = xe^x$. De karakteristieke vergelijking heeft de wortels 1 en 2; de oplossingen van de homogene vergelijking zijn dus $c_1e^x + c_2e^{2x}$. Er moet, daar 1 enkelvoudige wortel is, een particuliere oplossing van de gedaante $y(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ bestaan. Aangezien ce^x een oplossing is van de homogene vergelijking, levert invullen van ce^x in het linkerlid van de differentiaalvergelijking nul op. Er is dus een particuliere oplossing $(ax^2 + bx)e^x$. Invullen in de differentiaalvergelijking levert $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$ zodat $(-\frac{1}{2}x^2 - x)e^x$ een particuliere oplossing is. De algemene oplossing van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking is dus $(-\frac{1}{2}x^2 - x)e^x + c_1e^x + c_2e^{2x}$. Vergelijk 6.4.4.

6.4.14. Opmerkingen.

1) Voor hogere orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten kunnen we via dezelfde techniek particuliere oplossingen vinden.
2) Wanneer de differentiaalvergelijking $y'' + ay' + by = f$ reëel is (dus: wanneer $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ en f reëel) dan vinden we via de in 6.4.12 geschetste weg ook altijd een reële particuliere oplossing.

6.4.15. We beschouwen nu de differentiaalvergelijking $y'' + ay' + by = f$, waarin a en b reëel zijn terwijl f een reële functie is. We zoeken nu alle reële oplossingen. De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Laat λ_1 en λ_2 de wortels zijn.

Als λ_1 en λ_2 beide reëel zijn, dan zijn alle oplossingen van de bijbehorende homogene vergelijking

$$y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} \quad (c_1xe^{\lambda_1 x} + c_2xe^{\lambda_2 x} \text{ als } \lambda_1 = \lambda_2)$$

dus vinden we alle reële oplossingen hiervan door c_1 en c_2 reëel te nemen.
Stel nu $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Dan is $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, daar $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$. Alle (complexe) oplossingen van de homogene vergelijking zijn dus

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2e^{(\alpha-i\beta)x} = \\ &= c_1e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = \\ &= (c_1 + c_2)e^{\alpha x}\cos\beta x + i(c_1 - c_2)e^{\alpha x}\sin\beta x = \\ &= c_1'e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2'e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}$$

waarin $c_1' = c_1 + c_2$ en $c_2' = ic_1 - ic_2$.
De reële oplossingen van de homogene vergelijking zijn dus

$$y(x) = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\sin\beta x \quad \text{met } c_1 \text{ en } c_2 \text{ reëel}.$$

Vaak wordt deze oplossing nog anders geschreven:

$$y(x) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\, e^{\alpha x}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos\beta x + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin\beta x\right).$$

Stel $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, en bepaal de hoek φ, $0 \leq \varphi < 2\pi$, zo dat

$$\sin\varphi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}.$$

Dan heeft de algemene reële oplossing van de homogene vergelijking de gedaante

$$y(x) = Ae^{\alpha x}\sin(\beta x + \varphi), \quad A \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi .$$

Laat nu tevens een reële particuliere oplossing van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking gevonden zijn. Door deze bij de algemene reële oplossing van de homogene vergelijking op te tellen hebben we op grond van stelling 6.3.3 alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking gevonden.

6.4.16. Voorbeeld. Bepaal alle reële oplossingen van

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 2 .$$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$. Deze heeft wortels $-1 \pm i$, zodat de algemene reële oplossing van de homogene vergelijking is

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x),\ c_1 \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R} .$$

Een particuliere oplossing is $y = 1$, zodat de algemene reële oplossing is

$$y(x) = 1 + e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x),\ c_1 \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R} .$$

6.4.17. De volgende stelling is soms handig om een particuliere oplossing van de vergelijking $y'' + ay' + by = f$ te vinden als in f goniometrische functies voorkomen.

Stelling. Laat y_p een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking $y'' + ay' + by = f$ met a en b reëel zijn. Dan is $\mathrm{Re}\, y_p$ een particuliere oplossing van $y'' + ay' + by = \mathrm{Re}\, f$, en $\mathrm{Im}\, y_p$ een particuliere oplossing van $y'' + ay' + by = \mathrm{Im}\, f$.

Bewijs. Uit $y_p'' + ay_p' + by_p = f$ volgt

$$\mathrm{Re}(y_p'' + ay_p' + by_p) = \mathrm{Re}\, f ,$$

$$\mathrm{Re}(y_p'') + a\mathrm{Re}(y_p') + b\mathrm{Re}\, y_p = \mathrm{Re}\, f ,$$

$$(\mathrm{Re}\, y_p)'' + a(\mathrm{Re}\, y_p)' + b\mathrm{Re}\, y_p = \mathrm{Re}\, f .$$

Analoog tonen we aan dat $\mathrm{Im}\, y_p$ een particuliere oplossing is van $y'' + ay' + by = \mathrm{Im}\, f$. □

6.4.18. Voorbeeld. Bepaal alle reële oplossingen van

$$y''(x) + y(x) = x \sin x .$$

De karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 1 = 0$ heeft wortels $\pm i$. De algemene oplossing van de homogene vergelijking is dus $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Daar $x \sin x = \mathrm{Im}(xe^{ix})$ zoeken we eerst een particuliere oplossing van de vergelijking

$$y''(x) + y(x) = xe^{ix} .$$

Er is nu een particuliere oplossing $y(x) = (ax^2 + bx)e^{ix}$. Substitutie levert

$$(2a + 2i(2ax + b) - (ax^2 + bx))e^{ix} + (ax^2 + bx)e^{ix} = xe^{ix} ,$$

$$(4aix + 2a + 2bi)e^{ix} = xe^{ix} ,$$

zodat $a = \frac{1}{4i} = -\frac{1}{4}i$, $b = \frac{1}{4}$.
Een particuliere oplossing van de vergelijking $y''(x) + y(x) = xe^{ix}$ is dus $(-\frac{1}{4}ix^2 + \frac{1}{4}x)(\cos x + i \sin x)$, zodat een particuliere oplossing van $y''(x) + y(x) = x \sin x$ is

$$\mathrm{Im}(-\tfrac{1}{4}ix^2 + \tfrac{1}{4}x)(\cos x + i \sin x) = -\tfrac{1}{4}x^2 \cos x + \tfrac{1}{4}x \sin x .$$

De algemene reële oplossing van $y''(x) + y(x) = x \sin x$ is dus

$$y(x) = \tfrac{1}{4}x \sin x - \tfrac{1}{4}x^2 \cos x + c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad \text{met } c_1 \text{ en } c_2 \text{ reëel.}$$

6.4.19. Opmerking. Ook de methode uit 6.4.12 kan voor lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten van hogere orde gebruikt worden. Een algemene omschrijving kunnen we als volgt geven: de differentiaalvergelijking

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = e^{\alpha x} p(x) ,$$

waarin p een polynoom van graad m is, heeft een particuliere oplossing van de gedaante $x^k u(x) e^{\alpha x}$, waarin u een polynoom van graad m is en waarin k bepaald wordt door: $k = 0$ als α geen nulpunt van het karakteristieke polynoom is, en k is de multipliciteit van α wanneer α wel nulpunt van het karakteristieke polynoom is.
Ga na, dat dit in overeenstemming is met wat eerder werd gevonden wanneer de differentiaalvergelijking van de 2e orde is.

5. Trillingen

6.5.1. Voorbeeld. We beschouwen een stoffelijk punt met massa m, dat kan bewegen langs een rechte lijn (de x-as). We beschouwen x als functie van de tijd. Op het punt werken verschillende krachten. Een kracht die op het punt werkt noemen we positief als ze werkt in de richting van toenemende x. Als de kracht werkt in de richting waarin x afneemt (dus naar de negatieve x-as wijst), dan spreken we van een negatieve kracht (in positieve richting). De volgende krachten werken op het punt.

i) een veerkracht F_1 evenredig met x:

$$F_1 = -kx \text{ met } k > 0 \ .$$

Merk op dat de kracht steeds naar de oorsprong gericht is als $x \neq 0$.

ii) een dempingskracht F_2 evenredig aan de snelheid

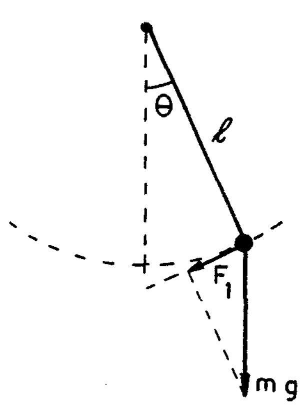
$$F_2 = -b\dot{x} = -b\,\frac{dx}{dt} \text{ met } b > 0 \ .$$

iii) een tijdsafhankelijke uitwendige kracht $F_3 = f(t)$.

Volgens de wet van Newton is de som van de krachten gelijk aan het product van massa en versnelling, dus

$$-kx(t) - b\dot{x}(t) + f(t) = m\ddot{x}(t) \ .$$

6.5.2. Voorbeeld. We beschouwen de uitwijkingshoek θ van een slinger als functie van de tijd (zie figuur).



Met behulp van de wet van Newton vinden we op analoge manier als in 6.5.1.

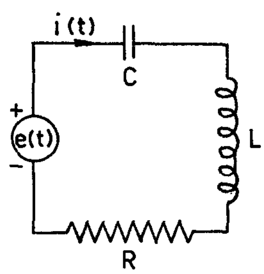
$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - b\ell\dot{\theta} + f(t)$$

waar ℓ de lengte van de slinger is, g de versnelling van de zwaartekracht, b een dempingscoëfficiënt en f(t) een tijdsafhankelijke uitwendige kracht.

Is de uitwijkingshoek θ steeds klein, dan geldt bij benadering $\sin \theta \approx \theta$; hiermee gaat de differentiaalvergelijking over in de lineaire differentiaalvergelijking

$$m\ell\ddot{\theta} + b\ell\dot{\theta} + mg\theta = f(t) \; .$$

6.5.3. Voorbeeld. In een electrisch circuit zijn opgenomen een spanningsbron met electromotorische kracht e(t), een condensator met capaciteit C, een spoel met coëfficiënt van zelfinductie L en een weerstand R.



De grootheid e(t) wordt positief gerekend als aan de + kant de potentiaal hoger is dan aan de - kant. De stroomsterkte i(t) door het circuit wordt positief geteld als de stroom loopt in de richting van de pijl. Het teken van de potentiaal over de passieve elementen (L, C, R) wordt zo gekozen dat een positieve stroom loopt van een hogere potentiaal naar een lagere. Met deze tekenafspraken is de spanning op het tijdstip t over de weerstand, spoel en condensator resp. Ri, $L\,\frac{di}{dt}$ en $V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$, waarbij V_0 de beginspanning (op het tijdstip $t = 0$) over de condensator voorstelt.
We vinden hieruit

$$e(t) = V_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + Ri + L\,\frac{di}{dt}$$

en na differentiëren

$$L\,\frac{d^2i}{dt^2} + R\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i = \frac{de}{dt} \; .$$

6.5.4. In bovenstaande voorbeelden zijn we gestuit op een differentiaalvergelijking van de vorm

$$m\ddot{x} + a_1\dot{x} + b_1 x = f_1(t) \qquad (1)$$

met $a_1 \geq 0$, $b_1 \geq 0$, $m > 0$. We delen (1) door m en we voeren nieuwe grootheden in: $a = a_1/m$, $b = b_1/m$, $f(t) = f_1(t)/m$. Dan gaat (1) over in

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \qquad (2)$$

met $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Eerst onderzoeken we het gedrag van de homogene vergelijking (d.w.z. het geval $f(t) = 0$ voor alle t). De karakteristieke vergelijking luidt

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \,. \qquad (3)$$

We onderscheiden vier gevallen:

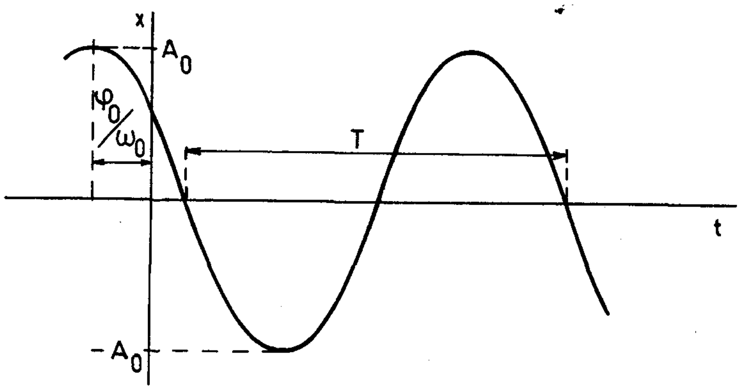
A) $a = 0$, $b > 0$. De karakteristieke wortels (d.w.z. de wortels van de karakteristieke vergelijking) zijn $\lambda = \pm\, i\omega_0$, waarbij $\omega_0 = \sqrt{b}$. De algemene reële oplossing van de homogene differentiaalvergelijking is

$$x(t) = p \cos \omega_0 t + q \sin \omega_0 t \,,$$

waarbij p en q willekeurige constanten zijn. Door de vector $(p,-q)$ in poolcoördinaten te schrijven, d.w.z. $(p,-q) = (A_0 \cos \varphi_0, A_0 \sin \varphi_0)$, vinden we als oplossing

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \,,$$

d.w.z. een harmonische trilling met amplitude A_0, beginfase φ_0 en hoekfrequentie ω_0. De grootheid $T = 2\pi/\omega_0$ heet de trillingstijd (of de periode) en $\nu = 1/T = \omega_0/(2\pi)$ heet de frequentie van de trilling. De trilling is grafisch weergegeven in onderstaande figuur.

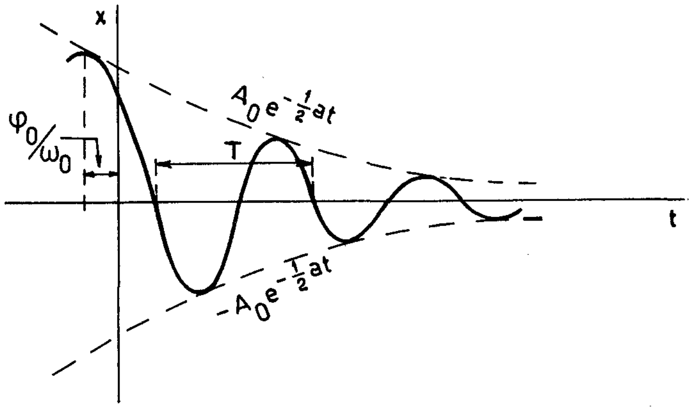


B) $0 < a^2 < 4b$. De karakteristieke wortels zijn nu $\lambda = -\frac{1}{2}a \pm i\omega_0$, waarbij $\omega_0 = \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}$. De algemene reële oplossing wordt

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}at}(p \cos \omega_0 t + q \sin \omega_0 t) =$$

$$= A_0 e^{-\frac{1}{2}at} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \;,$$

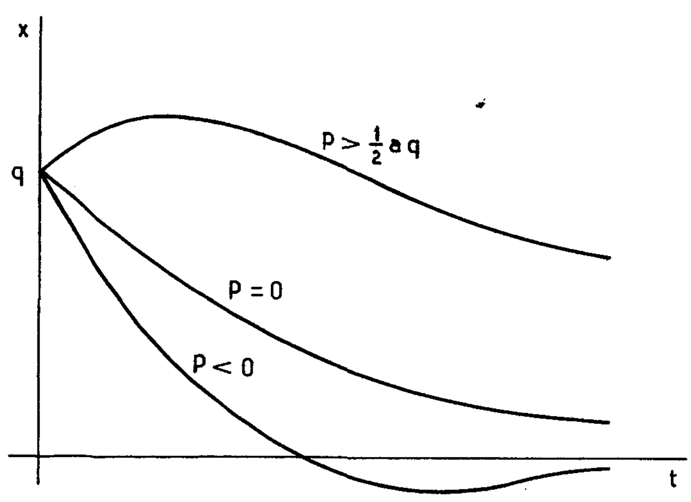
waarbij we weer $(p,-q) = (A_0 \cos \varphi_0, A_0 \sin \varphi_0)$ hebben geschreven. Dit is een gedempte trilling met beginamplitude A_0, beginfase φ_0 en hoekfrequentie ω_0. Ook hier heet $T = 2\pi/\omega_0$ de trillingstijd en $\nu = 1/T$ de frequentie.
Een grafische voorstelling van de trilling wordt gegeven in onderstaande figuur.



C) $0 < a^2 = 4b$. Er is één karakteristieke wortel $\lambda = -\frac{1}{2}a$. De algemene oplossing is

$$x(t) = (pt + q)e^{-\frac{1}{2}at} \;,$$

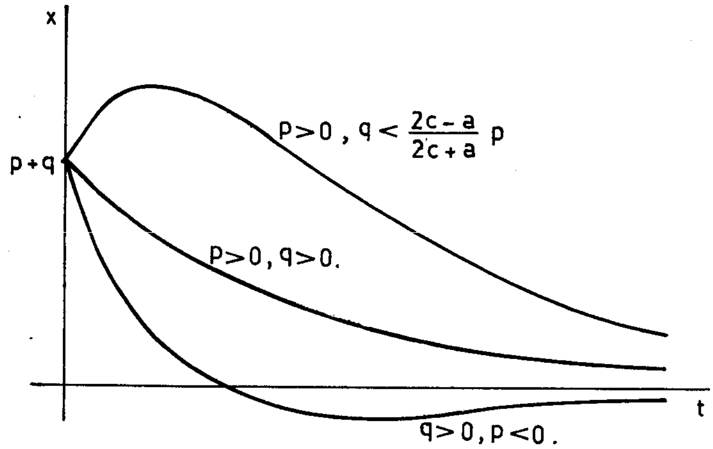
zie onderstaande figuur.



D) $a^2 > 4b > 0$. De karakteristieke wortels zijn $\lambda = -\frac{1}{2}a \pm c$, waarbij $c = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$. De algemene oplossing is

$$x(t) = pe^{-(\frac{1}{2}a-c)t} + qe^{-(\frac{1}{2}a+c)t},$$

zie onderstaande figuur.



Men noemt het systeem in het geval

A) ongedempt

B) onderkritisch gedempt

C) kritisch gedempt

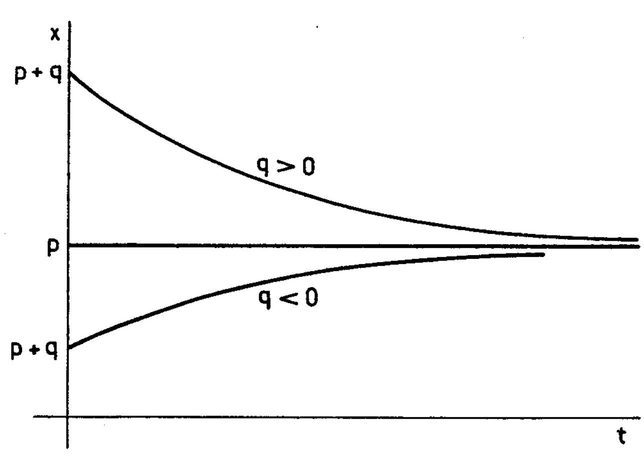
D) bovenkritisch gedempt.

In de gevallen A en B heeft de functie $x(t)$ oneindig veel nulpunten, d.w.z., de evenwichtsstand wordt oneindig vaak gepasseerd, terwijl dat in de gevallen C en D hoogstens één keer gebeurt (ga na).

We beschouwen nog twee bijzondere gevallen:

E) $b = 0$, $a > 0$. De karakteristieke wortels zijn $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -a$. De algemene oplossing is

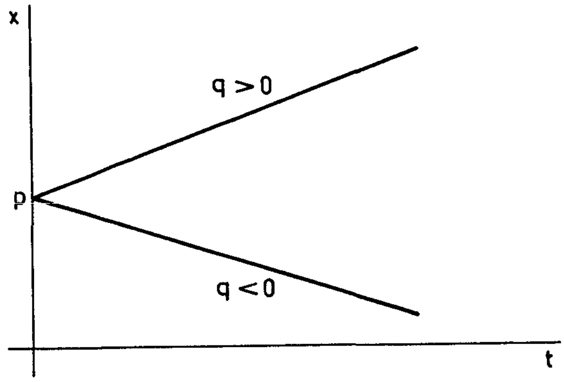
$$x(t) = p + qe^{-at}, \quad \text{zie onderstaande figuur .}$$



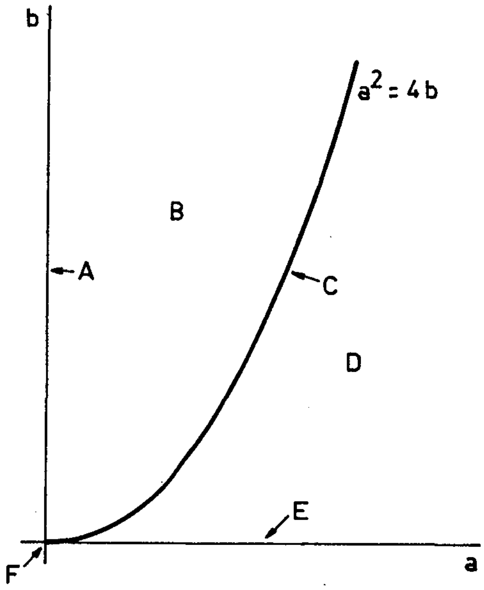
F) $a = b = 0$. Er is één karakteristieke wortel, nl. $\lambda = 0$.
De algemene oplossing is

$$x(t) = p + qt \ ,$$

zie onderstaande figuur.



De onderstaande figuur geeft een overzicht van de verschillende gevallen in het eerste kwadrant van het (a,b)-vlak.



6.5.5. We beschouwen nu de inhomogene vergelijking

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \tag{1}$$

en wel voor het geval $f(t) = A \cos \omega t$ met $A > 0$, $\omega > 0$. We nemen eerst aan dat $a = 0$, $b > 0$. Dit correspondeert met het geval A bij de homogene vergelijking (zie blz. 186). We schrijven $f(t) = \mathrm{Re}\, Ae^{i\omega t}$. We bepalen nu een particuliere oplossing van

$$\ddot{x}(t) + bx(t) = A \cos \omega t \tag{2}$$

door de vergelijking

$$\ddot{y}(t) + by(t) = Ae^{i\omega t} \tag{3}$$

op te lossen en vervolgens $x(t) = \text{Re } y(t)$ te stellen. Probeer als particuliere oplossing van (3): $y(t) = B_0 e^{i\omega t}$, dan volgt na substitutie in (3): $B_0(-\omega^2 + \omega_0^2) = A$, waarbij $\omega_0 = \sqrt{b}$. De laatste vergelijking heeft een oplossing als $\omega \neq \omega_0$. In dat geval vinden we

$$y(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega t}$$

als particuliere oplossing van (3).

De functie

$$x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

is derhalve een particuliere oplossing van (2).

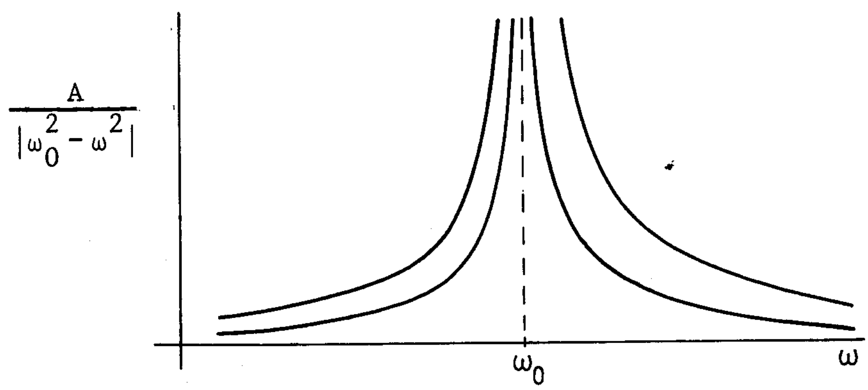
De algemene oplossing van (2) is

$$x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \ \omega \neq \omega_0 . \tag{4}$$

In het algemeen is de oplossing alleen periodiek als $A_0 = 0$.

De amplitude van de periodieke oplossing is $B = A/|\omega_0^2 - \omega^2|$, de beginfase is 0 als $\omega < \omega_0$ en π als $\omega > \omega_0$.

In onderstaande figuur is de amplitude uitgezet als functie van de hoekfrequentie ω.



De algemene oplossing (4) is een combinatie van periodieke functies. Het gedrag van zo'n functie is in het algemeen zeer onregelmatig.
We onderzoeken nu het speciale geval dat ω dicht bij ω_0 ligt. Het blijkt dat de amplitude periodiek varieert met periode $2\pi/|\omega - \omega_0|$.
We kunnen dit als volgt inzien. Zij $\omega_0 = \omega + \delta$ en schrijf $\varphi(t) = \delta t + \varphi_0$.
Dan vinden we

$$x(t) = B\cos\omega t + A_0\cos(\omega t + \varphi(t)) = (B + A_0\cos\varphi(t))\cos\omega t -$$

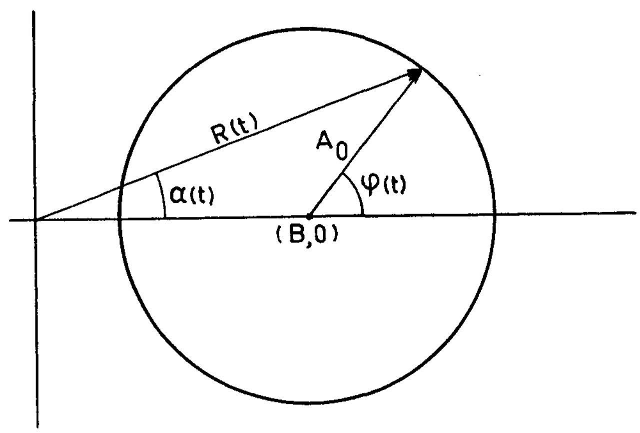
$$- A_0\sin\varphi(t)\sin\omega t = R(t)\cos(\omega t + \alpha(t)) ,$$

waarbij $R(t)$ en $\alpha(t)$ worden gegeven door

$$B + A_0\cos\varphi(t) = R(t)\cos\alpha(t) ,$$

$$A_0\sin\varphi(t) = R(t)\sin\alpha(t) ,$$

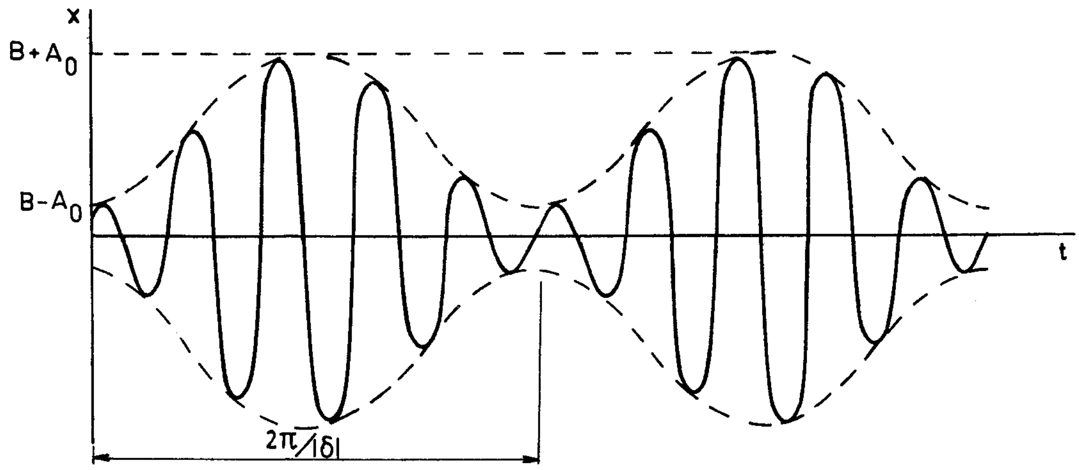
zie onderstaande figuur, waarin het geval $B > A_0$ is geschetst.



Als δ klein is, dan verandert φ en derhalve α erg langzaam. Verder geldt

$$R^2(t) = B^2 + A_0^2 + 2A_0B\cos\varphi(t) .$$

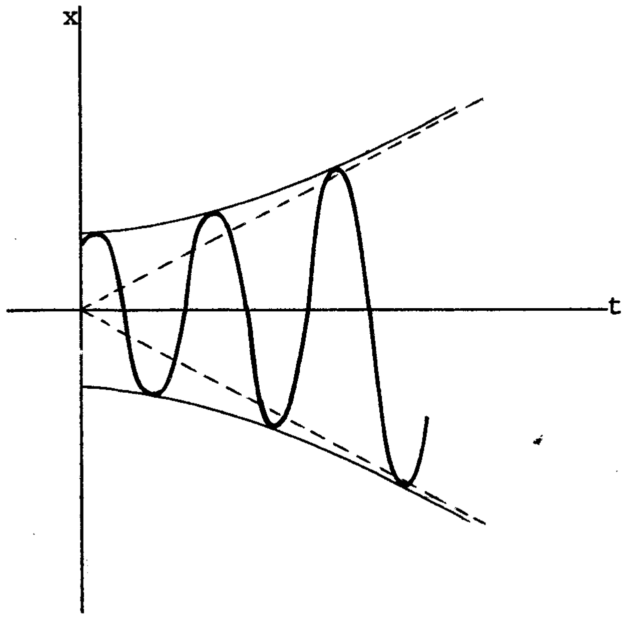
In de hierna volgende figuur (zie volgende pagina) is de grafiek geschetst van de trilling $x(t)$ als gegeven door (4).



Als $\omega = \omega_0$, dan proberen we als particuliere oplossing van (3): $y = Bte^{i\omega_0 t}$.
Substitutie in de vergelijking $\ddot{y} + \omega_0^2 y = Ae^{i\omega_0 t}$ levert $B = \frac{A}{2i\omega_0}$. In dit geval is

$$x(t) = \frac{A}{2\omega_0}\, t \sin \omega_0 t + A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

de algemene oplossing van (2); zie onderstaande figuur.



We kunnen ons deze situatie ontstaan denken door δ naar nul te laten naderen in het eerder genoemde geval (vergelijk de beide figuren op deze pagina).

6.5.6. We beschouwen nu het geval $a > 0$, $b > 0$, $f(t) = A \cos \omega t$. We zoeken eerst een particuliere oplossing van de vergelijking

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = Ae^{i\omega t} ,$$

van de vorm $y = Be^{i\omega t}$. Na substitutie volgt voor B de vergelijking

$$(-\omega^2 + ia\omega + b)B = A ,$$

met oplossing

$$B = \frac{A}{b - \omega^2 + ia\omega} = Qe^{i\alpha} ,$$

waarbij

$$Q = \frac{A}{\sqrt{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}} , \quad \alpha = \arg \frac{A}{b - \omega^2 + ia\omega} .$$

De algemene oplossing van de vergelijking $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = A \cos \omega t$ luidt dan

$$x(t) = Q\cos(\omega t + \alpha) + x_0(t)$$

waarbij $x_0(t)$ de algemene oplossing is van de homogene vergelijking. De expliciete gedaante van $x_0(t)$ hangt af van de parameters a en b (zie de gevallen B, C en D van de homogene vergelijking), maar steeds zal gelden $x_0(t) \to 0$ $(t \to \infty)$. We zien dat op den duur alle oplossingen heel veel gaan lijken op de particuliere oplossing

$$x(t) = Q\cos(\omega t + \alpha) .$$

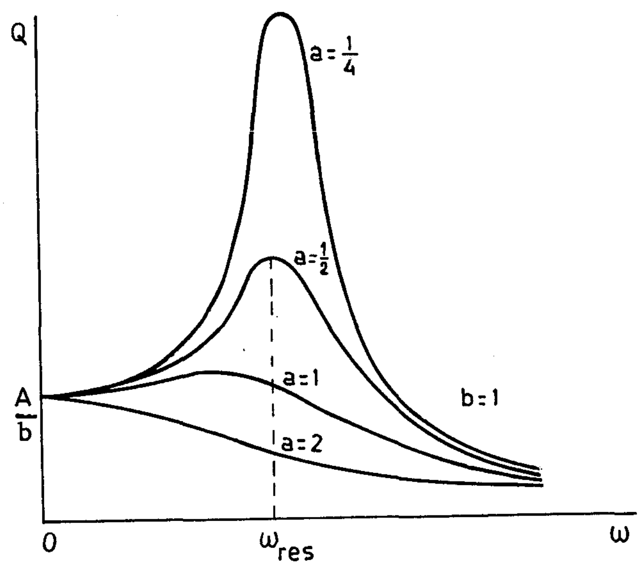
Deze oplossing is ook de enige periodieke oplossing van het systeem. Men noemt $Q\cos(\omega t + \alpha)$ de <u>stationaire oplossing</u> van de vergelijking; fysisch beschrijft deze oplossing de zg. <u>gedwongen trilling</u> van het systeem. De term $x_0(t)$ in de algemene oplossing correspondeert met een <u>inschakel-verschijnsel</u> dat na zekere tijd verwaarloosbaar wordt t.o.v. de gedwongen trilling.

De grafiek van de functie $Q = Q(\omega)$ heet de <u>resonantiekromme</u>. Als $b \leq \frac{1}{2}a^2$, dan is Q maximaal voor $\omega = 0$. Als $b > \frac{1}{2}a^2$, dan is Q maximaal voor

$\omega = \omega_{res} = \sqrt{b - \frac{1}{2}a^2}$, de <u>resonantiehoekfrequentie</u>. In dit geval geldt

$\omega_{res} < \omega_0 = \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}$ (zie geval B van de homogene vergelijking).

We noemen ω_0 de <u>eigenhoekfrequentie</u> van het systeem. Verder noemen we $\nu_{res} = \omega_{res}/(2\pi)$ de <u>resonantiefrequentie</u> en $\nu_0 = \omega_0/(2\pi)$ de <u>eigenfrequentie</u> van het systeem. Gewoonlijk is a^2 veel kleiner dan b. In dat geval is $\omega_{res} \approx \omega_0 \approx \sqrt{b}$. Merk op dat voor $\omega = \sqrt{b}$ geldt $B = A/(ia\sqrt{b})$, dus $Q = A/(a\sqrt{b})$ en $\alpha = -\pi/2$. In onderstaande figuur zijn een aantal resonantiekrommen getekend voor $a = 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$ en $b = 1$.



6.5.7. Tenslotte bespreken we nog een voorbeeld van een inhomogene differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten, waarbij het rechterlid een discontinue functie bevat.

<u>Voorbeeld.</u> $\ddot{x} + x = 1$ voor $0 \le t < T$,

$\ddot{x} + x = 0$ voor $t > T$,

onder de beginvoorwaarden $x(0) = \dot{x}(0) = 0$; (de constanten in de algemene oplossing dienen zo te worden gekozen, dat $x(0) = \dot{x}(0) = 0$). In dit geval kan men niet van de oplossing eisen dat ze twee keer differentieerbaar is in $t = T$. Wanneer in een differentiaalvergelijking het rechterlid een sprong maakt, dan neemt de hoogste afgeleide die in de differentiaalvergelijking voorkomt, deze sprong over. De lagere orde afgeleiden blijven continu in het sprongpunt. In bovenstaande vergelijking zal $\ddot{x}(t)$ een sprong vertonen in $t = T$, en $\dot{x}(t)$, $x(t)$ zullen daar continu zijn. We bepalen nu eerst de oplossing op $[0,T)$ en we gebruiken daarna $x(T) = \lim_{t\uparrow T} x(t)$ en $\dot{x}(T) = \lim_{t\uparrow T} \dot{x}(t)$ als beginwaarden om het probleem op (T,∞) op te lossen.

De algemene oplossing van de homogene vergelijking is

$$x(t) = a \cos t + b \sin t . \tag{*}$$

Een particuliere oplossing van de vergelijking $\ddot{x} + x = 1$ is $x(t) = 1$ voor alle t. De algemene oplossing van deze vergelijking luidt dan

$$x(t) = 1 + a \cos t + b \sin t .$$

We dienen nu a,b zodanig te bepalen dat de oplossing $x(t)$ voldoet aan $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Dit levert twee vergelijkingen voor a en b: $1 + a = 0$, $b = 0$. De gevraagde oplossing $x(t)$ luidt dus

$$x(t) = 1 - \cos t \text{ voor } 0 < t < T.$$

Bepaal nu

$$\lim_{t\uparrow T} x(t) = 1 - \cos T, \quad \lim_{t\uparrow T} \dot{x}(t) = \sin T .$$

Op het interval $t > T$ is de differentiaalvergelijking homogeen met algemene oplossing (*). De constanten a en b dienen zo bepaald te worden dat

$$x(T) = a \cos T + b \sin T = 1 - \cos T ,$$

$$\dot{x}(T) = -a \sin T + b \cos T = \sin T .$$

Uit deze twee vergelijkingen zijn a en b eenvoudig op te lossen: $a = \cos T - 1$, $b = \sin T$. De gezochte oplossing van de differentiaalvergelijking luidt dan

$$x(t) = (\cos T - 1)\cos t + \sin T \sin t = \cos(t - T) - \cos t \text{ voor } t > T.$$