TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het College

Wiskunde 10

Najaarssemester 1981

J d9

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het college

Wiskunde 10

Dictaatnr. 2.203 Prijs *ƒ* 4,00

Inhoudsbeschrijving
Vraagstukken bij het college Wiskunde 10
1981

JdG, 5 Juli 2005

M. Vriends
Wsk

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het college

Wiskunde 10

Najaarssemester 1981

Week 1

1.1. Schets de grafiek van de funktie f met $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 7$.

1.2. Gegeven is de funktie f met $f(x) \doteq x^3 - 3x$.
Schets de grafieken van de funkties

a) $f(-x)$ c) $f(3x)$ e) $3 + f(x)$.
b) $3f(x)$ d) $f(3 + x)$

1.3. Gegeven is de funktie f gedefinieerd door $f(x) = 2x^2 + x + 1$.
Bereken:

a) $f + f$ b) $f \times f$ c) $f \circ f$.

1.4. Ontbind het polynoom $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ in lineaire faktoren.

1.5. Bepaal a zō dat het polynoom $x^3 - 3x^2 + (a + 1)x - a + 1$ deelbaar is door $x + 1$.
Ontbind voor de gevonden a het polynoom in factoren.

1.6. Bereken $q(x)$ en $r(x)$ uit de formule
$f(x) = q(x) . d(x) + r(x)$ (met graad $r <$ graad d of r is het nulpolynoom) in de volgende gevallen:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$, $d(x) = x^2 + 3$

b) $f(x) = x^5 - 6x + 5$, $d(x) = x^2$

c) $f(x) = x^3 - 12x$, $d(x) = 8x^{19} + 25x^{13} + 7$

d) $f(x) = 4x^4 - 10x^3 + 11x^2 - 5$, $d(x) = 2x^3 - 6$.

1.7. Bepaal de rest van de deling $(x^{10} - 17x^6 + 15x^2 + 3x + 6) : (x^2 - x - 2)$ zonder de deling uit te voeren.

1.8. Het polynoom p, gedefinieerd door $p(x) = x^5 - x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 17x + 5$ heeft 1 als nulpunt.
Bepaal de multipliciteit van dit nulpunt.

1.9. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de parabool $y^2 = 6x$ die met de positieve x-as een hoek $\frac{\pi}{4}$ maakt.

1.10. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de parabool $y^2 = -2x$ door het punt $(-2,2)$.

1.11. Stel de vergelijking op van de hyperbool met brandpunten (a,a) en $(-a, -a)$ en met de eigenschap dat voor ieder punt op de kromme geldt dat de absolute waarde van het verschil van de afstanden tot de brandpunten gelijk is aan $2a$ $(a > 0)$.

1.12. Bepaal de lengte van de zijden van het ingeschreven vierkant van de ellips $x^2 + 3y^2 = 27$ waarvan de zijden evenwijdig met de assen lopen.

1.13. Bepaal de vergelijking van de raaklijnen aan de ellips

$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{16} = 1$ die met de positieve x-as een hoek $\frac{\pi}{6}$ maken.

1.14. Gegeven $a,b,p \in \mathbb{R}$. Schets de volgende verzamelingen in $\mathbb{R}^2$.

a) $\{(2pt^2,2pt) \mid t \in \mathbb{R}\}$

b) $\{(a \cos t, b \sin t) \mid t \in [0,2\pi)\}$

c) $\{(\frac{a}{2}(e^t + e^{-t}),\frac{b}{2}(e^t - e^{-t})) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

1.15. Schets in één figuur de grafieken van de funkties f_1, f_2, f_3 en f_4, gedefinieerd op het interval $[0, 3/2]$ door

$$f_1(x) = x^3,\ f_2(x) = x^{1/3},\ f_3(x) = x^4 \text{ en } f_4(x) = x^{1/4}.$$

Let in het bijzonder op het gedrag in de buurt van 0.

1.16. Schets in één figuur de grafieken van de funkties f_1 en f_2, wanneer $f_1(x) = x^2$ en $f_2(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$.

1.17. Schets de grafiek van de funktie f met

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} \qquad (x^2 \neq 1).$$

1.18. Voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt de ongelijkheid

$$|x^2 - 1| \leq 2x + 2 \ ?$$

1.19. a) Bewijs dat $|x^4 - x^3 + 3x^2 + x + 2| < 40$ voor $|x| < 2$.

b) Bewijs dat $|x^3 + x^2 + 1| > 899$ voor $|x| > 10$.

1.20. a) Bewijs dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ $|1 - 3 \sin^3 x| \leq 4$

b) Bewijs dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ $|1 - 2^{-x^2} + \cos 3x| \leq 3$.

1.21. Gegeven is het polynoom p gedefinieerd door

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0 \text{ met}$$

$$p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}.$$

Verder is gegeven dat $x_0 \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{Z}$ en $p(x_0) = 0$.

Bewijs dat x_0 een deler is van p_0.

1.22. Uit een metalen plaatje van 16 cm bij 21 cm wordt een bakje gemaakt door uit de vier hoeken even grote vierkanten te knippen, de randen om te vouwen en dicht te solderen.

a) Druk de inhoud van het bakje uit in de hoogte x.

b) Bepaal de maximale inhoud.

c) Teken de grafiek van de inhoud als funktie van x.

1.23. Bewijs dat voor het vierdegraads polynoom f met

$f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ geldt dat $|f(x)| \leq 1$ op het interval $[-1,1]$.

1.24. Bepaal de rest bij de volgende deling:

$$(x^{30} - 512\, x^{21} + 1) : (x^2 - x - 2).$$

1.25. Bepaal a en b zo dat $x^4 + x^3 + x^2 + a\,x + b$

deelbaar is door $x^2 - 2\,x + 1$ zonder de deling uit te voeren.

1.26. Voor welke p raakt de rechte $y = \frac{1}{2}x + 2$ aan de parabool $y^2 = 2px$?

1.27. Bepaal de vergelijking van de parabool met brandpunt (1,1) en richtlijn $y = - x$.
Bewijs dat de gevonden parabool de coördinaatassen raakt.

1.28. Bewijs dat de lichtstralen, afkomstig van een lichtbron in het brandpunt van een parabool, die reflecteren op de parabool alle evenwijdig uittreden.

1.29. Bewijs dat alle parabolen gelijkvormig zijn.

1.30. Bepaal de vergelijking van de rechte waarop de koorde van de ellips $x^2 + 4y^2 = 16$ ligt die $(2,-1)$ als midden heeft.

1.31. Gegeven is de vergelijking $(x - 6)^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2$.
Onderzoek welke soort kegelsnede dit voorstelt voor resp. $\varepsilon = 1/2, 1, 2$.

1.32. De rechte ℓ snijdt de hyperbool $xy = 1$ in A en B.
Een rechte $\ell' \perp \ell$ snijdt deze hyperbool in C en D.
Bewijs dat voor deze vier punten A,B,C en D geldt dat één van de vier het hoogtepunt is van de driehoek, gevormd door de overige drie punten.

1.33. Voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$|x + 7| < |x| - 5 \;?$$

1.34. Bewijs dat de vergelijking $x^4 + 6x^2 - 3x + 10 = 0$ geen reële wortels heeft.

1.35. a) Bewijs dat de nulpunten van het polynoom $x^3 + 2x^2 + 5$ liggen in het interval $(-3,3)$.

b) Toon aan, dat alle wortels van de vergelijking $2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 3 = 0$ liggen in het interval $(-2,2)$.

1.36. a) Bewijs dat voor alle y met $|y| \leq \frac{1}{3}$

geldt dat $\left|\dfrac{y^2 - 5y^5}{2 + y^5}\right| < \dfrac{1}{10}$.

b) Bewijs dat van alle x met $|x| > 3$

geldt dat $\left|\dfrac{x^3 - 5}{2x^5 + 1}\right| < \dfrac{1}{10}$.

1.37. $$f(x) = \frac{1 + x}{1 - x} \quad (x \neq 1) \text{ en } g(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

Te bewijzen:

a) $(f \circ g)(x) = - f(x)$ voor $x \neq 0$, $x \neq 1$.

b) $(g \circ f)(x) = f(-x)$ voor $x \neq 1$, $x \neq - 1$.

c) Bepaal $(f \circ f)(x)$ voor die reële x waarvoor dit zinvol is.

1.38. Schets de grafieken van de funkties f_1, f_2 en f_3 gedefinieerd door

$f_1(x) = x + \ln x \quad (x > 0)$,

$f_2(x) = x^{-2}e^{x} \quad (x \neq 0)$ en

$f_3(x) = x^2 \sin x$.

Week 2.

2.1. Bewijs dat ${}^2\log 3$ irrationaal is.

2.2. Bewijs dat er geen grootste rationaal getal bestaat dat kleiner is dan 1.

2.3. Voor twee reële getallen a en b is gegeven dat voor iedere (reële) $\varepsilon > 0$ geldt dat $|a-b| < \varepsilon$.
Bewijs dat $a = b$.

2.4. Uit een schaakbord wordt het veld in de linker bovenhoek en het veld in de rechter benedenhoek (de velden a8 en h1) weggelaten.
Bewijs dat de overgebleven velden niet bedekt kunnen worden met dominostenen ter grootte van twee velden.

2.5. Bewijs met volledige inductie:

a) $1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$ $\qquad n \in \mathbb{N}$

b) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ $\qquad n \in \mathbb{N}$.

2.6. Bewijs dat $(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})\dots(1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{n+2}{2(n+1)}$ $\qquad n \in \mathbb{N}$.

2.7. Zij $h \in \mathbb{R}$, $h \geq -1$.
Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$(1 + h)^{n + 1/2} \geq 1 + (n + \tfrac{1}{2})h.$$

2.8. Zij U(n) de uitspraak:
Als in een zaal waarin n mensen aanwezig zijn, één persoon ouder is dan 65 jaar, dan zijn alle aanwezigen ouder dan 65 jaar.
U(1) is klaarblijkelijk juist.
Stel dat U(n) juist is voor zekere $n \in \mathbb{N}$, en stel dat in een zaal $n+1$ personen aanwezig zijn, van wie er één (zeg A) ouder is dan 65 jaar.
Stuur een ander persoon (zeg B) de zaal uit, dan blijven er n personen over die op grond van de inductieveronderstelling allemaal ouder zijn dan 65 jaar.
Verwijder nu één van de aanwezigen, (van wie dus vaststaat dat hij ouder is dan 65 jaar) en haal B terug. Het aantal mensen in de zaal is nu weer n en van de aanwezigen weten we, dat ze allen, op B na ouder zijn dan 65 jaar. Op grond van de inductieveronderstelling is dus ook B ouder dan 65 jaar.

Dus geldt $U(n + 1)$.
Met volledige inductie blijkt dus dat $U(n)$ geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave: Zoek de fout in de kennelijk onjuiste redenering.

2.9. De funktie $f : \mathbb{R} \to [2,\infty)$ gedefinieerd door $f(x) = x^2 + 2x + 3$ is surjectief maar niet bijectief (nagaan met grafiek).
Bepaal intervallen A en B zodat $A \cup B = \mathbb{R}$ en de funkties $g : A \to [2,\infty)$ en $h : B \to [2,\infty)$ gedefinieerd door $g(x) = f(x)$ voor alle $x \in A$ en $h(x) = f(x)$ voor alle $x \in B$ bijectief zijn.
Bepaal de inversen van g en h.

2.10. Ga grafisch na of de funktie $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ injectief, surjectief, resp. bijectief is in de volgende gevallen.

a) $f(x) = \tan \frac{\pi}{2} x$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sin \frac{\pi}{2} x}$ $x \neq 0$

$f(0) = 0$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin \pi x}$ $x \neq 0$

$f(0) = 0$

d) $f(x) = \cot \pi x$ $x \neq 0$

$f(0) = 0$

e) $f(x) = e^{x+|x|}$

f) $f(x) = x^3 + 3x^2$

g) $f(x) = (x + 1)^3 + 3(x + 1)^2$

h) $f(x) = (x - 1)^3 + 3(x - 1)^2$.

2.11. Bereken:

a) $\arcsin(- \frac{1}{2}\sqrt{3})$

b) $\arcsin(\sin \frac{4\pi}{3})$

c) $\sin(\arcsin(- \frac{1}{2}\sqrt{3}))$

d) $\arctan \sqrt{3}$

e) $\arctan(\tan \frac{7\pi}{6})$

f) $\tan(\arctan(- \frac{1}{3}\sqrt{3}))$

g) $\sin(\arccos(- \frac{5}{13}))$

h) $\sin(\arcsin \frac{\pi}{6})$.

2.12. Bereken:

a) $\arctan 2 + \arctan 3$

b) $2 \arctan (1 + \sqrt{2})$.

2.13. Bewijs:

a) $\arcsin(-x) = -\arcsin x \qquad x \in [-1,1]$

b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x \qquad x \in [-1,1]$

c) $\arctan x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad x \in \mathbb{R}.$

2.14. Teken de grafieken van de funkties:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeven door $f(x) = \arcsin(\sin x)$

en

$g: [-1,1] \to \mathbb{R}$, gegeven door $g(x) = \cos(\arccos x)$.

2.15. Bewijs dat voor alle reële x en y geldt:

a) $x^2 - 2xy + 3y^2 \geq 0$

b) $x^2 - 6x + y^2 - 4y + 14 > 0$.

2.16. Bewijs dat voor alle reële a en b met $ab \neq 0$ geldt dat

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geq 2.$$

2.17. Bewijs dat voor alle reele a, b, c en d geldt dat

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

2.18. Een natuurlijk getal p heet een priemgetal als het precies twee natuurlijke getallen als deler heeft. (b.v. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...)
Bewijs dat het aantal priemgetallen niet eindig is.

2.19. Bewijs de volgende uitspraak:

De gebieden waarin het platte vlak door n rechten ($n \in \mathbb{N}$) wordt verdeeld kunnen met twee kleuren worden gekleurd zonder dat aangrenzende gebieden dezelfde kleur hebben.

2.20. Zij $h \in \mathbb{R}$, $h \geq -1$ en $n \in \mathbb{N}$.
Bewijs dat $(1+h)^{1/n} \leq 1 + \frac{h}{n}$.

2.21. Bewijs dat de som van de derdemachten van drie opeenvolgende natuurlijke getallen deelbaar is door 9.

2.22. De torens van Hanoi:
We beschikken over drie staven A,B en C die, bevestigd op een voetstuk, verticaal omhoog staan. Staaf A is voorzien van n schijven ($n \in \mathbb{N}$) met in het midden een gat en met een afnemende diameter (de grootste onder).

a) Bewijs dat het mogelijk is de hele toren schijven naar staaf B te verplaatsen , door slechts één schijf tegelijk te verplaatsen van de ene naar een andere staaf waarbij geen schijf op een kleinere wordt gelegd.

b) Bewijs dat het mogelijk is aan de onder a) genoemde opdracht te voldoen door niet meer dan $2^n - 1$ keer een schijf te verplaatsen.

2.23. De afbeeldingen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door $f_1(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ en $f_2(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Onderzoek de injectiviteit, surjectiviteit en bijectiviteit van f_1 en f_2 en bepaal, indien mogelijk, de inverse.

2.24. Teken de grafiek van de funktie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

$$f(0) = 0.$$

2.25. Bepaal de oplossingsverzameling in $\mathbb{R}$ van de vergelijking

$$\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin y.$$

2.26.* Bewijs dat voor alle niet-negatieve reële a, b, c en d geldt dat

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a + b + c + d}{4}$$

2.27. Bewijs dat voor alle niet-negatieve a, b en c in $\mathbb{R}$ geldt dat

$$(a + b)\ (b + c)\ (c + a) \geq 8\ abc.$$

Week 3.

3.1. Onderzoek of de volgende uitspraken juist zijn:

a) $\sum_{i=1}^{12} a_i = a_1 + a_2 + \sum_{k=3}^{12} a_k$

b) $\sum_{k=1}^{n} 1 = 1$

c) $\sum_{k=1}^{n} 2 = 2n$

d) $(\sum_{k=1}^{3} a_k)^2 = \sum_{k=1}^{3} a_k{}^2$

e) $\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$

f) $\sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{\ell=1}^{5} a_{\ell+5} = \sum_{k=1}^{10} a_k$

g) $\sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{2} (a_k + b_\ell) = \sum_{\ell=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} (a_k + b_\ell)$

h) $\sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{2} a_k \cdot b_\ell = \sum_{\ell=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} a_k . b_\ell$.

3.2. In een land waar men een alfabet gebruikt dat uit 26 letters bestaat worden autonummers gevormd uit 3 verschillende letters, gevolgd door 3 verschillende cijfers.
Hoeveel verschillende autonummers zijn er mogelijk?

3.3. Bereken: a) $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3}$

b) $\dfrac{\binom{7}{5} + 2\binom{7}{4} + \binom{7}{3}}{\binom{9}{5}}$.

3.4. Aan een stok worden vijf vlaggen onder elkaar bevestigd. Hoeveel verschillende signalen kunnen met drie identieke rode en twee identieke blauwe vlaggen worden gegeven?

3.5. a) Op hoeveel verschillende manieren kan uit 7 personen een commissie van 4 leden worden benoemd?

b) En als die commissie uit een voorzitter, secretaris, penningmeester en vice-voorzitter moet bestaan?

3.6. Bepaal de coëfficiënt van x^4 in

a) $(3x + 5)^{12}$

b) $(2x^2 + \frac{1}{3x})^5$.

3.7. Bewijs dat $\binom{n+2}{k+1} = \binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

voor $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $k = 1,\ldots, n-1$.

3.8. Bereken $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ $\quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3.9. Bewijs dat op den duur (o.d.d.) geldt dat $(1 + \frac{1}{n})^{100} < 2$.

3.10. Onderzoek of de rij (a_n) gegeven door $a_n = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, monotoon is.

3.11. Onderzoek of de rij (a_n) gegeven door $a_n = n^2 - 100n$ monotoon of begrensd is.

3.12. Bewijs dat o.d.d.

$$\frac{\ln n}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

3.13. Gegeven is de rij (a_n) met $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$.
Bewijs dat deze rij monotoon en begrensd is.

3.14. Voor rijen (a_n) gebruiken we de notatie S_n voor de som van de eerste n elementen.
Een rij (a_n) heet een <u>rekenkundige rij</u> als er een getal v bestaat, zodat $a_{n+1} = v + a_n$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$.
Bewijs dat voor een rekenkundige rij (a_n) geldt:

a) $a_n = a_1 + (n-1)v$

b) $S_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$.

3.15. Een rij (a_n) heet een <u>meetkundige rij</u> als er een getal r bestaat, zodat $a_{n+1} = r\,a_n$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$.
Bewijs dat voor een meetkundige rij (a_n) geldt:

a) $a_n = a_1\, r^{n-1}$

b) $S_n = a_1 \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$ $\quad (r \neq 1)$.

3.16. Van de rij (a_n) is gegeven dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $S_n = \alpha n^2 + \beta n$.
Bewijs dat de rij rekenkundig is.

3.17. a) Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 2.$$

b) Bereken $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5} + 1 + 5 + 25$.

3.18. a) Bewijs dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$(x^n - 1) = (x - 1)\,(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1)$$

b) Bepaal $\dfrac{b^n - a^n}{b - a}$ $\qquad a,b \in \mathbb{R},\ a \neq b$.

3.19. De rij (a_n) is gegeven door

$$a_n = 1 + (-1)^{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

a) Is de rij begrensd?

b) Is de rij o.d.d. monotoon?

c) Heeft de rij een limiet?

3.20. a) Voor welke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\left| \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1} - 2 \right| < \frac{1}{100} \ ?$$

b) Gegeven een getal $\varepsilon > 0$.

Geldt dat $\frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1} \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ o.d.d. ?

c) Bepaal zo mogelijk $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$.

3.21. a) De rij (a_n) is gegeven door $a_n = n^2 + 21n$.

Zoek een N zó dat voor $n > N$ geldt dat $a_n > 10.000$.

b) De rij (a_n) is gegeven door $a_n = \frac{n + 1}{n^2 + 2}$.

Zoek een N zó dat voor $n > N$ geldt $a_n < 10^{-3}$.

3.22. Bewijs met behulp van de definitie van $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ dat:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n + 4} = 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - n^2}{2n^2} = -\frac{1}{2}$.

3.23. Bewijs dat $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

3.24. Stel er zijn 10 politieke partijen met elk 15 kamerzetels. Op hoeveel manieren kan er een kabinet gevormd worden dat steunt op een meerderheid van de partijen? (Neem aan dat het stemgedrag binnen alle partijen uniform is.)

3.25. Bepaal de coëfficiënt van x^4 in $(x^2 + x + 2)^7$.

3.26. Bewijs dat:

a) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ $\qquad n \in \mathbb{N},\ k = 1,\ldots,n$

b) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ $\qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3.27. Bewijs dat

a) $\frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$ $\qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \le 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ $\qquad n \in \mathbb{N}$

c) $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!}$ $\qquad n \in \mathbb{N},\ k = 0,1,\ldots,n$

d) $(1 + \frac{1}{n})^n \le 3$ $\qquad n \in \mathbb{N}$.

3.28. a) Bepaal de extrema van de funktie f met $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 45x \quad (x \in \mathbb{R})$.

b) Onderzoek of de rij (a_n) met $a_n = 4n^3 - 24n^2 + 45n$ monotoon is.

3.29. Bewijs dat de rij (a_n), die gegeven is door $a_n = (1 + n)^{1/n}$, begrensd is.

3.30. a) Van de rij (a_n) is gegeven dat $S_n = n^2 + 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Is deze rij rekenkundig

b) Van de rij (a_n) is gegeven dat $S_n = 2^n$ $\quad (n \in \mathbb{N})$. Is deze rij meetkundig?

3.31. De rij (a_n) is gegeven door $a_n = 2n + 3\sqrt{(n-5)^2}$.

a) Is dit een rekenkundige rij?

b) Bepaal S_n als funktie van n.

3.32. a) De rij (a_n) is gegeven door $a_n = 2^n + n$. Bepaal S_n als funktie van n.

b) Dezelfde vraag als $a_n = n^2$. (Gebruik dat S_n een derdegraads funktie van n is.)

3.33. Van de rij (a_n) is gegeven dat er een $\varepsilon > 0$ bestaat zo dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $|a_{n+1} - a_n| = \varepsilon$. Bewijs dat de rij (a_n) divergeert.

3.34. a) Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n})$ k termen (k onafhankelijk van n).

b) Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n})$ n termen.

Week 4

4.1. Bepaal de volgende limieten, voor zover ze bestaan:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+7}{n^3}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8^n+6^n}{5^n+9^n}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+1}{2^n-1}$

4.2. Evenzo a) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos \pi n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin \pi n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.3. Bepaal $p \in \mathbb{R}$ als gegeven is

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^p(n^4+n^3-n^2+1)}{n^2+1} = C$ $(C > 0)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^p}{\sqrt{n(n^2-1)}} = C$ $(C > 0)$.

Bepaal de volgende limieten, voor zover ze bestaan:

4.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n + (-1)^n}{n^2+4}$.

4.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2^n+3^n}$.

4.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+(-2)^n}$.

4.7. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + \ln n}$.

4.8. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}\right)$.

4.9. Gegeven is de rij (a_n) met $a_n = (a + \frac{1}{n})^n$ waarbij $0 < a < 1$.

a) Kies $b \in \mathbb{R}$ met $a < b < 1$ en bewijs dat o.d.d. $\sqrt[n]{a_n} < b$.

b) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

4.10. Bepaal

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{2}{n})^{3n+5} .$$

4.11. a) Bewijs dat o.d.d. $(1 + \frac{1}{n})^{n^2} > 2^n$.

b) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(1 + \frac{1}{n})^{n^2}} = 0$.

4.12. Bepaal

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 + 2n + 4} - \sqrt{n^2 - 3n + 7}\right).$$

4.13. Bepaal $p \in \mathbb{R}$ als gegeven is dat

$$\lim_{n\to\infty} n^p(\sqrt{n^2 + 1} - n) = C \qquad (C > 0) .$$

4.14. De rij (a_n) is gegeven door $a_n = \frac{n!}{n^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) Bewijs dat o.d.d. $a_n > 2a_{n+1}$.

b) Bewijs dat de rij convergeert en bepaal de limiet.

4.15. De rij (a_n) is gegeven door $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

a) Bewijs dat de rij monotoon is.

b) Bewijs dat de rij convergent is.

4.16. De rij $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ is gegeven door $a_2 = 1$ en $a_{n+1} = a_n + \frac{a_n}{n}$ $(n \geq 2)$.

Bewijs dat $a_n = \frac{n}{2}$ $(n \geq 2)$.

4.17. De rij (a_n) is gegeven door $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Bewijs dat $a_n \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

(N.B. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ is een wortel van de vergelijking $x^2 - x - 1 = 0$.)

4.18. De rij (b_n) is gegeven door $b_1 = 2$ en $b_{n+1} = \frac{b_n^2}{1+b_n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Bewijs dat de rij convergeert en bereken zijn limiet.

4.19. De rij (a_n) is gegeven door $a_1 = \sqrt{2}$ en $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Bewijs dat de rij convergeert en bereken zijn limiet.

4.20. De rij (a_n) is gegeven door $a_1 = 3$ en $a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Bewijs dat de rij convergeert en bereken zijn limiet.

4.21. Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{3n} + 3^{2n}}$.

4.22. Bewijs dat $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}} = 1$.

4.23. Zij $0 < a < b < 1$.

Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} (a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n) = 0$.

4.24. Bereken

a) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n \ln n}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$.

4.25. Gegeven is dat de rij (a_n) stijgend is en dat $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$ bestaat.

b) Als gegeven is dat de rij (a_n) divergeert, bereken dan $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$.

4.26. a) Tot welk bedrag groeit in n jaar een storting van *f* 1000,- op een spaarrekening waarop jaarlijks 6% rente wordt vergoed.

b) Tot welk bedrag groeit ditzelfde bedrag in n jaar als maandelijks ½% rente wordt vergoed.

4.27. De rij (a_n) is gegeven door $a_1 = \sqrt{2}$ en $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) Bewijs dat $a_n < a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

b) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat.

c) Bepaal $\lim_{n\to\infty} a_n$.

4.28. De rij (t_n) is gegeven door

$$t_1 = \tfrac{1}{2} \quad \text{en} \quad t_{n+1} = \frac{2t_n + 1}{t_n + 2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Bewijs dat de rij monotoon is.

b) Bewijs dat de rij convergent is.

Aanvulling bij week 4

Opgave 1. Vul met behulp van Uw zakrekenmachine de volgende tabel in.

n	$\frac{1}{n}$	$\ln(1 + \frac{1}{n})$	$\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})$	$\frac{1}{n^2}$
1				
10				
100				
1000				
10 000				
100 000				
1 000 000				

Verklaar het resultaat. Wat vermoedt U voor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n} - \ln(1n + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}$?

Opgave 2. Vul met behulp van Uw zakrekenmachine de volgende tabel in.

n	$\frac{1}{n}$	$\sin\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$
1				
10				
100				
1000				
10 000				
100 000				
1 000 000				

Verklaar het resultaat. Wat vermoedt U voor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}$?

Opgave 3. Vul met behulp van Uw zakrekenmachine de volgende tabel in.

n	$(1+\frac{1}{n})^n$	$e-(1+\frac{1}{n})^n$	$\dfrac{e-(1+\frac{1}{n})^n}{\frac{1}{n}}$
1	2	0,72	0,72
10	2,59	0,12	1,25
100	2,70	0,013	1,35
1000	2,72	0,0014	1,36
10 000	2,72	0,00014	1,36
100 000	2,72	$9,5 \cdot 10^{-6}$	0,95
1 000 000	2,72	0	0

Verklaar het resultaat. Wat vermoedt U voor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e-(1+\frac{1}{n})^n}{\frac{1}{n}}$? 0

Opgave 4. Vul met behulp van Uw zakrekenmachine de volgende tabel in.

n	$\sqrt[2n]{2^n+3^n}$	$\sqrt[2n]{2^n+3^n}-\sqrt{3}$
10		
20		
30		
40		
50		

Opgave 5. De rij (a_n) is gegeven door $a_n = \left(\dfrac{n+8}{2n}\right)^n$.

Om de hoeveel termen zal men op den duur de limiet één decimaal nauwkeuriger benaderd hebben? Verifieer dit met Uw rekenmachine door $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_{16}, a_{17}$ en enige volgende termen te bepalen.

<u>Opgave 6</u>. De rij (a_n) is gegeven door $a_n = \frac{\ln n}{n^5}$.

Hoeveel keer zoveel termen zal men op den duur moeten nemen om de limiet één decimaal nauwkeuriger te benaderen? Verifieer dit met Uw rekenmachine door $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_{19}, a_{20}$ en enige volgende termen uit te rekenen.

<u>Opgave 7</u>. De rijen (a_n) en (b_n) worden gegeven door

$$a_n = \frac{n^4}{2^n} \quad \text{en} \quad b_n = \frac{1}{n^4 \ln(n+1)} .$$

a) Bereken $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Welke rij convergeert sneller en waarom?
b) Bereken a_{30} en b_{30}. Maak nu een schatting wanneer de rij (a_n) de rij (b_n) "inhaalt", en controleer dit met behulp van Uw rekenmachine.

<u>Opgave 8</u>. De rijen (a_n)en (b_n) worden gegeven door

$$a_n = \sin \frac{1}{n^2} \qquad b_n = \frac{3 \ln n}{n^2 \sqrt{n}}$$

Als we n twee keer zo groot maken, hoeveel keer zo klein wordt dan a_n, respectievelijk b_n? Verifieer dit door $a_1, a_2, a_4, a_{10}, a_{20}, a_{100}, a_{400}, a_{800}$ en $b_1, b_2, b_4, b_{10}, b_{20}, b_{100}, b_{400}$ en b_{800} uit te rekenen.

Week 5

5.1. Ga na of de funktie f begrensd is als

a) $f(x) = \arctan x$

b) $f(x) = \dfrac{3x - 5}{x^2 + 19}$

c) $f(x) = x^2 - |x|^3$.

5.2. Bewijs met de definitie van $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ dat $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\ln \ln x} = 0$.

Bereken de volgende limieten, voorzover ze bestaan:

5.3. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

5.4. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$.

5.5. Bewijs met de definitie van $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ dat $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-1} = 2$.

Bereken de volgende limieten, voorzover ze bestaan:

5.6. a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4 + 3x^2}{x^5 + 3x^3 + 2x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 5x^2 + 4x}$

d) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^{100} - 2^{100}}{h}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1 + x}}{x}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

5.8. Ga na of de funktie f continu is als

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$, $x \neq 1$ b) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$, $x \neq 1$, $x \neq -2$

$f(1) = 3$ $f(1) = 4$

$f(-2) = 0$.

5.9. Onder [x] verstaan we het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan x ([x] heet de <u>entier</u> van x).
Ga na of de funkties f_1 en f_2 gedefinieerd door

$$f_1(x) = [x] \text{ en } f_2(x) = x - [x]$$

continu zijn en schets de grafieken.

5.10. De funktie f wordt op $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} .$$

Is f continu voortzetbaar in 0 ?

5.11. De funktie f is als volgt gegeven:

$$f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0)$$

$$f(0) = 1 .$$

Ga na of f continu is.

Bepaal de volgende limieten, voorzover ze bestaan:

5.12. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$.

5.13. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}}$.

5.14. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 5x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx}{\tan x}$ $(n \in \mathbb{N})$.

5.15. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arcsin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arccos x}$

5.16. $\lim\limits_{x\to 0} \sin \pi x \sin \dfrac{\pi}{x}$.

5.17. a) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\pi - x}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin 2x - \sin \frac{\pi}{3}}{\tan x - \tan \frac{\pi}{6}}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \frac{\pi}{4} x - \cos \frac{\pi}{4} x}{x - 1}$

5.18. a) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^2 \ln x$ b) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 - 1) \ln(x - 1)^2$.

5.19. De rij (a_n) is gegeven door

$$a_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{en} \quad a_{n+1} = a_n - \sin a_n \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

a) Bewijs dat de rij monotoon daalt en naar beneden begrensd is door 0.

b) Bewijs dat de rij convergeert en bereken de limiet.

5.20. De rij (a_n) is gegeven door $a_1 = e^2$ en $a_{n+1} = a_n \ln a_n$ $(n \in \mathbb{N})$.
Bewijs uit het ongerijmde dat deze rij divergeert.

5.21. Bewijs dat de vergelijking $\tan x = x$ een wortel heeft op $(\pi, \frac{3\pi}{2})$.

Bereken de volgende limieten, voorzover ze bestaan:

5.22. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sin \sqrt{x + 1} - \sin \sqrt{x})$.

5.23. a) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x-e^x}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-e^x}$.

5.24. $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+1)\sin \frac{1}{n^2+n}$.

5.25. $\lim\limits_{x\downarrow 0} \sin x \ln x$.

5.26. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.

5.27. Bepaal de horizontale asymptoten aan de grafiek van de funktie f, gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{\ln(e^x + e^{-x})}{x} \quad (x \neq 0).$$

5.28. Bereken $\lim\limits_{x\downarrow 0} (\ln \frac{1}{x})^x$.

5.29. Bereken a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1 - 2 \sin \frac{\pi}{6} x}{1-x}$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin(x-\frac{\pi}{3}) - 1}{3 \tan(x-\frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}}$.

5.30. Bereken $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ $\quad m,n \in \mathbb{N}$.

5.31. De funktie f is als volgt gegeven:

$f(x) = 2x + b^2$ voor $x < 0$

$f(x) = x + b$ voor $x > 0$

$f(0) = 0$.

a) Voor welke b bestaat $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

b) Voor welke b is f continu ?

5.32. De funktie f wordt op $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ gedefinieerd door

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} .$$

Is f continu voortzetbaar in 0 ?

5.33. De funktie f is gegeven als volgt:

$$f(x) = 2x + b \qquad (x < 0)$$

$$f(x) = \frac{a}{x-3} \qquad (0 \le x \le 2)$$

$$f(x) = x^2 - x + b \qquad (x > 2) .$$

Gevraagd a en b zo te bepalen dat f continu is.

5.34. De funktie f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}\sin\frac{\pi x}{2} + x^2}{x^{2n} + 1} .$$

a) Ga na, dat hiermee f inderdaad voor alle $x \in \mathbb{R}$ gedefinieerd is.

b) Teken de grafiek van f.

c) Is f continu ?

5.35. De funktie f is continu op [0,2], neemt een globaal maximum aan in 2 en een globaal minimum in 1.

Bewijs dat er een $\xi \in [0,1]$ bestaat zo dat $f(\xi) = f(\xi+1)$.

5.36. Van de continue funktie f, gedefinieerd op $[0,\infty)$, is gegeven dat $f(0) = 2$ en $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Bewijs dat er een ξ is met $f(\xi) = 1$.

Week 6

6.1. Ga na of f differentieerbaar is in 0, wanneer

a) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ $(x \neq 0)$

$f(0) = 0$

b) $f(x) = |x|$

c) $f(x) = |x|^3$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = \sqrt{|x|^3}$

f) $f(x) = x|x|$

g) $f(x) = |x| \sqrt[3]{x}$.

6.2. De funktie f wordt gedefinieerd door

$$f(x) = (1-x) \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} .$$

Bereken $f'(1)$.

6.3. Bereken de afgeleiden van de volgende funkties (voorzover deze afgeleiden bestaan):

a) $x \ln x$

b) $\frac{y}{y^2+1}$

c) $(3-x)^6$

d) $\ln(\frac{1-\cos mx}{1+\cos mx})^{\frac{1}{2}}$

e) $\arccos \sqrt{1-t^2}$

f) $\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

g) $(1+\frac{1}{x})^x$

h) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

i) $\frac{a^x}{x^a}$ (a constant en positief)

j) 10^{y^2-1}

k) $\sqrt[x]{x}$

l) $\frac{2}{3} \arctan x + \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{1-x^2}$

m) $\ln \left|\cos x - \frac{1}{\cos x}\right|$

n) $\ln \left|\tan \frac{x}{2}\right|$

o) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

p) $t\, e^t \ln t$.

6.4. De funktie f is als volgt gegeven:

$$f(x) = x^2 + ax + a^2 - 1 \qquad (x < 0)$$

$$f(x) = e^x + 2ax - 1 \qquad (x \geq 0) .$$

a) Voor welke a is f continu ?

b) Voor welke a is f differentieerbaar ?

6.5. De funktie f is als volgt gegeven:

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$f(0) = 0 .$$

a) Is f continu in 0 ?

b) Is f differentieerbaar in 0 ?

c) Is f' continu in 0 ?

d) Teken de grafiek van f.

6.6. Zij $f(x) = -5x^2 + 20x + 2$ voor $x \in \mathbb{R}$.
Bereken $f(0{,}98)$ met de lineaire benadering van f rond 1.

6.7. Onderzoek de extrema van $x^3 - 3x^2 + 3x$ op het interval $[0,3]$.

6.8. Zij $A \subset \mathbb{R}$. De afbeelding $f\colon A \to [0,\frac{1}{2}]$ wordt gegeven door $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

a) Teken de grafiek van f als $A = [0,\infty)$.

b) Ga na of f bijectief is en bepaal, zo mogelijk, $\overleftarrow{f}$ als

i) $A = [0,1]$

ii) $A = [1,\infty)$

iii) $A = [0,\infty)$.

6.9. De funktie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) .$$

a) Bepaal $f'(x) \quad (x \in \mathbb{R})$

b) Bewijs dat f bijectief is.

c) Bepaal $\overleftarrow{f}(y) \quad (y \in \mathbb{R})$

d) Bepaal $(f^{\leftarrow})'(y)$ op 2 manieren:

i) door rechtstreeks differentiëren van $f^{\leftarrow}$

ii) door toepassen van stelling 3.1.15 uit de syllabus.

6.10. De funktie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door

$$f(x) = -x^2 \qquad (x \le 0)$$

$$f(x) = \cos \frac{\pi x}{2} \qquad (0 < x \le 1)$$

$$f(x) = x \qquad (x > 1)\ .$$

a) Is f monotoon?

b) Is f bijectief?

6.11. a) Bewijs dat voor $x \ge 0$ geldt dat $\arctan x \ge x - \frac{1}{3}x^3$.

b) Bewijs dat voor $x > 0$ geldt dat $\ln x \le x - 1$.

c) Bewijs dat voor $x \neq \pi + 2k\pi$ geldt dat

$$(1 + \tan \tfrac{1}{2}x)(1 - \sin x) = (1 - \tan \tfrac{1}{2}x) \cos x.$$

6.12. De funktie $f: \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = 2 \arctan x - \arctan \dfrac{2x}{1-x^2}$.

Bepaal $f'(x)$ en teken de grafiek van f.

6.13. De funktie f wordt gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (x \neq -\tfrac{d}{c})\ .$$

Bewijs dat

$$2f'(x)f'''(x) = 3(f''(x))^2\ ,$$

6.14. Bereken

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos \frac{\pi}{2} x}{\ln x}$.

6.15. Bereken

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2 + 2x}\right)^{(x+1)^2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

6.16. De funktie $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Blijkbaar geldt dat $f(-1) = f(1) = 0$.

Is er een $x \in [-1,1]$ waarvoor geldt dat $f'(x) = 0$?

Is dit in strijd met de stelling van Rolle ?

Wat is er met behulp van de stelling van Weierstrass te zeggen over de existentie van extrema ?

Bepaal de extrema van f.

6.17. Gegeven zijn de funkties $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{en} \quad g(x) = f(x+3) - f(x) .$$

a) Bewijs met behulp van de Middelwaardestelling dat $g(x) < \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ $(x > 0)$.

b) Bepaal van g de extrema, de vertikale raaklijnen en de asymptoten.
Teken de grafiek van g.

6.18. Bewijs dat voor alle $x,y \in \mathbb{R}$ geldt:

a) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$

b) $|\arctan x - \arctan y| \le |x - y|$

c) $|\arctan x| \le |x|$.

6.19. De functie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} \quad (x \neq 0)$$

$$f(0) = 0 \; .$$

a) Is f continu in 0 ?

b) Is f differentieerbaar in 0 ?

c) Is f' continu in 0 ?

d) Teken de grafiek van f.

6.20. Bepaal de uiterste waarden van de funktie $f: [-2,3] \to \mathbb{R}$ die gegeven is door $f(x) = 1 + (x^2 - 1)^3$.

6.21. De funktie $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.

a) Onderzoek of f monotoon is.

b) Onderzoek of f bijectief is.

c) Bepaal $\overleftarrow{f}$ indien deze bestaat.

d) Teken de grafiek van f.

6.22. Zij $f(x) = e^{x^2} - \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) Bereken $f'(x)$ en toon aan dat f' monotoon stijgt.

b) Bepaal de extrema van f.

6.23. Van de continue funktie f, gedefinieerd op $[0,\infty)$, is gegeven dat $f(0) = 2$ en $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

a) Bewijs dat f een globaal maximum heeft.

b) Heeft f een globaal minimum ?

6.24. Een fabriek maakt cilindervormige bussen met een inhoud van 1 liter. De zijwand wordt gemaakt van karton (kosten a gulden per m^2) en bodem en deksel van plastic (kosten b gulden per m^2).
Laat h de hoogte van de bus zijn en zij d de diameter van de bodem.
Bereken de verhouding tussen h en d bij minimale materiaalkosten.

Week 7

7.1. De funktie f wordt gedefinieerd door

$$f(x) = (x^3 + 2x + 1)\cos x.$$

Bereken $f^{(4)}(x)$.

7.2. Beschouw de funktie f gedefinieerd door $f(x) = \dfrac{6x^2 + 5x + 1}{3x - 2}$ $(x \neq \frac{2}{3})$.

Bewijs dat $f^{(1975)}(1) = -7.3^{1975} \cdot (1975)!$

7.3. Bepaal $f^{(n)}(0)$ als $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1+x}}$ $(x > -1)$.

7.4. Gegeven is de funktie f met $f(x) = \cos(p \ln x)$ $(p \in \mathbb{R})$.
Gevraagd een rekurrente betrekking tussen $f^{(n+2)}$, $f^{(n+1)}$ en $f^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

7.5. Bepaal

a) $\int x^e dx$

c) $\int \cos(ax + b)dx$

b) $\int \sqrt[4]{-x}\, dx$

d) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 \pi x}$.

7.6. Bereken voor a > 0 de oppervlakte van de figuur die wordt ingesloten door de grafieken van de funkties f en g met $f(x) = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$ en $g(x) = \dfrac{x^2}{2a}$.

7.7. Bereken a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} (x - [x])dx$

b) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{(x-1)^2}\, dx$.

7.8. Bereken $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 3x \cos 4x\, dx$.

Bepaal de volgende integralen:

7.9. a) $\int x(1+x)^{500}\,dx$ c) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$.

b) $\int \tan x\,dx$

7.10. a) $\int \frac{x^3+1}{x\sqrt{x}}\,dx$ c) $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

b) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7.11. a) $\int \frac{x\,dx}{(7x^2+1)^2}$ c) $\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x}$.

b) $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$

7.12. a) $\int \frac{dx}{(2x+6)^5}$ c) $\int \frac{dx}{4x^2-20x+29}$.

b) $\int \frac{dx}{4x^2-20x+25}$

7.13. a) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$ b) $\int \sqrt{4-\sqrt{x}}\,dx$.

7.14. Bereken

a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx$ c) $\int_1^{e} \ln x\,dx$

b) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x\,dx$ d) $\int_1^{e^2} x \ln^3 x\,dx$.

7.15. Bepaal

a) $\int \arctan x \, dx$

b) $\int \sin^3 x \, dx$

c) $\int x \cos^3 x \, dx$.

7.16. Bepaal $\int x^2 \arcsin x \, dx$.

7.17. Bepaal $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$.

7.18. Geef een recurrente betrekking voor de onbepaalde integralen $I_n = \int x^n \sin x \, dx$ $(n = 0,1,2,\ldots)$.

7.19. De funktie f is continu; de funkties p en q zijn differentieerbaar.
Bepaal

a) $\frac{d}{dx} \int_0^x f(t^2)dt$

b) $\frac{d}{dx}\left(x \int_x^1 f(t)dt\right)$

c) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(t)dt$

d) $\frac{d}{dx} \int_{p(x)}^{q(x)} f(t)dt$.

7.20. De funktie f wordt gedefinieerd door $f(x) = (x^2+1)\sin x$.
Bereken $f^{(20)}(x)$.

7.21. Toon aan dat de n-de afgeleide van $\frac{1}{1-x^2}$ gelijk is aan

$$\tfrac{1}{2}(n!)\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right] \qquad (x^2 \neq 1) .$$

7.22. a) Bereken $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sqrt{x^4 + x^2}\, dx$.

b) Bepaal $\displaystyle\int 2x \arctan x\, dx$.

7.23. Bereken de integralen $I_n = \displaystyle\int x^n \ln x\, dx \quad (n = 0,1,2,\ldots)$.

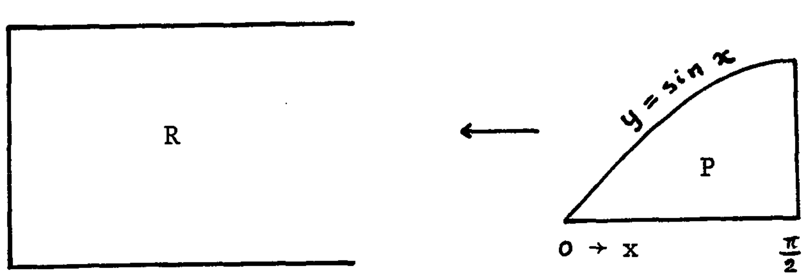
7.24. a) Bepaal $\displaystyle\int \cos^3 x \sqrt{\sin x}\, dx$.

b) Bereken $\displaystyle\int_{1/e}^{e} \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$.

7.25. Geef een recurrente betrekking voor de integralen $I_n = \displaystyle\int x^n \sqrt{1-x^2}\, dx$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0$

7.26. Een stuk touw, homogeen van samenstelling en met constante doorsnede, heeft de eigenschap dat de rek evenredig is met de er op uitgeoefende trekkracht. Er is gegeven dat 1 m bij een trek van 1 kg een rek van ε meter vertoont en dat 1 m van het touw 1 kg weegt. Een stuk van dit touw ter lengte van L meter wordt aan een uiteinde opgehangen. Hoe lang is het hangende stuk touw?

7.27.



Een plaat P van bovenstaande gedaante wordt in een ruimte R geschoven met een snelheid van a cm/sec. In deze ruimte wordt verf verstoven. Op het gedeelte van de plaat binnen deze ruimte komt per cm^2 een hoeveelheid van b kg verf per seconde terecht.
Bereken de hoeveelheid verf die op de plaat zit op het moment dat deze net geheel binnen de ruimte is gekomen.

Week 8

Bepaal de volgende integralen:

8.1. $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1}$.

8.2. $\int \frac{x^3dx}{(x+1)(x^2-4)}$.

8.3. $\int \frac{x^3+4x^2-x+3}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$.

8.4. $\int \frac{dx}{(x^2-1)(x-1)}$.

8.5. $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$

8.6. a) $\int \frac{x^3dx}{x^2+1}$ b) $\int \tan^3 x\,dx$ (stel $\tan x = y$).

8.7. Bereken a) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^4 x\,dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^{53} x\,dx$.

8.8. Bepaal $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x(1-\cos x)}$.

8.9. Bepaal a) $\int (1+\tan x)^2 dx$

b) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x+\cos x}$.

8.10. Bepaal $\int \frac{dx}{2 - \sin x}$.

8.11. Bereken $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^{5/2}}$.

8.12. Bereken $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\, dx$.

8.13. Bereken $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}\, dx}{x}$.

8.14. Bepaal $\int \frac{(x + 1)dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$.

8.15. Bereken, zo mogelijk, de volgende integralen

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ b) $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}$ c) $\int_0^1 \ln x\, dx$.

8.16. Gegeven is de integraal $B_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Geef een recurrente betrekking tussen B_{n+1} en B_n en bereken B_5.

8.17. Bereken $\int_0^{\pi/2} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x})dx$.

8.18. Bereken a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^2-1}-x}{x^2-1}\,dx$.

8.19. De funktie f is continu op $[0,a^2]$.

Bewijs dat a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x^2)dx = 2\int_0^a f(x^2)dx$

b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} xf(x^2)dx = 0$.

8.20. Bereken $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{2n} x}$, $n \in \mathbb{N}$.

8.21. Zij $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} x \sin x\, dx$.

a) Bereken met behulp van de samengestelde rechthoekregel de benadering $R(\frac{\pi}{3})$.

b) Bepaal de exacte waarde van I en geef met behulp daarvan de procentuele fout in $R(\frac{\pi}{3})$.

8.22. Zij $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

a) Maak een tabel in vier decimalen van de funktie f met $f(x) = \frac{1}{1+x}$ voor $x = 0$, $x = 0,25$, $x = 0,5$, $x = 0,75$, $x = 1$.

b) Bereken met de samengestelde rechthoekregel $R(\frac{1}{2})$ en met de samengestelde trapeziumregel $T(\frac{1}{2})$.
Toon aan dat

$$R(\tfrac{1}{2}) \le I \le T(\tfrac{1}{2}) .$$

c) Bepaal $T(\frac{1}{4})$ uit $R(\frac{1}{2})$ en $T(\frac{1}{2})$.
Geef op twee manieren een schatting voor de fout in $T(\frac{1}{4})$
i) met behulp van f''
ii) met behulp van $T(\frac{1}{2})$.

Vergelijk in beide gevallen de uitkomst met de exacte waarde van I.

d) Bepaal een nieuwe schatting $T^*(\frac{1}{4})$ voor I met behulp van $T(\frac{1}{2})$ en $T(\frac{1}{4})$.

8.23. Geef de breuksplitsing van $\dfrac{2x^2+2}{x^4+1}$.

(Gebruik eventueel de betrekking $x^4+1 = (x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2$.)

8.24. Bereken $\displaystyle\int_0^{3/2} \sqrt{4x^2+9}\, dx$.

8.25. Bereken $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2} \arcsin x\, dx$.

8.26. Bereken $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x \ln x\, dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

8.27. Bereken $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{-2} e^{-\frac{1}{x}}\, dx$.

8.28. a) Bewijs dat de inverse van een bijectieve oneven funktie oneven is.

b) Bereken $\displaystyle\int_{-e}^{e} \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$.

8.29. Bewijs dat

a) $\ln n \leq \int_n^{n+1} \ln x \, dx \leq \ln(n+1)$

b) $\ln(n-1)! \leq \int_1^n \ln x \, dx \leq \ln n!$

c) $0 \leq \ln n! - n \ln n + n - 1 \leq \ln n$

d) $1 \leq \dfrac{n!}{n^n e^{-n+1}} \leq n \qquad (n \in \mathbb{N})$.

8.30. De functie Si wordt gedefinieerd door

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt \ .$$

Voor de numerieke benadering van Si(1) hebben we de beschikking over de volgende tabel:

x	$\frac{\sin x}{x}$
0,25	0,98962
0,5	0,95885
0,75	0,90885
1	0,84147

Zij $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} , & x \neq 0 \\ f_0 , & x = 0 \ . \end{cases}$

a) Wat is een verstandig gekozen waarde van f_0 en waarom ?

b) Bereken R(h) en T(h) voor h = 1 en h = $\frac{1}{2}$.

c) Bereken met behulp van eerder gevonden resultaten achtereenvolgens

i) een schatting voor de fout in $T(\frac{1}{2})$

ii) $T^*(\frac{1}{2})$ en $T(\frac{1}{4})$

iii) een schatting voor de fout in $T(\frac{1}{4})$

iv) $T^*(\frac{1}{4})$.

Rangschik de verkregen resultaten in een tabel.

Week 9

9.1. Ga na of de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent is en bepaal de som als deze bestaat, wanneer

a) $a_n = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^3}$ b) $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$.

9.2. Ga na of de reeksen met algemene term

a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ b) $a_n = n \sin \frac{1}{n}$ c) $a_n = (\frac{n-1}{n+1})^n$

convergent zijn.

9.3. Onderzoek met het zg. integraalkenmerk of de reeksen

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

convergent zijn.

9.4. Welk rationaal getal wordt voorgesteld door 0, 123123123123... ?

Ga na of de reeks met algemene term a_n convergeert, wanneer

9.5. a) $a_n = \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$ c) $a_n = \frac{1}{n^2(n+1)}$

b) $a_n = \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$ d) $a_n = \tan e^{-n}$.

9.6. a) $a_n = \frac{4}{\sqrt{n(n^2-1)}}$ $(n \geq 2)$ c) $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$

b) $a_n = \frac{2+(-1)^n}{n^2}$ d) $a_n = \frac{2^n + n}{3^n}$.

9.7. a) $a_n = n \arctan \frac{1}{n\sqrt{n}}$

b) $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \arctan \sqrt{n}$

c) $a_n = 1 - \cos \frac{1}{n}$.

9.8. $a_n = \dfrac{\ln n}{n^p}$ $\quad (p \in \mathbb{R})$.

9.9.* Van de reeks met algemene term a_n is gegeven dat $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs of geef een tegenvoorbeeld van de volgende uitspraken:

a) Als o.d.d. $\sqrt[n]{a_n} < 1$ dan is $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent.

b) Als $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan geldt dat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

Onderzoek of de reeks met algemene term a_n convergeert, wanneer

9.10. a) $a_n = \dfrac{n^3+1}{n^2}\,(e^{1/n^3} - 1)$

b) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^p}$ $\quad (n \geq 2,\ p \in \mathbb{R})$.

9.11. a) $a_n = \dfrac{\cos \pi n}{n + \sqrt{n}}$

b) $a_n = \dfrac{(-1)^n \cos \pi n}{n}$

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{4n^2 - 40n + 91}$.

9.12. a) $a_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$

b) $a_n = (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{n})$

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n \sqrt{n}}{n + 100}$.

9.13. a) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1} n^3}{2^n - 1}$

b) $a_n = \dfrac{(1 - \sqrt{5})^n}{n^2 + 1}$

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n + \sin 1}{n}$.

9.14.* Onderzoek of de volgende uitspraken voor de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juist zijn.

a) Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan is $\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0$.

b) Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

c) Als $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ convergent.

Onderzoek of de reeks met algemene term a_n convergeert, wanneer

9.15. a) $a_n = (2n - n^2)e^{100-n}$

e) $a_n = 2^{-n + \ln n}$

b) $a_n = \dfrac{(-2)^n}{n!}$

f) $a_n = (\frac{n}{10})^n$

c) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{(n+2)^n}$

g) $a_n = (\frac{n+1}{2n+1})^n$.

d) $a_n = \left(1 - n^{\frac{1}{n}}\right)^n$.

9.16. a) $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{100}}$ $(n \geq 2)$ b) $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^n}$ $(n \geq 2)$.

Onderzoek of de volgende integralen absoluut convergent zijn:

9.17. a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}}\, dx$ b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \sin x \arctan \frac{1}{x^2}\, dx$.

9.18. a) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{\sin\sqrt{x}}{x}\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{2 + \sin x}{x}\, dx$.

9.19. a) Bewijs de convergentie van de integraal $\int_1^\infty \frac{\ln x\, dx}{x^2+1}$ met behulp van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2+1}$.

b) Bewijs de convergentie van $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1}\, dx$ met behulp van de substitutie $x = \frac{1}{y}$.

c) Bereken $\int_0^\infty \frac{\ln x\, dx}{x^2+1}$.

9.20. Bewijs de convergentie en bepaal de som van de reeks met algemene term

$$a_n = \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

Onderzoek of de reeks met algemene term a_n convergeert als

9.21. a) $a_n = \frac{1}{n+1} \sin \frac{1}{n}$

c) $a_n = \frac{1}{n} \ln \frac{n+1}{n}$.

b) $a_n = n^{-n \sin \frac{\pi}{3n}}$

d) $a_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

9.22. a) $a_n = \sqrt{\frac{n - \ln n}{n^2 + 10n^3}}$

c) $a_n = \sin n^2 \sin \frac{1}{n^2}$.

b) $a_n = n(\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n})$

9.23. $a_n = \frac{1}{n^p \ln n}$ $\quad (n \geq 2,\ p \in \mathbb{R})$.

9.24.* Van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is gegeven dat $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
Bewijs dat deze reeks convergeert dan en alleen dan als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ convergeert.

9.25.* Laat met behulp van tegenvoorbeelden zien dat geen van de drie voorwaarden van het kenmerk voor convergentie van Leibniz gemist kan worden.

Onderzoek of de reeks met algemene term a_n convergeert als

9.26. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(e^n + e^{-n})}$.

9.27.* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ $(n \geq 2)$.

9.28. a) $a_n = \dfrac{n!}{5^n}$

d) $a_n = \dfrac{3^{\ln n}}{2^n}$

b) $a_n = \left(\dfrac{n}{10}\right)^{10}$

e) $a_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^{n^2}$, $a \in \mathbb{R}$

c) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

f) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

9.29.* Van de reeks met algemene term a_n is gegeven dat $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Onderzoek of de volgende uitspraken juist zijn:

a) Als $\lim\limits_{n\to\infty} n\, a_n = 0$ dan is de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent.

b) Als $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ convergeert, dan convergeert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

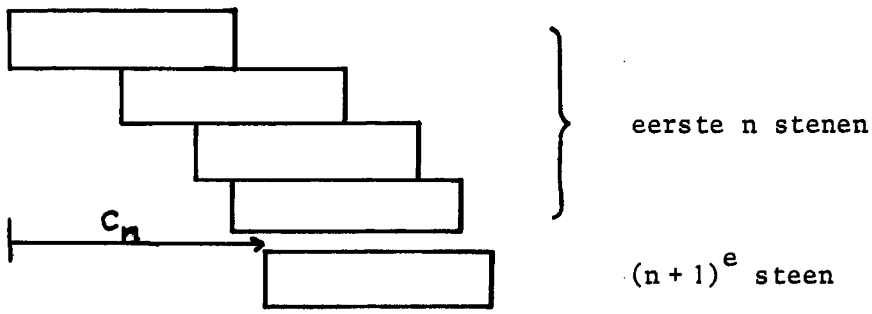
c) Als $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ convergeert, dan convergeert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

9.30. Een kogel valt van een hoogte h op de grond en kaatst terug met een snelheid die een fractie α $(0 < \alpha < 1)$ is van de snelheid waarmee de kogel de grond raakt.

a) Na hoeveel tijd ligt de kogel stil ?

b) Wat is de lengte van de baan die de kogel dan heeft doorlopen ?

9.31. Dominostenen met lengte L en (homogeen verdeelde) massa m worden gestapeld zoals in de tekening aangegeven.
Welke horizontale afstand kan op deze wijze "overbrugd" worden ?



Suggestie: Bouw de toren door steeds van onder stenen toe te voegen. Laat c_n de coördinaat van het zwaartepunt van n stenen tezamen zijn.

a) Bewijs dat in het ideale geval de $n+1^e$ steen toegevoegd kan worden zodanig dat geldt

$$c_{n+1} = \frac{nmc_n + m(c_n + \frac{1}{2}L)}{(n+1)m} .$$

b) Vind een expliciete uitdrukking voor c_n.

c) Wat kunnen we nu zeggen over $\lim_{n\to\infty} c_n$?

Aanvulling week 9

Numerieke sommatie van reeksen

Laat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een convergente reeks zijn met som S. Deze som is dan de limiet voor $N \to \infty$ van de rij (S_N) van de partiële sommen $S_N = a_1 + \ldots + a_N$. Voor elke N is S_N te beschouwen als een schatting (of benadering) van S. In feite kunnen wij schrijven $S = S_N + E_N$, waarbij E_N de afwijking of fout is, die ontstaat als we S vervangen door S_N. E_N heet afbreekfout (de letter E komt van het Engelse woord "error"). Naarmate N groter wordt genomen, zal in het algemeen, maar zeker op den duur, E_N kleiner worden. In enkele bijzondere gevallen kunnen we E_N precies bepalen, maar meestal kan dat niet. Om een indruk te krijgen van de nauwkeurigheid van de schatting van S door S_N proberen we E_N af te schatten, d.w.z. we trachten grenzen voor E_N te bepalen die realistisch zijn en ook gemakkelijk te berekenen. Voor verschillende typen van reeksen zullen we technieken leren om zulke grenzen te berekenen.

Bij de bepaling van S_N maken we in de regel gebruik van een rekenmachine. Daarmee berekenen we ieder der termen $a_1, a_2, \ldots, a_N$ afzonderlijk en tellen op. De machine levert voor ieder van de termen a_n een decimale benadering $\hat{a}_n$, en dus ook voor S_N een decimale benadering $\hat{S}_N$. De fout die bij deze benadering gemaakt wordt, hangt af onder meer van de nauwkeurigheid, waarmee de machine rekent, en dat kan van machine tot machine verschillen; om deze fout te kunnen schatten is dus in principe inzicht nodig in de werkwijze van de machine. Deze informatie is meestal niet beschikbaar. We maken daarom de volgende afspraak.

Bij de bepaling van S_N met behulp van een rekenmachine, waarbij ieder van de termen $a_1, \ldots, a_N$ in p decimalen wordt uitgerekend en vervolgens opgeteld, is de fout in absolute waarde hoogstens $N \times 10^{-p}$.

We noteren als gezegd het resultaat van de berekening van S_N door $\hat{S}_N$. We hebben dan volgens onze afspraak $\hat{S}_N - N \cdot 10^{-p} < S_N < \hat{S}_N + N \cdot 10^{-p}$.

We zullen eerst een voorbeeld bespreken.

Voorbeeld 1. Gegeven is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Bewijs dat de reeks convergent is. Bepaal S_5 en geef hiermee een schatting van de som S van de reeks.

Oplossing. Aangezien $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergeert, is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ absoluut convergent.

Met behulp van een zakrekenmachine vinden we

$$\hat{a}_1 = 0,\ 841\ 470\ 985$$
$$\hat{a}_2 = 0,\ 227\ 324\ 357$$
$$\hat{a}_3 = 0,\ 015\ 680\ 001$$
$$\hat{a}_4 = -\,0,\ 047\ 300\ 156$$
$$\hat{a}_5 = -\,0,\ 038\ 356\ 971$$

$$\hat{S}_5 = 0,\ 998\ 818\ 216$$

Hieruit volgt voor S_5

$$0,\ 998\ 818\ 211 < S_5 < 0,\ 998\ 818\ 221\ .$$

We geven nu een schatting van de afbreekfout E_5:

$$|E_5| = \left|\sum_{n=6}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \sum_{n=6}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_5^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{5} = 0,\ 200\ 000\ 000 = \beta_5.$$

We vinden dus

$$S_5 - \frac{1}{5} < S < S_5 + \frac{1}{5}$$

0, 798 818 211 < S < 1, 198 818 221.

We preciseren nu wat we bedoelen met het schatten van de som van de reeks.

In het vervolg zullen we met "schat de som S" steeds bedoelen: geef een decimale breuk α, de schatting van S, en een decimale breuk $\beta > 0$, beide in principe met evenveel cijfers achter de komma, zodanig dat

$$\alpha - \beta \leq S \leq \alpha + \beta.$$

Het getal β is hierbij dus een bovengrens voor de absolute waarde van het verschil tussen α en de som S, d.w.z. voor de absolute waarde van de totale fout.
De ongelijkheid $\alpha - \beta \leq S \leq \alpha + \beta$ noteren we ook wel door

$$S = \alpha \pm \beta.$$

Onder "bepaal S met een fout hoogstens β" verstaan we: geef een getal α, in principe met evenveel decimalen achter de komma als β, zo dat $S = \alpha \pm \beta$.

We keren nu terug naar de gevonden schatting van de som S van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$:

$$0{,}798\,818\,211 < S < 1{,}198\,818\,221.$$

We kunnen hieruit de conclusie trekken

$$S = 1{,}0 \pm 0{,}3$$

en ook

$$S = 0{,}99 \pm 0{,}21$$

$$S = 1{,}00 \pm 0{,}21 \quad .$$

Schattingen van S met α en β in drie of meer decimalen zijn weinig zinvol, omdat daarmee de schatting β voor de totale fout niet wezenlijk verbeterd wordt.

Merk ook nog op, dat de totale fout grotendeels bepaald wordt door de afbreekfout E_5.
Aangezien deze E_5 geschat wordt door $\frac{1}{5}$, zou het voor de berekening van $\hat{S}_5$ voldoende geweest zijn te werken in drie decimalen in plaats van negen.

Er zijn drie technieken om een idee te krijgen van de grootte orde van de afbreekfout. We zullen ieder van die technieken aan de hand van een voorbeeld demonsteren, in een wat scherpere probleemstelling dan in voorbeeld 1.

<u>Voorbeeld 2</u>. Bewijs dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 \ln(n+1)}$ convergeert, en bepaal de som van de reeks met een fout hoogstens 0,005.

<u>Oplossing</u>. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is alternerend en de rij $(|a_n|)$ gaat monotoon naar 0 (een "Leibnizreeks"); daarom ligt de som tussen S_{n-1} en S_n. De lengte van dit interval is $|a_n|$; aangezien we de som moeten bepalen met een fout hoogstens 0,005, dienen we n zo te bepalen dat $\frac{1}{2} |a_n| < 0{,}005$, dus $|a_n| < 0{,}01$.
We vinden met een rekenmachine het volgende overzicht.

n	$\hat{a}_n$	$\hat{S}_n$
1	1,44270	1,44270
2	- 0,11378	1,32892
3	0,02672	1,35563
4	- 0,00971	1,34592

We kunnen nu een interval met lengte minder dan 0,01 aangeven waar S in ligt. Rekening houdend met een onnauwkeurigheid van hoogstens 3×10^{-5} in de bepaling van S_3 en 4×10^{-5} in de bepaling van S_4 vinden we

$$1{,}34588 < S < 1{,}35566$$

zodat $$S = 1{,}3508 \pm 0{,}0050.$$

Echter, uit het gevonden interval voor S kunnen we geen schatting voor S geven in drie decimalen. We rekenen nu een stap verder en vinden

$$\hat{a}_5 = 0{,}00446 \qquad \hat{S}_5 = 1{,}35039 \ .$$

Hieruit volgt

$$1.34588 < S < 1{,}35044$$

dus $$S = 1{,}348 \pm 0{,}005$$

in feite zelfs $$S = 1{,}348 \pm 0{,}003.$$

Voorbeeld 3. Toon aan, dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ convergeert en bepaal de som met een fout hoogstens 0,001.

Oplossing. De reeks is absoluut convergent volgens het kenmerk van d'Alembert; dat wil zeggen de reeks heeft o.d.d. het convergentiegedrag van een meetkundige reeks met reden $\frac{1}{3}$.

Omdat

$$(\tfrac{1}{3})^3 < \frac{1}{10} < (\tfrac{1}{3})^2$$

zullen we twee soms drie termen meer moeten nemen om S een decimaal nauwkeuriger te bepalen.

We kijken naar de rij partieelsommen om te schatten waar we moeten afbreken.

n	$\hat{S}_n$
1	0, 333 33
2	0, 555 56
3	0, 666 67
4	0, 716 05
5	0, 736 63
6	0, 744 86
7	0, 748 06
8	0, 749 28
9	0, 749 73
10	0, 749 90

We vermoeden, dat we bij n = 8 de vereiste nauwkeurigheid gevonden hebben.

$$E_8 = \frac{9}{3^9} + \frac{10}{3^{10}} + \frac{11}{3^{11}} + \ldots$$

$$= \frac{9}{3^9}\left(1 + \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{3} + \frac{11}{10}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{3^2} + \ldots\right) < \frac{9}{3^9}\left(1 + \frac{10}{27} + \left(\frac{10}{27}\right)^2 + \ldots\right)$$

$$= \frac{9}{3^9}\;\frac{1}{1-\frac{10}{27}} = \frac{1}{3^4.17} < 0{,}00073 \;.$$

Rekening houdend met een onnauwkeurigheid van 8×10^{-5} in de bepaling van S_8 en met $S > S_8$ vinden we $0{,}74920 < S < 0{,}75009$

zodat $\qquad S = 0{,}750 \pm 0{,}001.$

Opgave: Bewijs dat $S = \frac{3}{4}$.

Voorbeeld 4. Bewijs dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \ln(n+1)}$ convergeert en bepaal de som van de reeks met een fout hoogstens 0,005.

Oplossing. Voor $n \geq 2$ is $|a_n| < \frac{1}{n^3}$; de reeks is dus absoluut convergent. Reeksen van dit type convergeren te langzaam om aan de rij van partieelsommen af te lezen bij welke n de gewenste nauwkeurigheid is bereikt. Merk op, dat $S_N < S = S_N + E_N$; anders dan bij het vorige voorbeeld proberen we nu eerst N zo te bepalen dat $E_N < 2 \cdot 0{,}005 = 0.01$.

De afbreekfout na N termen is

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \ln(n+1)} < \frac{1}{\ln(N+2)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{1}{\ln(N+2)} \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2N^2 \ln(N+2)} \;.$$

Met een zakrekenmachine vinden we, dat voor N = 6 de afbreekfout kleiner is dan 0,00668.

We berekenen nu $\hat{S}_6$.

$\hat{a}_1 = 1,\ 442\ 70$

$\hat{a}_2 = 0,\ 113\ 78$

$\hat{a}_3 = 0,\ 026\ 72$

$\hat{a}_4 = 0,\ 009\ 71$

$\hat{a}_5 = 0,\ 004\ 46$

$\hat{a}_6 = 0,\ 002\ 38$

$\hat{S}_6 = 1,\ 599\ 74$

Rekening houdend met een fout hoogstens 6×10^{-5} in de bepaling van S_6 en de schatting 0,00668 voor E_6 vinden we

$$1{,}59974 - 0{,}00006 < S < 1{,}59974 + 0{,}00006 + 0{,}00668$$

$$1{,}59968 < S < 1{,}60648$$

$$S = 1{,}603 \pm 0{,}005.$$

Opmerking. Met de uitspraak "S = 1,60 in twee decimalen nauwkeurig" bedoelen we

$$1{,}595 < S < 1{,}605.$$

Deze ongelijkheid is hier niet bewezen.

Toon zelf aan, dat om in voorbeeld 4 de uitspraak "S = 1,60 in twee decimalen nauwkeurig" te kunnen doen, we in 6 decimalen rekenend N = 11 moeten nemen, maar dat we daarmee ook gevonden hebben de veel sterkere uitspraak $S = 1{,}604 \pm 0{,}001$.

Opgave 1. Bewijs, dat ieder van de volgende reeksen convergeert. Bereken met een rekenmachine $\hat{S}_5$ en geef hiermee een schatting voor de som van de reeks.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{3^n}$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+6}\,2^n}$.

Opgave 2. Bewijs, dat ieder van de volgende reeksen convergeert. Bereken met een rekenmachine $\hat{S}_5$ en geef hiermee een schatting voor de som van de reeks.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \arctan \sqrt{n}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan \frac{1}{n}$.

Opgave 3. Bewijs, dat ieder van de volgende reeksen convergeert en bepaal de som van de reeks met een fout hoogstens 0,01.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln (1+\frac{1}{n^2})$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \tan \frac{1}{n}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^2}$

Schat, op grond van de zojuist uitgevoerde berekening, hoeveel termen van de reeks U moet optellen om de som van de reeks met een fout hoogstens 0,001 te vinden.

Opgave 4. Bewijs, dat ieder van de volgende reeksen convergeert en bepaal de som met een fout hoogstens 0,001.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+\sin n}{8^n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \tan \frac{1}{n}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln (1+\sin^2 \frac{1}{4^n})$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Week 10

10.1. Onderzoek voor welke reële x de volgende reeksen convergent zijn:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n x^n}{n+1}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2 - 2n + 2}$.

10.2. Dezelfde vraag voor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^7}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{x+n}\right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n-1)2^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-nx} \arctan \frac{1}{n}$.

10.3. Bepaal de convergentiestraal van de machtreeksen met algemene term

a) $a_n = n^{2n}(1 - \cos \frac{1}{n})^n x^n$

b) $a_n = \frac{n!x^{3n}}{n^n}$.

10.4. Onderzoek voor welke reële x de volgende reeksen convergent zijn en bepaal voor die x de som:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n+1)}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)}{n!} x^n$

10.5. Bepaal de som van de volgende reeksen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$

10.6. Geef de reeksontwikkeling rond 0 van de funktie $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} .$$

Wat kan men met behulp van de stelling van Abel opmerken over $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$?

10.7. Zij $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$

(dus: $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ met $a_{3k-2} = \frac{1}{3k-2}$, $a_{3k-1} = \frac{1}{1-3k}$, $a_{3k} = 0$ $(k \in \mathbb{N})$) .

Bereken S.

10.8. Geef met behulp van standaardreeksen de machtreeksontwikkeling om 0 van

a) $\ln \cos x$ tot en met de term van graad 7

b) $\frac{\arctan x}{(1+x^2)e^x}$ tot en met de term van graad 4.

Bereken de volgende limieten, voorzover ze bestaan:

10.9 a) $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - x + \frac{1}{3}x^3}{x^5}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - x + \frac{1}{2}x^3}{x^3}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - x + \frac{1}{2}x^3}{x^2}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - x + \frac{1}{2}x^3}{x^4}$.

10.10. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{\tan x - x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1-x)}$

10.11. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x^3} - \dfrac{\cos x}{x^2}\right)$.

10.12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos(\frac{1}{3}x\sqrt{3})}{\ln(1+x^2) - \arctan x^2}$.

10.13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2 - \sqrt{1-x^2})}{x^3}$.

10.14. Onderzoek of de volgende reeksen convergent zijn:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

10.15. Onderzoek voor welke reële x de volgende reeksen convergeren:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n x^n}{3^n + 2^n}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{x})^n$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{x^2 + n^2}$

10.16. Onderzoek voor welke reële x de volgende reeks convergeert en bepaal voor die x de som:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)}{n} x^n .$$

10.17. Bepaal de som van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^{-n}$.

10.18. Geef de machtreeksontwikkeling om 0 van $\frac{1}{\cos x}$ tot en met de term van graad 4.

Bereken de volgende limieten:

10.19. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x^2\cos x}{(\arctan x - x)^2}$.

10.20. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e^{1-\frac{1}{2}x^2}}{x^4}$.

10.21. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2+x^3} - \cosh x}{\sin x - \arctan x}$.

10.22. a) Onderzoek of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) \text{ convergent is .}$$

b) Wat is op te merken over

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N+1)\right) ?$$

Week 11

11.1. Geef de Taylorontwikkeling tot en met de term van de vierde graad van

a) $\cos x$ rond $\frac{\pi}{4}$ c) $\cos^2 x$ rond $\frac{\pi}{4}$

b) $\sqrt{x}$ rond 1 d) $\ln(4+x)$ rond 2 .

11.2. a) Geef de formule van Taylor, inclusief de restterm R_n, van $\cosh x$ rond $\ln 3$.

b*) Bewijs dat voor iedere $x \in [\ln 3-\rho, \ln 3+\rho]$ $(\rho > 0)$ geldt dat $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. (Merk op dat het gevonden interpolatiepolynoom van Taylor dus convergeert naar $\cosh x$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$.)

11.3. Bereken $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\ln x}$.

11.4. Van de funktie f is gegeven:

x	$f(x)$
-1	1
0	1
1	1
2	-5

Bepaal het bijbehorende interpolatiepolynoom van Lagrange voor f.

11.5. Van de funktie f is gegeven:

n	$f^{(n)}(0)$
0	0
1	1
2	0
3	-2
4	0
5	24

Bepaal het interpolatiepolynoom van Taylor rond 0 met graad hoogstens 5.

11.6. Bepaal het interpolatiepolynoom van Lagrange met graad ≤ 3 door de volgende punten: a) (0,0), (1,0), (2,1) en (3,0)

b) (0,0), (1,1), (2,0) en (3,1)

c) (0,1), (1,2), (2,-3) en (3,1) .

11.7. Van de funktie f is gegeven:

n	$f^{(n)}(1)$
0	1
1	-1
2	2
3	-6

Bepaal het interpolatiepolynoom van Taylor rond 1 met graad hoogstens 3.

11.8. De funktie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x) = x^3$.

a) Geef de Taylorinterpolatiepolynomen rond 1 van de 0^e, de 1^e, de 2^e en de 3^e graad.

b) Geef het Lagrange-interpolatiepolynoom dat in 0, 1 en 2 met f samenvalt.

c) Wat is de fout die bij elk van deze benaderingen van f(x) gemaakt wordt?

11.9. Gegeven is de funktie f met $f(x) = xe^{2x}$.
Geef het 6^e graads Taylorinterpolatiepolynoom rond 0 van f.

11.10. Geef een decimale benadering voor sinh 2 door af te breken na 4 termen. Geef een bovengrens van de absolute waarde van de gemaakte totale fout als men de 4 termen afzonderlijk afrondt op resp. 3, 4 en 5 decimalen.

11.11. a) Geef een decimale benadering voor sin 1 en een schatting van de absolute waarde van de fout die daarbij gemaakt wordt door de reeksontwikkeling voor sin 1 na 3 termen af te breken.

b) Dezelfde vraag, maar dan voor afbreken na 4 termen.

11.12. Geef een decimale benadering van $\sqrt[5]{1,1}$ met een fout waarvan de absolute waarde hoogstens 10^{-4} is.

11.13. Dezelfde vraag voor $e^{0,05}$ met een fout waarvan de absolute waarde hoogstens $3 \cdot 10^{-5}$ is.

11.14. Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ met een fout waarvan de absolute waarde hoogstens $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$ is.

11.15. Geef een decimale benadering van $\ln \frac{3}{5}$ met een fout waarvan de absolute waarde hoogstens 10^{-3} is.

11.16. Hoeveel termen van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + \ln n)^2}$ kan men nemen opdat men er zeker van is dat de absolute waarde van de afbreekfout hoogstens $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$ is?

11.17. Geef de Taylorontwikkeling tot en met de vierdegraadsterm van $\frac{1}{\sqrt{x}}$ rond 2.

11.18. Bereken $\lim\limits_{x\to 2} \frac{e^{x^2-3x+2} + \ln(3-x) - 1}{(x-2)^2}$.

11.19. $\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n$ zijn polynomen zoals gedefinieerd in § 4.7.4 van de syllabus bij een gegeven (n+1)-tal punten $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Bewijs: a) $\sum\limits_{i=0}^{n} \ell_i(x) = 1 \qquad (n \geq 1)$

b) $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i \ell_i(x) = x \qquad (n \geq 1)$

c) $x_0^2 \ell_0(x) + x_1^2 \ell_1(x) + x_2^2 \ell_2(x) = x^2 \qquad (n = 2)$.

11.20. Wat kunnen we met behulp van de formule van Lagrange opmerken over de fijnheid van een tabel voor sin x wanneer bij lineaire interpolatie een fout wordt gemaakt die kleiner is dan 10^{-4} ?

11.21. Bereken $\int_0^{1/10} e^{-t^2}\,dt$ met een fout die in absolute waarde hoogstens 10^{-8} is.

11.22. Hoeveel termen van de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)\arctan n}$ kan men nemen opdat men er zeker van is dat de absolute waarde van de afbreekfout hoogstens 10^{-3} is?

Week 12

12.1. Schets de krommen die in poolcoördinaten worden gegeven door:

a) $\varphi = \alpha$

b) $r = a \quad (a > 0)$

c) $r = \cos \varphi$

d) $r = \sin 2\varphi$

e) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi} \quad (a > 0)$.

12.2. De kromme K is in poolcoördinaten gegeven door $r = \frac{1}{\varphi}$ $(\varphi > 0)$. Laat $y(\varphi)$ de y-coördinaat van het punt van K met argument φ zijn.

a) Bereken $\lim\limits_{\varphi \downarrow 0} y(\varphi)$.

b) Schets de kromme K.

12.3. Schrijf de complexe getallen -3, $2i$, $1+i$, $-\sqrt{3}-i$ en $-1-i\sqrt{3}$ in de vorm $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, waarbij $r > 0$ en $-\pi < \varphi \le \pi$, en teken deze punten in het complexe vlak.

12.4. Schrijf de complexe getallen $2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$, $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$, $2\sqrt{3}(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$ en $\frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i \sin(-\frac{3\pi}{4}))$ in de vorm $a+bi$, waarbij $a,b \in \mathbb{R}$ en teken deze punten in het complexe vlak.

12.5. Schrijf het complexe getal $\frac{2+i}{-2+i}$ in de vorm $a+bi$ en in de vorm $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ en teken dit getal in het complexe vlak.

12.6. Teken in het complexe vlak de verzameling van de getallen z waarvoor

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & z = 1 + i \tan t \\ \text{b)} & z = i + \sin t \\ \text{c)} & z = t + i \tan t \end{array}\right\} \quad t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) .$$

12.7. Gegeven zijn de complexe getallen $z_1 = \frac{2}{3}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$ en $z_2 = 2(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12})$.
Teken in het complexe vlak de getallen z_1, z_2, $\frac{z_2}{z_1}$ en $\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}$.

12.8. Gegeven $z \in \mathbb{C}$.
a) Teken in het complexe vlak de getallen $z+2$, $-2z$, $\frac{1}{z}$, $z-2i$, iz, $\bar{z}$, $-i\bar{z}$.

b) Idem voor $z(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2})$, $3z(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$ en $z(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$.

12.9. a) Schrijf $\cos 5\varphi$ als een polynoom in $\cos\varphi$.

b*) Bewijs dat $\cos n\varphi$ ($n \in \mathbb{N}$) te schrijven is als polynoom in $\cos\varphi$.

12.10. Gegeven is het complexe getal $z = \sqrt{3}(1+i) + 1 - i$.

a) Bereken z^{12}.

b) Bepaal de hoofdwaarde van arg z.

12.11. Los de volgende vergelijkingen op in $\mathbb{C}$:

a) $z^2 + 2(1-i)z - 4i = 0$

b) $z^6 + 26z^3 - 27 = 0$

c) $z^4 - iz^3 + iz + 1 = 0$

d) $z^2 - 5z + 17 = \frac{13}{z}$

e) $z^2(i+z^2) = -6$.

12.12. a) Los op $z^{11} + z^{10} + \ldots + z + 1 = 0$ voor $z \in \mathbb{C}$ en teken de wortels in het complexe vlak.
b) Dezelfde vragen voor $z^{10} + z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0$.

12.13. Los de volgende binomische vergelijkingen op en schets de wortels in het complexe vlak:

a) $(z-i)^4 = -4$

b) $(z+2-i)^6 = 27i$

c) $(z-2i)^7 = -i$.

12.14. Ontbind $z^6 - 1$ in polynomen met reële coëfficiënten van zo laag mogelijke graad.

12.15. Bepaal de verzameling van elementen $z \in \mathbb{C}$ die voldoen aan de betrekking

$$(4+3i)z + (4-3i)\bar{z} = 10 .$$

Schets de gevonden verzameling in het complexe vlak.

12.16. Bepaal de verzameling van complexe getallen z die voldoen aan:

a) $\arg \frac{z+i}{z-1} = \frac{\pi}{2}$ c) $\operatorname{Im} \frac{z-3}{z+2i} = 0$.

b) $|z-3i| = |4+2i-z|$

12.17. Schets in het complexe vlak de verzameling van die $z \in \mathbb{C}$ waarvoor geldt:

a) $|z+1-i|^2 \leq 2$ en $\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$

b) $|\bar{z} - \frac{4}{z}| \leq 3$.

12.18. Schets de krommen die in poolcoördinaten worden gegeven door $r = \frac{1}{1-\varepsilon \cos \varphi}$ respectievelijk voor $\varepsilon = 0, \frac{1}{2}, 1$ en 2.

12.19. Van de complexe getallen z_1 en z_2 is gegeven dat $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ en $z_2 \neq 0$.
Bewijs dat $\frac{z_1}{z_2}$ zuiver imaginair is.

12.20. a) Los de vergelijking $z^8 - 3z^4 - 4 = 0$ op in $\mathbb{C}$.

b) Ontbind $z^4 - z^2 + 1$ in reële factoren van zo laag mogelijke graad en los daarna de vergelijking $z^4 - z^2 + 1 = 0$ op in $\mathbb{C}$.

12.21. Bewijs dat voor de wortels van $z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1 = 0$ geldt dat $z + \frac{1}{z} = 0$ of $z + \frac{1}{z} = -1$ en los de vergelijking op.

12.22. Bewijs dat de som van alle wortels van debinomische vergelijking $z^n = a$ $(n \geq 2)$ gelijk is aan nul.

12.23. Bepaal de verzameling van de elementen z in $\mathbb{C}$ die voldoen aan

a) $\left|\dfrac{\bar{z}z}{(1-z)^2}\right| = 1$ b) $\dfrac{\bar{z}z}{(1-z)^2} = 1$.

Week 13.

13.1. Bepaal de hoofdwaarde van het argument van e^{7+5i}.

13.2. Onderzoek de convergentie van de rij (a_n) als

a) $a_n = 1 + in \sin \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n}$

b) $a_n = e^{\frac{\pi i n}{3}}$.

13.3. Bewijs de convergentie en bereken de som van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (n + i) (\frac{2}{3})^n$.

13.4. Bepaal het convergentiegebied van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{z - 1}{z + i}\right)^n, \quad z \in \mathbb{C} .$$

13.5. Bereken

a) $$\int_1^{\infty} \frac{i\sqrt{x} - 1}{x^2}\, dx$$

b) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{i \tan x}}{\cos^2 x}\, dx.$$

13.6. Bereken $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos 2x\, dx$.

13.7. Bepaal $\int e^{-ax} \sin bx\, dx$.

13.8. Los op in $\mathbb{C}$: $e^z = 1 + i$.

13.9. Bepaal de complexe getallen z waarvoor $e^z + e^{-z}$ reëel is.

13.10. Zij $w = e^{z/\bar{z}}$ voor $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

a) Bewijs: $|w| \leq e$ voor alle $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

b) Voor welke $z \in \mathbb{C}$ geldt $|w| = e$?

13.11. Bepaal het beeld van de verzameling $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1\}$ onder de afbeelding

$$w = \frac{z+i}{z}.$$

13.12. Los de volgende differentiaalvergelijkingen op:

a) $xy' + 2y = xyy'$ b) $xy^2 + x - (yx^2 + y)y' = 0$.

13.13. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = 2^{x-y}.$$

a) Schets het bijbehorende richtingsveld.

b) Bepaal met dit richtingsveld de integraalkromme door (1,1).

13.14. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking $y' - xy = e^{-x}(x+$

Voor welke beginwaarde $y(0)$ is de oplossing begrensd op $[0,\infty)$?

Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijkingen:

13.15. $xy' + y = \sin x$.

13.16. $y'\cos x + y \sin x = 1$.

13.17. $y' - y = xe^x$.

13.18. Bepaal de convergentiestraal van de complexe reeks met algemene term

$$a_n = \frac{n!z^n}{(1+i)(1+2i)\dots(1+ni)}.$$

13.19. Bepaal het convergentiegebied van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz^2}}{n^2}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

13.20. Bepaal het beeld van de verzameling $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ onder de afbeelding

$$w = \frac{z-1}{2z+1}.$$

13.21. Bepaal $\int \sin^6 x \, dx$.

13.22. Bereken $\int_0^{\infty} xe^{-x} \sin x \, dx$.

13.23. Los op in $\mathbb{C}$ de vergelijking $e^{z^2} + 1 = 0$.

Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijkingen

13.24. $(x^2 + 1)y' = (y + 2)x + \sqrt{x^2 + 1}$.

13.25. $xy' - (x + 1)y = x^2 - x^3$.

13.26. $y' + xe^{-x}y = xe^{-x}$.

Week 14.

Bepaal de algemene reële oplossing van de differentiaalvergelijkingen

14.1. $\ddot{y} - 5\dot{y} + 6y = 0.$

14.2. $\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 0.$

14.3. $\ddot{y} + \dot{y} + y = 0.$

14.4. a) $\ddot{y} - y = 3$

b) $\ddot{y} - y = t + 5$

c) $\ddot{y} - y = e^{2t}$

d) $\ddot{y} - y = \sin t$

e) $\ddot{y} - y = e^{-t}$

f) $\ddot{y} - y = te^{-t}.$

14.5. $\ddot{y} + \dot{y} = 1 + e^{-t}.$

14.6. a) $\ddot{y} + y = t^2$

b) $\ddot{y} + y = \cos t$

c) $\ddot{y} + y = t^2 + \cos t.$

14.7. $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = e^{-2t}\cos 3t.$

14.8. $\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = te^{3t}.$

14.9. $\ddot{y} + (1 + a)\dot{y} + ay = e^{-t}$ (a is een reële constante).

14.10. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\ddot{y} - 2\alpha\dot{y} + (1 + \alpha^2)y = \cos t \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

a) Bepaal alle reële oplossingen.

b) Voor welke α zijn alle oplossingen begrensd op $[0,\infty)$?

c) Voor welke α zijn er op $[0,\infty)$ begrensde oplossingen ?

14.11. a) In een bak van 60 liter, gevuld met een oplossing met een concentratie $x(t)$, voert men 1 liter water per seconde toe en 1 liter oplossing per seconde af. Zij $x(0) = c$. Bepaal $x(t)$.

b) De bak wordt tevoren in twee delen van 30 liter verdeeld door een schot met een opening (toevoer in het ene deel, afvoer uit het andere). De concentraties zijn resp. $y(t)$ en $z(t)$; $y(0) = z(0) = c$.
Bepaal $y(t)$ en $z(t)$.

c) Bereken $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$ voor $t = 60$ en voor $t = 120$. Wat valt hierbij op ?

14.12. Een motteballetje verliest massa door verdamping met een snelheid die evenredig is met de grootte van zijn oppervlak.
Na 75 dagen heeft het balletje nog maar $\frac{8}{27}$ deel van het oorspronkelijke gewicht. Na hoeveel dagen is het balletje verdwenen ?

14.13. Zij $k \in \mathbb{R}$, $k < 1$. Bepaal de kromme met de volgende eigenschap: in ieder punt (x,y) van de kromme gaat de raaklijn aan de kromme door $(kx,0)$.

14.14. Een deeltje met massa 1 wordt op het tijdstip $t = 0$ in het zwaartekrachtsveld ($g = 10\ m/sec^2$) omhooggeschoten met een horizontale snelheid u_0 en een verticale snelheid v_0. De luchtweerstand is $k.v$ waarbij v de snelheid is van het deeltje (dit geldt zowel horizontaal als verticaal).

a) Bepaal het tijdstip waarop het deeltje het hoogste punt van de baan bereikt.

b) Bereken de horizontale afstand van het beginpunt tot het hoogste punt.

Geef de algemene reële oplossing van de volgende differentiaalvergelijkingen:

14.15. $\ddot{y} + 3\dot{y} = t^2 + 3t + 2.$

14.16. $\ddot{y} + \dot{y} + 2y = \cos t + \sin t.$

14.17. $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = e^{-t} + e^{-2t}.$