TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

EXAMEN-

en

TENTAMENOPGAVEN

1974-1980

WISKUNDE 10

met oplossingen

Najaar 1980

Jdg/ITW

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Examen-en tentamenopgaven

Wiskunde 10

met oplossingen

Dictaatnr. 2.264 Prijs *f* 8,50

Inhoudsbeschrijving
Examen- Tentamenopgaven Wiskunde 10
met oplossingen
Najaar 1980

JdG, 5 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Examen- en tentamenopgaven

Wiskunde 10 (1974-1980)

met oplossingen

Najaar 1980

P 10.74

Proeftentamen oktober 1974

1. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} .$$

2. Bereken:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} \arctan(n \sin n) .$$

3. Bereken:

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x(x-2)} + x) .$$

4. Bereken:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x} ,$$

waarbij $a \in \mathbb{R}$.

5. Het invullen van een lottoformulier bestaat uit het, in volgorde naar opklimmende grootte, opschrijven van zes verschillende getallen uit $\{n \in \mathbb{N} \mid n \le 41\}$.
Op hoeveel manieren kan een lottoformulier ingevuld worden?

6. De functie f is gedefinieerd door

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} .$$

a) Bepaal DOM f.
b) Schets de grafiek van f.
c) Bewijs dat f continu is in 0.

7. Bepaal de afgeleide van de functie f, gedefinieerd door

$$f(x) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} .$$

8. Bepaal de afgeleide van de functie f, gedefinieerd door

$$f(x) = (2 + \cos x)^{\sin x} .$$

9. Bewijs dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} .$$

P 10.74

Oplossingen Proeftentamen oktober 1974

1. Voor $n = 1$ staat er $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, zodat de gelijkheid geldt voor $n = 1$. Zij $n \in \mathbb{N}$ en neem aan dat $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. Dan is

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} ,$$

zodat de gelijkheid nu ook geldt voor $n + 1$. Volgens het principe van volledige inductie geldt de gelijkheid dus voor alle $n \in \mathbb{N}$.

2. De factor $\arctan(n \sin n)$ is begrensd: $|\arctan(n \sin n)| < \frac{1}{2}\pi$, en $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$. In zo'n geval gebruiken we de insluitstelling. Uit

$$0 \leq \left|\frac{n^2}{e^n} \arctan(n \sin n)\right| < \frac{1}{2}\pi \frac{n^2}{e^n} , \quad \lim_{n\to\infty} 0 = 0 , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\pi \frac{n^2}{e^n} = 0$$

volgt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2}{e^n} \arctan(n \sin n)\right| = 0, \text{ en dus } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{e^n} \arctan(n \sin n) = 0 .$$

3. $$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x(x-2)} + x) = \lim_{y\to\infty} (\sqrt{y(y+2)} - y) = \lim_{y\to\infty} \frac{y(y+2) - y^2}{\sqrt{y(y+2)} + y} =$$

$$\lim_{y\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{y}} + 1} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

4. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin a \cos x + \cos a \sin x - \sin a \cos x + \cos a \sin x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 2 \cos a \frac{\sin x}{x} = 2 \cos a.$$

5. Zij $V = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 41\}$, dan is V een verzameling met 41 elementen. Aangezien (verschillende) getallen maar op één manier gerangschikt kunnen worden naar opklimmende grootte, bestaat het invullen van een lottoformulier in wezen uit het kiezen van zes verschillende getallen uit V, dus uit het kiezen van een deelverzameling van V met 6 elementen. Het aantal manieren waarop een lottoformulier kan worden ingevuld is dus gelijk aan het aantal combinaties van 6 elementen uit V.
Dit aantal is $\binom{41}{6} = 4.496.388$.

6. a) Voor $x > 0$ is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x(e^{-x})^n + x^2}{(e^{-x})^n + 1} = \frac{0 + x^2}{0 + 1} = x^2 \;;$$

voor $x = 0$ is

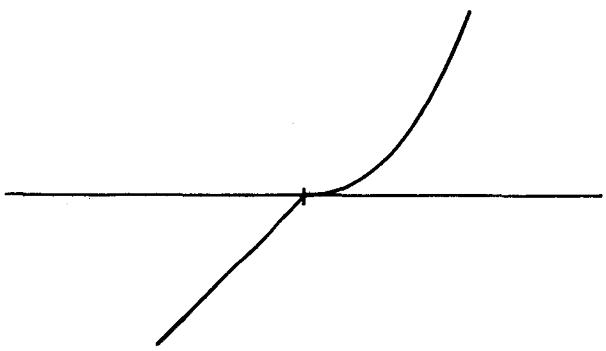
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \;;$$

voor $x < 0$ is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x + x^2 (e^{x})^n}{1 + (e^{x})^n} = \frac{x + 0}{1 + 0} = x \;.$$

De functie f is dus gedefinieerd voor alle $x \in \mathbb{R}$, d.w.z. DOM $f = \mathbb{R}$.

b)



c) Uit a) volgt:

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} x^2 = 0 = f(0), \quad \lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} x = 0 = f(0) \;.$$

Dus $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$; f is continu in 0.

P 10.74

7. $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2+1}}}(-\tfrac{1}{2})(x^2+1)^{-3/2}(2x) = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2}} = -\frac{x}{|x|(x^2+1)}, \quad x \neq 0.$$

8. $f(x) = e^{\sin x \ln(2 + \cos x)}$, dus

$$f'(x) = f(x)[\cos x \ln(2 + \cos x) + \sin x \frac{(-\sin x)}{2 + \cos x}] =$$

$$= (2 + \cos x)^{\sin x}[\cos x \ln(2 + \cos x) - \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x}] .$$

9. Zij f de functie gedefinieerd door

$$f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \qquad x \in \mathbb{R} .$$

Dan is

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2+1}}} \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(2x)}{x^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R} .$$

Dus f is constant op $\mathbb{R}$. Uit $f(0) = 0$ volgt $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

T 1.75

Examen/tentamen januari 1975

1. a) Beschouw de functie f, gedefinieerd door

$$f(x) = x^2 \left|\cos \frac{\pi}{x}\right| \quad \text{voor } x \neq 0\,,$$

$$f(0) = 0\,.$$

i) Bewijs dat f continu is in 0.

ii) Onderzoek de differentieerbaarheid van f in 0.

b) Vervalt in verband met een wijziging van de collegesyllabus.

---

2. a) Bepaal

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\,.$$

b) Van de functie f, gedefinieerd op [0,1] is de volgende tabel gegeven:

x	f(x)
0	0,000
0,25	0,253
0,5	0,521
0,75	0,822
1	1,175

i) Benader met de samengestelde trapeziumregel

$$\int_0^1 f(x)dx\,.$$

ii) Geef een schatting van de fout in het onder i) gevonden antwoord (U mag aannemen dat de fout ongeveer gelijk is aan $\frac{1}{3}[T(\frac{1}{2}h) - T(h)]$).

3. a) i) Bereken de eerste drie termen van de machtreeksontwikkeling rond 0 van de functie f, gedefinieerd door

$$f(x) = \sqrt[6]{1+x}\,.$$

ii) Bereken:

$$\lim_{t\to\infty} \left(\sqrt[6]{t^6 + t^5} - \sqrt[6]{t^6 - t^5}\right)\,.$$

T 1.75

b) Ga na of de volgende reeks convergeert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n + 100} .$$

4. a) Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' + y' = 4x .$$

b) Ontbind

$$z^6 + 1$$

in polynomen met reële coëfficiënten en van graad kleiner dan of gelijk aan twee.

Oplossingen Tentamen januari 1975

1. a) i) Uit $0 \le f(x) \le x^2$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0} 0 = 0$, $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ volgt, op grond van de insluitstelling, dat $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ is. Dus f is continu in 0.

ii) Voor $x \neq 0$ is $\frac{f(x) - f(0)}{x} = x\left|\cos \frac{\pi}{x}\right|$, dus $-|x| \le \frac{f(x) - f(0)}{x} \le |x|$.
Uit $\lim_{x\to 0} -|x| = 0$, $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ volgt, op grond van de insluitstelling, dat $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ is. Dus f is differentieerbaar in 0 met $f'(0) = 0$.

2. a) Schrijf

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1},$$

dan is

$$1 = A(x+1)(x^2+x+1) + B(x^2+x+1) + (Dx+E)(x+1)^2,$$

$$A + D = 0,\ 2A + B + 2D + E = 0,\ 2A + B + D + 2E = 0,\ A+B+E = 1,$$

$$A = 1,\ B = 1,\ D = -1,\ E = -1 .$$

Dus

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} - \tfrac{1}{2}\int \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx - \tfrac{1}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C .$$

b) i) Het interval [0,1] is verdeeld in deelintervallen met lengte 0,25. De benadering die gebruik maakt van alle functiewaarden waarover we beschikken is

$$T(0,25) = \frac{0,25}{2}[f(0) + 2f(0,25) + 2f(0,5) + 2f(0,75) + f(1)] = 0,5459.$$

ii) $\int_0^1 f(x)dx = T(0,25) + E_T(0,25) = 0,5459 + E_T(0,25)$, waarin $E_T(0,25)$ de hier bedoelde fout is.

T 1.75

We mogen aannemen dat deze fout ongeveer gelijk is aan $\frac{1}{3}[T(0,25) - T(0,5)]$. Met

$$T(0,5) = \frac{0,5}{2}[f(0) + 2f(0,5) + f(1)] = 0,5543$$

vinden we als schatting voor $E_T(0,25)$

$$\frac{1}{3}(0,5459 - 0,5543) = -0,0028 .$$

3. a) i) $f(x) = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{1/6} = 1 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}(\frac{1}{6})(-\frac{5}{6})x^2 + \ldots = 1 + \frac{1}{6}x - \frac{5}{72}x^2 + \ldots$

ii) $\lim\limits_{t\to\infty} (\sqrt[6]{t^6 + t^5} - \sqrt[6]{t^6 - t^5}) = \lim\limits_{x\downarrow 0} (\sqrt[6]{(\frac{1}{x})^6 + (\frac{1}{x})^5} - \sqrt[6]{(\frac{1}{x})^6 - (\frac{1}{x})^5}) =$

$$= \lim_{x\downarrow 0} (\frac{1}{x}\sqrt[6]{1+x} - \frac{1}{x}\sqrt[6]{1-x}) =$$

$$= \lim_{x\downarrow 0} \frac{(1 + \frac{1}{6}x - \frac{5}{72}x^2 + \ldots) - (1 - \frac{1}{6}x - \frac{5}{72}x^2 - \ldots)}{x} =$$

$$= \lim_{x\downarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x + \ldots}{x} = \frac{1}{3} .$$

b) 1°. De reeks is alternerend.

2°. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{100}{n}} = 0$, dus ook $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} = 0$.

3°. De rij $(\frac{\sqrt{n}}{n+100})$ van de absolute waarden van de termen is monotoon dalend o.d.d.

Om dit in te zien beschouwen we de functie f, gedefinieerd door $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+100}$ voor $x > 0$. Uit

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x+100)x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{(x+100)^2} = \frac{100 - x}{2(x+100)^2\sqrt{x}} < 0 \text{ voor } x > 100$$

volgt dat f monotoon dalend is voor $x > 100$. Dan is ook de rij $(f(n))$ monotoon dalend voor $n > 100$. Volgens het kenmerk van Leibniz is de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ convergent.

4. a) De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + \lambda = 0$ en heeft als wortels $\lambda = 0$ en $\lambda = -1$.

De algemene oplossing van de homogene vergelijking is dus

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} .$$

Zoek een particuliere oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking van de gedaante $y = ax^2 + bx$.

Substitutie levert

$$2a + 2ax + b = 4x ,$$

zodat $2a = 4$, $2a + b = 0$, dus $a = 2$, $b = -4$.

De algemene reële oplossing van $y'' + y' = 4x$ is dus

$$y = 2x^2 - 4x + C_1 + C_2 e^{-x}$$

met C_1 en C_2 reëel.

b) We lossen eerst de vergelijking $z^6 = -1$ op. Schrijf daartoe $z = re^{i\varphi}$. Uit $|-1| = 1$, $\arg(-1) = \pi$ volgt $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Substitutie van $k = 0,1,2,3,4,5$ levert de wortels

$$z_1 = e^{\frac{\pi i}{6}},\ z_2 = e^{\frac{\pi i}{2}},\ z_3 = e^{\frac{5\pi i}{6}},\ z_4 = e^{\frac{7\pi i}{6}},\ z_5 = e^{\frac{3\pi i}{2}},\ z_6 = e^{\frac{11\pi i}{6}},$$

waarbij we opmerken dat $z_6 = \bar{z}_1$, $z_5 = \bar{z}_2$, $z_4 = \bar{z}_3$. Het polynoom $z^6 + 1$ is dus als volgt te ontbinden:

$$\begin{aligned} z^6 + 1 &= (z - z_1)(z - \bar{z}_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_2)(z - z_3)(z - \bar{z}_3) = \\ &= (z^2 - 2z\mathrm{Re}\ z_1 + 1)(z^2 - 2z\mathrm{Re}\ z_2 + 1)(z^2 - 2z\mathrm{Re}\ z_3 + 1) = \\ &= (z^2 - z\sqrt{3} + 1)(z^2 + 1)(z^2 + z\sqrt{3} + 1) . \end{aligned}$$

H 1.75

Herkansingsexamen/tentamen januari 1975

1. Beschouw de functie f, gedefinieerd door

$$f(x) = 2 - x^2(2 + \sin \frac{1}{x}) \quad \text{voor } x \neq 0 ,$$

$$f(0) = 2 .$$

a) Toon aan dat $f(x) < f(0)$ voor $x \neq 0$.

b) Bewijs dat f continu is in 0.

c) Onderzoek de differentieerbaarheid van f in 0.

2. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\binom{2n}{n} \geq 2^n .$$

3. a) Bepaal een polynoom p van ten hoogste de derde graad met $p(1) = 3$, $p'(1) = 1$, $p''(1) = -4$, $p'''(1) = 0$.

b) Zij f gedefinieerd door

$$f(x) = 2 \cos \frac{\pi x}{3} .$$

Bepaal de termen tot en met die van de vijfde graad van de Taylorreeks van f rond $\frac{1}{2}$.

4. Onderzoek de convergentie van de volgende reeksen:

a) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(1 + \ln n)^2} ;$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n} .$$

5. Bepaal

$$\int \frac{\sin x}{\sin^2 x \cos x - \cos^3 x} \, dx .$$

6. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$x(1 + x^2)y' - (1 + 3x^2)y = 4x^3 .$$

H 1.75

7. Bepaal alle oplossingen in $\mathbb{C}$ van de vergelijking

$$|e^{iz}| = 1$$

en schets de verzameling van de oplossingen in het complexe vlak.

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1975

1. a) Voor $x \neq 0$ is $f(x) - f(0) = -x^2(2 + \sin \frac{1}{x}) \le -x^2 < 0$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} |f(x) - f(0)| = \lim\limits_{x\to 0} x^2(2 + \sin \frac{1}{x}) = 0$, want $0 < x^2(2 + \sin \frac{1}{x}) \le 3x^2$ voor $x \neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} 3x^2 = 0$, zodat volgens de insluitstelling ook $\lim\limits_{x\to 0} x^2(2 + \sin \frac{1}{x}) = 0$.

Nu is $\lim\limits_{x\to 0} |f(x) - f(0)| = 0$ equivalent met $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, dus f continu in 0.

c) $\frac{f(x) - f(0)}{x} = -x(2 + \sin \frac{1}{x})$ voor $x \neq 0$, dus $0 \le |\frac{f(x) - f(0)}{x}| \le 3|x|$ voor $x \neq 0$. Uit $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} 3|x| = 0$ volgt, op grond van de insluitstelling, $\lim\limits_{x\to 0} |\frac{f(x) - f(0)}{x}| = 0$, wat equivalent is met $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

Dus f is differentieerbaar in 0 met $f'(0) = 0$.

N.B. We kunnen ook eerst de differentieerbaarheid van f in 0 aantonen, waaruit de continuïteit van f in 0 volgt.

2. Voor $n = 1$ geldt het gelijkteken.

Zij $n \in \mathbb{N}$ en neem aan dat $\binom{2n}{n} \ge 2^n$. Dan is

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!n!} =$$

$$= \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n} \ge \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot 2^n = \frac{2n+1}{n+1} \cdot 2^{n+1} > \frac{n+1}{n+1} \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1} ,$$

zodat de ongelijkheid dan ook geldt voor $n+1$.

Volgens het principe van volledige inductie geldt de ongelijkheid dus voor alle $n \in \mathbb{N}$.

3. a) $p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{p^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 =$

$= 3 + (x-1) - 2(x^2 - 2x + 1) = -2x^2 + 5x$.

b) De functie f is willekeurig vaak differentieerbaar op $\mathbb{R}$ met afgeleiden

$$f'(x) = -\frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi x}{3} , \quad f''(x) = -\frac{2\pi^2}{9} \cos \frac{\pi x}{3} = -\frac{\pi^2}{9} f(x),$$

$$f^{(3)}(x) = -\frac{\pi^2}{9} f'(x), \quad f^{(4)}(x) = -\frac{\pi^2}{9} f''(x) = \frac{\pi^4}{81} f(x), \ldots .$$

H 1.75

Dus $f(\frac{1}{2}) = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{3}$, $f''(\frac{1}{2}) = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}$, $f^{(3)}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^3}{27}$, $f^{(4)}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^4\sqrt{3}}{81}$, $f^{(5)}(\frac{1}{2}) = -\frac{\pi^5}{243}$, ..., zodat de Taylorreeks van f rond $\frac{1}{2}$ is:

$$\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}(x-\tfrac{1}{2}) - \frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2!} + \frac{\pi^3}{27}\frac{(x-\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{\pi^4\sqrt{3}}{81}\frac{(x-\frac{1}{2})^4}{4!} - \frac{\pi^5}{243}\frac{(x-\frac{1}{2})^5}{5!} + \ldots$$

Als we ook moeten aantonen dat deze reeks convergeert met som f(x) is het handiger om gebruik te maken van reeds bekende reeksontwikkelingen (rond 0) door te stellen $x - \frac{1}{2} = h$. We vinden dan

$$2\cos\frac{\pi x}{3} = 2\cos\frac{\pi(\frac{1}{2}+h)}{3} = 2\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi h}{3} - 2\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi h}{3} =$$

$$= \sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}h^{2n}}{3^{2n}(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}h^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)!}$$

voor alle $h \in \mathbb{R}$. Dus

$$2\cos\frac{\pi x}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}(x-\tfrac{1}{2}) - \frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2!} + \frac{\pi^3}{27}\frac{(x-\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{\pi^4\sqrt{3}}{81}\frac{(x-\frac{1}{2})^4}{4!} +$$

$$- \frac{\pi^5}{243}\frac{(x-\frac{1}{2})^5}{5!} - \ldots \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

4\. a) We gebruiken het integraalkenmerk voor convergentie of divergentie van reeksen. Zij $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)^2}$ voor $x \geq 1$. Dan is f een continue, monotoon dalende, niet-negatieve functie op $[1,\infty)$.

De integraal $\int_1^\infty f(x)dx$ is convergent, want

$$\lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{dx}{x(1+\ln x)^2} = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{(1+\ln x)'}{(1+\ln x)^2}dx =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{1+\ln x}\right]_1^A = \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{1+\ln A}+1\right] = 1.$$

Dan geldt: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ is convergent; dus ook $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(1+\ln n)^2}$ convergent.

b) De reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$ is convergent op grond van het kenmerk van Cauchy, immers

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2+\frac{1}{n}} = \tfrac{1}{2} < 1.$$

H 1.75

5. $$\int \frac{\sin x}{\sin^2 x \cos x - \cos^3 x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'dx}{(1-\cos^2 x)\cos x - \cos^3 x} =$$

$$= \int \frac{(\cos x)'dx}{2\cos^3 x - \cos x} = \int \frac{du}{2u^3 - u} \text{ met } u = \cos x .$$

Schrijf

$$\frac{1}{2u^3 - u} = \frac{1}{u(2u^2-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u\sqrt{2}-1} + \frac{D}{u\sqrt{2}+1},$$

dan is

$$1 = A(2u^2-1) + Bu(u\sqrt{2}+1) + Du(u\sqrt{2}-1),$$

$$2A + B\sqrt{2} + D\sqrt{2} = 0,\ B - D = 0,\ -A = 1,$$

$$A = -1,\ B = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ D = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} .$$

Dus

$$\int \frac{du}{2u^3-u} = -\int \frac{du}{u} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\int \frac{du}{u\sqrt{2}-1} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\int \frac{du}{u\sqrt{2}+1} =$$

$$= -\ln|u| + \tfrac{1}{2}\ln|u\sqrt{2}-1| + \tfrac{1}{2}|\ln u\sqrt{2}+1| + C =$$

$$= -\ln|u| + \tfrac{1}{2}\ln|2u^2-1| + C,$$

zodat we voor de oorspronkelijke integraal vinden

$$\int \frac{\sin x}{\sin^2 x\cos x - \cos^3 x}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln|2\cos^2 x - 1| - \ln|\text{cox } x| + C =$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|\cos 2x| - \ln|\cos x| + C .$$

6. Deel door $x^2(1+x^2)^2 = (x+x^3)^2$ dan staat er

$$\frac{(x+x^3)y' - (1+3x^2)y}{(x+x^3)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \text{ of } \left(\frac{y}{x+x^3}\right)' = \left(\frac{-2}{1+x^2}\right)',$$

zodat

$$\frac{y}{x+x^3} = \frac{-2}{1+x^2} + C,\ y = -2x + C(x+x^3),$$

waarin C een willekeurige reële constante is.

We geven ook nog de orthodoxe oplossing met de methode van variatie van constanten.

De homogene vergelijking schrijven we als volgt

$$\frac{dy}{y} - \frac{1+3x^2}{x+x^3}\,dx = 0\ .$$

Dan volgt na integratie

$$\ln|y| - \ln|x+x^3| = C,\quad |y| = e^C|x+x^3|\ ,$$

$$y = D(x+x^3) \text{ met } D \neq 0\ .$$

Maar $y = 0$ (voor alle x) is ook een oplossing, die we hebben verdonkeremaand toen we door y gingen delen.

De algemene oplossing van de homogene vergelijking is dus $y = D(x + x^3)$, D willekeurig.

We lossen nu de inhomogene differentiaalvergelijking op door te stellen

$$y(x) = D(x)(x+x^3)\ .$$

Substitutie geeft

$$(x+x^3)[D'(x)(x+x^3) + D(x)(1+3x^2)] - (1+3x^2)D(x)(x+x^3) = 4x^3\ ,$$

$$x^2(1+x^2)^2D'(x) = 4x^3,\quad D'(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}\ ,$$

zodat $D(x) = -\dfrac{2}{1+x^2} + C$ met $C \in \mathbb{R}$.

De algemene reële oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking is dus

$$y = -2x + C(x+x^3),\qquad C \in \mathbb{R}\ .$$

7. Stel $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Dan is

$$iz = ix - y \quad\text{en}\quad |e^{iz}| = e^{\mathrm{Re}(iz)} = e^{-y}\ .$$

De vergelijking $|e^{iz}| = 1$ is dus equivalent met de vergelijking $e^{-y} = 1$, dus met $y = 0$, en dat betekent dat z reëel is.

Examen/tentamen juni 1975

1. Bereken

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} .$$

2. Beschouw de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!(2n+1)} .$$

a) Voor welke reële waarden van x convergeert deze reeks?

b) Bepaal de som van de reeks voor deze waarden van x.

3. Teken in het complexe vlak de getallen z die voldoen aan

$$(z - 2i)^6 = -i .$$

4. Bepaal de integraalkromme van de differentiaalvergelijking

$$x^2 y' \cos y = 2 - \cos^2 y$$

welke gaat door het punt (1,0).

5. Bereken:

$$\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} \, dx .$$

6. Beschouw de functie f gedefinieerd door

$$f(x) := \frac{6x^2 + 5x + 1}{3x - 2} .$$

Bewijs:

$$f^{(1975)}(1) = -7 \cdot 3^{1975} \cdot (1975)! .$$

Oplossingen Tentamen juni 1975

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} \cdot x \sin \dfrac{1}{x}$.

Voor $x \neq 0$ geldt $0 \le |x \sin \frac{1}{x}| \le |x|$. Uit $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ volgt, op grond van de insluitstelling, $\lim\limits_{x\to 0} |x \sin \frac{1}{x}| = 0$, wat equivalent is met $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. Dus

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 1.0 = 0 .$$

2. a) De reeks convergeert voor $x = 0$ en voor $x \neq 0$ is

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!(2n+3)} \cdot \frac{(2n-1)!(2n+1)}{x^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2n(2n+3)} = 0 ,$$

zodat volgens het convergentiekenmerk van d'Alembert de reeks absoluut convergent is voor alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Zij S de somfunctie van de reeks. Dan is $S(0) = 0$ en voor $x \neq 0$ schrijven we

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\, x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n\, x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Dus

$$S(x) = \begin{cases} \cosh x - \dfrac{\sinh x}{x} & \text{voor } x \neq 0 , \\ 0 & \text{voor } x = 0 . \end{cases}$$

N.B. Uiteraard geldt

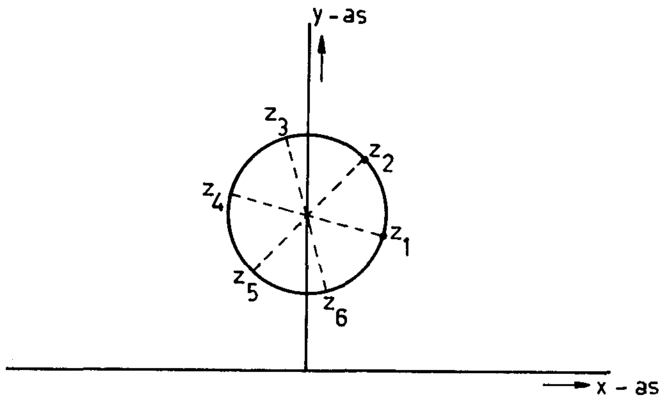
$$\lim_{x\to 0} \left(\cosh x - \frac{\sinh x}{x}\right) = 0 .$$

3. Schrijf $z - 2i = re^{i\varphi}$. Uit $|-i| = 1$, $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ volgt dan $r = 1$, $\varphi = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, zodat

$$z - 2i = e^{-\frac{\pi i}{12} + \frac{k\pi i}{3}}, \quad z = 2i + e^{-\frac{\pi i}{12} + \frac{k\pi i}{3}} .$$

T 6.75

Door achtereenvolgens $k = 0,1,2,3,4,5$ te stellen, vinden we de wortels $z_1, z_2, \ldots, z_6$ van de vergelijking.
Merk op dat deze wortels op de cirkel $|z - 2i| = 1$ liggen en dat de punten $z_1, z_2, \ldots, z_6$ de hoekpunten zijn van een regelmatige zeshoek.



4. We schrijven de differentiaalvergelijking in de gedaante

$$\frac{\cos y}{2 - \cos^2 y}\, dy = \frac{dx}{x^2} .$$

Integreren geeft dan

$$\int \frac{\cos y}{2 - \cos^2 y}\, dy = \int \frac{dx}{x^2} ,$$

$$-\frac{1}{x} = \int \frac{(\sin y)'dy}{2 - (1 - \sin^2 y)} = \int \frac{(\sin y)'dy}{1 + \sin^2 y} = \arctan(\sin y) + C .$$

Door deze vergelijking worden de integraalkrommen bepaald. Voor $x = 1$ is $y = 0$, dus $-1 = 0 + C$, $C = -1$. De integraalkromme door het punt $(1,0)$ wordt dus gegeven door de vergelijking

$$\arctan(\sin y) = 1 - \frac{1}{x} .$$

5. De integrand is begrensd in de omgeving van 0, immers

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x}} = 1 ,$$

maar niet begrensd in de omgeving van 1. Dus

$$\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1 - x)}}\, dx = \lim_{a \uparrow 1} \int_0^a \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1 - x)}}\, dx .$$

T 6.75

Substitutie van $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$, $\frac{dx}{dt} = 2t$ geeft

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \lim_{a\uparrow 1}\int_0^{\sqrt{a}} \frac{\arcsin t}{t\sqrt{1-t^2}}\,.2tdt =$$

$$= \lim_{a\uparrow 1} 2\int_0^{\sqrt{a}} (\arcsin t)(\arcsin t)'dt =$$

$$= \lim_{a\uparrow 1} (\arcsin t)^2 \Big|_{t=0}^{t=\sqrt{a}} = \lim_{a\uparrow 1} (\arcsin\sqrt{a})^2 = \frac{\pi^2}{4}\,.$$

6. Schrijf $f(x) = 2x + 3 + \frac{7}{3x-2} = 2x + 3 + 7(3x-2)^{-1}$. Dan is

$$f'(x) = 2 - 7.3(3x-2)^{-2}\,,$$

$$f''(x) = 7.3^2.2(3x-2)^{-3}\,,$$

$$f^{(3)}(x) = -7.3^3.2.3(3x-2)^{-4},\ldots\,.$$

We bewijzen met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 2$ geldt

(1) $$f^{(n)}(x) = (-1)^n.7.3^n.(n!)(3x-2)^{-(n+1)}\,.$$

Voor $n = 2$ (en voor $n = 3$) klopt het, zoals we hebben gezien. Als (1) geldt voor zekere $n \in \mathbb{N}$ (met $n \geq 2$) dan is

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = (-1)^{n+1}.7.3^n.(n!)(n+1)(3x-2)^{-n-2}.3 =$$

$$= (-1)^{n+1}.7.3^{n+1}.((n+1)!)(3x-2)^{-(n+2)},$$

dus geldt (1) dan ook voor $n+1$.

Hiermee is bewezen dat formule (1) geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 2$ en (uiteraard) voor $x \neq \frac{2}{3}$.

Neem $x = 1$, $n = 1975$ in (1), dan komt er

$$f^{(1975)}(1) = (-1)^{1975}.7.3^{1975}.(1975)!.1 = -7.3^{1975}.(1975)!\,.$$

H 6.75

Herkansingsexamen/tentamen juni 1975

1. Wie een automobiel wenst te kopen van het merk F moet kiezen uit

   a) een cilinderinhoud van 1100 cc, 1200 cc of 1300 cc,

   b) een stuurversnelling, een pookje of een automatische schakeling.

   Bij een cilinderinhoud van 1100 cc is geen automatische schakeling leverbaar. Bovendien kan de koper op een lijst van n ($n \in \mathbb{N}$) accessoires aangeven welke van deze extra's (mistachterlicht, autoradio, etc.) hij aangebracht wil zien. We noemen twee automobielen van merk F verschillend als zij verschillen in cilinderinhoud of schakelsysteem of als één van beide een accessoire heeft die de ander mist.
   Hoeveel verschillende automobielen van het merk F kan men bestellen?

2. Bereken:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2-\cos x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} .$$

3. Bereken:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{-x}{1+x}}\, dx .$$

4. Beschouw de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n-1)} .$$

   a) Voor welke waarden van x is deze reeks convergent?

   b) Zij R de convergentiestraal.
   Bepaal de som van de reeks voor $|x| < R$.

5. Hoeveel termen van de reeksontwikkeling van arctan x rond x = 0 moet men meenemen om π (= 4 arctan 1) in vijf decimalen nauwkeurig te berekenen?

6. Bepaal alle complexe getallen z waarvoor geldt:

$$e^z = 1 + i .$$

H 6.75

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1975

1. Er is een 1100 cc F met stuurversnelling, een 1100 cc F met pookje, een 1200 cc F met stuurversnelling, een 1200 cc F met pookje, enz. Dit zijn $2+3+3=8$ verschillende auto's waaruit de koper kan kiezen. Na ieder van deze keuzen kan hij nog accessoires kiezen op een lijst van n stuks. De accessoires die hij kiest vormen een deelverzameling (eventueel de lege verzameling) van de verzameling met n elementen. Het aantal deelverzamelingen is 2^n.
Het aantal mogelijkheden om een F te kiezen is dus

$$8.2^n = 2^{n+3} .$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2-\cos x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{2-\cos x}{x}\right)}$.

Voor $x > 0$ is $\ln \frac{1}{x} \le \ln\left(\frac{2-\cos x}{x}\right) \le \ln \frac{3}{x}$, dus

$$\frac{-\ln x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{2-\cos x}{x}\right) \le \frac{\ln 3 - \ln x}{x^2} .$$

Uit $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-\ln x}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\ln 3}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = 0$ volgt, op grond van de insluitstelling, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{2-\cos x}{x}\right) = 0$. De functie e^x is continu, dus

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2-\cos x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{2-\cos x}{x}\right)} = e^0 = 1 .$$

N.B. De volgende "oplossing" is niet correct:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2-\cos x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{2-\cos x}{x}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} = 0^0 = 1 ,$$

want dan zou bijvoorbeeld ook gelden

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}} = 0^0 = 1 .$$

Dit is in tegenspraak met

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{-1} = e^{-1} .$$

H 6.75

3. De integrand is niet begrensd in de omgeving van $x = -1$ en in de omgeving van $x = 0$. Door de substitutie $x = -t$, $\frac{dx}{dt} = -1$ gaat de integraal over in

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{-x}{1+x}}\,dx = -\int_{1}^{0} \frac{1}{-t}\sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt = -\int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} .$$

De laatste (oneigenlijke) integraal kan men door de substitutie $\sqrt{t} = u$, $\frac{dt}{2\sqrt{t}} = du$ verder herleiden.
Dan volgt

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{-x}{1+x}}\,dx = -\int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}} = -2\int_{0}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$= -2 \arcsin u\Big|_0^1 = -\pi .$$

4. a) De reeks is convergent voor $x = 0$ en voor $x \neq 0$ is

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+2)n} \cdot \frac{(n+1)(n-1)}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{(n+2)n}|x| = |x| .$$

Volgens het convergentiekenmerk van d'Alembert is de reeks absoluut convergent voor $|x| < 1$ en divergent voor $|x| > 1$.

Voor $x = 1$ is de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)}$. Dit is een reeks met positieve termen, die convergent is op grond van het limietkenmerk, want

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n-1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-1} = 1 \neq 0 \text{ en } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

is een convergente reeks met positieve termen.

Voor $x = -1$ is de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n-1)}$. Deze is absoluut convergent, want $\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(n-1)}\right|$ is de reeks die we net onderzocht hebben.

Conclusie: de reeks is absoluut convergent voor $|x| \leq 1$, divergent voor $|x| > 1$.

H 6.75

b) Uit a) volgt dat $R = 1$ is.

Zij S de somfunctie van de reeks. Dan is $S(0) = 0$ en voor $0 < |x| < 1$ schrijven we

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n-1)} = \tfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} - \tfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \tfrac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}x \ln(1-x) - \frac{1}{2x}[-\ln(1-x) - x - \tfrac{1}{2}x^2] =$$

$$= -\tfrac{1}{2}x \ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{2x} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}x =$$

$$= \frac{1-x^2}{2x} \ln(1-x) + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}x \, .$$

Dus

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{2x} \ln(1-x) + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}x & \text{voor } 0 < |x| < 1 \, , \\ 0 & \text{voor } x = 0 \, . \end{cases}$$

<u>N.B.</u> Vanzelfsprekend geldt:

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1-x^2}{2x} \ln(1-x) + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}x\right] = 0 \, .$$

5. De reeksontwikkeling van arctan x rond 0 is

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \, ,$$

geldig voor $-1 \le x \le 1$. Dus

$$\pi = 4 \arctan 1 = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4}{2n-1} \, .$$

Dit is een alternerende reeks met $\lim_{n\to\infty} \frac{4}{2n-1} = 0$ en $0 < \frac{4}{2(n+1)-1} < \frac{4}{2n-1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dan geldt: bij afbreken na de term $(-1)^{N-1} \frac{4}{2N-1}$ (dit is de N-de term) ligt de afbreekfout E in tussen 0 en $(-1)^N \frac{4}{2N+1}$.

We bepalen $N \in \mathbb{N}$ nu zodanig dat $\frac{4}{2N+1} \le \tfrac{1}{2}.10^{-5}$. Dit geeft

$$\frac{2N+1}{4} \ge 2.10^5, \; N \ge 4.10^5 - \tfrac{1}{2}, \text{ dus } N \ge 400.000 \, .$$

Dan hebben we het volgende bereikt.

Als we 400.000 termen van de reeks voor π meenemen, dan ligt de afbreekfout E in tussen 0 en $\frac{4}{8.10^5+1}$, dus zeker tussen 0 en $\frac{1}{2}.10^{-5}$.

We zullen ons niet bezighouden met de vraag hoe de som van die 400.000 termen in decimale vorm berekend kan worden.

6. Twee complexe getallen ($\neq 0$) zijn dan en slechts dan gelijk als ze dezelfde modulus en hetzelfde argument (afgezien van een veelvoud van 2π) hebben. Uit $|e^z| = e^{\text{Re } z}$, $|1 + i| = \sqrt{2}$ volgt dus Re $z = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2$, en uit $\arg e^z = \text{Im } z$, $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ volgt Im $z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. De oplossingsverzameling van de vergelijking $e^z = 1 + i$ is dus

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = \tfrac{1}{2} \ln 2 + i(\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}\ .$$

P 10.75

Proeftentamen oktober 1975

1. Bereken:

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + n\cos n}{(n^2+1)[3+(-1)^n]} \ .$$

b) $$2 \arctan \frac{5}{4} + \arctan \frac{40}{9} \ .$$

2. a) De functie f is gegeven door $f(x) = x^2 e^{4x}$.
Bepaal $f^{(n)}(0)$ $(n \in \mathbb{N})$.

b) Bereken:
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + x^3}\, dx \ .$$

3. De functie $f: (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ is gegeven door
$$f(x) = x \ln \frac{\sin x}{x} \qquad (x \neq 0) \ ,$$
$$f(0) = 0 \ .$$

a) Bereken $f'(0)$.

b) Bereken $f'(x)$ voor $x \neq 0$.

c) Is f' continu in 0?

4. De rij (a_n) is gegeven door $a_n = (2n+1)(\frac{15}{17})^n$.

a) Voor welke n geldt $a_{n+1} < a_n$?

b) Bewijs dat de rij convergeert.

c) Bereken
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \ .$$

d) Bereken
$$\lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

P 10.75

5. De functie φ: $\mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$\varphi(n) = (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n .$$

Bewijs:

a) $\varphi(n+1) = 6\varphi(n) - 4\varphi(n-1)$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$;

b) $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ voor iedere $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

c) $\varphi(n)$ is deelbaar door 2^n voor iedere $n \in \mathbb{N}$.

P 10.75

Oplossingen Proeftentamen oktober 1975

1. a) We gaan eerst afschatten:

$$\frac{2n + n\cos n}{(n^2+1)[3+(-1)^n]} > \frac{2n-n}{4(n^2+1)} = \frac{n}{4(n^2+1)} > 0 ,$$

$$\frac{2n + n\cos n}{(n^2+1)[3+(-1)^n]} < \frac{2n+n}{2(n^2+1)} < \frac{3n}{2n^2} = \frac{3}{2n} ,$$

dus

$$0 < \frac{2n + n\cos n}{(n^2+1)[3+(-1)^n]} < \frac{3}{2n} \quad \text{voor } n \in \mathbb{N} .$$

Uit $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{2n} = 0$ volgt, op grond van de insluitstelling,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n + n\cos n}{(n^2+1)[3+(-1)^n]} = 0 .$$

b) Stel $\arctan \frac{5}{4} = p$ en $\arctan \frac{40}{9} = q$.
Dan is $\tan p = \frac{5}{4}$ en $-\frac{\pi}{2} < p < \frac{\pi}{2}$, zelfs $\frac{\pi}{4} < p < \frac{\pi}{2}$; $\tan q = \frac{40}{9}$ en $-\frac{\pi}{2} < q < \frac{\pi}{2}$, zelfs $\frac{\pi}{4} < q < \frac{\pi}{2}$.
Uit $\frac{\pi}{2} < 2p < \pi$, $\frac{\pi}{4} < q < \frac{\pi}{2}$ volgt $\frac{3\pi}{4} < 2p + q < \frac{3\pi}{2}$. We berekenen

$$\tan(2p+q) = \frac{\tan 2p + \tan q}{1 - \tan 2p \tan q} = \frac{\tan 2p + \frac{40}{9}}{1 - \frac{40}{9}\tan 2p} ,$$

waarbij

$$\tan 2p = \frac{2\tan p}{1-(\tan p)^2} = \frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{25}{16}} = -\frac{40}{9} .$$

Dus $\tan(2p+q) = 0$ en $\frac{3\pi}{4} < 2p + q < \frac{3\pi}{2}$.
Hieruit volgt $2p + q = \pi$, $2\arctan\frac{5}{4} + \arctan\frac{40}{9} = \pi$.

2. a) Volgens de regel van Leibniz geldt

$$f^{(n)}(x) = (e^{4x}x^2)^{(n)} = \binom{n}{0}(e^{4x})^{(n)}x^2 + \binom{n}{1}(e^{4x})^{(n-1)}(x^2)' + $$
$$+ \binom{n}{2}(e^{4x})^{(n-2)}(x^2)''$$

voor $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ en voor alle $x \in \mathbb{R}$.

P 10.75

We bewijzen met volledige inductie dat $(e^{4x})^{(n)} = 4^n.e^{4x}$ voor $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ (en voor alle $x \in \mathbb{R}$).
Voor $n = 0$ is het linkerlid $(e^{4x})^{(0)} = e^{4x}$, het rechterlid $4^0.e^{4x} = e^{4x}$, zodat de gelijkheid geldt voor $n = 0$. Zij $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ en neem aan dat $(e^{4x})^{(n)} = 4^n.e^{4x}$. Dan is

$$(e^{4x})^{(n+1)} = ((e^{4x})^{(n)})' = (4^n.e^{4x})' = 4^n.e^{4x}.4 = 4^{n+1}.e^{4x} ,$$

zodat dan de gelijkheid ook geldt voor $n+1$.
Dus $(e^{4x})^{(n)} = 4^n.e^{4x}$ voor $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ en voor alle $x \in \mathbb{R}$. Substitueren we dit resultaat in de uitdrukking voor $f^{(n)}(x)$ dan vinden we

$$f^{(n)}(x) = 4^n.e^{4x}.x^2 + n.4^{n-1}.e^{4x}.2x + \frac{n(n-1)}{1.2}.4^{n-2}.e^{4x}.2 =$$

$$= 4^n.x^2e^{4x} + 2n.4^{n-1}.xe^{4x} + n(n-1).4^{n-2}.e^{4x} ,$$

dus $f^{(n)}(0) = n(n-1).4^{n-2}$ voor $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Uit $f'(x) = 2xe^{4x} + 4x^2e^{4x}$, $f'(0) = 0$ volgt dat $f^{(n)}(0) = n(n-1).4^{n-2}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $$\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+x^3}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2}\sqrt{1+x}\,dx = \int_{-1}^{1} |x|\sqrt{1+x}\,dx = \int_{0}^{2} |t-1|\sqrt{t}\,dt,$$

waarbij de substitutie $x+1 = t$ is gebruikt.
Op het interval $0 \leq t \leq 1$ is $|t-1| = 1-t$ en op het interval $1 \leq t \leq 2$ is $|t-1| = t-1$, zodat

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+x^3}\,dx = \int_{0}^{1} (1-t)\sqrt{t}\,dt + \int_{1}^{2} (t-1)\sqrt{t}\,dt =$$

$$= \int_{0}^{1} (t^{1/2} - t^{3/2})dt + \int_{1}^{2} (t^{3/2} - t^{1/2})dt =$$

$$= [\tfrac{2}{3}\,t^{3/2} - \tfrac{2}{5}\,t^{5/2}]_0^1 + [\tfrac{2}{5}\,t^{5/2} - \tfrac{2}{3}\,t^{3/2}]_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{5} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{8+4\sqrt{2}}{15} .$$

P 10.75

3\. a) $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \ln \dfrac{\sin x}{x} = \ln(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}) = \ln 1 = 0$,
waarbij we bij het derde gelijkteken de continuïteit van ln x hebben gebruikt.

b) Voor $x \in (-\pi,\pi)$, $x \neq 0$ is

$$f'(x) = \ln \frac{\sin x}{x} + x \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} =$$

$$= \ln \frac{\sin x}{x} + \frac{x \cos x - \sin x}{\sin x} .$$

N.B. We mogen voor $x \neq 0$ niet schrijven $f(x) = x \ln \sin x - x \ln x$ omdat voor $-\pi < x < 0$ zowel $\sin x$ als x negatief zijn.

c) $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} (\ln \dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x - 1) = \ln 1 + 1.1 - 1 = 0 = f'(0)$
(vergelijk met a)), dus f' is continu in 0.

4\. a) $a_{n+1} < a_n$ als $(2n+3)(\frac{15}{17})^{n+1} < (2n+1)(\frac{15}{17})^n$, $\frac{15}{17}(2n+3) < 2n+1$,
$30n + 45 < 34n + 17$, $4n > 28$, $n > 7$.

b) De rij $a_8, a_9, a_{10}, \ldots$ is monotoon dalend (volgens a)) en naar beneden begrensd door 0, dus convergent. Dan is ook de rij $a_1, a_2, \ldots$ convergent.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{15}{17} \sqrt[n]{2n+1} = \frac{15}{17}$ op grond van de insluitstelling, immers

$$1 < \sqrt[n]{2n+1} \le \sqrt[n]{2n+n} = \sqrt[n]{3n} = \sqrt[n]{3}\,\sqrt[n]{n} \quad \text{voor } n \in \mathbb{N} ,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\,\sqrt[n]{n} = 1.1 = 1$, zodat ook $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+1} = 1$.

d) De rij $(\sqrt[n]{a_n})$ convergeert naar $\frac{15}{17}$ (volgens c)). Dan geldt voor iedere $\varepsilon > 0$: $\sqrt[n]{a_n} \in (\frac{15}{17} - \varepsilon, \frac{15}{17} + \varepsilon)$ o.d.d. Kies $\varepsilon = \frac{1}{17}$. Dit geeft
$\frac{14}{17} < \sqrt[n]{a_n} < \frac{16}{17}$ o.d.d., $(\frac{14}{17})^n < a_n < (\frac{16}{17})^n$ o.d.d.
Uit $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{14}{17})^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{16}{17})^n = 0$ volgt dan, op grond van de insluitstelling, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

5. a) $\varphi(n+1) = (3+\sqrt{5})^{n+1} + (3-\sqrt{5})^{n+1} = (3+\sqrt{5})^2(3+\sqrt{5})^{n-1} + (3-\sqrt{5})^2(3-\sqrt{5})^{n-1} =$

$$= (14+6\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^{n-1} + (14-6\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^{n-1} =$$

$$= (6(3+\sqrt{5}) - 4)(3+\sqrt{5})^{n-1} + (6(3-\sqrt{5}) - 4)(3-\sqrt{5})^{n-1} =$$

$$= 6(3+\sqrt{5})^n + 6(3-\sqrt{5})^n - 4(3+\sqrt{5})^{n-1} - 4(3-\sqrt{5})^{n-1} =$$

$$= 6\varphi(n) - 4\varphi(n-1), \quad n \in \mathbb{N} .$$

b) Voor $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ geldt $\varphi(n+2) = 6\varphi(n+1) - 4\varphi(n)$ volgens a). We bewijzen met volledige inductie dat $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ voor $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:
$\varphi(0) = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{N}$, $\varphi(1) = 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 6 \in \mathbb{N}$; stel $\varphi(n) \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$ voor zekere $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dan is $\varphi(n+2) = 6\varphi(n+1) - 4\varphi(n) \in \mathbb{Z}$, maar omdat volgens de definitie van φ geldt $\varphi(n) > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ is dan $\varphi(n+2) \in \mathbb{N}$.
Dus $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ voor alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Opmerking: We kunnen ook een rechtstreeks bewijs geven met behulp van het binomium van Newton:

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}(\sqrt{5})^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}(-\sqrt{5})^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}[(\sqrt{5})^k + (-\sqrt{5})^k] \quad \text{voor } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} .$$

Voor k oneven is $(\sqrt{5})^k + (-\sqrt{5})^k = (\sqrt{5})^k - (\sqrt{5})^k = 0$.
Voor k even, $k = 2m$, is $(\sqrt{5})^k + (-\sqrt{5})^k = 5^m + 5^m = 2.5^m$ $(m = 0,1,\ldots)$. Dus

$$\varphi(n) = \sum_{k \text{ even},\ 0 \le k \le n} \binom{n}{k} 3^{n-k}[(\sqrt{5})^k + (-\sqrt{5})^k] =$$

$$= \begin{cases} 2 \displaystyle\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2m} 3^{n-2m} 5^m & \text{voor } n = 1,3,5,\ldots , \\ 2 \displaystyle\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2m} 3^{n-2m} 5^m & \text{voor } n = 0,2,4,\ldots . \end{cases}$$

Hieruit blijkt dat $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ voor $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

c) We geven een bewijs met volledige inductie: $\varphi(1) = 6$ en 6 is deelbaar door 2, $\varphi(2) = 6\varphi(1) - 4\varphi(0) = 36 - 8 = 28$ en 28 is deelbaar door $4 = 2^2$. Laat $n \in \mathbb{N}$ en neem aan dat $\varphi(n)$ deelbaar is door 2^n en dat $\varphi(n+1)$ deelbaar is door 2^{n+1}.

Dan zijn er getallen $p(n) \in \mathbb{N}$ en $q(n) \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\varphi(n) = 2^n p(n)$ en $\varphi(n+1) = 2^{n+1}q(n)$.

Hieruit volgt $\varphi(n+2) = 6\varphi(n+1) - 4\varphi(n) = 3.2^{n+2}q(n) - 2^{n+2}p(n) =$
$= 2^{n+2}(3q(n) - p(n)) = 2^{n+2}r(n)$ met $r(n) = 3q(n) - p(n) \in \mathbb{Z}$ en $r(n) > 0$, dus $r(n) \in \mathbb{N}$; $\varphi(n+2)$ is dan deelbaar door 2^{n+2}.

Dus $\varphi(n)$ is deelbaar door 2^n voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Voor de liefhebbers.

Er bestaat een verband tussen de rij $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ en de rij $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van Fibonacci gegeven door $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_{n+1} = d_{n-1} + d_n$ voor $n \geq 2$.
We zullen met volledige inductie bewijzen dat

$$\varphi(n) = 2^n(d_{2n-1} + d_{2n+1}) \quad \text{voor } n \in \mathbb{N}:$$

$$6 = \varphi(1) = 2(d_1 + d_3) = 2.3 \,,$$

$$28 = \varphi(2) = 2^2(d_3 + d_5) = 4.7 \,.$$

Stel $\varphi(n) = 2^n(d_{2n-1} + d_{2n+1})$, $\varphi(n+1) = 2^{n+1}(d_{2n+1} + d_{2n+3})$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$, dan is

$$\varphi(n+2) = 6\varphi(n+1) - 4\varphi(n) = 2^{n+1}(6d_{2n+1} + 6d_{2n+3}) +$$

$$- 2^n(4d_{2n-1} + 4d_{2n+1}) = 2^{n+2}(3d_{2n+1} + 3d_{2n+3} - d_{2n-1} - d_{2n+1}) =$$

$$= 2^{n+2}(2d_{2n+1} + 3d_{2n+3} - (d_{2n+1} - d_{2n})) =$$

$$= 2^{n+2}(d_{2n+1} + 3d_{2n+3} + d_{2n}) = 2^{n+2}(d_{2n+2} + 3d_{2n+3}) =$$

$$= 2^{n+2}(2d_{2n+3} + d_{2n+4}) = 2^{n+2}(d_{2n+3} + d_{2n+5}) \,.$$

Dus $\varphi(n) = 2^n(d_{2n-1} + d_{2n+1})$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

T 1.76

Examen/tentamen januari 1976

1. a) Bereken

$$\int \frac{x^7}{x^4 + 1}\, dx \,.$$

b) De functie f: $\mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{x} \arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}} \,.$$

i) Bepaal de afgeleide van f.

ii) Ga na of f continu voortzetbaar is in 0.

---

2. a) Onderzoek voor alle $q \in \mathbb{R}$ of de reeks met algemene term

$$a_n = \frac{1}{n^q} \arctan \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

convergeert.

b) Gegeven zijn de integralen

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx \qquad (n \in \mathbb{N}) \,.$$

Bepaal een recurrente betrekking voor I_n en bereken I_7.

3. a) De functie f: $(-1,\infty) \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x) = \ln(1 + x) \,.$$

Bepaal het interpolatiepolynoom p van Taylor rond 0 van de tweede graad voor f. Geef een formule voor de fout die bij de benadering van f door p gemaakt wordt.

Bewijs dat voor alle $x > 0$ geldt

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1 + x)^3} < \ln(1 + x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \,.$$

b) Geef een decimale benadering voor $\ln \frac{4}{3}$ met een fout die hoogstens 10^{-2} is.

T 1.76

4. a) Los op in $\mathbb{C}$ de vergelijking

$$z^{10} - 2z^5 + 2 = 0 .$$

b) Bepaal de algemene reële oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x^3y' + x(x + 1)y = 1 .$$

T 1.76

Oplossingen Tentamen januari 1976

1. a) $\displaystyle\int \frac{x^7}{x^4+1}\,dx = \int \frac{x^7+x^3-x^3}{x^4+1}\,dx = \int x^3dx - \int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx =$

$$= \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}\int \frac{(x^4+1)'}{x^4+1}\,dx = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}\ln(x^4+1) + C\,.$$

b) i) $\displaystyle f'(x) = -\frac{1}{x^2}\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} +$

$$+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}}\cdot\frac{2x(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2}} =$$

$$= \frac{1}{|x|(x^2+1)} - \frac{1}{x^2}\arcsin\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\,.$$

ii) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0}\frac{1}{x}\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} =$

$$= \lim_{x\downarrow 0}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1.1 = 1\,,$$

want

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1\;;$$

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0}\frac{1}{x}\arcsin\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{y\downarrow 0} -\frac{1}{y}\arcsin\frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = -1\,.$$

Dus: $\lim_{x\to 0} f(x)$ bestaat niet, f is niet continu voortzetbaar in 0.

T 1.76

2\. a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is een reeks met positieve termen.
Voor grote waarden van n is $a_n \approx \frac{1}{n^q} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{n^{q+2/3}}$. Daarom kiezen we als vergelijkingsreeks $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ met $b_n = \frac{1}{n^{q+2/3}}$ en passen het limietkenmerk toe:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^{2/3} \arctan \frac{1}{n^{2/3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n^{2/3}}}{\frac{1}{n^{2/3}}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \neq 0 .$$

Dus zijn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ beide convergent of beide divergent.

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q+2/3}}$ is convergent als $q + \frac{2}{3} > 1$ en divergent als $q + \frac{2}{3} \leq 1$.

Conclusie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent als $q > \frac{1}{3}$, divergent als $q \leq \frac{1}{3}$.

b) Voor $n \in \mathbb{N}$ is

$$I_n = \lim_{A\to\infty} \int_0^A x^n e^{-x^2} dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-x^2} d\,\frac{x^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} e^{-x^2}\Big|_0^A + \frac{2}{n+1} \int_0^A x^{n+2} e^{-x^2} dx\right] =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[\frac{A^{n+1} e^{-A^2}}{n+1}\right] + \frac{2}{n+1} \int_0^\infty x^{n+2} e^{-x^2} dx = 0 + \frac{2}{n+1} I_{n+2} ,$$

dus $I_{n+2} = \frac{1}{2}(n+1) I_n$.
Hiermee vinden we

$$I_7 = \frac{6}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{2}{2} I_1 = 6 \int_0^\infty x e^{-x^2} dx =$$

$$= -3 \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-x^2} d(-x^2) = -3 \lim_{A\to\infty} e^{-x^2}\Big|_0^A = -3 \lim_{A\to\infty} (e^{-A^2} - 1) = 3.$$

3. a) Het Taylorinterpolatiepolynoom p is het beginstuk van de Taylorreeks van f rond 0, dus

$$p(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 .$$

De fout die bij de benadering van f door p gemaakt wordt is volgens de formule van Taylor:

$$f(x) - p(x) = \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(\xi) = \frac{x^3}{6} \frac{2}{(1+\xi)^3} = \frac{x^3}{3(1+\xi)^3}$$

met ξ tussen 0 en x.
Voor $x > 0$ geldt $0 < \xi < x$, $1 < 1 + \xi < 1 + x$, dus

$$\frac{x^3}{3(1+x)^3} < \frac{x^3}{3(1+\xi)^3} < \frac{x^3}{3} ,$$

zodat

$$x - \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3(1+x)^3} < \ln(1+x) < x - \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 .$$

b) Uit a) volgt

$$\frac{1}{192} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^3} < \ln\frac{4}{3} - p(\tfrac{1}{3}) < \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} ,$$

zodat de fout die we maken bij de benadering van $\ln\frac{4}{3}$ door $p(\frac{1}{3})$ waarschijnlijk te groot is.
We gebruiken daarom de reeksontwikkeling van $\ln(1+x)$ rond 0:

$$\ln\frac{4}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3}(\frac{1}{3})^3 - \frac{1}{4}(\frac{1}{3})^4 + \ldots .$$

Dit is een alternerende reeks waarvan de rij der absolute waarden van de termen monotoon naar 0 convergeert, zodat

$$\ln\frac{4}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3}(\frac{1}{3})^3 - E \text{ met } 0 < E < \frac{1}{4.3^4} = \frac{1}{324} < (0{,}31).10^{-2} .$$

Afronden van de termen op 3 decimalen en optellen geeft

$$\ln\frac{4}{3} \approx 0{,}333 - 0{,}056 + 0{,}012 = 0{,}289$$

met een totale fout (in absolute waarde) van ten hoogste

$$(0{,}31).10^{-2} + 3.\tfrac{1}{2}.10^{-3} = (0{,}46).10^{-2} .$$

Als we het eindantwoord willen opgeven in 2 decimalen wordt het resultaat

$$\ln \frac{4}{3} \approx 0,29$$

met een fout hoogstens

$$\frac{1}{2} . 10^{-2} + (0,46) . 10^{-2} < 10^{-2} .$$

4. a) Herleid de vergelijking $z^{10} - 2z^5 + 2 = 0$ door de substitutie $w = z^5$ tot een vierkantsvergelijking en los deze op door een kwadraat af te splitsen:

$$w^2 - 2w + 2 = 0, \quad (w - 1)^2 + 1 = 0, \quad (w - 1)^2 - i^2 = 0,$$

$$(w - 1 + i)(w - 1 - i) = 0 .$$

De wortels zijn dus $w_1 = 1 + i$, $w_2 = 1 - i$. De wortels van de oorspronkelijke vergelijking vinden we nu door de vergelijkingen $z^5 = 1 + i$ en $z^5 = 1 - i$ op te lossen.

Uit $z^5 = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi i}{4}}$ volgt $z = \sqrt[10]{2}\, e^{\frac{\pi i}{20} + \frac{2k\pi i}{5}}$, $k \in \mathbb{Z}$;

uit $z^5 = 1 - i = \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi i}{4}}$ volgt $z = \sqrt[10]{2}\, e^{-\frac{\pi i}{20} + \frac{2\ell\pi i}{5}}$, $\ell \in \mathbb{Z}$,

zodat de wortels van de vergelijking $z^{10} - 2z^5 + 2 = 0$ zijn

$$z_1 = \sqrt[10]{2}\, e^{\frac{\pi i}{20}}, \quad z_2 = \sqrt[10]{2}\, e^{\frac{9\pi i}{20}}, \quad z_3 = \sqrt[10]{2}\, e^{\frac{17\pi i}{20}}, \quad z_4 = \sqrt[10]{2}\, e^{-\frac{25\pi i}{20}},$$

$$z_5 = \sqrt[10]{2}\, e^{\frac{33\pi i}{20}}; \quad z_6 = \sqrt[10]{2}\, e^{-\frac{\pi i}{20}}, \quad z_7 = \sqrt[10]{2}\, e^{\frac{7\pi i}{20}}, \quad z_8 = \sqrt[10]{2}\, e^{\frac{15\pi i}{20}},$$

$$z_9 = \sqrt[10]{2}\, e^{\frac{23\pi i}{20}}, \quad z_{10} = \sqrt[10]{2}\, e^{\frac{31\pi i}{20}} .$$

Merk op dat $z_6 = \bar{z}_1$, $z_7 = \bar{z}_5$, $z_8 = \bar{z}_4$, $z_9 = \bar{z}_3$, $z_{10} = \bar{z}_2$.

b) De homogene vergelijking $x^3 y' + x(x + 1)y = 0$ lossen we op met scheiding van variabelen:

$$\frac{dy}{y} + \frac{x + 1}{x^2}\, dx = 0 ,$$

$$\ln|y| + \ln|x| - \frac{1}{x} = C ,$$

$$|yx| = e^C . e^{1/x}, \quad y = \frac{D}{x}\, e^{1/x} .$$

T 1.76

(De verduisterde oplossing $y = 0$ correspondeert met $D = 0$). We lossen nu de inhomogene vergelijking op met de methode van variatie van constanten, dus door te stellen

$$y = \frac{D(x)}{x} e^{\frac{1}{x}} .$$

Substitutie in $x^3 y' + x(x + 1)y = 1$ geeft

$$x^3\left(\frac{D'(x)}{x} e^{\frac{1}{x}} - \frac{D(x)}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{D(x)}{x^3} e^{\frac{1}{x}}\right) + (x + 1)D(x)e^{\frac{1}{x}} = 1 \ ,$$

$$x^2 D'(x)e^{\frac{1}{x}} = 1, \ D'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \ ,$$

zodat

$$D(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx = e^{-\frac{1}{x}} + C \ .$$

De algemene reële oplossing van de differentiaalvergelijking is dus

$$y = \frac{1}{x} + \frac{C}{x} e^{\frac{1}{x}} \ ,$$

waarin C een willekeurige reële constante is.

Herkansingsexamen/tentamen januari 1976

1. Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x\sqrt[3]{1 - x^2}}{x^5} .$$

2. Bereken

$$\int_1^\infty \frac{\ln(1 + x)}{x\sqrt{x}}\, dx .$$

3. Geef een decimale benadering van $\sqrt[3]{\frac{19}{16}}$ met een fout kleiner dan 10^{-3}.

4. Los op de differentiaalvergelijking

$$3x^2y^2y' + y^3 + 3y^2y' - 1 = 0$$

met beginvoorwaarde $y(0) = 2$.

5. De rij (a_n) is gegeven door

$$\begin{cases} a_1 = 0 , \\ a_{n+1} = \frac{3}{16} + a_n^2 \qquad (n \in \mathbb{N}) . \end{cases}$$

a) Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$a_n < \frac{1}{4} .$$

b) Bewijs dat de rij (a_n) convergeert.

c) Bepaal $\lim_{n\to\infty} a_n$.

6. a) Bepaal het interpolatiepolynoom p van Lagrange dat met $\sin(\pi x)$ samenvalt in de punten 0, $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{2}$.

b) Bewijs dat

$$\sin(\pi x) < p(x) \qquad \text{voor } 0 < x < \frac{1}{6}$$

en

$$\sin(\pi x) > p(x) \qquad \text{voor } \frac{1}{6} < x < \frac{1}{2} .$$

H 1.76

N.B. In de bekende notatie is $f(x) = p(x) + R_n$ met

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a_0)(x - a_1)\dots(x - a_n) .$$

c) Bewijs dat

$$0{,}239 < \sin\frac{\pi}{12} < 0{,}271 .$$

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1976

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x\sqrt[3]{1 - x^2}}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x(1 - x^2)^{1/3}}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots) - x(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}(-\frac{2}{3})\frac{x^4}{2!} + \dots)}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{1}{5} + \frac{1}{9})x^5 + \dots}{x^5} = \frac{14}{45} .$$

2. $$\int_1^\infty \frac{\ln(1 + x)}{x\sqrt{x}}\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_1^A x^{-3/2}\ln(1 + x)dx = \lim_{A\to\infty} -2 \int_1^A \ln(1 + x)dx^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[-2 \left.\frac{\ln(1 + x)}{\sqrt{x}}\right|_1^A + 2 \int_1^A \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + x)}\right] =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[-2 \frac{\ln(1 + A)}{\sqrt{A}} + 2 \ln 2 + 4 \int_1^A \frac{d\sqrt{x}}{1 + (\sqrt{x})^2}\right] =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[-2 \frac{\ln(1 + A)}{\sqrt{A}} + 2 \ln 2 + 4 \arctan \sqrt{A} - 4 \arctan 1\right] =$$

$$= 2 \ln 2 + 4\cdot\frac{\pi}{2} - \pi = 2 \ln 2 + \pi .$$

3. $$\sqrt[3]{\frac{19}{16}} = (1 + \frac{3}{16})^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}(\frac{3}{16}) + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2!}(\frac{3}{16})^2 + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{3!}(\frac{3}{16})^3 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{16} - (\frac{1}{16})^2 + \frac{5}{3}(\frac{1}{16})^3 - \dots =$$

$$= 1 + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots ,$$

waarbij voor de alternerende reeks $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ geldt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n - 1/3}{n + 1} \cdot \frac{3}{16} < 1,\ a_{n+1} < a_n \quad \text{voor } n \in \mathbb{N} .$$

Dus $\sqrt[3]{\frac{19}{16}} = 1 + \frac{1}{16} - (\frac{1}{16})^2 + E$ met

$$0 < E < \frac{5}{3}(\frac{1}{16})^3 < (0,41)10^{-3} .$$

Afronden van de termen op 4 decimalen geeft

$$\sqrt[3]{\frac{19}{16}} \approx 1,0000 + 0,0625 - 0,0039 = 1,0586$$

met een fout (in absolute waarde) van ten hoogste

$$(0,41)10^{-3} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-4} = (0,46)10^{-3} ,$$

waarbij we opmerken dat de afrondingsfouten in 1,0000 en 0,0625 gelijk zijn aan nul.
Willen we het eindantwoord opgeven in 3 decimalen dan vinden we $\sqrt[3]{\frac{19}{16}} \approx 1,059$ met een fout hoogstens

$$(0,46)10^{-3} + \frac{1}{2}\cdot 10^{-3} < 10^{-3} .$$

4. We schrijven de differentiaalvergelijking als volgt:

$$3(x^2 + 1)y^2y' = 1 - y^3 ,$$

$$3(x^2 + 1)y^2dy = (1 - y^3)dx .$$

Deze vergelijking kunnen we oplossen met scheiding van variabelen door te delen door $(x^2 + 1)(1 - y^3)$. Daarbij wordt de oplossing $y = 1$ (voor alle x) verduisterd; deze oplossing voldoet echter niet aan de beginvoorwaarde $y(0) = 2$. We vinden

$$\frac{3y^2dy}{1 - y^3} = \frac{dx}{x^2 + 1} ,$$

en na integratie

$$-\ln|1 - y^3| = \arctan x + C ,$$

$$\frac{1}{|1 - y^3|} = e^C e^{\arctan x} ,$$

$$1 = D(y^3 - 1)e^{\arctan x} .$$

Substitutie van $x = 0$, $y = 2$ geeft $1 = 7D$, zodat de vergelijking van de integraalkromme door het punt (0,2) wordt

$$(y^3 - 1)e^{\arctan x} = 7 .$$

5. a) We bewijzen met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$0 \le a_n < \frac{1}{4} .$$

Voor $n = 1$ is de bewering waar.
Zij $n \in \mathbb{N}$ en neem aan dat $0 \le a_n < \frac{1}{4}$. Dan is

$$\frac{3}{16} \le \frac{3}{16} + a_n^2 < \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4} ,$$

dus ook $0 \le a_{n+1} < \frac{1}{4}$. Hieruit volgt $0 \le a_n < \frac{1}{4}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
<u>N.B</u>. Bedenk dat uit $a_n < \frac{1}{4}$ <u>niet</u> volgt $a_n^2 < \frac{1}{16}$.

b) De rij (a_n) is begrensd volgens a).
We zullen bewijzen dat hij ook monotoon is. Voor $n \in \mathbb{N}$ is

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{16} + a_n^2 - a_n = (a_n - \tfrac{1}{2})^2 + \frac{3}{16} - \frac{1}{4} = (a_n - \tfrac{1}{2})^2 - \frac{1}{16} =$$

$$= (a_n - \frac{1}{2} + \frac{1}{4})(a_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = (a_n - \frac{1}{4})(a_n - \frac{3}{4}) > 0$$

omdat $a_n - \frac{1}{4} < 0$ en $a_n - \frac{3}{4} < 0$.
Dus $a_{n+1} > a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$: de rij (a_n) is monotoon stijgend.
De rij (a_n) is convergent.

c) Stel $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, dan is $\lim_{n\to\infty} (\frac{3}{16} + a_n^2) = \frac{3}{16} + a^2$, dus $\frac{3}{16} + a^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$,
$\frac{3}{16} + a^2 - a = 0$, $(a - \frac{1}{4})(a - \frac{3}{4}) = 0$.
Daar $a_n < \frac{1}{4}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ is $a = \frac{3}{4}$ niet mogelijk. Dus $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$.

6. a) Stel $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{6}$, $a_2 = \frac{1}{2}$ en

$$b_0 = \sin \pi a_0 = 0,\ b_1 = \sin \pi a_1 = \frac{1}{2} ,\ b_2 = \sin \pi a_2 = 1 ,$$

dan is p het polynoom gegeven door

$$p(x) = b_0 \ell_0(x) + b_1 \ell_1(x) + b_2 \ell_2(x) = \tfrac{1}{2}\ell_1(x) + \ell_2(x) ,$$

waarin

H 1.76

$$\ell_1(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_2)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} = \frac{x(x-\frac{1}{2})}{\frac{1}{6}(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})} = -18x(x-\frac{1}{2})$$

en

$$\ell_2(x) = \frac{(x-a_0)(x-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} = \frac{x(x-\frac{1}{6})}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})} = 6x(x-\frac{1}{6}) \ .$$

Dus $p(x) = -9x(x-\frac{1}{2}) + 6x(x-\frac{1}{6}) = -3x^2 + \frac{7}{2}x.$

Opmerking. Handiger is de volgende methode.
Stel $p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2$ en bepaal de coëfficiënten p_0, p_1, p_2 uit de vergelijkingen

$$p(0) = 0, \ p(\tfrac{1}{6}) = \tfrac{1}{2}, \ p(\tfrac{1}{2}) = 1 \ .$$

Dit geeft

$$p_0 = 0, \ p_0 + \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{36}p_2 = \frac{1}{2}, \ p_0 + \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{4}p_2 = 1 \ ;$$

$$p_0 = 0, \ p_1 = \frac{7}{2}, \ p_2 = -3 \ .$$

Dus $p(x) = \frac{7}{2}x - 3x^2.$

b) Uit

$$f(x) = p(x) + R_2 = p(x) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)$$

en $(\sin \pi x)^{(3)} = -\pi^3 \cos \pi x$ volgt

(1) $$\sin \pi x = p(x) - \frac{1}{6}\pi^3 x(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})\cos \pi\xi \ .$$

Preciezer gezegd: voor alle $x \in [0,\frac{1}{2}]$ is er een $\xi \in (0,\frac{1}{2})$ zodat (1) geldt.
Uit (1) leiden we af:

$$\sin \pi x - p(x) = -\frac{1}{6}\pi^3 x(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})\cos \pi\xi = (x-\frac{1}{6})c(x)$$

voor $0 < x < \frac{1}{2}$, waarbij $c(x) > 0$.
Immers, $\cos \pi\xi > 0$ voor $0 < \xi < \frac{1}{2}$ en $x(x-\frac{1}{2}) < 0$ voor $0 < x < \frac{1}{2}$, zodat $c(x) = -\frac{1}{6}\pi^3 x(x-\frac{1}{2})\cos \pi\xi > 0$ voor $0 < x < \frac{1}{2}$. Dus

$$\sin \pi x - p(x) < 0 \quad \text{voor } 0 < x < \frac{1}{6},$$

$$\sin \pi x - p(x) > 0 \quad \text{voor } \frac{1}{6} < x < \frac{1}{2} \ .$$

c) Uit b) volgt

$$\sin\frac{\pi}{12} = p(\tfrac{1}{12}) - \frac{1}{6}\frac{\pi^3}{12}(-\frac{1}{12})(-\frac{5}{12})\cos\pi\xi = p(\tfrac{1}{12}) - \frac{5}{6}(\frac{\pi}{12})^3\cos\pi\xi ,$$

zodat

$$\sin\frac{\pi}{12} < p(\tfrac{1}{12}) = \frac{1}{12}(\frac{7}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{13}{48} < 0{,}271$$

en

$$\sin\frac{\pi}{12} > p(\tfrac{1}{12}) - \frac{5}{6}(\frac{4}{12})^3 \cdot 1 > 0{,}270 - \frac{5}{162} > 0{,}270 - 0{,}031 = 0{,}239 ,$$

dus $0{,}239 < \sin\frac{\pi}{12} < 0{,}271$.

T 6.76

Examen/tentamen juni 1976

1. Zij $p \in \mathbb{R}$.
De functie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$\begin{cases} f(x) = |x|^p \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{voor } x \neq 0 , \\ f(0) = 0 . \end{cases}$$

Voor welke waarde(n) van p is f differentieerbaar in 0?

2. Bepaal de algemene oplossing van de lineaire differentiaalvergelijking

$$y' + xy = x^3 .$$

3. a) Onderzoek voor welke reële waarden van x de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

convergeert.

b) Laat zien dat voor die waarden van x, waarvoor de reeks convergeert, de som kleiner dan of gelijk is aan

$$\ln \frac{1}{1-x^2} .$$

4. Voor de elementen van de rij (a_n) geldt

$$\begin{cases} -2 < a_1 < 1 , \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^3 + 2}{3} \quad (n \in \mathbb{N}) . \end{cases}$$

a) Toon aan dat ook

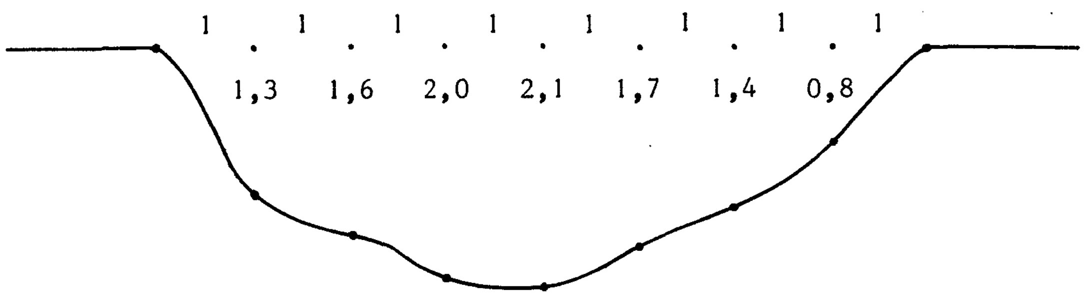
$$-2 < a_n < 1 \quad (n \geq 2) .$$

b) Laat zien dat de rij (a_n) monotoon stijgt.

c) Bepaal

$$\lim_{n\to\infty} a_n .$$

5. Een beek van 8 meter breedte heeft op een bepaalde plaats een gemeten diepteverloop in meters, als in de figuur is aangegeven.



Bepaal een schatting van het doorstroomoppervlak als volgt:

a) Bereken met de samengestelde rechthoekregel $R(2)$ en met de samengestelde trapeziumregel $T(2)$.

b) Bereken $T(1)$ uit $R(2)$ en $T(2)$.

c) Geef met behulp van $T(2)$ een schatting van de fout in $T(1)$. Gegeven is

$$E_T(1) \approx \frac{1}{3}[T(1) - T(2)] .$$

6. Bepaal de verzameling van elementen $z \in \mathbb{C}$ die voldoen aan

$$\arg \frac{z+1}{z-1} = \frac{\pi}{3} .$$

Schets de gevonden verzameling in het complexe vlak.

T 6.76

Oplossingen Tentamen juni 1976

1. Voor het differentiequotiënt van f in 0 geldt

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} -|x|^{p-1}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{voor } x < 0\,, \\ |x|^{p-1}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{voor } x > 0\,. \end{cases}$$

Met de substitutie $\frac{1}{x^2} = y$, $|x| = y^{-\frac{1}{2}}$ volgt

$$\lim_{x\to 0} |x|^{p-1}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^{-\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}}}{e^y} = 0 \quad \text{voor alle } p \in \mathbb{R}\,.$$

Dus $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$; f is differentieerbaar in 0 met $f'(0) = 0$ voor alle $p \in \mathbb{R}$.

2. De homogene differentiaalvergelijking

$$y'(x) + xy(x) = 0$$

lossen we op met scheiding van variabelen:

$$\frac{dy}{y} + x\,dx = 0,\ \ln|y| + \tfrac{1}{2}x^2 = C_1\,,$$

$$y(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}\,.$$

De oplossing $y(x) = 0$ voor alle x correspondeert met $C = 0$. De inhomogene differentiaalvergelijking

$$y'(x) + xy(x) = x^3$$

lossen we nu op met de methode van variatie van constanten.
Stel $y(x) = c(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ en substitueer dit in de inhomogene vergelijking:

$$c'(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} - xc(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} + xc(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} = x^3\,.$$

Dan volgt

$$c'(x) = x^3e^{\frac{1}{2}x^2}\,,$$

$$c(x) = \int x^3e^{\frac{1}{2}x^2}dx = \int x^2de^{\frac{1}{2}x^2} = x^2e^{\frac{1}{2}x^2} - 2\int xe^{\frac{1}{2}x^2}dx = x^2e^{\frac{1}{2}x^2} - 2e^{\frac{1}{2}x^2} + C\,,$$

zodat de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking wordt

$$y(x) = c(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} = x^2 - 2 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2} ,$$

waarin C een willekeurige (reële) constante is.

<u>Opmerking</u>. Voor C = 0 krijgen we de particuliere oplossing

$$y(x) = x^2 - 2 .$$

Als controle op het verrichte rekenwerk laten we zien dat dit inderdaad een oplossing is:

$$(x^2 - 2)' + x(x^2 - 2) = 2x + x^3 - 2x = x^3 .$$

3. a) Voor x = 0 is de reeks convergent en voor $x \neq 0$ is

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{(n+1)^{1+\frac{1}{n+1}}} \cdot \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{x^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n+1]{n+1}} \cdot x^2 = x^2 ,$$

zodat op grond van het convergentiekenmerk van d'Alembert de reeks absoluut convergent is voor $x^2 < 1$, dus voor $|x| < 1$, en divergent voor $|x| > 1$. Voor $|x| = 1$ is de algemene term van de reeks gelijk aan

$$a_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} .$$

De reeks is dan divergent op grond van het limietkenmerk, immers, $a_n > 0$ voor $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \neq 0$$

en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent.

Samenvattend: De reeks is absoluut convergent voor $|x| < 1$ en divergent voor $|x| \geq 1$.

b) Zij S de somfunctie van de reeks, dus

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n\sqrt[n]{n}}, \quad -1 < x < 1 .$$

Uit $0 \le \frac{x^{2n}}{n\sqrt[n]{n}} \le \frac{x^{2n}}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, volgt

$$S(x) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} = -\ln(1 - x^2) = \ln \frac{1}{1-x^2} .$$

4. a) Met volledige inductie. Volgens het gegeven geldt $-2 < a_1 < 1$.
Stel $-2 < a_n < 1$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$. Dan is

$$\frac{-6}{3} < \frac{a_n^3 + 2}{3} < \frac{3}{3},$$

dus $-2 < a_{n+1} < 1$.
Hieruit volgt $-2 < a_n < 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Uit

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^3 + 2 - 3a_n}{3} = \frac{(a_n - 1)(a_n^2 + a_n - 2)}{3} = \frac{(a_n - 1)^2(a_n + 2)}{3}$$

en $-2 < a_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$, volgt

$$a_{n+1} - a_n > 0, \; a_{n+1} > a_n \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} .$$

De rij (a_n) is dus monotoon stijgend.

c) De rij (a_n) is monotoon en begrensd, dus convergent. Stel $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Dan is

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^3 + 2}{3} = \frac{a^3 + 2}{3} .$$

Dus geldt $a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2(a + 2) = 0$.
Daar $a = -2$ onmogelijk is ($a_n \ge a_1 > -2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dus ook $a \ge a_1 > -2$) is $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = 1$.

T 6.76

5. a) $R(2) = 2[1{,}3 + 2{,}0 + 1{,}7 + 0{,}8] = 11{,}6$;

$T(2) = \frac{1}{2}.2[0 + 2\cdot 1{,}6 + 2\cdot 2{,}1 + 2\cdot 1{,}4 + 0] = 10{,}2$.

b) $T(1) = \frac{1}{2}[R(2) + T(2)] = 10{,}9$.

c) $E_T(1) \approx \frac{1}{3}[10{,}9 - 10{,}2] = 0{,}2$.

Een schatting van het doorstroomoppervlak is

$$T(1) + E_T(1) = 11{,}1 \ (m^2) .$$

6. Stel $w = \frac{z+1}{z-1}$, $z = x + iy$, $w = u + iv$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$).
Dan is $\{w \in \mathbb{C} \mid \arg w = \frac{\pi}{3}\}$ de halfrechte $v = u\sqrt{3}$, $v > 0$ in het complexe w-vlak. Uit

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{x+1+iy}{x-1+iy} = \frac{(x+1+iy)(x-1-iy)}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1-2iy}{(x-1)^2+y^2}$$

volgt

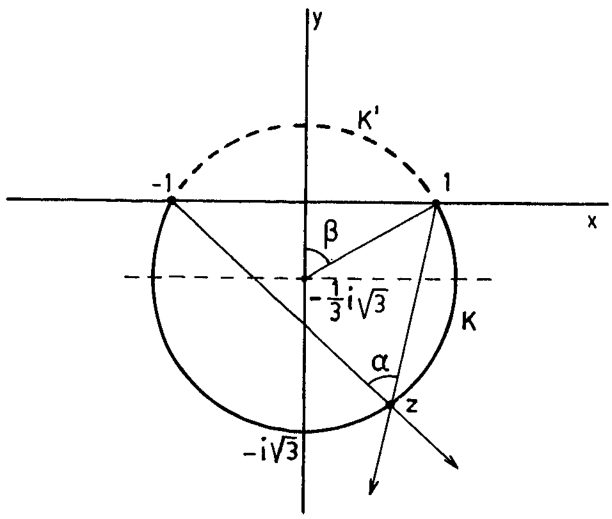
$$u = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}\ , \quad v = \frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}\ ,$$

zodat $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg \frac{z+1}{z-1} = \frac{\pi}{3}\}$ gegeven wordt door $-2y = (x^2+y^2-1)\sqrt{3}$, $y < 0$.
Herschrijven levert

$$x^2 + (y + \tfrac{1}{3}\sqrt{3})^2 = \tfrac{4}{3}\ , \qquad y < 0\ ,$$

$$|z + \tfrac{1}{3}\, i\sqrt{3}| = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\ , \qquad \mathrm{Im}\, z < 0\ .$$

Dit is het deel K van de cirkel met middelpunt $-\frac{1}{3}\, i\sqrt{3}$ en straal $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ gelegen in het halfvlak $\mathrm{Im}\, z < 0$.



T 6.76

Controle: Merk op dat de cirkel $|z + \frac{1}{3} i\sqrt{3}| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ gaat door de punten -1 en 1 en dat deze punten niet tot K behoren.
Kies $z \in K$. Dan is $\arg \frac{z+1}{z-1} = \arg(z+1) - \arg(z-1) = \alpha$, waarbij α omtrekshoek in de cirkel $|z + \frac{1}{3} i\sqrt{3}| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ is, staande op de boog K' van de cirkel (zie figuur). Dus $\alpha = \beta$, waarin β de halve middelpuntshoek op de boog K' is. Uit $\tan \beta = \sqrt{3}$ volgt $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$.

Herkansingsexamen/tentamen juni 1976

1. Gegeven is

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}(\sqrt{x^3 + x} + \sqrt{x^3 + 1}) = C \neq 0 .$$

Bepaal α en C.

2. Onderzoek of de integraal

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\, dx$$

convergeert.

3. a) Bewijs dat

$$e^x - 1 < xe^x$$

voor $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

b) De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{voor } x \neq 0 , \\ f(0) = 1 . \end{cases}$$

i) Toon aan dat f continu is in 0.

ii) Toon aan dat f differentieerbaar is in 0.

iii) Toon aan dat f monotoon is.

iv) Bepaal $f(\mathbb{R})$.

4. Bepaal voor alle reële waarden van a de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + 2y' + y = e^{ax}$$

die voldoet aan

$$y(0) = 0 \quad \text{en} \quad y'(0) = 1 .$$

5. Los op in $\mathbb{C}$ de vergelijking

$$z^9 - 2z^6 + 2z^3 - 1 = 0 .$$

H 6.76

6. Onderzoek voor welke reële x de volgende reeks convergeert en bepaal voor die x de som:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} .$$

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1976

1. De factor $\sqrt{x^3 + x} + \sqrt{x^3 + 1}$ is voor grote waarden van x ongeveer gelijk aan $2\sqrt{x^3}$, dus

$$x^\alpha(\sqrt{x^3 + x} + \sqrt{x^3 + 1}) \approx 2x^{\alpha+3/2} \quad \text{voor grote } x\ .$$

Hieruit volgt $\alpha = -\frac{3}{2}$, $C = 2$.
Nu exact. Onderscheid drie gevallen.

1°. $\alpha < -\frac{3}{2}$.
Uit

$$0 < x^\alpha(\sqrt{x^3 + x} + \sqrt{x^3 + 1}) = x^{\alpha+3/2}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}\right) \le x^{\alpha+3/2}(\sqrt{2} + \sqrt{2})$$

voor $x \ge 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} 0 = 0$ en $\lim\limits_{x\to\infty} 2x^{\alpha+3/2}\sqrt{2} = 0$ volgt dan op grond van de insluitstelling

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha(\sqrt{x^3 + x} + \sqrt{x^3 + 1}) = 0\ .$$

2°. $\alpha > -\frac{3}{2}$.
Uit

$$x^\alpha(\sqrt{x^3 + x} + \sqrt{x^3 + 1}) > x^{\alpha+3/2} \quad \text{voor } x > 0$$

en $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha+3/2} = \infty$ volgt dan

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha(\sqrt{x^3 + x} + \sqrt{x^3 + 1}) = \infty\ .$$

3°. $\alpha = -\frac{3}{2}$.
Dan is

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha(\sqrt{x^3 + x} + \sqrt{x^3 + 1}) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}\right) = 1 + 1 = 2\ .$$

Alleen in geval 3° bestaat de limiet en is deze ongelijk aan nul. Dus $\alpha = -\frac{3}{2}$, $C = 2$.

H 6.76

2. Schrijf

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx .$$

In de integraal $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$ is de integrand niet begrensd in de omgeving van 0.

Voor $0 < x \le 1$ geldt $\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right| < \frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. De integraal $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ is convergent.

Hieruit volgt dat de oneigenlijke integraal $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$ absoluut convergent, dus convergent is.

Op $[1,\infty)$ geldt $\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

De integraal $\int_1^\infty x^{-3/2}dx$ is convergent, zodat ook de oneigenlijke integraal $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$ absoluut convergent, dus convergent is.

Conclusie: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$ is convergent.

3. a) Beschouw de functie f gedefinieerd door

$$f(x) = e^x - 1 - xe^x, \quad x \in \mathbb{R} .$$

Dan is $f'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$, $x \in \mathbb{R}$, zodat f monotoon stijgend is op $(-\infty,0)$ ($f'(x) > 0$ voor $x < 0$) en monotoon dalend op $(0,\infty)$ ($f'(x) < 0$ voor $x > 0$).

Hieruit volgt $f(x) < f(0) = 0$ voor $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, dus $e^x - 1 < xe^x$ voor $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

b) i) De functie e^x is differentieerbaar in 0 met afgeleide 1, zodat

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = 1 .$$

Dus $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 = f(0)$; f is continu in 0.

ii) Met reeksontwikkeling:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \ldots\right) = \frac{1}{2}\ .$$

Dus f is differentieerbaar in 0 en $f'(0) = \frac{1}{2}$.

iii) Voor $x \neq 0$ is $f'(x) = \dfrac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} > 0$ op grond van a).

Met $f'(0) = \frac{1}{2}$ volgt dat $f'(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Dus f is monotoon stijgend op $\mathbb{R}$.

iv) Uit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0 \quad (0 < \left|\frac{e^x - 1}{x}\right| = \frac{1 - e^x}{|x|} < \frac{1}{|x|} \quad \text{voor } x < 0,$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|} = 0$, insluitstelling) en

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \infty$$

volgt op grond van de monotonie van f en op grond van de tussenwaarde-stelling dat

$$f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}\ .$$

4. De karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$$

heeft twee samenvallende wortels $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, zodat de algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking is

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}\ .$$

Als $a \neq -1$ heeft de inhomogene differentiaalvergelijking een particuliere oplossing $y(x) = pe^{ax}$. Substitutie geeft

$$pa^2 e^{ax} + 2pae^{ax} + pe^{ax} = e^{ax}\ ,$$

$$p(a + 1)^2 e^{ax} = e^{ax}\ ,$$

zodat $p = \dfrac{1}{(a+1)^2}$.

In dit geval is dus de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking:

$$y(x) = \frac{1}{(a+1)^2}\, e^{ax} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} .$$

De constanten C_1 en C_2 bepaalt men uit de voorwaarden $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Dit geeft

$$\frac{1}{(a+1)^2} + C_1 = 0, \quad \frac{a}{(a+1)^2} - C_1 + C_2 = 1 ,$$

dus

$$C_1 = -\frac{1}{(a+1)^2} , \quad C_2 = \frac{a}{a+1} .$$

Als $a = -1$ heeft de inhomogene differentiaalvergelijking een particuliere oplossing van de gedaante $y(x) = qx^2e^{-x}$. Substitutie levert

$$(qx^2 - 4qx + 2q)e^{-x} + 2(-qx^2 + 2qx)e^{-x} + qx^2e^{-x} = e^{-x} ,$$

$$2qe^{-x} = e^{-x}, \quad q = \tfrac{1}{2} .$$

In dit geval is de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking:

$$y(x) = \tfrac{1}{2}x^2e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} .$$

De voorwaarden $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ geven

$$C_1 = 0, \quad -C_1 + C_2 = 1, \quad \text{dus } C_1 = 0, \; C_2 = 1 .$$

Samenvatting:

$$y(x) = \frac{1}{(a+1)^2}\, e^{ax} - \frac{1}{(a+1)^2}\, e^{-x} + \frac{a}{a+1}\, xe^{-x} \qquad \text{voor } a \neq -1 ,$$

$$y(x) = \tfrac{1}{2}x^2e^{-x} + xe^{-x} \qquad \text{voor } a = -1 .$$

5. Stel $w = z^3$, dan ontstaat de vergelijking $w^3 - 2w^2 + 2w - 1 = 0$, waarvan het linkerlid ontbonden kan worden als volgt:

$$w^3 - 2w^2 + 2w - 1 = (w-1)(w^2 - w + 1) =$$

$$= (w-1)[(w-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}] = (w-1)(w - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3})(w - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}) .$$

De wortels van de vergelijking $w^3 - 2w^2 + 2w - 1 = 0$ zijn dus $w_1 = 1$, $w_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $w_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} = \bar{w}_2$. De wortels van de vergelijking

$$z^9 - 2z^6 + 2z^3 - 1 = 0$$

worden nu verkregen door de drie vergelijkingen $z^3 = w_i$ $(i = 1,2,3)$ op te lossen.

De wortels van de vergelijking

$$z^3 = w_1 = 1 = e^{2k\pi i},\ k \in \mathbb{Z}\ ,$$

zijn

$$z_1 = 1,\ z_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3},\ z_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3} = \bar{z}_2\ .$$

De wortels van de vergelijking

$$z^3 = w_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3} = e^{\frac{\pi i}{3} + 2\ell\pi i},\ \ell \in \mathbb{Z}\ ,$$

zijn

$$z_4 = e^{\frac{\pi i}{9}},\ z_5 = e^{\frac{7\pi i}{9}} \text{ en } z_6 = e^{\frac{13\pi i}{9}}\ .$$

De wortels van de vergelijking

$$z^3 = w_3 = \bar{w}_2$$

zijn dan

$$z_7 = \bar{z}_4 = e^{-\frac{\pi i}{9}},\ z_8 = \bar{z}_5 = e^{-\frac{7\pi i}{9}} \text{ en } z_9 = \bar{z}_6 = e^{-\frac{13\pi i}{9}}\ .$$

6. Voor $x = 0$ is de reeks convergent en voor $x \neq 0$ is

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n(n+1)}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}|x| = |x|\ ,$$

zodat volgens het convergentiekenmerk van d'Alembert de reeks absoluut convergeert voor $|x| < 1$ en divergent is voor $|x| > 1$.

Voor $x = -1$ en voor $x = 1$ is

$$\left|\frac{x^n}{n(n+1)}\right| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}\ ,$$

zodat de reeks voor $x = \pm 1$ ook nog absoluut convergent is op grond van de vergelijkingsstelling.

Conclusie: de reeks is absoluut convergent voor $|x| \le 1$, divergent voor $|x| > 1$.

Zij S de som van de reeks, dus

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}, \quad -1 \le x \le 1 .$$

Voor $-1 \le x < 1$, $x \ne 0$ schrijven we

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} =$$

$$= -\ln(1-x) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\ln(1-x) + \frac{1}{x}(\ln(1-x) + x) =$$

$$= 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x) .$$

Voor $x = 1$ is de reeks ook nog convergent, zodat op grond van de stelling van Abel

$$S(1) = \lim_{x \uparrow 1} S(x) = 1 + \lim_{x \uparrow 1} \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} =$$

$$= 1 + \lim_{p \downarrow 0} \frac{p \ln p}{1-p} = 1 .$$

<u>Opmerking</u>. We kunnen S(1) ook bepalen met de definitie: $S(1) = \lim_{N\to\infty} S_N$. Hierin is S_N de N-de partiële som van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) .$$

Dus

$$S_N = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} ,$$

zodat $S(1) = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$.

Met $S(0) = 0$ hebben we dus gevonden

$$S(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1-x}{x}\ln(1-x) & \text{voor } -1 \le x < 1,\ x \ne 0 , \\ 0 & \text{voor } x = 0 , \\ 1 & \text{voor } x = 1 . \end{cases}$$

Proeftentamen oktober 1976

1. a) De functie f wordt voor $x \neq -1$ gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{x}{1+x} .$$

Bewijs dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(1+x)^{n+1}} .$$

b) Bereken de coëfficiënt van x^3 in $(x^2 + 3x + 2)^8$.

2. Bepaal de volgende limieten:

a) $$\lim_{n\to\infty} n^2 (\arctan \frac{1}{n}) \ln(1 + \frac{1}{n}) ,$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+4x}}{2x} ,$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + n^2}{3^n + n^3}} ,$$

d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} .$$

3. a) De functie f wordt voor $0 < x < 1$ gedefinieerd door

$$f(x) = \arcsin\sqrt{1 - x^2} .$$

Bepaal de afgeleide.

b) Bepaal $\int (1 + \cos x)\sin^3 x \, dx$.

c) Bepaal $\int \arctan \frac{1}{x} \, dx$.

4. De functie f wordt gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{voor } x < 0 , \\ 0 & \text{voor } x = 0 , \\ \ln(x^2 + bx + c) & \text{voor } x > 0 . \end{cases}$$

Hierin zijn b en c niet-negatieve reële getallen.

i) Bepaal als $b = c = 1$ de extrema van f.

ii) Voor welke waarden van b en c is f continu in 0?

iii) Bepaal b en c zodanig dat f differentieerbaar is in 0.

P 10.76

5. Bewijs dat voor alle $x > 0$ geldt

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} .$$

Oplossingen Proeftentamen oktober 1976

1. a) Met volledige inductie.

i) Rechtstreeks differentiëren van $f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} =$
$= 1 - \frac{1}{1+x}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{(-1)^2 1!}{(1+x)^2}$, zodat voor $n = 1$ de bewering waar is.

ii) Stel $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(1+x)^{n+1}}$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$. Dan is

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \frac{(-1)^{n+1} n!(-(n+1))}{(1+x)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+2}(n+1)!}{(1+x)^{n+2}} .$$

Uit i) en ii) volgt: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(1+x)^{n+1}}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Volgens het binomium van Newton geldt

$$(x^2 + 3x + 2)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (x^2)^k (3x+2)^{8-k} =$$

$$= \binom{8}{0}(3x+2)^8 + \binom{8}{1}x^2(3x+2)^7 + \binom{8}{2}x^4(3x+2)^6 + \ldots + \binom{8}{8}x^{16} =$$

$$= (3x+2)^8 + 8x^2(3x+2)^7 + p(x) ,$$

waarin p een polynoom is van de gedaante

$$p(x) = c_4 x^4 + c_5 x^5 + \ldots + c_{16} x^{16} .$$

De coëfficiënt van x^3 in $(x^2 + 3x + 2)^8$ is dus gelijk aan de coëfficiënt van x^3 in $(3x+2)^8 + 8x^2(3x+2)^7$. Nogmaals toepassen van het binomium van Newton geeft

$$(3x+2)^8 + 8x^2(3x+2)^7 = \sum_{\ell=0}^{8} \binom{8}{\ell}(3x)^\ell 2^{8-\ell} + 8x^2 \sum_{\ell=0}^{7} \binom{7}{\ell}(3x)^\ell 2^{7-\ell} ,$$

waaruit we de coëfficiënt van x^3 onmiddellijk kunnen opschrijven:

$$\binom{8}{3}3^3.2^5 + 8\binom{7}{1}3.2^6 = 8.7.3^3.2^5 + 8.7.3.2^6 = 2^8.3^3.7 + 2^9.3.7 =$$

$$= 2^8.3.7.11 = 59.136 .$$

Opmerking. Het polynoom $x^2 + 3x + 2$ kan ontbonden worden als volgt: $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, zodat we met behulp van het binomium van Newton kunnen schrijven

$$(x^2 + 3x + 2)^8 = (x+1)^8(x+2)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} x^k \sum_{\ell=0}^{8} \binom{8}{\ell} x^{\ell} 2^{8-\ell} =$$

$$= [\binom{8}{0} + \binom{8}{1}x + \binom{8}{2}x^2 + \binom{8}{3}x^3 + \ldots][\binom{8}{0}2^8 + \binom{8}{1}2^7 x + \binom{8}{2}2^6 x^2 + \binom{8}{3}2^5 x^3 + \ldots].$$

De coëfficiënt van x^3 in $(x^2 + 3x + 2)^8$ is dus

$$\binom{8}{0}\binom{8}{3}2^5 + \binom{8}{1}\binom{8}{2}2^6 + \binom{8}{2}\binom{8}{1}2^7 + \binom{8}{3}\binom{8}{0}2^8 =$$

$$= 2^5(8.7 + 8.8.7 + 8.7.8.2 + 8.7.2^3) =$$

$$= 2^8.7(1 + 8 + 16 + 8) = 2^8.7.33 = 59.136 .$$

N.B. Deze oplossing maakt gebruik van de speciale gedaante van het polynoom $x^2 + 3x + 2$, terwijl de eerste oplossing ook werkt voor algemenere polynomen $x^2 + bx + c$.

2. a) We schrijven

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\arctan \frac{1}{n})\ln(1 + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} .$$

Uit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} =$$

$$= (\arctan y)'_{y=0} = \frac{1}{1 + 0} = 1 \text{ en}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x) - \ln(1 + 0)}{x - 0} = (\ln(1+y))'_{y=0} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

volgt dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1.1 = 1 .$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 + 4x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x - (1 + 4x)}{2x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 + 4x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3}{2(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 + 4x})} = -\frac{3}{4} .$$

c) Uit

$$\sqrt[n]{\frac{2^n + n^2}{3^n + n^3}} = \frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{1 + n^2 2^{-n}}{1 + n^3 3^{-n}}} \qquad \text{en}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + n^2 2^{-n}}{1 + n^3 3^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + n^2(\frac{1}{2})^n}{1 + n^3(\frac{1}{3})^n} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

volgt

$$\frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{1}{2}} < \sqrt[n]{\frac{2^n + n^2}{3^n + n^3}} < \frac{2}{3}\sqrt[n]{2} \text{ o.d.d.}$$

Wegens $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{3}\sqrt[n]{2} = \frac{2}{3}$ is dan $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n + n^2}{3^n + n^3}} = \frac{2}{3}$ op grond van de insluitstelling.

d)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n + \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln n}\ln(1 + \frac{1}{n})\right) = 1 + 0.0 = 1 \ .$$

3. a) Op grond van de kettingregel geldt

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

omdat $|x| = x$ voor $0 < x < 1$.

b)
$$\int (1+\cos x)\sin^3 x \, dx = \int \sin^3 x \, dx + \int \cos x \sin^3 x \, dx =$$

$$= \int \sin^2 x \sin x \, dx + \int \sin^3 x (\sin x)' dx =$$

$$= \int (\cos^2 x - 1)(\cos x)' dx + \frac{1}{4}\sin^4 x =$$

$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + \frac{1}{4}\sin^4 x + C \ .$$

c)
$$\int \arctan\frac{1}{x}\, dx = x \arctan\frac{1}{x} - \int x \, d \arctan\frac{1}{x} =$$

$$= x\arctan\frac{1}{x} - \int x \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}(-\frac{1}{x^2})\, dx =$$

P 10.76

$$= x \arctan \frac{1}{x} + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx =$$

$$= x \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C \,.$$

4. i) Voor $x < 0$ is $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$, dus $f'(x) < 0$, f monotoon dalend.

Voor $x > 0$ is $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$, dus $f'(x) > 0$, f monotoon stijgend.

Verderr geldt $f(x) > 0$ voor $x \neq 0$, want $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} > 0$ voor $x < 0$ en $f(x) = \ln(x^2 + x + 1) > \ln 1 = 0$ voor $x > 0$. Het voorgaande kunnen we als volgt samenvatten.

De functie f heeft geen extrema op $(-\infty,0)$ en op $(0,\infty)$; $f(x) \geq f(0) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Conclusie: f heeft een globaal minimum 0 in het punt 0.

N.B. Uit

f monotoon dalend op $(-\infty,0)$, f monotoon stijgend op $(0,\infty)$

volgt niet dat f een minimum heeft in 0.

ii) De functie f is continu in 0 dan en slechts dan als $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, dus dan en slechts dan als $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f(x) = 0$.

Wegens $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to\infty} e^{-y} = 0$, waarbij de substitutie $\frac{1}{x^2} = y$ is toegepast, is f continu in 0 dan en slechts dan als

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} \ln(x^2 + bx + c) = 0 \,.$$

Voor $c = 0$ is $\lim_{x\downarrow 0} \ln(x^2 + bx + c) = \lim_{x\downarrow 0} \ln(x^2 + bx) = -\infty$.

Voor $c > 0$ is $\lim_{x\downarrow 0} \ln(x^2 + bx + c) = \ln c$, zodat

$$\lim_{x\downarrow 0} \ln(x^2 + bx + c) = 0 \quad \text{voor } c = 1 \,.$$

Dus f is continu in 0 voor $c = 1$, b willekeurig (niet-negatief).

iii) De functie f is differentieerbaar in 0 dan en slechts dan als $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ bestaat, dus dan en slechts dan als $\lim_{x\uparrow 0} \frac{f(x)}{x}$ en $\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ bestaan en aan elkaar gelijk zijn.

P 10.76

Nodig voor differentieerbaarheid is continuïteit, dus c = 1 volgens onderdeel ii).

Wegens $\lim\limits_{x\uparrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\uparrow 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{y\to\infty} -\sqrt{y}\, e^{-y} = -\lim\limits_{y\to\infty} \frac{y^{\frac{1}{2}}}{e^y} = 0$, waarbij de substitutie $-\frac{1}{x} = \sqrt{y}$ is toegepast, is f differentieerbaar in 0 dan en slechts dan als

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln(x^2 + bx + 1)}{x} = 0 .$$

De functies $g(x) = \ln(x^2 + bx + 1)$ en $h(x) = x$ zijn differentieerbaar in 0 met $h'(0) = 1 \neq 0$, terwijl bovendien geldt $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$. Dus is $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(0)}{h'(0)}$, d.w.z.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2 + bx + 1)}{x} = \frac{(\ln(x^2 + bx + 1))'_{x=0}}{1} = \left(\frac{2x + b}{x^2 + bx + 1}\right)_{x=0} = b ,$$

dus ook $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\ln(x^2 + bx + 1)}{x} = b$, zodat f differentieerbaar is in 0 dan en slechts dan als b = 0, c = 1.

Opmerkingen.

1) We kunnen $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{\ln(x^2 + bx + 1)}{x}$ ook als volgt berekenen.

Voor $x > 0$ geldt $x^2 + bx \geq x^2 > 0$, zodat we kunnen schrijven

$$\frac{\ln(x^2 + bx + 1)}{x} = \frac{\ln(x^2 + bx + 1)}{x^2 + bx} \cdot \frac{x^2 + bx}{x} =$$

$$= (x + b)\frac{\ln(x^2 + bx + 1)}{x^2 + bx} \quad \text{voor } x > 0 .$$

Met de substitutie $x^2 + bx = h$ vinden we dan

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln(x^2 + bx + 1)}{x^2 + bx} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\ln(1 + h) - \ln 1}{h} =$$

$$= (\ln y)'_{y=1} = 1 \text{ , dus}$$

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln(x^2 + bx + 1)}{x} = \lim_{x\downarrow 0} (x + b)\frac{\ln(x^2 + bx + 1)}{x^2 + bx} = b.1 = b .$$

2) In het algemeen geldt niet $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$, zoals blijkt uit de volgende voorbeelden.

P 10.76

a) $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{voor } x \neq 0 , \\ \alpha & \text{voor } x = 0 . \end{cases}$$

Hierin is α een reëel getal.

Voor $x \neq 0$ is $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, zodat $\lim_{x\to 0} f'(x)$ niet bestaat.

Voor $\alpha \neq 0$ is f niet continu in 0, dus zeker niet differentieerbaar: $f'(0)$ bestaat niet.

Voor $\alpha = 0$ is $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ op grond van $|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$, $x \neq 0$, en de insluitstelling.

b) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 , \\ 1 & \text{voor } x \geq 0 . \end{cases}$$

Voor $x \neq 0$ is $f'(x) = 0$, zodat $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, terwijl $f'(0)$ niet bestaat omdat f niet continu is in 0: $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$.

3) Zij $c = 1$, $b \geq 0$. Dan is f continu in 0 (zie ii)) en differentieerbaar op $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Als nu $\lim_{x\to 0} f'(x)$ bestaat, dan is f differentieerbaar in 0 en er geldt $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x)$.

Voor $x < 0$ is $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$, dus

$$\lim_{x\uparrow 0} f'(x) = \lim_{x\uparrow 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to\infty} -2y\sqrt{y}\, e^{-y} = -\lim_{y\to\infty} \frac{y^{3/2}}{e^y} = 0 ,$$

waarbij de substitutie $-\frac{1}{x} = \sqrt{y}$ is toegepast.

Voor $x > 0$ is $f(x) = \ln(x^2 + bx + 1)$, $f'(x) = \frac{2x + b}{x^2 + bx + 1}$, dus $\lim_{x\downarrow 0} f'(x) =$
$= \lim_{x\downarrow 0} \frac{2x + b}{x^2 + bx + 1} = b$.

Aangezien $\lim_{x\to 0} f'(x)$ bestaat dan en slechts dan als $\lim_{x\uparrow 0} f'(x) = \lim_{x\downarrow 0} f'(x)$, dus dan en slechts dan als $b = 0$ volgt

f is differentieerbaar in 0 als $b = 0$ (en $c = 1$) .

Uit opmerking 2), voorbeeld a), met $\alpha = 0$, volgt dat hiermee slechts een voldoende voorwaarde voor differentieerbaarheid van f in 0 gevonden is. Uit bovenstaande oplossing blijkt dat de voorwaarde ook noodzakelijk is voor het bestaan van $f'(0)$.

5. Beschouw de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Zij $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dan is f continu op $[a,a+1]$ en differentieerbaar op $(a,a+1)$: $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ voor $x > 0$.

Volgens de middelwaardestelling is er een $\xi \in (a,a+1)$ zodat

$$f(a+1) - f(a) = 1.f'(\xi) ,$$

$$\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi^2}} .$$

Wegens $a < \xi$, $\frac{1}{\sqrt[3]{\xi^2}} < \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ geldt

$$\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi^2}} < \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} < \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} .$$

Hiermee is bewezen

$$\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a} < \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \quad \text{voor } a > 0 .$$

Vervang a door x, dan staat er

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{voor } x > 0 .$$

Opmerking. Omdat deze ongelijkheid niet scherp is (in plaats van $\frac{1}{3}$ staat er 1 in het rechterlid) is een meer elementaire oplossing mogelijk met weinig rekenwerk.

We moeten bewijzen: $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ voor $x > 0$.

Uitwerken van de ongelijkheid geeft

$$\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) < 1, \quad \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x+1} - x < 1 ,$$

$$\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x+1} < x+1, \quad \sqrt[3]{x^2} < \sqrt[3]{(x+1)^2}, \quad x^2 < (x+1)^2, \quad 0 < 2x+1 .$$

Het bewijs verloopt dan als volgt.

Voor $x > 0$ geldt $0 < 2x + 1$. Hieruit leiden we achtereenvolgens af:
$x^2 < x^2 + 2x + 1$, $x^2 < (x+1)^2$,

$$\sqrt[3]{x^2} < \sqrt[3]{(x+1)^2} = \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}} , \quad \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x+1} < x+1 ,$$

$$\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x^3} < 1, \quad \sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) < 1 ,$$

zodat voor $x > 0$ geldt $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Examen/tentamen januari 1977

1. a) Gegeven zijn de integralen

$$I_n = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^n x \, dx \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) .$$

Bepaal een recurrente betrekking voor I_n.

Bereken I_4.

b) Bepaal

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n+4}{4}\binom{n-4}{4}}{\binom{n+4}{n-4}} .$$

---

2. a) Bepaal

$$\int \frac{x + 4}{(x^2 + 2x + 2)(x - 1)} \, dx .$$

b) Gegeven is de functie

$$f(x) = \frac{1}{x(x - 4)} , \qquad x \neq 0, \ x \neq 4 .$$

Geef van de machtreeksontwikkeling van deze functie rond 2 de termen tot en met die van de zevende graad.

3. Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n - 1)}\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^n .$$

a) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ convergeert deze reeks?

b) Bepaal voor deze waarden van x de som van de reeks.

c) Bepaal voor $x = 2$ het kleinste getal N zodanig dat de afbreekfout na N termen kleiner is dan 10^{-4}.

4. a) Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 2y' + y = e^x - e^{-x} .$$

b) Bereken

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{3i\varphi} \sin \varphi \, d\varphi$$

en schrijf het antwoord in de vorm $a + bi$ met $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$.

Oplossingen Tentamen januari 1977

1. a) Voor $n \geq 2$ geldt

$$I_n = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^n x\, dx = - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{n-1} x \; d \cos x =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} + (n-1) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx =$$

$$= (\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^n + (n-1) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x) dx =$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}n} + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \text{ , dus}$$

$$I_n = \frac{1}{n}[2^{-\frac{1}{2}n} + (n-1) I_{n-2}] \text{ .}$$

Hieruit volgt

$$I_4 = \frac{1}{4}[\frac{1}{4} + 3I_2] = \frac{1}{16} + \frac{3}{4} I_2 = \frac{1}{16} + \frac{3}{8}[\frac{1}{2} + I_0] =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32} \text{ .}$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n+4}{4}\binom{n-4}{4}}{\binom{n+4}{n-4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+4)!}{4!n!} \; \frac{(n-4)!}{4!(n-8)!}}{\frac{(n+4)!}{(n-4)!8!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8!(n-4)!(n-4)!}{4!4!n!(n-8)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 70 \frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 70 \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{4}{n})(1-\frac{5}{n})(1-\frac{6}{n})(1-\frac{7}{n})}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})} = 70$$

2. a) Schrijf

$$\frac{x+4}{(x^2+2x+2)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{D}{x-1} \text{ ,}$$

dan is

$$x + 4 = (Ax + B)(x - 1) + D(x^2 + 2x + 2) \text{ ,}$$

dus

$$A + D = 0, \; -A + B + 2D = 1, \; -B + 2D = 4;$$
$$A = -1, \; B = -2, \; D = 1 \text{ .}$$

De integraal wordt

$$\int \frac{x+4}{(x^2+2x+2)(x-1)}\,dx = -\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int \frac{2x+2\,+\,2}{x^2+2x+2}\,dx + \ln|x-1| =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} + \ln|x-1| =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) + \ln|x-1| + C\ .$$

b) Stel $x - 2 = h$, $x = 2 + h$, dan volgt

$$f(2+h) = \frac{1}{(2+h)(h-2)} = \frac{1}{h^2-4} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-(\frac{h}{2})^2} =$$

$$= -\tfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n} \qquad \text{voor } |h| < 2\ .$$

Hierbij is $(1 - (\frac{h}{2})^2)^{-1}$ ontwikkeld in een meetkundige reeks.
De machtreeksontwikkeling van f rond 2 is dus

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{2}\right)^{2n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{2^{2n+2}}\,,\ \text{geldig voor } |x-2| < 2.$$

3. a) Stel $a_n = \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$. Dan is $a_n > 0$, $n \geq 2$ en

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{(n+1)n}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}\,,$$

zodat volgens het convergentiekenmerk van d'Alembert de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ convergeert voor $\frac{1}{1+x^2} < 1$, dus $x \neq 0$.
Voor $x = 0$ is $a_n = \frac{1}{n(n-1)} < \frac{1}{(n-1)^2}$, $n \geq 2$.
$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$ is convergent, zodat $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ convergent is op grond van de vergelijkingsstelling.
De reeks is convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Zij $S(x)$ de som van de reeks. Dan is

$$S(0) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[(1-\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}) + \ldots + (\tfrac{1}{N-1}-\tfrac{1}{N}) + (\tfrac{1}{N}-\tfrac{1}{N+1})\right] =$$

T 1.77

$$= \lim_{N\to\infty} [1 - \frac{1}{N+1}] = 1 \ .$$

Voor $x \neq 0$ stellen we $\frac{1}{1+x^2} = y$. Dan is $0 < y < 1$ en de reeks wordt $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} y^n$.

De som van deze machtreeks bepalen we als volgt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{y^n}{n-1} - \frac{y^n}{n}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n} = -y \ln(1-y) + \ln(1-y) + y \ ,$$

waarbij gebruik gemaakt is van de reeksontwikkeling

$$\ln(1-y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} \ , \text{ geldig voor } -1 \leq y < 1 \ .$$

Substitutie van $y = \frac{1}{1+x^2}$ geeft

$$S(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \ , \qquad x \neq 0 \ .$$

c) $$S(2) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} (\frac{1}{5})^n = \frac{1}{2.1}(\frac{1}{5})^2 + \frac{1}{3.2}(\frac{1}{5})^3 + \frac{1}{4.3}(\frac{1}{5})^4 + \frac{1}{5.4}(\frac{1}{5})^5 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{50} + \frac{1}{750} + \frac{1}{7500} + \frac{1}{62500} + \ldots \ .$$

De afbreekfout na 2 termen is groter dan $\frac{1}{7500}$.
De afbreekfout na 3 termen is gelijk aan

$$E = \frac{1}{5.4}(\frac{1}{5})^5 + \frac{1}{6.5}(\frac{1}{5})^6 + \frac{1}{7.6}(\frac{1}{5})^7 + \ldots \ ,$$

zodat

$$0 < E < \frac{1}{5.4}(\frac{1}{5})^5 (1 + \frac{1}{5} + (\frac{1}{5})^2 + \ldots) = \frac{1}{62500} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{50000} < 10^{-4} \ .$$

Dus $N = 3$.

<u>Opmerking</u>. We hebben ons hier laten leiden door de gedachte dat de 4^e term van de reeks een redelijke schatting is van de afbreekfout na 3 termen, omdat de reeks <u>snel convergeert</u>.

We kunnen het vraagstuk ook als volgt oplossen. De N-de term van de reeks is $\frac{1}{(N+1)N}(\frac{1}{5})^{N+1}$, zodat de afbreekfout na N termen gelijk is aan

$$E = \frac{1}{(N+2)(N+1)}(\frac{1}{5})^{N+2} + \frac{1}{(N+3)(N+2)}(\frac{1}{5})^{N+3} + \frac{1}{(N+4)(N+3)}(\frac{1}{5})^{N+4} + \dots$$

Dus

$$0 < E < \frac{1}{(N+2)(N+1)}(\frac{1}{5})^{N+2}(1 + \frac{1}{5} + (\frac{1}{5})^2 + \dots) =$$

$$= \frac{1}{(N+2)(N+1)}(\frac{1}{5})^{N+2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{1}{4(N+2)(N+1)5^{N+1}} .$$

Kies N zodanig dat $\frac{1}{4(N+2)(N+1)5^{N+1}} < 10^{-4}$.

Dit geeft $(N+2)(N+1)5^{N+1} > 2500$, $(N+2)(N+1)5^N > 500$, $N \geq 3$.

De afbreekfout na 2 termen is groter dan $\frac{1}{4.3}(\frac{1}{5})^4 = \frac{1}{7500}$.

Het kleinste getal N waarvoor $E < 10^{-4}$ is dus N = 3.

4. a) De karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ heeft de wortels $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, zodat de algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking is

$$y = C_1e^x + C_2xe^x .$$

Aangezien 1 een tweevoudige wortel is van de karakteristieke vergelijking, heeft de differentiaalvergelijking een particuliere oplossing van de vorm

$$y = ax^2e^x + be^{-x} .$$

Substitutie levert

$$ax^2e^x + 4axe^x + 2ae^x + be^{-x} - 2(ax^2e^x + 2axe^x - be^{-x}) +$$
$$+ ax^2e^x + be^{-x} = e^x - e^{-x} ,$$

$$2ae^x + 4be^{-x} = e^x - e^{-x}, \text{ zodat}$$

$$a = \tfrac{1}{2},\ b = -\tfrac{1}{4} .$$

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is dus

$$y = \tfrac{1}{2}x^2e^x - \tfrac{1}{4}e^{-x} + C_1e^x + C_2xe^x .$$

b) We schrijven $\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$, waarna de integraal overgaat in

T 1.77

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{3i\varphi}\sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2i}\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{3i\varphi}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (e^{4i\varphi} - e^{2i\varphi})\,d\varphi = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{4i}e^{4i\varphi} - \frac{1}{2i}e^{2i\varphi}\right]_{\varphi=\pi/4}^{\varphi=\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{4i}e^{2\pi i} - \frac{1}{2i}e^{\pi i} - \frac{1}{4i}e^{\pi i} + \frac{1}{2i}e^{\pi i/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{2i} + \frac{1}{2i} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\ .$$

Opmerking. Toepassing van de formule van Euler,

$$e^{3i\varphi} = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi\ ,$$

leidt tot de volgende oplossing:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{3i\varphi}\sin\varphi\, d\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos 3\varphi\sin\varphi\, d\varphi + i\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin 3\varphi\sin\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin 4\varphi - \sin 2\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2}i\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos 2\varphi - \cos 4\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos 4\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right]_{\varphi=\pi/4}^{\varphi=\pi/2} + \frac{1}{2}i\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right]_{\varphi=\pi/4}^{\varphi=\pi/2} =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\ ,$$

waarbij de bekende somformules voor goniometrische functies zijn toegepast.

Herkansingsexamen/tentamen januari 1977

1. a) Bewijs dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\left(1+\frac{2}{1}\right)\left(1+\frac{2}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right) < (n+1)^2 .$$

   b) Bereken

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x-\tan x}{x\tan x}\,dx .$$

2. a) Bereken

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}} .$$

   b) Onderzoek of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \sin\frac{1}{n}$$

   convergeert.

3. Beschouw de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n} x^{2n} .$$

   a) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is deze reeks convergent?
   b) Bepaal voor deze waarden van x de som van de reeks.
   c) Geef een schatting van de afbreekfout na 10 termen voor $x = \frac{1}{3}$.

4. a) Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(1+x^2)y' + xy = 1 .$$

   b) Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan

$$\left(\frac{z}{z-i}\right)^4 = -4 .$$

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1977

1. a) We geven een bewijs met volledige inductie.

i) Voor $n = 1$ staat er $1 + 2 < 2^2$, zodat de bewering waar is voor $n = 1$.

ii) Zij $n \in \mathbb{N}$. Uit

$$(1 + \tfrac{2}{1})(1 + \tfrac{2}{2}) \ldots (1 + \tfrac{2}{n}) < (n + 1)^2$$

volgt

$$(1 + \tfrac{2}{1})(1 + \tfrac{2}{2}) \ldots (1 + \tfrac{2}{n})(1 + \tfrac{2}{n+1}) < (n+1)^2(1 + \tfrac{2}{n+1}) =$$

$$= (n + 1)(n + 3) = n^2 + 4n + 3 < n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2 .$$

Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dus

$$(1 + \tfrac{2}{1})(1 + \tfrac{2}{2}) \ldots (1 + \tfrac{2}{n}) < (n + 1)^2 .$$

Opmerking. Er is een eenvoudiger oplossing:

$$(1 + \tfrac{2}{1})(1 + \tfrac{2}{2}) \ldots (1 + \tfrac{2}{n-1})(1 + \tfrac{2}{n}) =$$

$$= \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdots\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n+2}{n} = \frac{(n+2)!}{2!n!} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} <$$

$$< \frac{(n+1)(2n+2)}{2} = (n + 1)^2 .$$

b) De integrand is begrensd op het interval $(0,\frac{\pi}{2})$:

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{x - \tan x}{x \tan x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^3 + \ldots - x + \frac{1}{6}x^3 - \ldots}{x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \ldots} =$$

$$= \lim_{x\downarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + \ldots}{x^2 + \ldots} = 0; \quad \lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \frac{x - \tan x}{x \tan x} = \lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{\pi} .$$

De integraal is dus niet oneigenlijk.

De functie $F\colon [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{x - \tan x}{x \tan x}\, dx$$

is continu op $[0,\frac{\pi}{2}]$, zodat

H 1.77

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x - \tan x}{x \tan x}\,dx = F(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^{\pi/2} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Big[\ln(\sin x) - \ln x\Big]_{x=\varepsilon}^{x=\pi/2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(-\ln \frac{\pi}{2} - \ln(\sin \varepsilon) + \ln \varepsilon\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\ln \frac{2}{\pi} - \ln\left(\frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}\right)\right) = \ln \frac{2}{\pi} - \ln\left(\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}\right) =$$

$$= \ln \frac{2}{\pi} - \ln 1 = \ln \frac{2}{\pi}\,.$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de continuïteit van de functie ln x.

2\. a) Wegens $\sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{(x + 1)^2 - 1}$ is de integraal als volgt te herleiden. Substitueer $x + 1 = \frac{1}{\cos \varphi}$ en neem φ zo dat het integratie-interval $1 \leq x < \infty$ overgaat in $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Dan is $\sqrt{(x + 1)^2 - 1} = \tan \varphi$, $dx = \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}\,d\varphi$, zodat

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x)\sqrt{x^2 + 2x}} = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\tan^3 \varphi} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}\,d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}\,d\varphi = -\frac{1}{\sin \varphi}\Bigg|_{\pi/3}^{\pi/2} = -1 + \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\,.$$

b) De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \sin \frac{1}{n}$ is absoluut convergent (en dus convergent) op grond van de vergelijkingsstelling: $\left|\frac{(-1)^n}{2^n} \sin \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ is een convergente meetkundige reeks.

3\. a) Voor $x = 0$ is de reeks convergent en voor $x \neq 0$ is

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n + 1} \frac{n}{n - 1} x^2 = x^2\,.$$

Op grond van het convergentiekenmerk van d'Alembert is de reeks dus (absoluut) convergent voor $x^2 < 1$, $|x| < 1$, en divergent voor $|x| > 1$.

Voor $|x| = 1$ is de reeks ook divergent, omdat de algemene term (voor $|x| = 1$) niet naar nul gaat voor $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

Samenvattend: de reeks is convergent voor $|x| < 1$, divergent voor $|x| \geq 1$.

b) Zij $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n} x^{2n}$, $-1 < x < 1$.

Omdat de reeksen $\sum_{n=2}^{\infty} x^{2n}$ en $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ beide convergent zijn voor $-1 < x < 1$, kunnen we schrijven

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{2n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} = \frac{x^4}{1-x^2} + x^2 + \ln(1-x^2) =$$

$$= \frac{x^2}{1-x^2} + \ln(1-x^2), \quad -1 < x < 1 .$$

c) $S(\frac{1}{3}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n}(\frac{1}{9})^n$.

Voor de afbreekfout E na 10 termen geldt

$$E = \frac{11}{12}(\tfrac{1}{9})^{12} + \frac{12}{13}(\tfrac{1}{9})^{13} + \frac{13}{14}(\tfrac{1}{9})^{14} + \ldots <$$

$$< (\tfrac{1}{9})^{12} + (\tfrac{1}{9})^{13} + (\tfrac{1}{9})^{14} + \ldots = \tfrac{1}{8}(\tfrac{1}{9})^{11} .$$

4. a) De homogene differentiaalvergelijking

$$(1 + x^2)y' + xy = 0$$

lossen we op met de methode van scheiding van variabelen:

$$(1 + x^2)dy + xy\,dx = 0 ,$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{x\,dx}{1+x^2} = 0 ,$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = 0 ,$$

$$\ln|y| + \tfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) = C_1 ,$$

$$y = C(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} .$$

De algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking bepalen we nu met de methode van variatie van constanten.

H 1.77

Stel $y(x) = c(x)(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Na substitutie in de vergelijking

$$(1 + x^2)y' + xy = 1$$

vinden we

$$c'(x)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 ,$$

$$c'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} , \quad c(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C ,$$

zodat de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking wordt

$$y = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} .$$

b) Stel $\frac{z}{z - i} = w$ en los op de vergelijking

$$w^4 = -4 = 4e^{\pi i}:$$

$$w = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4} + \frac{k\pi i}{2}}, \qquad k = 0,1,2,3 ;$$

$$w_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}} = 1 + i, \; w_2 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}} = -1 + i ,$$

$$w_3 = \bar{w}_2 = -1 - i, \; w_4 = \bar{w}_1 = 1 - i .$$

Uit $\frac{z}{z - i} = w$ volgt $z = \frac{iw}{w - 1}$, zodat de wortels van de vergelijking $\left(\frac{z}{z - i}\right)^4 = -4$ zijn

$$z_1 = \frac{iw_1}{w_1 - 1} = \frac{iw_1}{i} = w_1 = 1 + i ,$$

$$z_2 = \frac{iw_2}{w_2 - 1} = \frac{-1 - i}{-2 + i} = \frac{1}{5}(1 + 3i) ,$$

$$z_3 = \frac{iw_3}{w_3 - 1} = \frac{1 - i}{-2 - i} = \frac{1}{5}(-1 + 3i) ,$$

$$z_4 = \frac{iw_4}{w_4 - 1} = \frac{iw_4}{-i} = -w_4 = -1 + i .$$

Examen/tentamen juni 1977

1. De functie f: $[-1,2] \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3} \quad \text{voor alle } x \in [-1,2] .$$

a) Onderzoek of f differentieerbaar is in 0.

b) Bepaal de extrema van f.

2. a) Bepaal

$$\int \frac{x^2 \arctan x}{1 + x^2}\, dx .$$

b) Bereken

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(1 + x^2)} .$$

3. a) Onderzoek voor alle $x \geq -1$ of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan x^n}{n}$$

convergeert dan wel divergeert.

b) Bepaal de Taylorreeks van $f(x) = \sqrt{x}$ rond $x = 100$.
Bepaal $\sqrt{101}$ met een fout $< 10^{-4}$.

4. a) Bepaal de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$xy' - (1 + 2x^2)y = e^{x^2}$$

die voldoet aan $y(1) = 0$.

b) Ontbind het polynoom

$$x^7 + x^4 + 16x^3 + 16$$

in onontbindbare reële factoren van graad ≤ 2.

T 6.77

Oplossingen Tentamen juni 1977

1. a) Uit

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x^2 - x^3} - 0}{\sqrt[3]{x^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1}, \quad x \neq 0,$$

volgt

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \infty ,$$

zodat f niet differentieerbaar is in 0.

b) De functie $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$h(y) = \sqrt[3]{y}, \qquad y \in \mathbb{R} ,$$

is monotoon stijgend.

Zij $g(x) = x^2 - x^3$, $x \in [-1,2]$.

Dan is $f(x) = h(g(x))$, $x \in [-1,2]$, en het is onmiddellijk duidelijk dat uit het stijgen (dalen) van g volgt dat f stijgt (daalt).

Hiermee omzeilen we de moeilijkheid dat f in 0 en in 1 niet differentieerbaar is!

Uit

$$g'(x) = 2x - 3x^2 = x(2 - 3x)$$

en het volgende schema

2	dalend	0	stijgend	$\frac{4}{27}$	dalend	-4		g
	$- - - - -$	0	$+ + + +$	0	$- - - - - - -$			g'
-1		0		$\frac{2}{3}$		2		x

volgt op grond van het voorgaande dat f

een globaal maximum $\sqrt[3]{2}$ heeft in -1,

een locaal maximum $\sqrt[3]{\frac{4}{27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$ in $\frac{2}{3}$,

een locaal minimum 0 in 0, en

een globaal minimum $-\sqrt[3]{4}$ in 2.

2. a) Schrijf

$$\frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{1 + x^2 - 1}{1 + x^2} = 1 - \frac{1}{1 + x^2} ,$$

dan volgt

T 6.77

$$\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2}\,dx = \int \arctan x\,dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx - \int \arctan x \; d \arctan x =$$

$$= x \arctan x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \tfrac{1}{2}(\arctan x)^2 + C\ .$$

b) Schrijf

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\ ,$$

dan volgt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \lim_{A\to\infty}\left[\ln x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big|_1^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[\ln A - \tfrac{1}{2}\ln(1+A^2) + \tfrac{1}{2}\ln 2\right] = \lim_{A\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}\ln\frac{A^2}{1+A^2} + \tfrac{1}{2}\ln 2\right) = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

<u>Opmerking</u>. Door de substitutie $x = \frac{1}{y}$ gaat de integraal over in

$$-\int_1^0 \frac{y}{1+\frac{1}{y^2}}\,\frac{dy}{y^2} = \int_0^1 \frac{y}{y^2+1}\,dy = \tfrac{1}{2}\ln(y^2+1)\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}\ln 2\ .$$

3. a) Voor $x = -1$ is de algemene term van de reeks gelijk aan

$$a_n = \frac{\arctan(-1)^n}{n} = \begin{cases} \dfrac{\arctan 1}{n} = \dfrac{\pi}{4n} & \text{als } n \text{ even}\ , \\[2ex] \dfrac{\arctan(-1)}{n} = \dfrac{-\pi}{4n} & \text{als } n \text{ oneven}\ ; \end{cases}$$

dus $a_n = \frac{\pi}{4}\frac{(-1)^n}{n}$, zodat de reeks convergeert voor $x = -1$. Voor $x = 0$ is de reeks convergent, omdat alle termen dan gelijk aan nul zijn.
Voor $|x| < 1$, $x \neq 0$, is

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\arctan x^{n+1}}{n+1}\,\frac{n}{\arctan x^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left|\frac{\arctan x^{n+1}}{x^{n+1}}\,\frac{x^n}{\arctan x^n}\,x\right| = |x| < 1\ ,$$

zodat op grond van het convergentiekenmerk van d'Alembert de reeks (absoluut) convergeert voor $|x| < 1$.

T 6.77

Hierbij is gebruik gemaakt van de (standaard) limieten

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0, \; |x| < 1; \; \lim_{y\to 0} \frac{\arctan y}{y} = 1 .$$

Voor $x \geq 1$ is de reeks divergent op grond van de vergelijkingsstelling:

$$\frac{\arctan x^n}{n} \geq \frac{\arctan 1}{n} = \frac{\pi}{4n} , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4n} \text{ divergeert} .$$

Samenvattend: de reeks is

relatief convergent voor $x = -1$,

absoluut convergent voor $-1 < x < 1$, en

divergent voor $x \geq 1$.

b) De Taylorreeks van f rond $x = 100$ wordt gegeven door

$$f(x) = \sqrt{x} = \sqrt{100 + x - 100} = 10\left(1 + \frac{x-100}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = 10 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{x-100}{100}\right)^n ,$$

voor $|x - 100| < 100$, zodat

$$\sqrt{101} = 10 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{1}{100}\right)^n = 10[1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{100} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{100}\right)^3 - \ldots] =$$

$$= 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{8}\,\frac{1}{10^3} + \frac{1}{16}\,\frac{1}{10^5} - \ldots = 10 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots .$$

De reeks $a_2 - a_3 + a_4 - \ldots$ is alternerend met $a_{n+1} < a_n$, $n = 2,3,\ldots$.
Dus

$$\sqrt{101} \approx 10 + 0{,}05 - 0{,}000125 = 10{,}049875$$

met een afbreekfout E waarvoor geldt

$$0 < E < \frac{1}{16}\,\frac{1}{10^5} < 10^{-6} .$$

Afronden van de verkregen uitkomst op 4 decimalen geeft

$$\sqrt{101} \approx 10{,}0499 ,$$

met een afrondingsfout A waarvoor geldt

$$|A| \leq \tfrac{1}{2}.10^{-4} ,$$

zodat

$$|A| + E \leq \tfrac{1}{2}.10^{-4} + 10^{-6} < 10^{-4} .$$

T 6.77

4\. a) We bepalen eerst een van de nuloplossing verschillende oplossing van de homogene vergelijking door scheiding van variabelen:

$$xy' - (1 + 2x^2)y = 0 ,$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{1 + 2x^2}{x} dx = 0 ,$$

$$\ln y - \ln x - x^2 = 0 ,$$

$$y = xe^{x^2} .$$

Dan heeft de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking de gedaante

$$y = c(x)xe^{x^2} .$$

Substitutie geeft

$$x[c'(x)xe^{x^2} + c(x)e^{x^2} + 2c(x)x^2e^{x^2}] - (1 + 2x^2)c(x)xe^{x^2} = e^{x^2} ,$$

$$x^2c'(x)e^{x^2} = e^{x^2} ,$$

$$c'(x) = \frac{1}{x^2} .$$

Hieruit volgt

$$c(x) = -\frac{1}{x} + C ,$$

zodat de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is

$$y(x) = -e^{x^2} + Cxe^{x^2} .$$

De voorwaarde $y(1) = 0$ geeft $0 = -e + Ce$, $C = 1$, dus

$$y(x) = (x - 1)e^{x^2} .$$

b) Schrijf

$$x^7 + x^4 + 16x^3 + 16 = x^4(x^3 + 1) + 16(x^3 + 1) =$$

$$= (x^4 + 16)(x^3 + 1) = (x^4 + 16)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

en los de vergelijking $x^4 + 16 = 0$ op:

$$x^4 = -16 = 16e^{\pi i+2k\pi i} ,$$

$$x = 2e^{\pi i/4 + k\pi i/2}, \quad k = 0,1,2,3 .$$

T 6.77

De wortels van de vergelijking $x^4 + 16 = 0$ zijn dus $x_1 = 2e^{\pi i/4}$, $x_2 = 2e^{3\pi i/4}$, $x_3 = 2e^{5\pi i/4} = \bar{x}_2$, $x_4 = 2e^{7\pi i/4} = \bar{x}_1$.
Het polynoom $x^4 + 16$ kan dus ontbonden worden als volgt:

$$
\begin{aligned}
x^4 + 16 &= (x - x_1)(x - \bar{x}_1)(x - x_2)(x - \bar{x}_2) = \\
&= (x^2 - 2x \operatorname{Re} x_1 + |x_1|^2)(x^2 - 2x \operatorname{Re} x_2 + |x_2|^2) = \\
&= (x^2 - 2x\sqrt{2} + 4)(x^2 + 2x\sqrt{2} + 4) \ .
\end{aligned}
$$

Dus

$$x^7 + x^4 + 16x^3 + 16 = (x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 - 2x\sqrt{2} + 4)(x^2 + 2x\sqrt{2} + 4) \ .$$

Opmerking. De ontbinding van $x^4 + 16$ kan sneller worden verkregen:

$$
\begin{aligned}
x^4 + 16 &= x^4 + 8x^2 + 16 - 8x^2 = (x^2 + 4)^2 - (x\sqrt{8})^2 = \\
&= (x^2 + 4 + x\sqrt{8})(x^2 + 4 - x\sqrt{8}) = \\
&= (x^2 + 2x\sqrt{2} + 4)(x^2 - 2x\sqrt{2} + 4) \ .
\end{aligned}
$$

H 6.77

Herkansingsexamen/tentamen juni 1977

1. Van de functie $f: [-1,+1] \to \mathbb{R}$ is gegeven $f(x) = x^3 \ln x^2$ voor $x \neq 0$, $x \in [-1,+1]$, f is continu in 0.

   a) Bereken f(0).

   b) Onderzoek of f differentieerbaar is in 0.

   c) Bepaal de extrema van f.

2. a) Bepaal

$$\int \frac{\ln(1 + x^2)}{x^4}\, dx \; .$$

   b) Bereken

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right) dx \; .$$

3. a) Onderzoek voor welke reële x de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x - x^2)^n}{n^2 + 1}$$

   convergeert dan wel divergeert.

   Geef een numerieke schatting van de afbreekfout na 10 termen voor x = 1.

   b) Bereken

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x + x\sqrt[3]{1 + x^2} - 2x}{x(\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2)} \; .$$

4. a) Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' + y' + y = x + 1 \; .$$

   b) Toon aan dat

$$(1 + i)^{11} = 32\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \; .$$

   c) Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan

$$\left|e^{z^2}\right| = e$$

   en teken deze verzameling in het complexe vlak.

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1977

1. a) Continuïteit van f in 0 wil zeggen:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) .$$

In het bijzonder geldt dan

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = f(0) .$$

Substitutie van $x = \frac{1}{y}$ geeft

$$f(0) = \lim_{x\downarrow 0} x^3 \ln x^2 = \lim_{y\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{y^2}}{y^3} = \lim_{y\to\infty} \frac{-2 \ln y}{y^3} = 0 .$$

b) Uit

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^2 \ln x^2 = \lim_{y\to\infty} \frac{-\ln y}{y} = 0$$

volgt dat f differentieerbaar is in 0 met $f'(0) = 0$. Hierbij is de substitutie $x^2 = \frac{1}{y}$ toegepast.

c) Uit b) volgt dat $f'(0) = 0$.

Voor $x \neq 0$ is

$$f'(x) = 3x^2 \ln x^2 + \frac{2x^4}{x^2} = x^2(3 \ln x^2 + 2) .$$

Uit het schema

0 stijgend	$\frac{2}{3e}$	dalend		$-\frac{2}{3e}$	stijgend	0		f
+ + + + +	0	− −	0	− − 0	+ + + + + +			f'
−1	$-e^{-1/3}$		0	$e^{-1/3}$		1		x

blijkt dat f

een globaal maximum $\frac{2}{3e}$ heeft in $-e^{-1/3}$,

een globaal minimum $-\frac{2}{3e}$ in $e^{-1/3}$,

een locaal maximum 0 in 1, en

een locaal minimum 0 in −1.

2. a) Met partiële integratie werken we $\ln(1 + x^2)$ weg uit de integrand.

Dus

$$\int \frac{\ln(1 + x^2)}{x^4} dx = -\frac{1}{3} \int \ln(1 + x^2) d \frac{1}{x^3} =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\ln(1+x^2)}{x^3} + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^3}\frac{2x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\ln(1+x^2)}{x^3} + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\ln(1+x^2)}{x^3} + \frac{2}{3}\int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\ln(1+x^2)}{x^3} + \frac{2}{3}\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\ln(1+x^2)}{x^3} - \frac{2}{3}\frac{1}{x} - \frac{2}{3}\arctan x + C\ .$$

b) Wegens

$$\lim_{x\downarrow 0}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\downarrow 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\downarrow 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{(x - \frac{x^3}{2!} + \ldots) - (x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots)}{x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \ldots} =$$

$$= \lim_{x\downarrow 0}\frac{-\frac{1}{3}x^3 + \ldots}{x^2 + \ldots} = 0\ ,$$

is de integrand begrensd op het interval $(0,\frac{\pi}{2}]$. De integraal is dus niet oneigenlijk.

De integraal

$$\int_\delta^{\pi/2}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right)dx$$ is een continue functie van δ op $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Op grond daarvan geldt

$$\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right)dx = \lim_{\delta\downarrow 0}\int_\delta^{\pi/2}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= \lim_{\delta\downarrow 0}\left[\ln\sin x - \ln x\right]_\delta^{\pi/2} = \lim_{\delta\downarrow 0}\left(-\ln\frac{\pi}{2} + \ln\frac{\delta}{\sin\delta}\right) = -\ln\frac{\pi}{2}\ .$$

3. a) Voor $x = 0$ en voor $x = 2$ is de reeks convergent en voor $x \neq 0$, $x \neq 2$ is

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1}(2x - x^2)\right| = |2x - x^2| \ ,$$

zodat op grond van het convergentiekenmerk van d'Alembert de reeks absoluut convergeert als $|2x - x^2| < 1$ en divergeert als $|2x - x^2| > 1$.
Aangezien $|x^2 - 2x| < 1$ leidt tot $(x^2 - 2x)^2 < 1$,

$$(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x - 1) < 0 \ ,$$

$$(x - 1)^2[(x - 1)^2 - 2] < 0 \ ,$$

$$(x - 1)^2 < 2 \quad \text{met } x \neq 1 \ ,$$

is de reeks absoluut convergent voor $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$, $x \neq 1$; en divergent voor $x < 1 - \sqrt{2}$ en voor $x > 1 + \sqrt{2}$.
Voor $x = 1$, $x = 1 - \sqrt{2}$, $x = 1 + \sqrt{2}$ is $|2x - x^2| = 1$, zodat dan

$$|a_n| = \frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2} \ .$$

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is dan absoluut convergent op grond van de vergelijkingsstelling.
Samenvatting: De reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x - x^2)^n}{n^2 + 1}$$

is absoluut convergent voor $1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$, divergent voor $x < 1 - \sqrt{2}$ en voor $x > 1 + \sqrt{2}$.

Voor $x = 1$ wordt de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.
De afbreekfout na 10 termen is gelijk aan $E = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$. Voor grote n is $n^2 + 1 \approx n^2 - 1$.
Uit $n^2 + 1 > n^2 - 1$ volgt dan

$$E < \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \tfrac{1}{2} \sum_{n=11}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=11}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2} \lim_{N\to\infty} \left[\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{14}\right) + \ldots \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+1}\right)\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11}\right) = \frac{21}{220} .$$

Een andere manier om E te schatten is de volgende.
De functie $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ is voor $x \geq 0$ monotoon dalend. De integraal

$$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{10}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan 10 = \arctan \frac{1}{10}$$

splitsen we als volgt

$$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{k=11}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{1+x^2} .$$

Op het interval $[k-1,k]$ geldt $f(x) \geq f(k) = \dfrac{1}{1+k^2}$. Dus

$$\arctan \frac{1}{10} = \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{k=11}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{1+x^2} \geq \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = E ,$$

zodat $E \leq \arctan \frac{1}{10} < \frac{1}{10}$.
Merk op dat beide schattingen niet wezenlijk van elkaar verschillen.

b) Zij $T(x) = \arctan x + x\sqrt[3]{1+x^2} - 2x$,

$$N(x) = x(\cos x - 1 + \tfrac{1}{2}x^2) .$$

Ontwikkel $N(x)$ en $T(x)$ in een Taylorreeks rond 0:

$$N(x) = x\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots -1 + \frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{24}x^5 + \ldots ,$$

$$T(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots + x\left(1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + \ldots\right) - 2x =$$

$$= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right)x^5 + \ldots = \frac{4}{45}x^5 + \ldots ,$$

dan volgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{T(x)}{N(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4}{45}x^5 + \ldots}{\frac{1}{24}x^5 + \ldots} = \frac{96}{45} = \frac{32}{15} .$$

4. a) De karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4} = 0$$

heeft wortels $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, zodat de algemene reële oplossing van de homogene vergelijking is

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\tfrac{1}{2}x\sqrt{3}) + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\tfrac{1}{2}x\sqrt{3}) \ , \qquad C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Er is een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking van de vorm

$$y = ax + b \ .$$

Substitutie geeft

$$a + ax + b = x + 1, \text{ dus } a = 1,\ b = 0 \ .$$

Bijgevolg is de algemene reële oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking

$$y = x + e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos(\tfrac{1}{2}x\sqrt{3}) + C_2\sin(\tfrac{1}{2}x\sqrt{3})),\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R} \ .$$

b) Wegens

$$1 + i = \sqrt{2}\, e^{\pi i/4} \quad \text{is}$$

$$(1 + i)^{11} = (\sqrt{2})^{11} e^{11\pi i/4} = 2^5\sqrt{2}\, e^{11\pi i/4 - 2\pi i} =$$

$$= 32\sqrt{2}\, e^{3\pi i/4} = 32\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) \ .$$

c) Stel $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.
Dan is $e^{z^2} = e^{x^2-y^2+2ixy}$, dus de vergelijking $|e^{z^2}| = e$ gaat over in $e^{x^2-y^2} = e$, met oplossingsverzameling

$$\{(x,y) \mid x^2 - y^2 = 1\} \ .$$

De complexe getallen z die voldoen aan $|e^{z^2}| = e$ liggen dus op de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$.

P 10.77

Proeftentamen oktober 1977

1. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k^2 = \frac{1}{6} n(2n+1)(7n+1) .$$

2. Bewijs:

$$2 \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} = \arccos x \quad \text{voor } |x| < 1 .$$

3. Bereken de volgende limieten:

a) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\arctan n ,$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n \sin \frac{1}{n^2}} ,$$

c) $$\lim_{x\to 2} \frac{\cos \frac{\pi}{4} x}{x-2} ,$$

d) $$\lim_{x\downarrow 0} x^{\sin x} .$$

4. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = x \ln x^2 \quad (x \neq 0) ,$$

$$f(0) = 0 .$$

a) Is f continu in 0?

b) Is f differentieerbaar in 0?

c) Teken de grafiek van f. Let hierbij op het gedrag in de buurt van 0 en de extrema.

5. De rij (a_n) is gegeven door

$$a_1 = 2 \text{ en } a_{n+1} = \frac{4}{\pi} \arctan a_n \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

Bewijs dat de rij (a_n) convergeert en bereken de limiet.

Oplossingen Proeftentamen oktober 1977

1. Met volledige inductie.

Voor $n = 1$ is het linkerlid van de te bewijzen gelijkheid $\sum_{k=2}^{2} k^2 = 4$, het rechterlid $\frac{1}{6}.1.3.8 = 4$, zodat de bewering waar is voor $n = 1$.

Neem aan dat

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k^2 = \frac{1}{6}\, n(2n+1)(7n+1) \quad \text{voor zekere } n \in \mathbb{N}\,.$$

Dan is

$$\sum_{k=n+2}^{2n+2} k^2 = \sum_{k=n+1}^{2n} k^2 - (n+1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+2)^2 =$$

$$= \frac{1}{6}\, n(2n+1)(7n+1) - (n+1)^2 + (2n+1)^2 + 4(n+1)^2 =$$

$$= 3(n+1)^2 + \frac{1}{6}(2n+1)(7n^2+n+12n+6) =$$

$$= 3(n+1)^2 + \frac{1}{6}(2n+1)(n+1)(7n+6) = \frac{1}{6}(n+1)(18n+18+14n^2+19n+6) =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(14n^2+37n+24) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+3)(7n+8)\,.$$

Dus

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k^2 = \frac{1}{6}\, n(2n+1)(7n+1) \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

2. Beschouw de functie f gegeven door

$$f(x) = 2 \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} - \arccos x, \qquad |x| < 1\,.$$

Dan is

$$f'(x) = \frac{2}{1 + \dfrac{1-x^2}{(1+x)^2}} \; \frac{(1+x)\frac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.(-2x) - \sqrt{1-x^2}}{(1+x)^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{2}{(1+x)^2 + 1 - x^2} \; \frac{-x(1+x) - (1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{2}{2+2x} \cdot \frac{-(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0\,,$$

dus f constant op $(-1,1)$.

Uit

$$f(0) = 2 \arctan 1 - \arccos 0 = 2.\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 0$$

volgt

$$f(x) = 0 \quad \text{voor } |x| < 1 .$$

3. a) Wegens

$$0 < \sqrt[3]{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\arctan n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \arctan n <$$

$$< \frac{\sqrt[3]{n}}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{1}{n^{1/6}} , \qquad n \in \mathbb{N} ,$$

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0, \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/6}} = 0 ,$$

geldt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\arctan n = 0 ,$$

op grond van de insluitstelling.

b) Herleiden tot standaardlimieten geeft

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n \sin \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\sin \frac{1}{n^2}} \cdot \frac{n^2}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\sin \frac{1}{n^2}} . n^2 (\frac{1}{e})^n = 1.0 = 0 .$$

c) Substitutie van $x - 2 = y$ geeft

$$\lim_{x\to 2} \frac{\cos \frac{\pi}{4} x}{x - 2} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-\sin \frac{\pi}{4} y}{\frac{\pi}{4} y} \cdot \frac{\pi}{4} = - \frac{\pi}{4} .$$

d) Schrijf

$$x^{\sin x} = e^{\sin x \ln x}, \qquad x > 0 ,$$

dan geldt op grond van de continuïteit van de functie e^z

$$\lim_{x\downarrow 0} x^{\sin x} = e^a ,$$

waarin

$$a = \lim_{x\downarrow 0} \sin x \ln x = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x} x \ln x = 1.0 = 0 .$$

Dus

$$\lim_{x\downarrow 0} x^{\sin x} = e^0 = 1 .$$

4. a) Wegens

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} x \ln x^2 = \lim_{x\downarrow 0} 2x \ln x = 0 \ ,$$

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{y\downarrow 0} -y \ln y^2 = 0 \ ,$$

geldt

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0) \ ,$$

zodat f continu is in 0.

Hierbij is gebruik gemaakt van de (standaard) limiet

$$\lim_{x\downarrow 0} x \ln x = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} \ln \frac{1}{z} = \lim_{z\to\infty} - \frac{\ln z}{z} = 0 \ .$$

b) Uit

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x \ln x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \ln x^2 = -\infty$$

volgt dat f niet differentieerbaar is in 0.

c) Voor $x \neq 0$ is

$$f'(x) = (2x \ln |x|)' = 2 \ln|x| + 2 \ ,$$

zodat

$$f'(x) > 0 \quad \text{voor } |x| > e^{-1} \ ,$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{voor } 0 < |x| < e^{-1} \text{ en}$$
$$f'(\pm e^{-1}) = 0 \ .$$

Uit het schema

stijgend		dalend		stijgend	f(x)
+ + + + +	0	− − ? − −	0	+ + + + +	f'(x)
	$-e^{-1}$	0	e^{-1}		x

volgt dat

$f(-e^{-1}) = 2e^{-1}$ een maximum,

$f(e^{-1}) = -2e^{-1}$ een minimum is van f .

Wegens

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x \ln x^2 = -\infty \ ,$$

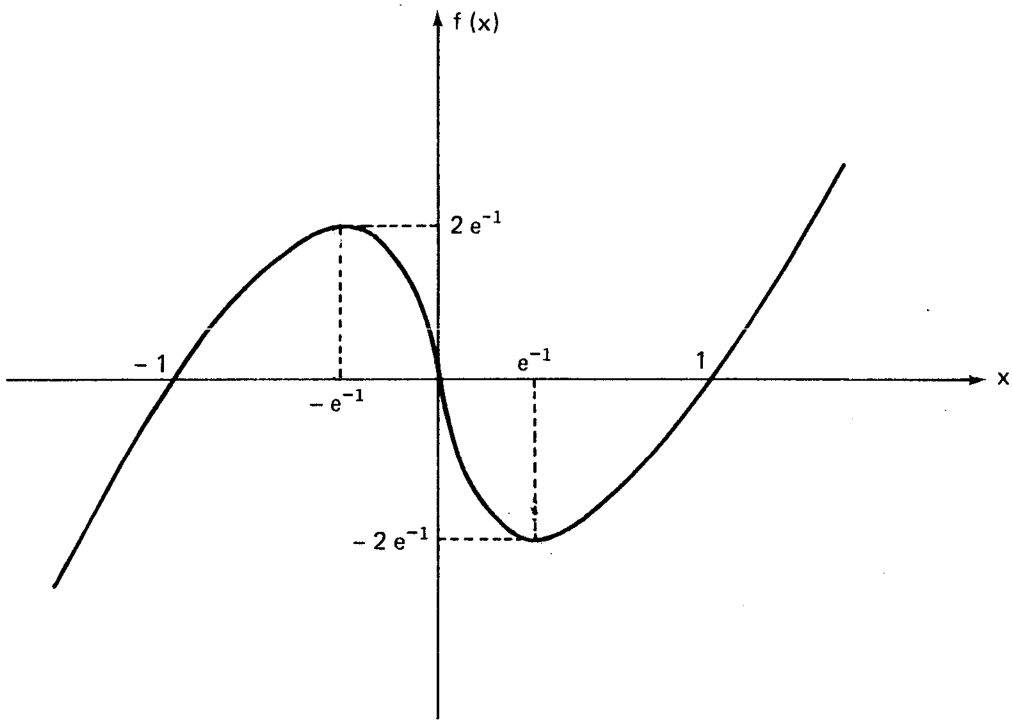
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \ ,$$

zijn dit locale extrema van f.

Nulpunten van f zijn 0 en de wortels van de vergelijking $\ln x^2 = 0$, dus -1 en 1.

Uit b) volgt nog dat de grafiek van f in het punt (0,0) een verticale raaklijn heeft.

Met deze gegevens kan men gemakkelijk de grafiek van f tekenen:

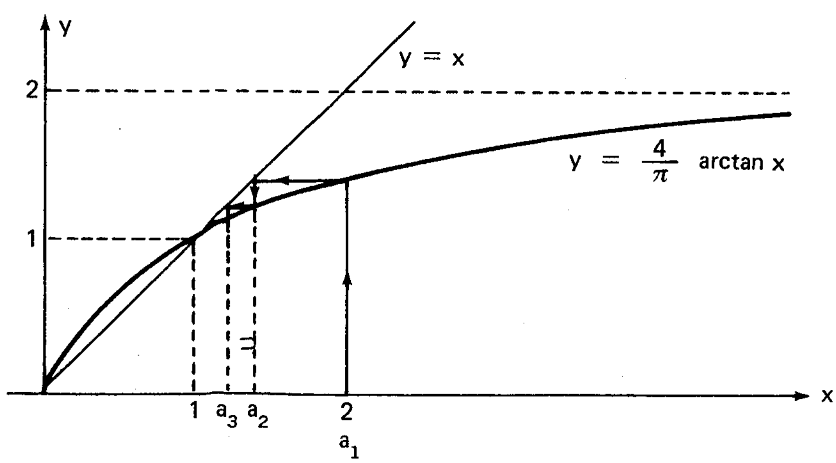


5. Uit het volgende plaatje zien we onmiddellijk dat de rij (a_n)

   i) monotoon dalend is: $a_{n+1} < a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$;

   ii) naar beneden begrensd is: $a_n > 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$;

   iii) convergent is: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.



P 10.77

Het formele bewijs:

i) Met volledige inductie.

Er geldt $a_2 = \frac{4}{\pi} \arctan 2 < \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 2 = a_1$.

Stel $a_{n+1} < a_n$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$.

Dan is, op grond van de monotonie van de functie arctan x,

$$a_{n+2} = \frac{4}{\pi} \arctan a_{n+1} < \frac{4}{\pi} \arctan a_n = a_{n+1} .$$

Dus

$$a_{n+1} < a_n \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} .$$

ii) Met volledige inductie.

Er geldt $a_1 = 2 > 1$.

Stel $a_n > 1$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$.

Dan geldt, weer op grond van de monotonie van de functie arctan x,

$$a_{n+1} = \frac{4}{\pi} \arctan a_n > \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 1 .$$

Dus

$$a_n > 1 \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} .$$

iii) De rij (a_n) is monotoon dalend en naar beneden begrensd, dus convergent.

Zij $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Dan is

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\pi} \arctan a_n = \frac{4}{\pi} \arctan a ,$$

op grond van de continuïteit van de functie arctan x. Bovendien geldt $a \geq 1$ volgens ii).

Uit het ongerijmde bewijzen we dat $a = 1$.

Stel $a = \frac{4}{\pi} \arctan a$ met $a > 1$.

Beschouw de functie f gegeven door

$$f(x) = x - \frac{4}{\pi} \arctan x, \quad x \geq 1 .$$

Uit $f'(x) = 1 - \frac{4}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \geq 1 - \frac{2}{\pi} > 0$, $x \geq 1$, volgt dat f monotoon stijgend is op het interval $[1,\infty)$, zodat $f(a) > f(1) = 0$, $a > \frac{4}{\pi} \arctan a$ voor $a > 1$. Tegenspraak.

Dus $a = 1$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Examen/tentamen januari 1978

1. Voor $x > 0$ is de functie f gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \quad \text{als } x \neq 1 ,$$
$$f(1) = 1 .$$

a) Bewijs, dat f continu is in $x = 1$.

b) Onderzoek of f differentieerbaar is in $x = 1$.

c) Bewijs, dat f monotoon is en teken de grafiek.

---

2. Bereken

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\, dx .$$

3. a) Onderzoek voor welke reële x de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)n!}$$

convergeert.

b) Bepaal de som van bovenstaande reeks voor die waarden van x waarvoor de reeks convergeert.

4. a) Onderzoek of de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

convergeert.

b) Bewijs dat de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$$

convergeert. Hoeveel termen van deze reeks kan men nemen opdat men er zeker van is dat de absolute waarde van de afbreekfout hoogstens $\frac{1}{2}.10^{-2}$ is?

T 1.78

5. Bepaal alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor geldt

$$\exp(z^2) = -i \ .$$

(N.B. $\exp(w) = e^w$ voor alle complexe getallen w.)
Teken de gevonden waarden in het complexe vlak.

6. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x \ .$$

Oplossingen Tentamen januari 1978

1. a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = (\ln x)'_{x=1} = 1 = f(1).$ □

b) Uit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(1+h)}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - h}{h^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 - \ldots) - h}{h^2} = \lim_{h\to 0} (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}h - \ldots) = -\frac{1}{2}$$

volgt dat f differentieerbaar is in $x = 1$ met $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

c) Voor $x \neq 1$ geldt

$$f'(x) = \frac{(x-1).\frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - x\ln x}{x(x-1)^2} = \frac{g(x)}{x(x-1)^2} .$$

Uit

$$g'(x) = 1 - \ln x - x.\frac{1}{x} = -\ln x \gtrless 0 \quad \text{voor } x \lessgtr 1$$

volgt dat de functie g stijgend is op het interval $(0,1)$ en dalend op $(1,\infty)$, zodat

$$g(x) < g(1) = 0 \quad \text{voor } x \neq 1 .$$

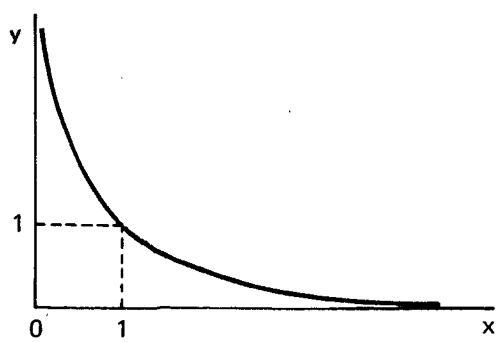
Voor $x \neq 1$ is dus $f'(x) < 0$.

Met $f'(1) = -\frac{1}{2}$ volgt dan

$$f'(x) < 0 \quad \text{voor alle } x > 0 .$$

Dus is f monotoon dalend met

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln x}{x-1} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = 0.1 = 0:$$



T 1.78

2. $$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx = \lim_{A\to\infty} -\int_1^A \arctan x \; d\,\frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \Big[-\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^A + \int_1^A \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx\Big] =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \Big[-\frac{\arctan A}{A} + \arctan 1 + \int_1^A \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}\,dx\Big] =$$

$$= 0 + \frac{\pi}{4} + \lim_{A\to\infty}\int_1^A \Big(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\Big)dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \lim_{A\to\infty}\Big[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_1^A =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \lim_{A\to\infty}\Big(\frac{1}{2}\ln\frac{A^2}{A^2+1} + \frac{1}{2}\ln 2\Big) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \;.$$

3. a) Voor $x = 0$ is de reeks convergent en voor $x \neq 0$ is

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\frac{x^{n+1}}{(n+3)(n+1)!}\cdot\frac{(n+2)n!}{x^n}\Big| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}\,\frac{|x|}{n+1} = 0 \;,$$

zodat volgens het convergentiekenmerk van d'Alembert de reeks (absoluut) convergeert voor alle reële x.

b) Zij

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)n!}\;, \qquad x \in \mathbb{R}\;.$$

Herleiden tot standaardreeksen (convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$) geeft

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{(n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2-1)x^n}{(n+2)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{n!} =$$

$$= \frac{1}{x}(e^x - 1) - \frac{1}{x^2}(e^x - 1 - x) = \frac{1+(x-1)e^x}{x^2}\;, \qquad x \neq 0\;;$$

terwijl $S(0) = \frac{1}{2}$.

4. a) De termen van de reeks zijn negatief, zodat

$$\sum_{n=2}^{\infty} -\ln(1 - \frac{1}{n^2})$$

de reeks van de absolute waarden der termen is. Uit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\ln(1 - \frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{h\uparrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} = (\ln x)'_{x=1} = 1 \neq 0$$

en de convergentie van de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ volgt op grond van het limietkenmerk dat de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 - \frac{1}{n^2})$$

absoluut convergent is.

b) De reeks is alternerend met $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1} = 0$. Bovendien is de rij $\left(\frac{n}{n^2 + 1}\right)$ monotoon dalend, omdat de functie f gedefinieerd door $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ monotoon dalend is op het interval $[1,\infty)$, hetgeen blijkt uit

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} < 0 \quad \text{voor } x > 1 .$$

Volgens het kenmerk van Leibniz is de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$$

convergent.

Breekt men de reeks af na N termen, dan is de absolute waarde van de afbreekfout hoogstens gelijk aan $\frac{N + 1}{(N + 1)^2 + 1}$. Uit

$$\frac{N + 1}{(N + 1)^2 + 1} < \frac{N + 1}{(N + 1)^2} = \frac{1}{N + 1} \text{ , en}$$

$$\frac{1}{N + 1} \le \frac{1}{200} \quad \text{voor } N \ge 199 ,$$

volgt dat de afbreekfout na tenminste 199 termen in absolute waarde hoogstens $\frac{1}{2}.10^{-2}$ is.

T 1.78

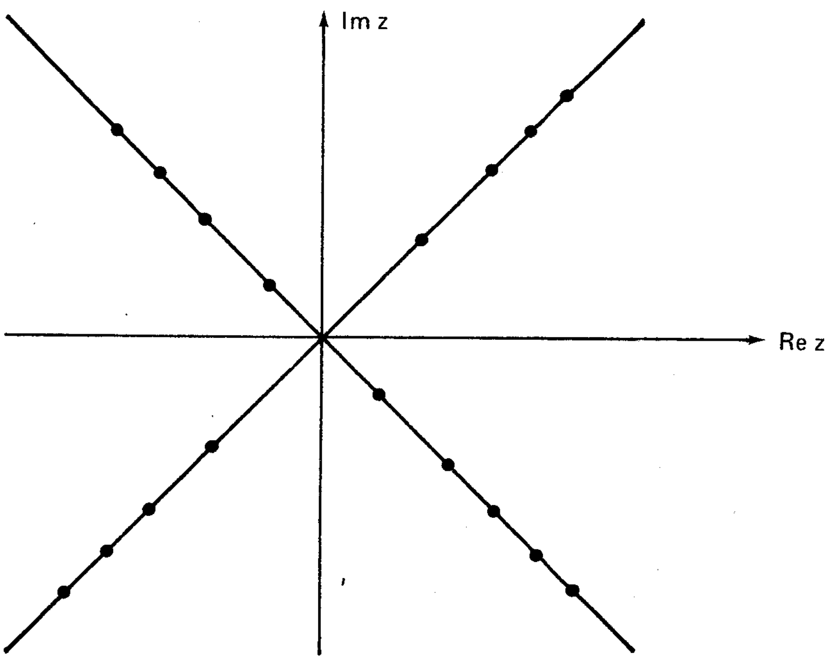
5. Uit $e^{z^2} = -i = e^{-\frac{1}{2}\pi i}$ volgt $z^2 = -\frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i = (2k - \frac{1}{2})\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Onderscheid twee gevallen.

i) $k \geq 1$. Dan is $z^2 = (2k - \frac{1}{2})\pi e^{\frac{1}{2}\pi i}$ met $(2k - \frac{1}{2})\pi > 0$, dus

$$z = \pm\sqrt{(2k - \tfrac{1}{2})\pi}\; e^{\frac{1}{4}\pi i} .$$

ii) $k \leq 0$. Dan is $z^2 = (\frac{1}{2} - 2k)\pi e^{-\frac{1}{2}\pi i}$ met $(\frac{1}{2} - 2k)\pi > 0$, dus

$$z = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{2} - 2k)\pi}\; e^{-\frac{1}{4}\pi i} .$$



6. De karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1 = 0$ van de differentiaalvergelijking heeft wortels $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$, zodat alle oplossingen van de homogene vergelijking zijn

$$y = c_1' e^{(1+i)x} + c_2' e^{(1-i)x} = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x .$$

Omdat $2e^x \cos x = \mathrm{Re}\; 2e^{(1+i)x}$ is er een particuliere oplossing $y = axe^{(1+i)x}$ van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^{(1+i)x} .$$

T 1.78

Substitutie geeft

$$(a(1+i)^2x+2a(1+i))e^{(1+i)x}-2(a(1+i)x+a)e^{(1+i)x}+2axe^{(1+i)x}=$$

$$=2e^{(1+i)x}\ ,$$

$$2ia = 2,\ a=-i\ .$$

Een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y''-2y'+2y=2e^{x}\cos x$$

is dus $y = \mathrm{Re} - ixe^{(1+i)x} = \mathrm{Re} - ixe^{x}(\cos x + i \sin x) = xe^{x}\sin x$, zodat de algemene reële oplossing is

$$y = xe^{x}\sin x + c_1e^{x}\cos x + c_2e^{x}\sin x,\qquad c_1\in\mathbb{R},\ c_2\in\mathbb{R}\ .$$

H 1.78

Herkansingsexamen/tentamen januari 1978

1. De rij (a_n) is gegeven door

$$a_1 = 1 \text{ en } a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 1} \quad \text{voor } n \geq 1 .$$

Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat en bereken deze limiet.

2. Bereken

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(\sqrt{x^2 + x + 1})^3} .$$

3. a) Onderzoek voor welke reële waarden van x de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

convergeert.

b) Bewijs dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n} = 1 - \ln 2 .$$

4. a) Onderzoek of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}}$$

convergeert.

b) Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!} .$$

Hoeveel termen kan men nemen om er zeker van te zijn dat de afbreekfout kleiner is dan 10^{-2}?

5. Bepaal alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor geldt

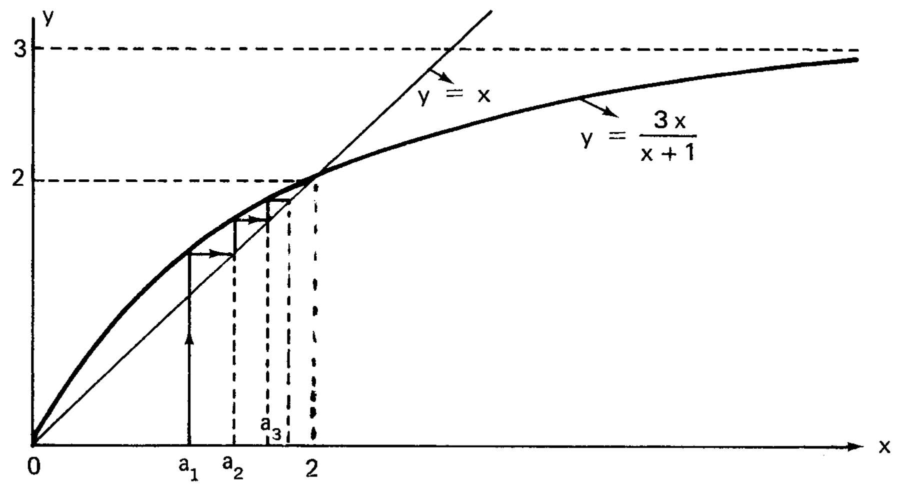
$$z^2(i + z^2) = -12 .$$

6. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' - y' - 2y = e^{2x} + \sin x \; .$$

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1978

1.



Uit bovenstaande figuur volgt

i) de rij (a_n) is monotoon stijgend;

ii) de rij (a_n) is naar boven begrensd: $a_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$;

iii) de rij (a_n) convergeert naar 2.

Bewijs.

i) Zij φ de functie gedefinieerd door

$$\varphi(x) = \frac{3x}{x+1}, \quad x > 0 .$$

Dan is φ monotoon stijgend op het interval $(0,\infty)$ omdat

$$\varphi'(x) = \left(\frac{3x}{x+1}\right)' = \left(3 - \frac{3}{x+1}\right)' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \quad \text{voor } x \in (0,\infty) .$$

Er geldt $a_1 = 1 < \frac{3}{2} = a_2$.
Stel $a_n < a_{n+1}$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$, dan volgt uit de monotonie van φ dat

$$a_{n+1} = \varphi(a_n) < \varphi(a_{n+1}) = a_{n+2} .$$

Dus $a_n < a_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, volgens het principe van volledige inductie.

ii) Met volledige inductie. Er geldt $a_1 = 1 < 2$. Stel $a_n < 2$, dan is $a_{n+1} = \varphi(a_n) < \varphi(2) = 2$. Dus $a_n < 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

iii) De rij (a_n) is monotoon stijgend en naar boven begrensd, dus convergent. Stel $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dan is

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3a_n}{a_n + 1} = \frac{3a}{a+1},$$

dus $a^2 + a = 3a$, $a^2 = 2a$. Daar $a = 0$ onmogelijk is ($a_n \geq a_1 = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$) volgt $a = 2$. □

2. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(\sqrt{x^2+x+1})^3} = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right)^3} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)^3} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{(\sqrt{\tan^2\varphi+1})^3} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\cos^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{4}{3} \sin\varphi \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{4}{3}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}.$$

3. a) Voor $x = 0$ is de reeks convergent en voor $x \neq 0$ is

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n(n+1)}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2}|x| = |x|,$$

zodat volgens het convergentiekenmerk van d'Alembert de reeks absoluut convergent is voor $|x| < 1$ en divergent voor $|x| > 1$. Voor $|x| = 1$ is

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)}$$

de reeks van de absolute waarden der termen. Op grond van de vergelijkingsstelling is deze reeks convergent, omdat $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$ voor $n \in \mathbb{N}$ en $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ convergent is.

Dus de reeks $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n(n+1)}$ is (absoluut) convergent voor $|x| \leq 1$, divergent voor $|x| > 1$.

b) Zij

$$S(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n(n+1)}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Herleiden tot standaardreeksen (convergent voor $-1 < x < 1$) geeft

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} =$$

$$= -\ln(1-x) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} =$$

$$= -\ln(1-x) + \frac{1}{x}(\ln(1-x) + x) \qquad \text{voor } -1 < x < 1,\ x \neq 0 .$$

Dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n} = S(\tfrac{1}{2}) = -\ln \tfrac{1}{2} + 2 \ln \tfrac{1}{2} + 1 = 1 - \ln 2 .$$

4. a) Uit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/4}} = 0$$

volgt $\ln n < n^{1/4}$ o.d.d., zodat

$$0 \le \frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}} < \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{n^{5/4}} \text{ o.d.d.}$$

Op grond van de vergelijkingsstelling is dan de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}}$$

convergent, omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$ convergeert.

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{24}\sqrt{4} + \frac{1}{120}\sqrt{5} + \frac{1}{720}\sqrt{6} + \ldots .$$

Afbreken na de vijfde term geeft een afbreekfout E waarvoor geldt

$$E = \frac{\sqrt{6}}{6!} + \frac{\sqrt{7}}{7!} + \frac{\sqrt{8}}{8!} + \frac{\sqrt{9}}{9!} + \ldots = \frac{\sqrt{6}}{6!}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}\,\sqrt{7}} + \frac{1}{7\sqrt{6}\,\sqrt{8}} + \frac{1}{7.8\sqrt{6}\,\sqrt{9}} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{\sqrt{6}}{6!}\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \ldots\right) = \frac{\sqrt{6}}{720} \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{6\sqrt{6}}{5.720} = \frac{\sqrt{6}}{600} <$$

$$< \frac{1}{200} = \frac{1}{2}.10^{-2} .$$

5. Uit $z^4 + iz^2 = -12$ volgt

$$(z^2 + \tfrac{1}{2}i)^2 = \tfrac{1}{4}i^2 - 12 = \tfrac{1}{4}i^2 + 12i^2 = \frac{49}{4}\,i^2\ ,$$

dus

$$z^2 + \frac{1}{2}\,i = \pm\,\frac{7}{2}\,i\ .$$

Twee gevallen:

i) $z^2 = -\frac{1}{2}\,i + \frac{7}{2}\,i = 3i = 3e^{\frac{1}{2}\pi i}$ geeft $z_1 = \sqrt{3}e^{\frac{1}{4}\pi i}$, $z_2 = -\sqrt{3}e^{\frac{1}{4}\pi i}$.

ii) $z^2 = -\frac{1}{2}\,i - \frac{7}{2}\,i = -4i = 4e^{-\frac{1}{2}\pi i}$ geeft $z_3 = 2e^{-\frac{1}{4}\pi i}$, $z_4 = -2e^{-\frac{1}{4}\pi i}$.

6. De karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$ van de differentiaalvergelijking heeft wortels $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, zodat alle reële oplossingen van de homogene vergelijking zijn

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x},\qquad c_1 \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Er is een particuliere oplossing

$$y = axe^{2x} + be^{ix}$$

van de differentiaalvergelijking

$$y'' - y' - 2y = e^{2x} + e^{ix}\ .$$

Substitutie geeft

$$(4ax + 4a)e^{2x} - be^{ix} - (2ax + a)e^{2x} - bie^{ix} - 2axe^{2x} - 2be^{ix} = e^{2x} + e^{ix}\ ,$$

$$3ae^{2x} - (3b + bi)e^{ix} = e^{2x} + e^{ix}\ ,$$

$$a = \frac{1}{3}\ ,\ b = -\frac{1}{10}(3 - i)\ .$$

Een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' - y' - 2y = e^{2x} + \sin x$$

is dus

$$y = \frac{1}{3}\,xe^{2x} + \mathrm{Im}\,-\frac{1}{10}(3 - i)e^{ix} =$$

$$= \frac{1}{3}\,xe^{2x} - \frac{1}{10}\,\mathrm{Im}(3 - i)(\cos x + i \sin x) =$$

$$= \frac{1}{3}\,xe^{2x} + \frac{1}{10}(\cos x - 3 \sin x)\ ,$$

zodat de algemene reële oplossing is

H 1.78

$$y = \frac{1}{3}\, xe^{2x} + \frac{1}{10}(\cos x - 3 \sin x) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}, \quad c_1 \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Examen/tentamen juni 1978

1. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k+1}}{k} \leq 12 \frac{2^n}{n+1} .$$

2. a) Bepaal

$$\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx .$$

b) Bereken

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} .$$

3. Bereken

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+t^4}\, dt$$

met een fout die hoogstens 5.10^{-3} is door de integrand in een reeks te ontwikkelen.

4. Onderzoek voor welke complexe waarden van z de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{(|z|^2 - z)n}}{n^2 \ln n}$$

convergeert.

5. Bereken de complexe getallen z_1 en z_2 uit

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 , \\ z_1 + z_2 + 1 = 0 . \end{cases}$$

6. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' + 4y = 2 \sin x + e^x .$$

T 6.78

Oplossingen Tentamen juni 1978

1. Met volledige inductie.

1° Er geldt $\sum_{k=1}^{1} \frac{2^{k+1}}{k} = 4 \le 12 = 12 \cdot \frac{2}{1+1}$.

2° Stel $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k+1}}{k} \le 12 \frac{2^n}{n+1}$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$. Dan is

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k+1}}{k} + \frac{2^{n+2}}{n+1} \le 12 \frac{2^n}{n+1} + \frac{2^{n+2}}{n+1} =$$

$$= 6 \frac{2^{n+1}}{n+1} + 2 \frac{2^{n+1}}{n+1} = 8 \frac{2^{n+1}}{n+1} = 8 \frac{n+2}{n+1} \frac{2^{n+1}}{n+2} =$$

$$= 8\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\frac{2^{n+1}}{n+1} \le 8\left(1 + \tfrac{1}{2}\right)\frac{2^{n+1}}{n+2} = 12 \frac{2^{n+1}}{n+2} .$$

Dus geldt $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k+1}}{k} \le 12 \frac{2^n}{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

2. a) Wegens $\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ is

$$\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int \arctan x \; d\sqrt{1+x^2} =$$

$$= \sqrt{1+x^2} \arctan x - \int \sqrt{1+x^2}\; d \arctan x =$$

$$= \sqrt{1+x^2} \arctan x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \sqrt{1+x^2} \arctan x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C .$$

b) Substitutie van $t = \tan\varphi$ $(\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$ geeft

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\tan\varphi \, \frac{1}{\cos\varphi}} \frac{1}{\cos^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \ln\left|\tan \tfrac{1}{2}\varphi\right| \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\ln \tan \frac{\pi}{8}$$

$(= -\ln(\sqrt{2} - 1) = \ln(1 + \sqrt{2}))$.

T 6.78

3. Uit

$$\sqrt{1+t^4} = (1+t^4)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} t^{4n}, \quad -1 < t < 1 ,$$

volgt

$$I := \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+t^4}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \int_0^{\frac{1}{2}} t^{4n}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{4n+1} (\tfrac{1}{2})^{4n+1} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5}(\frac{1}{2})^6 - \frac{1}{9}(\frac{1}{2})^{12} + \frac{1}{13}(\frac{1}{2})^{17} - \frac{5}{17}(\frac{1}{2})^{24} + \ldots .$$

De reeks voor I is vanaf de tweede term alternerend met monotoon dalende absolute waarden der termen, dus

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{320} - E, \text{ met } 0 < E < \frac{1}{9}(\frac{1}{2})^{12} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{4096} < 10^{-4} .$$

Schrijven we

$$I \approx 0{,}500 + 0{,}003 = 0{,}503 ,$$

dan maken we nog een afrondingsfout A waarvoor geldt

$$|A| \le \tfrac{1}{2}.10^{-3} .$$

Ergo: $I = 0{,}503$ met een fout die hoogstens $10^{-4} + 5.10^{-4} = 6.10^{-4}$ is in absolute waarde.

4. De reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{w^n}{n^2 \ln n}$, $w \in \mathbb{C}$, is convergent voor $w = 0$ en voor $w \neq 0$ is

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{w^{n+1}}{(n+1)^2 \ln(n+1)} \, \frac{n^2 \ln n}{w^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \, \frac{\ln n}{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})} |w| = |w| .$$

Op grond van het convergentiekenmerk van d'Alembert is de reeks dus (absoluut) convergent voor $|w| < 1$ en divergent voor $|w| > 1$.
Op de eenheidscirkel $|w| = 1$ geldt

$$\left| \frac{w^n}{n^2 \ln n} \right| = \frac{1}{n^2 \ln n} < \frac{1}{n^2} \quad \text{voor } n \ge 3 .$$

Omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergent is, is de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{w^n}{n^2 \ln n}$ ook nog (absoluut) convergent voor $|w| = 1$ (vergelijkingsstelling).
De reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{(|z|^2 - z)n}}{n^2 \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(e^{|z|^2 - z}\right)^n}{n^2 \ln n}$$

is dus (absoluut) convergent voor die waarden van $z \in \mathbb{C}$ waarvoor geldt

$$\left|e^{|z|^2 - z}\right| = e^{|z|^2 - \mathrm{Re}\, z} \le 1 ,$$

$$|z|^2 - \mathrm{Re}\, z \le 0 .$$

Met $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, volgt hieruit

$$x^2 + y^2 - x \le 0 ,$$

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 \le \tfrac{1}{4} .$$

Dit is de cirkelschijf met middelpunt ($z =$) $\frac{1}{2}$ en straal $\frac{1}{2}$.

5. Uit

$$z_1 + z_2 + 1 = 0$$

volgt

$$z_2 = -z_1 - 1, \text{ dus } |z_2| = |z_1 + 1| ,$$

waarna uit

$$|z_1| = |z_1 + 1| = 1$$

volgt dat z_1 op de eenheidscirkel ligt èn op de middelloodlijn van het lijnstuk dat de punten 0 en -1 verbindt.
Dus $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ of $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, en $z_2 = -z_1 - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ of $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

6. De karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 4 = 0$ heeft wortels $\pm 2i$, zodat de algemene reële oplossing van de homogene differentiaalvergelijking is

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x,\ c_1 \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R} .$$

Er is een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking van de vorm

$$y = a \sin x + b \cos x + ce^x .$$

Substitutie levert

$$-a \sin x - b \cos x + ce^x + 4a \sin x + 4b \cos x + 4ce^x = 2 \sin x + e^x ,$$

$$3a = 2,\ 3b = 0,\ 5c = 1 .$$

De algemene reële oplossing van $y'' + 4y = 2 \sin x + e^x$ is dus

$$y = \frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{5} e^x + c_1\cos 2x + c_2\sin 2x,\ c_1 \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R} .$$

Herkansingsexamen/tentamen juni 1978

1. Gegeven is de functie f: $[-1,1] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{x}{|x|} \quad \text{voor } x \neq 0 ,$$

$$f(0) = 0 .$$

a) Onderzoek de continuïteit van f in $x = 0$.

b) Onderzoek de differentieerbaarheid van f in $x = 0$.

2. a) Bepaal

$$\int \arccos x \, dx .$$

b) Bereken

$$\int_0^\infty \frac{dx}{2(x+1)\sqrt{x}} .$$

3. Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1 - x^3)^{-\frac{1}{5}} - \arctan x - \frac{1}{3}x^3}{1 - \cosh x^2} .$$

4. a) Onderzoek of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

convergeert.

b) Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} .$$

Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is deze reeks convergent?

Bepaal voor deze waarden van x de som van de reeks.

5. Bepaal alle complexe getallen z waarvoor geldt

$$\ln|e^{z^2}| \leq |z|^2 - 2 .$$

6. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'\sin x - y(\sin x + \cos x) = e^x .$$

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1978

1. Voor $x \neq 0$ is $f(x)$ te schrijven als

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} - \frac{x}{|x|} = \frac{x}{|x|}(\sqrt{1-x^2} - 1) =$$

$$= \frac{x}{|x|}\,\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}+1} = -\frac{x|x|}{\sqrt{1-x^2}+1} \qquad (x^2 = |x|^2!)\ .$$

Uit

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}+1} = 0$$

volgt dat f differentieerbaar is in $x = 0$ (met afgeleide 0). Dan is f ook continu in $x = 0$.

2. a) Met partiële integratie volgt

$$\int \arccos x\, dx = x \arccos x - \int x\, d \arccos x =$$

$$= x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C\ .$$

b) Substitutie van $\sqrt{x} = t$, $\dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = dt$, levert

$$\int_0^\infty \frac{dx}{2(x+1)\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t\Big|_0^\infty = \tfrac{1}{2}\pi.$$

3. Met machtreeksontwikkeling:

$$N(x) := 1 - \cosh x^2 = 1 - (1 + \tfrac{1}{2}x^4 + \ldots) = -\tfrac{1}{2}x^4 - \ldots\ ,$$

$$T(x) := x(1-x^3)^{-\frac{1}{5}} - \arctan x - \frac{1}{3}x^3 =$$

$$= x[1 + \frac{1}{5}x^3 + \ldots] - [x - \frac{1}{3}x^3 + \ldots] - \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{5}x^4 + \ldots\ ,$$

volgt

$$\lim_{x\to 0}\frac{T(x)}{N(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5}x^4 + \ldots}{-\frac{1}{2}x^4 - \ldots} = -\frac{2}{5}\ .$$

4. a) Zij

$$a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) .$$

Voor grote waarden van n geldt

$$|a_n| = \frac{n+1}{n} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \approx \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n} ,$$

zodat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ niet absoluut convergent is.

We passen het convergentiekenmerk van Leibniz toe:

1°. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is alternerend;

2°. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.0 = 0;$

3°. de rij $(|a_n|)$ is monotoon dalend (de factoren $1 + \frac{1}{n}$ en $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ zijn beide monotoon dalend).

Dus de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ is convergent.

b) De reeks voor arctan x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

is convergent voor $-1 \le x \le 1$.

Dus is ook

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

convergent voor $-1 \le x \le 1$.

Zij S de som van de reeks.

Dan geldt

$$\arctan x = x + x\, S(x), \quad -1 \le x \le 1 ,$$

dus

$$S(x) = \frac{\arctan x - x}{x} , \quad -1 \le x \le 1,\ x \neq 0 ,$$

en $\quad S(0) = 0 .$

5. Wegens

$$\ln|e^{z^2}| = \ln e^{\mathrm{Re}\, z^2} = \mathrm{Re}\, z^2$$

gaat de gegeven ongelijkheid, met $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, over in

$$x^2 - y^2 \leq x^2 + y^2 - 2 ,$$

$$y^2 \geq 1 .$$

De oplossingsverzameling is dus

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| \geq 1\} .$$

6. Door scheiding van variabelen bepalen we eerst <u>één</u> oplossing van de homogene differentiaalvergelijking:

$$\sin x\, dy - y(\sin x + \cos x)dx = 0 ,$$

$$\frac{dy}{y} - (1 + \frac{\cos x}{\sin x})dx = 0 ,$$

$$\ln y - x - \ln \sin x = 0 ,$$

$$y = e^x \sin x .$$

Vervolgens stellen we de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking

$$y = c(x)e^x \sin x .$$

Substitutie levert

$$c'(x)e^x \sin^2 x = e^x ,$$

$$c'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} ,$$

$$c(x) = -\cot x + C ,$$

zodat

$$y = (C - \cot x)e^x \sin x = Ce^x \sin x - e^x \cos x, \qquad C \in \mathbb{R} ,$$

de algemene reële oplossing is van de gegeven differentiaalvergelijking.

<u>Opmerking</u>. De gevolgde oplossingsmethode wijkt enigszins af van de methode van variatie van constanten zoals die beschreven wordt in de collegesyllabus.

P 10.78

Proeftentamen oktober 1978

1. Bewijs dat voor alle $a,b,c \in \mathbb{R}$ met $a > 0$, $b > 0$ en $c > 0$ geldt

$$\frac{a-b}{bc} + \frac{b-c}{ca} + \frac{c-a}{ab} \geq 0 .$$

2. Ga na of de volgende limieten bestaan en bereken ze voor zover ze bestaan.

   a) $\lim_{n\to\infty} (n - \sqrt{n^2 - n})$,

   b) $\lim_{x\downarrow 0} (\sin \sqrt{x}) \ln \frac{1}{x}$,

   c) $\lim_{x\to\infty} x e^{\frac{1}{x}}$,

   d) $\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) \ln(1 + \frac{1}{n})$.

3. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x^2 & \text{voor } x \neq 0 , \\ 0 & \text{voor } x = 0 . \end{cases}$$

   a) Bewijs dat f continu en differentieerbaar is in 0.

   b) Toon aan dat f monotoon stijgend is op het interval $(-\frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}\sqrt{\pi})$.

4. De rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wordt gegeven door $a_1 = 2$ en $a_{n+1} = \sqrt[n]{n a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

   a) Bewijs dat $a_n \geq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en dat $a_n \leq 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

   b) Toon aan dat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een limiet heeft en bereken deze.

P 10.78

Oplossingen Proeftentamen oktober 1978

1. De te bewijzen ongelijkheid geeft, na vermenigvuldigen met abc,

$$a^2 - ab + b^2 - bc + c^2 - ac \geq 0 .$$

Hierin is het linkerlid gelijk aan $\frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{1}{2}(b - c)^2 + \frac{1}{2}(a - c)^2$.

Vandaar het volgende

Bewijs. Voor alle a, b, c $\in \mathbb{R}$ geldt

$\frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{1}{2}(b - c)^2 + \frac{1}{2}(a - c)^2 \geq 0$, dus

$a^2 - ab + b^2 - bc + c^2 - ac \geq 0$,

$a(a - b) + b(b - c) + c(c - a) \geq 0$.

Delen door abc geeft

$$\frac{a - b}{bc} + \frac{b - c}{ca} + \frac{c - a}{ab} \geq 0$$

voor alle a, b, c $\in \mathbb{R}$ met $abc > 0$, dus zeker voor alle a, b, c $\in \mathbb{R}$ met $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. $\square$

2. a) $$\lim_{n\to\infty} (n - \sqrt{n^2 - n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - (n^2 - n)}{n + \sqrt{n^2 - n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} .$$

b) $$\lim_{x\downarrow 0} \sin\sqrt{x}\ \ln\frac{1}{x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \sqrt{x}\ \ln\frac{1}{x} = 1 .\ 0 = 0,$$

want

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 \qquad \text{(standaardlimiet)},$$

$$\lim_{x\downarrow 0} \sqrt{x}\ \ln\frac{1}{x} = \lim_{y\to\infty} \sqrt{\frac{1}{y}}\ \ln y = \lim_{y\to\infty} \frac{\ln y}{y^{\frac{1}{2}}} = 0 \qquad \text{(standaardlimiet)}.$$

c) $\lim_{x\to\infty} x\, e^{\frac{1}{x}}$ bestaat niet:

voor $x > 0$ geldt $x\, e^{\frac{1}{x}} > x$; $\lim_{x\to\infty} x = \infty$.

P 10.78

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1)\ln(1+\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}(n+1)\ln(1+\frac{1}{n}) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} (1+\frac{1}{n}) = 0.1.1 = 0 \text{ ,}$$

want

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ (standaardlimiet) , dus } \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln 1}{\frac{1}{n}} = (\ln x)'_{x=1} = 1 \text{ ;}$$

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n}) = 1 + 0 = 1.$$

3. a) Uit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h^2}{h^2} = 1$$

volgt dat f differentieerbaar is in 0 met $f'(0) = 1$.
Dan is f tevens continu in 0.

b) Voor $x \neq 0$ geldt

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \sin x^2 + 2\cos x^2 \text{ .}$$

Uit

$$\sin x^2 < x^2 \quad \text{voor } x \neq 0 \text{ ,}$$
$$\cos x^2 > \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ voor } x^2 < \frac{1}{4}\pi \text{ ,}$$

volgt

$$f'(x) > -1 + \sqrt{2} > 0 \text{ voor } x^2 < \frac{1}{4}\pi \text{ , } x \neq 0.$$

Wegens $f'(0) = 1$ (zie a)) geldt

$$f'(x) > 0 \text{ voor } -\frac{1}{2}\sqrt{\pi} < x < \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \text{ ,}$$

zodat de functie f monotoon stijgend is op het interval $(-\frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}\sqrt{\pi})$.

P 10.78

4. a) Met volledige inductie.

i) Er geldt $a_1 = 2 > 1$.
Stel $a_n > 1$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$.
Dan is

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{na_n} > \sqrt[n]{n} \geq 1, \quad a_{n+1} > 1$$

Dus $a_n > 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) Er geldt $a_1 = 2$.
Stel $a_n \leq 2$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$.

Dan is

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{na_n} \leq \sqrt[n]{2n} \leq \sqrt[n]{2^n} = 2.$$

Dus $a_n \leq 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
Hierbij is gebruik gemaakt van de ongelijkheid

$$2n \leq 2^n \text{ voor alle } n \in \mathbb{N} ,$$

waarvan het bewijs met volledige inductie als volgt verloopt.
Voor $n = 1$ geldt het gelijkteken.
Stel $2n \leq 2^n$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$, dan is

$$2(n + 1) = 2n + 2 \leq 2^n + 2 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1} .$$

b) Uit

$$1 < a_n \leq 2 \quad , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

volgt

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{na_n} \leq \sqrt[n]{2n} ,$$

dus

$$\sqrt[n]{n} < a_{n+1} \leq \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} \quad , \; n \in \mathbb{N} .$$

Wegens

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n} = 1.1 = 1 ,$$

volgt op grond van de insluitstelling dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent is met $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

T 1.79

Examen/tentamen januari 1979

1. a) Bereken

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n+3}{3}}{\binom{n}{3}} .$$

b) De functie $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = x^2 \ln \frac{1}{x^2} \text{ als } x \neq 0 ,$$

$$f(0) = 0 .$$

i) Ga na of f differentieerbaar is in 0.

ii) Bepaal de extrema van f.

iii) Schets de grafiek van f.

---

2. a) Bepaal de n^e afgeleide van de functie x^2e^x voor $n = 2,3,4,\dots$.

b) Bereken

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} .$$

3. a) Toon aan dat de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(x+1)^n}$$

convergeert voor $x \geq 0$ en bereken voor $x = 2$ de som van de reeks.

b) Het complexe polynoom P is gegeven door

$$P(z) = z^3 + (2-3i)z^2 + (-2-6i)z - 4 .$$

Toon aan dat i nulpunt van P is en bepaal de overige nulpunten van P.

4. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y''(x) - (a+1)y'(x) + ay(x) = 0 \qquad (a \in \mathbb{R}) .$$

a) Geef de oplossing waarvoor $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$ wanneer $a \neq 1$. Deze oplossing noemen we $y_a(x)$.

b) Geef ook de oplossing waarvoor $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$ wanneer $a = 1$. Deze oplossing noemen we $y_1(x)$.

c) Onderzoek of voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$\lim_{a\to 1} y_a(x) = y_1(x) .$$

T 1.79

Oplossingen Tentamen januari 1979

1. a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n+3}{3}}{\binom{n}{3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{3}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{1}{n})}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})} = 1 \ .$$

b) i) Uit

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\downarrow 0} x \ln\frac{1}{x^2} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \ln y^2 =$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{2 \ln y}{y} = 0 \quad \text{(standaardlimiet)},$$

en

$$\lim_{x\uparrow 0} x \ln\frac{1}{x^2} = \lim_{y\to\infty} -\frac{1}{y} \ln y^2 = 0 \ ,$$

volgt dat f differentieerbaar is in 0 met $f'(0) = 0$.

ii) Voor $x \neq 0$ geldt

$$f'(x) = (-x^2 \ln x^2)' = -2x \ln x^2 - x^2 \frac{2x}{x^2} =$$

$$= -2x(\ln x^2 + 1) \ .$$

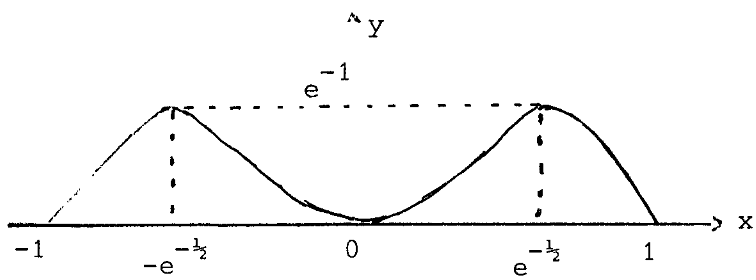
Uit het schema

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
0 & & & & e^{-1} & & & & & & 0 & & & & & & e^{-1} & & & & 0 & f(x) \\
+ & + & + & + & 0 & - & - & - & - & - & 0 & + & + & + & + & + & 0 & - & - & - & - & f'(x) \\
\hline
-1 & & & & -e^{-\frac{1}{2}} & & & & & & 0 & & & & & & e^{-\frac{1}{2}} & & & & 1 & x
\end{array}$$

T 1.79

volgt onmiddellijk dat f op $[-1,1]$ de volgende extrema heeft :
een globaal maximum e^{-1} in $-e^{-\frac{1}{2}}$ en $e^{-\frac{1}{2}}$,
een globaal minimum 0 in -1 , 0 en 1.

iii)



2. a) Met de regel van Leibniz :

$$(x^2\, e^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} \, (e^x)^{(n-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} \, e^x =$$

$$= \left(x^2 + \binom{n}{1}(2x) + \binom{n}{2} \cdot 2\right) e^x =$$

$$= (x^2 + 2nx + n(n-1))\, e^x \quad \text{voor } n = 2,3,4,\ldots \; .$$

Merk op dat $(x^2 e^x)^{(n)} = (x^2 + 2nx + n(n-1))\, e^x$ ook geldt voor $n = 0$ en $n = 1$.

b) Substitutie van $x = -y$ en daarna van $y = \frac{1}{\cos\varphi}$ met $\frac{\pi}{3} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ geeft

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \int_{\infty}^{2} \frac{-dy}{-y^3\sqrt{y^2-1}} = -\int_{2}^{\infty} \frac{dy}{y^3\sqrt{y^2-1}} =$$

$$= -\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^3\varphi}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1}} \; \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= -\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi \, \sin\varphi \, |\cos\varphi|}{|\sin\varphi|} d\varphi = -\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2\varphi \, d\varphi =$$

$$= -\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi = -\left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_{\pi/3}^{\pi/2} =$$

T 1.79

$$= -\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{8}\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{24}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right) .$$

3. a) Voor $-1 < y \le 1$ geldt

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n} = y - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{n} ,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{n} = y - \ln(1+y) .$$

Wegens $0 < \frac{1}{x+1} \le 1$ voor $x \ge 0$, volgt hieruit dat de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(x+1)^n}$$

convergeert voor $x \ge 0$.

De som van de reeks is $\frac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)$,

dus $\frac{1}{3} - \ln\frac{4}{3}$ voor $x = 2$.

b) Uit

$$P(i) = i^3 + (2-3i)\, i^2 + (-2-6i)\, i - 4 =$$

$$= -i - 2 + 3i - 2i + 6 - 4 = 0$$

volgt dat i nulpunt van P is, dus dat $P(z)$ de factor $z - i$ bevat.

Ontbinden van $P(z)$ geeft

$$P(z) = (z-i)(z^2 + (2-2i)\, z - 4i) .$$

De overige nulpunten van P zijn de wortels van de vierkantsvergelijking $z^2 + 2(1-i)\, z - 4i = 0$:

$$(z+1-i)^2 - (1-i)^2 - 4i = 0 , \quad (z+1-i)^2 - (1+i)^2 = 0 ,$$

$$(z+1-i+1+i)(z+1-i-1-i) = 0 , (z+2)(z-2i) = 0,$$

T 1.79

dus -2 en 2i .

4. De karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 - (a + 1)\lambda + a = (\lambda - 1)(\lambda - a) = 0$$

heeft wortels 1 en a, zodat de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{ax} \text{ als } a \neq 1 ,$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 xe^x \text{ als } a = 1 .$$

a) $$y_a(x) = c_1 e^x + c_2 e^{ax} \text{ met}$$

$$c_1 + c_2 = 0 , \; c_1 + ac_2 = 1 ; \; c_1 = -\frac{1}{a-1} , \; c_2 = \frac{1}{a-1} ,$$

dus

$$y_a(x) = \frac{1}{a-1}(e^{ax} - e^x) .$$

b) $$y_1(x) = c_1 e^x + c_2 xe^x \text{ met}$$

$$c_1 = 0 , \quad c_1 + c_2 = 1 ,$$

dus

$$y_1(x) = xe^x .$$

c) Voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$\lim_{a\to 1} y_a(x) = \lim_{a\to 1} \frac{e^{ax} - e^x}{a - 1} = \left[\frac{d}{da} e^{ax}\right]_{a=1} =$$

$$= [xe^{ax}]_{a=1} = xe^x = y_1(x) .$$

H 1.79

Herkansingsexamen/tentamen januari 1979

1. a) Bereken

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{3n} - e^{2n}} .$$

b) Zij f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x \sin x$. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n-1}\{x \cos x + (2n-1)\sin x\} .$$

2. Bereken

$$\int_0^{\pi/2} e^x (\cos x)^2 dx .$$

3. a) Geef een schatting van de afbreekfout na 5 termen van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n .$$

b) Gegeven is de complexe rij $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ waarvoor $z_n = n\left(e^{\frac{2\pi i}{n}} - 1\right)$.
Ga na of deze rij convergeert in het complexe vlak. Zo ja, bepaal de limiet.

4. Los op

$$y'(x) + (\ln x)y(x) = x^{-x} .$$

5. Geef alle reële oplossingen van

$$y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = x .$$

H 1.79

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1979

1. a) Uit

$$\sqrt[n]{e^{3n} - e^{2n}} = \sqrt[n]{e^{3n}(1 - e^{-n})} = e^3 \sqrt[n]{1 - e^{-n}} \; ,$$

$$\sqrt[n]{1 - e^{-1}} \le \sqrt[n]{1 - e^{-n}} < 1 \; , \; n \in \mathbb{N} \; ,$$

en

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 - e^{-1}} = 1 \text{ (standaardlimiet)}$$

volgt op grond van de insluitstelling

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{3n} - e^{2n}} = e^3 \, . \, 1 = e^3 \; .$$

b) Met volledige inductie .

i) Uit $f'(x) = (x \sin x)' = x \cos x + \sin x$ volgt dat de bewering waar is voor $n = 1$.

ii) Neem aan dat de bewering waar is voor zekere $n \in \mathbb{N}$.
Dan geldt

$$f^{(2n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(2n-1)}(x) = \frac{d}{dx} (-1)^{n-1}\{x \cos x + (2n - 1)\sin x\} =$$

$$= (-1)^{n-1} \{\cos x - x \sin x + (2n - 1) \cos x\} =$$

$$= (-1)^{n} \{x \sin x - 2n \cos x\} \; ,$$

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n} \{x \cos x + \sin x + 2n \sin x\} =$$

$$= (-1)^{n} \{x \cos x + (2n + 1) \sin x\} \; ,$$

zodat de bewering dan ook waar is voor $n + 1$.

Dus

$$f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n-1} \{x \cos x + (2n - 1) \sin x\}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$.

H 1.79

2. $$\int_0^{\pi/2} e^x(\cos x)^2\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,d\,e^x =$$

$$= e^x \cos^2 x \Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} e^x \cos x \sin x\,dx =$$

$$= -1 + \int_0^{\pi/2} e^x \sin 2x\,dx = -1 + \mathrm{Im}\int_0^{\pi/2} e^{x+2ix}\,dx =$$

$$= -1 + \mathrm{Im}\left[\frac{1}{1+2i}\,e^{x+2ix}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -1 + \mathrm{Im}\,\tfrac{1}{5}(1-2i)(e^{\pi/2+i\pi} - 1) =$$

$$= -1 + \tfrac{2}{5}(e^{\pi/2}+1) = \tfrac{1}{5}(2e^{\pi/2} - 3)\ .$$

3. a) Voor de afbreekfout E geldt

$$0 < E = \sum_{n=6}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n = \left(\frac{2}{6}\right)^6 + \left(\frac{2}{7}\right)^7 + \left(\frac{2}{8}\right)^8 + \left(\frac{2}{9}\right)^9 + \ldots <$$

$$< \left(\frac{2}{6}\right)^6 + \left(\frac{2}{6}\right)^7 + \left(\frac{2}{6}\right)^8 + \left(\frac{2}{6}\right)^9 + \ldots = \left(\frac{1}{3}\right)^6\left[1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{3^6}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3^5} = \frac{1}{486} < 0{,}0021\ .$$

b) Wegens

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\,z_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\cos\frac{2\pi}{n} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -2n\sin^2\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} -2\,\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\,\pi\sin\frac{\pi}{n} = 0\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\,z_n = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\cdot 2\pi = 2\pi\ ,$$

is de rij $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ convergent met

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 + 2\pi i = 2\pi i \ .$$

4. Bepaal met de methode van scheiding van variabelen <u>één</u> oplossing van de homogene differentiaalvergelijking $y'(x) + (\ln x)\, y(x) = 0$:

$$\frac{dy}{y} + \ln x \, dx = 0,$$

$$\ln y = -\int \ln x \, dx = -x \ln x + \int dx = -x \ln x + x \ ,$$

$$y(x) = x^{-x} e^{x} \ .$$

De algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking $y'(x) + (\ln x)\, y(x) = x^{-x}$ kan dan geschreven worden in de vorm

$$y(x) = c(x)\, x^{-x} e^{x} \ .$$

Substitutie levert

$$c'(x)\, x^{-x} e^{x} + c(x)\, x^{-x} e^{x}(-\ln x - 1) + c(x)\, x^{-x} e^{x} + c(x)\, x^{-x} e^{x} \ln x = x^{-x} \ ,$$

$$c'(x)\, x^{-x} e^{x} = x^{-x} \ , \quad c'(x) = e^{-x} \ ,$$

zodat $\qquad c(x) = -e^{-x} + C \ ,$

dus

$$y(x) = -x^{-x} + Cx^{-x} e^{x} \ .$$

5. De karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = (\lambda - 2)^2 + 9 = 0$ heeft wortels $2 + 3i$ en $2 - 3i$, zodat de algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking $y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = 0$ is

$$y(x) = c_1 e^{2x} \cos 3x + c_2 e^{2x} \sin 3x \ .$$

Er is een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking van de vorm $y(x) = ax + b$.

Substitutie geeft

$$-4a + 13ax + 13b = x \ ,$$

H 1.79

$$13a = 1 \ , \ 13b - 4a = 0 \ ; \ a = \frac{1}{13} \ , \ b = \frac{4}{169} \ .$$

De algemene reële oplossing van $y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = x$ is dus

$$y(x) = \frac{1}{13}x + \frac{4}{169} + c_1 \, e^{2x} \cos 3x + c_2 \, e^{2x} \sin 3x \text{ met } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

T 6.79

Examen/tentamen juni 1979

1. a) Bewijs dat voor n = 5,6,7,... geldt

$$\sum_{k=5}^{n} \binom{k}{5} = \binom{n+1}{6} .$$

b) Toon aan dat de functie f gegeven door

$$f(x) = e^{x} - \cos x - 1$$

op het interval $[0,\infty)$ precies één nulpunt heeft.

2. Bepaal

$$\int \frac{x^5 - x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 7x + 5}{(x-1)(x^2+2x+2)}\, dx .$$

3. a) Hoeveel termen van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ kan men nemen zodanig dat de afbreekfout kleiner is dan 1/10?

b) Bepaal $\{z \in \mathbb{C} \mid e^{i\,\mathrm{Im}\, z} = -1\}$ en schets deze verzameling in het complexe vlak.

4. Gegeven is de reële machtreeks

$$3 + \frac{6x^2}{2!} + \frac{6x^3}{3!} + \frac{18x^4}{4!} + \frac{30x^5}{5!} + \dots ,$$

dus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ met

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2^n + 2}{n!} & \text{voor } n = 0,2,4,\dots , \\[2ex] \dfrac{2^n - 2}{n!} & \text{voor } n = 1,3,5,\dots . \end{cases}$$

a) Bewijs dat deze reeks convergeert voor alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Zij f(x) de som van deze reeks. Geef de coëfficiënten b_n en c_n van de machtreeksontwikkelingen $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ van f' en $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ van f".

c) Toon aan dat f voldoet aan de differentiaalvergelijking $y'' - y' - 2y = 0$ en los deze op.

d) Bepaal f(x).

T 6.79

Oplossingen Tentamen juni 1979

1. a) Met volledige inductie :

i) $n = 5$: $\sum_{k=5}^{5} \binom{k}{5} = \binom{5}{5} = 1 = \binom{6}{6} = \binom{5+1}{6}$;

ii) Uit

$$\sum_{k=5}^{n} \binom{k}{5} = \binom{n+1}{6} \quad \text{voor zekere } n \in \{5,6,7,\dots\} ,$$

volgt

$$\sum_{k=5}^{n+1} \binom{k}{5} = \sum_{k=5}^{n} \binom{k}{5} + \binom{n+1}{5} = \binom{n+1}{6} + \binom{n+1}{5} = \binom{n+1+1}{6} .$$

Hierbij is gebruik gemaakt van een naar Pascal genoemde eigenschap van binomiaalcoëfficiënten.

b) Uit

$$f'(x) = e^x + \sin x \geq e^x - 1 > 0 \quad , \quad x > 0$$

volgt dat f stijgend is op $(0,\infty)$.

Voor $x \geq \frac{1}{2}\pi$ geldt dus $f(x) \geq f(\frac{1}{2}\pi) = e^{\frac{1}{2}\pi} - 1 > 0$: op $[\frac{1}{2}\pi,\infty)$ heeft f geen nulpunten.

Op $(0, \frac{1}{2}\pi)$ heeft f precies één nulpunt op grond van de tussenwaardestelling en de monotonie van f, omdat $-1 = f(0) < 0 < f(\frac{1}{2}\pi)$.

2. Schrijf

$$\frac{x^5 - x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 7x + 5}{x^3 + x^2 - 2} = x^2 - 2x + \frac{-3x^2 + 3x + 5}{(x-1)(x^2+2x+2)} =$$

$$= x^2 - 2x + \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + D}{x^2 + 2x + 2} ,$$

dan volgt uit

$$-3x^2 + 3x + 5 = A(x^2 + 2x + 2) + (Bx + D)(x - 1) \;:$$

$$-3 = A + B \;,\; 3 = 2A - B + D,\; 5 = 2A - D \;;$$

$$A = 1 \;,\quad B = -4 \;,\quad D = -3 \;,$$

zodat de integraal wordt

$$\int (x^2 - 2x + \frac{1}{x-1} - \frac{4x+3}{x^2+2x+2})\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \ln|x-1| - \int \frac{4x+4-1}{x^2+2x+2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \ln|x-1| - 2\ln(x^2+2x+2) + \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \ln|x-1| - 2\ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) + C.$$

3\. a) Bij afbreken van de reeks na N termen is de afbreekfout E gelijk aan

$$E = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} \;.$$

Op het interval $[n-1\;,\;n]$ geldt $\frac{1}{n^{4/3}} \leq \frac{1}{x^{4/3}}$,

dus

$$\frac{1}{n^{4/3}} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^{4/3}}\, dx \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^{4/3}}\, dx \;,$$

zodat

$$E \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^{4/3}}\, dx = \int_{N}^{\infty} \frac{1}{x^{4/3}}\, dx = \frac{3}{N^{1/3}} \;.$$

Voor $N > 27.000$ is $E < \frac{1}{10}$

b) Uit

$$e^{i\,\mathrm{Im}z} = -1 = e^{\pi i}$$

T 6.79

volgt

$$\operatorname{Im} z = \pi + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} .$$

Omgekeerd, als $\operatorname{Im} z = \pi + 2k\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$, dan geldt $e^{i\operatorname{Im} z} = e^{(2k+1)\pi i} = -1$.

De verzameling $\{z \in \mathbb{C} \mid e^{i\operatorname{Im} z} = -1\}$ bestaat dus uit rechten evenwijdig aan de reële as .

4. Blijkbaar geldt $a_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{n!}$ voor $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

a) Voor $x = 0$ is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergent;

voor $x \neq 0$ is

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{2^{n+1} + 2(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n + 2(-1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} \frac{2 + (-\frac{1}{2})^{n-1}}{1 - (-\frac{1}{2})^{n-1}} = 0 .$$

Op grond van het convergentiekenmerk van d'Alembert is de reeks (absoluut) convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Volgens de differentiatiestelling voor machtreeksen geldt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n ,$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \; ; \; x \in \mathbb{R} ,$$

dus

$$b_n = (n+1)a_{n+1} = (n+1) \frac{2^{n+1} + 2(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1} - 2(-1)^n}{n!} ,$$

$$c_n = (n+1)(n+2) a_{n+2} = \frac{2^{n+2} + 2(-1)^n}{n!} \; ; \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\} .$$

c) Er geldt

$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - b_n - 2a_n) x^n , \; x \in \mathbb{R} ,$$

T 6.79

met

$$c_n - b_n - 2a_n = \frac{1}{n!}(2^{n+2} + 2(-1)^n - 2^{n+1} + 2(-1)^n - 2^{n+1} - 4(-1)^n) = 0$$

voor alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

dus

$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

De differentiaalvergelijking $y'' - y' - 2y = 0$ heeft karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

met wortels -1 en 2 , zodat de algemene oplossing is

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \ .$$

d) Volgens c) geldt

$$f(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \text{ voor zekere constanten } c_1, c_2.$$

Met

$$f(0) = 3 = c_1 + c_2 \quad , \quad f'(0) = 0 = -c_1 + 2c_2 \ ,$$

dus

$$c_1 = 2 \quad , \quad c_2 = 1 \ ,$$

volgt

$$f(x) = 2e^{-x} + e^{2x} \ .$$

H 6.79

Herkansingsexamen/tentamen juni 1979

1. a) Beschouw de afbeelding $f: \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{1\}$ gedefinieerd door

$$f(z) = \frac{z+i}{z} .$$

Bewijs dat deze afbeelding bijectief is en bepaal zijn inverse.

b) Zij k een (vast) natuurlijk getal.

Bereken

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1^k} + \sqrt[n]{2^k} + \ldots + \sqrt[n]{n^k}}{n} .$$

2. a) Differentieer de functie f gegeven door

$$f(x) = x^{\tan 2x} .$$

b) Bepaal

$$\int \frac{2x-1}{2x^2+x+1}\,dx .$$

c) Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x+3|}\,dx .$$

3. a) Bereken de convergentiestraal van de reële machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} .$$

b) Gegeven is de complexe reeks $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ waarbij $a_n = \dfrac{2n.i^n}{n^2-1}$.

i) Zij $S_N = \sum_{n=2}^{N} a_n$ voor $N = 2,3,4,\ldots$. Toon aan dat

$$S_N = -1 - \frac{i}{2} + \frac{i^{N-1}(N+1+Ni)}{N(N+1)} \qquad \text{voor } N = 2,3,4,\ldots .$$

ii) Is de reeks convergent? Zo ja, bepaal de som.

4. Geef de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 4y = 16xe^{-2x} ,$$

waarvoor geldt $y(1) = 0$ en $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

H 6.79

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1979

1. a) Bij iedere $w \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ is er precies één $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ zodanig dat geldt $f(z) = w$:

$$\frac{z+i}{z} = w \quad \text{geeft } z + i = wz \text{ , dus } z = \frac{i}{w-1} \text{ ,}$$

$$\text{en } f\left(\frac{i}{w-1}\right) = \frac{\dfrac{i}{w-1} + i}{\dfrac{i}{w-1}} = \frac{i + i(w-1)}{i} = w.$$

De inverse afbeelding is dus $f^{\leftarrow} : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ met

$$f^{\leftarrow}(z) = \frac{i}{z-1} \text{ .}$$

b) Uit

$$1 = \frac{n}{n} \le \frac{\sqrt[n]{1^k} + \sqrt[n]{2^k} + \ldots + \sqrt[n]{n^k}}{n} \le \frac{n\sqrt[n]{n^k}}{n} = (\sqrt[n]{n})^k \text{ , } \quad n \in \mathbb{N} \text{ ,}$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \text{ , } \quad \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^k = 1 \text{ ,}$$

volgt op grond van de insluitstelling

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1^k} + \sqrt[n]{2^k} + \ldots + \sqrt[n]{n^k}}{n} = 1 \text{ .}$$

2. a) Uit

$$f(x) = e^{\tan 2x \ln x}$$

volgt

$$f'(x) = x^{\tan 2x}\left(\frac{2 \ln x}{\cos^2 2x} + \frac{\tan 2x}{x}\right) .$$

b)
$$\int \frac{2x-1}{2x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{4x+1-3}{2x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2x^2+x+1) - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2x^2+x+1) - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{16}} =$$

H 6.79

$$= \frac{1}{2}\ln(2x^2 + x + 1) - \frac{3}{\sqrt{7}} \arctan \frac{4x + 1}{\sqrt{7}} + C .$$

c) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x+3|}\, dx = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{-3} e^{x+3}\, dx + \lim_{B\to\infty} \int_{-3}^{B} e^{-(x+3)}\, dx =$$

$$= \lim_{A\to\infty} e^{x+3}\Big|_{-A}^{-3} + \lim_{B\to\infty} - e^{-(x+3)}\Big|_{-3}^{B} =$$

$$= 1 + 1 = 2 .$$

3\. a) Voor $x = 0$ is de reeks convergent ;
voor $x \neq 0$ is

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{\binom{2n+2}{n+1}} \frac{\binom{2n}{n}}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n!\ n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x| \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}|x| .$$

Op grond van het convergentiekenmerk van d'Alembert is de reeks absoluut convergent voor $|x| < 4$ en divergent voor $|x| < 4$: de convergentiestraal is 4.

b) i) Met volledige inductie :

1°. $N = 2 : S_2 = a_2 = -\frac{4}{3} = -1 - \frac{1}{2} i + (\frac{1}{2} i - \frac{1}{3}) =$

$$= -1 - \frac{1}{2} i + \frac{3i - 2}{2 . 3} = -1 - \frac{1}{2} i + \frac{i(3 + 2i)}{2 . 3} ;$$

2°. Uit

$$S_N = -1 - \frac{1}{2} i + \frac{i^{N-1}(N + 1 + Ni)}{N(N+1)} \text{ voor zekere } N \in \{2,3,4,\ldots\} ,$$

volgt

$$S_{N+1} = S_N + a_{N+1} = -1 - \frac{1}{2} i + \frac{i^{N-1}(N + 1 + Ni)}{N(N+1)} + \frac{2(N+1)i^{N+1}}{(N+1)^2 - 1} =$$

$$= -1 - \frac{1}{2} i + \frac{i^{N-1}}{N} + \frac{i^N}{N+1} + i^2 \frac{(N + N + 2)i^{N-1}}{N(N+2)} =$$

$$= -1 - \frac{1}{2} i + \frac{i^{N-1}}{N} + \frac{i^N}{N+1} - \frac{i^{N-1}}{N+2} - \frac{i^{N-1}}{N} =$$

$$= -1 - \frac{1}{2} i + \frac{i^N}{N+1} + \frac{i^{N+1}}{N+2} = -1 - \frac{1}{2} i + \frac{i^N(N+2+(N+1)i)}{(N+1)(N+2)} .$$

Dus geldt

$$S_N = -1 - \frac{1}{2} i + \frac{i^{N-1}(N+1+Ni)}{N(N+1)} = -1 - \frac{1}{2} i + \frac{i^{N-1}}{N} + \frac{i^N}{N+1}$$

voor $N = 2,3,4,\ldots$.

ii) Wegens $\lim\limits_{N\to\infty} \left|\frac{i^{N-1}}{N}\right| = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} = 0$,

geldt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{i^{N-1}}{N} = 0 , \quad \lim_{N\to\infty} \frac{i^N}{N+1} = 0 ,$$

zodat de rij $(S_N)_{N=2}^{\infty}$ convergeert naar $-1 - \frac{1}{2} i$.

De reeks $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ is dus convergent met som $-1 - \frac{1}{2} i$.

4. De homogene differentiaalvergelijking $y'' - 4y = 0$ heeft karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 4 = 0$ met wortels -2 en 2.
De algemene oplossing is dus

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} .$$

Omdat -2 enkelvoudige wortel van de karakteristieke vergelijking is heeft $y'' - 4y = 16x\, e^{-2x}$ een particuliere oplossing van de vorm

$$y(x) = (\alpha x^2 + \beta x)e^{-2x}.$$

Substitutie geeft

$$(4\alpha x^2 + 4\beta x - 8\alpha x + 2\alpha - 4\beta)e^{-2x} - 4(\alpha x^2 + \beta x)e^{-2x} = 16x\, e^{-2x} ;$$

$$-8\alpha = 16 , \quad 2\alpha - 4\beta = 0 ; \quad \alpha = -2 , \ \beta = -1 .$$

H 6.79

De algemene oplossing van $y'' - 4y = 16x\,e^{-2x}$ is dus

$$(1) \qquad y(x) = -(2x^2 + x)e^{-2x} + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} .$$

De eerste en tweede term in het rechterlid van (1) hebben limiet 0 voor $x \to \infty$, zodat uit $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$ volgt $\lim\limits_{x\to\infty} c_2 e^{2x} = 0$, dus $c_2 = 0$.

Dan is $y(1) = -3e^{-2} + c_1 e^{-2}$, zodat $y(1) = 0$ geeft $c_1 = 3$.

Dus

$$y(x) = (3 - x - 2x^2)e^{-2x} = (1 - x)(3 + 2x)e^{-2x} .$$

P 10.79

Proeftentamen oktober 1979

Opgave 1 Bereken de volgende limieten.

a. $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{1-x^2} .$$

b. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\arctan x)}{\sin x} .$$

c. $$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n .$$

d. $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn^2+1} .$$

Opgave 2

a. De rij (a_n) is gedefinieerd door

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ en } a_{n+1} = 2^{a_n} - 1 \text{ voor } n \in \mathbb{N} .$$

Bewijs dat de rij convergent is en bepaal de limiet.

b. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n > 2$ geldt

$$3^n > 2n^2 + 1 .$$

Opgave 3

a. Bewijs dat voor alle $x < 1$ geldt

$$\arctan \frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{4} + \arctan x .$$

b. Bewijs dat voor alle $x > 0$ geldt

$$\arctan \frac{x}{1+x} > x - x^2 .$$

P 10.79

Opgave 4 De functie f wordt gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} & \text{als } |x| > 1, \\ \\ x|x| & \text{als } |x| \leq 1 . \end{cases}$$

Onderzoek de functie f op continuïteit en differentieerbaarheid in de punten -1 en 1. Bepaal de extrema van de functie, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ en schets de grafiek.

P 10.79

Oplossingen Proeftentamen oktober 1979

1. a) $$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{1-x^2} = \lim_{x\to1} \frac{(2-x)-x}{(1-x^2)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{2(1-x)}{(1-x)(1+x)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x})} = \lim_{x\to1} \frac{2}{(1+x)(\sqrt{2-x}+\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{2}{2(1+1)} = \frac{1}{2} .$$

b) Uit

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1-\arctan x)}{-\arctan x} = \lim_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} =$$

$$= (\ln y)'_{y=1} = 1 ,$$

$$\lim_{x\to0} \frac{-\arctan x}{x} = -\lim_{x\to0} \frac{\arctan x - \arctan 0}{x} = -(\arctan y)'_{y=0} = -1$$

en

$$\lim_{x\to0} \frac{x}{\sin x} = 1 \qquad \text{(standaardlimiet)}$$

volgt

$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1-\arctan x)}{\sin x} = \lim_{x\to0} \frac{\ln(1-\arctan x)}{-\arctan x}\,\frac{-\arctan x}{x}\,\frac{x}{\sin x} =$$

$$= 1 \,.\, -1 \,.\, 1 = -1 .$$

c) Schrijf

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = e^{n \ln(1-\frac{1}{n^2})} .$$

P 10.79

Uit

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{-1}{n} = 1.0 = 0$$

volgt op grond van de continuïteit van de functie e^x

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = e^0 = 1.$$

d) Voor $k = 1,2,\ldots,n$ geldt

$$\frac{1}{n.n^2 + 1} \le \frac{1}{kn^2 + 1} \le \frac{1}{n^2 + 1} \quad , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

zodat

$$\frac{n}{n^3 + 1} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn^2 + 1} \le \frac{n}{n^2 + 1} \quad , \; n \in \mathbb{N} .$$

Wegens

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^3}} = 0 ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 0 ,$$

volgt op grond van de insluitstelling

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn^2 + 1} = 0 .$$

2. a) De functie f gedefinieerd door

$$f(x) = 2^x - 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R} ,$$

is monotoon stijgend.

Hieruit volgt

i) de rij (a_n) is monotoon dalend ;

ii) de rij (a_n) is naar beneden begrensd : $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Het bewijs (met volledige inductie) is eenvoudig :

P 10.79

i) er geldt $a_2 = 2^{a_1} - 1 = \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2} = a_1$;

uit $a_{n+1} < a_n$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$ volgt

$$a_{n+2} = f(a_{n+1}) < f(a_n) = a_{n+1} ;$$

ii) er geldt $a_1 > 0$;

uit $a_n > 0$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$ volgt

$$a_{n+1} = f(a_n) > f(0) = 0 .$$

Op grond van i) en ii) is de rij (a_n) convergent.

Stel $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Dan geldt $0 \le a < \frac{1}{2}$ en

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) \text{ omdat } f \text{ continu is.}$$

Beschouw de functie g gedefinieerd door

$$g(x) = f(x) - x = 2^x - 1 - x , \; x \in \mathbb{R} .$$

Dan is $g'(x) = 2^x \ln 2 - 1 < \sqrt{2}\ln 2 - 1 < (1{,}42)(0{,}7) - 1 < 0$ voor $x < \frac{1}{2}$,
dus g dalend voor $x < \frac{1}{2}$, waaruit met $g(0) = 0$ volgt $g(x) < 0$ voor $0 < x < \frac{1}{2}$.

Hiermee is bewezen dat $f(a) < a$ voor $0 < a < \frac{1}{2}$.

Dus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = 0.$$

b) Met volledige inductie.

i) Er geldt $3^3 = 27 > 19 = 2 \,.\, 3^2 + 1$.

ii) Stel $3^n > 2n^2 + 1$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$ met $n \ge 3$.

Dan is

$$3^{n+1} > 3(2n^2 + 1) = 6n^2 + 3 = 2n^2 + 4n + 3 + 4n^2 - 4n =$$

$$= 2(n + 1)^2 + 1 + 4n(n - 1) > 2(n + 1)^2 + 1 .$$

Dus geldt $3^n > 2n^2 + 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n > 2$.

3. a) Zij f de functie gedefinieerd door

$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} - \frac{\pi}{4} - \arctan x \quad , \ x < 1 \ .$$

Dan is

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \ \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{2+2x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \ , \ x < 1 \ .$$

Dus f is constant voor $x < 1$.

Uit $f(0) = \arctan 1 - \frac{\pi}{4} - 0 = 0$ volgt $f(x) = 0$, $x < 1$.

b) Zij g de functie gedefinieerd door

$$g(x) = \arctan \frac{x}{1+x} - x + x^2 \quad , \ x > -1 \ .$$

Dan is

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(1+x)^2}} \ \frac{1+x-x}{(1+x)^2} - 1 + 2x =$$

$$= \frac{1}{(1+x)^2 + x^2} - 1 + 2x = \frac{4x^3 + 2x^2}{2x^2 + 2x + 1} > 0 \text{ voor } x > 0 \ ,$$

dus g stijgend op het interval $[0,\infty)$.

Uit $g(0) = 0$ volgt $g(x) > 0$ voor alle $x > 0$.

P 10.79

4. i) $\lim\limits_{x\uparrow -1} f(x) = \lim\limits_{x\uparrow -1} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = -1 = f(-1)$,

$\lim\limits_{x\downarrow -1} f(x) = \lim\limits_{x\downarrow -1} x|x| = -1 = f(-1)$,

$\lim\limits_{x\uparrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\uparrow 1} x|x| = 1 = f(1)$,

$\lim\limits_{x\downarrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\downarrow 1} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = 1 = f(1)$:

de functie f is continu in de punten -1 en 1.

ii) $\lim\limits_{x\uparrow -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim\limits_{x\uparrow -1} \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 1} - (-1)}{x + 1} =$

$$= \lim_{x\uparrow -1} \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1}\right) = \lim_{x\uparrow -1} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{(x + 1)^2}}\right) = \lim_{x\uparrow -1} \left(1 + \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}\right) = \infty \ ,$$

$$\lim_{x\downarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\downarrow 1} \frac{x - \sqrt{x^2 - 1} - 1}{x - 1} =$$

$$\lim_{x\downarrow 1} \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{(x - 1)^2}}\right) = \lim_{x\downarrow 1} \left(1 - \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}\right) = -\infty \ :$$

de functie f is niet differentieerbaar in de punten -1 en 1.

iii) Voor $|x| > 1$ is

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \ .$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat $f'(x) > 0$ is voor $x < -1$.

Voor $x > 1$ geldt

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}\,(\sqrt{x^2 - 1} + x)} < 0 \ .$$

P 10.79

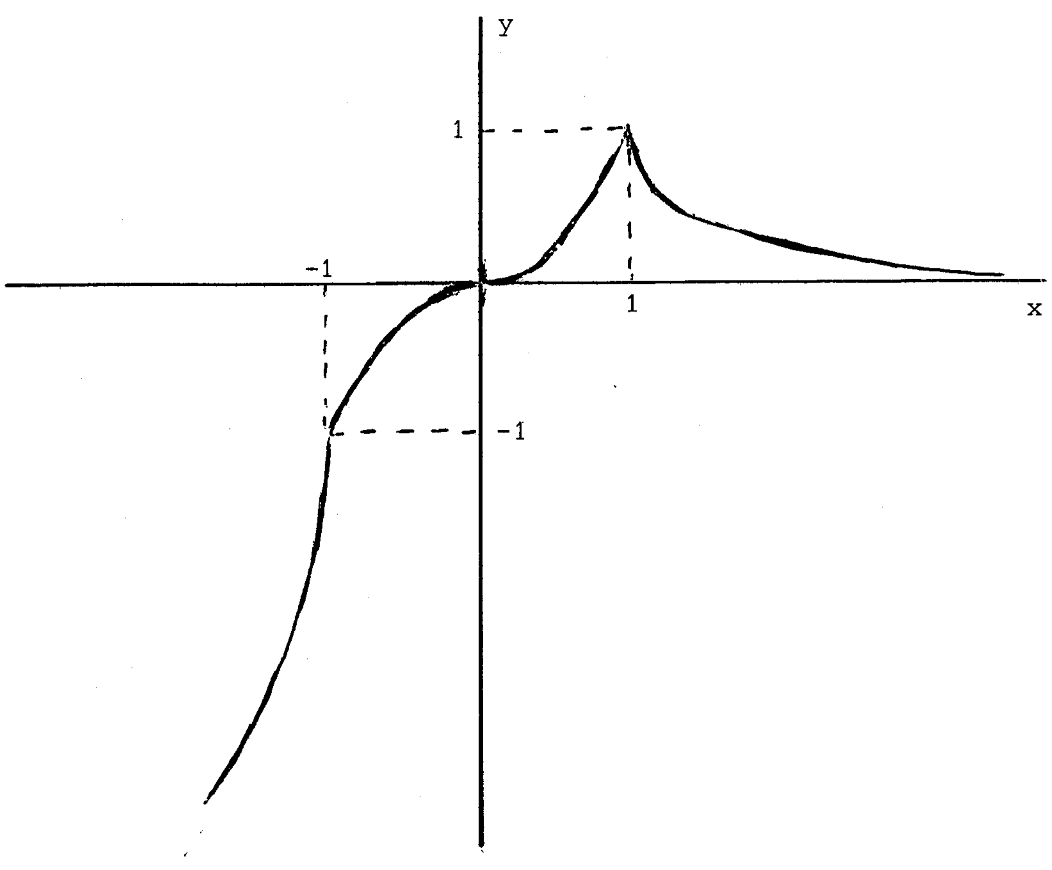
Op het interval [-1,0] is $f(x) = -x^2$, op [0,1] is $f(x) = x^2$.

Conclusie : f stijgt op $(-\infty, 1]$, daalt op $[1,\infty)$, zodat $f(1) = 1$ het enige extreem is van de functie f, het globale maximum.

iv) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0;$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\infty$.

v) Bij het schetsen van de grafiek van f dient men vooral te letten op het in ii) gevonden resultaat.



T 1.80

Examen/tentamen januari 1980

1. a) De rij (a_n) is gegeven door $a_1 = \pi$ en

$$a_{n+1} = \arctan a_n \qquad (n \geq 1) .$$

Bewijs dat de rij convergeert en bepaal de limiet.

b) Bereken $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin \frac{1}{n}}$.

c) De functie $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x) = \frac{x}{\ln x^2} \text{ voor } 0 < |x| < 1 ,$$

$$f(0) = \alpha.$$

Bepaal α zó, dat f differentieerbaar is in $x = 0$.

---

2. a) Bepaal $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^3 - x^2 + 2x - 2}\, dx$.

b) Leid een recurrente betrekking af voor de integralen I_n die gegeven worden door

$$I_n = \int_0^1 \sqrt{x}\,(\ln x)^n\, dx \qquad (n = 0,1,2,\ldots) .$$

Bereken I_3.

3. a) Geef van de Taylorreeks rond $x = 8$ van de functie f gegeven door

$$f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)$$

de termen tot en met de 2^e graad.

b) Onderzoek voor welke reële waarden van x de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2-\sin n)x^n$$

convergeert en geef voor $x = \frac{1}{3}$ een schatting van de afbreekfout bij afbreken na 5 termen.

T 1.80

4. a) Bepaal de $z \in \mathbb{C}$ waarvoor geldt dat

$$\left| e^{\frac{z-i}{z+i}} \right| = 1 .$$

b) Geef de algemene reële oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + y = \sin(x - \frac{\pi}{4}) .$$

T 1.80

Oplossingen Tentamen januari 1980

1. a) i) De rij (a_n) is naar beneden begrensd, nl. $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs. Met volledige inductie.

Er geldt $a_1 = \pi > 0$ en uit $a_n > 0$ (voor zekere $n \in \mathbb{N}$) volgt

$a_{n+1} = \arctan a_n > 0$. □

ii) De rij (a_n) is monotoon dalend: $a_{n+1} < a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs. Beschouw de functie f gedefinieerd door

$f(x) = \arctan x - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Dan is $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 1 = \dfrac{-x^2}{1+x^2} < 0$ voor $x > 0$, zodat f monotoon dalend is op $[0,\infty)$.

Met $f(0) = 0$ volgt $f(x) < 0$, dus

$\arctan x < x$ voor $x > 0$.

Wegens $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, geldt dus

$a_{n+1} = \arctan a_n < a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. □

De rij (a_n) is monotoon dalend en naar beneden begrensd, dus convergent.

Zij $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dan is $a \geq 0$, omdat $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Op grond van de continuïteit van de functie arctan geldt

$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan a_n = \arctan a$, dus

$a = \arctan a$.

Omdat $x > \arctan x$ voor $x > 0$ (zie het bewijs van ii)) volgt hieruit $a = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

T 1.80

b) Uit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

volgt

$$\frac{\frac{1}{2}}{n} < \sin\frac{1}{n} < \frac{2}{n} \qquad \text{o.d.d.,}$$

dus

$$\frac{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}{\sqrt[n]{n}} < \sqrt[n]{\sin\frac{1}{n}} < \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}} \qquad \text{o.d.d. .}$$

Op grond van de insluitstelling geldt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\frac{1}{n}} = 1 \ ,$$

omdat $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$.

c) <u>Nodig</u> voor differentieerbaarheid van f in 0 is continuïteit van f in 0, d.w.z.

$$\alpha = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{\ln x^2} = 0 \cdot 0 = 0 \ .$$

Als $\alpha = 0$, dan is

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\ln h^2} = 0 \ ,$$

dus f differentieerbaar in 0 (met $f'(0) = 0$).

2. a)

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^3 - x^2 + 2x - 2}\,dx = \int \left(1 + \frac{3x^2 + 3}{x^3 - x^2 + 2x - 2}\right)dx =$$

$$= \int dx + \int \frac{3x^2 + 3}{(x - 1)(x^2 + 2)}\,dx = x + \int \left(\frac{2}{x - 1} + \frac{x + 1}{x^2 + 2}\right)dx =$$

$$= x + 2\int \frac{dx}{x - 1} + \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 + 2}\,dx + \int \frac{dx}{x^2 + 2} =$$

$$= x + 2\ln|x - 1| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C \ .$$

T 1.80

b) Toepassen van de regel voor partiële integratie levert

$$I_n = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(\ln x)^n\, dx = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{2}{3} \int_\delta^1 (\ln x)^n\, dx^{3/2} =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{\delta \downarrow 0} [x^{3/2}(\ln x)^n \Big|_\delta^1 - \int_\delta^1 x^{3/2} \cdot n(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}\, dx] =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{\delta \downarrow 0} [- \delta^{3/2}(\ln \delta)^n - n \int_\delta^1 x^{1/2}(\ln x)^{n-1}\, dx] =$$

$$= - \frac{2n}{3} \int_0^1 \sqrt{x}\, (\ln x)^{n-1} dx = - \frac{2n}{3} I_{n-1} \quad \text{voor } n \in \mathbb{N} ,$$

omdat

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \delta^{3/2}(\ln \delta)^n = \lim_{y \to \infty} \frac{(-y)^n}{e^{3y/2}} = 0 , \qquad n \in \mathbb{N} .$$

Hieruit volgt

$$I_3 = -2\, I_2 = \frac{8}{3} I_1 = - \frac{16}{9} I_0 = - \frac{16}{9} \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = - \frac{32}{27} .$$

3. a) Herleiden tot standaardreeksen geeft (met $y = x - 8$)

$$f(x) = \ln(\sqrt[3]{8 + y} - 1) = \ln[2(1 + \frac{y}{8})^{1/3} - 1] =$$

$$= \ln[2(1 + \frac{1}{3}\frac{y}{8} - \frac{1}{9}\frac{y^2}{64} + \ldots) - 1] =$$

$$= \ln(1 + \frac{y}{12} - \frac{y^2}{288} + \ldots) =$$

$$= (\frac{y}{12} - \frac{y^2}{288} + \ldots) - \frac{1}{2}(\frac{y}{12} - \frac{y^2}{288} + \ldots)^2 + \frac{1}{3}(\frac{y}{12} - \frac{y^2}{288} + \ldots)^3 + \ldots =$$

$$= \frac{y}{12} - \frac{y^2}{288} - \frac{1}{2}\frac{y^2}{144} + \ldots = \frac{1}{12} y - \frac{1}{144} y^2 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{12}(x - 8) - \frac{1}{144}(x - 8)^2 + \ldots \quad .$$

T 1.80

b) Voor $-1 < x < 1$ is de reeks (absoluut) convergent op grond van de vergelijkingsstelling:

$$|(2 - \sin n)\, x^n| = (2 - \sin n)\, |x|^n < 3|x|^n \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3\, |x|^n \quad \text{is een convergente meetkundige reeks voor } |x| < 1 .$$

Als $|x| \geq 1$, dan is $(2 - \sin n)\ |x|^n \geq 2 - \sin n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, zodat de algemene term van de reeks niet limiet nul kan hebben: de reeks is divergent.

Voor $x = \frac{1}{3}$ is de afbreekfout E bij afbreken van de reeks na 5 termen gelijk aan

$$E = \sum_{n=6}^{\infty} (2 - \sin n)(\tfrac{1}{3})^n .$$

Er geldt

$$0 < E < \sum_{n=6}^{\infty} 3(\tfrac{1}{3})^n = \frac{1}{3^5}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{162} .$$

4. a) Uit

$$1 = \left| e^{\frac{z - i}{z + i}} \right| = e^{\operatorname{Re} \frac{z - i}{z + i}}$$

volgt

$$\operatorname{Re} \frac{z - i}{z + i} = 0 .$$

Met $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, levert dit

$$\operatorname{Re} \frac{x + i(y - 1)}{x + i(y + 1)} = \operatorname{Re} \frac{(x + i(y - 1))(x - i(y + 1))}{x^2 + (y + 1)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y + 1)^2} = 0,$$

dus

$$x^2 + y^2 = 1 \quad , (x,y) \neq (0, -1) .$$

Dit is de eenheidscirkel $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ met uitzondering van het punt $-i$.

T 1.80

b) De karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 1 = 0$ heeft wortels i en -i, zodat alle oplossingen van de homogene differentiaalvergelijking zijn

$$y = c_1' \, e^{ix} + c_2' \, e^{-ix} \, .$$

Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' + y = e^{ix} \, .$$

Er is een particuliere oplossing van de vorm $\alpha x e^{ix}$ omdat i enkelvoudig nulpunt van $\lambda^2 + 1$ is.

Substitutie levert

$$2i\alpha e^{ix} - \alpha x e^{ix} + \alpha x e^{ix} = e^{ix} \, ,$$

$$\alpha = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2} i \, .$$

De algemene reële oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + y = \sin(x - \tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(\sin x - \cos x)$$

is dus

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(\mathrm{Im} - \tfrac{i}{2} x e^{ix} - \mathrm{Re} - \tfrac{i}{2} x e^{ix}) + c_1 \cos x + c_2 \sin x =$$

$$= -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}(x \cos x + x \sin x) + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

met

$$c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_2 \in \mathbb{R} \, .$$

H 1.80

Herkansingsexamen/tentamen januari 1989

1. De functie f is gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \text{als } x > 0 ,$$

$$f(x) = \alpha \sin(x+\beta) \qquad \text{als } x \le 0 .$$

Bepaal α en β zó, dat f differentieerbaar is in $x = 0$.

2. De functie f wordt gegeven door

$$f(x) = x^3 e^{2x} .$$

Bepaal $f^{(n)}(0)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

3. Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x \sqrt{2 + e^{2x}}\, dx$.

4. Bereken $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4}x - \cos x + \sqrt[4]{1 + x}}{\ln(1+x) - \sin x}$.

5. Bepaal de convergentiestraal R van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} x^{2n} .$$

6. Voor welke $z \in \mathbb{C}$ convergeert de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z+i}\right)^{n} \ln n \ ?$$

7. Los op

$$(1-i)z^2 - 4z - (1+i) = 0 .$$

8. Geef de algemene reële oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'\sin x - 2y \cos x = e^x \sin^3 x .$$

H 1.80

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1980

1. Er geldt

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \alpha \sin \beta = f(0) \ ,$$

$$f'_L(0) = (\alpha \sin(x+\beta))'_{x=0} = \alpha \cos \beta \ ,$$

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \ .$$

Nodig voor differentieerbaarheid van f in 0 is continuïteit van f in 0, dus $f(0) = 1$.

Als $f(0) = 1$, dan is

$$f'_R(0) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{\sin h - h}{h^2} =$$

$$= \lim_{h\downarrow 0} \frac{-\frac{h^3}{3!} + \ldots}{h^2} = \lim_{h\downarrow 0} \left(-\frac{h}{6} + \ldots\right) = 0 \ .$$

Uit

$$f(0) = 1 \ , \quad f'_L(0) = f'_R(0) \ ,$$

volgt

$$\alpha \sin \beta = 1 \ , \quad \alpha \cos \beta = 0 \ ,$$

met oplossingen

$$(\alpha,\beta) = (1, \tfrac{1}{2}\pi + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z} \ ,$$

$$(\alpha,\beta) = (-1, \tfrac{3}{2}\pi + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

H 1.80

2. Op grond van de regel van Leibniz geldt

$$f^{(n)}(x) = (x^3e^{2x})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^3)^{(k)} (e^{2x})^{(n-k)} =$$

$$= \binom{n}{0} \cdot x^3 \cdot 2^n e^{2x} + \binom{n}{1} \cdot 3x^2 \cdot 2^{n-1}e^{2x} + \binom{n}{2} \cdot 6x \cdot 2^{n-2}e^{2x} +$$

$$+ \binom{n}{3} \cdot 6 \cdot 2^{n-3}e^{2x} ,$$

dus

$$f^{(n)}(0) = \binom{n}{3} \cdot 6 \cdot 2^{n-3} \cdot 1 = n(n-1)(n-2) \cdot 2^{n-3} , \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} .$$

3. Substitutie van $e^x = y$, $e^x dx = dy$, levert

$$\int_{-\infty}^{0} e^x\sqrt{2 + e^{2x}}\, dx = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{0} e^x\sqrt{2 + e^{2x}}\, dx =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_{e^{-A}}^{1} \sqrt{2 + y^2}\, dy = \int_{0}^{1} \sqrt{2 + y^2}\, dy .$$

Met partiële integratie volgt

$$\int_{0}^{1} \sqrt{2 + y^2}\, dy = y\sqrt{2 + y^2}\,\Big|_0^1 - \int_0^1 y \frac{y}{\sqrt{2 + y^2}}\, dy =$$

$$= \sqrt{3} - \int_0^1 \frac{y^2 + 2 - 2}{\sqrt{2 + y^2}}\, dy =$$

$$= \sqrt{3} - \int_0^1 \sqrt{2 + y^2}\, dy + 2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{2 + y^2}} ,$$

dus

H 1.80

$$\int_{-\infty}^{0} e^x\sqrt{2 + e^{2x}}\, dx = \int_0^1 \sqrt{2 + y^2}\, dy = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{2 + y^2}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + [\ln(y + \sqrt{2 + y^2})]\Big|_0^1 =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln\sqrt{2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})) \; .$$

4. Uit

$$N(x) := \ln(1 + x) - \sin x = (x - \tfrac{1}{2}x^2 + \ldots) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) =$$

$$= - \tfrac{1}{2}x^2 + \ldots \; ,$$

$$T(x) := - \tfrac{1}{4}x - \cos x + (1 + x)^{\frac{1}{4}} =$$

$$= - \tfrac{1}{4}x - (1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots) + 1 + \tfrac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \ldots =$$

$$= \frac{13}{32}x^2 + \ldots \; ,$$

volgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{T(x)}{N(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{13}{32}x^2 + \ldots}{-\frac{1}{2}x^2 + \ldots} = - \frac{13}{16} \; .$$

5. Zij $u_n(x) = \left(\frac{n - 1}{n}\right)^{n^2} x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n - 1}{n}\right)^n |x|^2 = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n |x|^2 = e^{-1} |x|^2 \; .$$

Op grond van het convergentiekenmerk van Cauchy is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ absoluut convergent als $e^{-1} |x|^2 < 1$, dus als $|x| < \sqrt{e}$, en divergent als $|x| > \sqrt{e}$.

Hieruit volgt $R = \sqrt{e}$.

H 1.80

6. Beschouw de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} w^n \ln n,\ w \in \mathbb{C}$.

Voor $w = 0$ is deze reeks convergent en voor $w \neq 0$ geldt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{w^{n+1} \ln(n+1)}{w^n \ln n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n + \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln n} \mid w \mid =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{\ln n} \ln(1 + \frac{1}{n})) \mid w \mid = (1 + 0 \cdot 0) \mid w \mid = \mid w \mid .$$

Op grond van het convergentiekenmerk van d'Alembert is de reeks (absoluut) convergent als $\mid w \mid < 1$ en divergent als $\mid w \mid > 1$.

Als $\mid w \mid = 1$, dan is $\mid w^n \ln n \mid = \ln n > 1$ voor $n \geq 3$, zodat de algemene term van de reeks niet limiet nul kan hebben: de reeks is divergent.

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z + i}\right)^n \ln n$ is dus slechts convergent voor die waarden van $z \in \mathbb{C}$ waarvoor geldt

$$\left| \frac{z}{z + i} \right| < 1 \quad , \mid z \mid < \mid z + i \mid .$$

Meetkundig: de afstand van z tot 0 kleiner dan de afstand van z tot $-i$.

Dit levert het halfvlak $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > -\frac{1}{2}\}$.

7. Delen door $1 - i$ ($\frac{1}{1 - i} = \frac{1 + i}{2}$) en een kwadraat afsplitsen levert achtereenvolgens

$$z^2 - 2(1 + i)z - \tfrac{1}{2}(1 + i)^2 = 0 ,$$

$$(z - 1 - i)^2 - \tfrac{3}{2}(1 + i)^2 = 0 ,$$

$$(z - 1 - i + \tfrac{1}{2}\sqrt{6}(1 + i))(z - 1 - i - \tfrac{1}{2}\sqrt{6}(1 + i)) = 0 ;$$

$$z_1 = 1 + i - \tfrac{1}{2}\sqrt{6}(1 + i) = (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{6})(1 + i) ,$$

$$z_2 = 1 + i + \tfrac{1}{2}\sqrt{6}(1 + i) = (1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{6})(1 + i) .$$

H 1.80

8. Bepaal door scheiding van variabelen één oplossing van de homogene differentiaalvergelijking $y' \sin x - 2\, y \cos x = 0$:

$$\frac{dy}{y} - 2\,\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = 0 \,,$$

$$\ln y = 2 \ln \sin x = \ln \sin^2 x,\quad y = \sin^2 x \,.$$

De algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking $y' \sin x - 2\, y \cos x = e^x \sin^3 x$ is dan van de vorm $y = c(x) \sin^2 x$.

Substitutie levert

$$c'(x) \sin^3 x = e^x \sin^3 x \,,$$

$$c'(x) = e^x \,,\quad c(x) = e^x + C \,.$$

De gevraagde algemene reële oplossing is dus

$$y = e^x \sin^2 x + C \sin^2 x \text{ met } C \in \mathbb{R} \,.$$