

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

COMMISSIE B-74

Ontwerp Syllabus Wiskunde voor het 1e jaar

Juni 1973

J. de Graaf

J. de Graaf



Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Commissie B-74

Ontwerp Syllabus Wiskunde voor het 1e jaar

ENKELE NOTITIES

bij

WISKUNDE 10

De cursus Wiskunde 10 uit 1971 verschilt nauwelijks van de 1969 versie van Wiskunde I. De afdeling Bouwkunde wilde na 1970 niet meer meedoen met het algemene wiskundeonderwijs voor *alle* afdelingen. Als teken des ondersheids werd een dubbelcijferige codering voor de basis-wiskundevakken ingevoerd. Bouwkunde zou echter voorlopig de enige dissident blijven. De definitieve sloop van het algemeen wiskundeonderwijs op academisch niveau zou pas dik twintig jaar later, bij Werktuigbouwkunde, een aanvang nemen.

In 1973 werd een nieuwe opzet ontworpen voor het 1e-jaars wiskundeonderwijs zoals dat voor alle afdelingen zou moeten zijn: De commissie B74 bestaande uit dr. W. van der Meiden(voorzitter), drs. H.G. ter Morsche(secretaris), prof. dr. S.T.M. Ackermans, prof. dr. J. Boersma, dr. ir. M.L.J. Hautus, drs. Ligtmans, drs J.H. Timmermans en dr. P.G. Vroegindewey produceerde een manuscript met de gewenste 1e-jaarsstof. Voor de 1974-editie van Wis 10 werd al geput uit het B74-manuscript. In 1975 verscheen hiervan een flink uitgebreide versie om een betere aansluiting aan het VWO te verkrijgen. In 1978 verscheen de variant die stand zou houden tot in 1982 de 2-fasen structuur werd ingevoerd. Let, bijvoorbeeld, in de 1978-variant toch eens op dat schitterende en efficiënte hoofdstuk 6 over 2e-orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten. Vol illustratieve voorbeelden ten behoeve van de faculteiten. Dat was nog echt academische vorming!

JdG, 4 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Commissie B 74.

Ontwerp syllabus van de wiskundecolleges voor
eerstejaarsstudenten van alle afdelingen
(uitgezonderd afdeling B) in de cursus 1974-1975.

Gereedgekomen: juni 1973

Wijzigingen in het Ontwerp Syllabus Wiskunde voor het eerste jaar.

In haar vergadering van 30 augustus 1973 heeft de Commissie B - 74 besloten tot de volgende wijzigingen in het ontwerp syllabus wiskunde voor het 1e jaar.

1. Hoofdstuk 7, Functies $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (p. 283 - 306) komt te vervallen.
2. Er zal een nieuw hoofdstuk 7 worden toegevoegd bestaande uit de huidige § 5.7, 5.8 over lineaire differentiaalvergelijkingen en trillingen (p. 175 - 192); tevens zal § 5.7 worden herzien.
3. Stelling 2.2.2 en bewijs (p. 34, 35) komt te vervallen.
4. Het bewijs van stelling 2.5.8 (p. 50) komt te vervallen.
5. De § 2.10 over numerieke oplossing van vergelijkingen (p. 90 - 95) wordt naar voren geschoven en onmiddellijk na § 2.6 geplaatst.
6. Het bewijs van stelling 3.3.4 over het Cauchy-product (p. 105) komt te vervallen.
7. Het bewijs van stelling 3.4.3 over termgewijze differentiatie van reeksen (p. 107, 108) komt te vervallen.
8. Het bewijs van stelling 4.3.7 (p. 136, 137) komt te vervallen.
9. Drukfouten, rekenfouten etc. in de syllabus zullen worden verbeterd.

Namens de Commissie B - 74,

W. van der Meiden.

3 september 1973.

Inhoudsopgave

	blz.
Hoofdstuk 1. Inleiding	1
1.1. Symbolen en definities	1
1.2. Natuurlijke getallen, volledige inductie	3
1.3. Het tellen van verzamelingen en functies	6
1.4. De reële getallen	15
1.5. \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3	25
1.6. Coördinatenstelsels in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3	28
Hoofdstuk 2. Functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	33
2.1. Inleiding	33
2.2. Polynomen	34
2.3. Eigenschappen van functies	38
2.4. Limieten van functies	40
2.5. Continuïteit	46
2.6. Differentiaalrekening	51
2.7. Integraalrekening	62
2.8. Techniek van het integreren	75
2.9. Numerieke integratie	86
2.10. Numerieke oplossing van vergelijkingen	90
Hoofdstuk 3. Reeksen	96
3.1. Convergentie en divergentie	96
3.2. Reeksen met uitsluiten niet negatieve termen	99
3.3. Reeksen met zowel positieve als negatieve termen	102
3.4. Machtreeksen	105
3.5. Numerieke sommatie van reeksen	115
Hoofdstuk 4. Functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ en functies $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$	120
4.1. Functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$	120
4.2. Functies van twee variabelen	124
4.3. Differentieerbaarheid van functies van twee variabelen	128
4.4. Functies van drie variabelen	140
4.5. Impliciete functies	142
4.6. Richtingsafgeleide en gradient	146
4.7. Extrema	149
4.8. Extrema met nevenvoorwaarden	153

Inhoudsopgave (vervolg)

	blz.
Hoofdstuk 5. Complexe getallen	155
5.1. Inleiding	155
5.2. Invoering der complexe getallen	155
5.3. Algebraïsche vergelijkingen	162
5.4. Analyse in het complexe vlak	166
5.5. De functie e^z	170
5.6. Meetkunde in het complexe vlak	173
5.7. Lineaire differentiaalvergelijkingen	175
5.8. Trillingen	185
Hoofdstuk 6. Lineaire algebra	193
6.1. Voorwoord	193
6.2. Bewerkingen met matrices	193
6.3. Voorbeelden en toepassingen	205
6.4. Analytische meetkunde in \mathbb{R}^3 en meetkundige terminologie voor $n > 3$	215
6.5. Vectorruimten	222
6.6. Afhankelijkheid en onafhankelijkheid, bases	227
6.7. Lineaire afbeeldingen	242
6.8. Lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$	250
6.9. Lineaire vergelijkingen en ongelijkheden	263
Hoofdstuk 7. Functies $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	283
7.1. Notatie, continuïteit	283
7.2. Differentieerbaarheid, kettingregel	288
7.3. Inverse functies, impliciete functies	294
Hoofdstuk 8. Meervoudige integralen	307
8.1. Integratiegebieden en infinitesimale elementen	307
8.2. Lijnintegralen	314
8.3. Oppervlakte-integralen	317
8.4. Volume-integralen	327
8.5. Oneigenlijke meervoudige integralen	332
8.6. Gammafunctie, betafunctie	338
8.7. Integralen met een parameter	343

Hoofdstuk 1. Inleiding

1.1. Symbolen en definities

$A := B$ A is per definitie gelijk aan B
 \square einde van een bewijs.

Logische symbolen:

\Rightarrow implicatie ; als ... dan
 \Leftrightarrow coimplicatie; dan en slechts dan als
 \wedge en
 \vee of
 \neg niet
 \forall al-quantor ; voor alle ...
 \exists existentiële quantor; er is ...
 $\exists!$ er is precies één

Speciale verzamelingen:

\emptyset de lege verzameling
 \mathbb{N} de verzameling der natuurlijke getallen
 \mathbb{Z} " " " gehele "
 \mathbb{Q} " " " rationale "
 \mathbb{R} " " " reële "
 \mathbb{C} " " " complexe "
 \mathbb{R}^+ " " " reële getallen die ≥ 0 zijn
 \mathbb{P} " " " reële getallen die > 0 zijn.

Verzamelingstheoretische symbolen:

\in $a \in V$ a is element van V
 \notin $a \notin V$ a is geen element van V
 \subset $A \subset B$ A is deelverzameling van B ; $\forall_{x \in A} [x \in B]$
 \supset $A \supset B$ B is deelverzameling van A
 $\#$ $\# A$ het aantal elementen van A .

Het aangeven van verzamelingen (voorbeelden!):

$\{a,b,c,d,e\}$	de verzameling met als elementen a, b, c, d en e;
$\{x \mid x^2 \leq 10\}$	de verzameling van alle elementen die aan $x^2 \leq 10$ voldoen;
$\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 10\}$	de verzameling van de natuurlijke getallen die aan $x^2 \leq 10$ voldoen, dus $\{1,2,3\}$;
$\{(\cos \varphi, \sin \varphi) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi\}$	de verzameling van de punten in \mathbb{R}^2 die afstand 1 tot de oorsprong hebben.

Bewerkingen met verzamelingen:

\cap	doorsnede	$A \cap B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ $A \cap B := \emptyset$: A en B zijn disjunct
\cup	vereniging	$A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$
\setminus	verschil	$A \setminus B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
*	complement	$A^* := \{x \mid x \notin A\}$
\times	cartesisch product	$A \times B := \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$ $A \times B \times C := \{(x,y,z) \mid x \in A, y \in B, z \in C\}$ enz. $A^2 := A \times A, A^3 := A \times A \times A$ enz.

Afbeeldingen

Definities. Laat A en B verzamelingen zijn. Een afbeelding f van A in B - notatie $f: A \rightarrow B$ - is een voorschrift volgens hetwelk aan elk element van A precies één element van B wordt toegevoegd.

Is b ($\in B$) het element dat aan a ($\in A$) wordt toegevoegd, dan schrijven we $b = f(a)$ en ook wel $f: a \mapsto b$. We noemen b het beeld van a.

De afbeelding $f: A \rightarrow B$ is gelijk aan $g: C \rightarrow D$ indien:

(i) $A = C$; (ii) $B = D$; (iii) $f(a) = g(a)$ voor alle $a \in A$.

Slordig spreekt men vaak van de afbeelding f i.p.v. $f: A \rightarrow B$.

"Functie" is voor ons synoniem met "afbeelding".

Het beeld van een deelverzameling. Is $f: A \rightarrow B, A_0 \subset A$, dan is $f(A_0) := \{f(x) \mid x \in A_0\}$.

Injectief. De afbeelding $f: A \rightarrow B$ heet injectief (of één-éénduidig, ook wel een injectie) als voor alle $x, y \in A$ uit $f(x) = f(y)$ volgt $x = y$.

Surjectief. De afbeelding $f: A \rightarrow B$ heet surjectief (ook f heet een surjectie; f beeldt A op B af) indien $f(A) = B$.

Bijjectief. Een afbeelding die zowel injectief als surjectief is heet bijjectief (ook: een bijjectie).

Inverse afbeelding. Als $f: A \rightarrow B$ een bijjectie is dan heet de afbeelding $f^{-1}: B \rightarrow A$ gedefinieerd door:
 $f^{-1}(b) = a$ dan en slechts dan als $f(a) = b$, de inverse van f .

Samengestelde afbeelding. Laat $g: A \rightarrow B$ en $f: C \rightarrow D$ afbeeldingen zijn en laat $A_0 := \{x \in A \mid g(x) \in C\}$, dan heet de afbeelding $f \circ g: A_0 \rightarrow D$ gedefinieerd door $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ de samengestelde afbeelding van f en g .

1.2. Natuurlijke getallen, volledige inductie

De verzameling der natuurlijke getallen wordt gegeven door

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

N.B. In sommige leerboeken wordt ook het getal 0 tot de natuurlijke getallen gerekend.

We beschouwen de algebraïsche bewerkingen (optellen, aftrekken, enz.) en de ordening (ongelijkheden) voor natuurlijke getallen als bekend. We vermelden slechts de volgende eigenschap:

1.2.1. Beginsel der volledige inductie. Als voor een deelverzameling V van \mathbb{N} en voor zekere $n \in \mathbb{N}$ geldt

- 1) $n \in V$
- 2) $\forall_{k \in V} [k+1 \in V]$,

dan is $V \supset \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\}$.

2) kan men ook formuleren met: "Als $k \in V$ dan $(k+1) \in V$ "; de veronderstelling $k \in V$ heet inductieveronderstelling.

Deze eigenschap wordt vaak gebruikt op de volgende manier. Stel dat men van een bewering, die een veranderlijke bevat die de natuurlijke getallen doorloopt, kan bewijzen:

- 1) De bewering is waar voor $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Als de bewering waar is voor k , dan geldt zij ook voor $k+1$.

Dan kan men concluderen dat de bewering zeker waar is voor alle natuurlijke

getallen $\geq n$. Een bewijs dat op deze redenering berust noemt men een bewijs door volledige inductie.

Voorbeeld 1. Beschouw de som

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 =: \sum_{i=1}^n i^2 .$$

We bewijzen door volledige inductie, dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) . \quad (1)$$

1) Voor $n = 1$ is formule (1) juist.

2) Laat formule (1) juist zijn voor $n = k$. Dan volgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \\ &= \frac{1}{6} (k+1)(k+2)(2k+3) , \end{aligned}$$

d.w.z. de formule geldt ook voor $k+1$. We concluderen dat formule (1) voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt.

Voorbeeld 2. Zij $h \geq -1$. We bewijzen dat voor $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh .$$

1) Als $n = 1$ geldt het gelijkteken.

2) Als de ongelijkheid geldt voor $n = k$, d.w.z. als $(1+h)^k \geq 1 + kh$, dan volgt:

$$(1+h)^{k+1} = (1+h)(1+h)^k \geq (1+h)(1+kh) = 1 + (k+1)h + kh^2 \geq 1 + (k+1)h .$$

Opgave. De bekende rij getallen van Fibonacci, d_1, d_2, \dots wordt gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} d_1 &:= 1 \\ d_2 &:= 1 \\ d_{n+1} &:= d_n + d_{n-1} \quad (n \geq 2) . \end{aligned}$$

De rij van Fibonacci begint dus als volgt: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,

De getallen van Fibonacci hebben vele fraaie eigenschappen die wiskundigen en puzzelaars eeuwenlang gefascineerd hebben. Bewijs bijv. door volledige inductie dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{k=1}^n d_k = d_{n+2} - 1; d_{3n} \text{ is even}; 2d_{n+1} = d_{n+3} - d_n.$$

Er bestaan verschillende varianten van het beginsel der volledige inductie.

1.2.2. Stelling. Als voor $V \subset \mathbb{N}$ geldt

- 1) $1 \in V$,
- 2) uit $1 \in V, 2 \in V, \dots, k \in V$ volgt $k+1 \in V$,

dan is $V = \mathbb{N}$.

Bewijs. Zij $W := \{k \in \mathbb{N} \mid \{1, 2, \dots, k\} \subset V\}$. Het is duidelijk dat $W \subset V$. We bewijzen dat W voldoet aan 1.2.1, voorwaarden 1) en 2) met $n = 1$.

- 1) $1 \in W$ omdat $1 \in V$.
- 2) Als $k \in W$, dan geldt $1 \in V, \dots, k \in V$. Uit het gegeven van de stelling volgt $k+1 \in V$. Dus: $1 \in V, \dots, k \in V, k+1 \in V$. We zien dat $k+1 \in W$.

We mogen dan het beginsel der volledige inductie toepassen en concluderen dat $W = \mathbb{N}$. Uit $W \subset V \subset \mathbb{N}$ volgt dan $V = \mathbb{N}$. □

1.2.3. Stelling. Een niet lege deelverzameling V van \mathbb{N} heeft een kleinste element.

Bewijs. Neem aan dat V géén kleinste element heeft. Zij $W := \mathbb{N} \setminus V$. Dan geldt: $1 \in W$ (anders was 1 het kleinste element van V). Verder, als $1 \in W, 2 \in W, \dots, k \in W$ dan is ook $k+1 \in W$ omdat anders $k+1$ het kleinste element van V zou zijn. Uit 1.2.2 volgt $W = \mathbb{N}$, dus $V = \emptyset$ in strijd met het gegeven. □

Merk op dat deze eigenschap niet geldt voor \mathbb{Z}, \mathbb{R} of \mathbb{P} , omdat deze verzamelingen zelf geen kleinste element hebben. Een ander tegenvoorbeeld is de verzameling $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ in \mathbb{Q} .

Stelling 1.2.3 wordt soms gebruikt om te bewijzen dat een verzameling leeg is. Men neemt nl. aan dat de verzameling niet leeg is en derhalve een kleinste element heeft. Uit beschouwingen m.b.t. het kleinste element komt men tot een tegenspraak.

Voorbeeld 3 (ontbinding in factoren). Een natuurlijk getal $p > 1$ heet een priemgetal als er geen getallen $a, b \in \mathbb{N}$ met $a < p$, $b < p$ bestaan waarvoor geldt: $ab = p$. De getallen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 zijn bijv. priemgetallen.

Stelling. Elk natuurlijk getal $n \geq 2$ is te schrijven als een product van priemgetallen (dit product kan bestaan uit één factor, als n zelf een priemgetal is; ook kan een priemgetal meerdere malen in het product voorkomen, bijv. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$).

Bewijs. Neem aan dat de verzameling V der natuurlijke getallen $n \geq 2$, die niet in zo'n gedaante te schrijven zijn, niet leeg is. Zij m het kleinste element van V . Dan is m geen priemgetal. Er bestaan dus getallen $a, b < m$ met $ab = m$. Omdat m het kleinste element van V is, geldt $a \notin V$, $b \notin V$. Er bestaan dus priemgetallen p_1, \dots, p_k met $a = p_1 \cdots p_k$, en q_1, \dots, q_ℓ met $b = q_1 \cdots q_\ell$. Maar dan is $m = p_1 \cdots p_k q_1 \cdots q_\ell$ ook een product van priemgetallen in strijd met het feit dat $m \in V$. We concluderen dat $V = \emptyset$, zodat de eigenschap bewezen is. \square

Het uitschrijven van een natuurlijk getal als product van priemgetallen noemt men ontbinding in factoren. Men kan bewijzen dat de ontbinding in factoren eenduidig is, afgezien van de volgorde waarin de priemfactoren worden geschreven.

1.3. Het tellen van verzamelingen en functies.

In deze paragraaf beschouwen we alleen eindige verzamelingen.

1.3.1. Eigenschappen.

Als er een bijectie $f: A \rightarrow B$ bestaat dan is $\#A = \#B$.

Als $\#A = \#B$ en $f: A \rightarrow B$ is een injectie, dan is f een bijectie.

Als $\#A = \#B$ en $f: A \rightarrow B$ is een surjectie, dan is f een bijectie.

Grondregel van het tellen. Indien er n mogelijke wijzen zijn om een handeling α te verrichten en als er na elke uitvoering van een handeling α , m mogelijke manieren zijn voor het verrichten van handeling β , dan zijn er nm mogelijke manieren om achtereenvolgens α en β te verrichten.

Een analoge regel geldt voor het aantal manieren om meer handelingen te verrichten.

1.3.2. Stelling. Als $\#A = n$, $\#B = m$, dan is het aantal afbeeldingen van A in B gelijk aan m^n .

Bewijs. Zij $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. We kunnen een afbeelding van A in B vormen door achtereenvolgens aan a_1, a_2, \dots, a_n een element van B toe te voegen. Aan a_1 kan men op m verschillende manieren een element van B toevoegen. Daarna kan men aan a_2 eveneens op m verschillende manieren een element toevoegen enz. Volgens de grondregel van het tellen kan men derhalve $m \cdot m \cdots m = m^n$ afbeeldingen vormen van A in B. \square

Voorbeeld 1. Het invullen van een kolom van de voetbaltoto is equivalent met het geven van een afbeelding $t: V \rightarrow A$, waar V een verzameling is bestaande uit 13 te spelen wedstrijden en $A = \{1, 2, 3\}$. Er zijn dus 3^{13} manieren om de toto in te vullen.

Voorbeeld 2. Het werpen met meerdere dobbelstenen kan ook beschouwd worden als het geven van een afbeelding. Als we bijv. 4 dobbelstenen hebben, genummerd 1, 2, 3, 4, dan is een worp een afbeelding $w: D \rightarrow A$, waar $D = \{1, 2, 3, 4\}$ en $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Er zijn dus 6^4 worpen mogelijk.

Voorbeeld 3. Uit een kaartspel trekt men achtereenvolgens tien kaarten met teruglegging, d.w.z. elke kaart die getrokken is wordt teruggestoken voordat de volgende kaart wordt getrokken. Er is hier sprake van een afbeelding $t: A \rightarrow K$ waar $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ en K de verzameling der kaarten is. Als er 52 kaarten zijn, dan is het aantal mogelijke trekkingen 52^{10} .

1.3.3. Stelling. Het aantal deelverzamelingen van een verzameling A met $\#A = n$ is gelijk aan 2^n .

Bewijs. Elke deelverzameling B van A correspondeert met een afbeelding $\chi_B: A \rightarrow \{0, 1\}$ gedefinieerd door $\chi_B(a) := 1$ als $a \in B$ en $\chi_B(a) := 0$ als $a \notin B$. χ_B wordt de karakteristieke functie van B genoemd. Omgekeerd is elke afbeelding $\varphi: A \rightarrow \{0, 1\}$ de karakteristieke functie van een deelverzameling van A, nl. van $\{a \in A \mid \varphi(a) = 1\}$. Het aantal deelverzamelingen van A is dus gelijk aan het aantal afbeeldingen van A in $\{0, 1\}$. Uit 1.3.2 volgt nu het gestelde. \square

Voorbeeld 4. De verzameling $\{1,2,3,4\}$ heeft als deelverzamelingen:

\emptyset	1
$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$	4
$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$	6
$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$	4
$\{1,2,3,4\}$	1

Het totale aantal is $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$.

Definitie. De functie $n \mapsto n!$ (spreek uit n faculteit) wordt gedefinieerd door: $0! := 1$; $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ ($n \in \mathbb{N}$).

1.3.4. Stelling. Zij $\# A = n$, $\# B = m$. Het aantal injecties $f: A \rightarrow B$ is gelijk aan

$$\begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} & \text{als } m \geq n \\ 0 & \text{als } m < n. \end{cases}$$

Bewijs. Het is duidelijk dat er geen injectief $f: A \rightarrow B$ bestaat als $m < n$. Beschouw vervolgens het geval $m \geq n$ dan is

$$\frac{m!}{(m-n)!} = m(m-1) \cdots (m-n+1).$$

Zij $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Aan elk element van A moeten we een element van B toevoegen, zodanig dat bij twee verschillende elementen van A niet hetzelfde element van B hoort. Aan a_1 kunnen we op m verschillende manieren een element toevoegen. Als we één zo'n toevoeging hebben gekozen, hebben we nog $m-1$ mogelijkheden om aan a_2 een element toe te voegen. Zo kunnen we doorgaan, totdat tenslotte nog $m-n+1$ mogelijkheden overblijven om aan het element a_n een element toe te voegen. In totaal vinden we dus $m(m-1) \cdots (m-n+1)$ mogelijke injecties. \square

Gevolg. Zij $\# A = n$. Dan is het aantal bijecties $f: A \rightarrow A$ gelijk aan $n!$.

Bewijs. Uit 1.3.1 volgt dat injecties van A in A ook bijecties zijn. Het aantal injecties van A in A is: $\frac{n!}{(n-n)!} = n!$. \square

Een bijectie van een eindige verzameling A in zichzelf heet een permutatie van A . Als $A = \{1, \dots, n\}$, kunnen we zo'n permutatie φ als volgt aangeven:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix} ;$$

bijv. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ beschrijft de permutatie φ waarvoor $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 4$, $\varphi(4) = 3$. Soms laat men de bovenste rij weg omdat ze toch vast is. Men schrijft dan $(2 \ 1 \ 4 \ 3)$. Het geven van een permutatie van een verzameling $A = \{1, \dots, n\}$ is dus equivalent met het opschrijven van de elementen $1, 2, \dots, n$ in een bepaalde volgorde. Men kan derhalve bovenstaand gevolg ook als volgt formuleren: "Het aantal mogelijke volgorden waarin de getallen $1, 2, \dots, n$ kunnen staan is gelijk aan $n!$ ".

Voorbeeld 5. In een kaartspel met 52 kaarten kunnen de kaarten op $52!$ verschillende volgorden liggen.

Voorbeeld 6. Het aantal getallen van 5 cijfers bestaande uit de cijfers $1, 2, 3, 4, 5$ zonder herhaling is gelijk aan $5! = 120$.

Opgave 1. Op hoeveel manieren kunnen 4 brieven in vier enveloppen worden gestoken?

Opgave 2. Elke dag ontbijten er 8 mensen op een bank. Ze besluiten elke dag in een andere volgorde te gaan zitten. Wanneer zijn alle mogelijkheden uitgeput als ze beginnen op 1 september 1974?

We beschouwen nu weer de algemenere situatie van stelling 1.3.4. Een injectie van de verzameling $A := \{1, \dots, n\}$ in B zullen we een variatie van n uit de objecten van B noemen. Een variatie φ kan op de volgende manier aangegeven worden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

analoog als bij een permutatie. Als bijv. $n = 5$, $B = \{1, 2, \dots, 10\}$, dan is

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

een variatie. Ook hier kan zonder bezwaar de eerste rij weggelaten worden. Voor bovenstaande variatie schrijven we dus (3 7 9 2 1). Het geven van een variatie van n uit de objecten b_1, \dots, b_m is dus equivalent met het vormen van een geordende rij van n verschillende objecten uit de gegeven verzameling $B = \{b_1, \dots, b_m\}$.

Voorbeeld 7. Uit een kaartspel trekt men achtereenvolgens 10 kaarten zonder teruglegging, d.w.z. een kaart die getrokken wordt, wordt niet meer teruggestoken. We krijgen zo een variatie van 10 uit de 52 kaarten. Het aantal mogelijke manieren om dit te doen is: $\frac{52!}{42!} = 52 \cdot 51 \cdots 43$. Let wel, dat de volgorde van trekken hier van belang is. Als dezelfde verzameling van 10 kaarten in een andere volgorde wordt getrokken, dan noemen we dat een andere variatie.

Voorbeeld 8. Een getal van vijf cijfers gekozen uit de cijfers 1, 2, ..., 9 zonder herhaling is een variatie van 5 uit de getallen 1, 2, ..., 9. Het aantal getallen van deze gedaante is dus: $\frac{9!}{4!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$.

Opgave 3. Op hoeveel verschillende manieren is het mogelijk in een gezelschap bestaande uit 6 jongens en 9 meisjes, dat alle jongens een meisje trouwen?

1.3.5. Stelling. Het aantal deelverzamelingen van k elementen uit een verzameling met n elementen is

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot$$

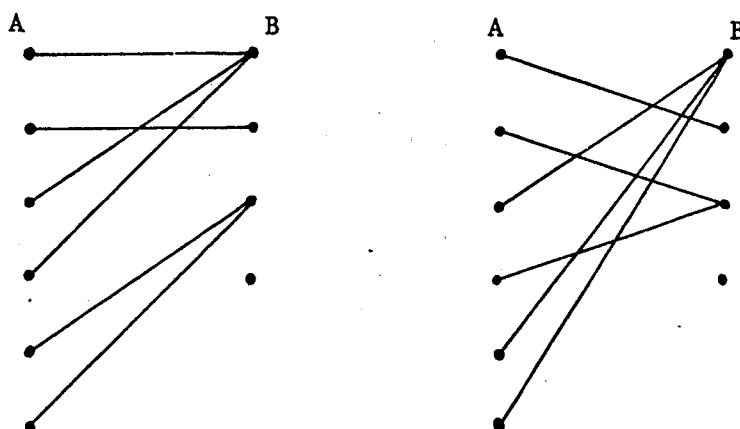
Bewijs. Het aantal injecties van $\{1, 2, \dots, k\}$ in $\{a_1, \dots, a_n\}$ is $\frac{n!}{(n-k)!}$. (De elementen a_i zijn alle verschillend.) Het aangeven van een injectie kan opgevat worden als het verrichten van twee handelingen: eerst het bepalen van een deelverzameling van $\{a_1, \dots, a_n\}$ met k elementen; daarna het aangeven van een injectie van $\{1, \dots, k\}$ in deze deelverzameling.

Voor de eerste handeling is het aantal mogelijkheden x ; voor de tweede is het $k!$. Volgens de grondregel van het tellen is: $xk! = \frac{n!}{(n-k)!}$.

$$\text{Dus } x = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot$$

□

Zij $A = \{a_1, \dots, a_n\}$; $B = \{b_1, \dots, b_m\}$. Laat k_1, \dots, k_m een rij niet negatieve gehele getallen zijn ($k_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$) met de eigenschap $k_1 + \dots + k_m = n$. We zijn geïnteresseerd in het aantal afbeeldingen van A in B met de eigenschap dat er precies k_i elementen in A zijn die op b_i worden afgebeeld. Als bijv. $A = \{1, \dots, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $k_1 = 3$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$, $k_4 = 0$, dan geeft de navolgende figuur twee toegestane afbeeldingen.



Voordat we het aantal van zulke afbeeldingen bepalen geven we een paar voorbeelden.

Voorbeeld 9. In een rij met 10 huizen moeten 4 deuren wit, 3 deuren groen en 3 deuren rood geverfd worden. Op hoeveel manieren kan dit? Het betreft hier afbeeldingen van de verzameling bestaande uit 10 huizen, die we gemakshalve met $\{1, 2, \dots, 10\}$ aanduiden, in de verzameling $\{\text{wit, groen, rood}\}$. Hierbij is $k_1 = 4$, $k_2 = 3$, $k_3 = 3$.

Voorbeeld 10. Hoeveel woorden kan men vormen uit de letters van het woord "koekoek". Hierbij is het niet van belang of het woord al of niet betekenis heeft, bijv. kkkooee is een toegestaan woord. Hier kunnen we een woord interpreteren als een afbeelding van de verzameling $\{1, \dots, 7\}$ (de plaats van de letter in het woord) in de verzameling $\{e, k, o\}$. Hierbij is $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$.

Om een heuristische afleiding voor het aantal toegestane afbeeldingen te krijgen beschouwen we voorbeeld 10. We zullen daarin een letter die meermalen voorkomt van een index voorzien: $k_1 o_1 e_1 k_2 o_2 e_2 k_3$. Nu zijn alle symbolen verschillend. Er zijn $7!$ volgordes waarin deze symbolen kunnen staan. Als we de

indices weglaten vallen sommige van die mogelijkheden samen, bijv. $k_1 k_2 o_1 e_1 k_3 o_2 e_2$ en $k_3 k_1 o_1 e_1 k_2 o_2 e_2$. Vervanging van k_1, k_2, k_3 door een willekeurige permutatie ($3!$ stuks) laat het woord dus onveranderd. Op grond daarvan moeten we het oorspronkelijke aantal mogelijke volgordes door $3!$ delen. Op dezelfde manier moeten we het aantal door $2!$ delen vanwege de permutaties van o_1, o_2 en analoog door $2!$ vanwege e_1 en e_2 . Het aantal woorden dat gevormd kan worden is dus: $\frac{7!}{2!2!3!} = 210$.

In het algemeen geldt:

- 1.3.6. Stelling. Als $\# A = n$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, $\# B = m$ en k_1, \dots, k_m niet negatieve gehele getallen zijn met de eigenschap $k_1 + \dots + k_m = n$, dan is het aantal afbeeldingen $A \rightarrow B$ met de eigenschap dat er voor $i = 1, \dots, m$ precies k_i elementen op b_i worden afgebeeld, gelijk aan

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Bewijs. Een afbeelding met de gewenste eigenschap is te verkrijgen als het resultaat van m achtereenvolgens uit te voeren handelingen: eerst het aangeven van de k_1 originelen van b_1 ; daarna het aangeven van de k_2 originelen van b_2 onder de $n - k_1$ overgebleven elementen van A ; vervolgens het aangeven van de k_3 originelen van b_3 onder de $n - k_1 - k_2$ overgebleven elementen van A enz. Stelling 1.3.5 geeft het aantal mogelijkheden voor elk van deze handelingen. De grondregel van het tellen geeft voor het totaal aantal toegelaten afbeeldingen:

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{(n-k_1)! k_1!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{(n-k_1-k_2)! k_2!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-k_1-\dots-k_{m-1})!}{0! k_m!} = \\ & = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}. \quad \square \end{aligned}$$

In voorbeeld 9 zien we dat er $\frac{10!}{4!3!3!} = 4200$ mogelijkheden zijn om de deuren te verven.

Voorbeeld 11. Een spel van 52 speelkaarten wordt gedeeld. Vier personen krijgen ieder 13 kaarten. Op hoeveel manieren kan dit gebeuren? Hier is een afbeelding gegeven die de verzameling der kaarten afbeeldt op de spelers:

$\{1, \dots, 52\} \rightarrow \{N, O, Z, W\}$ met $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 13$. Het aantal mogelijkheden is dus $\frac{52!}{(13!)^4}$.

Voorbeeld 12. 10 knikkers, genummerd $1, 2, \dots, 10$, worden in 7 verschillende dozen gelegd, zodanig dat resp. $3, 3, 2, 1, 1, 0, 0$ knikkers worden geplaatst in de $1, 2, \dots, 7^e$ doos. Het aantal mogelijkheden om dit te doen is $\frac{10!}{3!3!2!1!1!0!0!}$.

Definitie. Als k, n gehele getallen zijn met $0 \leq k \leq n$, dan is

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

bijv. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$; $\binom{n}{k}$ wordt uitgesproken als "n over k".

Op grond van 1.3.6 is het aantal afbeeldingen van een verzameling $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ in een verzameling $B = \{b_1, b_2\}$ met de eigenschap dat b_1 het beeld van precies k elementen a_i is, gelijk aan $\binom{n}{k}$.

Eigenschappen. i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

$$\text{ii) } \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad (\text{Pascal}).$$

Bewijs. i) volgt onmiddellijk uit de definitie.

$$\begin{aligned} \text{ii) } \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k+1)!} [(n-k+1) + k] = \frac{(n+1)n!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}. \quad \square \end{aligned}$$

Op eigenschap ii) is de zg. driehoek van Pascal gebaseerd:

			1						$\binom{0}{0}$											
				1		1							$\binom{1}{0}$						$\binom{1}{1}$	
					1		2		1				$\binom{2}{0}$						$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$
						1		3		3		1								
							1		4		6		4		1					
								1		5		10		10		5		1		
											1		6		15		20		15	
																6		1		

enz.

Door vergelijken van 1.3.3 en 1.3.5 volgt

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n .$$

Beide leden geven het totale aantal deelverzamelingen van een verzameling A met $\# A = n$. Bovengenoemde gelijkheid is een speciaal geval van het binomium van Newton:

1.3.7. Stelling. Als $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, dan geldt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

Vanwege deze gelijkheid worden de getallen $\binom{n}{k}$ binomiaalcoëfficiënten genoemd. Intuïtief kunnen we deze stelling als volgt inzien: Werk het n -voudige product

$$(a+b) \cdots (a+b)$$

uit op de bekende wijze. Maak daartoe in elke factor een keuze: a of b , en vermenigvuldig de gekozen waarden. We krijgen op die manier een term van de gedaante $a^k b^{n-k}$. Deze term komt tot stand door k keer a en $n-k$ keer b te kiezen. Bij vaste k correspondeert deze keuze met een afbeelding van $\{1, \dots, n\}$ in $\{a, b\}$ waarbij precies k elementen worden afgebeeld op a . Op grond van 1.3.6 zijn er $\binom{n}{k}$ van deze afbeeldingen, d.w.z. er zijn $\binom{n}{k}$ termen $a^k b^{n-k}$ die tezamen de bijdrage $\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ leveren. Na sommatie over k volgt het gestelde.

Formeel kunnen we de stelling als volgt bewijzen:

Bewijs. We gebruiken volledige inductie. Als $n = 1$ is het gestelde evident. Laat de stelling juist zijn voor $n-1$, d.w.z.

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k} ,$$

oftewel

$$(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0} b^{n-1} + \binom{n-1}{1} a b^{n-2} + \dots + \binom{n-1}{n-2} a^{n-2} b + \binom{n-1}{n-1} a^{n-1} .$$

Vermenigvuldig met a, b ,

$$a(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0} a b^{n-1} + \dots + \binom{n-1}{n-2} a^{n-1} b + \binom{n-1}{n-1} a^n$$

$$b(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0} b^n + \binom{n-1}{1} a b^{n-1} + \dots + \binom{n-1}{n-1} a^{n-1} b$$

en tel op, dan is

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \binom{n}{n} a^n .$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de formule van Pascal $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$,
terwijl verder $\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n} = 1$. □

Er geldt de volgende generalisatie van het binomium van Newton:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

waar gesommeerd wordt over alle rijen k_1, k_2, \dots, k_m van niet negatieve gehele getallen met $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. We laten het bewijs achterwege.

De getallen $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$ heten multinomiaalcoëfficiënten.

1.4. De reële getallen

We gaan er van uit dat de verzamelingen van de gehele, rationale en reële getallen - notatie $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ - ons van de middelbare school bekend zijn. We richten onze aandacht nu op de reële getallen. De algebraïsche bewerkingen (optelling, vermenigvuldiging, deling) en de ordening (ongelijkheden, absolute waarde of modulus) van de reële getallen beschouwen we als bekend. We weten dat de reële getallen corresponderen met de punten op een rechte: de getallenrechte. Van twee getallen a en b is $|a-b|$ de afstand van hun beeldpunten op de getallenrechte.

Drie belangrijke stellingen over ongelijkheden zijn:

- 1) $|a+b| \leq |a| + |b|$
- 2) $||a| - |b|| \leq |a-b|$
- 3) $|a| \leq |b|$ dan en slechts dan als $a^2 \leq b^2$.

Bekende deelverzamelingen van \mathbb{R} zijn de zg. intervallen. We geven een lijst van typen en hun notaties:

$$\{x \mid a < x < b\} =: (a,b)$$

$$\{x \mid a \leq x < b\} =: [a,b)$$

$$\{x \mid a < x \leq b\} =: (a,b]$$

$$\{x \mid a \leq x \leq b\} =: [a,b]$$

$$\{x \mid a < x\} =: (a,\infty)$$

$$\{x \mid a \leq x\} =: [a,\infty)$$

$$\{x \mid x < b\} =: (-\infty,b)$$

$$\{x \mid x \leq b\} =: (-\infty,b] .$$

De eerste vier van deze intervallen heten begrensd, de andere onbegrensd. (a,b) , (a,∞) , $(-\infty,b)$ heten open intervallen; $[a,b]$, $[a,\infty)$ en $(-\infty,b]$ heten gesloten intervallen (zie ook onder).

Bij de notatie (a,b) enz. wordt stilzwijgend verondersteld dat a en b zo zijn dat het betreffende interval niet leeg is.

Open verzamelingen in \mathbb{R}

1.4.1. Definitie. Een verzameling V heet open als V een vereniging is van eindig of oneindig veel open intervallen.

We kunnen ook zeggen: V is open als er bij elke $a \in V$ een open interval (c,d) is met $a \in (c,d) \subset V$.

Nog een gelijkwaardige formulering: V is open als er bij elke $a \in V$ een getal $\delta > 0$ bestaat zodat

$$(a - \delta, a + \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\} \subset V .$$

Het is deze laatste formulering die we in 1.5 zullen generaliseren. Merk op dat open intervallen, \emptyset (\emptyset is de vereniging van geen enkel open interval), \mathbb{R} , open zijn. Een interval $[a,b]$ is niet open. Het is evident dat elke vereniging van open verzamelingen open is. We zullen bewijzen:

1.4.2. Stelling. De doorsnede van twee open verzamelingen is open.

Bewijs. Laat V en W open zijn en neem aan dat $V \cap W \neq \emptyset$ (als $V \cap W = \emptyset$ is $V \cap W$ open). Zij $a \in V \cap W$, dan is er een $\delta_1 > 0$ zodat $(a - \delta_1, a + \delta_1) \subset V$ en er is een $\delta_2 > 0$ zodat $(a - \delta_2, a + \delta_2) \subset W$. Als nu $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$, dan is $(a - \delta, a + \delta) \subset V \cap W$. Deze redenering geldt voor elke $a \in V \cap W$. $V \cap W$ is derhalve open. □

Definitie. Is V open en $a \in V$, dan heet V een omgeving van a .

Als $p \neq q$ dan zijn er open verzamelingen U en V met $p \in U$, $q \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

Met het oog op een generalisering in 1.5 merken we op dat voor een willekeurig open interval (a,b) geldt:

$$\begin{aligned}(a,b) &= (\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b-a), \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)) = \\ &= (m-\delta, m+\delta) = \{x \mid |x-m| < \delta\}\end{aligned}$$

waarin $m = \frac{1}{2}(a+b)$, $\delta = \frac{1}{2}(b-a)$.

Het open interval (a,b) is dus de verzameling van alle x die tot m een afstand kleiner dan δ hebben.

Definitie. Een punt p uit een verzameling A heet een inwendig punt van A als er een omgeving V van p bestaat met $V \subset A$.

Gevolg. Is W open en $p \in W$ dan is p inwendig punt van W . De inwendige punten van zowel $[a,b]$ als $(a,b]$ als $[a,b)$ zijn alle punten uit (a,b) .

Definitie. Een punt p uit een verzameling A heet een geïsoleerd punt van A als er een omgeving V van p bestaat met $V \cap A = \{p\}$.

Intervallen hebben geen geïsoleerde punten. Van \mathbb{N} en \mathbb{Z} is elk punt geïsoleerd. Ook van $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ is elk punt geïsoleerd (ga na!).

Definitie. Zij A een verzameling en p een punt, dan heet p een randpunt van A als voor elke omgeving V van p geldt $V \cap A \neq \emptyset$ en $V \cap A^* \neq \emptyset$.

Van een interval $[a,b]$ of $(a,b]$ of (a,b) zijn de randpunten a en b . Een geïsoleerd punt is ook randpunt. Van $B := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ is de verzameling der randpunten $B \cup \{0\}$.

Definitie. Zij A een verzameling en p een punt, dan heet p een verdichtingspunt van A als voor elke omgeving V van p geldt $A \cap (V \setminus \{p\}) \neq \emptyset$.

Elk inwendig punt van een verzameling is ook verdichtingspunt. Alle punten van $[a,b]$ zijn verdichtingspunten van zowel $[a,b]$ als $(a,b]$ als (a,b) . Als een randpunt van A niet tot A behoort is het een verdichtingspunt van A . Van $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ is 0 het enige verdichtingspunt.

1.4.3. Definitie. Een verzameling W heet gesloten indien $\mathbb{R} \setminus W$ open is.

Gesloten intervallen, \mathbb{R} en \emptyset , zijn voorbeelden van gesloten verzamelingen. Merk op dat er verzamelingen zijn die noch open noch gesloten zijn, zoals het interval $[a,b)$. \mathbb{R} en \emptyset zijn zowel open als gesloten.

1.4.4. Stelling. Is W gesloten en p een verdichtingspunt van W dan is $p \in W$.

Bewijs. Neem aan $p \notin W$ dan is $p \in \mathbb{R} \setminus W = W^*$. W^* is open, p is inwendig punt van W^* zodat er een omgeving V van p bestaat met $V \subset W^*$. Voor deze omgeving V geldt dan $W \cap (V \setminus \{p\}) = \emptyset$, in tegenspraak met de definitie van verdichtingspunt. Dus is $p \in W$. □

Definitie. Een verzameling U heet begrensd indien er een getal $M > 0$ bestaat zó dat $U \subset [-M, M]$.

Begrensd intervallen zijn begrensd verzamelingen.

Rijen reële getallen

1.4.5. Een oneindige rij reële getallen is een afbeelding $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Als $1 \mapsto a_1, 2 \mapsto a_2, \dots$ noteren we de rij op een van de volgende wijzen:

$$a_1, a_2, \dots; \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}}; \quad (a_n).$$

De getallen a_i heten de elementen van de rij.

Voorbeelden. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$; $a_n = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$1, 1, 1, \dots; \quad a_n = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ is de rij } 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \text{ even}} \text{ is de rij } \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$$

N.B. In het laatste voorbeeld wordt een uitbreiding van de notatie geïntroduceerd.

Een oneindige rij reële getallen a_1, a_2, \dots heet begrensd indien er een getal M bestaat zodat $|a_n| \leq M$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

De rij a_1, a_2, \dots met $a_n = (-1)^n$ is begrensd; de rij met $a_n = n$ is niet begrensd.

Als voor de rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ geldt: $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad [a_n < M]$, dan heet de rij naar boven begrensd. Analoog is te definiëren het begrip naar beneden begrensd rij.

Een rij a_1, a_2, \dots is begrensd dan en slechts dan als de verzameling $\{a_1, a_2, \dots\}$ begrensd is.

N.B. Omdat de elementen van een rij niet noodzakelijk verschillend zijn, kan $\{a_1, a_2, \dots\}$ best een eindige verzameling zijn.

Als $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, dan heet de rij (a_n) monotoon stijgend; als $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$, dan heet de rij monotoon niet dalend. Analoog zijn te definiëren de begrippen monotoon dalend en monotoon niet stijgend.

We zeggen dat de elementen van de rij (a_n) op den duur (afgekort o.d.d.) in de verzameling V liggen indien

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad [a_n \in V].$$

Gelijkwaardig geformuleerd: a_n ligt o.d.d. in V indien voor slechts eindig veel waarden van n geldt $a_n \notin V$.

Analoog: a_n heeft o.d.d. de eigenschap E .

Voorbeelden. $2^n > 1000$ o.d.d.

Voor elke $\delta > 0$ geldt $\frac{1}{n} \in (-\delta, \delta)$ o.d.d.

Het is niet waar, dat $(-1)^n > 0$ o.d.d.

Lemma. Als voor (a_n) geldt $a_n \in V$ o.d.d. en ook $a_n \in W$ o.d.d., dan geldt $a_n \in V \cap W$ o.d.d.

Bewijs. Krachtens het gegeven bestaan er getallen $N_1 \in \mathbb{N}$ en $N_2 \in \mathbb{N}$ zodat voor $n > N_1$ geldt $a_n \in V$, en voor $n > N_2$ $a_n \in W$; voor $n > N := \max(N_1, N_2)$ geldt derhalve zowel $a_n \in V$ als $a_n \in W$, dus $a_n \in V \cap W$. \square

Limieten van rijen reële getallen

Dit begrip is reeds bekend; we geven eerst een van de vele vormen van de definitie.

1.4.6. Definitie. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ betekent dat voor elke omgeving V van a geldt $a_n \in V$ o.d.d.

In plaats van $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ zeggen we ook: $a_n \rightarrow a$ als $n \rightarrow \infty$; a_n nadert tot a .

1.4.7. Stelling. De volgende beweringen zijn gelijkwaardig:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

2) Voor elke $\epsilon > 0$ geldt $a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ o.d.d.

3) Voor elke $\epsilon > 0$ is er een $N \in \mathbb{R}$ zodanig dat voor $n > N$ geldt $|a_n - a| < \epsilon$.

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0.$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0.$$

Het bewijs is triviaal.

Voorbeelden. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Om het laatste resultaat te bewijzen moeten we bij elke $\epsilon > 0$ een $N \in \mathbb{R}$ aangeven zodat voor $n > N$ geldt $\left| \frac{1}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Het is duidelijk dat $N = \lceil \log_2 \frac{1}{\epsilon} \rceil$ voldoet.

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ bestaat niet; $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2$ bestaat ook niet.

In de situatie van het laatste voorbeeld zeggen we wel $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$.

Definitie. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ betekent dat voor elke $M \in \mathbb{R}$ geldt $a_n > M$ o.d.d.;

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ betekent dat voor elke $M \in \mathbb{R}$ geldt $a_n < M$ o.d.d.

Formeel zou dit onder 1.4.6 gebracht kunnen worden door een omgeving van ∞ resp. $-\infty$ te noemen elke open verzameling die een interval van de vorm (M, ∞) resp. $(-\infty, M)$ als deelverzameling bevat.

Voorbeelden. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$; $\lim_{n \rightarrow \infty} -\sqrt{n} = -\infty$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n} \text{ bestaat niet.}$$

Als de rij (a_n) een limiet $a \in \mathbb{R}$ heeft, dan heet de rij convergent; als de rij geen limiet in \mathbb{R} heeft, dan heet de rij divergent; in het bijzonder zegt men als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (resp. $-\infty$) dat a_n naar ∞ (resp. $-\infty$) divergeert.

N.B. Als we zeggen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ bestaat, bedoelen we altijd $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ met $L \neq \pm\infty$.

1.4.8. Stelling (standaardlimieten).

1) Als $p > 0$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$;

2) als $|q| < 1$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$;

3) als $a > 0$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Bewijs. 1) Zij $\epsilon > 0$; opdat $\left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| = \frac{1}{n^p} < \epsilon$ is het voldoende dat $n > \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/p} =: N$.

Met deze waarde van N is dus aan formulering 3) van 1.4.7 voldaan.

2) Als $q = 0$ is het triviaal; neem verder aan dat $q \neq 0$ is.

Zij $\epsilon > 0$; opdat $|q^n - 0| < \epsilon$ ofwel $|q|^n < \epsilon$ is het voldoende dat $\log|q|^n < \log \epsilon$. Met $N := \frac{\log \epsilon}{\log|q|}$ is aan formulering 3) voldaan.

3) Zij $\epsilon > 0$; volgens 1.2, voorbeeld 2 is $(1+\epsilon)^n \geq 1+n\epsilon$, zodat $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+\epsilon)^n = \infty$. Daaruit volgt

$$\frac{1}{(1+\epsilon)^n} < a < (1+\epsilon)^n \text{ o.d.d.}$$

$$\frac{1}{1+\epsilon} < \sqrt[n]{a} < 1+\epsilon \text{ o.d.d.}$$

$$-\frac{\epsilon}{1+\epsilon} < \sqrt[n]{a} - 1 < \epsilon \text{ o.d.d.}$$

en

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon \text{ o.d.d.}$$

□

1.4.9. Stelling (bewerkingen met limieten). Als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, dan is

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$ mits $a \neq 0$;

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|a_n|} = \sqrt{|a|}$.

Bovendien geldt:

5) Als $a_n \leq b_n$ o.d.d. dan is $a \leq b$.

Bewijs. We schrijven alleen de bewijzen van 1) en 5) uit.

1) Zij $\epsilon > 0$; nu is $|a - a_n| < \frac{1}{2}\epsilon$ o.d.d. zeg voor $n > N_1$; $|b - b_n| < \frac{1}{2}\epsilon$ o.d.d. zeg voor $n > N_2$. Voor $n > \max(N_1, N_2)$ is dan

$$|a + b - a_n - b_n| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \epsilon.$$

5) Bewijs uit het ongerijmde: stel $b < a$ dan geldt $b_n \in (-\infty, \frac{1}{2}(b+a))$ o.d.d., $a_n \in (\frac{1}{2}(b+a), \infty)$ o.d.d. en dus $b_n < \frac{1}{2}(b+a) < a_n$ o.d.d., tegenspraak. \square

Voorbeelden.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n + 5}{2n^2 - 5n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 - \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 2}{\sqrt{n^2 + n - 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{1 + 1} = 1.$$

1.4.10. Stelling (insluitstelling). Zij $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = p$; laat voor (y_n) gelden: $a_n \leq y_n \leq b_n$ o.d.d.. Dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$.

Bewijs. Zij $\epsilon > 0$; dan is $a_n \in (p-\epsilon, p+\epsilon)$ o.d.d. (zeg voor $n > N_1$), $b_n \in (p-\epsilon, p+\epsilon)$ o.d.d. (zeg voor $n > N_2$), terwijl $a_n \leq y_n \leq b_n$ o.d.d. (zeg voor $n > N_3$). Op den duur (nl. voor $n > \max(N_1, N_2, N_3)$) is dan $p-\epsilon < a_n \leq y_n \leq b_n < p+\epsilon$, dus $y_n \in (p-\epsilon, p+\epsilon)$ o.d.d. \square

Voorbeelden.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \text{ daar } -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3 \text{ daar}$$

$$3 = \sqrt[n]{3^n} < \sqrt[n]{2^n + 3^n} < \sqrt[n]{3^n + 3^n} = 3\sqrt[n]{2} \text{ en } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1.$$

Stelling. Is (a_n) convergent, dan is (a_n) begrensd.

Bewijs. Zij $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, dan is $a_n \in (a-1, a+1)$ o.d.d., zeg voor $n > N \in \mathbb{N}$.

Dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$,

$$\min\{a_1, a_2, \dots, a_N, a-1\} \leq a_n \leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_N, a+1\}.$$

\square

1.4.11. Grondeigenschap der reële getallen. Een monotone begrensde rij in \mathbb{R} is convergent.

Deze grondeigenschap zullen we opvatten als een axioma. Ze postuleert het bestaan van de limiet; ze geeft ons geen middel de limiet ook te berekenen.

N.B. Een monotoon niet dalende rij is begrensd (en dus convergent) dan en slechts dan als de rij naar boven begrensd is. Een analoge bewering geldt voor monotoon niet stijgende rijen.

Voorbeeld. De rij (a_n) zij gedefinieerd door: $a_1 := 0$, $a_{n+1} := \frac{2a_n + 4}{3}$ ($n \in \mathbb{N}$). De rij (a_n) is convergent.

(i) We bewijzen door volledige inductie dat (a_n) monotoon stijgend is.

1) $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{4}{3}$, dus $a_1 < a_2$.

2) We zullen laten zien dat uit $a_n < a_{n+1}$ volgt $a_{n+1} < a_{n+2}$.

Nu is

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{2a_{n+1} + 4}{3} - \frac{2a_n + 4}{3} = \frac{2}{3} (a_{n+1} - a_n) > 0.$$

ii) We bewijzen eveneens door volledige inductie dat (a_n) naar boven begrensd is. We moeten daartoe een bovengrens M vinden die zo ruim is, dat uit $a_n \leq M$ volgt

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 4}{3} \leq \frac{2M + 4}{3} \leq M;$$

dus $M \geq 4$. Het inductiebewijs van $\forall n \in \mathbb{N} [a_n \leq 4]$ verloopt dan aldus:

1) $a_1 = 0 \leq 4$.

2) Als $a_n \leq 4$, dan is $a_{n+1} = \frac{2a_n + 4}{3} \leq \frac{2 \cdot 4 + 4}{3} = 4$.

Overeenkomstig de grondeigenschap 1.4.11 bestaat nu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: \ell$.

Uiteraard is ook $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \ell$; maar dan is

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 4}{3} = \frac{2\ell + 4}{3}$$

waaruit volgt $\ell = 4$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$.

Opmerking. In \mathbb{Q} bestaan er begrensde monotone rijen die niet naar een element van \mathbb{Q} convergeren.

Voorbeeld. Beschouw de rij (b_n) gedefinieerd door: $b_1 := 2$, $b_{n+1} := \frac{1}{2}(b_n + \frac{2}{b_n})$. We bewijzen eerst door volledige inductie dat $b_n \in \mathbb{Q} \cap [1, 2]$.

1) $b_1 = 2$, dus $b_1 \in \mathbb{Q} \cap [1, 2]$.

2) Zij $b_n \in \mathbb{Q} \cap [1, 2]$; we zullen bewijzen dat $b_{n+1} \in \mathbb{Q} \cap [1, 2]$. Als $b_n \in \mathbb{Q}$, $b_n \neq 0$, dan is $\frac{2}{b_n} \in \mathbb{Q}$, $b_n + \frac{2}{b_n} \in \mathbb{Q}$ en dus $b_{n+1} \in \mathbb{Q}$; als

$$1 \leq b_n \leq 2, \text{ dan is } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{b_n} \leq 1 \text{ en } 1 = \frac{1}{2}(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}(b_n + \frac{2}{b_n}) \leq \frac{1}{2}(2 + 2) = 2.$$

Uit het voorgaande volgt tevens $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{b_n} - \frac{b_n}{2} \leq 0$. De rij (b_n) is dus monotoon niet stijgend.

Stel nu dat er een limiet $\ell \in \mathbb{Q}$ zou bestaan, dan was $\ell = \frac{1}{2}\ell + \frac{1}{\ell}$, dus $\ell^2 = 2$. We weten echter dat er geen rationaal getal is waarvan het kwadraat gelijk aan 2 is.

Opmerking. Beschouwt men (b_n) als een rij in \mathbb{R} dan is deze wel convergent en $b_n \rightarrow \sqrt{2}$ als $n \rightarrow \infty$. De rij getallen (b_n) is de rij die men verkrijgt als men beginnend met $b_1 = 2$, $\sqrt{2}$ benadert volgens de methode van Newton-Raphson (zie 2.10, voorbeeld 1).

Uit 1.4.11 volgen vele belangrijke eigenschappen van de reële getallen. We bespreken er één van.

1.4.12. Stelling (stelling van het intervallen-nest). Laat de rijen (a_n) en (b_n) voldoen aan

$$\forall n \in \mathbb{N} [a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n]$$

d.w.z.

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1,$$

en zij $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

Dan is er precies één c met $c \in [a_n, b_n]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs. De rij (a_n) is monotoon niet dalend en naar boven begrensd. Volgens 1.4.11 bestaat dan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: a$, terwijl $a_n \leq a$ voor elke n . Daar tevens $a_m \leq b_n$ voor elke m , is $a \leq b_n$ (b_n is de limiet van de constante rij b_n, b_n, \dots). We vinden zo: $a \in [a_n, b_n]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Analoog is in te zien dat $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: b$ bestaat en $b \in [a_n, b_n]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Uit $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ volgt $b = a$.

Definieer nu $c := a = b$, dan is: $c \in [a_n, b_n]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

We tonen nog aan dat c eenduidig is. Als immers voor een zekere d geldt: $d \in [a_n, b_n]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dan volgt $a \leq d \leq b$ en dus $d = a = b = c$. \square

Maximum, minimum

Zij V een begrensde verzameling van reële getallen.

Dan heet $M \in V$ het maximum van V indien $x \leq M$ voor elke $x \in V$; analoog: $m \in V$ heet het minimum van V als $m \leq x$ voor elke $x \in V$.

Niet elke begrensde verzameling heeft een maximum (of minimum). Als voorbeeld noemen we $V := (0, 1)$. Indien $M \in V$ het maximum van V zou zijn dan was $M < 1$. In dat geval is echter $M < \frac{M+1}{2} < 1$ zodat $\frac{M+1}{2} \in V$ en M niet het maximum is.

Conclusie: V heeft geen maximum; V heeft evenmin een minimum.

1.5. \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3

We zullen nu een deel van de beschouwingen uit 1.4 uitbreiden tot

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

en

$$\mathbb{R}^3 := \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}.$$

Het getallenpaar (x, y) resp. getallentripel (x, y, z) wordt opgevat als de kentallen van een vector. \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 zijn dan vectorruimten. In deze ruimten kiezen we voorlopig als vaste bases,

$$\mathbb{R}^2 : \underline{e}_1 = (1, 0), \underline{e}_2 = (0, 1)$$

$$\mathbb{R}^3 : \underline{e}_1 = (1, 0, 0), \underline{e}_2 = (0, 1, 0), \underline{e}_3 = (0, 0, 1).$$

De kentallen van de vectoren stemmen dan overeen met de componenten t.o.v. de orthogonale bases $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2$, $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \subset \mathbb{R}^3$.

In \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 is een afstand gedefinieerd die met de stelling van Pythagoras eenvoudig berekend kan worden:

is $\underline{a} = (a_1, a_2)$, $\underline{b} = (b_1, b_2)$, dan is de afstand van \underline{a} tot \underline{b} in \mathbb{R}^2 :

$$d(\underline{a}, \underline{b}) := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} ;$$

is $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\underline{d} = (d_1, d_2, d_3)$, dan is de afstand van \underline{c} tot \underline{d} in \mathbb{R}^3 :

$$d(\underline{c}, \underline{d}) := \sqrt{(c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2 + (c_3 - d_3)^2} .$$

Merk op dat deze afstand voldoet aan de zg. driehoeksongelijkheid:

$$d(\underline{a}, \underline{b}) \leq d(\underline{a}, \underline{c}) + d(\underline{c}, \underline{b}) .$$

$d(\underline{a}, \underline{0}) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ noteren we als $|\underline{a}|$, de lengte van \underline{a} .

Dan is $d(\underline{a}, \underline{b}) = |\underline{a} - \underline{b}|$.

Open verzamelingen in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3

Definitie. Zij $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ (of $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$) en $\delta > 0$, dan heet

$$B(\underline{a}, \delta) := \{ \underline{x} \mid d(\underline{a}, \underline{x}) < \delta \}$$

de open bol (schijf, bal) met middelpunt \underline{a} en straal δ .

Het begrip open bol is een analogon in \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 van het begrip open interval uit \mathbb{R} .

We gaan verder ook analoog te werk:

1.5.1. Definitie. Een verzameling $V \subset \mathbb{R}^2$ (of $V \subset \mathbb{R}^3$) heet open indien bij elke $\underline{a} \in V$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat $B(\underline{a}, \delta) \subset V$.

Gelijkwaardige formulering: V is open als V een vereniging is van open ballen.

1.5.2. Definitie. Is V open en $\underline{a} \in V$, dan heet V een omgeving van \underline{a} .

Stelling. Een open bol is een open verzameling.

Bewijs. Zij $\underline{b} \in B(\underline{a}, \delta)$, dan is $d(\underline{a}, \underline{b}) < \delta$. Nu is: $\delta_1 := \delta - d(\underline{a}, \underline{b}) > 0$.

We zullen laten zien dat $B(\underline{b}, \delta_1) \subset B(\underline{a}, \delta)$. Is $\underline{c} \in B(\underline{b}, \delta_1)$ dan is $d(\underline{b}, \underline{c}) < \delta_1$ en derhalve $d(\underline{a}, \underline{c}) \leq d(\underline{a}, \underline{b}) + d(\underline{b}, \underline{c}) < d(\underline{a}, \underline{b}) + \delta_1 = \delta$, dus $\underline{c} \in B(\underline{a}, \delta)$. \square

Voorbeelden van open verzamelingen:

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}.$$

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4\}.$$

$$V(\underline{a}, \delta) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - a_1| < \delta, |x_2 - a_2| < \delta\}, \underline{a} \in \mathbb{R}^2, \delta > 0.$$

$$V(\underline{a}, \delta) := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1 - a_1| < \delta, |x_2 - a_2| < \delta, |x_3 - a_3| < \delta\}, \underline{a} \in \mathbb{R}^3, \delta > 0.$$

De definities van de begrippen inwendig punt, geïsoleerd punt, randpunt en verdichtingspunt zijn letterlijk dezelfde als in 1.4.

1.5.3. Stelling. 1) \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 en \emptyset zijn open.

2) De doorsnede van twee open verzamelingen is open.

3) Is $\underline{a} \neq \underline{b}$, dan zijn er open verzamelingen U en V met $\underline{a} \in U$, $\underline{b} \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

4) W is dan en slechts dan open als bij elke $\underline{a} \in W$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat $V(\underline{a}, \delta) \subset W$.

Bewijs. De bewijzen zijn niet moeilijk; we volstaan met enkele opmerkingen.

2) Als $\underline{a} \in V \cap W$ en $B(\underline{a}, \delta_1) \subset V$, $B(\underline{a}, \delta_2) \subset W$, dan is $B(\underline{a}, \min\{\delta_1, \delta_2\}) \subset V \cap W$.

3) Als $\underline{a} \neq \underline{b}$, dan is $B(\underline{a}, \frac{1}{2}d(\underline{a}, \underline{b})) \cap B(\underline{b}, \frac{1}{2}d(\underline{a}, \underline{b})) = \emptyset$.

4) $B(\underline{a}, \delta) \subset V(\underline{a}, \delta) \subset B(\underline{a}, \delta\sqrt{k})$ ($\underline{a} \in \mathbb{R}^k$, $k = 2, 3$, $\delta > 0$). □

1.5.4. Definitie. Een verzameling $W \subset \mathbb{R}^2$ of $W \subset \mathbb{R}^3$ heet gesloten indien $\mathbb{R}^2 \setminus W$ resp. $\mathbb{R}^3 \setminus W$ open is.

Voorbeelden: \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , \emptyset , $\{\underline{x} \mid d(\underline{a}, \underline{x}) \leq \delta\}$ zijn gesloten.

Definitie. Een verzameling U heet begrensd indien er een $M > 0$ bestaat zó dat $U \subset B(\underline{0}, M)$.

Voorbeelden: $B(\underline{a}, \delta)$, $V(\underline{a}, \delta)$ zijn begrensd.

Rijen punten in \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3

1.5.5. Definitie. $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n = \underline{a}$ in \mathbb{R}^2 (of \mathbb{R}^3) betekent dat voor elke omgeving U van \underline{a} geldt $\underline{a}_n \in U$ o.d.d.

Zij $\underline{a}_n = (a_{1n}, a_{2n})$, $\underline{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ of $\underline{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, a_{3n})$, $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.

1.5.6. Stelling. De volgende beweringen zijn gelijkwaardig:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n = \underline{a}$.

2) Voor elke $\varepsilon > 0$ geldt $\underline{a}_n \in B(\underline{a}, \varepsilon)$ o.d.d.

3) Voor elke $\varepsilon > 0$ geldt $\underline{a}_n \in V(\underline{a}, \varepsilon)$ o.d.d.

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{a}_n - \underline{a}) = 0$.

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\underline{a}_n, \underline{a}) = 0$.

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{1n} = a_1$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a_2$ (en $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{3n} = a_3$).

Het bewijs is niet moeilijk.

Een rij (\underline{a}_n) heet begrensd indien $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots\}$ een begrensde verzameling is. Een aantal van de stellingen uit 1.4 zijn nog uit te breiden tot \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 . We zullen daar niet verder op ingaan.

1.6. Coördinatenstelsels in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3

Tot nu toe hebben we meestal de analytische meetkunde bedreven met cartesische coördinaten in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 (x, y resp. x, y, z). Als men problemen bestudeert met "cirkel- of bolsymmetrie" dan zijn andere coördinaten vaak handiger.

1.6.1. Poolcoördinaten in \mathbb{R}^2

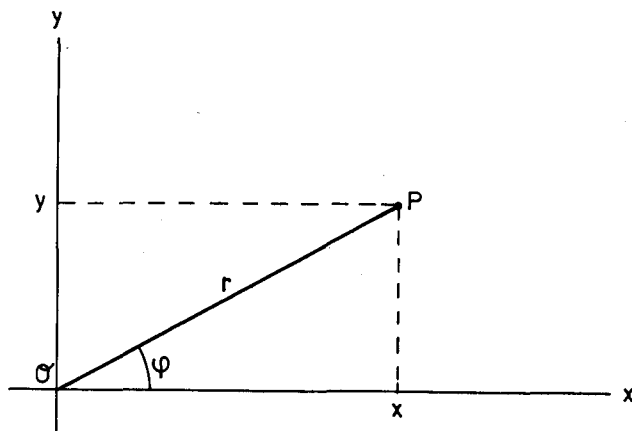
We leggen een punt P in het vlak vast door zijn afstand tot $\mathcal{O} = (0,0)$ en door de hoek die de verbindingslijn $\mathcal{O}P$ maakt met de positieve x-as.

De afstand heet gewoonlijk r, de hoek φ ; uit de aard van de keuze volgt dat $r \geq 0$, φ onbepaald is in \mathcal{O} en dat in andere punten φ slechts bepaald is tot op veelvoud van 2π ((r, φ) en $(r, \varphi + 2\pi)$ is het zelfde punt).

\mathcal{O} noemt men wel de pool, de positieve x-as de poolas, r de voerstraal van P en φ het argument van P.

Het verband tussen cartesische coördinaten (x,y) en poolcoördinaten (r,φ) is

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$



Voor problemen waarin cirkelsymmetrie voorkomt zijn poolcoördinaten erg handig:

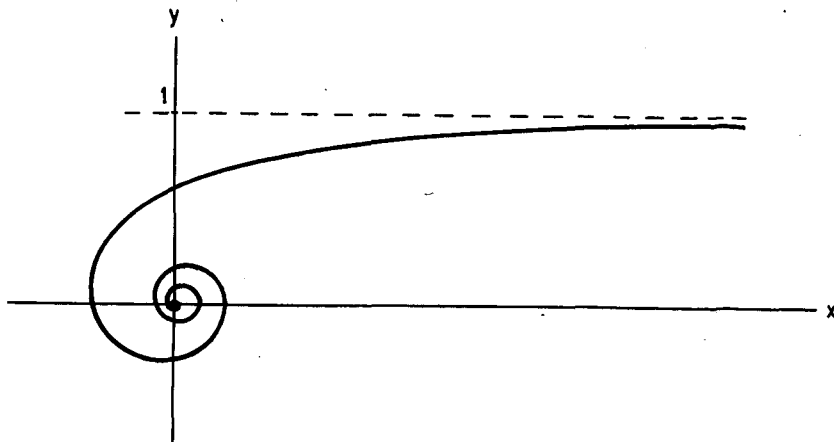
De cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ heeft als vergelijking in poolcoördinaten: $r = a$.
Krommen $r = \text{constant}$ zijn cirkels om O ; krommen $\varphi = \text{constant}$ half-rechten door O (O zelf uitgezonderd).

Een vergelijking $r = r(\varphi)$ stelt in het algemeen een kromme voor.

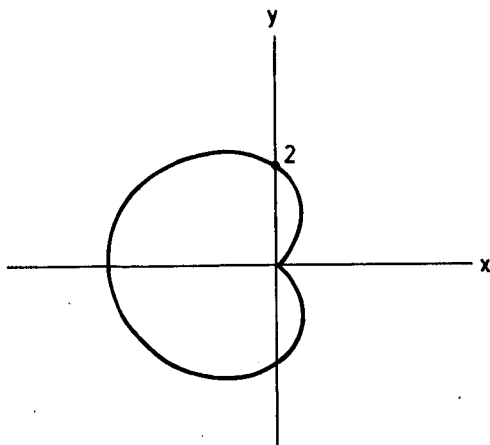
We geven enkele voorbeelden:

a) $r = \frac{1}{\varphi}$; $\varphi > 0$.

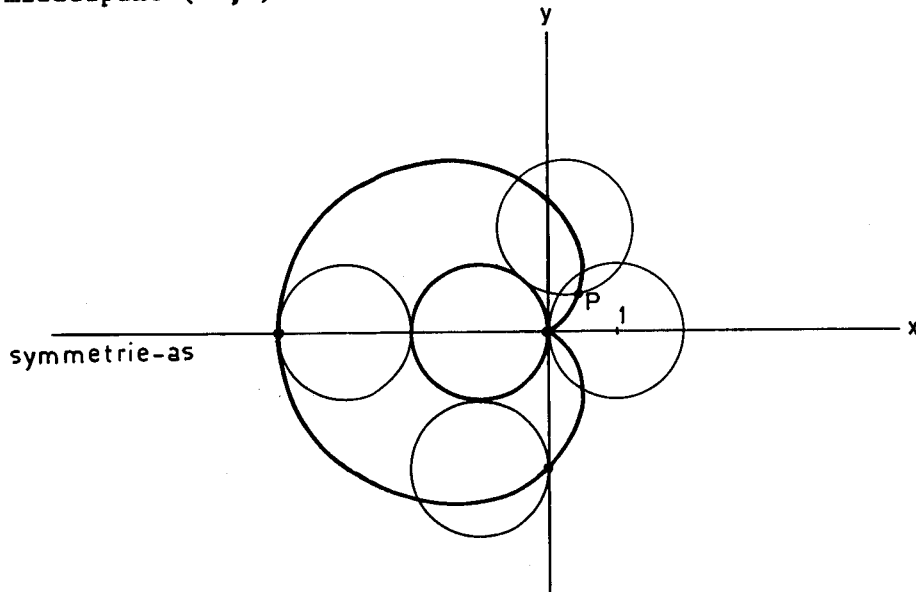
We zien dat $r \rightarrow \infty$ als $\varphi \rightarrow 0$ maar daar $y = r \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{\varphi}$, geldt $y \rightarrow 1$ als $\varphi \rightarrow 0$; er is dus een horizontale asymptoot $y = 1$. De kromme heet hyperbolische spiraal.



b) $r = 2(1 - \cos \varphi)$. De kromme heet cardioïde.



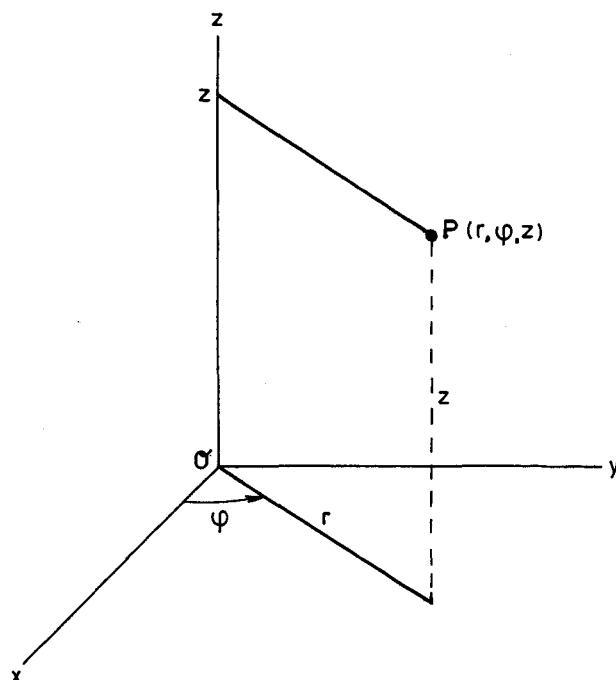
De kromme ontstaat (zie figuur) als de baan van het punt P op de rechter cirkel als deze cirkel (met straal 1) zonder slip langs de vaste cirkel met middelpunt $(-1,0)$ en straal 1 rolt.



In cartesische coördinaten is de vergelijking van de cardioïde:
 $(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$ hetgeen veel ingewikkelder is.

1.6.2. Cylindercoördinaten in \mathbb{R}^3

Deze zijn de uitbreiding van poolcoördinaten in het (x,y) -vlak met een z -coördinaat.



De cylindercoördinaten van P zijn (r, φ, z) ;
de samenhang met cartesische coördinaten is:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z. \end{cases}$$

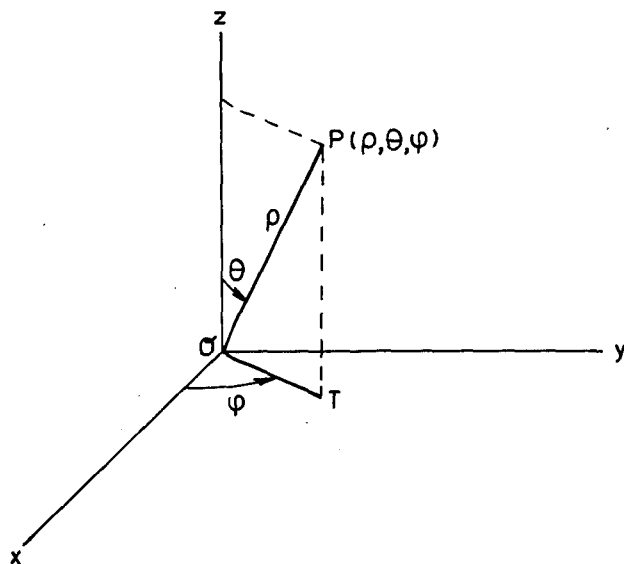
Cylindercoördinaten zijn gemakkelijk bij meetkundige figuren die axiale symmetrie hebben (omwentelingsfiguren!).

De cylinder $x^2 + y^2 = a^2$ heeft als vergelijking in cylindercoördinaten:
 $r = a$.

De kegel $z^2 = x^2 + y^2$ heeft als vergelijking $z^2 = r^2$, $z = \pm r$.

1.6.3. Bolcoördinaten in \mathbb{R}^3

Voor figuren met een punt van symmetrie (bolsymmetrie) zijn de volgende coördinaten erg handig.



Een punt P in \mathbb{R}^3 wordt bepaald door: afstand ρ tot O , hoek θ van OP met de positieve z -as, hoek φ van de projectie van OP op het (x,y) -vlak met de positie x -as.

Krachtens definitie is $\rho \geq 0$, θ tussen 0 en π te nemen en φ bepaald tot op veelvoud van 2π . Voor O is θ noch φ bepaald; voor de andere punten op de z -as is $\theta = 0$ of $\theta = \pi$ en φ onbepaald.

De samenhang met cartesische coördinaten is

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases}$$

Uit de bekende eigenschappen van een rechthoekige driehoek volgt namelijk $\overline{OT} = \rho \sin \theta$, $\overline{PT} = \rho \cos \theta$, zie figuur.

$\rho = \text{constant}$ is de vergelijking van een bol om O .

$\varphi = \text{constant}$ is de "helft" van een vlak door de z -as.

$\theta = \text{constant}$ is een halve kegel (uitgezonderd de top O) met de z -as als as.

Hoofdstuk 2. Functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

2.1. Inleiding

Het begrip afbeelding is algemeen gedefinieerd in 1.1. In dit hoofdstuk beschouwen we meer in het bijzonder afbeeldingen van de gedaante $f : A \rightarrow B$, waarbij $A \subset \mathbb{R}$ en $B \subset \mathbb{R}$. We noemen f dan een reële functie van één reële variabele, of kortweg functie.

A heet de definitieverzameling van de functie f ; notatie $\text{DOM } f$.

Voorbeelden. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$;

$f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log x$;

$$f : [-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{als } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{als } x = 0 \\ -x^2 & \text{als } -1 \leq x < 0 . \end{cases}$$

In het vervolg zullen we een functie f ook wel definiëren door middel van een formule zonder expliciete vermelding van de definitieverzameling. In dat geval zal $\text{DOM } f$ bestaan uit die waarden waarvoor de formule zinvol is.

Voorbeeld. $f(x) = \sqrt{x}$, dan is $\text{DOM } f = \mathbb{R}^+$.

Vaak wordt een functiewaarde $f(x)$ met een aparte letter y aangegeven; men schrijft dan $y = f(x)$.

We geven nog een korte samenvatting van de verdere inhoud van dit hoofdstuk. Eerste onderwerp vormen de polynomen of veeltermen als meest eenvoudige voorbeelden van functies. Daarna volgt een uitvoerige behandeling van functies waarbij achtereenvolgens aan de orde komen: eigenschappen van functies, limieten, continuïteit, differentiaal- en integraalrekening van functies van één variabele. Tenslotte wordt aandacht geschonken aan numerieke aspecten in een tweetal paragrafen over numerieke integratie en over numerieke oplossing van vergelijkingen.

2.2. Polynomen

2.2.1. Definitie. Een polynoom is een functie $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die we als volgt kunnen schrijven:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

waarin a_0, a_1, \dots, a_n reële getallen zijn en $a_n \neq 0$. Deze getallen worden coëfficiënten genoemd. Het gehele getal $n \geq 0$ heet de graad van het polynoom (notatie $gr(p)$).

Ook de nulfunctie: $x \mapsto 0$, zullen we opvatten als een polynoom, het zg. nulpolynoom. We geven geen definitie voor de graad van het nulpolynoom. Een uitspraak zoals: zij p een polynoom met $gr(p) = n$, impliceert dat p niet het nulpolynoom is.

Voorbeelden. 1) $p(x) = 2$ is een polynoom met $gr(p) = 0$.

2) $p(x) = x^{10} + x^5 + 1$ is een polynoom met $gr(p) = 10$.

3) Als $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$, dan is de afgeleide van p het polynoom gegeven door:

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + na_n x^{n-1}.$$

Ook de tweede afgeleide $p'' = (p')'$, de derde afgeleide p''' , in het algemeen de k -de afgeleide $p^{(k)}$ zijn polynomen. Men ziet gemakkelijk dat

$$p^{(k)}(x) = k! a_k + 2 \cdot 3 \cdots (k+1) a_{k+1} x + \dots + (n-k+1)(n-k+2) \cdots na_n x^{n-k}.$$

Opgave. Men kan eenvoudig inzien dat met p, q ook $p+q$, pq , $p \circ q$ en een primitieve van p polynomen zijn. Wat kunt U zeggen over de graad van deze polynomen, indien $gr(p) = n$ en $gr(q) = m$?

2.2.2. Stelling (eenduidigheid). Zijn de polynomen p en q gegeven door

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad gr(p) = n$$

en

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0, \quad gr(q) = m,$$

dan geldt:

$$p = q \iff n = m, a_0 = b_0, \dots, a_n = b_m.$$

(N.B. $p = q$ betekent $p(x) = q(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.)

Bewijs. (\Leftarrow). Triviaal.

(\Rightarrow). Stel $n \geq m$ en schrijf $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$, waarin $b_k = 0$ voor $k > m$.

We geven nu een bewijs door volledige inductie naar n .

In geval $n = 0$ zal gelden: $p(x) = a_0 \neq 0$ en $q(x) = b_0 \neq 0$, $p(x) = q(x)$ dus $a_0 = b_0$.

Veronderstel dat de bewering waar is voor polynomen met graad $\leq n-1$. Als $p = q$, dan is ook $p' = q'$ en $gr(p') = n-1$. Op grond van de inductieveronderstelling volgt dus $na_n = nb_n$, $(n-1)a_{n-1} = (n-1)b_{n-1}, \dots, a_1 = b_1$. Bovendien is $p(0) = q(0)$, dus $a_0 = b_0$. Derhalve geldt voor alle $k = 0, 1, \dots, n$ dat $a_k = b_k$ en omdat $a_n \neq 0$ moet $m = n$ zijn. Als $m > n$, verwissel dan in bovenstaand bewijs de getallen n en m . □

2.2.3. Stelling. Zij p een polynoom met $gr(p) = n$ en d een polynoom met $gr(d) = m$, dan is er een polynoom r met $gr(r) < gr(d)$ of r is het nulpolynoom en er is een polynoom q zodat $p(x) = q(x)d(x) + r(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Als $m > n$ is q het nulpolynoom en $r = p$.

Als $m \leq n$ dan bewijzen we de stelling door volledige inductie naar n .

In geval $n = 0$ zal gelden: $p(x) = a_0 \neq 0$, $d(x) = b_0 \neq 0$, $q(x) = a_0/b_0$ en $r(x) = 0$.

Neem aan dat de bewering waar is voor polynomen met graad $\leq n-1$.

Stel $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ en $d(x) = b_m x^m + \dots + b_0$, dan is

$$p(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} d(x) + r_1(x),$$

waarin r_1 een polynoom is met $gr(r_1) \leq n-1$ of r_1 is het nulpolynoom.

Indien r_1 het nulpolynoom is of als $gr(r_1) < gr(d)$ dan voldoet $q(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ en $r = r_1$.

Zij nu $gr(d) \leq gr(r_1)$ dan (inductieveronderstelling) zijn er polynomen q_1 en r_2 met $gr(r_2) < gr(d)$ of r_2 is het nulpolynoom, zó dat $r_1(x) = q_1(x)d(x) + r_2(x)$.

Na substitutie volgt

$$p(x) = \left[\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + q_1(x) \right] d(x) + r_2(x). \quad \square$$

Het polynoom r wordt in de regel de rest genoemd en we noteren

$\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$. Als $r(x) = 0$ voor alle x dan heet d een deler van p .

Voorbeelden. 4) Neem $d(x) = x - a$, dan is $r(x) = p(a)$, want

$$p(x) = (x - a)q(x) + p(a) \text{ (reststelling).}$$

Als $p(a) = 0$, dan is $(x - a)$ een deler van $p(x)$.

5) De waarde $x = 1$ is een nulpunt van $p(x) = x^3 - 2x^2 + x$ en $p(x) = (x - 1)(x^2 - x)$.

We zien dat $x = 1$ ook nulpunt is van $x^2 - x$ en $p(x) = (x - 1)^2 x$. We zeggen dat $x = 1$ een tweevoudig nulpunt van p is.

2.2.4. Definitie. Het getal $a \in \mathbb{R}$ heet een k-voudig nulpunt (òf: nulpunt met multipliciteit k) van een polynoom p , indien er een polynoom q bestaat met $q(a) \neq 0$ en $p(x) = (x - a)^k q(x)$.

Opgave. Het getal $a \in \mathbb{R}$ is een k -voudig nulpunt van een polynoom p dan en slechts dan als $p(a) = p'(a) = \dots = p^{(k-1)}(a) = 0$ en $p^{(k)}(a) \neq 0$; toon dit aan.

We weten dat een vierkantsvergelijking hoogstens twee reële wortels bezit. Deze regel laat de volgende generalisatie toe:

2.2.5. Stelling. Een polynoom p met $gr(p) = n$ heeft ten hoogste n reële nulpunten.

Bewijs. We bewijzen deze stelling door volledige inductie naar n .

In geval $n = 0$ is $p(x) = a_0 \neq 0$, dus p heeft geen nulpunten.

Stel de bewering in de stelling is waar voor polynomen met graad $\leq n-1$.

Zij a een nulpunt van p , dan is er een polynoom q met $gr(q) = n-1$ zodat

$p(x) = (x - a)q(x)$. Het polynoom q heeft ten hoogste $n-1$ reële nulpunten

(inductieveronderstelling), dus p heeft ten hoogste $1 + n - 1 = n$ reële nulpunten. □

Voorbeelden. 6) In het (x,y) -vlak kunnen we door twee punten een rechte lijn construeren, door 3 punten (met verschillende x -coördinaten) een rechte lijn of een parabool. Algemeen: bij $n + 1$ gegeven punten

$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, waarvan de coördinaten x_0, x_1, \dots, x_n verschillend zijn, bestaat er precies één polynoom p met $gr(p) \leq n$, of p is het nulpolynoom, zodat $p(x_k) = y_k$ voor $k = 0, 1, \dots, n$.

Bewijs. We construeren eerst een polynoom p , dat aan de eisen voldoet en laten vervolgens zien dat p eenduidig bepaald is. Zij ℓ_i het polynoom gegeven door

$$2.2.6. \quad \ell_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)},$$

dan is $\ell_i(x_k) = 0$ voor $k = 0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ en $\ell_i(x_i) = 1$. We nemen nu voor p het polynoom gegeven door $p(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \dots + y_n \ell_n(x)$. (Laat zien dat p aan de eisen voldoet.)

Laat q een polynoom zijn dat eveneens aan de eisen voldoet, dan geldt voor het polynoom $p - q$ dat $p(x_k) - q(x_k) = 0$ voor $k = 0, 1, \dots, n$. Het polynoom $p - q$ heeft dus $n+1$ verschillende nulpunten, hetgeen in strijd is met 2.2.5, tenzij $p - q$ het nulpolynoom is; dus $p = q$. \square

Het polynoom p heet het interpolatiepolynoom van Lagrange door de punten (x_k, y_k) , $k = 0, 1, \dots, n$.

7) We construeren vervolgens een polynoom waarvan de functiewaarde en de eerste tot en met de n -de afgeleide in een punt zijn voorgeschreven: $p(a) = b_0$, $p'(a) = b_1, \dots, p^{(n)}(a) = b_n$, waarin b_0, b_1, \dots, b_n gegeven reële getallen zijn. Een polynoom p met $\text{gr}(p) \leq n$ kunnen we aangeven door

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n.$$

Differentieer $p(x)$ k -maal dan vinden we

$$p^{(k)}(x) = k! a_k + 2 \cdot 3 \cdots (k+1) a_{k+1} (x-a) + \dots + (n-k+1) \cdots n a_n (x-a)^{n-k},$$

dus

$$p^{(k)}(a) = k! a_k \quad (p^{(0)}(a) := p(a)).$$

Derhalve is $a_k = \frac{1}{k!} b_k$ voor $k = 0, 1, \dots, n$.

Het polynoom p is dus voor te stellen door

$$2.2.7. \quad p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Deze betrekking heet de formule van Taylor voor polynomen.

2.3. Eigenschappen van functies

In deze paragraaf releveren we een aantal deels bekende eigenschappen van functies.

2.3.1. Definitie (begrensdheid). Een functie f heet begrensd op een verzameling $V \subset \text{DOM } f$, indien

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V \quad [|f(x)| \leq M]$$

of anders geformuleerd: $f(V) \subset \mathbb{R}$ is een begrensde verzameling.

Een functie f heet begrensd, indien f begrensd is op $\text{DOM } f$, dus als $f(\text{DOM } f)$ een begrensde verzameling is.

Voorbeelden. $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^{-x^2}$, $h(x) = \arctan x$, $l(x) = \sqrt{1-x^2}$ zijn voorbeelden van begrensde functies. De functie $f(x) = e^{-x}$ is begrensd op \mathbb{R}^+ , de functie zelf is echter niet begrensd.

2.3.2. Definitie (monotonie).

(i) Een functie f heet monotoon stijgend, indien

$$\forall x, y \in \text{DOM } f \quad [x < y \Rightarrow f(x) < f(y)].$$

(ii) Een functie f heet monotoon dalend, indien

$$\forall x, y \in \text{DOM } f \quad [x < y \Rightarrow f(x) > f(y)].$$

(iii) Een functie f heet monotoon niet dalend, indien

$$\forall x, y \in \text{DOM } f \quad [x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)].$$

(iv) Een functie f heet monotoon niet stijgend, indien

$$\forall x, y \in \text{DOM } f \quad [x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)].$$

De functie f heet monotoon, indien zich een van de gevallen (i), (ii), (iii) of (iv) voordoet. De functie f heet strikt monotoon, indien zich een der gevallen (i) of (ii) voordoet.

Voorbeelden. 1) $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{als } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$,

is een monotoon niet stijgende functie.

2) $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$, is een monotoon stijgende functie.

Strikt monotone functies zijn voorbeelden van injectieve afbeeldingen. Immers als $x \neq y$, dus $x < y$ of $x > y$, dan is $f(x) < f(y)$ of $f(x) > f(y)$, in ieder geval $f(x) \neq f(y)$. Is f bovendien surjectief, dan heeft f een strikt monotone inverse f^{-1} .

Voorbeelden. 3) $f: [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$.

De functie f heeft een inverse gegeven door

$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi], f^{-1}(x) = \arcsin x.$$

4) $f: (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$. De functie f heeft een inverse gegeven door

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), f^{-1}(x) = \pi + \arctan x.$$

5) $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \log(1+x^2)$. De functie f heeft een inverse gegeven door

$$f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}.$$

2.3.3. Definitie (convexiteit). Een functie f heet convex op een interval $I \subset \text{DOM } f$, indien

$$\forall x, y \in I \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad [f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)].$$

Een functie f heet concaaf op I indien de functie $-f$ convex is op I .

We merken op dat voor de grafiek van f convexiteit betekent dat het lijnstuk, dat de punten $(x, f(x))$ en $(y, f(y))$ verbindt, boven de grafiek ligt.

Voorbeelden. (Ga na aan de hand van grafieken; zie ook 2.6.9.)

6) $f: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$. De functie f is convex op $[-1, 0]$ en concaaf op $[0, 1]$.

7) $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log x$. De functie f is concaaf op \mathbb{P} .

2.3.4. Definitie (even of oneven). Een functie f heet even indien

(i) $\forall x \in \mathbb{R} \quad [x \in \text{DOM } f \Rightarrow -x \in \text{DOM } f]$, d.w.z. $\text{DOM } f$ ligt symmetrisch t.o.v. 0;

(ii) $\forall x \in \text{DOM } f \quad [f(-x) = f(x)]$, dus de grafiek van f is symmetrisch t.o.v. de y -as.

Een functie f heet oneven indien (i) geldt en

$$(ii') \forall_{x \in \text{DOM } f} [f(-x) = -f(x)].$$

(Wat betekent dit voor de grafiek van f ?)

Voorbeelden. 8) $f(x) = \arctan x$; de functie f is oneven.

9) $f(x) = \arccos x - \frac{\pi}{2}$; de functie f is oneven.

10) $f(x) = e^{-x^2}$; de functie f is even.

11) Polynomen waarin louter even machten van x voorkomen, zijn even functies.

Tenslotte introduceren we nog de hyperbolische functies: $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$ (spreek uit sinus hyperbolicus, cosinus hyperbolicus, enz.).

Deze functies worden gedefinieerd door

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

De hyperbolische functies zijn gedefinieerd voor alle $x \in \mathbb{R}$ behalve dat $\coth x$ niet gedefinieerd is voor $x = 0$. Schets de grafieken van deze functies en merk op dat $\cosh x$ een even functie is terwijl $\sinh x$ een oneven functie is. Omdat $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ is $x = \cosh t$, $y = \sinh t$, $-\infty < t < \infty$, een parametervoorstelling van de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$. (Evenals $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$ een parametervoorstelling van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ is, zie 4.1.) Dit verklaart de naam van de ingevoerde functies.

2.4. Limieten van functies

Reeds op de middelbare school hebben we kennis gemaakt met het begrip limiet van een functie. We geven een aantal definities.

- 2.4.1. Definitie. Zij $a \in \mathbb{R}$ en a een verdichtingspunt van $\text{DOM } f$. Dan betekent $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, dat er voor iedere omgeving V van L een omgeving U van a bestaat zodat voor alle $x \in U \cap \text{DOM } f$ met $x \neq a$ geldt: $f(x) \in V$.
In plaats van $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ noteren we ook wel $f(x) \rightarrow L$ ($x \rightarrow a$).

Definitie. Zij $a \in \mathbb{R}$ en a een verdichtingspunt van $(a, \infty) \cap \text{DOM } f$.

Dan betekent $\lim_{x \uparrow a} f(x) = L$, dat er voor iedere omgeving V van L een omgeving U van a bestaat zodat voor alle $x \in U \cap \text{DOM } f$ met $x > a$ geldt: $f(x) \in V$.
Deze limiet heet de rechterlimiet van $f(x)$ in a .

Definitie. Zij $a \in \mathbb{R}$ en a een verdichtingspunt van $(-\infty, a) \cap \text{DOM } f$.

Dan betekent $\lim_{x \uparrow a} f(x) = L$, dat er voor iedere omgeving V van L een omgeving U van a bestaat zodat voor alle $x \in U \cap \text{DOM } f$ met $x < a$ geldt: $f(x) \in V$.
Deze limiet heet de linkerlimiet van $f(x)$ in a .

Bewijs zelf de stelling:

Stelling. Als $\lim_{x \uparrow a} f(x) = L$ en $\lim_{x \downarrow a} f(x) = L$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Opmerking. Indien de rechterlimiet en de linkerlimiet van $f(x)$ in a bestaan doch verschillend zijn, dan bestaat $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ niet.

We geven nu de definitie van limiet in geval $a = \pm\infty$.

2.4.2. Definities. Zij voor elke $b \in \mathbb{R}$: $(b, \infty) \cap \text{DOM } f \neq \emptyset$. Dan betekent $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, dat er voor iedere omgeving V van L een $M \in \mathbb{R}$ bestaat zodat voor alle $x \in \text{DOM } f$ met $x > M$ geldt: $f(x) \in V$.

Zij voor elke $b \in \mathbb{R}$: $(-\infty, b) \cap \text{DOM } f \neq \emptyset$. Dan betekent $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, dat er voor iedere omgeving V van L een $M \in \mathbb{R}$ bestaat zodat voor alle $x \in \text{DOM } f$ met $x < M$ geldt: $f(x) \in V$.

Eventueel zijn deze definities op de bekende wijze onder 2.4.1 te brengen.

2.4.3. Stelling. Zij $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Voor iedere rij $(a_n) \subset \text{DOM } f$ met $a_n \neq a$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ geldt dan: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$.

Bewijs. Zij V een omgeving van L , dan is er volgens 2.4.1 een omgeving U van a zodat voor alle $x \in U \cap \text{DOM } f$ met $x \neq a$ geldt: $f(x) \in V$. Nu betekent $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ dat $a_n \in U$ o.d.d., dus $f(a_n) \in V$ o.d.d. Daaruit volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L$. □

Opmerking. De stelling is ook geldig in geval $a = \pm\infty$.

Met behulp van 2.4.3 is soms eenvoudig vast te stellen dat een limiet niet bestaat.

Voorbeeld. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ bestaat niet.

Beschouw namelijk de rijen (a_n) , (b_n) gegeven door $a_n = \frac{1}{n\pi}$, $b_n = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{a_n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{b_n} = 1$ en deze limieten zijn verschillend. Analoog kan men inzien dat $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ niet bestaat.

2.4.4. Stelling. De volgende beweringen zijn gelijkwaardig:

1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

2) a is een verdichtingspunt van $\text{DOM } f$ en

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \text{DOM } f [0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon].$$

3) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$.

4) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| = 0$.

Opgave. Bewijs deze stelling.

Voorbeelden. 1) $\lim_{x \rightarrow 2} (1 + \frac{1}{x^2}) = \frac{5}{4}$.

We gebruiken formulering 2) van 2.4.4. Voor $1 \leq x \leq 3$ geldt:

$$\left| 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{4} \right| = \frac{1}{4x^2} |4 - x^2| \leq \frac{1}{4} |2+x| |2-x| \leq \frac{5}{4} |2-x|.$$

Zij $\epsilon > 0$, dan geldt voor alle x met $0 < |x-2| < \delta := \min(1, \frac{4}{5}\epsilon)$ dat

$$\left| 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{4} \right| \leq \frac{5}{4} |2-x| < \epsilon.$$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. Zij $\epsilon > 0$, dan is

$$|1 - \cos x| = 2 \sin^2 \frac{1}{2}x \leq 2(\frac{1}{2}x)^2 = \frac{1}{2}x^2 < \epsilon$$

voor $|x| < \delta := \sqrt{2\epsilon}$.

Opmerking. We hebben gebruik gemaakt van de bekende ongelijkheid

$$|\sin x| \leq |x| \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ bestaat niet.

4) Twee standaardlimieten:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0 \text{ voor } p > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^p = 0 \text{ voor } p > 0. \text{ (Ga na.)}$$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$. We zeggen: $\frac{1}{(x-1)^2}$ divergeert naar ∞ als x tot 1 nadert.

Dit wordt gepreciseerd in de volgende definitie.

Definitie. Zij $a \in \mathbb{R}$ en a een verdichtingspunt van $\text{DOM } f$. Dan betekent $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, dat er voor alle $K \in \mathbb{R}$ een omgeving U van a bestaat zodat voor alle $x \in U \cap \text{DOM } f$ met $x \neq a$ geldt: $f(x) > K$.

Analoog is te definiëren $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$. Ook de definities in geval $a = \pm \infty$ liggen onmiddellijk voor de hand.

N.B. Als we zeggen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bestaat, bedoelen we altijd $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ met $L \neq \pm \infty$.

2.4.5. Stelling (insluitstelling). Zij $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$. Laat er een omgeving U van a bestaan zó dat $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ voor alle $x \in U \cap A$ met $x \neq a$; hierin is A de gemeenschappelijke definitieverzameling van f, g, h . Dan geldt: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Bewijs. Zij V een omgeving van L , $V := (L-\epsilon, L+\epsilon)$ waarin $\epsilon > 0$. Dan bestaan er omgevingen $U_1, U_2 \subset U$ van a zodat voor alle $x \in U_1 \cap A$ met $x \neq a$ geldt $f(x) \in V$, en voor alle $x \in U_2 \cap A$ met $x \neq a$ geldt $h(x) \in V$. Voor alle $x \in U_1 \cap U_2 \cap A$ met $x \neq a$ is dan $f(x), h(x) \in V$ en vervolgens $L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$, dus $g(x) \in V$. □

De insluitstelling is gemakkelijk uit te breiden tot het geval $a = \pm \infty$. Indien $a = \infty$ bijv. dient er een $M \in \mathbb{R}$ te bestaan zó dat $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ voor alle $x \in A$ met $x > M$.

Voorbeelden. Twee standaardlimieten:

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Maak gebruik van de ongelijkheid

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \tag{1}$$

geldig voor $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ en $x \neq 0$. Deze volgt uit: $\sin x < x$ voor $x > 0$, $\tan x > x$ voor $0 < x < \frac{1}{2}\pi$; bedenk voorts dat de leden van (1) even functies zijn. Vanwege $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ is dan op grond van 2.4.5,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^p} = 0 \text{ voor } p > 0 .$$

Voor $y > 0$ is $\log y < y$, dus $\log y < \frac{2}{p} y^{p/2}$. Voor $x > 1$ geldt dan de ongelijkheid

$$0 < \frac{\log x}{x^p} < \frac{2}{p} \frac{1}{x^{p/2}} .$$

Vanwege $\lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{p} \frac{1}{x^{p/2}} = 0$ voor $p > 0$, is dan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^p} = 0$.

Opmerking. De ongelijkheid $\log y < y$ voor $y > 0$, volgt uit 2.6, voorbeeld 4.

2.4.6. Stelling (bewerkingen met limieten). Als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, dan is:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = L + M;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = LM;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ mits } M \neq 0;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L| \text{ en } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{|f(x)|} = \sqrt{|L|} .$$

(N.B. Stilzwijgend is ondersteld dat $f(x)$ en $g(x)$ dezelfde definitieverzameling hebben.)

Bewijs. We schrijven alleen het bewijs van 4) uit.

4) Zij $\epsilon > 0$, dan is er een omgeving U_1 van a zodat voor alle $x \in U_1 \cap \text{DOM } f$ met $x \neq a$ geldt: $|f(x) - L| < \epsilon$, dus ook $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \epsilon$.

Er is ook een omgeving U_2 van a zodat $|f(x) - L| < \epsilon^2$ voor alle $x \in U_2 \cap \text{DOM } f$ met $x \neq a$. Maak nu gebruik van de ongelijkheid $|p - q| \leq \sqrt{|p^2 - q^2|}$, geldig voor $p \geq 0, q \geq 0$ (verifieer deze ongelijkheid). Dan volgt

$$|\sqrt{|f(x)|} - \sqrt{|L|}| \leq \sqrt{||f(x)| - |L||} \leq \sqrt{|f(x) - L|} < \epsilon \text{ voor alle } x \in U_2 \cap \text{DOM } f \text{ met } x \neq a. \quad \square$$

Voorbeelden. 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{3 + 0}{\sqrt{1} + 1} = \frac{3}{2}.$$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x} \right)^2 = \frac{1}{2}.$

10) Standaardlimiet: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p e^{-x} = 0$ voor alle $p \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Als $p < 0$, dan is $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p = 0$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$, dus $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p e^{-x} = 0$.

Als $p = 0$, dan is $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$.

Zij $p > 0$. De functie $f(x) = e^x$ is monotoon stijgend; uit $\log y < y$ voor $y > 0$ volgt dan $e^{\log y} < e^y$, oftewel $e^y > y$. Derhalve is

$$e^{\frac{1}{2p}x} > \frac{1}{2p}x, \quad e^x > \left(\frac{1}{2p}\right)^{2p} x^{2p}.$$

Voor $x > 0$ geldt dus de ongelijkheid

$$0 < x^p e^{-x} < (2p)^{2p} \frac{1}{x^p}.$$

Vanwege $\lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0$ voor $p > 0$, is dan $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p e^{-x} = 0$. □

2.5. Continuïteit

2.5.1. Definitie. Een functie f heet continu in $a \in \text{DOM } f$ indien er voor iedere omgeving V van $f(a)$ een omgeving U van a bestaat zō dat voor alle $x \in U \cap \text{DOM } f$ geldt: $f(x) \in V$.

Bewijs zelf de stelling:

2.5.2. Stelling. Zij $a \in \text{DOM } f$ een verdichtingspunt van $\text{DOM } f$, dan is f continu in a dan en slechts dan als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Voorbeelden. 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 1 & \text{als } x = 0 \end{cases}$,

is continu in $x = 0$ omdat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$.

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{als } x < 0 \end{cases}$,

is niet continu in $x = 0$ omdat $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ en $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, dus $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ bestaat niet.

Definities. Een functie f heet continu op een verzameling V als f continu is in elk punt van V .

Een functie f heet continu als f continu is op $\text{DOM } f$.

Voorbeelden. Polynomen, de goniometrische functies $\sin x$, $\cos x$, de exponentiële functie e^x , de hyperbolische functies $\sinh x$, $\cosh x$, de cyclometrische functie $\arctan x$, zijn voorbeelden van functies die overal continu zijn. De functie $\log x$ is continu op \mathbb{P} . De cyclometrische functies $\arcsin x$, $\arccos x$, zijn continu op $[-1, 1]$.

De volgende stelling geeft ons een mogelijkheid om snel in te zien of een functie continu is.

2.5.3. Stelling. Zijn de functies f en g continu in a , dan zijn ook $f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), fg , f/g (mits $g(a) \neq 0$) continu in a . Is f continu in $b = g(a)$ en g continu in a , dan is $f \circ g$ continu in a .

Bewijs. Het eerste deel van de stelling volgt eenvoudig uit 2.5.2 en 2.4.6. We bewijzen nu dat $f \circ g$ continu in a is. Zij V een omgeving van $f(g(a))$ dan is er een omgeving U_1 van $g(a)$ zodat voor alle $y \in U_1 \cap \text{DOM } f$ geldt: $f(y) \in V$. De functie g is continu in a , dus bij de omgeving U_1 van $g(a)$ bestaat er een omgeving U_2 van a zodat voor alle $x \in U_2 \cap \text{DOM } g$ geldt: $g(x) \in U_1$. Voor $x \in U_1 \cap \text{DOM}(f \circ g)$ geldt dan: $f(g(x)) \in V$. \square

Voorbeelden. 3) Een rationale functie $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ waarin p en q polynomen zijn, is continu in a als $q(a) \neq 0$ is.

4) $f(x) = \log(x^2+1)$. De functie f is continu omdat de functies $h(x) = x^2+1$, $g(x) = \log x$ continu zijn en $f = g \circ h$.

Uit 2.5.3 volgt onmiddellijk:

1) Zij $f \circ g$ gedefinieerd in een omgeving van a , g continu in a en f continu in $g(a)$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(g(a))$.

2) Zij $f \circ g$ gedefinieerd in een interval van de vorm (M, ∞) met $M \in \mathbb{R}$ en zij f continu in b . Als $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$, dan is $\lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) = f(b)$.

(Analoog: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(g(x))$.)

Deze resultaten zijn bruikbaar bij het berekenen van limieten.

Voorbeelden. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan(\tan y)}{\tan y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} =$
 $= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \cos y = 1$.

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(1 + \frac{\sin x}{x}) = 0$, omdat $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ en $f(x) = \log(1+x)$ continu is in 0 met $f(0) = \log(1+0) = 0$.

Definitie (continue voortzetbaarheid). Zij a een verdichtingspunt van $\text{DOM } f$, $a \notin \text{DOM } f$. De functie f heet continu voortzetbaar in a , indien er een functie F met definitieverzameling $\text{DOM } f \cup \{a\}$ bestaat zó dat F continu is in a en $F(x) = f(x)$ voor alle $x \in \text{DOM } f$.

Eigenschap. Zij a een verdichtingspunt van $\text{DOM } f$, $a \notin \text{DOM } f$. Dan is f continu voortzetbaar in a , dan en slechts dan als $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bestaat.

Voorbeelden. 7) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$. Definiëren we $f(0) = 1$, dan is f continu (voortgezet) in 0 omdat $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

$$8) f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{als } x > 0, \\ x & \text{als } x < 0. \end{cases}$$

De functie f is niet continu voortzetbaar in 0 omdat $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ niet bestaat; immers $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 1$ en $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = 0$.

2.5.4. Stelling. Zij f continu op $[a, b]$ en zij (a_n) een rij getallen met $a_n \in [a, b]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$. Dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c)$.

Bewijs. De stelling volgt eenvoudig uit 2.5.2 en 2.4.3.

Voorbeelden. 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(1 + \frac{1}{n}) = 0$, omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ en $f(x) = \log(1+x)$ continu is in 0 met $f(0) = \log(1+0) = 0$.

10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, omdat $f(x) = e^x$ continu is en dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n} \log n\right) = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n}\right) = e^0 = 1,$$

(zie 2.4, voorbeeld 7). Hierbij is ingevoerd de notatie $\exp(x) := e^x$;

deze wordt vooral gebruikt als de exponent een samengestelde uitdrukking is.

Laat de functie f continu zijn op een interval $[a, b]$. De grafiek van $y = f(x)$ is dan een "doorlopende" kromme die elke rechte $y = c$ met c tussen $f(a)$ en $f(b)$, snijdt. Deze eigenschap wordt geformuleerd in de volgende stelling.

2.5.5. Stelling (tussenwaardestelling). Zij f continu op $[a, b]$ en η een getal tussen $f(a)$ en $f(b)$, dan is er een $\xi \in (a, b)$ zó dat $f(\xi) = \eta$.

Bewijs. Veronderstel $f(a) < \eta < f(b)$. We construeren een intervallen-nest (zie 1.4.12) dat de gezochte waarde ξ bevat.

Definieer $a_1 := a$, $b_1 := b$. Halveer $[a_1, b_1]$ en onderzoek $f(\frac{1}{2}(a_1 + b_1))$. Als $f(\frac{1}{2}(a_1 + b_1)) = \eta$ dan voldoet $\xi = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. Indien $f(\frac{1}{2}(a_1 + b_1)) < \eta$ dan stellen we: $a_2 := \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$, $b_2 := b_1$; indien $f(\frac{1}{2}(a_1 + b_1)) > \eta$ dan stellen we: $a_2 := a_1$, $b_2 := \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. In beide gevallen zal gelden $f(a_2) < \eta$, $f(b_2) > \eta$.

Pas dezelfde procedure opnieuw toe op $[a_2, b_2]$. Als $f(\frac{1}{2}(a_2+b_2)) = \eta$ dan voldoet $\xi = \frac{1}{2}(a_2+b_2)$. Als $f(\frac{1}{2}(a_2+b_2)) \neq \eta$ definieer dan $[a_3, b_3]$ als die intervalhelft waarvoor $f(a_3) < \eta$, $f(b_3) > \eta$.

Zet dit halveringsproces voort dan kunnen zich twee mogelijkheden voordoen.

Als $f(\frac{1}{2}(a_n+b_n)) = \eta$ voor zekere n , breekt het proces af en voldoet

$\xi = \frac{1}{2}(a_n+b_n)$. Als het proces niet afbreekt ontstaat er een rij van intervallen $[a_n, b_n]$ waarbij $f(a_n) < \eta$, $f(b_n) > \eta$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Deze intervallen vormen een intervallen-nest als beschouwd in 1.4.12; merk op dat

$b_n - a_n = (b-a)/2^{n-1}$ zodat $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Volgens 1.4.12 is er precies

één ξ met $\xi \in [a_n, b_n]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$; tevens geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$.

Met 2.5.4 volgt dan tenslotte $f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq \eta$, $f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq \eta$, zodat $f(\xi) = \eta$. □

Opmerking. Indien f niet continu is op $[a, b]$ dan hoeft f niet elke waarde tussen $f(a)$ en $f(b)$ aan te nemen. Beschouw bijv. de functie f gedefinieerd

op $[0, 1]$ volgens $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{als } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$ Er is dan geen $\xi \in [0, 1]$ waarvoor $f(\xi) = \frac{1}{2}$.

Voorbeeld. Zij f continu op $[a, b]$ met $f(a) \geq a$ en $f(b) \leq b$, dan is er een $\xi \in [a, b]$ zó dat $f(\xi) = \xi$. Dit volgt eenvoudig door toepassing van de tussenwaardstelling (2.5.5) op de functie $f(x) - x$.

We definiëren nu de begrippen maximum en minimum van een functie. In plaats van maximum en minimum gebruiken we ook wel de omvattende benaming extremum van een functie.

2.5.6. Definities. Een functie f heeft een locaal maximum in $c \in \mathbb{R}$, indien er een omgeving U van c bestaat zodat $f(x) \leq f(c)$ voor alle $x \in U \cap \text{DOM } f$.

Een functie f heeft een globaal maximum in $c \in \mathbb{R}$, indien $f(x) \leq f(c)$ voor alle $x \in \text{DOM } f$.

De definities van locaal minimum, globaal minimum in c zijn dezelfde met vervanging van $f(x) \leq f(c)$ door $f(x) \geq f(c)$.

De existentie van globale extrema wordt verzekerd door de volgende stelling van Weierstrass die we niet bewijzen.

2.5.7. Stelling (Weierstrass). Zij f continu op $[a,b]$, dan heeft f op $[a,b]$ een globaal maximum en een globaal minimum, d.w.z. er bestaan punten $c_1, c_2 \in [a,b]$ zodat $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ voor alle $x \in [a,b]$.

Opmerking. Als f niet continu is op $[a,b]$ dan hoeft f geen globaal maximum te hebben. Beschouw bijv. de functie f gedefinieerd op $[0,1]$ volgens

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{als } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{als } x = 1. \end{cases} \quad \text{Dan heeft } f \text{ geen maximum op } [0,1].$$

Ook als het interval begrensd maar niet gesloten is kan men een voorbeeld geven van een continue functie die geen maximum heeft; $f(x) = \tan x$ gedefinieerd op $[0, \frac{1}{2}\pi)$, heeft geen maximum.

Gevolg. Zij f continu op $[a,b]$ dan is $f([a,b]) = [m,M]$ waarbij m het globale minimum en M het globale maximum van f op $[a,b]$ is. Dit resultaat volgt uit de tussenwaardestelling (2.5.5) en de stelling van Weierstrass (2.5.7). Indien f bovendien monotoon stijgend is, dan geldt $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.

2.5.8. Stelling. Zij f continu en monotoon stijgend op $[a,b]$, dan bestaat de inverse functie f^{\leftarrow} en f^{\leftarrow} is continu en monotoon stijgend op $[f(a), f(b)]$.

Bewijs. Uit de monotonie van f volgt dat f een injectie is (zie 2.3.2).

f is tevens continu zodat $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. De functie

$f: [a,b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ is dus een bijectie en de inverse functie

$f^{\leftarrow}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a,b]$ bestaat.

Het is duidelijk dat f^{\leftarrow} monotoon stijgend is. We tonen nog aan dat f^{\leftarrow} continu is op $[f(a), f(b)]$. Zij $\gamma \in (f(a), f(b))$ en $c = f^{\leftarrow}(\gamma)$. Laat V een omgeving van c zijn, $V := (c-\epsilon, c+\epsilon)$ met $\epsilon > 0$, zodanig dat $V \subset [a,b]$. Voor alle $y \in U := (f(c-\epsilon), f(c+\epsilon))$ geldt dan $f^{\leftarrow}(f(c-\epsilon)) < f^{\leftarrow}(y) < f^{\leftarrow}(f(c+\epsilon))$ oftewel $c - \epsilon < f^{\leftarrow}(y) < c + \epsilon$, d.w.z. $f^{\leftarrow}(y) \in V$. Dus f^{\leftarrow} is continu in γ .

Indien $\gamma = f(a)$ definiëren we $V := [a, a+\epsilon)$, $U := [f(a), f(a+\epsilon))$, terwijl we in geval $\gamma = f(b)$ stellen $V := (b-\epsilon, b]$, $U := (f(b-\epsilon), f(b)]$. Ook dan geldt: voor alle $y \in U$ is $f^{\leftarrow}(y) \in V$, zodat f^{\leftarrow} continu is in $f(a)$ en $f(b)$. \square

Een analoge stelling geldt voor continue, monotoon dalende functies. Een functie die continu is op $[a,b]$ en een inverse bezit, is strikt monotoon (probeer dit zelf te bewijzen met behulp van de tussenwaardestelling 2.5.5), zodat we de stelling kunnen formuleren:

Stelling. Zij f continu op $[a,b]$. Als f een inverse bezit, dan is ook f^{\leftarrow} continu.

2.6. Differentiaalrekening

2.6.1. Definitie. Zij f gedefinieerd in een omgeving U van a . De functie f heet differentieerbaar in a , indien er een getal $A \in \mathbb{R}$ bestaat en een functie ρ gedefinieerd in een omgeving V van 0 , zodanig dat

$$(i) \quad f(a+h) = f(a) + Ah + h\rho(h) \text{ voor alle } h \in V,$$

$$(ii) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0.$$

Als f differentieerbaar is in a , dan is

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

We geven het getal A aan door $f'(a)$, de afgeleide van f in a .

Bewijs de volgende stelling:

2.6.2. Stelling. Zij f gedefinieerd in een omgeving van a , dan is f differentieerbaar in a dan en slechts dan als $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ bestaat. Deze limiet is gelijk aan $f'(a)$.

Definitie. Zij $[a, b) \subset \text{DOM } f$, dan heet $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ de rechteraafgeleide van f in a ; notatie $f'(a+0)$.

Analoog is te definiëren de linkerafgeleide van f in a ; notatie $f'(a-0)$.

Bewijs zelf de stelling:

Stelling. Zij f gedefinieerd in een omgeving van a , dan is f differentieerbaar in a dan en slechts dan als $f'(a+0) = f'(a-0)$.

Definities. Een functie f heet differentieerbaar op (a, b) als f differentieerbaar is in elk punt van (a, b) .

Een functie f heet differentieerbaar op $[a, b]$ als f differentieerbaar is op (a, b) en de rechteraafgeleide $f'(a+0)$ zowel als de linkerafgeleide $f'(b-0)$ bestaan.

Is bovendien de afgeleide f' continu op (a, b) resp. $[a, b]$ dan heet f continu differentieerbaar op (a, b) resp. $[a, b]$.

Voorbeeld. De functie $f(x) = \sin x$ is differentieerbaar, immers

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{1}{2}h}{h} \cos(a + \frac{1}{2}h) = \cos a.\end{aligned}$$

We noteren $f'(x) = \cos x$ voor alle x .

Zij de functie f differentieerbaar in a . Indien we f benaderen door de lineaire functie $l(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, dan maken we in de buurt van a een fout gegeven door $(x-a)\rho(x-a)$, waarbij $\rho(x-a) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow a$). We zeggen dat f in a lineair benaderbaar is. Grafisch betekent dit dat de grafiek van l (de rechte: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$) raakt aan de grafiek van f in $x = a$.

Bewijs zelf nu de stelling:

Stelling. Als f differentieerbaar is in a , dan is f continu in a .

De omgekeerde bewering is niet waar, getuige het voorbeeld $f(x) = |x|$. Deze functie is continu in 0, echter niet differentieerbaar. De functie heeft wel een rechter- en linkerafgeleide in 0, gelijk aan 1 resp. -1.

We kennen reeds de afgeleiden van een aantal functies:

2.6.3. Tabel

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log x $	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\int g(x)dx$	$g(x)$

Met behulp van de nu volgende regels voor het differentiëren en de voorafgaande tabel van afgeleiden zijn we in staat om de afgeleiden van een groot aantal functies te berekenen.

2.6.4. Regels voor het differentiëren. Als f, g differentieerbaar zijn, dan zijn ook $f+g, \lambda f (\lambda \in \mathbb{R}), fg, f/g$ (mits $g(x) \neq 0$), $f \circ g$ en f^{-1} (mits $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$) differentieerbaar en hun afgeleiden worden gegeven door

- 1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$,
- 2) $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$,
- 3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- 4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,
- 5) $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$ (kettingregel),
- 6) $(f^{\leftarrow}(x))' = \frac{1}{f'(f^{\leftarrow}(x))}$.

In plaats van $f'(x)$ noteren we ook wel $\frac{df}{dx}$ of $\frac{dy}{dx}$.

Een continue functie f gedefinieerd op $[a,b]$, heeft volgens de stelling van Weierstrass (2.5.7) op $[a,b]$ een globaal maximum en een globaal minimum. Een belangrijke stelling die het zoeken naar extrema vergemakkelijkt is de volgende.

2.6.5. Stelling. Zij f gedefinieerd op $[a,b]$. Als f een lokaal extremum heeft in $c \in (a,b)$ en f is differentieerbaar in c , dan is $f'(c) = 0$.

Bewijs. Onderstel dat f in c een lokaal maximum heeft. Dan is er een omgeving U van c zodat $f(x) \leq f(c)$ voor alle $x \in U$. Daaruit volgt voor de rechterafgeleide in c ,

$$f'(c+0) = \lim_{x \downarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} \leq 0,$$

en voor de linkerafgeleide in c ,

$$f'(c-0) = \lim_{x \uparrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} \geq 0.$$

De functie f is differentieerbaar in c zodat $f'(c+0) = f'(c-0) = f'(c)$, dus $f'(c) = 0$. □

Volgens 2.6.5 is " $f'(c) = 0$ " een nodige voorwaarde opdat een (differentieerbare) functie f een lokaal extremum heeft in c . De voorwaarde is echter niet voldoende zoals blijkt uit het volgende tegenvoorbeeld: voor de functie $f(x) = x^3$ is $f'(0) = 0$ maar f heeft geen extremum in 0 .

Is de functie f continu op $[a,b]$ dan zijn alleen de randpunten a,b , de punten waarin f niet differentieerbaar is en de punten waarin de afgeleide f' gelijk is aan nul, kandidaten voor extrema. Zij $f'(c) = 0$ dan is met behulp van het teken van de afgeleide in een omgeving U van c vast te stellen of f in c een maximum dan wel een minimum heeft. Als $f'(x) > 0$ voor $x \in U$ en $x < c$ en $f'(x) < 0$ voor $x \in U$ en $x > c$, dan heeft f in c een lokaal maximum; als $f'(x) < 0$ voor $x \in U$ en $x < c$ en $f'(x) > 0$ voor $x \in U$ en $x > c$, dan heeft f in c een lokaal minimum; zie ook 2.6.8.

2.6.6. Stelling (Rolle). Zij f continu op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b) . Als $f(a) = f(b)$, dan is er een $\xi \in (a,b)$ met $f'(\xi) = 0$.

Bewijs. Als $f(x) = f(a)$ voor alle $x \in [a,b]$, dan kunnen we voor ξ ieder getal uit (a,b) nemen.

Als $f(x_1) > f(a)$ voor zekere $x_1 \in (a,b)$ dan heeft f een globaal maximum in een punt $\xi \in (a,b)$, en $f'(\xi) = 0$. Als $f(x_1) < f(a)$ voor zekere $x_1 \in (a,b)$ dan heeft f een globaal minimum in een punt $\xi \in (a,b)$, en $f'(\xi) = 0$. \square

Een belangrijk gevolg van deze stelling zullen we formuleren in de nu volgende middelwaardestelling.

2.6.7. Stelling (middelwaardestelling). Zij f continu op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b) , dan is er een $\xi \in (a,b)$ zodat $f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)$.

Bewijs. Zij $\psi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ de functie, gegeven door

$$\psi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a),$$

dan is ψ continu op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b) . Voorts geldt dat $\psi(a) = \psi(b) = f(a)$, dus er is een $\xi \in (a,b)$ met

$$0 = \psi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

\square

2.6.8. Gevolgen. Als $f'(x) > 0$ voor alle $x \in (a,b)$, dan is f monotoon stijgend op (a,b) . Als $f'(x) < 0$ voor alle $x \in (a,b)$ dan is f monotoon dalend op (a,b) . Als $f'(x) = 0$ voor alle $x \in (a,b)$ dan is f een constante op (a,b) .

Immers, zij $a < x_1 < x_2 < b$, dan is er een $\xi \in (x_1, x_2)$ zodat $f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1)$. In de drie gevallen zal dan gelden resp. $f(x_2) > f(x_1)$, $f(x_2) < f(x_1)$, $f(x_2) = f(x_1)$.

Hogere afgeleiden. De afgeleide van een differentieerbare functie f kan opnieuw differentieerbaar zijn en we noemen de afgeleide hiervan de tweede afgeleide van f , genoteerd als f'' of $\frac{d^2 f}{dx^2}$ of $\frac{d^2 y}{dx^2}$. In het algemeen geven we de n -de afgeleide van f aan met $f^{(n)}$, dus $f^{(n)} = \left\{ f^{(n-1)} \right\}'$; naast $f^{(n)}$ komt ook voor de notatie $\frac{d^n f}{dx^n}$ of $\frac{d^n y}{dx^n}$.

We zeggen dat een functie n -maal continu differentieerbaar is op $[a,b]$ resp. (a,b) indien de functie n -maal differentieerbaar is op $[a,b]$ resp. (a,b) en de n -de afgeleide continu is op $[a,b]$ resp. (a,b) .

De regel voor het differentiëren van een product kunnen we uitbreiden tot:

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

(formule van Leibniz).

Opgaven. 1) Bewijs de formule van Leibniz.

2) Zij $f(x) = \arcsin x$. Bewijs dat voor alle $x \in (-1,1)$ en alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) = (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + n^2 f^{(n)}(x).$$

Met behulp van het teken van de tweede afgeleide kunnen we vaststellen of een functie convex of concaaf is; daarvoor de volgende stelling.

2.6.9. Stelling. Zij f tweemaal differentieerbaar op een open interval I , dan geldt: f is convex op $I \iff f''(x) \geq 0$ voor alle $x \in I$.

Bewijs. (\Leftarrow). Uit $f''(x) \geq 0$ volgt dat f' monotoon niet dalend is op I .

Zij $x, y \in I$ met $x < y$, en zij $\lambda \in (0,1)$. Op grond van de middelwaardestelling (2.6.7) is er een ξ met $x < \xi < \lambda x + (1-\lambda)y$ zodat

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x) = (1-\lambda)(y-x)f'(\xi), \quad (1)$$

en een η met $\lambda x + (1-\lambda)y < \eta < y$ zodat

$$f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda(y-x)f'(\eta). \quad (2)$$

Vermenigvuldig (1) met λ en (2) met $(1-\lambda)$, en trek af dan vinden we

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y) = \lambda(1-\lambda)(y-x)(f'(\xi) - f'(\eta)).$$

Wegens $\xi < \eta$ is $f'(\xi) \leq f'(\eta)$ waarna volgt

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) .$$

Conform de definitie 2.3.3 is f dan convex op I .

(\Rightarrow). Zij f convex op I dan geldt voor $x, y \in I$ met $x < y$, en $\lambda \in (0,1)$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) .$$

Herschrijf deze ongelijkheid als volgt:

$$\frac{f(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} \leq \frac{f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)}{\lambda(y-x)} .$$

Neem hierin de limiet voor $\lambda \rightarrow 0$ resp. $\lambda \rightarrow 1$ dan vinden we

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \leq f'(y) .$$

Dus f' is monotoon niet dalend en daaruit volgt (ga na) $f''(x) \geq 0$ voor alle $x \in I$. □

Opgave. Onderzoek nogmaals de voorbeelden na 2.3.3.

Zij de functie f differentieerbaar in een omgeving van a . Indien we f benaderen door de constante functie $g(x) = f(a)$, dan maken we een fout:

$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$, waarin ξ een punt is gelegen tussen a en x . Is de functie f $(n+1)$ -maal differentieerbaar in een omgeving van a dan kunnen we f benaderen door een polynoom p zodanig dat $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ voor $k = 0, 1, \dots, n$. Overeenkomstig 2.2, voorbeeld 7 is p voor te stellen door

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n .$$

De volgende stelling doet een uitspraak over de fout $f(x) - p(x)$, die we maken bij deze benadering.

2.6.10. Stelling (Taylor). Zij f n -maal continu differentieerbaar op $[a, b]$ met $f^{(n)}$ differentieerbaar op (a, b) en zij $x \in [a, b]$. Dan is er een $\xi := a + \theta(x-a)$ met $\theta \in (0, 1)$, zodat

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n ,$$

waarin

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} .$$

Bewijs. Definieer het getal $R(x)$ door

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} R(x) := R_n = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Voer in de functie $\varphi : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door

$$\varphi(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!} (x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x-t)^n + \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} R(x).$$

Dan is φ continu op $[a, x]$ en differentieerbaar op (a, x) , terwijl

$\varphi(a) = \varphi(x) = f(x)$. Volgens de stelling van Rolle (2.6.6) is er dus een

$\xi := a + \theta(x-a)$ met $0 < \theta < 1$, zodat $\varphi'(\xi) = 0$. Na uitwerking van φ' vinden we

$$\varphi'(\xi) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} [f^{(n+1)}(\xi) - R(x)],$$

waaruit volgt $R(x) = f^{(n+1)}(\xi)$. □

De in 2.6.10 gegeven betrekking voor $f(x)$ heet de formule van Taylor; R_n heet de restterm. Indien f een polynoom is met graad $\leq n$ dan is $R_n = 0$ en de formule gaat over in de formule van Taylor voor polynomen (zie 2.2.7).

Voorbeelden. 1) De functie $f(x) = e^x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op \mathbb{R} met $f^{(k)}(x) = e^x$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n = 0, 1, 2, \dots$ is er een $\theta \in (0, 1)$ zodat

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}.$$

Nu is $e^{\theta x} > 0$, dus voor alle $x > 0$ geldt

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

2) De functie $f(x) = \sin x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op \mathbb{R} met $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{1}{2}n\pi)$ (bewijs dit door volledige inductie), dus $f^{(2k)}(0) = 0$ en $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$ is er een $\theta \in (0, 1)$ zodat

$$\begin{aligned} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \\ + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(\theta x + (n+\frac{1}{2})\pi). \end{aligned}$$

Neem $n = 4$; voor $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ geldt dan

$$\sin x > x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} .$$

- 3) De functie $f(x) = \cos x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op \mathbb{R} met $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{1}{2}n\pi)$ (ga na!). Dus $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ en $f^{(2k+1)}(0) = 0$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n = 0, 1, 2, \dots$ is er een $\theta \in (0, 1)$ zodat

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \\ &+ \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\theta x + (n+1)\pi) . \end{aligned}$$

- 4) De functie $f(x) = \log(1+x)$ is willekeurig vaak differentieerbaar op $(-1, \infty)$ met

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) .$$

Voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$ is er een $\theta \in (0, 1)$ zodat

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \\ &+ \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} . \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat voor $x > 0$ geldt

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x .$$

- 5) Bereken $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}$.

Voor alle y is er een $\theta_1 \in (0, 1)$ zodat

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} e^{\theta_1 y} ,$$

dus voor alle x geldt

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} e^{\theta_1 x^2} .$$

Voor alle x is er een $\theta_2 \in (0,1)$ zodat

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cos \theta_2 x .$$

Bedenk dat de getallen θ_1, θ_2 van x afhangen! Nu geldt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} e^{\theta_1 x^2}}{\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cos \theta_2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{6} e^{\theta_1 x^2}}{\frac{1}{4!} - \frac{x^2}{6!} \cos \theta_2 x} = 12 . \end{aligned}$$

Bedenk hierbij dat

$$0 \leq x^2 e^{\theta_1 x^2} \leq x^2 e^{x^2}, \quad -x^2 \leq x^2 \cos \theta_2 x \leq x^2 ,$$

zodat

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\theta_1 x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \theta_2 x = 0 ,$$

op grond van de insluitstelling 2.4.5.

Interpolatieformule van Lagrange. Zij de functie f continu op $[a,b]$ en $(n+1)$ -maal differentieerbaar op (a,b) . We benaderen f door een polynoom p met $\text{gr}(p) \leq n$ of p is het nulpolynoom, zodanig geconstrueerd dat $p(x_k) = f(x_k)$ voor $k = 0, 1, \dots, n$. Hierin zijn x_0, x_1, \dots, x_n gegeven getallen met $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$. Overeenkomstig 2.2, voorbeeld 6 wordt p gegeven door

$$p(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x) ,$$

waarin

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1) \cdots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \cdots (x_k-x_n)} .$$

Het polynoom p heet het interpolatiepolynoom van Lagrange.

We voeren nog in de notatie

$$\ell(x) := (x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n) .$$

2.6.11. Stelling. Zij f continu op $[a,b]$ en $(n+1)$ -maal differentieerbaar op (a,b) . Voor alle $x \in [a,b]$ is er dan een $\xi \in (a,b)$ zodat

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \ell_k(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \ell(x) .$$

(interpolatieformule van Lagrange).

Bewijs. Zij $x \in [a,b]$, $x \neq x_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Definieer het getal $R(x)$ door

$$\frac{\ell(x)}{(n+1)!} R(x) := f(x) - \sum_{k=0}^n f(x_k) \ell_k(x) .$$

Voer in de functie $\varphi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door

$$\varphi(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n f(x_k) \ell_k(t) - \frac{\ell(t)}{(n+1)!} R(x) .$$

Dan is φ continu op $[a,b]$ en $(n+1)$ -maal differentieerbaar op (a,b) . Uit de constructie van het interpolatiepolynoom en de definitie van ℓ volgt $\varphi(x_k) = 0$ voor $k = 0, 1, \dots, n$ (ga dit na). Tevens is $\varphi(x) = 0$. De functie φ heeft dus $n+2$ verschillende nulpunten in $[a,b]$.

Volgens de stelling van Rolle (2.6.6) ligt tussen elke twee opeenvolgende nulpunten van φ een nulpunt van φ' . De afgeleide φ' heeft dus minstens $n+1$ verschillende nulpunten in (a,b) . Op dezelfde gronden heeft φ'' minstens n verschillende nulpunten in (a,b) , enz. Na herhaald toepassen van de stelling van Rolle vinden we dat er een $\xi \in (a,b)$ is zodat $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Werk $\varphi^{(n+1)}$ uit en bedenk dat $\ell_k^{(n+1)}(t) = 0$ voor $k = 0, 1, \dots, n$, $\ell^{(n+1)}(t) = (n+1)!$.

We vinden dan

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - R(x) ,$$

waaruit volgt $R(x) = f^{(n+1)}(\xi)$.

Als $x = x_k$ voor zekere $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ dan is de bewering triviaal en kan men voor ξ ieder getal uit (a,b) nemen. □

Opmerking. Het getal ξ in de interpolatieformule hangt af van x .

2.7. Integraalrekening

Op de middelbare school hebben we reeds kennisgemaakt met de Riemann-integraal

$$\int_a^b f(x) dx$$

van een begrensde functie f gedefinieerd op het interval $[a,b]$. Als de integraal bestaat dan heet f integreerbaar over $[a,b]$. De definitie wordt als volgt uitgebreid tot de gevallen waarin $a \geq b$.

Als $a > b$, dan $\int_a^b f(x) dx := - \int_b^a f(x) dx$ en als $a = b$, dan $\int_a^b f(x) dx := 0$.

2.7.1. Eigenschappen. (De functies in de volgende eigenschappen genoemd zullen over de betreffende intervallen integreerbaar zijn.)

I.
$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx \text{ voor alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

II.
$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx .$$

III. Zij $b \geq a$ en $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a,b]$, dan is

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 .$$

IV. Als f integreerbaar is over $[a,b]$, dan is f integreerbaar over elk deelinterval $[c,d]$ van $[a,b]$.

Een aantal belangrijke gevolgen van deze eigenschappen zullen we nu gaan afleiden.

Gevolgen. 1) Zij $b \geq a$ en $f(x) \geq g(x)$ voor alle $x \in [a,b]$, dan is

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx .$$

Definieer de functie h door $h(x) = f(x) - g(x)$, dan is $h(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$, dus

$$0 \leq \int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx .$$

2) Zij $b \geq a$ en $m \leq f(x) \leq M$ voor alle $x \in [a, b]$, dan is

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a) .$$

3) Zij $b \geq a$, dan is

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

Voor alle $x \in [a, b]$ geldt $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, dus

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

4) Zij $b > a$, f continu op $[a, b]$ en $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$. Indien $f(\xi) > 0$ voor zekere $\xi \in [a, b]$, dan is

$$\int_a^b f(x) dx > 0 .$$

Omdat f continu is op $[a, b]$ bestaat er een deelinterval $[c, d]$ van $[a, b]$ met $\xi \in [c, d]$, zō dat $f(x) \geq \frac{1}{2}f(\xi)$ voor alle $x \in [c, d]$. Vervolgens is dan

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_c^d f(x) dx \geq \frac{1}{2}f(\xi)(d-c) > 0 .$$

Voorbeeld. We bewijzen nogmaals de ongelijkheid: $\log(1+x) < x$ voor alle $x > 0$. Voor alle $x > 0$ geldt

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} < \int_0^x 1 dt = x .$$

Bij het opschrijven van een integraal $\int_a^b f(x)dx$ dienen we te verifiëren of de integraal bestaat. De volgende stelling geeft aan dat voor een belangrijke klasse van functies de integreerbaarheid is verzekerd.

2.7.2. Stelling. Zij f begrensd op $[a,b]$ en continu op $[a,b]$ met uitzondering van een eindig aantal punten, dan bestaat $\int_a^b f(x)dx$.

Deze stelling bewijzen we niet.

Indien de integrand f continu is op $[a,b]$ geldt ook nog de volgende stelling.

2.7.3. Stelling (middelwaardestelling van de integraalrekening). Zij f continu op $[a,b]$, dan is er een $\xi \in [a,b]$ zodat

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) .$$

Bewijs. Volgens de stelling van Weierstrass (2.5.7) heeft f op $[a,b]$ een globaal maximum M en een globaal minimum m . Wegens $m \leq f(x) \leq M$ voor alle $x \in [a,b]$ geldt

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) .$$

Er is dan een $\mu \in \mathbb{R}$ met $m \leq \mu \leq M$, zodat

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) .$$

Met de tussenwaardestelling (2.5.5) volgt dat $\mu = f(\xi)$ voor zekere $\xi \in [a,b]$. □

Stelling 2.7.3 drukt uit dat de gemiddelde waarde

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

van een continue functie f op $[a,b]$, gelijk is aan een functiewaarde.

De verbinding tussen differentiaal- en integraalrekening wordt gelegd door de zg. hoofdstelling der integraalrekening. Deze stelling vormt tevens een belangrijk hulpmiddel voor de berekening van integralen. Als voorbereiding op de hoofdstelling bewijzen we eerst nog de volgende stelling.

2.7.4. Stelling. Zij f integreerbaar over $[a,b]$ en zij $F : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $F(x) := \int_a^x f(t)dt$.

Dan is F continu op $[a,b]$.

Als bovendien f continu is op $[a,b]$ dan is F differentieerbaar op $[a,b]$ met $F' = f$.

Bewijs. (i) De functie f is begrensd op $[a,b]$, dus er is een $M > 0$ zodat $|f(x)| \leq M$ voor alle $x \in [a,b]$. Derhalve geldt voor alle $x, y \in [a,b]$:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq M|y-x|.$$

Daaruit volgt: $\lim_{y \rightarrow x} |F(y) - F(x)| = 0$, dus F is continu in x .

(ii) Zij bovendien f continu op $[a,b]$. Op grond van de middelwaardestelling (2.7.3) geldt dan voor alle $x, y \in [a,b]$ met $y \neq x$:

$$\left| \frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t)dt - f(x) \right| = |f(\xi) - f(x)|.$$

waarin ξ een getal is gelegen tussen x en y . Daaruit volgt:

$$\lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x) \right| = 0,$$

dus F is differentieerbaar in x met afgeleide $F'(x) = f(x)$. □

We bewijzen nu de hoofdstelling.

2.7.5. Hoofdstelling. Zij f continu op $[a,b]$ en φ differentieerbaar op $[a,b]$ met $\varphi' = f$, dan is

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a) =: \varphi(x) \Big|_a^b.$$

Bewijs. We definiëren de functie $F : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ door $F(x) := \int_a^x f(t)dt$, dan is

$$F' = f, F(a) = 0, F(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

De functies φ en F hebben dezelfde afgeleide op $[a,b]$, dus $F - \varphi$ is constant op $[a,b]$, zie 2.6.8.

Hieruit volgt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \varphi(b) - \varphi(a) . \quad \square$$

Door de hoofdstelling is de berekening van de integraal $\int_a^b f(x)dx$ met f continu op $[a,b]$, teruggebracht tot het vinden van een zg. primitieve functie van f , d.i. een functie met als afgeleide f . Nu volgt uit de middelwaardestelling 2.6.7 (zie ook 2.6.8) dat een primitieve functie op een constante na is bepaald. De verzameling van primitieve functies noteren we als de onbepaalde integraal $\int f(x)dx$ en we schrijven

$$\int f(x)dx = \varphi(x) + C \quad \text{als } \varphi'(x) = f(x) ;$$

hierin is C een willekeurige constante.

De hierna volgende regels voor het onbepaald integreren en tabel 2.6.3 maken het mogelijk om een groot aantal onbepaalde integralen te berekenen.

2.7.6. Regels voor het onbepaald integreren. 1) Voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ($(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$) is

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx.$$

2) Partiële integratie:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

3) Substitutieregel:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \varphi(g(x)) + C$$

als

$$\int f(y)dy = \varphi(y) + C .$$

Voorbeelden. 1) $\int \arcsin x dx = \int (x)' \arcsin x dx =$

$$= x \arcsin x - \int x(\arcsin x)' dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx .$$

Substitueer $y = x^2$ dan gaat de integraal over in

$$x \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = x \arcsin x + \sqrt{1-y} + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$2) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan y + C = \arctan e^x + C,$$

waarbij de substitutie $y = e^x$ is toegepast.

3) Zij f $(n+1)$ -maal continu differentieerbaar op een omgeving U van a .
Voor alle $x \in U$ is dan

$$2.7.7. \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \\ + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Bewijs. Door herhaalde partiële integratie vinden we

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt = f(a) - \int_a^x (x-t)' f'(t) dt = \\ = f(a) - (x-t) f'(t) \Big|_a^x + \int_a^x (x-t) f''(t) dt = \\ = f(a) + f'(a)(x-a) - \frac{1}{2} \int_a^x ((x-t)^2)' f''(t) dt = \\ = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f'''(t) dt, \text{ enz.}$$

Na n -maal partieel integreren ontstaat er juist de te bewijzen formule. \square

Opmerking. Formule 2.7.7 stemt overeen met de formule van Taylor (2.6.10), waarbij nu de restterm R_n wordt voorgesteld door een integraal.

Opgave. Bewijs 2.7.7 door volledige inductie.

Oneigenlijke integralen. De definitie van de Riemann-integraal $\int_a^b f(x)dx$ veronderstelt dat $[a,b]$ een begrensd interval is en dat de integrand f begrensd is op $[a,b]$. We gaan nu het integraalbegrip uitbreiden in twee richtingen.

De eerste uitbreiding betreft integralen over een onbegrensd interval van de vorm $[a,\infty)$ of $(-\infty,a]$.

2.7.8. Definitie. Zij f integreerbaar over $[a,A]$ voor elke $A > a$, dan definiëren we

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx ,$$

mits de limiet bestaat. In dat geval zeggen we dat de oneigenlijke integraal $\int_a^\infty f(x)dx$ bestaat of convergent is; indien de limiet niet bestaat heet de integraal divergent.

Analoog is te definiëren $\int_{-\infty}^a f(x)dx$.

De tweede uitbreiding betreft integralen over een begrensd interval $[a,b]$ waarbij de integrand niet begrensd is in de buurt van één der eindpunten a of b .

2.7.9. Definities. Zij f integreerbaar over $[c,b]$ voor elke c met $a < c < b$, dan definiëren we

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c \downarrow a} \int_c^b f(x)dx ,$$

mits de limiet bestaat.

Zij f integreerbaar over $[a,c]$ voor elke c met $a < c < b$, dan definiëren we

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x)dx ,$$

mits de limiet bestaat.

Als de limiet bestaat dan zeggen we dat de oneigenlijke integraal $\int_a^b f(x)dx$ bestaat of convergent is; indien de limiet niet bestaat heet de integraal divergent.

Opmerking. Als f integreerbaar is over $[a, b]$ dan is

$$\lim_{c \downarrow a} \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

op grond van 2.7.4. De oneigenlijke integraal $\int_a^b f(x) dx$ stemt dan overeen met de (eigenlijke) integraal. Er is daarom geen bezwaar tegen om voor beide integralen dezelfde notatie te gebruiken.

Voorbeelden. 4)
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^A =$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \arctan A = \frac{1}{2}\pi.$$

5)
$$\int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \right) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \right) dx =$$

$$= \lim_{A \rightarrow -\infty} \log \left| \frac{x-1}{x-2} \right| \Big|_A^0 = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left(\log \frac{1}{2} - \log \left| \frac{A-1}{A-2} \right| \right) = -\log 2.$$

6)
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_\delta^1 =$$

$$= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{1-\alpha} (1 - \delta^{1-\alpha}) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{als } \alpha < 1, \\ \infty & \text{als } \alpha > 1. \end{cases}$$

Als $\alpha = 1$, dan is

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\delta \downarrow 0} [-\log \delta] = \infty.$$

De integraal $\int_0^1 x^{-\alpha} dx$ is convergent voor $\alpha < 1$ en divergent voor $\alpha \geq 1$.

7) Toon zelf aan dat $\int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx$ convergent is voor $\alpha > 1$ en divergent voor $\alpha \leq 1$.

We kunnen het integraalbegrip nog verder uitbreiden, hetgeen we aan de hand van een aantal voorbeelden doen, zonder de definities expliciet op te schrijven.

Voorbeelden. 8)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx := \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

9)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx := \int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Evenwel,
$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$
 bestaat niet wegens,

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log(1+A^2) = \infty,$$

dus
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$
 is divergent.

10)
$$\int_0^1 \frac{1}{x(1-x)} dx := \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(1-x)} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(1-x)} dx.$$

Nu is

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(1-x)} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \right) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \log \left(\frac{x}{1-x} \right) \Big|_{\delta}^{\frac{1}{2}} = \infty,$$

dus ook
$$\int_0^1 \frac{1}{x(1-x)} dx$$
 is divergent.

11)
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2 \sqrt{x}} dx := \int_0^1 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2 \sqrt{x}} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2 \sqrt{x}} dx = 2$$

omdat

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}} dx = \lim_{\delta \downarrow 0} \left. \frac{-2}{1+\sqrt{x}} \right|_{\delta}^1 = 1$$

en

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{-2}{1+\sqrt{x}} \right|_1^A = 1.$$

$$12) \int_{-1}^1 \log|x| dx := \int_{-1}^0 \log|x| dx + \int_0^1 \log x dx = -2$$

omdat

$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{\delta \downarrow 0} [x \log x - x] \Big|_{\delta}^1 = -1$$

en

$$\int_{-1}^0 \log|x| dx = \int_0^1 \log x dx = -1.$$

We hebben steeds het integratie-interval zodanig gesplitst dat op elk van de delen één der definities 2.7.8 of 2.7.9 van toepassing is.

In de voorafgaande voorbeelden is de convergentie van oneigenlijke integralen vastgesteld door middel van expliciete berekening van de integraal. Deze methode is niet te gebruiken indien we de convergentie van bijv. $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ willen onderzoeken. Daarom zullen we nu een vergelijkingsstelling afleiden waarmee de convergentie van een grote klasse van oneigenlijke integralen eenvoudig kan worden vastgesteld.

2.7.10. Definitie. Een oneigenlijke integraal $\int_I f(x) dx$ heet absoluut convergent indien $\int_I |f(x)| dx$ convergent is. Hierbij is I een interval van de vorm $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$ of $[a, b]$. Impliciet onderstellen we dat f continu is op $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$ of (a, b) .

2.7.11. Stelling. Een absoluut convergente oneigenlijke integraal is tevens convergent.

Bewijs. We geven het bewijs alleen voor een oneigenlijke integraal van het type $\int_a^\infty f(x)dx$. De functie f is continu op $[a, \infty)$, dus is f en ook $|f|$ integreerbaar over $[a, A]$ voor elke $A > a$.

We schrijven $f(x) = [f(x) + |f(x)|] - |f(x)|$, dan is

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^A [f(x) + |f(x)|]dx - \int_a^A |f(x)|dx .$$

De tweede integraal in het rechterlid heeft voor $A \rightarrow \infty$ de limiet $\int_a^\infty |f(x)|dx$, volgens het gegeven van de stelling.

Definieer nu

$$F(A) := \int_a^A [f(x) + |f(x)|]dx ,$$

dan is F monotoon niet dalend op $[a, \infty)$ wegens $f(x) + |f(x)| \geq 0$ voor alle $x \geq a$. F is tevens begrensd op $[a, \infty)$, immers

$$0 \leq F(A) = \int_a^A [f(x) + |f(x)|]dx \leq 2 \int_a^A |f(x)|dx \leq 2 \int_a^\infty |f(x)|dx .$$

Analoog aan de grondeigenschap der reële getallen (1.4.11) geldt de stelling: zij g monotoon en begrensd op $[a, \infty)$ dan bestaat $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

Pas deze stelling toe op F , dan bestaat

$$\lim_{A \rightarrow \infty} F(A) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A [f(x) + |f(x)|]dx .$$

Uit het voorgaande volgt dat $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx$ bestaat, dus $\int_a^\infty f(x)dx$ is convergent. □

2.7.12. Stelling (vergelijksstelling). Zij f continu op $[a, \infty)$. Laat er een $M \geq a$ bestaan zodat $|f(x)| \leq g(x)$ voor alle $x \geq M$. Indien $\int_a^\infty g(x)dx$ convergent is dan is $\int_a^\infty f(x)dx$ absoluut convergent.

Bewijs. Definieer

$$F(A) := \int_a^A |f(x)|dx .$$

Voor alle $A \geq M$ geldt nu de ongelijkheid

$$\begin{aligned}
0 \leq F(A) &= \int_a^A |f(x)| dx = \int_a^M |f(x)| dx + \int_M^A |f(x)| dx \\
&\leq \int_a^M |f(x)| dx + \int_M^A g(x) dx \leq \int_a^M |f(x)| dx + \int_M^\infty g(x) dx .
\end{aligned}$$

F is dus begrensd op $[M, \infty)$. Voorts is F monotoon niet dalend op $[a, \infty)$ wegens $|f(x)| \geq 0$ voor alle $x \geq a$. Daaruit volgt dat $\lim_{A \rightarrow \infty} F(A)$ bestaat, dus $\int_a^\infty |f(x)| dx$ is convergent. □

Bewijs zelf de volgende stelling.

2.7.13. Stelling (vergelijkingsstelling). Zij f continu op $(a, b]$. Laat er een interval $(a, a+\delta]$, $\delta > 0$ bestaan zodat $|f(x)| \leq g(x)$ voor alle $x \in (a, a+\delta]$. Indien $\int_a^b g(x) dx$ convergent is dan is $\int_a^b f(x) dx$ absoluut convergent.

Voorbeelden. 13) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ is absoluut convergent (en dus convergent),

omdat $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ voor $x \geq 1$ en $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ convergent is.

14) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x\sqrt{x}} dx$ is convergent, omdat $0 \leq \frac{\log(1+x)}{x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ voor $0 < x \leq 1$ en $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ convergent is.

15) Zij f continu op $[a, \infty)$. Indien $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x)$ bestaat voor zekere $\alpha > 1$,

dan is $\int_a^\infty f(x) dx$ absoluut convergent en dus convergent.

Immers, zij $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = L$, dan bestaat er een getal $M > \max(a, 0)$ zodat voor alle $x \geq M$ geldt:

$$|x^\alpha f(x)| \leq |L| + 1 \text{ oftewel } |f(x)| \leq \frac{|L| + 1}{x^\alpha} .$$

Bedenk voorts dat $\int_M^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ convergent is voor $\alpha > 1$, zie voorbeeld 7.

16) Zij f continu op $(a, b]$. Indien $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^\alpha f(x)$ bestaat voor zekere $\alpha < 1$,

dan is $\int_a^b f(x) dx$ absoluut convergent en dus convergent. Toon dit zelf aan.

Opmerking. De omkering van 2.7.11 hoeft niet waar te zijn, i.e. een convergente oneigenlijke integraal hoeft niet absoluut convergent te zijn.

Als voorbeeld beschouwen we $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

We tonen eerst aan dat deze integraal convergent is. Met partiële integratie leiden we af,

$$\int_1^A \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^A - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx .$$

Omdat $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ absoluut convergent is (zie voorbeeld 13) en $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\cos A}{A} = 0$,

is $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ convergent. Dus ook $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ is convergent.

We tonen vervolgens aan dat $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ divergent is. Zij $N \in \mathbb{N}$ dan is

$$\int_0^{N\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_{n=1}^N \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_{n=1}^N \int_0^\pi \frac{\sin y}{y+(n-1)\pi} dy ,$$

waarbij de substitutie $x = y + (n-1)\pi$ is toegepast.

Nu geldt

$$\int_0^\pi \frac{\sin y}{y+(n-1)\pi} dy \geq \int_0^\pi \frac{\sin y}{n\pi} dy = \frac{2}{n\pi} \geq \frac{2}{\pi} \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx ,$$

waarna volgt

$$\int_0^{N\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{2}{\pi} \int_1^{N+1} \frac{1}{x} dx = \frac{2}{\pi} \log(N+1) .$$

Het is dan duidelijk dat $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{N\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ niet bestaat, dus $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ is divergent.

2.8. Techniek van het integreren

In deze paragraaf bespreken we grotendeels aan de hand van voorbeelden, enige kunstgrepen en methoden voor het berekenen van onbepaalde en bepaalde integralen.

2.8.1. De volgende formules zijn door differentiëren direct te bewijzen.

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 \quad ; \quad \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad ; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C, a > 0, a \neq 1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad ; \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C \quad ; \quad \int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log|\tan \frac{1}{2}x| + C.$$

2.8.2. Herhaalde partiële integratie

Voorbeeld 1. $I = \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} \int (e^{ax})' \cos bx dx =$
 $= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx ,$

$$J = \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a} \int (e^{ax})' \sin bx dx =$$
$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx .$$

Dus $I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I$, waaruit volgt

$$I = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C,$$

$$J = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C.$$

Zo is, voor $a > 0$,

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{-a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \Big|_0^N \right] = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Voorbeeld 2. Voor $n \neq -1$ is

$$\begin{aligned} \int x^n \log x \, dx &= \frac{1}{n+1} \int (x^{n+1})' \log x \, dx = \frac{x^{n+1} \log x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx = \\ &= \frac{x^{n+1} \log x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C. \end{aligned}$$

Voorbeeld 3. Bereken $\int e^{-x} x^n \, dx =: I_n$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int e^{-x} x^n \, dx = - \int (e^{-x})' x^n \, dx = -x^n e^{-x} + n \int e^{-x} x^{n-1} \, dx = \\ &= -x^n e^{-x} + n I_{n-1}. \end{aligned}$$

Dit is een zg. recurrente betrekking voor I_n .

Zo is bijv.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-x^n e^{-x} \Big|_0^N \right] + n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} \, dx = n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} \, dx = \\ &= n(n-1) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-2} \, dx = n!. \end{aligned}$$

Voorbeeld 4. Bereken $\int (1+x^2)^{-n} \, dx =: J_n$.

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \\
 &= \arctan x - \frac{1}{2} \int x \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} dx = \arctan x + \frac{1}{2} \int x \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' dx = \\
 &= \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C.
 \end{aligned}$$

De berekening van J_n is analoog:

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx = J_{n-1} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n} = \\
 &= J_{n-1} - \frac{1}{2} \int x \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^n} dx = J_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \int x \left[\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \right]' dx = \\
 &= J_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} J_{n-1} = \\
 &= \frac{2n-3}{2(n-1)} J_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Zo hebben we een recurrente betrekking gekregen, die ons in staat stelt om J_n te berekenen, daar J_1 bekend is ($J_1 = \arctan x + C$).

2.8.3. Rationale integrand, splitsing in partiële breuken

Voorbeeld 1. $\int \frac{7x-1}{x^2-2x+5} dx = \frac{7}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx + 6 \int \frac{dx}{x^2-2x+5} =$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{7}{2} \int \frac{(x^2-2x+5)'}{x^2-2x+5} dx + 6 \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \\
 &= \frac{7}{2} \log(x^2-2x+5) + 3 \int \frac{\frac{1}{2}(x-1)'}{[\frac{1}{2}(x-1)]^2+1} dx = \\
 &= \frac{7}{2} \log(x^2-2x+5) + 3 \arctan \frac{1}{2}(x-1) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Voorbeeld 2. } \int \frac{7x-1}{(x^2-2x+5)^2} dx &= \frac{7}{2} \int \frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2} dx + 6 \int \frac{dx}{[(x-1)^2+4]^2} = \\
 &= \frac{7}{2} \int \frac{(x^2-2x+5)'}{(x^2-2x+5)^2} dx + \frac{3}{4} \int \frac{\frac{1}{2}(x-1)'}{[\frac{(x-1)}{2}]^2+1]^2} dx = \\
 &= -\frac{7}{2(x^2-2x+5)} + \frac{3}{4} \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \text{ waarin } t = \frac{1}{2}(x-1).
 \end{aligned}$$

Voor de laatste integraal verwijzen we naar 2.8.2, voorbeeld 4.

$$\text{Uitkomst : } \frac{3}{8} \arctan \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3x-17}{4(x^2-2x+5)} + C.$$

Alle integralen van rationale functies zijn te herleiden tot de volgende vijf grondtypen:

- a) $\int p(x)dx$ waarbij $p(x)$ een polynoom is.
- b) $\int \frac{dx}{x-a} = \log|x-a| + C.$
- c) $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \quad (n \neq 1).$
- d) $\int \frac{Px+Q}{x^2+px+q} dx$ met positief definitieve noemer x^2+px+q .

De integraal is te herleiden tot

$$\frac{1}{2}P \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + (Q - \frac{1}{2}pP) \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2}.$$

De eerste integraal is gelijk aan $\frac{1}{2}P \log(x^2+px+q)$; de tweede integraal is te herleiden tot een arctan-functie na de substitutie $x + \frac{1}{2}p = t\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}$.

- e) $\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} dx$ met positief definitieve noemer x^2+px+q en $n > 1$.

De integraal is te herleiden tot

$$\frac{1}{2}P \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx + (Q - \frac{1}{2}pP) \int \frac{dx}{[(x+\frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2]^n}.$$

De eerste integraal is direct te berekenen, terwijl de tweede integraal door de substitutie $x + \frac{1}{2}p = t\sqrt{q-\frac{1}{4}p^2}$ overgaat in $\int (t^2+1)^{-n} dt$ welke in 2.8.2, voorbeeld 4 behandeld is.

We beschouwen nu algemeen de integraal met rationale integrand:

$$\int \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n} dx = \int \frac{T(x)}{N(x)} dx .$$

De berekening van de integraal geschiedt in vier stappen .

Stap 1 : Zorg, door deling, dat $m = \text{gr}(T) < n = \text{gr}(N)$.

Stap 2 : Ontbind de noemer $N(x)$ in reële factoren van de eerste graad en reële positief definitieve factoren van de tweede graad.

Stap 3 : Schrijf $T(x)/N(x)$ als de som van een aantal breuken, waarvan de noemers zijn de eerstegraadsfactoren van $N(x)$, de definitieve tweedegraadsfactoren van $N(x)$, of machten daarvan. De teller van deze breuken is constant in geval de noemer een eerstegraadsfactor is of een macht daarvan; de teller is van de eerste graad in geval de noemer een tweedegraadsfactor is of een macht daarvan. Deze herleiding van de integrand $T(x)/N(x)$ heet splitsing in partiële breuken. Zonder bewijs vermelden we dat een dergelijke splitsing altijd mogelijk is.

Stap 4 : Integreer de afzonderlijke partiële breuken; de betreffende integralen zijn juist de vijf genoemde grondtypen.

Voorbeeld 3.
$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^3 + x - x + 1}{x^2 + 1} dx = \int x dx - \int \frac{x-1}{x^2 + 1} dx =$$
$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{dx}{x^2 + 1} =$$
$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + \arctan x + C.$$

Voorbeeld 4.
$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} =$$
$$= \frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{2} \log|x+1| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

Voorbeeld 5.
$$\int \frac{x-1}{3x^2 + 5x - 2} dx = \int \frac{x-1}{(3x-1)(x+2)} dx.$$

Schrijf nu $\frac{x-1}{(3x-1)(x+2)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{x+2}$, dan is

$$x - 1 = A(x+2) + B(3x-1),$$

$$1 = A + 3B, -1 = 2A - B, \text{ dus } A = -\frac{2}{7}, B = \frac{3}{7}.$$

De integraal wordt nu

$$-\frac{2}{7} \int \frac{dx}{3x-1} + \frac{3}{7} \int \frac{dx}{x+2} = -\frac{2}{21} \log|3x-1| + \frac{3}{7} \log|x+2| + C.$$

Voorbeeld 6. $\int \frac{x+1}{x(x+5)^2} dx$; de noemer van de integrand bevat een meervoudige eerstegraadsfactor.

De breuksplitsing verloopt dan als volgt:

$$\frac{x+1}{x(x+5)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} + \frac{D}{(x+5)^2},$$

$$x + 1 = A(x^2 + 10x + 25) + B(x^2 + 5x) + Dx,$$

dus

$$A + B = 0, 10A + 5B + D = 1, 25A = 1,$$

$$A = \frac{1}{25}, B = -\frac{1}{25}, D = \frac{4}{5}.$$

De integraal wordt

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x(x+5)^2} dx &= \frac{1}{25} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{25} \int \frac{dx}{x+5} + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{(x+5)^2} = \\ &= \frac{1}{25} \log|x| - \frac{1}{25} \log|x+5| - \frac{4}{5(x+5)} + C. \end{aligned}$$

Voorbeeld 7. $\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + 3x + 5} dx = \int \frac{2x^2 + x + 1}{(x+1)(x^2 - 2x + 5)} dx$.

De breuksplitsing verloopt nu als volgt:

$$\frac{2x^2 + x + 1}{(x+1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + D}{x^2 - 2x + 5},$$

$$2x^2 + x + 1 = A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + D)(x+1),$$

dus

$$A + B = 2, -2A + B + D = 1, 5A + D = 1,$$

$$A = \frac{1}{4}, B = \frac{7}{4}, D = -\frac{1}{4}.$$

De integraal wordt

$$\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{7x-1}{x^2-2x+5} dx =$$
$$= \frac{1}{4} \log|x+1| + \frac{7}{8} \log(x^2-2x+5) + \frac{1}{4} \arctan \frac{1}{2}(x-1) + C ;$$

op grond van voorbeeld 1 uit deze sub-paragraaf.

Voorbeeld 8. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$; de noemer van de integrand bevat een meervoudige tweedegraadsfactor.

De breuksplitsing verloopt dan als volgt:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2},$$

$$1 = A(x^4+2x^2+1) + (Bx+D)(x^3+x) + (Ex+F)x,$$

dus

$$A + B = 0, D = 0, 2A + B + E = 0, D + F = 0, A = 1,$$

$$A = 1, B = E = -1, D = F = 0.$$

De integraal wordt

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx =$$
$$= \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C .$$

2.8.4. Goniometrische integralen

De integraal $\int R(\sin x, \cos x) dx$ waarin R een rationale functie voorstelt, is door de substitutie $\tan \frac{1}{2}x = t$ te herleiden tot een integraal met rationale integrand, immers

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} .$$

$$\begin{aligned} \text{Voorbeeld 1. } \int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1-t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 4 \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = \\ &= -2 \int t \left(\frac{1}{1+t^2} \right)' dt = -\frac{2t}{1+t^2} + 2 \arctan t + C_1 = -\sin x + x + C. \end{aligned}$$

Hoewel deze methode feilloos werkt, is zij meestal zeer omslachtig en is het aan te bevelen om haar slechts toe te passen wanneer alle andere middelen zijn uitgeput. Die andere middelen zijn:

eenvoudige substitutie;

gebruik van goniometrische formules;

graad verlagen door overgang op $\sin 2x$, $\cos 2x$;

substitutie $\tan x = t$.

$$\text{Voorbeeld 2. } \int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x} dx = x - \sin x + C.$$

$$\text{Voorbeeld 3. } \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = - \int \frac{(1 + \cos x)'}{1 + \cos x} dx = - \log(1 + \cos x) + C.$$

$$\begin{aligned} \text{Voorbeeld 4. } \int \sin px \sin qx dx &= \frac{1}{2} \int \cos(p-q)x dx - \frac{1}{2} \int \cos(p+q)x dx = \\ &= \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} + C, \end{aligned}$$

mits $p \neq q$ en $p \neq -q$ is.

$$\begin{aligned} \text{Voorbeeld 5. } \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} &= \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} \tan^2 x + 1} \frac{dx}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{ab} \int \frac{\frac{a}{b} (\tan x)'}{\frac{a^2}{b^2} \tan^2 x + 1} dx = \frac{1}{ab} \arctan \left[\frac{a}{b} \tan x \right] + C. \end{aligned}$$

Eigenlijk hebben we hier de substitutie $\tan x = t$ toegepast.

In het volgende voorbeeld blijkt dat de substitutie $\frac{1}{2}x = t$ ook wel eens meevalt.

Voorbeeld 6.
$$\int \frac{dx}{1+2 \cos x} = \int \frac{1}{1 + \frac{2(1-t^2)}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{dt}{3-t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\int \frac{dt}{\sqrt{3}-t} + \int \frac{dt}{\sqrt{3}+t} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \log \left| \frac{\sqrt{3} + \tan \frac{1}{2}x}{\sqrt{3} - \tan \frac{1}{2}x} \right| + C.$$

Voorbeeld 7.
$$\int \cos^4 x \, dx = \frac{1}{4} \int (1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1+2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx =$$

$$= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

Voorbeeld 8.
$$\int \cos^5 x \, dx = \int \cos^4 x \cos x \, dx = \int (1-\sin^2 x)^2 (\sin x)' dx =$$

$$= \int (1-2 \sin^2 x + \sin^4 x) (\sin x)' dx = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

Voorbeeld 9.
$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} dx =$$

$$= \int \tan^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x + C.$$

2.8.5. Integrand $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

De integraal $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ waarin R een rationale functie voorstelt, is door kwadraat afsplitsen te herleiden tot één van de volgende drie typen:

a) $\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx$; verder herleiding door de substitutie $x = \sin \varphi$.

b) $\int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx$; verdere herleiding door de substitutie $x = \frac{1}{\cos \varphi}$.

c) $\int R(x, \sqrt{x^2+1}) dx$; verdere herleiding door de substitutie $x = \tan \varphi$.

N.B. Let op het teken wanneer wortels worden getrokken!

We beperken ons tot enige voorbeelden van bepaalde integralen.

Voorbeeld 1. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$

Substitueer $x = \sin \varphi$ en neem φ zo, dat het integratie-interval $0 \leq x \leq 1$ overgaat in $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$. Op dit interval geldt $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi} = \cos \varphi$.

De integraal wordt dan

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right] \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{4}\pi; \end{aligned}$$

de integraal is te interpreteren als de oppervlakte van een kwart cirkel met straal 1.

Voorbeeld 2. $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^4 \sqrt{a^2+x^2}} \quad (a > 0).$

Substitueer $x = a \tan \varphi$ en neem φ zo, dat het interval $a \leq x < \infty$ overgaat in $\frac{1}{4}\pi \leq \varphi < \frac{1}{2}\pi$.

De integraal wordt dan

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^4 \sqrt{a^2+x^2}} &= \frac{1}{a^4} \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^4 \varphi} d\varphi = \frac{1}{a^4} \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(1-\sin^2 \varphi)(\sin \varphi)'}{\sin^4 \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{a^4} \left[-\frac{1}{3 \sin^3 \varphi} + \frac{1}{\sin \varphi} \right] \Big|_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2 - \sqrt{2}}{3a^4}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 3. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+4x}} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+4)\sqrt{(x+2)^2-4}}.$

Substitueer $x+2 = 2/\cos \varphi$ en neem φ zo, dat het interval $0 \leq x < \infty$ overgaat in $0 \leq \varphi < \frac{1}{2}\pi$.

De integraal wordt dan

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{2 \cos \varphi + 2} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{4 \cos^2 \frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{2} \tan \frac{1}{2}\varphi \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{2}.$$

2.8.6. Integrand $R(x, \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)})$

De integraal $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$ waarin R een rationale functie voorstelt, is door de substitutie $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ te herleiden tot een integraal met rationale integrand.

Voorbeeld 1. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$.

Substitueer $\sqrt{x} = t$, dan is $x = t^2$, $\frac{dx}{dt} = 2t$, en de integraal wordt

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx &= 2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 2t - 2 \arctan t + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Voorbeeld 2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2(1-x)}} = \int_0^1 \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}} dx$.

Substitueer $t = \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}$, dan is $x = \frac{t^3}{t^3+1}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{3t^2}{(t^3+1)^2}$,

en de integraal wordt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}} dx &= 3 \int_0^\infty \frac{dt}{t^3+1} = \int_0^\infty \left[\frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1} \right] dt = \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{t+1} - \frac{t-\frac{1}{2}}{t^2-t+1} + \frac{3/2}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right] dt = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\log |t+1| - \frac{1}{2} \log(t^2-t+1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right] \Big|_0^N = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \log \frac{(N+1)^2}{N^2-N+1} + \sqrt{3} \arctan \frac{2N-1}{3} \right] + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2.9. Numerieke integratie

De Riemann-integraal $\int_a^b f(x)dx$ is niet altijd exact te berekenen. Zo kunnen we bijv. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ niet bepalen omdat er geen elementaire functie bestaat die primitieve functie is van e^{-x^2} . We bespreken daarom nu enige numerieke integratiemethoden voor de berekening van een benadering voor $\int_a^b f(x)dx$. Deze methoden komen er op neer dat we $\int_a^b f(x)dx$ benaderen door $\int_a^b p(x)dx$, waarin p het interpolatiepolynoom van Lagrange is bepaald door $p(x_k) = f(x_k)$ voor $k = 0, 1, \dots, n$; hierbij zijn x_0, x_1, \dots, x_n gegeven getallen met $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$. Overeenkomstig 2.2, voorbeeld 6 wordt p gegeven door

$$p(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + \dots + f(x_n)l_n(x),$$

waarin l_i , $i = 0, 1, \dots, n$, het polynoom is gegeven in 2.2.6. Integreer p over $[a, b]$ dan is de uitkomst van de gedaante

$$\int_a^b p(x)dx = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \dots + c_n f(x_n),$$

waarin c_0, c_1, \dots, c_n zekere getallen zijn, onafhankelijk van f .

Als f een polynoom is met graad $\leq n$, dan is $f = p$. We kunnen nu de getallen c_0, c_1, \dots, c_n eenvoudig berekenen door middel van de voorwaarde

$$\int_a^b q(x)dx = c_0 q(x_0) + c_1 q(x_1) + \dots + c_n q(x_n)$$

voor alle polynomen q met $gr(q) \leq n$.

We beperken ons verder tot de afleiding van twee eenvoudige integratieformules.

1) Neem $n = 1$, $a = x_0 = 0$ en $x_1 = b = 1$.

Zij $q(x) = \alpha + \beta x$, dan worden de getallen c_0, c_1 bepaald door de voorwaarde

$$\int_0^1 q(x)dx = \alpha + \frac{1}{2}\beta = c_0 \alpha + c_1 (\alpha + \beta)$$

voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. We vinden dan $c_0 = \frac{1}{2}$ en $c_1 = \frac{1}{2}$, waarna volgt

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}[f(0) + f(1)]$$

als benadering voor de integraal.

Beschouw nu algemeen de integraal

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = h \int_0^1 f(a+hy)dy .$$

Toepassing van de zojuist afgeleide benadering leidt tot de trapeziumregel,

2.9.1.
$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{1}{2}h[f(a) + f(a+h)] + E_T ,$$

waarin E_T de fout voorstelt. Deze fout zal nog nader onderzocht worden.

De trapeziumregel is exact i.e. $E_T = 0$, indien f een polynoom is met graad ≤ 1 .

De benadering volgens de trapeziumregel is meetkundig te interpreteren als de oppervlakte van het trapezium met hoekpunten $(a,0)$, $(a+h,0)$ op de x -as, en $(a,f(a))$, $(a+h,f(a+h))$ op de grafiek van $y = f(x)$.

2) Neem $n = 2$, $a = x_0 = -1$, $x_1 = 0$ en $x_2 = b = 1$.

Zij $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, dan worden de getallen c_0, c_1, c_2 bepaald door de voorwaarde

$$\int_{-1}^1 q(x)dx = 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma = c_0(\alpha - \beta + \gamma) + c_1\alpha + c_2(\alpha + \beta + \gamma)$$

voor alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. We vinden dan $c_0 = \frac{1}{3}$, $c_1 = \frac{4}{3}$ en $c_2 = \frac{1}{3}$, waarna volgt

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \frac{1}{3} [f(-1) + 4f(0) + f(1)]$$

als benadering voor de integraal. Merk op dat $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$, zodat de benadering ook nog exact is als f een polynoom van de derde graad is.

Pas nu deze benadering toe op de algemenere integraal

$$\int_a^{a+2h} f(x)dx = h \int_{-1}^1 f(a+(h+1)y)dy,$$

dan volgt de regel van Simpson,

$$2.9.2. \quad \int_a^{a+2h} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)] + E_S,$$

waarin E_S de fout voorstelt. De regel van Simpson is exact i.e. $E_S = 0$, indien f een polynoom is met graad ≤ 3 .

We onderzoeken nu de fout E_T bij toepassing van de trapeziumregel. Als van de functie f slechts gegeven is dat ze integreerbaar is over $[a, a+h]$, kunnen we niets zeggen over de fout.

Onderstel nu dat f tweemaal continu differentieerbaar is op $[a, a+h]$. Laat p het interpolatiepolynoom zijn bepaald door $p(a) = f(a)$, $p(a+h) = f(a+h)$. Overeenkomstig 2.6.11 geldt dan voor alle $x \in [a, a+h]$:

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x-a)(x-a-h)$$

voor zekere $\xi \in (a, a+h)$. Zij M_2 het globale maximum van $|f''|$ op $[a, a+h]$, dan volgt

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{2} M_2 (x-a)(a+h-x)$$

voor alle $x \in [a, a+h]$. Integreer deze ongelijkheid dan vinden we de volgende afchatting voor E_T :

$$|E_T| \leq \frac{1}{2} M_2 \int_a^{a+h} (x-a)(a+h-x) dx = \frac{1}{12} M_2 h^3.$$

De fout E_S bij toepassing van de regel van Simpson is op analoge wijze te onderzoeken. In eerste instantie verwachten we een afchatting voor E_S van de gedaante: $|E_S| \leq c M_3 h^4$, waarin c een constante is en M_3 het globale maximum van $|f'''|$ op $[a, a+2h]$. Door een subtielere analyse (waarop we hier niet ingaan) kan men echter afleiden de nauwkeuriger afchatting:

$$|E_S| \leq \frac{1}{90} M_4 h^5,$$

waarin M_4 het globale maximum van $|f^{(4)}|$ op $[a, a+2h]$ is. Hierbij is ondersteld dat f viermaal continu differentieerbaar is op $[a, a+2h]$. Merk op dat $M_4 = 0$ en dus $E_S = 0$, als f een polynoom is met graad ≤ 3 , in overeenstemming met een eerdere opmerking.

Uit de afschattingen voor E_T en E_S volgt dat voor kleine h de regel van Simpson een nauwkeuriger benadering geeft dan de trapeziumregel.

De fout bij toepassing van de voorgaande integratieformules is des te kleiner naarmate h kleiner is. Bij de numerieke integratie van $\int_a^b f(x)dx$ zullen we daarom meestal het interval $[a,b]$ verdelen in n gelijke delen ter lengte $h = (b-a)/n$ en vervolgens op ieder deelinterval de trapeziumregel of de regel van Simpson toepassen. Op deze wijze komen we tot de volgende samengestelde integratieformules:

$$2.9.3. \quad \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}h[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n] + E_T$$

met foutafschatting

$$|E_T| \leq \frac{n}{12} M_2 h^3 = \frac{1}{12} (b-a)M_2 h^2 ;$$

$$2.9.4. \quad \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 4f_{n-1} + f_n] + E_S$$

met foutafschatting

$$|E_S| \leq \frac{\frac{1}{2}n}{90} M_4 h^5 = \frac{1}{180} (b-a)M_4 h^4 .$$

Hierin is $f_k := f(a+kh)$, $k = 0,1,\dots,n$, terwijl in 2.9.4 is ondersteld dat n even is.

Voorbeeld. Numerieke integratie van $\int_0^1 f(x)dx$, $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$.

Verdeel $[0,1]$ in twee gelijke delen, nl. $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, en pas op ieder deelinterval de regel van Simpson toe. We vinden dan als benadering voor de integraal,

$$\frac{1}{12} [f(0) + 4f(\frac{1}{4}) + 2f(\frac{1}{2}) + 4f(\frac{3}{4}) + f(1)] = \frac{1}{12} \frac{16022}{425} = 3.141568 \dots$$

Vergelijk dit met de exacte uitkomst: $\pi = 3.141592 \dots$

Opmerking. Als de vergelijking $x = f(x)$ meer dan één wortel bezit en $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ bestaat, dan hangt het van de beginschatting a_0 af naar welke wortel de rij (a_n) convergeert. Een nadere precisering is te geven met behulp van de grafiek van $y = f(x)$.

De methode van successieve substitutie is voorbeeld van een zg. iteratiemethode. De formule $a_{n+1} := f(a_n)$ heet iteratieformule en men noemt a_0 de startwaarde van het iteratieproces.

Opgave 1. Voer de methode van successieve substitutie grafisch uit voor de vergelijking $x = f(x)$ in de volgende gevallen:

- 1) $f(x) = e^{-x}$, startwaarde $a_0 = 0$;
- 2) $f(x) = x^2$, startwaarde $a_0 = 2$;
- 3) $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, startwaarde $a_0 = 1$;
- 4) $f(x) = 0.9x + 0.1$, startwaarde $a_0 = 0$.

De figuren verkregen bij het uitwerken van opgave 1, suggereren dat het iteratieproces convergeert als $|f'(x)| < 1$ voor alle x in een omgeving van de wortel α , en divergeert als $|f'(x)| > 1$ in een omgeving van α . Voorts blijkt dat de rij (a_n) monotoon is als $f'(\alpha) > 0$ en oscillerend om α als $f'(\alpha) < 0$.

2.10.2. Stelling. Laat α een wortel zijn van de vergelijking $x = f(x)$. Zij f continu differentieerbaar op een interval $I := [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$, $\rho > 0$ en zij $|f'(x)| \leq L < 1$ voor alle $x \in I$.

Zij $a_0 \in I$ en $a_n := f(a_{n-1})$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dan geldt:

$$(i) \quad |a_n - \alpha| \leq L^n |a_0 - \alpha|,$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha.$$

Bewijs. (i) Met de middelwaardstelling (2.6.7) volgt eenvoudig:

$$|a_1 - \alpha| = |f(a_0) - f(\alpha)| = |f'(\xi)(a_0 - \alpha)| \leq L |a_0 - \alpha|,$$

waarin ξ een getal is gelegen tussen a_0 en α . Wegens $L < 1$ is $a_1 \in I$.

Maak nu gebruik van volledige inductie. Onderstel dat $a_{n-1} \in I$ en $|a_{n-1} - \alpha| \leq L^{n-1} |a_0 - \alpha|$, dan volgt analoog als boven:

$$|a_n - \alpha| = |f(a_{n-1}) - f(\alpha)| \leq L |a_{n-1} - \alpha| \leq L^n |a_0 - \alpha|$$

en $a_n \in I$.

(ii) Wegens $0 \leq L < 1$ is $\lim_{n \rightarrow \infty} L^n = 0$, zodat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$. □

Opmerking. De ongelijkheid (i) levert geen praktische schatting voor de fout omdat we α en dus het rechterlid van (i) niet kennen. In plaats van (i) beschouwen we de ongelijkheid

$$|a_n - \alpha| \leq L |a_{n-1} - \alpha| \leq L [|a_{n-1} - a_n| + |a_n - \alpha|],$$

waaruit volgt

$$|a_n - \alpha| \leq \frac{L}{1-L} |a_{n-1} - a_n|.$$

Als L bekend is, hebben we hiermee een bruikbare schatting van de fout in a_n , uitgedrukt in de waarden a_n en a_{n-1} .

Opgave 2. De rij (a_n) wordt bepaald door de iteratieformule

$$a_n := a_{n-1}^3 - 3a_{n-1}^2 + 3a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad \text{Bepaal de mogelijke waarden van } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Noem deze waarden $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, in opklimmende grootte. Bepaal een interval I zodat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha_2$, als $a_0 \in I$.

Uit de figuren verkregen bij de uitwerking van opgave 1, blijkt dat de rij (a_n) des te sneller convergeert naar de wortel α , naarmate $|f'|$ kleiner is in een omgeving van α . Als maat voor de convergentiesnelheid kiezen we

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha}.$$

2.10.3. Definitie. Een rij (a_n) met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ heet lineair convergent als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha} = A \text{ met } 0 < |A| < 1.$$

A heet de asymptotische convergentiefactor.

De definitie drukt uit dat o.d.d. geldt $a_{n+1} - \alpha \approx A(a_n - \alpha)$. Als bijv. $A = 10^{-k}$ dan neemt het aantal correcte cijfers in a_n met k toe bij elke iteratiestap.

We beschouwen nogmaals de methode van successieve substitutie toegepast op de vergelijking $x = f(x)$ met wortel α . Volgens 2.10.2 is $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, indien $|f'(x)| \leq L < 1$ voor alle x in een omgeving van α . Voorts geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(\alpha)}{a_n - \alpha} = f'(\alpha),$$

zodat de rij (a_n) lineair convergeert als $f'(\alpha) \neq 0$ is.

Een getallenrij kan ook sneller dan lineair convergeren.

2.10.4. Definitie. Een rij (a_n) met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ heet kwadratisch convergent als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - \alpha}{(a_n - \alpha)^2} = A \neq 0.$$

De definitie drukt uit dat o.d.d. geldt $A(a_{n+1} - \alpha) \approx [A(a_n - \alpha)]^2$. Het aantal correcte cijfers achter de komma in Aa_n wordt verdubbeld bij elke iteratiestap. Het is duidelijk dat kwadratische convergentie superieur is aan lineaire convergentie.

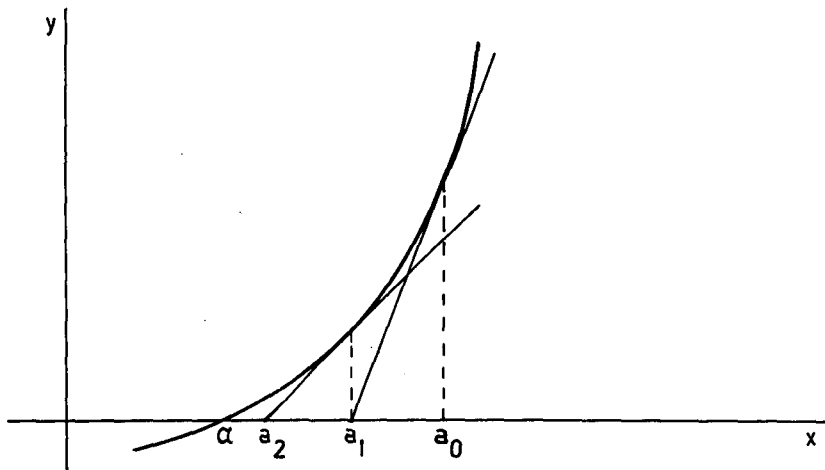
Methode van Newton-Raphson. Beschouw de vergelijking $F(x) = 0$ waarvan we een wortel α wensen te bepalen. Schrijf de vergelijking in de vorm $x = f(x)$, waarbij $f(x) = x - \varphi(x)F(x)$ met $\varphi(x) \neq 0$ in een omgeving van α . Los de vergelijking $x = f(x)$ op met de methode van successieve substitutie, i.e. construeer de rij (a_n) volgens $a_{n+1} := f(a_n)$. Deze rij zal snel convergeren indien $|f'(\alpha)|$ klein is. We kiezen daarom φ zodanig dat

$$f'(\alpha) = 1 - \varphi'(\alpha)F(\alpha) - \varphi(\alpha)F'(\alpha) = 1 - \varphi(\alpha)F'(\alpha) = 0$$

wordt. Als $F'(\alpha) \neq 0$ is vinden we $\varphi(\alpha) = 1/F'(\alpha)$, hetgeen we kunnen bereiken door $\varphi(x) = 1/F'(x)$ te kiezen. Met deze keuze van φ gaat de formule $a_{n+1} := f(a_n)$ over in de iteratieformule van Newton-Raphson:

2.10.5.
$$a_{n+1} := a_n - \frac{F(a_n)}{F'(a_n)} .$$

Meetkundig is a_{n+1} het snijpunt met de x-as van de raaklijn in het punt $(a_n, F(a_n))$ aan de grafiek van $y = F(x)$, zie figuur.



De rij (a_n) convergeert naar α mits de startwaarde a_0 voldoende dicht bij α ligt.

De convergentie is kwadratisch als $F''(\alpha) \neq 0$ is. Met gebruikmaking van de stelling van Taylor (2.6.10) volgt namelijk,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - \alpha}{(a_n - \alpha)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(\alpha)}{(a_n - \alpha)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} f''(\alpha + \theta_n (a_n - \alpha)) (a_n - \alpha)^2}{(a_n - \alpha)^2} = \frac{1}{2} f''(\alpha) = \frac{F''(\alpha)}{2F'(\alpha)}, \end{aligned}$$

waarin $\theta_n \in (0, 1)$.

Voorbeelden. 1) Worteltrekken: $F(x) = x^2 - b = 0$ heeft een wortel $\alpha = \sqrt{b}$.

De iteratieformule van Newton-Raphson wordt in dit geval,

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 - b}{2a_n} = \frac{1}{2} \left[a_n + \frac{b}{a_n} \right].$$

Toon grafisch aan dat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{b}$ voor elke startwaarde $a_0 > 0$.

Uitwerken van het iteratieproces voor $b = 2$ en $a_0 = 1$ leidt tot de volgende benaderingen voor $\sqrt{2}$:

$$\begin{array}{ll} a_0 = 1.000\ 000\ 000 & a_3 = 1.\underline{414\ 215\ 686} \\ a_1 = 1.500\ 000\ 000 & a_4 = 1.\underline{414\ 213\ 562} \\ a_2 = 1.\underline{416\ 666\ 667} & a_5 = 1.\underline{414\ 213\ 562} \end{array}$$

De onderstreepte decimalen zijn correct.

- 2) "Delen zonder te delen" : $F(x) = \frac{1}{x} - b = 0$ heeft als wortel $\alpha = \frac{1}{b}$.
De iteratieformule van Newton-Raphson wordt in dit geval,

$$a_{n+1} = a_n + a_n^2 \left(\frac{1}{a_n} - b \right) = a_n (2 - ba_n) .$$

Onderzoek grafisch de convergentie van de rij (a_n) in afhankelijkheid van de startwaarde a_0 .

Hoofdstuk 3. Reeksen

3.1. Convergentie en divergentie

Eindig veel getallen a_1, \dots, a_N hebben een som, zeg S_N , d.w.z.

$$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N = \sum_{n=1}^N a_n.$$

Beschouw nu de rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en vorm de rij $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ van de zg. partiële sommen: $S_1 := a_1$, $S_2 := a_1 + a_2$, $S_3 := a_1 + a_2 + a_3$, enz.

De uitdrukking

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

noemen we een reeks; S_N heet de N-de partiële som van de reeks; de getallen a_n heten de termen van de reeks.

3.1.1. Definitie. Als $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ bestaat en gelijk is aan S dan heet de reeks

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ convergent met som S en we schrijven $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$; als

$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ niet bestaat dan heet de reeks divergent en dan heeft hij geen som.

Voorbeelden. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n$ is divergent omdat $S_N = 1 + 2 + \dots + N = \frac{1}{2}N(N+1) \rightarrow \infty (N \rightarrow \infty)$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ ($= \sum_{n=0}^{\infty} r^n$) heet meetkundige reeks.

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1-r^N}{1-r} \text{ als } r \neq 1. \text{ Als } |r| < 1 \text{ is de reeks convergent met}$$

som $\frac{1}{1-r}$ en als $|r| \geq 1$ is de reeks divergent.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, want

$$S_N = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{N(N+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}) = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow$$

$\rightarrow 1 (N \rightarrow \infty)$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ is divergent omdat

$$S_N = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}} \geq \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}} \right) = \frac{N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}.$$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, de harmonische reeks, is divergent.

$$S_{2^k} - S_{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k} \geq \frac{2^k - 2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}, \text{ dus}$$

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= S_1 + (S_2 - S_1) + (S_4 - S_2) + (S_8 - S_4) + \dots + (S_{2^n} - S_{2^{n-1}}) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \geq \\ &\geq 1 + \frac{n-1}{2} > \frac{n}{2}. \text{ Hieruit volgt } S_N \rightarrow \infty \text{ (} N \rightarrow \infty \text{)}. \end{aligned}$$

6) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ is divergent.

De partiële sommen zijn nl. afwisselend 1 en 0, dus $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ bestaat niet.

7) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Voor de partiële sommen van deze reeks geldt

$$S_1 > S_3 > S_5 > \dots > 0 \text{ en}$$

$$S_2 < S_4 < S_6 < \dots < 1.$$

Volgens de grondeigenschap der reële getallen (1.4.11) bestaan de limieten

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N-1} =: S_o \text{ en } \lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N} =: S_e.$$

Omdat $S_{2N} - S_{2N-1} = \frac{-1}{2N}$ zijn S_o en S_e gelijk en convergeert de reeks.

Noemen we $S_o = S_e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} =: S$ dan blijkt bovendien dat

$$|S - S_N| < \frac{1}{N+1}. \text{ Later (3.4, voorbeeld 9) zullen we afleiden dat } S = \log 2.$$

3.1.2. Stelling. Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent is, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bewijs. $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S \quad (n \rightarrow \infty)$. □

N.B. We kunnen deze stelling alleen gebruiken om van sommige reeksen te bewijzen dat ze divergent zijn. De voorbeelden 4 en 5 laten zien dat uit

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ niet geconcludeerd kan worden dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent is.

Opmerkingen. 1) Zijn de reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent, dan is voor

alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ eveneens convergent en

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad (\text{Opgave: bewijs dit.})$$

2) Als we in een convergente (divergente) reeks een eindig aantal termen wijzigen dan is de zo gevormde reeks weer convergent (divergent); hetzelfde geldt voor het toevoegen of weglaten van eindig veel termen. (Opgave: bewijs dit.)

3) We noemden de termen van de reeks a_1, a_2, \dots . Soms is het handiger de

nummering van de termen met 0 te beginnen: $a_0 + a_1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Een van de eerste doeleinden die we nastreven is stellingen te bewijzen die ons in staat stellen tot convergentie of divergentie van een reeks te besluiten op grond van direct te controleren eigenschappen van de termen en met omzeiling van het vaak moeizame of zelfs ondoenlijke uitrekenen van de partiële sommen. De zojuist bewezen stelling 3.1.2 is een voorbeeld van een dergelijke stelling. In 3.2 en 3.3 zullen we een aantal van zulke stellingen bewijzen. Tot nog toe waren de termen van een reeks getallen; men kan ook reeksen beschouwen waarvan de termen functies zijn. In 3.4 bestuderen we een speciale klasse van zulke reeksen; de termen zijn daar functies van de gedaante $f_n(x) = a_n x^n$. De reeksen uit 3.4 heten machtrekken; de partiële sommen van een machtrek zijn polynomen. Tenslotte is 3.5 gewijd aan numerieke berekeningen in verband met reeksen.

3.2. Reeksen met uitsluitend niet negatieve termen

N.B. Alle reeksen in deze paragraaf hebben niet negatieve termen.

3.2.1. Stelling. Een reeks met niet negatieve termen is convergent dan en slechts dan als de rij van de partiële sommen begrensd is.

Bewijs. De rij van de partiële sommen is monotoon niet dalend zodat de stelling uit de grondeigenschap der reële getallen (1.4.11) volgt. \square

3.2.2. Stelling (integraalkenmerk). Laat $f(x)$ een continue monotoon dalende, niet negatieve functie zijn op $[1, \infty)$, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ dan en slechts dan convergent als $\int_1^{\infty} f(x)dx$ convergent is.

Bewijs. Zij $I_N := \int_1^N f(x)dx$ ($N \in \mathbb{N}$) dan ziet men gemakkelijk dat $\int_1^{\infty} f(x)dx$ dan en slechts dan convergent is als $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N$ bestaat.

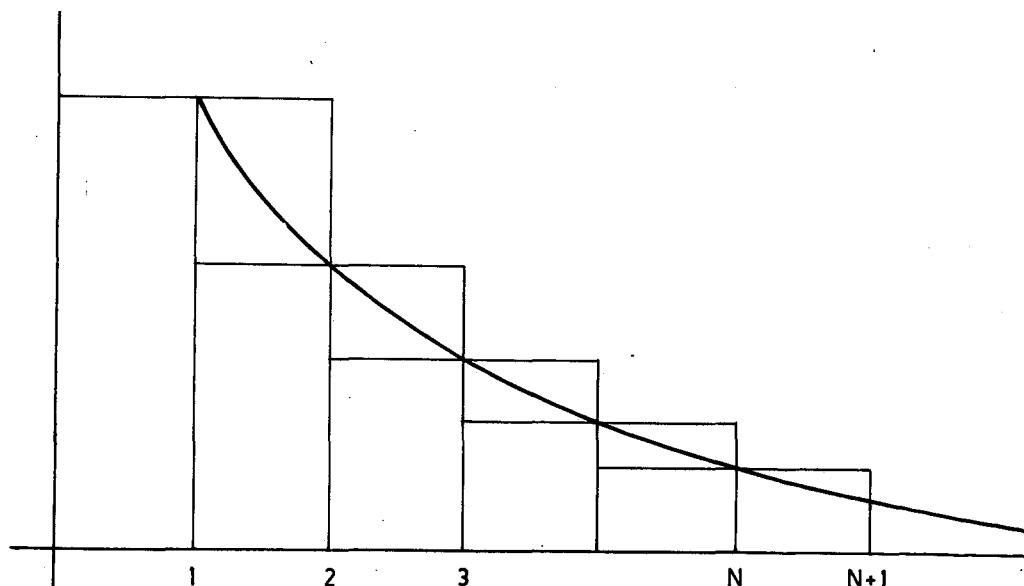
Zij $S_N := \sum_{n=1}^N f(n)$. De rijen I_1, I_2, I_3, \dots en S_1, S_2, S_3, \dots zijn beide monotoon niet dalend. De begrensdheid (en dus convergentie) van een van beide heeft de begrensdheid van de andere tot gevolg omdat

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$$

en dus

$$I_{N+1} \leq S_N \leq f(1) + I_N \quad (\text{zie figuur}).$$

\square



3.2.3. Stelling. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ is convergent als $p > 1$ en divergent als $p \leq 1$.

Bewijs. Voor $p \leq 0$ volgt de divergentie uit 3.1.2. Voor $p > 0$ passen we 3.2.2 toe met $f(x) = x^{-p}$, zie tevens 2.7, voorbeeld 7. □

3.2.4. Stelling (vergelijkingsstelling). Beschouw de reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

1) Als $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent is en $a_n \leq b_n$ o.d.d., dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent.

2) Als $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent is en $a_n \geq b_n$ o.d.d., dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Bewijs. 1) Stel $S_N := \sum_{n=1}^N a_n$, $T_N := \sum_{n=1}^N b_n$ en $T := \lim_{N \rightarrow \infty} T_N$.

Omdat $a_n \leq b_n$ vanaf zekere $N_1 \in \mathbb{N}$ en $T_N \leq T$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ is $S_N - S_{N_1} \leq T_N - T_{N_1}$ en $S_N \leq S_{N_1} + T - T_{N_1}$ voor alle $N \geq N_1$. De rij (S_N) is

dus begrensd. Uit 3.2.1 volgt nu de convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zou convergeren dan zou volgens 1) ook $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergeren; tegenspraak. □

3.2.5. Gevolg. Indien voor de reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ geldt:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ bestaat en is $\neq 0$, dan zijn de reeksen beide convergent of beide divergent.

Voorbeelden. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2}$ is convergent, omdat $0 \leq \sin \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ voor alle

$n \in \mathbb{N}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergent is (3.2.3).

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan n)e^{-n}$ is convergent want $0 \leq (\arctan n)e^{-n} \leq \frac{1}{2} \pi e^{-n}$ en

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ is een convergente meetkundige reeks.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ is divergent want $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent.

Convergentiekenmerken voor reeksen met niet negatieve termen

3.2.6. Kenmerk van Cauchy:

Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, dan is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent als $\ell < 1$ en divergent als $\ell > 1$.

3.2.7. Kenmerk van d'Alembert:

Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, dan is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent als $\ell < 1$ en divergent als $\ell > 1$.

3.2.8. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ bestaat en $\neq 0$ is, dan is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent als $p > 1$ en divergent als $p \leq 1$.

Bewijzen. (3.2.6). Als $\ell < 1$ en $\rho := \frac{1}{2}(\ell+1)$ dan is o.d.d. $\sqrt[n]{a_n} < \rho < 1$, dus $a_n \leq \rho^n$. Omdat $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$ convergent is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent (3.2.4).

Als $\ell > 1$ dan is $1 < \rho < \ell$ en $\sqrt[n]{a_n} > \rho$ o.d.d. dus $a_n \geq \rho^n$ o.d.d. In dit geval is $a_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) en $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergent (3.1.2).

Opmerking. Als $\ell = 1$ of als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ niet bestaat moeten we de convergentie op een andere manier onderzoeken. Voor de convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ zowel als voor de divergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is de limiet uit 3.2.6 gelijk aan 1.

(3.2.7). Als $\ell < 1$ en $\rho := \frac{1}{2}(\ell+1)$ dan is o.d.d. $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho < 1$, dus $a_{n+1} \leq \rho a_n$. Hieruit volgt $a_n \leq C \rho^n$ voor zekere constante C. Door vergelijking met de convergente meetkundige reeks $C \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$ volgt het gestelde. Als $\ell > 1$ dan is o.d.d. $a_{n+1} \geq \rho a_n$. Divergentie volgt nu uit 3.1.2.

Opmerking. Als $\ell = 1$ of als $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ niet bestaat, geeft het kenmerk van

d'Alembert geen uitsluitel. We verwijzen nogmaals naar de voorbeelden

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, waarvoor de limiet uit 3.2.7 gelijk aan 1 is.

(3.2.8). Combineer 3.2.5 en 3.2.2. □

Voorbeelden. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ is convergent volgens 3.2.7 omdat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! n^n}{n! (n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1.$$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan n)^{-n}$ is convergent volgens 3.2.6 omdat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(\arctan n)^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\arctan n} = \frac{2}{\pi} < 1.$$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ is convergent volgens 3.2.8 want $\frac{n^2}{n^2+1} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$). In dit voor-

beeld kan men de convergentie ook bewijzen door op te merken dat

$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ en 3.2.3 en 3.2.4 toe te passen, en ook door 3.2.2 te gebruiken

met $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ waarvoor $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$.

Opmerking. Voor reeksen waarvoor 3.2.8 tot een conclusie leidt, falen 3.2.7 en 3.2.6. Als voorbeeld van een reeks waarvoor ook 3.2.8 niet bruikbaar is

vermelden we $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$. Uit 3.2.2 en $\int_2^N \frac{dx}{x \log x} = \log \log N - \log \log 2 \rightarrow \infty$

($N \rightarrow \infty$) volgt dat de reeks divergent is.

3.3. Reeksen met zowel positieve als negatieve termen

Definitie. Een reeks van het type $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ waarin $a_n > 0$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, heet een alternerende reeks.

3.3.1. Stelling (Leibniz). Als de alternerende reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ voldoet aan

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$

(ii) $a_n \geq a_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N},$

dan is de reeks convergent en voor de som S geldt $|S - S_N| \leq a_{N+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}.$

Bewijs. (Vergelijk 3.1, voorbeeld 7.) Voor de partiële sommen geldt:

$$S_1 \geq S_3 \geq S_5 \geq S_7 \geq \dots \geq 0,$$

$$S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq S_8 \leq \dots \leq a_1.$$

Volgens de grondeigenschap der reële getallen (1.4.11) bestaan de limieten $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N-1} =: S_o$ en $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N} =: S_e$. Omdat $S_{2N} - S_{2N-1} = -a_{2N}$ zijn S_o en S_e gelijk en convergeert de reeks. Men ziet gemakkelijk dat:

$$|S - S_N| = a_{N+1} + (-a_{N+2} + a_{N+3}) + (-a_{N+4} + a_{N+5}) + \dots \leq a_{N+1}. \quad \square$$

Voorbeeld 1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$ is convergent.

We beschouwen nu het algemene geval van reeksen met zowel positieve als negatieve termen.

3.3.2. Definitie. Een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ heet absoluut convergent indien $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ convergent is.

3.3.3. Stelling. Een absoluut convergente reeks is tevens convergent.

Bewijs. Laat $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ convergent zijn, dan is te bewijzen dat ook $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergent is, d.w.z. dat $S_N := \sum_{n=1}^N u_n$ naar een limiet nadert als $N \rightarrow \infty$. Voer in de notaties

$$P_N := \sum_{n=1}^N |u_n|, \quad Q_N := \sum_{n=1}^N (u_n + |u_n|).$$

We schrijven $u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n|$, waaruit na sommatie volgt $S_N = Q_N - P_N$.

Volgens het gegeven van de stelling is de rij (P_N) convergent, zeg $P_N \rightarrow P$ als $N \rightarrow \infty$. De rij (Q_N) is monotoon niet dalend wegens $u_n + |u_n| \geq 0$.

De rij (Q_N) is tevens begrensd, immers

$$0 \leq Q_N = \sum_{n=1}^N (u_n + |u_n|) \leq 2 \sum_{n=1}^N |u_n| = 2P_N \leq 2P.$$

Daaruit volgt dat $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N$ bestaat.

Omdat $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N$ en $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N$ bestaan, bestaat ook $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$, i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is convergent. □

Uit 3.2.4 volgt onmiddellijk:

Stelling (vergelijkingsstelling). Als $|u_n| \leq v_n$ o.d.d. en $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ convergent is, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ absoluut convergent.

Voorbeelden. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n^2}$ is absoluut convergent (en dus convergent),

omdat $|(-1)^n \sin \frac{1}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergent is.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \cos n$ is absoluut convergent, omdat $|(\frac{1}{2})^n \cos n| \leq (\frac{1}{2})^n$ voor alle

$n \in \mathbb{N}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ convergent is.

Opmerking. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ is wel convergent maar niet absoluut convergent. Dergelijke reeksen noemt men relatief convergent.

Als we van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ weten dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$ is of $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$ is,

dan volgt uit 3.2.6 of 3.2.7 dat $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ absoluut convergent is, en daarna uit

3.3.3 dat $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergent is. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} > 1$ of $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$, dan

volgt uit 3.2.6 of 3.2.7 dat $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ divergent is. Ook de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ zelf is divergent omdat in beide gevallen u_n niet naar 0 nadert als $n \rightarrow \infty$ (3.1.2).

Deze opmerking maakt duidelijk hoe de convergentiekenmerken van Cauchy en d'Alembert gebruikt kunnen worden bij reeksen met zowel positieve als negatieve termen.

3.3.4. Stelling (Cauchy-product). Zijn de reeksen $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ absoluut convergent met som S resp. T, dan is de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} u_j v_{n-j} \right) \quad (1)$$

absoluut convergent met som ST.

(De reeks (1) heet het Cauchy-product van $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.)

Bewijs. Bij elke $N \in \mathbb{N}$ definiëren we een getal $M \in \mathbb{N}$ als volgt:

$$M := \frac{1}{2}N \text{ als } N \text{ even is en } M := \frac{1}{2}(N-1) \text{ als } N \text{ oneven is.}$$

Nu is

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^N u_n \sum_{n=0}^N v_n - \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^n u_j v_{n-j} \right| = \\ & = \left| u_1 v_N + u_2 (v_N + v_{N-1}) + \dots + u_N (v_N + v_{N-1} + \dots + v_1) \right| \leq \\ & \leq |u_1| |v_N| + |u_2| (|v_N| + |v_{N-1}|) + \dots + |u_M| (|v_N| + |v_{N-1}| + \dots + |v_{N-M+1}|) + \\ & + |u_{M+1}| (|v_N| + |v_{N-1}| + \dots + |v_{N-M}|) + \dots + |u_N| (|v_N| + |v_{N-1}| + \dots + |v_1|) \leq \\ & \leq S_M (T_N - T_{N-M}) + T_N (S_N - S_M) \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

waarin $S_N := \sum_{n=0}^N |u_n|$ en $T_N := \sum_{n=0}^N |v_n|$. Hieruit volgt dat het Cauchy-product convergeert met som ST.

Men ziet gemakkelijk hoe het bovenstaande bewijs uit te breiden is tot een bewijs van de absolute convergentie van het Cauchy-product. \square

3.4. Machtreeksen

Een reeks van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heet een machtreeks. We onderzoeken voor welke waarden van x deze reeks convergeert resp. divergeert. Elke machtreeks is convergent voor $x = 0$.

3.4.1. Stelling. Als een machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergent is voor $x = \xi \neq 0$, dan is de reeks absoluut convergent voor alle x met $|x| < |\xi|$.

Bewijs. Omdat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ convergent is, is $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \xi^n = 0$. De rij $(a_n \xi^n)$ is dus begrensd, d.w.z. er bestaat een $M > 0$ zodat $|a_n \xi^n| \leq M$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$.

Dan is $|a_n x^n| = |a_n \xi^n| |x/\xi|^n \leq M |x/\xi|^n$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$. Omdat $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{\xi} \right|^n$ convergent is voor $|x| < |\xi|$, volgt dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absoluut convergent is voor $|x| < |\xi|$. □

Gevolg. Bij de convergentie van machtreeksen doen zich drie mogelijkheden voor.

- 1) De machtreeks is convergent alleen voor $x = 0$ en divergent voor alle $x \neq 0$.
- 2) De machtreeks is absoluut convergent voor alle x .
- 3) Er bestaat een getal $R > 0$ zó dat de machtreeks absoluut convergent is voor $|x| < R$ en divergent voor $|x| > R$. De existentie van een dergelijke R berust op de voorgaande stelling en de stelling van het intervallen-nest (1.4.12). We laten het bewijs achterwege.

Het getal R heet de convergentiestraal van de machtreeks. In de gevallen 1) en 2) stellen we $R = 0$ resp. $R = \infty$.

Er is geen algemene uitspraak te doen over de convergentie of divergentie van een machtreeks voor $x = \pm R$; deze dient bij elk voorbeeld apart onderzocht te worden.

3.4.2. Stelling. Laat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een convergentiestraal R hebben.

1) Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$, dan is $R = \frac{1}{\ell}$ als $\ell \neq 0$ en $R = \infty$ als $\ell = 0$ ($R = 0$ als $\ell = \infty$).

2) Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$, dan is $R = \frac{1}{\ell}$ als $\ell \neq 0$ en $R = \infty$ als $\ell = 0$ ($R = 0$ als $\ell = \infty$).

Bewijs. Het bewijs is eenvoudig te geven met behulp van 3.2.6, 3.2.7, ga dit na. □

Voorbeelden. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ is absoluut convergent voor $|x| < 1$ en divergent voor $|x| > 1$, dus $R = 1$. Voor $x = \pm 1$ is de reeks divergent.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ is absoluut convergent voor $|x| < 1$, wegens $|x^{n^2}| \leq |x|^n$ voor $|x| < 1$; derhalve is $R \geq 1$. Omdat de reeks divergent is voor $x = 1$, is ook $R \leq 1$, zodat $R = 1$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} x^n$ heeft een convergentiestraal $R = e$ omdat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e}.$$

Voor $x = \pm e$ is de reeks divergent want

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} e^n = \left[\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}\right]^n > 1.$$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ heeft een convergentiestraal $R = 1$ omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Voor $x = 1$ is de reeks divergent, voor $x = -1$ relatief convergent.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ is convergent alleen voor $x = 0$ en divergent voor alle $x \neq 0$.

Laat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een convergentiestraal R hebben, dan is de reeks convergent voor $|x| < R$. De som is een functie van x die we noteren als

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

3.4.3. Stelling (termsgewijs differentiëren). De machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ hebben dezelfde convergentiestraal, R te noemen.

Zij $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ voor $|x| < R$, dan is S differentieerbaar op $(-R, R)$ met afgeleide $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Bewijs. Laat R_1 resp. R_2 de convergentiestraal zijn van de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ resp. $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Als de tweede reeks absoluut convergent is voor $x = \xi_1 \neq 0$, dan

is ook de eerste reeks absoluut convergent voor $x = \xi_1$, wegens

$$|a_n \xi_1^n| \leq |\xi_1| |na_n \xi_1^{n-1}| \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}. \text{ Derhalve is } R_1 \geq R_2.$$

Zij de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absoluut convergent voor $x = \xi_2 \neq 0$, dan is de rij

$(a_n \xi_2^n)$ begremsd en er bestaat dus een $M > 0$ zodat $|a_n \xi_2^n| \leq M$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$.

Daaruit volgt de ongelijkheid $|na_n x^{n-1}| = |a_n \xi_2^{n-1}| |n(x/\xi_2)^{n-1}| \leq (M/|\xi_2|) n |x/\xi_2|^{n-1}$.

Omdat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} n |x/\xi_2|^{n-1}$ convergent is voor $|x| < |\xi_2|$ (ga dit na), is

de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ absoluut convergent voor $|x| < |\xi_2|$. Derhalve is $R_2 \geq R_1$.

Uit de voorgaande resultaten volgt als conclusie $R_1 = R_2 =: R$.

Zij $|x| < R$. Kies $\rho > 0$ maar zo klein dat $\rho_1 := |x| + \rho < R$ is, en zij vervolgens $|h| \leq \rho$. We vormen het verschil

$$S(x+h) - S(x) - h \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n [(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}]. \quad (1)$$

Met behulp van het binomium van Newton (1.3.7) leiden we de volgende af-schatting af:

$$\begin{aligned} |(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| &= \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n - nhx^{n-1} \right| = \left| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} \right| \leq \\ &\leq |h|^2 \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \rho^{k-2} |x|^{n-k} \leq |h|^2 \rho^{-2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \rho^k |x|^{n-k} = |h|^2 \rho^2 (|x| + \rho)^n = \\ &= |h|^2 \rho^{-2} \rho_1^n, \end{aligned}$$

geldig voor $|h| \leq \rho$ en $n = 2, 3, \dots$.

Substitueer deze ongelijkheid in (1) dan volgt:

$$|S(x+h) - S(x) - h \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}| \leq |h|^2 \rho^{-2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \rho_1^n \quad (2)$$

voor $|h| < \rho$, waarbij de reeks in het rechterlid convergent is. Deel (2) door h en neem de limiet voor $h \rightarrow 0$, dan volgt dat S differentieerbaar is met af-

$$\text{geleide } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}. \quad \square$$

De stelling drukt uit dat we een machtreeks binnen zijn convergentie-interval $(-R, R)$ termsgewijs mogen differentiëren.

Een onmiddellijk gevolg van 3.4.3 is dat de som S willekeurig vaak differentieerbaar is op $(-R, R)$. De k -de afgeleide $S^{(k)}$ wordt verkregen door termsgewijze differentiatie:

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

Een direct gevolg is ook de volgende stelling.

3.4.4. Stelling (termsgewijs integreren). Laat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een convergentiestraal R hebben, dan geldt voor $|x| < R$:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Voorbeelden. 6) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ heeft een convergentiestraal $R = 1$.

Voor $|x| < 1$ geldt dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ heeft een convergentiestraal $R = 1$.

Noem de som $S(x)$ dan is voor $|x| < 1$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}.$$

Integreer $S'(x)$ dan volgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t) dt = \log(1+x),$$

geldig voor $|x| < 1$; vergelijk met 2.6, voorbeeld 4.

8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ heeft een convergentiestraal $R = 1$.

Noem de som $S(x)$ dan is voor $|x| < 1$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Integreer $S'(x)$ dan volgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t) dt = \arctan x,$$

geldig voor $|x| < 1$.

3.4.5. Stelling. Zij de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ resp. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ absoluut convergent voor $|x| < R_1$ resp. $|x| < R_2$, met som $S_1(x)$ resp. $S_2(x)$. Dan is de productreeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ waarin $c_n := \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$, absoluut convergent voor $|x| < \min(R_1, R_2)$ met som $S_1(x)S_2(x)$.

Bewijs. De stelling volgt eenvoudig uit 3.3.4. □

Zonder bewijs vermelden we nog de volgende stelling over de som van een machtreeks in een randpunt van het convergentie-interval.

3.4.6. Stelling (Abel). Laat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een convergentiestraal R hebben en zij $S(x)$ de som van de reeks. Als de reeks convergent is voor $x = R$, dan geldt: $\lim_{x \uparrow R} S(x) = S(R)$.

Uit 3.4.6 en 2.5.2 volgt dat de som van een machtreeks continu is in elk punt waar de reeks convergeert.

Voorbeelden. 9) Volgens voorbeeld 7 is voor $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \log(1+x).$$

De machtreeks is ook nog convergent voor $x = 1$ (zie 3.1, voorbeeld 7), zodat

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

10) Volgens voorbeeld 8 is voor $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x.$$

De machtreeks is ook nog convergent voor $x = \pm 1$, zodat

$$\frac{1}{4} \pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Als de functie f willekeurig vaak differentieerbaar is in een omgeving van a dan heet de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ de Taylorontwikkeling van f rond a of Taylorreeks.

3.4.7. Stelling. Zij f willekeurig vaak differentieerbaar op $I := [a-\rho, a+\rho]$, $\rho > 0$ en zij M_N het globale maximum van $f^{(N)}$ op I . Als $\lim_{N \rightarrow \infty} \rho^N M_N / N! = 0$ dan is de Taylorreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

convergent op I met som $f(x)$.

Bewijs. Volgens de stelling van Taylor (2.6.10) geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$ en elke $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_N,$$

waarin

$$R_N = \frac{f^{(N+1)}(a+\theta(x-a))}{(N+1)!} (x-a)^{N+1}$$

voor zekere $\theta \in (0,1)$. Voor $x \in I$ is dan $|R_N| \leq \rho^{N+1} M_{N+1} / (N+1)!$, dus $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$. Daaruit volgt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

voor alle $x \in I$.

□

Voorbeelden. 11) De functie $f(x) = e^x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op \mathbb{R} met $f^{(N)}(x) = e^x$ voor $N = 0, 1, 2, \dots$. Zij $\rho > 0$, dan is $|f^{(N)}(x)| \leq e^\rho$ voor alle $x \in I := [-\rho, \rho]$. Omdat $\lim_{N \rightarrow \infty} \rho^N e^\rho / N! = 0$, is de Taylorontwikkeling van e^x rond 0 convergent op I met som e^x . Aangezien ρ willekeurig te kiezen is, geldt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$; zie ook 2.6, voorbeeld 1.

12) De functie $f(x) = \sin x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op \mathbb{R} met $f^{(N)}(x) = \sin(x + \frac{1}{2}N\pi)$, zie 2.6, voorbeeld 2. Nu is $|f^{(N)}(x)| \leq 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Omdat $\lim_{N \rightarrow \infty} \rho^N / N! = 0$ voor elke $\rho > 0$, is de Taylorreeks van $\sin x$ convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$, i.e.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

13) Op grond van 3.4.3 is

$$\begin{aligned} \cos x &= (\sin x)' = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$; zie ook 2.6, voorbeeld 3.

14) De functie $f(x) = (1+x)^\mu$ is willekeurig vaak differentieerbaar op $(-1, \infty)$ met $f^{(n)}(x) = \mu(\mu-1) \dots (\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$. Voer nu in de notatie

$$\binom{\mu}{0} := 1, \quad \binom{\mu}{n} := \frac{\mu(\mu-1) \dots (\mu-n+1)}{n!} \quad \text{voor } n \in \mathbb{N},$$

uit te spreken als "mu over n":

Dan is $f^{(n)}(0) = n! \binom{\mu}{n}$ en met behulp van de stelling van Taylor (2.6.10) volgt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \binom{\mu}{n} x^n + R_N$$

voor alle $x > -1$. Men kan nu bewijzen (met behulp van een meer verfijnde formule voor de restterm R_N) dat $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$ voor $|x| < 1$. We vinden dus de volgende Taylorontwikkeling

$$(1+x)^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu}{n} x^n = 1 + \frac{\mu}{1!} x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(-2)}{3!} x^3 + \dots,$$

geldig voor $|x| < 1$.

Deze reeks heet de binomiaalreeks. Indien $\mu = m$ met $m = 0, 1, 2, \dots$, breekt de binomiaalreeks af na de term met $n = m$ en gaat de reeks over in het binomium van Newton (1.3.7).

15) Zij $f(x) = \arcsin x$, dan is

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n},$$

geldig voor $|x| < 1$.

Integreer termsgewijs (3.4.4) dan volgt

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1} = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots,$$

geldig voor $|x| < 1$.

Zij $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ voor $|x-a| < R$, dan is $a_n = \frac{S^{(n)}(a)}{n!}$. Immers door termgewijze differentiatie volgt:

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-a)^{n-k},$$

dus $S^{(k)}(a) = k! a_k$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$.

We zien hieruit dat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ de Taylorontwikkeling van zijn som S rond a is.

We geven nog enkele voorbeelden van Taylorontwikkelingen rond een punt verschillend van 0.

Voorbeelden. 16) De Taylorontwikkeling van $\sin x$ rond π wordt gegeven door

$$\sin x = -\sin(x-\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (x-\pi)^{2n+1},$$

geldig voor alle $x \in \mathbb{R}$.

17) De Taylorontwikkeling van $\log(4+x)$ rond 1 wordt gegeven door:

$$\log(4+x) = \log(5+x-1) = \log 5 + \log\left(1 + \frac{x-1}{5}\right) = \log 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n5^n} (x-1)^n,$$

geldig voor alle x met $|x-1| < 5$.

3.4.8. Berekening van limieten met behulp van machtreeksen. Laat de machtreeks

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een convergentiestraal R hebben, dan heeft ook $\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^{n-k}$ een convergentiestraal R . Voorts geldt op grond van continuïteit:

$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=k}^{\infty} a_n x^{n-k} = \lim_{x \rightarrow 0} (a_k + a_{k+1}x + a_{k+2}x^2 + \dots) = a_k$. Deze resultaten worden herhaaldelijk toegepast bij de berekening van limieten met behulp van machtreeksen.

Voorbeelden. 18)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \dots}{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \dots} = 1.$$

19)
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots) - x(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots)}{x^3(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \dots}{x^3(1 - \frac{x^2}{2} + \dots)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x) + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + \dots}{x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin x}{3!} + \dots \right) = \\
 &= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

3.5. Numerieke sommatie van reeksen

De som S van een convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is niet altijd exact te berekenen. Evenwel, elke partiële som $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$ is te gebruiken als numerieke benadering voor S . Bij deze benadering maken we een fout, de zg. afbreekfout

$E := S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$. Aan de hand van voorbeelden introduceren we vier methoden om de afbreekfout af te schatten:

- Maak gebruik van een expliciete formule voor E . In het geval van een Taylorreeks bijv. kan de formule voor de restterm (zie 2.6.10) als zodanig gebruikt worden.
- Vergroot de termen van de reeks $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ zodanig dat er een meetkundige reeks ontstaat.
- Geef een afschatting voor $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ door middel van een integraal.
- In het geval van een alternerende reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ en $a_n \geq a_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, geldt: $|S - S_N| \leq a_{N+1}$; zie 3.3.1.

Voorbeelden. 1) Bereken e met een fout van ten hoogste 10^{-4} .

Uitgaande van 2.6, voorbeeld 1 is

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{N!} + \frac{e^{\theta}}{(N+1)!}$$

voor zekere $\theta \in (0, 1)$. Nu is $e^{\theta} < e < 3$ en we kiezen N zodanig dat

$$\frac{3}{(N+1)!} < 10^{-4} \text{ is. Hieraan is voldaan als } N = 7.$$

We vinden dan als benadering voor e :

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = \frac{13700}{5040}$$

met een fout van ten hoogste $\frac{3}{40320}$.

Vaak vervangt men de gewone breuk door een decimale breuk, dus bijv.

$\frac{13700}{5040}$ door 2,71825. Bij deze vervanging wordt meestal nog een afrondingsfout gemaakt. Door de decimale breuk op te geven in een voldoende aantal decimalen, kan men zorgen dat de afrondingsfout kleiner is dan de afbreekfout.

2) Bereken $\log 0,9$.

Met behulp van de reeksontwikkeling voor $\log(1+x)$ (3.4, voorbeeld 7) volgt

$$\log \frac{9}{10} = \log\left(1 - \frac{1}{10}\right) = -\left[\frac{1}{10} + \frac{1}{2 \cdot 10^2} + \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{4 \cdot 10^4} + \dots\right].$$

Breek de reeks af na de tweede term dan vinden we als benadering:

$\log 0,9 \approx -\frac{1}{10} - \frac{1}{200} = -0,105$, met afbreekfout E af te schatten volgens

$$|E| = \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{4 \cdot 10^4} + \dots < \frac{1}{3} \left| \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \dots \right| = \frac{1}{2700}.$$

3) Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ met een fout van ten hoogste 10^{-2} .

Breek de reeks af na N termen dan geldt voor de afbreekfout (vergelijk met het bewijs van 3.2.2),

$$\frac{1}{2(N+1)^2} = \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^3} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{1}{(N+1)^3} + \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{(N+1)^3} + \frac{1}{2(N+1)^2}.$$

Als we de som van de reeks benaderen door S_N dan is de afbreekfout E ten hoogste $\frac{1}{(N+1)^3} + \frac{1}{2(N+1)^2}$. Een betere benadering van de som wordt gegeven

gegeven door $S_N + \frac{1}{2(N+1)^3} + \frac{1}{2(N+1)^2}$; voor de fout geldt nu $|E| < \frac{1}{2(N+1)^3}$.

Nemen we bijv. $N = 4$ dan volgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{250} + \frac{1}{50} = 1,202,$$

met foutafschatting $|E| < \frac{1}{250}$.

4) Uit de reeksontwikkeling voor $\arctan x$ (3.4, voorbeeld 8) volgt

$$\arctan \frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{5 \cdot 10^5} - \frac{1}{7 \cdot 10^7} + \dots$$

Bij afbreken na de derde term is $|E| \leq \frac{1}{7} \cdot 10^{-7}$ op grond van 3.3.1.

Afspraak. Zij S de som van een convergente reeks. De berekening van S in p decimalen zal als volgt worden uitgevoerd:

- 1) Breek de reeks af zodanig dat de absolute waarde van de afbreukfout ten hoogste $\frac{1}{2} \cdot 10^{-p}$ is.
- 2) Bepaal de aldus verkregen partiële som door in $p+1$ decimalen te rekenen (de extra decimaal dient om de invloed van afrondingsfouten te verminderen).
- 3) Rond het verkregen resultaat af op p decimalen.

Voorbeelden. 5) Bereken $\sin \frac{1}{10}$ in 5 decimalen.

Breek de reeksontwikkeling voor $\sin \frac{1}{10}$ af na twee termen, dan is

$$\sin \frac{1}{10} \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{3! \cdot 10^3} = \frac{599}{6000} = 0,099833,$$

met een afbreukfout van ten hoogste $\frac{10^{-5}}{5!} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$.

Dus $\sin \frac{1}{10} = 0,09983$ in 5 decimalen berekend.

6) Ga uit van de betrekking $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \arctan 1 = \frac{1}{4} \pi$.

Met behulp van de reeksontwikkeling voor $\arctan x$ (3.4, voorbeeld 8) volgt

$$\frac{1}{4} \pi = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right) + \frac{1}{5} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^5\right) - \frac{1}{7} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{3}\right)^7\right) + \dots$$

Breek de reeks af na de derde term dan vinden we als benadering voor π :

$$\pi \approx 2 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right) + \frac{4}{5} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^5\right) = 3,146,$$

met een afbreukfout van ten hoogste $\frac{4}{7} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{3}\right)^7\right) = 0,0047 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$.

Dus $\pi = 3,15$ in 2 decimalen berekend.

N.B. Exact is $\pi = 3,14159\dots$. Uit dit voorbeeld blijkt dat een berekening in p decimalen niet noodzakelijk hoeft te leiden tot een uitkomst met p correcte decimalen!

Opmerking 1. Voor de praktische berekening van logaritmen is de reeksontwikkeling van $\log(1+x)$ (3.4, voorbeeld 7) niet erg geschikt, omdat de reeks alleen snel convergeert voor kleine waarden van $|x|$.

Door aftrekken van de reeksen

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots,$$

volgt

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right],$$

geldig voor $|x| < 1$. Stel hierin $x = \frac{1}{2y+1}$, dan vinden we

$$\log(y+1) = \log y + 2\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \dots\right],$$

geldig voor $y > 0$. De laatste reeksontwikkeling is zeer geschikt om uitgaande van een bekende waarde $\log y$ vervolgens $\log(y+1)$ te berekenen.

Voorbeeld 7. Bereken $\log 2$ in 2 decimalen.

Met behulp van de hierboven afgeleide reeksontwikkeling volgt

$$\log 2 = \log 1 + 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots\right].$$

Breek de reeks af na de tweede term dan is de afbreekfout E af te schatten volgens

$$E = 2\left[\frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots\right] < \frac{2}{5}\left[\frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^7} + \dots\right] = \frac{1}{540} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}.$$

We vinden nu de volgende benadering voor $\log 2$:

$$\log 2 \approx \frac{2}{3} + \frac{2}{81} = 0,691,$$

dus $\log 2 = 0,69$ in 2 decimalen berekend.

Opmerking 2. Laat S de te berekenen som zijn van een convergente reeks

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Zij $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ een tweede reeks met bekende som en met de eigenschap dat $|u_n - v_n|$ klein is ten opzichte van $|u_n|$. In dat geval is S te benaderen

door $\sum_{n=1}^{\infty} v_n + \sum_{n=1}^N (u_n - v_n)$; deze benadering zal veelal nauwkeuriger zijn dan

de benadering door de partiële som $\sum_{n=1}^N u_n$.

Voorbeeld 8. De som $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is nauwkeuriger te benaderen door eerst de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})}$ met som 2, af te trekken. Als benadering voor S vinden

$$\text{we dan: } 2 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} \right) = 2 - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2 (n^2 - \frac{1}{4})},$$

met afbreekfout

$$\frac{1}{4} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n^2 - \frac{1}{4})} < \frac{1}{4(N+1)^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4(N+1)^2 (N+\frac{1}{2})}.$$

Hoofdstuk 4. Functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ en functies $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

4.1. Functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

Een vectorfunctie \underline{f} van één reële variabele is een afbeelding $\underline{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^n$. waarbij $A \subset \mathbb{R}$. A heet de definitieverzameling van \underline{f} ; notatie $\text{DOM } \underline{f}$.

In deze paragraaf beperken we ons tot de gevallen $n = 2$ en $n = 3$. Een vectorfunctie \underline{f} is dan een afbeelding, waarbij aan elke $t \in \text{DOM } \underline{f} \subset \mathbb{R}$ een vector $\underline{f}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ resp. $\underline{f}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ wordt toegevoegd. De functies $x(t), y(t)$ resp. $x(t), y(t), z(t)$ heten de componentfuncties of componenten van $\underline{f}(t)$.

Voorbeelden. 1) $\underline{f} : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\underline{f}(t) = (\cos t, \sin t)$.

2) $\underline{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\underline{f}(t) = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2)$, $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$.

3) $\underline{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\underline{f}(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

4.1.1. Parametervoorstelling van krommen. Kies in \mathbb{R}^2 resp. \mathbb{R}^3 het gebruikelijke assenstelsel. De verzameling

$$S := \{ \underline{f}(t) \mid t \in \text{DOM } \underline{f} \}$$

heet een kromme. Indien deze kromme in een vlak ligt spreken we van een vlakke kromme, anders van een ruimtekromme.

De functie $\underline{f}(t)$ heet een parametervoorstelling van de kromme S , met parameter t .

De functie \underline{f} uit voorbeeld 1 is een parametervoorstelling van de cirkel met middelpunt 0 en straal 1. Immers de kromme bestaat uit alle punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x = \cos t$, $y = \sin t$ voor zekere $t \in [0, 2\pi)$. Na eliminatie van t volgt $x^2 + y^2 = 1$, d.i. de vergelijking van de cirkel met middelpunt 0 en straal 1. Dezelfde functie \underline{f} met $\text{DOM } \underline{f}$ beperkt tot $[0, \pi]$, is een parametervoorstelling van een halve cirkel met middelpunt 0 en straal 1. Deze halve cirkel is ook de grafiek van de reële functie $y = \sqrt{1-x^2}$. De parametervoorstelling voor de halve cirkel is dus te herleiden tot een voorstelling door middel van een reële functie. Voor de volledige cirkel als boven is een dergelijke herleiding niet mogelijk.

Opgave. Toon aan, dat $\underline{f}(t) = (a + r \cos t, b + r \sin t)$ met $r > 0$ een parametervoorstelling is van de cirkel met middelpunt (a, b) en straal r .

De functie \underline{f} uit voorbeeld 2 is een parametervoorstelling van een rechte. Deze rechte wordt ook beschreven door de vergelijking $a_2x - a_1y = a_2b_1 - a_1b_2$, zoals volgt door eliminatie van t uit de vergelijkingen $x = a_1t + b_1$, $y = a_2t + b_2$.

De functie \underline{f} uit voorbeeld 3 is een parametervoorstelling van een zg. schroeflijn. Deze schroeflijn bestaat uit alle punten $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ met $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ voor zekere $t \in \mathbb{R}$. Na eliminatie van t volgt dat de schroeflijn ook beschreven wordt door de twee vergelijkingen $x = \cos z$, $y = \sin z$. Elimineer z , dan is duidelijk dat de schroeflijn ligt op de cilinder met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$.

Voorbeeld 4. De functie $\underline{f} : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven door $\underline{f}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ met $a > 0$, $b > 0$, is een parametervoorstelling van een ellips. Immers de kromme bestaat uit alle punten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ met $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ voor zekere $t \in [0, 2\pi)$. Na eliminatie van t volgt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, d.i. de vergelijking van een ellips.

Uit de parametervoorstelling volgt dat de ellips ontstaat door de y -coördinaten van de punten van de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ te vermenigvuldigen met b/a of ook door de x -coördinaten van de punten van de cirkel $x^2 + y^2 = b^2$ te vermenigvuldigen met a/b .

Voorbeeld 5. De baan van een massapunt is te beschrijven door een parametervoorstelling waarbij de tijd t als parameter wordt gebruikt.

Beschouw bijv. de beweging van een massapunt langs de cirkel met middelpunt $\underline{0}$ en straal r . Op het tijdstip $t = 0$ zal het massapunt zich bevinden in het punt $(a, 0)$. De beweging geschiedt met constante hoeksnelheid ω . De positie van het massapunt op het tijdstip t wordt dan gegeven door: $x = r \cos \omega t$, $y = r \sin \omega t$. De functie $\underline{f}(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ is een parametervoorstelling van de baan van het massapunt.

Indien we de omlooptijd $r\pi/\omega$ als tijdseenheid kiezen dan wordt de parametervoorstelling van de baan: $\underline{f}(\tau) = (r \cos 2\pi\tau, r \sin 2\pi\tau)$, met parameter $\tau = \omega t/2\pi$.

We definiëren nu de begrippen continuïteit en differentieerbaarheid voor een vectorfunctie.

4.1.2. Definitie. Zij $\underline{f} : \text{DOM } \underline{f} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven door $\underline{f}(t) = (x(t), y(t))$.

\underline{f} heet continu in $a \in \text{DOM } \underline{f}$ als de componenten x, y continu zijn in a .

\underline{f} heet continu op een verzameling $V \subset \mathbb{R}$ als \underline{f} continu is in elk punt van V .

\underline{f} heet continu als \underline{f} continu is op $\text{DOM } \underline{f}$.

4.1.3. Definitie. Zij $\underline{f} : \text{DOM } \underline{f} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven door $\underline{f}(t) = (x(t), y(t))$.

Zij a inwendig punt van $\text{DOM } \underline{f}$ dan heet \underline{f} differentieerbaar in a als de componenten x, y differentieerbaar zijn in a ; $\underline{f}'(a) := (x'(a), y'(a))$ heet de afgeleide van \underline{f} in a .

\underline{f} heet differentieerbaar op een interval $I \subset \mathbb{R}$ als \underline{f} differentieerbaar is in elk punt van I .

Is bovendien de afgeleide \underline{f}' continu op I dan heet \underline{f} continu differentieerbaar op I .

De definities van continuïteit en differentieerbaarheid voor een vectorfunctie $\underline{f} : \text{DOM } \underline{f} \rightarrow \mathbb{R}^3$ zijn analoog.

In plaats van $\underline{f}'(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ gebruikt men ook vaak de notaties $\dot{\underline{f}}(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$.

4.1.4. Raaklijn. Beschouw een vectorfunctie $\underline{f} : \text{DOM } \underline{f} \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeven door $\underline{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, waarbij $\text{DOM } \underline{f}$ een interval zal zijn.

Laat \underline{f} differentieerbaar zijn in $a \in \text{DOM } \underline{f}$, dan zijn de componenten x, y, z differentieerbaar in a . Volgens 2.6.1 geldt dan:

$$x(a+h) = x(a) + \dot{x}(a)h + h\rho(h),$$

$$y(a+h) = y(a) + \dot{y}(a)h + h\sigma(h),$$

$$z(a+h) = z(a) + \dot{z}(a)h + h\tau(h),$$

voor alle h in een omgeving V van 0 , en

$$\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \sigma(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0.$$

In een omgeving van a is $\underline{f}(t)$ lineair benaderbaar door de functie

$$\underline{\ell}(t) := \dot{\underline{f}}(a)(t-a).$$

Indien $\dot{\underline{f}}(a) \neq \underline{0}$ dan is $\underline{\ell}$ een parametervoorstelling van een rechte: de raaklijn aan de kromme in het punt $\underline{f}(a)$. De richtingsvector van deze raaklijn is $\dot{\underline{f}}(a) = (\dot{x}(a), \dot{y}(a), \dot{z}(a)) \neq \underline{0}$. Als $\dot{x}(a) = 0$ is de raaklijn evenwijdig aan het (y, z) -vlak; analoge uitspraken gelden indien $\dot{y}(a) = 0$ resp. $\dot{z}(a) = 0$.

Beschouw vervolgens een vlakke kromme gegeven door de parametervoorstelling $\underline{f}(t) = (x(t), y(t))$. Op dezelfde manier vinden we dan: als \underline{f} differentieerbaar is in a met afgeleide $\dot{\underline{f}}(a) = (\dot{x}(a), \dot{y}(a)) \neq 0$ dan heeft de kromme een raaklijn in het punt $\underline{f}(a)$ met richtingsvector $\dot{\underline{f}}(a)$. Als $\dot{x}(a) = 0$ is de raaklijn evenwijdig aan de x -as, als $\dot{y}(a) = 0$ is de raaklijn evenwijdig aan de y -as.

Zoals eerder opgemerkt is de parametervoorstelling van een vlakke kromme soms te herleiden tot een voorstelling door middel van een reële functie $g(x)$, i.e. de kromme is de grafiek van $y = g(x)$. We geven hierover de volgende stelling.

4.1.5. Stelling. Zij de vectorfunctie $\underline{f}(t) = (x(t), y(t))$ continu differentieerbaar op een omgeving van het punt a en zij $\dot{x}(a) \neq 0$.

Dan bestaat er een omgeving V van a en een reële functie $g(x)$ gedefinieerd in $x(V)$, zodat de kromme $\{\underline{f}(t) \mid t \in V\}$ de grafiek is van $y = g(x)$.

De afgeleide van $g(x)$ in $x(a)$ wordt gegeven door

$$\frac{dy}{dx}(x(a)) = \frac{\dot{y}(a)}{\dot{x}(a)}.$$

Bewijs. De afgeleide $\dot{x}(t)$ is continu op een omgeving van a en $\dot{x}(a) \neq 0$. Daaruit volgt dat er een omgeving V van a bestaat zodat $\delta f \dot{x}(t) > 0$ voor alle $t \in V$ $\delta f \dot{x}(t) < 0$ voor alle $t \in V$. Volgens 2.6.8 is $x(t)$ dan strikt monotoon op V . De functie $x(t)$ heeft nu een inverse functie, aan te geven door $t(x)$, met afgeleide $\frac{dt}{dx}(x(a)) = \frac{1}{\dot{x}(a)}$.

Substitueer $t(x)$ in de component $y(t)$, dan ontstaat de samengestelde functie $y(t(x)) =: g(x)$ gedefinieerd in $x(V)$. Het is duidelijk dat de grafiek van $y = g(x)$ juist overeenstemt met de kromme $\{\underline{f}(t) \mid t \in V\}$.

De afgeleide van $g(x) = y(t(x))$ in $x(a)$ is te bepalen met de kettingregel:

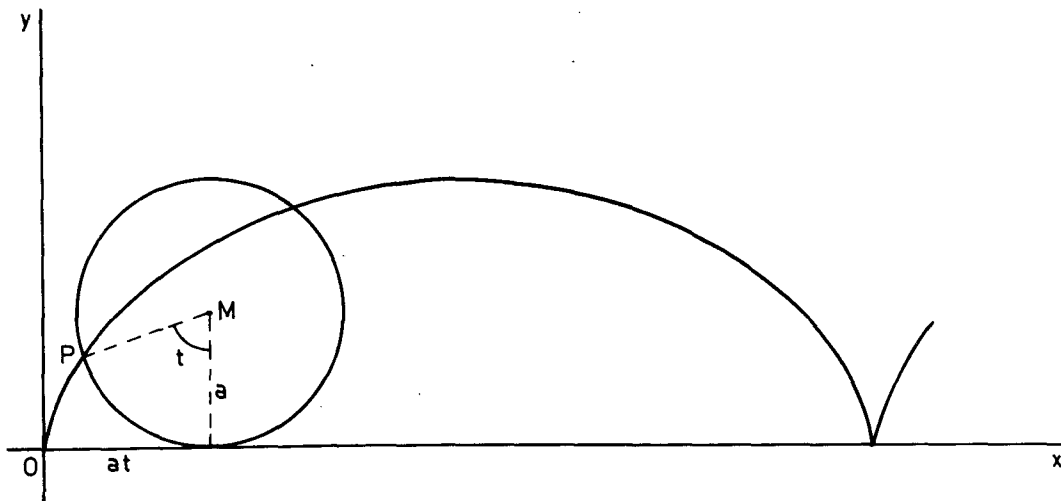
$$\frac{dy}{dx}(x(a)) = \frac{dy}{dt}(a) \frac{dt}{dx}(x(a)) = \frac{\dot{y}(a)}{\dot{x}(a)}.$$

Opmerking. In vervolg op 4.1,5 zijn ook de tweede en hogere afgeleiden van $g(x)$ in $x(a)$ te bepalen. Zo volgt eenvoudig met behulp van de kettingregel ($g a na$),

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(x(a)) = \frac{\ddot{y}(a)\dot{x}(a) - \dot{y}(a)\ddot{x}(a)}{[\dot{x}(a)]^3},$$

waarin $\ddot{x}(a)$, $\ddot{y}(a)$ de tweede afgeleide van $x(t)$, $y(t)$ in a is.

Voorbeeld 6. Cycloïde.



Een cirkel met middelpunt M en straal a rolt over de x -as. Beschouw de kromme beschreven door het punt P dat zich oorspronkelijk in \mathcal{O} bevindt. Deze kromme heet cycloïde.

Neem als parameter de hoek t tussen de voerstraal MP en de verticaal. Uit de figuur is eenvoudig af te lezen dat de coördinaten van P worden gegeven door $(at - a \sin t, a - a \cos t)$. Hiermee hebben we tevens een parameter-voorstellung van de cycloïde gevonden nl. $\underline{f}(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$.

Opgave. Bepaal de punten van de cycloïde waar de raaklijn evenwijdig is aan één van de assen.

4.2. Functies van twee variabelen

Een reële functie f van twee reële variabelen is een afbeelding, waarbij aan elke $\underline{x} = (x, y) \in \text{DOM } f \subset \mathbb{R}^2$ een getal $f(\underline{x}) = f(x, y) \in \mathbb{R}$ wordt toegevoegd. $\text{DOM } f$ is weer de definitieverzameling van f . We noemen f kortweg een functie van twee variabelen.

Vaak wordt een functiewaarde $f(x, y)$ met een aparte letter z aangegeven; men schrijft dan $z = f(x, y)$.

Voorbeelden. 1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(\underline{x}) = f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2$.

3) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 - y^2$.

4) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x}{x+y}$.

5) $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Grafiek. Kies in \mathbb{R}^3 het gebruikelijke assenstelsel. De grafiek van de functie f is de verzameling

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}.$$

Meetkundig stelt S een oppervlak in \mathbb{R}^3 voor. Men noemt $z = f(x,y)$ de vergelijking van het oppervlak S .

In voorbeeld 1 is de grafiek een plat vlak, in voorbeeld 5 een halve bol. In de voorbeelden 2 en 3 zijn de grafieken resp. een elliptische paraboloid en een hyperbolische paraboloid.

Hoogtekaart. Dikwijls is het moeilijk om een goede grafiek te tekenen; men kan dan gebruik maken van een hoogtekaart. Men tekent in het xy -vlak een aantal niveaulijnen, dat zijn krommen waarop de functie constant is. De niveaulijnen worden ook wel hoogtelijnen genoemd.

In de voorbeelden 1-5 zijn de hoogtelijnen respectievelijk:

- 1) evenwijdige rechten
- 2) concentrische cirkels
- 3) hyperbolen
- 4) rechten door de oorsprong (met uitzondering van de oorsprong)
- 5) concentrische cirkels.

Opgave. Teken hoogtekaarten van de functies

$$f(x,y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad f(x,y) = \frac{y^2-x}{y^2}.$$

Limieten van functies

- 4.2.1. Definitie. Zij $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ en \underline{a} een verdichtingspunt van $\text{DOM } f$. Dan betekent $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = L$, dat er voor iedere omgeving V van L een omgeving U van \underline{a} bestaat zodat voor alle $\underline{x} \in U \cap \text{DOM } f$ met $\underline{x} \neq \underline{a}$ geldt: $f(\underline{x}) \in V$.

Vergelijk deze definitie met 2.4.1.

4.2.2. Stelling. De volgende beweringen zijn gelijkwaardig:

1) $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = L$.

2) \underline{a} is een verdichtingspunt van DOM f en

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{\underline{x} \in \text{DOM } f} [0 < |\underline{x} - \underline{a}| < \delta \Rightarrow |f(\underline{x}) - L| < \epsilon].$$

3) $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} (f(\underline{x}) - L) = 0$.

4) $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} |f(\underline{x}) - L| = 0$.

Opgave. Bewijs deze stelling.

Voorbeelden. 6) $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

We gebruiken formulering 2) van 4.2.2. Voor $(x, y) \neq (0, 0)$ geldt:

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x||y|}{|\underline{x}|} \leq \frac{|\underline{x}||\underline{x}|}{|\underline{x}|} = |\underline{x}|.$$

Zij $\epsilon > 0$, dan geldt voor alle \underline{x} met $0 < |\underline{x} - \underline{0}| < \delta := \epsilon$ dat

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| \leq |\underline{x}| < \epsilon.$$

7) $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ bestaat niet.

Dit volgt onmiddellijk uit een hoogtekaart. De rechten $y = ax$ ($x \neq 0$) zijn hoogtelijnen. De waarde van de functie op $y = ax$ is $\alpha/(1+\alpha^2)$. In elke omgeving van $\underline{0}$ neemt de functie alle waarden uit $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ aan.

4.2.3. Stelling (bewerkingen met limieten). Als $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = L$, $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} g(\underline{x}) = M$, dan is

1) $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} \{f(\underline{x}) + g(\underline{x})\} = L + M$;

2) $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} \{f(\underline{x})g(\underline{x})\} = LM$;

3) $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} \frac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})} = \frac{L}{M}$ mits $M \neq 0$.

(N.B. Stilzwijgend is ondersteld dat $f(\underline{x})$ en $g(\underline{x})$ dezelfde definitieverzameling hebben.)

Opgave. Bewijs deze stelling.

Continuïteit.

4.2.4. Definitie. Een functie f heet continu in $\underline{a} \in \text{DOM } f$ indien er voor iedere omgeving V van $f(\underline{a})$ een omgeving U van \underline{a} bestaat zō dat voor alle $\underline{x} \in U \cap \text{DOM } f$ geldt: $f(\underline{x}) \in V$.

Vergelijk deze definitie met 2.5.1.

Definitie. Een functie f heet continu op een verzameling $W \subset \mathbb{R}^2$ als f continu is in elk punt van W .

Een functie f heet continu als f continu is op $\text{DOM } f$.

Bewijs zelf de volgende twee stellingen.

Stelling. Een functie f is continu in $\underline{a} \in \text{DOM } f$ dan en slechts dan als

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \underline{x} \in \text{DOM } f [|\underline{x} - \underline{a}| < \delta \Rightarrow |f(\underline{x}) - f(\underline{a})| < \epsilon].$$

Stelling. Zij $\underline{a} \in \text{DOM } f$ een verdichtingspunt van $\text{DOM } f$. Dan is f continu in \underline{a} dan en slechts dan als $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a})$.

Voorbeelden. 8) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{als } \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \text{als } \underline{x} = \underline{0} . \end{cases}$

Deze functie is continu in $(0,0)$. Voor $\underline{x} = \underline{0}$ geldt namelijk

$$|f(\underline{x}) - f(\underline{0})| = \left| \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |xy| \leq |x| |y| \leq |\underline{x}|^2.$$

Zij $\epsilon > 0$, dan geldt voor alle \underline{x} met $|\underline{x}| < \delta := \sqrt{\epsilon}$ dat

$$|f(\underline{x}) - f(\underline{0})| < \epsilon.$$

9) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{als } \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \text{als } \underline{x} = \underline{0} . \end{cases}$

f is continu in (0,0) omdat

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = f(\underline{0}) ,$$

zie voorbeeld 6.

$$10) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{als } \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \text{als } \underline{x} = \underline{0} . \end{cases}$$

f is niet continu in (0,0) omdat $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} f(\underline{x})$ niet bestaat, zie voorbeeld 7.

Met behulp van de volgende stelling kan men meestal snel inzien of een functie continu is.

4.2.5. Stelling. Zijn de functies f en g continu in \underline{a} , dan zijn ook f + g, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), fg en f/g (mits $g(\underline{a}) \neq 0$) continu in \underline{a} . Is $\underline{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ continu in a en $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continu in $\underline{b} = \underline{g}(a)$, dan is de samengestelde functie $f \circ \underline{g}$ continu in a.

Opgave. Bewijs deze stelling; vergelijk met 2.5.3.

Met 4.2.5 volgt onmiddellijk dat de functie uit voorbeeld 10 continu is op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. De functies uit de voorbeelden 8 en 9 zijn continu op de hele \mathbb{R}^2 .

4.3. Differentieerbaarheid van functies van twee variabelen

4.3.1. Definitie. Zij f gedefinieerd in een omgeving U van $\underline{a} = (a,b)$. De functie f heet differentieerbaar in \underline{a} , indien er getallen $A \in \mathbb{R}$ en $B \in \mathbb{R}$ bestaan en een functie ρ gedefinieerd in een omgeving V van $\underline{0}$, zodanig dat

$$(i) \quad f(a+h, b+k) = f(a,b) + Ah + Bk + |\underline{h}| \rho(\underline{h}) \text{ voor alle } \underline{h} = (h,k) \in V,$$

$$(ii) \quad \lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \rho(\underline{h}) = 0.$$

De betekenis van A en B blijkt door in (i) $k = 0$ resp. $h = 0$ te nemen.

We vinden dan

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \quad \text{resp.} \quad B = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} .$$

A is dus de afgeleide van de functie $x \mapsto f(x,b)$ in $x = a$.

B is de afgeleide van $y \mapsto f(a,y)$ in het punt $y = b$.

We noemen deze afgeleiden, waarbij slechts één van de argumenten varieert, partiële afgeleiden.

Notaties. De partiële afgeleide naar x van $z = f(x,y)$ in (a,b) wordt gegeven door

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} =: f_x(a,b) =: \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) =: \frac{\partial z}{\partial x}(a,b).$$

De partiële afgeleide naar y van $z = f(x,y)$ in (a,b) wordt gegeven door

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k} =: f_y(a,b) =: \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) =: \frac{\partial z}{\partial y}(a,b).$$

Met deze notatie zijn de getallen A en B uit definitie 4.3.1 voor te stellen door

$$A = f_x(a,b), \quad B = f_y(a,b).$$

De definitie van differentieerbaarheid drukt uit dat f in a lineair benaderbaar is, d.w.z. voor $\underline{x} = (x,y)$ in de buurt van $\underline{a} = (a,b)$ is $f(x,y)$ te benaderen door de lineaire functie

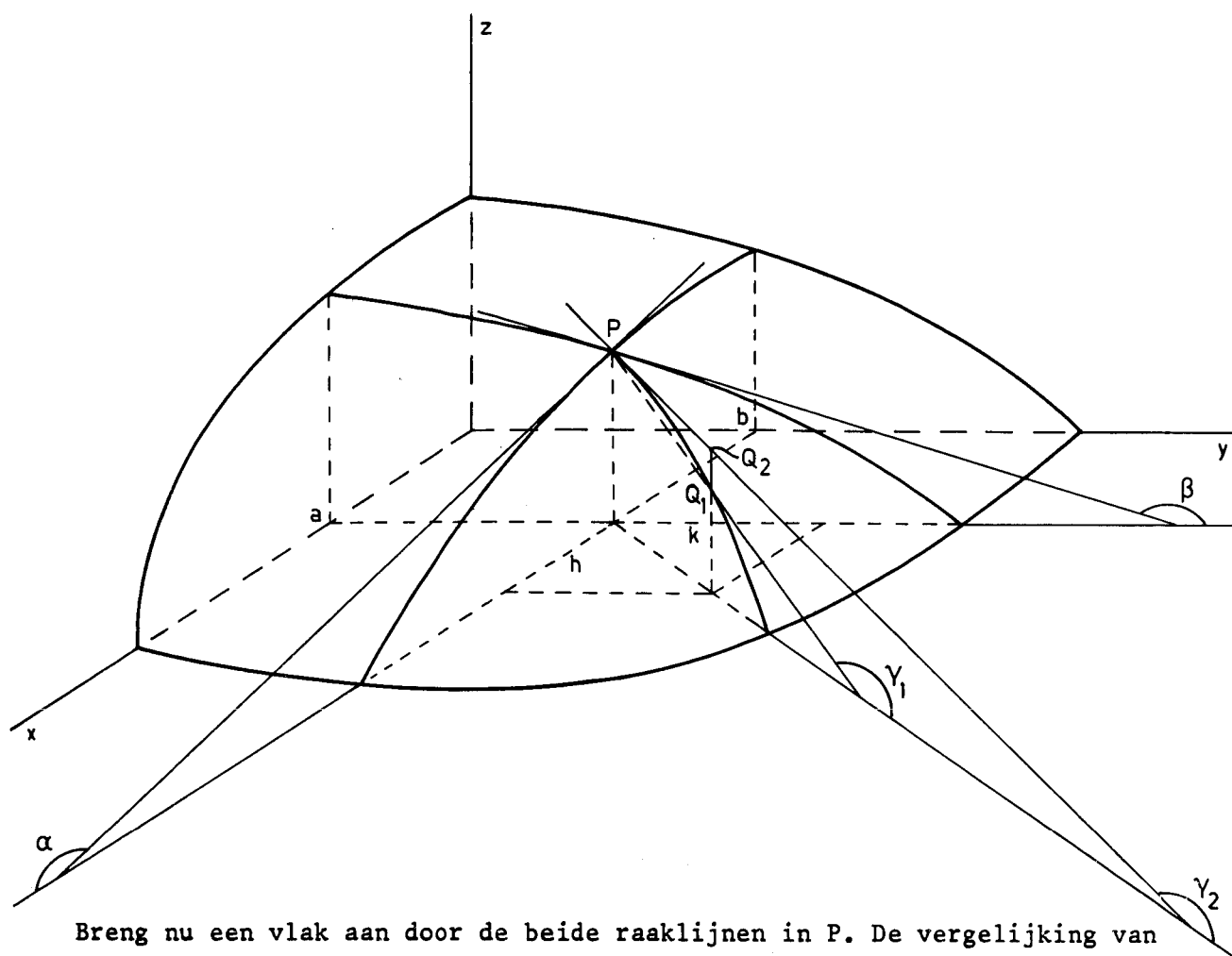
$$l(x,y) := f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Bij deze benadering maken we een fout gegeven door $|\underline{x}-\underline{a}| \rho(\underline{x}-\underline{a})$ waarbij $\rho(\underline{x}-\underline{a}) \rightarrow 0$ ($\underline{x} \rightarrow \underline{a}$).

Meetkundige interpretatie. Beschouw de grafiek van f d.i. het oppervlak gegeven door de vergelijking $z = f(x,y)$. Het punt P met coördinaten $(a,b,f(a,b))$ ligt op het oppervlak.

Het vlak $y = b$ snijdt het oppervlak volgens een kromme door P. De raaklijn aan de snijkromme in P ligt in het vlak $y = b$ en heeft de richtingscoëfficiënt $\tan \alpha = f_x(a,b)$, zie figuur.

Evenzo is $\tan \beta = f_y(a,b)$ de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P aan de snijkromme van het vlak $x = a$ met het oppervlak, zie figuur.



Breng nu een vlak aan door de beide raaklijnen in P. De vergelijking van dit vlak luidt

4.3.2.
$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Dit vlak is het raakvlak aan het oppervlak $z = f(x,y)$ in het punt P. Daartoe tonen we aan dat elke rechte door P in het vlak een raaklijn is aan het oppervlak. Beschouw twee punten Q_1 en Q_2 met coördinaten:

$$Q_1 : (a+h, b+k, f(a+h, b+k)),$$

$$Q_2 : (a+h, b+k, f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k),$$

dan ligt Q_1 op het oppervlak en Q_2 in het vlak (zie figuur).

De rechten PQ_1 en PQ_2 maken hoeken γ_1 en γ_2 met het xy -vlak, gegeven door

$$\tan \gamma_1 = \frac{1}{|h|} [f(a+h, b+k) - f(a, b)],$$

$$\tan \gamma_2 = \frac{1}{|h|} [f_x(a, b)h + f_y(a, b)k].$$

Volgens 4.3.1, punt (i) is nu juist $\tan \gamma_1 - \tan \gamma_2 = \rho(\underline{h})$. Omdat $\rho(\underline{h}) \rightarrow 0$ als Q_1 tot P nadert, raakt PQ_2 aan het oppervlak.

Meetkundig betekent differentieerbaarheid van f in \underline{a} dus dat het oppervlak $z = f(x,y)$ in het punt $(a,b,f(a,b))$ een niet-verticaal raakvlak heeft.

Definitie. Een functie f heet differentieerbaar op een open verzameling $W \subset \mathbb{R}^2$ als f differentieerbaar is in elk punt van W .

Bewijs zelf de volgende stelling:

Stelling. Als f differentieerbaar is in \underline{a} , dan is f continu in \underline{a} .

Voorbeelden. 1) $f(x,y) = xy^2 + y^3$;

de partiële afgeleiden van f zijn

$$f_x(x,y) = y^2, \quad f_y(x,y) = 2xy + 3y^2.$$

Merk op dat f_x en f_y ook weer functies van x en y zijn.

2) $z = \arctan \frac{y}{x}$;

de partiële afgeleiden zijn

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

In het punt $(1,1)$ is

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2}.$$

In de buurt van $(1,1)$ is z dan lineair benaderbaar door

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1).$$

De vergelijking van het raakvlak aan de grafiek in $(1,1, \frac{\pi}{4})$ is

$$z - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1).$$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + y^2}$ is continu in $\underline{0}$. Zij nl. $\epsilon > 0$ dan geldt voor alle \underline{x} met $|\underline{x} - \underline{0}| < \delta := \epsilon$ dat

$$|f(\underline{x}) - f(\underline{0})| = |\underline{x}| < \epsilon.$$

De partiële afgeleiden van f in $(0,0)$ bestaan niet, dus de functie is niet differentieerbaar in $(0,0)$.

4) Uit de differentieerbaarheid van f volgt het bestaan van de partiële afgeleiden f_x, f_y . Omgekeerd volgt uit het bestaan van de partiële afgeleiden nog niet dat f differentieerbaar is.

De functie

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{als } \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \text{als } \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$$

is niet continu in $\underline{0}$ (zie 4.2, voorbeeld 10), dus zeker niet differentieerbaar in $\underline{0}$. Er geldt echter $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

4.3.3. Stelling. Zij f gedefinieerd in een omgeving van \underline{a} en laat de partiële afgeleiden f_x en f_y bestaan in deze omgeving. Als f_x en f_y continu zijn in \underline{a} , dan is f differentieerbaar in \underline{a} .

Bewijs. Volgens het gegeven van de stelling is er een omgeving

$U := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\underline{x} - \underline{a}| < \delta\}$ van \underline{a} zodat f_x en f_y bestaan in U . Zij $\underline{a} = (a,b)$, $\underline{h} = (h,k)$ met $|\underline{h}| < \delta$.

Volgens de middelwaardestelling (2.6.7) is er een getal $\theta \in (0,1)$ zodat

$$f(a+h, b+k) - f(a, b+k) = hf_x(a+\theta h, b+k).$$

Omdat f_x continu is in (a,b) , kunnen we schrijven

$$f_x(a+\theta h, b+k) = f_x(a, b) + \rho(h, k)$$

met

$$\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \rho(h, k) = 0.$$

Uit de voorgaande betrekkingen volgt

$$f(a+h, b+k) - f(a, b+k) = hf_x(a, b) + h\rho(h, k).$$

Evenzo is af te leiden

$$f(a, b+k) - f(a, b) = kf_y(a, b) + k\sigma(k)$$

met

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma(k) = 0.$$

Nu volgt

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) &= f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a, b) = \\ &= hf_x(a, b) + kf_y(a, b) + |\underline{h}| \tau(\underline{h}), \end{aligned}$$

waarbij $\tau(\underline{h})$ gegeven wordt door

$$\tau(\underline{h}) = \tau(h, k) = \frac{1}{|\underline{h}|} [h\rho(h, k) + k\sigma(k)].$$

Wegens $\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \tau(\underline{h}) = 0$ is f differentieerbaar in \underline{a} . □

Uit 4.3.3 volgt dat functies met continue partiële afgeleiden differentieerbaar zijn. (Functies met continue partiële afgeleiden noemt men continu differentieerbaar.) Hiermee en met de volgende stelling kan men meestal snel vaststellen of een functie differentieerbaar is.

4.3.4. Stelling. Zijn de functies f en g differentieerbaar in \underline{a} , dan zijn ook $f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), fg en f/g (mits $g(\underline{a}) \neq 0$) differentieerbaar in \underline{a} .

Opgave. Bewijs deze stelling.

We geven nu een tweetal kettingregels voor het differentiëren van een samengestelde functie.

4.3.5. Stelling. Zij de functie $\underline{g} = (g_1, g_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ differentieerbaar in a en zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in $\underline{g}(a)$, dan is de samengestelde functie $f \circ \underline{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in a met afgeleide

$$(f \circ \underline{g})'(a) = f_x(\underline{g}(a))g_1'(a) + f_y(\underline{g}(a))g_2'(a).$$

Opmerking. Wat slordiger kan men de kettingregel 4.3.5 ook als volgt formuleren: zijn

$$z = f(x, y), \quad x = g_1(t), \quad y = g_2(t)$$

differentieerbare functies, dan is de samengestelde functie

$$z(t) = f(g_1(t), g_2(t))$$

differentieerbaar met afgeleide

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Bewijs. Op grond van de differentieerbaarheid van g_1 en g_2 in a geldt:

$$g_1(a+h) = g_1(a) + g_1'(a)h + h\rho_1(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \rho_1(h) = 0,$$

$$g_2(a+h) = g_2(a) + g_2'(a)h + h\rho_2(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \rho_2(h) = 0,$$

of in vectornotatie

$$\underline{g}(a+h) = \underline{g}(a) + \underline{g}'(a)h + h\underline{\rho}(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} |\underline{\rho}(h)| = 0.$$

Uit de differentieerbaarheid van f in $\underline{g}(a)$ volgt

$$\begin{aligned} f(\underline{g}(a+h)) &= f(\underline{g}(a) + \underline{g}'(a)h + h\underline{\rho}(h)) = \\ &= f(\underline{g}(a)) + f_x(\underline{g}(a))[g_1'(a)h + h\rho_1(h)] + f_y(\underline{g}(a))[g_2'(a)h + h\rho_2(h)] + \\ &+ |\underline{g}'(a)h + h\underline{\rho}(h)| \sigma(\underline{g}'(a)h + h\underline{\rho}(h)) \end{aligned}$$

met $\sigma \rightarrow 0$ voor $h \rightarrow 0$.

Hieruit volgt

$$f(\underline{g}(a+h)) = f(\underline{g}(a)) + [f_x(\underline{g}(a))g_1'(a) + f_y(\underline{g}(a))g_2'(a)]h + h\tau(h),$$

waarbij $\tau(h)$ gegeven wordt door

$$\tau(h) = f_x(\underline{g}(a))\rho_1(h) + f_y(\underline{g}(a))\rho_2(h) + \frac{|h|}{h} |\underline{g}'(a) + \underline{\rho}(h)| \sigma.$$

Het is duidelijk dat $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$. Daarmee is bewezen dat $f \circ g$ differentieerbaar is in a met afgeleide $f_x(\underline{g}(a))g_1'(a) + f_y(\underline{g}(a))g_2'(a)$. \square

4.3.6. Stelling. Zij $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in \underline{a} en zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in $g(\underline{a})$, dan is de samengestelde functie $f \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in \underline{a} met partiële afgeleiden

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x}(\underline{a}) = f'(g(\underline{a}))g_x(\underline{a}), \quad \frac{\partial(f \circ g)}{\partial y}(\underline{a}) = f'(g(\underline{a}))g_y(\underline{a}).$$

Bewijs. Het bewijs is analoog aan dat van 4.3.5 en wordt als opgave aan de lezer overgelaten. \square

Voorbeelden. 5) $z = xe^y$ met $x = \sin t$, $y = t^2$. Dan is

$$\frac{dz}{dt} = e^y \cos t + xe^y 2t = e^{t^2} \cos t + 2te^{t^2} \sin t.$$

6) Men dient duidelijk onderscheid te maken tussen de notaties $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{dz}{dx}$.

Door $z = x + y^2$, $y = \log x$ is z gegeven als functie van x en y , maar via $y = \log x$ ook als functie van x alleen (nl. $z = x + (\log x)^2$).

Er geldt nu

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad \text{en} \quad \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{2 \log x}{x}.$$

In dit voorbeeld speelt x de rol van de variabele t in de stelling 4.3.4.

Hogere partiële afgeleiden. De partiële afgeleiden f_x en f_y van een functie f zijn zelf ook weer functies van x en y . Partieel differentiëren (indien mogelijk) van f_x en f_y geeft de partiële afgeleiden van tweede orde van f , die als volgt genoteerd worden:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =: f_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} =: f_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =: f_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =: f_{yy}.$$

N.B. Let op de volgorde van differentiatie; f_{xy} wordt verkregen door eerst naar x en dan naar y te differentiëren; f_{yx} wordt verkregen door eerst naar y en dan naar x te differentiëren.

Voorbeelden. 7) $f(x,y) = x^2 y^3$;

de partiële afgeleiden van eerste en tweede orde van f zijn

$$f_x = 2xy^3, \quad f_y = 3x^2 y^2,$$

$$f_{xx} = 2y^3, \quad f_{xy} = 6xy^2, \quad f_{yx} = 6xy^2, \quad f_{yy} = 6x^2 y.$$

Merk op dat $f_{xy} = f_{yx}$. In het volgende voorbeeld is dit niet het geval.

8) $f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ als $(x,y) \neq (0,0)$ en $f(0,0) = 0$.

Bereken eerst de partiële afgeleiden van eerste orde

$$f_x(0,k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,k) - f(0,k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} k \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} = -k,$$

$$f_y(h,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(h,k) - f(h,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} h \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} = h.$$

Bereken vervolgens f_{xy} en f_{yx} in $(0,0)$,

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k - 0}{k} = -1,$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1,$$

dus $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Uit de volgende stelling blijkt dat het resultaat van tweemaal partieel differentiëren onafhankelijk is van de volgorde van differentiatie, indien de resulterende afgeleiden van tweede orde continu zijn.

4.3.7. Stelling. Als f_{xy} en f_{yx} bestaan in een omgeving van \underline{a} en continu zijn in \underline{a} , dan geldt: $f_{xy}(\underline{a}) = f_{yx}(\underline{a})$.

Bewijs. Laat f_{xy} en f_{yx} bestaan in een omgeving $U := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\underline{x} - \underline{a}| < \delta\}$ van \underline{a} . Zij $\underline{a} = (a,b)$, $\underline{h} = (h,k)$ met $|\underline{h}| < \delta$.

Beschouw de uitdrukking

$$E := f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b).$$

Zij

$$\varphi(x) := f(x, b+k) - f(x, b),$$

dan is

$$E = \varphi(a+h) - \varphi(a).$$

Pas de middelwaardestelling (2.6.7) toe, dan is

$$E = h\varphi'(a+\theta_1 h) = h[f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a+\theta_1 h, b)]$$

voor zekere $\theta_1 \in (0,1)$.

Nogmaals toepassen van de middelwaardestelling geeft

$$E = hkf_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

voor zekere $\theta_2 \in (0,1)$.

Zij vervolgens

$$\psi(y) := f(a+h, y) - f(a, y) ,$$

dan is

$$E = \psi(b+k) - \psi(b).$$

Door opnieuw tweemaal toepassen van de middelwaardestelling volgt

$$\begin{aligned} E &= k\psi'(b+\theta_3 k) = k[f_y(a+h, b+\theta_3 k) - f_y(a, b+\theta_3 k)] = \\ &= hkf_{yx}(a+\theta_4 h, b+\theta_3 k) \end{aligned}$$

voor zekere $\theta_3 \in (0,1)$, $\theta_4 \in (0,1)$.

Combineer de voorgaande resultaten dan is

$$f_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) = f_{yx}(a+\theta_4 h, b+\theta_3 k) .$$

Laat nu $\underline{h} = (h, k)$ naar 0 naderen, dan volgt op grond van de continuïteit van f_{xy} en f_{yx} in \underline{a} dat $f_{xy}(\underline{a}) = f_{yx}(\underline{a})$. □

Men kan nu ook partiële afgeleiden van de derde en hogere orde definiëren. Er zijn 2^n partiële afgeleiden van de orde n . Als deze afgeleiden continu zijn, dan kan men weer bewijzen dat het resultaat van partieel differentiëren onafhankelijk is van de volgorde van differentiatie, zodat er slechts $n!$ verschillende partiële afgeleiden van de orde n zijn. Wij zullen in het vervolg aannemen dat van de door ons beschouwde functies de gemengde partiële afgeleiden die door verwisseling van volgorde uit elkaar ontstaan inderdaad gelijk zijn.

Er geldt dan bijv. $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$ oftewel $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$.

¶ Opmerking. Kettingregels voor hogere partiële afgeleiden kunnen in elk afzonderlijk geval worden afgeleid door toepassing van de gewone kettingregel (4.3.5), waarbij te bedenken is dat partiële afgeleiden van x en van y afhangen.

Voorbeeld. Zijn de functies

$$z = f(x,y), \quad x = x(t), \quad y = y(t)$$

tweemaal differentieerbaar, dan is de samengestelde functie

$$z = f(x(t),y(t))$$

tweemaal differentieerbaar met afgeleiden

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{d^2x}{dt^2} + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{dy}{dt} \right] \frac{dx}{dt} + \\ &+ \frac{\partial z}{\partial y} \frac{d^2y}{dt^2} + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{dy}{dt} \right] \frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

Formule van Taylor. We zullen de formule van Taylor (2.6.10) generaliseren tot functies van twee variabelen. We voeren de volgende notatie in:

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x,y) := \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} h^{m-j} k^j \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j} \partial y^j} (x,y),$$

voor $m \in \mathbb{N}$; vergelijk met het binomium van Newton 1.3.7.

Hierbij is verondersteld dat f continue partiële afgeleiden van de orde m heeft.

4.3.8. Stelling (Taylor). Laat de functie f continue partiële afgeleiden van de orde $n+1$ ($n \geq 0$) bezitten in een omgeving $U := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\underline{x}-\underline{a}| < \delta \}$ van \underline{a} . Voor elk punt $\underline{a}+\underline{h} \in U$, $\underline{h} = (h,k)$ is er dan een getal $\theta \in (0,1)$, zodat

$$f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(\underline{a}) + R_n,$$

waarin

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(\underline{a}+\theta \underline{h}).$$

Bewijs. Met behulp van $\underline{g}(t) := \underline{a}+t\underline{h}$ introduceren we de samengestelde functie

$$F(t) := f(\underline{g}(t)) = f(\underline{a}+t\underline{h}).$$

Volgens de kettingregel (4.3.4) is F differentieerbaar op $[0,1]$ met afgeleide

$$F'(t) = f_x(\underline{a}+t\underline{h})h + f_y(\underline{a}+t\underline{h})k = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(\underline{a}+t\underline{h}).$$

Voor $n \geq 1$ zijn f_x en f_y opnieuw differentieerbaar. Nogmaals toepassen van de kettingregel levert voor $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} F''(t) &= f_{xx}(\underline{a}+t\underline{h})h^2 + 2f_{xy}(\underline{a}+t\underline{h})hk + f_{yy}(\underline{a}+t\underline{h})k^2 = \\ &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\underline{a}+t\underline{h}). \end{aligned}$$

Algemeen is door volledige inductie te bewijzen (ga dit na):

$$F^{(m)}(t) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(\underline{a}+t\underline{h})$$

voor $m = 1, 2, \dots, n+1$ en $t \in [0,1]$.

Pas nu de formule van Taylor (2.6.10) toe op de functie F , dan is

$$F(1) = F(0) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} F^{(m)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta)$$

voor zekere $\theta \in (0,1)$.

Na substitutie van $F(1)$, $F^{(m)}(0)$ enz. als boven gegeven volgt het gewenste resultaat. □

De in 4.3.8 gegeven betrekking voor $f(\underline{a}+\underline{h})$ heet de formule van Taylor voor functies van twee variabelen; R_n heet de restterm.

Voorbeeld. Zij $f(x,y) = \sin(xe^y)$, $\underline{a} = (0,0)$, dan is

$$\begin{aligned} f(\underline{h}) &= \sin(he^k) = f(\underline{0}) + [hf_x(\underline{0}) + kf_y(\underline{0})] + \\ &+ \frac{1}{2!} [h^2 f_{xx}(\underline{0}) + 2hkf_{xy}(\underline{0}) + k^2 f_{yy}(\underline{0})] + R_2 \end{aligned}$$

met

$$R_2 = \frac{1}{3!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(\theta\underline{h}), \quad \theta \in (0,1).$$

Na uitwerking van de partiële afgeleiden vinden we

$$\sin(h e^k) = h + hk + R_2.$$

Voor kleine waarden van x en y geldt dus de benadering

$$\sin(x e^y) \approx x + xy.$$

Als bijzonder geval ($n = 0$) van 4.3.8 vermelden we nog de volgende stelling die een generalisering is van de middelwaardestelling 2.6.7.

4.3.9. Stelling (middelwaardestelling voor functies van twee variabelen). Laat de functie f continue partiële afgeleiden f_x en f_y bezitten in een omgeving $U := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\underline{x} - \underline{a}| < \delta \}$ van \underline{a} . Voor elk punt $\underline{a} + \underline{h} \in U$, $\underline{h} = (h, k)$ is er dan een getal $\theta \in (0, 1)$, zodat

$$f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = h f_x(\underline{a} + \theta \underline{h}) + k f_y(\underline{a} + \theta \underline{h}).$$

Deze stelling is ook rechtstreeks te bewijzen door toepassing van de middelwaardestelling 2.6.7 op de functie $f(\underline{a} + \theta \underline{h})$.

4.4. Functies van drie variabelen

Een reële functie f van drie reële variabelen is een afbeelding, waarbij aan elke $\underline{x} = (x, y, z) \in \text{DOM } f \subset \mathbb{R}^3$ een getal $f(\underline{x}) = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ wordt toegevoegd. We noemen f kortweg een functie van drie variabelen.

De theorie uit 4.2 en 4.3 is zonder meer uit te breiden tot functies van drie variabelen (en ook tot functies van meer dan drie variabelen). In de meeste definities, stellingen en bewijzen behoeven slechts voor de hand liggende wijzigingen aangebracht te worden.

Een eenvoudige meetkundige voorstelling van de functie $f(x, y, z)$, analoog aan de grafiek van een functie van twee variabelen, is er niet. Inzicht in de functie kunnen we verkrijgen door niveaувlakken te beschouwen, dat zijn oppervlakken in \mathbb{R}^3 gegeven door de vergelijking $f(x, y, z) = C$ met C constant. Niveaувlakken zijn het analogon van hoogtelijnen in \mathbb{R}^2 .

Voorbeeld. De functie

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

heeft als niveaувlakken een stelsel bollen met middelpunt $\underline{0}$.

We herhalen de definitie van differentieerbaarheid en de kettingregel voor functies van drie variabelen.

4.4.1. Definitie. Zij f gedefinieerd in een omgeving U van $\underline{a} = (a,b,c)$. De functie f heet differentieerbaar in \underline{a} , indien er reële getallen A , B en C bestaan en een functie ρ gedefinieerd in een omgeving V van $\underline{0}$, zodanig dat

$$(i) \quad f(a+h, b+k, c+l) = f(a, b, c) + Ah + Bk + Cl + |\underline{h}| \rho(\underline{h})$$

voor alle $\underline{h} = (h, k, l) \in V$,

$$(ii) \quad \lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \rho(\underline{h}) = 0.$$

Het blijkt weer dat A , B en C partiële afgeleiden zijn, nl.

$$A = f_x(\underline{a}), \quad B = f_y(\underline{a}), \quad C = f_z(\underline{a}).$$

4.4.2. Stelling (kettingregel). Zij de functie $\underline{g} = (g_1, g_2, g_3) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ differentieerbaar in a en zij $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in $\underline{g}(a)$, dan is de samengestelde functie $f \circ \underline{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in a met afgeleide

$$(f \circ \underline{g})'(a) = f_x(\underline{g}(a))g_1'(a) + f_y(\underline{g}(a))g_2'(a) + f_z(\underline{g}(a))g_3'(a).$$

Wat slordiger kan men 4.4.2 ook als volgt formuleren: zijn

$$w = f(x, y, z), \quad x = g_1(t), \quad y = g_2(t), \quad z = g_3(t)$$

differentieerbare functies, dan is de samengestelde functie

$$w(t) = f(g_1(t), g_2(t), g_3(t))$$

differentieerbaar met afgeleide

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Opgave. Formuleer een kettingregel voor de afgeleide van $f \circ \underline{g}$ als $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $\underline{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; vergelijk met 4.3.4.

4.5. Impliciete functies

Uit een vergelijking $f(x,y) = 0$ kan men soms y oplossen en uitdrukken in x , d.w.z. we kunnen y als functie van x beschouwen: $y = g(x)$. We zeggen dat y door $f(x,y) = 0$ als functie van x impliciet gegeven is.

Voorbeeld 1. Door de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ (eenheidscirkel) worden op $[-1,1]$ twee functies impliciet gegeven, nl.

$$y = g_1(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{en} \quad y = g_2(x) = -\sqrt{1-x^2}.$$

Beide functies zijn differentieerbaar op $(-1,1)$ met afgeleiden

$$g_1'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y} \quad \text{en} \quad g_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

Hoewel in het algemeen door de vergelijking $f(x,y) = 0$ een aantal functies $g_1(x), g_2(x), \dots$ bepaald wordt, is het meestal niet gemakkelijk g_1, g_2, \dots ook expliciet in x uit te drukken, zoals het voorbeeld $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$ leert.

Om in deze situatie toch de afgeleide van y eenvoudig te bepalen, denken we ons $y = y(x)$ althans in principe opgelost uit $f(x,y) = 0$. Na substitutie van $y = y(x)$ in de vergelijking volgt

$$f(x, y(x)) = 0.$$

Differentiatie met behulp van de kettingregel levert nu

$$f_x + f_y y' = 0,$$

waaruit y' opgelost kan worden: $y' = -f_x/f_y$ mits $f_y \neq 0$.

Het spreekt vanzelf dat door $f(x,y) = 0$ een differentieerbare functie $y(x)$ bepaald wordt. Preciese voorwaarden hiervoor worden gegeven in stelling 7.3.4 die we als volgt citeren: laat f continue partiële afgeleiden f_x en f_y bezitten in een omgeving van (a,b) en zij $f(a,b) = 0$, $f_y(a,b) \neq 0$, dan bestaat er een functie $y(x)$ gedefinieerd in een omgeving V van a met de eigenschappen $y(a) = b$, $f(x, y(x)) = 0$ voor $x \in V$; voorts is $y(x)$ differentieerbaar op V met afgeleide $y' = -f_x/f_y$.

Voorbeelden. 2) Uit de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ volgt door impliciet differentiëren

$$2x + 2yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{y} \text{ mits } y \neq 0,$$

in overeenstemming met voorbeeld 1.

De tweede afgeleide van $y(x)$ volgt door de vergelijking $x + yy' = 0$ opnieuw impliciet te differentiëren:

$$1 + (y')^2 + yy'' = 0,$$

waaruit volgt

$$y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y} = -\frac{1}{y^3} \text{ mits } y \neq 0.$$

3) Beschouw de vergelijking $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Impliciet differentiëren naar x geeft

$$3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0,$$

waaruit volgt

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x} \text{ mits } y^2 - x \neq 0.$$

We onderzoeken nu de kromme beschreven door de vergelijking $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Horizontale raaklijnen kunnen optreden als $y - x^2 = 0$. Gecombineerd met de oorspronkelijke vergelijking levert dit de punten $(x,y) = (0,0)$ en $(x,y) = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. Het punt $(0,0)$ is een bijzonder punt omdat daar ook $y^2 - x = 0$.

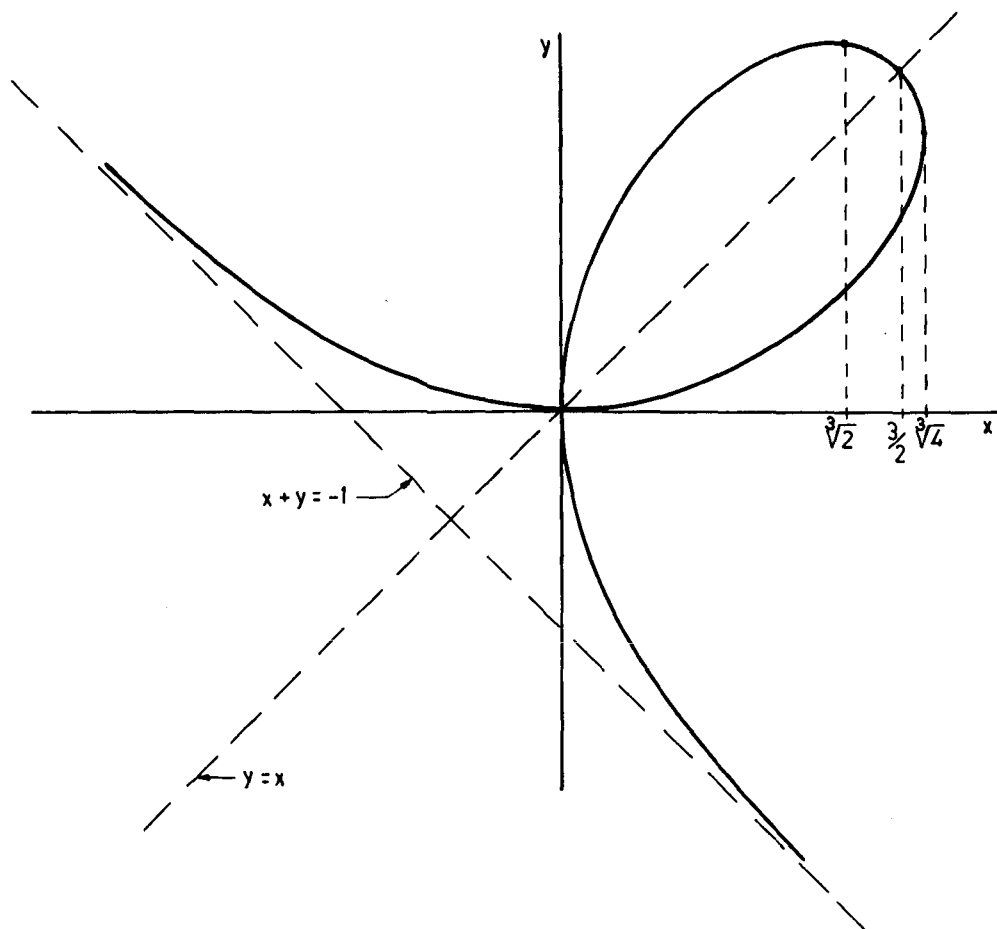
Verticale raaklijnen kunnen optreden in de punten $(0,0)$ en $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$, zoals volgt uit $y^2 - x = 0$ en de oorspronkelijke vergelijking.

De kromme is symmetrisch t.o.v. de rechte $y = x$. We snijden de kromme met de rechte $x + y = p$. De x -coördinaten van de snijpunten worden bepaald door de vergelijking

$$3(p+1)x^2 - 3p(p+1)x + p^3 = 0.$$

Voor $p = -1$ is er geen snijpunt; voor $p = 0$ is $(0,0)$ een dubbel snijpunt; uit de discriminant $3p^2(p+1)(3-p)$ blijkt dat er twee snijpunten zijn voor $-1 < p \leq 3$ en geen snijpunten als $p < -1$ of $p > 3$.

De kromme heet het folium van Descartes; zie figuur. De kromme heeft een scheve asymptoot $x + y = -1$.



De methode van het differentiëren van impliciet gegeven functies kan uit gebreed worden tot meer variabelen en tot meer vergelijkingen (zie ook 7.3, i.h.b. stelling 7.3.3).

De vergelijking $F(x,y,z) = 0$ beschrijft een oppervlak in \mathbb{R}^3 . Door deze vergelijking is z impliciet gegeven als functie van x en y : $z = z(x,y)$.

De partiële afgeleiden $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ kunnen we vinden door partiële differentiatie van

$$F(x,y,z(x,y)) = 0$$

onder toepassing van de kettingregel

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z},$$

mits $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Voorbeeld 4. Beschouw de vergelijking $x - e^y \sin z = 0$.

Partieel differentiëren naar x en naar y geeft

$$1 - e^y \cos z \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$-e^y \sin z - e^y \cos z \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

waaruit volgt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^y \cos z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\sin z}{\cos z} = -\tan z,$$

mits $\cos z \neq 0$.

Het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

beschrijft een kromme in \mathbb{R}^3 .

Men kan y en z als impliciet gegeven functies van x beschouwen en vragen naar de afgeleiden $y'(x)$ en $z'(x)$.

Differentiatie naar x levert

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0, \end{cases}$$

waaruit y' en z' zijn op te lossen mits de coëfficiëntendeterminant $\neq 0$ is.

Voorbeeld 5. Beschouw het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5, \\ xy + yz = 2. \end{cases}$$

Bereken $y'(x)$, $z'(x)$ en $z''(x)$ in $(x,y,z) = (0,1,2)$.

Differentiatie naar x levert

$$2x + 2yy' + 2zz' = 0 \quad \text{en} \quad y + (x+z)y' + yz' = 0.$$

In $(0,1,2)$ wordt dit

$$2y'(0) + 4z'(0) = 0 \quad \text{en} \quad 1 + 2y'(0) + z'(0) = 0,$$

met oplossing $y'(0) = -2/3$ en $z'(0) = 1/3$.

Nogmaals differentiëren geeft

$$\begin{cases} 1 + (y')^2 + yy'' + (z')^2 + zz'' = 0, \\ y' + (x+z)y'' + (1+z')y' + y'z' + yz'' = 0. \end{cases}$$

Invullen van $(x,y,z) = (0,1,2)$ en van de bekende waarden van $y'(0)$ en $z'(0)$ geeft twee vergelijkingen voor $y''(0)$ en $z''(0)$, waaruit volgt $z''(0) = -44/27$.

4.6. Richtingsafgeleide en gradiënt

We brengen de definitie van het inwendig product $(\underline{a}, \underline{b})$ van twee vectoren \underline{a} en \underline{b} in herinnering. In \mathbb{R}^2 is $(\underline{a}, \underline{b}) = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2$, in \mathbb{R}^3 is $(\underline{a}, \underline{b}) = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, waarbij φ de hoek tussen de vectoren is en $\underline{a} = (a_1, a_2)$ resp. (a_1, a_2, a_3) , $\underline{b} = (b_1, b_2)$ resp. (b_1, b_2, b_3) . Twee vectoren \underline{a} en \underline{b} staan loodrecht op elkaar dan en slechts dan als $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$.

In \mathbb{R}^3 is $n_1(x-a) + n_2(y-b) + n_3(z-c) = 0$ de vergelijking van een vlak V door (a,b,c) en met $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ als normaalvector d.w.z. \underline{n} staat loodrecht op vlak V . Dit laatste is in te zien door de vergelijking in de vorm $(\underline{n}, \underline{x}-\underline{a}) = 0$ te schrijven met $\underline{x} = (x,y,z)$ en $\underline{a} = (a,b,c)$.

In \mathbb{R}^2 is analoog $n_1(x-a) + n_2(y-b) = 0$ de vergelijking van een rechte ℓ met $\underline{n} = (n_1, n_2)$ als normaalvector, d.w.z. \underline{n} staat loodrecht op de rechte ℓ .

4.6.1. Gradient. Zij f een reële functie van n veranderlijken, differentieerbaar in $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ (zie 4.4) dan verstaan we onder $\text{grad } f(\underline{a})$ de rijvector

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{a}) \right).$$

Opmerking. In plaats van $\text{grad } f$ gebruikt men ook de notatie ∇f .

Rekenregels. $\text{grad}(c f(\underline{a})) = c \text{grad } f(\underline{a})$ (c is constante)

$$\text{grad}(f(\underline{a}) + g(\underline{a})) = \text{grad } f(\underline{a}) + \text{grad } g(\underline{a})$$

$$\text{grad}(f(\underline{a})g(\underline{a})) = f(\underline{a}) \text{grad } g(\underline{a}) + g(\underline{a}) \text{grad } f(\underline{a}) .$$

4.6.2. Richtingsafgeleide. Zij f een reële functie van n veranderlijken ($n \leq 3$), \underline{a} een inwendig punt van $\text{DOM } f$ en $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{v}$ een parametervoorstelling van een rechte door \underline{a} met richtingsvector \underline{v} . Kies $|\underline{v}| = 1$, dan is $|t|$ de afstand van \underline{x} tot \underline{a} . We beschouwen de samengestelde functie $g(t) = f(\underline{a} + t\underline{v})$. Als g een afgeleide heeft in $t = 0$, m.a.w. als

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{a} + t\underline{v}) - f(\underline{a})}{t}$$

bestaat, dan noemen we $g'(0)$ de richtingsafgeleide van f in \underline{a} in de richting van \underline{v} .

Merk op dat $f_x(\underline{a})$, $f_y(\underline{a})$ en $f_z(\underline{a})$ richtingsafgeleiden zijn in de richting van de coördinaatassen.

4.6.3. Stelling. Zij f differentieerbaar in \underline{a} dan bestaat de richtingsafgeleide van f in \underline{a} in een willekeurige richting \underline{v} ($|\underline{v}| = 1$) en is gelijk aan $(\text{grad } f(\underline{a}), \underline{v})$.

Bewijs. Dit is een onmiddellijk gevolg van de kettingregel. □

Opgave. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zij gedefinieerd door

$$f(\underline{x}) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{voor } \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \text{voor } \underline{x} = \underline{0} . \end{cases}$$

a) Bewijs dat f_x en f_y overal bestaan.

b) Heeft f , behalve f_x en f_y , nog andere richtingsafgeleiden in $(0,0)$?

4.6.4. Meetkundige interpretatie. We beschouwen de differentieerbare functie $f(x,y,z)$. Door het punt $\underline{a} = (a,b,c)$ gaat het niveauvlak met vergelijking

$$f(x,y,z) = f(a,b,c). \tag{1}$$

De vergelijking van het raakvlak aan het niveauvlak in het punt \underline{a} kunnen we opstellen door op te merken dat door de vergelijking (1) z impliciet als functie van x en y is gegeven. (We nemen aan dat $f_z(\underline{a}) \neq 0$; zie 4.5 en verder 7.3.4.) Volgens 4.3.2 is de vergelijking van het raakvlak

$$z - c = \frac{\partial z}{\partial x}(\underline{a}, b)(x-a) + \frac{\partial z}{\partial y}(\underline{a}, b)(y-b) . \quad (2)$$

Uit (1) bepalen we door impliciet differentiëren $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$. Dit geeft

$$\frac{\partial z}{\partial x}(\underline{a}, b) = - \frac{f_x(\underline{a})}{f_z(\underline{a})} , \quad \frac{\partial z}{\partial y}(\underline{a}, b) = - \frac{f_y(\underline{a})}{f_z(\underline{a})} .$$

Invullen in (2) geeft tenslotte voor het raakvlak de vergelijking:

$$f_x(\underline{a})(x-a) + f_y(\underline{a})(y-b) + f_z(\underline{a})(z-c) = 0 .$$

Uit de vergelijking volgt dat de vector $\text{grad } f(\underline{a})$ loodrecht op het niveauvlak in \underline{a} staat. De richtingsafgeleide in \underline{a} in de richting \underline{v} is $(\text{grad } f(\underline{a}), \underline{v}) = |\text{grad } f(\underline{a})| \cos \varphi$, als φ de hoek is tussen \underline{v} en $\text{grad } f(\underline{a})$. De richtingsafgeleide is dus maximaal als $\varphi = 0$, d.w.z. in de richting van $\text{grad } f(\underline{a})$. De vector $\text{grad } f(\underline{a})$ geeft dus aan in welke richting f het sterkst toeneemt. Loodrecht op $\text{grad } f(\underline{a})$ is de richtingsafgeleide nul; dit geldt dus voor richtingen in het raakvlak aan het niveauvlak.

Niveauvlakken snijden elkaar uiteraard niet.

Krommen loodrecht op alle niveauvlakken heten orthogonale trajectoriën; de raaklijn aan de orthogonale trajectorie door \underline{a} heeft richtingsvector $\text{grad } f(\underline{a})$.

Voor $n = 2$ geldt een analoge meetkundige interpretatie. We hebben dan te maken met niveaulijnen in \mathbb{R}^2 in plaats van met niveauvlakken. De raaklijn in $\underline{a} = (a, b)$ aan de niveaulijn $f(x, y) = f(a, b)$ wordt gegeven door de vergelijking

$$f_x(\underline{a})(x-a) + f_y(\underline{a})(y-b) = 0 .$$

Voorbeeld. $f(x, y) = xy$. Niveaulijnen zijn orthogonale hyperbolen met x -as en y -as als asymptoten.

Wegens $\text{grad } f(x, y) = (y, x)$ geldt voor de orthogonale trajectoriën:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{array} \right\} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

met als oplossingen $x^2 - y^2 = C$; dat zijn orthogonale hyperbolen met $y = x$ en $y = -x$ als asymptoten.

4.7. Extrema

We beschouwen functies van twee of drie variabelen. Locale respectievelijk globale extrema worden gedefinieerd als bij functies van één variabele (zie 2.5.6).

Een belangrijke rol speelt de volgende stelling, die we niet zullen bewijzen (zie 2.5.7).

4.7.1. Stelling (Weierstrass). Zij $V \subset \mathbb{R}^n$ een begrensde en gesloten verzameling en zij $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ continu op V dan heeft f op V een globaal maximum en een globaal minimum.

Inwendige punten van de definitieverzameling van f waar f differentieerbaar is en $\text{grad } f = \underline{0}$ heten stationaire punten.

4.7.2. Stelling. Als f een extremum heeft in een inwendig punt \underline{a} van de definitieverzameling van f en als f differentieerbaar is in \underline{a} , dan is $\text{grad } f(\underline{a}) = \underline{0}$, d.w.z. \underline{a} is een stationair punt.

Bewijs. Kies een richting \underline{y} . De samengestelde functie $g(t) := f(\underline{a} + t\underline{y})$ heeft in $t = 0$ een extremum en is daar differentieerbaar met $g'(0) = (\text{grad } f(\underline{a}), \underline{y})$. Volgens 2.6.5 is dan $(\text{grad } f(\underline{a}), \underline{y}) = 0$. Omdat dit geldt voor elke richting \underline{y} , is $\text{grad } f(\underline{a}) = \underline{0}$. □

Voorbeelden. 1) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $\text{grad } f(x,y) = (2x, 2y)$.

Het enige stationaire punt is $(0,0)$. In dit punt heeft f een globaal minimum met functiewaarde 0.

2) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ heeft geen stationaire punten, maar wel een globaal minimum in $(0,0)$. In $(0,0)$ is f niet differentieerbaar.

3) $f(x,y) = xy$; $\text{grad } f(x,y) = (y,x)$.

Het enige stationaire punt is $(0,0)$, maar f heeft in dat punt géén extremum.

Immers $f(0,0) = 0$ en $f(x,y) > 0$ in het eerste en derde kwadrant en $f(x,y) < 0$ in het tweede en vierde kwadrant.

We noemen het punt $(0,0)$ een zadelpunt.

Samenvattend kan men zeggen dat een functie f op een verzameling V extrema kan hebben:

- a) in inwendige punten van V die stationaire punten van f zijn;
- b) in inwendige punten van V waar f niet differentieerbaar is;
- c) in alle punten van V die niet inwendig zijn.

Voorbeeld 4. Bepaal de extrema van $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ op de verzameling

$$V := \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

V is begrensd en gesloten en f is continu, dus volgens 4.7.1 moet f een globaal maximum en een globaal minimum hebben op V . Inwendige punten zijn de punten met $x^2 + y^2 < 1$. Omdat $\text{grad } f(x,y) = (-2x, -2y)$, is $(0,0)$ het enige stationaire punt in $f(0,0) = 1$. Voor de randpunten van V (de punten met $x^2 + y^2 = 1$) is $f(x,y) = 0$ en voor de inwendige punten is $f(x,y) > 0$.

Conclusie. Elk punt van de rand is een globaal minimum (waarde 0); er moet ook een globaal maximum zijn dat niet op de rand kan liggen; er is slechts één stationair punt nl. $(0,0)$, dus $(0,0)$ is een globaal maximum (waarde 1).

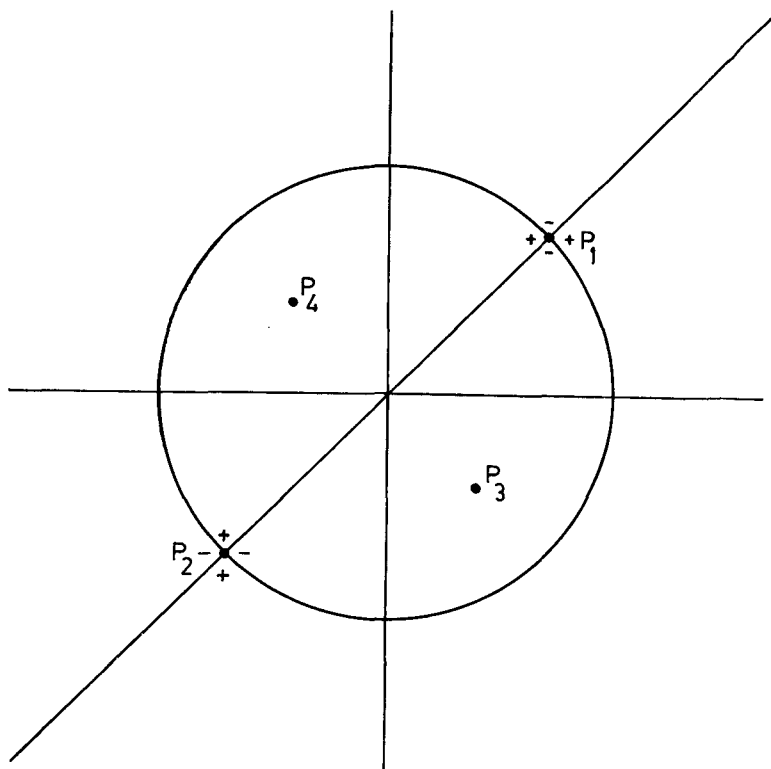
Voorbeeld 5. Bepaal de extrema van $f(x,y) = (x-y)(x^2+y^2-1)$ in \mathbb{R}^2 .

Nu is $\text{grad } f(x,y) = (3x^2 - 2xy + y^2 - 1, -x^2 + 2xy - 3y^2 + 1)$.

Er zijn 4 stationaire punten:

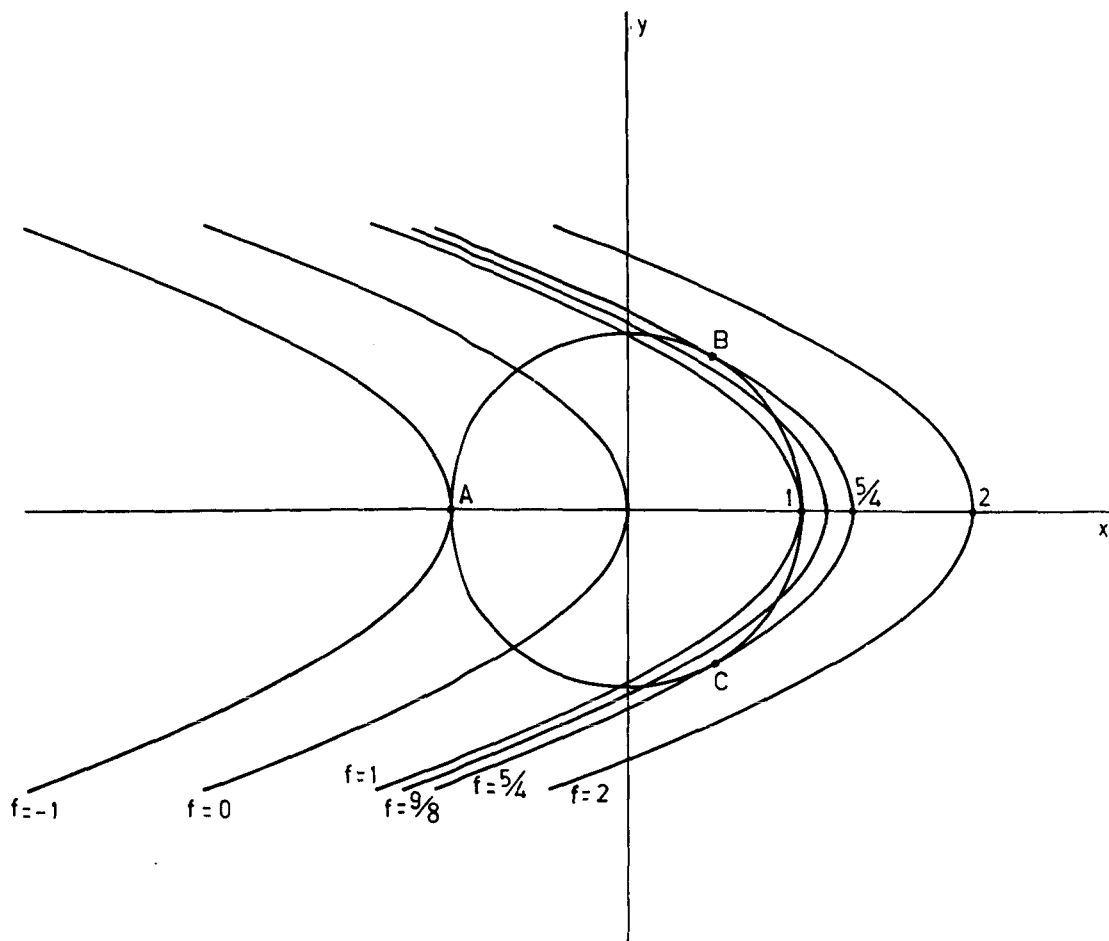
$$P_1 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \text{ functiewaarde } 0; P_2 = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \text{ functiewaarde } 0;$$

$$P_3 = \left(\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{6}\sqrt{6}\right), \text{ functiewaarde } -\frac{2}{9}\sqrt{6}; P_4 = \left(-\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6}\right), \text{ functiewaarde } \frac{2}{9}\sqrt{6}.$$



In de hoogtekaart zijn de nul-niveaulijnen (nullijnen) getekend, die het vlak in vier gebieden verdelen waar f tekenvast is. De tekenverdeling is ook aangegeven in de hoogtekaart. Hieruit blijkt onmiddellijk dat P_1 en P_2 zadelpunten zijn. Beschouw $V := \{(x,y) \mid x \leq y \text{ en } x^2 + y^2 \leq 1\}$. Op V is $f(x,y) \geq 0$ en op de rand van V is $f(x,y) = 0$. Aangezien V begrensd en gesloten is moet f dus een maximum hebben in het inwendige van V ; de enige kandidaat is P_4 , dus P_4 is globaal maximum t.o.v. V . Het punt P_4 is t.o.v. de gehele \mathbb{R}^2 slechts een lokaal maximum. Evenzo is P_3 een lokaal minimum.

Voorbeeld 6. Bepaal de extrema van $f(x,y) = x + y^2$ op de verzameling $V := \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Beschouw eerst de inwendige punten van V , dat zijn punten met $x^2 + y^2 < 1$. Daar $\text{grad } f(x,y) = (1, 2y) \neq (0,0)$ zijn er géén stationaire punten in het inwendige van V . Aangezien V begrensd en gesloten is en f continu moeten zowel het globale maximum als het globale minimum op de rand gezocht worden. We tekenen de hoogtekaart.



We zien direct dat het globale minimum van f de waarde -1 heeft en aangenomen wordt in $(-1,0)$. Om de beide globale maxima te bepalen zoeken we een getal c zó dat de parabool $x+y^2=c$ raakt aan de cirkel $x^2+y^2=1$. De voorwaarde waaraan c moet voldoen is dan dat de vierkantsvergelijking $x^2-x+c=1$ een tweevoudige wortel heeft. Met de discriminant volgt dan $1-4(c-1)=0$; $c=5/4$. De tweevoudige wortel is $x=1/2$. Het globale maximum wordt dus aangenomen in de punten $(1/2, \pm 1/2 \sqrt{3})$; de waarde is $5/4$.

We merken op dat het probleem de extrema te bepalen van $f(x,y) = x + y^2$ op de verzameling $W := \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ dus op de rand van V een andere oplossing heeft. Op W geldt $y^2 = 1 - x^2$ en $-1 \leq x \leq 1$; substitutie in $f(x,y)$ geeft $f(x,y(x)) = -x^2 + x + 1$ en $-1 \leq x \leq 1$. Deze functie heeft voor $x = 1/2$ een globaal maximum met waarde $5/4$. Er zijn randminima voor $x = -1$, waarde -1 en ook voor $x = 1$, waarde 1 . De functie $f(x,y) = x + y^2$ heeft dus op W de volgende extrema: globale maxima met waarde $5/4$ in $(1/2, 1/2 \sqrt{3})$ en $(1/2, -1/2 \sqrt{3})$;

een globaal minimum met waarde -1 in $(-1,0)$ en een lokaal minimum met waarde $+1$ in $(1,0)$. Als we de extrema van $f(x,y)$ op V bepalen dan voldoet het lokale minimum niet; op de doorsnede van de x -as en V , d.w.z. op $\{(x,0) \mid -1 \leq x \leq 1\}$, heeft f in $(1,0)$ een globaal maximum want $f(x,0) = x \leq 1 = f(1,0)$!

Als we dus van een functie de extrema op de rand van V bepaald hebben (bijv. door eliminatie zoals in dit voorbeeld of met de methode van 4.8) dan kunnen we niet blindelings deze extrema ook tot extrema van f op V verklaren.

4.8. Extrema met nevenvoorwaarden

Beschouw het volgende probleem. Zoek de extrema van $f(x,y)$, waarbij alleen die punten in aanmerking komen die voldoen aan $g(x,y) = 0$.

De volgende stelling geeft een nodige voorwaarde voor een extremum.

Stelling. Als f een extreem heeft onder de nevenvoorwaarde $g(x,y) = 0$ in een punt \underline{a} waar f en g differentieerbaar zijn en waar $\text{grad } g(\underline{a}) \neq \underline{0}$, dan is er een getal λ zodat geldt

$$\text{grad } f(\underline{a}) + \lambda \text{ grad } g(\underline{a}) = \underline{0}.$$

We bewijzen de stelling niet.

Meetkundig is de stelling als volgt plausibel te maken. De nevenvoorwaarde $g(x,y) = 0$ is de vergelijking van een kromme K in \mathbb{R}^2 . Heeft f in het punt $\underline{a} \in K$ een extremum, dan raakt de niveaulijn van f in \underline{a} aan de kromme K , de raaklijnen vallen dan samen evenals de normalen en dat betekent dat de vector $\text{grad } f(\underline{a})$ een veelvoud van $\text{grad } g(\underline{a})$ is.

Men gebruikt de stelling aldus.

Los x , y en λ op uit de vergelijkingen

$$\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) + \lambda g_y(x,y) = 0. \end{cases}$$

Is (x_0, y_0, λ_0) een oplossing van dit stelsel vergelijkingen dan kan er in (x_0, y_0) een extremum optreden. In punten waar $\text{grad } g = \underline{0}$ is de methode niet toepasbaar; zulke punten komen dus ook voor extrema in aanmerking.

Dit is de multiplicatorenmethode van Lagrange (λ heet de multiplicator).

Voorbeeld. Bepaal de extrema van $f(x,y) = x + y^2$ onder de nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 = 1$.

Los op

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 0. \end{cases}$$

Oplossing:

$$\lambda = -\frac{1}{2} ; (x,y) = (1,0) ; f(1,0) = 1$$

$$\lambda = \frac{1}{2} ; (x,y) = (-1,0) ; f(-1,0) = -1$$

$$\lambda = -1 ; (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \sqrt{3}\right) ; f\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \sqrt{3}\right) = 5/4.$$

Met behulp van de stelling van Weierstrass concluderen we tot globale maxima in $(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \sqrt{3})$, een globaal minimum in $(-1,0)$ en een lokaal minimum in $(1,0)$.

Men kan de multiplicatorenmethode uitbreiden tot functies van meer variabelen en meer nevenvoorwaarden.

Bijvoorbeeld: zoek extrema van $f(x,y,z)$ onder de voorwaarden $g(x,y,z) = 0$ en $h(x,y,z) = 0$.

Dit leidt tot het oplossen van x, y, z, λ_1 en λ_2 uit het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} g = 0, h = 0, \\ f_x + \lambda_1 g_x + \lambda_2 h_x = 0 \\ f_y + \lambda_1 g_y + \lambda_2 h_y = 0 \\ f_z + \lambda_1 g_z + \lambda_2 h_z = 0. \end{cases}$$

Hoofdstuk 5. Complexe getallen

5.1. Inleiding

In de verzameling der reële getallen heeft de vergelijking $x^2 = -1$ geen oplossing. Op zichzelf hoeft dit feit nog geen aanleiding te zijn tot het ontwerpen van een nieuw getalsysteem. Maar al in de 16^e eeuw ontdekte men, dat men, rekenend met een uitbreiding van het systeem der reële getallen, allerlei resultaten kon afleiden, die zonder deze nieuwe getallen niet of slechts met veel moeite te verkrijgen waren. Het bekendste voorbeeld vormden de formules van Cardano voor de wortels van een derdegraadsvergelijking. In tegenstelling tot de reële (= werkelijke) getallen, noemde men de nieuwe getallen imaginair (= denkbeeldig). Wij zullen om redenen, die na 5.2 vanzelfsprekend zullen zijn, de naam complexe getallen gebruiken. Het heeft geruime tijd geduurd voor men een mathematisch bevredigende beschrijving van de invoering van de complexe getallen gegeven heeft. De eerste geslaagde poging daartoe van Argand (+ 1800) bleef onopgemerkt. Eerst na een publicatie van Gauss uit 1831 werd een goed gefundeerde opbouw van het complexe getallensysteem algemeen bekend.

5.2. Invoering der complexe getallen

We gaan uit van de twee-dimensionale ruimte \mathbb{R}^2 (zie 1.5). In dit hoofdstuk zullen we de punten in \mathbb{R}^2 complexe getallen noemen. Een complex getal is dus een vector (a,b) , waar a en b reële getallen zijn. De vector $(1,0)$ zullen we aangeven met 1 , de vector $(0,1)$ met i . Omdat we de vectoren als getallen zullen behandelen, laten we de onderstrepingen weg. De relatie $(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a1 + bi$ schrijven we als $(a,b) =: a + bi$. In het bijzonder schrijven we $(a,0) = a$. Dit houdt in, dat we de x -as in \mathbb{R}^2 identificeren met de reële getallenrechte \mathbb{R} . We zeggen dan ook dat $(a,0) = a$ een reëel getal is. Een getal van de gedaante $(0,b) = bi$ noemen we zuiver imaginair. Van een willekeurig getal $z = a + bi$ noemen we a het reële deel (notatie $a =: \operatorname{Re} z$) en b het imaginaire deel ($b =: \operatorname{Im} z$); bedenk dat $\operatorname{Im} z$ een reëel getal is!). Indien we een complex getal geven als $z = a + bi$ is steeds stilzwijgend verondersteld $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ dus $a, b \in \mathbb{R}$. Wanneer we \mathbb{R}^2 als een verzameling van complexe getallen opvatten, schrijven we \mathbb{C} i.p.v. \mathbb{R}^2 . Verder noemen we de x -as de reële as en de y -as de imaginaire as

in het complexe vlak \mathbb{C} . Men realiseert zich dat in de definitie van \mathbb{C} ligt opgesloten dat $a + bi = c + di$ betekent $a = c$ en $b = d$.

In \mathbb{C} kunnen evenals in \mathbb{R} rekenkundige bewerkingen worden ingevoerd. Voor vectoren in \mathbb{R}^2 is al een optelling gedefinieerd. Deze zullen we handhaven, als we de vectoren als complexe getallen beschouwen:

5.2.1. Definitie. Als $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, dan is

$$z_1 + z_2 := (a + c) + (b + d)i .$$

Verder zullen we in \mathbb{C} een vermenigvuldiging definiëren, hetgeen niet gebeurd is in \mathbb{R}^2 . Bij de definitie van vermenigvuldiging gaan we uit van de volgende eisen:

- a) Voor reële getallen blijft de vermenigvuldiging zoals wij deze reeds kennen.
- b) De voor de vermenigvuldiging van reële getallen bekende rekenregels blijven gelden ($z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ enz.).
- c) $i^2 = -1$.

Als we deze voorwaarden toepassen op de berekening van z_1z_2 , waar $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, krijgen we:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i . \end{aligned}$$

Zo komen we tot de volgende definitie.

5.2.2. Definitie. Als $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, dan

$$z_1z_2 := (ac - bd) + (ad + bc)i .$$

Het is gemakkelijk in te zien, dat deze vermenigvuldiging inderdaad aan de gestelde eisen voldoet. De in b) geëiste rekenregels kunnen als volgt worden samengevat:

5.2.3. Stelling.

- 1) $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$
- 2) $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- 3) $1z = z, 0z = 0$
- 4) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Opmerking. In \mathbb{R}^2 is ook een scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd, d.w.z. een vermenigvuldiging van een reëel getal met een vector. Als we in 5.2.2 aannemen dat z_1 reëel is (d.w.z. $b = 0$) dan volgt onmiddellijk $z_1 z_2 = az_2 = ac + adi$, hetgeen overeenkomt met scalaire vermenigvuldiging. In het bijzonder volgt hieruit, dat de notatie bi die we steeds hebben gebruikt, (en die gedefinieerd was m.b.v. het scalaire product in \mathbb{R}^2), ook kan worden opgevat als vermenigvuldiging in de zin van 5.2.2.

In \mathbb{C} kan ook een deling worden gedefinieerd. Eerst laten we zien dat bij elk getal $z_1 = a + bi$ met $z_1 \neq 0$ er precies één getal $z_2 = x + iy$ bestaat met de eigenschap $z_1 z_2 = 1$. De vergelijking $z_1 z_2 = 1$ luidt $(a + bi)(x + iy) = 1$. Dus

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + cy = 0 \end{cases}$$

Als $z_1 \neq 0$, dan heeft dit stelsel een éénduidige oplossing:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

5.2.4. Definitie. 1) Als $z = a + bi \neq 0$, dan

$$\frac{1}{z} := \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

2) Als $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$, dan

$$\frac{z_2}{z_1} := z_2 \cdot \frac{1}{z_1}.$$

Het is gemakkelijk in te zien dat z_2/z_1 de eenduidige oplossing is van de vergelijking $z_1 z = z_2$ in z . Ook kan men verifiëren dat voor reële getallen de deling overeenkomt met de reeds in \mathbb{R} bekende deling.

Een vector in \mathbb{R}^2 kan men behalve door zijn cartesische coördinaten ook karakteriseren door zijn poolcoördinaten (zie 1.6.1) $\underline{x} = (a, b) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, waarin $r = |\underline{x}|$ de lengte van \underline{x} en φ de hoek voorstelt, die de vector \underline{x} met de positieve x-as maakt. In de notatie van de complexe getallen schrijft men

$$z = r \cos \varphi + (r \sin \varphi)i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) .$$

Men noemt r de modulus of de absolute waarde van z (notatie $r = |z|$), en φ het argument van z (notatie $\varphi = \arg z$). Als $z = a + bi$, dan is dus $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5.2.5. Stelling. Als $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, dan geldt

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \} .$$

Als verder $z_2 \neq 0$, dan is

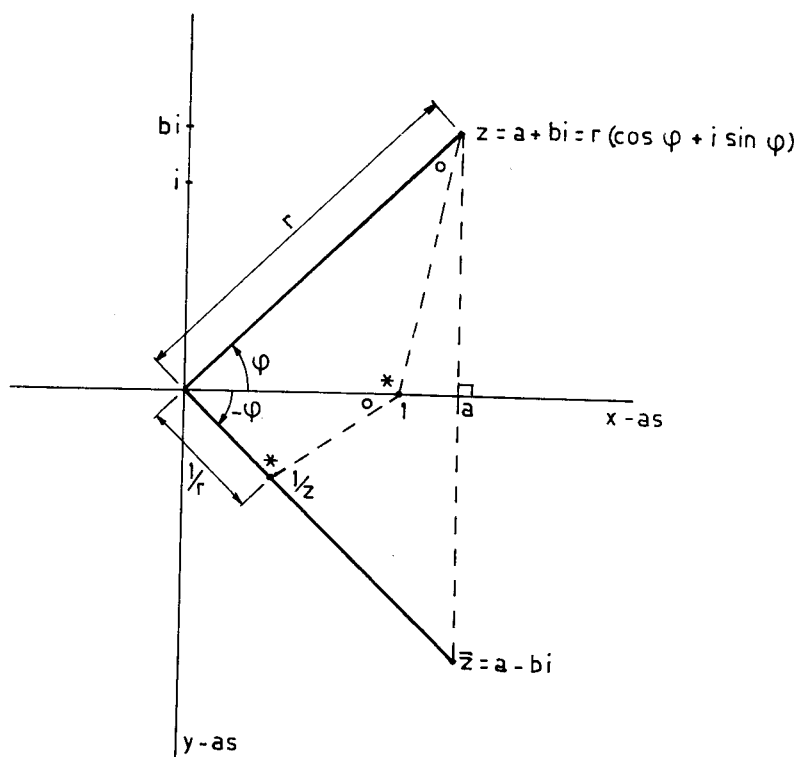
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \} .$$

5.2.6. Definitie. Als $z = a + bi$ (met a, b reëel), dan heet

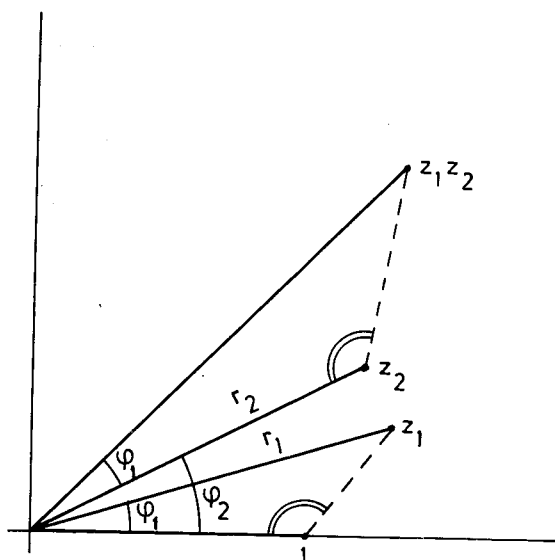
$$\bar{z} := a - bi$$

de complex geconjugeerde van z .

In de figuren (1) en (2) wordt de meetkundige betekenis van de verschillende begrippen geïllustreerd.



figuur (1)



figuur (2)

Opmerkingen. 1) Voor het getal 0 wordt geen argument gedefinieerd.

2) Het argument van een complex getal z is slechts bepaald op veelvoud van 2π na. Een van deze waarden voldoet aan de eis $-\pi < \varphi \leq \pi$. Deze waarde heet de hoofdwaarde van het argument van z .

De volgende eigenschappen zijn gemakkelijk te bewijzen.

5.2.7. Stelling. Als $z \in \mathbb{C}$, $z_1 \in \mathbb{C}$ en $z_2 \in \mathbb{C}$ dan geldt:

1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ en $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$,

2) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,

3) $\overline{\bar{z}} = z$,

4) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$,

5) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$,

6) $(\bar{z} = z) \Leftrightarrow (z \text{ is reëel})$,

7) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ en $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$ (als $z_2 \neq 0$),

8) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$,

9) $z \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$,

10) $\arg \bar{z} = -\arg z$ en $\arg \frac{1}{z} = \arg \bar{z}$ (arg z hoeft hier niet de hoofdwaarde te zijn).

Voorbeelden. 1) $(4 + 3i) + (5 - 4i) = 9 - i$

2) $(4 + 3i) - (5 - 4i) = -1 + 7i$

3) $(4 + 3i)(5 - 4i) = 32 - i$

4) $\frac{4 + 3i}{5 - 4i} = \frac{8}{41} + \frac{31}{41}i$

5) $(4 + 3i)\overline{(5 - 4i)} = 8 + 31i$

6) $1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

7) $i^2 = -1; i^3 = -i; i^4 = 1; i^{4k} = 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$

8) $[\sqrt{r}(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2})]^2 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

9) $\operatorname{Re}(3 + 2i) = 3; \operatorname{Im}(3 + 2i) = 2$ (niet $2i$); $\overline{3 + 2i} = 3 - 2i;$
 $\arg(3 + 2i) = \arctan \frac{2}{3} + 2k\pi .$

Door middel van volledige inductie volgt uit 5.2.5 dat

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) .$$

In het geval $r = 1$ vinden we de formule van de Moivre

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi .$$

Het is gemakkelijk in te zien dat de binomiumformule van Newton (zie 1.3.7):

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

ook geldt voor complexe getallen. Het bewijs gegeven in 1.3 kan nl. letterlijk worden overgenomen.

Combinatie van de binomiumformule en de formule van De Moivre geeft een gemakkelijke methode om $\cos n\varphi$ en $\sin n\varphi$ in $\cos \varphi$ en $\sin \varphi$ uit te drukken.

Voorbeeld. 10) $\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 =$
 $= \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi .$

Splitsing in het reële en imaginaire deel geeft:

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$$

$$\sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi .$$

5.3. Algebraïsche vergelijkingen

Een algebraïsche vergelijking is een vergelijking van de vorm $p(z) = 0$, waar $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ een polynoom is.

Een aantal definities en eigenschappen die verband houden met polynomen kunnen we zonder meer overnemen uit 2.2. Zo zeggen we dat z_1 een nulpunt is als $p(z_1) = 0$ (zie 2.4) (in dat geval is z_1 dus een oplossing van de vergelijking $p(z) = 0$). Voor complexe polynomen geldt ook de reststelling (2.2, voorbeeld 4): Als $p(z_1) = 0$, dan is p te schrijven als $p(z) = (z - z_1)q(z)$, waar $q(z)$ een polynoom is.

We zeggen dat z_1 een nulpunt is met multipliciteit k als p te schrijven is als $p(z) = (z - z_1)^k q(z)$ met $q(z_1) \neq 0$ (zie 2.2.4).

Evenals in 2.2.5 kan men uit de reststelling afleiden dat een vergelijking van de graad n ten hoogste n wortels heeft.

Er is echter een belangrijke eigenschap van complexe polynomen, die niet geldt voor reële polynomen:

5.3.1. Hoofdstelling van de algebra. Een polynoom met positieve graad heeft tenminste één nulpunt.

We zullen deze stelling hier niet bewijzen.

Zij $p(z)$ een polynoom met $\text{gr}(p) \geq 1$. Volgens de hoofdstelling der algebra heeft $p(z)$ een nulpunt z_1 . Uit de reststelling volgt nu, dat $p(z)$ geschreven kan worden als $p(z) = (z - z_1)q(z)$. Als $\text{gr}(q) \geq 1$ is, heeft $q(z)$ ook een nulpunt z_2 . Dan vinden we

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)r(z) .$$

Merk op, dat als $\text{gr } p = n$, dan $\text{gr } q = n - 1$, $\text{gr } r = n - 2$. We kunnen zo voortgaan, tot we een polynoom van de graad 0, d.w.z. een constante ($\neq 0$) hebben gevonden. Dan vinden we:

5.3.2. Stelling. Zij $p(z)$ een polynoom van de graad n met coëfficiënt van z^n gelijk aan a_n . Dan is $p(z)$ te ontbinden in lineaire factoren:

$$p(z) = a_n (z - z_1) \dots (z - z_n) .$$

De nulpunten z_i hoeven niet allemaal verschillend te zijn. We zien (als men nulpunten telt overeenkomstig hun multipliciteit, d.w.z. een k -voudig nulpunt k keer), dat een polynoom van de graad n precies n nulpunten heeft. In het bijzonder volgt hieruit, dat, als $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ meer dan n nulpunten heeft, $p(z)$ het nulpolynoom is.

We noemen $p(z)$ een reëel polynoom, als de coëfficiënten a_n, \dots, a_0 reëel zijn. Een reëel polynoom is reëel op de reële as, maar hoeft natuurlijk niet reëel te zijn in het hele complexe vlak. De volgende stelling geeft een aantal eigenschappen van reële polynomen.

5.3.3. Stelling. Zij $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ een polynoom. Dan geldt

- Als $p(z)$ een reëel polynoom is, dan is $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ voor elk complex getal z .
- Als $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ geldt voor meer dan n getallen z , dan is $p(z)$ een reëel polynoom.
- Als $p(z)$ een reëel polynoom is en $p(z_0) = 0$ dan is $p(\bar{z}_0) = 0$.
- Als $p(z) = q(z)r(z)$ en p en q zijn reële polynomen, dan is ook r een reëel polynoom.
- Als $p(z)$ een reëel polynoom is, en z_0 is een k -voudig nulpunt van $p(z)$ dan is ook \bar{z}_0 een k -voudig nulpunt van $p(z)$.
- Een reëel polynoom is te ontbinden in reële polynomen van de graad ≤ 2 .

Bewijs. a) $p(\bar{z}) = a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_0 = \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_0} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} = \overline{p(z)}$.

b) Als $p(\bar{z}_j) = \overline{p(z_j)}$ geldt voor $j = 0, \dots, n$, dan is

$$a_n \bar{z}_j^n + a_{n-1} \bar{z}_j^{n-1} + \dots + \bar{a}_0 = \overline{a_n z_j^n + a_{n-1} z_j^{n-1} + \dots + a_0},$$

dus

$$(a_n - \bar{a}_n) \bar{z}_j^n + \dots + (a_0 - \bar{a}_0) = 0.$$

Het polynoom

$$(a_n - \bar{a}_n) z^n + \dots + (a_0 - \bar{a}_0)$$

heeft derhalve meer dan n nulpunten, zodat we concluderen $a_k - \bar{a}_k = 0$, d.w.z. a_k is reëel voor $k = 0, \dots, n$.

c) $p(\bar{z}_0) = \overline{p(z_0)} = \bar{0} = 0$.

d) Voor $q(z) \neq 0$ geldt

$$r(\bar{z}) = p(\bar{z})/q(\bar{z}) = \overline{p(z)}/\overline{q(z)} = \overline{p(z)/q(z)} = \overline{r(z)} .$$

Het gestelde volgt dus uit b).

e) In c) is bewezen dat \bar{z}_0 een nulpunt is. Laat de multipliciteit van \bar{z}_0 gelijk zijn aan l . Veronderstel dat $l < k$. Dan geldt:

$$p(z) = (z - z_0)^k (z - \bar{z}_0)^l r(z) ,$$

waar $r(z_0) = 0$, $r(\bar{z}_0) \neq 0$. We merken op dat

$$q(z) := (z - z_0)^k (z - \bar{z}_0)^k = (z^2 - (z_0 + \bar{z}_0)z + z_0 \bar{z}_0)^k$$

een reëel polynoom is, zodat uit d) volgt dat ook $r(z)$ reëel is. Maar dan is $r(z_0) = 0$, $r(\bar{z}_0) \neq 0$ in strijd met c).

f) De nulpunten van zo'n polynoom kunnen worden verdeeld in reële nulpunten: x_1, \dots, x_l en niet-reële nulpunten. Zij z_0 een niet-reëel k -voudig nulpunt. Dan is ook \bar{z}_0 een k -voudig nulpunt. $p(z)$ is dan deelbaar door $(z - z_0)^k (z - \bar{z}_0)^k = \{z^2 - (z_0 + \bar{z}_0)z + z_0 \bar{z}_0\}^k$. We zien dat we $p(z)$ kunnen ontbinden op de volgende manier:

$$p(z) = a_n (z - x_1)^{h_1} \dots (z - x_l)^{h_l} \{z^2 - (z_1 + \bar{z}_1)z + z_1 \bar{z}_1\}^{k_1} \dots \\ \dots \{z^2 - (z_r + \bar{z}_r)z + z_r \bar{z}_r\}^{k_r} . \quad \square$$

Uit het bewijs van f) zien we dat een polynoom van oneven graad altijd een reëel nulpunt heeft. (Leid dit ook af uit de tussenwaardstelling.)

In het algemeen is het niet mogelijk de nulpunten van een polynoom, dat zijn de wortels van een algebraïsche vergelijking, exact te bepalen. Voor bepaalde klassen van vergelijkingen is dit wel mogelijk. Een belangrijk voorbeeld vormen de binomiaalvergelijkingen, d.w.z. vergelijkingen van de vorm $z^n = a$, met $a \in \mathbb{C}$ (en $a \neq 0$, voor $a = 0$ is de vergelijking triviaal). Om een oplossing te vinden schrijven we de vergelijking in poolcoördinaten.

Zij $a = r_0(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ en $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. De vergelijking $z^n = a$ luidt dan

$$r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r_0(\cos \alpha + i \sin \alpha) . \quad (1)$$

Twee complexe getallen ($\neq 0$) zijn aan elkaar gelijk dan en slechts dan als ze dezelfde modulus en hetzelfde argument (afgezien van een veelvoud van 2π) hebben. Uit (1) volgt dus

- a) $r^n = r_0$, dus $r = \sqrt[n]{r_0}$ (bedenk dat $r > 0$, $r_0 > 0$).
- b) $n\varphi = \alpha + 2k\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$, dus $\varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$.

Door voor k achtereenvolgens de getallen $0, 1, \dots, n-1$ in te vullen vinden we n verschillende oplossingen. Voor $k = n$ krijgen we weer de eerste oplossing.

Voorbeeld 1. $z^3 = -i$, dus $a = -i$, $n = 3$. Er geldt $r_0 = |a| = |-i| = 1$ en $\alpha = \arg(-i) = -\pi/2$. Als $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, dan worden de vergelijkingen voor r en φ : $r^3 = 1$ en $3\varphi = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$. Dus: $r = 1$ en $\varphi = -\frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi$. We substitueren achtereenvolgens $k = 0, 1, 2$:

$$k = 0 : z_1 = \cos(-\frac{1}{6}\pi) + i \sin(-\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$$

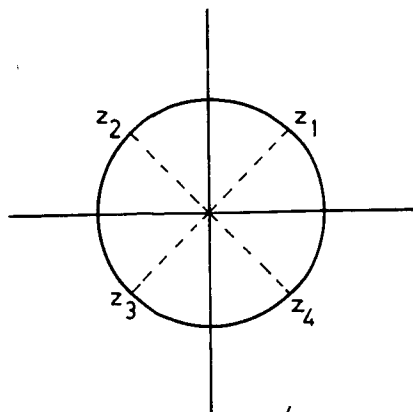
$$k = 1 : z_2 = \cos \frac{1}{2}\pi + i \sin \frac{1}{2}\pi = i$$

$$k = 2 : z_3 = \cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i .$$

Als we $k = 3$ invullen vinden we weer z_1 , etc.

Voorbeeld 2. $z^4 = -1$. Hier is $r_0 = 1$, $\alpha = \pi$. Dus $r = 1$ en $\varphi = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$. We vinden de punten $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i)$, $z_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1 + i)$, $z_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1 - i)$, $z_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - i)$. We merken op dat overeenkomstig 5.3.3c) geldt $\bar{z}_1 = z_4$, $\bar{z}_2 = z_3$. We kunnen volgens 5.3.3f) het polynoom $z^4 + 1$ ontbinden in twee kwadratische factoren:

$$\begin{aligned} z^4 + 1 &= (z^2 - (z_1 + \bar{z}_1)z + z_1\bar{z}_1)(z^2 - (z_2 + \bar{z}_2)z + z_2\bar{z}_2) = \\ &= (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1) . \end{aligned}$$



de wortels van $z^4 = -1$

Opgave 1. Bepaal de oplossingen van $z^8 = 1$, schrijf deze wortels in de vorm $a + bi$ en teken de punten in het complexe vlak. Ontbind het polynoom $z^8 - 1$ in lineaire en kwadratische reële factoren.

Opgave 2. Bereken de nulpunten van $z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

Opmerking. Vergelijkingen van de vorm $(az + b)^n = c$, waarbij a, b en c complexe getallen zijn en $a \neq 0$, zijn uiteraard gemakkelijk te herleiden tot binomiaalvergelijkingen. Stel nl. $w = az + b$ en los de vergelijking $w^n = c$ op. In het bijzonder kan men op deze manier elke vierkantsvergelijking oplossen d.m.v. kwadraatafsplitsing.

Voorbeeld 3. De vergelijking $z^2 + z + 1 = 0$ kan worden geschreven als $(z + \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$. De wortels zijn $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ en $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$.

5.4. Analyse in het complexe vlak

We hebben \mathbb{C} gedefinieerd als \mathbb{R}^2 met als extra bewerking de vermenigvuldiging. We kunnen daarom alle bekende convergentiebegrippen uit \mathbb{R}^2 zonder meer in \mathbb{C} overnemen. Alle eigenschappen die we in 1.5 hebben afgeleid blijven van kracht. Bovendien vinden we, op grond van de rijkere structuur van \mathbb{C} een aantal extra eigenschappen. We beschouwen dus de begrippen open bol, open verzameling, omgeving, gesloten verzameling, begrensde verzameling, rij, convergentie van een rij en begrensde rij bekend. We merken op dat we voor sommige begrippen een iets andere notatie zullen gebruiken dan in 1.5. De afstand van twee complexe getallen z_1 en z_2 is bijv. $|z_1 - z_2|$. Uit 1.5.6.6 volgt dat een rij complexe getallen (z_n) convergent is, dan en slechts dan als de reële rijen $(\operatorname{Re} z_n)$ en $(\operatorname{Im} z_n)$ convergent zijn. De volgende stelling bewijst men analoog aan 1.4.9.

5.4.1. Stelling. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ (waar a_n, b_n, a, b complex zijn) dan is

1)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

2)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$$

3)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1/a_n = 1/a \quad (\text{als } a \neq 0)$$

4)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a| .$$

5.4.2. Stelling (Standaardlimiet). Als $|a| < 1$, dan geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.

We beschouwen nu complexe functies van een reële variabele. In 4.1 hebben we gezien dat een kromme in het vlak weergegeven kan worden door een afbeelding $\underline{f} : \text{DOM } \underline{f} \rightarrow \mathbb{R}^2$, waar $\text{DOM } \underline{f} \subset \mathbb{R}$. We kunnen nu zo'n kromme ook aangeven d.m.v. een functie $f : \text{DOM } f \rightarrow \mathbb{C}$, gegeven door $f : t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$, waarbij $x(t)$ en $y(t)$ reële functies zijn.

Voorbeeld 1. De eenheidscirkel in het complexe vlak wordt weergegeven door de functie $z(t) = \cos t + i \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Voorbeeld 2. De parametervoorstelling van de rechte lijn luidt $z = a + bt$, waar a en b complexe constanten zijn en t de reële rechte doorloopt.

Voorbeeld 3. Door de functie $z(t) = a \cos t + bi \sin t$ met a en b reëel en $0 \leq t \leq 2\pi$ wordt een ellips weergegeven.

Het zal duidelijk zijn hoe men de afgeleiden en de integraal van een functie $t \mapsto z(t)$ definieert. Als $z(t) = u(t) + iv(t)$, waarbij $u(t)$ en $v(t)$ reële functies zijn, dan is $z'(t) := \frac{dz}{dt} := u'(t) + iv'(t)$ en

$$\int_{\alpha}^{\beta} z(t) dt := \int_{\alpha}^{\beta} u(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt ,$$

als tenminste de reële afgeleiden resp. integralen bestaan.

De volgende rekenregels gelden voor complexe afgeleiden en integralen.

- 5.4.3. Stelling. 1) Als $z_1(t)$ en $z_2(t)$ differentieerbaar zijn, dan zijn ook $z_1(t) + z_2(t)$, $z_1(t)z_2(t)$, $z_1(t)/z_2(t)$ (als $z_2(t) \neq 0$) differentieerbaar. In dat geval geldt $(z_1 + z_2)' = z_1' + z_2'$, $(z_1 z_2)' = z_1' z_2 + z_1 z_2'$, $(z_1/z_2)' = (z_1' z_2 - z_1 z_2')/z_2^2$.
- 2) Als z_1 en z_2 integreerbaar zijn op $[\alpha, \beta]$, dan zijn $z_1 + z_2$, az_1 voor elke $a \in \mathbb{C}$ integreerbaar. Er geldt:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{z_1(t) + z_2(t)\} dt = \int_{\alpha}^{\beta} z_1(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} z_2(t) dt$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} az_1(t) dt = a \int_{\alpha}^{\beta} z_1(t) dt .$$

- 3) (Partiële integratie). Als z_1 en z_2 continu-differentieerbaar zijn dan geldt

$$\int_{\alpha}^{\beta} z_1(t) z_2'(t) dt = z_1(t) z_2(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} z_1'(t) z_2(t) dt .$$

Bewijs. Deze eigenschappen kan men op dezelfde manier bewijzen als in hoofdstuk 2, of door over te gaan op het reële en imaginaire deel. We doen dit laatste voor de productformule: Als $z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t)$, $z_2(t) = x_2(t) + iy_2(t)$, dan is

$$z := z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

en dus

$$\begin{aligned} z' &= x_1' x_2 + x_1 x_2' - y_1' y_2 - y_1 y_2' + i(x_1' y_2 + x_1 y_2' + x_2' y_1 + x_2 y_1') = \\ &= z_1' z_2 + z_1 z_2' . \end{aligned}$$

□

We bespreken nu enkele eigenschappen van complexe reeksen. Evenals in hoofdstuk 3 zeggen we dat een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (waarbij nu de getallen a_n complex zijn) convergent is als de rij (S_n) van partiële sommen $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$ een limiet heeft. Men kan ook hier bewijzen dat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent is (zie 3.1.2). We noemen een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absoluut convergent als $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergent is. (N.B. Hier betekent $|a_n|$ de modulus van het complexe getal a_n .)

Stelling. Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absoluut convergent is dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent.

Bewijs. Er geldt $|\operatorname{Re} a_n| \leq |a_n|$ en $|\operatorname{Im} a_n| \leq |a_n|$. Uit 3.3.3 volgt dat $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ convergent zijn. Derhalve is ook

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n)$$

convergent. □

Opmerking. Stelling 3.3.4 (Cauchy-product) geldt ook voor complexe reeksen.

Van belang zijn vooral complexe machtreeksen, d.w.z. reeksen van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Het analogon van 3.4.1 is van toepassing. Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ convergent is en $\zeta \neq 0$ dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergent voor elke z met $|z| < |\zeta|$.

Het bewijs is gelijk aan dat van 3.4.1. We concluderen dat bij machtreeksen zich de volgende drie mogelijkheden kunnen voordoen

- 1) De machtreeks is alleen voor $z = 0$ convergent.
- 2) De machtreeks is absoluut convergent voor elke z .
- 3) Er bestaat een getal $R > 0$ zodat de machtreeks absoluut convergent is voor $|z| < R$ en divergent voor $|z| > R$.

Het getal R heet weer de convergentiestraal van de (in het geval 1) resp. 2) stellen we $R = 0$ resp. $R = \infty$).

Ook hier doen we geen algemene uitspraak over de convergentie voor $|z| = R$. De verzameling $|z| < R$, waarin we dus de convergentie kunnen garanderen, noemen we de convergentiecirkel. De waarde van R kan vaak worden bepaald d.m.v. de kenmerken van d'Alembert en Cauchy.

Uit bovenstaande volgt in het bijzonder: Als de reële machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergentiestraal R heeft, dan heeft ook de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in het complexe vlak convergentiestraal R . Dit geeft ons de mogelijkheid, functies gedefinieerd op de reële rechte, die een machtreeksontwikkeling hebben, ook te definiëren voor complexe getallen. Zo kunnen we bijv. voor willekeurige complexe z definiëren e^z , $\sin z$, $\cos z$ en voor $|z| < 1$ de functies $\log(1+z)$, $\arctan z$. We zullen ons in dit hoofdstuk beperken tot de bestudering van één van deze functies.

5.5. De functie e^z

5.5.1. Definitie. $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ voor $z \in \mathbb{C}$.

Uit 5.4 volgt dat e^z is gedefinieerd voor alle z . De volgende eigenschap is fundamenteel.

5.5.2. Stelling. $e^z e^w = e^{z+w}$ voor alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Bewijs. Volgens 3.3.4 is

$$\begin{aligned} e^z e^w &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}. \quad \square \end{aligned}$$

We bepalen het reële en imaginaire deel van e^z . Eerst beperken we ons tot de situatie waar z zuiver imaginair is.

5.5.3. Stelling. (formule van Euler). Als y reëel is, dan

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y .$$

Bewijs. $e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n y^n}{n!}$. Daar $i^{2n} = (-1)^n$ en $i^{2n+1} = (-1)^n i$ vinden we

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos y + i \sin y . \quad \square$$

Gevolg. Voor willekeurige $z = x + iy$ met x en y reëel kunnen we schrijven:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) .$$

Uit bovenstaande kunnen we een aantal eigenschappen afleiden.

5.5.4. Stelling. 1) Als y reëel is, dan geldt $|e^{iy}| = 1$.

2) Als $z = x + iy$, met x en y reëel, dan is

$$|e^z| = e^x , \quad \arg e^z = y$$

(dit is in het algemeen niet de hoofdwaarde).

3) $\cos y = \operatorname{Re} e^{iy} = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$.

$\sin y = \operatorname{Im} e^{iy} = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy})$.

4) Een getal $z \neq 0$ is te schrijven als $z = re^{i\varphi}$, waar $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Als we in de productregel 5.5.2 $z = iy$, $w = iu$ nemen dan vinden we

$$\cos(y + u) = \cos y \cos u + \sin y \sin u ,$$

$$\sin(y + u) = \sin y \cos u + \cos y \sin u .$$

De bekende somformules voor goniometrische functies volgen dus direct uit 5.5.2. De formule van de Moivre (5.2) volgt direct uit de formule van Euler (5.5.3), immers

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi .$$

We kunnen de relaties tussen de functie e^z en de goniometrische functies benutten om $(\cos x)^n$ en $(\sin x)^n$ uit te drukken in termen van de gedaante $\cos kx$, $\sin kx$.

Voorbeeld 1.

$$\begin{aligned}\cos^5 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^5 = \\ &= \frac{1}{32}(e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}) = \\ &= \frac{1}{16} \left\{ \left(\frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2}\right) + 5\left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2}\right) + 10\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) \right\} = \\ &= \frac{1}{16}(\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x) .\end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\int \cos^5 x dx = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{5} \sin 5x + \frac{5}{3} \sin 3x + 10 \sin x \right) + C .$$

De functie e^z kan ook op een andere manier worden gebruikt om integralen te berekenen. We merken op dat voor reële b geldt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{ibt}) &= \frac{d}{dt}(\cos bt + i \sin bt) = -b \sin bt + ib \cos bt = \\ &= ib(\cos bt + i \sin bt) = ibe^{ibt} .\end{aligned}$$

Tezamen met de bekende eigenschap $\frac{d}{dt} e^{at} = ae^{at}$ voor reële a volgt hieruit:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{(a+bi)t}) &= \frac{d}{dt}(e^{at} e^{ibt}) = ae^{at} e^{ibt} + ibe^{at} e^{ibt} = \\ &= (a + bi)e^{(a+bi)t} .\end{aligned}$$

We zien dus dat

$$\frac{d}{dt} e^{at} = ae^{at}$$

geldt voor elke $a \in \mathbb{C}$. Derhalve geldt ook

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} \Big|_{\alpha}^{\beta} \quad \text{voor elke } a \neq 0 .$$

Voorbeeld 2. Als $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, dan is

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-at} \cos bt \, dt &= \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{(-a+bi)t} \, dt = \operatorname{Re} \frac{1}{-a+bi} e^{(-a+bi)t} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{a-bi} = \operatorname{Re} \frac{a+bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

zoals we ook in 2.8.2, voorbeeld 1 vonden.

5.6. Meetkunde in het complexe vlak

We bespreken een aantal voorbeelden, waarbij figuren in het platte vlak worden beschreven d.m.v. complexe getallen.

In het algemeen kan dit op twee manieren gebeuren. In de eerste plaats kan een verzameling worden aangegeven door een vergelijking of ongelijkheid.

Voorbeeld 1. De verzameling $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + zi| > 1\}$ is het buitengebied van de cirkel $B(-2i, 1)$.

Voorbeeld 2. $\operatorname{Im} z = -3$ geeft een lijn evenwijdig aan de reële as door het punt $z = -3i$ aan. Analoog $\operatorname{Re} z = a$. De vergelijking $|z| = b$ is die van een cirkel met middelpunt 0 en straal b ; de vergelijking $\arg z = \alpha$ stelt voor een halfrechte door 0 (0 niet meegerekend).

Voorbeeld 3. De verzameling $\operatorname{Re} z > 2$ is het halfvlak rechts van de lijn $\operatorname{Re} z = 2$.

Opgave. Bepaal de verzamelingen aangegeven door de volgende gelijkheden en ongelijkheden:

i) $\operatorname{Re} z = |z - 1|$

ii) $|z + 3| = |z - i|$

iii) $|z + 5| + |z + 3i| = 8$

iv) $\operatorname{Re} \frac{z-3}{z+i} = 0$

v) $z + 2\bar{z} = 3$

vi) $z + \bar{z} = 3$

vii) $\bar{a}z + a\bar{z} = 2$, waar $a = 2 + 3i$

viii) $z + \bar{z} = z\bar{z}$

ix) $|e^{z^2+z}| < 1$.

Een tweede manier om een verzameling aan te geven is als beeld van een gegeven verzameling onder een gegeven afbeelding.

Voorbeeld 4. Beschouw het beeld van de volgende verzamelingen onder de afbeelding $w = e^z$.

- i) De imaginaire as, algemener de lijn $\operatorname{Re} z = a$.
- ii) De rechte $\operatorname{Im} z = b$.
- iii) De halfrechte $\arg z = \alpha$.
- iv) Het linkerhalfvlak $\operatorname{Re} z < 0$.
- v) De verzameling $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0, |\operatorname{Im} z| < \pi\}$.

We maken gebruik van de relaties $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$, $\arg e^z = \operatorname{Im} z$.

- i) Het beeld van de imaginaire as is de eenheidscirkel. De lijn $\operatorname{Re} z = a$ wordt getransformeerd in de cirkel met middelpunt 0 en straal e^a .
- ii) Het beeld is de halfrechte $\arg w = b$.
- iii) Zij $e^{i\alpha} = a + ib$. De halfrechte $\arg z = \alpha$ heeft de parameterrepresentatie $z = (a + ib)t$, $t > 0$. Dan is $r := |w| = |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} = e^{at}$ en $\varphi := \arg w = \operatorname{Im} z = bt$. Door eliminatie van t vindt men $r = e^{a\varphi/b}$, de vergelijking van een spiraal (als tenminste $b \neq 0$. Wat vindt men als $b = 0$?).
- iv) Het beeld is de cirkelschijf $|w| < 1$, met uitzondering van de oorsprong.
- v) Nu vinden we de verzameling $\{w \mid |w| < 1, |\arg w| < \pi\}$, d.w.z. de cirkelschijf $|w| < 1$ met uitzondering van het lijnstuk $\{w \mid \operatorname{Im} w = 0, -1 < \operatorname{Re} w \leq 0\}$.

Voorbeeld 5. Wanneer z de eenheidscirkel doorloopt, welke baan beschrijft dan $w = 1/(1+z)$? De eenheidscirkel wordt geparametriseerd door $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. We vinden

$$w = \frac{1}{1 + e^{it}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}it}}{e^{-\frac{1}{2}it} + e^{\frac{1}{2}it}} = \frac{\cos \frac{1}{2}t - i \sin \frac{1}{2}t}{2 \cos \frac{1}{2}t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \tan \frac{1}{2}t.$$

Het beeld is blijkbaar de rechte $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$. Merk op, dat $|\operatorname{Im} w| \rightarrow \infty$ als $t \rightarrow \pi$ (d.w.z. $z \rightarrow -1$).

Opmerking. Men kan laten zien, dat bij een afbeelding van de vorm $w = \frac{az + b}{cz + d}$ met $ad \neq bc$ een rechte of een cirkel wordt getransformeerd in een rechte of een cirkel. (Wat gebeurt er als $ad = bc$?)

Opgave. Wat is het beeld van de eenheidscirkel onder de afbeelding $w = \frac{z-1}{z+1}$?

5.7. Lineaire differentiaalvergelijkingen

Voorbeeld 1. We beschouwen een stoffelijk punt met massa m dat kan bewegen langs een rechte lijn. We beschouwen de plaats x van het punt als functie van de tijd t . Op het punt werken de volgende krachten:

i) een elastische kracht K_1 , gericht naar 0, evenredig met x

$$K_1 = -a_1 x, \quad a_1 > 0,$$

ii) een wrijvingskracht K_2 , evenredig aan de snelheid en tegengesteld gericht

$$K_2 = -a_2 \frac{dx}{dt} = -a_2 \dot{x}, \quad a_2 \geq 0,$$

iii) een tijdsafhankelijke uitwendige kracht $K_3 = f(t)$.

Volgens een wet van Newton is de kracht gelijk aan de massa maal de versnelling, dus $m\ddot{x} = -a_1 x - a_2 \dot{x} + f(t)$.

Voorbeeld 2. We beschouwen de uitwijkingshoek θ van een slinger met lengte als functie van de tijd t . Langs de boog geldt: massa maal versnelling is component zwaartekracht + wrijving + uitwendige kracht

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - a_1 \ell \dot{\theta} + f(t).$$

Als θ klein is, dan is $\sin \theta \approx \theta$, dus vinden we

$$m\ell\ddot{\theta} + a_1 \ell \dot{\theta} + mg\theta = f(t).$$

Voorbeeld 3. In een elektrisch circuit zijn opgenomen een electromotorische kracht $e(t)$, een condensator met capaciteit C , een smoorspoel met coëfficiënt van zelfinductie L en een weerstand R . We beschouwen de stroomsterkte i als functie van de tijd t . De spanning over de weerstand wordt dan gegeven door iR , over de smoorspoel door $L \frac{di}{dt}$. Als de spanning op tijdstip t over de condensator $V(t)$ is, dan geldt

$$V(t) = V(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du,$$

zodat voor het gehele circuit geldt

$$e(t) = V(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du + iR + L \frac{di}{dt} .$$

Differentiatie naar t levert

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt} .$$

De betrekkingen in de bovenstaande voorbeelden zijn voorbeelden van differentiaalvergelijkingen. In het algemeen is een differentiaalvergelijking een betrekking van de gedaante

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 ,$$

Hierin stelt x de veranderlijke voor en y een reële of complexe n keer differentieerbare functie van x met afgeleiden $y', \dots, y^{(n)}$.

Het getal n heet de orde van de differentiaalvergelijking. De functies $y(x)$ die gesubstitueerd de vergelijking tot een identiteit in x maken, heten oplossingen van de differentiaalvergelijking.

De algemene oplossing van een differentiaalvergelijking is een functie y die afhangt van een aantal parameters zodanig dat iedere keuze van deze parameters een oplossing levert, terwijl omgekeerd elke oplossing van de differentiaalvergelijking kan worden verkregen door geschikte keuze van de parameters.

5.7.1. Definitie. Een lineaire differentiaalvergelijking van orde n is een differentiaalvergelijking van de vorm

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) .$$

De functies $a_n(x), \dots, a_0(x)$ heten de coëfficiënten; zijn deze constant dan spreken we van een n -de orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.

Als $f(x) = 0$ voor alle x , dan heet de vergelijking homogeen, anders inhomogeen.

De differentiaalvergelijkingen uit voorbeeld 1, 2 en 3 zijn 2^e -orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten.

De vergelijking van Bessel.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 ,$$

is een 2^e -orde homogene lineaire differentiaalvergelijking. De oplossingen heten Besselfuncties en zijn van groot belang voor de techniek.

In hogere semesters worden zij uitvoerig besproken.

De vergelijking van van der Pol (1927),

$$y'' - \mu(1 - y^2)y' + y = 0$$

is een 2^e -orde niet-lineaire differentiaalvergelijking.

In de praktijk zijn we vrijwel uitsluitend geïnteresseerd in de reëelwaardige oplossingen van een differentiaalvergelijking. Het blijkt dat we bij lineaire vergelijkingen deze oplossingen het eenvoudigst vinden door eerst alle complexwaardige oplossingen te zoeken en daaruit de reële te selecteren. We nemen daarom voorlopig aan dat alle beschouwde functies complexe functies van een reële variabele zijn en de constanten, tenzij anders vermeld, complexe getallen.

Laat y een complexe functie zijn. We noteren dan $Dy := y'$, $D^2y := y''$, en $(D - \lambda)y := Dy - \lambda y$, waarin λ een complex getal is.

5.7.2. Stelling. $(D - \lambda)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 (D - \lambda)y_1 + \alpha_2 (D - \lambda)y_2$,

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = (D^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)D + \lambda_1 \lambda_2)y .$$

Bewijs. $(D - \lambda)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = D(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - \lambda(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) =$
 $= \alpha_1 D y_1 + \alpha_2 D y_2 - \alpha_1 \lambda y_1 - \alpha_2 \lambda y_2 =$
 $= \alpha_1 (D - \lambda) y_1 + \alpha_2 (D - \lambda) y_2 .$

$$\begin{aligned}(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y &= (D - \lambda_1)(Dy - \lambda_2 y) = \\ &= D(Dy - \lambda_2 y) - \lambda_1(Dy - \lambda_2 y) = \\ &= D^2 y - \lambda_2 D y - \lambda_1 D y + \lambda_1 \lambda_2 y = \\ &= (D^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)D + \lambda_1 \lambda_2)y .\end{aligned}$$

□

5.7.3. Stelling. Laat f een continue functie zijn. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y' - \lambda y = f$$

wordt gegeven door

$$y(x) = e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda t} f(t) dt + C e^{\lambda x} .$$

Bewijs. Daar $e^{-\lambda x} \neq 0$ voor iedere x (ga na dat dit ook voor complexe λ geldt) is de differentiaalvergelijking gelijkwaardig met

$$e^{-\lambda x} y' - \lambda e^{-\lambda x} y = e^{-\lambda x} f(x) ,$$

$$D(e^{-\lambda x} y) = e^{-\lambda x} f(x) .$$

Hieruit volgt:

$$e^{-\lambda x} y(x) = \int_0^x e^{-\lambda t} f(t) dt + C ,$$

$$y(x) = e^{\lambda x} \int_0^x e^{-\lambda t} f(t) dt + C e^{\lambda x} .$$

□

We gaan nu over op de 2^e-orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten

$$y'' + ay' + by = f ,$$

waarin f een continue functie voorstelt.

De vergelijking $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ heet de corresponderende karakteristieke vergelijking.

5.7.4. Stelling. Laat λ_1 en λ_2 de wortels van de karakteristieke vergelijking van $y'' + ay' + by = f$ zijn. Dan is de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking

$$y(x) = e^{\lambda_2 x} \int_0^x e^{(\lambda_1 - \lambda_2)u} \left(\int_0^u e^{-\lambda_1 t} f(t) dt \right) du + \\ + c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad \text{als } \lambda_1 \neq \lambda_2 ;$$

$$y(x) = e^{\lambda_1 x} \int_0^x \left(\int_0^u e^{-\lambda_1 t} f(t) dt \right) du + \\ + c_1 x e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} \quad \text{als } \lambda_1 = \lambda_2 .$$

Bewijs. Uit $\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ volgt $\lambda_1 + \lambda_2 = -a$, $\lambda_1 \lambda_2 = b$. Dan is wegens 5.7.2 $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = y'' + ay' + by$, zodat de differentiaalvergelijking ook geschreven kan worden als

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = f .$$

Noemen we $(D - \lambda_2)y =: z$, dan is $(D - \lambda_1)z = f$, zodat wegens 5.7.3

$$z(x) = e^{\lambda_1 x} \int_0^x e^{-\lambda_1 t} f(t) dt + c_1^* e^{\lambda_1 x} .$$

Pas nu 5.7.3 toe op de vergelijking $z = (D - \lambda_2)y$, dan vinden we

$$\begin{aligned}
 y(x) &= e^{\lambda_2 x} \int_0^x e^{-\lambda_2 u} z(u) du + c_2 e^{\lambda_2 x} = \\
 &= e^{\lambda_2 x} \int_0^x e^{-\lambda_2 u} (e^{\lambda_1 u} \int_0^u e^{-\lambda_1 t} f(t) dt + c_1^* e^{\lambda_1 u}) du + c_2 e^{\lambda_2 x} = \\
 &= e^{\lambda_2 x} \int_0^x e^{(\lambda_1 - \lambda_2)u} \left(\int_0^u e^{-\lambda_1 t} f(t) dt \right) du + \\
 &\quad + c_1^* e^{\lambda_2 x} \int_0^x e^{(\lambda_1 - \lambda_2)u} du + c_2 e^{\lambda_2 x}.
 \end{aligned}$$

Als $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dan wordt de tweede term in het rechterlid $\frac{c_1^*}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 x}$. Stel nu $\frac{c_1^*}{\lambda_1 - \lambda_2} = c_1$. Als c_1^* de verzameling der complexe getallen doorloopt, dan doorloopt ook c_1 de verzameling der complexe getallen.

De algemene oplossing is dus:

$$y(x) = e^{\lambda_2 x} \int_0^x e^{(\lambda_1 - \lambda_2)u} \left(\int_0^u e^{-\lambda_1 t} f(t) dt \right) du + c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Als $\lambda_1 = \lambda_2$, dan is de tweede term $c_1^* x e^{\lambda_1 x}$, en de algemene oplossing (met $c_1^* = c_1$)

$$y(x) = e^{\lambda_1 x} \int_0^x \left(\int_0^u e^{-\lambda_1 t} f(t) dt \right) du + c_1 x e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}. \quad \square$$

5.7.5. Stelling. De algemene oplossing van de homogene vergelijking $y'' + ay' + by = 0$ is

$$\begin{aligned}
 y &= c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} && \text{als } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\
 y &= c_1 x e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} && \text{als } \lambda_1 = \lambda_2,
 \end{aligned}$$

waarin λ_1 en λ_2 de wortels van de karakteristieke vergelijking zijn.

Bewijs. Neem in 5.7.3 $f(x) = 0$ voor alle x . □

Neem aan dat we één oplossing, een zogenaamde particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking $y'' + ay' + by = f$ kennen. De volgende stelling geeft dan aan hoe we de algemene oplossing vinden.

5.7.6. Stelling. Laat y_p een particuliere oplossing zijn van de differentiaalvergelijking $y'' + ay' + by = f$. De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking wordt gegeven door $y = y_p + y_{\text{hom}}$ waar y_{hom} de algemene oplossing van de corresponderende homogene vergelijking $y'' + ay' + by = 0$ is.

Bewijs. Laat c_1^p en c_2^p de parameterwaarden zijn zodanig dat, als we c_1^p en c_2^p voor c_1 en c_2 in de algemene oplossing van 5.7.4 substitueren, we de particuliere oplossing y_p vormen. Dan is volgens 5.7.4 de algemene oplossing

$$y(x) = y_p + (C_1 - c_1^p)e^{\lambda_1 x} + (C_2 - c_2^p)e^{\lambda_2 x} \quad \text{als } \lambda_1 \neq \lambda_2 ,$$

$$y(x) = y_p + (C_1 - c_1^p)xe^{\lambda_1 x} + (C_2 - c_2^p)e^{\lambda_1 x} \quad \text{als } \lambda_1 = \lambda_2 ,$$

en de laatste twee termen vormen in beide gevallen de algemene oplossing van de homogene vergelijking. □

Beschouw nu de differentiaalvergelijking $y'' + ay' + by = 0$ met a en b reëel. De wortels van de karakteristieke vergelijking zijn dan reëel of toegevoegd complex (zie 5.3.3). Om in het laatste geval reële oplossingen te vinden is de volgende stelling van belang.

5.7.7. Stelling. Neem aan dat a en b reëel zijn en dat de wortels van de karakteristieke vergelijking van $y'' + ay' + by = 0$ gegeven worden door $\alpha + \beta i$ en $\alpha - \beta i$ met $\beta \neq 0$.

Dan is de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x .$$

Bewijs. Uit 5.7.5 volgt dat een oplossing van de vergelijking geschreven kan worden als

$$\begin{aligned}y &= c_1' e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2' e^{(\alpha-\beta i)x} = \\&= c_1' e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + c_2' e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) = \\&= (c_1' + c_2') e^{\alpha x} \cos \beta x + i(c_1' - c_2') e^{\alpha x} \sin \beta x .\end{aligned}$$

Neem anderzijds aan dat $y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$. Bepaal dan c_1' en c_2' uit.

$$\begin{aligned}c_1' + c_2' &= c_1 \\ic_1' - ic_2' &= c_2 ,\end{aligned}$$

dan is

$$y = c_1' e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2' e^{(\alpha-\beta i)x} .$$

Wegens 5.7.5 is deze y dus een oplossing van de differentiaalvergelijking. \square

Voorbeeld 4. Bepaal de algemene reële oplossing van

$$y'' - y' + y = e^x .$$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Deze heeft wortels $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, zodat de algemene oplossing van de homogene vergelijking gegeven wordt door

$$y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{1}{2}x\sqrt{3} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{1}{2}x\sqrt{3} ,$$

met c_1 en c_2 complex.

Een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking is $y = e^x$. De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking is dus

$$y = e^x + c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{1}{2}x\sqrt{3} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{1}{2}x\sqrt{3}$$

met c_1 en c_2 complex. De algemene reële oplossing is

$$y = e^x + \alpha e^{\frac{1}{2}x} \cos \frac{1}{2}x\sqrt{3} + \beta e^{\frac{1}{2}x} \sin \frac{1}{2}x\sqrt{3}$$

met α en β reëel.

Gevolg. De vergelijking $y'' + ay' + by = e^{ax}p(x)$ waarin $p(x)$ een polynoom is, heeft een particuliere oplossing van de gedaante, $e^{ax}q_1(x)$ als α geen wortel is van $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, $xe^{ax}q_2(x)$ als α een enkelvoudige wortel is van $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ en $x^2e^{ax}q_3(x)$ als α een tweevoudige wortel is van $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Hierin zijn $q_1(x)$, $q_2(x)$ en $q_3(x)$ polynomen met $gr(q_1) = gr(q_2) = gr(q_3) = gr(p)$.

Voorbeeld 5. Bepaal alle reële oplossingen van

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-2x}.$$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ en heeft als wortels $\lambda = -2$ en $\lambda = -3$. De oplossingen van de homogene vergelijking zijn dus van de gedaante

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}.$$

Wegens het bovenstaande is er een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking van de gedaante $y = axe^{-2x}$. Dan is

$$(-4ae^{-2x} + 4axe^{-2x}) + 5(ae^{-2x} - 2axe^{-2x}) + 6axe^{-2x} = e^{-2x},$$

$$ae^{-2x} = e^{-2x} \text{ dus } a = 1.$$

De algemene reële oplossing van de vergelijking is dus

$$y = xe^{-2x} + \alpha e^{-2x} + \beta e^{-3x}$$

met α en β reëel.

De volgende stelling is soms handig om een particuliere oplossing van de vergelijking $y'' + ay' + by = f$ te vinden als in f goniometrische functies voorkomen.

5.7.8. Stelling. Laat y_p een particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking $y'' + ay' + by = f$ met a en b reëel zijn. Dan is $\operatorname{Re} y_p$ een particuliere oplossing van $y'' + ay' + by = \operatorname{Re} f$, en $\operatorname{Im} y_p$ een particuliere oplossing van $y'' + ay' + by = \operatorname{Im} f$.

Bewijs. Uit $y_p'' + ay_p' + by_p = f$ volgt

$$\operatorname{Re}(y_p'' + ay_p' + by_p) = \operatorname{Re} f,$$

$$\operatorname{Re}(y_p'') + a\operatorname{Re}(y_p') + b\operatorname{Re} y_p = \operatorname{Re} f,$$

$$(\operatorname{Re} y_p)'' + a(\operatorname{Re} y_p)' + b\operatorname{Re} y_p = \operatorname{Re} f.$$

Analoog tonen we aan dat $\operatorname{Im} y_p$ een particuliere oplossing is van $y'' + ay' + by = \operatorname{Im} f$. □

Voorbeeld 6. Bepaal alle reële oplossingen van

$$y'' + y = x \sin x.$$

De karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 1 = 0$ heeft wortels $\pm i$. De algemene oplossing van de homogene vergelijking is dus $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Daar $x \sin x = \operatorname{Im}(xe^{ix})$ zoeken we eerst een particuliere oplossing van de vergelijking

$$y'' + y = xe^{ix}.$$

Er is nu een particuliere oplossing, $y = (ax^2 + bx)e^{ix}$. Substitutie levert

$$(2a + 2i(2ax + b) - (ax^2 + bx))e^{ix} + (ax^2 + bx)e^{ix} = xe^{ix},$$

$$(4aix + 2a + 2bi)e^{ix} = xe^{ix},$$

zodat $a = \frac{1}{4i} = -\frac{1}{4}i$, $b = \frac{1}{4}$.

Een particuliere oplossing van de vergelijking $y'' + y = xe^{ix}$ is dus $(-\frac{1}{4}ix^2 + \frac{1}{4}x)(\cos x + i \sin x)$, zodat een particuliere oplossing van $y'' + y = x \sin x$ is

$$\operatorname{Im}(-\frac{1}{4}ix^2 + \frac{1}{4}x)(\cos x + i \sin x) = -\frac{1}{4}x^2 \cos x + \frac{1}{4}x \sin x.$$

De algemene reële oplossing van $y'' + y = x \sin x$ is dus

$$y = \frac{1}{4}x \sin x - \frac{1}{4}x^2 \cos x + \alpha \cos x + \beta \sin x \text{ met } \alpha \text{ en } \beta \text{ reëel.}$$

5.8. Trillingen

In voorbeelden 1, 2 en 3 van 5.7 zijn we gestuit op een vergelijking van de vorm

$$m\ddot{x} + a_1\dot{x} + b_1x = f_1(t) \quad (1)$$

met $a_1 \geq 0$, $b_1 \geq 0$, $m > 0$. We delen (1) door m en we voeren nieuwe grootheden in: $a := a_1/m$, $b := b_1/m$, $f(t) = f_1(t)/m$. Dan wordt (1):

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) \quad (2)$$

met $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Eerst onderzoeken we het gedrag van de homogene vergelijking (d.w.z. het geval $f(t) = 0$ voor alle t). De karakteristieke vergelijking luidt

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \quad (3)$$

We onderscheiden verschillende gevallen:

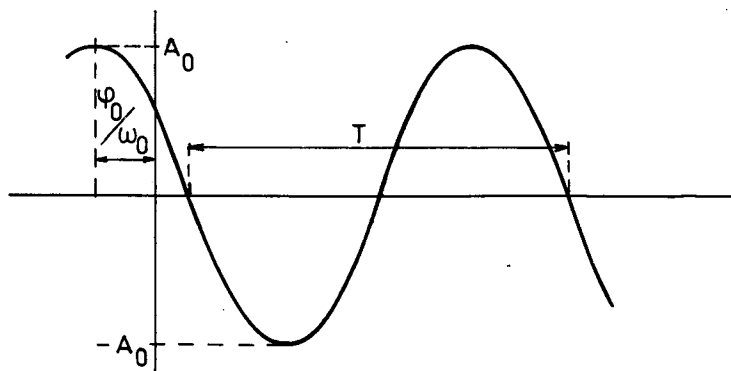
- A) $a = 0$, $b > 0$. De karakteristieke wortels (d.w.z. de wortels van de karakteristieke vergelijking) zijn $\lambda = \pm i\omega_0$, waar $\omega_0 := \sqrt{b}$. De algemene reële oplossing van de homogene differentiaalvergelijking is

$$x(t) = p \cos \omega_0 t + q \sin \omega_0 t.$$

Door de vector (p, q) in poolcoördinaten te schrijven, d.w.z. $(p, q) = (A_0 \cos \varphi_0, A_0 \sin \varphi_0)$, vinden we als oplossing

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

d.w.z. een harmonische trilling met amplitude A_0 , beginfase φ_0 en hoekfrequentie ω_0 . De grootte $T := 2\pi/\omega_0$ heet de trillingstijd (of de periode)

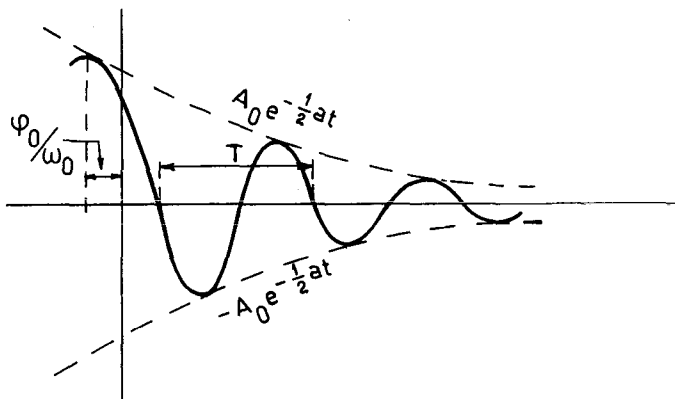


en $\nu := 1/T = \omega/(2\pi)$ heet de frequentie van de trilling.

B) $0 < a^2 < 4b$. De karakteristieke wortels zijn nu $\lambda = -\frac{1}{2}a + i\omega_0$, waar $\omega_0 := \sqrt{b - \frac{1}{4}a^2}$. De algemene reële oplossing wordt

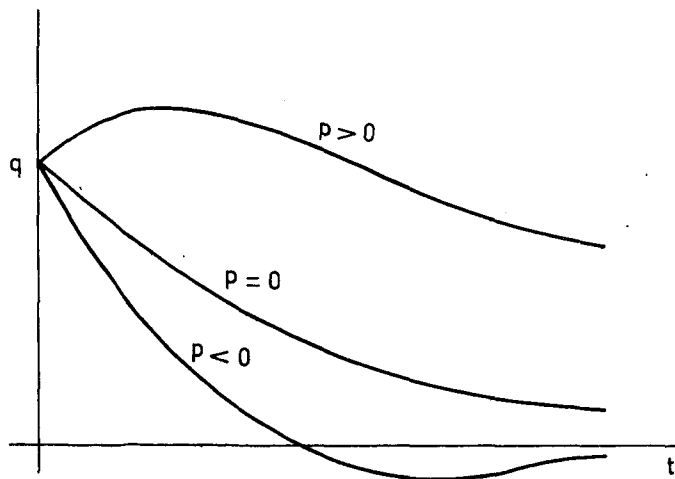
$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{1}{2}at} (p \cos \omega_0 t + q \sin \omega_0 t) = \\ &= A_0 e^{-\frac{1}{2}at} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) , \end{aligned}$$

waarbij we weer $(p, q) = (A_0 \cos \varphi_0, A_0 \sin \varphi_0)$ hebben geschreven. Dit is een gedempte trilling met beginamplitude A_0 , beginfase φ_0 , hoekfrequentie ω_0 en dempingscoëfficiënt $\frac{1}{2}a$. Ook hier heet $T := 2\pi/\omega_0$ de trillingstijd en $\nu := 1/T$ de frequentie



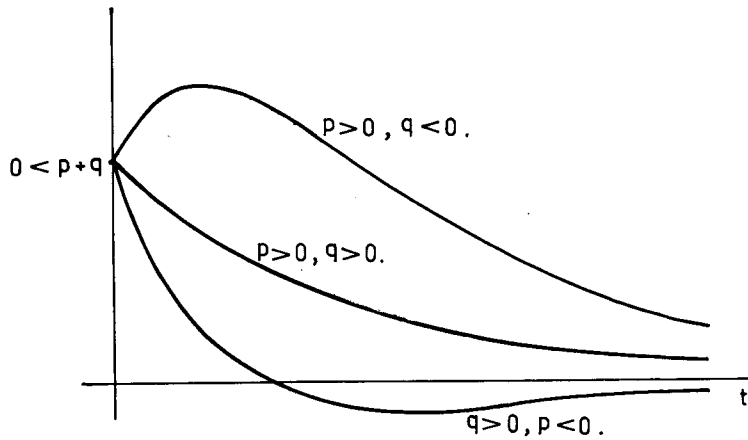
C) $0 < a^2 = 4b$. Er is één karakteristieke wortel $\lambda = -\frac{1}{2}a$. De algemene oplossing is

$$x(t) = (pt + q)e^{-\frac{1}{2}at} .$$



D) $a^2 > 4b > 0$. De karakteristieke wortels zijn $\lambda = -\frac{1}{2}a \pm c$, waar $c := \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$.
De algemene oplossing is

$$x(t) = pe^{-\left(\frac{1}{2}a-c\right)t} + qe^{-\left(\frac{1}{2}a+c\right)t}.$$



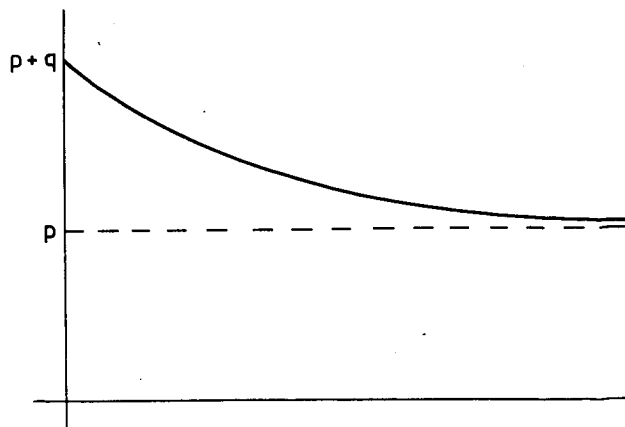
Men noemt het systeem in het geval

- A) ongedempt
- B) onderkritisch gedempt
- C) kritisch gedempt
- D) overkritisch gedempt.

We beschouwen nog twee extreme situaties:

E) $b = 0, a > 0$. De karakteristieke wortels zijn $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -a$.
De algemene oplossing is

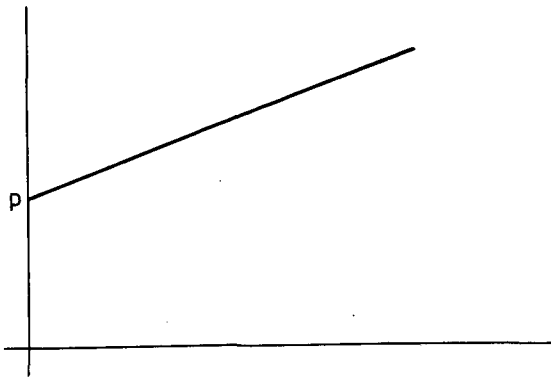
$$x(t) = p + qe^{-at}.$$



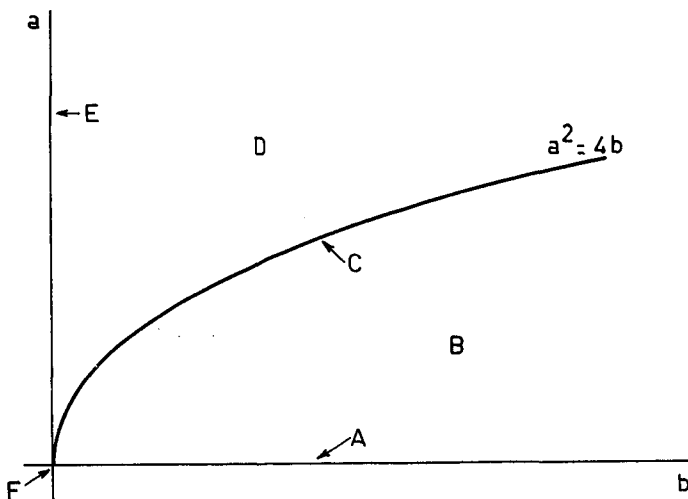
F) $a = b = 0$. Er is één karakteristieke wortel, nl. $\lambda = 0$.

De algemene oplossing is

$$x(t) = p + qt .$$



Figuur 7 geeft een overzicht van de verschillende gevallen in het eerste kwadrant van het (a,b) -vlak.



We beschouwen nu de inhomogene vergelijking en wel het geval $h(t) = A \sin \omega t$. We nemen eerst aan dat $a = 0, b > 0$. Dit correspondeert met het geval A) bij de homogene vergelijking. We schrijven $h(t) = \text{Im} Ae^{i\omega t}$ en we zoeken een particuliere oplossing van de vergelijking

$$\ddot{x} + bx = Ae^{i\omega t}$$

van de vorm $x = Be^{i\omega t}$. Volgens 5.7 is dit mogelijk als $\omega \neq \omega_0$ ($:= \sqrt{b}$) (we nemen steeds aan dat $\omega \geq 0$). We vinden een vergelijking van de vorm $B(-\omega^2 + \omega_0^2) = A$. Dus:

$$x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega t} .$$

Een particuliere oplossing van de vergelijking

$$\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) = A \sin \omega t \quad (4)$$

wordt gegeven door

$$x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t . \quad (5)$$

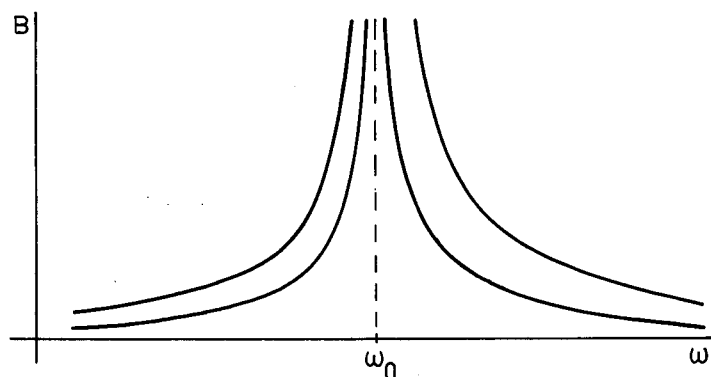
De algemene oplossing van (4) is

$$x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t + A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) . \quad (6)$$

In het algemeen is de oplossing alleen periodiek als $A_0 = 0$.

De amplitude van de periodieke oplossing is $B = A/|\omega_0^2 - \omega^2|$, de fase is $\varphi_0 = 0$ als $\omega < \omega_0$, $\varphi_0 = \pi$ als $\omega > \omega_0$.

In figuur 8 wordt de amplitude uitgezet tegen de hoekfrequentie ω .



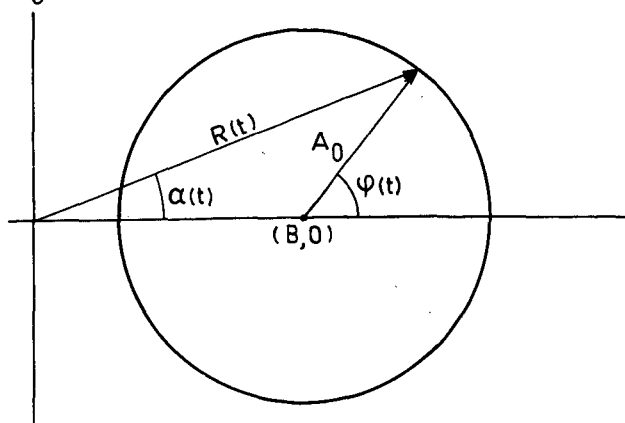
De algemene oplossing is een combinatie van periodieke functies. Het gedrag van zo'n functie is in het algemeen zeer onregelmatig. Als $\omega \approx \omega_0$ dan wordt B erg groot. We krijgen dan zwevingsverschijnselen. De periode van zo'n zweeping is $2\pi/|\omega - \omega_0|$. We kunnen dit als volgt inzien. Zij $\omega_0 = \omega + \delta$ en schrijf $\varphi(t) = \delta t + \varphi_0$. Dan vinden we

$$\begin{aligned} x(t) &= B \sin \omega t + A_0 \cos(\omega t + \varphi(t)) = (B + A_0 \sin \varphi(t)) \sin \omega t + \\ &+ A_0 \cos \varphi(t) \cos \omega t = R(t) \cos(\omega t + \alpha(t)), \end{aligned}$$

waar $R(t)$ en $\alpha(t)$ worden gegeven door

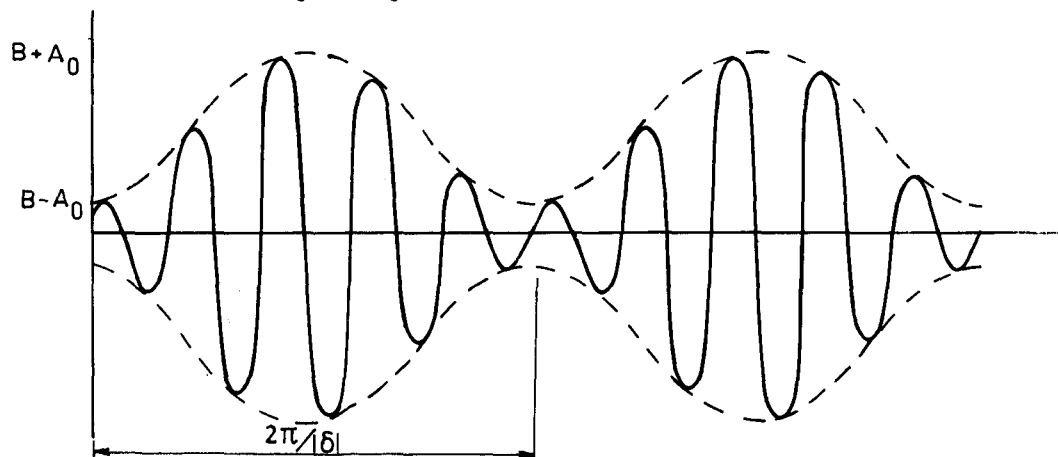
$$B + A_0 \sin \varphi(t) = R(t) \cos \alpha(t)$$

$$A_0 \cos \varphi(t) = R(t) \sin \alpha(t) .$$



Als δ klein is, dan verandert φ en derhalve α erg langzaam. Verder geldt

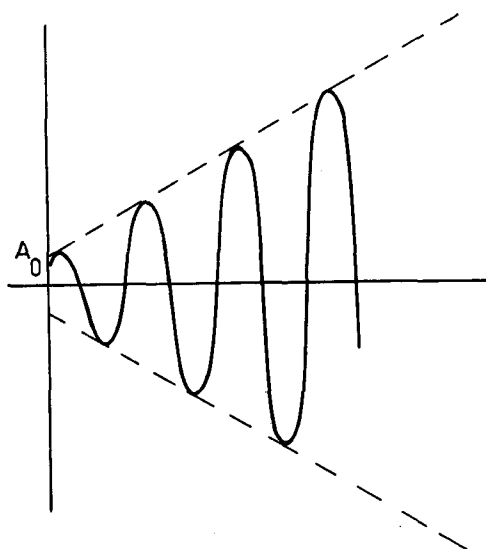
$$R^2(t) = B^2 + A_0^2 + 2A_0B \sin \varphi(t) .$$



Als $\omega = \omega_0$, dan vinden we een particuliere oplossing van de vorm $x = Bte^{i\omega t}$. Substitutie in de vergelijking $\ddot{x} + \omega^2 x = Ae^{i\omega t}$ levert $B = \frac{A}{2i\omega}$. We zien dat

$$x(t) = -\frac{At}{2\omega} \cos \omega t + A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

de algemene oplossing is van (1).



We spreken in dit geval van resonantie: ω_0 heet de resonantiehoekfrequentie van de vergelijking en $\nu_0 := \omega_0 / (2\pi)$ de resonantiefrequentie. We kunnen ons deze situatie ontstaan denken door δ tot nul te laten naderen in het eerder genoemde geval (vgl. fig. 10, 11).

We beschouwen nu het geval $a > 0$, $b > 0$, $h = A \sin \omega t$. We zoeken eerst een particuliere oplossing van de vergelijking

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = Ae^{i\omega t}$$

van de vorm $x = Be^{i\omega t}$. Dan vinden we voor B de volgende vergelijking:

$$(-\omega^2 + ia\omega + b)B = A.$$

Dus

$$B = \frac{A}{b - \omega^2 + ia\omega} = Qe^{i\alpha}$$

waar

$$Q := \frac{A}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}}$$

$$\alpha := \arg \frac{A}{b - \omega^2 + ia\omega} = \arctan\left(\frac{-a\omega}{b - \omega^2}\right)$$

(als $b \neq \omega^2$. Als $b = \omega^2$, dan is $\alpha = -\pi/2$).

De algemene oplossing van de vergelijking $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = A \sin \omega t$ is

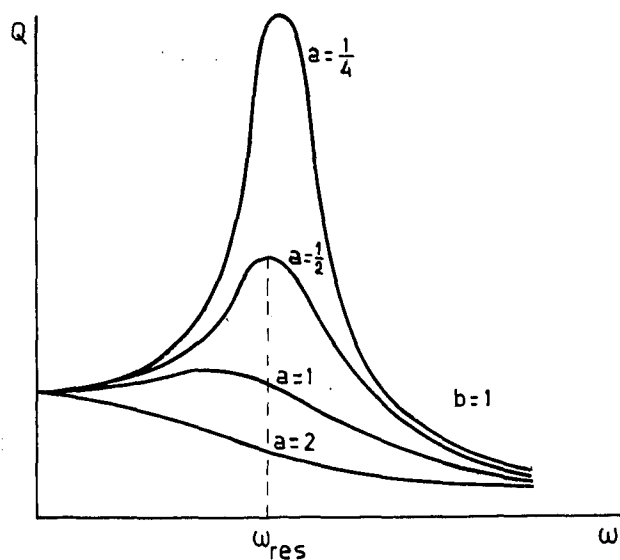
$$x(t) = Q \sin(\omega t + \alpha) + x_0(t)$$

waar $x_0(t)$ de algemene oplossing is van de homogene vergelijking. De expliciete gedaante van $x_0(t)$ hangt af van de parameters a en b (zie de gevallen B), C), D) van de homogene vergelijking), maar steeds zal gelden $x_0(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$). We zien dat op de duur alle oplossingen heel veel gaan lijken op de particuliere oplossing

$$x(t) = Q \sin(\omega t + \alpha) .$$

Deze oplossing is ook de enige periodieke oplossing van het systeem. Men noemt $Q \sin(\omega t + \alpha)$ de stationaire oplossing van de vergelijking. Het verschijnsel dat een willekeurige oplossing niet direct, maar slechts na verloop van tijd ongeveer gelijk aan de stationaire oplossing wordt noemt men het inschakelverschijnsel. De grafiek van de functie $\omega \mapsto Q(\omega)$ heet de resonantiekromme. De waarde van ω waarvoor Q maximaal is heet de resonantiehoekfrequentie ω_{res} . We zien dat

$$\begin{aligned} \omega_{res} &= \sqrt{b - \frac{1}{2}a^2} && \text{als } b > \frac{1}{2}a^2 \\ &= 0 && \text{als } b \leq \frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$



Merk op dat in het geval B) geldt $\omega_0 < \omega_{res}$:

Hoofdstuk 6. Lineaire Algebra

6.1. Voorwoord

Lineaire algebra is het deel van de wiskunde dat gegroeid is uit de theorie van de stelsels van eerstegraads vergelijkingen in meerdere onbekenden. Wiskundige beschrijvingen met behulp van eerstegraads (ook wel genoemd lineaire) betrekkingen worden in zeer veel gebieden van onderzoek gebruikt. Om die reden worden methoden en resultaten van de lineaire algebra toegepast in talrijke uiteenlopende gebieden van wetenschap. De grondslag van het succes van de lineaire algebra is de synthese van twee geheel verschillende benaderingswijzen, nl. de rekenkundige en de (abstract) meetkundige. In de eerste benadering is de lineaire algebra een techniek ontwikkeld om doelmatig en systematisch te rekenen met stelsels lineaire betrekkingen; in de meetkundige benadering worden de objecten uit de lineaire algebra voorgesteld als meetkundige grootheden, waardoor ze een aanschouwelijke inhoud krijgen. In dit hoofdstuk komen beide gezichtspunten naar voren; eerst het rekenkundige en geleidelijk aan ook het abstract meetkundige. Beschouwingen over stelsels vergelijkingen lopen als een draad door het hele hoofdstuk.

6.2. Bewerkingen met matrices

6.2.1. Inleiding

Een matrix is een rechthoekig schema van getallen.

Voorbeelden. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & x \\ 2 & 1 & 2 & a \\ 3 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; $[3,5,0,4,7]$.

We spreken van rijen, kolommen, elementen. De volgende notaties voor een matrix met r rijen en k kolommen zijn gebruikelijk:

$$A = A^{(r \times k)} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rk} \end{bmatrix} .$$

Is A een matrix dan geeft men soms het element in de i^{de} rij en j^{de} kolom aan met A_{ij} . Als de duidelijkheid er om vraagt gebruike men komma's: $[3,5,0,4,7]$; $a_{i+1,j+1}$. Is A een matrix met r rijen en k kolommen dan zeggen we dat A het formaat r bij k heeft, of dat A een $(r \times k)$ -matrix is.

Vanuit het rekenkundige standpunt zijn matrices niet meer dan een hulpmiddel om ingewikkelde algebraïsche en numerieke berekeningen te systematiseren. We zullen voor matrices bewerkingen definiëren die generalisaties zijn van de bewerkingen met reële getallen (een reël getal is op te vatten als een matrix met één rij en één kolom).

De inhoud van deze paragraaf is nu als volgt samen te vatten:

Eerst definiëren we de som van twee matrices (6.2.2), het product van een matrix en een reël getal (6.2.2) en het product van een matrix en een matrix (6.2.3). In 6.2.4 worden deze bewerkingen geïllustreerd aan een boekhoudkundig voorbeeld. De nummers 6.2.5 en 6.2.6 geven enkele begrippen uit de matrixrekening. In de daarna komende passages 6.2.7 en 6.2.8 wordt aandacht geschonken aan matrices van speciale formaten. Tenslotte geven we in 6.2.9 een eerste reeks beschouwingen over stelsels lineaire vergelijkingen.

6.2.2. Optelling en scalaire vermenigvuldiging

Definitie. Als A en B matrices zijn van hetzelfde formaat dan is de som $A + B$ gedefinieerd door:

$$(A + B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij} .$$

Als A een matrix is en $p \in \mathbb{R}$ dan is de matrix pA gedefinieerd door:

$$(pA)_{ij} := pA_{ij} .$$

Voorbeelden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 1 \\ 2 & 0 & y & 3 \\ 3 & 0 & z & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & x & 2 \\ 7 & 2 & y+3 & 4 \\ 3 & a & z+1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 4 & y \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 7x \\ 14 & 28 & 7y \\ 7 & 0 & 7z \end{bmatrix}$$

We schrijven $-A$ voor $-1A$. Duidt \mathcal{O} een matrix aan waarvan alle elementen nul zijn (een zgn. nulmatrix) dan is

$$0A^{(r \times k)} = \mathcal{O} = \mathcal{O}^{(r \times k)} .$$

Eigenschappen. Bij matrixbewerkingen wordt steeds verondersteld dat de formaten zo zijn dat de bewerkingen gedefinieerd zijn.

$$(A + B) + C = [A_{ij} + B_{ij} + C_{ij}] = A + (B + C) .$$

$$A + B = B + A$$

$$A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A$$

$$A - A = \mathcal{O}$$

$$(p + q)A = pA + qA$$

$$p(A + B) = pA + pB$$

$$p(qA) = (pq)A .$$

6.2.3. Het matrixproduct

Van twee matrices A en B zullen we het product in de volgorde AB alleen definiëren indien het aantal kolommen van A gelijk is aan het aantal rijen van B .

Is $A^{(m \times n)} = [a_{ij}]$; $B^{(n \times p)} = [b_{ij}]$, dan is $AB =: C = [c_{ij}]$ een $m \times p$ matrix gedefinieerd door

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} , \quad i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, p .$$

Voorbeeld.

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & b_{12} & * \\ * & b_{22} & * \\ * & b_{32} & * \\ * & b_{42} & * \\ * & b_{52} & * \\ * & b_{62} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & c_{32} & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$A^{(4 \times 6)} \quad B^{(6 \times 3)} \quad = \quad C^{(4 \times 3)}$$

$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{42} + a_{35}b_{52} + a_{36}b_{62} .$$

Nog een voorbeeld:

$$[a_1, a_2] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = [a_1b_1 + a_2b_2] = a_1b_1 + a_2b_2$$

(bij een (1×1) -matrix, d.i. een getal, laten we de haken weg);

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} [a_1, a_2] = \begin{bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 \\ b_2a_1 & b_2a_2 \end{bmatrix} .$$

Men ziet dat de factoren in een matrixproduct niet verwisseld mogen worden. Bij $A^{(4 \times 6)}$ en $B^{(6 \times 3)}$ is AB wel maar BA niet gedefinieerd. Is A vierkant (d.w.z. heeft A evenveel rijen als kolommen) dan is AA gedefinieerd; we schrijven $AA =: A^2$.

Opmerkingen.

$$1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Uit $PA = PB$ volgt niet $A = B$. Evenmin volgt uit $CQ = DQ$ dat $C = D$. Uit $QR = \mathcal{O}$ volgt niet $Q = \mathcal{O}$ of $R = \mathcal{O}$.

2) Als A en B beide $(p \times p)$ -matrices zijn, dan is

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

en omdat AB in het algemeen niet gelijk aan BA is, is dit niet verder te vereenvoudigen.

Eigenschappen.

$$\left. \begin{aligned} A(B + C) &= AB + AC \\ (A + B)C &= AC + BC \end{aligned} \right\} \text{(distributiviteit)}$$

$$(AB)C = A(BC) \quad \text{(associativiteit)}$$

6.2.4. Voorbeeld. Een steenfabriek fabriceert stenen in vijf kwaliteiten. De fabriek heeft vier magazijnen met verkooppunten. Voorraadgegevens worden nu handig geadmistreerd met (4×5) -matrices waarbij de rijen overeenkomen met de magazijnen, de kolommen met de kwaliteiten.

Laat A de aanwezige voorraad op 1 januari 1974 voorstellen

$$\begin{array}{l} \text{magazijn 1} \rightarrow \\ 2 \rightarrow \\ 3 \rightarrow \\ 4 \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} \begin{array}{c} \text{kwaliteit 1} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

(a_{34} is het aantal op 1-1-1974 aanwezige stenen in magazijn 3 van kwaliteit 4). Als B (4×5) de door de fabriek aan de verkooppunten geleverde hoeveelheden en C (4×5) de verkoop gedurende 1974 voorstelt, dan is $A + B - C$ de voorraadsmatrix per 1-1-1975.

Laten we aannemen dat grondstofkosten, fabricagekosten en verkoopprijs afhangen van de kwaliteit. Laat g_1, g_2, \dots, g_5 de grondstofkosten, f_1, f_2, \dots, f_5 de fabricagekosten en v_1, v_2, \dots, v_5 de verkoopprijs per steen zijn. Laat

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & * & * & a_{15} \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ a_{41} & * & * & * & a_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 & f_1 & v_1 \\ g_2 & f_2 & v_2 \\ g_3 & f_3 & v_3 \\ g_4 & f_4 & v_4 \\ g_5 & f_5 & v_5 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ * & * & * \\ * & * & * \\ p_{41} & * & p_{43} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} A & V & =: P \end{array}$$

Dan stelt de k-de rij van P voor achtereenvolgens de in de voorraad van magazijn k geïnvesteerde grondstofkosten ($= p_{k1}$), de geïnvesteerde fabricagekosten ($= p_{k2}$), de verkoopwaarde ($= p_{k3}$).

Merk op dat de kolommen van A en de rijen van V corresponderen met het aspect kwaliteit en dat de elementen van $P = AV$ sommen zijn over alle kwaliteiten. Iets dergelijks treft men steeds aan in boekhoudkundig gebruik van het matrixproduct.

6.2.5. Blokmatrices

Vaak is het handig een matrix opgebouwd te denken uit kleinere matrices; bijvoorbeeld

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{17} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{41} & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & a_{57} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} P & Q & R \\ S & T & U \end{bmatrix},$$

waarbij

$$P := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \dots, U := \begin{bmatrix} a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{44} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{54} & \cdot & \cdot & a_{57} \end{bmatrix}.$$

Als alle formaten van overeenkomstige blokken overeenstemmen kan men matrices optellen door de blokken op te tellen:

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{bmatrix}.$$

Een analoge formule geldt voor vermenigvuldiging van blokmatrices.

6.2.6. De getransponeerde matrix

Is A een $(r \times k)$ -matrix dan is de getransponeerde A^T een $(k \times r)$ -matrix die uit A ontstaat door rijen en kolommen te verwisselen. Dus $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

Is

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

dan is

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eigenschappen.

$$(A + B)^T = A^T + B^T ; \quad (AB)^T = B^T A^T .$$

6.2.7. Vectoren

Matrices met slechts één rij of slechts één kolom noemt men vectoren, (rijvectoren, kolomvectoren). We noteren kolomvectoren met onderstreepte kleine letters: a. Een rijvector kan men dan aangeven met a^T.

In dit hoofdstuk is \mathbb{R}^n de verzameling van alle kolomvectoren met n elementen. Anders dan in andere gebieden van de wiskunde (en van deze syllabus) is het in de lineaire algebra van belang het onderscheid tussen rijen en kolommen strikt te handhaven.

In \mathbb{R}^n is door de definities van 6.2.2 een optelling, u + v en scalaire vermenigvuldiging pu gedefinieerd:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n + v_n \end{bmatrix} ; \quad p \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pu_1 \\ pu_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ pu_n \end{bmatrix} .$$

Een belangrijk begrip in \mathbb{R}^n is het inwendig product van twee vectoren, gedefinieerd door:

$$(\underline{u}, \underline{v}) := \underline{u}^T \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i .$$

Eenvoudig ziet men in dat:

$$(\underline{u}, \underline{v}) = (\underline{v}, \underline{u}) ;$$

$$(\underline{u}, \underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u}, \underline{v}) + (\underline{u}, \underline{w}) ;$$

$$(k\underline{u}, \underline{v}) = k(\underline{u}, \underline{v}) \quad (k \in \mathbb{R}) ;$$

$(\underline{u}, \underline{u}) \geq 0$ en uit $(\underline{u}, \underline{u}) = 0$ volgt $\underline{u} = \underline{0}$, waarin

$$\underline{0} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

de nulvector, is.

Het inwendig product zal nog op vele plaatsen opduiken (6.2.9, 6.4.3, 6.4.5, 6.8.5 etc.); in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 kennen we het al.

Is \underline{a}_i^T de i -de rij van een matrix A , \underline{b}_j de j -de kolom van een matrix B dan is $(AB)_{ij} = (\underline{a}_i, \underline{b}_j)$.

Als A een $r \times k$ -matrix is, $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^r$, dan geldt:

$$(\underline{Ax}, \underline{y}) = (\underline{Ax})^T \underline{y} = \underline{x}^T A^T \underline{y} = \underline{x}^T (A^T \underline{y}) = (\underline{x}, A^T \underline{y}).$$

6.2.8. Enkele soorten vierkante matrices

Hoewel 6.2.8 op dit moment de functie heeft een aantal voorbeelden van matrixvermenigvuldiging te laten zien, zullen we de geïntroduceerde begrippen: eenheidsmatrix; inverse matrix; diagonaalmatrix en permutatiematrix nog vaak tegenkomen.

6.2.8.1. Eenheidsmatrix

$$I^{(n \times n)} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

d.w.z.

$$I_{ij} := \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \neq j \end{cases}$$

(δ_{ij} heet het symbool van Kronecker; Kronecker-delta).

Er geldt:

$$A^{(m \times n)} I^{(n \times n)} = A^{(m \times n)}$$

$$I^{(n \times n)} B^{(n \times p)} = B^{(n \times p)} .$$

6.2.8.2. Inverse van een vierkante matrix

Laat A een $(n \times n)$ -matrix zijn. Als er een matrix B bestaat zodat $BA = I^{(n \times n)}$, dan heet B de inverse van A, notatie A^{-1} . Later zullen we bewijzen dat dan ook $AA^{-1} = I$ en dat een vierkante matrix ten hoogste één inverse heeft. Eén voorbeeld: als we de inverse willen bepalen van

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

moeten we x, y, u en v vinden zó dat

$$\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Of:

$$\begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3u + 7v = 0 \\ 2u + 5v = 1 . \end{cases}$$

We vinden: $x = 5$, $y = -2$, $u = -7$, $v = 3$, en dus

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} .$$

Merk op dat inderdaad

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Als een matrix A een inverse heeft dan heet A inverteerbaar.

6.2.8.3. Diagonaalmatrix

$D^{(n \times n)} = [d_{ij}]$ heet diagonaalmatrix indien $d_{ij} = 0$ als $i \neq j$. Rechtsvermenigvuldiging met een diagonaalmatrix betekent vermenigvuldiging van de kolommen, linksvermenigvuldiging betekent vermenigvuldiging van de rijen,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pa_{11} & qa_{12} & ra_{13} \\ pa_{21} & qa_{22} & ra_{23} \\ pa_{31} & qa_{32} & ra_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pa_{11} & pa_{12} & pa_{13} \\ qa_{21} & qa_{22} & qa_{23} \\ ra_{31} & ra_{32} & ra_{33} \end{bmatrix} .$$

Als van een $(n \times n)$ -diagonaalmatrix D alle diagonaalelementen $D_{ii} \neq 0$ zijn dan is D inverteerbaar en D^{-1} is een diagonaalmatrix met

$$(D^{-1})_{ii} = \frac{1}{D_{ii}} \quad (i = 1, \dots, n).$$

6.2.8.4. Permutatiematrices

Veranderingen van de volgorde van de rijen of kolommen van een matrix kan men verkrijgen door links- of rechtsvermenigvuldiging met zgn. permutatiematrices. We geven de algemene definitie maar beperken ons verder tot een voorbeeld van een (3×3) -matrix. Zij f een bijectie van $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ op $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ (f heet ook wel een permutatie van $\{1, 2, \dots, n\}$ zie (1.3), dan is de permutatiematrix P behorende bij f gedefinieerd door:

$$P_{ij}^{(n \times n)} := \begin{cases} 1 & \text{als } i = f(j) \\ 0 & \text{als } i \neq f(j) \end{cases} \quad \text{of} \quad P_{ij}^{(n \times n)} = \delta_{i, f(j)} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

in elke rij en kolom van P staat dus precies één 1.

Laat nu een permutatie f van $(1, 2, 3)$ gegeven zijn door $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, dan is de permutatiematrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Nu is

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} .$$

Merk op dat de i -de kolom van AP gelijk is aan de $f(i)$ -de kolom van A, terwijl de i -de rij van A als $f(i)$ -de rij van PA optreedt.

6.2.9. Stelsels lineaire vergelijkingen

Stelsels lineaire vergelijkingen kunnen eenvoudig worden geschreven m.b.v. matrixnotatie. Is

$$A^{(m \times n)} = [a_{ij}] , \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} , \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} ,$$

dan is het stelsel

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

ook te schrijven als: $\underline{Ax} = \underline{b}$.

Uit de eigenschappen van matrixvermenigvuldiging kan een aantal belangrijke gevolgen voor lineaire vergelijkingen worden afgeleid.

Het is duidelijk dat $\underline{x} \mapsto \underline{Ax}$ een afbeelding $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is. Het oplossen van het stelsel $\underline{Ax} = \underline{b}$ betekent het vinden van alle punten, die door deze afbeelding op \underline{b} worden afgebeeld.

Op de volgende uiterst belangrijke eigenschappen van de afbeelding $\underline{x} \mapsto \underline{Ax}$ zullen we vanuit verschillende gezichtspunten nog meermalen terugkomen.

1) Is A een $(m \times n)$ -matrix dan volgt uit $\underline{x} \mapsto \underline{Ax}$, $\underline{y} \mapsto \underline{Ay}$, $p \in \mathbb{R}$ dat:

$$\underline{x} + \underline{y} \mapsto \underline{Ax} + \underline{Ay}$$

$$p\underline{x} \mapsto p\underline{Ax} .$$

2) Is A een $(m \times n)$ -matrix en B een $(p \times m)$ -matrix, dan geldt voor de samengestelde afbeelding van de $(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)$ -afbeelding $\underline{x} \mapsto \underline{Ax}$ en de $(\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p)$ afbeelding $\underline{y} \mapsto \underline{By}$:

$$\underline{x} \mapsto B(\underline{Ax}) = (BA)\underline{x} .$$

We keren terug tot vergelijkingen en beschouwen

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{Ax} = \underline{0} \in \mathbb{R}^m\} =: N(A) ,$$

de verzameling van de oplossingen van het homogene stelsel $\underline{Ax} = \underline{0}$. $N(A)$ heet de nulruimte van A en ook wel de oplossingsruimte van $\underline{Ax} = \underline{0}$.

We zien dat $N(A) \neq \emptyset$ is, omdat $\underline{0} \in N(A)$. Uit 1) volgt: als $\underline{u} \in N(A)$ en $\underline{v} \in N(A)$, $p \in \mathbb{R}$ dan is ook $\underline{u} + \underline{v} \in N(A)$, $p\underline{u} \in N(A)$.

Voor een inhomogeen stelsel vergelijking $\underline{Ax} = \underline{b}$ ($\underline{b} \neq \underline{0} \in \mathbb{R}^m$) geldt nu: als $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ een oplossing is (d.w.z. $\underline{Aa} = \underline{b}$) dan is de algemene oplossing

$$\underline{a} + N(A) := \{\underline{a} + \underline{x} \mid \underline{x} \in N(A)\} .$$

De analogie met hetgeen in 5.7.6 over differentiaalvergelijkingen gezegd is ligt erg voor de hand.

Als A $(n \times n)$ een inverse heeft dan kunnen we uit $\underline{Aa} = \underline{b}$ concluderen: $A^{-1}\underline{Aa} = A^{-1}\underline{b}$, $\underline{Ia} = A^{-1}\underline{b}$, $\underline{a} = A^{-1}\underline{b}$. Is A vierkant en inverteerbaar dan heeft het stelsel $\underline{Ax} = \underline{b}$ dus voor elke $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ precies één oplossing nl. $A^{-1}\underline{b}$; i.h.b. is dan $N(A) = \{\underline{0}\}$.

Met behulp van de begrippen uit deze paragraaf kunnen we het stelsel (*) nog op twee andere manieren schrijven. Elk van deze schrijfwijzen zal later een eigen meetkundige interpretatie krijgen.

Zij

$$\underline{a}_1 := \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}; \quad \underline{a}_2 := \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{bmatrix}; \dots; \quad \underline{a}_n := \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

dan kunnen we (*) ook schrijven als

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{b}.$$

Zij

$$\underline{c}_1^T := [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}], \quad \underline{c}_2^T := [a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}], \dots$$

$$\underline{c}_m^T := [a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}]$$

dan is (*) te schrijven als:

$$\begin{cases} (\underline{c}_1, \underline{x}) = b_1 \\ (\underline{c}_2, \underline{x}) = b_2 \\ \vdots \\ (\underline{c}_m, \underline{x}) = b_m \end{cases}$$

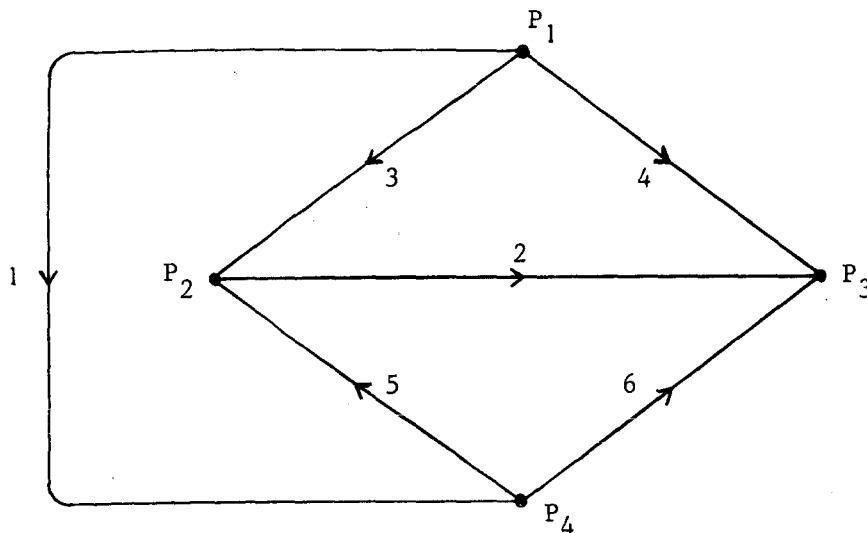
6.3. Voorbeelden en toepassingen

6.3.1. Inleiding

In deze paragraaf worden voorbeelden gegeven van het gebruik van matrixrekening in een aantal toepassingsgebieden. Deze voorbeelden dienen als motivering voor de begrippen die in 6.2 zijn ingevoerd en voor beschouwingen uit latere paragrafen. Er wordt echter niet naar terugverwezen zodat men een of meerdere van deze voorbeelden desnoods kan overslaan.

6.3.2. Een transportnetwerk

Vier steden P_1, P_2, P_3 en P_4 bevatten ieder een gasfabriek. Er liggen zes pijpleidingen, 1 t/m 6, volgens onderstaand plaatje, die we willekeurig van een richting voorzien.



(Een dergelijk systeem bestaande uit eindig veel punten met gerichte verbindingen heet een gerichte graaf.)

De prijs van een m^3 gas in P_k is w_k . Uit P_k wordt per tijdseenheid u_k m^3 gas uitgevoerd ($u_k < 0$ betekent invoer); het prijsverschil per m^3 tussen eindpunt en beginpunt van pijp ℓ is v_ℓ , bijv. $v_6 = w_3 - w_4$. Langs pijpleiding ℓ wordt per tijdseenheid t_ℓ m^3 gas vervoerd ($t_\ell < 0$ betekent dat het transport tegen de pijlrichting in geschiedt). We nemen aan dat geen gas verloren gaat.

Zij

$$\underline{w} := \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}, \quad \underline{u} := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \underline{t} := \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \end{bmatrix}, \quad \underline{v} := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}.$$

De onderlinge ligging van de steden en pijpleidingen wordt beschreven door een matrix $A^{(4 \times 6)} := [a_{ij}]$ waarvan

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{als } P_i \text{ beginpunt is van pijp } j; \\ -1 & \text{als } P_i \text{ eindpunt is van pijp } j; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Dus

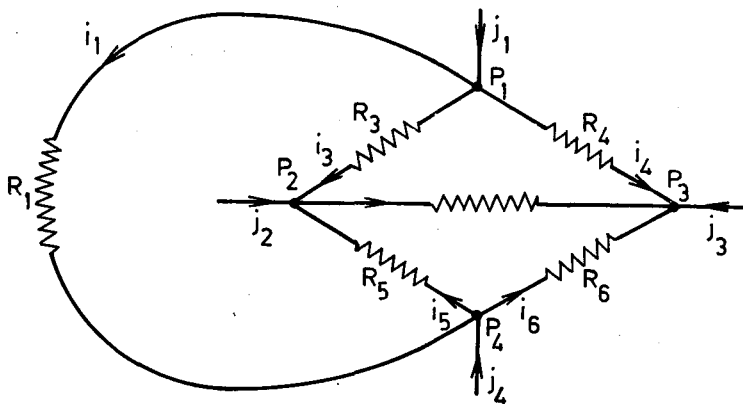
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

De samenhang tussen \underline{u} , \underline{t} , \underline{v} en \underline{w} wordt nu gegeven door

$$\underline{u} = A\underline{t} ; \quad \underline{v} = -A^T \underline{w} .$$

6.3.3. Een elektrisch netwerk

Beschouw het volgende netwerk.



We nummeren de knopen P_1, P_2, P_3, P_4 ; de takken $1, 2, \dots, 6$. Laat stromen i_1, \dots, i_6 volgens pijlrichting door de draden lopen, waarbij volgens de gebruikelijke tekenafspraken $i_t < 0$ betekent dat de stroom in tak t tegen de pijlrichting in loopt.

De meetkundige structuur van het netwerk wordt beschreven door de matrix $A^{(4 \times 6)} := [a_{kt}]$ waarbij

$$a_{kt} := \begin{cases} 1 & \text{als knoop } k \text{ beginpunt is van tak } t \\ -1 & \text{als knoop } k \text{ eindpunt is van tak } t \\ 0 & \text{anders .} \end{cases}$$

Deze matrix is dezelfde als in het vorige voorbeeld.

Laat

$$\underline{w} := \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{j} := \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{bmatrix}$$

waarbij w_k de spanning in P_k en j_k de in P_k van buiten binnenkomende stroom is. Zij voorts:

$$\underline{v} := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_6 \end{bmatrix}; \quad \underline{i} := \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ i_6 \end{bmatrix}; \quad R := \begin{bmatrix} R_1 & 0 & & 0 \\ 0 & R_2 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & & R_6 \end{bmatrix}$$

waarbij v_t het spanningsverschil om tak t , R_t de weerstand in tak t voorstelt.

De wet van Ohm in matrixvorm luidt nu: $\underline{v} = R\underline{i}$.

Voorts is de stroomwet van Kirchhoff in matrixvorm: $\underline{j} = A\underline{i}$.

Voor de spanningen geldt: $\underline{v} = A^T \underline{w}$. We zien $\underline{j} = AR^{-1}A^T \underline{w}$.

Vergelijk dit voorbeeld met 6.3.3; let vooral op de tekenconventies in beide voorbeelden.

6.3.4. Kettingmatrices van een tweepoort

Beschouw een tweepoort dat is een electrisch netwerk met twee ingangen en twee uitgangen, waarbij het verband tussen de ingangsgrootheden i_1 en V_1 en de uitgangsgrootheden i_2 en V_2 lineair is.



Er zijn verschillende methoden om de afhankelijkheden tussen de stromen i_1 en i_2 en de spanningsverschillen V_1 en V_2 uit te drukken

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \text{impedantiematrix}$$

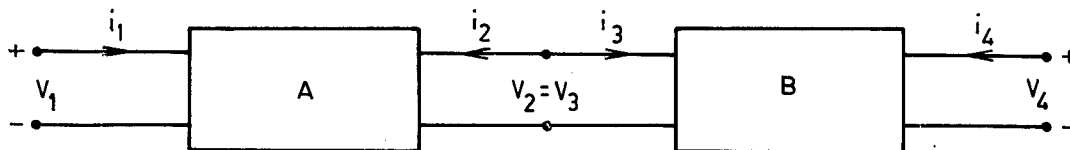
$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \text{admittantiematrix}$$

Merk op dat de admittantiematrix de inverse is van de impedantiematrix.

Wij zullen in dit voorbeeld gebruik maken van zgn. kettingmatrices:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

Deze kettingmatrices hebben de volgende fraaie eigenschap:



Schakelt men een tweepoort met kettingmatrix B achter een tweepoort met kettingmatrix A, dan is het resultaat weer een tweepoort nu met kettingmatrix AB. Immers $V_2 = V_3$ en $-i_2 = i_3$ zodat

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} V_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} V_3 \\ i_3 \end{bmatrix} = AB \begin{bmatrix} V_4 \\ -i_4 \end{bmatrix}$$

Uit het feit dat

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R_2^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R_1^{-1} + R_2^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

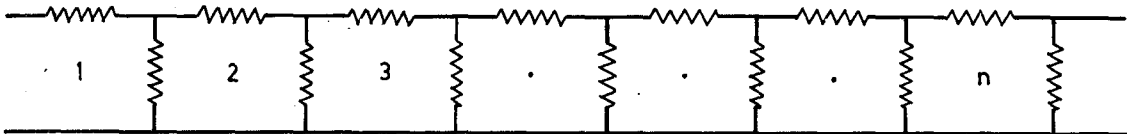
de kettingmatrix is van de tweepoort bestaande uit twee parallel geschakelde weerstanden volgt de bekende formule voor de substitutieweerstand

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} .$$



De kettingmatrix van onderstaand laddernetwerk met n mazen en alle weerstanden 1Ω is

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n .$$



Door volledige inductie bewijst men

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} d_{2n+1} & d_{2n} \\ d_{2n} & d_{2n-1} \end{bmatrix} \quad n = 1, 2, \dots ,$$

waarbij d_k de in 1.2 ingevoerde getallen van Fibonacci voorstellen.

6.3.5. Evenwicht van de prijsbalans

Een n -tal producenten P_1, \dots, P_n produceren elk één product g_1, \dots, g_n . P_i koopt en verbruikt per jaar een deel, nl. a_{ij} , van de jaarproductie van het product g_j . We nemen aan dat het systeem van producenten en producten gesloten is, d.w.z. dat de gehele productie aan g_1, \dots, g_n door P_1, \dots, P_n wordt verbruikt en dat niets van buiten het systeem wordt toegevoegd. (Deze aanname is iets minder streng dan op het eerste gezicht lijkt omdat we altijd kunnen veronderstellen dat een overproductie aan g_i door P_i wordt opgenomen en dus verrekend wordt in a_{ii} .)

Voor de matrix $A = [a_{ij}]$ geldt nu:

$$a_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, n) ; \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2)$$

(P_1, \dots, P_n gebruiken per jaar de hele geproduceerde hoeveelheid g_j).

Een matrix A die voldoet aan (1) en (2) heet ruilmatrix. Laat w_j de prijs van de jaarproductie van g_j zijn. De uitgave van P_i is dan

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j ;$$

de inkomst van P_i is w_i (interpreteer dit goed als $a_{ii} > 0$).

Beschouw de prijsvector $\underline{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$. Notatie: $\underline{w} \geq \underline{0}$ betekent $w_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$). Het productiesysteem met ruilmatrix A heet in evenwicht als er een prijsvector $\underline{w} \geq \underline{0}$, $\underline{w} \neq \underline{0}$ bestaat zó dat geen van de producenten P_1, \dots, P_n genoodzaakt is meer uit te geven dan hij ontvangt. Evenwicht betekent dus dat er $\underline{w} \geq \underline{0}$, $\underline{w} \neq \underline{0}$ bestaat zó dat $\underline{w} - A\underline{w} \geq \underline{0}$ of:

$$A\underline{w} \leq \underline{w} . \quad (3)$$

Een vector \underline{w} die aan (3) voldoet heet een stabiele prijsvector van A . Het lijkt alsof dit een ongelijkheid is; dit is echter niet zo, want voor iedere \underline{w} die aan $A\underline{w} \leq \underline{w}$ voldoet is $A\underline{w} = \underline{w}$. Stel nl.

$$A\underline{w} \leq \underline{w} \quad \text{en} \quad w_k > \sum_{j=1}^n a_{kj} w_j ,$$

dan is

$$\sum_{i=1}^n w_i > \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j \right) = \sum_{j=1}^n w_j \sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n w_j,$$

hetgeen onmogelijk is. Een veel kortere manier om het bovenstaande bewijs weer te geven is de volgende: zij $\underline{j} = [1, 1, \dots, 1]^T$; de voorwaarde (2) kan nu geschreven worden als $\underline{j}^T A = \underline{j}^T$. Als nu $A\underline{w} \leq \underline{w}$, $A\underline{w} \neq \underline{w}$ zou zijn dan zou $\underline{j}^T A\underline{w} < \underline{j}^T \underline{w}$ zijn; evenwel $\underline{j}^T A\underline{w} = \underline{j}^T \underline{w}$, tegenspraak.

De stabiele prijsvectoren zijn dus oplossingen $\underline{w} \geq \underline{0}$, $\underline{w} \neq \underline{0}$ van $A\underline{w} = \underline{w}$ of $(I - A)\underline{w} = \underline{0}$. (Een vector $\underline{w} \neq \underline{0}$ waarvoor $A\underline{w} = \underline{w}$ heet een eigenvector van A met eigenwaarde 1, zie 6.8.3.) Als \underline{w} een oplossing is en $r \geq 0$, dan is ook $r\underline{w}$ een oplossing; voor evenwicht is alleen de onderlinge verhouding der prijzen van belang. Men kan bewijzen dat er bij iedere A die aan (1) en (2) voldoet een $\underline{w} \geq \underline{0}$, $\underline{w} \neq \underline{0}$ bestaat met $A\underline{w} = \underline{w}$.

6.3.6. Markov-processen. Een bevolkingsprobleem

In een land trekt elk jaar $2\frac{1}{2}$ % van de plattelandsbevolking naar de stad en vestigt zich 1% van de stadsbevolking op het platteland. In het jaar $t = 0$ woont 60% van de bevolking in de stad; 40% op het land. Hoe is de situatie 1 jaar later en 10 jaar later en op den duur, aangenomen dat zowel op het platteland als in de stad, de bevolking niet door andere oorzaken verandert (de geboortes en sterftes compenseren elkaar).

Zij

$$\underline{x}_t := \begin{bmatrix} s_t \\ l_t \end{bmatrix}$$

waarbij s_t het gedeelte van de totale bevolking, N, is dat in jaar t in de stad woont en l_t het gedeelte dat op het land woont. Dan is:

$$s_1 N = 0,99 s_0 N + 0,025 l_0 N$$

$$l_1 N = 0,01 s_0 N + 0,975 l_0 N.$$

Met

$$P := \begin{bmatrix} 0,99 & 0,025 \\ 0,01 & 0,975 \end{bmatrix}$$

staat hier: $\underline{x}_1 = P\underline{x}_0$.

Hieruit volgt $\underline{x}_{10} = P^{10} \underline{x}_0$. De matrix P heet de overgangsmatrix van het proces. (Merk op dat een dergelijke matrix in 6.3.6 ruilmatrix genoemd werd.) Als we een oplossing van $\underline{x} \neq \underline{0}$ van $P\underline{x} = \underline{x}$ (eigenvector bij eigenwaarde 1) kunnen vinden is dat een stationaire verdeling. Schrijven we

$$P := \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}$$

dan is de oplossing, $\underline{x} = [s, \ell]^T$, van $P\underline{x} = \underline{x}$ en $s + \ell = 1$ de vector $\underline{x} = \frac{1}{p+q} [p, q]^T$. In de stationaire toestand woont dus $\frac{q}{p+q} = \frac{5}{7}$ deel van de bevolking in de stad.

6.3.7. Een productieproces

Een drinkwaterfabriek maakt ruw grondwater geschikt voor levering aan waterleidingbedrijf door het viermaal een periode van biologische zuivering te laten doormaken. Deze vier perioden zijn even lang. Het bedrijf beschikt over vier bassins, genummerd 1,2,3,4 waarin achtereenvolgens de eerste, tweede, derde en vierde zuivering plaatsvindt. Alle vier bassins zijn gelijktijdig in bedrijf. Na afloop van elke zuiveringsperiode wordt water overgepompt van bassin 4 naar het waterleidingbedrijf, van bassin 3 naar 4, van 2 naar 3 en van 1 naar 2. Bij het overpompen van water uit bassin i ($i = 1,2,3,4$) blijft een vast deel, d , van de inhoud in bassin i achter, een vast deel, b , komt in de volgende productiefase, de rest, $1 - b - d$, gaat bij het overpompen verloren. Tenslotte wordt voor de nieuwe periode ingaat $N \text{ m}^3$ onbewerkt grondwater in bassin 1 gebracht. In de vector $\underline{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t)]^T$ stelt $s_i(t)$ het aantal m^3 water voor, dat zich gedurende periode t in bassin i bevindt. Aan het einde van periode t wordt dan $bs_4(t) \text{ m}^3$ aan het waterleidingbedrijf geleverd.

Zij

$$\underline{v} := \begin{bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad A := \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & b & d & 0 \\ 0 & 0 & b & d \end{bmatrix} ,$$

dan is $\underline{s}(t+1) = \underline{v} + A\underline{s}(t)$.

We willen berekenen hoe groot de inhoud van de bassins moet zijn opdat deze elke periode dezelfde is. Dit betekent dat we moeten proberen een $\underline{s} \in \mathbb{R}^4$ te vinden die voldoet aan $\underline{s} = \underline{v} + A\underline{s}$. Anders geschreven: $(I - A)\underline{s} = \underline{v}$. We kunnen dit direct oplossen en vinden dan

$$\underline{s} = N \left[\frac{1}{1-d}, \frac{b}{(1-d)^2}, \frac{b^2}{(1-d)^3}, \frac{b^3}{(1-d)^4} \right]^T.$$

We bespreken echter een andere gedachtengang. Als we over een inverse van $I - A$ zouden beschikken zou de oplossing zijn: $\underline{s} = (I - A)^{-1} \underline{v}$. Nu is

$$(I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^n) = I - A^{n+1}.$$

Dit doet ons aan machtreeksen denken. We definiëren een limietbegrip voor matrices aldus: $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$ betekent dat alle B_n en B hetzelfde formaat hebben en dat $\lim_{n \rightarrow \infty} (B_n)_{ij} = B_{ij}$ voor alle i en j .

We zullen nu bewijzen dat de matrix-machtreeks $I + A + A^2 + A^3 + \dots$ convergeert. Het is dan duidelijk dat de som de inverse is van $I - A$.

Zij

$$Z := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan is

$$Z^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en $Z^4 = 0$. Nu geldt $A = dI + bZ$; $A^2 = d^2I + 2bdZ + b^2Z^2$ (denk aan $IZ = ZI = Z$); $A^3 = d^3I + 3d^2bZ + 3db^2Z^2 + b^3Z^3$. Omdat $Z^4 = 0$ is algemeen:

$$A^n = d^n I + \binom{n}{1} d^{n-1} b Z + \binom{n}{2} d^{n-2} b^2 Z^2 + \binom{n}{3} d^{n-3} b^3 Z^3.$$

Hieruit volgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} d^n \right) I + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{1} d^{n-1} \right) bZ + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} d^{n-2} \right) b^2 Z^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{3} d^{n-3} \right) b^3 Z^3 .$$

Op grond van de convergentie van de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} d^n = (1 - d)^{-1}$$

em van haar afgeleiden naar d vinden we

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (1 - d)^{-1} I + (1 - d)^{-2} bZ + (1 - d)^{-3} b^2 Z^2 + (1 - d)^{-4} b^3 Z^3 =$$

$$= \begin{bmatrix} (1 - d)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ (1 - d)^{-2} b & (1 - d)^{-1} & 0 & 0 \\ (1 - d)^{-3} b^2 & (1 - d)^{-2} b & (1 - d)^{-1} & 0 \\ (1 - d)^{-4} b^3 & (1 - d)^{-3} b^2 & (1 - d)^{-2} b & (1 - d)^{-1} \end{bmatrix} = (I - A)^{-1} .$$

6.4. Analytische meetkunde in \mathbb{R}^3 en meetkundige terminologie voor $n > 3$

6.4.1. Inleiding

In deze paragraaf worden toepassingen van de matrixrekening in de analytische meetkunde besproken. Hoewel we de elementen van \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 in dit hoofdstuk als kolommen noteren handhaven we de opvatting dat het de cartesische coördinaten van punten in vlak en ruimte zijn, (zie 1.5). Bovendien vatten we a niet alleen op als een punt maar ook als de verbindingspijl van 0 naar dit punt. We herhalen deels aan de hand van uitgewerkte voorbeelden een gedeelte van de analytische meetkunde in de ruimte. Men herhale voor zichzelf de eenvoudigere resultaten in het vlak.

In 6.4.5 voeren we ook voor \mathbb{R}^n met $n > 3$ een meetkundige terminologie in. Het zal blijken dat deze n-dimensionale meetkunde een nuttige intuïtieve steun is bij vele formele algebraïsche bewerkingen en resultaten. Deze paragraaf is de directe aanleiding tot de abstract meetkundige beschouwingen waaraan het grootste deel van dit hoofdstuk gewijd zal zijn.

6.4.2. Lijnen en vlakken

Bij gegeven vectoren $\underline{v} \neq \underline{0}$ en \underline{a} in \mathbb{R}^3 is $\underline{x} = [x, y, z]^T = \underline{a} + \lambda \underline{v}$, een parametervoorstelling van een rechte door \underline{a} (steunvector) met richting \underline{v} (richtingsvector).

Zijn \underline{v} en \underline{w} twee vectoren zó dat $\underline{0}$ (de oorsprong), \underline{v} en \underline{w} niet op een rechte liggen, dan is

$$\underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{v} + \mu \underline{w}$$

de parametervoorstelling van een vlak door \underline{a} evenwijdig aan het vlak door $\underline{0}$, \underline{v} en \underline{w} .

Een vlak wordt ook gekarakteriseerd door een vergelijking, $ax + by + cz = d$; uit een parametervoorstelling vindt men de vergelijking door λ en μ te elimineren. Merk op dat $\underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{v} + \mu \underline{w}$ drie lineaire betrekkingen zijn, nl.:

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases} \quad \text{als} \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}; \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}; \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} .$$

Het werken met parametervoorstellingen wordt nu in zes voorbeelden geïllustreerd.

Voorbeeld 1. De rechte $\underline{x} = [1, 1, 1]^T + \lambda [0, 1, 2]^T$.

Het punt $[1, 3, 5]^T$ ligt op deze rechte (neem $\lambda = 2$). Het snijpunt met het xy -vlak (vergelijking $z = 0$) vinden we uit: $0 = z = 1 + 2\lambda$, $\lambda = -\frac{1}{2}$; snijpunt $[1, \frac{1}{2}, 0]^T$. De rechte snijdt het yz -vlak ($x = 0$) niet, omdat (de verbindingslijn van $\underline{0}$ tot) $[0, 1, 2]^T$ evenwijdig is aan het vlak $x = 0$.

Voorbeeld 2. Beschouw het vlak

$$\underline{x} = [1, 2, 3]^T + \lambda [0, 1, 1]^T + \mu [1, 0, -2]^T .$$

Het snijpunt met de y -as vinden we uit:

$$\begin{cases} 0 = x = 1 + \mu & \mu = -1 \\ 0 = z = 3 + \lambda - 2\mu & \lambda = -5 \end{cases}; \quad \text{snijpunt } [0, -3, 0]^T .$$

De vergelijking van het vlak is $2x + y + z = 3$.

De snijlijn met het xy -vlak wordt gegeven door het paar vergelijkingen:

$$\begin{cases} z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

of ook door

$$\begin{cases} z = 0 \\ 2x - y = 3 . \end{cases}$$

Deze snijlijn heeft bijv. als parametervoorstelling (neem $x = \lambda$, dan $y = 2\lambda - 3$, $z = 0$):

$$\underline{x} = [0, -3, 0]^T + \lambda[1, 2, 0]^T .$$

Voorbeeld 3. Het snijpunt S van de rechte $\underline{x} = [1, 1, 1]^T + \lambda[0, 1, 2]^T$ met vlak $2x - y + z = 3$ vinden we door λ op te lossen uit

$$2(1) - (1 + \lambda) + (1 + 2\lambda) = 3 .$$

We vinden $\lambda = 1$; $S = [1, 2, 3]^T$.

Voorbeeld 4. Om een parametervoorstelling te vinden van het vlak met vergelijking $2x - 4y + 3z = 12$ stellen we bijv. $y = \lambda$, $z = 2\mu$, dan is $x = 6 + 2\lambda - 3\mu$, zodat we hebben verkregen

$$\underline{x} = [6, 0, 0]^T + \lambda[2, 1, 0]^T + \mu[-3, 0, 2]^T .$$

Voorbeeld 5. Om een parametervoorstelling te vinden van de snijlijn van de vlakken $x + y = 1$, $2x - y + z = 3$ stellen we bijv. $x = \lambda$; dan is $y = 1 - \lambda$, $z = -3\lambda + 4$, zodat we vinden:

$$\underline{x} = [0, 1, 4]^T + \lambda[1, -1, -3]^T .$$

Voorbeeld 6. Het vlak door de punten

$$\underline{a} = [a_1, a_2, a_3]^T , \quad \underline{b} = [b_1, b_2, b_3]^T \quad \text{en} \quad \underline{c} = [c_1, c_2, c_3]^T$$

heeft als parametervoorstelling

$$\underline{x} = \underline{c} + \lambda(\underline{b} - \underline{a}) + \mu(\underline{c} - \underline{a}) .$$

6.4.3. Meetkundige betekenis van het inwendig product

Is $\underline{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$, $\underline{b} = [b_1, b_2, b_3]^T$ dan definiëren we

$$(\underline{a}, \underline{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Volgens de stelling van Pythagoras is $(\underline{a}, \underline{a})$ dus gelijk aan het kwadraat van de lengte van het verbindingslijnstuk van $\underline{0}$ en \underline{a} . We noemen dit de lengte van \underline{a} . Notatie $|\underline{a}|$. $|\underline{a}| = \sqrt{(\underline{a}, \underline{a})}$. Dan is (wederom op grond van de stelling van Pythagoras)

$$|\underline{a} - \underline{b}| = (\underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \underline{b})^{\frac{1}{2}} = ((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2)^{\frac{1}{2}}$$

de afstand van \underline{a} tot \underline{b} .

Zij φ de hoek tussen de lijn door $\underline{0}$ en \underline{a} en de lijn door $\underline{0}$ en \underline{b} dan is volgens de cosinusregel:

$$|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 - 2|\underline{a}||\underline{b}|\cos \varphi = |\underline{a} - \underline{b}|^2 .$$

Uit

$$|\underline{a} - \underline{b}|^2 = (\underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \underline{b}) = (\underline{a}, \underline{a}) - 2(\underline{a}, \underline{b}) + (\underline{b}, \underline{b})$$

volgt:

$$(\underline{a}, \underline{b}) = |\underline{a}||\underline{b}|\cos \varphi .$$

Is i.h.b. $\cos \varphi = 0$ dus $\underline{a} \perp \underline{b}$ dan is ook $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$. Is $|\underline{a}| \neq 0 \neq |\underline{b}|$ dan volgt omgekeerd uit $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$ dat $\underline{a} \perp \underline{b}$. We zullen van nu af $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$ vaak als $\underline{a} \perp \underline{b}$ aangeven (ook al is een van beide misschien $\underline{0}$). We illustreren het gebruik van het inwendig product aan een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 1. De rechten $\underline{x} = [1, 1, 6]^T + \lambda[1, -2, -1]^T$ en $\underline{x} = [3, -1, 2]^T + \mu[-1, 2, -5]^T$ zijn loodrecht omdat het inwendig product van hun richtingsvectoren nul is.

Voorbeeld 2. De vergelijking van een vlak $\perp \underline{v}$ is: $(\underline{x}, \underline{v}) = C$. Een lijn loodrecht op het vlak met vergelijking $ax + by + cz = d$ is de lijn door $\underline{0}$ en $[a, b, c]^T$.

Voorbeeld 3. De vergelijking van de bol met middelpunt \underline{a} en straal r is: $(\underline{x} - \underline{a}, \underline{x} - \underline{a}) = r^2$. Het poolvlak van \underline{p} t.o.v. deze bol heeft als vergelijking: $(\underline{x} - \underline{a}, \underline{p} - \underline{a}) = r^2$. Dit vlak staat dus loodrecht op $\underline{p} - \underline{a}$. Als \underline{p} zelf op de bol ligt (dus $(\underline{p} - \underline{a}, \underline{p} - \underline{a}) = r^2$) is het poolvlak een raakvlak.

Voorbeeld 4. Voor de hoek, die $\underline{a} := [2, 2, 1]^T$ maakt met de y -as, geldt

$$\cos \varphi = 2/3 .$$

Voorbeeld 5. Bepaal de afstand van $\underline{a} = [-1, 2, 3]^T$ tot de rechte

$$\ell : \underline{x} = [-1, 14, -3] + \lambda[-1, 2, -2] .$$

Het vlak door \underline{a} loodrecht op ℓ heeft als vergelijking:

$$-x + 2y - 2z = -1 .$$

De lijn ℓ snijdt dit vlak in $\underline{b} = [3, 6, 5]^T$.

De afstand van \underline{a} tot \underline{b} is de gevraagde afstand; deze is $(4^2 + 4^2 + 2^2)^{\frac{1}{2}} = 6$.

Voorbeeld 6. Om de afstand te bepalen van de rechten

$$\ell : \underline{x} = [0, 1, 0]^T + \lambda[2, 1, 1]^T$$

en

$$m : \underline{x} = [0, -1, 3]^T + \mu[1, 2, 1]^T$$

nemen we een willekeurig punt op $\ell : [2\lambda, \lambda + 1, \lambda]^T$ en een willekeurig punt op $m : [\mu, 2\mu - 1, \mu + 3]^T$. De voorwaarde dat de verbindingsvector van beide punten met $[2, 1, 1]^T$ en met $[1, 2, 1]^T$ inwendig product 0 heeft, levert ons twee vergelijkingen in λ en μ :

$$\begin{cases} 2(2\lambda - \mu) + (\lambda - 2\mu + 2) + (\lambda - \mu - 3) = 0 \\ (2\lambda - \mu) + 2(\lambda - 2\mu + 2) + (\lambda - \mu - 3) = 0 . \end{cases}$$

De oplossing $\lambda = 1, \mu = 1$ geeft ons de punten op ℓ en m waartussen de afstand van de rechten wordt aangenomen. Deze punten zijn $[2, 2, 1]^T$ op ℓ en $[1, 1, -3]^T$ op m ; de afstand is $\sqrt{11}$.

Voorbeeld 7. Alle vectoren $\underline{x} = [x, y, z]^T \neq \underline{0}$ die gelijke hoeken maken met $\underline{a} = [2, 2, 1]^T$ en $\underline{b} = [4, 0, 3]^T$ voldoen aan:

$$\frac{(\underline{a}, \underline{x})}{|\underline{a}| |\underline{x}|} = \frac{(\underline{b}, \underline{x})}{|\underline{b}| |\underline{x}|} .$$

Uitwerking levert $x - 5y + 2z = 0$, de vergelijking van het bissectricevlak van \underline{a} en \underline{b} .

Voorbeeld 8. Als van een viervlak twee paren overstaande ribben elkaar loodrecht kruisen, is ook het derde paar onderling loodrecht.

Bewijs. Laat de hoekpunten zijn $\underline{0}$, \underline{a} , \underline{b} en \underline{c} , en laat gegeven zijn dat :
ribbe $(\underline{0}, \underline{a}) \perp$ ribbe $(\underline{b}, \underline{c})$ en ribbe $(\underline{0}, \underline{b}) \perp$ ribbe $(\underline{a}, \underline{c})$. Met gebruik van het inwendig product kan men deze gegevens uitdrukken als $(\underline{a}, \underline{b} - \underline{c}) = 0$, $(\underline{b}, \underline{a} - \underline{c}) = 0$ waaruit direct volgt $(\underline{c}, \underline{a} - \underline{b}) = 0$ of wel ribbe $(\underline{0}, \underline{c}) \perp$ ribbe $(\underline{a}, \underline{b})$. □

6.4.4. Het uitwendig vectorproduct

Anders dan het behandelde in 6.4.2 en 6.4.3 zal het nu in te voeren uitwendig product niet van \mathbb{R}^3 tot \mathbb{R}^n gegeneraliseerd worden. Het speelt in de lineaire algebra verder geen rol; we introduceren het hier slechts omdat het in de analytische meetkunde soms handig is.

Zij $\underline{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$ en $\underline{b} = [b_1, b_2, b_3]^T$ dan definiëren we het uitwendig product $\underline{a} \times \underline{b}$ door:

$$\underline{a} \times \underline{b} := [a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1]^T .$$

Blijkbaar is

$$\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a} ; \quad \underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b} .$$

Voorbeeld. De vergelijking van het vlak door $\underline{0}$, \underline{a} en \underline{b} is: $(\underline{x}, \underline{a} \times \underline{b}) = 0$.

6.4.5. Meetkundige terminologie in \mathbb{R}^n ($n > 3$)

Ook voor $n > 3$ voeren we meetkundige terminologie in. Neem bijv. $n = 4$. Het punt $\underline{0} = [0,0,0,0]^T$ heet de oorsprong; $\{[a,0,0,0]^T \mid a \in \mathbb{R}\}$ heet de x-as, enz. De verzameling $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{v}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ heet een rechte met \underline{a} als steunvector en \underline{v} als richtingsvector ($\underline{v} \neq \underline{0}$).

Evenzo zeggen we voor $(\underline{x}, \underline{y}) = 0$: $\underline{x} \perp \underline{y}$, \underline{x} loodrecht op \underline{y} .

We noemen $\sqrt{(\underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y})} =: |\underline{x} - \underline{y}|$ de afstand van \underline{x} en \underline{y} ; de afstand van \underline{x} tot $\underline{0}$, $|\underline{x}| = \sqrt{(\underline{x}, \underline{x})}$, heet ook de lengte van \underline{x} .

Het is duidelijk dat het lengtebegrip in \mathbb{R}^n voldoet aan:

$$\begin{aligned} |\underline{x} - \underline{x}| &= |\underline{0}| = 0 ; \\ |\underline{x} - \underline{y}| &> 0 \quad \text{als } \underline{x} \neq \underline{y} ; \\ |\underline{x} - \underline{y}| &= |\underline{y} - \underline{x}| . \end{aligned}$$

Een andere eigenschap:

$$|\underline{x} - \underline{y}| \leq |\underline{x} - \underline{z}| + |\underline{z} - \underline{y}| ,$$

de driehoeksongelijkheid voor afstanden in \mathbb{R}^n volgt uit de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz:

Stelling (ongelijkheid van Cauchy-Schwarz). Voor alle $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ geldt:

$$|(\underline{x}, \underline{y})| \leq |\underline{x}| |\underline{y}| .$$

Bewijs. We moeten laten zien dat $(\underline{x}, \underline{y})^2 \leq (\underline{x}, \underline{x})(\underline{y}, \underline{y})$.

Als $\underline{x} = \underline{0}$ is er niets te bewijzen. Als $\underline{x} \neq \underline{0}$ is voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ de vierkantsvorm

$$(\lambda \underline{x} + \underline{y}, \lambda \underline{x} + \underline{y}) = \lambda^2 (\underline{x}, \underline{x}) + 2\lambda (\underline{x}, \underline{y}) + (\underline{y}, \underline{y}) \geq 0 .$$

Voor de discriminant geldt derhalve $4(\underline{x}, \underline{y})^2 - 4(\underline{x}, \underline{x})(\underline{y}, \underline{y}) \leq 0$. □

Opmerkingen. 1) Als $\underline{x} \neq \underline{0}$ dan volgt uit $|(\underline{x}, \underline{y})| = |\underline{x}| |\underline{y}|$ dat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat waarvoor $\lambda \underline{x} + \underline{y} = \underline{0}$.

2) De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz drukt uit dat we in \mathbb{R}^n de hoek φ tussen \underline{x} en \underline{y} ($\underline{x} \neq \underline{0} \neq \underline{y}$) kunnen definiëren door

$$\cos \varphi = \frac{(\underline{x}, \underline{y})}{|\underline{x}| |\underline{y}|} .$$

6.5. Vectorruimten

6.5.1. Inleiding

We beginnen nu met wat men de abstract-meetkundige behandeling van de lineaire algebra zou kunnen noemen. In 6.5.2 definiëren we een vectorruimte als een verzameling, waarvan het er niet toe doet wat de elementen voor objecten zijn, maar waarin een structuur aanwezig is die erg lijkt op die van \mathbb{R}^n . Onze meetkundige intuïtie kan dan een leidraad zijn bij de bestudering van dergelijke abstracte vectorruimten. In dit college, dat toch een eerste kennismaking is, zullen we met bestuderen van de abstracte situatie niet erg ver gaan; de meerderheid van onze beschouwingen zullen zich in \mathbb{R}^n afspelen. Na de definitie en eenvoudigste eigenschappen van vectorruimten in 6.5.2, is de rest van deze paragraaf gewijd aan voorbeelden. Deze worden gegeven in twee reeksen: eerst vindt men in 6.5.3 een aantal voorbeelden die geen andere functie hebben dan de wijdsheid van het begrip vectorruimte te illustreren; daarna komen in 6.5.4 en 6.5.5 en 6.5.6 de voor dit hoofdstuk essentiële voorbeelden van vectorruimten. Zoals te verwachten hebben deze te maken met stelsels lineaire vergelijkingen.

6.5.2. Definitie van vectorruimten en deelruimten

Definitie. Een reële vectorruimte (of kortweg vectorruimte of lineaire ruimte) is een verzameling, L , van elementen, genaamd vectoren (genoteerd \underline{a} , \underline{b} , ...) waarin twee bewerkingen gedefinieerd zijn, namelijk een optelling: bij elk tweetal vectoren \underline{a} en \underline{b} is er één vector die we $\underline{a} + \underline{b}$ noemen; en een scalaire vermenigvuldiging: bij elk reëel getal r en elke vector \underline{a} is er een vector $r\underline{a} \in L$, en wel zo dat deze optelling en scalaire vermenigvuldiging voldoen aan de onderstaande regels 1 t/m 8; hierin zijn \underline{a} , \underline{b} , $\underline{c} \in L$, $r, s \in \mathbb{R}$.

- 1) $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$ (associatieve eigenschap);
- 2) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ (commutatieve eigenschap);
- 3) er is precies één vector, $\underline{0}$ (genaamd nulvector), zodat $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$ voor elke $\underline{a} \in L$;
- 4) bij elke $\underline{a} \in L$ bestaat er precies één vector, genoteerd $-\underline{a}$ waarvoor $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$;
- 5) $1\underline{a} = \underline{a}$;

- 6) $r(\underline{sa}) = (rs)\underline{a}$;
 - 7) $(r + s)\underline{a} = r\underline{a} + s\underline{a}$;
 - 8) $r(\underline{a} + \underline{b}) = r\underline{a} + r\underline{b}$.
- (distributieve eigenschappen).

Opmerkingen. 1) Men ziet onmiddellijk dat \mathbb{R}^n met de optelling en scalaire vermenigvuldiging uit 6.2.7 een vectorruimte is. Voor het inzicht zijn \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 zeer belangrijke voorbeelden.

2) Men zou ook complexe vectorruimten kunnen invoeren door overal in de definitie reëel door complex en \mathbb{R} door \mathbb{C} te vervangen. We doen dit niet.

Eigenschappen. 1) $\forall \underline{a} \in L \exists! \underline{x} \in L [\underline{a} + \underline{x} = \underline{b}]$; in woorden: in L heeft de vergelijking $\underline{a} + \underline{x} = \underline{b}$ voor elke \underline{a} en \underline{b} een éénduidige oplossing.

- 2) $\forall \underline{a} \in L [0\underline{a} = \underline{0}]$
- 3) $\forall r \in \mathbb{R} [r\underline{0} = \underline{0}]$
- 4) $\forall \underline{a} \in L [-\underline{a} = (-1)\underline{a}]$.

Definitie. Een deelverzameling V van een vectorruimte L heet een (lineaire) deelruimte indien V met de aanwezige optelling en scalaire vermenigvuldiging zelf een vectorruimte is.

Voorbeelden van deelruimten in \mathbb{R}^2 zijn: $\{\underline{0}\}$; \mathbb{R}^2 zelf; rechten door $\underline{0}$. In \mathbb{R}^3 hebben we als deelruimten: $\{\underline{0}\}$, rechten door $\underline{0}$, vlakken door $\underline{0}$, \mathbb{R}^3 zelf.

Eigenschap. 5) Zij L een vectorruimte, $V \subset L$, $V \neq \emptyset$ dan is V dan en slechts dan een deelruimte indien voor alle $r \in \mathbb{R}$ en alle \underline{x} en \underline{y} uit V geldt:

$$\underline{x} + \underline{y} \in V, r\underline{x} \in V.$$

Definitie. Is V een deelruimte van een vectorruimte L dan heten verzamelingen van de vorm

$$\underline{a} + V := \{\underline{a} + \underline{x} \mid \underline{x} \in V\}$$

nevenruimten.

Lijnen in \mathbb{R}^2 niet door $\underline{0}$, vlakken en rechten niet door $\underline{0}$ in \mathbb{R}^3 zijn voorbeelden van nevenruimten die niet zelf deelruimten zijn. Uiteraard is elke deelruimte van een vectorruimte ook een nevenruimte want $\underline{0} + V = V$.

Eigenschap. 6) Als V en W deelruimten zijn van een vectorruimte L en $\underline{a}, \underline{b} \in L$, dan is $\underline{a} + V = \underline{b} + W$ dan en slechts dan als $V = W$ en $\underline{a} - \underline{b} \in V$.

6.5.3. Voorbeelden van vectorruimten en deelruimten

- 1) De verzameling van de $(m \times n)$ -matrices vormt met de bewerkingen uit 6.2.2 een vectorruimte. Het nulelement is $\mathcal{O}^{(m \times n)}$.
- 2) De verzameling van alle rijen $\underline{a} := (a_1, a_2, a_3, \dots)$ vormt een vectorruimte als $\underline{a} + \underline{b} := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ en $r\underline{a} := (ra_1, ra_2, \dots)$ ($r \in \mathbb{R}$). Dit voorbeeld is een voor de hand liggende uitbreiding van \mathbb{R}^n .

- 3) De verzameling, H , van alle rijen $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots)$ waarvoor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ convergeert vormt een deelruimte van de vectorruimte uit voorbeeld 2). Het is nu niet meteen duidelijk dat uit $\underline{a} \in H$, $\underline{b} \in H$ volgt $\underline{a} + \underline{b} \in H$. We zullen echter laten zien dat uit de convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ volgt dat $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ convergeert.

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ heeft niet-negatieve termen. Uit $(a_n + b_n)^2 \leq 2a_n^2 + 2b_n^2$ (ga na!) volgt voor de partiële sommen:

$$\sum_{n=1}^N (a_n + b_n)^2 \leq 2 \sum_{n=1}^N a_n^2 + 2 \sum_{n=1}^N b_n^2 \leq 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right).$$

Een reeks met niet negatieve termen waarvan de partiële sommen begrensd zijn is convergent (3.2.1).

De vectorruimte H heet een Hilbertruimte.

- 4) Zij F de verzameling van alle reële functies op \mathbb{R} . Voor $f \in F$, $g \in F$ en $r \in \mathbb{R}$ definiëren we de functies $f + g$ en rf door:

$$\begin{cases} (f + g)(t) := f(t) + g(t) \\ (rf)(t) := rf(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Met deze definities is F een vectorruimte.

5) De verzameling C van alle continue functies op \mathbb{R} vormt een deelruimte van F uit voorbeeld 4). De verzameling $\text{Pol } n$ bestaande uit het nulpolynoom en alle polynomen met graad $\leq n$ ($n \in \mathbb{N}$) vormt een deelruimte van C en dus ook van F .

6.5.4. Voortgebrachte lineaire deelruimten

Zij $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ een stelsel vectoren uit een vectorruimte L (bijv. uit \mathbb{R}^n). Een vector

$$r_1 \underline{v}_1 + r_2 \underline{v}_2 + \dots + r_k \underline{v}_k$$

met $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}$ heet een lineaire combinatie van $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$.

De verzameling van alle lineaire combinaties van $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ dus $\{r_1 \underline{v}_1 + \dots + r_k \underline{v}_k \mid r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}\}$ vormt een deelruimte van L . Notatie: $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle$.

De deelruimte $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle \subset L$ heet de door $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ voortgebrachte of opgespannen lineaire ruimte. We breiden het begrip iets uit: is M een willekeurige deelverzameling van L dan is ook de verzameling van alle lineaire combinaties van eindig veel elementen uit M een deelruimte; notatie: $\langle M \rangle$.

Voorbeeld 1. Beschouw in \mathbb{R}^4 : $\underline{a} := [1, 1, 2, 0]^T$, $\underline{b} := [0, 2, 0, 1]^T$ en $\underline{c} := [0, 0, 1, 3]^T$. De vraag of $\underline{d} := [d_1, d_2, d_3, d_4]^T$ element van $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ is, is in feite de vraag naar het bestaan van reële getallen x_1, x_2, x_3 zó dat $\underline{d} = x_1 \underline{a} + x_2 \underline{b} + x_3 \underline{c}$. Dit is een stelsel lineaire vergelijkingen in x_1, x_2, x_3, n_1 .

$$\begin{cases} d_1 = x_1 \\ d_2 = x_1 + 2x_2 \\ d_3 = 2x_1 + x_3 \\ d_4 = x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

Zo is

$$[1, 3, 4, 7]^T \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$$

en

$$[1, 3, 4, 6]^T \notin \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$$

Voorbeeld 2. Zij $\underline{e}_1 := [1, 0, \dots, 0]^T$, $\underline{e}_2 = [0, 1, \dots, 0]^T, \dots, \underline{e}_n = [0, \dots, 0, 1]^T$ in \mathbb{R}^n dan is $\mathbb{R}^n = \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n \rangle$. De vectoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ heten wel de eenheidsvectoren.

Opmerkingen. 1) Voor iedere vectorruimte L geldt $\langle L \rangle = L$.

2) In het bijzonder is $\langle \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle \rangle = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle$; immers een lineaire combinatie van lineaire combinaties van $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ is zelf een lineaire combinatie van $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$.

6.5.5. Oplossingsruimte, rijenruimte, kolommenruimte

Zij $A = [a_{ij}]$ een $(m \times n)$ -matrix; laat $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$, ($\underline{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$) de rijen van A zijn en laat $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n \in \mathbb{R}^m$ de kolommen van A zijn. Met de bloknotatie uit 6.2.5 betekent dit:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1^T \\ \vdots \\ \underline{a}_m^T \end{bmatrix} = [\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n].$$

Uit 6.2.9 volgt dat $N(A)$, de oplossingsruimte van het stelsel $A\underline{x} = \underline{0}$ een deelruimte van \mathbb{R}^n is.

De deelruimte $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m \rangle \subset \mathbb{R}^n$ heet de rijenruimte van de matrix. De deelruimte $\langle \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n \rangle \subset \mathbb{R}^m$ heet de kolommenruimte van A.

Merk op dat $\langle \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n \rangle = A\mathbb{R}^n := \{A\underline{x} \mid \underline{x} \in \mathbb{R}^n\}$; omdat $A\mathbb{R}^n$ het beeld is van \mathbb{R}^n onder de afbeelding $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$, heet de kolommenruimte van A ook wel de beeldruimte van deze afbeelding.

Ook uit 6.2.9 volgt dat als het inhomogene stelsel $A\underline{x} = \underline{b}$ een oplossing heeft (dat is als $\underline{b} \in A\mathbb{R}^n$), de verzameling van alle oplossingen een nevenruimte van $N(A)$ is.

6.5.6. Orthogonaal complement

Is M een deelverzameling van \mathbb{R}^n dan definiëren we

$$M^\perp := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\underline{x}, \underline{y}) = 0 \text{ voor alle } \underline{y} \in M \}.$$

M^\perp is de verzameling van alle vectoren \underline{x} die loodrecht staan op alle elementen van M . M^\perp is een deelruimte van \mathbb{R}^n (ga na) geheten het orthogonaal complement of orthoplement van M .

Voorbeeld. $N(A)$ is het orthoplement van de rijenruimte van A .

Eigenschappen. 1) Is $N \subset M$ dan is $N^\perp \supset M^\perp$.

2) Als $(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ voor alle $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$, dan is $\underline{x} = \underline{0}$, m.a.w. $(\mathbb{R}^n)^\perp = \{\underline{0}\}$.

Stelling. Is $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ een aantal vectoren uit \mathbb{R}^n , dan is

$$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}^\perp = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle^\perp.$$

In woorden: het orthoplement van een eindige verzameling vectoren is gelijk aan het orthoplement van de door die vectoren voortgebrachte lineaire deelruimte.

Bewijs. Afkortingen: $M := \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$, $L := \langle M \rangle$.

Als $\underline{x} \in M^\perp$, dan is $(\underline{x}, \underline{v}_i) = 0$ ($i = 1, \dots, k$). Voor elke vektor uit L :

$r_1 \underline{v}_1 + \dots + r_k \underline{v}_k$ geldt dan:

$$(\underline{x}, r_1 \underline{v}_1 + \dots + r_k \underline{v}_k) = r_1 (\underline{x}, \underline{v}_1) + \dots + r_k (\underline{x}, \underline{v}_k) = 0 ;$$

dus $\underline{x} \in L^\perp$. Conclusie $M^\perp \subset L^\perp$.

Omdat $M \subset L$, geldt ook $L^\perp \subset M^\perp$, zodat $L^\perp = M^\perp$. □

6.6. Afhankelijkheid en onafhankelijkheid, bases

6.6.1. Inleiding

Deze paragraaf vormt met de volgende (6.7) het centrale deel van hoofdstuk 6. Grofweg kunnen we het probleem dat in 6.6 aan de orde komt zo omschrijven: gegeven een vectorruimte L (bijv. \mathbb{R}^n) en een deelruimte V , kunnen we nu V op zodanige wijze schrijven als $V = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle$ dat we voor willekeurige $\underline{a} \in L$ in een oogopslag kunnen vaststellen of $\underline{a} \in V$ of $\underline{a} \notin V$. De paragraaf valt uiteen in vier grote delen.

6.6.2. Afhankelijkheid en onafhankelijkheid

Definitie. Zij L een vectorruimte. Het stelsel vectoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ uit L heet afhankelijk (of lineair afhankelijk) als er reële getallen r_1, \dots, r_k bestaan, die niet alle nul zijn, zodanig dat

$$r_1 \underline{v}_1 + r_2 \underline{v}_2 + \dots + r_k \underline{v}_k = \underline{0}.$$

Anders gezegd: de vectoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ zijn afhankelijk als $\underline{0}$ op meer dan een manier als lineaire combinatie van $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ te schrijven is; (steeds is: $\underline{0} = 0\underline{v}_1 + \dots + 0\underline{v}_k$).

Voorbeeld 1. De vectoren $\underline{a} := [1, 1, 2, 3]^T$, $\underline{b} := [0, 1, 0, 1]^T$ en $\underline{c} := [1, 3, 2, 5]^T$ uit \mathbb{R}^4 zijn afhankelijk want

$$\underline{0} = \underline{a} + 2\underline{b} - \underline{c}.$$

Het homogene stelsel

$$\underline{0} = x\underline{a} + y\underline{b} + z\underline{c}$$

of

$$\begin{cases} 0 = x & + z \\ 0 = x + y + 3z \\ 0 = 2x & + 2z \\ 0 = 3x + y + 5z \end{cases}$$

heeft een van $x = 0, y = 0, z = 0$ (de nuloplossing) verschillende oplossing, bijv.: $x = 1, y = 2, z = -1$.

Definitie. De vectoren $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ uit L heten onafhankelijk als ze niet afhankelijk zijn.

Anders gezegd: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ zijn onafhankelijk als uit $r_1 \underline{v}_1 + \dots + r_k \underline{v}_k = \underline{0}$ volgt $r_1 = r_2 = \dots = r_k = 0$.

Voorbeeld 2. $\underline{a} := [1, 1, 2, 3]^T$, $\underline{b} := [0, 1, 0, 1]^T$ en $\underline{c} := [1, 3, 2, 6]^T$ zijn onafhankelijk, want uit $r_1 \underline{a} + r_2 \underline{b} + r_3 \underline{c} = \underline{0}$ volgt:

$$\begin{cases} r_1 + r_3 = 0 \\ r_1 + r_2 + 3r_3 = 0 \\ 2r_1 + 2r_3 = 0 \\ 3r_1 + r_2 + 6r_3 = 0 \end{cases}$$

Met $\underline{a}_1 := [1, 0, 1]^T$, $\underline{a}_2 := [1, 1, 3]^T$, $\underline{a}_3 := [2, 0, 2]^T$, $\underline{a}_4 := [3, 1, 6]^T$,
 $\underline{r} := [r_1, r_2, r_3]^T$ kunnen we dit stelsel schrijven als:

$$\begin{cases} (\underline{a}_1, \underline{r}) = 0 \\ (\underline{a}_2, \underline{r}) = 0 \\ (\underline{a}_3, \underline{r}) = 0 \\ (\underline{a}_4, \underline{r}) = 0 \end{cases}$$

Hieruit volgt: $(\underline{a}_4 - \underline{a}_3 - \underline{a}_2, \underline{r}) = 0$, dus $r_3 = 0$. Daarna volgt uit $(\underline{a}_1, \underline{r}) = 0$ dat ook $r_1 = 0$ en tenslotte uit $(\underline{a}_2, \underline{r}) = 0$ dat $r_2 = 0$.

Opmerking. De meetkundige betekenis van afhankelijkheid.

In \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 geldt:

- 1) Twee rechten zijn evenwijdig (of samenvallend) als hun richtingsvectoren afhankelijk zijn.
- 2) Een vlak door $\underline{0}$ bestaat uit alle vectoren die een lineaire combinatie zijn van twee onafhankelijke vectoren.
- 3) De rechte $\underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{u}$ is evenwijdig met (of ligt in) het vlak $\underline{x} = \underline{b} + \mu \underline{v} + \nu \underline{w}$ als \underline{u} , \underline{v} en \underline{w} afhankelijk zijn. Omdat $\underline{u} \neq \underline{0}$ (anders is $\underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{u}$ geen rechte) en omdat \underline{v} en \underline{w} onafhankelijk zijn (vlak!) volgt in dit geval uit de afhankelijkheid van \underline{u} , \underline{v} en \underline{w} dat \underline{u} een lineaire combinatie is van \underline{v} en \underline{w} (ga na).
- 4) De punten \underline{a} , \underline{b} en \underline{c} liggen op een rechte als $\underline{b} - \underline{a}$ en $\underline{c} - \underline{a}$ afhankelijk zijn.
- 5) De punten \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} en \underline{d} liggen in een vlak als $\underline{b} - \underline{a}$, $\underline{c} - \underline{a}$, $\underline{d} - \underline{a}$ afhankelijk zijn.

Eigenschappen. Door nauwgezette toepassing van de definities zijn de volgende eigenschappen te bewijzen:

- 1) $\underline{0}$ is een afhankelijk stelsel.
- 2) Als $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ een afhankelijk stelsel is, dan is ook $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell$ afhankelijk voor elk stelsel $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell$.
- 3) Is een van de vectoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ de nulvector, dan is $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ afhankelijk.
- 4) Het stelsel $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ is dan en slechts dan onafhankelijk als $\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ onafhankelijk is.
- 5) Zij $\alpha \neq 0$; het stelsel $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ is dan en slechts dan onafhankelijk als $\alpha \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ onafhankelijk is.
- 6) Als $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ een afhankelijk stelsel is, dan is tenminste één der \underline{v}_i een lineaire combinatie van de overige vectoren uit het stelsel.

Is nl. $r_1 \underline{v}_1 + \dots + r_k \underline{v}_k = \underline{0}$ en $r_i \neq 0$, dan is

$$\underline{v}_i = -\frac{r_1}{r_i} \underline{v}_1 - \dots - \frac{r_{i-1}}{r_i} \underline{v}_{i-1} - \frac{r_{i+1}}{r_i} \underline{v}_{i+1} - \dots - \frac{r_k}{r_i} \underline{v}_k.$$

Opmerking. Het onderzoek naar de afhankelijkheid van een stelsel.

Door herhaalde toepassing van de eigenschappen 4 en 5 tracht men het onderzoek naar de afhankelijkheid van een stelsel te vervangen door het onderzoek van een ander, eenvoudiger stelsel. Het systematisch uitvoeren van dit procédé noemen we "vegen". We zullen het spoedig als een nauwkeurig omschreven rekenrecept (algoritme) beschrijven. Vooruitlopend op dit recept twee voorbeelden:

Voorbeeld 3. Zijn $\underline{a} = [-1, 1, 1]^T$, $\underline{b} = [1, 2, 3]^T$, $\underline{c} = [5, 1, 3]^T$ afhankelijk? Schrijf de vectoren onder elkaar en veeg de tweede kolom schoon:

$$\begin{array}{ll} \underline{a}^T = [-1, 1, 1] & \underline{a}^T = [-1, 1, 1] \\ \underline{b}^T = [1, 2, 3] & \underline{b}^T - 2\underline{a}^T = [3, 0, 1] \\ \underline{c}^T = [5, 1, 3] & \underline{c}^T - \underline{a}^T = [6, 0, 2]. \end{array}$$

Omdat blijkbaar $\underline{c} - \underline{a} = 2(\underline{b} - 2\underline{a})$, dus $3\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$, is het stelsel afhankelijk.

Voorbeeld 4. Is $\underline{a} = [1, 2, 3]^T$, $\underline{b} = [2, 7, 0]^T$, $\underline{c} = [1, 2, -1]^T$ afhankelijk?

$$\begin{array}{lll} \underline{a}^T = [1, 2, 3] & \underline{a}^T + 3\underline{c}^T = [4, 8, 0] & \underline{a}^T + 3\underline{c}^T - 2\underline{b}^T = [0, -6, 0] \\ \underline{b}^T = [2, 7, 0] & \underline{b}^T = [2, 7, 0] & \underline{b}^T = [2, 7, 0] \\ \underline{c}^T = [1, 2, -1] & \underline{c}^T = [1, 2, -1] & \underline{c}^T = [1, 2, -1]. \end{array}$$

Het laatste stelsel is onafhankelijk en \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} dus ook.

Immers uit $r_1[0, -6, 0] + r_2[2, 7, 0] + r_3[1, 2, -1] = \underline{0}$ volgt: $2r_2 + r_3 = 0$, $-6r_1 + 7r_2 + 2r_3 = 0$, $-r_3 = 0$ en dus $r_1 = r_2 = r_3 = 0$.

6.6.3. Bases

6.6.3.1. Stelling. Zij L een vectorruimte; $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in L$. Indien $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle \neq \{0\}$ dan heeft $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ een onafhankelijk deelstelsel dat ook $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle$ voortbrengt.

Bewijs. Als $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ onafhankelijk is, dan is er niets te bewijzen. Anders is een der vectoren, zeg \underline{v}_i , een lineaire combinatie van de overige. In dit laatste geval is:

$$L := \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_k \rangle.$$

Indien $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_k$ nog steeds een afhankelijk stelsel is kunnen we wederom een der vectoren weglaten. Dit herhalen we tot we een onafhankelijk stelsel voortbrengenden overhouden. Daar $L \neq \{0\}$ wordt dit inderdaad bereikt. \square

6.6.3.2. Definitie. Zij L een vectorruimte en $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$ een onafhankelijk stelsel in L dan heet $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$ een basis voor $\langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k \rangle$.

Voorbeeld 1. Het stelsel $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ (6.5.4, voorbeeld 2) is een basis van \mathbb{R}^n . Deze noemen we de standaardbasis.

Opmerkingen. 1) Het is mogelijk dat een vectorruimte geen basis (met eindig veel elementen) heeft; voorbeeld: 6.5.3, voorbeeld 2. We zullen ons in het vervolg beperken tot vectorruimten die wel een basis hebben.

- 2) In 6.6.3.1 is bewezen dat $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle$ mits $\neq \{0\}$ een basis heeft.
 3) Een vectorruimte kan verschillende bases hebben: is $\underline{a} = [1, 1, 0, 0]^T$,
 $\underline{b} = [1, 2, 0, 0]^T$ dan is $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle \subset \mathbb{R}^4$.

6.6.3.3. Stelling. Is $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ een basis voor de vectorruimte L , dan is elk element van L op éénduidige wijze te schrijven als lineaire combinatie van $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$.

Bewijs. Omdat $L = \langle \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m \rangle$ is elke $\underline{x} \in L$ te schrijven als lineaire combinatie van $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$. Stel

$$\underline{x} = r_1 \underline{w}_1 + \dots + r_m \underline{w}_m$$

en

$$\underline{x} = s_1 \underline{w}_1 + \dots + s_m \underline{w}_m,$$

dan is

$$(r_1 - s_1) \underline{w}_1 + \dots + (r_m - s_m) \underline{w}_m = \underline{0}.$$

Omdat $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ onafhankelijk zijn is nu

$$r_1 - s_1 = r_2 - s_2 = \dots = r_m - s_m = 0. \quad \square$$

6.6.3.4. Stelling (uitwisselingsstelling). Is $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ een basis van de vectorruimte L en is $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m$ een onafhankelijk stelsel in L , dan is $m \leq k$.

Bewijs. Daar $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ een basis van L vormt, is $\underline{b}_1 = r_1 \underline{a}_1 + \dots + r_k \underline{a}_k$. Omdat \underline{b}_1 voorkomt in een onafhankelijk stelsel, is $\underline{b}_1 \neq \underline{0}$, dus $[r_1, \dots, r_k] \neq [0, \dots, 0]$. Uitsluitend voor het gemak van de notatie nemen we aan dat $r_1 \neq 0$ is (dit kunnen we anders bereiken door verandering van de volgorde van de $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$). Nu is

$$\underline{a}_1 = \frac{1}{r_1} \underline{b}_1 - \frac{r_2}{r_1} \underline{a}_2 - \dots - \frac{r_k}{r_1} \underline{a}_k.$$

Als we in iedere lineaire combinatie van $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$, de vector \underline{a}_1 vervangen door de nu gevonden uitdrukking zien we dat

$$L = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \rangle = \langle \underline{b}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k \rangle.$$

Hieruit volgt:

$$\underline{b}_2 = s_1 \underline{b}_1 + s_2 \underline{a}_2 + \dots + s_k \underline{a}_k .$$

Hierin is $[s_2, \dots, s_k] \neq [0, \dots, 0]$ (anders was $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ afhankelijk en $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m$ dus ook). Neem gemakshalve aan dat $s_2 \neq 0$. Dan is

$$\underline{a}_2 = \frac{1}{s_2} \underline{b}_2 - \frac{s_1}{s_2} \underline{b}_1 - \frac{s_3}{s_2} \underline{a}_3 - \dots - \frac{s_k}{s_2} \underline{a}_k ,$$

en dus

$$L = \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_k \rangle .$$

We herhalen nu dit uitwisselingsproces. Als $m \geq k$ is, hebben we na k uitwisselingen verkregen $L = \langle \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k \rangle$. Als nu $m > k$ zou zijn dan is

$\underline{b}_m = t_1 \underline{b}_1 + \dots + t_k \underline{b}_k$ in tegenspraak met de onafhankelijkheid van $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m$. Dus $m \leq k$. □

Gevolg. Elk $(n + 1)$ -tal vectoren uit \mathbb{R}^n is afhankelijk.

Gevolg. Elke basis van een vectorruimte bestaat uit evenveel vectoren.

Bewijs. Als $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ en $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m$ bases zijn van L , dan is $m \leq k$ en $k \leq m$. □

6.6.3.5. Definitie. Het aantal vectoren in een basis van de vectorruimte L heet de dimensie van L , notatie: $\dim L$, $\dim\{0\} := 0$. De dimensie van een nevenruimte $\underline{a} + L$ is gedefinieerd door $\dim(\underline{a} + L) := \dim L$.

Voorbeeld 2. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Stelling. Is V een deelruimte van een n -dimensionale vectorruimte L , dan is $0 \leq \dim V \leq n$.

Bewijs. Als $V = \{0\}$ dan $\dim V = 0$; als $V \neq \{0\}$, kies $\underline{v}_1 \in V$ met $\underline{v}_1 \neq 0$. Als $V = \langle \underline{v}_1 \rangle$ dan $\dim V = 1$; als $V \neq \langle \underline{v}_1 \rangle$, kies $\underline{v}_2 \in V$ zódat $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ een onafhankelijk stelsel is.

Als $V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$ dan $\dim V = 2$; als $V \neq \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$, kies $\underline{v}_3 \in V$ zó dat $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ een onafhankelijk stelsel is. Enzovoort.

Omdat elk $(n + 1)$ -tal in L afhankelijk is, kan men zo niet onbeperkt doorgaan. We vinden $V = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle$ met $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ onafhankelijk; dus $\dim V = k$ met $0 \leq k \leq n$. □

Gevolg. Elke deelruimte van een n -dimensionale vectorruimte heeft een basis.

6.6.3.6. Stelling (uitbreidingsstelling). Zij V een k -dimensionale deelruimte van de n -dimensionale vectorruimte L ; $0 < k < n$. Zij $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ een basis van V , dan heeft L een basis $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_{n-k}$. (Deze basis van L ontstaat dus door uitbreiding van de basis van V met $n - k$ vectoren.)

Bewijs. Neem een basis $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n$ van L , dus $L = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n \rangle$. Volgens het uitwisselingsproces zijn k van de \underline{u} 's uit de basis van L uit te wisselen voor $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$. □

6.6.3.7. Opmerking. We onderzoeken het verband tussen een k -dimensionale vectorruimte L en \mathbb{R}^k . Laat $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ een basis van L zijn; elke vector \underline{x} uit L is nu eenduidig bepaald door een kolomvector $\underline{r} = [r_1, \dots, r_k]^T$ uit \mathbb{R}^k , nl. door middel van: $\underline{x} = r_1 \underline{v}_1 + r_2 \underline{v}_2 + \dots + r_k \underline{v}_k$. De getallen r_1, \dots, r_k heten de coördinaten (ook wel componenten) van \underline{x} t.o.v. de basis $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$. De vector $\underline{r} \in \mathbb{R}^k$ heet de kolom van \underline{x} t.o.v. deze basis. Let er op dat de kolom van \underline{x} afhangt van de gekozen basis. Het één-éénduidige verband tussen L en \mathbb{R}^k draagt ook de optelling en scalaire vermenigvuldiging over:

Als nl. $\underline{a} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_k \underline{v}_k$, $\underline{b} = b_1 \underline{v}_1 + \dots + b_k \underline{v}_k$, met andere woorden $\underline{a} \leftrightarrow [a_1, \dots, a_k]^T$, $\underline{b} \leftrightarrow [b_1, \dots, b_k]^T$, dan $\underline{a} + \underline{b} \leftrightarrow [a_1 + b_1, \dots, a_k + b_k]^T$; $\alpha \underline{a} \leftrightarrow [\alpha a_1, \dots, \alpha a_k]^T$.

Iedere k -dimensionale lineaire ruimte ziet er precies zo uit als (we zeggen: is isomorf met) \mathbb{R}^k .

Dit resultaat betekent dat we ons in de praktijk kunnen beperken tot \mathbb{R}^k ($k \in \mathbb{N}$); hetgeen we van nu af meestal zullen doen.

6.6.4. Het bepalen van een basis; de normaalvorm van een matrix

In deze paragraaf zullen we een rekenprocedure leren kennen die voor vele doeleinden bruikbaar zal zijn. Op deze plaats gaat het er allereerst om een basis te vinden voor $V := \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \rangle$ ($\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$) en liefst zodanig, dat we voor een willekeurige $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ meteen kunnen zien of $\underline{x} \in V$.

We gaan hierbij te werk met de veegtechniek uit 6.6.2; d.w.z. we maken gebruik van de eigenschap dat L niet verandert bij een van de volgende manipulaties met het stelsel voortbrengenden, verandering van de volgorde van de \underline{v} 's; vermenigvuldiging van één der \underline{v} 's met een getal $\alpha \neq 0$; vervanging van \underline{v}_i door $\underline{v}_i + \beta \underline{v}_j$ ($\beta \in \mathbb{R}$); het weglaten van $\underline{0}$ en het weglaten van een vector die een lineaire combinatie is van de andere vectoren. We bespreken eerst een voorbeeld.

Voorbeeld. Zij $\underline{u} = [0,0,0,1,1]^T$, $\underline{v} = [0,2,3,5,7]^T$, $\underline{w} = [0,3,6,2,-2]^T$, $\underline{x} = [0,1,2,3,4]^T$, $\underline{y} = [0,0,0,0,1]^T$. Bepaal een basis voor $V := [\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{x}, \underline{y}] \subset \mathbb{R}^5$.

Allereerst $V = \langle \underline{x}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{u}, \underline{y} \rangle$.

$$\begin{array}{ll} \underline{x} = [0,1,2,3,4]^T & \underline{x} = [0,1,2,3,4]^T \\ \underline{v} = [0,2,3,5,7]^T & \underline{v} - 2\underline{x} = [0,0,-1,-1,-1]^T \\ \underline{w} = [0,3,6,2,-2]^T & \underline{w} - 3\underline{x} = [0,0,0,-7,-14]^T \\ \underline{u} = [0,0,1,1,1]^T & \underline{u} = [0,0,1,1,1]^T \\ \underline{y} = [0,0,0,0,1]^T & \underline{y} = [0,0,0,0,1]^T \end{array}$$

We zien nu: $V = \langle \underline{x}, \underline{v} - 2\underline{x}, \underline{w} - 3\underline{x}, \underline{u}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{u}, -\frac{1}{7}(\underline{w} - 3\underline{x}), \underline{y} \rangle$.

Van dit laatste viertal voortbrengenden is onmiddellijk te zien dat het lineair onafhankelijk en dus een basis is. We krijgen een fraaiere basis als we nog even verder werken.

Zij $\underline{t} := -\frac{1}{7}(\underline{w} - 3\underline{x})$.

$$\begin{array}{ll} \underline{x} = [0,1,2,3,4]^T & \underline{x} - 2\underline{u} = [0,1,0,1,2]^T \\ \underline{u} = [0,0,1,1,1]^T & \underline{u} = [0,0,1,1,1]^T \\ \underline{t} = [0,0,0,1,2]^T & \underline{t} = [0,0,0,1,2]^T \\ \underline{y} = [0,0,0,0,1]^T & \underline{y} = [0,0,0,0,1]^T \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \underline{x} - 2\underline{u} - \underline{t} = [0, 1, 0, 0, 0]^T & \underline{x} - 2\underline{u} - \underline{t} = [0, 1, 0, 0, 0]^T \\
 \underline{u} - \underline{t} = [0, 0, 1, 0, -1]^T & \underline{u} - \underline{t} + \underline{y} = [0, 0, 1, 0, 0]^T \\
 \underline{t} = [0, 0, 0, 1, 2]^T & \underline{t} - 2\underline{y} = [0, 0, 0, 1, 0]^T \\
 \underline{y} = [0, 0, 0, 0, 1]^T & \underline{y} = [0, 0, 0, 0, 1]^T .
 \end{array}$$

Conclusie: $V = \langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$.

Het met de hand uitvoeren van het veegproces kan op vele manieren; de ene manier is handiger dan de andere. We willen het nu ook nog op een meer systematische manier beschouwen, die in de praktijk tot een computerprogramma zou kunnen worden uitgebouwd. We wijzen er met klem op dat de rekentechniek van het vegen het fundament is waar de hele verdere ontwikkeling op rust. Tenwille van later gebruik zullen we het geheel formuleren als een matrix-algoritme.

Laat $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ vectoren uit \mathbb{R}^n zijn. Beschouw een matrix $A^{(m \times n)}$ waarvan de rijen de vectoren $\underline{v}_1^T, \dots, \underline{v}_m^T$ zijn. We kunnen nu het veegprogramma uitvoeren voor de rijen van A . Voor later gebruik zullen we nu de rijen $\underline{0}^T$ niet weglaten. De overige veegbewerkingen zijn nu geformuleerd voor rijen van A :

- (α) Verwisseling van de k -de en de l -de rij.
- (β) Vermenigvuldiging van de k -de rij met $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.
- (γ) Vervanging van de k -de rij door de som van de k -de rij en β maal de l -de rij.

Het standaardveegprogramma is nu het volgende:

- I. Begin bij de eerste kolom van A ; is deze $\underline{0}$ (uit \mathbb{R}^m) neem dan de tweede kolom; laat k_1 het laagste rangnummer zijn van een kolom die ongelijk $\underline{0}$ is (als k_1 niet bestaat is $A^{(m \times n)} = [0]$); verwissel, zo nodig, rijen zodat het eerste element van de k_1 -de kolom $\neq 0$ wordt; deel daarna de eerste rij door het element dat dan in de k_1 -de kolom op de eerste plaats staat.

De matrix heeft nu de vorm (bijv. $k_1 = 2$, $m = 4$, $n = 7$, duidt een element aan waarvan we nog niets weten)

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{bmatrix}$$

Trek veelvouden van de eerste rij van de tweede t/m m-de rij af zó dat de k_1 -de kolom de \underline{e}_1 uit \mathbb{R}^m wordt ("veeg de k_1 -de kolom schoon met de eerste rij"). A wordt dan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

II. Als in de nu verkregen matrix de tweede t/m m-de rij alle gelijk $\underline{0}^T$ zijn, dan zijn we klaar. Laat anders k_2 het rangnummer zijn van de eerste kolom van links af aan die een element $\neq 0$ heeft in de tweede t/m m-de rij (gevolg $k_2 > k_1$); verwissel, zo nodig, rijen om te verkrijgen dat het tweede element van de k_2 -de rij $\neq 0$ wordt; deel de tweede rij door dit element; veeg de k_2 -de kolom met de tweede rij schoon. We hebben dan (gesteld $k_2 = 4$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & . & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \end{bmatrix}$$

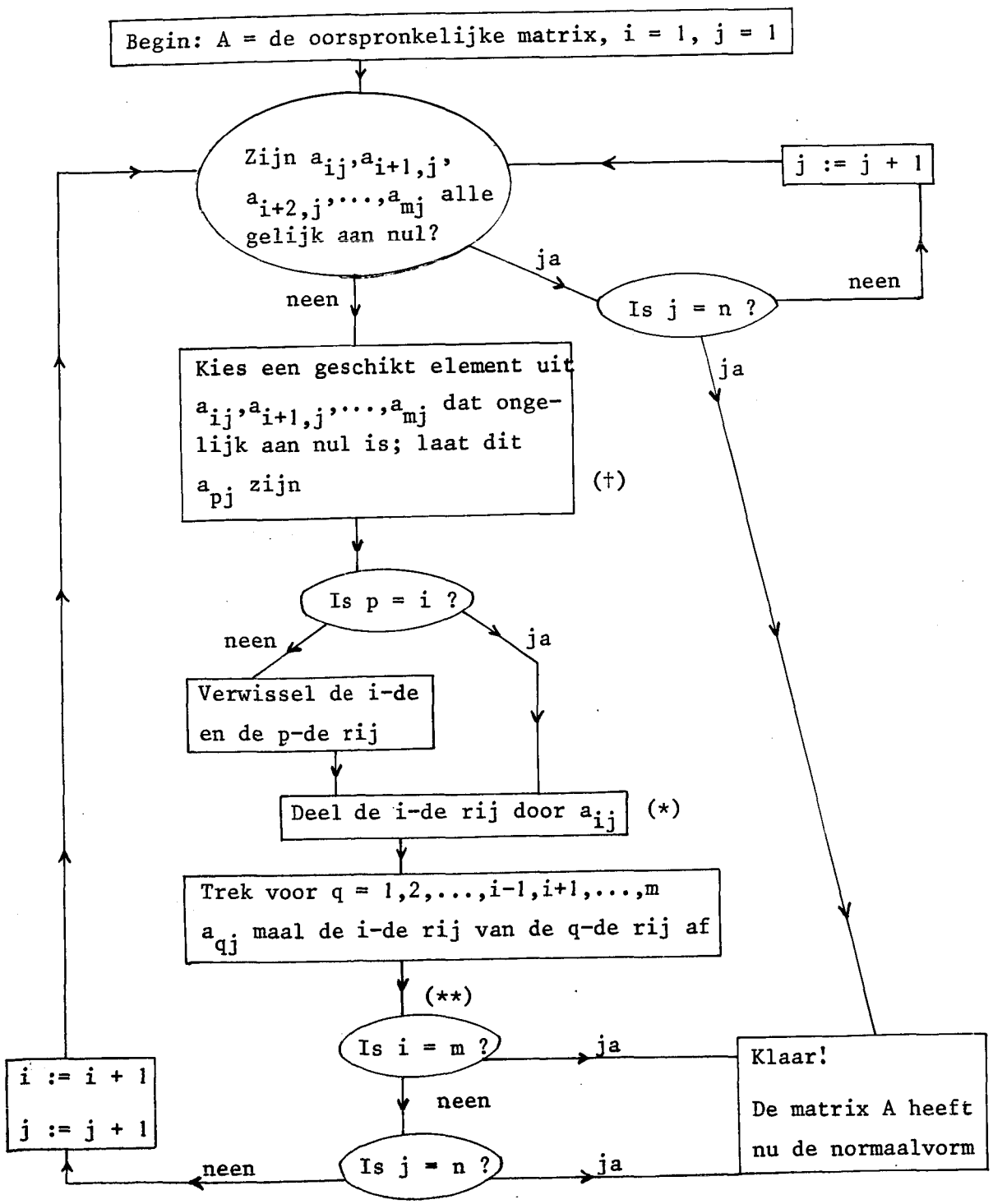
III. Herhaal de procedure nu; k_3 is het rangnummer van de nu meest linkse kolom die ergens in de derde t/m m-de rij een element $\neq 0$ heeft. Verwissel, zo nodig, rijen zodat het element in de derde rij, k_3 -de kolom ongelijk 0 wordt; veeg de k_3 -de kolom schoon. Daarna met k_4 , enz. Op zeker moment hebben we het volgende bereikt: de k_r -de kolom is in \underline{e}_r (uit \mathbb{R}^m) veranderd; verder gaan is niet mogelijk, hetzij doordat $r = m$, hetzij doordat $r < m$ en de rijen met nummers $r+1, \dots, m$ zijn $\underline{0}^T$. We zijn nu klaar; A heeft zijn zgn. normaalvorm gekregen. Bijvoorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & . & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k_1 = 2, k_2 = 4, k_3 = 5;$$

of

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & . & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & . \end{bmatrix}, \quad k_1 = 2, k_2 = 4, k_3 = 5, k_4 = 6.$$

We geven dit programma in een zgn. blokdiagram. Wat men doen moet is volgens de pijlrichting het schema doorlopen tot men bij klaar uitkomt. Op elk moment heeft men op papier of in het geheugen van de computer een matrix $A = A^{(m \times n)}$ en twee natuurlijke getallen i en j . Een rond hokje duidt op een vraag, een rechthoek op een opdracht. Een opdracht is steeds het veranderen van A , i of j . De oude waarden van deze grootheden worden dan weggeveegd. Met $j := j + 1$ bedoelen we: maak de nieuwe waarde van j gelijk aan de oude plus 1; $j := j + 1$ is dus de opdracht "verhoog j met 1". We beginnen met A : de oorspronkelijke matrix; $i = 1$ en $j = 1$.



(+) Als we dit programma uitvoeren op kladpapier, dan zal "geschikt" bij voorkeur +1 of -1 zijn of in ieder geval zo dat we weinig breuken krijgen. Als het voor een computer gebruikt wordt moeten we de keuzeprocedure voor-schrijven; meestal neemt men dan een element waarvan de absolute waarde zo groot mogelijk is.

Als we bovendien de kolomnummers k_1, \dots, k_r van de eenheidsvectoren $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_r$ (uit \mathbb{R}^m) willen vastleggen, kunnen we dit doen door op de plaats aangeduid met (**) de opdracht: zet $k_i = j$ in te lassen.

De verkregen normaalvorm kan nu beschreven worden met:

- 1) Er zijn getallen $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq n$ en de k_i -de kolom is \underline{e}_i uit \mathbb{R}^m .
- 2) Iedere kolom met rangnummer $< k_1$ is $\underline{0}$; iedere kolom met rangnummer k met $k_i < k < k_{i+1}$ heeft nullen op de laatste $(m - i)$ plaatsen; iedere kolom met rangnummer groter dan k_r heeft nullen op de laatste $(m - r)$ plaatsen.

Gevolg. De eerste r rijen zijn $\neq \underline{0}^T$; de laatste $m - r$ rijen zijn $\neq \underline{0}$. De ge-transponeerden van deze eerste r rijen vormen een basis van $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \rangle$, de zgn. standaardbasis.

- Opmerkingen. 1) Men kan bewijzen dat door de beschreven algoritme (onafhan-kelijk van de keuze bij (+)) de normaalvorm van A éénduidig bepaald is.
- 2) In de praktijk van het vraagstukken maken, zal men er soms de voorkeur aangeven te vegen met elementen $\neq 1$; d.w.z. men zal (*) nalaten en de volgende opdracht aanpassen.

6.6.5. Orthonormale bases in \mathbb{R}^n

Definitie. Een orthonormaal stelsel vectoren in \mathbb{R}^n is een stelsel $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ waarvoor geldt: $(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \delta_{ij}$ (6.2.8; in woorden: De vectoren \underline{v}_i hebben lengte 1 en zijn onderling loodrecht).

Stelling. Een orthonormaal stelsel is onafhankelijk.

Bewijs. Zij $r_1 \underline{v}_1 + \dots + r_k \underline{v}_k = \underline{0}$, dan is

$$(r_1 \underline{v}_1 + \dots + r_k \underline{v}_k, \underline{v}_i) = (\underline{0}, \underline{v}_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, k) .$$

Als $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ orthonormaal is, is echter $(r_1 \underline{v}_1 + \dots + r_k \underline{v}_k, \underline{v}_i) = r_i$, dus $r_i = 0$ ($i = 1, \dots, k$). \square

De basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ van \mathbb{R}^n is tevens een orthonormaal stelsel; we noemen een basis die tevens een orthonormaal stelsel is een orthonormale basis.

Stelling. Elke deelruimte L van \mathbb{R}^n heeft een orthonormale basis.

Bewijs. Laat $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k$ een basis voor L zijn. We construeren uit deze basis een orthonormale basis door middel van het zogenaamde orthonormalisatieproces van Gram en Schmidt

$$\underline{v}_1 := \frac{1}{|\underline{u}_1|} \underline{u}_1 ; \quad \underline{w}_2 := \underline{u}_2 - (\underline{u}_2, \underline{v}_1) \underline{v}_1 ; \quad \underline{v}_2 := \frac{1}{|\underline{w}_2|} \underline{w}_2 .$$

Nu is $|\underline{v}_1| = |\underline{v}_2| = 1$; $(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = 0$. Merk op dat $(\underline{u}_2, \underline{v}_1) \underline{v}_1$ de projectie van \underline{u}_2 is op de rechte door \underline{u}_1 (zie ook 6.7.2).

$$\underline{w}_3 := \underline{u}_3 - (\underline{u}_3, \underline{v}_1) \underline{v}_1 - (\underline{u}_3, \underline{v}_2) \underline{v}_2 ; \quad \underline{v}_3 := \frac{1}{|\underline{w}_3|} \underline{w}_3$$

(merk op dat $|\underline{w}_3| \neq 0$). Ga na dat $(\underline{v}_3, \underline{v}_1) = (\underline{v}_3, \underline{v}_2) = 0$ en dat $(\underline{u}_3, \underline{v}_1) \underline{v}_1 + (\underline{u}_3, \underline{v}_2) \underline{v}_2$ de projectie is van \underline{u}_3 op het vlak door \underline{u}_1 en \underline{u}_2 .

$$\underline{w}_4 := \underline{u}_4 - (\underline{u}_4, \underline{v}_1) \underline{v}_1 - (\underline{u}_4, \underline{v}_2) \underline{v}_2 - (\underline{u}_4, \underline{v}_3) \underline{v}_3 ; \quad \underline{v}_4 := \frac{1}{|\underline{w}_4|} \underline{w}_4 ,$$

enzovoort. Op deze wijze verkrijgt men een orthonormale basis $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$. \square

Stelling. Zij L een k -dimensionale deelruimte van \mathbb{R}^n , dan heeft \mathbb{R}^n een orthonormale basis $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n$ waarvan $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ een orthonormale basis van L is en $\underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n$ een orthonormale basis van L^\perp is.

Bewijs. Pas de uitbreidingsstelling toe en daarna het orthonormalisatieproces van Gram en Schmidt. \square

Gevolg 1. Is L een deelruimte van \mathbb{R}^n dan is elke $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ op eenduidige wijze te schrijven als $\underline{x} = \underline{y} + \underline{z}$ met $\underline{y} \in L$, $\underline{z} \in L^\perp$.

Gevolg 2. Is L een deelruimte van \mathbb{R}^n dan is

$$\dim L + \dim L^\perp = n ; (L^\perp)^\perp = L .$$

Stelling. Is L een k -dimensionale deelruimte van \mathbb{R}^n en $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ een orthonormale basis van L dan geldt voor alle $\underline{x} \in L$, $\underline{y} \in L$:

$$1) \quad \underline{x} = \sum_{i=1}^k (\underline{x}, \underline{v}_i) \underline{v}_i$$

$$2) \quad (\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^k (\underline{x}, \underline{v}_i) (\underline{y}, \underline{v}_i) \quad (\text{Parseval}) .$$

Bewijs. 1) Omdat $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ basis is kan \underline{x} geschreven worden als $\underline{x} = \sum_{i=1}^k x_i \underline{v}_i$.
Nu is

$$(\underline{x}, \underline{v}_j) = \left(\sum_{i=1}^k x_i \underline{v}_i, \underline{v}_j \right) = \sum_{i=1}^k x_i (\underline{v}_i, \underline{v}_j) = x_j \quad (j = 1, \dots, k) .$$

$$2) \quad (\underline{x}, \underline{y}) = \left(\underline{x}, \sum_{j=1}^k (\underline{y}, \underline{v}_j) \underline{v}_j \right) = \sum_{j=1}^k (\underline{x}, \underline{v}_j) (\underline{y}, \underline{v}_j) . \quad \square$$

De stelling van Parseval drukt uit dat als $[x_1, \dots, x_k]^T$ de kolom van \underline{x} is t.o.v. een orthonormale basis en $[y_1, \dots, y_k]^T$ de kolom van \underline{y} t.o.v. dezelfde orthonormale basis, voor het inwendig product geldt:

$$(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^k x_i y_i .$$

"Ook wat betreft het inwendig product is een k -dimensionale deelruimte van \mathbb{R}^n isomorf met \mathbb{R}^k ".

6.7. Lineaire afbeeldingen

6.7.1. Inleiding

In deze paragraaf zullen we een type afbeeldingen van vectorruimten in vectorruimten (genaamd lineaire afbeeldingen) bestuderen die de eigenschappen (1) uit 6.2.9 delen met de afbeelding van \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m die \underline{x} in $A\underline{x}$ overvoert. (Hierin is A een $(m \times n)$ -matrix). In 6.7.2 geven we de definitie, enkele eigenschappen en voorbeelden voor de situatie van willekeurige vectorruimten. In 6.7.3 zullen we laten zien dat elke lineaire afbeelding van \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m verkregen kan worden als vermenigvuldiging met een matrix; voor de bepaling van die matrix zullen we de rekenprocedure uit 6.6.4 gebruiken. Nummer 6.7.4 geeft een aantal uiterst belangrijke stellingen o.a. over de dimensies van de rijenruimte en kolommenruimte van een matrix; deze stellingen leren ons heel wat over stelsels vergelijkingen.

6.7.2. Lineaire afbeeldingen; definities; eigenschappen; voorbeelden

Definitie. Laat L en M vectorruimten zijn. Een afbeelding $T : L \rightarrow M$ heet lineair indien voor alle $\underline{x}, \underline{y} \in L$ en alle r uit \mathbb{R} geldt:

$$1) \quad T(\underline{x} + \underline{y}) = T\underline{x} + T\underline{y}$$

$$2) \quad T(r\underline{x}) = rT\underline{x} .$$

(Merk op dat we het beeld van \underline{x} meestal zonder haken noteren: $T\underline{x}$.)

Voorbeeld. 1) Zij $A^{(m \times n)}$ een matrix dan is $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$ een lineaire afbeelding van \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m . (Zie 6.2.9.)

Definitie. De verzameling $TL := \{T\underline{x} \mid \underline{x} \in L\} \subset M$ heet de beeldruimte van T . De verzameling $N(T) := \{\underline{x} \in L \mid T\underline{x} = \underline{0}\} \subset L$ heet de nulruimte van T (of ook wel de kern van T).

Een lineaire afbeelding van L in \mathbb{R} heet ook wel een lineaire functionaal.

Eigenschappen. Als $T : L \rightarrow M$ een lineaire afbeelding is, dan geldt:

- 1) $T(r_1 \underline{a}_1 + r_2 \underline{a}_2 + \dots + r_k \underline{a}_k) = r_1 T \underline{a}_1 + r_2 T \underline{a}_2 + \dots + r_k T \underline{a}_k$ ($\underline{a}_i \in L, r_i \in \mathbb{R}$)
in het bijzonder is $T \underline{0} = \underline{0}$ en $T(-\underline{a}) = -T \underline{a}$.
- 2) TL is een deelruimte van M .
- 3) $N(T)$ is een deelruimte van L .
- 4) T is dan en slechts dan injectief als $N(T) = \{\underline{0}\}$.
- 5) Is $\underline{a} \in L, \underline{b} \in M, T \underline{a} = \underline{b}$ dan is $\{\underline{x} \in L \mid T \underline{x} = \underline{b}\}$ de nevenruimte $\underline{a} + N(T)$.
- 6) Als T bijectief is dan is de inverse afbeelding $T^{-1} : M \rightarrow L$ lineair.
- 7) Als $S : M \rightarrow N$ een lineaire afbeelding van M in de vectorruimte N is, dan is de samengestelde afbeelding $S \circ T : L \rightarrow N$ lineair.

Alle bewijzen zijn eenvoudige verificaties analoog aan 6.2.9.

Voorbeelden. 2) Hoewel we ons spoedig tot \mathbb{R}^n zullen beperken geven we eerst een paar voorbeelden voor vectorruimten waarvan de elementen functies zijn. Dit onderstreept de algemeenheid van het begrip lineaire afbeelding.

$$Tf := \int_0^1 f(t) dt$$

definieert een lineaire functionaal op de vectorruimte van de continue functies.

Als $T_a f$ gedefinieerd wordt door $(T_a f)(x) := f(x - a)$ is T_a een lineaire afbeelding van de vectorruimte van alle functies op dezelfde vectorruimte.

Als $T_L f$ gedefinieerd wordt door

$$(T_L f)(x) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} dt$$

dan is T_L een lineaire afbeelding van een deelruimte van de vectorruimte van de functies op $[0, \infty)$ in de vectorruimte van de functies op $[0, \infty)$.

Als Df gedefinieerd wordt door $(Df)(x) = f'(x)$ dan is D een lineaire afbeelding van de vectorruimte der differentieerbare functies in de vectorruimte van alle functies.

- 3) De volgende voorbeelden zijn ontleend aan de meetkunde in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 .
 Zij V in \mathbb{R}^3 het vlak met vergelijking $(\underline{a}, \underline{x}) = 0$; gemakshalve nemen we aan dat de normaalvector \underline{a} de lengte 1 heeft dus $(\underline{a}, \underline{a}) = \underline{a}^T \underline{a} = 1$.
 De projectie van \underline{x} op V is $\underline{x} - (\underline{a}, \underline{x})\underline{a}$. De afbeelding $P_{\underline{a}} : \underline{x} \mapsto \underline{x} - (\underline{a}, \underline{x})\underline{a}$ is een lineaire afbeelding van \mathbb{R}^3 in \mathbb{R}^3 met V als beeldruimte en $\{r\underline{a} \mid r \in \mathbb{R}\}$ als nulruimte. We noemen $P_{\underline{a}}$ ook projectie. Omdat $(\underline{a}, \underline{x})\underline{a} = \underline{a}\underline{a}^T \underline{x}$ kunnen we $P_{\underline{a}}$ voorstellen als matrixvermenigvuldiging met $(I - \underline{a}\underline{a}^T)$.
 Voor $P_{\underline{a}} \circ P_{\underline{a}}$ geldt dan op grond van de associativiteit van de matrixvermenigvuldiging:

$$\begin{aligned} (P_{\underline{a}} \circ P_{\underline{a}})\underline{x} &= (I - \underline{a}\underline{a}^T)(I - \underline{a}\underline{a}^T)\underline{x} = (I - 2\underline{a}\underline{a}^T + \underline{a}\underline{a}^T \underline{a}\underline{a}^T)\underline{x} = \\ &= (I - \underline{a}\underline{a}^T)\underline{x} = P_{\underline{a}}\underline{x}. \end{aligned}$$

Dus $P_{\underline{a}} \circ P_{\underline{a}} = P_{\underline{a}}$; we noemen afbeeldingen met deze eigenschap idempotent.

- 4) Zij ℓ een rechte door $\underline{0}$ in \mathbb{R}^3 met parametervoorstelling $\underline{x} = \lambda \underline{b}$, waar gemakshalve $(\underline{b}, \underline{b}) = \underline{b}^T \underline{b} = 1$. $Q_{\underline{b}}$ is de projectie op ℓ ; dit is een lineaire afbeelding van \mathbb{R}^3 in \mathbb{R}^3 met ℓ als beeldruimte en het vlak V met vergelijking $(\underline{b}, \underline{x}) = 0$ als nulruimte.

Ook $Q_{\underline{b}}$ is als matrixvermenigvuldiging op te vatten want

$$Q_{\underline{b}}\underline{x} = (\underline{b}, \underline{x})\underline{b} = \underline{b}\underline{b}^T \underline{x}.$$

Er geldt: $Q_{\underline{b}} \circ Q_{\underline{b}} = Q_{\underline{b}}$, hetgeen meetkundig duidelijk is, maar ook volgt

$$\text{uit } (\underline{b}\underline{b}^T)(\underline{b}\underline{b}^T) = \underline{b}(\underline{b}^T \underline{b})\underline{b}^T = \underline{b}\underline{b}^T.$$

- 5) $S_{\underline{a}}$ is de spiegeling van \mathbb{R}^3 aan het vlak V met vergelijking $(\underline{a}, \underline{x}) = 0$; $(\underline{a}, \underline{a}) = 1$. $S_{\underline{a}}$ is een bijectieve lineaire afbeelding en $S_{\underline{a}}^{\leftarrow} = S_{\underline{a}}$ (afbeeldingen met deze eigenschap heten involuties). Dit laatste kunnen we ook met matrices bewijzen want

$$S_{\underline{a}}\underline{x} = \underline{x} - 2(\underline{a}, \underline{x})\underline{a} = (I - 2\underline{a}\underline{a}^T)\underline{x}$$

en

$$(I - 2\underline{a}\underline{a}^T)^2 = I - 4\underline{a}\underline{a}^T + 4\underline{a}\underline{a}^T \underline{a}\underline{a}^T = I.$$

6) $A_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zij gedefinieerd door $\underline{x} = [x, y]^T \mapsto [x + ay, y]^T$.

A_a is een lineaire afbeelding geheten afschuiving. Als matrixproduct:

$$A_a \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

7) De draaiing D_φ in \mathbb{R}^2 over een hoek φ om de oorsprong is een lineaire afbeelding. $D_\varphi^{-1} = D_{-\varphi}$; $D_\varphi \circ D_\psi = D_{\varphi+\psi}$.

Ook D_φ is als matrixvermenigvuldiging voor te stellen door:

$$D_\varphi \underline{x} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

6.7.3. De matrix van een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Elk van de voorbeelden 3 t/m 7 uit 6.7.2 bleek als een speciaal geval van voorbeeld 1) opgevat te kunnen worden. Dit geldt voor alle lineaire afbeeldingen van \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m .

Stelling. Laat $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineair zijn. Als voor de eenheidsvectoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ uit \mathbb{R}^n geldt:

$$A\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}; \quad A\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}; \quad \dots; \quad A\underline{e}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

Dan geldt voor elke \underline{x} uit \mathbb{R}^n dat

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Bewijs. Voor elke $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ geldt: $\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n$ zodat

$A\underline{x} = x_1 A\underline{e}_1 + x_2 A\underline{e}_2 + \dots + x_n A\underline{e}_n$, en wegens de definitie van matrixvermenigvuldiging is dit juist hetgeen te bewijzen is. \square

Gevolg. Voor elke lineaire functionaal $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is er een $\underline{a} = [a_1, \dots, a_n]^T \in \mathbb{R}^n$ zodat de functionaal is $x \mapsto (\underline{a}, x)$.

De stelling geeft aan hoe de matrix van een lineaire afbeelding opgebouwd wordt uit de beelden van de eenheidsvectoren. Als we de beelden van een andere basis geven, dan zullen we de matrix bepalen op de wijze als nu besproken aan de hand van een $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ afbeelding.

Voorbeeld 1. Laat van A gegeven zijn

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

We zullen door vegen de beelden van de eenheidsvectoren uit \mathbb{R}^3 bepalen. Gemakshalve schrijven we alles als rijen. Gegeven is:

$$\begin{aligned} [0 \ 1 \ 1]^T &\mapsto [1 \ 3 \ 10 \ 5]^T \\ [1 \ 1 \ 1]^T &\mapsto [2 \ 2 \ 8 \ 0]^T \\ [1 \ 0 \ 2]^T &\mapsto [3 \ 1 \ 6 \ 1]^T. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} [1 \ 1 \ 1]^T &\mapsto [2 \ 2 \ 8 \ 0]^T \\ [0 \ 1 \ 1]^T &\mapsto [1 \ 3 \ 10 \ 5]^T \\ [1 \ 0 \ 2]^T &\mapsto [3 \ 1 \ 6 \ 1]^T \end{aligned}$$

en dus:

$$\begin{aligned} [1 \ 1 \ 1]^T &\mapsto [2 \ 2 \ 8 \ 0]^T \\ [0 \ 1 \ 1]^T &\mapsto [1 \ 3 \ 10 \ 5]^T \\ [0 \ -1 \ 1]^T &\mapsto [1 \ -1 \ -2 \ 1]^T \end{aligned}$$

Verder vegend vinden we:

$$\begin{aligned} [1 \ 0 \ 0]^T &\mapsto [1 \ -1 \ -2 \ -5]^T \\ [0 \ 1 \ 1]^T &\mapsto [1 \ 3 \ 10 \ 5]^T \\ [0 \ 0 \ 2]^T &\mapsto [2 \ 2 \ 8 \ 6]^T \end{aligned}$$

vervolgens:

$$\begin{aligned} [1 \ 0 \ 0]^T &\mapsto [1 \ -1 \ -2 \ -5]^T \\ [0 \ 1 \ 1]^T &\mapsto [1 \ 3 \ 10 \ 5]^T \\ [0 \ 0 \ 1]^T &\mapsto [1 \ 1 \ 4 \ 3]^T \end{aligned}$$

tenslotte:

$$\begin{aligned} [1 \ 0 \ 0]^T &\mapsto [1 \ -1 \ -2 \ -5]^T \\ [0 \ 1 \ 0]^T &\mapsto [0 \ 2 \ 6 \ 2]^T \\ [0 \ 0 \ 1]^T &\mapsto [1 \ 1 \ 4 \ 3]^T \end{aligned}$$

De matrix van A is dus

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(controleer het antwoord).

Het is duidelijk dat we precies het rekenproces van 6.6.4 uitvoeren. Dit leidt tot het volgende programma voor de bepaling van de matrix van een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ als de beelden van een basis $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ van \mathbb{R}^n gegeven zijn.

Programma. Neem de gegeven basisvectoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ van \mathbb{R}^n als de rijvectoren van een matrix M, hun beelden als de overeenkomstige rijen van een matrix N. Bepaal de normaalvorm van $[M, N]$ (bloknotatie); deze is $[I, \tilde{N}]$. (Het eerste blok wordt I omdat we uitgingen van een basis van \mathbb{R}^n !) Nu is \tilde{N}^T de matrix van de gegeven lineaire afbeelding.

In ons voorbeeld:

$$\begin{aligned} [M, N] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} ; \\ [I, \tilde{N}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Voorbeeld 2. Om de matrix te bepalen van de projectie van \mathbb{R}^3 op het vlak $V : x + 2y + z = 0$ merken we op dat voor vectoren in V geldt $P\underline{x} = \underline{x}$, terwijl voor vectoren loodrecht op het vlak $P\underline{x} = \underline{0}$ is. Dus

$$P \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} ; \quad P \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Volgens het zoëven beschreven procédé is de matrix van P :

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix} .$$

We weten ook dat de matrix is $I - \underline{a}\underline{a}^T$ waarbij \underline{a} een vector loodrecht op V met $|\underline{a}| = 1$ is (4.5.1, voorbeeld 3). We vinden $\underline{a} = \lambda[1, 2, 1]^T$ met $\lambda^2 + 4\lambda^2 + \lambda^2 = 1$, $\lambda = 1/\sqrt{6}$. Dan is

$$\underline{a}\underline{a}^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [1, 2, 1] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} ,$$

hetgeen hetzelfde resultaat oplevert.

Opmerkingen. 1) Een lineaire afbeelding van een willekeurige n -dimensionale vectorruimte L in een m -dimensionale vectorruimte M is ook met een matrix te beschrijven. Kies daartoe bases in L en M en vervang iedere vector door zijn kolom t.o.v. de gekozen basis. De gegeven lineaire afbeelding bepaalt nu een $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ afbeelding van deze kolommen.

2) De matrix is afhankelijk van de gekozen basis. We beperken ons in dit college verder tot afbeeldingen van \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m die uitsluitend beschreven worden door hun matrices t.o.v. de standaardbases.

Bij een bestudering van de lineaire algebra die verder gaat dan onze eerste kennismaking zal veel aandacht besteed worden aan het bepalen van bases t.o.v. waarvan een lineaire afbeelding een "mooie" matrix heeft.

3) In dit college zullen we geen notationale onderscheid maken tussen de lineaire afbeelding en haar matrix. Door de afspraak dat we uitsluitend standaardbases gebruiken ligt de matrix éénduidig vast. Merk op dat de term beeldruimte in 6.5.5 terecht gebruikt is.

6.7.4. De rang van een matrix; dimensiestellingen

Definitie. Zij A een $(m \times n)$ -matrix. De rang van A is de dimensie van AIR^n . De rang is dus de dimensie van de kolommenruimte.

Stelling (Dimensiestelling). Zij $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineair, dan is

$$\dim N(A) + \dim \text{AIR}^n = n .$$

Bewijs. Daar $N(A) \subset \mathbb{R}^n$ geldt $k := \dim N(A) \leq n$. Als $k = n$ is $N(A) = \mathbb{R}^n$ en $A = [0]$ en $\dim \text{AIR}^n = 0$, klaar.

Stel $k < n$; laat $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k$ een basis zijn van $N(A)$, vul die aan (6.6.3.6) met $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-k}$ tot een basis van \mathbb{R}^n . Daar $A\underline{u}_1 = \dots = A\underline{u}_k = \underline{0}$, is

$$\text{AIR}^n = \langle A\underline{v}_1, \dots, A\underline{v}_{n-k} \rangle .$$

Het bewijs is geleverd als we hebben laten zien dat $A\underline{v}_1, \dots, A\underline{v}_{n-k}$ een onafhankelijk stelsel is.

Stel

$$r_1 A\underline{v}_1 + \dots + r_{n-k} A\underline{v}_{n-k} = \underline{0} ,$$

dan is

$$A(r_1 \underline{v}_1 + \dots + r_{n-k} \underline{v}_{n-k}) = \underline{0}$$

en dus

$$r_1 \underline{v}_1 + \dots + r_{n-k} \underline{v}_{n-k} \in N(A) .$$

Daar $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k$ een basis voor $N(A)$ is, is

$$r_1 \underline{v}_1 + \dots + r_{n-k} \underline{v}_{n-k} = s_1 \underline{u}_1 + \dots + s_k \underline{u}_k .$$

Hieruit volgt $0 = r_1 = \dots = r_{n-k}$ ($= s_1 = \dots = s_k$) omdat $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-k}$ een onafhankelijk stelsel is. □

Stelling. Zij A een $(m \times n)$ -matrix, dan is de dimensie van de rijenruimte gelijk aan de dimensie van de kolommenruimte.

Bewijs. Met 6.5.5 en 6.5.6 zien we dat de rijenruimte gelijk is aan $(N(A))^\perp$. Uit 6.6.5, gevolg 2 volgt dat $\dim(N(A))^\perp = n - \dim(N(A))$. Wegens de dimensiestelling is dit $\dim \mathbb{R}^n$. \square

Gevolg. De rang van een matrix is gelijk aan de rang van zijn normaalvorm.

Gevolg. Het getal r uit 6.6.4 is de rang van de matrix.

Gevolg. Voor de oplossingsruimte $N(A)$, van een homogeen stelsel vergelijkingen in n onbekenden, $Ax = 0$ geldt:

$$\dim N(A) = n - \text{rang } A .$$

6.8. Lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

6.8.1. Inleiding

De matrix van een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is vierkant. Voor zulke afbeeldingen en matrices kan men een aantal bijzondere begrippen en eigenschappen formuleren. In 6.8.2 houden we ons bezig met het verband tussen de inverse afbeelding A^\leftarrow van A , zo deze bestaat (zie 1.1) en de inverse matrix A^{-1} van A (zie 6.2.8.2). In 6.8.3 worden de reeds in 6.3.6 en 6.3.7 voorgekomen eigenwaarden nader bekeken. In 6.8.4 wordt een summiere behandeling gegeven van het begrip determinant. Dit begrip heeft vroeger in de lineaire algebra een belangrijke rol gespeeld. Tegenwoordig acht men determinanten van minder belang. In 6.8.5 tenslotte, zullen we spreken over orthogonale afbeeldingen, dat zijn afbeeldingen die de lengtes van vectoren niet veranderen. We zullen laten zien dat in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 orthogonale afbeeldingen draaiingen en spiegelingen zijn.

6.8.2. Inverteerbaarheid

Uit 6.7.2, eigenschap 4 en de dimensiestelling volgt dat een lineaire afbeelding van \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n dan en slechts dan injectief is als ze surjectief is. Zij A een bijectieve lineaire afbeelding van \mathbb{R}^n op \mathbb{R}^n . Deze afbeelding A heeft een inverse die weer lineair is. De matrix van deze inverse is de matrix A^{-1} waarvoor $A^{-1}A = I$ (dit volgt uit het feit dat de matrix van een samengestelde afbeelding het matrixproduct van de matrices is). Omdat voor afbeeldingen geldt: $(A^{\leftarrow})^{\leftarrow} = A$ is dan ook $AA^{-1} = I$, wat in 6.2.8.2 al aangekondigd is.

We sommen een aantal van de eigenschappen van $(n \times n)$ -matrices op:

- 1) A is inverteerbaar dan en slechts dan als $N(A) = \{0\}$.
- 2) A is inverteerbaar dan en slechts dan als $A\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.
- 3) A is inverteerbaar dan en slechts dan als $\text{rang}(A) = n$.
- 4) AB is inverteerbaar dan en slechts dan als A en B beide inverteerbaar zijn. In dat geval is $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Voor het bepalen van de inverse matrix is de procedure van 6.7.3 (en dus van 6.6.4 heel geschikt. We bespreken één voorbeeld.

Zij

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Als A inverteerbaar is vormen de kolommen een basis van \mathbb{R}^3 (dit is in ons voorbeeld inderdaad het geval). Voor de inverse matrix geldt nu:

$$A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dus

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

6.8.3. Eigenwaarden en eigenvectoren

Definitie. Zij $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineair. Een getal $\lambda \in \mathbb{R}$ heet een eigenwaarde van A indien er een $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} \neq \underline{0}$, bestaat zó dat $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$. Zo'n vector \underline{v} heet een eigenvector bij de eigenwaarde λ .

We spreken ook wel van eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix A .

We hebben al verschillende malen gezien hoe eigenwaarden en eigenvectoren in de toepassingen een rol spelen. Meetkundig zijn eigenvectoren vectoren $\underline{v} \neq \underline{0}$ waarvan het beeld op de lijn door $\underline{0}$ en \underline{v} ligt.

De volgende stellingen zijn eenvoudig te bewijzen.

Stelling. Als λ een eigenwaarde van $A^{(n \times n)}$ is, dan is $\{\underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{v} = \lambda\underline{v}\}$ een deelruimte van \mathbb{R}^n met positieve dimensie.

De deelruimte uit deze stelling heet de eigenruimte van A bij de eigenwaarde λ .

Stelling. Een getal λ is een eigenwaarde van A dan en slechts dan als $\dim N(A - \lambda I) > 0$ is. Alle vectoren $\neq \underline{0}$ uit $N(A - \lambda I)$ zijn eigenvectoren van A bij eigenwaarde λ .

Stelling. Zij $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ een lineair onafhankelijk stelsel van eigenvectoren van de matrix $A^{(n \times n)}$; $A\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$ ($i = 1, \dots, k$). Zij \underline{w} eveneens een eigenvector van A bij de eigenwaarde μ . Zij $\mu \neq \lambda_i$ ($i = 1, \dots, k$). Dan is $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{w}$ een lineair onafhankelijk stelsel.

Bewijs. Als $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{w}$ afhankelijk zou zijn dan zou \underline{w} een lineaire combinatie zijn van $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ (ga na!). Veronderstel dat $\underline{w} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k$; omdat $\underline{w} \neq \underline{0}$ (eigenvector!) is $[\alpha_1, \dots, \alpha_k] \neq [0, \dots, 0]$. Nu is $A\underline{w} = \alpha_1 A\underline{v}_1 + \dots + \alpha_k A\underline{v}_k$, dus $\mu \underline{w} = \alpha_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k \underline{v}_k$. Omdat $\mu \underline{w} = \alpha_1 \mu \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \mu \underline{v}_k$ is $\alpha_1 (\lambda_1 - \mu) \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \mu) \underline{v}_k = \underline{0}$ en in deze lineaire combinatie zijn niet alle coëfficiënten 0. Dit is in tegenspraak met de onafhankelijkheid van $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$. □

Gevolg. Een $(n \times n)$ -matrix heeft ten hoogste n verschillende eigenwaarden.

- Voorbeelden. 1) Voor de afbeelding $P_{\underline{a}}$ (6.7.2.3) zijn alle vectoren $\neq \underline{0}$ in het vlak $(\underline{a}, \underline{x}) = 0$ eigenvectoren bij eigenwaarde $+1$; alle vectoren $\lambda \underline{a}$ met $\lambda \neq 0$ zijn eigenvectoren bij eigenwaarden 0 . Uit de voorafgaande stelling volgt dat er geen andere eigenwaarden en eigenvectoren zijn.
- 2) $Q_{\underline{b}}$ uit 6.7.2.4 heeft de eigenwaarden 0 en 1 . De eigenruimte bij 0 is het vlak $(\underline{b}, \underline{x}) = 0$; de eigenruimte bij 1 is $\langle \underline{b} \rangle$.
- 3) De spiegeling $S_{\underline{a}}$ uit 6.7.2.5 heeft eigenwaarden 1 (met als eigenruimte het spiegelvlak) en -1 (met als eigenruimte $\langle \underline{a} \rangle$).
- 4) Voor de afschuiving $A_{\underline{a}}$ uit 6.7.2.6 is 1 de enige eigenwaarde met $\langle \underline{e}_1 \rangle$ als bijbehorende eigenruimte (ga na).
- 5) De draaiing D_{φ} (6.7.2.7) heeft geen eigenvectoren en eigenwaarden tenzij $\varphi = k\pi$ (k geheel).
- 6) Als $N(A) \neq \{0\}$ is $N(A)$ eigenruimte bij de eigenwaarde 0 .

Het vinden van eigenwaarden en eigenvectoren van $A^{(n \times n)} = [a_{ij}]$ komt neer op het vinden van een λ en een $\underline{v} \neq \underline{0}$ die voldoen aan:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 + \dots + a_{2n}v_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)v_n = 0. \end{cases}$$

Een rekentechniek voor de uitvoering hiervan wordt besproken in 6.8.4.

6.8.4. Determinanten

De determinant van een vierkante matrix A is een getal, $\det A$, dat we aangeven door het blok getallen tussen rechte strepen te zetten.

De definitie van de determinant geven we recursief naar het aantal rijen en kolommen.

i) Als $A = [a]$ is $\det A = a$.

ii) Stel dat we voor elke $(n \times n)$ -matrix een determinant hebben berekend, dan definiëren we:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n+1,1} & \cdot & & \cdot & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} :=$$

$$= a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} - \cdots + (-1)^n a_{1,n+1}D_{1,n+1},$$

waarin D_{ij} de determinant is van de $(n \times n)$ -matrix die uit A ontstaat door de i -de rij en de j -de kolom weg te laten.

Enkele gevolgen:

a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

b) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

Dit laatste resultaat staat bekend als de regel van Sarrus.

De meetkundige betekenis van de $\det[\underline{a}, \underline{b}]$ is dat ze de oppervlakte voorstelt van het parallellogram waarvan de meetkundige vectoren \underline{a} en \underline{b} aanliggende zijden zijn (of het tegengestelde daarvan). Merk op dat

$$\det[\underline{e}_1, \underline{e}_2] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Evenzo stelt $\det[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]$, weer afgezien van een eventuele factor -1 , de inhoud van een parallelipedum voor. Merk op dat

$$\det[\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Het is voor determinanten met veel rijen en kolommen erg omslachtig de berekening volgens de definitie te verrichten. Immers het aantal termen dat men zo krijgt in een $(n \times n)$ determinant is $n!$.

Stelling. 1) $\det A = \det A^T$.

2) $\det AB = \det A \det B$.

Het bewijs van deze stelling laten we achterwege. Alle belangrijke eigenschappen van determinanten volgen nu zonder moeite:

Stelling. 1) $\det A = -\det B$ als B uit A ontstaat door verwisseling van twee rijen of kolommen.

2) $\det A = \det B$ als de i-de rij (of kolom) van B gelijk is aan de som van de i-de rij (of kolom) van A en p maal de j-de rij (of kolom) van A ($p \in \mathbb{R}$, $i \neq j$) terwijl de overige rijen (kolommen) van B gelijk zijn aan de overeenkomstige rijen (kolommen) van A.

3) $\det A = k \det B$ als één rij (of kolom) van A gelijk is aan k maal de overeenkomstige rij (of kolom) van B, terwijl de overige rijen (kolommen) hetzelfde zijn.

4) $\det A^{(n \times n)} \neq 0$ dan en slechts dan als $\text{rang}(A) = n$, dus als de kolommen van A een basis van \mathbb{R}^n vormen.

5) $\det(pA^{(n \times n)}) = p^n \det A$.

"Bewijs". 1) Verandering van de volgorde van de rijen in een matrix kan beschouwd worden als linksvermenigvuldiging met een permutatie matrix. Verwisseling van de kolommen ontstaat door rechtsvermenigvuldiging met een permutatiematrix; ook kan men kolommen in rijen overvoeren door transpositie en gebruiken dat $\det A^T = \det A$. We volstaan met één voorbeeld.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

$$P \quad A \quad = \quad B$$

$$\det P \cdot \det A = \det B ; \text{ en } \det P = -1 .$$

2) We volstaan weer met een voorbeeld.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1+kc_1 & b_2+kc_2 & b_3+kc_3 & b_4+kc_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

$$T \quad A \quad = \quad B$$

det T . det A = det B en det T = 1 .

Evenzo

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ka_2+a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & kb_2+b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & kc_2+c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & kd_2+d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 & kb_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & ka_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & kb_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & kc_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & kd_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

en

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = k .$$

4) Als de kolommen (rijen) afhankelijk zijn is een kolom (rij) lineaire combinatie van de overigen. Herhaalde toepassing van 2) geeft een determinant waarvan een kolom of rij $\underline{0}$ of $\underline{0}^T$ is. Uit 3) volgt dat de determinant 0 is.

Als de kolommen (rijen) van A onafhankelijk zijn, kan A door bewerkingen als in 1) en 2) overgevoerd worden in een diagonaalmatrix met elementen $\neq 0$ op de diagonaal. Van zo'n matrix is de determinant het product van de diagonaalelementen.

5) Herhaalde toepassing van 3). □

Het berekenen van determinanten gaat nu het handigst door gebruikmakend van de regels 1, 2 en 3 en transponeren zoveel mogelijk nullen op de eerste rij te krijgen.

Voorbeeld 1.

$$\begin{array}{cccc}
 \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} & \underline{d} \\
 \underline{a} & \underline{b} - 2\underline{a} & \underline{c} - 3\underline{a} & \underline{d} - 4\underline{a}
 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{cccc}
 \underline{a} & \underline{p} & \underline{q} & \underline{r} \\
 \underline{a} - \underline{p} & \underline{p} & \underline{q} - \underline{p} & \underline{r} - \underline{p}
 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Stelling. Als A een $(n \times n)$ -matrix is, dan heeft $A\underline{x} = \underline{0}$ dan en slechts dan een van $\underline{0}$ verschillende oplossing als $\det A = 0$.

Het belang van determinanten is voor ons gelegen in de volgende stelling.

Stelling. Een getal λ is een eigenwaarde van A dan en slechts dan als

$$\det(A - \lambda I) = 0 .$$

Deze vergelijking in λ (van de n -de graad!) heet de karakteristieke vergelijking van A .

Voorbeelden. 2) Voor de afschuiving $A_{\underline{a}}$ uit 6.7.2, voorbeeld 6 geldt:

$$\det(A_{\underline{a}} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & a \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 .$$

3) Voor de spiegeling $S_{\underline{a}}$ uit 6.7.2, voorbeeld 5 geldt:

$$S_{\underline{a}} = \begin{vmatrix} 1 - 2a_1^2 & -2a_2a_1 & -2a_3a_1 \\ -2a_1a_2 & 1 - 2a_2^2 & -2a_3a_2 \\ -2a_1a_3 & -2a_2a_3 & 1 - 2a_3^2 \end{vmatrix}$$

en

$$\begin{aligned} \det(S_{\underline{a}} - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - 2a_1^2 - \lambda & -2a_1a_2 & -2a_1a_3 \\ -2a_1a_2 & 1 - 2a_2^2 - \lambda & -2a_2a_3 \\ -2a_1a_3 & -2a_2a_3 & 1 - 2a_3^2 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1 - 2a_1^2 - \lambda)(1 - 2a_2^2 - \lambda)(1 - 2a_3^2 - \lambda) - 8a_1^2a_2^2a_3^2 - 8a_1^2a_2^2a_3^2 + \\ &- 4a_2^2a_3^2(1 - 2a_1^2 - \lambda) - 4a_1^2a_3^2(1 - 2a_2^2 - \lambda) - 4a_1^2a_2^2(1 - 2a_3^2 - \lambda) = \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2(3 - 2a_1^2 - 2a_2^2 - 2a_3^2) - \lambda(3 - 4a_1^2 - 4a_2^2 - 4a_3^2) + \\ &+ 1 - 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) . \end{aligned}$$

In verband met $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\underline{a}|^2 = 1$ is

$$\det(S_{\underline{a}} - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) .$$

De eigenwaarden zijn dus 1 en -1.

4) Het werken met determinanten wordt ook geïllustreerd door de volgende berekening. Uit $S_{\underline{a}} = I - 2Q_{\underline{a}}$ (6.7.2, voorbeeld 4) volgt:

$$\det(S_{\underline{a}} - \lambda I) = \det((1 - \lambda)I - 2Q_{\underline{a}}) = 8 \det\left(\frac{1 - \lambda}{2} I - Q_{\underline{a}}\right).$$

Dus λ is een eigenwaarde van $S_{\underline{a}}$ dan en slechts dan als $\frac{1}{2}(1 - \lambda)$ eigenwaarde is van $Q_{\underline{a}}$. Dit is in overeenstemming met het feit dat 0 en 1 de eigenwaarden zijn van $Q_{\underline{a}}$ en 1 en -1 die van $S_{\underline{a}}$.

De beide volgende toepassingen zijn voornamelijk van theoretisch belang.

Stelling (Regel van Cramer). Als $A^{(n \times n)} \underline{x} = \underline{b}$ een stelsel vergelijkingen voorstelt en $A = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n]$ terwijl $\text{rang } A = n$, dan is

$$x_j = \frac{\det[\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{j-1}, \underline{b}, \underline{a}_{j+1}, \dots, \underline{a}_n]}{\det A}.$$

Bewijs. Het stelsel is oplosbaar zodat voor de oplossing $[x_1, \dots, x_n]^T$ geldt

$$x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{b}.$$

Dan is

$$\begin{aligned} \det[\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{j-1}, \underline{b}, \underline{a}_{j+1}, \dots, \underline{a}_n] &= \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \det[\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{j-1}, \underline{a}_k, \underline{a}_{j+1}, \dots, \underline{a}_n] = \\ &= x_j \det[\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{j-1}, \underline{a}_j, \underline{a}_{j+1}, \dots, \underline{a}_n] = \\ &= x_j \det A, \text{ met } \det A \neq 0. \quad \square \end{aligned}$$

Gevolg. Als A een $(n \times n)$ -matrix is en $\det A \neq 0$, zodat de rijen van A onafhankelijk zijn, dan kunnen we de vraag naar een matrix

$$X = [\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n]$$

met $AX = I$, dat wil zeggen de vraag naar de inverse van A ook aldus beantwoorden.

Uit $AX = I$ volgt:

$$[Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n] = [e_1, \dots, e_n]$$

zodat

$$\forall_{j=1, \dots, n} Ax_j = e_j .$$

Met

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

geldt volgens de regel van Cramer:

$$x_{ij} = \frac{\det[a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n]}{\det A}$$

(a_1, \dots, a_n stellen weer de kolommen van A voor), zodat

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det D_{ij}}{\det A} ,$$

waarbij D_{ij} de matrix is die uit A ontstaat door weglating van de i-de kolom en de j-de rij. Daarmee is de inverse van A bepaald.

6.8.5. Orthogonale afbeeldingen

Definitie. Een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (een $(n \times n)$ -matrix A) heet orthogonaal indien voor alle \underline{x} uit \mathbb{R}^n geldt

$$|Ax| = |\underline{x}| .$$

Orthogonale afbeeldingen zijn afbeeldingen die "lengtebehoudend zijn". Spiegelingen en draaiingen zijn voorbeelden van orthogonale afbeeldingen. We zien onmiddellijk dat een orthogonale afbeelding geen andere eigenwaarden kan hebben dan +1 en -1.

Stelling (karakterisering van orthogonaliteit). Zij $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineair; de volgende beweringen zijn gelijkwaardig:

- a) A is orthogonaal;
- b) voor alle $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ geldt $(Ax, Ay) = (\underline{x}, \underline{y})$;

- c) A is inverteerbaar en $A^{-1} = A^T$;
- d) $AA^T = I$;
- e) $A^T A = I$;
- f) de rijen van A vormen een orthonormaal stelsel;
- g) de kolommen van A vormen een orthonormaal stelsel.

Bewijs. Uit a) volgt b) want $(\underline{x}, \underline{x}) + 2(\underline{x}, \underline{y}) + (\underline{y}, \underline{y}) = (\underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y}) =$
 $= (A(\underline{x} + \underline{y}), A(\underline{x} + \underline{y})) = (A\underline{x}, A\underline{x}) + 2(A\underline{x}, A\underline{y}) + (A\underline{y}, A\underline{y}) = (\underline{x}, \underline{x}) +$
 $+ 2(A\underline{x}, A\underline{y}) + (\underline{y}, \underline{y})$.

Uit b) volgt c) want $(\underline{x}, \underline{y}) = (A\underline{x}, A\underline{y}) = (\underline{x}, A^T A \underline{y})$ (zie 6.2.7); dus voor alle \underline{x} en \underline{y} geldt $(\underline{x}, (I - A^T A) \underline{y}) = 0$ derhalve $I - A^T A = \mathcal{O}$. Alle overige onderdelen van het bewijs zijn triviaal. □

Stelling. Is A orthogonaal, dan is $|\det A| = 1$.

Bewijs. $A^T A = I, (\det A)^2 = 1$. □

Voorbeeld 1. Iedere orthogonale afbeelding van \mathbb{R}^2 op \mathbb{R}^2 is of een draaiing om $\underline{0}$ of een spiegeling ten opzichte van een rechte.

Bewijs. Zij

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

met $a^2 + b^2 = 1, ac + bd = 0, c^2 + d^2 = 1$ en $\Delta := \det A = ad - bc = \pm 1$.

Uit $a^2 + b^2 = 1$ volgt dat precies één $\alpha \in [0, 2\pi)$ voldoet aan

$$\cos \alpha = a \quad \text{en} \quad \sin \alpha = b,$$

en uit

$$\begin{cases} c \cos \alpha + d \sin \alpha = 0 \\ -c \sin \alpha + d \cos \alpha = \Delta \end{cases}$$

volgt

$$c = -\Delta \sin \alpha, \quad d = \Delta \cos \alpha$$

zodat

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\Delta \sin \alpha \\ \sin \alpha & \Delta \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Als $\Delta = 1$ dan is $A = D_\alpha$.

Als $\Delta = -1$ dan is

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

en A is de spiegeling aan de rechte $\underline{x} = \lambda \underline{a}$ met $\underline{a} = [\cos \frac{1}{2}\alpha, \sin \frac{1}{2}\alpha]^T$.

Voorbeeld 2. In \mathbb{R}^3 zijn er meer typen orthogonale afbeeldingen. We sommen nu de mogelijkheden op. Omdat de karakteristieke vergelijking van de derde graad is, is er steeds tenminste één eigenwaarde.

1) $\lambda = 1$ is een eigenwaarde.

a) de eigenruimte bij $\lambda = 1$ is driedimensionaal: $A = I$

b) de eigenruimte bij $\lambda = 1$ (we noemen deze E_1) is tweedimensionaal uit de orthogonaliteit volgt dan dat E_1^\perp eigenruimte bij $\lambda = -1$ is; A is spiegeling aan het vlak E_1 .

c) de eigenruimte, E_1 , bij $\lambda = 1$ is één dimensionaal. Dan geldt dat $AE_1^\perp = E_1^\perp$; de restrictie van A tot E_1^\perp is een orthogonale afbeelding van een tweedimensionale ruimte die geen eigenwaarde $+1$ heeft. A is een draaiing om de lijn E_1 .

2) $\lambda = -1$ is de enige eigenwaarde.

a) de eigenruimte, E_{-1} , bij $\lambda = -1$ is driedimensionaal; $A = -I$, spiegeling t.o.v. het punt $\underline{0}$.

b) de eigenruimte, E_{-1} , bij $\lambda = -1$ is één dimensionaal ($\dim E_{-1} = 2$ is uitgesloten; vergelijk met 1b). A is een draaiing om de lijn E_{-1} gecombineerd met een spiegeling t.o.v. het vlak E_{-1}^\perp .

6.9. Lineaire vergelijkingen en ongelijkheden

6.9.1. Inleiding

Deze paragraaf bestaat uit vijf delen. In 6.9.2 en 6.9.3 vatten we samen alles wat we over homogene en inhomogene stelsels geleerd hebben. In 6.9.4 gaat het over het vinden van oplossingen van een stelsel waarbij geen van de veranderlijken een negatieve waarde aanneemt. Enkele opmerkingen over lineaire ongelijkheden vormen de inhoud van 6.9.5, terwijl in 6.9.6 iets gezegd wordt over zgn. lineaire programmering.

6.9.2. Homogene lineaire vergelijkingen

We beschouwen het stelsel:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Zij $A = A^{(m \times n)} = [a_{ij}]$; zij $\underline{a}_1 = [a_{11}, \dots, a_{1n}]^T, \dots, \underline{a}_m = [a_{m1}, \dots, a_{mn}]^T$. We hebben al gezien dat de oplossingen van (1) een deelruimte van \mathbb{R}^n vormen, nl. $N(A) = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m \rangle^\perp$. Er is een van $\underline{0}$ verschillende oplossing dan en slechts dan als $\text{rang } A < n$, immers $\dim N(A) + \text{rang } A = n$. Het bepalen van de oplossing van $A\underline{x} = \underline{0}$ gaat met behulp van de algoritme van 6.6.4.

Stelling. Laat \tilde{A} de normaalvorm zijn van A , dan is $N(\tilde{A}) = N(A)$.

Bewijs. De rijen van \tilde{A} en A spannen dezelfde deelruimte op. □

Laat A een $(m \times n)$ -matrix zijn in normaalvorm. Laat k_1, k_2, \dots, k_r de kolommen zijn waarin de eenheidsvectoren uit \mathbb{R}^m staan, dan vindt men elke oplossing van $A\underline{x} = \underline{0}$ door aan alle x_1, \dots, x_n met uitzondering van x_{k_1}, \dots, x_{k_r} waarden toe te kennen en de x_{k_1}, \dots, x_{k_r} uit te rekenen.

Voorbeeld.

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + x_5 + x_7 = 0 \\ x_4 + x_6 + 2x_7 = 0 \\ x_7 + x_7 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0. \end{cases}$$

Nu is:

$$A = \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$k_1 = 2, k_2 = 4, k_3 = 6; \text{rang } \tilde{A} = 3, \text{ dus } \dim N(\tilde{A}) = 7 - 3 = 4.$

De oplossing van $A\underline{x} = \underline{0}$ is nu $x_1 = \lambda_1, x_3 = \lambda_2, x_5 = \lambda_3, x_7 = \lambda_4$, derhalve $x_2 = -2\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, x_4 = -\lambda_4, x_6 = -\lambda_4.$

Dit kunnen we ook schrijven als:

$$\underline{x} = \lambda_1 [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T + \lambda_2 [0, -2, 1, 0, 0, 0, 0]^T + \\ + \lambda_3 [0, -1, 0, 0, 1, 0, 0]^T + \lambda_4 [0, -1, 0, -1, 0, -1, 1]^T.$$

Uit het feit dat $\dim N(A) = 4$ volgt ook dat we de algemene oplossing hebben.

We formuleren het nog eens anders:

Laat A een $(m \times n)$ -matrix zijn. Een basis voor de oplossingsruimte van $A\underline{x} = \underline{0}$ krijgt men aldus:

1) Breng A op normaalvorm.

2) Splits de veranderlijken in twee groepen: x_{k_1}, \dots, x_{k_r} en de overige, zeg:

$$x_{l_1}, \dots, x_{l_{n-r}}.$$

3) Voor elke $i \in \{1, 2, \dots, n-r\}$ neemt men $x_{l_i} = 1, x_{l_j} = 0$ ($j \neq i$) en berekent men x_{k_1}, \dots, x_{k_r} . Zo verkrijgt men telkens een oplossing.

4) De $n - r$ oplossingen die men zo vindt vormen een basis van $N(A)$.

6.9.3. Inhomogene lineaire vergelijkingen

We beschouwen het stelsel:

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Met A , $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ als in 6.9.2 $\underline{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$ en $\underline{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ hebben we (2) leren schrijven als $A\underline{x} = \underline{b}$. Men noemt A en $[A, \underline{b}]$ resp. de coëfficiëntenmatrix en de aangevulde matrix van (2).

Door herhaling van reeds gegeven argumenten kan men alle onderstaande beweringen bewijzen.

- a) Het stelsel (2) is dan en slechts dan niet-strijdig (d.w.z. oplosbaar) indien $\underline{b} \in \text{AKR}^n$.
- b) Het stelsel (2) is dan en slechts dan oplosbaar indien $\text{rang } A = \text{rang}[A, \underline{b}]$.
- c) Als $A\underline{a} = \underline{b}$ dan is het stelsel (2) oplosbaar en de algemene oplossing is $\underline{x} = \underline{a} + N(A)$, (m.a.w. $\underline{a} + N(A)$ is de verzameling van alle oplossingen).
- d) Als (2) oplosbaar is, is de dimensie van de nevenruimte der oplossingen (gelijk aan $\dim N(A)$) gelijk aan: $n - \text{rang } A$.
- e) Als $[\tilde{A}, \tilde{\underline{b}}]$ de normaalvorm is van $[A, \underline{b}]$ dan hebben $\tilde{A}\underline{x} = \tilde{\underline{b}}$ en $A\underline{x} = \underline{b}$ dezelfde oplossingen.
- f) Als $n = m$ en A is een injectie (d.w.z. $N(A) = \{0\}$) dan is $A\underline{x} = \underline{b}$ éénduidig oplosbaar met oplossing $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$.

Uit bewering e) volgt tevens een methode om het stelsel (2) op te lossen.

- 1) Breng $[A, \underline{b}]$ op normaalvorm. Er zijn nu twee mogelijkheden:
 - i) $k_r = n + 1$ en $\text{rang}[A, \underline{b}] > \text{rang } A$ en het stelsel is strijdig.
 - ii) $k_r \leq n$ en $\text{rang}[A, \underline{b}] = \text{rang } A$; het stelsel is oplosbaar.
- 2) Laat het stelsel oplosbaar zijn en $[\tilde{A}, \tilde{\underline{b}}]$ de normaalvorm zijn van de aangevulde matrix, dan is $\tilde{\underline{b}} = [\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_r, 0, \dots, 0]^T$.
Is nu $r = n$ dan is het stelsel eenduidig oplosbaar, is $r < n$ dan is er een $(n - r)$ dimensionale nevenruimte van oplossingen. Op grond van c) is het voldoende één oplossing aan te geven en verder $N(A)$ volgens 6.9.2 te bepalen (dit is als \tilde{A} bekend is, niet veel werk meer). Eén oplossing is $x_{k_1} = \tilde{b}_1, x_{k_2} = \tilde{b}_2, \dots, x_{k_r} = \tilde{b}_r$ en de overige x -en gelijk aan 0.

Voorbeelden.

$$1) \quad \begin{cases} x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$[A, \underline{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{A}, \tilde{\underline{b}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Oplossing: $x_1 = -2$, $x_2 = 6$, $x_3 = 4$ of $\underline{x} = [-2, 6, 4]^T$.

$$2) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$[A, \underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{A}, \tilde{\underline{b}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{rang}[\tilde{A}, \tilde{\underline{b}}] > \text{rang } \tilde{A}$. Het stelsel is strijdig; er zijn geen oplossingen.

$$3) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$[A, \underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{A}, \tilde{\underline{b}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 8 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rang}[\tilde{A}, \tilde{b}] = \text{rang } \tilde{A} = 2$. Dimensie van de nevenruimte der oplossingen:
 $4 - 2 = 2$.

Een oplossing: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = x_4 = 0$.

Algemene oplossing:

$$\underline{x} = [-1, 1, 0, 0]^T + \lambda[13, -8, 1, 0]^T + \mu[-9, 5, 0, 1]^T.$$

6.9.4. Positieve oplossingen van stelsels lineaire vergelijkingen

In veel van de toepassingen van stelsels $A\underline{x} = \underline{b}$ gaat het er niet om de algemene oplossing te vinden, maar is men slechts geïnteresseerd in positieve oplossingen, d.w.z. oplossingen die voldoen aan $\underline{x} \geq 0$ (dus $x_i \geq 0$ voor $i = 1, \dots, n$). Als voorbereiding op het bestuderen van positieve oplossingen dienen de volgende beschouwingen over zgn. convexe verzamelingen.

6.9.4.1. Definitie. Een vector $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ heet een convexe combinatie van \underline{y} en \underline{z} indien er een getal λ bestaat met $0 \leq \lambda \leq 1$, zó dat:

$$\underline{x} = \lambda \underline{y} + (1 - \lambda) \underline{z}.$$

De verzameling van alle convexe combinaties van \underline{y} en \underline{z} noemen we het segment tussen \underline{y} en \underline{z} .

6.9.4.2. Definitie. Een deelverzameling U van \mathbb{R}^n heet convex indien voor elke $\underline{y} \in U$ en elke $\underline{z} \in U$ en elke $\lambda \in [0, 1]$ geldt:

$$\lambda \underline{y} + (1 - \lambda) \underline{z} \in U.$$

Voorbeelden van convexe verzamelingen

- 1) In \mathbb{R}^2 is de cirkelschijf $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ convex.
- 2) Het binnengebied van een driehoek in \mathbb{R}^2 en van een viervlak in \mathbb{R}^3 is convex.
- 3) In \mathbb{R}^n is $\{\underline{x} \mid \underline{x} \geq 0\}$ convex.
- 4) Zij $\underline{a} \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}$; de verzamelingen $\{\underline{x} \mid (\underline{a}, \underline{x}) > r\}$ en $\{\underline{x} \mid (\underline{a}, \underline{x}) \geq r\}$ zijn convexe verzamelingen (geheten open en gesloten halfruimten).

Opmerking. Het verband tussen de convexe functies uit hoofdstuk 2 en convexe verzamelingen wordt gegeven door de volgende eigenschap.

Zij V een interval in \mathbb{R} dan is $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ dan en slechts dan een convexe functie als $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in V; y \geq f(x)\}$ een convexe verzameling is.

6.9.4.3. Definitie. Laat $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n \in \mathbb{R}^n$; \underline{z} heet een convexe combinatie van $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ indien $\underline{z} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_n \underline{x}_n$ met $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$ en $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$.

Eigenschappen. 1) Als U_1 en U_2 convex zijn, dan is $U_1 \cap U_2$ convex.

De doorsnede van een willekeurige collectie convexe verzamelingen is convex.

2) Iedere nevenruimte (en in het bijzonder iedere deelruimte) is convex.

3) Als U convex is en als $\underline{x}_1 \in U, \dots, \underline{x}_k \in U$, dan ligt ook elke convexe combinatie van $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ in U .

Bewijs. Voor $k = 2$ is dit de definitie van convexe verzameling.

Laat bewezen zijn dat iedere convexe combinatie van een $(k - 1)$ -tal elementen uit U in U ligt. Zij $\underline{x} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_k \underline{x}_k$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$; als $\lambda_1 = 1$ zijn de overige $\lambda_2, \dots, \lambda_k$ gelijk 0 en is $\underline{x} \in U$, anders is

$$\underline{x} = \lambda_1 \underline{x}_1 + (1 - \lambda_1) \left[\frac{\lambda_2}{1 - \lambda_1} \underline{x}_2 + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_1} \underline{x}_k \right] =: \lambda_1 \underline{x}_1 + (1 - \lambda_1) \underline{y} .$$

Daar $\underline{y} \in U$ krachtens aanname, is $\underline{x} \in U$. □

4) Bij iedere verzameling V is er een kleinste convexe verzameling die V bevat; dit is de doorsnede van alle convexe verzamelingen die V bevatten.

Notatie: $C(V)$; naam: convexe omhulsel van V .

5) Als $V = \{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k\}$, dan is

$$C(V) = \{ \lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_k \underline{x}_k \mid \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 \} .$$

Bewijs. Merk op dat alle convexe combinaties van eindig veel vectoren een convexe verzameling vormen. □

Let op de analogie tussen $C(V)$ en $\langle V \rangle$. In plaats van $C(\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k\})$ schrijven we $C(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. De verzameling $C(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$ heet het convexe polytoop opgespannen door $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$.

- 6) Een convex polytoop is begrensd. (Een verzameling $V \subset \mathbb{R}^n$ heet begrensd als er een $M \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $|\underline{x}| \leq M$ voor alle $\underline{x} \in V$; n.b. \emptyset is begrensd.)
- 7) Als $\underline{x} \in C(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$ dan is $C(\underline{x}, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k) = C(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$.
- 8) Er bestaat een eenduidig bepaalde verzameling $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_\ell\} \subset \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k\}$ zó dat:
 - i) $C(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_\ell) = C(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$.
 - ii) Geen der \underline{b}_i is gelegen in het convexe polytoop opgespannen door de overige \underline{b} 's.

Bewijs. Probeer $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ achtereenvolgens weg te laten. □

De \underline{b}_i heten de hoekpunten van het polytoop.

- 9) $\{\underline{x} \mid \underline{x} \geq 0, x_1 + \dots + x_n = 1\}$ is een convexe polytoop met hoekpunten $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$.
- 10) Een convexe combinatie van convexe combinaties van $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ is zelf een convexe combinatie van $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$.

6.9.4.4. Definitie. Zij U een convexe verzameling. Een vector $\underline{x} \in U$ heet een extreem element van U als uit $\underline{x} = \lambda \underline{y} + (1 - \lambda) \underline{z}$, $\underline{y} \in U$, $\underline{z} \in U$, $\underline{y} \neq \underline{z}$, volgt $\lambda = 1$ en $\underline{x} = \underline{y}$ of $\lambda = 0$ en $\underline{x} = \underline{z}$.

We kunnen het ook zó formuleren: \underline{x} is extreem element als uit $\underline{x} = \alpha \underline{y} + (1 - \alpha) \underline{z}$, $\underline{y} \in U$, $\underline{z} \in U$, $0 < \alpha < 1$, volgt: $\underline{x} = \underline{y} = \underline{z}$; of \underline{x} is extreem element als \underline{x} niet tussenpunt is van een segment in U ; of als \underline{x} geen convexe combinatie is van twee andere elementen van U ; of \underline{x} is een extreem element van U als $U \setminus \{\underline{x}\}$ convex is.

- Voorbeelden. 5) Open en gesloten halfruimten hebben geen extreme elementen.
6) De hoekpunten van een convex polytoop zijn extreme elementen.

6.9.4.5. Stelling. De positieve oplossingen van $A\underline{x} = \underline{b}$ vormen een convexe verzameling.

Bewijs. De verzameling van positieve oplossingen kan leeg zijn. De lege verzameling is convex. Zijn \underline{y} en \underline{z} positieve oplossingen en is $0 \leq \lambda \leq 1$, dan is ook $\lambda \underline{y} + (1 - \lambda) \underline{z}$ een positieve oplossing. \square

Voorbeeld. 7) De verzameling, V , van de positieve oplossingen van $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ in \mathbb{R}^2 kan de volgende gedaanten hebben:

- i) Als $a > 0$, $b > 0$ dan is V begrensd met twee extreme elementen.
- ii) Als $a > 0$, $b < 0$ dan is V niet begrensd en V heeft slechts één extreem element.
- iii) Als $a < 0$, $b < 0$ dan is $V = \emptyset$.

Laat A een $(m \times n)$ -matrix zijn, en laat $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ de kolomvectoren van A zijn zodat $A\underline{x} = \underline{b}$ te schrijven is als

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{b}.$$

De extreme elementen van de verzameling der positieve oplossingen heten extreme oplossingen.

6.9.4.6. Stelling. Zij $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_p, 0, 0, \dots, 0]^T$ met $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_p > 0$ een positieve oplossing van $A\underline{x} = \underline{b}$. Nu is \underline{x} een extreme oplossing dan en slechts dan als $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$ een onafhankelijk stelsel is.

Bewijs. i) Veronderstel dat $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$ onafhankelijk is en dat

$\underline{x} = \lambda_0 \underline{u} + (1 - \lambda_0) \underline{v}$ voor zekere λ_0 met $0 < \lambda_0 < 1$ en positieve oplossingen \underline{u} en \underline{v} .

Uit $\lambda_0 u_k + (1 - \lambda_0) v_k = 0$, $u_k \geq 0$, $v_k \geq 0$, volgt $u_k = 0$, $v_k = 0$.

We hebben dus: $u_{p+1} = \dots = u_n = 0$, $v_{p+1} = \dots = v_n = 0$. Nu is

$$\begin{aligned} x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_p \underline{a}_p &= \underline{b} \\ u_1 \underline{a}_1 + \dots + u_p \underline{a}_p &= \underline{b} \\ v_1 \underline{a}_1 + \dots + v_p \underline{a}_p &= \underline{b}. \end{aligned}$$

Omdat $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$ onafhankelijk is, volgt hieruit $\underline{x} = \underline{u} = \underline{v}$.

- ii) Stel dat het stelsel $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$ niet onafhankelijk is; er zijn nu getallen y_1, \dots, y_p niet alle gelijk aan nul, zó dat $y_1 \underline{a}_1 + \dots + y_p \underline{a}_p = \underline{0}$. Beschouw $\underline{y} := [y_1, y_2, \dots, y_p, 0, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$, dan is $\underline{y} \neq \underline{0}$ (n.b. \underline{y} kan negatieve componenten hebben!).
- Laat $m := \min\{x_1, \dots, x_p\}$, $M := \max\{|y_1|, \dots, |y_p|\}$, dan is $m > 0$, $M > 0$. Zij $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{m}{M}$. Nu zijn $\underline{u} := \underline{x} + \varepsilon \underline{y}$ en $\underline{v} := \underline{x} - \varepsilon \underline{y}$ twee verschillende positieve oplossingen en $\underline{x} = \frac{1}{2} \underline{u} + \frac{1}{2} \underline{v}$, dus \underline{x} is geen extreme oplossing. \square

6.9.4.7. Stelling. Zij $\underline{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ een positieve oplossing van $A\underline{x} = \underline{b}$. Nu is \underline{x} een extreme oplossing dan en slechts dan indien het stelsel van de kolomvectoren van A met rangnummers i , waarvoor $x_i \neq 0$ is, een onafhankelijk stelsel is.

Bewijs. Pas 6.9.4.6 toe, eventueel na henummering van de onbekenden. \square

Stelling. $A\underline{x} = \underline{b}$ heeft ten hoogste eindig veel extreme oplossingen.

Bewijs. $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ heeft 2^n deelverzamelingen; alleen die deelverzamelingen waarvan de elementen een onafhankelijk stelsel vormen corresponderen elk met ten hoogste één extreme oplossing. \square

Stelling 6.9.4.7 geeft ons tevens een mogelijkheid de extreme oplossingen te bepalen. We gaan daarbij als volgt te werk:

Bepaal een onafhankelijk stelsel kolomvectoren van A , bijv. $\underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_7, \underline{a}_8$. Probeer op te lossen: $x_1 \underline{a}_1 + x_3 \underline{a}_3 + x_7 \underline{a}_7 + x_8 \underline{a}_8 = \underline{b}$; er is ten hoogste één oplossing. Laat deze zijn $x_1 = \alpha_1$, $x_3 = \alpha_3$, $x_7 = \alpha_7$, $x_8 = \alpha_8$. Beschouw nu $[\alpha_1, 0, \alpha_3, 0, 0, 0, \alpha_7, \alpha_8, 0, \dots, 0]$; als deze vector positief is, is het een extreme oplossing.

Belangrijk zijn gevallen waarin de verzameling van de positieve oplossingen begrensd is. Een voldoende (maar niet nodige!) voorwaarde hiervoor is:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} > 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad \text{en} \quad \sum_{i=1}^m b_i \geq 0 .$$

Algemener: de verzameling van de positieve oplossingen is begrensd als er reële getallen r_1, \dots, r_m bestaan zodat

$$\sum_{i=1}^m r_i a_{ij} > 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

en

$$\sum_{i=1}^m r_i b_i \geq 0 .$$

Als de verzameling der positieve oplossingen begrensd is gelden fraaie stellingen.

6.9.4.8. Stelling. Laat de verzameling van positieve oplossingen van $A\underline{x} = \underline{b}$ begrensd zijn; laat \underline{x}_0 zo'n positieve oplossing zijn en laat $\underline{a} \in N(A)$ zijn, dan vormen alle positieve oplossingen van de vorm $\underline{x}_0 + t\underline{a}$ met $t \in \mathbb{R}$ een segment in \mathbb{R}^n , eventueel bestaande uit het punt \underline{x}_0 alleen.

Bewijs. Triviaal. □

We komen nu tot de hoofdstelling van deze paragraaf.

6.9.4.9. Stelling. Laat de verzameling V van de positieve oplossingen van $A\underline{x} = \underline{b}$ niet-leeg en begrensd zijn. Dan bestaat V uit alle convexe combinaties van de extreme oplossingen, m.a.w. V is het convexe polytoop met de extreme oplossingen als hoekpunten.

Bewijs. We geven een bewijs uit het ongerijmde. Stel dat er een positieve oplossing \underline{z} is die geen convexe combinatie van extreme oplossingen is; \underline{z} is dan zelf zeker geen extreme oplossing. Er zijn dan twee verschillende positieve oplossingen \underline{u} en \underline{v} en een λ met $0 < \lambda < 1$ zó dat $\underline{z} = \lambda\underline{u} + (1 - \lambda)\underline{v}$. Alle vectoren van de vorm $t\underline{u} + (1 - t)\underline{v} = \underline{v} + t(\underline{u} - \underline{v})$ met $t \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen van $A\underline{x} = \underline{b}$. Wegens stelling 6.9.7.5 vormen de positieve oplossingen van deze vorm een segment S in \mathbb{R}^n . Laat \underline{u}^* en \underline{v}^* de eindpunten van S zijn; dan zijn \underline{u} en \underline{v} , en dus ook \underline{z} , convexe combinaties van \underline{u}^* en \underline{v}^* , terwijl $\underline{u}^* \neq \underline{v}^*$, $\underline{u}^* \neq \underline{z}$, $\underline{v}^* \neq \underline{z}$. Als \underline{u}^* en \underline{v}^* nu beide convexe combinaties van extreme oplossingen zouden zijn, dan zou hetzelfde gelden voor \underline{z} . Minstens een van beide \underline{u}^* of \underline{v}^* , zeg maar \underline{u}^* , is dus geen convexe combinatie van ex-

treme oplossingen. Laat er in \underline{z} nu p coördinaten gelijk aan 0 zijn, dan zijn ook in \underline{u}^* en \underline{v}^* de overeenkomende coördinaten 0. We zullen laten zien dat er in \underline{u}^* tenminste $p + 1$ coördinaten 0 zijn. Als dit nl. niet zo was, dan konden we als in het bewijs van 6.9.4.3 een getal ϵ zo klein vinden dat $\underline{u}^* + \epsilon(\underline{v}^* - \underline{u}^*)$ en $\underline{u}^* - \epsilon(\underline{v}^* - \underline{u}^*)$ beide positieve oplossingen zijn, in tegenspraak met het feit dat \underline{u}^* een eindpunt is van het segment van positieve oplossingen van de vorm $\underline{u}^* + t(\underline{v}^* - \underline{u}^*)$; dit segment is immers hetzelfde als S . Het aantal coördinaten gelijk 0 in \underline{u}^* is dus $\geq p + 1$. Herinneren we ons dat \underline{u}^* geen convexe combinatie van extreme oplossingen is. We laten nu \underline{u}^* de rol van \underline{z} spelen en herhalen het bovenstaande betoog. We vinden dan een positieve oplossing die geen convexe combinatie van extreme oplossingen is met tenminste $p + 2$ coördinaten gelijk aan nul. We herhalen het argument; zodoende vinden we positieve oplossingen die geen convexe combinatie van extreme oplossingen zijn, met steeds meer nullen. Op een gegeven moment (gana!) zijn er nog zo weinig positieve coördinaten over, dat de overeenkomstige kolomvectoren van A onafhankelijk zijn en de vector zelf een extreme oplossing is, of we eindigen in $\underline{0}$, ook een extreme oplossing. \square

Voorbeelden. 8) Bepaal alle positieve oplossingen van:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

De verzameling van de positieve oplossingen is begrensd, immers elke oplossing moet ook voldoen aan: $3x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Voor we de extreme oplossingen zoeken gaan we over op de normaalvorm.

Zij

$$[A, \underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(verwisseling der vergelijkingen!), dan is

$$[\tilde{A}, \tilde{\underline{b}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

De oplossing van $A\underline{x} = \underline{b}$ is dus: $\underline{x} = [\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, 0]^T + \lambda[-1, 2, 1]^T$. Er is dus ten hoogste een segment van positieve oplossingen, derhalve twee extreme oplossingen. Om deze te vinden kunnen we twee wegen bewandelen:

a) Oplossingen zijn positief als $\frac{3}{4} - \lambda \geq 0$ en $-\frac{5}{4} + 2\lambda \geq 0$ en $\lambda \geq 0$ dus $\frac{5}{8} \leq \lambda \leq \frac{3}{4}$. De extreme oplossingen zijn

$$(\lambda = \frac{5}{8}) : [\frac{1}{8}, 0, \frac{5}{8}]^T \quad \text{en} \quad (\lambda = \frac{3}{4}) : [0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^T.$$

Stelling 6.9.4.4 laat ons inzien dat deze oplossingen inderdaad extreem zijn.

Willekeurige positieve oplossingen worden gegeven door:

$$\underline{x} = t[\frac{1}{8}, 0, \frac{5}{8}]^T + (1-t)[0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^T \quad (0 \leq t \leq 1).$$

b) Beschouw alle lineair onafhankelijke deelstelsels van

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

en probeer voor elk van deze deelstelsels een oplossing te vinden waarvan alleen de componenten overeenkomend met de vectoren uit het stelsel ongelijk nul zijn.

Onafhankelijk deelstelsel	op te lossen vergelijkingen	oplossing $[x_1, x_2, x_3]^T$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix}, x_2 = 0, x_3 = 0$	strijdig
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix}, x_1 = 0, x_3 = 0$	strijdig
$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$	$x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix}, x_1 = 0, x_2 = 0$	strijdig

Onafhankelijk deelstelsel	op te lossen vergelijkingen	oplossing $[x_1, x_2, x_3]^T$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$x_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix}, x_3 = 0$	$[\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, 0]^T$ niet positief

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} x_1 + x_3 = \frac{3}{4} \\ -2x_3 = -\frac{5}{4} \\ x_2 = 0 \end{cases}$	$[\frac{1}{8}, 0, \frac{5}{8}]^T$ extreme oplossing!
---	--	---

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} x_3 = \frac{3}{4} \\ x_2 - 2x_3 = -\frac{5}{4} \\ x_1 = 0 \end{cases}$	$[0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^T$ extreme oplossing!
---	---	---

9) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

De algemene oplossing is $\underline{x} = [1, 1, 0]^T + \lambda[1, 1, 1]^T$.

We zien dat de verzameling positieve oplossingen onbegrensd is. Iedere oplossing waarvoor $\lambda \geq 0$ geldt is positief. Er is één extreme oplossing, nl. $[1, 1, 0]^T$.

We zullen nog eens direct laten zien dat $[1, 1, 0]^T$ een extreem element is van de verzameling $\{[1 + \alpha, 1 + \alpha, \alpha]^T \mid \alpha \geq 0\}$. Zij nl.

$$[1, 1, 0]^T = \lambda[1 + \alpha, 1 + \alpha, \alpha]^T + (1 - \lambda)[1 + \beta, 1 + \beta, \beta]^T$$

met $0 < \lambda < 1$. Dan volgt:

$$\begin{cases} (1 + \alpha)\lambda + (1 + \beta)(1 - \lambda) = 1 \\ \alpha\lambda + (1 - \lambda)\beta = 0 \end{cases}$$

en dus $\alpha\lambda = 0$ en $(1 - \lambda)\beta = 0$; $\alpha = 0, \beta = 0$.

De enige extreme oplossing van 2 is ook te vinden op de manier van 6.9.4.4. en wel als volgt:

$$[A, \underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\underline{a}_1 \quad \underline{a}_2 \quad \underline{a}_3 \quad \underline{b}$$

Onafhankelijk deelstelsels	op te lossen vergelijkingen	oplossingen
\underline{a}_1	$x_1 \underline{a}_1 = \underline{b}, x_2 = 0, x_3 = 0$	strijdig
\underline{a}_2	$x_2 \underline{a}_2 = \underline{b}, x_1 = 0, x_3 = 0$	strijdig
\underline{a}_3	$x_3 \underline{a}_3 = \underline{b}, x_1 = 0, x_2 = 0$	$[0, 0, -1]^T$, niet positief
$\underline{a}_1, \underline{a}_2$	$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$	$[1, 1, 0]^T$, extreem
$\underline{a}_1, \underline{a}_3$	$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1, x_2 = 0 \\ -x_3 = 1 \end{cases}$	$[0, 0, -1]^T$, niet positief
$\underline{a}_2, \underline{a}_3$	$\begin{cases} -x_3 = 1, x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$	$[0, 0, -1]^T$, niet positief

10) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

Merk op dat niet geldt: $\sum_{i=1}^2 a_{ij} > 0$ ($j = 1, 2, 3$). Toch is de verzameling positieve oplossingen begrensd, want een positieve oplossing moet ook voldoen aan ($\frac{3}{2} \times$ de eerste vergelijking + $1 \times$ de tweede):

$$\frac{5}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 5.$$

We zoeken nu de extreme oplossingen zonder eerst op normaalvorm over te gaan:

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Onafhankelijke deelstelsels	vergelijkingen	oplossing
\underline{a}_1	$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0 \\ x_1 = 2 \end{cases}$	$[2,0,0]^T$ extreme oplossing
\underline{a}_2	$\begin{cases} -x_2 = 2, x_1 = 0, x_3 = 0 \\ 2x_2 = 2 \end{cases}$	strijdig
\underline{a}_3	$\begin{cases} x_3 = 2, x_1 = 0, x_2 = 0 \\ -x_3 = 2 \end{cases}$	strijdig
$\underline{a}_1, \underline{a}_2$	$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$	$[2,0,0]^T$ extreme oplossing; zie boven
$\underline{a}_1, \underline{a}_3$	$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2, x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases}$	$[2,0,0]^T$, zie boven
$\underline{a}_2, \underline{a}_3$	$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 2, x_1 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$	$[0,4,6]^T$, extreme oplossing

Willekeurige positieve oplossingen worden gegeven door:

$$\underline{x} = \lambda [2,0,0]^T + (1 - \lambda) [0,4,6]^T = [2\lambda, 4 - 4\lambda, 6 - 6\lambda]^T$$

$(0 \leq \lambda \leq 1)$.

6.9.5. Lineaire ongelijkheden

We beschouwen stelsels ongelijkheden van de vorm

$$\begin{cases} a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq \alpha \\ b_1 x_1 + \dots + b_n x_n \geq \beta \\ \vdots \\ f_1 x_1 + \dots + f_n x_n \leq \eta. \end{cases}$$

Door vermenigvuldiging van sommige ongelijkheden met -1 kan elk stelsel geschreven worden in de vorm

$$\underline{Ax} \leq \underline{b} . \quad (1)$$

Laat de rijvectoren van A zijn: $\underline{v}_1^T := [a_{11}, \dots, a_{1n}]$, \dots , $\underline{v}_m^T := [a_{m1}, \dots, a_{mn}]$; dan is het stelsel $\underline{Ax} \leq \underline{b}$ ook te schrijven als:

$$\begin{cases} (\underline{v}_1, \underline{x}) \leq b_1 \\ \vdots \\ (\underline{v}_m, \underline{x}) \leq b_m . \end{cases} \quad (2)$$

Stelling. De verzameling V van de vectoren $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ die voldoen aan $\underline{Ax} \leq \underline{b}$ is convex.

Bewijs. In de schrijfwijze (2) is duidelijk dat V de doorsnede is van convexe halfruimten. □

Opmerking. In een stelsel als (2) kunnen overtollige ongelijkheden voorkomen; deze kan men weglaten zonder dat de oplossingsverzameling verandert.

Voorbeeld.

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 2 . \end{cases}$$

Als we in \mathbb{R}^2 de oplossingsverzameling tekenen, dan blijkt dat de eerste ongelijkheid overbodig is. De oplossingsverzameling is het convexe polytoop met hoekpunten $[0, 2]^T$, $[4, -2]^T$ en $[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}]^T$.

6.9.6. Iets over lineaire programmering

Voorbeeld. Het dieetprobleem.

We bespreken nu een opgave waar het essentieel gaat om het vinden van het maximum of minimum van een lineaire vorm $f(\underline{x}) := (\underline{a}, \underline{x})$ in \underline{x} , als \underline{x} tevens voldoet aan een aantal vergelijkingen of ongelijkheden. Optimaliseringsproblemen als deze behoren tot het terrein der lineaire programmering. In het klassieke voorbeeld van het dieet gaat het over de samenstelling van een gezonde voeding tegen minimale kosten. Laat er n levensmiddelen L_1, \dots, L_n beschikbaar zijn, bijv. brood, aardappelen, bonen, enz. Een dieet

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

is een lijst bevattende de dagelijks te eten hoeveelheden van L_1, \dots, L_n . De benodigde voedingsstoffen zijn S_1, \dots, S_m , bijv. eiwit, vet, koolhydraat, calcium, vitamine A, enz. Laat in $A^{(m \times n)} = [a_{ij}]$ het element a_{ij} aangeven het aantal eenheden S_i in een eenheid L_j . Laat de dagelijkse behoefte aan S_i zijn b_i eenheden; zij

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Voor een goed dieet is $\underline{A}\underline{d} \geq \underline{b}$. Als p_j de prijs is van een eenheid L_j en $\underline{p} = [p_1, \dots, p_n]^T$, dan is de dagelijkse prijs van het dieet: $pr(\underline{d}) := (\underline{p}, \underline{d})$. De taak van de diëtist is nu: vind bij gegeven \underline{A} , \underline{b} en \underline{p} onder alle vectoren \underline{d} die voldoen aan:

$$\begin{cases} \underline{d} \geq 0 \\ \underline{A}\underline{d} \geq \underline{b} \end{cases}$$

er een waarvoor $(\underline{p}, \underline{d})$ minimaal is.

Algemeen geformuleerd gaat het er in lineaire programmeringsproblemen om een \underline{x} te vinden die voldoet aan

$$\begin{cases} \underline{x} \geq \underline{0} \\ \underline{A}\underline{x} \geq \underline{b} \text{ of } \underline{A}'\underline{x} \leq \underline{b}' \end{cases} \quad (1)$$

en waarvoor een lineaire functionaal $(\underline{p}, \underline{x})$ minimaal of maximaal is.

Korter geformuleerd luidt het probleem: vind onder de positieve oplossingen van een stelsel lineaire ongelijkheden er een waarvoor een lineaire functionaal maximaal of minimaal is.

In 6.9.5 hebben we gezien dat de oplossingen van (1) een (eventueel lege) convexe verzameling vormen. Het gaat dus om het probleem extreme waarden te vinden van een lineaire functionaal op een convexe verzameling.

Loze veranderlijken

Door een eenvoudige kunstgreep is het mogelijk het stelsel lineaire ongelijkheden te vervangen door gelijkheden zodat we in de situatie van 6.9.4 terechtkomen.

Laat het stelsel zijn:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Aan de x_1, \dots, x_n voegen we nu toe m nieuwe veranderlijken y_1, \dots, y_m , de zgn. loze veranderlijken. We proberen op te lossen:

$$\begin{cases} y_1 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ y_2 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ y_m + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ y_1 \geq 0, \dots, y_m \geq 0, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Als $y_1 = \beta_1, \dots, y_m = \beta_m, x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n$ een oplossing van (3) is, is $\underline{x} = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$ een oplossing van (2), de afgesneden oplossing. Omgekeerd is $\underline{x} = \underline{\alpha}$ een oplossing van (2) dan vindt men een uitbreiding tot een oplossing van (3) door te stellen:

$$y_i = b_i - (a_{i1}\alpha_1 + \dots + a_{in}\alpha_n) \quad (i = 1, \dots, m).$$

Eigenschap. Als we een extreme oplossing van (2) uitbreiden tot een oplossing van (3), dan is dit een extreme oplossing. (Bewijs dit!) Als wij dus alle extreme oplossingen van (3) kennen, dan komen alle extreme oplossingen van (2) voor onder de afgesneden oplossingen.

We formuleren nu de hoofdstelling van deze paragraaf.

Stelling. Zij C een convex polytoop in \mathbb{R}^n met hoekpunten $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$, dan neemt de lineaire vorm $(\underline{p}, \underline{x})$ op C een minimum en een maximum aan. Het minimum wordt aangenomen in een hoekpunt (maar mogelijk ook elders); hetzelfde geldt voor het maximum.

Bewijs. We spreken slechts over een minimum; voor het maximum is het bewijs analoog. Zoek het kleinste onder de k getallen $(\underline{p}, \underline{x}_1), \dots, (\underline{p}, \underline{x}_k)$. Zij dit m en laat $(\underline{p}, \underline{x}_\ell) = m$. Het is mogelijk dat $m = (\underline{p}, \underline{x}_i)$ voor meerdere waarden van i . Voor een willekeurige $\underline{x} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_k \underline{x}_k$ ($\lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1$) uit C geldt nu

$$\begin{aligned}(\underline{p}, \underline{x}) &= \lambda_1 (\underline{p}, \underline{x}_1) + \lambda_2 (\underline{p}, \underline{x}_2) + \dots + \lambda_k (\underline{p}, \underline{x}_k) \geq \\ &\geq (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k) m = m = (\underline{p}, \underline{x}_\ell) .\end{aligned}$$

□

Gevolg. Als de verzameling V van de positieve oplossingen van $A\underline{x} = \underline{b}$ (of $A\underline{x} \leq \underline{b}$) begrensd is wordt het minimum (of maximum) van $(\underline{p}, \underline{x})$ aangenomen in een extreme oplossing.

Opmerkingen. 1) Als de verzameling oplossingen niet begrensd is hoeft een maximum of minimum van $(\underline{p}, \underline{x})$ niet te bestaan. We beschouwen dit geval niet verder. In het geval dat de verzameling positieve oplossingen van $A\underline{x} = \underline{b}$ begrensd is, biedt de techniek van 6.9.4 dus de mogelijkheid een \underline{x} te vinden waarvoor $(\underline{p}, \underline{x})$ minimaal is.

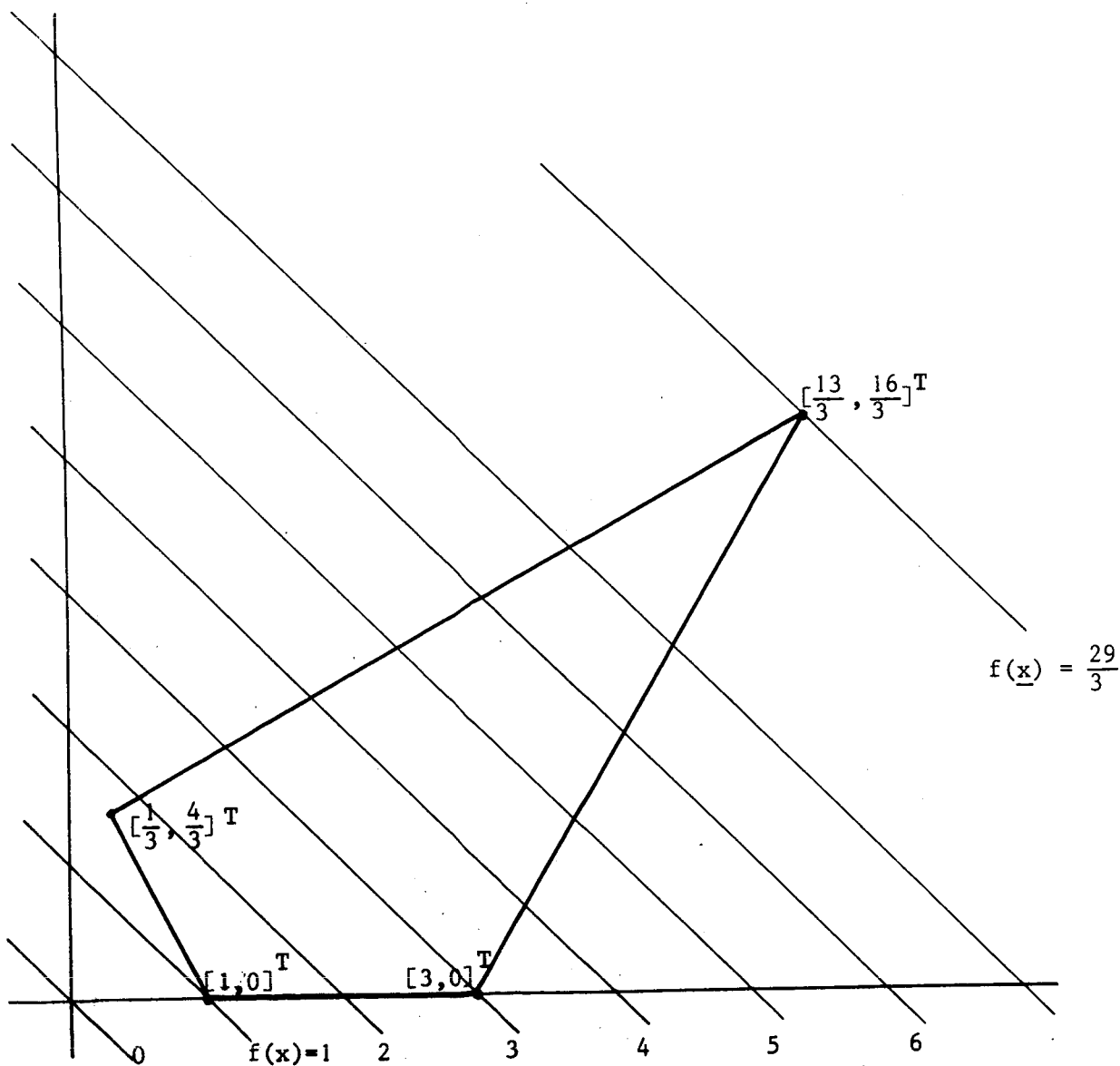
2) De verzameling van alle \underline{x} waar het minimum wordt aangenomen is het convexe polytoop opgespannen door die extreme oplossingen waar de waarde van $(\underline{p}, \underline{x})$ gelijk aan het minimum is.

- 3) Het wiskundige vakgebied der operations research is voor een belangrijk deel gewijd aan het vinden van goede algoritmen voor de oplossing van lineaire programmeringsproblemen. De op 6.9.4 berustende werkwijze is in de praktijk vaak zeer omslachtig:
- 4) Lineaire programmeringsproblemen in twee veranderlijken kunnen grafisch opgelost worden. Om het minimum te bepalen van $x + y = ([1,1]^T, \underline{x}) = f(\underline{x})$ op de oplossingsverzameling van

$$\begin{cases} -x + y \leq 1 \\ 4x - y \leq 12, \quad x \geq 0, y \geq 0 \\ -2x - y \leq 2 \end{cases}$$

schetsen we deze oplossingsverzameling in \mathbb{R}^2 . Het is het convexe polytoop met vier extreme elementen: $[1,0]^T$; $[3,0]^T$; $[\frac{13}{3}, \frac{16}{3}]^T$; $[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}]^T$.

De waarde van $f(\underline{x})$ in deze hoekpunten is: 1; 3; $\frac{29}{3}$; $\frac{4}{3}$. Het gevraagde minimum is 1 in $[1,0]^T$. Dit blijkt ook uit de hoogtekaart van $f(\underline{x})$.



Hoofdstuk 7.

Dit wordt opnieuw geredigeerd uit § 5.7 en 5.8 en nog enige toevoegingen.

Hoofdstuk 8. Meervoudige integralen

8.1. Integratiegebieden en infinitesimale elementen

We spreken in het volgende over het begrip k-dimensionaal gebied in \mathbb{R}^n , waarbij $1 \leq k \leq n$. Dit begrip zullen we niet definiëren. Wij volstaan met het geven van een aantal voorbeelden. Behalve in 8.5 zullen we steeds aannemen dat het gebied begrensd en gesloten is.

k = 1: Een kromme in \mathbb{R}^n (4.1.1).

Voorbeelden: een lijnstuk, een gebroken lijn, een cirkel, de rand van een halve cirkelschijf.

k = 2: In \mathbb{R}^2 : een verzameling begrensd door een gesloten kromme. Bijv. een cirkelschijf, een veelhoek, een verzameling van de vorm

$\{(x,y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ waar f een positieve functie is.

In \mathbb{R}^3 : Een deelverzameling van een gebogen oppervlak al of niet begrensd door een gesloten kromme. Bijv. een boloppervlak, een cilindermantel, een kubusoppervlak.

k = 3: Een verzameling in \mathbb{R}^3 begrensd door een twee-dimensionaal gebied.

Bijv. een bol, de cylinder $\{(x,y,z) \mid 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$, een massief viervlak.

In het algemeen zullen we aannemen dat de krommen en oppervlakken die de rand van het gebied vormen, continu zijn. In sommige gevallen zullen we differentieerbaarheid eisen.

De integraal $\int_a^b f(x)dx$, waar $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie is, is als volgt ingevoerd: Men verdeelt het interval $[a,b]$ in kleine deelintervallen $[x_{i-1}, x_i]$ (waar $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$), kiest getallen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ en vormt de som $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, waar $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$. Men kan bewijzen dat de limiet van deze som voor $n \rightarrow \infty$, $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$ bestaat. Deze limiet noemt men dan de $\int_a^b f(x)dx$.

Bij algemenere integralen gaan we op analoge wijze te werk. Zij G een gebied en f een continue functie op G . We verdelen G in kleine deelgebiedjes E_i , die we (infinitesimale) elementen zullen noemen. Van deze elementen bepalen we de maat (= lengte, oppervlakte of inhoud) $\mu(E_i)$. We kiezen punten $\xi_i \in E_i$ en berekenen de som

$$8.1.1. \quad \sum_i f(\xi_i) \mu(E_i) .$$

Als de limiet van de som bestaat, wanneer het aantal elementen naar ∞ en de afmetingen van de elementen naar nul naderen, dan noemt men deze limiet de integraal van f over G . We zullen eerst spreken over de aard van de elementen en over de manier waarop we daaraan een maat toekennen. Daartoe geven we een aantal voorbeelden.

A. Lijnelementen

A1) Als $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ en $\Delta x := x_2 - x_1$ klein, dan is het interval $E := [x_1, x_2]$ een element met $\mu(E) = \Delta x$.

A2) Als $G = K$ een kromme is in \mathbb{R}^2 of \mathbb{R}^3 , gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x}(t)$ ($a \leq t \leq b$) en als $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ en $\Delta t = t_2 - t_1$ klein is dan is $E := \{\underline{x}(t) \mid t_1 \leq t \leq t_2\}$ een element met

$$\mu(E) = \Delta s \approx |\underline{x}(t_2) - \underline{x}(t_1)| \approx |\dot{\underline{x}}(t_1)| \Delta t .$$

Δs heet de booglengte van E . Als de kromme K in \mathbb{R}^2 ligt en gegeven wordt door de vergelijking $y = y(x)$, dan kunnen we K ook beschrijven met de parametervoorstelling $\underline{x}(t) = (t, y(t))$. Dan geldt $\dot{\underline{x}}(t) = (1, y'(t))$ en dus $|\dot{\underline{x}}(t)| = \sqrt{1 + y'^2(t)}$. In dat geval kunnen we schrijven (na t vervangen te hebben door x):

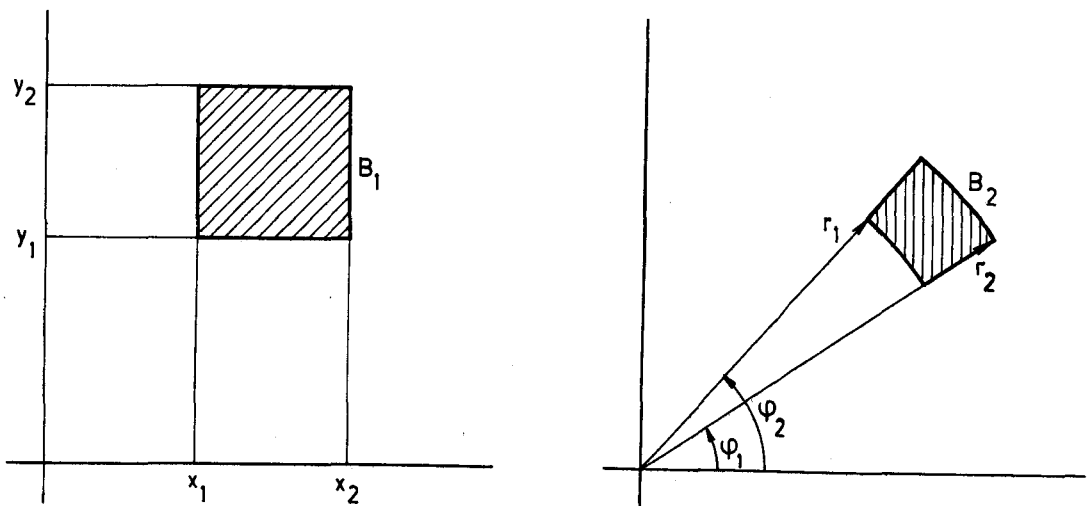
$$\Delta s = \mu(E) \approx \sqrt{1 + (y'(x))^2} \Delta x .$$

B. Oppervlakte-elementen

B1) In \mathbb{R}^2 is een rechthoek $E := [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] := \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$ een element als $\Delta x := x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ klein zijn. De maat is $\mu(E) = \Delta x \Delta y$.

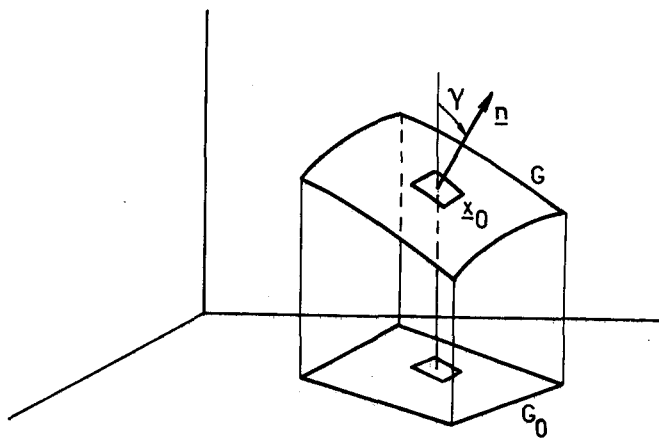
B2) In \mathbb{R}^2 is de verzameling $E = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \mid \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, r_1 \leq r \leq r_2\}$ een element als $\Delta \varphi := \varphi_2 - \varphi_1$, $\Delta r := r_2 - r_1$ klein zijn. Voor de maat geldt

$$\mu(E) \approx r \Delta \varphi \Delta r .$$



Oppervlakte-elementen.

B3) Zij G een twee-dimensionaal gebied op het oppervlak $z = f(x,y)$ in \mathbb{R}^3 . De projectie van G op het xy -vlak noemen we G_0 .



Zij $\underline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in G$ en neem aan dat f differentieerbaar is. Dan wordt het raakvlak V aan G in \underline{x}_0 gegeven door

$$(z - z_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

oftewel $(\underline{n}, \underline{x} - \underline{x}_0) = 0$, waar $\underline{n} := (-f_x, -f_y, 1)$ (afgeleiden genomen in (x_0, y_0)). De vector \underline{n} staat dus loodrecht op G . De hoek γ die deze vector met de positieve z -as maakt voldoet aan $\cos \gamma = 1/\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$. Laat

nu E_0 een infinitesimaal element in G_0 zijn en laat $(x_0, y_0) \in E_0$. Met E_0 correspondeert een infinitesimaal element $E := \{(x, y, z) \in G \mid (x, y) \in E\}$ van G en een element $E_r := \{(x, y, z) \in V \mid (x, y) \in E\}$ van V . Men kan laten zien dat de oppervlakte van E_r een benadering is voor de oppervlakte van E . De oppervlakte van E_r is gelijk aan $\frac{\mu(E_0)}{\cos \gamma}$. Derhalve vinden we; als $\mu(E_0) = \Delta x \Delta y$ (dus als E_0 van het type B1 is):

$$\mu(E) \approx \mu(E_r) =: \Delta \sigma \approx \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \Delta x \Delta y .$$

C. Volume-elementen

C1) Het blok $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2, z_1 \leq z \leq z_2\} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$ is een element in \mathbb{R}^3 als $\Delta x := x_2 - x_1$, $\Delta y := y_2 - y_1$, $\Delta z := z_2 - z_1$ klein zijn. Er geldt $\mu(E) = \Delta x \Delta y \Delta z$.

C2) De verzameling $E := \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r_1 \leq r \leq r_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, z_1 \leq z \leq z_2\}$ met $\Delta r := r_2 - r_1$, $\Delta \varphi := \varphi_2 - \varphi_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$, klein is een element met

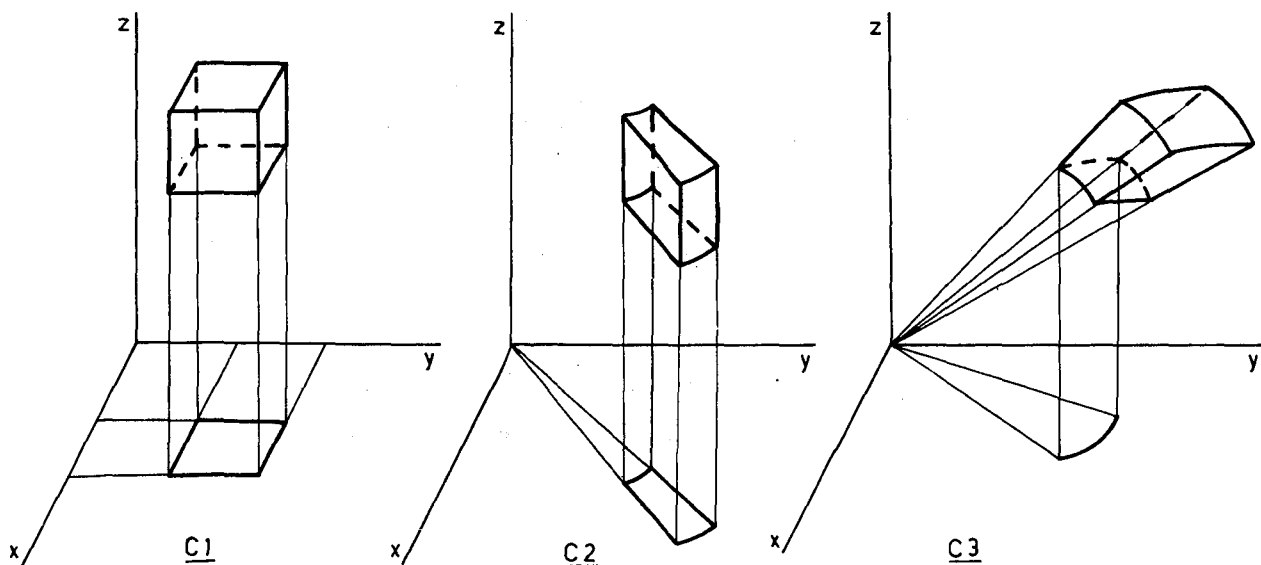
$$\mu(E) \approx r_1 \Delta r \Delta \varphi \Delta z$$

(r, φ, z) heten cylindercoördinaten (1.6.2).

C3) De verzameling $E := \{(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \mid \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$ met $\Delta \rho := \rho_2 - \rho_1$, $\Delta \theta := \theta_2 - \theta_1$, $\Delta \varphi := \varphi_2 - \varphi_1$ klein is een element met

$$\mu(E) \approx \rho_1^2 \sin \theta_1 \Delta \rho \Delta \theta \Delta \varphi$$

(ρ, θ, φ) heten bolcoördinaten (1.6.3).



Volume-elementen.

8.1.2. We maken een paar opmerkingen naar aanleiding van de benaderende formules voor de maten van sommige elementen. In de eerste plaats hebben we niet gedefinieerd wat de echte maat van een element is. We beschouwen dit begrip intuïtief bekend. Bij de benaderende formules is het van belang, dat de fout die benadering wordt gemaakt van kleinere orde is dan de maat van het element zelf. We kunnen deze uitspraak als volgt preciseren: De diameter $\delta(E)$ van een element E is de maximum afstand tussen twee punten van E . (Men kan laten zien dat dit maximum bestaat omdat E gesloten en begrensd is (4.7.1).) Als we nu de maat $\mu(E)$ van een element benaderen door de grootheid $\tilde{\mu}(E)$, dan zeggen we dat de fout $\tilde{\mu}(E) - \mu(E)$ van de benadering van kleinere orde is dan $\mu(E)$ als

$$\lim_{\delta(E) \rightarrow 0} \frac{\tilde{\mu}(E) - \mu(E)}{\mu(E)} = 0 .$$

Als aan deze voorwaarde voldaan is, dan kan men laten zien dat men in 8.1.1 de echte maat $\mu(E_1)$ mag vervangen door de benaderende waarde $\tilde{\mu}(E_1)$, omdat dan bij limietovergang de in de som gemaakte fout naar nul nadert, als $\delta(E_1) \rightarrow 0$. Men kan bewijzen dat in de genoemde voorbeelden de fout inderdaad van kleinere orde is dan de maat. De oppervlakte van het oppervlakte-element genoemde in B2 is bijv. gelijk aan

$$\mu(E) = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} (\pi r_2^2 - \pi r_1^2) = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)\Delta\varphi\Delta r .$$

We hebben als benadering genomen $\tilde{\mu}(E) = r_1\Delta\varphi\Delta r$. De gemaakte fout is dus $\frac{1}{2}(r_2 - r_1)\Delta\varphi\Delta r = \frac{1}{2}\Delta\varphi(\Delta r)^2$, zodat

$$\frac{\tilde{\mu}(E) - \mu(E)}{\mu(E)} = \frac{1}{2}\Delta r \rightarrow 0 \quad (\delta(E) \rightarrow 0) .$$

Als we bijv. in B3 genomen hadden $\mu(E_0) = \Delta x\Delta y$ i.p.v. $\mu(E_r) = \Delta x\Delta y/\cos \gamma$ als benadering voor $\mu(E)$, dan was de fout niet van kleinere orde geweest dan $\mu(E)$.

8.1.3. Definitie. Als de som 8.1.1 een limiet heeft als de maximale afmeting van de afmeting van de infinitesimale elementen naar nul gaat, dan noemt men deze limiet de integraal van f over G . De algemene notatie is $\int_G f d\mu$.

Gewoonlijk zullen we echter een andere notatie gebruiken die aangeeft met welk type integraal we te maken hebben. Zonder bewijs vermelden we het volgende resultaat.

8.1.4. Stelling. Als G een begrensd en gesloten gebied is met voldoende gladde rand en f een continue functie op G , dan bestaat $\int_G f \, d\mu$. De integraal is onafhankelijk van het type infinitesimale elementen dat wordt gebruikt in 8.1.1. Bovendien mag $\mu(E_i)$ bij de berekening van de som 8.1.1 worden vervangen door een benaderende uitdrukking, mits de gemaakte fout van kleinere orde is dan $\mu(E_i)$.

We zullen niet precies omschrijven wat we met "voldoende gladde rand" bedoelen. We merken alleen op dat in alle voorbeelden die we in dit hoofdstuk zullen tegenkomen, aan deze voorwaarde is voldaan.

Tenslotte merken we op dat de elementen E_i het gebied G niet helemaal hoeven te overdekken, als de maat van het niet overdekte stuk maar naar nul nadert. Zo kan men bijv. een cirkelschijf in \mathbb{R}^2 niet verdelen in elementen van de gedaante B_1 , maar men kan wel, door de diameter klein genoeg te maken, de cirkelschijf "op een willekeurig klein gebied na" overdekken.

8.1.5. Een aantal eigenschappen van de integraal volgen onmiddellijk uit de definitie:

$$1) \quad \int_G (f + g) \, d\mu = \int_G f \, d\mu + \int_G g \, d\mu$$

$$2) \quad \int_G \lambda f \, d\mu = \lambda \int_G f \, d\mu$$

$$3) \quad \int_{G_1} f \, d\mu + \int_{G_2} f \, d\mu = \int_{G_1 \cup G_2} f \, d\mu$$

als G_1 en G_2 niet overlappen, d.w.z. als G_1 en G_2 disjunct zijn, of ten hoogste de rand gemeenschappelijk hebben.

$$4) \quad \text{Als } f \leq g \text{ is op } G, \text{ dan is } \int_G f \, d\mu \leq \int_G g \, d\mu$$

- 5) $\int_G d\mu = \mu(G)$, d.w.z. de lengte, de oppervlakte of het volume van G al naar gelang G een één-, twee- of driedimensionaal gebied is.

8.1.6. We noemen een aantal voorbeelden van situaties waarbij meervoudige integralen ter sprake komen.

- 1) Als $G = [a, b]$, $f(x) \geq 0$ voor $a \leq x \leq b$, dan is $\int_G f d\mu$ de oppervlakte van de verzameling $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

- 2) Als G een tweedimensionaal gebied is in \mathbb{R}^2 en $f(x, y) \geq 0$ op G , dan is $\int_G f d\mu$ het volume van de verzameling $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in G, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$.

- 3) Een groot aantal voorbeelden vindt men in de mechanica. Zij G een (één-, twee- of driedimensionaal) lichaam belegd met massa met dichtheid ρ .

i) De totale massa van G is gelijk aan $\int_G \rho d\mu$.

ii) Het massatraagheidsmoment van G t.o.v. de z -as is $\int_G (x^2 + y^2) \rho d\mu$.

iii) Het moment van G t.o.v. de oorsprong is $\int_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rho d\mu$.

- iv) Het zwaartepunt (ξ, η, ζ) van G wordt gegeven door:

$$\xi = \frac{1}{M} \int_G x \rho d\mu, \quad \eta = \frac{1}{M} \int_G y \rho d\mu, \quad \zeta = \frac{1}{M} \int_G z \rho d\mu$$

waar $M := \int_G \rho d\mu$ de massa is.

- 4) Als G een (één-, twee- of driedimensionaal) gebied is belegd met elektrische lading met dichtheid ρ , dan is de totale lading van G gelijk aan

$$\int_G \rho d\mu.$$

8.2. Lijnintegralen

Als we lijnelementen van het type A1 als elementen nemen in het interval $G = I = [a, b]$, dan vinden we de gewone integraal terug. We gebruiken dan gebruiken dan ook de oude notatie: $\int_a^b f(x) dx = \int_G f d\mu$.

Als $G = K$ een kromme is geparаметriseerd door de functie $t \mapsto \underline{x}(t)$ ($a \leq t \leq b$) en als elementen van het type A2 gekozen worden, dan noteren we:

$$\int_K f(\underline{x}) ds := \int_G f d\mu.$$

Op grond van de benadering gegeven voor Δs geldt:

$$\int_K f(\underline{x}) ds = \int_a^b f(\underline{x}(t)) |\dot{\underline{x}}(t)| dt .$$

De lengte van K wordt gegeven door

$$8.2.1. \quad \int_K ds = \int_a^b |\dot{\underline{x}}(t)| dt .$$

Als K in het xy -vlak wordt gegeven door de vergelijking $y = y(x)$, ($a \leq x \leq b$) waarbij y differentieerbaar is, dan vinden we

$$\int_K f(\underline{x}) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx .$$

De lengte van K wordt:

$$8.2.2. \quad \int_K ds = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx .$$

Voorbeelden. 1) De lengte van de parabool $y = x^2$ voor $0 \leq x \leq 1$ is volgens 8.2.2:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{2 + 4x^2} dx = x\sqrt{1 + 4x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{4x^2}{\sqrt{4x^2 + 1}} dx = \\ &= \sqrt{5} - s + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}} . \end{aligned}$$

Daar

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} \log(x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{5}) ,$$

zien we dat

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{5}) .$$

2) De lengte van een boog van de cycloïde $x = at - a \sin t$, $y = a - a \cos t$ is (zie 8.2.1):

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{2} t dt = 8a . \end{aligned}$$

Voor poolcoördinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ gaat wegens $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$ 8.2.1 over in

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} d\varphi .$$

(. betekent afgeleide van φ).

3) De lengte van de cardioïde $r = 2a(1 - \cos \varphi)$ is

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2(1 - \cos \varphi)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos \varphi} \, d\varphi = 16a.$$

Teneinde van het lichaam, dat wordt verkregen bij wenteling om de x-as van de kromme K gegeven door $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, $f(x) \geq 0$, de ronde oppervlakte te berekenen, verdelen wij het lichaam in repen, die in benadering kegel-mantels zijn met straal y en apothema Δs , dus met oppervlakte $2\pi y \Delta s$. De ronde oppervlakte bij wenteling om de x-as is dus

$$O = \int_K 2\pi y ds = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

en, als K in poolcoördinaten door $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$; wordt gegeven,

$$O = \int_\alpha^\beta 2\pi r \sin \varphi \sqrt{r^2 + r'^2} \, d\varphi.$$

Voorbeelden. 4) De lemniscaat $r^2 = \cos 2\varphi$, waarvoor dus $r r' = -\sin 2\varphi$, wentelt om de x-as. Dan

$$\begin{aligned} O &= 2 \int_0^{\pi/4} 2\pi \sin \varphi \sqrt{r^4 + r^2 r'^2} \, d\varphi = \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/4} \sin \varphi \sqrt{\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi} \, d\varphi = 4\pi \int_0^{\pi/4} \sin \varphi \, d\varphi = 4\pi(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}). \end{aligned}$$

5) Gevraagd de oppervlakte O van de cylinder $x^2 + y^2 = 2x$, die buiten de kegel $z^2 = x^2 + y^2$ ligt.

Verdeel de op de cylindermantel gelegen oppervlakte (die niet alleen door $z^2 = x^2 + y^2$ maar ook door $z^2 = 2x$ wordt afgesneden) in repen evenwijdig aan de z-as, met oppervlakte $2z\Delta s$, waarin Δs een lijnelement van de grondcirkel van de cylinder is.

De gevraagde oppervlakte is dus $2 \int_C z ds$ over de cirkel C : $x^2 + y^2 = 2x$.

$$0 = 2 \int_C z ds = 4 \int_0^2 \sqrt{2x} \sqrt{1 + (y')^2} dx ,$$

dus, wegens $y = \sqrt{2x - x^2}$

$$0 = 4 \int_0^2 \sqrt{2x} \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx = 4\sqrt{2} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2 - x}} = 16 .$$

- 6) Laat de x-as een oneindig lange draad zijn met een homogene ladingverdeling, zodat in het xy-vlak een verticaal elektrisch veld $\frac{c}{y}$ ontstaat. De kracht die de parabool $K : y = 1 + \frac{1}{4}x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$) met homogene ladingverdeling ondervindt is gelijk aan

$$\begin{aligned} F &= c_1 \int_K \frac{c}{y} ds = c_1 c \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{(1 + (y')^2)}}{y} dx = \\ &= 2c_1 c \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2}} = 4c_1 c \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = 4c_1 c \log[x + \sqrt{x^2 + 4}] \Big|_0^1 = \\ &= 4c_1 c [\log(1 + \sqrt{5}) - \log 2] . \end{aligned}$$

8.3. Oppervlakte-integralen

Nemen we in een tweedimensionaal gebied G in \mathbb{R}^2 oppervlakte-elementen van het type B1, dan noteren we de integraal als volgt:

$$\iint_G f(x,y) dx dy := \int_G f d\mu .$$

Als elementen van het type B2 worden gekozen dan schrijven we

$$\iint_G f(r,\varphi) r dr d\varphi := \int_G f d\mu .$$

Hierbij nemen we aan dat f als functie van r en φ gegeven is. Als dit niet het geval is, dan kunnen we dat door een eenvoudige substitutie bereiken: $f(x,y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) =: \hat{f}(r,\varphi)$.

Volgens 8.1.4 geldt:

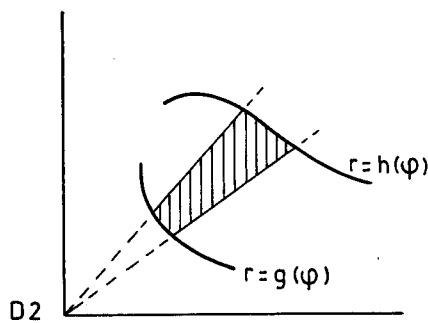
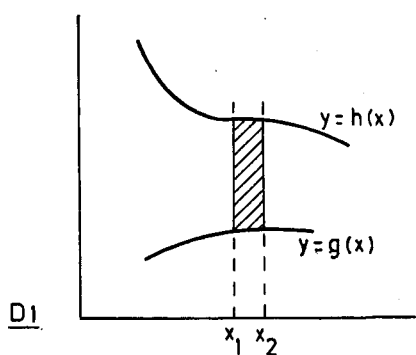
$$\iint_G f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \iint_G f(x, y) dx dy .$$

De oppervlakte van G wordt gegeven door

$$\iint_G dx dy \quad \text{resp.} \quad \iint_G r dr d\varphi .$$

We beschrijven nu een methode om de berekening van oppervlakteintegralen te herleiden tot de berekening van enkelvoudige integralen. Daartoe voeren we het begrip partieel infinitesimaal element (p.i. element) in. Een p.i. element is een gebied waarvan sommige (maar niet alle) afmetingen klein zijn. We geven enige voorbeelden:

- D1. Als $x_1 < x_2$ en $\Delta x := x_2 - x_1$ klein is, dan is het gebied $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq x \leq x_2, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ een p.i. element. Hier zijn g en h continue functies met $g(x) \leq h(x)$ ($x_1 \leq x \leq x_2$).
- D2. Zij $0 < g(\varphi) \leq h(\varphi)$ en $\Delta\varphi := \varphi_2 - \varphi_1$ klein en positief. Dan is de verzameling (in poolcoördinaten) gegeven door $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $g(\varphi) \leq r \leq h(\varphi)$ een p.i. element.
- D3. De cirkelring $r_1 \leq r \leq r_2$ is een p.i. element als $\Delta r := r_2 - r_1$ klein is.



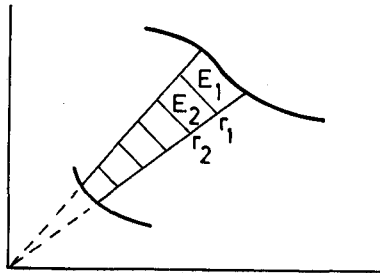
Als E een p.i. element in \mathbb{R}^2 is en f een continue functie op E , dan kan men $\int_E f d\mu$ benaderen door een enkelvoudige integraal:

$$(D1): \quad \int_E f d\mu = \iint_E f(x,y) dx dy \approx \left(\int_{g(x_1)}^{h(x_1)} f(x_1, y) dy \right) \Delta x$$

$$(D2): \quad \int_E f d\mu = \iint_E f(r, \varphi) r dr d\varphi \approx \left(\int_{g(\varphi_1)}^{h(\varphi_1)} f(r, \varphi_1) r dr \right) \Delta \varphi$$

$$(D3): \quad \iint_E f d\mu = \iint_E f(r, \varphi) r dr d\varphi \approx \left(\int_0^{2\pi} f(r_1, \varphi) d\varphi \right) r_1 \Delta r_1 .$$

Dat we op deze manier inderdaad benaderingen krijgen, illustreren we aan de hand van het tweede voorbeeld:



We verdelen E in elementen E_1, E_2, \dots van het type B2. Op grond van de definitie van de integraal, wordt $\int_E f d\mu$ benaderd door $\sum f(\xi_i) \mu(E_i)$, waar $\xi_i \in E_i$.

We kunnen bij wijze van benadering $\mu(E_i)$ vervangen door $r_i \Delta r_i \Delta \varphi$ (bedenk dat $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ voor alle elementen E_i hetzelfde is) en we kunnen voor ξ_i het punt kiezen met poolcoördinaten (r_i, φ_1) . Dan vinden we

$$\iint_E f(r, \varphi) r dr d\varphi \approx \left(\sum_i f(r_i, \varphi_1) r_i \Delta r_i \right) \Delta \varphi .$$

We merken op dat $\sum f(r_i, \varphi_1) r_i \Delta r_i$ een benadering is voor

$$\int_{g(\varphi_1)}^{h(\varphi_1)} f(r, \varphi_1) r dr .$$

Derhalve:

$$\iint_E f(r, \varphi) r dr d\varphi \approx \left(\int_{g(\varphi_1)}^{h(\varphi_1)} f(r, \varphi_1) r dr \right) \Delta\varphi .$$

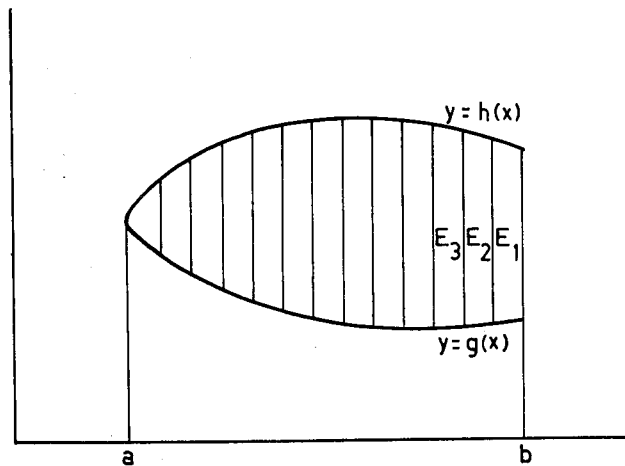
Men kan bewijzen dat de fout die bij deze benadering wordt gemaakt van kleinere orde is dan $\Delta\varphi$. Een dergelijke redenering kan men houden in elk van de genoemde voorbeelden.

We zullen nu laten zien hoe p.i. elementen worden gebruikt bij de berekening van oppervlakteintegralen.

Zij G het gebied

8.3.1. $G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\} ,$

waar g en h continue functies zijn met $g(x) \leq h(x)$ voor $a \leq x \leq b$.



We verdelen G in p.i. elementen van het type D_1 . Als f continu is op G dan geldt:

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \sum_i \iint_{E_i} f(x,y) dx dy \approx \sum_i \left(\int_{g(x_i)}^{h(x_i)} f(x_i,y) dy \right) \Delta x_i .$$

Definiëren we $u(x) := \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy$, dan kan men bewijzen dat u continu is op $[a,b]$ (zie ook 8.7, voorbeeld 2). We vinden

$$8.3.2. \quad \iint_G f(x,y) dx dy \approx \sum_i u(x_i) \Delta x_i .$$

Als de getallen Δx_i naar nul naderen, dan nadert de uitdrukking in het rechterlid naar $\int_a^b u(x) dx$. Bovendien wordt de in 8.3.2 gegeven benadering steeds beter, omdat de fouten in de termen van de som van kleinere orde zijn dan Δx . Daarom vinden we bij limietovergang

$$8.3.3. \quad \iint_G f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy \right) dx .$$

De integraal in het rechterlid noteren we gemakshalve als

$$\int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy .$$

We noemen zo'n uitdrukking een herhaalde integraal.

We kunnen in bovenstaande, de rol van x en y verwisselen. Als we aannemen dat het gebied gegeven wordt door $G = \{(x,y) \mid \alpha \leq y \leq \beta, u(y) \leq x \leq v(y)\}$, dan vinden we:

$$8.3.4. \quad \iint_G f(x,y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y) dx .$$

Gebruiken we p.i. elementen van het type D_2 dan krijgen we

$$8.3.5. \quad \iint_G f(r,\varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(r,\varphi) r dr$$

waarbij we hebben aangenomen dat G in poolcoördinaten wordt gegeven door $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $g(\varphi) \leq r \leq h(\varphi)$.

Als het gebied gegeven is door de ongelijkheden $r_1 \leq r \leq r_2$, $\varphi_1(r) \leq \varphi \leq \varphi_2(r)$, kunnen we de rol van φ en r verwisselen. We krijgen dan

$$8.3.6. \quad \iint_G f(r, \varphi) r dr d\varphi = \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} f(r, \varphi) d\varphi .$$

Voorbeelden. 1) Zij G het kwart in eerste kwadrant van $x^2 + y^2 \leq 1$.

Gevraagd wordt $\iint_G e^{x^2+y^2} xy dx dy$.

i) Gebruiken we 8.3.4 dan krijgen

$$\begin{aligned} \iint_G e^{x^2+y^2} xy dx dy &= \int_0^1 ye^{y^2} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xe^{x^2} dx = \int_0^1 ye^{y^2} dy \cdot \frac{1}{2}(e^{1-y^2} - 1) = \\ &= \frac{1}{2}e \int_0^1 y dy - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{y^2} dy^2 = \frac{1}{2}e - \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

ii) Door overgang op poolcoördinaten vinden we m.b.v. 8.3.5

$$\begin{aligned} \iint_G e^{x^2+y^2} xy dx dy &= \iint_G r^3 e^{r^2} \sin \varphi \cos \varphi dr d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &\int_0^1 r^3 e^{r^2} dr = \frac{1}{2} \int_0^1 te^t dt = \frac{1}{2} \quad (\text{we hebben } r^2 = t \text{ gesubstitueerd}). \end{aligned}$$

2) Zij G de driehoek die in het xy -vlak wordt ingesloten door de rechten $y = 2x$, $2y = x$, $x + y = 3$.

Om $\iint xy dx dy$ over dit gebied te berekenen verdelen wij G eerst door de rechte $x = 1$ in twee gebieden G_1 en G_2 , waarop wij 8.3.3 toepassen.

$$\begin{aligned}
 \iiint_G &= \iiint_{G_1} + \iiint_{G_2} = \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{2x} xydy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} xydy = \\
 &= \int_0^1 xdx \frac{1}{2}(4x^2 - \frac{1}{4}x^2) + \int_1^2 xdx \cdot \frac{1}{2}[(3-x)^2 - \frac{1}{4}x^2] = \\
 &= \frac{15}{8} \int_0^1 x^3 dx + \frac{1}{8} \int_1^2 (3x^3 - 24x^2 + 36x) dx = \frac{13}{8}.
 \end{aligned}$$

Ook hier kunnen we poolcoördinaten en 8.3.5 gebruiken:

$$\begin{aligned}
 \iiint_G xydx dy &= \iint r^2 \sin \varphi \cos \varphi r dr d\varphi = \\
 &= \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\arctan 2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\frac{3}{\sin \varphi + \cos \varphi}} r^3 dr = \\
 &= \frac{81}{4} \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\arctan 2} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{(\sin \varphi + \cos \varphi)^4} d\varphi = \\
 &= \frac{81}{4} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{t}{(t+1)^4} dt = \frac{13}{8} \quad (t = \tan \varphi).
 \end{aligned}$$

3) Gevraagd $\int_0^\pi dx \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) e^{\sin y} dy$.

De binnenste integraal is moeilijk. Wij schrijven de herhaalde integraal eerst als dubbelintegraal over het gebied G: de rechthoek $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Dan passen we 8.3.4 toe.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi/2} f(x,y) dy &= \iint_G f(x,y) dx dy = \int_0^{\pi/2} dy \int_0^{\pi} f(x,y) dx = \\
 &= \int_0^{\pi/2} dy \cdot e^{\sin y} \int_0^{\pi} \sin(x+y) dx = \\
 &= - \int_0^{\pi/2} e^{\sin y} dy [\cos(\pi+y) - \cos y] = \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{\sin y} \cos y dy = 2[e^{\sin \frac{\pi}{2}} - e^0] = 2(e-1) .
 \end{aligned}$$

- 4) Gevraagd de inhoud die wordt ingesloten door de cilindres $x^2 + y^2 = 1$ en $x^2 + z^2 = 1$. Wij beschouwen het lichaam als de cilinder op $x^2 + y^2 = 1$ in het xy -vlak, die wordt afgeknot door de grafiek van $z = \sqrt{1-x^2}$. De gevraagde inhoud is dus

$$8 \iint_G \sqrt{1-x^2} dx dy ,$$

waarbij G het eerste kwadrant van $x^2 + y^2 \leq 1$ is.

Uit 8.3.3 volgt:

$$\begin{aligned}
 8 \iint_G \sqrt{1-x^2} dx dy &= 8 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = 8 \int_0^1 (1-x^2) dx = \\
 &= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} .
 \end{aligned}$$

- 8.3.7. Voor de oppervlakte van een gebied G geldt $\mathcal{O} = \iint_G dx dy$. Is G gegeven als in 8.3.1, dan vinden we:

$$\mathcal{O} = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} dy = \int_a^b h(x) dx - \int_a^b g(x) dx ,$$

een bekend resultaat. Is bijv. G in poolcoördinaten gegeven door

$\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $0 \leq r \leq h(\varphi)$, dan vinden we

$$8.3.8. \quad \mathcal{O} = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{h(\varphi)} r dr = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (h(\varphi))^2 d\varphi .$$

Voorbeelden. 5) Gevraagd de oppervlakte \mathcal{O} van de lemniscaat, die de vergelijking in rechthoekige, resp. in poolcoördinaten $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ resp. $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ heeft.

Wij tekenen de grafiek na opgemerkt te hebben dat er symmetrie t.o.v. de x-as en t.o.v. de y-as bestaat, en dat er slechts punten zijn als

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{en} \quad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4} .$$

Dus

$$\mathcal{O} = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2 .$$

6) Gevraagd de oppervlakte \mathcal{O} van de lus van het folium van Descartes, (zie 4.5, voorbeeld 3) waarvan de vergelijking in rechthoekige, resp. in poolcoördinaten luidt

$$x^3 + y^3 = 3xy \quad \text{resp.} \quad r = \frac{3 \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} .$$

$$\mathcal{O} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{9 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi .$$

Met de substitutie $t := \tan \varphi$ vinden we:

$$\mathcal{O} = \frac{9}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(t^3+1)^2} = \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{d(t^3+1)}{(t^3+1)^2} = \frac{3}{2} .$$

8.3.9. Zij G een tweedimensionaal gebied gelegen op een oppervlak $z = f(x,y)$ in \mathbb{R}^3 .

De projectie van G op het xy -vlak noemen we G_0 .

Dus $G_0 := \{(x,y) \mid (x,y,f(x,y)) \in G\}$. Zij $h : G \rightarrow \mathbb{R}$ continu. De integraal van h over G schrijven we

$$\int_G h d\mu =: \iint_G h d\sigma .$$

Gebruikmakend van onze benadering van de maat van een infinitesimaal element van het type B3 (zie 8.1) kunnen we schrijven:

$$8.3.10. \quad \iint_G h d\sigma = \iint_{G_0} h(x,y,f(x,y)) \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} dx dy .$$

Voor de oppervlakte van G vinden we

$$8.3.11. \quad \iint_G d\sigma = \iint_{G_0} \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} dx dy .$$

Door formule 8.3.10 wordt de integratie over een gebogen oppervlak in \mathbb{R}^3 herleid tot integratie over een vlak oppervlak in \mathbb{R}^2 . Zo'n integraal kunnen we weer uitrekenen door herhaalde integratie. In sommige situaties is het voordelig de integraal te schrijven in poolcoördinaten:

$$\iint_G h d\sigma = \iint_{G_0} h(r,\varphi,\hat{f}(r,\varphi)) \sqrt{1+\hat{f}_r^2 + \frac{1}{r^2} \hat{f}_\varphi^2} r dr d\varphi ,$$

waarin $\hat{f}(r,\varphi) := f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

Voorbeelden. 7) Gevraagd de oppervlakte 0 van de kegel $z^2 = x^2 + y^2$, die binnen de cylinder $x^2 + y^2 = 2x$ ligt.

Voor $x = \sqrt{x^2+y^2}$ is $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, dus

$$0 = 2 \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = 2 \iint_G \sqrt{2} dx dy = 2\sqrt{2}\pi .$$

8) Beschouw de bol $B := \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Neem aan dat B belegd is met massa met dichtheid $\rho(x,y,z) = z^2$. Gevraagd wordt de massa van de bol. Eerst merken we op dat we om redenen van symmetrie kunnen zeggen dat de massa van B twee keer de massa is van de halve bol

$G := \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, dus gelijk aan $2 \iint_B \rho d\sigma$.

We gebruiken poolcoördinaten. Er geldt: $\rho = 1 - r^2$, $\hat{f} = \sqrt{1-r^2}$, dus $2\hat{f}\hat{f}' = -2r$, zodat:

$$\begin{aligned} 2 \iint_B \rho d\sigma &= 2 \iint_{B_0} (1-r^2) \sqrt{1+r^2/\hat{f}^2} r dr d\varphi = \\ &= 2 \iint_{B_0} r\sqrt{1-r^2} dr d\varphi = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-r^2} dr^2 = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

8.4. Volume-integralen

8.4.1. Als G een driedimensionaal gebied in \mathbb{R}^3 is als volume-elementen van het type C1 (zie 8.1) worden gekozen, dan schrijven we

$$\int_G f d\mu = \iiint_G f(x,y,z) dx dy dz.$$

Als elementen van het type C2 worden gekozen:

$$\int_G f d\mu = \iiint_G f(r,\varphi,z) r dr d\varphi dz$$

en C3

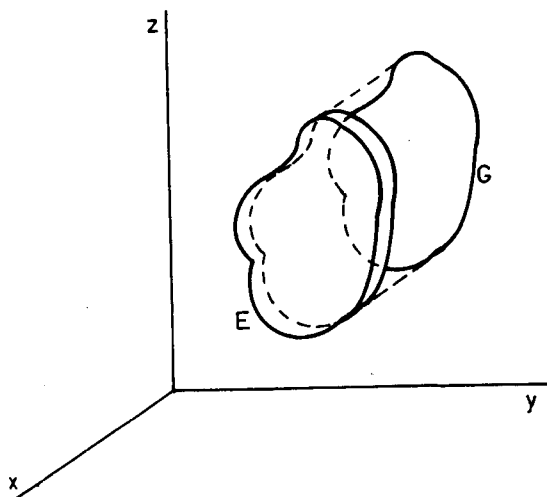
$$\int_G f d\mu = \iiint_G f(\rho,\theta,\varphi) \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi.$$

We merken op dat de integraal weer onafhankelijk is van de keuze van de volume-elementen. Ook hier voeren we p.i.elementen in:

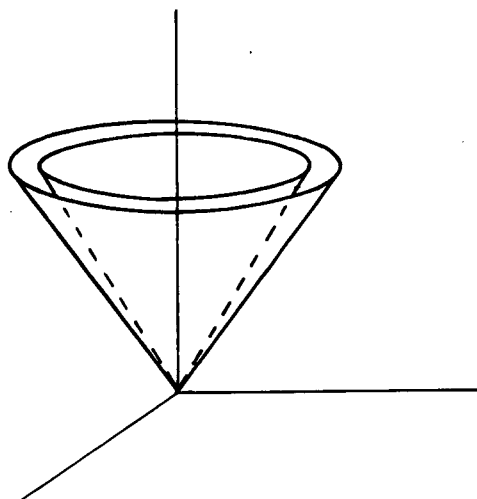
Voorbeelden. 1) De staaf $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$, $g(x,y) \leq z \leq h(x,y)$ waar $\Delta x := x_2 - x_1$, $\Delta y := y_2 - y_1$ klein zijn.

2) De verzameling $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq x \leq x_2, (y,z) \in G\}$, waar G een gebied in \mathbb{R}^2 is, waar $\Delta x := x_2 - x_1$ klein is.

3) Het gebied gegeven door $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $0 \leq r \leq r_1$, met $\Delta\theta := \theta_2 - \theta_1$ klein.



Het p.i. element uit voorbeeld 2.



Het p.i. element uit voorbeeld 3.

8.4.2. Evenals bij oppervlakte-integralen kan men hier de integraal over een p.i. element benaderen door een integraal van lagere dimensie. Zo geldt als f continu is:

$$\text{In voorbeeld 1: } \iiint_E f(x,y,z) dx dy dz \approx \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x_1, y_1, z) dz \right) \Delta x \Delta y .$$

$$\text{In voorbeeld 2: } \iiint_E f(x,y,z) dx dy dz \approx \left(\iint_G f(x_1, y, z) dy dz \right) \Delta x .$$

$$\text{In voorbeeld 3: } \iiint_E f(r, \theta, \varphi) \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\theta d\varphi \approx \left(\iint_G h(\rho, \theta_1, \varphi) \rho^2 d\rho d\varphi \right) \sin \theta_1 \Delta \theta$$

$$\text{waar } G := \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq r_1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

De afleiding van deze formules is dezelfde als in 8.3.

Als we nu een driedimensionaal gebied G in \mathbb{R}^3 hebben en een continue functie f op G , dan verdelen we het gebied in p.i. elementen E_i , we benaderen de integralen over de E_i 's door een- of tweedimensionale integralen en we tellen de resultaten op. Zo kunnen we de drievoudige integraal herleiden tot een herhaalde integraal. Laat bijv. het gebied G als volgt gegeven zijn:

8.4.3. $G := \{(x,y,z) \mid (x,y) \in G_0, g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\},$

waar G_0 een gebied in \mathbb{R}^2 is (dus G_0 is de projectie van G op het xy -vlak).
 Dan vinden we, gebruik makend van p.i. elementen van het type uit voorbeeld 1:

$$\iiint_G f(x,y,z) dx dy dz = \iint_{G_0} \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dx dy .$$

Als G_0 verder gegeven wordt door

$$G_0 := \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\},$$

dan kunnen we de integraal over G_0 ook schrijven als een herhaalde integraal.
 We vinden

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x,y,z) dx dy dz &= \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx = \\ &=: \int_a^b dx \int_{u(x)}^{v(x)} dy \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z) dz . \end{aligned}$$

Voorbeelden. 4) $\iiint \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$ over het gebied G in het eerste octant dat wordt begrensd door de coördinaatvlakken en het vlak $x + y + z = 1$.

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3} &= \int_{x=0}^1 dx \int_{y=0}^{1-x} dy \int_{z=0}^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{-1}{2(x+y+z+1)^2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} = \\ &= -\frac{1}{8} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(x+y+1)^2} = \\ &= -\frac{1}{8} \int_0^1 (1-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\frac{-1}{x+y+1} \right]_{y=0}^{y=1-x} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right] = \frac{1}{2} \log 2 - \frac{5}{16} .$$

- 5) Gevraagd het massa-traagheidsmoment t.o.v. de z-as van de homogene kubus K:
 $|x| \leq h, |y| \leq h, |z| \leq h.$

$$\begin{aligned} T &= \iiint_K (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_{-h}^h dz \int_{-h}^h dy \int_{-h}^h (x^2 + y^2) dx = \\ &= 2h \int_{-h}^h dy \left(\frac{2}{3} h^3 + 2hy^2 \right) = \frac{16}{3} h^5 . \end{aligned}$$

- 6) De inhoud van de 4-dimensionale eenheidsbol $\{(x,y,z,t) \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 1\}$
 in \mathbb{R}^4

$$I = 2 \iiint \sqrt{1-x^2-y^2-z^2} dx dy dz \text{ over } G : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 .$$

Wij gebruiken bolcoördinaten en stellen straks $\rho = \sin \alpha$.

$$\begin{aligned} I &= 2 \iiint \sqrt{1-\rho^2} \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi = \\ &= 2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} d\rho = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \pi^2 . \end{aligned}$$

Stelling. (Guldin (1577-1643)). De inhoud van een omwentelingslichaam is gelijk aan het product van de oppervlakte van een meridiaandoorsnede en de lengte van de baan die het zwaartepunt van de meridiaandoorsnede bij de wenteling aflegt.

Bewijs. Stel dat het omwentelingslichaam L ontstaat door wenteling om de z-as van de in het xz-vlak gelegen schijf G. Wij gebruiken cylindercoördinaten.

$$\text{Inhoud} = \iiint_L dx dy dz = \iiint_L r dr d\varphi dz = 2\pi \iint_G r dr dz = 2\pi \iint_G x dx dz .$$

Voor de x-coördinaat ξ van het zwaartepunt van G geldt (zie 8.1.6, voorbeeld3, iv)

$$\xi \iint_G dx dz = \iint_G x dx dz ,$$

dus

$$\text{Inhoud} = 2\pi\xi \cdot \text{Opp. } G .$$

□

Voorbeelden. 7) Gevraagd de inhoud van het lichaam, begrensd door

$$[\sqrt{x^2+y^2} - a]^2 + z^2 = b^2 , \quad (a > b) .$$

Uit het onderzoek van de doorsnede met $x = 0$ en met $z = 0$ blijkt, dat het lichaam een torus is. De inhoud is dus

$$2\pi a \cdot \pi b^2 = 2\pi^2 ab^2 .$$

8) Gevraagd het zwaartepunt van de helft van de torus, waarvoor $y \geq 0$.

Uit symmetrie-overwegingen volgt dat het zwaartepunt op de y-as ligt.

Voor de y-coördinaat η geldt

$$\begin{aligned} \pi^2 ab^2 \eta &= \iiint y dx dy dz = \iiint r^2 \sin \varphi dr d\varphi dz = \\ &= \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_{a-b}^{a+b} r^2 dr \int_{-\sqrt{\quad}}^{+\sqrt{\quad}} dz \end{aligned}$$

met $\sqrt{\quad} := \sqrt{b^2 - (r-a)^2}$. Stel $r - a = b \cos \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, dan

$$\begin{aligned} \pi^2 ab^2 \eta &= 2 \cdot 2 \int_{a-b}^{a+b} r^2 \sqrt{b^2 - (r-a)^2} dr = \\ &= -4b^2 \int_\pi^0 (a+b \cos \alpha)^2 \sin^2 \alpha d\alpha = 4b^2 [a^2 \frac{\pi}{2} + 0 + b^2 \frac{\pi}{8}] . \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \eta = \frac{4a^2 + b^2}{2\pi a}.$$

De inhoud van een lichaam G wordt gegeven door $\iiint_G dx dy dz$.

Als G wordt gegeven als in 8.4.3, dan vinden we

$$\iint_{G_0} h(x,y) dx dy - \iint_{G_0} g(x,y) dx dy.$$

9) Gevraagd de inhoud van het lichaam dat wordt begrensd door

$$0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq z^2 - x^2 - y^2.$$

Dit lichaam blijkt te zijn een kegel met 0 als top en de z -as als as.

De grondcirkel is de cirkel in $z = 1$, die als projectie op het xy -vlak heeft de cirkel $x^2 + y^2 = 1$.

Als we in bovenstaande formule $G_0 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $h(x,y) = 1$,

$g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ nemen vinden we

$$\begin{aligned} \iint_G 1 \cdot dx dy - \iint_G \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \pi - \iint_G r \cdot r dr d\varphi = \\ &= \pi - 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \pi - 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \pi. \end{aligned}$$

8.5. Oneigenlijke meervoudige integralen

8.5.1. Laat G een begrensd en gesloten tweedimensionaal gebied in \mathbb{R}_2 zijn en laat

$\underline{a} \in G$. Als $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ continu in G is met uitzondering van het punt \underline{a} dan

zeggen we dat $\iint_G f(x,y) dx dy$ absoluut convergeert als

$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{G \setminus B(\underline{a}, \delta)} |f(x,y)| dx dy$ bestaat, waar zoals in 1.5

$$B(\underline{a}, \delta) := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\underline{x} - \underline{a}| < \delta \}.$$

Voldoende voor de convergentie van $I(\delta) := \iint_{G \setminus B(\underline{a}, \delta)} |f(x,y)| dx dy$ is de begrensdheid van $I(\delta)$ voor $\delta \rightarrow 0$, want $I(\delta)$ is een niet-stijgende functie (ga na).

Als de integraal absoluut convergeert, dan bestaat ook

$$\iint_G f(x,y) dx dy := \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{G \setminus B(\underline{a}, \delta)} f(x,y) dx dy.$$

Het bewijs hiervan is analoog aan het bewijs van 2.7.

Zonder bewijs vermelden wij de volgende resultaten.

8.5.2. Stelling. $\iint_G f(x,y) dx dy$ is absoluut convergent dan en slechts dan als

$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} |f(x,y)| dy \right) dx \text{ convergeert. Hierbij is verondersteld dat}$$

$$G := \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

In het geval van absolute convergentie geldt

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy .$$

Een analoog resultaat geldt als we de rol van y en x verwisselen of als we overgaan op poolcoördinaten. Als bijv. G in poolcoördinaten omschreven wordt door $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $u(\varphi) \leq r \leq v(\varphi)$, dan convergeert $\iint f(r,\varphi) r dr d\varphi$ absoluut, dan en slechts dan als

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{u(\varphi)}^{v(\varphi)} |f(r,\varphi)| r dr$$

convergeert.

Uit 8.5.2 volgt, dat wij bij de berekening van oneigenlijke integralen op dezelfde manier te werk kunnen gaan als bij eigenlijke integralen, mits er maar sprake is van absolute convergentie. In het bijzondere geval dat de integrand positief is, hoeven we dit niet apart te controleren.

De absolute convergentie van drievoudige integralen wordt op analoge wijze behandeld. Een analogon van 8.5.2 is hier van toepassing.

Voorbeeld. 1) De potentiaal in een punt $\underline{p} \in \mathbb{R}^3$ tengevolge van een geladen

lichaam G met ladingsdichtheid $d(\underline{x})$ wordt gegeven door $V(\underline{p}) = \iiint_G \frac{d(\underline{x})}{|\underline{x}-\underline{p}|} dx dy dz$.

Als $\underline{p} \in G$, kan deze integraal oneigenlijk zijn. We beschouwen het geval, dat $G := \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $\underline{p} = (0,0,p)$ (een punt op de z -as), en $d(x,y,z) = 1$ voor alle x,y,z . Dan vinden we

$$\begin{aligned} V(\underline{p}) &= \iiint_G \frac{\rho^2 \sin \theta}{|\underline{x}-\underline{p}|} d\rho d\theta d\varphi = 2\pi \iint \frac{\rho^2 \sin \theta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho p \cos \theta + p^2}} d\rho d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{p^2 + \rho^2 - 2p\rho \cos \theta}}. \end{aligned}$$

De integrand is positief, zodat de absolute convergentie uit de gewone convergentie van de herhaalde integralen volgt. Dit laatste zullen we bewijzen door de integraal uit te rekenen. Substitueren we $u := \cos \theta$ in de binnenste integraal, I , dan vinden we:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 (p^2 + \rho^2 - 2p\rho u)^{-\frac{1}{2}} du = -\frac{2}{2p\rho} (p^2 + \rho^2 - 2p\rho u)^{\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^1 = \\ &= \frac{|p+\rho| - |p-\rho|}{p\rho} = \begin{cases} 2/p & \text{als } p \geq \rho \\ 2/\rho & \text{als } p < \rho. \end{cases} \end{aligned}$$

De "buitenste" integraal blijkt eigenlijk te zijn. Als $p \geq 1$, dan vinden we

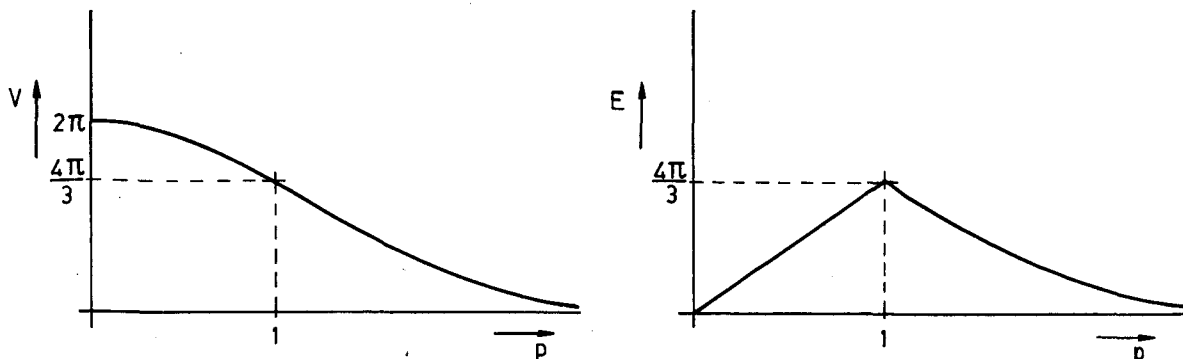
$V(\underline{p}) = \frac{4\pi}{3p} = \frac{Q}{p}$, waar Q de totale lading is. Als $0 < p < 1$, splitsen we de

buitenste integraal in twee stukken $\int_0^1 = \int_0^p + \int_p^1$:

$$\int_0^p = \int_0^p \rho^2 \cdot \frac{2}{p} d\rho = \frac{2}{3} p^2,$$

$$\int_p^1 = \int_p^1 \rho^2 \cdot \frac{2}{\rho} d\rho = 1 - p^2,$$

zodat $V(\underline{p}) = 2\pi(1 - \frac{1}{3} p^2)$.



Voor de veldsterkte $E = -\frac{dV}{dp}$ vinden we

$$E = \frac{4\pi}{3} p \quad (0 < p \leq 1)$$

$$E = \frac{4\pi}{3p^2} \quad (p > 1) .$$

Als de convergentie niet absoluut is dan zijn verwisseling van integratievolgorde en overgang op andere coördinatensystemen in het algemeen niet toegestaan.

Voorbeeld 2. $I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy .$

In de binnenste integraal substitueren we $x = yt$. Dan vinden we

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = -\frac{1}{y} \int_0^y \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{-1}{y^2+1} .$$

Dus $I_1 = \arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$. Door verwisseling van integratievolgorde krijgen we:

$$I_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx .$$

Hier vinden we $I_2 = +\frac{\pi}{4}$ (ga na). Blijkbaar is de integraal $\iint \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ niet absoluut convergent.

We beschouwen nu een onbegrensd en gesloten gebied G . Als $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ continu is in G dan zeggen we dat $\iint_G f(x,y) dx dy$ absoluut convergent is als

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{G \cap B(\underline{0}, R)} |f(x,y)| dx dy \text{ bestaat, waar } B(\underline{0}, R) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\underline{x}| \leq R\}.$$

Ook hier is voor de convergentie van $I(R) := \iint_{G \cap B(\underline{0}, R)} |f(x,y)| dx dy$ de be-

grensheid voldoende op grond van de monotonie. Ook nu heeft de convergentie van $I(R)$ voor $R \rightarrow \infty$ de convergentie van

$$\iint_G f(x,y) dx dy := \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{G \cap B(\underline{0}, R)} f(x,y) dx dy$$

ten gevolge.

Ook hier is een analogon van 8.5.2 van kracht, d.w.z. we kunnen met integralen over onbegrensde gebieden rekenen als met eigenlijke integralen, als we op een of andere manier de absolute convergentie kunnen aantonen (bijv. door middel van herhaalde integralen). De genoemde resultaten gelden ook voor gebieden in \mathbb{R}^3 i.p.v. \mathbb{R}^2 .

In de volgende voorbeelden is de integrand steeds positief zodat de absolute convergentie volgt uit de gewone convergentie van de herhaalde integralen.

Voorbeelden. 3) Gevraagd $\int_0^\infty y^5 dy \int_{y^2}^\infty \frac{dx}{1+x^8}$.

Daar de binnenste integraal te moeilijk is, schrijven wij eerst een dubbel-integraal. Het gebied G is het gebied boven de x -as, dat rechts van de parabool $y^2 = x$ ligt. Er volgt:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y^5 dy \int_{y^2}^\infty \frac{dx}{1+x^8} &= \iint_G \frac{y^5}{1+x^8} dx dy = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^8} \int_0^{\sqrt{x}} y^5 dy = \\ &= \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^8} \cdot \frac{1}{6} x^3 = \frac{1}{24} \int_0^\infty \frac{dx^4}{1+x^8} = \frac{\pi}{48}. \end{aligned}$$

4) Gevraagd $\iint_G \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}$ over $G : 4x^2 + y^2 \geq 1$.

Wij voeren poolcoördinaten in. De vergelijking van de ellips $4x^2 + y^2 = 1$ in poolcoördinaten is $r^2(4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1$. De integraal gaat over in

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2} &= \iint_G \frac{r dr d\varphi}{r^4} = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^3} = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \left[-\frac{1}{r^2} \right]_1^{\infty} = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{5\pi}{2}. \end{aligned}$$

5) Gevraagd $\iiint_G \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ over $G : |z| \geq 3$.

1e manier: met cylindercoördinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$.

Dan

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{r dr d\varphi dz}{(z^2 + r^2)^2} &= 2 \int_3^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^2} = \\ &= - \int_3^{\infty} dz \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{z^2 + r^2} \right]_0^{\infty} d\varphi = 2\pi \int_3^{\infty} \frac{dz}{z^2} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

2e manier: met bolcoördinaten $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \theta$

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\rho}{\rho^4} &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{3/\cos \theta}^{\infty} \frac{\sin \theta}{\rho^2} d\rho = \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \left[-\frac{1}{\rho} \right]_{3/\cos \theta}^{\infty} = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

8.6. Gammafunctie, betafunctie

We zullen een toepassing van de resultaten van 8.5 geven op enkele functies die veel worden gebruikt in de mathematische physica en de statistiek. Voor $x > 0$ definiëren we de gammafunctie door

$$8.6.1. \quad \Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt .$$

De convergentie van deze integraal moet onderzocht worden in $t = 0$ en $t = \infty$.

We splitsen het integratie-interval: $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$.

Laat $0 < a < b < \infty$ en $a \leq x \leq b$. Op $[0,1]$ geldt de ongelijkheid

$$0 \leq e^{-t} t^{x-1} \leq t^{a-1} .$$

Omdat $\int_0^1 t^{a-1} dt$ convergeert, volgt hieruit de convergentie van $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ (zie 2.7, voorbeeld 6). (Als $x \geq 1$, dan is de integraal op $[0,1]$ eigenlijk.) Op $[1,\infty)$ geldt

$$0 \leq e^{-t} t^{x-1} \leq e^{-t} t^{b-1} \leq K t^{-2} \text{ voor zekere } K > 0.$$

De laatste ongelijkheid volgt uit het feit, dat $e^{-t} t^{b+1} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) zodat $e^{-t} t^{b+1} \leq K$. (Een continue functie op $[1,\infty)$, die een limiet heeft dat $t \rightarrow \infty$, is begrensd.) We zien dat ook $\int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ convergeert (2.7, voorbeeld 7). Er geldt $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ en $\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = -e^{-t} t^x \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$, dus

$$8.6.2. \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0).$$

In het bijzonder volgt hieruit

$$8.6.3. \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Verder definiëren we de betafunctie:

$$8.6.4. \quad B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (p > 0, q > 0).$$

De convergentie van $B(p,q)$ kan worden aangetoond door splitsing van het integratie-interval ($\int_0^1 = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1$) (ga na). Door de substitutie $t = \sin^2 \varphi$ in 8.6.4 krijgen we een andere integraalvoorstelling van de betafunctie:

$$8.6.5. \quad B(p,q) := 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi)^{2p-1} (\cos \varphi)^{2q-1} d\varphi.$$

Het verband tussen de gamma- en de betafunctie wordt gelegd door:

$$8.6.6. \quad \text{Stelling. } B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Bewijs. $\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt \int_0^\infty e^{-s} s^{q-1} ds$. Door de substitutie $t = x^2$, $s = y^2$ vinden we

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2q-1} dy = \\ &= 4 \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-x^2-y^2} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy. \end{aligned}$$

De dubbelintegraal over $\mathbb{R}_+^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ convergeert absoluut vanwege de absolute convergentie van de herhaalde integraal. We mogen op poolcoördinaten overgaan:

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2} r^{2p+2q-2} (\cos \varphi)^{2p-1} (\sin \varphi)^{2q-1} r dr d\varphi = \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-r^2} (r^2)^{p+q-1} dr^2 \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^{2p-1} (\sin \varphi)^{2q-1} d\varphi = \\ &= \Gamma(p+q)B(p,q). \end{aligned}$$

□

Nemen we in de stelling $p = q = \frac{1}{2}$, dan vinden we

$$(\Gamma(\frac{1}{2}))^2 = B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi = \pi.$$

Wegens $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$ volgt hieruit

8.6.7. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$

Voorbeeld 1. Gevraagd de oppervlakte binnen de astroïde $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

Wij tekenen de grafiek door op te merken, dat er symmetrie t.o.v. de x-as en t.o.v. de y-as bestaat, dat met impliciet differentiëren volgt $y' = -(y/x)^{1/3}$, en dat de functie

$$y = (1-x^{2/3})^{3/2}$$

verloopt binnen $|x| \leq 1$.

Nu is $\mathcal{O} = 4 \int_0^1 (1-x^{2/3})^{3/2} dx$. Stel $x^{2/3} = t$, dan

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= 6 \int_0^1 (1-t)^{\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{2}} dt = 6B(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}) = 6 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)} = \\ &= 6 \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})}{3!} = \frac{3}{8} \pi. \end{aligned}$$

We kunnen $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ d.m.v. (2) en (6) recursief berekenen. Er volgt

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \dots \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1) \dots 3 \cdot 1}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

Vanwege $(2n-1) \dots 3 \cdot 1 = \frac{2n(2n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2n \cdot (2n-2) \dots 2} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ geldt:

8.6.8. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n-1) \dots 3 \cdot 1}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}.$

We geven twee toepassingen van deze formules.

In de statistiek speelt de errorfunctie

8.6.9.
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

een belangrijke rol. Meetkundig stelt zij voor de oppervlakte tussen de t-as, de rechten $t = -x$ en $t = x$, en de grafiek van $f(t) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-t^2}$.

Opmerking 1. De errorfunctie is een voorbeeld van een functie, die is gedefinieerd als een niet in elementaire functies uit te drukken integraal. Voor numerieke tabellen zie Jahnke-Emde, Tables of functions.

Opmerking 2. De grafiek van de functie $f(t) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-t^2}$ is een speciaal geval van de foutenkromme van Gauss (of normale frequentiekromme)

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

namelijk voor $\mu = 0$ en $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\exp x = e^x$, zie 2.5 voorbeeld 10). Bij een experiment, dat een groot aantal malen wordt herhaald, blijkt (zie H. Freudenthal, Waarschijnlijkheid en statistiek) de kans op een waarneming tussen a en b vaak te zijn

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dt$$

waarin μ het gemiddelde en σ de spreiding van de waarnemingen is. De kans op een waarneming tussen $-\infty$ en ∞ moet dan 1 zijn. Voor $\operatorname{erf}(x)$ zou dit betekenen

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 1.$$

Inderdaad zien we door de substitutie $t = \sqrt{s}$, dat $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ (8.6.7). Algemeener vinden we op deze manier de volgende formules:

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} dt = \frac{1}{2} \Gamma(n+1) = \frac{1}{2} n!$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} dt = \frac{1}{2} \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n+1} n!}.$$

Er geldt

$$I_{mn} := \int_0^{\pi/2} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \quad (\text{zie 8.6.5}).$$

Als m en n natuurlijke getallen zijn kunnen we expliciete formules vinden.

Immers volgens 8.6.6 is $B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}$ en $\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)$ is bekend uit 8.6.3 en 8.6.8.

Voorbeelden. 2) $\int_0^{\pi/2} \sin^7 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B(4, 2) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(4)\Gamma(2)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2} \frac{3!1!}{5!} = \frac{1}{40}.$

3) $\int_0^{\pi/2} \sin^8 \varphi \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(7)} =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^4} \sqrt{\pi} \cdot \frac{3 \cdot 1}{2^2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{6!} = \frac{7\pi}{2048}.$

4) Gevraagd het massa-traagheidsmoment t.o.v. de z-as van het homogene lichaam G, dat door het vlak $z = x$ wordt afgesneden van de omwentelingsparaboloïde $x^2 + y^2 = z$. Wij voeren cylindercoördinaten in; dan is de vergelijking van het vlak $z = r \cos \varphi$ en van de paraboloïde $z = r^2$. Voor de projectie van de snijfiguur geldt $r = \cos \varphi$.

$$T = \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint r^3 dr d\varphi dz = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^3 dr \int_{r^2}^{r \cos \varphi} dz =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} dr [r^4 \cos \varphi - r^5] = \frac{1}{15} \int_0^{\pi/2} \cos^6 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{96}.$$

8.7. Integralen met een parameter

De functie

$$8.7.1. \quad F(a) := \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos x dx, \quad a > 0$$

is een voorbeeld van een functie die is gedefinieerd d.m.v. een integraal met een parameter. In 2.8.2 is berekend, dat $F(a) = \frac{a}{a^2+1}$. Als we aannemen dat we $F(a)$ kunnen differentiëren door in 8.7.1 "onder het integraalteken" te differentiëren krijgen we:

$$F'(a) = - \int_0^{\infty} e^{-ax} x \cos x dx \quad \text{en dus}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x \cos x dx = - \frac{d}{da} \left(\frac{a}{a^2+1} \right) = \frac{a^2-1}{(a^2+1)^2}.$$

We willen nu nagaan wanneer deze verwisseling van integratie en differentiatie is toegestaan. Laat $-\infty < a < b < \infty$ en laat $f(x,t)$ gedefinieerd zijn op $(a,b) \times [c,d]$ en $x \mapsto f(x,t)$ continu op (a,b) voor alle $t \in [c,d]$. We zeggen dat

$$8.7.2. \quad F(t) := \int_a^b f(x,t) dx$$

gemajoreerd convergent is, als er een niet-negatieve functie g op (a,b) bestaat zodat $\int_a^b g(x) dx$ convergeert en $|f(x,t)| \leq g(x)$ voor alle t en x .

We zijn in het bijzonder geïnteresseerd in de situatie waar $a = -\infty$ en/of $b = \infty$ en ook waar $-\infty < a < b < \infty$ en $|f(x,t)| \rightarrow \infty$ voor $x \uparrow a$ of $x \uparrow b$. Anders gezegd, we zijn geïnteresseerd in de situatie waarbij 8.7.2 een oneigenlijke integraal is. Als immers $-\infty < a < b < \infty$ en als f continu is op $[a,b] \times [c,d]$, dan is f begrensd (4.7.1) (we zullen steeds aannemen dat c en d eindig zijn). Dan is 8.7.2 altijd gemajoreerd convergent (we kunnen g constant, bijv. $g = \max|f|$ kiezen).

De volgende eigenschap is fundamenteel:

8.7.3. Stelling (gemajoreerde-convergentiestelling). Neem aan dat 8.7.2 gemajoreerd convergent is. Als $t_0 \in [c,d]$ en als voor elke $x \in (a,b)$ geldt $f(x,t) \rightarrow h(x)$ ($t \rightarrow t_0$), waar h een continue functie is op (a,b) , dan geldt $F(t) \rightarrow \int_a^b h(x)dx$ ($t \rightarrow t_0$). In het bijzonder bestaat $\int_a^b h(x)dx$.

We zullen deze stelling niet bewijzen. De stelling zegt, dat men de limiet onder het integraalteken mag nemen, als aan de gemajoreerde convergentie is voldaan. Dit resultaat geldt ook als men i.p.v. $t \rightarrow t_0$ heeft $t \rightarrow \infty$ (hierbij wordt f gedefinieerd verondersteld op een verzameling van de vorm $(a,b) \times [c,\infty)$) of als men i.p.v. één parameter, meerdere parameters heeft. Als de convergentie van 8.7.2 niet gemajoreerd is dan mag men de limiet niet onder het integraalteken nemen, zoals volgt uit het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 1. $F(t) = \int_0^{\infty} te^{-tx} dx$. Voor elke $t \geq 0$ convergeert de integraal absoluut (ga na). Voor alle $x \geq 0$ geldt $te^{-tx} \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$). Er geldt echter niet $F(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$), want $F(t) = \int_0^{\infty} e^{-y} dy = 1$. De convergentie van de integraal is inderdaad niet gemajoreerd, want als er een functie g bestaat met $te^{-tx} \leq g(x)$ voor alle positieve t en x , dan geldt dit in het bijzonder als we $t = 1/x$ invullen. Hieruit volgt $g(x) \geq \frac{1}{ex}$, zodat $\int_0^{\infty} g(x)dx$ niet bestaat.

We noemen een aantal toepassingen van 8.7.3.

8.7.4. Stelling. Als $f : (a,b) \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ continu is en 8.7.2 gemajoreerd convergent, dan is F continu op $[c,d]$.

8.7.5. Stelling. Laat voldaan zijn aan de volgende voorwaarden:

- i) $f : (a,b) \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ is continu.
- ii) Voor elke $x \in (a,b)$ is de functie $t \mapsto f(x,t)$ continu differentieerbaar op $[c,d]$.

iii) $F(t) := \int_a^b f(x,t)dx$ convergeert voor elke $t \in [c,d]$.

iv) $G(t) := \int_a^b f_t(x,t)dx$ convergeert gemajoreerd.

Dan geldt: $F'(t) = G(t)$ voor $t \in [c,d]$.

Bewijs. Laat $t_0 \in [c,d]$. Beschouw de functie

$$\varphi(x,\tau) := \frac{f(x,t_0+\tau) - f(x,t_0)}{\tau} \quad (\tau \neq 0)$$

$$\varphi(x,0) := f_t(x,t_0).$$

Dan geldt $\varphi(x,\tau) \rightarrow \varphi(x,0)$ ($\tau \rightarrow 0$) voor elke $x \in (a,b)$. Verder bestaat er op grond van de middelwaardstelling (2.6.7) voor elke (x,τ) een getal $\theta \in (0,1)$ met $\varphi(x,\tau) = f_t(x,t_0+\theta\tau)$. Hieruit volgt $|\varphi(x,\tau)| \leq g(x)$, waar g een majorerende

functie van f_t is. Uit 8.7.3 volgt nu, $\int_a^b \varphi(x,\tau)dx \rightarrow \int_a^b \varphi(x,0)dx$ ($\tau \rightarrow 0$), dus

$$\frac{F(t_0+\tau) - F(t_0)}{\tau} \rightarrow G(t_0). \quad \square$$

Het laatste resultaat zegt dus, dat men onder het integraalteken mag differentiëren, mits de convergentie van de gedifferentieerde integraal gemajoreerd is. Als voorbeeld beschouwen we de integraal 8.7.1. Laat $a_0 > 0$. We kiezen $\varepsilon > 0$, zodanig dat $a_0 - \varepsilon > 0$ en we beschouwen het interval $[a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon]$. Op dit interval is $e^{-ax} \cos x$ gemajoreerd door $x e^{-(a_0 - \varepsilon)x}$. Daarom mag men hier inderdaad onder het integraalteken differentiëren. Merk op, dat de gemajoreerdheid alleen nodig is in een omgeving van a_0 .

Op grond van de opmerkingen die vooraf gaan aan 8.7.3 vinden wij het volgende resultaat als specialisatie van 8.7.4 en 8.7.5.

8.7.6. Stelling. Als $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ continu, dan is

$F(t) := \int_a^b f(x,t)dx$ continu. Als bovendien f differentieerbaar is en f_t continu op $[a,b] \times [c,d]$, dan is $F'(t) = \int_a^b f_t(x,t)dx$.

Voor eigenlijke integralen hoeven we dus de gemajoreerdheid niet afzonderlijk te verifiëren. Stelling 8.7.6 geldt ook als we te maken hebben met meer parameters.

Voorbeelden. 2) Zij $h : [c,d] \rightarrow [0,1]$ continu en positief, $f : [0,1] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$

continu. Dan is $t \mapsto F(t) := \int_0^{h(t)} f(x,t) dx$ continu. Immers, door de substitutie $x = h(t)y$ vinden we $F(t) = h(t) \int_0^1 f(h(t)y,t) dy$ en we kunnen 8.7.6 toepassen. Als bovendien $f(x,t)$ en $h(t)$ continu differentieerbaar zijn, dan volgt hieruit dat $F(t)$ continu differentieerbaar is. De afgeleide vindt men het gemakkelijkste d.m.v. de kettingregel: Er geldt nl. $F(t) = H(t, h(t))$,

waar $H(t,u) := \int_0^u f(x,t) dx$.

$$\text{Dus } F'(t) = H_t(t, h(t)) + H_u(t, h(t))h'(t) = \int_0^{h(t)} f_t(x,t) dx + h'(t)f(h(t), t).$$

We hebben hier gebruik gemaakt van de differentieerbaarheid van $(t,u) \mapsto H(t,u)$, d.w.z. we hebben 8.7.6 toegepast voor twee parameters.

Een analoog resultaat vindt men voor $F(t) = \int_{g(t)}^{h(t)} f(t,x) dx$, (vergelijk 8.3).

3) Gedwongen ongedempte trilling (zie 5.8) :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + k^2 u = kf(t), \quad u(0) = \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = 0.$$

De oplossing is

$$u(t) = \int_0^t f(\tau) \sin k(t-\tau) d\tau.$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= k \int_0^t f(\tau) \cos k(t-\tau) d\tau + f(t) \sin k(t-t) \frac{dt}{dt} = \\ &= k \int_0^t f(\tau) \cos k(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Wegens

$$\int_0^0 \dots d\tau = 0 \text{ is } u(0) = \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = 0 .$$

Nogmaals differentiëren geeft

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -k^2 \int_0^t f(\tau) \sin k(t-\tau) d\tau + kf(t) = -k^2 u + kf(t) .$$

- 4) In de statica komen de volgende integralen voor bij een staaf met lengte l langs de x -as met dwarsbelasting $q(x)$.

De kracht in het punt x :

$$F(x) = \int_x^l q(y) dy$$

en het moment:

$$M(x) = \int_x^l (x-y)q(y) dy .$$

Dan geldt

$$F'(x) = -q(x)$$

en

$$M'(x) = \int_x^l q(y) dy = F(x), \text{ dus } M''(x) = -q(x).$$

- 5) We hebben aangetoond dat

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

gemajoreerd convergeert voor $x \in [a, b]$, waar $0 < a < b < \infty$. Hieruit volgt dat $\Gamma(x)$ continu is. Omdat a en b willekeurig zijn (afgezien van de voorwaarde $0 < a < b < \infty$), zien we dat $\Gamma(x)$ continu is voor $0 < x < \infty$. Op analoge manier toont men aan dat $B(p, q)$ continu is voor $p > 0, q > 0$. (Dit volgt ook uit 8.6.6.)