

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 20

bestemd voor

BDK-II, WSK-II, N-II, E-II en T-II

Voorjaarssemester 1978

**Wiskunde 20**

bestemd voor BDK - II, WSK - II, N - II, W - II, E - II, T - II en INF - II

20

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 20

bestemd voor

BDK-II, WSK-II, N-II, W-II, E-II en T-II

Voorjaarssemester 1978

<u>Inhoudsopgave</u>	blz.
<u>Hoofdstuk 1. Vectormeetkunde in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3</u>	
1. Rechten en vlakken	1
2. Inwendig product en uitwendig product	5
3. Afstandsbepaling	9
<u>Hoofdstuk 2. Functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ en functies $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$</u>	
1. Functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$	13
2. Functies van twee variabelen	25
3. Functies van drie variabelen	44
4. Impliciete functies	50
5. Richtingsafgeleide en gradiënt	55
6. Extrema	59
7. Extrema onder nevenvoorwaarden	62
<u>Hoofdstuk 3. Lineaire algebra</u>	
1. De n-dimensionale reële coördinatenruimte, \mathbb{R}^n	69
2. Stelsels lineaire vergelijkingen	83
3. Lineaire ruimten	94
4. Lineaire afbeeldingen	110
5. Matrices en lineaire afbeeldingen	120
6. Lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$	131
7. Eigenwaarden en eigenvectoren	147
8. Orthogonaliteit	151
9. Orthogonale afbeeldingen	162
<u>Hoofdstuk 4. Meervoudige integralen</u>	
1. Integratiegebieden en infinitesimale elementen	174
2. Lijnintegralen	177
3. Oppervlakte-integralen in \mathbb{R}^2	180
4. Oppervlakte-integralen in \mathbb{R}^3	190
5. Volume-integralen	194
6. Oneigenlijke meervoudige integralen	204
7. Gammafunctie, betafunctie	208
8. Integralen met een parameter	213

Hoofdstuk 1. Vectormeetkunde in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3

In dit hoofdstukje wordt de vectornotatie voor lijnen en vlakken besproken en een aantal technieken behandeld om met behulp van deze notatie stereometrische problemen als het bepalen van de afstand tussen twee rechten, etc., op te lossen.

1. Rechten en vlakken

1.1.1. We kiezen in het platte vlak resp. in de ruimte een loodrecht assenstelsel. Punten in het platte vlak kunnen we nu weergeven door de twee coördinaten ten opzichte van dit assenstelsel, dus door een element van \mathbb{R}^2 , en punten in de ruimte door de drie coördinaten ten opzichte van het assenstelsel, dus door een element van \mathbb{R}^3 .

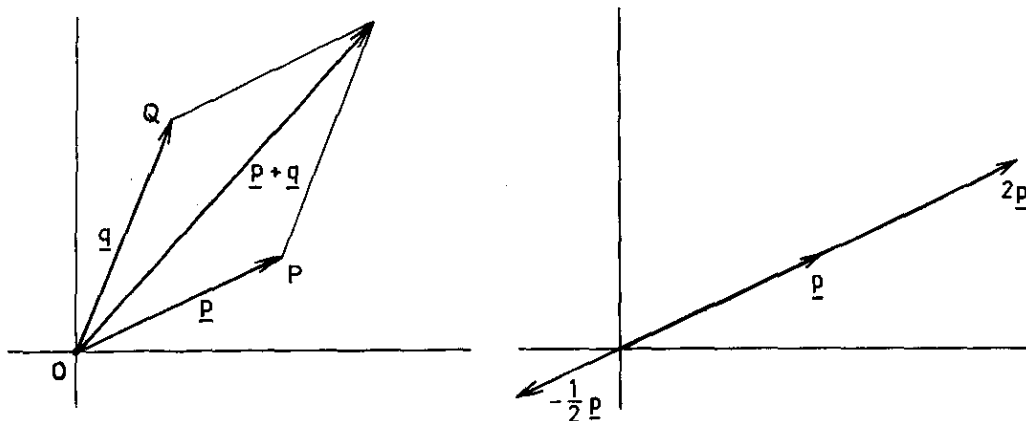
Het is gebruikelijk een punt P in het platte vlak (de ruimte) te identificeren met de vector \underline{p} , het gerichte lijnstuk ("pijl") met als beginpunt de oorsprong O van het assenstelsel en als eindpunt P . De coördinaten van de vector \underline{p} zijn dan de coördinaten van zijn eindpunt P , zeg p_1, p_2 (resp. p_1, p_2, p_3) en we schrijven $\underline{p} = (p_1, p_2)$ (resp. $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$).

De nulvector $\underline{0}$ is per definitie de vector $(0,0)$ (resp. $(0,0,0)$), dus de oorsprong, O .

We zullen in het vervolg geen onderscheid maken tussen:

- i) de vector (het gerichte lijnstuk vanuit O) met eindpunt P ,
- ii) het punt P ,
- iii) het element $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ (resp. $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$), waar p_1, p_2 (resp. p_1, p_2, p_3) de coördinaten van P zijn.

1.1.2. De som $\underline{p} + \underline{q}$ van twee vectoren \underline{p} en \underline{q} is per definitie de diagonaal vanuit de oorsprong van het parallellogrammet de vectoren \underline{p} en \underline{q} als zijden.



Het scalaire product $\lambda \underline{p}$ van een vector \underline{p} en een reëelgetal λ is de vector met eindpunt gelegen op de rechte door $\underline{0}$ en \underline{p} , met lengte $|\lambda| \times$ de lengte van \underline{p} , in de richting van \underline{p} als λ positief is en in de tegengestelde richting van \underline{p} als λ negatief is. Voor $\lambda = 0$ of $\underline{p} = \underline{0}$ is $\lambda \underline{p}$ de nulvector.

Een eenvoudige verificatie geeft nu: als $\underline{p} = (p_1, p_2)$ en $\underline{q} = (q_1, q_2)$, dan $\underline{p} + \underline{q} = (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$ en $\lambda \underline{p} = (\lambda p_1, \lambda p_2)$. Optelling en scalaire vermenigvuldiging geschiedt dus coördinaatsgewijs. Analoge formules gelden in \mathbb{R}^3 .

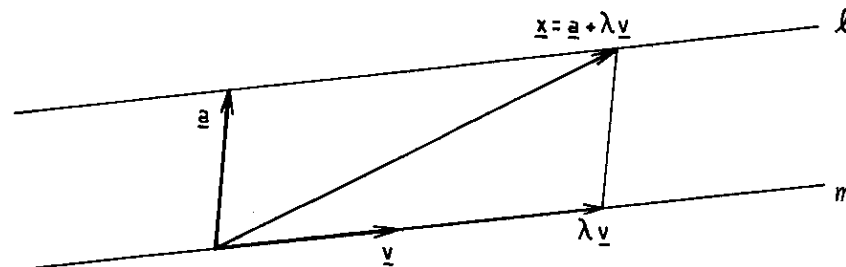
Vaak noteren we $\underline{e}_1 = (1, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1)$ in \mathbb{R}^2 , resp. $\underline{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\underline{e}_3 = (0, 0, 1)$ in \mathbb{R}^3 . Voor een vector $\underline{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ geldt dan

$$\underline{p} = p_1 \underline{e}_1 + p_2 \underline{e}_2$$

en voor een vector $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ geldt dan

$$\underline{p} = p_1 \underline{e}_1 + p_2 \underline{e}_2 + p_3 \underline{e}_3 .$$

1.1.3. Laat \underline{v} een vector in \mathbb{R}^2 of \mathbb{R}^3 zijn. Als $\underline{v} \neq \underline{0}$, dan liggen scalaire veelvouden $\lambda \underline{v}$ op de rechte lijn m door $\underline{0}$ en \underline{v} ; omgekeerd is ieder punt van m een scalaair veelvoud van \underline{v} . Tellen we nu bij iedere vector $\lambda \underline{v}$ een vaste vector \underline{a} op, dan liggen de eindpunten van de vectoren $\underline{a} + \lambda \underline{v}$ op een rechte ℓ , die evenwijdig is aan m (of samenvalt met m , als $\underline{a} \in m$).



Omgekeerd kan ook ieder punt op ℓ geschreven worden als som van \underline{a} en een veelvoud van \underline{v} . We noemen $\underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{v}$ een *parameterrepresentatie* van de rechte ℓ . De vector \underline{a} heet een *steunvector* van ℓ en de vector \underline{v} een *richtingsvector* van ℓ . Ga zelf na dat ieder punt van ℓ steunvector voor een parameterrepresentatie van ℓ kan zijn, en dat iedere vector $\alpha \underline{v}$ met $\alpha \neq 0$ eveneens een richtingsvector van ℓ is.

Wanneer voor de rechten

$$\ell : \underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{u}$$

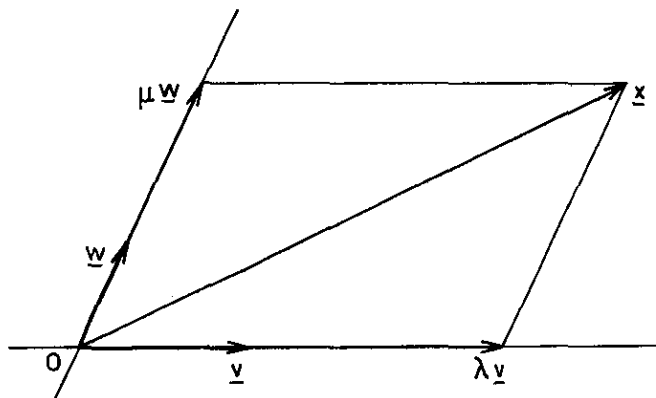
en $m : \underline{x} = \underline{b} + \mu \underline{v}$

geldt dat $\underline{0}$, \underline{u} en \underline{v} op één rechte liggen, dan zijn ℓ en m *evenwijdig*.

Indien bovendien $\underline{b} \in \ell$ dan spreken we van *samenvallende rechten*: $\ell = m$;

we beschouwen dit als een bijzonder geval van evenwijdigheid.

1.1.4. Laten \underline{v} en \underline{w} twee vectoren in het platte vlak of de ruimte zijn. Een vector \underline{x} heet een *lineaire combinatie* van \underline{v} en \underline{w} als er getallen λ en μ bestaan, zó dat $\underline{x} = \lambda \underline{v} + \mu \underline{w}$.



Laten \underline{v} en \underline{w} vectoren in \mathbb{R}^3 zijn. Het is eenvoudig in te zien dat als $\underline{0}$, \underline{v} en \underline{w} niet op een rechte liggen (dus als \underline{v} geen veelvoud is van \underline{w} en \underline{w} geen veelvoud van \underline{v}), alle lineaire combinaties van \underline{v} en \underline{w} het vlak V vormen door $\underline{0}$ en de eindpunten van \underline{v} en \underline{w} . Tellen we bij iedere vector van V een vaste vector \underline{a} op, dan vormen (de eindpunten van) de somvectoren $\underline{a} + \lambda \underline{v} + \mu \underline{w}$ een vlak W , dat door \underline{a} gaat en evenwijdig is aan V (of dat met V samenvalt, wanneer $\underline{a} \in V$). We noemen $\underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{v} + \mu \underline{w}$ een *parameterrepresentatie van het vlak* W . De vector \underline{a} heet een *steunvector* van W , en \underline{v} en \underline{w} heten *richtingsvectoren* van W . Evenmin als dat bij de parameterrepresentatie van een rechte lijn het geval is, zijn bij de parameterrepresentatie van een vlak de steunvector en de richtingsvectoren door het vlak eenduidig bepaald.

Als voor de vlakken

$$U : \underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{u} + \mu \underline{v}$$

en
$$W : \underline{x} = \underline{b} + \rho \underline{w} + \sigma \underline{t}$$

geldt dat \underline{w} en \underline{t} liggen in het vlak door $\underline{0}$, \underline{u} en \underline{v} dan zijn U en W *evenwijdig*. Als bovendien $\underline{b} \in U$ dan vallen U en W samen; we beschouwen dit als een bijzonder geval van evenwijdigheid.

1.1.5. Laat $(x_1, x_2) = (a_1, a_2) + \lambda(v_1, v_2)$ de parameterrepresentatie van een rechte in \mathbb{R}^2 zijn. Dan geldt

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda v_1, \\ x_2 = a_2 + \lambda v_2, \end{cases}$$

waaruit door eliminatie van λ een lineaire vergelijking

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$$

gevonden wordt, de *vergelijking van de rechte* ℓ . Omgekeerd wordt uit de vergelijking van een rechte ℓ door een van de variabelen als parameter te kiezen eenvoudig een parameterrepresentatie van ℓ gevonden.

1.1.6. Voorbeelden.

1) De rechte ℓ wordt in parametervoorstelling gegeven door

$$(x_1, x_2) = (1, -1) + \lambda(1, 2) .$$

Dan geldt

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \lambda , \\ x_2 = -1 + 2\lambda . \end{cases}$$

Uit de eerste vergelijking volgt $\lambda = x_1 - 1$, wat gesubstitueerd in de tweede vergelijking geeft $2x_1 - x_2 = 3$, de vergelijking van ℓ .

2) De rechte ℓ wordt gegeven door de vergelijking

$$2x_1 - x_2 = 3 .$$

Neem bijvoorbeeld $x_1 = \lambda$, dan is $x_2 = -3 + 2\lambda$, dus $(x_1, x_2) = (0, -3) + \lambda(1, 2)$ is een parametervoorstelling voor ℓ .

1.1.7. Net zoals in \mathbb{R}^2 lineaire vergelijkingen corresponderen met parametervoorstellingen van rechten in \mathbb{R}^2 , corresponderen lineaire vergelijkingen in \mathbb{R}^3 met parametervoorstellingen van vlakken in \mathbb{R}^3 .

Voorbeeld. Het vlak V wordt gegeven door

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, -2) + \lambda(1, -1, 0) + \mu(2, -1, -1) .$$

Dan is

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \lambda + 2\mu , \\ x_2 = 1 - \lambda - \mu , \\ x_3 = -2 - \mu , \end{cases}$$

waaruit na eliminatie van λ en μ volgt

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 .$$

Omgekeerd, stel het vlak V wordt gegeven door

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 .$$

Stel

$$x_1 = \lambda ,$$

$$x_2 = \mu ,$$

dan is $x_3 = -\lambda - \mu ,$

zodat

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda(1, 0, -1) + \mu(0, 1, -1) .$$

1.1.8. Elimineren we de parameter uit de parametervoorstelling van een rechte in \mathbb{R}^3 , dan vinden we de rechte als snijlijn van twee vlakken.

Voorbeeld. Zij de rechte ℓ in parametervoorstelling gegeven door

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 4) + \lambda(1, -1, -3)$$

$$\begin{cases} x_1 = \lambda , \\ x_2 = 1 - \lambda , \\ x_3 = 4 - 3\lambda . \end{cases}$$

Substitueer x_1 voor λ in de tweede en derde vergelijking:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 , \\ 3x_1 + x_3 = 4 . \end{cases}$$

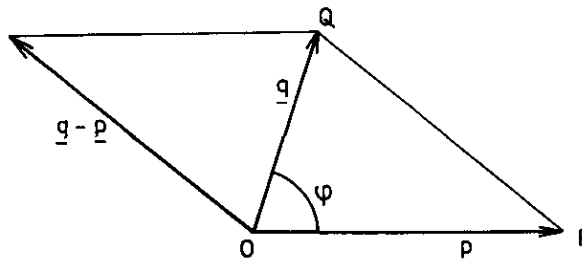
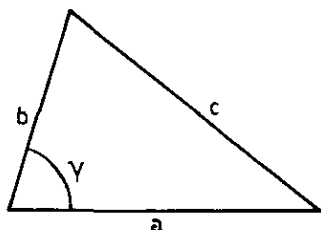
De rechte ℓ is de snijlijn van deze twee vlakken.

2. Inwendig product en uitwendig product

1.2.1. De *lengte* van een vector \underline{p} noteren we door $\|\underline{p}\|$. Als $\underline{p} = (p_1, p_2)$ dan is $\|\underline{p}\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$, als $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ dan is $\|\underline{p}\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$.

1.2.2. Het *inwendig product* $(\underline{p}, \underline{q})$ van twee vectoren \underline{p} en \underline{q} in het platte vlak of in de ruimte is $(\underline{p}, \underline{q}) = \|\underline{p}\| \cdot \|\underline{q}\| \cdot \cos \varphi$, waarin φ de hoek tussen \underline{p} en \underline{q} is. Hieruit volgt $(\underline{p}, \underline{q}) = 0$ dan en slechts dan als $\underline{p} = \underline{0}$ of $\underline{q} = \underline{0}$ of $\underline{p} \perp \underline{q}$. Van deze eigenschap zullen we in het vervolg nog vaak gebruik maken.

1.2.3. We kunnen het inwendig product van twee vectoren \underline{p} en \underline{q} uitdrukken in de coördinaten van \underline{p} en \underline{q} . Daartoe gebruiken we de uit het V.W.O. bekende còsinus-regel $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ (zie de linker figuur).



Passen we dit toe op driehoek OPQ in de rechter figuur, dan vinden we

$$\|\underline{q} - \underline{p}\|^2 = \|\underline{p}\|^2 + \|\underline{q}\|^2 - 2\|\underline{p}\|\|\underline{q}\|\cos \varphi ,$$

$$(\underline{p}, \underline{q}) = \|\underline{p}\|\|\underline{q}\|\cos \varphi = \frac{1}{2}(\|\underline{p}\|^2 + \|\underline{q}\|^2 - \|\underline{q} - \underline{p}\|^2) .$$

Nemen we \underline{p} en \underline{q} in \mathbb{R}^2 , $\underline{p} = (p_1, p_2)$, $\underline{q} = (q_1, q_2)$, dan vinden we

$$\begin{aligned} (\underline{p}, \underline{q}) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2 - (q_1 - p_1)^2 - (q_2 - p_2)^2) = \\ &= p_1q_1 + p_2q_2 . \end{aligned}$$

Als \underline{p} en \underline{q} in \mathbb{R}^3 liggen met $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\underline{q} = (q_1, q_2, q_3)$, dan vinden we op dezelfde manier

$$(\underline{p}, \underline{q}) = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 .$$

Nemen we in deze formules $\underline{p} = \underline{q}$, dan vinden we

$$(\underline{p}, \underline{p}) = \|\underline{p}\|^2 .$$

Ook deze formule zullen we in het vervolg nog vaak gebruiken.

1.2.4. Voorbeelden.

1) Het inwendig product van de vectoren (1,2,3) en (4,0,-1) is

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 1 .$$

2) De lengte van (5,3,4) is $\sqrt{25 + 9 + 16} = 5\sqrt{2}$; de lengte van (2,-1,2) is $\sqrt{4 + 1 + 4} = 3$. De hoek φ tussen (5,3,4) en (2,-1,2) vinden we dus uit

$$5\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos \varphi = 5 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 ,$$

dus $\cos \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$.

1.2.5. Met behulp van de formule $(\underline{p}, \underline{q}) = \sum p_i q_i$ verifiëren we de volgende rekenregels voor inwendige producten:

$$(\underline{p}, \underline{q}) = (\underline{q}, \underline{p})$$

$$(\underline{p} + \underline{q}, \underline{r}) = (\underline{p}, \underline{r}) + (\underline{q}, \underline{r})$$

$$(\lambda \underline{p}, \underline{q}) = \lambda (\underline{p}, \underline{q}) .$$

Hieruit volgt weer

$$(\alpha \underline{p} + \beta \underline{q}, \gamma \underline{r} + \delta \underline{s}) = \alpha \gamma (\underline{p}, \underline{r}) + \alpha \delta (\underline{p}, \underline{s}) + \beta \gamma (\underline{q}, \underline{r}) + \beta \delta (\underline{q}, \underline{s}) .$$

De rekenregels zijn dus volkomen analoog aan die voor de vermenigvuldiging bij de reële getallen.

1.2.6. In 1.1.5 hebben we gezien dat iedere rechte in het platte vlak een vergelijking van de vorm

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$$

heeft. Noteren we $\underline{a} = (\alpha, \beta)$, $\underline{x} = (x_1, x_2)$ dan wordt deze vergelijking

$$(\underline{a}, \underline{x}) = \gamma .$$

De rechte $(\underline{a}, \underline{x}) = 0$ is evenwijdig aan, of valt samen met de rechte $(\underline{a}, \underline{x}) = \gamma$, want als $\gamma \neq 0$ zijn er geen snijpunten, en als $\gamma = 0$ vallen de rechten samen. De vector \underline{a} staat loodrecht op alle vectoren van de rechte $(\underline{a}, \underline{x}) = 0$, dus ook loodrecht op de rechte $(\underline{a}, \underline{x}) = \gamma$. Dus: wordt een rechte ℓ in het platte vlak gegeven door de vergelijking $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$, dan is (α, β) een vector loodrecht op ℓ .

1.2.7. Vlakken in de ruimte worden gegeven door een vergelijking $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta$ (vgl. 1.1.7). Stel weer $\underline{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, dan is deze vergelijking $(\underline{a}, \underline{x}) = \delta$. Dit vlak is evenwijdig aan, of valt samen met het vlak $(\underline{a}, \underline{x}) = 0$, zodat de vector \underline{a} loodrecht staat op $(\underline{a}, \underline{x}) = 0$, dus ook op $(\underline{a}, \underline{x}) = \delta$. Met andere woorden: wordt een vlak in de ruimte gegeven door de vergelijking $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta$, dan is (α, β, γ) een vector loodrecht op dit vlak.

1.2.8. Laat \underline{p} en \underline{q} vectoren in de ruimte zijn. Onder het *uitwendig product* of *vectorproduct* $\underline{p} \times \underline{q}$ van \underline{p} en \underline{q} verstaan we de vector \underline{r} , waarvan de lengte gelijk is aan de oppervlakte van het parallellogram, waarvan \underline{p} en \underline{q} zijden zijn en waarvan de richting bepaald wordt door

- i) $\underline{r} \perp \underline{p}, \underline{r} \perp \underline{q}$,
- ii) het stelsel $(\underline{p}, \underline{q}, \underline{r})$ is een rechtsdraaiend stelsel.

(Een stelsel vectoren $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ heet rechtsdraaiend wanneer men van de rechterhand de middelvinger langs \underline{c} kan laten wijzen als men de duim langs \underline{a} en de wijsvinger langs \underline{b} legt; anders heet het linksdraaiend.)

Merk op, dat

$$\|\underline{p} \times \underline{q}\| = \|\underline{p}\| \|\underline{q}\| \sin \varphi,$$

waarin φ de hoek tussen \underline{p} en \underline{q} is.

Merk ook op, dat het inwendig product gedefinieerd is in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 en dat dit een getal is; de definitie van uitwendig product werkt alleen in de ruimte en het uitwendig product is een vector.

1.2.9. Uit de definitie van het uitwendig product volgt direct dat $\underline{p} \times \underline{q} = \underline{0}$ dan en slechts dan als \underline{p} en \underline{q} dezelfde of tegengestelde richting hebben, of als een van beide de nulvector is. Aangezien door verwisseling van twee vectoren een rechtsdraaiend stelsel in een linksdraaiend stelsel overgaat, geldt ook

$$\underline{p} \times \underline{q} = -\underline{q} \times \underline{p}.$$

1.2.10. Stel $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\underline{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Het uitwendig product van \underline{p} en \underline{q} is bepaald door de vectoren \underline{p} en \underline{q} , dus door de coördinaten van \underline{p} en \underline{q} . Zonder bewijs vermelden we het volgende resultaat.

Stelling. Laat $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ een rechtsdraaiend stelsel zijn en stel $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\underline{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Dan is

$$\underline{p} \times \underline{q} = (p_2 q_3 - p_3 q_2, p_3 q_1 - p_1 q_3, p_1 q_2 - p_2 q_1).$$

(Als $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ linksdraaiend is, dan is de vector in het rechterlid juist $-\underline{p} \times \underline{q}$.)

Afspraak: We zullen in de rest van deze paragraaf steeds aannemen dat $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ rechtsdraaiend is.)

Opgaven.

- 1) Verifieer dat de vector in het rechterlid loodrecht staat op \underline{p} en \underline{q} en de vereiste lengte heeft.
- 2) Bepaal $\underline{e}_i \times \underline{e}_j$ voor $i = 1, 2, 3$ en $j = 1, 2, 3$.

Eigenschappen van het vectorproduct.

- i : $(\underline{p} + \underline{q}) \times \underline{r} = \underline{p} \times \underline{r} + \underline{q} \times \underline{r}$.
- ii : $(\lambda \underline{p}) \times \underline{q} = \lambda(\underline{p} \times \underline{q})$.
- iii: $(\underline{p} \times \underline{q}) \times \underline{r} = (\underline{p}, \underline{r})\underline{q} - (\underline{q}, \underline{r})\underline{p}$.

- 1.2.11. Voorbeeld 1. Het uitwendig product van de vectoren $(1, 0, -1)$ en $(3, 0, -2)$ is de vector $(0, -1, 0)$. Merk op dat beide vectoren liggen in het vlak $x_2 = 0$, zodat het uitwendig product een veelvoud van \underline{e}_2 moet zijn.

Voorbeeld 2. Bepaal de vergelijking van het vlak door de punten $\underline{a} = (1, 0, 0)$, $\underline{b} = (0, 2, 0)$ en $\underline{c} = (1, 1, 1)$. De vectoren $\underline{a} - \underline{b} = (1, -2, 0)$ en $\underline{a} - \underline{c} = (0, -1, -1)$ zijn evenwijdig aan het vlak, dus $(\underline{a} - \underline{b}) \times (\underline{a} - \underline{c}) = (2, 1, -1)$ staat er loodrecht op.

De vergelijking van het vlak heeft dus de gedaante

$$2x_1 + x_2 - x_3 = \gamma .$$

De waarde γ vinden we door een der punten in te vullen. Dit levert als vergelijking $2x_1 + x_2 - x_3 = 2$.

3. Afstandsbepaling

- 1.3.1. Laat de rechte ℓ gegeven zijn door de parametervoorstelling

$$\underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{v} \quad (\underline{v} \neq \underline{0}) .$$

Voor ieder punt \underline{p} is er precies één punt $\underline{q} \in \ell$ zo dat $\underline{p} - \underline{q} \perp \ell$. Immers, om \underline{q} te vinden moeten we λ zodanig bepalen dat $\underline{p} - (\underline{a} + \lambda \underline{v}) \perp \ell$, dus

$$(\underline{p} - (\underline{a} + \lambda \underline{v}), \underline{v}) = 0 ,$$

$$(\underline{p} - \underline{a}, \underline{v}) - \lambda(\underline{v}, \underline{v}) = 0 ,$$

$$\lambda = \frac{(\underline{p} - \underline{a}, \underline{v})}{(\underline{v}, \underline{v})} .$$

Aangezien $(\underline{v}, \underline{v}) = \|\underline{v}\|^2 \neq 0$, is er dus steeds precies één waarde van λ die voldoet. De vector $\underline{p} - \underline{q}$ noemen we de "loodrechte verbindingsvector" van \underline{p} en ℓ ; dit is dus het naar de oorsprong verschoven loodrecht op ℓ staande verbindingslijnstuk tussen \underline{p} en ℓ .

1.3.2. Laat nu het vlak V gegeven worden door

$$\underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{v} + \mu \underline{w} .$$

Dan bestaat er voor ieder punt \underline{p} precies één punt $\underline{q} \in V$ zo dat $\underline{p} - \underline{q} \perp V$.
We moeten dan λ en μ zodanig bepalen dat

$$\begin{aligned} & (\underline{p} - (\underline{a} + \lambda \underline{v} + \mu \underline{w}), \underline{v}) = 0 \\ \text{en} \quad & (\underline{p} - (\underline{a} + \lambda \underline{v} + \mu \underline{w}), \underline{w}) = 0 . \end{aligned}$$

Dit zijn twee lineaire vergelijkingen voor λ en μ , waaruit we zowel voor λ als voor μ precies één waarde vinden.

De vector $\underline{p} - \underline{q}$ heet weer de loodrechte verbindingsvector van \underline{p} en V .

1.3.3. Geheel analoog tonen we het volgende aan: Laten

$$\begin{aligned} \ell: \underline{x} &= \underline{a} + \lambda \underline{v} \\ \text{en} \quad m: \underline{x} &= \underline{b} + \mu \underline{w} \end{aligned}$$

twee verschillende niet evenwijdige rechten zijn. Dan bestaat er precies één punt $\underline{p} \in \ell$ en precies één punt $\underline{q} \in m$ zodanig dat $\underline{p} - \underline{q} \perp \ell$ en $\underline{p} - \underline{q} \perp m$. De vector $\underline{p} - \underline{q}$ heet weer de loodrechte verbindingsvector van ℓ en m .

1.3.4. Laat de rechte $\ell: \underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{v}$ en het punt \underline{p} gegeven zijn en neem aan dat de steunvector \underline{a} zo gekozen is dat $\underline{p} - \underline{a}$ de loodrechte verbindingsvector van \underline{p} en ℓ is. Dan geldt dus $(\underline{p} - \underline{a}, \underline{v}) = 0$. We berekenen de afstand van \underline{p} tot een willekeurig punt \underline{q} van ℓ uit

$$\begin{aligned} \|\underline{p} - \underline{q}\|^2 &= (\underline{p} - \underline{q}, \underline{p} - \underline{q}) \\ &= (\underline{p} - \underline{a} - \lambda \underline{v}, \underline{p} - \underline{a} - \lambda \underline{v}) \\ &= (\underline{p} - \underline{a}, \underline{p} - \underline{a}) + \lambda^2 (\underline{v}, \underline{v}) - 2\lambda (\underline{p} - \underline{a}, \underline{v}) \\ &= \|\underline{p} - \underline{a}\|^2 + \lambda^2 \|\underline{v}\|^2 . \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de afstand van \underline{p} tot een punt \underline{q} van de rechte ℓ minimaal de lengte van de loodrechte verbindingsvector is. Deze lengte heet de *afstand* van het punt \underline{p} tot de rechte ℓ .

1.3.5. Geheel analoog als in 1.3.4 tonen we aan dat de afstand van een punt \underline{p} tot een punt van een vlak V minimaal de lengte van de loodrechte verbindingsvector is; de lengte van de loodrechte verbindingsvector heet de *afstand* van \underline{p} tot V .

1.3.6. Geheel analoog als in 1.3.4 tonen we aan dat de afstand tussen een punt van een rechte ℓ en een punt van een rechte m minimaal de lengte van een loodrechte verbindingsvector is. Deze lengte noemen we de *afstand* van de rechten ℓ en m .

1.3.7. De bepaling van de afstand tussen een punt en een rechte of een vlak, of tussen twee rechten, komt steeds neer op de bepaling van de lengte van een loodrechte verbindingsvector.

De volgende eigenschap kan soms wat rekenwerk besparen.

Stelling (Hesse). Laat in het platte vlak de rechte ℓ of in de ruimte het vlak V gegeven zijn door de vergelijking $(\underline{a}, \underline{x}) = \gamma$. Dan is de afstand van een punt \underline{p} tot de rechte (of het vlak)

$$\left| \frac{(\underline{a}, \underline{p}) - \gamma}{\|\underline{a}\|} \right| .$$

Bewijs. Een parametervoorstelling van de rechte door \underline{p} loodrecht op ℓ (resp. V) is

$$\underline{x} = \underline{p} + \lambda \underline{a} .$$

Het snijpunt van deze rechte en ℓ (resp. V) vinden we dus uit

$$(\underline{a}, \underline{p} + \lambda \underline{a}) = \gamma ,$$

$$(\underline{a}, \underline{p}) + \lambda (\underline{a}, \underline{a}) = \gamma ,$$

$$\lambda = \frac{\gamma - (\underline{a}, \underline{p})}{(\underline{a}, \underline{a})} ,$$

dus het snijpunt is

$$\underline{p} + \frac{\gamma - (\underline{a}, \underline{p})}{(\underline{a}, \underline{a})} \underline{a}$$

en de loodrechte verbindingsvector

$$\frac{(\underline{a}, \underline{p}) - \gamma}{(\underline{a}, \underline{a})} \underline{a} .$$

Deze vector heeft als lengte

$$\left| \frac{(\underline{a}, \underline{p}) - \gamma}{\|\underline{a}\|^2} \right| \cdot \|\underline{a}\| = \left| \frac{(\underline{a}, \underline{p}) - \gamma}{\|\underline{a}\|} \right| .$$

□

Opmerking. Een vergelijking

$$(\underline{n}, \underline{x}) = \eta$$

voor een lijn in \mathbb{R}^2 of een vlak in \mathbb{R}^3 heet een *normaalvergelijking* indien $\|\underline{n}\| = 1$. Iedere vergelijking

$$(\underline{a}, \underline{x}) = \gamma$$

gaat in een normaalvergelijking over als men haar door $\|\underline{a}\|$ deelt.

1.3.8. Voorbeelden.

1) Bepaal de afstand van de rechten

$$\ell: \underline{x} = (0, 1, 0) + \lambda(2, 1, 1)$$

$$m: \underline{x} = (0, -1, 3) + \mu(1, 2, 1) .$$

Een willekeurig punt op ℓ is $(2\lambda, 1 + \lambda, \lambda)$ en op m $(\mu, -1 + 2\mu, 3 + \mu)$. De verbindingsvector van deze punten is $(2\lambda - \mu, 2 + \lambda - 2\mu, -3 + \lambda - \mu)$, en om de loodrechte verbindingsvector te vinden moet het inwendig product met $(2, 1, 1)$ en met $(1, 2, 1)$ nul zijn. Dit geeft

$$\begin{cases} 2(2\lambda - \mu) + (2 + \lambda - 2\mu) + (-3 + \lambda - \mu) = 0 , \\ (2\lambda - \mu) + 2(2 + \lambda - 2\mu) + (-3 + \lambda - \mu) = 0 , \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6\lambda - 5\mu = 1 , \\ 5\lambda - 6\mu = -1 , \end{cases}$$

dus $\lambda = \mu = 1$. De loodrechte verbindingsvector is dus $(1, 1, -3)$ en de afstand van ℓ en m is $\sqrt{11}$.

2) Bepaal de afstand van $(3, 8, 3)$ tot het vlak $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 7$. De vergelijking van het vlak luidt $((2, -1, -2), (x_1, x_2, x_3)) - 7 = 0$, dus op grond van de stelling van Hesse is de afstand van $(3, 8, 3)$ tot het vlak

$$\left| \frac{((2, -1, -2), (3, 8, 3)) - 7}{3} \right| = 5 .$$

Hoofdstuk 2. Functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ en functies $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Inleiding. Bij de definitie van functie (of afbeelding), $F : A \rightarrow B$, in wiskunde 10 (0.5.1), zijn A en B verzamelingen met niet nader gespecificeerde elementen. In wiskunde 10 namen we voor A en B gewoonlijk deelverzamelingen van \mathbb{R} of \mathbb{C} . In dit hoofdstuk beschouwen we eerst het geval dat $A \subset \mathbb{R}$ en $B \subset \mathbb{R}^n$ met $n = 2$ of 3 (*vectorfuncties*); vervolgens komt aan de orde het geval dat $A \subset \mathbb{R}^n$ en $B \subset \mathbb{R}$ (*functies van meer variabelen*); het geval dat $A \subset \mathbb{R}^n$ en $B \subset \mathbb{R}^m$ wordt in wiskunde 30 (hoofdstuk 2) besproken.

1. Functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Met \mathbb{R}^n is in deze paragraaf gewoonlijk bedoeld \mathbb{R}^2 of \mathbb{R}^3 en we beperken ons bij de bespreking veelal tot \mathbb{R}^2 , omdat de overeenkomstige definities en beweringen voor \mathbb{R}^3 bijna altijd voor de hand liggen; waar dit niet het geval is wordt aan zo'n uitspraak voor \mathbb{R}^3 apart aandacht geschonken.

2.1.1. Een *vectorfunctie* \underline{f} van een reële variabele is een afbeelding $\underline{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ met $A \subset \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

A heet de definitieverzameling van \underline{f} ; notatie $\text{DOM } \underline{f}$. Als $n = 2$ wordt aan iedere $t \in \text{DOM } \underline{f}$ een punt, pijl of getallenpaar $\underline{f}(t) = (x(t), y(t))$ van \mathbb{R}^2 toegevoegd. x en y zijn dan functies $A \rightarrow \mathbb{R}$; ze heten de *componentfuncties* of *componenten* van \underline{f} .

De verzameling van de beelden

$$S = \{\underline{f}(t) \mid t \in \text{DOM } \underline{f}\}$$

heet een *kromme*, voor $n = 2$ een *vlakke kromme* (voor $n = 3$ een *ruimtekromme*). Men noemt \underline{f} ook wel een *parametervoorstelling* voor de kromme S.

Voorbeelden:

1) $\underline{f}(t) = \underline{a} + t\underline{u}$ met $t \in \mathbb{R}$, $\underline{a}, \underline{u} \in \mathbb{R}^2$, $\underline{u} \neq \underline{0}$.

\underline{f} is een parametervoorstelling van een rechte ℓ in \mathbb{R}^2 .

\underline{f} is een injectie.

Door eliminatie van de parameter t uit de vergelijkingen van de componentfuncties

$$x = a + tu$$

$$y = b + tv$$

verkrijgen we een vergelijking voor ℓ :

$$vx - uy = va - ub.$$

- 2) $\underline{f}(t) = (\cos t, \sin t)$ met $t \in \mathbb{R}$.

\underline{f} is een parametervoorstelling van de cirkel in \mathbb{R}^2 met middelpunt $\underline{0}$ en straal 1. \underline{f} is geen injectie. Door eliminatie van t uit $x = \cos t, y = \sin t$ verkrijgen we een vergelijking voor de cirkel:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

- 3) $\underline{f}(t) = (\cos t, \sin t)$ met $t \in [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$.

Als voorbeeld 2), maar nu is \underline{f} een injectie.

- 4) $\underline{f}(t) = (\cosh t, \sinh t)$ met $t \in \mathbb{R}$.

\underline{f} is een injectie. Eliminatie van t uit $x = \cosh t, y = \sinh t$ geeft $x^2 - y^2 = 1$, de vergelijking van een *orthogonale hyperbool*. \underline{f} is een parametervoorstelling voor de *rechtertak* van deze hyperbool.

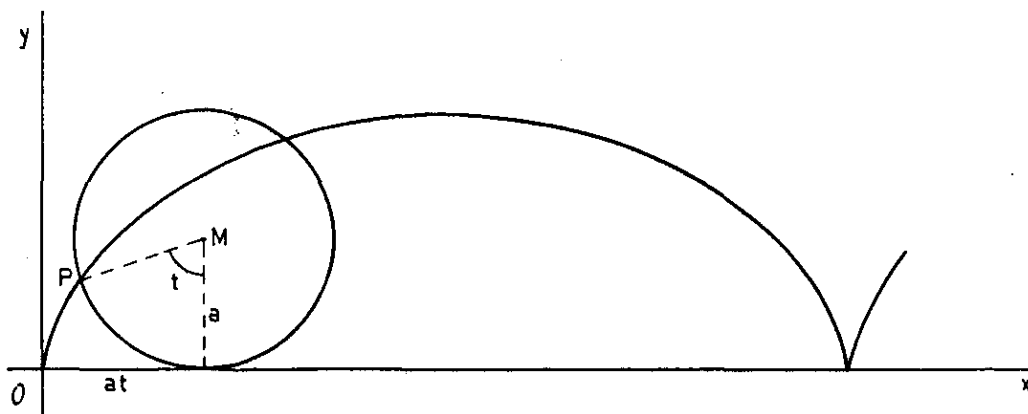
- 5) $\underline{f}(t) = (a \cos t, b \sin t), t \in [0, 2\pi), a > 0, b > 0$.

\underline{f} is een injectieve parametervoorstelling van de *ellips* met vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en halve assen a en b .

- 6) Een cirkel met middelpunt M en straal a rolt over de x -as. Beschouw de kromme beschreven door het punt P dat zich oorspronkelijk in $\underline{0}$ bevindt. Deze kromme heet *cycloïde*.



Neem als parameter de hoek t tussen de voorstraal MP en de verticaal. Uit de figuur is eenvoudig af te lezen dat de coördinaten van P worden gegeven door $(at - a \sin t, a - a \cos t)$. Hiermee hebben we tevens een parameter-
voorstelling van de cycloïde gevonden nl. $\underline{f}(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$.
 \underline{f} is een injectie.

Eliminatie van t uit $x = at - a \sin t, y = a - a \cos t$ is niet gemakkelijk (wel mogelijk?).

7) $\underline{f}(t) = (\cos t, \sin t, at), \quad t \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$

\underline{f} is een injectieve parametervoorstelling van een *ruimtekrumme* die *schroeflijn* heet. Eliminatie van t uit de mogelijke tweetallen van de vergelijkingen

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = at$$

geeft achtereenvolgens

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x = \cos(z/a), \quad y = \sin(z/a)..$$

Ieder van deze vergelijkingen stelt een cilinder in \mathbb{R}^3 voor. De meetkundige betekenis is dat de schroeflijn ligt op ieder van deze cilinders.

In het bijzonder ligt ze op de *rechte cirkelcilinder* met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$.

8) Neem een willekeurige functie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en beschouw $\underline{f}(x) = (x, g(x))$.

\underline{f} is een injectieve parametervoorstelling voor de grafiek van g in \mathbb{R}^2 .

Een functie met zijn grafiek is dus als bijzonder geval van een vector-
functie met bijbehorende kromme te beschouwen.

Uit het voorbeeld van de cirkel (voorbeeld 2 of 3) blijkt dat *niet iedere* kromme als een grafiek beschouwd kan worden.

2.1.2. Continuïteit, differentieerbaarheid.

Continuïteit is voor gewone functies gedefinieerd in paragraaf 2.4.1 van wiskunde 10.

Een vectorfunctie $\underline{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ heet *continu in* $a \in \text{DOM } \underline{f}$ als de componentfuncties x en y continu zijn in a ; \underline{f} heet *continu op een verzameling* $V \subset \text{DOM } \underline{f}$ als \underline{f} continu is in ieder punt $a \in V$; \underline{f} heet *continu* als \underline{f} continu is op $\text{DOM } \underline{f}$.

Een ε -omgeving $U_\varepsilon(a)$ van $a \in \mathbb{R}$ is in § 2.3.1 van wiskunde 10 gedefinieerd.

Zij er bij $\underline{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ voor een $a \in \text{DOM } \underline{f}$ een $\varepsilon > 0$ met $U_\varepsilon(a) \subset \text{DOM } \underline{f}$.

\underline{f} heet *differentieerbaar in* a als de componentfuncties x en y differentieerbaar zijn in a . De *afgeleide* $\underline{f}'(a)$ van \underline{f} in a is de *vector* $(x'(a), y'(a))$.

\underline{f} heet *differentieerbaar op een open interval* $I \subset \text{DOM } \underline{f}$ als \underline{f} differentieerbaar is in ieder punt $a \in I$.

Als \underline{f} differentieerbaar is op I dan is $\underline{f}' : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ weer een vectorfunctie.

Als \underline{f}' continu is op I dan noemt men \underline{f} *continu differentieerbaar* op I .

Alle in de voorbeelden 1-7 genoemde vectorfuncties zijn continu differentieerbaar (op open intervallen binnen hun definitieverzameling).

Als een vectorfunctie \underline{f} continu is maar niet differentieerbaar dan hoeft de bijbehorende kromme niet te lijken op wat "men" "gewoonlijk" een kromme noemt. We spreken daarom in het vervolg uitsluitend over vectorfuncties die continu differentieerbaar zijn.

De afgeleide van een vectorfunctie \underline{f} geeft men ook vaak aan met $\dot{\underline{f}}$;

$$\dot{\underline{f}}(a) = (\dot{x}(a), \dot{y}(a)).$$

Voor latere toepassing merken we op dat

$$\dot{\underline{f}}(a) = \begin{bmatrix} \dot{x}(a) \\ \dot{y}(a) \end{bmatrix} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \begin{bmatrix} x(a+h) - x(a) \\ y(a+h) - y(a) \end{bmatrix} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ \underline{f}(a+h) - \underline{f}(a) \}$$

zodat ook

$$\underline{f}(a+h) - \underline{f}(a) = h\dot{\underline{f}}(a) + h\underline{\theta}(h)$$

met een vectorfunctie $\underline{\theta}(h)$ die (componentsgewijs) tot $\underline{0}$ nadert als $h \rightarrow 0$.

2.1.3. Raaklijnen.

Zij $\underline{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (continu differentieerbaar op $\text{DOM } \underline{f}$) en $a \in \text{DOM } \underline{f}$. Om over de raaklijn in $\underline{f}(a)$ aan de kromme te kunnen spreken veronderstellen we eerst dat voor alle $t \in \text{DOM } \underline{f}$ met $t \neq a$ geldt $\underline{f}(t) \neq \underline{f}(a)$, dat wil zeggen $\underline{f}(a)$ is geen *dubbelpunt* van de kromme.

Beschouw nu de lijn ℓ_t door $\underline{f}(a)$ en $\underline{f}(t)$ voor zekere $t \in \text{DOM } \underline{f}$ en $t \neq a$. Richtingsvectoren voor deze lijn zijn $\underline{f}(t) - \underline{f}(a)$ maar ook

$$\frac{\underline{f}(t) - \underline{f}(a)}{t - a},$$

en deze nadert voor $t \rightarrow a$ tot $\dot{\underline{f}}(a)$.

Als $\dot{\underline{f}}(a) \neq \underline{0}$ dan is

$$\underline{x} = \underline{f}(a) + \lambda \dot{\underline{f}}(a)$$

een parametervoorstelling van een rechte ℓ , en deze rechte noemt men de *raaklijn*.

Als $\dot{x}(a) = 0$, zodat $\dot{y}(a) \neq 0$, dan is de raaklijn evenwijdig aan de y-as;
als $\dot{y}(a) = 0$ dan is de raaklijn evenwijdig aan de x-as.

Als $\dot{f}(a) = \underline{0}$ dan zijn er twee mogelijkheden:

i : er is een andere parametervoorstelling, zeg $\underline{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, voor dezelfde kromme, met $\underline{g}(b) = \underline{f}(a)$ en $\dot{\underline{g}}(b) \neq \underline{0}$; nu is de raaklijn

$$\underline{x} = \underline{g}(b) + \lambda \dot{\underline{g}}(b) .$$

ii: er is niet zo'n parametervoorstelling; dan is het bestaan van de raaklijn dubieus.

We noemen een punt van de kromme *regulier* indien aan de volgende twee voorwaarden is voldaan:

1: het is geen dubbelpunt

2: er is een parametervoorstelling \underline{f} met $\dot{\underline{f}}(a) \neq \underline{0}$ in het beschouwde punt $\underline{f}(a)$.

Als het punt niet regulier is, heet het *singulier*. In een regulier punt van de kromme bestaat één raaklijn. In een singulier punt zijn er *mogelijk* meer dan een of geen raaklijn; dit dient in ieder concreet geval apart onderzocht te worden.

Voorbeelden.

1) $\underline{f}(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Dit is een injectieve parametervoorstelling van de parabool met vergelijking $y = x^2$; deze heeft geen dubbelpunten.

$\dot{\underline{f}}(t) = (1, 2t) \neq \underline{0}$ voor alle t ; de parabool heeft geen singuliere punten. De raaklijn in het punt $\underline{f}(a)$ is

$$\underline{x} = (a, a^2) + \lambda (1, 2a) ,$$

in $\underline{f}(0)$ evenwijdig aan de x-as, voor geen enkele $a \in \mathbb{R}$ evenwijdig aan de y-as.

2) $\underline{g}(t) = (t^3, t^6)$, $t \in \mathbb{R}$.

Ook hier is de kromme de parabool $y = x^2$; hier is $\dot{\underline{g}}(t) = (3t^2, 6t^5)$ zodat nu $\dot{\underline{g}}(0) = \underline{0}$; maar $\underline{0} = \underline{g}(0)$ is toch niet singulier, omdat de parabool een parametervoorstelling bezit, namelijk \underline{f} uit voorbeeld 1, waarvoor $\dot{\underline{f}}(0) \neq \underline{0}$.

3) $\underline{f}(t) = (t^3 - t, t^2 - 1), \quad t \in \mathbb{R}.$

De kromme heeft één dubbelpunt, $\underline{f}(-1) = \underline{f}(1) = \underline{0}$. $\dot{\underline{f}}(t) = (3t^2 - 1, 2t) \neq \underline{0}$ voor alle t .

Het dubbelpunt is dus het enige singuliere punt; er zijn twee raaklijnen:

$\dot{\underline{f}}(-1) = (2, -2)$, de raaklijn in $\underline{f}(-1)$ is $\underline{x} = \lambda(1, -1)$,

$\dot{\underline{f}}(1) = (2, 2)$, de raaklijn in $\underline{f}(1)$ is $\underline{x} = \lambda(1, 1)$.

Men zegt: door $\underline{0}$ gaan twee takken van de kromme (ook al zitten die takken elders aan elkaar vast).

De vergelijking $\dot{x}(t) = 0$ geeft $t = \pm \frac{1}{3} \sqrt{3}$, zodat in de punten

$\underline{f}(\pm \frac{1}{3} \sqrt{3}) = (\mp \frac{2}{9} \sqrt{3}, -\frac{2}{3})$ de raaklijnen verticaal zijn.

Uit $\dot{y}(t) = 0$ volgt $t = 0$ zodat er een horizontale raaklijn is in $\underline{f}(0) = (0, -1)$.

4) $\underline{f}(t) = (t^2, t^3), \quad t \in \mathbb{R}$ (Kromme van Neil).

Dit is een injectieve parametervoorstelling zodat er geen dubbelpunten zijn.

De vergelijking van de kromme is $x^3 = y^2$.

$\dot{\underline{f}}(t) = (2t, 3t^2)$ en $\dot{\underline{f}}(0) = \underline{0}$.

Het punt $\underline{f}(0) = \underline{0}$ is een *singulier punt*. Dit bewijzen we als volgt:

voor iedere parametervoorstelling $\underline{g}(u) = (\varphi(u), \psi(u))$, met $\underline{g}(0) = \underline{f}(0) = \underline{0}$,

is $x = \varphi(u) \geq 0$ en $\varphi(0) = 0$, zodat $\dot{\varphi}(0) = 0$.

Verder is

$$\varphi(u)^3 = \psi(u)^2$$

waaruit door differentiëren naar u volgt

$$3\varphi(u)^2 \dot{\varphi}(u) = 2\psi(u) \dot{\psi}(u)$$

en eliminatie van $\varphi(u)$ uit de laatste twee betrekkingen geeft

$$27\psi(u)^4 \dot{\varphi}(u)^3 = 8\psi(u)^3 \dot{\psi}(u)^3.$$

Veronderstel nu dat $\dot{\underline{g}}(0) \neq \underline{0}$, dan is (omdat $\dot{\varphi}(0) = 0$) $\dot{\psi}(0) \neq 0$. Er is een omgeving $U_\eta(0)$ waar ψ monotoon is zodat (omdat $\psi(0) = 0$) voor $u \in U_\eta(0) \setminus \{0\}$ geldt

$$\psi(u) \neq 0,$$

en dus ook

$$27\psi(u) \dot{\varphi}(u)^3 = 8\dot{\psi}(u)^3.$$

In deze betrekking laten we u tot 0 naderen; daar $\dot{\varphi}$, ψ en $\dot{\psi}$ continu zijn komt er dan

$$8\dot{\psi}(0)^3 = 0,$$

$$\dot{\psi}(0) = 0.$$

Dit is in strijd met de gemaakte veronderstelling.

Dus is $\dot{\underline{g}}(0) = \underline{0}$, en $\underline{f}(0) = \underline{g}(0)$ is een singulier punt. In het singuliere punt komen de twee takken

$$\underline{f}_1(t) = (t^2, t^3), \quad t \geq 0$$

$$\underline{f}_2(t) = (t^2, t^3), \quad t \leq 0$$

samen, rakend aan de x-as. Zo'n singulier punt heet een *keerpunt* (en, omdat de takken aan verschillende zijden van de raaklijn liggen, in het bijzonder een *doornpunt*).

5) $\underline{f}(t) = (t^2, t|t|), \quad t \in \mathbb{R}$.

Dit is een injectieve parametervoorstelling voor de kromme met vergelijking $x = |y|$; er zijn geen dubbelpunten.

$$\dot{\underline{f}}(t) = (2t, 2|t|), \quad \dot{\underline{f}}(0) = \underline{0}.$$

Ook hier is geen parametervoorstelling $\underline{g}(u) = (\varphi(u), \psi(u))$ met $\underline{g}(0) = \underline{f}(0) = \underline{0}$, $\dot{\underline{g}}(0) \neq \underline{0}$.

$\underline{f}(0)$ is een singulier punt, en in $\underline{f}(0)$ bestaat geen *raaklijn*.

2.1.4. Een grafiek, van een continu differentieerbare $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, is een bijzonder geval van een kromme met een continu differentieerbare parametervoorstelling en zonder singuliere punten.

Het omgekeerde geldt alleen *locaal*, dat wil zeggen in geschikt gekozen omgevingen van geschikt gekozen punten.

Stelling. Zij de vectorfunctie $\underline{f}(t) = (x(t), y(t))$ continu differentieerbaar op een ϵ -omgeving van het punt a en zij $\dot{x}(a) \neq 0$.

Dan bestaat er een δ -omgeving V van a en een reële functie g gedefinieerd in $x(V)$, zodat de kromme $\{\underline{f}(t) \mid t \in V\}$ de grafiek is van g .

De afgeleide van $g(x)$ in $x(a)$ wordt gegeven door

$$g'(x(a)) = \frac{dy}{dx}(x(a)) = \frac{\dot{y}(a)}{\dot{x}(a)}.$$

Bewijs. De afgeleide $\dot{x}(t)$ is continu op een omgeving van a en $\dot{x}(a) \neq 0$.

Daaruit volgt dat er een δ -omgeving V van a bestaat zodat $\dot{x}(t) > 0$ voor

alle $t \in V$ òf $\dot{x}(t) < 0$ voor alle $t \in V$. Hieruit volgt: $x(t)$ is strikt monotoon op V . De functie $x(t)$ heeft nu een inverse functie, aan te geven door $t(x)$, met afgeleide $\frac{dt}{dx}(x(a)) = \frac{1}{\dot{x}(a)}$.

Substitueer $t(x)$ in de component $y(t)$, dan ontstaat de samengestelde functie $g = y \circ t$; $g(x) = y(t(x))$ is gedefinieerd in $x(V)$. Het is duidelijk dat de grafiek van g juist overeenstemt met de kromme $\{f(t) \mid t \in V\}$.

De afgeleide van $g(x) = y(t(x))$ in $x(a)$ is te bepalen met de kettingregel:

$$g'(x(a)) = \frac{dy}{dt}(a) \frac{dt}{dx}(x(a)) = \frac{\dot{y}(a)}{\dot{x}(a)}.$$

□

Voorbeelden.

1) $\underline{f}(t) = (t^2, t^3)$, $\dot{\underline{f}}(t) = (2t, 3t^2)$,

als $t \neq 0$ dan is $\dot{x}(t) \neq 0$, in het bijzonder is $\dot{x}(1) = 2 \neq 0$.

Voor het interval $(0, \infty)$ (op de t -as) is de kromme de grafiek van de functie $g(x) = x^{3/2}$ ($x > 0$).

Ook $\dot{x}(-1) \neq 0$; voor het interval $(-\infty, 0)$ (op de t -as) is de kromme de grafiek van $h(x) = -x^{3/2}$ ($x > 0$).

2) $\underline{f}(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$

$$\dot{\underline{f}}(t) = a(1 - \cos t, \sin t)$$

Als $t \neq 2k\pi$ dan is $\dot{x}(t) \neq 0$, bijvoorbeeld $\dot{x}(\pi) \neq 0$. Voor $0 < t < 2\pi$ is de cycloïde op te vatten als de grafiek van een functie $g(x)$ die we helaas niet uit kunnen drukken in elementaire functies.

$$g'(x(t)) = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \cot \frac{t}{2}.$$

2.1.5. Als, in stelling 2.1.4, x en y als functies van t meer dan één keer differentieerbaar zijn, is de functie g dat ook. De hogere afgeleiden van g berekent men dan door herhaald de kettingregel toe te passen.

Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}. \end{aligned}$$

2.1.6. *Kromming, kromtestraal, kromtemiddelpunt.*

Zij $\underline{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tenminste tweemaal differentieerbaar, en veronderstel dat $\underline{f}(a)$ een regulier punt van de door \underline{f} voorgestelde kromme is; in $\underline{f}(a)$ bestaat de raaklijn. De lijn door $\underline{f}(a)$ en loodrecht op de raaklijn heet de *normaal* van de kromme in $\underline{f}(a)$.

De vergelijking van de normaal is (vergelijk § 1.2.6)

$$(\dot{\underline{f}}(a), \underline{x}) = (\dot{\underline{f}}(a), \underline{f}(a)) ,$$

terwijl men ook een parametervoorstelling kan opschrijven:

$$\underline{x} = \underline{f}(a) + \lambda \underline{u} ,$$

waarin \underline{u} een vector is die loodrecht op $\dot{\underline{f}}(a)$ staat.

We nemen $\|\underline{u}\| = 1$, zodat $|\lambda|$ de afstand is van $\underline{f}(a)$ tot het desbetreffende punt van de normaal.

De normaal in een naburig punt $\underline{f}(a+h)$ van de kromme heeft als vergelijking

$$(\dot{\underline{f}}(a+h), \underline{x}) = (\dot{\underline{f}}(a+h), \underline{f}(a+h))$$

en het snijpunt $\underline{m}(h)$ van beide normalen behoort bij een parameterwaarde $\lambda = \lambda(h)$ waarvoor geldt:

$$(\dot{\underline{f}}(a+h), \underline{f}(a) + \lambda \underline{u}) = (\dot{\underline{f}}(a+h), \underline{f}(a+h)) ,$$

$$\lambda = \frac{(\dot{\underline{f}}(a+h), \underline{f}(a+h) - \underline{f}(a))}{(\dot{\underline{f}}(a+h), \underline{u})} .$$

Volgens 2.1.2 mogen we schrijven

$$\underline{f}(a+h) = \underline{f}(a) + h\dot{\underline{f}}(a) + h\theta(h) ,$$

$$\dot{\underline{f}}(a+h) = \dot{\underline{f}}(a) + h\ddot{\underline{f}}(a) + h\theta_1(h) ,$$

zodat, daar ook nog geldt $(\dot{\underline{f}}(a), \underline{u}) = 0$,

$$\lambda = \frac{(\dot{\underline{f}}(a+h), \dot{\underline{f}}(a) + \theta(h))}{(\dot{\underline{f}}(a) + \theta_1(h), \underline{u})} .$$

Als $h \rightarrow 0$ dan nadert het snijpunt $\underline{m}(h)$ der normalen tot

$$\underline{m} = \underline{f}(a) + \rho \underline{u}$$

met

$$\rho = \lim_{h \rightarrow 0} \lambda(h) = \frac{(\dot{\underline{f}}(a), \dot{\underline{f}}(a))}{(\ddot{\underline{f}}(a), \underline{u})} .$$

\underline{u} kiest men meestal zó dat $\dot{\underline{f}}(a)$ en \underline{u} een rechtsdraaiend stelsel vormen (zoals ook de positieve x-as en y-as),

$$\underline{u} = \frac{1}{\|\dot{\underline{f}}(a)\|}(-\dot{y}(a), \dot{x}(a)) .$$

Dan is

$$\rho = \frac{(\dot{x}(a)^2 + \dot{y}(a)^2)^{3/2}}{\dot{x}(a)\ddot{y}(a) - \ddot{x}(a)\dot{y}(a)} .$$

\underline{m} heet het *kromtemiddelpunt* van de kromme in $\underline{f}(a)$, ρ heet de *kromtestraal* van de kromme in $\underline{f}(a)$. Het getal $\kappa = \rho^{-1}$ heet de *kromming* van de kromme in $\underline{f}(a)$. Als ρ en κ positief zijn ligt \underline{m} aan dié kant van de raaklijn waarheen \underline{u} wijst; als ρ en κ negatief zijn dan ligt \underline{m} aan de andere kant. κ is een functie van t , en als κ van teken wisselt voor $t = a$ dan heeft de kromme een *buigpunt* in $\underline{f}(a)$.

Voorbeelden.

1) $\underline{f}(t) = \underline{a} + t\underline{b}$ met $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^2$, $\underline{b} \neq \underline{0}$; $t \in \mathbb{R}$.
 $\ddot{\underline{f}}(t) = \underline{0}$, $\kappa = 0$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

2) $\underline{f}(t) = a(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$, $a > 0$.
 $\ddot{\underline{f}}(t) = a(-\sin t, \cos t)$, $\ddot{\underline{f}}(t) = a(-\cos t, -\sin t)$.
 $\rho = a$, $\kappa = a^{-1}$ voor alle $t \in [0, 2\pi)$.

3) Zij $g(x)$ een functie, gedefinieerd op \mathbb{R} .

$$\underline{f}(x) = (x, g(x))$$
$$\ddot{\underline{f}}(x) = (1, g'(x)), \quad \ddot{\underline{f}}(x) = (0, g''(x)).$$

$$\kappa(x) = \frac{g''(x)}{(1 + g'(x)^2)^{3/2}} .$$

κ wisselt van teken dan en slechts dan als g'' van teken wisselt.

De grafiek van de functie g heeft een buigpunt (in een punt waar de raaklijn bestaat) dan en slechts dan als g'' van teken wisselt.

4) $g(x) = x^3$, $g'(x) = 3x^2$, $g''(x) = 6x$.

$$\kappa(x) = \frac{6x}{(1 + 9x^4)^{3/2}} .$$

Voor $x = 0$ is er een buigpunt.

$$5) g(x) = \sqrt[3]{x}, g'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}, g''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3}.$$

$$\kappa(x) = \frac{-6x^{1/3}}{(1+9x^{4/3})^{3/2}}$$

Voor $x = 0$ is er een buigpunt!

$$6) \underline{f}(t) = (\sin 2t, \sin t), \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

De kromme is een *figuur van Lissajous* (vergelijk de tabel in Alonso en Finn, deel I, p. 288); door eliminatie van t uit $x = \sin 2t$, $y = \sin t$ verkrijgt men de 4-de graadsvergelijking $x^2 = 4y^2(1 - y^2)$. De kromme heeft één dubbelpunt, $\underline{f}(0) = \underline{f}(\pi) = \underline{0}$.

$$\underline{\dot{f}}(t) = (2 \cos 2t, \cos t) \text{ en voor alle } t \text{ geldt } \underline{\dot{f}}(t) \neq \underline{0}.$$

$$\underline{f}''(t) = (-4 \sin 2t, -\sin t).$$

$$\kappa(t) = \frac{-2 \cos 2t \sin t + 4 \sin 2t \cos t}{(4 \cos^2 2t + \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{2 \sin t (3 - 2 \sin^2 t)}{(4 \cos^2 2t + \cos^2 t)^{3/2}}$$

zodat de buigpunten juist in het dubbelpunt vallen.

Opmerking. De theorie van de kromming van ruimtekrommen, die iets gecompliceerder is, bespreken we hier niet.

2.1.7. Asymptoten.

Stel dat voor $\underline{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ geldt dat $\text{DOM } \underline{f}$ een randpunt a bezit; de gevallen met $a = \pm \infty$ worden hierbij toegelaten. We beschouwen hier afbeeldingen \underline{f} met $\lim_{t \rightarrow a} \|\underline{f}(t)\| = \infty$.

Zij ℓ een rechte in \mathbb{R}^2 ; de afstand van een punt $p \in \mathbb{R}^2$ tot ℓ noteren we met $d(p, \ell)$.

Definitie: De lijn ℓ heet een *asymptoot* van de door \underline{f} voorgestelde kromme indien $\lim_{t \rightarrow a} d(\underline{f}(t), \ell) = 0$.

Voorbeelden

$$1) \underline{f}(t) = (t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\|\underline{f}(t)\| = |t| \sqrt{1 + t^2} \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty).$$

De kromme (de parabool met vergelijking $y = x^2$) heeft geen asymptoot:
 zij ℓ de lijn met vergelijking $ax + by = \gamma$, $a^2 + b^2 = 1$. Dan is
 $d(\underline{f}(t), \ell) = |at + bt^2 - \gamma| \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \pm \infty)$.

2) $\underline{f}(t) = (\cosh t, \sinh t), \quad t \in \mathbb{R}$.
 $\|\underline{f}(t)\| = ((\cosh t)^2 + (\sinh t)^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\cosh 2t} \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \pm \infty)$.

De rechte ℓ met vergelijking $x - y = 0$ is asymptoot:

$$d(\underline{f}(t), \ell) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cosh t - \sinh t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

De rechte ℓ' met vergelijking $x + y = 0$ is ook asymptoot:

$$d(\underline{f}(t), \ell') = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cosh t + \sinh t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow -\infty).$$

Andere asymptoten zijn er niet.

3) $\underline{f}(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \right), \quad t \in \mathbb{R}$.

$$\|\underline{f}(t)\| = \left| \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right| \sqrt{1 + t^2} \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \pm \infty).$$

Aangezien $\underline{f}(t)$ op de rechte met vergelijking $y = tx$ ligt, ligt het voor de hand om te vermoeden dat een eventuele asymptoot ℓ verticaal is; de vergelijking ervan luidt dan $x = a$, en

$$d(\underline{f}(t), \ell) = \left| \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} - a \right| = \frac{|(1-a)t^2 - (1+a)|}{t^2 + 1}.$$

Deze uitdrukking nadert tot 0 voor $t \rightarrow \infty$ dan en slechts dan als $a = 1$; en dan nadert ze ook tot 0 voor $t \rightarrow -\infty$.

De rechte met $x = 1$ als vergelijking is dus asymptoot.

Schets de kromme (*strophoïde*).

4) Aangezien de grafiek van een functie op \mathbb{R} een bijzonder geval is van een kromme met een parametervoorstelling is het bovenstaande van toepassing:

$$g(x) = \frac{x^2}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 1.$$

$$\underline{f}(x) = \left(x, \frac{x^2}{x-1}\right), \quad \|\underline{f}(x)\| = |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{(x-1)^2}}.$$

$\|\underline{f}(x)\| \rightarrow \infty$ voor $x \rightarrow -\infty$, $x \uparrow 1$, $x \downarrow 1$ en $x \rightarrow \infty$.

We kunnen de asymptoten aflezen uit de uitdrukking

$$g(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

De lijn ℓ met vergelijking $x = 1$ is asymptoot, en de lijn ℓ' met vergelijking $y = x + 1$ eveneens.

Schets de kromme (hyperbool).

Opmerking: Bij het schetsen van krommen in \mathbb{R}^2 verdient het aanbeveling om aandacht te schenken aan de volgende bijzonderheden:

- i : snijpunten met de x-as en de y-as.
- ii : symmetrieassen.
- iii : singuliere punten.
- iv : punten waar de raaklijn een bijzondere richting heeft, bijvoorbeeld horizontaal of verticaal is.
- v : asymptoten.

2. Functies van twee variabelen

2.2.1. Een *reële functie* f van *twee reële variabelen* (kortweg: een functie van twee variabelen) is een afbeelding $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ waarbij $A \subset \mathbb{R}^2$. Door zo'n afbeelding f wordt dus aan elke $\underline{x} = (x, y) \in A$ een getal $f(\underline{x}) = f(x, y) \in \mathbb{R}$ toegevoegd. A heet weer de *definitieverzameling* van f , notatie: $\text{DOM } f$. Vaak wordt een functiewaarde $f(x, y)$ met een aparte letter z aangegeven; men schrijft dan $z = f(x, y)$.

Voorbeelden.

- 1) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(\underline{x}) = f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.
- 2) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2$.

- 3) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 - y^2$.
- 4) $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = x^2/(x^2 + y^2)$.
- 5) $f: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Grafiek. Kies in \mathbb{R}^3 het gebruikelijke assenstelsel. De *grafiek* van de functie f is de verzameling

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\} .$$

Meetkundig stelt dit een oppervlak in \mathbb{R}^3 voor. Men noemt $z = f(x,y)$ de *vergelijking* van het oppervlak.

Voor de voorbeelden 1-5 vinden we: in voorbeeld 1 is de grafiek een plat vlak, in voorbeeld 5 een halve bol. In de voorbeelden 2 en 3 heten de grafieken resp. een elliptische paraboloid en een hyperbolische paraboloid.

Hoogtekaart. Dikwijls is het moeilijk om een goede grafiek te tekenen; men kan dan gebruik maken van een *hoogtekaart*. Men tekent in het (x,y) -vlak een aantal *niveaulijnen*, dat zijn krommen waarop de functie constant is. De niveaulijnen worden ook wel *hoogtelijnen* genoemd.

In de voorbeelden 1-5 zijn de hoogtelijnen respectievelijk:

- 1) evenwijdige rechten
- 2) concentrische cirkels
- 3) hyperbolen
- 4) rechten door de oorsprong (met uitzondering van de oorsprong)
- 5) concentrische cirkels.

Opgave. Teken hoogtekaarten van de functies

$$f(x,y) = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} , \quad f(x,y) = \frac{y^2 - x}{y^2} .$$

2.2.2. Limieten van functies.

Definities.

- 1) Zij $\varepsilon > 0$, zij $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$. De ε -omgeving van \underline{a} is $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\underline{x} - \underline{a}\| < \varepsilon\}$; notatie: $U_\varepsilon(\underline{a})$.
- 2) Een verzameling $A \subset \mathbb{R}^2$ heet *open* wanneer bij ieder punt $\underline{a} \in A$ een getal $\varepsilon > 0$ bestaat, zo, dat $U_\varepsilon(\underline{a}) \subset A$.
- 3) Zij $A \subset \mathbb{R}^2$ en $\underline{p} \in \mathbb{R}^2$. Dan heet \underline{p} een *verdichtingspunt* van A wanneer voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt: $(U_\varepsilon(\underline{p}) \setminus \{\underline{p}\}) \cap A \neq \emptyset$.
- 4) Een verzameling $A \subset \mathbb{R}^2$ heet *gesloten* wanneer ieder verdichtingspunt van A ook element van A is.
- 5) Een verzameling $A \subset \mathbb{R}^2$ heet *begrensd* wanneer er een getal $M > 0$ bestaat zo, dat $A \subset U_M(\underline{0})$ (ofwel: wanneer voor alle $\underline{a} \in A$ geldt: $\|\underline{a}\| < M$).

Voorbeelden.

- 1) Voor willekeurige $\underline{b} \in \mathbb{R}^2$ en $\eta > 0$ is $U_\eta(\underline{b})$ een open verzameling. De verdichtingspunten van $U_\eta(\underline{b})$ zijn de punten \underline{p} met $\|\underline{p} - \underline{b}\| \leq \eta$. De verzameling $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\underline{x} - \underline{b}\| \leq \eta\}$ is gesloten; hij is ook begrensd.
- 2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$ is open, niet gesloten en niet begrensd.
- 3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$ is niet open, wel gesloten, wel begrensd.
- 4) De verzameling $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ is noch open noch gesloten. Zijn enige verdichtingspunt is $\underline{0}$.
- 5) \mathbb{R}^2 is open en gesloten en niet begrensd.
- 6) De verzameling $\{(n,m) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\}$ heeft geen verdichtingspunten.
- 7) Het complement van een open verzameling is gesloten en omgekeerd.

Definitie. Laat f een functie van twee variabelen zijn en zij $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$, zo dat f gedefinieerd is tenminste op $U_\eta(\underline{a}) \setminus \{\underline{a}\}$ voor een of andere $\eta > 0$. Dan betekent $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = L$, dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zo dat voor alle $\underline{x} \in U_\delta(\underline{a}) \setminus \{\underline{a}\}$ geldt: $f(\underline{x}) \in U_\varepsilon(L)$. Anders gezegd: bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zo dat voor alle \underline{x} met $0 < \|\underline{x} - \underline{a}\| < \delta$ geldt: $|f(\underline{x}) - L| < \varepsilon$. Slordig uitgedrukt: dicht bij \underline{a} (maar niet noodzakelijk in \underline{a} zelf) liggen de functiewaarden dicht bij L .

Merk op, dat het voor de definitie van $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = L$ irrelevant is of $\underline{a} \in \text{DOM } f$ of niet, en dat het indien $\underline{a} \in \text{DOM } f$ niet ter zake doet welke waarde $f(\underline{a})$ heeft.

Soms zullen we functies ontmoeten, die niet in een volle omgeving van \underline{a} (afgezien van \underline{a} zelf) gedefinieerd zijn, terwijl we toch over de limiet voor $\underline{x} \rightarrow \underline{a}$ willen spreken. Zo is

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x - y}$$

niet in een volle omgeving van $\underline{0}$ gedefinieerd (nl. niet voor $x = y$) terwijl $f(x,y)$ gevoelsmatig toch limiet 0 zou moeten hebben. Voor dergelijke gevallen breiden we de definitie als volgt uit:

Definitie. Laat f een functie van twee variabelen zijn en zij \underline{a} verdichtingspunt van $\text{DOM } f$. Dan betekent $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = L$, dat voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zodanig dat voor alle $\underline{x} \in \text{DOM } f$ met $\underline{x} \in U_\delta(\underline{a}) \setminus \{\underline{a}\}$ geldt: $f(\underline{x}) \in U_\epsilon(L)$.

Voorbeelden.

1) $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$. Immers, voor $(x,y) \neq (0,0)$ geldt:

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \frac{|x||y|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{\|\underline{x}\| \|\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = \|\underline{x}\|.$$

Zij $\epsilon > 0$, neem $\delta = \epsilon$. Dan geldt voor alle \underline{x} met $0 < \|\underline{x} - \underline{0}\| < \delta$ dat

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \epsilon.$$

2) $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x - y} = 0$. Immers, de functie is gedefinieerd voor $x \neq y$ zodat $\underline{0}$ verdichtingspunt van het definitiegebied is. Verder geldt voor $x \neq y$

$$\left| \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x - y} - 0 \right| \leq \left| \frac{x^2 - y^2}{x - y} \right| = |x + y| \leq |x| + |y| \leq 2\|\underline{x}\|.$$

Zij $\epsilon > 0$ willekeurig, neem $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$. Voor alle (x,y) met $x \neq y$ en $0 < \|\underline{x} - \underline{0}\| < \delta$ geldt dan

$$\left| \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x - y} - 0 \right| < 2\delta = \epsilon.$$

- 3) $\lim_{\underline{x} \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ bestaat niet. Dit volgt onmiddellijk uit de hoogtekaart. De rechten $y = \alpha x$ ($x \neq 0$) zijn hoogtelijnen. De waarde van de functie op $y = \alpha x$ is $\alpha/(1 + \alpha^2)$. In elke omgeving van 0 neemt de functie alle waarden uit $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ aan.

Opgave. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

- 1) $\lim_{\underline{x} \rightarrow a} f(\underline{x}) = L$
- 2) $\lim_{\underline{x} \rightarrow a} (f(\underline{x}) - L) = 0$
- 3) $\lim_{\underline{x} \rightarrow a} |f(\underline{x}) - L| = 0$.

Stelling (bewerkingen met limieten). Als $\lim_{\underline{x} \rightarrow a} f(\underline{x}) = L$, $\lim_{\underline{x} \rightarrow a} g(\underline{x}) = M$, dan is:

- 1) $\lim_{\underline{x} \rightarrow a} \{f(\underline{x}) + g(\underline{x})\} = L + M$
- 2) $\lim_{\underline{x} \rightarrow a} \{f(\underline{x})g(\underline{x})\} = LM$
- 3) $\lim_{\underline{x} \rightarrow a} \frac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})} = \frac{L}{M}$ mits $M \neq 0$.

Bewijs. Wordt aan de lezer overgelaten.

2.2.3. Continuïteit.

Definitie. Een functie f heet *continu* in $\underline{a} \in \text{DOM } f$ indien er voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zó, dat voor alle $\underline{x} \in U_\delta(\underline{a}) \cap \text{DOM } f$ geldt: $f(\underline{x}) \in U_\epsilon(f(\underline{a}))$.

Een functie f heet *continu* op een verzameling $W \subset \mathbb{R}^2$ als f continu is in elk punt van W .

Een functie f heet *continu* als f continu is op $\text{DOM } f$.

Bewijs zelf de volgende stelling.

Stelling. Zij f gedefinieerd tenminste op $U_\eta(\underline{a})$ voor zekere $\eta > 0$ (iets algemener: zij $\underline{a} \in \text{DOM } f$ een verdichtingspunt van $\text{DOM } f$). Dan is f continu in \underline{a} dan en slechts dan als $\lim_{\underline{x} \rightarrow a} f(\underline{x}) = f(\underline{a})$.

Voorbeelden.

$$1) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{als } \underline{x} \neq \underline{0}, \\ 0 & \text{als } \underline{x} = \underline{0}. \end{cases}$$

Deze functie is continu in $(0,0)$. Voor $\underline{x} \neq \underline{0}$ geldt namelijk

$$|f(\underline{x}) - f(\underline{0})| = \left| \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |xy| \leq |x| |y| \leq \|\underline{x}\|^2.$$

Zij $\epsilon > 0$, dan geldt voor alle \underline{x} met $\|\underline{x}\| < \delta = \sqrt{\epsilon}$ dat $|f(\underline{x}) - f(\underline{0})| < \epsilon$.

$$2) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{als } \underline{x} \neq \underline{0}, \\ 0 & \text{als } \underline{x} = \underline{0}. \end{cases}$$

f is continu in $(0,0)$ omdat

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = f(\underline{0}).$$

$$3) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{als } \underline{x} \neq \underline{0}, \\ 0 & \text{als } \underline{x} = \underline{0}. \end{cases}$$

f is niet continu in $(0,0)$ omdat $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{0}} f(\underline{x})$ niet bestaat.

4) $f(x,y) = x$ voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; f is continu.

Stelling: Als f en g functies van \mathbb{R}^2 naar \mathbb{R} zijn, continu in $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$, dan zijn ook

$f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), fg en f/g (mits $g(\underline{a}) \neq 0$) continu in \underline{a} ;

als $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continu is in \underline{b} , en $\underline{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ met $\underline{g}(\underline{a}) = \underline{b}$ continu is in \underline{a} , dan is $f \circ \underline{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu in \underline{a} .

Opgave: Bewijs deze stelling.

Stelling: Als $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continu is dan zijn, voor iedere $\alpha \in \mathbb{R}$, de volgende verzamelingen gesloten: $\{\underline{x} \mid f(\underline{x}) = \alpha\}$, $\{\underline{x} \mid f(\underline{x}) \geq \alpha\}$, $\{\underline{x} \mid f(\underline{x}) \leq \alpha\}$.

Opgave: Bewijs deze stelling.

Voorbeelden.

- 5) De functies uit voorbeeld 1) en 2) zijn continu; de functie van voorbeeld 3) is continu op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- 6) Een rechte lijn, een cirkel zijn gesloten.
Een halfvlak $\{\underline{x} \mid ax + by \leq c\}$ is gesloten.
Een "open halfvlak" $\{\underline{x} \mid ax + by < c\}$ is open.

2.2.4. Differentieerbaarheid van functies van twee variabelen.

Definitie. Zij f gedefinieerd tenminste op $U_\eta(\underline{a})$ voor zekere $\eta > 0$; zij $\underline{a} = (a, b)$. De functie f heet *differentieerbaar* in \underline{a} , indien er getallen $A \in \mathbb{R}$ en $B \in \mathbb{R}$ bestaan en een functie ρ gedefinieerd op $U_\eta(\underline{0})$, zodanig dat geldt:

- i) $f(a+h, b+k) = f(a, b) + Ah + Bk + \|\underline{h}\| \rho(\underline{h})$ voor alle $\underline{h} = (h, k) \in U_\eta(\underline{0})$
- ii) ρ continu in $\underline{0}$ en $\rho(\underline{0}) = 0$.

Merk op, dat ii) vervangen kan worden door ii') $\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \rho(\underline{h}) = 0$. De betekenis van A en B blijkt door in i) $k = 0$ resp. $h = 0$ te nemen. We vinden dan

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \quad \text{resp.} \quad B = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} .$$

A is dus de afgeleide van de functie $f(x, b)$ in $x = a$.

B is de afgeleide van $f(a, y)$ in het punt $y = b$.

Definitie. De *partiële afgeleide naar x* van $z = f(x, y)$ in (a, b) wordt gegeven door

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} ;$$

notatie: $f_x(a,b)$ of $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ of $\frac{\partial z}{\partial x}(a,b)$.

De partiële afgeleide naar y van $z = f(x,y)$ in (a,b) wordt gegeven door

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k};$$

notatie: $f_y(a,b)$ of $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ of $\frac{\partial z}{\partial y}(a,b)$.

Met deze notatie zijn de getallen A en B voor te stellen door

$$A = f_x(a,b), B = f_y(a,b).$$

De definitie van differentieerbaarheid drukt uit dat f in \underline{a} *lineair benaderbaar* is, d.w.z. voor $\underline{x} = (x,y)$ in de buurt van $\underline{a} = (a,b)$ is $f(x,y)$ te benaderen door de lineaire functie l met

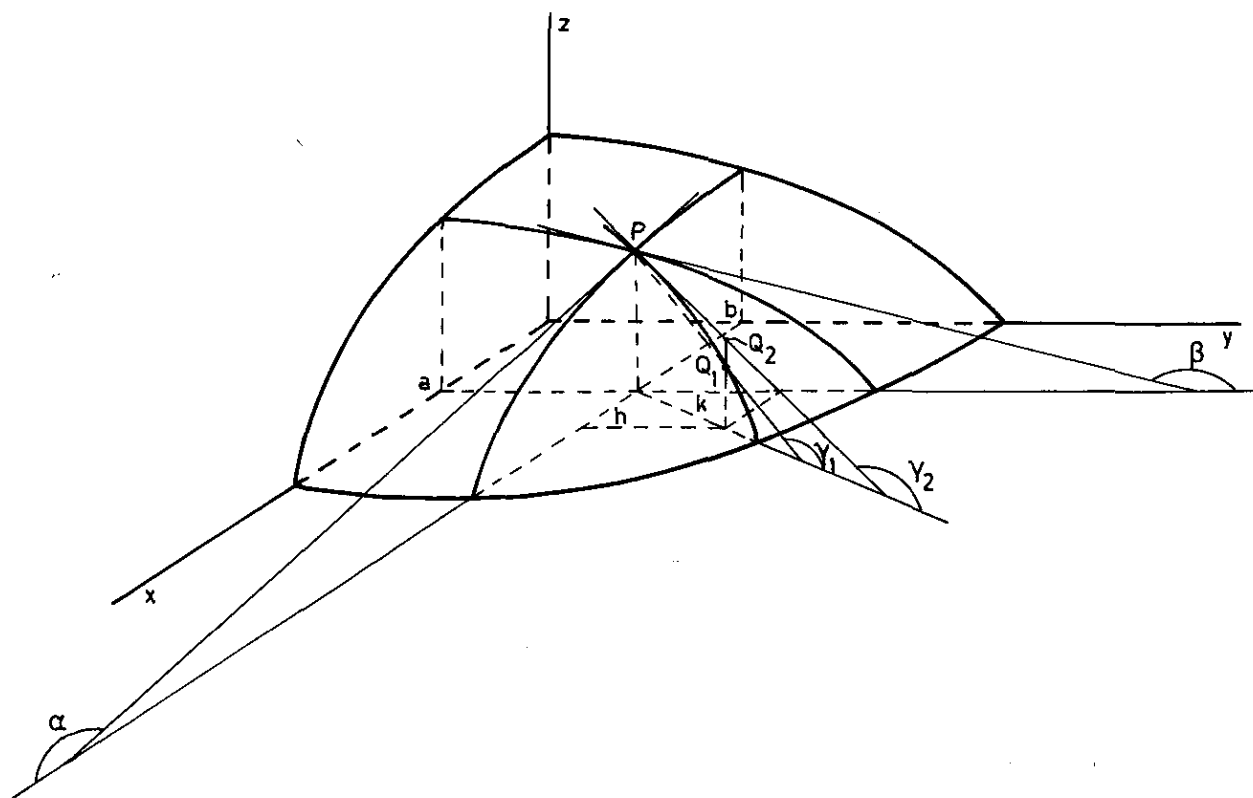
$$l(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Bij deze benadering maken we een fout gegeven door $\|\underline{x} - \underline{a}\| \rho(\underline{x} - \underline{a})$, met $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} \rho(\underline{x} - \underline{a}) = 0$.

Meetkundige interpretatie. Beschouw de grafiek van f , d.i. het oppervlak gegeven door de vergelijking $z = f(x,y)$. Het punt P met coördinaten $(a,b,f(a,b))$ ligt op het oppervlak.

Het vlak $y = b$ snijdt het oppervlak volgens een kromme door P . De raaklijn aan de snijkromme in P ligt in het vlak $y = b$ en heeft de richtingscoëfficiënt $\tan \alpha = f_x(a,b)$, zie figuur.

Evenzo is $\tan \beta = f_y(a,b)$ de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in P aan de snijkromme van het vlak $x = a$ met het oppervlak, zie figuur.



Breng nu een vlak aan door de beide raaklijnen in P. De vergelijking van dit vlak luidt

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x - a) + f_y(a,b)(y - b) .$$

Dit vlak is het *raakvlak* aan het oppervlak $z = f(x,y)$ in het punt P.

Om dit aan te tonen, laten we zien dat elke rechte door P in het vlak een raaklijn is aan het oppervlak. Beschouw twee punten Q_1 en Q_2 met coördinaten:

$$Q_1: (a+h, b+k, f(a+h, b+k)) ,$$

$$Q_2: (a+h, b+k, f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k) .$$

dan ligt Q_1 op het oppervlak en Q_2 in het vlak (zie figuur). De rechten PQ_1 en PQ_2 maken hoeken γ_1 en γ_2 met het (x,y) -vlak, gegeven door

$$\tan \gamma_1 = \frac{1}{\|\underline{h}\|} [f(a+h, b+k) - f(a,b)] ,$$

$$\tan \gamma_2 = \frac{1}{\|\underline{h}\|} [f_x(a,b)h + f_y(a,b)k] .$$

Volgens de definitie van differentieerbaarheid is nu juist $\tan \gamma_1 - \tan \gamma_2 = \rho(\underline{h})$. Neem nu $\underline{h} \rightarrow \underline{0}$ bij vaste h/k , dan is γ_2 eveneens vast en $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ omdat $\rho(\underline{h}) \rightarrow 0$. De rechte PQ_1 heeft als limietstand de rechte PQ_2 . Derhalve raakt PQ_2 aan het oppervlak. Meetkundig betekent differentieerbaarheid van f in \underline{a} dus dat het oppervlak $z = f(x,y)$ in het punt $(a,b,f(a,b))$ een niet-verticaal raakvlak heeft.

Definitie. Een functie f heet *differentieerbaar* op een open verzameling $W \subset \mathbb{R}^2$ als f differentieerbaar is in elk punt van W .

De afbeelding, die aan iedere $(a,b) \in W$ toevoegt $f_x(a,b)$ heet de *partiële afgeleide naar x* van $z = f(x,y)$; notatie: f_x of $\frac{\partial f}{\partial x}$ of $\frac{\partial z}{\partial x}$. De afbeelding, die aan iedere $(a,b) \in W$ toevoegt $f_y(a,b)$ heet de *partiële afgeleide naar y* van $z = f(x,y)$; notatie: f_y of $\frac{\partial f}{\partial y}$ of $\frac{\partial z}{\partial y}$. Een functie f heet *continu differentieerbaar* op een open verzameling $W \subset \mathbb{R}^2$ als f differentieerbaar is op W , terwijl f_x en f_y continu zijn op W .

Voorbeelden.

1) $f(x,y) = xy^2 + y^3$; de partiële afgeleiden van f zijn

$$f_x(x,y) = y^2, \quad f_y(x,y) = 2xy + 3y^2 .$$

Merk op, dat f_x en f_y ook weer functies van x en y zijn.

2) $z = \arctan \frac{y}{x}$; de partiële afgeleiden zijn

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

In het punt $(1,1)$ is $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2}$.

3) $f(x,y) = 3x - xy + 3y^2$. We tonen aan dat f differentieerbaar is in $(2,1)$.
Schrijf daartoe

$$f(2+h, 1+k) = f(2,1) + Ah + Bk + \sqrt{h^2 + k^2} \rho(h,k),$$

waarbij $A = f_x(2,1) = 2$ en $B = f_y(2,1) = 4$. Dit geeft na enig rekenen

$$\rho(h,k) = \frac{-hk + 3k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

zodat $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \rho(h,k) = 0$. Vervolgens merken we op, dat dus f in de buurt van $(2,1)$ lineair benaderbaar is door $7 + 2(x-2) + 4(y-1)$, zodat $z = 7 + 2(x-2) + 4(y-1)$ de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek in $(2,1,7)$ is.

4) Zij $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. De partiële afgeleiden van f in $(0,0)$ bestaan niet, dus f is niet differentieerbaar in $(0,0)$.

Verklaar dit ook aan de hand van de grafiek!

Stelling. Als f differentieerbaar is in $\underline{a} = (a,b)$, dan is f continu in \underline{a} .

Bewijs. Zij

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + Ah + Bk + \sqrt{h^2 + k^2} \rho(h,k)$$

met $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \rho(h,k) = 0$. Dan is

$$\begin{aligned} \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(a+h, b+k) = \\ &= f(a,b) + A \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} h + B \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} k + \\ &+ \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} \rho(h,k) = f(a,b). \end{aligned} \quad \square$$

2.2.5. *Eigenschappen van differentieerbare functies.*

- 1) Er zijn functies, gedefinieerd minstens op een ε -omgeving van een punt \underline{a} , die continu zijn in \underline{a} maar niet differentieerbaar in \underline{a} . Een voorbeeld is de functie $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ uit het laatste voorbeeld van 2.2.4, die continu is in $\underline{0}$ maar niet differentieerbaar in $\underline{0}$.
- 2) Uit de differentieerbaarheid van f volgt het bestaan van de partiële afgeleiden f_x, f_y . Omgekeerd volgt uit het bestaan van de partiële afgeleiden nog niet dat f differentieerbaar is. De functie

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{als } \underline{x} \neq \underline{0}, \\ 0 & \text{als } \underline{x} = \underline{0}, \end{cases}$$

is niet continu in $\underline{0}$ (zie 2.2.3, voorbeeld 3), dus zeker niet differentieerbaar in $\underline{0}$. Er geldt echter $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

Wel geldt de volgende stelling:

Stelling. Zij f gedefinieerd tenminste op $U_\eta(\underline{a})$ voor zekere $\eta > 0$, en laat de partiële afgeleiden f_x en f_y bestaan op deze omgeving. Als f_x en f_y continu zijn in \underline{a} , dan is f differentieerbaar in \underline{a} .

Bewijs. Zij $\underline{a} = (a,b)$ en $\underline{h} = (h,k)$ met $\|\underline{h}\| < \eta$. Volgens de middelwaardestelling uit de differentiaalrekening, toegepast op de functie $f(x, b+k)$ is er een getal $\theta \in (0,1)$ zo dat

$$f(a+h, b+k) - f(a, b+k) = hf_x(a+\theta h, b+k).$$

Omdat f_x continu is in (a,b) , kunnen we schrijven

$$f_x(a+\theta h, b+k) = f_x(a,b) + \rho(h,k)$$

met

$$\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \rho(h,k) = 0.$$

Uit de voorgaande betrekkingen volgt

$$f(a+h, b+k) - f(a, b+k) = hf_x(a,b) + h\rho(h,k).$$

Evenzo is af te leiden

$$f(a, b+k) - f(a, b) = k f_y(a, b) + k\sigma(k)$$

met

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma(k) = 0.$$

Nu volgt

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) &= f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + \\ &+ f(a, b+k) - f(a, b) = \\ &= f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + \|\underline{h}\| \tau(\underline{h}), \end{aligned}$$

waarbij $\tau(\underline{h})$ gegeven wordt door

$$\tau(\underline{h}) = \tau(h, k) = \frac{1}{\|\underline{h}\|} [h\sigma(h, k) + k\sigma(k)].$$

Wegens $\lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \tau(\underline{h}) = 0$ is f differentieerbaar in \underline{a} . □

- 3) Uit de laatste stelling volgt dat functies met continue partiële afgeleiden differentieerbaar zijn. Hiermee en met de volgende stelling kan men meestal snel vaststellen of een functie differentieerbaar is.

Stelling. Als de functies f, g differentieerbaar zijn in \underline{a} , dan zijn ook $f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), fg en f/g (mits $g(\underline{a}) \neq 0$) differentieerbaar in \underline{a} .

Opgave. Bewijs deze stelling.

We geven nu een tweetal *kettingregels* voor het differentiëren van een samengestelde functie.

Stelling. Als de functie $\underline{g} = (g_1, g_2): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ differentieerbaar is in a en $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar is in $\underline{g}(a)$, dan is de samengestelde functie $f \circ \underline{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in a met afgeleide

$$(f \circ \underline{g})'(a) = f_x(\underline{g}(a))g_1'(a) + f_y(\underline{g}(a))g_2'(a).$$

Opmerking. Wat slordiger kan men deze kettingregel ook als volgt formuleren:
zijn

$$z = f(x,y), x = g_1(t), y = g_2(t)$$

differentieerbare functies, dan is de samengestelde functie

$$z(t) = f(g_1(t), g_2(t))$$

differentieerbaar met afgeleide

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} .$$

Soms schrijft men, nog slordiger,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} .$$

Bewijs. Op grond van de differentieerbaarheid van g_1 en g_2 in a geldt:

$$g_1(a+h) = g_1(a) + g_1'(a)h + h\rho_1(h), \lim_{h \rightarrow 0} \rho_1(h) = 0 ,$$

$$g_2(a+h) = g_2(a) + g_2'(a)h + h\rho_2(h), \lim_{h \rightarrow 0} \rho_2(h) = 0 ,$$

of in vectornotatie

$$\underline{g}(a+h) = \underline{g}(a) + \underline{g}'(a)h + h\underline{\rho}(h), \lim_{h \rightarrow 0} \|\underline{\rho}(h)\| = 0 .$$

De differentieerbaarheid van f in $\underline{g}(a)$ wil zeggen dat

$$f(\underline{g}(a) + \underline{k}) = f(\underline{g}(a)) + k_1 f_x(\underline{g}(a)) + k_2 f_y(\underline{g}(a)) + \|\underline{k}\| \sigma(\underline{k})$$

met $\underline{k} = (k_1, k_2)$ en $\lim_{\underline{k} \rightarrow 0} \sigma(\underline{k}) = 0$.

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} f(\underline{g}(a+h)) &= f(\underline{g}(a) + \underline{g}'(a)h + h\underline{\rho}(h)) = \\ &= f(\underline{g}(a)) + f_x(\underline{g}(a))[g_1'(a)h + h\rho_1(h)] + \\ &+ f_y(\underline{g}(a))[g_2'(a)h + h\rho_2(h)] + \\ &+ \|\underline{g}'(a)h + h\underline{\rho}(h)\| \sigma(\underline{g}'(a)h + h\underline{\rho}(h)) \end{aligned}$$

met $\sigma = \sigma(\underline{g}'(a)h + h\underline{\rho}(h)) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$).

Nu volgt

$$f(\underline{g}(a+h)) = f(\underline{g}(a)) + [f_x(\underline{g}(a))g_1'(a) + f_y(\underline{g}(a))g_2'(a)]h + h\tau(h) ,$$

waarbij $\tau(h)$ gegeven wordt door

$$\tau(h) = f_x(\underline{g}(a))\rho_1(h) + f_y(\underline{g}(a))\rho_2(h) + \frac{|h|}{h} \|\underline{g}'(a) + \underline{\rho}(h)\| \sigma .$$

Het is duidelijk dat $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$. Daarmee is bewezen dat $f \circ \underline{g}$ differentieerbaar is in \underline{a} met afgeleide $f_x(\underline{g}(\underline{a}))g_1'(\underline{a}) + f_y(\underline{g}(\underline{a}))g_2'(\underline{a})$. \square

Stelling. Als $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar is in \underline{a} en $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar is in $g(\underline{a})$, dan is de samengestelde functie $f \circ g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in \underline{a} met partiële afgeleiden

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x}(\underline{a}) = f'(g(\underline{a}))g_x(\underline{a}), \quad \frac{\partial (f \circ g)}{\partial y}(\underline{a}) = f'(g(\underline{a}))g_y(\underline{a}).$$

Bewijs. De stelling is slechts een herformulering van de kettingregel voor functies van één variabele (zie Wiskunde 10), toegepast op de functie $f(g(x,y))$ resp. $f(g(\underline{a},y))$. \square

Voorbeelden.

1) $z = xe^y$ met $x = \sin t$, $y = t^2$. Dan is

$$\frac{dz}{dt} = e^y \cos t + xe^y 2t = e^{t^2} \cos t + 2te^{t^2} \sin t.$$

2) Men dient duidelijk onderscheid te maken tussen de notaties $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{dz}{dx}$.

Door $z = x + y^2$, $y = \ln x$ is z gegeven als functie van x en y , maar via $y = \ln x$ ook als functie van x alleen (nl. $z = x + (\ln x)^2$).

Er geldt nu

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad \text{en} \quad \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{2 \ln x}{x}.$$

In dit voorbeeld speelt x de rol van de variabele t in de voorlaatste stelling.

2.2.6. *Hogere partiële afgeleiden.* De partiële afgeleiden f_x en f_y van een functie f zijn zelf ook weer functies van x en y . Partieel differentiëren (indien mogelijk) van f_x en f_y geeft de *partiële afgeleiden van de tweede orde* van f , dit zijn de functies $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ en $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$. Andere notaties:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}), \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}),$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}), \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}).$$

N.B. Let op de volgorde van differentiatie; f_{xy} wordt verkregen door eerst naar x en dan naar y te differentiëren; f_{yx} wordt verkregen door eerst naar y en dan naar x te differentiëren.

Voorbeelden.

1) $f(x,y) = x^2 y^3$; de partiële afgeleiden van de eerste en tweede orde van f zijn

$$f_x = 2xy^3, f_y = 3x^2 y^2,$$

$$f_{xx} = 2y^3, f_{xy} = 6xy^2, f_{yx} = 6xy^2, f_{yy} = 6x^2 y.$$

Merk op dat $f_{xy} = f_{yx}$. In het volgende voorbeeld is dit niet het geval.

2) $f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ als $(x,y) \neq (0,0)$ en $f(0,0) = 0$.

Bereken eerst de partiële afgeleiden van de eerste orde in $(0,k)$ resp. $(h,0)$:

$$f_x(0,k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,k) - f(0,k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} k \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} = -k,$$

$$f_y(h,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(h,k) - f(h,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} h \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} = h.$$

Bereken vervolgens f_{xy} en f_{yx} in $(0,0)$:

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k - 0}{k} = -1,$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1,$$

dus $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Uit de volgende stelling blijkt dat het resultaat van tweemaal partieel differentiëren onafhankelijk is van de volgorde van differentiatie, indien de resulterende afgeleiden van de tweede orde continu zijn.

Stelling. Als f_{xy} en f_{yx} bestaan op $U_\eta(\underline{a})$ voor zekere $\eta > 0$ en continu zijn in \underline{a} , dan geldt: $f_{xy}(\underline{a}) = f_{yx}(\underline{a})$.

Bewijs. Zij $\underline{a} = (a,b)$, $\underline{h} = (h,k)$ met $\|\underline{h}\| < \eta$.

Beschouw de uitdrukking

$$E = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b) .$$

Zij

$$\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x, b) ,$$

dan is

$$E = \varphi(a+h) - \varphi(a) .$$

Pas de middelwaardestelling uit de differentiaalrekening toe, dan is

$$E = h\varphi'(a+\theta_1 h) = h[f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a+\theta_1 h, b)]$$

voor zekere $\theta_1 \in (0,1)$.

Nogmaals toepassen van de middelwaardestelling geeft

$$E = hkf_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

voor zekere $\theta_2 \in (0,1)$.

Zij vervolgens

$$\psi(y) = f(a+h, y) - f(a, y) ,$$

dan is

$$E = \psi(b+k) - \psi(b) .$$

Door opnieuw tweemaal toepassen van de middelwaardestelling volgt

$$\begin{aligned} E &= k\psi'(b+\theta_3 k) = k[f_y(a+h, b+\theta_3 k) - f_y(a, b+\theta_3 k)] = \\ &= hkf_{yx}(a+\theta_4 h, b+\theta_3 k) \end{aligned}$$

voor zekere $\theta_3 \in (0,1)$, $\theta_4 \in (0,1)$.

Combineer de voorgaande resultaten dan is

$$f_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) = f_{yx}(a+\theta_4 h, b+\theta_3 k) .$$

Laat nu $\underline{h} = (h,k)$ naar $\underline{0}$ naderen, dan volgt op grond van de continuïteit van f_{xy} en f_{yx} in \underline{a} dat $f_{xy}(\underline{a}) = f_{yx}(\underline{a})$. □

Men kan nu ook *partiële afgeleiden van de derde en hogere orde* definiëren. Er zijn 2^n partiële afgeleiden van de orde n . Als deze afgeleiden continu zijn, dan kan men weer bewijzen dat het resultaat van partieel differentiëren onafhankelijk is van de volgorde van differentiatie, zodat er slechts $n+1$ verschillende partiële afgeleiden van de orde n zijn. Wij zullen in het vervolg aannemen dat van de te beschouwen functies de gemengde partiële afgeleiden die door verwisseling van volgorde uit elkaar ontstaan, inderdaad gelijk zijn.

Er geldt dan bv. $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$ oftewel $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$.

Opmerking. Kettingregels voor hogere afgeleiden kunnen in elk afzonderlijk geval worden afgeleid door toepassing van de gewone kettingregel, waarbij te bedenken is dat partiële afgeleiden van x en van y afhangen.

Voorbeeld. Zijn de functies

$$z = f(x, y), \quad x = x(t), \quad y = y(t)$$

tweemaal differentieerbaar, dan is de samengestelde functie

$$z = f(x(t), y(t))$$

tweemaal differentieerbaar met afgeleiden

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{dy}{dt} \right] \frac{dx}{dt} + \\ &+ \frac{\partial z}{\partial y} \frac{d^2 y}{dt^2} + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{dy}{dt} \right] \frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

Formule van Taylor. We zullen de formule van Taylor uit Wiskunde 10 generaliseren tot functies van twee variabelen. We voeren de volgende notatie in:

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x, y) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} h^{m-j} k^j \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j} \partial y^j}(x, y),$$

voor $m \in \mathbb{N}$; vergelijk met het binomium van Newton.

Hierbij is verondersteld dat f continue partiële afgeleiden van de orde m heeft.

Stelling (Taylor). Laat de functie f continue partiële afgeleiden van de orde $n+1$ ($n \geq 0$) bezitten op $U_\eta(\underline{a})$ voor zekere $\eta > 0$. Zij $\underline{h} = (h, k)$ met $\|\underline{h}\| < \eta$, dan is er een getal $\theta \in (0, 1)$, zodat

$$f(\underline{a} + \underline{h}) = f(\underline{a}) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^m f(\underline{a}) + R_n,$$

waarin

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(\underline{a} + \theta \underline{h}).$$

Bewijs. Met behulp van $\underline{g}(t) = \underline{a} + t\underline{h}$ introduceren we de samengestelde functie

$$F(t) = f(\underline{g}(t)) = f(\underline{a} + t\underline{h}).$$

Volgens de kettingregel is F differentieerbaar in ieder punt $t \in [0, 1]$ met afgeleide

$$F'(t) = f_x(\underline{a} + t\underline{h})h + f_y(\underline{a} + t\underline{h})k = (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})f(\underline{a} + t\underline{h}).$$

Voor $n \geq 1$ zijn f_x en f_y opnieuw differentieerbaar. Nogmaals toepassen van de kettingregel levert voor $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F''(t) &= f_{xx}(\underline{a} + t\underline{h})h^2 + 2f_{xy}(\underline{a} + t\underline{h})hk + f_{yy}(\underline{a} + t\underline{h})k^2 = \\ &= (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^2 f(\underline{a} + t\underline{h}). \end{aligned}$$

Algemeen is door volledige inductie te bewijzen (ga dit na):

$$F^{(m)}(t) = (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^m f(\underline{a} + t\underline{h})$$

voor $m = 1, 2, \dots, n+1$ en $t \in [0, 1]$.

Pas nu de formule van Taylor (zie Wiskunde 10) toe op de functie F , dan is

$$F(1) = F(0) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!} F^{(m)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta)$$

voor zekere $\theta \in (0, 1)$.

Na substitutie van $F(1)$, $F^{(m)}(0)$ enz. als boven gegeven volgt het gewenste resultaat. □

De zo gegeven betrekking voor $f(\underline{a} + \underline{h})$ heet de *formule van Taylor rond \underline{a}* voor functies van twee variabelen; R_n heet de *restterm*.

Voorbeeld. Zij $f(x,y) = \sin(xe^y)$, $\underline{a} = (0,0)$, dan is

$$f(\underline{h}) = \sin(he^k) = f(\underline{0}) + [hf_x(\underline{0}) + kf_y(\underline{0})] + \\ + \frac{1}{2!} [h^2 f_{xx}(\underline{0}) + 2hk f_{xy}(\underline{0}) + k^2 f_{yy}(\underline{0})] + R_2$$

met

$$R_2 = \frac{1}{3!} (h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})^3 f(\theta \underline{h}), \quad \theta \in (0,1) .$$

Na uitwerking van de partiële afgeleiden vinden we

$$\sin(he^k) = h + hk + R_2 .$$

Voor kleine waarden van x en y geldt dus de benadering

$$\sin(xe^y) \approx x + xy .$$

Als bijzonder geval ($n = 0$) van de formule van Taylor vermelden we nog de volgende stelling die een generalisering is van de middelwaardestelling der differentiaalrekening.

Stelling (middelwaardestelling voor functies van twee variabelen). Laat de functie f continue partiële afgeleiden f_x en f_y bezitten in $U_\eta(\underline{a})$ voor zekere $\eta > 0$. Zij $\underline{h} = (h,k)$ met $\|\underline{h}\| < \eta$, dan is er een getal $\theta \in (0,1)$ zodat

$$f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = hf_x(\underline{a} + \theta \underline{h}) + kf_y(\underline{a} + \theta \underline{h}) .$$

Deze stelling is ook rechtstreeks te bewijzen door toepassing van de oude middelwaardestelling op de functie $f(\underline{a} + \theta \underline{h})$.

3. Functies van drie variabelen.

2.3.1. Een *reële functie* f van drie reële variabelen is een afbeelding $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ met $A \subset \mathbb{R}^3$. Hierbij wordt dus aan elke $\underline{x} = (x, y, z) \in \text{DOM } f \subset \mathbb{R}^3$ een getal $f(\underline{x}) = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ toegevoegd. We noemen f kortweg een functie van drie variabelen.

De theorie uit § 2 is zonder meer uit te breiden tot functies van drie variabelen (en ook tot functies van meer dan drie variabelen). In de meeste definities, stellingen en bewijzen behoeven slechts voor de hand liggende wijzigingen aangebracht te worden.

Een eenvoudige meetkundige voorstelling van de functie $f(x, y, z)$, analoog aan de grafiek van een functie van twee variabelen, is er niet. Inzicht in de functie kunnen we verkrijgen door *niveaувlakken* te beschouwen, dat zijn oppervlakken in \mathbb{R}^3 gegeven door de vergelijking $f(x, y, z) = C$ met C constant. Niveaувlakken zijn het analogon van hoogtelijnen in \mathbb{R}^2 .

We geven nu eerst een overzicht van enige typen vaak voorkomende oppervlakken. De assen van het coördinatenstelsel zijn ten opzichte van de oppervlakken zó gekozen dat de vergelijking een eenvoudige gedaante heeft:

i : *Ellipsoïde* met halve assen a, b, c .
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Met het vlak $z = 0$ heeft dit oppervlak een ellips gemeen. Evenzo met de andere coördinatenvlakken. Als twee der getallen a, b, c gelijk zijn, is de ellipsoïde als een *omwentelingsoppervlak* te beschouwen (*omwentelingsellipsoïde*), in het bijzonder is het een *bol* als $a = b = c$.

ii : *Eenbladige hyperboloïde* of *halsvlak* met halve assen a, b, c .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

De doorsneden met de vlakken $x = 0$ respectievelijk $y = 0$ zijn hyperbolen, met het vlak $z = 0$ een ellips; als $a = b$ spreekt men van een *omwentelingshyperboloïde*.

iii : *Tweebladige hyperboloïde*.
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

iv : *Elliptische paraboloid*.
$$2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} .$$

Doorsneden met verticale vlakken zijn parabolen, met andere vlakken ellipsen (of leeg).

Als $a = b$ spreekt men van *omwentelingsparaboloïde*.

v : *Hyperbolische paraboloïde* of *zadelvlak*. $2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

De verticale doorsneden zijn parabolen, de andere hyperbolen of paren rechten; zo snijdt dit oppervlak het xy -vlak volgens $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$,

dat is de vergelijking van het paar rechten met vergelijkingen

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Regelvlakken. Als \underline{f} en \underline{g} functies van \mathbb{R} in \mathbb{R}^3 zijn dan is

$$\underline{x} = \underline{f}(t) + \lambda \underline{g}(t)$$

voor iedere $t \in \mathbb{R}$ de parametervoorstelling van een rechte lijn in \mathbb{R}^3 . Als \underline{f} en \underline{g} continu differentieerbaar zijn, dan vormen die rechten een oppervlak, dat men *regelvlak* noemt. De door \underline{f} voorgestelde kromme heet *richtkromme*, iedere lijn

$$\ell_t : \underline{x} = \underline{f}(t) + \lambda \underline{g}(t)$$

heet *beschrijvende lijn* van het regelvlak.

vi : *Kegel*. Dit is een regelvlak waarvan alle beschrijvenden door één punt, de *top*, gaan. Het meest bekend is de *rechte cirkelkegel*:

$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Deze kegel kan men ook als omwentelingsoppervlak beschouwen; de top is 0 , een richtkromme is bijvoorbeeld de cirkel voorgesteld door $\underline{f}(t) = (\cos t, \sin t, c)$.

vii : *Cilinder*. Een *cilinder* is een regelvlak waarvan de beschrijvenden evenwijdig zijn. Als, bijvoorbeeld

$$\underline{f}(t) = (a \cos t, b \sin t, 0), \quad \underline{g}(t) = (0, 0, 1)$$

dan worden de beschrijvenden

$$\ell_t : \underline{x} = (a \cos t, b \sin t, 0) + \lambda(0, 0, 1).$$

Door eliminatie van t en λ uit

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

$$z = \lambda$$

volgt de vergelijking van deze cilinder:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Als, in dit geval, $a = b$, dan hebben we te maken met de zogenaamde *rechte cirkelcilinder*, die ook als omwentelingsoppervlak is te beschouwen.

viii: Een plat vlak is als een bijzonder geval van een kegel, ook van een cilinder, te beschouwen.

ix : De eenbladige hyperboloïde en de hyperbolische paraboïde zijn regelvlakken.

Opgave. Bepaal de beschrijvenden.

Ruimtekrommen als doorsnede van twee oppervlakken.

Wanneer twee oppervlakken in \mathbb{R}^3 elkaar snijden, is de doorsnede gewoonlijk een ruimtekromme.

Voorbeelden.

1) De kegel met vergelijking $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ snijdt het vlak met vergelijking $x + y + z = 1$ volgens een hyperbool. De snijkromme ligt immers ook op het oppervlak waarvan de vergelijking ontstaat door uit

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$x + y + z = 1$$

z te elimineren,

$$2(x-1)(y-1) = 1 ,$$

en dit is een cilinder met een hyperbool als richtkromme in het vlak $z = 0$; deze hyperbool is de (loodrechte) projectie van de snijkromme op het xy -vlak.

Men kan voor deze snijkromme desgewenst een parametervoorstelling geven:

$$x = \frac{1}{2(y-1)} + 1 = \frac{2y-1}{2y-2}$$

$$z = 1 - x - y = \frac{-2y^2 + 2y - 1}{2y-2}$$

$$\underline{x} = \left(\frac{2y-1}{2y-2}, y, \frac{-2y^2 + 2y - 1}{2y-2} \right)$$

- 2) De bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ snijdt de cilinder $x^2 - x + y^2 = 0$ volgens een kromme Γ . De projectie van Γ op het xy -vlak is een cirkel. De projectie op het xz -vlak vinden we door eliminatie van y uit de vergelijkingen, hetgeen oplevert

$$x = 1 - z^2,$$

in het xz -vlak de vergelijking van een parabool. Deze parabool omvat de projectie van Γ op het xz -vlak, en aangezien voor de projectie moet gelden $|x| \leq 1$ is de projectie ook een echt deel van de parabool.

Een parametervoorstelling voor Γ is

$$\underline{x} = (\cos^2 \varphi, \cos \varphi \sin \varphi, \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

en Γ heeft één dubbelpunt: $\underline{x}(0) = \underline{x}(\pi) = (1, 0, 0)$.

Omwentelingsoppervlakken.

Zij ℓ een rechte: $\underline{x} = \underline{a} + \lambda \underline{b}$,

k een kromme: $\underline{x} = \underline{f}(t)$,

in \mathbb{R}^3 .

Door ieder punt $\underline{f}(t)$ van k brengen we een vlak V_t aan dat loodrecht op ℓ staat,

$$V_t : (\underline{x}, \underline{b}) = (\underline{f}(t), \underline{b})$$

en in dit vlak bepalen we de cirkel Γ_t met middelpunt op ℓ en door $\underline{f}(t)$, bijvoorbeeld door V_t te snijden met de bol

$$B_t : (\underline{x} - \underline{a}, \underline{x} - \underline{a}) = (\underline{f}(t) - \underline{a}, \underline{f}(t) - \underline{a}) .$$

De vereniging van alle cirkels Γ_t is een oppervlak, het *omwentelingsoppervlak* S dat *ontstaat door k om ℓ te wentelen*. De vergelijking van S verkrijgt men door t te elimineren uit de vergelijkingen voor V_t en B_t .

Voorbeelden.

1) $\ell : \underline{x} = \lambda(0,1,0)$

$k : \underline{x} = (1,0,0) + \tau(0,1,1) .$

We wentelen k (een rechte lijn) om ℓ :

$V_\tau : y = \tau$

$B_\tau : x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2\tau^2$

Elimineer τ uit deze vergelijkingen:

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1 ,$$

de vergelijking van een eenbladige hyperboloïde.

2) $\ell : \underline{x} = \lambda(0,0,1)$

$k : \underline{x} = (0, a + b \cos t, b \sin t) \quad (0 \leq t < 2\pi)$

We wentelen de cirkel k om de z -as, ℓ :

$V_t : z = b \sin t$

$B_t : x^2 + y^2 + z^2 = (a + b \cos t)^2 + b^2 \sin^2 t$

Elimineer t :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos t ,$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2)^2 = 4a^2(b^2 - z^2)$$

Dit is de vergelijking van een *torus*.

2.3.2. Continuïteit, differentieerbaarheid.

De definities van en de stellingen over limieten, continuïteit en differentieerbaarheid zoals die in de paragrafen 2.2.2-2.2.6 zijn gegeven kan men alle gemakkelijk vertalen voor functies van \mathbb{R}^3 naar \mathbb{R} (en voor functies van \mathbb{R}^n naar \mathbb{R} met $n > 3$).

We vermelden hier slechts de volgende:

Definitie. Zij f gedefinieerd tenminste op $U_\eta(\underline{a}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\underline{x} - \underline{a}\| < \eta\}$ voor zekere $\eta > 0$. De functie f heet *differentieerbaar* in $\underline{a} = (a, b, c)$, indien er reële getallen A , B en C bestaan, en een functie ρ gedefinieerd op $U_\eta(\underline{0})$, zodanig dat geldt

$$i) \quad f(a+h, b+k, c+l) = f(a, b, c) + Ah + Bk + Cl + \|\underline{h}\| \rho(\underline{h})$$

voor alle $\underline{h} = (h, k, l) \in U_\eta(\underline{0})$

$$ii) \quad \rho \text{ continu in } \underline{0} \text{ en } \rho(\underline{0}) = 0 .$$

Ook hier kan ii) vervangen worden door

$$ii') \quad \lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \rho(\underline{h}) = 0 .$$

Het blijkt weer dat A , B en C partiële afgeleiden zijn, nl.

$$A = f_x(\underline{a}), \quad B = f_y(\underline{a}), \quad C = f_z(\underline{a}) .$$

Stelling (kettingregel). Zij de functie $\underline{g} = (g_1, g_2, g_3): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ differentieerbaar in a en zij $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in $\underline{g}(a)$, dan is de samengestelde functie $f \circ \underline{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar in a met afgeleide

$$(f \circ \underline{g})'(a) = f_x(\underline{g}(a))g_1'(a) + f_y(\underline{g}(a))g_2'(a) + f_z(\underline{g}(a))g_3'(a) .$$

Wat slordiger kan men dit ook als volgt formuleren: zijn

$$w = f(x, y, z), \quad x = g_1(t), \quad y = g_2(t), \quad z = g_3(t)$$

differentieerbare functies, dan is de samengestelde functie

$$w(t) = f(g_1(t), g_2(t), g_3(t))$$

differentieerbaar met afgeleide

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} .$$

Nog slordiger wordt dit:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} .$$

Opgave. Formuleer een kettingregel voor de partiële afgeleiden van $f \circ g$ als $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$; vergelijk met de overeenkomstige stelling voor \mathbb{R}^2 in 2.2.5.

4. Impliciete functies

2.4.1. Uit een vergelijking $f(x,y) = 0$ kan men soms y oplossen en uitdrukken in x , d.w.z. we kunnen y als functie van x beschouwen: $y = g(x)$. We zeggen dat y door $f(x,y) = 0$ als functie van x *impliciet* gegeven is.

Voorbeeld. Door de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ (eenheidscirkel) worden op $[-1,1]$ twee functies impliciet gegeven, nl.

$$y = g_1(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{en} \quad y = g_2(x) = -\sqrt{1 - x^2} .$$

Beide functies zijn differentieerbaar op $(-1,1)$ met afgeleiden

$$g_1'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y} \quad \text{en} \quad g_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y} .$$

Hoewel in het algemeen door de vergelijking $f(x,y) = 0$ een aantal functies $g_1(x), g_2(x), \dots$ bepaald wordt, is het meestal niet gemakkelijk g_1, g_2, \dots ook expliciet in x uit te drukken, zoals het voorbeeld $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$ leert.

Om in deze situatie toch de afgeleide van y eenvoudig te bepalen, denken we ons $y = y(x)$ althans in principe opgelost uit $f(x,y) = 0$. Na substitutie van $y = y(x)$ in de vergelijking volgt

$$f(x, y(x)) = 0 .$$

Differentiatie met behulp van de kettingregel levert nu

$$f_x + f_y y' = 0 ,$$

waaruit y' opgelost kan worden: $y' = -f_x/f_y$ mits $f_y \neq 0$.

Het spreekt niet vanzelf dat door $f(x,y) = 0$ een differentieerbare functie $y(x)$ bepaald wordt. Precieze voorwaarden hiervoor worden gegeven in een stelling te behandelen in het college Wiskunde 30, die we als volgt citeren:

Stelling. Laat f continue partiële afgeleiden f_x en f_y bezitten in een ϵ -omgeving van (a,b) en zij $f(a,b) = 0$, $f_y(a,b) \neq 0$, dan bestaat er een functie $y(x)$ gedefinieerd in een δ -omgeving van a met de eigenschappen $y(a) = b$, $f(x, y(x)) = 0$ voor $x \in U_\delta(a)$; voorts is $y(x)$ differentieerbaar op $U_\delta(a)$ met afgeleide $y' = -f_x/f_y$.

Aangezien een grafiek een kromme is in de zin van 2.1.1, bevestigt deze stelling dat een door een vergelijking gegeven kromme ook een kromme is in de zin van 2.1.1, althans *locaal*.

Voorbeelden.

1) Uit de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ volgt door impliciet differentiëren:

$$2x + 2yy' = 0, \quad y' = -\frac{x}{y} \quad \text{mits } y \neq 0,$$

in overeenstemming met het vorige voorbeeld.

De tweede afgeleide van $y(x)$ volgt door de vergelijking $x + yy' = 0$ opnieuw impliciet te differentiëren:

$$1 + (y')^2 + yy'' = 0,$$

waaruit volgt

$$y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y} = -\frac{1}{y^3} \quad \text{mits } y \neq 0.$$

2) Beschouw de vergelijking $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Impliciet differentiëren naar x geeft

$$3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0,$$

waaruit volgt

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x} \quad \text{mits } y^2 - x \neq 0.$$

We onderzoeken nu de kromme beschreven door de vergelijking $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Horizontale raaklijnen kunnen optreden als $y - x^2 = 0$. Gecombineerd met de oorspronkelijke vergelijking levert dit de punten $(x,y) = (0,0)$ en $(x,y) = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. Het punt $(0,0)$ is een bijzonder punt omdat daar ook $y^2 - x = 0$.

Verticale raaklijnen kunnen optreden in de punten $(0,0)$ en $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$, zoals volgt uit $y^2 - x = 0$ en de oorspronkelijke vergelijking.

De kromme is symmetrisch t.o.v. de rechte $y = x$. We snijden de kromme met de rechte $x + y = p$. De x -coördinaten van de snijpunten worden bepaald door de vergelijking

$$3(p+1)x^2 - 3p(p+1)x + p^3 = 0.$$

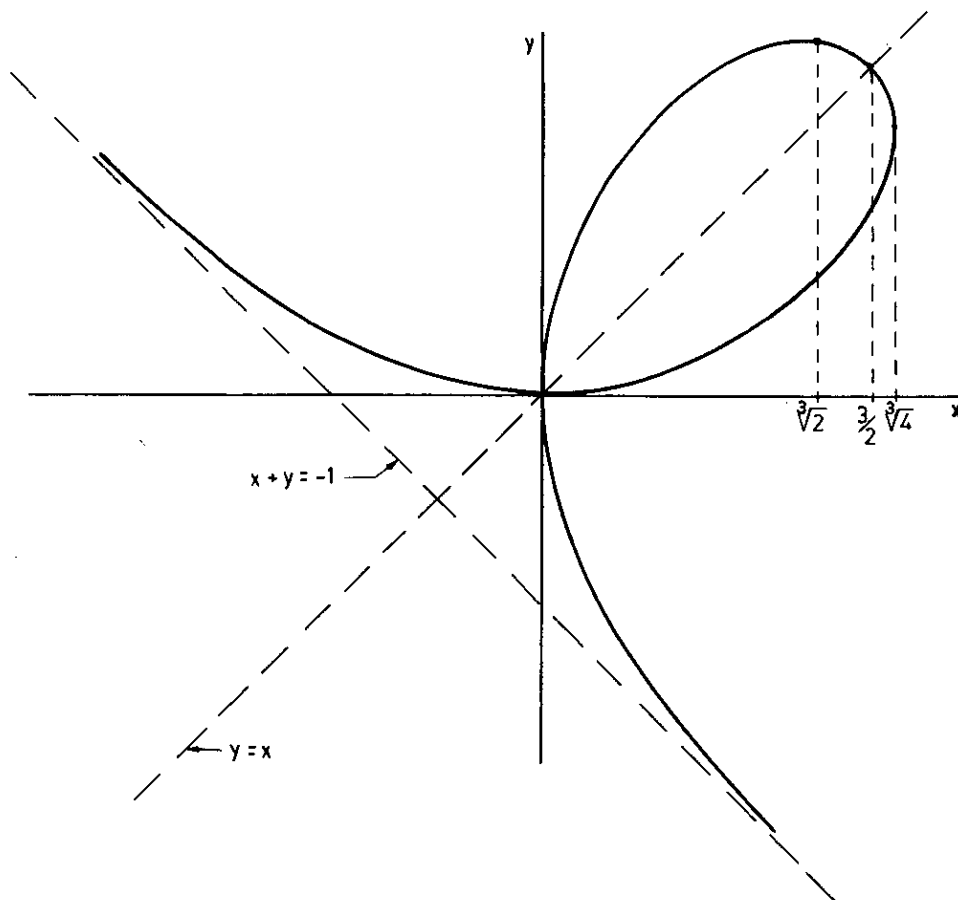
Voor $p = -1$ is er geen snijpunt; voor $p = 0$ is $(0,0)$ een dubbel snijpunt; uit de discriminant $3p^2(p+1)(3-p)$ blijkt dat er twee snijpunten zijn voor $-1 < p \leq 3$ en geen snijpunten als $p < -1$ of $p > 3$.

De kromme heet het *folium van Descartes*; zie figuur.

Een parametervoorstelling voor deze kromme vinden we door te substitueren $y = tx$; dan blijkt

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Opgave. Verifieer de al genoemde eigenschappen van de kromme met behulp van deze parametervoorstelling, en bewijs dat er een asymptoot is, namelijk de rechte $x + y = -1$.



2.4.2. De methode van het differentiëren van impliciet gegeven functies kan uitgebreid worden tot meer variabelen en tot meer vergelijkingen (zie ook college Wiskunde 30).

De vergelijking $F(x,y,z) = 0$ beschrijft een oppervlak in \mathbb{R}^3 . Door deze vergelijking is z impliciet gegeven als functie van x en y : $z = z(x,y)$.

De partiële afgeleiden $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ kunnen we vinden door partiële differentiatie van

$$F(x,y,z(x,y)) = 0$$

onder toepassing van de kettingregel:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z},$$

mits $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Voorbeeld. Beschouw de vergelijking $x - e^y \sin z = 0$.

Partieel differentiëren naar x en naar y geeft

$$1 - e^y \cos z \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$-e^y \sin z - e^y \cos z \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

waaruit volgt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^y \cos z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\sin z}{\cos z} = - \tan z,$$

mits $\cos z \neq 0$.

2.4.3. Het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

beschrijft een kromme Γ in \mathbb{R}^3 .

Men kan y en z als impliciet gegeven functies van x beschouwen.

Meetkundig betekent dit dat men Γ opvat als snijkromme van twee cilinders, met vergelijkingen

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x) .$$

Desgewenst heeft men zelfs een parametervoorstelling voor Γ :

$$\Gamma : \underline{f}(x) = (x, \varphi(x), \psi(x)) .$$

De afgeleiden van φ en ψ kan men bepalen door de oorspronkelijke vergelijkingen impliciet naar x te differentiëren:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 , \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 , \end{cases}$$

waaruit y' en z' zijn op te lossen mits de vergelijkingen onafhankelijk zijn.

Voorbeeld. Beschouw het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 , \\ xy + yz = 2 . \end{cases}$$

Bereken $y'(x)$, $z'(x)$ en $z''(x)$ in $(x,y,z) = (0,1,2)$ en bepaal de raaklijn aan de kromme in $(0,1,2)$.

Differentiatie naar x levert

$$2x + 2yy' + 2zz' = 0 \text{ en } y + (x+z)y' + yz' = 0 .$$

In $(0,1,2)$ wordt dit

$$2y'(0) + 4z'(0) = 0 \text{ en } 1 + 2y'(0) = 0 ,$$

met oplossing $y'(0) = -2/3$ en $z'(0) = 1/3$.

De raaklijn is dus

$$\underline{x} = (0,1,2) + \lambda'(1, -2/3, 1/3)$$

of

$$\underline{x} = (0,1,2) + \lambda(3, -2, 1) .$$

Nogmaals differentiëren geeft

$$\begin{cases} 1 + (y')^2 + yy'' + (z')^2 + zz'' = 0, \\ y' + (x+z)y'' + (1+z')y' + y'z' + yz'' = 0. \end{cases}$$

Invullen van $(x,y,z) = (0,1,2)$ en van de bekende waarden van $y'(0)$ en $z'(0)$ geeft twee vergelijkingen voor $y''(0)$ en $z''(0)$, waaruit volgt $z''(0) = -44/27$.

5. Richtingsafgeleide en gradiënt

2.5.1. Definitie. Zij $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ met $A \subset \mathbb{R}^n$, een reële functie van n variabelen, differentieerbaar in $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ (zie 2.3.2), dan verstaan we onder de *gradiënt van f in \underline{a}* de vector

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{a}) \right).$$

Notatie: $\text{grad } f(\underline{a})$ of ∇f .

Rekenregels.

$$\text{grad}(cf(\underline{a})) = c \text{ grad } f(\underline{a}) \quad (c \text{ is constante})$$

$$\text{grad}(f(\underline{a}) + g(\underline{a})) = \text{grad } f(\underline{a}) + \text{grad } g(\underline{a})$$

$$\text{grad}(f(\underline{a})g(\underline{a})) = f(\underline{a}) \text{ grad } g(\underline{a}) + g(\underline{a}) \text{ grad } f(\underline{a}).$$

Richtingsafgeleide. Zij f een reële functie van n variabelen, gedefinieerd tenminste op $U_\eta(\underline{a})$ voor zekere $\eta > 0$ en zij $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{v}$ een parametervoorstelling van een rechte door \underline{a} met richtingsvector \underline{v} . Kies $\|\underline{v}\| = 1$, dan is $|t|$ de afstand van \underline{x} tot \underline{a} . We beschouwen de samengestelde functie $g(t) = f(\underline{a} + t\underline{v})$. Als g een afgeleide heeft in $t = 0$, m.a.w. als

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{a} + t\underline{v}) - f(\underline{a})}{t}$$

bestaat, dan noemen we $g'(0)$ de *richtingsafgeleide van f in \underline{a} in de richting van \underline{v}* .

Merk op dat $f_x(\underline{a})$, $f_y(\underline{a})$ en $f_z(\underline{a})$ richtingsafgeleiden zijn in de richting van $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ resp. $(0,0,1)$.

Stelling. Zij f differentieerbaar in \underline{a} , dan bestaat de richtingsafgeleide van f in \underline{a} in elke richting \underline{v} ($\|\underline{v}\| = 1$) en is gelijk aan $(\text{grad } f(\underline{a}), \underline{v})$.

Bewijs. Dit is een onmiddellijk gevolg van de kettingregel. \square

Opgave. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zij gedefinieerd door

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{voor } \underline{x} \neq \underline{0}, \\ 0 & \text{voor } \underline{x} = \underline{0}. \end{cases}$$

- a) Bewijs dat f_x en f_y overal bestaan.
- b) Heeft f , behalve f_x en f_y , nog andere richtingsafgeleiden in $(0,0)$?

Meetkundige interpretatie. We beschouwen de differentieerbare functie $f(x,y,z)$. Door het punt $\underline{a} = (a,b,c)$ gaat het niveauvlak met vergelijking

$$(1) \quad f(x,y,z) = f(a,b,c).$$

De vergelijking van het raakvlak aan het niveauvlak in het punt \underline{a} kunnen we opstellen door op te merken dat door de vergelijking (1) z impliciet als functie van x en y is gegeven. (We nemen aan dat $f_z(\underline{a}) \neq 0$ is; zie 2.4.2.) Volgens 2.2.4 is de vergelijking van het raakvlak

$$(2) \quad z - c = \frac{\partial z}{\partial x}(a,b)(x - a) + \frac{\partial z}{\partial y}(a,b)(y - b).$$

Uit (1) bepalen we door impliciet differentiëren $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$. Dit geeft

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a,b) = -\frac{f_x(\underline{a})}{f_z(\underline{a})}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(a,b) = -\frac{f_y(\underline{a})}{f_z(\underline{a})}.$$

Invullen in (2) geeft tenslotte voor het raakvlak de vergelijking:

$$f_x(\underline{a})(x - a) + f_y(\underline{a})(y - b) + f_z(\underline{a})(z - c) = 0.$$

Uit de vergelijking volgt dat de vector $\text{grad } f(\underline{a})$ loodrecht op het niveauvlak in \underline{a} staat. De richtingsafgeleide in \underline{a} in de richting \underline{v} is $(\text{grad } f(\underline{a}), \underline{v}) = \|\text{grad } f(\underline{a})\| \cos \varphi$, als φ de hoek is tussen \underline{v} en $\text{grad } f(\underline{a})$. De richtingsafgeleide is dus maximaal als $\varphi = 0$, d.w.z. in de richting van $\text{grad } f(\underline{a})$. De vector $\text{grad } f(\underline{a})$ geeft dus aan in welke richting f het sterkst toeneemt. Loodrecht op $\text{grad } f(\underline{a})$ is de richtingsafgeleide nul; dit geldt dus voor richtingen in het raakvlak aan het niveauvlak.

Niveaувlakken snijden elkaar uiteraard niet.

Krommen loodrecht op alle niveaувlakken heten *orthogonale trajectoriën*; de raaklijn in \underline{a} aan de orthogonale trajectorie door \underline{a} heeft richtingsvector $\text{grad } f(\underline{a})$.

Voor $n = 2$ geldt een analoge meetkundige interpretatie. We hebben dan te maken met niveaulijnen in \mathbb{R}^2 in plaats van met niveaувlakken. De raaklijn in $\underline{a} = (a, b)$ aan de niveaulijn $f(x, y) = f(a, b)$ wordt gegeven door de vergelijking

$$f_x(\underline{a})(x - a) + f_y(\underline{a})(y - b) = 0 .$$

Voorbeelden.

1) $f(x, y) = xy$. Niveaulijnen zijn orthogonale hyperbolen met x-as en y-as als asymptoten.

Wegens $\text{grad } f(x, y) = (y, x)$ geldt voor de orthogonale trajectoriën $y = y(x)$ dat $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$, met als oplossingen $x^2 - y^2 = C$; dat zijn orthogonale hyperbolen met $y = x$ en $y = -x$ als asymptoten.

2) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Niveaувlakken zijn hyperboloïden of een kegel.

Denk de orthogonale trajectoriën geparametriseerd met x als parameter: $\underline{g}(x) = (x, \varphi(x), \psi(x))$. Nu hebben $\underline{g}'(x)$ en $\text{grad } f(\underline{x})$ dezelfde richting:

$$\frac{1}{x} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} .$$

Dit geeft twee differentiaalvergelijkingen

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}, \quad \frac{z'}{z} = -\frac{1}{x},$$

met oplossingen

$$y = cx, \quad z = \frac{d}{x}, \quad c, d \in \mathbb{R} .$$

De eerste van deze vergelijkingen stelt een stelsel platte vlakken voor, voor iedere $c \in \mathbb{R}$ één; de tweede vergelijking bepaalt een stelsel hyperbolische cilinders; ieder vlak snijdt iedere cilinder volgens een orthogonale trajectorie.

Opgaven.

1. Zijn alle orthogonale trajectoriën van voorbeeld 2 nu gevonden?
2. Bepaal in voorbeeld 2 de orthogonale trajectorie door $(0,1,1)$.

2.5.2. De in 2.4.1 uit wiskunde 30 geciteerde stelling kunnen we ook als volgt interpreteren:

Zij $f(x,y) = 0$ de vergelijking van een kromme Γ , zij $f(a,b) = 0$, $f_y(a,b) \neq 0$; dan heeft Γ in het punt (a,b) een ondubbelzinnig bepaalde raaklijn.

Hetzelfde geldt natuurlijk ook als $f_x(a,b) \neq 0$.

Volgens de definitie van singuliere punten (2.1.3) volgt hieruit:

Als p een singulier punt is van Γ , dan is

$$\text{grad } f(p) = \underline{0} .$$

2.5.3. Vooruitlopend op wiskunde 30 en 40 geven we hier nog de definities van enkele begrippen die in de natuurkunde een rol spelen. Men beschouwt daar het symbool

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

als een operator, die op een functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ werkt:

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \text{grad } f .$$

Door een drietal functies $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ wordt een functie $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gedefinieerd, die men wel *vectorveld* noemt; $\text{grad } f$ is een voorbeeld van een vectorveld; niet ieder vectorveld is op te vatten als de gradiënt van een functie.

Bij een vectorveld $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieert men:

$$i: \quad \operatorname{div} \underline{f} = (\nabla, f) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z},$$

zodat $\operatorname{div} \underline{f}$ een functie $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is;

$$ii) \quad \operatorname{rot} \underline{f} = \nabla \times \underline{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right),$$

zodat $\operatorname{rot} \underline{f}$ een functie $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is, een vectorveld.

Aan deze begrippen wordt in wiskunde 40 uitvoerig aandacht besteed.

6. Extrema

2.6.1. We beschouwen functies van n variabelen, waarbij $n = 2$ of $n = 3$. Locale resp. globale extrema worden gedefinieerd als bij functies van één variabele (zie Wiskunde 10).

Een belangrijke rol speelt de volgende stelling, die we niet zullen bewijzen.

Stelling (Weierstrass). Zij $V \subset \mathbb{R}^n$ een begrensde gesloten verzameling en zij $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ continu op V , dan heeft f op V een globaal maximum en een globaal minimum.

Zij $A \subset \mathbb{R}^n$. Een punt $\underline{a} \in A$ heet een *inwendig punt* van A wanneer er een $\eta > 0$ is zó, dat $U_\eta(\underline{a}) \subset A$. (Voorbeeld: van een open verzameling is ieder punt inwendig punt.)

Inwendige punten van $\operatorname{DOM} f$ waar f differentieerbaar is en $\operatorname{grad} f = \underline{0}$ heten *stationaire punten*.

Stelling. Als f een lokaal extremum heeft in een inwendig punt $\underline{a} \in \operatorname{DOM} f$ en als f differentieerbaar is in \underline{a} , dan is $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \underline{0}$, d.w.z. \underline{a} is een stationair punt.

Bewijs. Kies een richting \underline{v} . De samengestelde functie $g(t) = f(\underline{a} + t\underline{v})$ heeft in $t = 0$ een lokaal extremum en is daar differentieerbaar met $g'(0) = (\text{grad } f(\underline{a}), \underline{v})$. Volgens Wiskunde 10 is dan $(\text{grad } f(\underline{a}), \underline{v}) = 0$. Omdat dit geldt voor elke richting \underline{v} , is $\text{grad } f(\underline{a}) = \underline{0}$. \square

Voorbeelden.

- 1) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $\text{grad } f(x,y) = (2x, 2y)$. Het enige stationaire punt is $(0,0)$. In dit punt heeft f een globaal minimum met functiewaarde 0.
- 2) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ heeft geen stationaire punten, maar wel een globaal minimum in $(0,0)$. In $(0,0)$ is f niet differentieerbaar.
- 3) $f(x,y) = xy$; $\text{grad } f(x,y) = (y, x)$. Het enige stationaire punt is $(0,0)$, maar f heeft in dat punt géén extremum. Immers $f(0,0) = 0$ en $f(x,y) > 0$ in het eerste en derde kwadrant en $f(x,y) < 0$ in het tweede en vierde kwadrant.

We noemen het punt $(0,0)$ een *zadelpunt*.

Samenvattend kan men zeggen dat een functie f op een verzameling V extrema kan hebben:

- a) in stationaire punten van f ;
- b) in inwendige punten van V waar f niet differentieerbaar is;
- c) in randpunten van V .

Voorbeelden.

- 1) Bepaal de extrema van $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ op de verzameling

$$V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

V is begrensd en gesloten en f is continu, dus volgens de stelling van Weierstrass moet f een globaal maximum en een globaal minimum hebben op V . Inwendige punten zijn de punten (x,y) met $x^2 + y^2 < 1$. Omdat $\text{grad } f(x,y) = (-2x, -2y)$, is $(0,0)$ het enige stationaire punt met $f(0,0) = 1$. Voor de randpunten van V (de punten (x,y) met $x^2 + y^2 = 1$) is $f(x,y) = 0$ en voor de inwendige punten is $f(x,y) > 0$.

Conclusie. In elk punt van de rand heeft f een globaal minimum (waarde 0); er moet ook een globaal maximum zijn dat niet op de rand wordt aangenomen; er is slechts één stationair punt nl. $(0,0)$, dus in $(0,0)$ heeft f een globaal maximum (waarde 1).

2) Bepaal de extrema van $f(x,y) = (x - y)(x^2 + y^2 - 1)$ in \mathbb{R}^2 . Nu is

$$\text{grad } f(x,y) = (3x^2 - 2xy + y^2 - 1, -x^2 + 2xy - 3y^2 + 1).$$

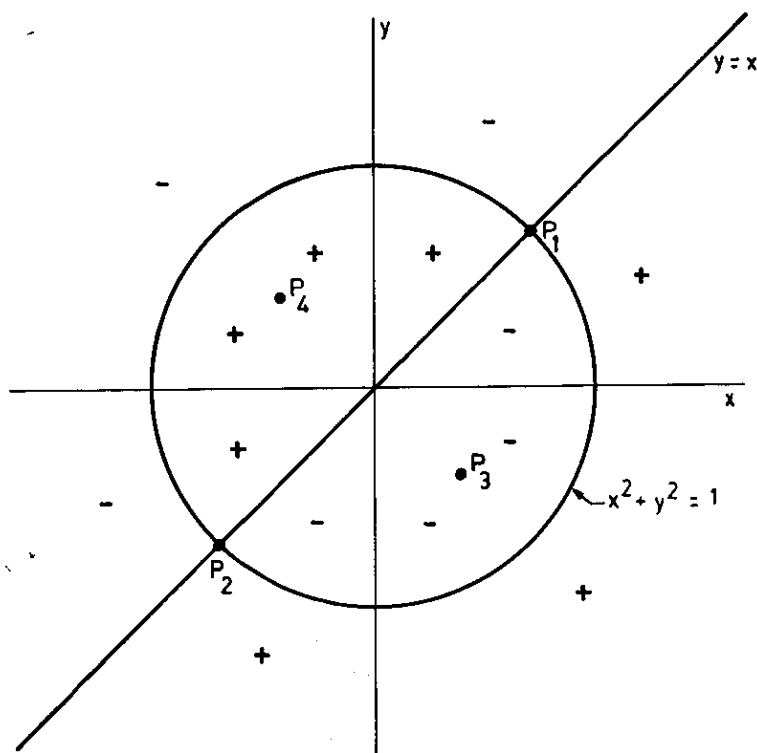
Er zijn vier stationaire punten:

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ functiewaarde } 0;$$

$$P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ functiewaarde } 0;$$

$$P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \text{ functiewaarde } -\frac{2}{9\sqrt{6}};$$

$$P_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \text{ functiewaarde } \frac{2}{9\sqrt{6}}.$$



Van de hoogtekaart zijn de nul-niveaulijnen (nullijnen) getekend, die het vlak in vier gebieden verdelen waar f tekenvast is. De tekenverdeling is ook aangegeven in de hoogtekaart. Hieruit blijkt onmiddellijk dat P_1 en P_2 zadelpunten zijn. Beschouw $V = \{(x,y) \mid (x \leq y) \wedge (x^2 + y^2 \leq 1)\}$. Op V is $f(x,y) \geq 0$ en op de rand van V is $f(x,y) = 0$. Aangezien V begrensd en gesloten is moet f dus een maximum hebben in het inwendige van V ; de enige kandidaat is P_4 , dus in P_4 neemt f zijn globaal maximum op V aan. Ten opzichte van

de gehele \mathbb{R}^2 heeft f in P_4 slechts een lokaal maximum. Evenzo heeft f in P_3 een lokaal minimum. (Ga na, dat f nog grotere resp. nog kleinere waarden aanneemt buiten $x^2 + y^2 = 1$.)

2.6.2. Voor de volledigheid vermelden we de volgende stelling, waarmee extremenonderzoek in inwendige punten mogelijk is, en die we niet zullen bewijzen.

Stelling. Laat f een functie van twee variabelen zijn, waarvan de tweede orde partiële afgeleiden bestaan en continu zijn tenminste op $U_\eta(\underline{p})$ voor zekere $\eta > 0$. Stel

$$\Delta(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

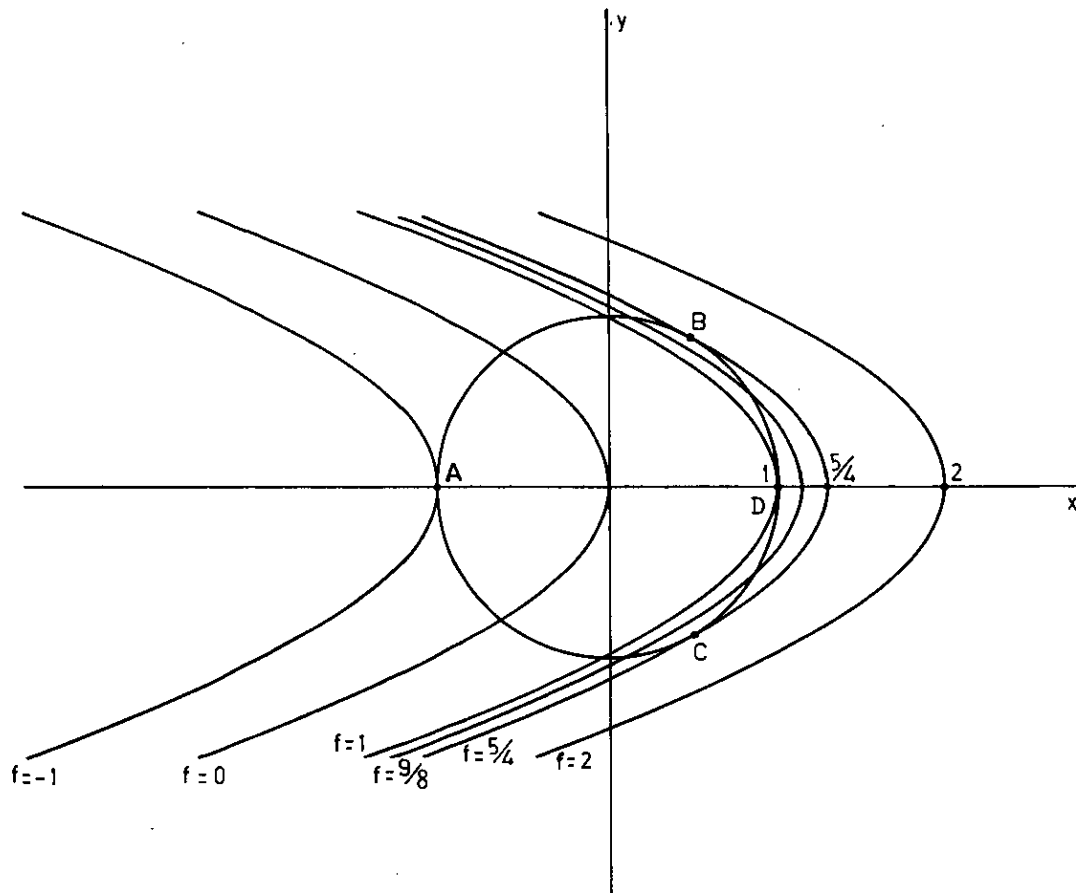
Dan geldt:

- a) Is \underline{p} een stationair punt van f en is $\Delta(\underline{p}) > 0$, dan heeft f een extreem in \underline{p} en wel een minimum als $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ in \underline{p} beide positief zijn en een maximum als ze beide negatief zijn.
- b) Is \underline{p} een stationair punt van f en is $\Delta(\underline{p}) < 0$, dan heeft f geen extreem in \underline{p} .

7. Extrema onder nevenvoorwaarden

2.7.1. In deze paragraaf beschouwen we het volgende probleem. Laten f en g functies van twee variabelen zijn. Bepaal de extrema van f op de verzameling van punten (x,y) die voldoen aan $g(x,y) = 0$.

Ter inleiding lossen we dit probleem op in het geval van $f(x,y) = x + y^2$ en $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. We tekenen de hoogtekaart van f (zie volgende bladzijde). We zien direct dat het globale minimum van f op $g(x,y) = 0$ de waarde -1 heeft en aangenomen wordt in $(-1,0)$. Om het globale maximum te bepalen zoeken we een getal c zó dat de parabool $x + y^2 = c$ raakt aan de cirkel $x^2 + y^2 = 1$. De voorwaarde waaraan c moet voldoen, is dan dat de vierkantsvergelijking $x^2 - x + c = 1$ een tweevoudige wortel heeft. Met de discriminant volgt dan $1 - 4(c - 1) = 0$; $c = 5/4$. De tweevoudige wortel is $x = \frac{1}{2}$. Het globale maximum wordt dus aangenomen in de punten $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3})$; de waarde is $5/4$.



Verder zien we dat f op $g(x,y) = 0$ nog een lokaal minimum heeft in het punt $(1,0)$ met waarde 1.

Tussen A en C (zie de figuur) stijgt de functiewaarde, tussen C en D daalt hij, van D naar B stijgt hij weer en van B naar A daalt hij. Samenvattend: $f(x,y) = x + y^2$ heeft op $x^2 + y^2 = 1$ de volgende extrema: globale maxima met waarde $\frac{5}{4}$ in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$, een globaal minimum met waarde -1 in $(-1,0)$ en een lokaal minimum met waarde +1 in $(1,0)$.

Deze extrema hadden we ook als volgt kunnen vinden: op $x^2 + y^2 = 1$ geldt $y^2 = 1 - x^2$ en $-1 \leq x \leq 1$; substitutie in $f(x,y)$ geeft $f(x,y(x)) = -x^2 + x + 1$, te beschouwen voor $-1 \leq x \leq 1$. Deze functie heeft voor $x = \frac{1}{2}$ een globaal maximum met waarde $\frac{5}{4}$. Verder zijn er een absoluut randminimum in -1 ter waarde -1 en een lokaal randminimum in +1 ter waarde 1.

Merk op, dat er in het punt $(1,0)$ geen minimum van f op de cirkelschijf $x^2 + y^2 \leq 1$ is (van D naar A lopend over de x-as daalt de functiewaarde). Extremen op de rand van een bepaald gebied behoeven dus niet extremen van de functie op het gehele gebied te zijn!

De volgende stelling geeft een nodige voorwaarde voor een extremum.

Stelling. Als f een extremum heeft onder de nevenvoorwaarde $g(x,y) = 0$ in een punt \underline{a} waar f en g differentieerbaar zijn en waar $\text{grad } g(\underline{a}) \neq \underline{0}$, dan is er een getal λ zodat geldt

$$\text{grad } f(\underline{a}) + \lambda \text{ grad } g(\underline{a}) = \underline{0} .$$

We bewijzen de stelling niet.

Meetkundig is de stelling als volgt plausibel te maken. De nevenvoorwaarde $g(x,y) = 0$ is de vergelijking van de nul-niveaulijn van de functie g . Heeft f in het punt \underline{a} op deze nul-niveaulijn een extremum, dan raakt de niveaulijn van f door \underline{a} aan deze nul-niveaulijn van g . De raaklijnen door \underline{a} aan beide niveaulijnen vallen dan samen, evenals hun normalen, en daar $\text{grad } f(\underline{a})$ en $\text{grad } g(\underline{a})$ de richting van de normaal hebben is dus $\text{grad } f(\underline{a})$ een veelvoud van $\text{grad } g(\underline{a})$.

Men gebruikt de stelling aldus.

Los x , y en λ op uit de drie vergelijkingen

$$\begin{cases} g(x,y) = 0 , \\ f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0 , \\ f_y(x,y) + \lambda g_y(x,y) = 0 . \end{cases}$$

Is (x_0, y_0, λ_0) een oplossing van dit stelsel vergelijkingen, dan kan er in (x_0, y_0) een extremum optreden. In punten waar $\text{grad } g = \underline{0}$ is de methode niet toepasbaar; zulke punten komen dus ook voor extrema in aanmerking en dienen apart onderzocht te worden.

De methode heet *multiplicatorenmethode van Lagrange* (λ heet de *multiplicator*).

Voorbeeld. Bepaal de extrema van $f(x,y) = x + y^2$ onder de nevenvoorwaarde $g(x,y) = 0$, waarin $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

Oplossing: $\text{grad } g = (2x, 2y)$; $\text{grad } g = \underline{0}$ komt op de kromme $g(x,y) = 0$ dus niet voor. Daar $\text{grad } f = (1, 2y)$ moeten punten waar f een extreem heeft, voldoen aan

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 1 + \lambda \cdot 2x = 0, \\ 2y + \lambda \cdot 2y = 0, \end{cases}$$

waarvan de oplossingen zijn:

$$\lambda = -\frac{1}{2}, (x,y) = (1,0) \quad \text{met } f(1,0) = 1,$$

$$\lambda = \frac{1}{2}, (x,y) = (-1,0) \quad \text{met } f(-1,0) = -1,$$

$$\lambda = -1, (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \quad \text{met } f\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{5}{4}.$$

Met behulp van de stelling van Weierstrass concluderen we tot globale maxima in $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3})$ en een globaal minimum in $(-1,0)$. Vervolgens passen we de stelling van Weierstrass toe op het deel van de kromme $g(x,y) = 0$ van $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ via $(1,0)$ naar $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$. Op dit deel heeft f globale maxima in $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3})$; er moet nog een minimum zijn, waarvoor $(1,0)$ de enige mogelijkheid is. Ten opzichte van de gehele kromme is er in $(1,0)$ dus een lokaal minimum.

2.7.2. De stelling in 2.7.1 geeft een nodige, maar geen voldoende voorwaarde voor het optreden van een extremum van f onder de nevenvoorwaarde $g(x,y) = 0$: het kan voorkomen dat voor zekere $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{grad } f(\underline{a}) + \lambda \text{ grad } g(\underline{a}) = \underline{0},$$

terwijl in \underline{a} toch geen extreem wordt aangenomen.

Voorbeeld: $f(x,y) = y$ op $g(x,y) = 0$ met $g(x,y) = x^3 - y$ heeft geen extremen (als x toeneemt, neemt y en dus $f(x,y)$ ook toe), terwijl

$$\text{grad } f(\underline{0}) + \text{grad } g(\underline{0}) = \underline{0}.$$

Schets hierbij een hoogtekaart!

Voorbeeld. Bepaal de extrema van $f(x,y) = 2xy + y$ op de kromme $x^2 + 3y^2 = \frac{1}{4}$. Dit leidt tot het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 - \frac{1}{4} = 0, \\ y + \lambda x = 0, \\ 2x + 1 + \lambda(6y) = 0, \end{cases}$$

met als oplossingen

$$\lambda = 0, (x,y) = (-\frac{1}{2}, 0), f(-\frac{1}{2}, 0) = 0 ,$$

$$\lambda = -1, (x,y) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), f(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{3}{8} ,$$

$$\lambda = 1, (x,y) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}), f(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) = -\frac{3}{8} .$$

(Ga na, dat met $g(x,y) = x^2 + 3y^2 - \frac{1}{4}$, de punten waar $\text{grad } g = \underline{0}$ niet op de kromme $g(x,y) = 0$ liggen).

De kromme $x^2 + 3y^2 = \frac{1}{4}$ is een begrensde, gesloten verzameling; volgens de stelling van Weierstrass (2.6.1) moet er een globaal maximum en een globaal minimum zijn, zodat in $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ het globale maximum en in $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ het globale minimum moet worden aangenomen. In $(-\frac{1}{2}, 0)$ is er geen extreem: $f(-\frac{1}{2}, 0) = 0$, langs de kromme in de buurt van $(-\frac{1}{2}, 0)$ is $x = -\sqrt{\frac{1}{4} - 3y^2}$ zodat $f(x,y) = -2y\sqrt{\frac{1}{4} - 3y^2} + y$, hetgeen positief is voor $y > 0$ en negatief voor $y < 0$.

2.7.3. Men kan de multiplicatorenmethode uitbreiden tot functies van meer variabelen en meer nevenvoorwaarden. Een van de gevallen die zich kunnen voordoen is, bijvoorbeeld: bepaal de extrema van $f(x,y,z)$ onder de nevenvoorwaarden $g(x,y,z) = 0$ en $h(x,y,z) = 0$.

Dit leidt tot het oplossen van x, y, z, λ_1 en λ_2 uit het stelsel van vijf vergelijkingen

$$\begin{cases} g = 0, h = 0 , \\ f_x + \lambda_1 g_x + \lambda_2 h_x = 0 , \\ f_y + \lambda_1 g_y + \lambda_2 h_y = 0 , \\ f_z + \lambda_1 g_z + \lambda_2 h_z = 0 . \end{cases}$$

Voorbeelden.

1) Bepaal de extrema van $f(x,y,z) = xyz$ onder de voorwaarde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

De voorwaarde bepaalt in \mathbb{R}^3 een bol, dat is een begrensde en gesloten verzameling. De functie f heeft daar in ieder geval een globaal maximum en een globaal minimum. De vergelijkingen waaraan de stationaire punten hier voldoen zijn

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$yz + 2\lambda x = 0$$

$$xz + 2\lambda y = 0$$

$$xy + 2\lambda z = 0 .$$

Door eliminatie van λ uit ieder tweetal der laatste drie volgt

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x(y^2 - z^2) = 0$$

$$y(z^2 - x^2) = 0$$

$$z(x^2 - y^2) = 0 ,$$

zodat er 14 stationaire punten zijn,

$$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1), \left(\pm \frac{1}{3} \sqrt{3}, \pm \frac{1}{3} \sqrt{3}, \pm \frac{1}{3} \sqrt{3}\right)$$

met functiewaarden

$$0 \quad , \quad 0 \quad , \quad 0 \quad , \quad \pm \frac{1}{9} \sqrt{3} .$$

De eerste 6 der genoemde punten zijn zadelpunten; op symmetriegronden ziet men nu dat

$$\begin{aligned} \max f &= f\left(\frac{1}{3} \sqrt{3}, \frac{1}{3} \sqrt{3}, \frac{1}{3} \sqrt{3}\right) = f\left(-\frac{1}{3} \sqrt{3}, -\frac{1}{3} \sqrt{3}, -\frac{1}{3} \sqrt{3}\right) = \\ &= f\left(-\frac{1}{3} \sqrt{3}, \frac{1}{3} \sqrt{3}, -\frac{1}{3} \sqrt{3}\right) = f\left(-\frac{1}{3} \sqrt{3}, -\frac{1}{3} \sqrt{3}, \frac{1}{3} \sqrt{3}\right) = \frac{1}{9} \sqrt{3} , \end{aligned}$$

$\min f = -\frac{1}{9} \sqrt{3}$, en het minimum wordt door f aangenomen in de overblijvende 4 punten.

Opgave. Schets de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en enige der hoogtelijnen van f op de bol.

- 2) Bepaal de extrema van $f(x, y, z) = xy + yz$ onder de nevenvoorwaarden $x^2 + y^2 = 2, yz = 2$.

De nevenvoorwaarden bepalen een kromme, die een gesloten, maar niet een begrensde verzameling is in \mathbb{R}^3 , en uit 2 takken is samengesteld, één met $z > 0$, de andere met $z < 0$. De vergelijkingen voor de stationaire punten zijn:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 2 \\yz &= 2 \\y + 2\lambda x &= 0 \\x + z + 2\lambda y + \mu z &= 0 \\y + \mu y &= 0\end{aligned}$$

Eliminatie van λ en μ uit de laatste drie vergelijkingen geeft

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 2 \\yz &= 2 \\y(x^2 - y^2) &= 0,\end{aligned}$$

waaruit voor de stationaire punten volgt

$$x^2 = y^2 = 1, z = \pm 2,$$

zodat de stationaire punten op de tak met $z > 0$ zijn $(1,1,2)$ en $(-1,1,2)$, met functiewaarden 3 en 1. *Uit*

$$f\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}, 10\right) = \frac{57}{25} < 3 \text{ en } f\left(-\frac{7}{5}, \frac{1}{5}, 10\right) = \frac{43}{25} > 1$$

volgt nu door de stelling van Weierstrass te gebruiken dat $f(1,1,2) = 3$ een maximum is op de bovenste tak, dus lokaal; $f(-1,1,2) = 1$ is een lokaal minimum.

Alle voorkomende functies zijn symmetrisch ten opzichte van de oorsprong. Dus $f(-1,-1,-2) = 3$ is lokaal maximum op de onderste tak, $f(1,-1,-2) = 1$ is daar lokaal minimum.

Aangezien de beide locale maxima (minima) gelijk zijn, zijn ze ook globaal maximum (minimum).

Hoofdstuk 3. Lineaire algebra.

Inleiding. In de vectormeetkunde, zoals die bij het VWO en, in deze syllabus, in hoofdstuk 1 is behandeld, worden meetkundige objecten, zoals punten, lijnen en vlakken, beschreven met behulp van getallen; een punt in het platte vlak (dan wel de ruimte) correspondeert met een getallenpaar (-drietal), een lijn met een parametervoorstelling, een vlak is de verzameling van punten waarvan de coördinatendrietalen aan een lineaire vergelijking voldoen. Lineaire vergelijkingen hebben evenwel méér betekenis dan alleen voor de meetkunde, want ze komen ook voort uit allerlei andere problemen; in zulke gevallen is het aantal onbekenden gewoonlijk niet twee of drie.

We noemen nu, naar analogie van het gebruik in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 , een geordend n -tal van reële getallen a_1, a_2, \dots, a_n een n -vector of, meestal, kortweg *vector* en we gebruiken hiervoor de afgekorte notatie \underline{a} . Bij een vector \underline{a} zijn twee veelgebruikte representaties, de *rijrepresentatie* $[a_1, \dots, a_n]$ en de *kolomrepresentatie*

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Als niet uitdrukkelijk anders is vermeld bedoelen we met de notatie \underline{a} de kolomrepresentatie. Om *typografische* redenen schrijven we voor de kolomrepresentatie ook wel (a_1, \dots, a_n) .

De getallen a_1, \dots, a_n heten de *coördinaten* van de vector \underline{a} ; a_1 heet de *eerste coördinaat*, enzovoort.

1. De n -dimensionale reële coördinatenruimte, \mathbb{R}^n .

3.1.1. Zij n een natuurlijk getal. De verzameling van de vectoren $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ geven we aan met \mathbb{R}^n .

De vector $(0, 0, \dots, 0)$, afgekort $\underline{0}$, heet *nulvector*.

In de verzameling \mathbb{R}^n wordt een *optelling* gedefinieerd op de volgende manier. Stel $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ dan is $\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$. De optelling in \mathbb{R}^n heeft de volgende eigenschappen:

- i) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ voor alle $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$; d.w.z. de optelling in \mathbb{R}^n is commutatief.
- ii) $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ voor alle $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$, d.w.z. de optelling in \mathbb{R}^n is associatief.
- iii) $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$ voor alle $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$.
- iv) voor iedere $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ is er een element $-\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ zo dat $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$.
Immers, als $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, dan nemen we $-\underline{a} = (-a_1, \dots, -a_n)$.

Het bovenstaande wordt vaak samengevat door te zeggen dat $(\mathbb{R}^n, +)$ een commutatieve groep is.

Naast de optelling definiëren we in \mathbb{R}^n ook nog een *vermenigvuldiging met reële getallen*, een zogenaamde scalaire vermenigvuldiging, als volgt: Als $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, en $\lambda \in \mathbb{R}$ dan is

$$\lambda \underline{a} = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) .$$

Deze scalaire vermenigvuldiging heeft de eigenschappen

- v) $1 \underline{a} = \underline{a}$ voor alle $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$.
- vi) $\lambda(\mu \underline{a}) = (\lambda\mu) \underline{a}$ voor alle $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$.
- vii) $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b}$ voor alle $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- viii) $(\lambda + \mu) \underline{a} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{a}$ voor alle $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

In plaats van de opsomming van de eigenschappen i) - viii) te geven zeggen we meestal $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ is een *lineaire ruimte* (ook wel *vectorruimte*).

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ noemt men de *n-dimensionale reële coördinatenruimte* (we schrijven gewoonlijk \mathbb{R}^n).

3.1.2. Laat de vectoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$ in \mathbb{R}^n gegeven zijn. Iedere vector $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ die geschreven kan worden als

$$\underline{x} = \alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_p \underline{a}_p \quad \text{met } \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq p$$

heet een *lineaire combinatie* van de vectoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$.

Laat \underline{v} een vector in \mathbb{R}^n zijn met $\underline{v} \neq \underline{0}$. De lineaire combinaties van \underline{v} zijn de vectoren $\lambda \underline{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. De verzameling van alle lineaire combinaties van \underline{v} noemen we de *rechte* in \mathbb{R}^n door $\underline{0}$ met richtingsvector \underline{v} . Algemener definiëren we: een *rechte* in \mathbb{R}^n met *steunvector* $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ en *richtingsvector* \underline{v} is de verzameling $\{\underline{a} + \lambda \underline{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Laat nu \underline{v} en \underline{w} twee vectoren in \mathbb{R}^n zijn zo dat \underline{v} niet een veelvoud van \underline{w} en \underline{w} niet een veelvoud van \underline{v} is. (Hieruit volgt $\underline{v} \neq \underline{0}$ en $\underline{w} \neq \underline{0}$, want als bijvoorbeeld $\underline{v} = \underline{0}$, dan zou gelden $\underline{v} = 0 \underline{w}$.)

De verzameling van alle lineaire combinaties van \underline{v} en \underline{w} is een *vlak* in \mathbb{R}^n door $\underline{0}$ (een vlak is geen rechte: stel iedere lineaire combinatie van \underline{v} en \underline{w} is een veelvoud van een vector \underline{a} . Dan is in het bijzonder $\underline{v} = \lambda \underline{a}$, $\underline{w} = \mu \underline{a}$ met $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, en dus $\underline{v} = \frac{\lambda}{\mu} \underline{w}$, tegenspraak). Algemener definiëren we: een *vlak* in \mathbb{R}^n met *steunvector* \underline{a} en *richtingsvectoren* \underline{v} en \underline{w} is de verzameling

$$\{\underline{a} + \lambda \underline{v} + \mu \underline{w} \mid \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\} .$$

3.1.3. In het platte vlak en de ruimte werd het inwendig product afgeleid uit de daar bekende begrippen lengte en hoek. In de \mathbb{R}^n doen we het omgekeerd. We zullen eerst het inwendig product definiëren, en daaruit het lengtebegrip en het hoekbegrip afleiden.

Definitie. Stel $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$. Onder het *inwendig product* $(\underline{a}, \underline{b})$ van \underline{a} en \underline{b} verstaan we het getal

$$(\underline{a}, \underline{b}) = \sum_{k=1}^n a_k b_k .$$

Uit deze definitie volgen direct de volgende eigenschappen:

- i) $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$
- ii) $(\underline{a} + \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{a}, \underline{c}) + (\underline{b}, \underline{c})$
- iii) $(\lambda \underline{a}, \underline{b}) = \lambda (\underline{a}, \underline{b})$

Herhaald toepassen levert

$$(\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}, \gamma \underline{c} + \delta \underline{d}) = \alpha \gamma (\underline{a}, \underline{c}) + \alpha \delta (\underline{a}, \underline{d}) + \beta \gamma (\underline{b}, \underline{c}) + \beta \delta (\underline{b}, \underline{d})$$

zodat we met inwendige producten kunnen rekenen geheel analoog aan het rekenen met reële getallen.

Eigenschap i) zegt dat het inwendig product *symmetrisch* is, eigenschappen ii) en iii) zeggen dat $(\underline{a}, \underline{b})$ *lineair* is in \underline{a} , en volgens eigenschap i) is $(\underline{a}, \underline{b})$ ook lineair in \underline{b} .

Definitie. Onder de *lengte* $\|\underline{a}\|$ van een vector $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ verstaan we het getal $\|\underline{a}\| = \sqrt{(\underline{a}, \underline{a})}$.

Merk op dat, als $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$,

$$(\underline{a}, \underline{a}) = \sum_{k=1}^n a_k^2 \geq 0,$$

de definitie heeft dus zin voor iedere $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$.

Onder de *afstand* van twee vectoren \underline{a} en \underline{b} verstaan we de lengte van hun verschil, $\|\underline{a} - \underline{b}\|$.

Stelling (Cauchy-Schwarz). Voor alle $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$|(\underline{a}, \underline{b})| \leq \|\underline{a}\| \|\underline{b}\|.$$

Bewijs. Voor $\underline{b} = \underline{0}$ is het gestelde evident. Voor $\underline{b} \neq \underline{0}$: Beschouw de functie f op \mathbb{R} gedefinieerd door

$$f(\lambda) = (\underline{a} + \lambda \underline{b}, \underline{a} + \lambda \underline{b}) = \|\underline{a} + \lambda \underline{b}\|^2.$$

Deze functie is niet-negatief voor iedere λ .

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\underline{a}, \underline{a}) + 2\lambda(\underline{a}, \underline{b}) + \lambda^2(\underline{b}, \underline{b}) \\ &= \|\underline{b}\|^2 \lambda^2 + 2\lambda(\underline{a}, \underline{b}) + \|\underline{a}\|^2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de discriminant kleiner dan of gelijk aan nul moet zijn, dus

$$4(\underline{a}, \underline{b})^2 - 4\|\underline{a}\|^2\|\underline{b}\|^2 \leq 0$$

$$(\underline{a}, \underline{b})^2 \leq \|\underline{a}\|^2\|\underline{b}\|^2$$

$$|(\underline{a}, \underline{b})| \leq \|\underline{a}\|\|\underline{b}\|.$$

□

Definitie. Stel $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b} \neq \underline{0}$. De hoek φ tussen de vectoren \underline{a} en \underline{b} in \mathbb{R}^n wordt bepaald door

i) $0 \leq \varphi \leq \pi$

ii) $\cos \varphi = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{\|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\|}$

(dus: $\varphi = \arccos \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{\|\underline{a}\| \|\underline{b}\|}$).

Merk op dat op grond van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz de hoek tussen \underline{a} en \underline{b} met $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b} \neq \underline{0}$ steeds gedefinieerd is, en dat dan per definitie geldt

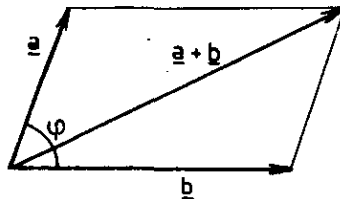
$$(\underline{a}, \underline{b}) = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \cdot \cos \varphi.$$

Twee vectoren \underline{a} en \underline{b} heten *loodrecht* of *orthogonaal* als $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$.

Door bovenstaande definities gelden meetkundige relaties in \mathbb{R}^n analoog aan die in \mathbb{R}^2 of \mathbb{R}^3 .

Voorbeelden.

1) *Cosinusregel:*



$$\begin{aligned} \|\underline{a} + \underline{b}\|^2 &= (\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \underline{b}) = \|\underline{a}\|^2 + \|\underline{b}\|^2 + 2(\underline{a}, \underline{b}) \\ &= \|\underline{a}\|^2 + \|\underline{b}\|^2 + 2\|\underline{a}\|\|\underline{b}\|\cos \varphi. \end{aligned}$$

2) *Driehoeksongelijkheid:*

$$\left| \|\underline{a}\| - \|\underline{b}\| \right| \leq \|\underline{a} + \underline{b}\| \leq \|\underline{a}\| + \|\underline{b}\|.$$

Immers, uit de cosinusregel volgt

$$\begin{aligned} \|\underline{a}\|^2 + \|\underline{b}\|^2 - 2\|\underline{a}\|\|\underline{b}\| &\leq \|\underline{a} + \underline{b}\|^2 \leq \|\underline{a}\|^2 + \|\underline{b}\|^2 + 2\|\underline{a}\|\|\underline{b}\| \\ (\|\underline{a}\| - \|\underline{b}\|)^2 &\leq \|\underline{a} + \underline{b}\|^2 \leq (\|\underline{a}\| + \|\underline{b}\|)^2 \\ \|\underline{a}\| - \|\underline{b}\| &\leq \|\underline{a} + \underline{b}\| \leq \|\underline{a}\| + \|\underline{b}\|. \end{aligned}$$

3.1.4. Definitie. Als m en n natuurlijke getallen zijn dan verstaan we onder een $m \times n$ -matrix een tabel van m rijen en n kolommen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

De getallen a_{ij} ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) heten de *elementen* van de matrix. In deze notatie heet i de *rij-index*, j de *kolom-index*. We schrijven voor zo'n matrix ook: A , ook wel $[a_{ij}]$.

Eén rij is te beschouwen als een $1 \times n$ -matrix, één kolom als een $m \times 1$ -matrix (één getal kan men als een 1×1 -matrix beschouwen).

Met matrices worden rekenkundige bewerkingen gedefinieerd: som, product enz.; om het onderscheid met het meer algemene begrip "tabel" aan te geven, schrijven we een "matrix" tussen rechte haken (behalve als $m = n = 1$).

Bewerkingen met matrices.

i) *Som en verschil.* Als A en B matrices zijn met m rijen en n kolommen, waarvan de elementen zijn a_{ij} en b_{ij} ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) dan verstaan we onder de *som* van A en B de matrices met elementen $a_{ij} + b_{ij}$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$):

$$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}], A + B = [a_{ij} + b_{ij}];$$

het *verschil* is $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$.

Als $m=1$ of $n=1$ corresponderen deze definities met die voor de som (het verschil) van vectoren. Als $m=1$ en $n=1$ corresponderen deze definities met die van de som (het verschil) van getallen.

ii) *Vermenigvuldiging met een getal.*

Als A een matrix is en α een getal dan is αA de matrix met elementen αa_{ij} :

$$A = [a_{ij}], \quad \alpha A = [\alpha a_{ij}].$$

Onder $-A$ verstaan we $(-1)A = [-a_{ij}]$.

iii) *Transpositie.*

Als A een $m \times n$ -matrix is met elementen a_{ij} dan is de *getransponeerde matrix* die met elementen $a_{ji}^T = a_{ij}$; we geven haar aan met A^T .

De elementen van A met $i = j$, vormen de *hoofddiagonaal* van A. We kunnen dan zeggen: de getransponeerde A^T ontstaat uit A door "de elementen te spiegelen ten opzichte van de hoofddiagonaal".

A^T is een $n \times m$ -matrix. Als A een matrix van één rij is, is A^T een kolom; als A een kolom is, is A^T een rij.

Voorbeelden.

1)

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 9 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \quad A - B = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 0 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$11A = \begin{bmatrix} 110 & 88 \\ 66 & 44 \\ 22 & 0 \end{bmatrix} \quad -B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 2 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

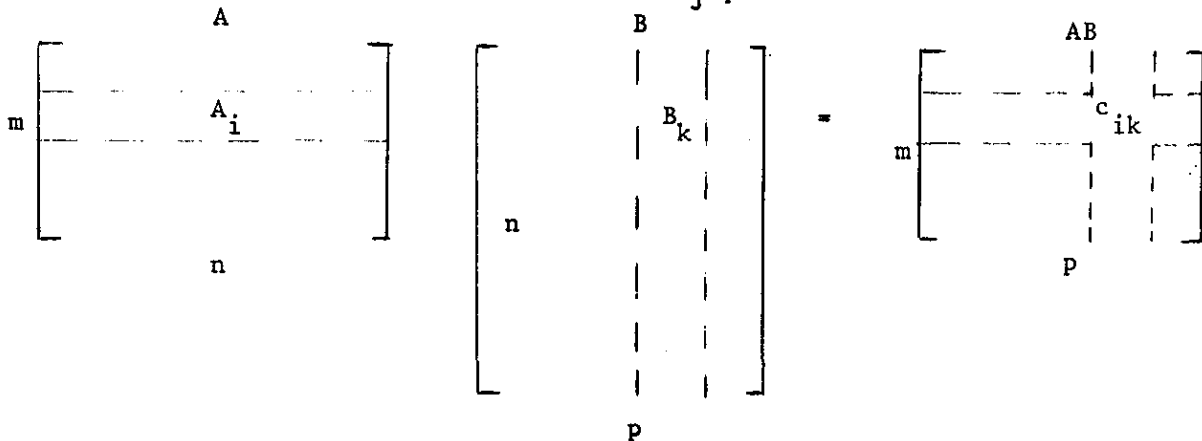
2)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad A^T = [a_1, a_2, a_3].$$

Product van matrices.

Als A een $m \times n$ -matrix is met elementen a_{ij} , B een $n \times p$ -matrix met elementen b_{jk} , dan verstaat men onder het *product* AB van de matrices

A en B de $m \times p$ -matrix met elementen $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$.



Men kan ook zeggen: c_{ik} is het inwendig product van de i -de rij(matrix) A_i van A met de k -de kolom(matrix) B_k van B; deze representeren allebei een element van \mathbb{R}^n .

Het product van matrices A en B kan alleen gevormd worden als de formaten van A en B passend zijn: het aantal kolommen van A moet gelijk zijn aan het aantal rijen van B. Als AB bestaat hoeft BA niet te bestaan.

Als zowel AB als BA bestaan geldt in het algemeen *niet* $AB = BA$.

Bijzondere gevallen:

- i) B bestaat uit één kolom; dan is AB weer een kolommatrix. Dit geval doet zich vaak voor met B als kolomrepresentatie van een vector \underline{b} , en we schrijven dan ook $A\underline{b}$.

- ii) Als een matrix B uit één kolom bestaat, kunnen we deze ook opvatten als een vector, \underline{b} . Als een matrix A uit één rij bestaat dan kunnen we deze opvatten als een rijvector, dat is de getransponeerde van een kolomvector, \underline{a}^T . Dan is

$$AB = [a_1, \dots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \underline{a}^T \underline{b} = (\underline{a}, \underline{b}) .$$

De mogelijkheid om het inwendig product van twee vectoren op deze manier als een matrixproduct te schrijven zullen we bij latere gelegenheden benutten.

- iii) Als A een $n \times n$ -matrix is dan bestaat AA ; we schrijven hiervoor A^2 ; evenzo $A^3 = A^2A = AA^2$, enzovoort.

3.1.5. De som, het veelvoud, de transpositie en het product van matrices voldoen aan een groot aantal regels die we hier zonder bewijs vermelden (de bewijzen zijn voor het merendeel zeer eenvoudig). In alle regels zijn er voor de hand liggende beperkingen voor de formaten.

$$\begin{aligned} A + B &= B + A & ; & & (A + B) + C &= A + (B + C) ; \\ (\alpha + \beta)A &= \alpha A + \beta A; & \alpha(A + B) &= \alpha A + \alpha B & ; & \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A . \\ (A^T)^T &= A & ; & & (A + B)^T &= A^T + B^T & ; & (\alpha A)^T = \alpha A^T . \\ A(B + C) &= AB + AC; & (A + B)C &= AC + BC & ; & (AB)C = A(BC) . \\ (AB)^T &= B^T A^T . \end{aligned}$$

Bij ieder formaat is er de bijzondere matrix O waarvan alle elementen 0 zijn.

$$A + O = A; A - A = O; AO = O; OB = O.$$

Een $n \times n$ -matrix ("vierkante" matrix) I met elementen

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j , \\ 0 & \text{als } i \neq j . \end{cases} \quad \text{dus } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} ,$$

heet eenheidsmatrix.

$$AI = A , \quad IB = B .$$

Voorbeelden.

1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 22 \\ 10 & 18 & 28 \\ -25 & 23 & -62 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -5 & 29 \\ 63 & -31 \end{bmatrix}$$

$$A^T B^T = \begin{bmatrix} -5 & 63 \\ 29 & -31 \end{bmatrix}$$

AB^T bestaat niet .

- 2) Een fabriek maakt drie artikelen, die in vier filialen verkocht worden. De voorraden der filialen op zeker tijdstip geven we aan met a_{ij} ; a_{ij} is het aantal artikelen van soort nummer j in filiaal nummer i ($i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3$). De getallen a_{ij} vormen een voorraadmatrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} .$$

Noem de fabricagekosten van de artikelen f_1, f_2, f_3 per stuk; ze vormen de vector $(f_1, f_2, f_3) = \underline{f}$. De grondstofprijzen g_1, g_2, g_3 per stuk vormen de vector $(g_1, g_2, g_3) = \underline{g}$.

In filiaal nummer i ligt dan opgeslagen voor een bedrag van

$$a_{i1}(f_1 + g_1) + a_{i2}(f_2 + g_2) + a_{i3}(f_3 + g_3)$$

en dit is de i -de component van de vector

$$A(\underline{f} + \underline{g}) . \quad (i = 1, 2, 3, 4) .$$

Als de verkoopprijzen der artikelen v_1, v_2, v_3 per stuk zijn en we de vector $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ invoeren, dan vertegenwoordigt de voorraad in filiaal nummer i een bedrag

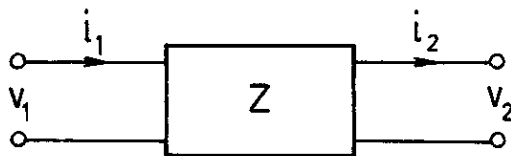
$$a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + a_{i3} v_3 ,$$

de i -de component van de vector \underline{A}_y .

De te incasseren winsten leest men voor ieder der filialen af in de componenten van de vector

$$\underline{A}_y - A(\underline{f} + \underline{g}) = A(\underline{v} - \underline{f} - \underline{g}) .$$

- 3) Beschouw een tweekoort, dat is een electrisch netwerk met twee ingangen en twee uitgangen, waarbij het verband tussen de ingangsgrootheden i_1 en V_1 en de uitgangsgrootheden i_2 en V_2 lineair is.



Men kan dan de spanningen V_1 en V_2 uitdrukken in de stroomsterkten i_1 en i_2 :

$$V_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2$$

$$V_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2$$

of, met vectoren en een matrix

$$\underline{V} = Z\underline{I}, \text{ waarin } Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

de *impedantiematrix* van de tweekoort heet.

De coëfficiënten $Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}$ kan men berekenen met de wetten van Kirchhoff, als men de, hier niet getekende, constructie van het netwerk kent.

Men schakelt twee van zulke netwerken, met impedantiematrices Z' en Z''

in serie. De spanningen op het eerste netwerk vormen de vector $\underline{V}' = (V'_1, V'_2)$, die op het tweede $\underline{V}'' = (V''_1, V''_2)$, die op het gehele netwerk, weer een tweepoort, $\underline{V} = (V_1, V_2)$.

Dan is

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V'_1 + V''_1 \\ V'_2 + V''_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V''_1 \\ V''_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z''_{11} & Z''_{12} \\ Z''_{21} & Z''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \\ &= Z' \underline{I} + Z'' \underline{I} = (Z' + Z'') \underline{I} . \end{aligned}$$

De impedantiematrix van de serie is de som der impedantiematrices der netwerkcomponenten.

Men kan uit de betrekkingen

$$V_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2$$

$$V_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2$$

ook V_2 en i_2 oplossen en uitdrukken in V_1 en i_1 , en deze uitdrukkingen zijn weer lineair (ga maar na).

We schrijven ze als

$$V_2 = C_{11} V_1 + C_{12} i_1$$

$$i_2 = C_{21} V_1 + C_{22} i_1$$

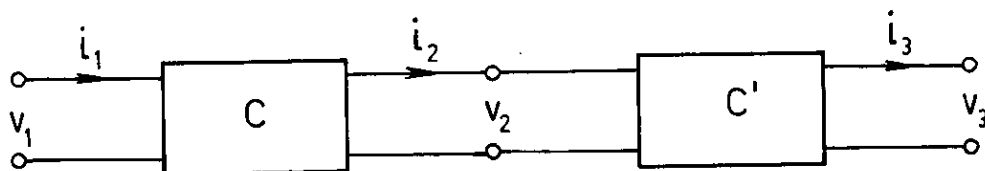
of, met vectoren $\underline{E}_j = (V_j, i_j)$, $j = 1, 2$, en een matrix

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} ,$$

$$\underline{E}_2 = C \underline{E}_1 .$$

Door een cascadeschakeling ontstaat weer een tweepoort, en

$$\underline{E}_3 = C' \underline{E}_2 = C' (C \underline{E}_1) = (C' C) \underline{E}_1 .$$



De *cascadematrix* van het cascadenetwerk is het product der cascade-matrices der componenten.

4) Beschouw de $n \times n$ -eenheidsmatrix

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Wanneer men enige der kolommen onderling van plaats verandert, ontstaat een *permutatiematrix*.

Bewijs zelf: Als P een permutatiematrix is, dan is P^T ook een permutatiematrix; als P en Q permutatiematrices zijn, dan is PQ er ook een.

Neem een $n \times n$ -permutatiematrix P, een $m \times n$ -matrix A, bepaal het product AP. Wat is er met de kolommen van A gebeurd?

5) Als een $n \times n$ -matrix $A = [a_{ij}]$ de eigenschap heeft dat $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, n$), dan heet die matrix *symmetrisch*; dit is equivalent met de eis dat $A = A^T$.

Symmetrische matrices worden in wiskunde 30 uitvoerig besproken, en komen in het vervolg van dit hoofdstuk alleen terloops nog ter sprake.

Kan een permutatiematrix symmetrisch zijn? Is de som, het product van symmetrische matrices symmetrisch?

3.1.6. Matrices die van variabelen afhangen.

Men zegt dat de matrix A een functie van een variabele is, als de elementen a_{ij} van A functies van die variabele zijn.

Voorbeelden.

1)
$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

is een functie van φ .

2)
$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1 - \lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

is een functie van λ .

3)
$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

is een functie van x, y en z (of van \underline{x} , $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$).

Als de elementen a_{ij} van A differentieerbare functies van t zijn, kan men van de afgeleide van A spreken:

Definitie. De afgeleide $\frac{d}{dt} A$ of \dot{A} van A heeft als elementen de afgeleiden \dot{a}_{ij} van de elementen a_{ij} .

Stelling.

i : $\frac{d}{dt} (A + B) = \dot{A} + \dot{B}, \quad \frac{d}{dt} (\lambda(t)A(t)) = \dot{\lambda}A + \lambda\dot{A}.$

ii : $\frac{d}{dt} (\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{a}, \dot{\underline{b}}) + (\dot{\underline{a}}, \underline{b})$

iii : $\frac{d}{dt} (AB) = \dot{A}B + A\dot{B}.$

iv : $\frac{d}{dt} A^2 = \dot{A}A + A\dot{A}.$

v : $\frac{d}{dt} \underline{a} \times \underline{b} = \dot{\underline{a}} \times \underline{b} + \underline{a} \times \dot{\underline{b}}$

Bewijs. Volgt uit de definities en de regels voor het differentiëren van functies. □

2. Stelsels lineaire vergelijkingen

3.2.1. Laat de getallen a_1, \dots, a_n, b gegeven zijn. Dan is

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

een *lineaire vergelijking* in de onbekenden x_1, \dots, x_n . Een rij getallen p_1, \dots, p_n heet een *oplossing* van deze vergelijking als geldt

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n = b.$$

Beschouwen we $(a_1, \dots, a_n) = \underline{a}$, $(x_1, \dots, x_n) = \underline{x}$ en $(p_1, \dots, p_n) = \underline{p}$ als elementen van \mathbb{R}^n , dan kunnen we de vergelijking ook schrijven als

$$(\underline{a}, \underline{x}) = b$$

en \underline{p} heet een oplossing van deze vergelijking als

$$(\underline{a}, \underline{p}) = b.$$

De verzameling $V := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\underline{a}, \underline{x}) = b\}$ heet de *oplossingsverzameling* van de vergelijking; ze kan leeg zijn, bijvoorbeeld als $\underline{a} = \underline{0}$ en $b \neq 0$.

Als $n = 2$ en $\underline{a} \neq \underline{0}$ dan is V een rechte.

Als $n = 3$ en $\underline{a} \neq \underline{0}$ dan is V een vlak.

Als $n \geq 4$ en $\underline{a} \neq \underline{0}$ dan noemen we V een *hypervlak*.

Men kan V ook beschouwen als een niveaulijn, -vlak, -hypervlak van de functie $(\underline{a}, \underline{x})$ die \mathbb{R}^n afbeeldt in \mathbb{R} .

Laat nu de vergelijkingen

$$v_1: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$v_2: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

gegeven zijn, en laat α een reëel getal zijn.

Dan definiëren we de vergelijkingen $v_1 + v_2$ en αv_1 door

$$v_1 + v_2: (a_{11} + a_{21})x_1 + (a_{12} + a_{22})x_2 + \dots + (a_{1n} + a_{2n})x_n = b_1 + b_2$$

$$\alpha v_1: \alpha a_{11}x_1 + \alpha a_{12}x_2 + \dots + \alpha a_{1n}x_n = \alpha b_1$$

Gebruiken we de vectornotatie met $\underline{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$ en $\underline{a}_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n})$ dan vinden we

$$v_1: (\underline{a}_1, \underline{x}) = b_1$$

$$v_2: (\underline{a}_2, \underline{x}) = b_2$$

$$v_1 + v_2: (\underline{a}_1 + \underline{a}_2, \underline{x}) = b_1 + b_2$$

$$\alpha v_1: (\alpha \underline{a}_1, \underline{x}) = \alpha b_1 .$$

Als we de oplossingsverzamelingen van v_1 en v_2 noemen V_1 en V_2 dan zien we dat de oplossingsverzameling van αv_1 ook V_1 is (mits $\alpha \neq 0$).

Zij

$$W := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\underline{a}_1 + \underline{a}_2, \underline{x}) = b_1 + b_2 \},$$

de oplossingsverzameling van de vergelijking $v_1 + v_2$. Dan geldt

$$V_1 \cap V_2 \subset W.$$

In \mathbb{R}^2 betekent dit: De lijn met vergelijking $v_1 + v_2$ gaat door het snijpunt van V_1 en V_2 . In \mathbb{R}^3 betekent het: het vlak met vergelijking $v_1 + v_2$ gaat door de snijlijn van V_1 en V_2 .

Vervolgens beschouwen we een stelsel van m lineaire vergelijkingen in n onbekenden:

$$v_1: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$v_2: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.

.

.

$$v_m: a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m .$$

In vectornotatie

$$v_1: (\underline{a}_1, \underline{x}) = b_1$$

$$v_2: (\underline{a}_2, \underline{x}) = b_2$$

.

.

$$v_m: (\underline{a}_m, \underline{x}) = b_m$$

waarin $\underline{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $1 \leq i \leq m$.

Een vector $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$ heet een *oplossing* van dit stelsel als $(\underline{a}_i, \underline{p}) = b_i$ voor $1 \leq i \leq m$.

De verzameling $V := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\underline{a}_i, \underline{x}) = b_i, i = 1, \dots, m\}$ heet de *oplossingsverzameling* van het stelsel.

3.2.2. Definitie. Het stelsel

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

heet *equivalent* (notatie: \sim) met het stelsel

$$c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n = d_1$$

$$c_{21}x_1 + \dots + c_{2n}x_n = d_2$$

...

$$c_{p1}x_1 + \dots + c_{pn}x_n = d_p$$

als beide stelsels dezelfde oplossingsverzameling hebben.

We zullen in het volgende bespreken hoe men een stelsel lineaire vergelijkingen over kan voeren in een equivalent stelsel lineaire vergelijkingen waarvan we de verzameling oplossingen zo aan kunnen geven,

In de volgende stellingen is steeds v_i de vergelijking $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$, kort genoteerd door

$$v_i: (\underline{a}_i, \underline{x}) = b_i;$$

en het stelsel noteren we met (v_1, v_2, \dots, v_m) .

Stelling. Laat α een reëel getal zijn met $\alpha \neq 0$. Dan is het stelsel (v_1, v_2, \dots, v_m) equivalent met het stelsel $(\alpha v_1, v_2, \dots, v_m)$.

Bewijs. Stel p is een oplossing van het stelsel (v_1, \dots, v_m) . Dan geldt $(\underline{a}_i, p) = b_i$ voor $1 \leq i \leq m$. Verder is αv_1 de vergelijking $(\alpha \underline{a}_1, x) = \alpha b_1$, en hieraan voldoet p , aangezien $(\alpha \underline{a}_1, p) = \alpha(\underline{a}_1, p) = \alpha b_1$.

De vector $p \in \mathbb{R}^n$ voldoet dus ook aan het stelsel $(\alpha v_1, v_2, \dots, v_m)$.

Het omgekeerde verkrijgt men door het zojuist bewezene toe te passen op α^{-1} en $(\alpha v_1, v_2, \dots, v_m)$. □

Opmerking. Aangezien de verzameling oplossingen onafhankelijk is van de volgorde waarin de vergelijkingen staan, zegt bovenstaande stelling dat we een equivalent stelsel krijgen als we één der vergelijkingen met een getal $\neq 0$ vermenigvuldigen.

Stelling. Laat $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ reële getallen zijn. Dan is het stelsel (v_1, \dots, v_m) equivalent met het stelsel $(v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m, v_2, \dots, v_m)$.

Bewijs. Laat p een oplossing zijn van het stelsel (v_1, \dots, v_m) . Dan is $(\underline{a}_i, p) = b_i$ voor $1 \leq i \leq m$, dus

$$\begin{aligned}(\underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \alpha_m \underline{a}_m, p) &= (\underline{a}_1, p) + \alpha_2 (\underline{a}_2, p) + \dots + \alpha_m (\underline{a}_m, p) \\ &= b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_m b_m.\end{aligned}$$

De vector p is dus tevens een oplossing van de vergelijking $v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$.

Het omgekeerde volgt door het zojuist bewezene toe te passen op

$$-\alpha_2, \dots, -\alpha_m \text{ en } (v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m, v_2, \dots, v_m).$$

□

Opmerking. Door eventueel de volgorde van de vergelijkingen te veranderen, zien we dat een stelsel vergelijkingen overgaat in een equivalent stelsel door bij één der vergelijkingen een lineaire combinatie van de overige op te tellen.

In de praktijk werken we in de regel met een combinatie van de twee voorgaande stellingen.

Stelling. Laat $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ reële getallen zijn. Dan is het stelsel (v_1, \dots, v_m) equivalent met het stelsel $(v_1, v_2 + \alpha_2 v_1, \dots, v_m + \alpha_m v_1)$.

Bewijs. Volgens de vorige stellingen is

$$\begin{aligned}(v_1, v_2, \dots, v_m) &\sim (v_1, v_2 + \alpha_2 v_1, v_3, \dots, v_m) \\ &\sim (v_1, v_2 + \alpha_2 v_1, v_3 + \alpha_3 v_1, \dots, v_m) \\ &\sim \dots \dots \dots \\ &\sim (v_1, v_2 + \alpha_2 v_1, v_3 + \alpha_3 v_1, \dots, v_m + \alpha_m v_1) .\end{aligned}$$

□

Het toepassen van de stellingen uit deze paragraaf staat bekend als *vegen*. Als men veegt, schrijft men het stelsel (v_1, \dots, v_m) in *matrixrepresentatie*

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

waarvan iedere *rij* een vergelijking representeert; *vegen* betekent dan het toepassen van de bewerkingen van de stellingen op de *rijen* van $[A|b]$ waardoor een matrix $[\tilde{A}|\tilde{b}]$ ontstaat die een equivalent stelsel representeert.

Voorbeelden.

1) Los op

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 , \\ x_2 + 2x_3 &= 1 , \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 3 .\end{aligned}$$

In verkorte notatie is het stelsel

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1, 2, 3 & 2 \\ 0, 1, 2 & 1 \\ 3, 1, 1 & 3 \end{array} \right] .$$

We trekken eerst drie maal de eerste vergelijking van de derde af en vinden dan een equivalent stelsel.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 2, & 3 & 2 \\ 0, & 1, & 2 & 1 \\ 0, & -5, & -8 & -3 \end{array} \right] .$$

Vervolgens vegen we met de tweede vergelijking de tweede kolom schoon door tweemaal de tweede vergelijking van de eerste af te trekken en vijfmaal de tweede vergelijking bij de derde op te tellen.

We vinden dan het equivalente stelsel

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & -1 & 0 \\ 0, & 1, & 2 & 1 \\ 0, & 0, & 2 & 2 \end{array} \right] .$$

Deel de nu verkregen derde vergelijking door 2.

Het stelsel is equivalent met

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & -1 & 0 \\ 0, & 1, & 2 & 1 \\ 0, & 0, & 1 & 1 \end{array} \right] .$$

Tenslotte vegen we met de derde vergelijking de derde kolom schoon:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & 0 & 1 \\ 0, & 1, & 0 & -1 \\ 0, & 0, & 1 & 1 \end{array} \right] .$$

Dan is het stelsel

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 1 . \end{aligned}$$

Dit stelsel is equivalent met het oorspronkelijke. De oplossingsverzameling is dus $\{(1, -1, 1)\}$.

2) Los op het stelsel

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 &= 3.\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -8 & 5 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -13 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 8 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Het oorspronkelijke stelsel is dus equivalent met

$$\begin{aligned}x_1 - 13x_3 + 9x_4 &= -1 \\x_2 + 8x_3 - 5x_4 &= 1.\end{aligned}$$

Kies bijvoorbeeld $x_3 = \lambda$, $x_4 = \mu$. Dan is $x_1 = -1 + 13\lambda - 9\mu$ en $x_2 = 1 - 8\lambda + 5\mu$, zodat alle oplossingen zijn

$$\underline{x} = (-1, 1, 0, 0) + \lambda(13, -8, 1, 0) + \mu(-9, 5, 0, 1).$$

3) Los op het stelsel

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 &= 2.\end{aligned}$$

We vinden

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -8 & 5 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -13 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & -8 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right].$$

Dit stelsel heeft als laatste vergelijking

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1,$$

dus

$$0 = -1.$$

Er zijn geen oplossingen, het stelsel heet *strijdig*.

3.2.3. Bij het vegen van een stelsel vergelijkingen met matrixrepresentatie $[A|b]$ moet voor iedere stap een keuze worden gemaakt tussen de rijen waarmee men kan vegen, en tussen de kolommen die schoongeveegd worden.

Dit opent de mogelijkheid om het min of meer handig te doen, maar is tegelijkertijd een belemmering om enig verband te zien tussen de begintoestand $[A|b]$ en de eindtoestand $[\tilde{A}|\tilde{b}]$ van het stelsel, anders dan equivalentie. Om aan dit bezwaar tegemoet te komen bespreken we hier een van stap tot stap voorgeschreven veegetechniek die bij een gegeven stelsel met matrix $[A|b]$ een ondubbelzinnig bepaalde eindsituatie heeft met matrix $[N|p]$, die we de *normaalvorm* van het stelsel noemen.

(Terloops zij opgemerkt dat deze procedure voor het berekenen met de hand van de oplossingsverzameling meestal niet erg handig is, terwijl ze voor gebruik op de computer niet geraffineerd genoeg is.)

We veronderstellen dat

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

een stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden voorstelt. De procedure bestaat uit het herhalen van een aantal opdrachten. Stel dat die opdrachten $k-1$ keer zijn uitgevoerd en dat de matrix dan luidt

$$[C|d] = \left[\begin{array}{ccc|c} c_{11} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} & d_m \end{array} \right]$$

Dan bestaat de k -de stap uit de volgende opdrachten:

- 1) Bepaal t en s zó dat: $t \geq k$, $c_{ts} \neq 0$, s zo klein mogelijk, en bij deze s ook nog t zo klein mogelijk; zij $\alpha = c_{ts}$.
- 2) Als $t > k$, verwissel dan de k -de rij met de t -de rij.
- 3) Deel de k -de rij door α .
- 4) Veeg met de k -de rij de s -de kolom schoon.

(We constateren dat ieder van deze bewerkingen tot een equivalent stelsel leidt).

De procedure eindigt na de r -de stap als bij het uitvoeren van de $(r+1)$ -ste stap de eerste opdracht niet meer uitgevoerd zou kunnen worden; dan is $r = m$ of $r < m$ en in de $m - r$ onderste rijen staan in de linkerleden uitsluitend nullen.

De gedaante van $[A|b]$ wordt na 1 stap

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & ** & \dots & * & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & & 0 & 0 & * & \dots & & * \end{array} \right],$$

na 2 stappen

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c|ccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & * & \dots & * & * \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & * & \dots & * & * \end{array} \right],$$

na beëindiging der procedure $[N|p]$, de *normaalvorm* van het stelsel.

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & 0 & * & \dots & * & p_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & 0 & * & \dots & * & p_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & 0 & * & \dots & * & p_3 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & * & \dots & * & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & * & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & p_m \end{array} \right]$$

(Op de plaatsen * staan coëfficiënten die niet noodzakelijk 0 of 1 zijn). Als de procedure na r , minder dan m , stappen is geëindigd zijn de laatste vergelijkingen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & p_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & p_m \end{array} \right].$$

Als een dezer rechterleden $\neq 0$ is, heeft het stelsel vergelijkingen geen oplossingen; ook het oorspronkelijke stelsel niet; het heet *strijdig*.

Als dit niet het geval is, is hetzij $r < m$ en $p_{r+1} = \dots = p_m = 0$, hetzij $r = m$. In beide gevallen is er een niet-lege oplossingsverzameling V.

Deze geven we nog iets meer expliciet aan. Stel dat de bij de stappen aangewezen kolommen als index hebben s_1, \dots, s_r . Voor het gemak geven we de onbekenden x_1, \dots, x_n andere namen: $x_{s_1} = y_1, x_{s_2} = y_2, \dots, x_{s_r} = y_r$, de overige $n-r$ onbekenden x_j noemen we achtereenvolgens z_1, \dots, z_{n-r} . Nu representeert de normaalvorm het volgende stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} y_1 &= p_1 + \gamma_{11}z_1 + \dots + \gamma_{1,n-r}z_{n-r} \\ &\vdots \\ y_r &= p_r + \gamma_{r1}z_1 + \dots + \gamma_{r,n-r}z_{n-r} \end{aligned}$$

met coëfficiënten γ_{ij} die uit N kunnen worden afgelezen. z_1, \dots, z_{n-r} kunnen willekeurig worden gekozen, y_1, \dots, y_r zijn dan door z_1, \dots, z_{n-r} bepaald.

Men noemt z_1, \dots, z_{n-r} *parameters*, en om dit te benadrukken schrijven we nog $z_i = \lambda_i$ ($i = 1, \dots, n-r$).

Dan is de oplossingsverzameling V in *parametervoorstelling*

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \vdots \\ \gamma_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \vdots \\ \gamma_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \lambda_{n-r} \begin{bmatrix} \gamma_{1,n-r} \\ \vdots \\ \gamma_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

geschreven, met een *steunvector* en $n-r$ *richtingsvectoren*, afgekort

$$\underline{x}^* = \underline{p}^* + \lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2 + \dots + \lambda_{n-r} \underline{u}_{n-r}$$

Voorbeeld. Los op het stelsel

$$\begin{aligned} 0 \cdot x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0 \cdot x_4 - 2x_5 &= -10 \\ 0 \cdot x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4 + 2x_5 &= 10 \\ 0 \cdot x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 + 5x_5 &= 14. \end{aligned}$$

De normaalvorm is

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right]$$

Kies $x_1 = \lambda$, $x_5 = \mu$; dan is

$$x_2 = 0, x_3 = -5 + \mu, x_4 = -1 - 2\mu,$$

$$V : \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.2.4. Opmerkingen.

i) In het oorspronkelijke stelsel $[A|\underline{b}]$ geldt $\underline{b} = \underline{0}$ ($\in \mathbb{R}^n$) dan en slechts dan als $\underline{0}$ ($\in \mathbb{R}^n$) een oplossing is, en dit is dan en slechts dan het geval als in de normaalvorm $[N|\underline{p}]$ geldt $\underline{p} = \underline{0}$ ($\in \mathbb{R}^m$). Een stelsel met deze eigenschappen heet een *homogeen* stelsel.

ii) Een stelsel $[A|\underline{b}]$ dat *niet* homogeen is heet *niet-homogeen*. Dit betekent dat $\underline{b} \neq \underline{0}$, dat $\underline{0}$ geen oplossing is en dat in de normaalvorm $[N|\underline{p}]$ geldt $\underline{p} \neq \underline{0}$. Bij een niet-homogeen stelsel $[A|\underline{b}]$ beschouwen we nu het *corresponderende* homogene stelsel $[A|\underline{0}]$.

Noem de oplossingsverzamelingen van deze stelsels V respectievelijk U .

Eén oplossing van $[A|\underline{b}]$ lezen we direct uit de normaalvorm $[N|\underline{p}]$ af,

namelijk $\underline{p}^* = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. De andere oplossingen van $[A|\underline{b}]$ verkrijgen we hieruit

door bij \underline{p}^* een willekeurige oplossing van $[A|\underline{0}]$ op te tellen. We brengen dit tot uitdrukking in de formule

$$V = \underline{p}^* + U.$$

iii) Als het stelsel niet strijdig is, is het aantal niet-triviale vergelijkingen in de normaalvorm gelijk aan het aantal stappen in de veegprocedure, r . Het aantal parameters in de oplossing, en ook het aantal richtingsvectoren in de parametervoorstelling van de oplossingsverzameling V , is gelijk aan $n - r$.

iv) Met de notatie van 3.2.3 kunnen we de oplossingen ook schrijven in matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1,n-r} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{r1} & \cdots & \gamma_{r,n-r} \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{bmatrix}$$

3. Lineaire ruimten

3.3.1. In paragraaf 1 hebben we gezien dat we in \mathbb{R}^n , de verzameling van rijtjes van n reële getallen, een optelling en een scalaire vermenigvuldiging kunnen definiëren zo dat een aantal rekenregels gelden. Ook in de verzameling lineaire vergelijkingen in n onbekenden hebben we een optelling en een scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd, zo dat dezelfde rekenregels gelden; zie § 2. Dit zijn twee voorbeelden van "lineaire ruimten", ook wel vectorruimten genaamd.

Definitie. Een *lineaire ruimte* of *vectorruimte* is een verzameling V waarin een optelling en een scalaire vermenigvuldiging zijn gedefinieerd zodanig dat aan de volgende eisen is voldaan voor iedere $\underline{a} \in V$, $\underline{b} \in V$, $\underline{c} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$:

- i) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ (commutatieve eigenschap).
 - ii) $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ (associatieve eigenschap).
 - iii) er is een element $\underline{0} \in V$ zo dat $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$ voor alle $\underline{a} \in V$.
 - iv) voor iedere $\underline{a} \in V$ is er een element $-\underline{a} \in V$ zo dat $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$.
 - v) $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$.
 - vi) $\lambda(\mu \underline{a}) = (\lambda\mu)\underline{a}$.
 - vii) $(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a}$
 - viii) $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$
- } distributieve eigenschappen.

We zeggen samenvattend wel: $(V, +, \cdot)$ is een lineaire ruimte. De eigenschappen i) - iv) spreken uit dat $(V, +)$ een commutatieve groep is.

Uit de eigenschappen volgen nog enige andere die we ook regelmatig zullen gebruiken:

- ix) er is precies één nulelement $\underline{0}$.
- x) $\underline{0}\underline{a} = \underline{0}$ voor alle $\underline{a} \in V$.
- xi) voor iedere $\underline{a} \in V$ is er precies één element $-\underline{a}$.
- xii) $(-1)\underline{a} = -\underline{a}$ voor alle $\underline{a} \in V$.

Als V een lineaire ruimte is dan noemen we de elementen van V ook wel *punten* of *vectoren*. Het element $\underline{0}$ heet dan de *nulvector*; het element $-\underline{a}$ heet de *tegengestelde* van \underline{a} .

De eigenschappen iii) en iv) zijn samen equivalent met

xiii) de vergelijking $\underline{a} + \underline{x} = \underline{b}$ heeft een oplossing.

De eigenschappen ix) en xi) kan men dan ook samenvatten tot

xiv) de vergelijking $\underline{a} + \underline{x} = \underline{b}$ heeft precies één oplossing.

Deze oplossing is natuurlijk $(-\underline{a}) + \underline{b}$, waarvoor we gewoonlijk schrijven $\underline{b} - \underline{a}$.

Voorbeelden.

1) \mathbb{R}^n . Als $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ en $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ dan is

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

en

$$\lambda \underline{a} = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n).$$

De nulvector $\underline{0}$ is $(0, \dots, 0)$.

2) \mathbb{R}^∞ . Elementen van deze ruimte zijn (oneindige) rijen reële getallen, $\underline{a} = (a_n)_{n=1}^\infty$. We definiëren

$$(a_n)_{n=1}^\infty + (b_n)_{n=1}^\infty = (a_n + b_n)_{n=1}^\infty,$$

$$\lambda (a_n)_{n=1}^\infty = (\lambda a_n)_{n=1}^\infty.$$

De nulvector is de rij die uitsluitend uit nullen bestaat.

3) De verzameling der rijen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ waarvoor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ bestaat is een lineaire ruimte met dezelfde optelling en scalaire vermenigvuldiging als in voorbeeld 2.

Als $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ en $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ in deze ruimte liggen, dan ligt ook $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ in deze ruimte omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ bestaat. Analoog tonen we aan dat $\lambda(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in de ruimte ligt als $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ erin ligt. Deze lineaire ruimte van de convergente rijen is een *deelruimte* van \mathbb{R}^{∞} .

4) Laat I een (al dan niet begrensde) interval zijn en beschouw de verzameling $F(I)$ van afbeeldingen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Als f en g twee afbeeldingen uit $F(I)$ zijn dan definiëren we $f + g$ en λf door

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in I,$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in I.$$

Dan zijn $f + g$ en λf afbeeldingen van I naar \mathbb{R} , dus elementen van $F(I)$. Het is eenvoudig in te zien dat $F(I)$ een lineaire ruimte is. Het nul-element is de functie 0 met $0(x) = 0$ voor alle $x \in I$.

5) Laat I een interval zijn en beschouw de verzameling $C(I)$ van alle continue functies van I naar \mathbb{R} . Dan is $C(I)$ een deelverzameling van $F(I)$. De som van twee elementen uit $C(I)$ bestaat dus in $F(I)$. Echter, de som van twee continue functies is weer continu, zodat deze somfunctie ook in $C(I)$ ligt. Analoog tonen we aan dat een scalair veelvoud van een element van $C(I)$ in $C(I)$ ligt; $C(I)$ is een lineaire deelruimte van $F(I)$.

3.3.2. Lineaire deelruimten.

Definitie. Laat $(V, +, \cdot)$ een lineaire ruimte zijn en W een niet-lege deelverzameling van V . Als $(W, +, \cdot)$ met de optelling en scalaire vermenigvuldiging uit V een lineaire ruimte is, dan heet $(W, +, \cdot)$ een *lineaire deelruimte* van $(V, +, \cdot)$.

Stelling. Laat $(V, +, \cdot)$ een lineaire ruimte zijn en W een niet-lege deelverzameling van V . Als voor alle $\underline{w}_1 \in W$, $\underline{w}_2 \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$ en $\lambda \underline{w}_1 \in W$, dan is $(W, +, \cdot)$ een lineaire deelruimte van $(V, +, \cdot)$.

Bewijs. Neem aan dat aan de voorwaarden in de stelling voldaan is. We tonen aan dat dan aan de condities i) - viii) van de definitie in 3.3.1 voldaan is. Dit gaat vrij snel. De eigenschappen i), ii) en v) - viii) gelden in W omdat ze in V gelden. Het nulelement van V ligt ook in W , want neem een $\underline{w} \in W$, dan is op grond van het gegeven en eigenschap x) $0 \cdot \underline{w} = \underline{0} \in W$. Eigenschap iii) geldt dus ook in W . Eigenschap iv) tenslotte geldt ook in W omdat voor alle $\underline{w} \in W$ wegens het gegeven en eigenschap xii) $(-1)\underline{w} = -\underline{w} \in W$. \square

Voorbeelden.

i) Zij $V = \mathbb{R}^3$ en zij $W = \{\underline{x} \in V \mid x + y - z = 0\}$.

W is een lineaire deelruimte van V .

Zij $A = \{\underline{x} \in V \mid x + y - z = 1\}$.

A is geen lineaire deelruimte.

Ieder vlak door $\underline{0}$ is een lineaire deelruimte. Ieder vlak niet door de oorsprong is géén lineaire deelruimte.

ii) Zij $V = C(I)$ en zij $W = \{f \in V \mid \int_I f(t) dt = 0\}$.

W is een lineaire deelruimte.

Zij $A = \{f \in V \mid \int_I f(t) dt = 1\}$.

A is geen lineaire deelruimte.

3.3.3. Opgespannen deelruimten.

Definitie. Laat $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vectoren zijn in een lineaire ruimte V . Een vector \underline{x} heet een *lineaire combinatie* van $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ als er getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ bestaan met $\underline{x} = \alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n$.

Stelling. Laat $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vectoren zijn in een lineaire ruimte V . Dan vormen alle lineaire combinaties van $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ een lineaire deelruimte van V .

Bewijs. $(\alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n) + (\beta_1 \underline{a}_1 + \dots + \beta_n \underline{a}_n)$

$$= (\alpha_1 + \beta_1) \underline{a}_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \underline{a}_n ;$$

$$\lambda(\alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n) = \lambda \alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda \alpha_n \underline{a}_n .$$

Som en scalair product van lineaire combinaties van $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ zijn dus weer lineaire combinaties van $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$. Op grond van stelling 3.3.2 vormen de lineaire combinaties van $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ dan een lineaire deelruimte van V . \square

Definitie. Laat $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vectoren in een lineaire ruimte V zijn. De lineaire deelruimte van V bestaande uit de lineaire combinaties van $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ heet de door $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ opgespannen ruimte en wordt genoteerd door $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$.

Voorbeelden.

- 1) Beschouw in \mathbb{R}^3 de vectoren $\underline{a}_1 = (1,0,0)$, $\underline{a}_2 = (0,1,0)$, $\underline{a}_3 = (1,1,0)$. Dan heeft iedere lineaire combinatie van \underline{a}_1 , \underline{a}_2 en \underline{a}_3 derde coördinaat 0, en omgekeerd is iedere vector in het vlak $x_3 = 0$ een lineaire combinatie van \underline{a}_1 , \underline{a}_2 en \underline{a}_3 (zelfs van \underline{a}_1 en \underline{a}_2 !). Hieruit volgt dat $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 \rangle$ het vlak $x_3 = 0$ is.
- 2) Beschouw in \mathbb{R}^3 de vectoren $\underline{a}_1 = (1,0,0)$, $\underline{a}_2 = (0,1,0)$, $\underline{a}_3 = (1,1,0)$, $\underline{a}_4 = (0,0,1)$. Dan is $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4 \rangle = \mathbb{R}^3$.
- 3) Beschouw in $F(\mathbb{R})$ de functies p_i gedefinieerd door

$$p_i(x) = x^i \quad (i \in \mathbb{N} \cup \{0\}) .$$

Dan is $\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n$ de functie die aan x toevoegt $\alpha_0 p_0(x) + \alpha_1 p_1(x) + \dots + \alpha_n p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$, dit is een polynoom van graad $\leq n$ (of het nulpolynoom). Omgekeerd is ook ieder polynoom van graad $\leq n$ een lineaire combinatie van p_0, \dots, p_n . Dus $\langle p_0, \dots, p_n \rangle$ is de verzameling polynomen van graad $\leq n$, aangevuld met het nulpolynoom. We noemen deze ruimte P_n .

- 4) De oplossingsverzameling van een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen met n onbekenden is een lineaire deelruimte van \mathbb{R}^n . We spreken dan voortaan van *oplossingsruimte*. Als het stelsel vergelijkingen niet-homogeen is, is de oplossingsverzameling geen lineaire ruimte.
- 5) Opgave. Onderzoek of de vectoren $(1,3,4,6)$ en $(1,3,4,7)$ liggen in de ruimte opgespannen door $(1,1,2,0)$, $(0,2,0,1)$ en $(0,0,1,3)$.

Oplossing. Er geldt

$$(d_1, d_2, d_3, d_4) \in \langle (1,1,2,0), (0,2,0,1), (0,0,1,3) \rangle$$

dan en slechts dan als er getallen x_1, x_2, x_3 bestaan zo dat

$$(d_1, d_2, d_3, d_4) = x_1(1,1,2,0) + x_2(0,2,0,1) + x_3(0,0,1,3) ;$$

dus dan en slechts dan als het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned}x_1 &= d_1 \\x_1 + 2x_2 &= d_2 \\2x_1 + x_3 &= d_3 \\x_2 + 3x_3 &= d_4\end{aligned}$$

een oplossing heeft.

Neem eerst $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (1, 3, 4, 6)$. Dan heeft het stelsel vergelijkingen geen oplossing, en

$$(1, 3, 4, 6) \notin \langle (1, 1, 2, 0), (0, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 3) \rangle .$$

Neem nu $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (1, 3, 4, 7)$ dan vinden we de oplossing $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, zodat

$$(1, 3, 4, 7) \in \langle (1, 1, 2, 0), (0, 2, 0, 1), (0, 0, 1, 3) \rangle .$$

3.3.4. Vegen.

Stelling.

a) Als $\lambda \neq 0$, dan geldt

$$\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \rangle = \langle \lambda \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \rangle .$$

b) Voor willekeurige $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ is

$$\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \rangle = \langle \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_n \underline{a}_n, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \rangle .$$

Bewijs. Dit volgt onmiddellijk uit de definities in 3.3.3. □

De inhoud van de stelling luidt in woorden: *Als we in een stelsel $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ vegen, dan verandert de opgespannen deelruimte niet.*

In 3.2.3 is voor stelsels lineaire vergelijkingen een vast veegeprocédé afgesproken dat leidt tot de zogenaamde normaalvorm. Dit zelfde veegeproces kunnen we ook gebruiken voor het vegen van stelsels vectoren in \mathbb{R}^n .

Daartoe verzamelen we de als *rijen* geschreven vectoren in een matrix

$$\begin{array}{l} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_p \end{array} \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & & & \\ & & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pn} \end{array} \right]$$

en vegen leidt dan tot de volgende *normaalvorm*

$$\begin{bmatrix}
 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & 0 & * & \dots & * \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & 0 & * & \dots & * \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & 0 & * & \dots & * \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & * & \dots & * & \dots & \dots & * \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & * \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
 \end{bmatrix}$$

Voorbeelden. (Het symbool \sim betekent: de rijen spannen dezelfde ruimte op).

1)

$$\begin{array}{l}
 \underline{a} \\
 \underline{b} \\
 \underline{c}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 3 & -3 & 0 \\
 2 & 1 & 0 \\
 4 & -1 & 0
 \end{bmatrix}
 \sim
 \frac{1}{3}
 \begin{array}{l}
 \underline{a} \\
 \underline{b} \\
 \underline{c}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & -1 & 0 \\
 2 & 1 & 0 \\
 4 & -1 & 0
 \end{bmatrix}
 \sim
 \begin{array}{l}
 \frac{1}{3} \underline{a} \\
 \underline{b} - \frac{2}{3} \underline{a} \\
 \underline{c} - \frac{4}{3} \underline{a}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & -1 & 0 \\
 0 & 3 & 0 \\
 0 & 3 & 0
 \end{bmatrix}
 \sim$$

$$\begin{array}{l}
 \frac{1}{3} \underline{a} \\
 \frac{1}{3} \underline{b} - \frac{2}{9} \underline{a} \\
 \underline{c} - \frac{4}{3} \underline{a}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & -1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 3 & 0
 \end{bmatrix}
 \sim
 \begin{array}{l}
 \frac{1}{9} \underline{a} + \frac{1}{3} \underline{b} \\
 \frac{1}{3} \underline{b} - \frac{2}{9} \underline{a} \\
 \underline{c} - \underline{b} - \frac{2}{3} \underline{a}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 .$$

Dus geldt $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{0} \rangle = \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle = \{ \underline{x} \mid x_3 = 0 \}$ terwijl, bijvoorbeeld,

uit $\underline{c} = \frac{2}{3} \underline{a} + \underline{b}$ volgt $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$.

2)

$$\begin{array}{l} \underline{a} \\ \underline{b} \\ \underline{c} \\ \underline{d} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \underline{a} \\ \underline{a} - \underline{b} \\ \underline{c} \\ \underline{d} - \underline{a} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 3\underline{b} - 2\underline{a} \\ \underline{a} - \underline{b} \\ \underline{c} \\ \underline{d} + \underline{b} - 2\underline{a} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

We zien, zonder verder vegen, dat $\underline{d} = 2\underline{a} - \underline{b}$ en dat

$$\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle = \langle -2\underline{a} + 3\underline{b}, \underline{a} - \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$$

De normaalvorm is

$$\begin{array}{l} -2\underline{a} + 3\underline{b} + \underline{c} \\ \underline{a} - \underline{b} \\ \underline{c} \\ -2\underline{a} + \underline{b} + \underline{d} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3.5. Afhankelijke en onafhankelijke stelsels.

We zullen een eindige rij vectoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \in V$ een *stelsel* noemen, en schrijven dan $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$.

De door een stelsel $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ opgespannen verzameling $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$ is een lineaire deelruimte (3.3.3), en men kan nu ook omgekeerd vragen: is in een vectorruimte V ook iedere deelruimte te schrijven als de door een stelsel $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ opgespannen ruimte?

Wij beantwoorden deze vraag pas in een later stadium, maar leiden de discussie in met een andere vraag: Als $W = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$, hoe bepaalt men dan een *minimum deelstelsel* van $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$, dat W ook opspant? Het antwoord ligt besloten in de volgende

Stelling.

$$\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}, \underline{a}_n \rangle = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1} \rangle$$

dan en slechts dan als $\underline{a}_n \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1} \rangle$.

Bewijs. Als $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}, \underline{a}_n \rangle = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1} \rangle$ dan is $\underline{a}_n \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1} \rangle$ vanzelfsprekend.

Omgekeerd, als $\underline{a}_n \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1} \rangle$ dan kan men schrijven

$$\underline{a}_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \underline{a}_j;$$

voor een $\underline{b} \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle$ geldt dan

$$\begin{aligned} \underline{b} &= \sum_{j=1}^n \beta_j \underline{a}_j = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \underline{a}_j + \beta_n \underline{a}_n = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \underline{a}_j + \beta_n \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \underline{a}_j = \sum_{j=1}^{n-1} (\beta_j + \beta_n \alpha_j) \underline{a}_j \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1} \rangle \end{aligned}$$

zodat $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}, \underline{a}_n \rangle \subset \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1} \rangle$; vanzelfsprekend is evenwel

$$\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}, \underline{a}_n \rangle \supset \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1} \rangle. \quad \square$$

Gevolg. Als één van de vectoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ een lineaire combinatie van de overige is, dan kunnen we deze vector weglaten zonder dat hierdoor de opgespannen ruimte verandert, en omgekeerd.

Definitie. Een stelsel vectoren $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ in een vectorruimte V heet *afhankelijk* als er getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ bestaan, niet alle gelijk aan 0, zó dat

$$\alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

Het stelsel heet *onafhankelijk* als het niet afhankelijk is.

Stelling. De volgende beweringen zijn gelijkwaardig.

- a) Het stelsel $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ is afhankelijk.
- b) Er bestaat een i met $1 \leq i \leq n$ zo dat de vector \underline{a}_i een lineaire combinatie van $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{i-1}, \underline{a}_{i+1}, \dots, \underline{a}_n$ is.
- c) Er bestaat een i met $1 \leq i \leq n$ zo dat

$$\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{i-1}, \underline{a}_{i+1}, \dots, \underline{a}_n \rangle .$$

Bewijs. De gelijkwaardigheid van b) en c) is de inhoud van de vorige stelling.

a) \Rightarrow b): In de betrekking $\alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n = \underline{0}$ is tenminste één der getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ niet 0, bijvoorbeeld α_i . Dan is

$$\underline{a}_i = -\alpha_i^{-1} (\alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \underline{a}_{i-1} + \alpha_{i+1} \underline{a}_{i+1} + \dots + \alpha_n \underline{a}_n) .$$

b) \Rightarrow a): Als $\underline{a}_i = \beta_1 \underline{a}_1 + \dots + \beta_{i-1} \underline{a}_{i-1} + \beta_{i+1} \underline{a}_{i+1} + \dots + \beta_n \underline{a}_n$ dan is

$$\beta_1 \underline{a}_1 + \dots + \beta_{i-1} \underline{a}_{i-1} - \underline{a}_i + \beta_{i+1} \underline{a}_{i+1} + \dots + \beta_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

en niet al deze coëfficiënten zijn 0. □

Stelling. $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ is dan en slechts dan onafhankelijk als uit

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{a}_i = \underline{0}$$

volgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Bewijs. Dit volgt direct uit de definities van afhankelijke en onafhankelijke stelsels. □

Voorbeelden.

1) Als een stelsel vectoren de $\underline{0}$ bevat is het afhankelijk.

2) $\underline{a} = (4,0,3)$, $\underline{b} = (6,-2,4)$, $\underline{c} = (0,4,1)$ in \mathbb{R}^3 .

$\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ is afhankelijk: $3\underline{a} - 2\underline{b} - \underline{c} = \underline{0}$.

3) $\underline{a} = (1,1,2,3)$, $\underline{b} = (0,1,0,1)$, $\underline{c} = (1,3,2,5)$ in \mathbb{R}^4 .

We zoeken α, β, γ zó dat $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} = \underline{0}$:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dit is een stelsel vergelijkingen in α, β, γ :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

met meer oplossingen dan alleen $0,0,0$. Dus $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ is afhankelijk;

$$\neg \underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c} = \underline{0}.$$

4) De parametervoorstelling $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{u} + \mu\underline{v}$ bepaalt dan en slechts dan een vlak als $\{\underline{u}, \underline{v}\}$ onafhankelijk is (vergelijk de omslachtige omschrijving in 1.1.4).

5) Een lijn ℓ , $\underline{x} = \underline{a} + \lambda\underline{u}$, is evenwijdig met, of ligt in, een vlak $V : \underline{x} = \underline{b} + \mu\underline{v} + \nu\underline{w}$, dan en slechts dan als $\underline{u} \in \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$.

6) Beschouw het veegproces in 3.2.3.

De kolommen in de normaalvorm $[N|p]$ die bij de stappen achtereenvolgens worden aangewezen zijn *onafhankelijk*. De rijen waarvan de linkerleden niet uitsluitend uit nullen bestaan, zijn *onafhankelijk*.

De richtingsvectoren van de oplossingsverzameling zijn *onafhankelijk*.

7) In de ruimte $P_n = \langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle$ zijn de vectoren p_0, p_1, \dots, p_n onafhankelijk. Immers

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j p_j = 0$$

betekent: voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$\alpha_0 p_0(x) + \alpha_1 p_1(x) + \dots + \alpha_n p_n(x) = 0(x)$$

of

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n = 0.$$

Als niet $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ dan heeft het polynoom evenwel ten hoogste n nulpunten.

Onafhankelijkheid van een stelsel verandert niet door vegen:

Stelling.

1) Als $\lambda \neq 0$ dan is $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ onafhankelijk dan en slechts dan als $\{\lambda \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n\}$ onafhankelijk is.

2) $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ is onafhankelijk dan en slechts dan als

$$\{\underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots + \lambda_{n-1} \underline{a}_{n-1}, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n\} \text{ onafhankelijk is.}$$

Bewijs. Direct gevolg van de definities. □

3.3.6. Bases.

Definitie. Laat V een lineaire ruimte zijn. Als $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ een onafhankelijk stelsel is en $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle = V$, dat heet $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ een *basis* voor V .

Voorbeelden.

- 1) In \mathbb{R}^2 is het stelsel $\{(1,0), (0,1)\}$ een basis en $\{(1,1), (1,2)\}$ een andere basis.
- 2) In \mathbb{R}^3 is $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ een basis van de lineaire deelruimte $x_3 = 0$, en $\{(1,1,0), (1,2,0)\}$ een andere basis.
- 3) In \mathbb{R}^n is het stelsel $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ met

$$\underline{e}_k = (\delta_{k1}, \delta_{k2}, \dots, \delta_{kn}), \text{ dus } \underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \underline{e}_n = (0, 0, \dots, 1),$$

een basis; we noemen deze basis de *standaardbasis* voor \mathbb{R}^n .

- 4) Als $\ell: \underline{x} = \lambda \underline{u}$ een rechte is door $\underline{0}$, dan is ℓ een lineaire deelruimte van \mathbb{R}^n , en $\{\underline{u}\}$ een basis voor ℓ .
Als $V: \underline{x} = \lambda \underline{v} + \mu \underline{w}$ een vlak is door $\underline{0}$, dan is V een lineaire deelruimte van \mathbb{R}^n en $\{\underline{v}, \underline{w}\}$ een basis voor V .
- 5) De functies p_0, \dots, p_n , zoals gedefinieerd in 3.3.3 voorbeeld 3, vormen een basis voor de lineaire ruimte \mathbb{P}_n .

Stelling. Laat $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ een basis zijn voor de lineaire ruimte V . Dan kan iedere vector $\underline{x} \in V$ op precies één manier geschreven worden als

$$\underline{x} = \alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n.$$

Bewijs. Het stelsel $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ spant V op, dus \underline{x} kan als lineaire combinatie geschreven worden. We tonen aan dat dit maar op één wijze kan. Stel

$$\underline{x} = \alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n \text{ en } \underline{x} = \beta_1 \underline{b}_1 + \dots + \beta_n \underline{b}_n. \text{ Dan is}$$

$$\underline{0} = \underline{x} - \underline{x} = (\alpha_1 - \beta_1) \underline{a}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \underline{a}_n.$$

Aangezien $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ onafhankelijk is volgt hieruit $0 = \alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n$, dus $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$. □

Men kan de stellingen uit 3.3.5 ook samenvatten tot: Als $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ met betrekking tot het opspannen van een (deel)ruimte W minimaal is, dan is het een onafhankelijk stelsel en derhalve een basis voor W .

Als men nu aan $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ een vector $\underline{a}_{n+1} \in W$ toevoegt, dan is $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n+1}\}$ afhankelijk; met andere woorden: $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ is een *maximaal stelsel* met betrekking tot onafhankelijkheid.

Deze opmerkingen houden in dat

- i) een echte deelverzameling van een basis $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ voor W geen basis kan zijn,
- ii) een verzameling, waarvan de basis $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ een echte deelverzameling is, geen basis voor W kan zijn.

Uit de voorbeelden bleek dat een ruimte wel meer dan één basis kan hebben. We zullen nu laten zien dat alle bases (van dezelfde ruimte) evenveel elementen bevatten.

Stelling (uitwisselingsstelling). Als $V = \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \rangle$ en als $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ een onafhankelijk stelsel is in V , dan is $m \leq n$ en dan bestaan er $n-m$ getallen i_j , zo dat $V = \langle \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m, \underline{a}_{i_1}, \dots, \underline{a}_{i_{n-m}} \rangle$.

Bewijs. Daar $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle = V$, is $\underline{b}_1 = \alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n$. Omdat \underline{b}_1 voorkomt in een onafhankelijk stelsel, is $\underline{b}_1 \neq \underline{0}$, dus niet alle α_i zijn nul. Uitsluitend voor het gemak van de notatie nemen we aan dat $\alpha_1 \neq 0$ is (dit kunnen we altijd bereiken door passende verandering van de volgorde van $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$). Dan is

$$\underline{a}_1 = \frac{1}{\alpha_1} \underline{b}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \underline{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \underline{a}_n.$$

Als we in iedere lineaire combinatie van $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$, de vector \underline{a}_1 vervangen door de zojuist gevonden uitdrukking zien we dat

$$V = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle = \langle \underline{b}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \rangle.$$

Hieruit volgt $\underline{b}_2 = \beta_1 \underline{b}_1 + \beta_2 \underline{a}_2 + \dots + \beta_n \underline{a}_n$. Als $\beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n = 0$, dan zou gelden $\underline{b}_2 = \beta_1 \underline{b}_1$, dus zouden \underline{b}_1 en \underline{b}_2 afhankelijk zijn. Dit is in tegenspraak met het gegeven. Er is dus minstens één β_i met $i \geq 2$ ongelijk aan nul. Neem gemakshalve aan dat dit β_2 is. Dan is

$$\underline{a}_2 = \frac{1}{\beta_2} \underline{b}_2 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \underline{b}_1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \underline{a}_3 - \dots - \frac{\beta_n}{\beta_2} \underline{a}_n$$

zodat $V = \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n \rangle$.

We herhalen nu dit uitwisselingsproces. Als $m \geq n$ is, hebben we na n uitwisselingen verkregen $V = \langle \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n \rangle$. Als nu $m > n$ zou zijn dan was

$\underline{b}_m = \delta_1 \underline{b}_1 + \dots + \delta_{n-n} \underline{b}_{n-n}$ in tegenspraak met de onafhankelijkheid van $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m$. Dus $m \leq n$.

Als $m < n$, dan hebben we (mits $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ in een geschikt gekozen volgorde staan) via dit uitwisselingsproces verkregen

$$V = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \rangle = \langle \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m, \underline{a}_{m+1}, \dots, \underline{a}_n \rangle. \quad \square$$

Stelling. Als $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ en $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ bases zijn voor een lineaire ruimte V , dan is $n = m$.

Bewijs. Een basis is een onafhankelijk stelsel dat V opspant. Toepassing van de vorige stelling levert dan $m \leq n$, toepassing met de stelsels $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ en $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ verwisseld, levert $n \leq m$. Dus $n = m$. □

3.3.7. Dimensie.

Definitie. De *dimensie* $\dim V$ van een vectorruimte V wordt gedefinieerd door

- i) als $V = \{0\}$ dan is $\dim V = 0$,
- ii) als V een basis $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ heeft, dan is $\dim V = n$,
- iii) in andere gevallen is $\dim V = \infty$.

Voorbeelden.

- 1) $\dim \mathbb{R}^n = n$
- 2) $\dim \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} = 2$.
- 3) Zij $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \neq 0$ en $\ell := \{\underline{x} = \lambda \underline{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, dan is $\dim \ell = 1$.
- 4) $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ is een 3-dimensionale deelruimte van \mathbb{R}^4 .
- 5) Voor de oplossingsruimte V van een stelsel homogene vergelijkingen geldt (in de notatie van 3.2.3) $\dim V = n - r$.
- 6) Voor de ruimte \mathbb{P}_n van polynomen van graad hoogstens n geldt $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$.
- 7) $\dim C(I) = \infty$, want $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_n \subset C(I)$.

Stelling. Zij $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m \in V$ en $\dim V = n$.

Dan volgt uit ieder tweetal der volgende drie eigenschappen de derde:

- i) $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m\}$ is onafhankelijk
- ii) $V = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m \rangle$
- iii) $m = n$.

Bewijs. i) en ii) betekent dat $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m\}$ een basis is en $m = n$.

Als ii) en niet i) dan is volgens 3.3.5 $\dim V < m$, in strijd met iii).

Als i) en niet ii) dan is volgens 3.3.6 $\dim V > m$, in strijd met iii). \square

Anders gezegd: Ieder onafhankelijk n -tal is een basis, en *meer dan* n vectoren zijn derhalve *afhankelijk*.

Ieder opspannend n -tal is een basis, en *minder dan* n vectoren spannen derhalve *niet op*.

Stelling. Als $\dim V = n$ en W is een lineaire deelruimte van V dan

i) $\dim W \leq n$

ii) als bovendien $\dim W = n$ dan is $W = V$

iii) als $\dim W = p > 0$ dan is er een basis $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$ voor W zo dat

$$W = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p \rangle .$$

Bewijs. Als $W = \{0\}$ is de bewering triviaal.

Stel $W \neq \{0\}$. Neem $\underline{a}_1 \in W \setminus \{0\}$.

Als $W = \langle \underline{a}_1 \rangle$ dan is $\{\underline{a}_1\}$ een basis voor W .

Als $W \neq \langle \underline{a}_1 \rangle$ en $\{\underline{a}_1\}$ geen basis voor W is, dan gaan we als volgt, stap voor stap, te werk:

Stel dat $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{k-1}\}$ een onafhankelijk stelsel in W is met $W \neq \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{k-1} \rangle$.

Dan is er een $\underline{a}_k \in W \setminus \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{k-1} \rangle$ en dan is $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{k-1}, \underline{a}_k\}$ onafhankelijk.

Pas dit toe met $k = 2, \dots, p$ zó dat p maximaal is, dat wil zeggen: $W = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p \rangle$.

Omdat nog steeds $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$ onafhankelijk is, is $p \leq n$ terwijl $\dim W = p$.

Hiermee is i) bewezen.

Neem een basis $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ voor V , en wissel er p van uit voor $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$,

zodat $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p, \underline{b}_{p+1}, \dots, \underline{b}_n\}$ een basis is voor V , behalve als $p = n$,

en dan is $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$ een basis voor W en $W = V$. □

4. Lineaire afbeeldingen

3.4.1. Definitie. Laten V en W lineaire ruimten zijn. Een afbeelding $A : V \rightarrow W$ heet *lineair* als

i) $A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = A\underline{x}_1 + A\underline{x}_2$ voor alle $\underline{x}_1 \in V, \underline{x}_2 \in V$.

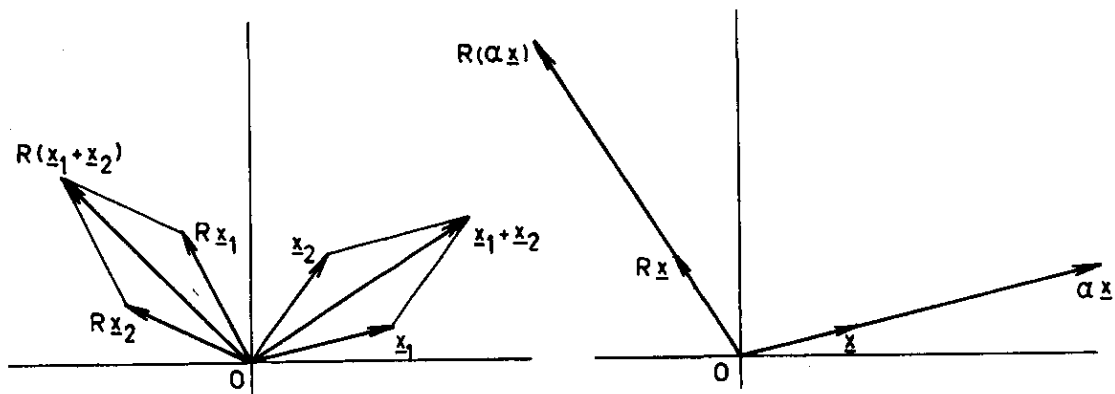
ii) $A(\alpha\underline{x}) = \alpha A\underline{x}$ voor alle $\underline{x} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

Wanneer we in dit hoofdstuk zeggen: "de afbeelding $A : V \rightarrow W$ is lineair", zullen we steeds aannemen dat V en W lineaire ruimten zijn.

(Men laat gewoonlijk de haakjes bij de variabele van een lineaire afbeelding weg als geen misverstand kan ontstaan, dus $A\underline{x}$ in plaats van $A(\underline{x})$; maar $A(\underline{x} + \underline{y})$ en niet $A\underline{x} + \underline{y}$.)

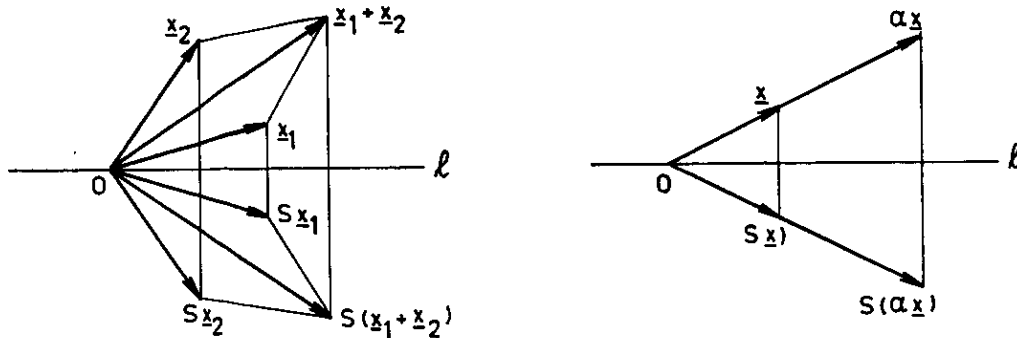
Lineaire afbeeldingen komen in de wiskunde zeer veel voor. We bespreken een aantal voorbeelden:

- 1) De draaiing R over een hoek φ in het platte vlak om de oorsprong is een lineaire afbeelding $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.



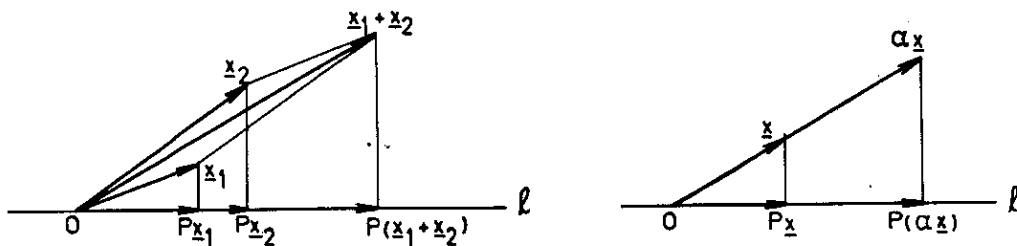
Immers, door draaien gaat het optelparallelogram voor \underline{x}_1 en \underline{x}_2 over in een parallelogram met zijden $R\underline{x}_1, R\underline{x}_2$ en diagonaal $R(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)$, zodat moet gelden $R\underline{x}_1 + R\underline{x}_2 = R(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)$. Evenzo zien we $R(\alpha\underline{x}) = \alpha R\underline{x}$.

- 2) De spiegeling S in het platte vlak t.o.v. een lijn ℓ door O is een lineaire afbeelding $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Het bewijs berust weer op het feit dat door spiegelen een parallelogram in een congruent parallelogram overgaat,



zodat we vinden $S(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = S\underline{x}_1 + S\underline{x}_2$, en analoog $S(\alpha\underline{x}) = \alpha S\underline{x}$.

- 3) De projectie P in het platte vlak op een rechte ℓ door 0 is een lineaire afbeelding $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.



Wederom volgt uit een meetkundige beschouwing

en $P(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = P\underline{x}_1 + P\underline{x}_2$
 en $P(\alpha\underline{x}) = \alpha P\underline{x}$.

- 4) Laat V zijn de lineaire ruimte van de convergente rijen, en definieer

$$A\left(\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Dan is $A: V \rightarrow \mathbb{R}$ lineair. Immers, op grond van de bekende limieteigenschappen geldt

$$\begin{aligned} A\left(\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty} + \left(b_n\right)_{n=1}^{\infty}\right) &= A\left(\left(a_n + b_n\right)_{n=1}^{\infty}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \\ &= A\left(\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}\right) + A\left(\left(b_n\right)_{n=1}^{\infty}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\left(\alpha\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}\right) &= A\left(\alpha a_n\right)_{n=1}^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha a_n = \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha A\left(\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}\right). \end{aligned}$$

5) Laat V zijn de lineaire ruimte van de differentieerbare functies op \mathbb{R} , en definieer

$$\mathcal{D}f = f' .$$

Dan is $\mathcal{D} : V \rightarrow F(\mathbb{R})$ lineair. Immers, op grond van de bekende differentiatieregels geldt

$$\mathcal{D}(f+g) = (f+g)' = f' + g' = \mathcal{D}f + \mathcal{D}g$$

$$\mathcal{D}(\alpha f) = (\alpha f)' = \alpha f' = \alpha \mathcal{D}f .$$

6) Zij $n \in \mathbb{N}$ en zij V de ruimte van n keer differentieerbare functies op \mathbb{R} waarvan de n -de afgeleide continu is. V is een lineaire ruimte (ga na).

Neem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Definieer voor $f \in V$

$$\mathcal{D}^* f = f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \dots + a_n f ,$$

dan is \mathcal{D}^* een lineaire afbeelding van V in $C(\mathbb{R})$.

7) Door

$$\varphi(f) = \int_a^b f(t) dt$$

wordt een lineaire afbeelding φ van $C([a,b])$ in \mathbb{R} gedefinieerd.

Eigenschappen.

Uit eigenschap i) in de definitie volgt dat

$$A\underline{0} = A(\underline{0} + \underline{0}) = A\underline{0} + A\underline{0}$$

zodat $A\underline{0} = \underline{0}$. Een afbeelding $A : V \rightarrow W$, die het nulelement van V niet overvoert in het nulelement van W kan dus niet lineair zijn. Zo zijn bijvoorbeeld spiegeling en projectie in \mathbb{R}^2 t.o.v. een rechte die niet door de oorsprong gaat niet lineair.

Stel $A : V \rightarrow W$ is lineair. Dan voert A lineaire combinaties van vectoren in V over in corresponderende lineaire combinaties van vectoren in W . Preciezer geformuleerd:

Stelling. Voor een lineaire afbeelding A geldt

$$A(\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n) = \alpha_1 A\underline{v}_1 + \dots + \alpha_n A\underline{v}_n.$$

Bewijs. Door inductie naar n , met behulp van eigenschappen i) en ii) in de definitie. □

Gevolg. Een lineaire afbeelding is bepaald door de beelden van de vectoren van een basis.

3.4.2. Beeldruimte en nulruimte.

Stelling. Zij $A : V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding.

- i) Als U een lineaire deelruimte is van V , dan is de verzameling van beelden $A(U)$ in W een lineaire deelruimte in W .
- ii) Als T een lineaire deelruimte is van W dan is de verzameling van originelen $A^+(T)$ in V een lineaire deelruimte in V .

Bewijs. We passen het criterium voor lineaire deelruimten uit § 3.3.2 toe:

- i) $A(U)$ is niet leeg.

Neem $\underline{u}, \underline{v} \in A(U)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Er zijn $\underline{x}, \underline{y} \in U$ met $A\underline{x} = \underline{u}$, $A\underline{y} = \underline{v}$, en dan is $\underline{u} + \underline{v} = A\underline{x} + A\underline{y} = A(\underline{x} + \underline{y}) \in A(U)$; $\lambda \underline{u} = \lambda A\underline{x} = A(\lambda \underline{x}) \in A(U)$.

- ii) $A^+(T)$ is niet leeg.

Neem $\underline{x}, \underline{y} \in A^+(T)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} \in T$ dus $\underline{x} + \underline{y} \in A^+(T)$; $A(\lambda \underline{x}) = \lambda A\underline{x} \in T$ dus $\lambda \underline{x} \in A^+(T)$. □

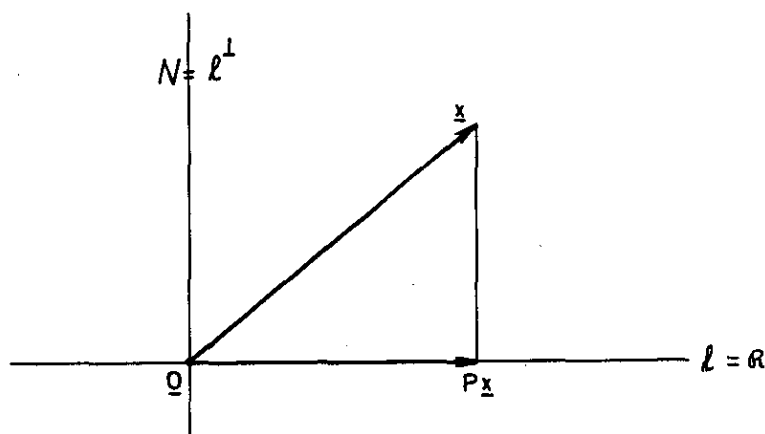
Definitie. Bij $A : V \rightarrow W$ heet de lineaire deelruimte $A(V)$ van W de *beeldruimte* van A ; we noteren deze gewoonlijk met R of, indien misverstand zou kunnen ontstaan, $R(A)$.

De lineaire deelruimte $A^+(\{0\})$ van V heet de *nulruimte* van A . Notatie N of $N(A)$.

Voorbeelden. We bepalen beeldruimte en nulruimte van de lineaire afbeeldingen gedefinieerd in de voorbeelden van 3.4.1.

- 1) De draaiing R over een hoek φ in \mathbb{R}^2 om de oorsprong heeft als beeldruimte \mathbb{R}^2 (alle elementen van \mathbb{R}^2 komen als beeld voor) en als nulruimte $\{0\}$ (het beeld van een vector $\underline{x} \neq 0$ is niet de nulvector).
- 2) Ook de spiegeling in \mathbb{R}^2 t.o.v. een rechte door 0 heeft als beeldruimte \mathbb{R}^2 en als nulruimte $\{0\}$.
- 3) De projectie P in \mathbb{R}^2 op een rechte ℓ door 0 heeft als beeldruimte ℓ , en

als nulruimte de rechte ℓ^\perp door $\underline{0}$ loodrecht op ℓ .



- 4) De lineaire afbeelding A van de ruimte der convergente rijen naar \mathbb{R} gedefinieerd door

$$A(a_n)_{n=1}^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

heeft beeldruimte \mathbb{R} . Immers, kies $a \in \mathbb{R}$, dan is (a, a, a, \dots) een convergente rij die door A op a wordt afgebeeld. Alle elementen van \mathbb{R} komen dus als beeld voor.

De nulruimte is de verzameling van alle rijen waarvan de limiet nul is.

- 5) Laat V zijn de lineaire ruimte van de continue differentieerbare functies, en beschouw de lineaire afbeelding $\mathcal{D} : V \rightarrow F(\mathbb{R})$ gedefinieerd door $\mathcal{D}f = f'$ voor alle $f \in V$. Per definitie is nu iedere functie in de beeldruimte continu. Omgekeerd, stel g is een continue functie op \mathbb{R} , en definieer

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt .$$

Dan is $f'(x) = g(x)$ voor iedere x , zodat $\mathcal{D}f = g$ en g ligt in de beeldruimte. De beeldruimte is dus juist de ruimte der continue functies $C(\mathbb{R})$.

De nulruimte bestaat uit alle functies waarvan de afgeleide de nulfunctie is, dus uit alle constante functies.

6) Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 .$$

Bij de ruimte V van n keer continu differentieerbare functies en de afbeelding $\mathcal{D}^* : V \rightarrow C(\mathbb{R})$ met

$$\mathcal{D}^* f = f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \dots + a_n f$$

is de nulruimte van \mathcal{D}^* de oplossingsruimte van de differentiaalvergelijking. Aangezien de vergelijking

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = g(x)$$

voor iedere $g \in C(\mathbb{R})$ oplosbaar is, geldt: de beeldruimte van \mathcal{D}^* is $C(\mathbb{R})$.

7) De nulruimte van $\varphi : C([a,b]) \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$\varphi(f) = \int_a^b f(t) dt$$

is de deelruimte $\{\varphi \in C([a,b]) \mid \varphi(f) = 0\}$. De beeldruimte is \mathbb{R} .

3.4.3. Vergelijkingen.

Als V een vectorruimte is, $p \in V$ en U is een deelverzameling van V dan verstaan we onder $p + U$ de verzameling $\{p + u \mid u \in U\}$; vergelijk 3.2.4 conclusie ii).

Stelling. Laat $A : V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding zijn. De vergelijking $A\underline{x} = \underline{b}$ heeft tenminste één oplossing dan en slechts dan als $\underline{b} \in R$. Als $\underline{b} \in R$, en als p voldoet aan $A_p = \underline{b}$ (p heet dan een *particuliere oplossing* van de vergelijking $A\underline{x} = \underline{b}$) dan vormen alle oplossingen van de vergelijking $A\underline{x} = \underline{b}$ de verzameling $p + N$.

Bewijs. Dat de vergelijking $A\underline{x} = \underline{b}$ dan en slechts dan oplosbaar is als $\underline{b} \in R$, is een direct gevolg van de definitie van R .

Zij nu $\underline{b} \in R$ en laat p een particuliere oplossing zijn van de vergelijking $A\underline{x} = \underline{b}$. Dan geldt voor een willekeurige oplossing g van deze vergelijking $A(g - p) = A_g - A_p = \underline{b} - \underline{b} = \underline{0}$ zodat $g - p \in N$. Daar $g = p + (g - p)$ volgt hieruit dat de verzameling van oplossingen bevat moet zijn in $p + N$.

Kies nu $\underline{n} \in N$. Dan is

$$A(\underline{p} + \underline{n}) = A\underline{p} + A\underline{n} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$$

zodat ieder element $\underline{p} + \underline{n}$ een oplossing is.

De verzameling van oplossingen is dus precies de verzameling $\underline{p} + N$. □

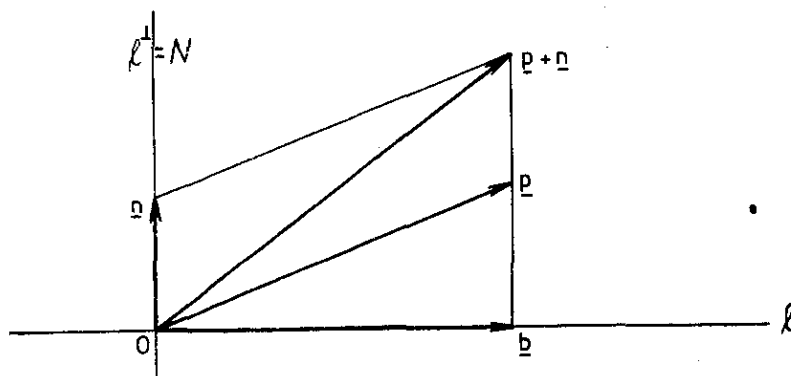
Gevolg. A is injectief dan en slechts dan als $N = \{0\}$.

Voorbeelden.

1) De stelling wordt meetkundig geïllustreerd door bijvoorbeeld de projectie P in \mathbb{R}^2 op een rechte ℓ door 0 .

De vergelijking $P\underline{x} = \underline{b}$ heeft oplossingen dan en slechts dan als $\underline{b} \in \ell$.

Als $\underline{b} \in \ell$ en als \underline{p} voldoet aan $P\underline{p} = \underline{b}$, dan vormen alle oplossingen van de vergelijking $P\underline{x} = \underline{b}$ de rechte door \underline{p} loodrecht op ℓ , dit is juist $\underline{p} + \ell^\perp$.



2) Beschouw de afbeelding $W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ met

$$W\underline{x} = \underline{w} \times \underline{x},$$

als \underline{w} een gegeven vector is; $\underline{w} \neq \underline{0}$.

$N(W)$ is de rechte $\underline{x} = \lambda \underline{w}$; $R(W)$ is het vlak $(\underline{w}, \underline{x}) = 0$.

De vergelijking

$$\underline{w} \times \underline{x} = \underline{b}$$

is alleen oplosbaar als $(\underline{w}, \underline{b}) = 0$; in dat geval is de oplossing

$$\underline{x} = (\underline{w}, \underline{w})^{-1} \underline{b} \times \underline{w} + \lambda \underline{w}.$$

3) Laat f een continue functie zijn gedefinieerd op \mathbb{R} . Een primitieve functie F van f is een functie waarvan de afgeleide f is, dus in de notatie van

3.4.1, voorbeeld 5, $\mathcal{D}F = f$.

De functie F is dus een particuliere oplossing van de vergelijking (in g)
 $\mathcal{D}g = f$.

Alle oplossingen van deze vergelijking vormen de verzameling $F + N$
waarin N de nulruimte van \mathcal{D} is.

Deze (3.4.2, voorbeeld 5) bestaat uit de constante functies. Meestal no-
teren we dit als volgt:

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

4) De differentiaalvergelijking

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = g(x) ,$$

of

$$\mathcal{D}^* y = g ,$$

is voor alle $g \in C(\mathbb{R})$ oplosbaar (3.4.2 voorbeeld 6).

Als H de oplossingsruimte der corresponderende homogene vergelijking

$$\mathcal{D}^* y = 0$$

is, en y_p een oplossing van $\mathcal{D}^* y = g$, dan is

$$y_p + H$$

de algemene oplossing der differentiaalvergelijking.

5) Bij het oplossen van stelsels (inhomogene) lineaire vergelijkingen heb-
ben we al gezien (3.2.4) dat ook hier de verzameling oplossingen de
vorm $p + N$ heeft, waarin p een particuliere oplossing en N de oplos-
singsruimte van het bijbehorende homogene stelsel is. Ook deze eigenschap
is een bijzonder geval van stelling 3.4.3.

3.4.4. De dimensiestelling.

In deze paragraaf geven we aan hoe een lineaire afbeelding $A : V \rightarrow W$ werkt
op een basis van V en op de dimensie van V . De tweede stelling, de zogenaamde
dimensiestelling, is als de hoofdstelling der lineaire algebra te beschouwen.

Stelling. Zij $A : V \rightarrow W$ lineair en zij $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$ een stelsel vectoren in V .
Dan geldt:

- i) Als $V = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p \rangle$ dan is $R = \langle A\underline{a}_1, \dots, A\underline{a}_p \rangle$
- ii) Als $\{A\underline{a}_1, \dots, A\underline{a}_p\}$ onafhankelijk is in R , dan is $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$ onafhankelijk in V .
Als A bovendien een injectie is dan geldt bovendien
- iii) Als $R = \langle A\underline{a}_1, \dots, A\underline{a}_p \rangle$ dan is $V = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p \rangle$
- iv) Als $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$ onafhankelijk is in V dan is $\{A\underline{a}_1, \dots, A\underline{a}_p\}$ onafhankelijk in R .

Opgave. Bewijs dit.

Stelling. Als $\dim V = n$, en $A : V \rightarrow W$ lineair is, dan geldt

$$\dim N + \dim R = n.$$

Bewijs. Als $\dim N = 0$ dan is A een injectie en dan is voor iedere basis $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ van V ook $\{A\underline{v}_1, \dots, A\underline{v}_n\}$ een basis voor R (vorige stelling), zodat $\dim R = n$. Als $0 < p := \dim N$ dan is, volgens een vorige stelling, $p \leq n$; als $p = n$ dan is $N = V$, zodat $R = \{0\}$ en $\dim R = 0$.

Stel nu dus $0 < p < n$. Omdat $R = \langle A\underline{v}_1, \dots, A\underline{v}_n \rangle$ is $\dim R \leq n$; zij $q := \dim R$. Kies een basis $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_q\}$ voor R , en bepaal $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_q$ zo dat $A\underline{a}_i = \underline{b}_i$ ($i = 1, \dots, q$); dan is $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_q\}$ een onafhankelijk stelsel en geen der vectoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_q$ behoort tot N .

Kies ook een basis $\{\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_p\}$ in N .

Dan is $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_q, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_p\}$ een basis voor V . Want

- 1) $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_q, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_p\}$ is onafhankelijk: uit

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i \underline{a}_i + \sum_{j=1}^p \mu_j \underline{c}_j = \underline{0} \text{ volgt (bepaal de beelden)}$$

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i \underline{b}_i = \underline{0}, \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_q = 0, \quad \mu_1 = \dots = \mu_p = 0.$$

- 2) $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_q, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_p \rangle = V$: als $\underline{x} \in V$ dan is

$$\underline{Ax} = \sum_{i=1}^q \lambda_i \underline{b}_i = A \left(\sum_{i=1}^q \lambda_i \underline{a}_i \right) \in R;$$

volgens stelling 3.4.3 is er nu een

$$\underline{n} = \sum_{j=1}^p \mu_j \underline{c}_j \in N,$$

zô dat

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^q \lambda_i \underline{a}_i + \sum_{j=1}^p \mu_j \underline{c}_j \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_q, \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_p \rangle .$$

Aangezien iedere basis voor V uit n elementen bestaat, is $\dim N + \dim R = p + q = n$. □

Voorbeelden.

1) Voor de draaiing en de spiegeling in \mathbb{R}^2 geldt

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{R}^2 &= \dim N + \dim R \\ 2 &= 0 + 2 . \end{aligned}$$

2) Voor de projectie in \mathbb{R}^3 op een rechte door 0 geldt

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{R}^3 &= \dim N + \dim R \\ 3 &= 2 + 1 . \end{aligned}$$

Stelling. Zij $A : V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding en zij $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ een basis in V ; dan geldt:

- i) A is een injectie $\Leftrightarrow \{A\underline{a}_1, \dots, A\underline{a}_n\}$ onafhankelijk (in W).
- ii) A is een surjectie $\Leftrightarrow \langle A\underline{a}_1, \dots, A\underline{a}_n \rangle = W$.
- iii) A is een bijectie $\Leftrightarrow \{A\underline{a}_1, \dots, A\underline{a}_n\}$ is een basis in W .

Opgave. Bewijs dit.

Voor later gebruik vermelden we nog de volgende stellingen:

Stelling. Laat $A : V \rightarrow W$ lineair en bijectief zijn. Dan is de inverse afbeelding $A^{-1} : W \rightarrow V$ lineair.

Opgave. Bewijs dit.

Stelling. Laten $A : U \rightarrow V$ en $B : V \rightarrow W$ lineaire afbeeldingen zijn. Dan is de samengestelde afbeelding $B \circ A : U \rightarrow W$ ook lineair.

Opgave. Bewijs dit.

5. Matrices en lineaire afbeeldingen.

3.5.1. In de twee voorafgaande paragrafen is de theorie van lineaire ruimten en lineaire afbeeldingen z6 geformuleerd dat nergens een beroep is gedaan op de specifieke eigenschappen van de vectoren waaruit de besproken vectorruimten bestaan. Zo speelt in de meeste definities en in vele stellingen het begrip dimensie zelfs geen rol. Wij verlaten nu dit abstracte standpunt, en beperken ons tot de ruimten \mathbb{R}^n van n-tallen (met willekeurige $n \in \mathbb{N}$). Lineaire afbeeldingen zijn dan afbeeldingen van \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m (met $n, m \in \mathbb{N}$). Dit betekent (volgens 3.3.7, voorbeeld 1) allereerst een beperking tot ruimten met eindige dimensie. \mathbb{R}^n heeft een standaardbasis $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ met $\underline{e}_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \dots, \delta_{nj})$; als men de kolomrepresentaties van deze vectoren in een matrix verzamelt, verkrijgt men de eenheidsmatrix I (en hetzelfde geldt voor de rijrepresentaties).

Als $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ dan is

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{e}_i,$$

en men kan \underline{x} *niet* op andere wijze als lineaire combinatie van $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ schrijven (3.3.6).

In deze paragraaf zal blijken:

i) Bij iedere $m \times n$ -matrix A hoort een lineaire afbeelding

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

ii) Bij iedere lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ hoort een $m \times n$ -matrix A.

Dit betekent dat voor eindigdimensionale ruimten de theorie van de lineaire afbeeldingen uit de theorie van matrices kan worden afgeleid (en, natuurlijk, omgekeerd).

Stelling. Als A een $m \times n$ -matrix is, dan wordt door het matrixproduct $A\underline{x}$ van A met (de kolom) \underline{x} een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gedefinieerd:

$$A\underline{x} := \underline{Ax}.$$

Voor de kolommen \underline{k}_j ($j = 1, \dots, n$) van A geldt

$$\underline{k}_j = A\underline{e}_j.$$

Bewijs. De rijen van A representeren vectoren $\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_m \in \mathbb{R}^m$.
Dan is voor iedere $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$A\underline{x} = \underline{Ax} = \begin{pmatrix} (\underline{r}_1, \underline{x}) \\ (\underline{r}_2, \underline{x}) \\ \vdots \\ (\underline{r}_m, \underline{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

A beeldt \mathbb{R}^n af in \mathbb{R}^m .

Omdat het inwendig product $(\underline{r}_i, \underline{x})$ lineair is in \underline{x} (3.1.3) volgt uit de eigenschappen voor vectoroptelling en scalaire vermenigvuldiging dat $A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y}$ en $A(\alpha\underline{x}) = \alpha A\underline{x}$; met andere woorden: A is een lineaire afbeelding van \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m .

Aangezien $\underline{r}_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$ is $(\underline{r}_i, \underline{e}_j) = a_{ij}$ en

$$A\underline{e}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = \underline{k}_j \quad (j = 1, \dots, n). \quad \square$$

Opmerking. Het onderscheid tussen een matrix A en de bijbehorende lineaire afbeelding A brengen we ook in de notatie tot uitdrukking.

Daarbij geven we een matrix en de bijbehorende afbeelding met dezelfde letter aan, in verschillende lettertypen: A, A; B, B; enz.

3.5.2. De eerste belangrijke conclusie waartoe de opvatting van een matrix A als lineaire afbeelding A leidt is de vertaling van de dimensiestelling (3.4.4),

$$\dim N + \dim R = n,$$

voor matrices en stelsels vergelijkingen.

Zij A een matrix met kolommen $\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n$, rijen $\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_m$.

We merken allereerst op:

$$R = \langle \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n \rangle,$$

hetgeen uit stelling 3.4.4 i volgt.

Dus: $\dim R = \dim \langle \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n \rangle =$ de dimensie van de deelruimte in \mathbb{R}^n die door de kolommen van A wordt opgespannen ("kolommenruimte"); men noemt deze dimensie de *kolommenrang* van A.

N is de verzameling $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$ en dat is de oplossingsverzameling van het stelsel vergelijkingen $(\underline{r}_1, \underline{x}) = 0, (\underline{r}_2, \underline{x}) = 0, \dots, (\underline{r}_m, \underline{x}) = 0$.

Nu noemen we $\dim \langle \underline{r}_1, \dots, \underline{r}_m \rangle$ de *rijenrang* van A; het is de dimensie van de door de rijen van A in \mathbb{R}^n opgespannen deelruimte. ("rijenruimte").

Het stelsel $(\underline{r}_1, \underline{x}) = 0, \dots, (\underline{r}_m, \underline{x}) = 0$ heeft als matrixrepresentatie $[A \mid \underline{0}]$ met normaalvorm $[N \mid \underline{0}]$. Stel dat de normaalvorm in r stappen wordt bereikt;

dan volgt uit de stellingen over het vegen (3.3.4) en uit voorbeeld

6 van 3.3.5, dat $r = \dim \langle \underline{r}_1, \dots, \underline{r}_m \rangle =$ de rijenrang van A.

Uit 3.2.4 en voorbeeld 6 van 3.3.5 volgt dat de oplossingsruimte de dimensie $n - r$ heeft, $\dim N = n - r$.

Dus $\dim R = r$ en:

Stelling. De rijenrang van een matrix is gelijk aan de kolommenrang. □

Definitie. Onder de *rang* $r(A)$ van een $m \times n$ -matrix A verstaat men de dimensie van de door de rijen in \mathbb{R}^n opgespannen deelruimte of de dimensie van de door de kolommen in \mathbb{R}^m opgespannen deelruimte.

Uit het voorgaande volgen direct de volgende drie stellingen:

Stelling. Als A de rang r heeft dan heeft het stelsel vergelijkingen $[A \mid \underline{0}]$ een oplossingsruimte met dimensie $n - r$.

Stelling. $r(A)$ is het aantal stappen van de normaalvormprocedure.

Stelling. Het stelsel $[A \mid \underline{b}]$ is dan en slechts dan oplosbaar als $r([A \mid \underline{b}]) = r(A)$.

Voorbeelden.

1) De rijenrang van $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ volgt na vegen

met de *rijen* uit $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ en is 2.

De kolommenrang volgt na vegen met *kolommen* uit $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ en is 2;

$$r(A) = 2.$$

Als we A beschouwen als matrix van een homogeen stelsel vergelijkingen, dan vinden we als equivalent stelsel (door met *rijen* verder te vegen)

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ met als oplossing}$$

$x_3 = x_1 + 2x_2$, $x_4 = -5x_1 - 7x_2$, dus $\underline{x} = \lambda(1, 0, 1, -5) + \mu(0, 1, 2, -7)$, een vlak in \mathbb{R}^4 met dimensie 2, de nulruimte van de door A gedefinieerde afbeelding A.

2) Fysische grootheden hebben een *dimensie* die men afleidt uit de dimensies van zogenaamde fundamentele grootheden op dezelfde manier als waarop hun eenheden zijn afgeleid uit de eenheden voor de fundamentele grootheden. De fundamentele grootheden lengte, massa, en tijd hebben dimensie L, M en T.

De grootheid snelheid, met eenheid m/sec., heeft dimensie LT^{-1} , de grootheid dichtheid heeft dimensie ML^{-3} , enzovoort.

Bij stroming van een vloeistof door een "oneindig"-lange niet geheel gevulde leiding spelen de volgende fysische grootheden een rol: de snelheid v , de dichtheid van de vloeistof ρ , de diameter van de leiding d , de versnelling van de zwaartekracht g en de viscositeit van de vloeistof μ . Hun dimensies geven we weer in een tabel:

	v	ρ	d	g	μ
M	0	1	0	0	1
L	1	-3	1	1	-1
T	-1	0	0	-2	-1

Een grootheid heet *dimensieloos* als ze de dimensie $M^0 L^0 T^0$ heeft. Een van v, ρ, d, g en μ afgeleide grootheid $v^{x_1} \rho^{x_2} d^{x_3} g^{x_4} \mu^{x_5}$ is dimensieloos als

$$\begin{aligned} x_2 + x_5 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ -x_1 - 2x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

en de oplossingen van dit stelsel volgen door vegen met *rijen* in de *dimensiematrix*:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

De rang is 3, en de oplossing kan geschreven worden als

$$\underline{x} = \lambda(2, 0, -1, -1, 0) + \mu(1, 1, 1, 0, -1) .$$

De dimensieloze grootheid $v^2 d^{-1} g^{-1}$ heet het *getal van Froude*, de dimensieloze grootheid $v \rho d^{-1}$ heet het *getal van Reynolds*. In de technische literatuur worden ze aangeduid met Fr respectievelijk Re.

Alle dimensieloze grootheden die in dit stromingsprobleem een rol kunnen spelen zijn van het type $Fr^\lambda Re^\mu$.

Uit *onze* dimensiestelling volgt voor *deze* dimensiebeschouwingen: Als een fysisch verschijnsel met n grootheden wordt beschreven, en de rang van de bijbehorende dimensiematrix is r , dan zijn er $n - r$ onafhankelijke dimensieloze grootheden ("π-theorema van Buckingham").

3.5.3. We gaan nu over op de keerzijde van het verband tussen matrices en afbeeldingen. Zij $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ een lineaire afbeelding. De standaardbasis in \mathbb{R}^n is $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$, die in \mathbb{R}^m zij $\{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_m\}$. Aangezien $A\underline{e}_j \in \mathbb{R}^m$, kan men op precies één manier schrijven

$$A\underline{e}_1 = a_{11}\underline{f}_1 + a_{21}\underline{f}_2 + \dots + a_{m1}\underline{f}_m$$

Evenzo

$$A\underline{e}_j = a_{1j}\underline{f}_1 + a_{2j}\underline{f}_2 + \dots + a_{mj}\underline{f}_m \quad (j = 2, \dots, n)$$

Schrijf de coëfficiënten a_{ij} bij iedere j in een kolom \underline{k}_j en verzamel die kolommen in een matrix A . Dan is $A\underline{e}_j = \underline{k}_j$, $j = 1, \dots, n$, en voor iedere $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ is

$$\begin{aligned} \underline{Ax} &= \sum_{j=1}^n x_j A\underline{e}_j = \sum_{j=1}^n x_j \underline{k}_j = \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n} \\ \vdots \\ x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \dots + x_n a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \underline{Ax} . \end{aligned}$$

De aldus gedefinieerde matrix A is precies die, die in de gedachtengang van 3.5.1 bij A hoort.

Men noemt $r(A)$ ook wel de rang van de afbeelding A .

Voorbeelden.

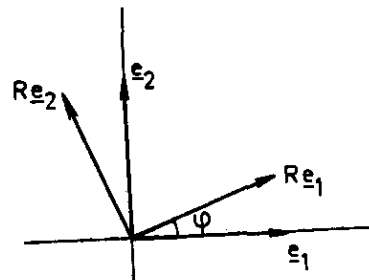
- 1) Beschouw de identieke afbeelding $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, waarvoor $I\underline{e}_i = \underline{e}_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$.

De matrix is

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- 2) De draaiing R in \mathbb{R}^2 om 0 over een hoek φ voert \underline{e}_1 over in $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ en \underline{e}_2 in $(-\sin \varphi, \cos \varphi)$ zodat de matrix van R is

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$



Merk op dat $r(R) = 2$ en dat R een inverse heeft.

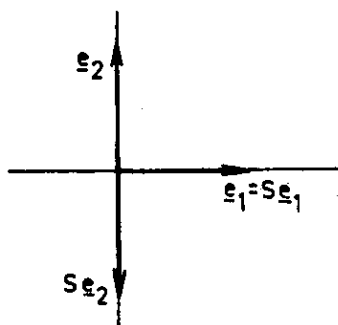
- 3) De matrix van de spiegeling S in \mathbb{R}^2 t.o.v. de x_1 -as is

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ter controle:

$$S \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix},$$

met $r(S) = 2$; S heeft een inverse.



- 4) De projectie P op de door de vector \underline{a} in \mathbb{R}^3 opgespannen rechte heeft een matrix P . $P\underline{x}$ is een vector die voldoet aan

$$(P\underline{x} - \underline{x}, \underline{a}) = 0, \quad P\underline{x} = \lambda \underline{a}$$

zodat

$$0 = (\lambda \underline{a} - \underline{x}, \underline{a}) = \lambda (\underline{a}, \underline{a}) - (\underline{x}, \underline{a})$$

en

$$P\underline{x} = \frac{(\underline{x}, \underline{a})}{(\underline{a}, \underline{a})} \underline{a}.$$

Dan is

$$P\underline{e}_j = \frac{a_j}{(\underline{a}, \underline{a})} \underline{a}$$

en

$$P = \frac{1}{(\underline{a}, \underline{a})} \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}$$

met $r(P) = 1$ en $R = \langle \underline{a} \rangle$. P heeft geen inverse.

5) Zij $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ en $\underline{w} \neq \underline{0}$; definieer $W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ door

$$W\underline{x} := \underline{w} \times \underline{x}.$$

Dan is $W\underline{e}_1 = \underline{w} \times \underline{e}_1 = (0, w_3, -w_2)$ enzovoort, en

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(W) = 2$ en W heeft geen inverse (vergelijk voorbeeld 2 in 3.4.3).

Voor W geldt $W + W^T = 0$; zulke matrices (en lineaire afbeeldingen met zulke matrices) heten *scheefsymmetrisch*.

3.5.4. Als $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ een onafhankelijk stelsel is in \mathbb{R}^n dan is het tevens een basis. Als we van $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de beelden $A\underline{a}_1, \dots, A\underline{a}_n$ kennen, dan kunnen we $A\underline{e}_j$ ($j = 1, \dots, n$) berekenen, daar iedere \underline{e}_j een lineaire combinatie van $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ is.

We voeren dit uit door in een hulpmatrix op te nemen de *rijrepresentaties* van $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ en $A\underline{a}_1, \dots, A\underline{a}_n$ en te vegen naar de normaalvorm; als men volgens de normaalprocedure veegt wordt de normaalvorm in n stappen bereikt (ga dit na!), maar dit is niet altijd het handigste.

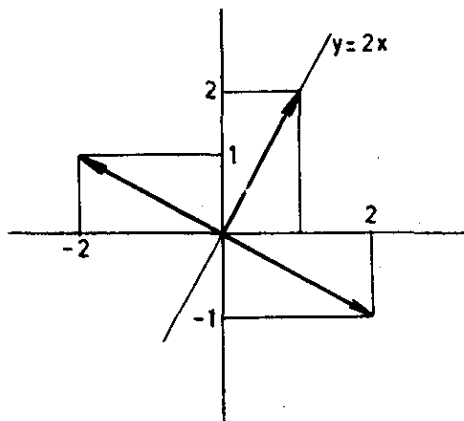
Voorbeelden:

1) Bepaal de matrix van de spiegeling S in \mathbb{R}^2 ten opzichte van de rechte $y = 2x$.

Meetkundig zien we dat deze spiegeling

$(1, 2)$ overvoert in $(1, 2)$ en $(-2, 1)$ in

$(2, -1)$.



De hulpmatrix wordt

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \text{ met normaalvorm } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{array} \right],$$

zodat (denk eraan dat S_{e_1} en S_{e_2} kolommen zijn van S)

$$S = \left[\begin{array}{cc} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \right] = \frac{1}{5} \left[\begin{array}{cc} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{array} \right].$$

2) Zij $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ gegeven door

$$A(1,0,1) = (5,6,7,-6)$$

$$A(1,2,0) = (-3,3,2,12)$$

$$A(-1,3,2) = (1,3,17,-3)$$

De bedoelde hulpmatrix en zijn normaalvorm zijn

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 5 & 6 & 7 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 3 & 2 & 12 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 17 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 7 & -8 \end{array} \right]$$

$$\text{zodat } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

3.5.5. Definitie. Stel $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Onder de som van A en B verstaan we de afbeelding $A + B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gedefinieerd door

$$(A + B)\underline{x} = A\underline{x} + B\underline{x} \quad \text{voor alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Onder het *scalair product* van λ en A verstaan we de afbeelding $\lambda A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gedefinieerd door

$$(\lambda A)\underline{x} = \lambda A\underline{x} \quad \text{voor alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Stelling. Als $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineair zijn en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan zijn $A + B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en $\lambda A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ook lineair.

Opgave. Bewijs deze stelling.

Stelling. De lineaire afbeeldingen van \mathbb{R}^n naar \mathbb{R}^m met de zojuist gedefiniëerde optelling en scalaire vermenigvuldiging vormen een lineaire ruimte met dimensie nm .

Bewijs. Het nulelement in deze lineaire ruimte is de afbeelding $0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gedefinieerd door $0\underline{x} = \underline{0}$ voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. De tegengestelde van een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is de afbeelding $-A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gedefinieerd door $(-A)(\underline{x}) = -A\underline{x}$ voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Het is eenvoudig in te zien dat 0 en $-A$ lineaire afbeeldingen zijn, en dat aan de voorwaarden i) - viii) is voldaan van definitie 3.3.1.

De dimensie volgt uit het formaat der matrices. □

Stelling. Als $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineaire afbeeldingen zijn met matrices A en B dan is $A + B$ de matrix van $A + B$ en λA de matrix van λA .

Bewijs. Als \underline{k}_j de j -de kolom is van A en \underline{l}_j de j -de kolom is van B dan is

$$(A + B)\underline{e}_j = A\underline{e}_j + B\underline{e}_j = \underline{k}_j + \underline{l}_j$$

de j -de kolom van $A + B$, en

$$(\lambda A)\underline{e}_j = \lambda(A\underline{e}_j) = \lambda\underline{k}_j$$

de j -de kolom van λA . □

Stelling. Als $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ en $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ lineair zijn (zodat ook $B \circ A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ lineair is) dan is BA de matrix van $B \circ A$.

Bewijs. A is een $m \times n$ -matrix, noem de kolommen $\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n$; $\underline{k}_j \in \mathbb{R}^m$.

B is een $p \times m$ -matrix, noem de rijen $\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_p$; $\underline{r}_i \in \mathbb{R}^m$.

De standaardbasis voor \mathbb{R}^n is $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$.

De j -de kolom van de matrix van $B \circ A$ is

$$(B \circ A)\underline{e}_j = B(A\underline{e}_j) = B\underline{k}_j = \begin{bmatrix} (r_1, k_j) \\ \vdots \\ (r_p, k_j) \end{bmatrix} = \text{de } j\text{-de kolom van BA.} \quad \square$$

Voorbeelden.

1) De matrix van de rotatie R over een hoek $\frac{\pi}{2}$ om de x_3 -as in \mathbb{R}^3 is

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en de matrix van de spiegeling S t.o.v. het vlak $x_1 = 0$ is

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De samengestelde afbeelding $S \circ R$ (eerst draaien, dan spiegelen) heeft nu als matrix

$$SR = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dus: $SR \underline{e}_1 = \underline{e}_2$, $SR \underline{e}_2 = \underline{e}_1$, $SR \underline{e}_3 = \underline{e}_3$. Dit is de matrix van de spiegeling t.o.v. het vlak $x_1 = x_2$. Meetkundig is ook eenvoudig in te zien dat de samengestelde afbeelding de spiegeling ten opzichte van dit vlak is. Voor de samengestelde afbeelding $R \circ S$ (eerst spiegelen, dan draaien) geldt

$$RS = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ga zelf na dat $R \circ S$ de spiegeling t.o.v. het vlak $x_1 = -x_2$ is.

2) Als in de voorgaande stelling voor B de identieke afbeelding $I : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ wordt genomen, dan is $A \circ I = A$ en dienovereenkomstig $AI = A$; hier is I de $m \times m$ -eenheidsmatrix.

Evenzo kan men voor A de identieke afbeelding $I : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ nemen, en dan is $I \circ B = B$ en $IB = B$; ook nu is I de $m \times m$ -eenheidsmatrix.

6. Lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

In het eerste deel van deze paragraaf willen we de inverse van een lineaire afbeelding nader bestuderen.

Uit de dimensiestelling volgt dat een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zeker geen inverse heeft als $n \neq m$. We zullen ons daarom beperken tot lineaire afbeeldingen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dan is A een $n \times n$ -matrix, een zogenaamde *vierkante matrix*. Eerst zullen we uit de voorgaande resultaten een kenmerk afleiden voor het bestaan van een inverse afbeelding, en de matrix van deze inverse afbeelding bepalen. Een tweede kenmerk voor het bestaan van een inverse lineaire afbeelding wordt gevonden met behulp van de determinant van een matrix, wat het volgende onderwerp in deze paragraaf zal zijn.

3.6.1. Een inverse afbeelding A^{\leftarrow} van een (lineaire) afbeelding A kan dan en slechts dan worden gedefinieerd als A bijectief is. Als dit zo is dan is A^{\leftarrow} gedefinieerd door

$$A^{\leftarrow} \underline{u} = \underline{x} \text{ dan en slechts dan als } A\underline{x} = \underline{u} .$$

Hieruit volgt dat voor $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ met inverse A^{\leftarrow} geldt:

$$A^{\leftarrow} \circ A = I \text{ en } A \circ A^{\leftarrow} = I .$$

Dit betekent dat voor de matrix van A^{\leftarrow} , die we met A^{-1} aangeven, moet gelden

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I .$$

De matrix A^{-1} noemen we ook wel de *inverse matrix* van A .

Als $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ de standaardbasis is dan is $\underline{k}_j = A\underline{e}_j$ de j -de kolom van A ; dan geldt evenwel

$$A^{\leftarrow} \underline{k}_j = \underline{e}_j$$

en we verkeren met de matrix A^{-1} in de situatie van 3.5.4; A^{-1} bepalen we door te vegen.

Hierbij is essentieel dat $\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n$ onafhankelijk zijn.

Stelling. Voor een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zijn de volgende beweringen gelijkwaardig:

- a) A heeft een inverse.
- b) A is injectief, of $N = \{0\}$.
- c) A is surjectief, of $R = \mathbb{R}^n$.
- d) $r(A) = n$.
- e) De kolommen van A zijn onafhankelijk.

Bewijs. b) en c) zijn gelijkwaardig volgens de dimensiestelling; ieder van deze voorwaarden heeft dus bijectiviteit tot gevolg, dus ook a); het omgekeerde is triviaal; c), d) en e) zijn eveneens gelijkwaardig op grond van eerder bewezen stellingen. □

Opmerking. Zowel een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ als een $n \times n$ -matrix A die de eigenschappen heeft die in de stelling worden genoemd heet *regulier*; zo niet, dan *singulier*.

Voorbeelden.

1) Onderzoek of de matrix A een inverse heeft, en zo ja, bepaal deze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix} .$$

Beschouw de matrix (denk aan de betekenis van *rijen* en *kolommen*!)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

waarvan iedere rij een kolom \underline{k}_j van A en een basisvector \underline{e}_j representeert. De normaalvormprocedure leidt na 1 stap tot

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

waaraan men ziet dat A singulier is en geen inverse heeft.

$$2) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Uit } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ volgt } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{als normaalvorm, zodat } A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stelling. Als $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineair is, $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineair is en $B \circ A = I$, dan zijn A en B regulier en elkaars inverse.

Bewijs. De beeldruimte $R(B \circ A)$ van $B \circ A$ is gelijk aan \mathbb{R}^n , want voor iedere $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ geldt $\underline{x} = I\underline{x} = (B \circ A)\underline{x}$.

Dan is ook $R(B) = \mathbb{R}^n$ en B is regulier zodat B^{\leftarrow} bestaat en regulier is.

Uit $A = A \circ I = A \circ (B \circ B^{\leftarrow}) = (A \circ B) \circ B^{\leftarrow} = I \circ B^{\leftarrow} = B^{\leftarrow}$ volgt ook dat A regulier is. □

Voorbeelden.

1) Voor de draaiing \mathcal{D}_φ met matrix $D_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$

en de draaiing $\mathcal{D}_{-\varphi}$ met matrix $D_{-\varphi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$

geldt $\mathcal{D}_\varphi \circ \mathcal{D}_{-\varphi} = I$. Dus is $D_{-\varphi}$ de inverse van D_φ .

2) Voor de spiegeling S ten opzichte van een lijn door $\underline{0}$ in \mathbb{R}^2 geldt $S \circ S = I$.

Voor de matrix S geldt dat de inverse ook S is.

(Controleer dit bij 3.5.4 voorbeeld 1.)

3) Voor de *dilataties* met matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

geldt $AB = I$. Ze zijn elkaars inverse.

3.6.2. Determinanten in \mathbb{R}^3 .

Neem $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ en definieer

$$D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \begin{cases} \text{inhoud blok met zijden } \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \text{ als } \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\} \text{ rechtsdraaiend is} \\ 0 \text{ als } \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\} \text{ afhankelijk is} \\ - \text{inhoud blok met zijden } \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \text{ als } \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\} \text{ linksdraaiend is.} \end{cases}$$

$D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ heet de *determinant* van de vectoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$, of de determinant van de matrix

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

en we schrijven er ook voor

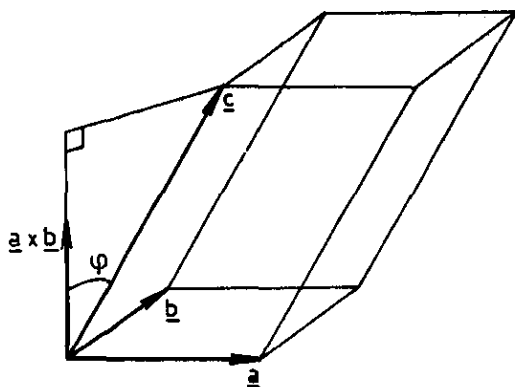
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

of $\det[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}]$.

Stelling. Laat $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ drie vectoren in \mathbb{R}^3 zijn. Dan is

$$\begin{aligned} D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) = \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1. \end{aligned}$$

Bewijs. Veronderstel dat $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ onafhankelijk is. Het vectorproduct $\underline{a} \times \underline{b}$ van de vectoren \underline{a} en \underline{b} is een vector die loodrecht staat op \underline{a} en \underline{b} , als lengte heeft de oppervlakte van het parallellogram met zijden \underline{a} en \underline{b} , en zodanig is dat $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}\}$ een rechtsdraaiend stelsel is. Neem nu aan dat ook $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ een rechtsdraaiend stelsel is. Dan is de hoek φ tussen $\underline{a} \times \underline{b}$ en \underline{c} scherp en dan geldt



$$\begin{aligned}
 (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) &= \|\underline{a} \times \underline{b}\| \cdot \|\underline{c}\| \cdot \cos \varphi \\
 &= \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte} \\
 &= D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) .
 \end{aligned}$$

Als $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ linksdraaiend is dan is de hoek φ tussen $\underline{a} \times \underline{b}$ en \underline{c} stomp, zodat $\|\underline{c}\| \cos \varphi$ negatief is, en

$$\begin{aligned}
 (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) &= \|\underline{a} \times \underline{b}\| \|\underline{c}\| \cdot \cos \varphi \\
 &= - \text{inhoud blok met zijden } \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \\
 &= D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) .
 \end{aligned}$$

Als $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ afhankelijk is dan is $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$ of $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{c}$, in beide gevallen is $(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) = 0 = D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$.

Uit $D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})$ leiden we nu met stelling 1.2.10 voor het vectorproduct de laatste formule af:

$$\begin{aligned}
 D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) &= (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) \\
 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 = \\
 &= a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 = \\
 &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 .
 \end{aligned}$$

Opmerking. De eigenschap

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

staat ook wel bekend als *regel van Sarrus*.

Met de regel van Sarrus zien we direct

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Anders gezegd: de determinant van een 3×3 -matrix is gelijk aan de determinant van de bijbehorende getransponeerde matrix. Ook zien we dat

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 ,$$

hetgeen uit meetkundige overwegingen ook duidelijk is.

Met de regel van Sarrus kan men ook gemakkelijk bewijzen:

Stelling.

i) $D(\underline{b}, \underline{a}, \underline{c}) = D(\underline{c}, \underline{b}, \underline{a}) = D(\underline{a}, \underline{c}, \underline{b}) = -D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$

(dus door verwisseling van twee vectoren gaat de determinant in zijn tegengestelde over).

ii) $D(\alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2, \underline{b}, \underline{c}) = \alpha_1 D(\underline{a}_1, \underline{b}, \underline{c}) + \alpha_2 D(\underline{a}_2, \underline{b}, \underline{c})$

$$D(\underline{a}, \beta_1 \underline{b}_1 + \beta_2 \underline{b}_2, \underline{c}) = \beta_1 D(\underline{a}, \underline{b}_1, \underline{c}) + \beta_2 D(\underline{a}, \underline{b}_2, \underline{c})$$

$$D(\underline{a}, \underline{b}, \gamma_1 \underline{c}_1 + \gamma_2 \underline{c}_2) = \gamma_1 D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}_1) + \gamma_2 D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}_2)$$

(m.a.w. $D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ is lineair in \underline{a} , lineair in \underline{b} , lineair in \underline{c}).

3.6.3. Determinanten in \mathbb{R}^n

In het voorgaande hebben we gezien dat we in \mathbb{R}^3 een functie $D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ kunnen definiëren met de volgende drie eigenschappen:

1) $D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ is lineair in \underline{a} , in \underline{b} en in \underline{c} .

2) D is antisymmetrisch, d.w.z. door verwisseling van twee vectoren verandert de functiewaarde van teken.

3) $D(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) = 1$.

We nemen deze eigenschappen nu als uitgangspunt voor de definitie van de determinant van n vectoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ in \mathbb{R}^n :

Definitie. Een determinantfunctie $D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ is een afbeelding die aan ieder n -tal vectoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ in \mathbb{R}^n een getal toevoegt zodanig dat geldt:

- 1) $D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ is lineair in ieder der vectoren \underline{a}_i .
- 2) $D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ is antisymmetrisch.
- 3) $D(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) = 1$.

Merk op dat deze definitie *niet* zegt dat er zo'n afbeelding D is.

Voor $n = 3$ en $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ kennen we $D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$; we zullen nu onderzoeken of er voor iedere n een $D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ is en hoe hij van de argumenten $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ afhangt.

Stelling. Als $D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ een determinant is in \mathbb{R}^n dan geldt:

- i) Als onder de vectoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ twee gelijke voorkomen, dan is $D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = 0$.
- ii) Als onder $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ de vector $\underline{0}$ voorkomt dan is $D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = 0$.
- iii) Als $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ een afhankelijk stelsel is, dan is $D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = 0$.
- iv) $D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = D(\underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \lambda_3 \underline{a}_3 + \dots + \lambda_n \underline{a}_n, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$.

Bewijs.

- i) Als $\underline{a}_i = \underline{a}_j$ dan is

$$\begin{aligned} D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_j, \dots, \underline{a}_n) &= D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_j, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n) = \\ &= - D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_j, \dots, \underline{a}_n) \end{aligned}$$

dus $D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = 0$.

ii) $D(\underline{a}_1, \dots, \underline{0}, \dots, \underline{a}_n) = 0$. $D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = 0$.

iii) Als $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ afhankelijk is, dan is, bijvoorbeeld, $\underline{a}_1 \in \langle \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \rangle$.

$$D(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = D\left(\sum_{i=2}^n \alpha_i \underline{a}_i, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n\right) = \sum_{i=2}^n \alpha_i D(\underline{a}_i, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = 0.$$

iv) Gevolg van i). □

Uit

$$\underline{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \underline{e}_i$$

volgt

$$\begin{aligned} D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) &= D\left(\sum_{i(1)=1}^n a_{i(1),1} \underline{e}_{i(1)}, \dots, \sum_{i(n)=1}^n a_{i(n),n} \underline{e}_{i(n)}\right) = \\ &= \sum_{i(1)=1}^n \dots \sum_{i(n)=1}^n a_{i(1),1} a_{i(2),2} \dots a_{i(n),n} D(\underline{e}_{i(1)}, \underline{e}_{i(2)}, \dots, \underline{e}_{i(n)}). \end{aligned}$$

Dit is een som met n^n termen die alle een factor van het type $D(\underline{e}_{i(1)}, \dots, \underline{e}_{i(n)})$ bevatten waarbij $i(1), i(2), \dots, i(n) \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Als twee (of meer) der indices $i(1), \dots, i(n)$ gelijk zijn, is $D(\underline{e}_{i(1)}, \dots, \underline{e}_{i(n)}) = 0$. De overige termen zijn precies die waarvoor $i(1), \dots, i(n)$ onderling verschillend zijn. Vat i op als een bijectie van $\{1, 2, \dots, n\}$ in $\{1, 2, \dots, n\}$. Noem de verzameling van zulke bijecties (of permutaties) S . Dan is

$$D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = \sum_{i \in S} a_{i(1),1} a_{i(2),2} a_{i(3),3} \dots a_{i(n),n} D(\underline{e}_{i(1)}, \dots, \underline{e}_{i(n)}).$$

Als het aantal verwisselingen, nodig om $i(1), \dots, i(n)$ in de natuurlijke volgorde te brengen, even is, dan is $D(\underline{e}_{i(1)}, \dots, \underline{e}_{i(n)}) = D(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) = 1$, anders -1 .

We geven dit aan met een factor $(-1)^{S(i)}$, waarin $S(i) = 0$ of 1 al naar gelang het bij i horende aantal verwisselingen even of oneven is.

$$D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = \sum_{i \in S} (-1)^{S(i)} a_{i(1),1} a_{i(2),2} \dots a_{i(n),n}$$

Dit is een som met $n!$ termen, omdat S uit $n!$ elementen bestaat.

Als er een determinant functie $D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ in \mathbb{R}^n bestaat, dan is het deze.

Deze voldoet aan de gestelde voorwaarden; dit is voor de eerste en derde voorwaarde makkelijk na te gaan; voor de tweede moet men iets dieper ingaan op de eigenschappen van permutaties. Dus:

Stelling. Er is in \mathbb{R}^n precies één determinantfunctie, en die is

$$D(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = \sum_{i \in S} (-1)^{S(i)} a_{i(1),1} \cdots a_{i(n),n}$$

Definitie. Als A een $n \times n$ -matrix is met kolommen $\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n$ dan definiëren we de determinant van A als $\det A = D(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n)$. Men heeft ook de notaties

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det [\underline{k}_1, \underline{k}_2, \dots, \underline{k}_n]$$

Voorbeelden.

1) In \mathbb{R}^2 is $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$;

als de vectoren (a,b) en (c,d) geöriënteerd zijn als \underline{e}_1 en \underline{e}_2 dan is $ad - bc$ de oppervlakte van het parallellogram met zijden (a,b) en (c,d) ; anders is de oppervlakte gelijk aan $-(ad - bc)$.

2) In \mathbb{R}^3 is

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \sum_{i \in S} (-1)^{S(i)} a_{i(1),1} a_{i(2),2} a_{i(3),3} \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{31} a_{12} a_{23} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{11} a_{32} a_{23} + \\ &\quad - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{31} a_{22} a_{13}, \end{aligned}$$

en dat komt overeen met wat we in 3.6.2 hebben gevonden.

3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

We maken gebruik van de mogelijkheid om met *kolommen* te vegen:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & -4 \\ 2 & 0 & -3 & -7 \\ 4 & -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & -7 \\ -6 & -5 & 15 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -7 \\ -6 & -5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 5 & -30 \end{vmatrix} = \\ &= -90 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -90 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -90. \end{aligned}$$

3.6.4. Het *berekenen van determinanten* met de definitie is vanwege de $n!$ termen bij groter wordende n al gauw onuitvoerbaar. Naast het vegen zijn er nog enige hulpmiddelen, die berusten op de twee volgende stellingen. De bewijzen berusten op manipulaties met permutaties en die laten we hier achterwege.

Stelling. $\det A = \det A^T$.

Dit betekent dat men een determinant ook kan berekenen door met *rijen* te vegen.

Definitie. Laat $A = [a_{ij}]$ een $n \times n$ -matrix zijn. Laat uit A weg de i -de rij en de j -de kolom. Dan ontstaat een $(n - 1) \times (n - 1)$ -matrix. De determinant hiervan heet de *onderdeterminant* D_{ij} van a_{ij} .

Stelling.

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij} \quad \text{voor iedere } j = 1, \dots, n.$$

Toepassen van deze stelling heet *ontwikkelen naar de j-de kolom*.

Op grond van de vorige stelling kan men ook *ontwikkelen naar een rij*:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Voorbeelden.

1)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \text{ontwikkel naar de 3e rij}$$

$$2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \text{enzovoort.}$$

2) Handiger is om zowel te vegen als te ontwikkelen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & -4 \\ 2 & 0 & -3 & -7 \\ 4 & -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -5 & -4 \\ 0 & -3 & -7 \\ -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -5(21 - 3) = -90.$$

3)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix} \\
 & = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ba+a^2 \\ 1 & c+a & c^2+ca+a^2 \\ 1 & d+a & d^2+da+a^2 \end{vmatrix} \\
 & = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a & b^2+ba+a^2 \\ 0 & c-b & (c-b)(c+b+a) \\ 0 & d-b & (d-b)(d+b+a) \end{vmatrix} = \\
 & = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & c+b+a \\ 1 & d+b+a \end{vmatrix} = \\
 & = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).
 \end{aligned}$$

3.6.5. *Determinanten en reguliere afbeeldingen.*

Stelling. $\det A \neq 0$ dan en slechts dan als $r(A) = n$.

Bewijs. We weten al dat uit $r(A) < n$ volgt $\det A = 0$, want dit is in 3.6.3 bewezen. Stel nu $r(A) = n$, dat wil zeggen dat de rijen van A onafhankelijk zijn. Pas op A de normaalvormprocedure toe. Dan ontstaat de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

waarvan de determinant 1 is; dit is weliswaar niet noodzakelijk $\det A$, maar is uit $\det A$ ontstaan door bij iedere stap van de procedure $\det A$ met een factor te vermenigvuldigen. Dus $\det A \neq 0$. □

Opmerking. Men kan de stelling toevoegen aan de kenmerken van reguliere afbeeldingen en matrices (3.6.1).

Stelling. Als A een $n \times n$ -matrix is en $\det A \neq 0$, dan is het stelsel vergelijkingen $[A|\underline{b}]$, uitgeschreven $A\underline{x} = \underline{b}$, oplosbaar. De oplossing is $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$.

Bewijs. A heeft een inverse A^{-1} en uit $A\underline{x} = \underline{b}$ volgt

$$\underline{x} = I\underline{x} = A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\underline{b} .$$

□

Het oplossen van een stelsel $A\underline{x} = \underline{b}$ met reguliere $n \times n$ -matrix A komt blijkbaar neer op het bepalen van A^{-1} . Naast de methode van 3.6.1 (vegen)

kan men ook als volgt te werk gaan:

Noem de kolommen van A weer $\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n$.

Dan kan men $A\underline{x} = \underline{b}$ ook schrijven als

$$x_1 \underline{k}_1 + \dots + x_n \underline{k}_n = \underline{b} .$$

Voor iedere $i = 1, \dots, n$ en een oplossing x_1, \dots, x_n geldt nu

$$\begin{aligned} D(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_{i-1}, \underline{b}, \underline{k}_{i+1}, \dots, \underline{k}_n) &= D(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_{i-1}, \sum_{j=1}^n x_j \underline{k}_j, \underline{k}_{i+1}, \dots, \underline{k}_n) = \\ &= \sum_{j=1}^n x_j D(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_{i-1}, \underline{k}_j, \underline{k}_{i+1}, \dots, \underline{k}_n) = x_i D(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) = x_i \det A, \end{aligned}$$

en

$$x_i = \frac{D(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_{i-1}, \underline{b}, \underline{k}_{i+1}, \dots, \underline{k}_n)}{\det A} .$$

Hier staat allereerst een expliciete uitdrukking voor de oplossing $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ van het stelsel, die bekend staat als de *regel van Cramer*.

Vervolgens kunnen we met behulp van deze regel A^{-1} bepalen.

We zoeken dan een $n \times n$ -matrix X , met kolommen $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$, waarvoor $AX = I$.

Volgens de definitie van het matrixproduct zijn de kolommen van AX :

$$A\underline{x}_1, A\underline{x}_2, \dots, A\underline{x}_n .$$

We krijgen dan n stelsels vergelijkingen

$$A\underline{x}_j = \underline{e}_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

zodat, daar $\underline{x}_j = [x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}]^T$,

$$x_{ij} = \frac{D(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_{i-1}, \underline{e}_j, \dots, \underline{k}_n)}{\det A} = \frac{(-1)^{i+j} D_{ji}}{\det A}.$$

Hiermee is A^{-1} bepaald.

Voorbeelden.

$$\begin{aligned} 1) \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$\det A = 11$,

$$11 x_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 16 + 32 + 4 = 22,$$

$$x_1 = 2.$$

$$2) \text{ De inverse } A^{-1} \text{ van } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

is

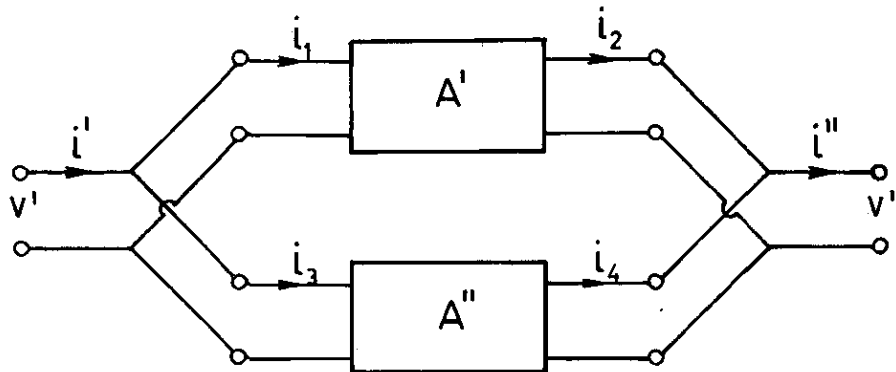
$$\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -5 & 1 & 7 \\ -2 & -4 & 5 \\ 6 & 1 & -4 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -5 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & 1 \\ 7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$3) \text{ Stel dat voor een tweepoort met impedantiematrix } Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \text{ en } \zeta = \det Z$$

$$\text{geldt } \zeta \neq 0. \text{ Dan heeft } Z \text{ een inverse } A = \frac{1}{\zeta} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix}.$$

Deze matrix heet *admittantiematrix*.

Als twee tweepoorten met admittantiematrices A' en A'' parallel geschakeld worden ontstaat weer een tweepoort. Bewijs zelf dat de admittantiematrix van deze tweepoort is $A' + A''$.



3.6.6. Stellingen over determinanten.

Stelling. Als A, B $n \times n$ -matrices zijn dan is $\det AB = \det A \det B$.

Bewijs.

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = [k_1, \dots, k_n] \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & & b_{nn} \end{bmatrix} = \\
 &= \left[\sum_{j(1)=1}^n b_{j(1),1} k_{j(1)}, \dots, \sum_{j(n)=1}^n b_{j(n),n} k_{j(n)} \right]
 \end{aligned}$$

We berekenen $\det AB$ op de manier van 3.6.3:

$$\begin{aligned}
 \det AB &= \sum_{j \in S} (-1)^{S(j)} b_{j(1),1} \dots b_{j(n),n} D(k_1, \dots, k_n) = \\
 &= \det A \sum_{j \in S} (-1)^{S(j)} b_{j(1),1} \dots b_{j(n),n} = \det A \det B. \quad \square
 \end{aligned}$$

Gevolg. Als A een inverse A^{-1} heeft, is $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

Stelling. Als A en B matrices zijn met geschikte formaten dan is $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

Bewijs. Noem de kolommen van $A : k_1, \dots, k_n$, de rijen van $B : r_1, \dots, r_n$.
 Uit het vorige bewijs blijkt: de kolommen van AB behoren tot $\langle k_1, \dots, k_n \rangle$,
 en daaruit volgt $r(AB) \leq r(A)$. Op dezelfde manier behoren de rijen van
 AB tot $\langle r_1, \dots, r_n \rangle$ en $r(AB) \leq r(B)$. □

Stelling. Zij A een $m \times n$ -matrix.

$r(A) = p$ dan en slechts dan als aan de twee volgende voorwaarden is voldaan:

- i) A heeft een $p \times p$ -onderdeterminant die $\neq 0$ is.
- ii) Iedere onderdeterminant van groter formaat dan $p \times p$ is gelijk aan 0.

Bewijs. De voorwaarden zijn nodig; stel dat $r(A) = p$.

Neem p onafhankelijke rijen van A. Die vormen een matrix A_1 met $r(A_1) = p$. A_1 heeft p onafhankelijke kolommen. Die vormen een $p \times p$ -matrix A_2 met rang p , en $\det A_2 \neq 0$.

Neem een $q \times q$ -onderdeterminant B met $q > p$.

De bijbehorende q rijen van A zijn afhankelijk, de deelrijen die B vormen zijn dan ook afhankelijk en $\det B = 0$.

De voorwaarden zijn ook voldoende. Stel dat ze gelden voor A. Uit $r(A) < p$ volgt dat voor iedere $p \times p$ -onderdeterminant B van A geldt $\det B = 0$, in strijd met voorwaarde i. Uit $r(A) > p$ volgt dat er een $q \times q$ -onderdeterminant C is met $q > p$ en $\det C \neq 0$, in strijd met voorwaarde ii. Dus $r(A) = p$. □

Stelling. Als $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ vectoren zijn in \mathbb{R}^n , en $m \leq n$, dan is het stelsel $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m\}$ dan en slechts dan afhankelijk als iedere $m \times m$ -onderdeterminant uit de matrix $[\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m]$ gelijk is aan 0.

Bewijs. Direct gevolg van de vorige stelling. □

Gevolg. Twee vectoren \underline{a} en \underline{b} in \mathbb{R}^3 zijn dan en slechts dan afhankelijk als $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$.

Definitie. Zij A een $n \times p$ -matrix met kolommen $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$. Dan heet $A^T A$ de *Grammatrix* van de matrix A, of van het stelsel $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$. (Naar I. Gram, 1850-1916.)

Stelling. $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$ is dan en slechts dan afhankelijk als $\det A^T A = 0$.

Bewijs:

- i) Als $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$ afhankelijk is dan is $r(A) < p$, $r(A^T A) < p$ terwijl $A^T A$ een $p \times p$ -matrix is. Dus geldt $\det A^T A = 0$.
- ii) Het omgekeerde is een gevolg van een nog te bewijzen stelling (3.8.i). □

Een aanvulling op 3.1.6 is nog de volgende stelling:

Stelling. Als de elementen a_{ij} van de $n \times n$ -matrix A functies zijn van een variabele t , zodat ook $\det A$ van t afhangt, dan is (met $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ als kolommen)

$$\frac{d}{dt} \det A = \det[\dot{\underline{a}}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n] + \det[\underline{a}_1, \dot{\underline{a}}_2, \dots, \underline{a}_n] + \dots + \det[\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \dot{\underline{a}}_n].$$

Opgave. Bewijs dit.

7. Eigenwaarden en eigenvectoren.

3.7.1. Zij $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding.

Definitie. Een getal $\lambda \in \mathbb{R}$ heet *eigenwaarde* van A als de verzameling

$$E_\lambda = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{x} = \lambda\underline{x}\}$$

niet uitsluitend uit $\underline{0}$ bestaat.

($\underline{0}$ voldoet voor *alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ aan $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$.)

Als λ eigenwaarde is, dan heet E_λ *eigenruimte bij* λ .

Een element $\underline{x} \neq \underline{0}$ van E_λ heet *eigenvector bij* λ .

We spreken ook van eigenwaarden en -vectoren van de matrix A (van A).

Stelling. E_λ is een lineaire ruimte.

0 is eigenwaarde dan en slechts dan als A singulier is, en dan is $E_0 = N$.

Bewijs.

- i) $E_\lambda = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}\}$ is de nulruimte van een lineaire afbeelding.
- ii) Er is een $\underline{x} \neq \underline{0}$ zodat $A\underline{x} = \underline{0}$, betekent zowel dat A singulier is, als ook dat 0 eigenwaarde is.
- iii) $E_0 = \{\underline{x} \mid A\underline{x} = 0 \cdot \underline{x}\} = \{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0}\} = N$. □

Voorbeelden.

1) Laat de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeven zijn door de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dan geldt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

De vector $(3,2,5)$ is dus eigenvector bij eigenwaarde 4.

2) Beschouw de projectie P van \mathbb{R}^3 op het vlak $(\underline{a}, \underline{x}) = 0$. $P\underline{a} = \underline{0}$, dus \underline{a} is eigenvector bij 0 en $E_0 = \langle \underline{a} \rangle$.

Als $(\underline{a}, \underline{x}) = 0$, dan is $P\underline{x} = \underline{x}$ en omgekeerd, zodat $E_1 = \{ \underline{x} \mid (\underline{a}, \underline{x}) = 0 \}$.

3) In een land trekt elk jaar $2\frac{1}{2}\%$ van de plattelandsbevolking naar de stad en vestigt zich 1% van de stadsbevolking op het platteland. In het jaar $t = 0$ woont 60% van de bevolking in de stad, 40% op het land. We nemen aan dat de bevolking van het platteland en de stad niet door andere oorzaken verandert; in het bijzonder dat de geboorten en sterften elkaar compenseren.

Laat s_t het gedeelte van de bevolking zijn dat op enig tijdstip in de stad woont en l_t het gedeelte van de bevolking dat dan op het land woont. Stel

$$\underline{x}_t = (s_t, l_t).$$

Als N de totale bevolking is, dan is de situatie één jaar later de volgende:

$$s_1 N = 0.99s_0 N + 0.025l_0 N \quad \text{woont in de stad,}$$

$$l_1 N = 0.01s_0 N + 0.975l_0 N \quad \text{woont op het land.}$$

Met

$$P = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.025 \\ 0.01 & 0.975 \end{bmatrix}$$

staat hier: $\underline{x}_1 = P\underline{x}_0$.

We hebben een stationaire toestand (s, l) als geldt $P(s, l) = (s, l)$, dus als (s, l) eigenvector is van P met eigenwaarde 1. We vinden met de nevencondities $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq l \leq 1$, $s + l = 1$ als oplossing $s = \frac{5}{7}$ en $l = \frac{2}{7}$.

4) De begrippen eigenvector en eigenwaarde zijn ook in andere vectorruimten dan \mathbb{R}^n van toepassing.

Zij V de ruimte van willekeurig vaak differentieerbare functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Zij $\mathcal{D} : V \rightarrow V$ gedefinieerd door

$$\mathcal{D}f = f'.$$

Eigenvectoren bij de eigenwaarde λ zijn nu de functies die voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$y' = \lambda y$$

zodat voor iedere $\lambda \in \mathbb{R}$ er een eigenruimte E_λ is die bestaat uit de functies $Ce^{\lambda x}$ (C willekeurig in \mathbb{R}).

3.7.2. De karakteristieke vergelijking.

Stelling. $\lambda \in \mathbb{R}$ is dan en slechts dan eigenwaarde van de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ als $\det(A - \lambda I) = 0$.

Bewijs. Voor een $\underline{x} \neq \underline{0}$ geldt $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ dan en slechts dan als $(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$, dan en slechts dan als $A - \lambda I$ singulier is, dan en slechts dan als $\det(A - \lambda I) = 0$. \square

Opmerking. De vergelijking $\det(A - \lambda I) = 0$ is een vergelijking van de n -de graad in λ , heet *karakteristieke vergelijking*, en heeft ten hoogste n reële wortels. Als n oneven is (bijvoorbeeld 3) heeft ze tenminste 1 reële wortel. Het polynoom $\det(A - \lambda I)$ heet *karakteristiek polynoom*.

Voorbeelden.

$$1) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda - 4)(\lambda + 1), \text{ de eigenwaarden zijn } 0, -1, 4.$$

E_0 is de oplossingsruimte van het stelsel vergelijkingen met representatie

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_0 = \langle (5, -2, -1) \rangle$$

E_{-1} is de oplossingsruimte bij

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{-1} = \langle (1, -1, 0) \rangle.$$

$E_4 = \langle (3, 2, 5) \rangle$, zie voorbeeld 1) in 3.7.1.

$$2) \quad A = \begin{bmatrix} -7 & -9 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -6 & 8 \end{bmatrix}, \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & -9 & 9 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -6 & -6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \\ = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1), \text{ de eigenwaarden zijn } -1 \text{ en } 2.$$

E_2 vinden we uit

$$\begin{bmatrix} -9 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \sim [1, 1, -1], E_2 = \{\underline{x} \mid x + y - z = 0\}.$$

E_{-1} volgt uit

$$\begin{bmatrix} -6 & -9 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{-1} = \langle (3, 0, 2) \rangle.$$

3) $W\underline{x} = \underline{w} \times \underline{x}$ met $\underline{w}, \underline{x} \in \mathbb{R}^3$ en $\underline{w} \neq \underline{0}$.

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \det[W - \lambda I] = \begin{vmatrix} -\lambda & -w_3 & w_2 \\ w_3 & -\lambda & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 - \lambda(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) = -\lambda(\lambda^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)$$

Er is één eigenwaarde, $\lambda = 0$; en $E_0 = \langle \underline{w} \rangle$.

8. Orthogonaliteit.

3.8.1. Als $\underline{r} \in \mathbb{R}^n$ en $\underline{r} \neq \underline{0}$ dan is het hypervlak $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\underline{r}, \underline{x}) = 0\}$ de verzameling van de vectoren die loodrecht op \underline{r} staan; het is een lineaire deelruimte van \mathbb{R}^n met dimensie $n - 1$.

Als $\{\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_m\}$ een eindige deelverzameling van \mathbb{R}^n is, dan is

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\underline{r}_1, \underline{x}) = (\underline{r}_2, \underline{x}) = \dots = (\underline{r}_m, \underline{x}) = 0\}$$

een lineaire deelruimte, tevens de verzameling van alle vectoren die loodrecht op $\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_m$ staan. De dimensie van deze deelruimte is volgens de dimensiestelling $n - \dim \langle \underline{r}_1, \dots, \underline{r}_m \rangle$.

Definitie. Als U een deelverzameling is van \mathbb{R}^n dan noemt men de verzameling

$$U^\perp = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \underline{u} \in U \ (\underline{u}, \underline{x}) = 0\}$$

het *orthoplement* van U .

Men kan uit deze definitie direct aflezen dat U^\perp een lineaire deelruimte is van \mathbb{R}^n . Uit een stelling in 3.3.7 volgt dat $\dim U^\perp \leq n$.

Stelling. $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}^\perp = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p \rangle^\perp$.

Bewijs. Vanzelfsprekend. □

Stelling. Als U een lineaire deelruimte is van \mathbb{R}^n , dan is

i) $\dim U + \dim U^\perp = n$

ii) $(U^\perp)^\perp = U$

iii) $U \cap U^\perp = \{\underline{0}\}$.

Bewijs. Zij $p := \dim U$ (zodat $0 \leq p \leq n$); als $p = 0$ (zodat $U = \{\underline{0}\}$) zijn alle beweringen triviaal; stel dus $p > 0$ en neem een basis $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$ van U .

Dan is $U^\perp = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}^\perp$ en U^\perp is de oplossingsruimte van het stelsel vergelijkingen $(\underline{a}_1, \underline{x}) = (\underline{a}_2, \underline{x}) = \dots = (\underline{a}_p, \underline{x}) = 0$, zodat $\dim U^\perp = n - p$.

Uit de definitie van orthoplement volgt $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p \in (U^\perp)^\perp$, bijgevolg is ook $U \subset (U^\perp)^\perp$. Volgens het voorgaande is $\dim (U^\perp)^\perp = n - (n - p) = p$, en volgens de tweede stelling in 3.3.7 is dan $U = (U^\perp)^\perp$. Tenslotte, als $\underline{x} \in U \cap U^\perp$ dan geldt $(\underline{x}, \underline{x}) = 0$, $\underline{x} = \underline{0} \in U \cap U^\perp$ zodat $U \cap U^\perp = \{\underline{0}\}$. □

Gevolg. Als voor de Grammatrix $A^T A$ van $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$ geldt $\det A^T A = 0$, dan is $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$ een afhankelijk stelsel.

Bewijs.

$$A^T A = \begin{bmatrix} (\underline{a}_1, \underline{a}_1) & (\underline{a}_1, \underline{a}_2) & \dots & (\underline{a}_1, \underline{a}_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\underline{a}_p, \underline{a}_1) & (\underline{a}_p, \underline{a}_2) & \dots & (\underline{a}_p, \underline{a}_p) \end{bmatrix}$$

Als $\det A^T A = 0$ dan zijn er getallen $\alpha_1 \dots \alpha_p$, niet alle 0, z6 dat voor alle $j = 1, \dots, p$ geldt

$$0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i (\underline{a}_i, \underline{a}_j) = \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i \underline{a}_i, \underline{a}_j \right).$$

Hier staat:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \underline{a}_i \in \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}^\perp = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p \rangle^\perp$$

terwijl klaarblijkelijk

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \underline{a}_i \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p \rangle.$$

Dan is

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \underline{a}_i = \underline{0},$$

en zijn $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p$ afhankelijk □

Opmerking. Zie 3.6.6, voorlaatste stelling.

3.8.2. Projectie.

Stelling. Als U een lineaire deelruimte is van \mathbb{R}^n , dan kan ieder element \underline{x} van \mathbb{R}^n op precies 66n manier geschreven worden als $\underline{x} = \underline{u} + \underline{v}$ met $\underline{u} \in U$, $\underline{v} \in U^\perp$; dan is

$$\|\underline{x}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2, \text{ en } \|\underline{x} - \underline{u}\|^2 < \|\underline{x} - \underline{w}\|^2$$

voor alle $\underline{w} \in U \setminus \{\underline{u}\}$.

Bewijs. Als $U = \{0\}$ zijn alle beweringen triviaal; stel dus $0 < p := \dim U$. Zij $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$ een basis voor U . We proberen $\underline{u} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \underline{a}_i$ te vinden z6 dat $\underline{x} - \underline{u} \in U^\perp$.

Dat betekent dat voor alle $j = 1, \dots, n$ moet gelden

$$\left(\underline{x} - \sum_{i=1}^p \alpha_i \underline{a}_i, \underline{a}_j\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^p (\underline{a}_i, \underline{a}_j) \alpha_i = (\underline{x}, \underline{a}_j).$$

De matrix van dit stelsel vergelijkingen met $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ als onbekenden is precies $A^T A$, en $\det A^T A \neq 0$; er is dan precies één oplossing, en die geeft \underline{u} .

We nemen nu $\underline{v} = \underline{x} - \underline{u}$.

Dan geldt voorts

$$(\underline{x}, \underline{x}) = (\underline{u} + \underline{v}, \underline{u} + \underline{v}) = (\underline{u}, \underline{u}) + 2(\underline{u}, \underline{v}) + (\underline{v}, \underline{v}) = (\underline{u}, \underline{u}) + (\underline{v}, \underline{v}).$$

Tenslotte, als $\underline{w} \in U$ dan is

$$\begin{aligned} (\underline{x} - \underline{w}, \underline{x} - \underline{w}) &= (\underline{u} - \underline{w} + \underline{v}, \underline{u} - \underline{w} + \underline{v}) = (\underline{u} - \underline{w}, \underline{u} - \underline{w}) + 2(\underline{u} - \underline{w}, \underline{v}) + (\underline{v}, \underline{v}) = \\ &= (\underline{u} - \underline{w}, \underline{u} - \underline{w}) + (\underline{v}, \underline{v}) \geq (\underline{v}, \underline{v}) \end{aligned}$$

(waarbij het =teken alléén geldt als $\underline{w} = \underline{u}$). □

Definitie. \underline{u} heet de *projectie* van \underline{x} op U , \underline{v} heet de projectie van \underline{x} op U^\perp .

We schrijven $\underline{u} = P_U \underline{x}$, of, als geen misverstand kan ontstaan, $\underline{u} = P \underline{x}$.

De naam "projectie" ligt hier voor de hand; de stelling zegt immers: van alle punten in U heeft $P \underline{x}$ de kleinste afstand tot \underline{x} , en de verbindingslijn van \underline{x} en $P \underline{x}$ staat loodrecht op U , vergelijk hoofdstuk 1, § 3.

Voorbeelden.

- 1) De projectie $P \underline{x}$ van \underline{x} op een rechte ℓ door 0 in \mathbb{R}^2 (of \mathbb{R}^3 , of \mathbb{R}^n).
- 2) De projectie $P \underline{x}$ van \underline{x} op een vlak V door 0 in \mathbb{R}^3 (of \mathbb{R}^n).

Stelling. Projectie P op een deelruimte U is een lineaire afbeelding.

Als λ eigenwaarde is van P , dan geldt $\lambda = 0$ of $\lambda = 1$.

Bewijs. Als $\underline{x} = P \underline{x} + \underline{v}$ en $\underline{y} = P \underline{y} + \underline{w}$ dan is $\underline{x} + \underline{y} = P \underline{x} + P \underline{y} + \underline{v} + \underline{w}$ met $P \underline{x} + P \underline{y} \in U$ en $\underline{v} + \underline{w} \in U^\perp$, zodat $P(\underline{x} + \underline{y}) = P \underline{x} + P \underline{y}$.

Als $\alpha \in \mathbb{R}$ dan is $\alpha \underline{x} = \alpha P\underline{x} + \alpha \underline{y}$ met $\alpha P\underline{x} \in U$ en $\alpha \underline{y} \in U^\perp$ zodat $P(\alpha \underline{x}) = \alpha P\underline{x}$.
Daarmee is aangetoond dat P lineair is.

Zij λ eigenwaarde van P . Dan is er een $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$ met $P\underline{x} = \lambda \underline{x}$. Wegens $P\underline{x} \in U$, $\underline{x} - P\underline{x} \in U^\perp$ geldt $0 = (\lambda \underline{x}, \underline{x} - \lambda \underline{x}) = \lambda(1 - \lambda)(\underline{x}, \underline{x})$, dus $\lambda = 0$ of $\lambda = 1$.

Als 0 eigenwaarde is van P , dan is $E_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid P\underline{x} = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{x} = \underline{y}$
met $\underline{y} \in U^\perp\} = U^\perp$.

Als 1 eigenwaarde is van P , dan is $E_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid P\underline{x} = \underline{x}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{x} = \underline{u}$
met $\underline{u} \in U\} = U$. □

Een van de oudste toepassingen van projectie is de *methode der kleinste kwadraten* (Legendre, 1806; Gauss, 1809), veel ouder dan de lineaire algebra; de beschrijving met lineaire algebra is afkomstig van Kolmogoroff (1946).
Veronderstel dat in \mathbb{R}^2 gegeven zijn een aantal punten $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$, voorstellende een aantal paren van waarnemingsuitkomsten. Men wenst een rechte $y = \lambda x + \mu$ te vinden, die "zo goed mogelijk" bij de gegeven punten "past".
Met "zo goed mogelijk passen" bedoelen we dat de som van de kwadraten van de verticale afwijkingen minimaal is, dat wil zeggen dat

$$[b_1 - (\lambda a_1 + \mu)]^2 + \dots + [b_n - (\lambda a_n + \mu)]^2$$

minimaal is.

Beschouw $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ en $\underline{e} = (1, 1, \dots, 1)$ als vectoren in \mathbb{R}^n .

Dan moet $\|\underline{b} - \lambda \underline{a} - \mu \underline{e}\|$ minimaal zijn. Dan moet $\lambda \underline{a} + \mu \underline{e}$ de projectie zijn van \underline{b} op $\langle \underline{a}, \underline{e} \rangle$, en dan is $(\underline{b} - \lambda \underline{a} - \mu \underline{e}, \underline{a}) = (\underline{b} - \lambda \underline{a} - \mu \underline{e}, \underline{e}) = 0$.

Dit geeft twee vergelijkingen met λ en μ als onbekenden:

$$\lambda(\underline{a}, \underline{a}) + \mu(\underline{e}, \underline{a}) = (\underline{a}, \underline{b})$$

$$\lambda(\underline{a}, \underline{e}) + \mu(\underline{e}, \underline{e}) = (\underline{e}, \underline{b}).$$

De matrix

$$\begin{bmatrix} (\underline{a}, \underline{a}) & (\underline{e}, \underline{a}) \\ (\underline{a}, \underline{e}) & (\underline{e}, \underline{e}) \end{bmatrix}$$

is de Grammatrix van $\{\underline{a}, \underline{e}\}$ en uit de aard van het probleem volgt dat \underline{a} en \underline{e} onafhankelijk zijn. Dus heeft het stelsel precies één oplossing. De rechte $y = \lambda x + \mu$ staat bekend als *regressierechte* van y naar x .

Voorbeeld 1. (Mendelejew, 1881). In 100 gram water kunnen bij de hierna aangegeven temperaturen de aangegeven hoeveelheden natriumnitraat worden opgelost:

0	4	10	15	21	29	36	51	68°
66.7	71.0	76.3	80.6	85.7	92.9	99.4	113.6	125.1

Op theoretische gronden moet de oplosbaarheid y (in eenheden N_aNO_3 per 100 gram water) van de temperatuur x afhangen volgens $y = \lambda x + \mu$.

Voor de regressierechte krijgen we dan de volgende berekening:

<u>a</u>	<u>b</u>	<u>e</u>	(<u>a</u> , <u>a</u>)	(<u>a</u> , <u>b</u>)
0	66.7	1	0	0
4	71.0	1	16	284.0
10	76.3	1	100	763.0
15	80.6	1	225	1209.0
21	85.7	1	441	1799.7
29	92.9	1	841	2694.1
36	99.4	1	1296	3578.4
51	113.6	1	2601	5793.6
68	125.1	1	4624	8506.8
<hr/>				
234	811.3	9	10144	24628.6

$$10144\lambda + 234\mu = 24628.6$$

$$234\lambda + 9\mu = 811.3$$

$\lambda = 0.87$, $\mu = 67.52$, en de regressierechte is

$$y = 0.87x + 67.52.$$

Er zijn allerlei variaties op dit thema, waaronder, bij wijze van voorbeeld, de volgende:

Laat in R^2 weer gegeven zijn een aantal punten

$$(a_1, b_1); (a_2, b_2); \dots; (a_n, b_n).$$

Men kan nu ook vragen naar de kwadratische functie $y = \lambda x^2 + \mu x + \nu$, die "zo goed mogelijk" bij deze punten past. Bij dit probleem van kwadratische regressie kan dezelfde methode worden toegepast. λ , μ , ν moeten zodanig zijn, dat de volgende som van kwadraten minimaal is

$$[b_1 - (\lambda a_1^2 + \mu a_1 + \nu)]^2 + \dots + [b_n - (\lambda a_n^2 + \mu a_n + \nu)]^2 .$$

Zij

$$\underline{b} = (b_1, \dots, b_n), \underline{aa} = (a_1^2, \dots, a_n^2), \underline{a} = (a_1, \dots, a_n), \underline{e} = (1, \dots, 1),$$

dan moet $\lambda \underline{aa} + \mu \underline{a} + \nu \underline{e}$ de projectie zijn van \underline{b} op $\langle \underline{aa}, \underline{a}, \underline{e} \rangle$ in \mathbb{R}^n , en de vector $\underline{b} - \lambda \underline{aa} - \mu \underline{a} - \nu \underline{e}$ is dan loodrecht op $\underline{aa}, \underline{a}$ en \underline{e} .

Dit geeft drie vergelijkingen voor λ, μ, ν en de *regressieparabool* is gevonden.

Opmerking. In plaats van de parabool $\lambda x^2 + \mu x + \nu$ kunnen ook andere functies worden genomen. Bijvoorbeeld kan men vragen naar de functie $\lambda \sin x + \mu \cos x + \nu e^x$ die zo goed mogelijk bij een aantal gegeven punten past.

Voorbeeld 2. Gevraagd de regressieparabool van de punten

$$(a_i, b_i) = (-3, 1.1); (-2, 1.3); (-1, 1.6); (0, 2.45); (1, 2.4); (2, 3.4); (3, 4.1).$$

Wij berekenen achtereenvolgens

\underline{a}	\underline{b}	\underline{e}	\underline{aa}	$(\underline{a}, \underline{a})$	$(\underline{a}, \underline{b})$	$(\underline{aa}, \underline{a})$	$(\underline{aa}, \underline{b})$	$(\underline{aa}, \underline{aa})$
-3	1.1	1	9	9	-3.3	-27	9.9	81
-2	1.3	1	4	4	-2.6	-8	5.2	16
-1	1.6	1	1	1	-1.6	-1	1.6	1
0	2.45	1	0	0	0	0	0	0
1	2.4	1	1	1	2.4	1	2.4	1
2	3.4	1	4	4	6.8	8	13.6	16
3	4.1	1	9	9	12.3	27	36.9	81
0	16.35	7	28	28	14.0	0	69.6	196 (+)

De eis, dat $\underline{b} - \lambda \underline{aa} - \mu \underline{a} - \nu \underline{e}$ loodrecht is op $\underline{aa}, \underline{a}, \underline{e}$ levert

$$\begin{aligned} 69.6 - 196\lambda - 28\nu &= 0 \\ 14 - 28\mu &= 0 \quad \text{dus } \mu = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{20}, \nu = 2.13 . \\ 16.35 - 28\lambda - 7\nu &= 0 \end{aligned}$$

De regressieparabool is dus $y = \frac{1}{20} x^2 + \frac{1}{2} x + 2.13$.

3.8.3. Orthonormale stelsels.

Het voorbeeld van Mendelejew (3.8.2) kan nog enigszins verfijnd worden.

We bepalen een $\underline{c} = \gamma \underline{a} + \delta \underline{e} \in \langle \underline{a}, \underline{e} \rangle$ zó dat $(\underline{c}, \underline{e}) = 0$; dan moeten γ en δ voldoen aan $\gamma(\underline{a}, \underline{e}) + \delta(\underline{e}, \underline{e}) = 0$, waartoe we nemen

$$\gamma = 1, \delta = -\frac{(\underline{a}, \underline{e})}{(\underline{e}, \underline{e})} = -\frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Het getal $\bar{a} = \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_n)$ heet het *gemiddelde* van de getallen a_1, \dots, a_n .
Dan is

$$\underline{c} = \underline{a} - \bar{a}\underline{e}, \text{ terwijl } \langle \underline{a}, \underline{e} \rangle = \langle \underline{c}, \underline{e} \rangle.$$

Verder is $\underline{b} - \lambda \underline{a} - \mu \underline{e} = \underline{b} - \lambda(\underline{c} + \bar{a}\underline{e}) - \mu \underline{e} = \underline{b} - \lambda \underline{c} - (\lambda \bar{a} + \mu)\underline{e}$ en deze moet loodrecht staan op \underline{c} en \underline{e} :

$$\lambda(\underline{c}, \underline{c}) = (\underline{b}, \underline{c}),$$

$$(\lambda \bar{a} + \mu)(\underline{e}, \underline{e}) = (\underline{b}, \underline{e}).$$

We krijgen de vergelijkingen zo in een vorm waaruit λ en μ direct kunnen worden afgelezen:

$$\lambda = (\underline{b}, \underline{c}) / (\underline{c}, \underline{c})$$

$$\mu = (\underline{b}, \underline{e}) / n - \lambda \bar{a} = \bar{b} - \lambda \bar{a}.$$

Deze modificatie heeft natuurlijk meer effect naarmate het aantal onbekende coëfficiënten groter is.

De berekening van voorbeeld 1 in 3.8.2 wordt nu:

\underline{a}	$\underline{c} = \underline{a} - \bar{a}\underline{e}$	\underline{b}	\underline{e}	$(\underline{c}, \underline{c})$	$(\underline{b}, \underline{c})$
0	-26	66.7	1	676	-1734.2
4	-22	71.0	1	484	-1562.0
10	-16	76.3	1	256	-1220.8
15	-11	80.6	1	121	-886.6
21	-5	85.7	1	25	-428.5
29	3	92.9	1	9	278.8
36	10	99.4	1	100	994.0
51	25	113.6	1	625	2840.0
68	42	125.1	1	1764	5254.2
234	0	811.3	9	4060	3534.8

(+)

$$\bar{a} = \frac{234}{9} = 26 \quad \bar{b} = \frac{811.3}{9} = 90.14$$

$$\lambda = 3534.8/4060 = 0.87$$

$$\mu = 90.14 - 0.87 \cdot 26 = 67.52.$$

De truc in bovenstaande redenering is dat de basis $\{\underline{a}, \underline{e}\}$ van $\langle \underline{a}, \underline{e} \rangle$ is vervangen door $\{\underline{c}, \underline{e}\}$ met $\langle \underline{c}, \underline{e} \rangle = 0$. Dit wordt nu generaliseerd.

Definitie. Een stelsel vectoren $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m\}$ in \mathbb{R}^n heet *orthonormaal* indien $\langle \underline{a}_i, \underline{a}_j \rangle = \delta_{ij}$; ze hebben dan alle de lengte 1 en zijn onderling orthogonaal.

Stelling. Een orthonormaal stelsel $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m\}$ in \mathbb{R}^n is onafhankelijk.

Bewijs. Als

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \underline{a}_i = \underline{0}$$

dan is voor alle $j = 1, \dots, m$

$$0 = \langle \underline{a}_j, \sum_{i=1}^m \alpha_i \underline{a}_i \rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle \underline{a}_j, \underline{a}_i \rangle = \alpha_j.$$

□

Gevolg. Een orthonormaal stelsel in \mathbb{R}^n dat uit n vectoren bestaat, is een basis.

Definitie. Een orthonormaal stelsel dat basis is, heet *orthonormale basis*.

Voorbeeld. De standaardbasis $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ in \mathbb{R}^n is een orthonormale basis.

Stelling. Als $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ een orthonormale basis is in \mathbb{R}^n , dan is $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m \rangle^\perp = \langle \underline{a}_{m+1}, \dots, \underline{a}_n \rangle$.

Bewijs. Uit de definities van orthonormale basis, orthoplement en opgespannen ruimte volgt

$$\underline{a}_{m+1}, \dots, \underline{a}_n \in \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m \rangle^\perp$$

zodat

$$\langle \underline{a}_{m+1}, \dots, \underline{a}_n \rangle \subset \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m \rangle^\perp.$$

Bovendien hebben deze ruimten allebei de dimensie $n - m$; dus

$$\langle \underline{a}_{m+1}, \dots, \underline{a}_n \rangle = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m \rangle^\perp. \quad \square$$

Stelling. Iedere lineaire deelruimte U van \mathbb{R}^n (behalve $\{0\}$) heeft een orthonormale basis.

Bewijs. Kies $\underline{b}_1 \in U \setminus \{0\}$ en $\underline{a}_1 := \underline{b}_1 / \|\underline{b}_1\|$, zodat $\|\underline{a}_1\| = 1$; als $U = \langle \underline{a}_1 \rangle$, dan zijn we klaar; zo niet, dan is er een $\underline{b}_2 \in U \setminus \langle \underline{a}_1 \rangle$.

De projectie van \underline{b}_2 op $\langle \underline{a}_1 \rangle$ is $(\underline{b}_2, \underline{a}_1)\underline{a}_1$ (ga dit na) en we nemen nu

$$\underline{a}_2 = \frac{\underline{b}_2 - (\underline{b}_2, \underline{a}_1)\underline{a}_1}{\|\underline{b}_2 - (\underline{b}_2, \underline{a}_1)\underline{a}_1\|}$$

Dan is $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$ een orthonormaal stelsel en

$$\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \rangle = \langle \underline{a}_1, \underline{b}_2 \rangle \subset U.$$

Als $U = \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \rangle$, dan zijn we klaar; zo niet, dan is er een $\underline{b}_3 \in U \setminus \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \rangle$.

De projectie van \underline{b}_3 op $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \rangle$ is $(\underline{b}_3, \underline{a}_1)\underline{a}_1 + (\underline{b}_3, \underline{a}_2)\underline{a}_2$ (ga dit na) en we nemen

$$\underline{a}_3 = \frac{\underline{b}_3 - (\underline{b}_3, \underline{a}_1)\underline{a}_1 - (\underline{b}_3, \underline{a}_2)\underline{a}_2}{\|\underline{b}_3 - (\underline{b}_3, \underline{a}_1)\underline{a}_1 - (\underline{b}_3, \underline{a}_2)\underline{a}_2\|}$$

Dan is $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ een orthonormaal stelsel en

$$\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 \rangle = \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{b}_3 \rangle \subset U.$$

Zo gaan we door tot het orthonormale stelsel $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m\}$ met

$$\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m \rangle = U. \quad \square$$

Als we de voorgaande redenering toepassen op een basis $\{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_p\}$ van U dan wordt deze ingewisseld voor een orthonormale basis $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p\}$ van U . In dat geval staat de constructie bekend als het *orthonormalisatieproces van Gram-Schmidt*, (E. Schmidt, 1876-1959). In het bijzonder kan men $U = \mathbb{R}^n$ nemen.

Eén van de opmerkingen uit het bewijs van de stelling vermelden wij nog apart:

Als $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m\}$ orthonormaal is dan is

$$P_{\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m \rangle} \underline{x} = \sum_{i=1}^m (\underline{a}_i, \underline{x}) \underline{a}_i = \sum_{i=1}^m P_{\langle \underline{a}_i \rangle} \underline{x}.$$

Voorbeelden.

1) Bepaal een orthonormale basis voor de lineaire deelruimte

$$U = \{\underline{x} \mid x + y - 3z = 0\} \text{ in } \mathbb{R}^3.$$

Neem $\underline{b}_1 = (1, -1, 0)$, $\underline{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$.

Aangezien $\dim U = 2$ is $U \neq \langle \underline{a}_1 \rangle$; voor $\underline{b}_2 = (1, 2, 1)$ geldt $\underline{b}_2 \in U \setminus \langle \underline{a}_1 \rangle$;

de projectie van \underline{b}_2 op $\langle \underline{a}_1 \rangle$ is $(\underline{a}_1, \underline{b}_2) \underline{a}_1 = \frac{1}{2}(-1, 1, 0)$

en

$$\underline{a}_2 = \frac{(1, 2, 1) - \frac{1}{2}(-1, 1, 0)}{\sqrt{\frac{11}{2}}} = \frac{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1)}{\sqrt{\frac{11}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{22}} (3, 3, 2).$$

$\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$ is een orthonormale basis voor U .

2) Bepaal een orthonormale basis voor de door $\underline{a} = (1, 1, 1, 1)$, $\underline{b} = (1, -1, 2, 0)$, $\underline{c} = (5, 0, 1, -4)$ in \mathbb{R}^4 opgespannen deelruimte.

Neem $\underline{a}_1 = \underline{a} / \|\underline{a}\| = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$.

Dan is $P_{\langle \underline{a}_1 \rangle} \underline{b} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$ en $\underline{b} - P_{\langle \underline{a}_1 \rangle} \underline{b} = \frac{1}{2}(1, -3, 3, -1)$ met $\|\underline{b} - P_{\langle \underline{a}_1 \rangle} \underline{b}\| = \sqrt{5}$

zodat $\underline{a}_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}}(1, -3, 3, -1)$. Nu is

$$P_{\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \rangle} \underline{c} = P_{\langle \underline{a}_1 \rangle} \underline{c} + P_{\langle \underline{a}_2 \rangle} \underline{c} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) + \frac{3}{5}(1, -3, 3, -1) =$$

$$= \frac{1}{10}(11, -13, 23, -1)$$

en

$$\underline{c} - P_{\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \rangle} \underline{c} = \frac{13}{10}(3, 1, -1, -3),$$

$$\| \underline{c} - P_{\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \rangle} \underline{c} \| = \frac{13}{5} \sqrt{5}, \quad \underline{a}_3 = \frac{1}{2\sqrt{5}} (3, 1, -1, -3).$$

3) Neem $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$, en voor het gemak bovendien $\|\underline{a}\| = 1$.

Bepaal de matrix $P_{\langle \underline{a} \rangle}$.

Omdat $P_{\langle \underline{a} \rangle} \underline{x} = (\underline{a}, \underline{x}) \underline{a}$ is $P_{\langle \underline{a} \rangle} \underline{e}_i = (\underline{a}, \underline{e}_i) \underline{a} = a_i \underline{a}$. Dus

$$P_{\langle \underline{a} \rangle} = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{bmatrix} = \underline{a} \underline{a}^T.$$

4) Neem $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3$, met $\|\underline{a}\| = \|\underline{b}\| = 1$, $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$.

Bepaal $P_{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}$.

$P_{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle} \underline{x} = P_{\langle \underline{a} \rangle} \underline{x} + P_{\langle \underline{b} \rangle} \underline{x}$ en zodoende is $P_{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle} = P_{\langle \underline{a} \rangle} + P_{\langle \underline{b} \rangle} =$

$$= \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_1 b_2 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ b_1 b_3 & b_2 b_3 & b_3^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{a} \underline{a}^T + \underline{b} \underline{b}^T.$$

Aan deze uitdrukking kan men al heel gemakkelijk zien dat \underline{a} en \underline{b} eigenvectoren zijn:

$$P_{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle} \underline{a} = (\underline{a} \underline{a}^T) \underline{a} + (\underline{b} \underline{b}^T) \underline{a} = \underline{a} (\underline{a}^T \underline{a}) + \underline{b} (\underline{b}^T \underline{a}) = \underline{a} (\underline{a}, \underline{a}) + \underline{b} (\underline{a}, \underline{b}) = \underline{a},$$

en evenzo

$$P_{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle} \underline{b} = \underline{b}.$$

9. Orthogonale afbeeldingen.

3.9.1. Definitie. Een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heet *orthogonaal* indien voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ geldt $\|A\underline{x}\| = \|\underline{x}\|$.

Draaiing om $\underline{0}$ in \mathbb{R}^2 , om een lijn door $\underline{0}$ in \mathbb{R}^3 , spiegeling in een rechte door $\underline{0}$ in \mathbb{R}^2 , in een vlak door $\underline{0}$ in \mathbb{R}^3 , zijn orthogonale afbeeldingen.

Men ziet direct dat een orthogonale lineaire afbeelding regulier is: als $\|A\underline{x}\| = 0$ dan is $\|\underline{x}\| = 0$ zodat $N = \{\underline{0}\}$.

A heeft een inverse A^{-1} , en deze is ook orthogonaal: als $A\underline{x} = \underline{y}$ dan is $A^{-1}\underline{y} = \underline{x}$ en $\|A^{-1}\underline{y}\| = \|\underline{x}\| = \|A\underline{x}\| = \|\underline{y}\|$.

Men ziet direct dat uit A orthogonaal, B orthogonaal, volgt dat $A \circ B$ orthogonaal is.

Stelling. De volgende uitspraken zijn equivalent:

- i) A orthogonaal
- ii) voor alle \underline{x} en \underline{y} geldt $(A\underline{x}, A\underline{y}) = (\underline{x}, \underline{y})$.
- iii) De kolommen van de matrix A vormen een orthonormaal stelsel.
- iv) $A^T A = I$ (zodat $A^{-1} = A^T$).
- v) De rijen van A vormen een orthonormaal stelsel.

Bewijs. i) \Rightarrow ii) Voor alle \underline{x} en \underline{y} geldt

$$\|A\underline{x} + A\underline{y}\|^2 = \|A(\underline{x} + \underline{y})\|^2 = \|\underline{x} + \underline{y}\|^2,$$

$$(A\underline{x}, A\underline{x}) + 2(A\underline{x}, A\underline{y}) + (A\underline{y}, A\underline{y}) = (\underline{x}, \underline{x}) + 2(\underline{x}, \underline{y}) + (\underline{y}, \underline{y})$$

en uit het gegeven volgt dan

$$(A\underline{x}, A\underline{y}) = (\underline{x}, \underline{y}).$$

ii) \Rightarrow iii). Voor standaardbasisvectoren $\underline{e}_i, \underline{e}_j$ geldt

$$(A\underline{e}_i, A\underline{e}_j) = (\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \delta_{ij},$$

en $A\underline{e}_i, A\underline{e}_j$ hebben als kolomrepresentaties de kolommen \underline{k}_i en \underline{k}_j van A.

iii) \Leftrightarrow iv). De kolommen van A zijn de rijen van A^T , zodat uit $(\underline{k}_i, \underline{k}_j) = \delta_{ij}$ volgt $A^T A = I$; volgens 3.6.1 is A^T dan de inverse van A . En omgekeerd.

iv) \Leftrightarrow v). Als A de inverse is van A^T dan is $AA^T = I$ zodat de rijen van A een orthonormaal stelsel vormen. En omgekeerd.

iii) \Rightarrow i). Voor

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{e}_i$$

geldt

$$A\underline{x} = \sum_{i=1}^n x_i A\underline{e}_i = \sum_{i=1}^n x_i \underline{k}_i$$

en

$$\begin{aligned} (A\underline{x}, A\underline{x}) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \underline{k}_i, \sum_{j=1}^n x_j \underline{k}_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j (\underline{k}_i, \underline{k}_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i^2 = (\underline{x}, \underline{x}). \end{aligned} \quad \square$$

De matrix van een orthogonale afbeelding heet ook *orthogonaal*. Een orthogonale matrix A wordt dus gekarakteriseerd door een orthonormaal stelsel kolommen (rijen) en door $A^T = A^{-1}$.

3.9.2. Eigenschappen van orthogonale afbeeldingen en matrices.

i) Als $\{\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_m\}$ orthonormaal is, dan is $\{A\underline{k}_1, \dots, A\underline{k}_m\}$ orthonormaal.

ii) $\det A = \pm 1$. Want $1 = \det I = \det A^T A = \det A^T \det A = (\det A)^2$.

Als $\det A = 1$ dan heet A *direct orthogonaal*.

Als $\det A = -1$ dan heet A *gespiegeld orthogonaal*.

iii) Als λ eigenwaarde is, dan is $\lambda = \pm 1$.

Immers, uit $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ volgt $\|\underline{x}\| = \|A\underline{x}\| = |\lambda| \|\underline{x}\|$.

iv) Als 1 en -1 eigenwaarden zijn, dan zijn E_1 en E_{-1} orthogonaal. Want uit $A\underline{x} = \underline{x}$ en $A\underline{y} = -\underline{y}$ volgt

$$(\underline{x}, \underline{y}) = (A\underline{x}, -A\underline{y}) = - (A\underline{x}, A\underline{y}) = - (\underline{x}, \underline{y}).$$

Let op: Er staat niet $E_1 = E_{-1}^\perp$ maar $E_1 \subset E_{-1}^\perp$ en $E_{-1} \subset E_1^\perp$.

v) Definitie. Een lineaire deelruimte U van \mathbb{R}^n heet *invariant onder de lineaire afbeelding* $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, als $A(U) \subset U$.

Stelling. Als A orthogonaal is en U invariant onder A dan is $A(U) = U$, U invariant onder A^\perp en U^\perp invariant onder A .

Bewijs. Om te bewijzen dat $A(U) = U$ is het voldoende om te laten zien dat $\dim A(U) = \dim U$, en dit volgt uit de eerste stelling van 3.4.4, toegepast op een basis van U .

Omdat $A(U) = U$ is ook $U \subset A^\perp(U)$; omdat A een bijectie is, is $\dim U = \dim A^\perp(U)$ en $U = A^\perp(U)$. (Pas weer de eerste stelling van 3.4.4 toe.)

Met andere woorden: U is invariant onder A^\perp .

Tenslotte, neem $\underline{w} \in U^\perp$, dan is $0 = (\underline{w}, \underline{u}) = (A\underline{w}, A\underline{u})$ voor alle $\underline{u} \in U$ en dus ook $(A\underline{w}, \underline{u}) = 0$ voor alle $\underline{u} \in U$.

Dit betekent dat $A\underline{w} \in U^\perp$ en dat U^\perp invariant is onder A . □

Voorbeelden.

- 1) Invariante deelruimten kunnen ook bij niet-orthogonale afbeeldingen voorkomen: Iedere eigenruimte is invariant (maar niet omgekeerd).
- 2) Zij \mathcal{D}_φ draaiing over een hoek φ om de z -as in \mathbb{R}^3 . Dan is $\langle \underline{e}_3 \rangle$ zowel een invariante deelruimte als tevens E_1 (als $\varphi \neq 2\pi$), en $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle$ is invariant maar geen eigenruimte (tenzij $\varphi = \pi$).
- 3) Zij $\mathcal{W}\underline{x} = \underline{w} \times \underline{x}$ in \mathbb{R}^3 . $\langle \underline{w} \rangle$ is invariant onder \mathcal{W} , en is tevens E_0 . Het vlak $(\underline{w}, \underline{x}) = 0$ is invariant onder \mathcal{W} , maar geen eigenruimte.
- 4) Zij S spiegeling ten opzichte van het vlak $V: (\underline{a}, \underline{x}) = 0$ in \mathbb{R}^3 . $V = E_1$ is invariant, $\langle \underline{a} \rangle = E_{-1}$ is invariant en zij zijn elkaars orthocomplement: $E_{-1} = E_1^\perp$.
- 5) Beschouw

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

als matrix van een afbeelding $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. A is orthogonaal, $\det A = -1$.
Verder is $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle$ invariant maar geen eigenruimte, $\langle \underline{e}_3 \rangle = E_1$ is invariant,
 $\langle \underline{e}_4 \rangle = E_{-1}$ is invariant;

$$E_1 \subset E_{-1}^\perp = \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \rangle \text{ en } E_{-1} \subset E_1^\perp = \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_4 \rangle.$$

3.9.3. Orthogonale afbeeldingen in \mathbb{R}^2 .

Zij $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ orthogonaal met $\Delta = \det A = \pm 1$.

Stelling. Als $\Delta = 1$, A direct orthogonaal, dan is A een draaiing om $\underline{0}$; als
 $\Delta = -1$, A gespiegeld orthogonaal, dan is A een spiegeling in een rechte
door $\underline{0}$.

Bewijs. Als $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ dan geldt

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ad - bc = \Delta \end{array} \right\}$$

Bij a en b is één $\varphi \in [0, 2\pi)$ zodat $a = \cos \varphi$, $b = \sin \varphi$.

uit $\left. \begin{array}{l} c \cos \varphi + d \sin \varphi = 0 \\ -c \sin \varphi + d \cos \varphi = \Delta \end{array} \right\}$ volgt $c = -\Delta \sin \varphi$, $d = \Delta \cos \varphi$.

zodat

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\Delta \sin \varphi \\ \sin \varphi & \Delta \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Als $\Delta = 1$ dan is dit de matrix van de draaiing \mathcal{D}_φ over een hoek φ om $\underline{0}$.

Als $\Delta = -1$ is

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix}, \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \cos \varphi - \lambda & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

1 en -1 zijn eigenwaarden,

voor $\varphi \neq 0$ geldt

$$E_1 = (\cos \varphi - 1, \sin \varphi)^\perp = (-2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, 2 \sin \frac{\varphi}{2}, 2 \cos \frac{\varphi}{2})^\perp = (-\sin \frac{\varphi}{2}, \cos \frac{\varphi}{2})^\perp = \\ = \langle (\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2}) \rangle ,$$

$$E_{-1} = \langle (-\sin \frac{\varphi}{2}, \cos \frac{\varphi}{2}) \rangle ; \text{ het blijkt ook voor } \varphi = 0 \text{ te gelden.}$$

A is een spiegeling in de rechte $\underline{x} = \lambda (\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2})$. □

Als men in \mathbb{R}^2 draaiingen om $\underline{0}$ en spiegelingen in lijnen door $\underline{0}$ na elkaar uitvoert dan is de samengestelde afbeelding een draaiing (als het aantal spiegelingen even is) of een spiegeling (als dat aantal oneven is). In het bijzonder is het product van twee spiegelingen een draaiing.

3.9.4. Orthogonale afbeeldingen in \mathbb{R}^3 .

In \mathbb{R}^3 kennen we de draaiing om een rechte door $\underline{0}$ en de spiegeling in een vlak door $\underline{0}$. We gaan na of dit de enige mogelijkheden zijn.

Zij $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ orthogonaal met matrix A, $\Delta = \det A = \pm 1$.

Uit $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_1 \lambda + p_0 = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$ volgt voor de wortels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ van de karakteristieke vergelijking $\Delta = \det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$.

Dan is ten minste één der wortels Δ . (want: óf λ_2 en λ_3 zijn verschillend reëel, en dan +1 en -1, óf ze zijn geconjugeerd complex óf gelijk en reëel, en hebben dan een positief product).

Zij \underline{e}_3 eigenvector bij Δ , dan is

$$A = \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ p & q & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix}$$

Als $\Delta = 1$ dan is dit een draaiing over een hoek φ om de z-as.

Als $\Delta = -1$ dan is

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1)$$

met drie reële nulwaarden *alleen* indien $\varphi = k\pi$; als $\varphi = 0$ dan is $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ en is A een spiegeling; als $\varphi = \pi$ dan is $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ en dan is $A = -I$.

Indien $\varphi \neq k\pi$ dan is

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

het product van een draaiing \mathcal{D} over een hoek φ om de z-as en een spiegeling S in het vlak $z = 0$.

Zulk een lineaire afbeelding noemt men *draaispiegeling*.

Conclusie. Als A direct orthogonaal is dan is A een draaiing, en als A gespiegeld orthogonaal is dan is A een draaispiegeling, met als bijzonder geval een spiegeling.

We zullen ook nog laten zien hoe men de orthogonale afbeeldingen kan classificeren met behulp van E_1 en E_{-1} :

- 1) $\dim E_1 = 3$, A is de *identieke afbeelding* I .
- 2) $\dim E_1 = 2$; het vlak E_1 is invariant onder A , zo ook de lijn E_1^\perp , die dan noodzakelijk eigenruimte is, en dan noodzakelijk bij -1 . A is de *spiegeling* in E_1 .
- 3) $\dim E_1 = 1$; de lijn E_1 is invariant, en dan ook het vlak E_1^\perp . A werkt op E_1^\perp als een draaiing of als een spiegeling; in het laatste geval zou E_1^\perp een eigenvector met eigenwaarde 1 bevatten, hetgeen onmogelijk is. Dus is A een *draaiing* om E_1 .
- 4) Als 1 geen eigenwaarde is dan is -1 zeker wél eigenwaarde en zijn er voor E_{-1} nog de volgende gevallen:
 - 4 a) $\dim E_{-1} = 3$; dan is $A = -I$, een *draaispiegeling* waarbij iedere lijn door Q als as genomen kan worden voor de draaiing over een hoek π .
 - 4 b) $\dim E_{-1} = 2$; dan zou E_{-1}^\perp een invariante lijn moeten zijn, en dat zou betekenen dat ze hetzij tot E_1 hetzij tot E_{-1} moet behoren, hetgeen uitgesloten is.
 - 4 c) $\dim E_{-1} = 1$; dan is E_{-1}^\perp een invariant vlak waarop A als een draaiing werkt: A is een *draaispiegeling* met E_{-1} als as van de draaiing en E_{-1}^\perp als vlak van de spiegeling.

Voorbeelden.

1) Zij

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} .$$

A is orthogonaal, omdat de kolommen orthonormaal zijn. $\det A = 1$, zodat A een draaiing voorstelt.

De draaiingsas is E_1 (anders zou $A = I$ zijn) en die vinden we uit het stelsel vergelijkingen met representatie

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_1 = \langle (1,1,0) \rangle .$$

De draaiingshoek vinden we door een vector in E_1^\perp te nemen, bijvoorbeeld \underline{e}_3 , en de hoek φ tussen \underline{e}_3 en $A\underline{e}_3$ uit te rekenen: $\varphi = \arccos \frac{1}{3}$.

De draairichting vinden we met behulp van

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{4}{3} ;$$

gezien in de richting $(1,1,0)$ draait \underline{e}_3 naar links, of: $(1,1,0)$, \underline{e}_3 en $A\underline{e}_3$ zijn links geöriënteerd.

2) We bepalen ook, omgekeerd, de matrix van een draaiing \mathcal{D} in \mathbb{R}^3 . Zij $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$, met $\|\underline{w}\| = 1$, de richting van de draaiingsas en zij α de draaiingshoek. De draaiing is, gezien in de richting van \underline{w} , rechtson.

De projectie van een vector \underline{x} op $\langle \underline{w} \rangle$ is $(\underline{x}, \underline{w})\underline{w}$ en verandert door de draaiing niet.

De projectie van \underline{x} op het vlak $\langle \underline{w} \rangle^\perp$ is $\underline{x} - (\underline{x}, \underline{w})\underline{w}$. We nemen nu in $\langle \underline{w} \rangle^\perp$ een vector die loodrecht op deze projectie én loodrecht op \underline{w} staat, namelijk hun vectorproduct.

$$\underline{w} \times (\underline{x} - (\underline{x}, \underline{w})\underline{w}) = \underline{w} \times \underline{x} ,$$

die bovendien even lang is als $\underline{x} - (\underline{x}, \underline{w})\underline{w}$. Dan is

$$D(\underline{x} - (\underline{x}, \underline{w})\underline{w}) = (\underline{x} - (\underline{x}, \underline{w})\underline{w}) \cos \alpha + \underline{w} \times \underline{x} \sin \alpha, \text{ en omdat } D\underline{w} = \underline{w},$$

$$D\underline{x} = \underline{x} \cos \alpha + (\underline{x}, \underline{w})\underline{w}(1 - \cos \alpha) + \underline{w} \times \underline{x} \sin \alpha .$$

Met reeds bekende afbeeldingen I , $P_{\langle \underline{w} \rangle}$ en W is dan

$$D = I \cos \alpha + P_{\langle \underline{w} \rangle} (1 - \cos \alpha) + W \sin \alpha ,$$

met matrix

$$D = \cos \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos \alpha) \begin{bmatrix} w_1^2 & w_1 w_2 & w_1 w_3 \\ w_1 w_2 & w_2^2 & w_2 w_3 \\ w_1 w_3 & w_2 w_3 & w_3^2 \end{bmatrix} + \sin \alpha \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Interessant aan deze matrix is het zogenaamde *spoor*, dat is de som $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ van de coëfficiënten in de hoofddiagonaal:

$$\text{Sp}(D) = 3 \cos \alpha + (1 - \cos \alpha)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) = 1 + 2 \cos \alpha .$$

Hieruit volgt: voor een direct orthogonale 3×3 -matrix D is de draaiingshoek

$$\alpha = \arccos \frac{\text{sp}(D) - 1}{2} .$$

3.9.5. Orthogonale afbeeldingen in \mathbb{R}^n .

Bij de analyse van een orthogonale afbeelding A in \mathbb{R}^2 of \mathbb{R}^3 hebben we, kort samengevat, gevonden: er zijn eigenruimten bij de eigenwaarde 1 en bij de eigenwaarde -1, en er zijn invariante deelruimten met dimensie 2 waarop A werkt als een draaiing (zij het niet allemaal tegelijk). We zullen zien dat deze situatie voor een orthogonale $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ook geldt. Daarbij hebben we de volgende, voor *alle* lineaire afbeeldingen geldende stelling nodig:

Stelling. Zij A een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. A heeft tenminste één invariante deelruimte met dimensie 1 of 2.

Bewijs. De lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vormen een vectorruimte met dimensie n^2 . In de rij $I, A, A^2, A^3 \dots$ is er een kleinste getal k zō dat I, A, A^2, \dots, A^k afhankelijk zijn (met $k \leq n^2$):

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_k A^k = 0, \quad \alpha_k \neq 0.$$

Het is geen beperking te onderstellen dat $\alpha_k = 1$:

$$A^k + \alpha_{k-1} A^{k-1} + \dots + \alpha_0 I = 0.$$

Beschouw de vergelijking

$$z^k + \alpha_{k-1} z^{k-1} + \dots + \alpha_0 = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ze heeft tenminste één wortel, $\zeta \in \mathbb{C}$.

Als $\zeta \in \mathbb{R}$ dan is er een polynoom g met graad $k-1$, zo dat

$$z^k + \alpha_{k-1} z^{k-1} + \dots + \alpha_0 = (z - \zeta)g(z),$$

en dan is ook

$$(A - \zeta I)g(A) = 0.$$

$A - \zeta I$ kan niet regulier zijn, omdat dan zou gelden

$$g(A) = 0,$$

in strijd met de onderstelling dat I, A, \dots, A^{k-1} onafhankelijk zijn. Dus is $A - \zeta I$ singulier, dat wil zeggen ζ is eigenwaarde, en iedere eendimensionale deelruimte van E_ζ is invariant.

Stel nu dat $\zeta \notin \mathbb{R}$, dan is ook $\bar{\zeta}$ een wortel en

$$z^k + \alpha_{k-1} z^{k-1} + \dots + \alpha_0 = (z - \zeta)(z - \bar{\zeta})h(z)$$

met een $h(z)$ van de graad $k-2$, zodat

$$(A^2 - (\zeta + \bar{\zeta})A + \zeta\bar{\zeta}I)h(A) = 0.$$

Ook hier is $A^2 - (\zeta + \bar{\zeta})A + \zeta\bar{\zeta}I$ singulier.

Dan is er een $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ met $\underline{x} \neq \underline{0}$ en $A^2\underline{x} = (\zeta + \bar{\zeta})A\underline{x} - \zeta\bar{\zeta}\underline{x}$. Nu is $\langle \underline{x}, A\underline{x} \rangle$ invariant en met dimensie 1 of 2. □

Zij nu weer A bovendien orthogonaal. Als A eigenwaarden 1 of -1 heeft nemen we voor V de door de eigenvectoren opgespannen deelruimte, anders $\{0\}$; A werkt dan op V^\perp weer als een orthogonale afbeelding; er is in V^\perp een invariante deelruimte W , en noodzakelijk is $\dim W = 2$, waarop A werkt als een draaiing.

Zij nu V_1 de door V en W opgespannen deelruimte.

In V_1^\perp is wederom een invariante deelruimte W_1 waarop A werkt als een draaiing. Enzovoort.

Conclusie. Wat het gedrag van A in \mathbb{R}^n betreft, kan men in \mathbb{R}^n een aantal, onderling orthogonale, deelruimten vinden; namelijk al of niet E_1 en E_{-1} , en overigens een aantal 2-dimensionale ruimten waarop A als een draaiing werkt.

Voorbeeld.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

werkt op $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle$ in \mathbb{R}^4 als een draaiing, over $\frac{\pi}{4}$, en op $\langle \underline{e}_3, \underline{e}_4 \rangle$ als een spiegeling, ten opzichte van de rechte $\langle \underline{e}_3(1 + \sqrt{2}) + \underline{e}_4 \rangle$.

3.9.6. Scheefsymmetrische afbeeldingen.

Definitie. Een $n \times n$ -matrix A heet *scheefsymmetrisch* indien $A + A^T = 0$.

A is scheefsymmetrisch als voor de elementen a_{ij} van A geldt $a_{ij} = -a_{ji}$; voor de elementen a_{ii} van de hoofddiagonaal is dan $a_{ii} = 0$; de matrix heeft de gedaante

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Voorbeeld. De afbeelding $W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ met $W\underline{x} = \underline{w} \times \underline{x}$ (zie 3.4.3, 3.5.3, 3.7.2) heeft als matrix

$$W = \begin{vmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{vmatrix}$$

die scheefsymmetrisch is.

We weten dat voor W geldt: $(W\underline{x}, \underline{x}) = 0$ voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$.

Stelling. Een matrix A is dan en slechts dan scheefsymmetrisch als voor de bijbehorende afbeelding A geldt

$$(A\underline{x}, \underline{x}) = 0 \quad \text{voor alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Bewijs. Neem eerst A scheefsymmetrisch.

We schrijven het inwendig product $(\underline{x}, \underline{y})$ van \underline{x} en \underline{y} als matrixproducten $\underline{x}^T \underline{y}$ en $\underline{y}^T \underline{x}$.

$$(A\underline{x}, \underline{x}) = (A\underline{x})^T \underline{x} = \underline{x}^T A^T \underline{x},$$

$$(A\underline{x}, \underline{x}) = \underline{x}^T (A\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x},$$

$$2(A\underline{x}, \underline{x}) = \underline{x}^T (A^T + A) \underline{x} = 0.$$

De voorwaarde is dus nodig.

Stel nu dat $(A\underline{x}, \underline{x}) = 0$ voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Dan is ook $(A(\underline{x} + \underline{y}), \underline{x} + \underline{y}) = 0$ voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ en $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} 0 &= (A\underline{x}, \underline{x}) + (A\underline{x}, \underline{y}) + (A\underline{y}, \underline{x}) + (A\underline{y}, \underline{y}) = 0 + \underline{x}^T A^T \underline{y} + \underline{x}^T A \underline{y} + 0 = \underline{x}^T (A^T + A) \underline{y} \\ &= (\underline{x}, (A^T + A) \underline{y}) \quad \text{voor alle } \underline{x} \text{ en } \underline{y}. \end{aligned}$$

$(A^T + A) \underline{y}$ ligt in het orthoplement van iedere $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, dat is in het orthoplement van \mathbb{R}^n , dat is in $\{0\}$, voor iedere $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$; of ook

$$(A^T + A) \underline{y} = \underline{0} \quad \text{voor alle } \underline{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Dus $A^T + A = 0$. □

Gevolg. Als de scheefsymmetrische A een eigenwaarde heeft dan is het 0.

Immers, uit $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ en $(A\underline{x}, \underline{x}) = 0$ volgt $\lambda = \lambda(\underline{x}, \underline{x}) = 0$.

Voorbeelden.

1) Alle scheefsymmetrische $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zijn van het type

$$\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix},$$

dat is: een draaiing over $\frac{\pi}{2}$ gevolgd door een vermenigvuldiging met a .

2) Alle scheefsymmetrische $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zijn van het type

$$\begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix},$$

dat is: vectorproduct met de vector $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

3) Zij $\underline{x}(t)$ een vector in \mathbb{R}^3 die van t afhangt, zó dat $\|\underline{x}(t)\| = r$ voor alle t , met een vaste $r \in \mathbb{R}$.

Het punt $\underline{x}(t)$ beweegt op een bol met straal r en middelpunt $\underline{0}$. Dit doet zich voor indien een lichaam beweegt, zó dat er (tenminste) één vast punt $\underline{0}$ is.

Uit $(\underline{x}, \underline{x}) = r^2$ volgt door differentiëren naar t voor de snelheid $\dot{\underline{x}}$

$$(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) = 0$$

Voor een om een vast punt bewegend lichaam geldt dit voor alle punten.

De afbeelding $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $B\underline{x} = \dot{\underline{x}}$ (die blijkbaar lineair is) is dus scheefsymmetrisch, en er is op ieder ogenblik t een vector $\underline{w}(t)$ zó dat $\dot{\underline{x}} = \underline{w}(t) \times \underline{x}(t)$.

$\underline{w}(t)$ heet de *momentane rotatievector* van de beweging.

Hoofdstuk 4. Meervoudige integralen

1. Integratiegebieden en infinitesimale elementen

4.1.1. We spreken in het volgende over het begrip *k-dimensionaal gebied* in \mathbb{R}^n , waarbij $1 \leq k \leq n$. Dit begrip zullen we niet algemeen definiëren. We volstaan met het geven van een aantal voorbeelden. Voorlopig zullen we steeds aannemen dat het gebied begrensd en gesloten is.

$k = 1, n = 2$ of $n = 3$: een kromme in \mathbb{R}^2 of in \mathbb{R}^3 .

Voorbeelden: een lijnstuk, een gebroken lijn, een cirkel, de rand van een halve cirkelschijf.

$k = 2, n = 2$: een verzameling in \mathbb{R}^2 , begrensd door een gesloten kromme, bijv. een cirkelschijf, een veelhoek, een verzameling van de vorm $\{(x,y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, waarbij f een positieve functie is.

$k = 2, n = 3$: een deelverzameling van een gebogen oppervlak in \mathbb{R}^3 , al of niet begrensd door een gesloten kromme, bijv. een boloppervlak, een cilindermantel, een kubusoppervlak.

$k = 3, n = 3$: een verzameling in \mathbb{R}^3 begrensd door een twee-dimensionaal gebied, bijv. een bol, de cylinder $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$, de kegel $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}$.

In het algemeen zullen we aannemen dat de krommen en oppervlakken die de rand van het gebied vormen, continu zijn. In sommige gevallen zullen we differentieerbaarheid eisen.

4.1.2. De integraal $\int_a^b f(x)dx$, waarin $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ een begrensde functie is, is als volgt ingevoerd: Men verdeelt het interval $[a,b]$ in kleine deelintervallen $[x_{i-1}, x_i]$ (waarbij $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$), kiest getallen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ en vormt de som $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$, waarbij $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Indien de limiet van deze som, als $n \rightarrow \infty$ en $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$, bestaat, heet deze limiet de integraal van f over $[a,b]$; notatie: $\int_a^b f(x)dx$.

Bij algemenere integralen gaan we op analoge wijze te werk. Zij G een begrensd en gesloten gebied en zij de functie f begrensd op G . We verdelen G in kleine deelgebiedjes E_i , die we (*infinitesimale*) *elementen* zullen noemen. Van deze elementen bepalen we de *maat* (= lengte, oppervlakte of volume) $\mu(E_i)$. We kiezen punten $\xi_i \in E_i$ en berekenen de som

$$(1) \quad \sum_i f(\xi_i) \mu(E_i) .$$

Laat nu het aantal elementen tot ∞ en de afmetingen van de elementen tot 0 naderen. Indien dan de limiet van de som in (1) bestaat, noemt men deze limiet de *integraal* van f over G . Algemene notatie voor de integraal van f over G is $\int_G f \, d\mu$.

Gewoonlijk zullen we echter een andere notatie gebruiken die aangeeft met welk type integraal we te maken hebben.

4.1.3. Eigenschappen. Indien de betrokken integralen bestaan, geldt:

$$1) \quad \int_G (\lambda_1 f + \lambda_2 g) \, d\mu = \lambda_1 \int_G f \, d\mu + \lambda_2 \int_G g \, d\mu \quad \text{voor alle } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} .$$

$$2) \quad \int_{G_1} f \, d\mu + \int_{G_2} f \, d\mu = \int_{G_1 \cup G_2} f \, d\mu ,$$

mits G_1 en G_2 disjunct zijn, of ten hoogste de rand gemeenschappelijk hebben.

$$3) \quad \text{Zij } f \geq g \text{ op } G, \text{ dan is } \int_G f \, d\mu \geq \int_G g \, d\mu .$$

$$4) \quad \int_G d\mu = \mu(G), \text{ d.i. de lengte, de oppervlakte of het volume van } G, \text{ al naar gelang } G \text{ een \u00e9\u00e9n-, twee- of drie-dimensionaal gebied is.}$$

Deze eigenschappen volgen direct uit de definitie van integraal.

4.1.4. We geven een aantal voorbeelden van situaties waarin diverse typen integralen optreden.

1) Zij $G = [a,b]$, $f(x) \geq 0$ voor $x \in [a,b]$, dan is $\int_G f \, d\mu$ de oppervlakte van het vlakdeel $\{(x,y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

2) Zij G een twee-dimensionaal gebied in \mathbb{R}^2 en zij $f(x,y) \geq 0$ voor $(x,y) \in G$, dan is $\int_G f \, d\mu$ het volume van het deel van de ruimte $\{(x,y,z) \mid (x,y) \in G, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$.

3) Een groot aantal voorbeelden is te ontleen aan de mechanica. Zij G een (één-, twee- of drie-dimensionaal) gebied; we beschouwen G als een lichaam met massadichtheid ρ .

(i) De totale massa van G is gelijk aan $\int_G \rho \, d\mu$.

(ii) Het massatraagheidsmoment van G t.o.v. de z -as is $\int_G (x^2+y^2)\rho \, d\mu$.

(iii) Het zwaartepunt (ξ, η, ζ) van G wordt gegeven door

$$\xi = \frac{1}{M} \int_G x\rho \, d\mu, \quad \eta = \frac{1}{M} \int_G y\rho \, d\mu, \quad \zeta = \frac{1}{M} \int_G z\rho \, d\mu$$

waarbij $M = \int_G \rho \, d\mu$ de totale massa van G is.

4) Zij G een (één-, twee- of drie-dimensionaal) gebied belegd met elektrische lading met dichtheid ρ , dan is de totale lading in G gelijk aan $\int_G \rho \, d\mu$.

4.1.5. In de hierna te geven behandeling van diverse typen integralen zullen we de volgorde, zoals in 4.1.1. gegeven voor de integratiegebieden, aanhouden. We zullen steeds eerst de aard van de infinitesimale elementen bespreken en de manier waarop we daar een maat aan toekennen. Vervolgens geven we een criterium voor het bestaan van de betrokken integraal; daarna behandelen we de benodigde technieken voor de berekening ervan.

4.1.6. We merken hier al vast op, dat het niet nodig is, de maat $\mu(E)$ van een infinitesimaal element E precies te kennen. In plaats van $\mu(E)$ mogen we een benadering $\tilde{\mu}(E)$ gebruiken, mits voor de bij deze benadering geïntroduceerde fout $\mu(E) - \tilde{\mu}(E)$ geldt:

$$\lim_{\mu(E) \rightarrow 0} \frac{\mu(E) - \tilde{\mu}(E)}{\mu(E)} = 0$$

Is dit het geval dan heet de gemaakte fout *van kleinere orde* dan $\mu(E)$. Men kan bewijzen, dat de limiet van de som (1) in 4.1.2. niet verandert wanneer we $\mu(E_i)$ vervangen door $\tilde{\mu}(E_i)$ in het geval dat de hierbij gemaakte fout van kleinere orde is dan $\mu(E_i)$.

2. Lijnintegralen.

4.2.1. De te gebruiken infinitesimale elementen (nu *lijnelementen* genaamd) zijn de volgende:

A1) Als $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ en $\Delta x = x_2 - x_1$ klein is, dan is het interval $E = [x_1, x_2]$ een element met $\mu(E) = \Delta x$.

A2) Als $G = K$ een kromme is in \mathbb{R}^2 of \mathbb{R}^3 , gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x}(t)$ ($a \leq t \leq b$), en als $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ en $\Delta t = t_2 - t_1$ klein is, dan is $E = \{\underline{x}(t) \mid t_1 \leq t \leq t_2\}$ een element met

$$\mu(E) = \Delta s \approx \|\underline{x}(t_2) - \underline{x}(t_1)\| \approx \|\dot{\underline{x}}(t_1)\| \Delta t.$$

Δs heet de *booglengte* van E . Als de kromme K in \mathbb{R}^2 ligt en gegeven wordt door de vergelijking $y = y(x)$, kunnen we K ook beschrijven door de parametervoorstelling $\underline{x}(t) = (t, y(t))$. Dan geldt $\dot{\underline{x}}(t) = (1, y'(t))$ en dus $\|\dot{\underline{x}}(t)\| = \sqrt{1 + (y'(t))^2}$. In dat geval is de maat van E (met t vervangen door x):

$$\mu(E) = \Delta s \approx \sqrt{1 + (y'(x))^2} \Delta x.$$

4.2.2. Zij $G = [a, b]$, een interval in \mathbb{R} , en zij f gedefinieerd en begrensd op $[a, b]$. Neem als elementen in G lijnelementen van type A1. De integraal van f over G (indien deze bestaat) is dan juist de gewone Riemann-integraal. We gebruiken dan ook de oude notatie, n.l. $\int_a^b f(x) dx$.

Zij vervolgens $G = K$ een begrensde kromme in \mathbb{R}^2 of \mathbb{R}^3 , gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x}(t)$ ($a \leq t \leq b$) en zij f gedefinieerd en begrensd op K . We verdelen nu K in lijnelementen van het type A2. Laten deze lijnelementen E_1, \dots, E_n zijn, met $E_i = \{\underline{x}(t) \mid t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$, waarbij $t_0 = a$ en $t_n = b$. Schrijf Δs_i voor de booglengte van E_i . De som uit 4.1.2., formule (1) krijgt dan de gedaante

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n f(\underline{x}(\xi_i)) \Delta s_i, \text{ waar } \xi_i \in [t_{i-1}, t_i].$$

Bestaat de limiet wanneer we de verdeling in lijnelementen zodanig fijn maken, dat $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i$ naar nul gaat, dan heet deze limiet de *lijnintegraal*

van f over K ; notatie: $\int_K f(\underline{x}) ds$.

4.2.3. Stelling: Laat K gegeven zijn door de parametervoorstelling $\underline{x}(t)$ ($a \leq t \leq b$), waarbij \underline{x} continu differentieerbaar is. Zij f continu op K . Dan bestaat $\int_K f(\underline{x}) ds$.

Bovendien mag bij de berekening van de som in 4.2.2. formule (1) de booglengte Δs vervangen worden door de benaderende uitdrukking $\|\dot{\underline{x}}(t)\| \Delta t$.

4.2.4. Op grond van de benaderende uitdrukking voor Δs geldt nu onder bovenstaande voorwaarden

$$(1) \quad \int_K f(\underline{x}) ds = \int_a^b f(\underline{x}(t)) \|\dot{\underline{x}}(t)\| dt .$$

De booglengte van K wordt gegeven door

$$(2) \quad \int_K ds = \int_a^b \|\dot{\underline{x}}(t)\| dt .$$

Als K een kromme is in het (x,y) -vlak, gegeven door de vergelijking $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$) met $y(x)$ continu differentieerbaar, dan volgt

$$(3) \quad \int_K f(\underline{x}) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx .$$

De booglengte van K wordt dan gegeven door

$$(4) \quad \int_K ds = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx .$$

4.2.5. Voorbeelden.

- 1) De booglengthe van het paraboolsegment $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, is volgens 4.2.4, formule (4)

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = x\sqrt{1 + 4x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{4x^2 dx}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \\ &= \sqrt{5} - s + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}} . \end{aligned}$$

Daar

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) ,$$

vinden we

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}) .$$

- 2) De lengte van een boog van de cycloïde $x = at - a \sin t$, $y = a - a \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, is volgens 4.2.4, formule (2)

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} \, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} \, dt = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{2}t \, dt = 8a . \end{aligned}$$

- 3) Een oneindig lange draad geplaatst langs de x-as, is electrisch geladen met constante ladingsdichtheid. Als gevolg heerst in het (x,y)-vlak een electrisch veld ter grootte c/y en gericht loodrecht op de x-as. De kracht door dit veld uitgeoefend op een homogene ladingverdeling langs het paraboolsegment K: $y = 1 + \frac{1}{4}x^2$, $-1 \leq x \leq 1$, is gelijk aan

$$\begin{aligned}
 F &= c_1 \int_K \frac{c}{y} ds = c_1 c \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} dx = \\
 &= 2c_1 c \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2}} = 4c_1 c \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = 4c_1 c \ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) \Big|_0^1 = \\
 &= 4c_1 c [\ln(1 + \sqrt{5}) - \ln 2] .
 \end{aligned}$$

4.2.6. Laat K een kromme zijn in het (x,y) -vlak, gegeven door de vergelijking $r = r(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$), waarbij r, φ poolcoördinaten zijn. Uit $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ volgt $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2 + \dot{r}^2$ ($\dot{}$ betekent afgeleide naar φ), waarna 4.2.4., formule (2) overgaat in

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} d\varphi .$$

4.2.7. Voorbeeld. De booglengte van de cardioïde $r = 2a(1 - \cos \varphi)$ (zie Wiskunde 10, bij onderdeel poolcoördinaten) is

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2(1 - \cos \varphi)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos \varphi} d\varphi = 16 a .$$

3. Oppervlakte-integralen in \mathbb{R}^2

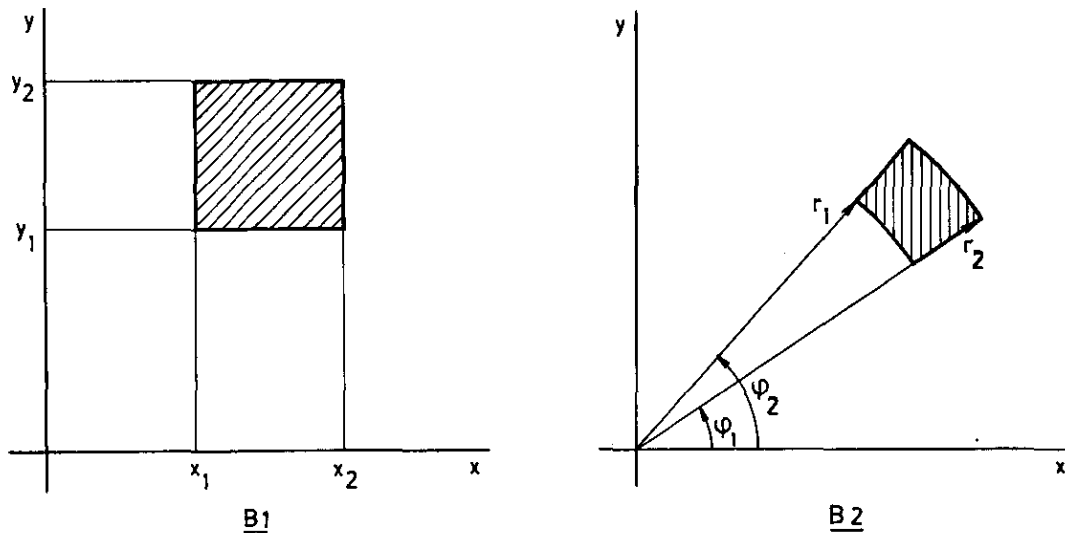
4.3.1. We gebruiken de volgende infinitesimale elementen (*oppervlakte elementen*):

B1) In \mathbb{R}^2 is een rechthoek

$$E = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$$

een element als $\Delta x = x_2 - x_1$ en $\Delta y = y_2 - y_1$ klein zijn. De maat is $\mu(E) = \Delta x \Delta y$.

B2) In \mathbb{R}^2 is de verzameling $E = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \mid \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, r_1 \leq r \leq r_2\}$ een element als $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ en $\Delta r = r_2 - r_1$ klein zijn. Voor de maat geldt $\mu(E) \approx r_1 \Delta r \Delta \varphi$.



Oppervlakte-elementen.

De integraal over een begrensd en gesloten gebied G van een begrensde functie f krijgen we weer door de som (1) uit 4.1.2. te vormen en de maximum grootte van de gebruikte elementen naar nul te laten gaan.

4.3.2. Stelling: Zij G een begrensd en gesloten gebied in \mathbb{R}^2 met voldoende gladde rand en zij de functie f continu op G . Dan bestaat $\int_G f \, d\mu$. De integraal is onafhankelijk van het type oppervlakte-elementen dat wordt gebruikt. Bovendien mag men bij de berekening van de som (1) uit 4.1.2. voor elementen van het type B2 de getallen $\mu(E)$ vervangen door de benadering $r\Delta r\Delta\varphi$.

We zullen niet precies omschrijven wat we met "voldoende gladde rand" bedoelen. We merken alleen op dat in alle voorbeelden die we in dit hoofdstuk zullen tegenkomen, aan deze voorwaarde is voldaan.

Tenslotte merken we op dat de elementen E_i het gebied G niet volledig hoeven te overdekken, mits de maat van het niet overdekte stuk tot 0 nadert. Zo kan men bijv. een cirkelschijf in \mathbb{R}^2 niet verdelen in elementen van het type B1. Door de afmetingen van de elementen klein genoeg te kiezen kan men echter wel de cirkelschijf "op een willekeurig klein gebied na" overdekken.

4.3.3. Zij G een twee-dimensionaal gebied in \mathbb{R}^2 . Neem als elementen in G oppervlakte-elementen van het type B1. We noteren dan de integraal van f over G als

$$\iint_G f(x,y) dx dy .$$

Indien oppervlakte-elementen van het type B2 worden genomen, dan schrijven we

$$\iint_G f(r, \varphi) r dr d\varphi .$$

Hierbij is aangenomen dat f als functie van r en φ gegeven is. Als f gegeven is als functie van x en y , dan volgt door een eenvoudige substitutie:

$$f(x, y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

We schrijven in deze paragraaf $\hat{f}(r, \varphi)$ voor $f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, zodat $f(x, y) = \hat{f}(r, \varphi)$. Op grond van het mogen vervangen van $\mu(E)$ door $r \Delta r \Delta \varphi$ bij elementen van type B2, geldt nu

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_G \hat{f}(r, \varphi) r dr d\varphi .$$

De oppervlakte van G wordt gegeven door

$$\iint_G dx dy \text{ resp. } \iint_G r dr d\varphi .$$

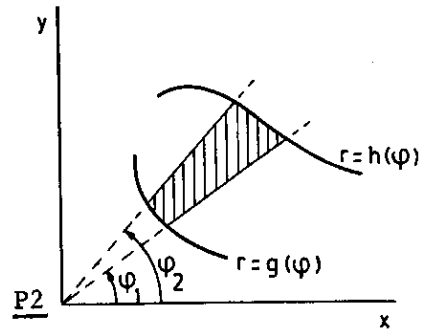
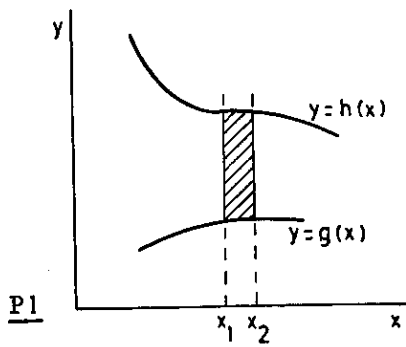
4.3.4. We beschrijven nu een methode om de berekening van oppervlakte-integralen te herleiden tot de berekening van enkelvoudige integralen. Daartoe voeren we in het begrip *partieel infinitesimaal element (p.i. element)*. Een p.i. element is een gebied waarvan sommige (maar niet alle) afmetingen klein zijn. We geven enige voorbeelden:

P1) Als $x_1 < x_2$ en $\Delta x = x_2 - x_1$ klein is, dan is het gebied

$\{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ een p.i. element in \mathbb{R}^2 . Hierbij zijn g en h continue functies met $g(x) \leq h(x)$ voor $x_1 \leq x \leq x_2$.

P2) Als $\varphi_1 < \varphi_2$ en $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ klein is, dan is de verzameling (in poolcoördinaten) gegeven door $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, g(\varphi) \leq r \leq h(\varphi)$, een p.i. element in \mathbb{R}^2 . Hierbij zijn g en h continue functies met $0 < g(\varphi) \leq h(\varphi)$ voor $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$.

P3) De cirkelring $r_1 \leq r \leq r_2$ is een p.i. element in \mathbb{R}^2 als $\Delta r = r_2 - r_1$ klein is.



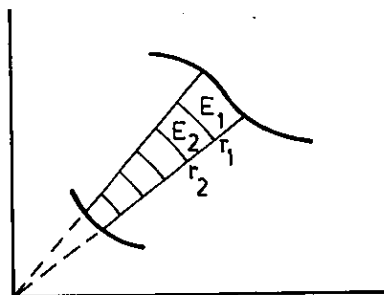
Zij E een p.i. element in \mathbb{R}^2 en zij de functie f continu op E , dan kan men $\int_E f d\mu$ benaderen door een enkelvoudige integraal:

$$(P1): \int_E f d\mu = \iint_E f(x,y) dx dy \approx \left(\int_{g(x_1)}^{h(x_1)} f(x_1, y) dy \right) \Delta x,$$

$$(P2): \int_E f d\mu = \iint_E f(r, \varphi) r dr d\varphi \approx \left(\int_{g(\varphi_1)}^{h(\varphi_1)} f(r, \varphi_1) r dr \right) \Delta \varphi,$$

$$(P3): \int_E f d\mu = \iint_E f(r, \varphi) r dr d\varphi \approx \left(\int_0^{2\pi} f(r_1, \varphi) d\varphi \right) r_1 \Delta r.$$

4.3.5. Op deze manier worden inderdaad benaderingen verkregen zoals we nog toelichten aan de hand van het tweede voorbeeld.



Verdeel E in elementen E_1, E_2, \dots van het type B2. Op grond van de definitie van de integraal is $\int_E f \, d\mu$ limiet van en dus te benaderen door $\sum_i f(\underline{\xi}_i) \mu(E_i)$ waarbij $\underline{\xi}_i \in E_i$.

Vervang $\mu(E_i)$ door de benadering $r_i \Delta r_i \Delta \varphi$ (bedenk dat $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ voor alle elementen E_i hetzelfde is) en kies voor $\underline{\xi}_i$ het punt met poolcoördinaten (r_i, φ_1) . Dan vinden we

$$\iint_E f(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi \approx \left(\sum_i f(r_i, \varphi_1) r_i \Delta r_i \right) \Delta \varphi .$$

Merk nu op dat de som $\sum_i f(r_i, \varphi_1) r_i \Delta r_i$ een benadering is voor de integraal

$$\int_{g(\varphi_1)}^{h(\varphi_1)} f(r, \varphi_1) r \, dr ,$$

immers als $\max_i \Delta r_i \rightarrow 0$ nadert de som tot de integraal. Derhalve vinden we

$$\iint_E f(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi \approx \left(\int_{g(\varphi_1)}^{h(\varphi_1)} f(r, \varphi_1) r \, dr \right) \Delta \varphi .$$

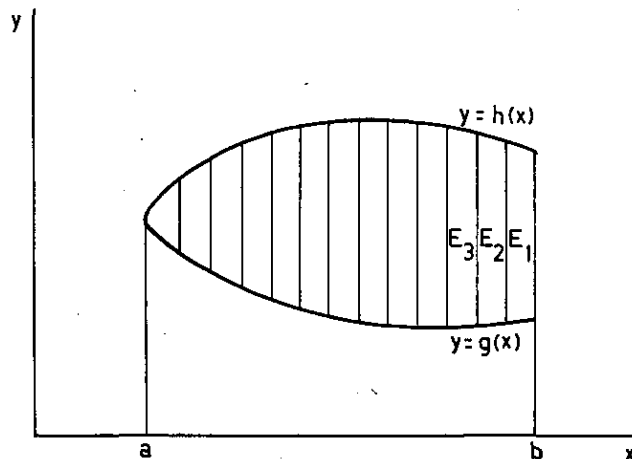
Men kan bewijzen dat de bij bovenstaande benadering gemaakte fout van kleinere orde is dan $\iint_E f(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi$, zodat de met de benadering verkregen limiet gelijk is aan de bedoelde integraal.

4.3.6. We zullen nu laten zien hoe p.i. elementen worden gebruikt bij de berekening van oppervlakte-integralen.

Zij G het gebied

$$G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\} ,$$

waarbij g en h continue functies zijn met $g(x) \leq h(x)$ voor $a \leq x \leq b$.



We verdelen G in p.i. elementen van het type P1. Als f continu is op G dan geldt

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \sum_i \iint_{E_i} f(x,y) dx dy \approx \sum_i \left(\int_{g(x_i)}^{h(x_i)} f(x_i, y) dy \right) \Delta x_i .$$

Definiëren we $u(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy$, dan kan men bewijzen dat u continu is op $[a,b]$. We vinden

$$(1) \quad \iint_G f(x,y) dx dy \approx \sum_i u(x_i) \Delta x_i .$$

Als $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$, dan nadert de uitdrukking in het rechterlid tot $\int_a^b u(x) dx$.

Bovendien wordt de in (1) gegeven benadering steeds beter, omdat de fouten in de termen van de som van kleinere orde zijn dan Δx_i . Daarom vinden we bij limietovergang

$$(2) \quad \iint_G f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy \right) dx .$$

De integraal in het rechterlid noteren we gemakshalve als

$$\int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy .$$

We noemen zo'n uitdrukking een *herhaalde integraal*.

We kunnen in het voorgaande de rol van x en y verwisselen. Als we aannemen dat het gebied gegeven wordt door $G = \{(x,y) \mid \alpha \leq y \leq \beta, k(y) \leq x \leq \ell(y)\}$, dan vinden we

$$(3) \quad \iint_G f(x,y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{k(y)}^{\ell(y)} f(x,y) dx .$$

Nemen we p.i. elementen van het type P2, dan volgt

$$(4) \quad \iint_G f(r,\varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(r,\varphi) r dr ,$$

aangenomen dat het gebied G in poolcoördinaten wordt beschreven door $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $g(\varphi) \leq r \leq h(\varphi)$.

Als het gebied G (in poolcoördinaten) gegeven wordt door $a \leq r \leq b$, $k(r) \leq \varphi \leq \ell(r)$, kunnen we de rol van φ en r verwisselen. We krijgen dan

$$(5) \quad \iint_G f(r, \varphi) r dr d\varphi = \int_a^b r dr \int_{k(r)}^{\ell(r)} f(r, \varphi) d\varphi .$$

4.3.7. Voorbeelden.

1) Zij G de kwart-cirkelschijf gegeven door $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Gevraagd wordt $\iint_G e^{x^2+y^2} xy dx dy$ te bepalen.

1°. Met gebruik van formule (2) uit 4.3.6 vinden we

$$\begin{aligned} \iint_G e^{x^2+y^2} xy dx dy &= \int_0^1 x e^{x^2} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y e^{y^2} dy = \int_0^1 x e^{x^2} dx \cdot \frac{1}{2} (e^{1-x^2} - 1) = \\ &= \frac{1}{2} e \int_0^1 x dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{4} e - \left(\frac{1}{4} e - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} . \end{aligned}$$

2°. Door overgang op poolcoördinaten vinden we met behulp van 4.3.6, formule (5):

$$\begin{aligned} \iint_G e^{x^2+y^2} xy dx dy &= \iint_G r^3 e^{r^2} \sin \varphi \cos \varphi dr d\varphi = \\ &= \int_0^1 r^3 e^{r^2} dr \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^1 t e^t dt = \frac{1}{4} , \end{aligned}$$

waarbij de substitutie $r^2 = t$ is toegepast.

2) Zij G de driehoek in het (x,y) -vlak die wordt ingesloten door de rechten $y = 2x$, $2y = x$, $x + y = 3$.

Gevraagd wordt $\iint_G xy dx dy$ te berekenen. Daartoe verdelen we G door de

rechte $x = 1$ in twee gebieden G_1 en G_2 , waarna de integralen over G_1 en G_2 worden bepaald met behulp van 4.3.6, formule (2):

$$\begin{aligned} \iint_G &= \iint_{G_1} + \iint_{G_2} = \int_0^1 x dx \int_{\frac{1}{2}x}^{2x} y dy + \int_1^2 x dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} y dy = \\ &= \int_0^1 x dx \cdot \frac{1}{2} (4x^2 - \frac{1}{4}x^2) + \int_1^2 x dx \cdot \frac{1}{2} [(3-x)^2 - \frac{1}{4}x^2] = \\ &= \frac{15}{8} \int_0^1 x^3 dx + \frac{1}{8} \int_1^2 (3x^3 - 24x^2 + 36x) dx = \frac{13}{8} . \end{aligned}$$

Ook hier kunnen we overgaan op poolcoördinaten en 4.3.6, formule (4) gebruiken:

$$\begin{aligned} \iint_G xy dx dy &= \iint_G r^3 \sin \varphi \cos \varphi dr d\varphi = \\ &= \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\arctan 2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{3(\sin \varphi + \cos \varphi)^{-1}} r^3 dr = \\ &= \frac{81}{4} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{t}{(1+t)^4} dt = \frac{13}{8} , \end{aligned}$$

waarbij de substitutie $\tan \varphi = t$ is toegepast.

3) Gevraagd $\int_0^\pi dx \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) e^{\sin y} dy$.

De binnenste integraal is moeilijk. We schrijven de herhaalde integraal eerst als een oppervlakte-integraal over het gebied G gegeven door $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi/2$. Daarna passen we 4.3.6, formule (3) toe:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi/2} f(x,y) dy &= \iint_G f(x,y) dx dy = \int_0^{\pi/2} dy \int_0^{\pi} f(x,y) dx = \\
 &= \int_0^{\pi/2} e^{\sin y} dy \int_0^{\pi} \sin(x+y) dx = \\
 &= - \int_0^{\pi/2} e^{\sin y} dy \cdot [\cos(\pi+y) - \cos y] = \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{\sin y} \cos y dy = 2[e^{\sin \frac{\pi}{2}} - e^0] = 2(e-1).
 \end{aligned}$$

- 4) Gevraagd het volume van het lichaam dat wordt ingesloten door de cilind-
 ders $x^2 + y^2 = 1$ en $x^2 + z^2 = 1$. Het lichaam is te beschouwen als deel
 van het cilindrische gebied $x^2 + y^2 \leq 1$, dat wordt afgesneden door de
 oppervlakken $z = \sqrt{1-x^2}$ en $z = -\sqrt{1-x^2}$. Op grond van symmetrie is het
 gevraagde volume gelijk aan

$$8 \iint_G \sqrt{1-x^2} dx dy ,$$

waarbij G het gebied is gegeven door $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Met behulp van 4.3.6, formule (2) volgt

$$\begin{aligned}
 8 \iint_G \sqrt{1-x^2} dx dy &= 8 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = 8 \int_0^1 (1-x^2) dx = \\
 &= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} .
 \end{aligned}$$

4.3.8. Voor de oppervlakte van een gebied G in het (x,y)-vlak geldt $\mathcal{O} = \iint_G dx dy$.

Is G gegeven door $G = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$, dan vinden we

$$(1) \quad \mathcal{O} = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} dy = \int_a^b h(x) dx - \int_a^b g(x) dx ,$$

een bekend resultaat.

Is G gegeven in poolcoördinaten door bijv. $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $0 \leq r \leq h(\varphi)$, dan vinden we

$$(2) \quad \mathcal{O} = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{h(\varphi)} r dr = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (h(\varphi))^2 d\varphi .$$

4.3.9. Voorbeelden.

1) Gevraagd de oppervlakte \mathcal{O} van het gebied begrensd door de lemniscaat, in poolcoördinaten gegeven door de vergelijking $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Schets de lemniscaat en merk op dat er symmetrie t.o.v. de x-as en t.o.v. de y-as bestaat. De vergelijking $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ is slechts gedefinieerd voor $0 \leq \varphi \leq \pi/4$, $3\pi/4 \leq \varphi \leq 5\pi/4$ en $7\pi/4 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Met behulp van 4.3.8, formule (2), vinden we voor de gevraagde oppervlakte:

$$\mathcal{O} = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2 .$$

2) Gevraagd wordt de oppervlakte \mathcal{O} van het gebied begrensd door de "lus" van het folium van Descartes (zie 2.4.1.). De vergelijking van het folium luidt in rechthoekige coördinaten, resp. poolcoördinaten:

$$x^3 + y^3 = 3xy \quad \text{resp.} \quad r = \frac{3 \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} .$$

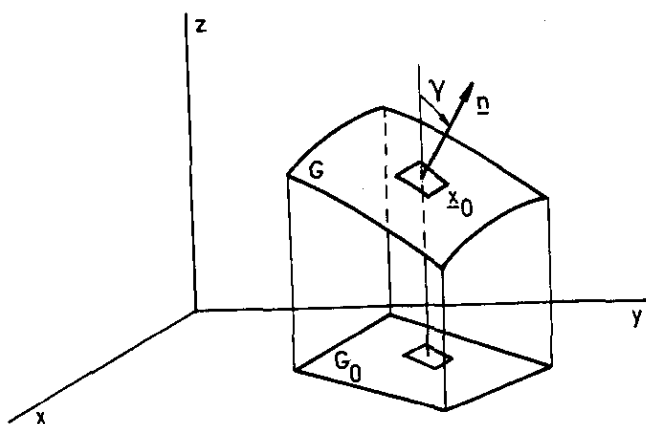
Overeenkomstig 4.3.8, formule (2) is de gevraagde oppervlakte

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{9 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi = \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(t^3 + 1)^2} = \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{(t^3 + 1)'}{(t^3 + 1)^2} dt = \frac{3}{2} , \end{aligned}$$

waarbij de substitutie $\tan \varphi = t$ is toegepast.

4. Oppervlakte-integralen in \mathbb{R}^3

4.4.1. Zij G een twee-dimensionaal gebied gelegen op een oppervlak $z = h(x,y)$ in \mathbb{R}^3 . We zullen G verdelen in infinitesimale elementen van een zodanige vorm, dat de projectie van zo'n element op het (x,y) -vlak een infinitesimaal element in \mathbb{R}^2 is. De projectie van G op het (x,y) -vlak noemen we G_0 .



Zij $\underline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in G$ en neem aan dat h differentieerbaar is. Dan wordt het raakvlak V aan G in \underline{x}_0 gegeven door

$$z - z_0 = h_x(x_0, y_0)(x - x_0) + h_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

oftewel $(\underline{n}, \underline{x} - \underline{x}_0) = 0$, waarbij $\underline{n} = (-h_x, -h_y, 1)$ (afgeleiden genomen in (x_0, y_0)). De vector \underline{n} staat dus loodrecht op G . De hoek γ die deze vector met de positieve z -as maakt voldoet aan $\cos \gamma = 1/\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}$. Laat nu E_0 een infinitesimaal element in G_0 zijn en zij $(x_0, y_0) \in E_0$. Met E_0 correspondeert een infinitesimaal element $E = \{(x, y, z) \in G \mid (x, y) \in E_0\}$ van G en een element $E_r = \{(x, y, z) \in V \mid (x, y) \in E_0\}$ van V . Men kan aantonen dat de oppervlakte van E_r een benadering is voor de oppervlakte van E . De oppervlakte van E_r is gelijk aan $\frac{\mu(E_0)}{\cos \gamma}$. Derhalve vinden we, als $\mu(E_0) = \Delta x \Delta y$ (dus als E_0 van het type B1 is):

$$\mu(E) \approx \mu(E_r) = \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2} \Delta x \Delta y .$$

4.4.2. Stelling: Zij h een continu differentieerbare functie van twee variabelen en zij G een twee-dimensionaal gebied met voldoende gladde rand gelegen op het oppervlak $z = h(x,y)$ in \mathbb{R}^3 . Laat f een continue functie van drie variabelen zijn. Dan bestaat de integraal van f over G (notatie: $\iint_G f \, d\sigma$). Bij de berekening van deze integraal mag de in 4.4.1. aangegeven benadering voor $\mu(E)$ worden gebruikt.

4.4.3. Met h , G en f als in 4.4.2. kunnen we nu $\iint_G f \, d\sigma$ als volgt berekenen: Zij G_0 de projectie van G op het (x,y) -vlak. Dan is

$$(1) \quad \iint_G f \, d\sigma = \iint_{G_0} f(x,y,h(x,y)) \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2} \, dx dy .$$

Voor de oppervlakte van G vinden we

$$(2) \quad \iint_G d\sigma = \iint_{G_0} \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2} \, dx dy .$$

Door deze formules wordt de integraal over een gebogen oppervlak in \mathbb{R}^3 herleid tot een integraal over een vlak gebied in \mathbb{R}^2 . De laatste is te berekenen door herleiding tot een herhaalde integraal. In sommige situaties is het voordelig de integraal te schrijven in poolcoördinaten:

$$(3) \quad \iint_G f \, d\sigma = \iint_{G_0} \hat{f}(r,\varphi,\hat{h}(r,\varphi)) \sqrt{1 + \hat{h}_r^2 + \frac{1}{r^2} \hat{h}_\varphi^2} \, r dr d\varphi ,$$

waarin $\hat{h}(r,\varphi) = h(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

4.4.4. Voorbeelden

1) Gevraagd de oppervlakte σ van het gedeelte van de kegel $z^2 = x^2 + y^2$, dat binnen de cylinder $x^2 + y^2 = 2x$ ligt.

Voor $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ is $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, waarna met 4.4.3.,

formule (2), volgt:

$$\sigma = 2 \iint_{G_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dx dy = 2 \iint_{G_0} \sqrt{2} \, dx dy = 2\sqrt{2} \pi ;$$

hierbij is G_0 het cirkelgebied $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

2) Beschouw de bol $B = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, die belegd is met massa met dichtheid $\rho(x,y,z) = z^2$. Gevraagd wordt de totale massa op B. Deze is op grond van symmetrie gelijk aan twee maal de massa op de halve bol $G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, dus gelijk aan $2 \iiint_G \rho \, d\sigma$.

We gebruiken poolcoördinaten. Er geldt: $\rho = 1 - r^2$, $\hat{h}(r,\varphi) = \sqrt{1 - r^2}$, dus $\hat{h}_r = -r/\sqrt{1 - r^2}$, zodat volgens 4.4.3., formule (3) geldt:

$$\begin{aligned} 2 \iiint_G \rho \, d\sigma &= 2 \iiint_{G_0} (1 - r^2) \sqrt{1 + \frac{r^2}{1 - r^2}} \, r \, dr \, d\varphi = \\ &= 2 \iiint_{G_0} r \sqrt{1 - r^2} \, dr \, d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2} \, dr = \frac{4}{3} \pi ; \end{aligned}$$

G_0 is de projectie van G op het (x,y)-vlak, i.e. $G_0 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4.4.5. Van een omwentelingsoppervlak kan men de oppervlakte ook anders berekenen. Zij K een kromme in het xy-vlak, gegeven door $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, die wordt gewenteld om de x-as. Het omwentelingsoppervlak S verdelen we in ringen door vlakken aan te brengen die loodrecht op de x-as staan. Deze ringen zijn bij benadering kegelmantels met straal $y(x)$ en apothema $\Delta s \approx \sqrt{1 + y'(x)^2} \Delta x$, dus met benaderde oppervlakte $2\pi y \Delta s \approx 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} \Delta x$. Dan vindt men als oppervlakte \mathcal{O} van S

$$\mathcal{O} = \int_a^b 2\pi y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} \, dx.$$

Als de kromme K gegeven is door een parameterrepresentatie, $\underline{x} = \underline{x}(t) = (x(t), y(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$, dan is

$$\Delta s = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \Delta t$$

en

$$\mathcal{O} = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \, dt .$$

Als K gegeven is in poolcoördinaten, $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, dan is $x = r(\varphi) \cos \varphi$, $y = r(\varphi) \sin \varphi$ een parameterrepresentatie, en (vergelijk 4.2.6)

$$\Delta s = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} \Delta \varphi$$

zodat

$$\mathcal{O} = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r(\varphi) \sin \varphi \sqrt{\dot{r}(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi .$$

4.4.6. Voorbeelden.

- 1) De lemniscaat $r^2 = \cos 2\varphi$ wordt gewenteld om de x-as. Met gebruik van $r\dot{r} = -\sin 2\varphi$ volgt voor de ronde oppervlakte

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= 2 \int_0^{\pi/4} 2\pi \sin \varphi \sqrt{r^4 + r^2 \dot{r}^2} d\varphi = \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/4} \sin \varphi \sqrt{\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi} d\varphi = 4\pi \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi = 4\pi(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) . \end{aligned}$$

- 2) Gevraagd de oppervlakte \mathcal{O} van het gedeelte van de cylinder $x^2 + y^2 = 2x$, dat buiten de kegel $z^2 = x^2 + y^2$ ligt.

Merk op dat het betreffende gedeelte van de cylinder ook wordt afgesneden door het oppervlak $z^2 = 2x$. Verdeel het cylindergedeelte in **stroken evenwijdig** aan de z-as, met oppervlakte $2z\Delta s$, waarin $z = \sqrt{2x}$ en Δs een lijnelement van de grondcirkel van de cylinder is.

De gevraagde oppervlakte is voor te stellen door een lijnintegraal over de cirkel C: $x^2 + y^2 = 2x$,

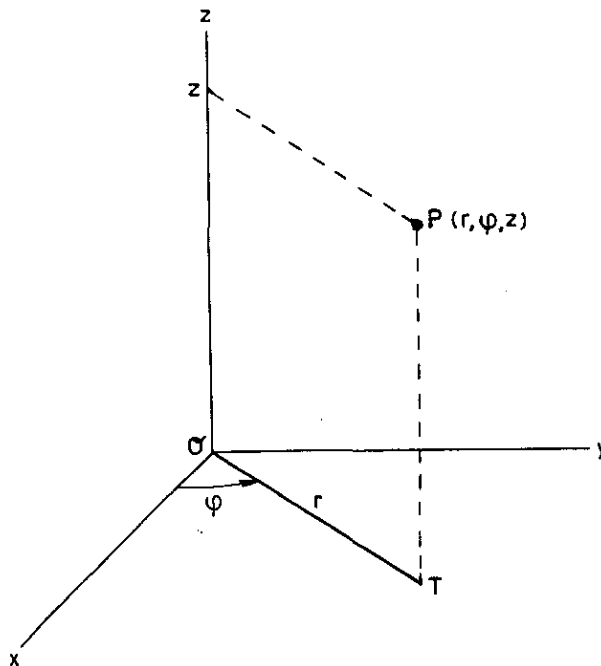
$$\mathcal{O} = 2 \int_C z ds = 4 \int_0^2 \sqrt{2x} \sqrt{1 + (y')^2} dx ,$$

waarin $y = \sqrt{2x - x^2}$, dus

$$\mathcal{O} = 4 \int_0^2 \sqrt{2x} \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx = 4\sqrt{2} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2 - x}} = 16 .$$

5. Volume-integralen

4.5.1. Tot dusver hebben we een punt in \mathbb{R}^3 steeds aangegeven door middel van zijn cartesische coördinaten x , y en z . We bespreken eerst twee andere coördinatenstelsels. Het eerste betreft z.g. *cylindercoördinaten*; deze vormen een uitbreiding van poolcoördinaten.



De cylindercoördinaten van P zijn (r, φ, z) ;
de samenhang met cartesische coördinaten is:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z.$$

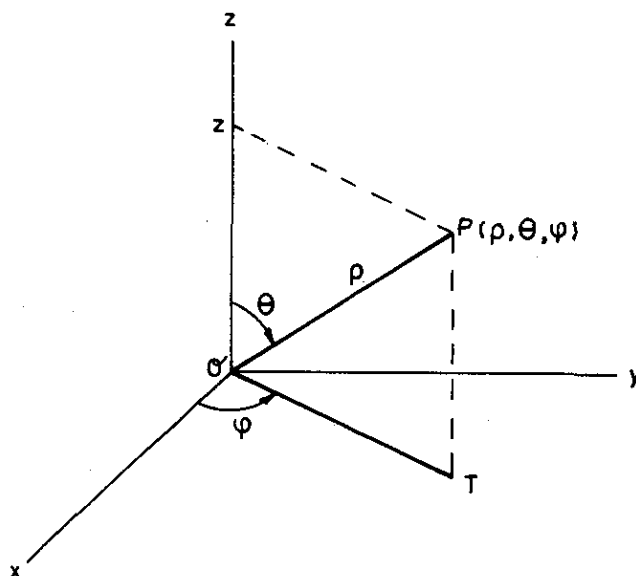
Cylindercoördinaten zijn gemakkelijk bij meetkundige figuren die axiale symmetrie hebben (omwentelingsfiguren!).

De cylinder $x^2 + y^2 = a^2$ heeft als vergelijking in cylinder coördinaten:

$$r = a.$$

De kegel $z^2 = x^2 + y^2$ heeft als vergelijking $z^2 = r^2$, $z = \pm r$.

Het tweede nieuwe coördinatensysteem is dat met z.g. *bolcoördinaten*.



Een punt P in \mathbb{R}^3 wordt bepaald door: afstand ρ tot O , hoek θ van OP met de positieve z -as, en hoek φ van de projectie van OP op het (x,y) -vlak met de positieve x -as.

Krachtens definitie is $\rho \geq 0$, θ tussen 0 en π te nemen en φ bepaald tot op veelvoud van 2π ; meestal wordt φ zo gekozen dat $0 \leq \varphi < 2\pi$. Voor O is θ noch φ bepaald; voor de andere punten op de z -as is $\theta = 0$ of $\theta = \pi$ en φ onbepaald. De samenhang met cartesische coördinaten is

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \theta \cos \varphi \\y &= \rho \sin \theta \sin \varphi \\z &= \rho \cos \theta.\end{aligned}$$

Uit de bekende eigenschappen van een rechthoekige driehoek volgt namelijk $\overline{OT} = \rho \sin \theta$, $\overline{PT} = \rho \cos \theta$, zie figuur.

$\rho = \text{constant}$ is de vergelijking van een bol om O .

$\varphi = \text{constant}$ is de "helft" van een vlak door de z -as (de z -as zelf uitgezonderd).

$\theta = \text{constant}$ is een halve kegel (uitgezonderd de top O) met de z -as als as.

Bolcoördinaten zijn vaak handig voor figuren met een punt van symmetrie.

4.5.2. We zullen de volgende infinitesimale elementen (nu *volume-elementen* genaamd) gebruiken:

C1) Het blok $E = \{(x,y,z) \mid x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2, z_1 \leq z \leq z_2\} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$ is een element in \mathbb{R}^3 als $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$ klein zijn. Er geldt $\mu(E) = \Delta x \Delta y \Delta z$.

C2) De verzameling gegeven in cilindercoördinaten door

$$E = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \mid r_1 \leq r \leq r_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, z_1 \leq z \leq z_2\}$$

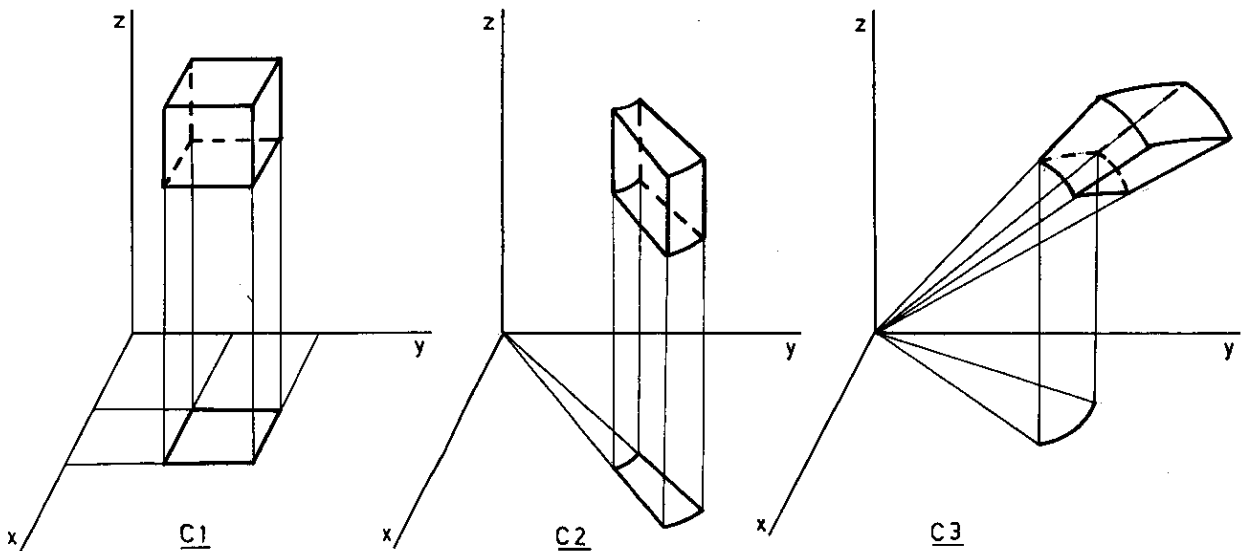
met $\Delta r = r_2 - r_1$, $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$ klein, is een element in \mathbb{R}^3 met maat $\mu(E) \approx r_1 \Delta r \Delta \varphi \Delta z$.

C3) De verzameling gegeven in bolcoördinaten door

$$E = \{(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \mid \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$$

met $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$, $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ klein, is een element in \mathbb{R}^3 met maat

$$\mu(E) \approx \rho_1^2 \sin \theta_1 \Delta \rho \Delta \theta \Delta \varphi .$$



Volume -elementen .

4.5.3. Stelling: Zij G een begrensd en gesloten gebied in \mathbb{R}^3 met voldoende glad randoppervlak en zij f continu op G . Dan bestaat de integraal van f over G . De integraal is onafhankelijk van het type volume-elementen dat wordt gebruikt. Bovendien mag men bij de berekening gebruik maken van de benaderingen zoals in 4.5.2. zijn aangegeven.

4.5.4. Zij G een drie-dimensionaal gebied in \mathbb{R}^3 . Neem als elementen in G volume-elementen van het type C1. We noteren dan de integraal van f over G als

$$\iiint_G f(x,y,z) dx dy dz .$$

Indien volume-elementen van het type C2 worden genomen, dan schrijven we

$$\iiint_G f(r,\varphi,z) r dr d\varphi dz ,$$

en in geval van volume-elementen van het type C3:

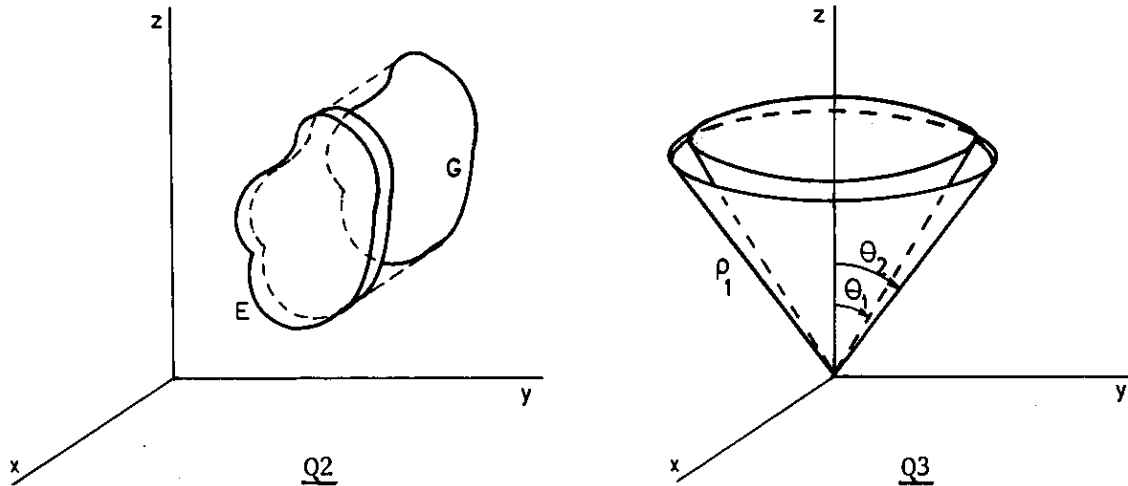
$$\iiint_G f(\rho,\theta,\varphi) \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi .$$

4.5.5. Ook hier zullen we partieel infinitesimale elementen gebruiken; we geven enige voorbeelden.

Q1) Als $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ en $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ klein zijn, dan is het gebied $\{(x,y,z) \mid x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2, g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\}$ een p.i. element in \mathbb{R}^3 . Hierbij zijn g en h continue functies met $g(x,y) \leq h(x,y)$ voor $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$.

Q2) Als $x_1 < x_2$ en $\Delta x = x_2 - x_1$ klein is, dan is de verzameling $\{(x,y,z) \mid x_1 \leq x \leq x_2, (y,z) \in G\}$ een p.i. element in \mathbb{R}^3 . Hierbij is G een gebied in \mathbb{R}^2 .

Q3) Als $\theta_1 < \theta_2$ en $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ klein is, dan is de verzameling (in bolcoördinaten) gegeven door $0 \leq \rho \leq \rho_1$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, een p.i. element in \mathbb{R}^3 .



Evenals bij oppervlakte-integralen kan men hier de integraal over een p.i. element benaderen door een integraal van lagere dimensie. Zo geldt, als f continu is op E :

$$(Q1) \quad \int_E f \, d\mu = \iiint_E f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \approx \left(\int_{g(x_1, y_1)}^{h(x_1, y_1)} f(x_1, y_1, z) \, dz \right) \Delta x \Delta y ,$$

$$(Q2) \quad \int_E f \, d\mu = \iiint_E f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \approx \left(\iint_G f(x_1, y, z) \, dy \, dz \right) \Delta x ,$$

$$(Q3) \quad \int_E f \, d\mu = \iiint_E f(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \approx \left(\iint_G f(\rho, \theta_1, \varphi) \rho^2 \, d\rho \, d\varphi \right) \sin \theta_1 \Delta \theta$$

waarbij $G = \{(\rho, \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq \rho_1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.

De afleiding van deze formules is dezelfde als in 4.3.5.

4.5.6. Laat G een drie-dimensionaal gebied in \mathbb{R}^3 zijn en zij de functie f continu op G . Ter berekening van $\int_G f \, d\mu$ verdelen we G in p.i. elementen E_i . We benaderen de integraal van f over E_i door een één- of twee-dimensionale integraal en we sommeren over alle elementen E_i . Zo kunnen we de volume-integraal herleiden tot een herhaalde integraal. Zij bijv. G het gebied gegeven door

$$G = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in G_0, g(x,y) \leq z \leq h(x,y)\} ,$$

waarbij G_0 een gebied in \mathbb{R}^2 is. Dan vinden we, gebruikmakend van p.i. elementen van het type Q1,

$$\iiint_G f(x,y,z) dx dy dz = \iint_{G_0} \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dx dy .$$

Zij vervolgens G_0 gegeven door

$$G_0 = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, k(x) \leq y \leq \ell(x)\} ,$$

dan is ook de integraal over G_0 te herleiden tot een herhaalde integraal. We vinden

$$\iiint_G f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{k(x)}^{\ell(x)} \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx ,$$

hetgeen we vaak noteren door

$$\int_a^b dx \int_{k(x)}^{\ell(x)} dy \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z) dz .$$

4.5.7. Voorbeelden

1) Bepaal $\iiint_G \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$,

waarbij G een gebied is in het eerste octant dat wordt begrensd door de coördinaatvlakken en het vlak $x+y+z=1$.

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{-1}{2(x+y+z+1)^2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{8} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(x+y+1)^2} = \\
 &= -\frac{1}{8} \int_0^1 (1-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\frac{-1}{x+y+1} \right]_{y=0}^{y=1-x} = \\
 &= -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16} .
 \end{aligned}$$

- 2) Gevraagd het traagheidsmoment T t.o.v. de z -as van de homogene kubus K :
 $|x| \leq h, |y| \leq h, |z| \leq h$, met massadichtheid 1.

$$\begin{aligned}
 T &= \iiint_K (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_{-h}^h dx \int_{-h}^h (x^2 + y^2) dy \int_{-h}^h dz = \\
 &= 2h \int_{-h}^h (2hx^2 + \frac{2}{3} h^3) dx = \frac{16}{3} h^5 .
 \end{aligned}$$

- 3) Het volume van de vier-dimensionale eenheidsbol
 $\{(x,y,z,t) \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 1\}$ in \mathbb{R}^4 is

$$V = 2 \iiint_G \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} dx dy dz ,$$

waarbij het gebied G gegeven wordt door $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

We gebruiken bolcoördinaten en passen de substitutie $\rho = \sin \alpha$ toe:

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \iiint_G \sqrt{1 - \rho^2} \rho^2 \sin \theta \rho d\theta d\rho = \\
 &= 2 \int_0^1 \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2} d\rho \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \pi^2 .
 \end{aligned}$$

- 4) Het zwaartepunt $\underline{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ van de halve bol $G = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge z \geq 0\}$ in \mathbb{R}^3 ligt om symmetrieredenen op de z-as, zodat $\xi = \eta = 0$.

$$\zeta V = \iiint_G z dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

zodat $\zeta = \frac{\pi}{4} / \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{8}$.

4.5.8. Stelling. (Guldin (1577-1643)). Het volume van een *omwentelingslichaam* is gelijk aan het produkt van de oppervlakte van een meridiaandoorsnede en de lengte van de baan die het zwaartepunt van de meridiaandoorsnede bij de wenteling beschrijft.

Bewijs. Stel dat het omwentelingslichaam L ontstaat door wenteling om de z-as van het gebied G, gelegen in het (x,z)-vlak. Met gebruik van cylindercoördinaten vinden we voor het volume V van L:

$$V = \iiint_L dx dy dz = \iiint_L r dr d\varphi dz = 2\pi \iint_G r dr dz = 2\pi \iint_G x dx dz .$$

Voor de x-coördinaat ξ van het zwaartepunt van G geldt (zie 4.1.4, voorbeeld 3):

$$\xi \iint_G dx dz = \iint_G x dx dz ,$$

dus

$$V = 2\pi\xi \cdot \text{Opp. G} .$$

□

4.5.9. Voorbeelden.

- 1) Gevraagd het volume van het lichaam, begrensd door

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2 , \quad (a > b) .$$

Het lichaam ontstaat door wenteling om de z-as van de cirkelschijf $(x - a)^2 + z^2 = b^2$ in het (x,z)-vlak; het lichaam is een torus. Op grond van de stelling van Guldin is het gevraagde volume

$$2\pi a \cdot \pi b^2 = 2\pi^2 ab^2 .$$

- 2) Bepaal het zwaartepunt van de helft van de torus (uit voorbeeld 1), waarvoor $y \geq 0$.

Uit symmetrie-overwegingen volgt dat het zwaartepunt op de y-as ligt.

Voor de y-coördinaat η geldt

$$\begin{aligned} \pi^2 ab^2 \eta &= \iiint_G y dx dy dz = \iiint_G r^2 \sin \varphi \, dr d\varphi dz = \\ &= \int_{a-b}^{a+b} r^2 dr \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_{-p}^p dz , \end{aligned}$$

waarin G de gegeven torushelft is en $p = \sqrt{b^2 - (r - a)^2}$.

Substitueer $r - a = b \cos \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, dan is

$$\begin{aligned} \pi^2 ab^2 \eta &= 2 \cdot 2 \int_{a-b}^{a+b} r^2 \sqrt{b^2 - (r - a)^2} \, dr = \\ &= 4b^2 \int_0^\pi (a + b \cos \alpha)^2 \sin^2 \alpha \, d\alpha = 4b^2 \left(\frac{\pi}{2} a^2 + 0 + \frac{\pi}{8} b^2 \right) , \end{aligned}$$

dus

$$\eta = \frac{4a^2 + b^2}{2\pi a} .$$

4.5.10. Het volume van een *omwentelingslichaam* G kan men ook berekenen op de manier van 4.4.5.

Zij weer K een kromme in het xy -vlak, gegeven door $y = y(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$.

Door wentelen om de x -as ontstaat een oppervlak S . G wordt dan begrensd door S en de vlakken $x = a$ en $x = b$. Door vlakken loodrecht op de x -as wordt G in schijven verdeeld waarvan de inhoud bij benadering gelijk is aan $\pi y(x)^2 \Delta x$.

Dus

$$V = \int_a^b \pi y(x)^2 dx .$$

Als K door een parametervoorstelling $\underline{x} = (x(t), y(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$ is gegeven komt er

$$V = \int_\alpha^\beta \pi y(t)^2 \dot{x}(t) dt .$$

4.5.11. Voorbeelden.

1) Als men de hyperbool met vergelijking $y^2 - x^2 = c^2$ wentelt om de x-as ontstaat een (omwentelings-)halsvlak.

Het door de vlakken $x = a$ en $x = b$ ($b > a$) daaruit gesneden volume is

$$V = \pi \int_a^b (c^2 + x^2) dx = \pi \left(c^2 x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_a^b = \frac{\pi(b-a)}{3} (3c^2 + a^2 + ab + b^2) .$$

2) Men wentelt de cycloïde

$$x = at - a \sin t, \quad y = a - a \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

om de x-as. Het zo gevormde lichaam heeft volume

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^2 (1 - \cos t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 + 3 \cos^2 t) dt = \pi a^3 (2\pi + 3\pi) = 5\pi^2 a^3 . \end{aligned}$$

4.5.12. Voor het volume van een lichaam G in \mathbb{R}^3 geldt $V = \iiint_G dx dy dz$.

Is G gegeven als in 4.5.6, dan vinden we

$$V = \iint_{G_0} h(x,y) dx dy - \iint_{G_0} g(x,y) dx dy .$$

4.5.13. Voorbeeld.

Gevraagd het volume van het lichaam, gegeven door

$$0 \leq z \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq z^2 .$$

Het lichaam wordt begrensd door het vlak $z = 1$ en de kegel $z^2 = x^2 + y^2$ met 0 als top en de z-as als as. Deze kegel snijdt het vlak $z = 1$ volgens de cirkel gegeven door $x^2 + y^2 = 1, z = 1$.

Neem $G_0 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $h(x,y) = 1$, $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, dan is het gevraagde volume

$$\begin{aligned} \iint_{G_0} 1 \, dx dy - \iint_{G_0} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy &= \pi - \iint_{G_0} r^2 dr d\varphi = \\ &= \pi - \int_0^1 r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

6. Oneigenlijke meervoudige integralen.

4.6.1. Definitie: Laat G een gesloten en niet-begrensd gebied in \mathbb{R}^2 zijn en zij de functie $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Zij $B(\underline{0}, R) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\underline{x}\| \leq R\}$. Onder de *oneigenlijke integraal* van f over G (notatie: $\iint_G f(x,y) dx dy$) verstaan we

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{G \cap B(\underline{0}, R)} f(x,y) dx dy$$

wanneer deze limiet bestaat.

Evenals bij oneigenlijke integralen van functies met één variabele spreken we over convergentie en divergentie van de oneigenlijke integraal.

De oneigenlijke integraal $\iint_G f(x,y) dx dy$ heet *absoluut convergent* wanneer $\iint_G |f(x,y)| dx dy$ convergent is.

4.6.2. Stelling: Een absoluut convergente oneigenlijke integraal is tevens convergent. Bovendien mag een oneigenlijke integraal, *wanneer hij absoluut convergent is*, berekend worden via de voor oppervlakte-integralen in \mathbb{R}^2 gebruikelijke technieken, met name door over te gaan op een herhaalde integraal. (Zie §3.)

We zullen geen bewijs geven van de stelling; we merken slechts op dat een duidelijke analogie aanwezig is tussen oneigenlijke integralen en reeksen, zeker voor de eigenschap dat absolute convergentie gewone convergentie impliceert.

De voorwaarde van absolute convergentie behoeft in de praktijk gewoonlijk niet van te voren te worden geverifieerd. Voor een *positieve integrand* volgt de (absolute) convergentie uit de convergentie van een bijbehorende herhaalde integraal.

We merken nog op, dat oneigenlijke volume-integralen op dezelfde wijze geïntroduceerd worden, en dat de analoge eigenschappen gelden.

4.6.3. Voorbeelden.

In de volgende voorbeelden is de integrand steeds positief zodat de absolute convergentie volgt uit de (gewone) convergentie van de herhaalde integralen.

1) Bereken $\iint_G \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}$, waarin $G: 4x^2 + y^2 \geq 1$.

We gebruiken poolcoördinaten r, φ . De vergelijking van de ellips $4x^2 + y^2 = 1$ wordt dan: $r^2(4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1$. De integraal gaat nu over in

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2} &= \iint_G \frac{r dr d\varphi}{r^4} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{(4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} \frac{dr}{r^3} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[-\frac{1}{r^2} \right]_{(4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{5\pi}{2}. \end{aligned}$$

2) Bereken $\iiint_G \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$, waarin $G: |z| \geq 3$.

1°. Gebruik cylindercoördinaten r, φ, z , dan gaat de integraal over in

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{r dr d\varphi dz}{(r^2 + z^2)^2} &= 2 \int_3^{\infty} dz \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= 2\pi \int_3^{\infty} dz \left[\frac{-1}{r^2 + z^2} \right]_{r=0}^{r=\infty} = 2\pi \int_3^{\infty} \frac{dz}{z^2} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

2°. Gebruik bolcoördinaten ρ, θ, φ , dan gaat de integraal over in

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi}{\rho^4} &= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{3/\cos \theta}^{\infty} \frac{\sin \theta}{\rho^2} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \left[-\frac{1}{\rho} \right]_{3/\cos \theta}^{\infty} = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

3) Bereken $\int_0^{\infty} y^5 dy \int_{y^2}^{\infty} \frac{dx}{1+x^8}$.

Daar de binnenste integraal te moeilijk is, schrijven we de herhaalde integraal als een oppervlakte-integraal van het niet begrensde gebied $G = \{(x,y) \mid y \geq 0, x \geq y^2\}$. Dan volgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y^5 dy \int_{y^2}^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} &= \iint_G \frac{y^5}{1+x^8} dx dy = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} \int_0^{\sqrt{x}} y^5 dy = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} \cdot \frac{1}{6} x^3 = \frac{1}{24} \int_0^{\infty} \frac{(x^4)'}{1+x^8} dx = \frac{\pi}{48}. \end{aligned}$$

4) Zij $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$. Dan is

$$\begin{aligned} \iint_G e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \iint_G e^{-r^2} r dr d\varphi = \\ &= \int_0^{\infty} dr \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \\ &= -\frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

We berekenen vervolgens $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$:

$$\begin{aligned} \iint_G e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dy = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = I^2 \end{aligned}$$

zodat $I^2 = \frac{\pi}{4}$ en $I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

4.6.4. Definitie. Laat G een begrensde en gesloten gebied in \mathbb{R}^2 zijn en zij de functie $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ continu op G behalve in het punt $\underline{a} \in G$. Onder de *oneigenlijke integraal* van f over G (notatie: $\iint_G f(x,y) dx dy$) verstaan we

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \iint_{G \setminus U_\delta(\underline{a})} f(x,y) dx dy ,$$

wanneer deze limiet bestaat. Hierbij is $U_\delta(\underline{a}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\underline{x} - \underline{a}\| < \delta\}$. De oneigenlijke integraal $\iint_G f(x,y) dx dy$ heet *absoluut convergent* wanneer $\iint_G |f(x,y)| dx dy$ convergeert.

4.6.5. De stelling 4.6.2 kan ook hier gehanteerd worden, hij blijft letterlijk waar. Ook oneigenlijke volume-integralen over begrensde, gesloten gebieden kunnen op analoge wijze ingevoerd en berekend worden.

4.6.6. Voorbeelden.

1) Zij $B = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\underline{x}\| \leq 1\}$. Voor $\alpha > 0$ is de integraal

$$I = \iiint_B \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}} dx dy dz$$

oneigenlijk. Daar de integrand positief is, komt absolute convergentie overeen met convergentie. We gaan over op bolcoördinaten:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\rho=0}^1 d\rho \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{\rho^\alpha} \rho^2 \sin \theta d\varphi = \\ &= 4\pi \int_0^1 \rho^{2-\alpha} d\rho . \end{aligned}$$

De integraal convergeert voor $\alpha < 3$ met als uitkomst $\frac{4\pi}{3-\alpha}$.

Hij divergeert voor $\alpha \geq 3$.

2) Beschouw de herhaalde integraal

$$I_1 = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx .$$

In de binnenste integraal substitueren we $x = yt$, dan vinden we

$$\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{1}{y} \int_0^{1/y} \frac{t^2 - 1}{(1 + t^2)^2} dt = \frac{-1}{y^2 + 1}.$$

Daaruit volgt $I_1 = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}$.

Verwissel nu de integratievolgorde in I_1 , en beschouw de herhaalde integraal

$$I_2 = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy.$$

Analoog als voren vinden we $I_2 = +\frac{\pi}{4}$ (ga na). Blijkbaar is de integraal

$\iint_G \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$, met $G = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, niet absoluut convergent.

7. Gammafunctie, betafunctie

4.7.1. In deze paragraaf bespreken we een tweetal speciale functies die veelvuldig worden gebruikt in de mathematische fysica en de statistiek.

We definiëren de *gammafunctie* door

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad (x > 0).$$

De convergentie van deze integraal moet onderzocht worden in $t = 0$ en $t = \infty$.

We splitsen het integratie-interval: $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$.

Voor $x > 0$ is $e^{-t} t^{x-1} < t^{-(x+1)} t^{x-1} = t^{-2}$ voor voldoende grote t , zodat de tweede deelintegraal convergeert voor $x > 0$.

De eerste deelintegraal is niet oneigenlijk wanneer $x \geq 1$. Voor $0 < x < 1$ geldt verder $e^{-t} t^{x-1} < t^{x-1}$ en daar $\int_0^1 t^{x-1} dt$ convergeert voor $0 < x < 1$ is dus de eerste deelintegraal ook convergent voor $0 < x < 1$.

4.7.2. Met behulp van partiële integratie leiden we af:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = -e^{-t} t^x \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) , \quad (x > 0) .$$

Wegens $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$, volgt na herhaalde toepassing hiervan:

$$\Gamma(n + 1) = n! , \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \text{ dus}$$

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2, \Gamma(4) = 6, \dots$$

Wegens $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$ (hier is $t = y^2$ gesubstitueerd en het resultaat van 4.6.3, voorbeeld 4 gebruikt) volgt eveneens

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \dots$$

In het algemeen is voor $n \in \mathbf{Z}, n \geq 0$

$$\begin{aligned} \Gamma(n + \frac{1}{2}) &= (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \dots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \\ &= \frac{(2n - 1)(2n - 3) \dots 3 \cdot 1}{2^n} \sqrt{\pi} = \\ &= \frac{2n(2n - 1)(2n - 2)(2n - 3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^n \cdot 2n(2n-2) \dots 2} \sqrt{\pi} , \end{aligned}$$

oftewel

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} , \quad (n = 0, 1, 2, \dots) .$$

4.7.3. De volgende integralen zijn door de substitutie $t^2 = s$ te herleiden tot de gammafunctie:

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-s} s^n ds = \frac{1}{2} \Gamma(n + 1) = \frac{1}{2} n! , \quad (n = 0, 1, 2, \dots) ,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{n-\frac{1}{2}} ds = \frac{1}{2} \Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n+1} n!} ,$$

(n = 0, 1, 2, ...) .

4.7.4. Vervolgens definiëren we de *betafunctie* door

$$(1) \quad B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad (p > 0, q > 0).$$

De convergentie van deze integraal kan worden aangetoond via splitsing van het integratie-interval: $\int_0^1 = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1$ (ga na).

Men kan gemakkelijk afleiden dat $B(p,q) = B(q,p)$.

Door de substitutie $t = \sin^2 \varphi$ vinden we een andere integraalvoorstelling voor de betafunctie:

$$(2) \quad B(p,q) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi)^{2p-1} (\cos \varphi)^{2q-1} d\varphi.$$

Het verband tussen de gamma- en de betafunctie wordt gelegd door:

4.7.5. Stelling. $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Bewijs. Ga uit van

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt \int_0^\infty e^{-s} s^{q-1} ds.$$

Door de substituties $t = x^2$, $s = y^2$ gaat deze integraal over in

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2q-1} dy = \\ &= 4 \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-x^2-y^2} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy, \end{aligned}$$

waarin $\mathbb{R}_+^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$. De integraal over \mathbb{R}_+^2 convergeert absoluut vanwege de absolute convergentie van de herhaalde integraal. We mogen op poolcoördinaten overgaan, waarna volgt

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-r^2} r^{2p+2q-2} (\cos \varphi)^{2p-1} (\sin \varphi)^{2q-1} r dr d\varphi = \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-r^2} (r^2)^{p+q-1} (r^2)' dr \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi)^{2p-1} (\sin \varphi)^{2q-1} d\varphi = \\ &= \Gamma(p+q)B(q,p) = \Gamma(p+q)B(p,q) . \quad \square \end{aligned}$$

Nemen we in 4.7.5 $p = q = \frac{1}{2}$, dan vinden we

$$[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 = B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi = \pi .$$

Wegens $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$ volgt hieruit, in overeenstemming met 4.7.2,

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} .$$

4.7.6. Voorbeeld.

Gevraagd de oppervlakte \mathcal{O} van het gebied begrensd door de astroïde $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

Schets de astroïde en merk op dat er symmetrie t.o.v. de x-as en t.o.v. de y-as bestaat. De in het eerste kwadrant gelegen boog van de astroïde wordt beschreven door $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1$.

De gevraagde oppervlakte is

$$\mathcal{O} = 4 \int_0^1 (1 - x^{2/3})^{3/2} dx .$$

Door middel van de substitutie $x^{2/3} = t$ is deze integraal te herleiden tot

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= 6 \int_0^1 (1 - t)^{3/2} t^{1/2} dt = 6B(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}) = 6 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)} = \\ &= 6 \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})}{3!} = \frac{3\pi}{8} . \end{aligned}$$

4.7.7. Substitueren we $2p-1 = n$ en $2q-1 = m$ in 4.7.4, formule (2), dan vinden we

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n \varphi \cos^m \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right)$$

voor $n > -1$, $m > -1$. In het bijzonder is b.v.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi \cos^6 \varphi \, d\varphi &= \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(6)} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{5!} = \frac{3}{512} \pi . \end{aligned}$$

4.7.8. Gevraagd het traagheidsmoment T t.o.v. de z -as van het homogene lichaam G , dat begrensd wordt door het vlak $z = x$ en de omwentelingsparaboloïde $z = x^2 + y^2$; de massadichtheid van G is 1. We gebruiken cylindercoördinaten, dan wordt het vlak gegeven door $z = r \cos \varphi$ en de paraboloïde door $z = r^2$. De projectie op het (x,y) -vlak van de snijkromme van vlak en paraboloïde wordt beschreven door $r = \cos \varphi$, $z = 0$.

$$\begin{aligned} T &= \iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint_G r^3 dr d\varphi dz = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^3 dr \int_{r^2}^{r \cos \varphi} dz = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} (r^4 \cos \varphi - r^5) dr = \frac{1}{15} \int_0^{\pi/2} \cos^6 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{96} . \end{aligned}$$

4.7.9. Beschouw een experiment waarvan de uitkomst $x \in \mathbb{R}$ in zekere mate door het toeval bepaald wordt. Men kan dan invoeren de zgn. *kansdichtheid* f , zodanig dat de kans op een uitkomst $x \in [a,b]$ gegeven wordt door

$$P([a,b]) = \int_a^b f(t) dt .$$

In vele praktische situaties blijkt de kansdichtheid f te worden gegeven door

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

waarin μ en σ gegeven reële getallen zijn met $\sigma > 0$. We zeggen dan dat x *normaal verdeeld* is met *gemiddelde* μ en *standaardafwijking* σ . De grafiek van $f(t)$ heet de *kromme van Gauss*; deze kromme is ééntoppig en symmetrisch t.o.v. $t = \mu$.

De kans $P((-\infty, \infty))$ op een uitkomst $x \in (-\infty, \infty)$ dient 1 te zijn. Inderdaad blijkt via de substituties $t - \mu = \sigma s\sqrt{2}$, $s^2 = y$, dat

$$\begin{aligned} P((-\infty, \infty)) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

8. Integralen met een parameter

4.8.1. De functie $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ is een voorbeeld van een functie die gedefinieerd is door middel van een integraal; de variabele x treedt op als parameter van de integraal. Een ander, eenvoudiger, voorbeeld is

$$F(x) = \int_1^2 \frac{1}{(t+x)^2} dt$$

$$\text{(dus: } F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \text{)}.$$

Willen we $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$ berekenen, dan kan dit uiteraard via

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Langs de volgende weg krijgen we echter dezelfde uitkomst:

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \int_1^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(t+x)^2} dt = \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} \Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

De volgende stelling spreekt uit, dat voor functies die gegeven zijn als eigenlijke integraal met een parameter, beide wegen altijd hetzelfde resultaat opleveren:

4.8.2. Stelling. Zij $f: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie en zij $x_0 \in [c,d]$.

Dan is

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b f(t,x) dt = \int_a^b f(t,x_0) dt .$$

Anders gezegd: Is $f: [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ continu, dan is ook de functie

$F: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$F(x) = \int_a^b f(t,x) dt$$

continu.

4.8.3. We keren terug tot het voorbeeld uit 4.8.1. Voor de afgeleide van F geldt enerzijds

$$F'(x) = \left\{ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right\}' = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} ;$$

anderzijds is ook

$$F'(x) = \int_1^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(t+x)^2} \right) dt = \int_1^2 \frac{-2}{(t+x)^3} dt = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} .$$

Ook deze gelijkheid blijkt in geval van eigenlijke integralen steeds te gelden; we mogen dus "differentiëren onder de integraal":

4.8.4. Stelling: Zij $f(t,x)$ continu op $[a,b] \times [c,d]$ en laat $f_x(t,x)$ bestaan en continu zijn op $[a,b] \times (c,d)$. Dan is

$$F(x) = \int_a^b f(t,x) dt$$

differentieerbaar op (c,d) en

$$F'(x) = \int_a^b f_x(t,x) dt .$$

4.8.5. Wanneer een functie gedefinieerd is als oneigenlijke integraal met parameter, gelden bovengenoemde eigenschappen in het algemeen niet meer.

Voorbeeld. Zij $F(x) = \int_0^{\infty} x e^{-tx} dt$ ($x \geq 0$).

Deze integraal is voor alle $x \geq 0$ absoluut convergent.

Voorts is $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{-tx} = 0$ voor alle $t \geq 0$. Er geldt echter niet $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0$;

immers met behulp van de substitutie $tx = y$ volgt eenvoudig

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-y} dy = 1 \text{ voor alle } x > 0.$$

Wel kunnen we opmerken, dat er stellingen bestaan die uitspreken dat onder bepaalde extra voorwaarden eigenschappen als in 4.8.2. en 4.8.4. voor oneigenlijke integralen blijven gelden. We gaan hier echter niet op in.

4.8.6. Beschouw de integraal

$$F(x) = \int_0^{h(x)} f(t,x) dt \quad (x \in [c,d]),$$

waarin $h : [c,d] \rightarrow [0,1]$ en $f : [0,1] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ continue afbeeldingen zijn. Laat bovendien h differentieerbaar zijn op (c,d) en laat $f(t,x)$ differentieerbaar zijn naar x met $f'_x(t,x)$ continu op $[0,1] \times (c,d)$. Dan is F differentieerbaar. We tonen dit aan en we geven $F'(x)$ met behulp van de kettingregel voor functies van twee variabelen. Hiertoe gebruiken we de hulpfunctie

$$\varphi(u,v) = \int_0^u f(t,v) dt$$

zodat $F(x) = \varphi(h(x), x)$. Merk op, dat

$$\varphi_u(u,v) = f(u,v) \text{ en } \varphi_v(u,v) = \int_0^u f'_v(t,v) dt.$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} F'(x) &= \varphi_u(h(x), x)h'(x) + \varphi_v(h(x), x)x' = \\ &= f(h(x), x)h'(x) + \int_0^{h(x)} f_x(t, x)dt . \end{aligned}$$

Op dezelfde wijze ziet men dat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t, x)dt &= f(h(x), x)h'(x) - f(g(x), x)g'(x) + \\ &+ \int_{g(x)}^{h(x)} f_x(t, x)dt , \end{aligned}$$

wanneer analoge voorwaarden gelden.

4.8.7. Voorbeeld.

Beschouw de gedwongen ongedempte trilling onder invloed van een uitwendige kracht, beschreven door de vergelijking

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0 f(t) .$$

Laat de beginvoorwaarden zijn: $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

We zullen verifiëren dat de oplossing wordt gegeven door

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \sin \omega_0(t - \tau)d\tau .$$

Bepaal daartoe $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ door differentiatie onder het integraalteken onder toepassing van 4.8.6:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t) \sin \omega_0(t - t) + \omega_0 \int_0^t f(\tau) \cos \omega_0(t - \tau)d\tau = \\ &= \omega_0 \int_0^t f(\tau) \cos \omega_0(t - \tau)d\tau , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \omega_0 f(t) \cos \omega_0(t-t) - \omega_0^2 \int_0^t f(\tau) \sin \omega_0(t-\tau) d\tau = \\ &= \omega_0 f(t) - \omega_0^2 \int_0^t f(\tau) \sin \omega_0(t-\tau) d\tau .\end{aligned}$$

Uit het laatste resultaat volgt: $\ddot{x}(t) = \omega_0 f(t) - \omega_0^2 x(t)$, zodat $x(t)$ inderdaad aan de gegeven differentiaalvergelijking voldoet. Voorts is

$$x(0) = \int_0^0 f(\tau) \sin \omega_0(0-\tau) d\tau = 0$$

en evenzo $\dot{x}(0) = 0$, zodat $x(t)$ ook aan de beginvoorwaarden voldoet.

4.8.8. Voorbeeld.

We beschouwen het volgende probleem uit de statica. Een staaf met lengte ℓ is geplaatst langs het interval $[0, \ell]$ van de x -as. Het uiteinde $x = 0$ van de staaf is ingeklemd en de staaf ondervindt een dwarsbelasting $q(x)$. De dwarskracht Q en het moment M in een punt x zijn dan achtereenvolgens

$$Q(x) = \int_x^\ell q(y) dy, \quad M(x) = \int_x^\ell (y-x)q(y) dy .$$

Differentieer $Q(x)$, $M(x)$, dan volgt met 4.8.6

$$Q'(x) = -q(x), \quad M'(x) = (x-x)q(x) - \int_x^\ell q(y) dy = - \int_x^\ell q(y) dy$$

en dus $M''(x) = q(x)$.