TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het College

Wiskunde 20

Voorjaarssemester 1976

Jaap

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het college

Wiskunde 20

(nieuwe stijl)

Dictaatnr. 2.216 Prijs *f* 2,--

Inhoudsbeschrijving
Vraagstukken bij het college Wiskunde 20
Voorjaar 1976

JdG, 6 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het college

WISKUNDE 20

Voorjaarssemester 1976

Week 1

1.1. Bereken de afstand tussen de punten (2,1,3) en (-1,2,4).

1.2. Bereken de afstand tussen de punten (-1,1,-3) en (-3,-2,3).

1.3. Laat zien dat het punt (3,4) ligt op de rechte met parametervoorstelling
$\underline{x} = (1,5) + \lambda(2,-1)$.
Bepaal de snijpunten van de rechte met de x-as en met de y-as.

1.4. Laat zien dat het punt $(3,-2\sqrt{2})$ ligt op de rechte $\underline{x} = (1,\sqrt{2}) + \lambda(-\sqrt{2},3)$.
Bepaal de snijpunten van de rechte met de x-as en met de y-as.

1.5. Bepaal het snijpunt van de rechten $\underline{x} = (2,1) + \lambda(1,3)$ en $x - y + 1 = 0$.

1.6. Bepaal het snijpunt van de rechten $\underline{x} = (9,0) + \lambda(7,3)$ en $\underline{x} = (0,-8) + \mu(2,1)$.

1.7. Bepaal het snijpunt van de rechten $\underline{x} = (2,1) + \lambda(1,3)$ en $\underline{x} = (0,3) +$

1.8. Geef enkele parametervoorstellingen van de rechte met vergelijking
$4x + 3y - 2 = 0$.

1.9. Geef enkele parametervoorstellingen van de rechte met vergelijking
$4y - 5 = 0$.

1.10. Geef een parametervoorstelling van de rechte door de punten (-1,1,4) en (1,2,3). Bepaal het snijpunt van deze rechte met het (x,y)-vlak.

1.11. Geef een parametervoorstelling van de rechte door de punten (1,2,3) en (2,4,3). Bepaal het snijpunt van deze rechte met het (x,z)-vlak.

1.12. Geef enkele parametervoorstellingen van het vlak met vergelijking
$2x + 4y + 4z = 7$.

1.13. Geef de vergelijking van het vlak met parametervoorstelling

$$\underline{x} = (1,1,3) + \lambda(0,1,1) + \mu(-1,0,1) .$$

1.14. Laat zien dat de rechte $\underline{x} = (1,2,3) + \lambda(2,3,5)$ evenwijdig is aan het vlak $x + 6y - 4z = 2$.

1.15. Laat zien dat de rechte $\underline{x} = (3,2,1) + \lambda(-1,1,3)$ evenwijdig is aan het vlak

$$\underline{x} = (1,0,0) + \mu(3,1,-3) + \nu(4,2,-3) \ .$$

1.16. Bepaal een parametervoorstelling van het vlak door het punt $(0,1,1)$ en de rechte $\underline{x} = (1,-1,0) + \lambda(2,1,1)$.
Bepaal ook de vergelijking van dit vlak.

1.17. Geef een parametervoorstelling van het vlak door het punt $(1,2,1)$ dat evenwijdig is aan de rechten $\underline{x} = (-6,2,0) + \lambda(1,1,1)$ en $\underline{x} = (5,1,3) + \mu(6,2,1)$.

1.18. Geef een parametervoorstelling van het vlak door de oorsprong en de rechte $\underline{x} = (1,-1,0) + \lambda(2,1,1)$.
Bepaal ook de vergelijking van dit vlak.

1.19. Bepaal het snijpunt van de rechte door de punten $(1,2,3)$ en $(4,5,-3)$ met het vlak $2x - y + 3z = 4$.

1.20. De rechte ℓ is gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x} = (0,2,1) + \lambda(1,1,0)$.
Het vlak V gaat door $(1,2,1)$ en is evenwijdig aan de z-as en aan de rechte $\underline{x} = \mu(3,1,0)$.
Bepaal het snijpunt van ℓ en V.

1.21. Het vlak V gaat door de punten $(1,2,3)$ en $(2,0,1)$ en is evenwijdig aan de rechte gegeven door de vergelijkingen

$$x + y - z = 2, \quad 2x - y + 3z = 1 \ .$$

Bepaal de vergelijking van V.

1.22. De rechte ℓ is gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x} = (0,0,1) + \lambda(1,0,0)$.
Bepaal een parametervoorstelling van de rechte door het punt $(1,1,2)$ die ℓ en de y-as snijdt.

1.23. Gegeven zijn de rechten

ℓ: $\underline{x} = (1,2,3) + \lambda(1,0,1)$;

m: snijlijn van de vlakken $2x + y + z = 0$, $2x + y - z = 0$;

n: rechte door de punten (0,2,5) en (1,4,6) .

Bepaal een parametervoorstelling van de rechte die ℓ en m snijdt en evenwijdig is aan n.

1.24. Bepaal de scherpe hoek die de rechten $\underline{x} = (7,1,-2) + \lambda(2,-1,-3)$ en $\underline{x} = (0,4,5) + \mu(1,3,2)$ met elkaar maken.

1.25. Bepaal de scherpe hoek die de rechten $\underline{x} = (2,-3,4) + \lambda(1,2,3)$ en $\underline{x} = (5,1,-3) + \mu(-2,3,1)$ met elkaar maken.

1.26. Bepaal de afstand van het punt (3,-1,5) tot de rechte $\underline{x} = (0,-1,2) + \lambda(2,2,1)$.

1.27. Bepaal de afstand van het punt (2,-1) tot de rechte $\underline{x} = (1,2) + \lambda(3,-4)$.

1.28. Bepaal de afstand van het punt (1,0,0) tot het vlak $x + 2y + 2z = 10$.

1.29. Bepaal de afstand van het punt (1,1,1) tot het vlak $x + 2y = 8$.

1.30. Gegeven zijn de rechten

ℓ: $\underline{x} = (3,2,5) + \lambda(0,2,-1)$

en

m: $\underline{x} = (4,-3,-1) + \mu(3,-4,1)$.

Bepaal de afstand tussen ℓ en m en een parametervoorstelling van de rechte die ℓ en m loodrecht snijdt.

1.31. Gegeven zijn de rechten

ℓ: $\underline{x} = (-1,3,6) + \lambda(6,1,-2)$

en

m: $\underline{x} = (0,-4,-3) + \mu(3,2,-2)$.

Bepaal de afstand tussen ℓ en m en een parametervoorstelling van de rechte die ℓ en m loodrecht snijdt.

1.32. Bepaal de afstand tussen de rechten

$$\underline{x} = (-1,2,0) + \lambda(1,-1,2) \quad \text{en} \quad \underline{x} = (2,1,1) + \mu(1,-1,2) \, .$$

1.33. Bepaal de scherpe hoek tussen de volgende rechten in $\mathbb{R}^2$:

a) $2x + 3y - 7 = 0$ en $x - 5y + 4 = 0$;

b) $x + y\sqrt{3} - 13 = 0$ en $x - y\sqrt{3} + 4 = 0$.

1.34. Bepaal de scherpe hoek tussen de vlakken

a) $5x + 3y - 8z = 13$ en $13x - 2y - 11z = 5$;

b) $x + y + 2z = 3$ en $2x - y + z = 4$.

1.35. Toon aan dat de rechte $\underline{x} = (1,0,20) + \lambda(2,1,3)$ evenwijdig is aan het vlak $x + y - z = 1$.

1.36. De rechte ℓ is de snijlijn van de vlakken

$$2x - 2y + z = 5 \quad \text{en} \quad x - 2y - 2z = -1 \, .$$

Bepaal de vergelijking van het vlak door het punt (2,3,4) en loodrecht op ℓ.

1.37. De rechte ℓ is de snijlijn van de vlakken

$$2x - y = 1 \quad \text{en} \quad x + 2z = 2 \, .$$

Bepaal de vergelijking van het vlak door het punt (1,2,-1) en loodrecht op ℓ.

1.38. Bepaal de vergelijking van het vlak door de punten (3,-6,3) en (1,6,0) dat loodrecht staat op het vlak $2x - 3y + 6z + 7 = 0$.

1.39. Gegeven is het vlak V: $\underline{x} = \lambda(1,1,0) + \mu(0,0,1)$ en het punt $\underline{x}_0 = (x_0,y_0,z_0)$. Toon aan dat de loodrechte projectie van $\underline{x}_0$ op V gelijk is aan

$$\tfrac{1}{2}(x_0 + y_0,\ x_0 + y_0,\ 2z_0) \, .$$

1.40. Bepaal een parametervoorstelling van de projectie van de rechte $\underline{x} = (-3,7,-1) + \lambda(3,-3,1)$ op het vlak $3x - 2y + 2z = 9$.

1.41. Bepaal een parametervoorstelling van de projectie van de rechte $\underline{x} = (3,-10,6) + \lambda(4,-9,7)$ op het vlak $x - 5y + 3z = 1$.

1.42. Bereken het uitwendig product $\underline{a} \times \underline{b}$ van de vectoren

i) $\underline{a} = (-3,0,3)$, $\underline{b} = (1,-1,1)$;

ii) $\underline{a} = (3,2,5)$, $\underline{b} = (2,2,1)$.

1.43. Het vlak V door (2,3,4) heeft richtingsvectoren (1,4,2) en (4,7,11). Bepaal van deze vectoren het uitwendig product en daarmee de vergelijking van V.

1.44. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a} = (2,14,5)$ en $\underline{b} = (-11,-2,10)$.
Bereken de vectoren $\underline{c}$ waarvoor geldt $\underline{c} \perp \underline{a}$, $\underline{c} \perp \underline{b}$ en $|\underline{c}| = 15$.

1.45. Toon aan dat de rechte $\underline{x} = (0,7,6) + \lambda(-1,1,1)$ evenwijdig is aan het vlak $\underline{x} = (6,1,2) + \alpha(1,2,3) + \beta(5,1,3)$.

1.46. Toon aan dat de vlakken $\underline{x} = \lambda(1,2,4) + \mu(2,1,3)$ en $\underline{x} = (1,1,0) + \rho(-1,1,1) + \sigma(3,0,2)$ evenwijdig zijn.

1.47. Gegeven zijn de vectoren $\underline{u}_1 = (-1,2,2)$, $\underline{u}_2 = (2,-1,2)$. Bereken $\underline{u}_3 = \underline{u}_1 \times \underline{u}_2$.
Schrijf $(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) \times \underline{u}_3$ als lineaire combinatie van $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$.

1.48. Laten in $\mathbb{R}^3$ de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ gegeven zijn met $\underline{a} \perp \underline{b}$, en zij $\underline{p} = \underline{a} \times \underline{b}$.
Dan geldt $\underline{b} \times \underline{p} = \lambda\underline{a}$.
Ga dit na en bepaal λ.
Druk $\underline{a} \times \underline{p}$ uit in $\underline{b}$ en $|\underline{a}|$.

1.49. Toon aan dat $|\underline{a} \times \underline{b}|^2 + (\underline{a},\underline{b})^2 = |\underline{a}|^2|\underline{b}|^2$ $(\underline{a} \in \mathbb{R}^3, \underline{b} \in \mathbb{R}^3)$.

1.50. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven de vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ die niet in één vlak liggen. Toon aan dat de inhoud van het parallellepipedum opgespannen door $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ gelijk is aan $|(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})|$.
N.B. Het parallellepipedum heeft de oorsprong als hoekpunt en $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ als zijden.

Week 2

2.1. Geef een parametervoorstelling $\underline{f}$ van de krommen met de volgende vergelijkingen; geef hierbij ook DOM $\underline{f}$.

a) $y = mx + n$; b) $y = x^2 - 4$;

c) $y^2 = 2x$; d) $(y - b)^2 = 2(x - a)$;

e) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; f) $x^3 + y^3 = 3xy$ (aanw: stel $y = tx$) ;

g) $x^2 + 4y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$.

2.2. Idem voor

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 , \\ x + y + z = 1 ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y = 0 , \\ y^2 + z = 0 ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} z = x^2 + y^2 , \\ x + y + z = 1 ; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 , \\ y^2 + z^2 = 1 . \end{cases}$

2.3. Gegeven is de kromme met parametervoorstelling $\underline{f}$ bepaald door

$$\underline{f}(t) = (2t,\ t^2 - 2t,\ t^3 + 2t^2) .$$

Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan de kromme in het punt corresponderend met $t = 1$.

2.4. Gegeven is de kromme met parametervoorstelling $\underline{f}$ bepaald door

$$\underline{f}(t) = (\tfrac{1}{4}\, t^4,\ \tfrac{1}{3}\, t^3,\ t) .$$

In welke punten van deze kromme is de raaklijn evenwijdig aan het vlak $x + 3y - 4z = 0$?

2.5. Gegeven is de kromme met parametervoorstelling

$$(x(t),y(t)) = (2t - \sin t,\ 2 - \cos t), \qquad t \in \mathbb{R}\ .$$

a) Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan de kromme in het punt corresponderend met $t = a$.

b) Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn evenwijdig is aan de x-as.

c) Teken de kromme.

d) Karakteriseer het ontstaan van deze kromme met behulp van mechanische middelen.

e) Bepaal de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen in de snijpunten van de kromme met de rechte $y = 2$.

2.6. Gegeven is de kromme met parametervoorstelling

$$(x(t),y(t)) = (\sin t - t\cos t,\ \cos t + t\sin t), \qquad t \in [0,\infty)\ .$$

a) Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan de kromme in het punt corresponderend met $t = a$.

b) Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn horizontaal is.

c) Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn verticaal is.

d) Teken de kromme.

e) Ga na dat de kromme ontstaat door een op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ opgerold koord af te wikkelen met de wijzers van de klok mee, te beginnen in het punt $(0,1)$.

f) Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn en de positieve x-as een hoek $\frac{\pi}{4}$ maken.

2.7. Gegeven is de kromme met parametervoorstelling

$$x(t) = t\cos t,\ y(t) = t\sin t,\ z(t) = t, \qquad t \in [0,\infty)\ .$$

a) Toon aan dat de kromme ligt op de halve kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan de kromme in het punt corresponderend met $t = a$.

c) Schets de kromme.

d) Bepaal de verzameling van de snijpunten van de raaklijnen met het vlak $z = 0$.

2.8. Een kromme in $\mathbb{R}^2$ is in poolcoördinaten gegeven door de vergelijking $r = r(\varphi)$, waarbij $r(\varphi)$ een functie is waarvan de tweede afgeleide bestaat en continu is. Een parametervoorstelling van de kromme is dan

$$(x(\varphi),y(\varphi)) = (r(\varphi)\cos\varphi,\ r(\varphi)\sin\varphi) .$$

a) Druk $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ uit in r, φ, $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}$, $\ddot{r} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}$.

b) Laat zien dat $\tan\mu = \frac{r}{\dot{r}}$, waarbij μ de hoek voorstelt tussen de voerstraal en de raaklijn aan de kromme.

2.9. Gegeven is de kromme met parametervoorstelling

$$(x(t),y(t)) = (\sin t,\ \sin 2t), \qquad t \in [-\pi,\pi) .$$

a) Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn horizontaal is.

b) Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn verticaal is.

c) Bewijs dat de x-as en de y-as as van symmetrie zijn.

d) Teken de kromme.

e) Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn richtingscoëfficiënt 2 heeft.

2.10. Schets de hoogtekaarten van de functies f met

a) $f(x,y) = x - y$; b) $f(x,y) = xy$;

c) $f(x,y) = \frac{y}{x}$; d) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2$;

e) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$; f) $f(x,y) = \max(x,y)$;

g) $f(x,y) = \max(|x|,|y|)$.

2.11. Onderzoek of de volgende limieten bestaan:

a) $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} \frac{x - y + x^2}{x + y + y^2}$; b) $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} \frac{x - y + x^2}{-x + y + y^2}$;

c) $\lim\limits_{\underline{x}\to(1,1)} \frac{(x - y)(x + y - 2)}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$; d) $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$.

2.12. De functie f is gedefinieerd door

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x-1}, & x \neq 1, \\ \alpha, & (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

a) Schets de hoogtekaart van f.

b) Is het mogelijk α zo te bepalen dat f continu is in (1,0)?

2.13. De functie f is gedefinieerd door

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{x^2-1}, & x \neq \pm 1, \\ \alpha, & (x,y) = (1,1), \\ \beta, & (x,y) = (-1,-1). \end{cases}$$

a) Schets de hoogtekaart van f.

b) Toon aan dat het niet mogelijk is α en β zo te bepalen dat f continu is in (1,1) en in (-1,-1).

2.14. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{voor } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

Bewijs dat f continu is op $\mathbb{R}^2$.

2.15. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{voor } (x,y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

Bewijs dat f continu is op $\mathbb{R}^2$.

2.16. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = 1 & \text{voor } xy \neq 0, \\ f(x,0) = x, \\ f(0,y) = y^2. \end{cases}$$

In welke punten is f discontinu?

2.17. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(\underline{x}) = \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2} & \text{voor } \underline{x} \neq \underline{0}\ , \\ f(\underline{0}) = 0\ . \end{cases}$$

a) Bereken $\lim\limits_{x \to 0} f(x,mx)$.

b) Bereken $\lim\limits_{x \to 0} f(x,mx^2)$.

c) Is f continu in $\underline{0}$?

2.18. Onderzoek de continuïteit in $\underline{0}$ van de functies

a) $f(\underline{x}) = \dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$ voor $\underline{x} \neq \underline{0}$, $f(\underline{0}) = 1$;

b) $f(\underline{x}) = e^{-\frac{1}{|x-y|}}$ voor $x \neq y$, $f(x,x) = x^3$.

Week 3

3.1. Toon met de definitie van differentieerbaarheid aan dat de volgende functies differentieerbaar zijn in het punt (1,2) en geef de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek door (1,2,f(1,2)) als

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$; b) $f(x,y) = 2x + y^3$.

3.2. Bepaal de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ van de functies

a) $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$; b) $f(x,y) = x^{\sin y}$;

c) $f(x,y) = \ln \tan \frac{x}{y}$; d) $f(x,y) = (x + y)^{x-2y}$;

e) $f(x,y) = xy^2 e^{x^3+2y}$.

3.3. De functie f is gegeven door

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0) .$$

Toon aan dat $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = -f(x,y)$.

3.4. De functie f is gegeven door

$$f(x,y) = x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, \quad x \neq 0,\ y \neq 0 .$$

Toon aan dat $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x,y)$.

3.5. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(\underline{x}) = \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{voor } \underline{x} \neq \underline{0} , \\ f(\underline{0}) = 0 . \end{cases}$$

a) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $\underline{0}$.

b) Onderzoek of f differentieerbaar is in $\underline{0}$.

3.6. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(\underline{x}) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{voor } \underline{x} \neq \underline{0} \,, \\[2ex] f(\underline{0}) = 0 \,. \end{cases}$$

a) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $\underline{0}$.
b) Onderzoek of f differentieerbaar is in $\underline{0}$.

3.7. Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan het oppervlak met vergelijking

$$z = (12 - xy^2)^{1/3} \text{ in het punt } (1,2,2) \,.$$

3.8. Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan het oppervlak met vergelijking

$$z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 4y + 10) \text{ in het punt } (0,0,\ln 10) \,.$$

3.9. Bepaal de punten van het oppervlak met vergelijking

$$z = 15x + 4x^2y^2 - 2xy^2 - 2y^2$$

waar het raakvlak evenwijdig is aan het (x,y)-vlak.

3.10. Gegeven is het oppervlak met vergelijking

$$z = \sin x \sin y, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < y < 2\pi \,.$$

Bepaal de punten van het oppervlak waar het raakvlak evenwijdig is aan het (x,y)-vlak.

3.11. a) Gegeven: $z = xe^{xy}$ met $x = \ln t$, $y = \sin t$.
Bepaal $\frac{dz}{dt}$ met de kettingregel.
b) Gegeven: $z = \arctan(x^2 + y^2)$ met $x = e^t$, $y = \tan t$.
Bepaal $\frac{dz}{dt}$ met de kettingregel.

3.12. Gegeven: $w = \ln(x^3 + y^3 + z^3)$ met $x = t \sin t$, $y = t \cos t$, $z = t$.
Bepaal $\frac{dw}{dt}$ met de kettingregel.

3.13. Van de functie $f(x,y)$ is gegeven: $f(0,1) = -\frac{\pi}{4}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^x$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x - \frac{1}{1+y^2}$.
Als $g(t) = f(x(t),y(t))$, waarin $x(t) = \ln t$ en $y(t) = t$, bepaal dan $g'(t)$ en hieruit $g(t)$.

3.14. Gegeven: $z = f(r)$ met $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Toon aan:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = (f'(r))^2 .$$

3.15. Bepaal alle partiële afgeleiden van de eerste en tweede orde van de functies

a) $f(x,y) = 2x^3y^2 - 3xy + 5y + 7$; b) $f(x,y) = \sin(2x + y)$;

c) $f(x,y) = e^{xy^2}$; d) $f(x,y) = \ln xy^2$;

e) $f(x,y) = x^y$.

3.16. Bepaal de partiële afgeleiden van de derde orde van de functie

$$f(x,y) = x^2y \sin y .$$

3.17. Gegeven:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} .$$

Bereken

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} .$$

3.18. Gegeven: $w = f(r)$ met $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Toon aan:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) .$$

3.19. Geef de formule van Taylor om $\underline{a} = (0,0)$ tot en met de termen van de derde graad voor de functies

a) $f(x,y) = \sin x \ln(1 + y)$;

b) $f(x,y) = \dfrac{1}{1 - (x + y)}$;

c) $f(x,y) = ye^{x-y}$.

3.20. Geef de formule van Taylor tot en met de termen van de derde graad voor de functies

a) $f(x,y) = x^2y + xy - 3x$ met $\underline{a} = (2,3)$;

b) $f(x,y) = x^2y + x - 2y$ met $\underline{a} = (2,1)$;

c) $f(x,y) = \sin xy$ met $\underline{a} = (\frac{\pi}{2}, 1)$;

d) $f(x,y) = \dfrac{1}{1 + (x - y)}$ met $\underline{a} = (1,1)$.

Week 4

4.1. Bepaal de punten waar de raaklijn horizontaal is op de krommen met vergelijking

a) $xy^3 - x^2y^2 = 1$; b) $x^2y - xy^2 + y + 12 = 0$;

c) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$; d) $xy + x^2y^3 = 1$.

4.2. Bepaal de punten waar de raaklijn verticaal is op de krommen met vergelijking

a) $2x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0$; b) $x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$;

c) $x^3y^2 - 6xy = 1$.

4.3. Bepaal de punten op de kromme $x^2 + xy + y^2 = 1$ waar de raaklijn richtingscoëfficiënt 1 heeft.

4.4. Bepaal de punten op de kromme $x^2 - 4xy + 5y^2 = 2$ waar de raaklijn richtingscoëfficiënt $\frac{1}{3}$ heeft.

4.5. Bepaal de punten op de kromme $x^2y^2 - 2xy - 2x - 2y = 0$ waar de raaklijn richtingscoëfficiënt -1 heeft.

4.6. Door de vergelijking $z^3 + xz^2 + yz + 2 = 0$ is z in een omgeving van $(1,2,-1)$ impliciet gegeven als functie van x en y. Bepaal $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ in het punt $(1,2,-1)$.

4.7. Door de vergelijking $x^2 - 4y^2 + z + \ln z = 1$ is z in een omgeving van $(2,1,1)$ gegeven als functie van x en y. Bepaal $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ in het punt $(2,1,1)$.

4.8. Gegeven: $2e^{xy} - z^2 - z \cos y = 0$. Beschouw z als functie van x en y en bepaal de partiële afgeleiden van de eerste en tweede orde van z in het punt $(0,0,1)$.

4.9. Gegeven: $xy + y^2 = z + xe^z$. Beschouw z als functie van x en y en bepaal de partiële afgeleiden z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy} en z_{yy} in het punt (-4,2,0).

4.10. Door de betrekkingen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25 \quad \text{en} \quad x + y + z = 1$$

zijn y en z als functies van x gegeven.
Bereken y', z', y" en z" in het punt (4,-3,0).

4.11. Door de betrekkingen

$$x^3 + y^3 + z^3 - 2yz = 1 \quad \text{en} \quad x + y + z = 1$$

zijn y en z als functies van x gegeven.
Bereken y', z', y" en z" in het punt (0,0,1).

4.12. Een kromme in $\mathbb{R}^3$ is gegeven door het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4z^2 = 16 \ , \\ x + y + z = 6 \ . \end{cases}$$

Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan de kromme in het punt (2,2,2).

4.13. Op de kromme K gegeven door

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - z^2 = 1 \ , \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \ , \end{cases}$$

ligt het punt $\underline{a} = (1,1,1)$. Bewijs dat de raaklijn aan de kromme in $\underline{a}$ evenwijdig is aan het (x,y)-vlak.

4.14. Gegeven is de ellipsoïde E met vergelijking $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{27} = 1$. Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan E in het punt (-2,1,-3).

4.15. Het oppervlak V in $\mathbb{R}^3$ is gegeven door de vergelijking

$$3x^2 + 5y^2 - 2z^2 - 8xy + 4xz - 4yz - 2x + 12y = 1 \ .$$

Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan V in het punt (1,0,0).

4.16. Gegeven is dat het punt (a,b,c) voldoet aan de vergelijking $f(x,y,z) = 0$. In een omgeving U van (a,b,c) zijn $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\frac{\partial f}{\partial z}$ ongelijk nul. Men kan dus in die omgeving z opvatten als functie van x en y, maar ook y als functie van x en z of x als functie van y en z.
Toon aan dat voor deze functies geldt: $\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} = -1$.

4.17. Bepaal de richtingsafgeleide in $\underline{a}$ in de richting van $\underline{v}$ van de volgende functies:

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy,\quad \underline{a} = (1,0),\ \underline{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$;

b) $f(x,y,z) = xy + yz + xz,\quad \underline{a} = (1,2,3),\ \underline{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$;

c) $f(x,y,z) = x^3y + y^3z + z^3x,\quad \underline{a} = (1,1,1),\ \underline{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$.

4.18. De functies f_1 en f_2 zijn gedefinieerd door

$$f_1(\underline{x}) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad \text{voor } \underline{x} \neq \underline{0},\ f_1(\underline{0}) = 0 ;$$

$$f_2(\underline{x}) = y \sin \frac{1}{x^2+y^2} \quad \text{voor } \underline{x} \neq \underline{0},\ f_2(\underline{0}) = 0 .$$

a) Onderzoek de continuïteit van f_1 en f_2 in $\underline{0}$.
b) Onderzoek de differentieerbaarheid van f_1 en f_2 in $\underline{0}$.
c) Onderzoek het bestaan van de richtingsafgeleiden van f_1 en f_2 in $\underline{0}$.

4.19. Bereken en schets de orthogonale trajectoriën van de niveaulijnen van de functies

a) $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \ln y$;

b) $f(x,y) = x^2 - y^2$;

c) $f(x,y) = \frac{y}{x^2}$.

4.20. Bepaal een parametervoorstelling van de kromme door het punt (1,1,1) die alle niveauvlakken van de functie $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ loodrecht snijdt.

4.21. Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de volgende functies f op de aangegeven verzamelingen V:

a) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $V = \{(x,y) \mid \frac{1}{2} \le x \le 1,\ \frac{1}{2} \le y \le 1\}$;

b) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$;

c) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$, $V = \{(x,y) \mid |x| + |y| \le 1\}$;

d) $f(x,y) = x^2 - y$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$;

e) $f(x,y) = x^2 y$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$;

f) $f(x,y) = 5x^4 - 4x^5 + 5y^4$, $V = \mathbb{R}^2$;

g) $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$, $V = \mathbb{R}^2$.

Week 5

5.1. Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de volgende functies f op de aangegeven verzamelingen V:

a) $f(x,y) = x(x^2 + y^2 - 2x)$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$;

b) $f(x,y) = 4(x - 1)^2 - y^2$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$;

c) $f(x,y) = x^2y - 2y^3$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$;

d) $f(x,y) = (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - 2x)$, $V = \{(x,y) \mid y^2 \le x\}$;

e) $f(x,y) = (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - 2x)$, $V = \{(x,y) \mid y^2 \le x \le 3\}$;

f) $f(x,y) = (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - 2x)$, $V = \mathbb{R}^2$;

g) $f(x,y) = y^2 - (x^2 - 1)^2$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$;

h) $f(x,y) = y^2 - (x^2 - 1)^2$, $V = \mathbb{R}^2$.

5.2. Bepaal (bijvoorbeeld met behulp van de multiplicatorenmethode van Lagrange) plaats, aard en waarde van de extrema van de volgende functies f op de aangegeven verzamelingen V:

a) $f(x,y) = (x + 1)^2 + y^2$, $V = \{(x,y) \mid x^3 = y^2\}$;

b) $f(x,y) = xy$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

c) $f(x,y) = xy$, $V = \{(x,y) \mid x^3 + y^3 = 3xy\}$;

d) $f(x,y) = xy$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 2x\}$.

5.3. Bepaal de extrema van de afstand van een punt op de ellips $x^2 + 4y^2 = 4$ tot de rechte $x + y = 4$.

5.4. Bepaal de extrema van de afstand van een punt op de parabool $4y = x^2$ tot het punt $(0,3)$.

5.5. In $\mathbb{R}^4$ is gegeven de rechte ℓ: $\underline{x} = (10,5,15,0) + \lambda(1,2,2,4)$ en het punt $\underline{a} = (1,3,1,4)$.
Bepaal $\underline{b} \in \ell$ zodanig dat $\underline{a} - \underline{b}$ de loodrechte verbindingsvector van $\underline{a}$ en ℓ is en laat zien dat $|\underline{a} - \underline{b}| \leq |\underline{a} - \underline{x}|$ voor alle $\underline{x} \in \ell$. ($\underline{b}$ is de loodrechte projectie van $\underline{a}$ op ℓ.)

5.6. In $\mathbb{R}^4$ is gegeven de rechte ℓ: $\underline{x} = (1,1,2,1) + \lambda(1,2,3,4)$ en het punt $\underline{a} = (5,-2,4,0)$.
Bepaal de loodrechte projectie van $\underline{a}$ op ℓ.

5.7. In $\mathbb{R}^4$ is gegeven het vlak V: $\underline{x} = (5,-5,0,0) + \lambda(2,2,4,-5) + \mu(5,3,-1,1)$ en het punt $\underline{a} = (11,1,-7,-12)$.
Bepaal de loodrechte projectie $\underline{b}$ van $\underline{a}$ op V en laat zien dat $|\underline{a} - \underline{b}| \leq |\underline{a} - \underline{x}|$ voor alle $\underline{x} \in V$.

5.8. In $\mathbb{R}^4$ is gegeven het vlak V: $\underline{x} = \lambda(1,0,1,1) + \mu(0,2,0,1)$ en het punt $\underline{a} = (-2,3,2,5)$.
Bepaal de loodrechte projectie van $\underline{a}$ op V.

5.9. Toon aan dat voor alle $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$4(\underline{a},\underline{b}) \leq (\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \underline{b}) + (\underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \underline{b}) .$$

5.10. Voor welke vectoren $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ geldt $(\underline{u},\underline{x}) = 0$ voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$?

5.11. Zij $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \neq \underline{0}$ een gegeven vector.
Voor welke $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ geldt

a) $|\underline{a} + \underline{u}| = |\underline{a}| + |\underline{u}|$?

b) $|\underline{a} - \underline{u}| = |\underline{a}| + |\underline{u}|$?

5.12. Los de volgende stelsels vergelijkingen op:

a)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 , \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 , \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 ; \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 , \\ 7x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 7x_4 = 0 , \\ -5x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 ; \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 , \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 , \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0 ; \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 , \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 , \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 , \\ 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 - 9x_4 = 0 ; \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 , \\ 13x_1 + 14x_2 - 4x_3 = 0 , \\ -7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 , \\ 11x_1 + 13x_2 - 3x_3 = 0 ; \end{cases}$$

f) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 , \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 , \\ 3x_1 - x_2 + 5x_4 = 0 , \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 . \end{cases}$$

5.13. Bepaal de oplossingsverzameling van de volgende stelsels vergelijkingen:

a) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 0 , \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -4 , \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 3 ; \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 , \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 3 , \\ x_1 - x_3 + 7x_4 = 3 ; \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1 , \\ 2x_1 + 4x_2 - 8x_5 = 3 , \\ - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0 ; \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 , \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 , \\ 2x_1 + 4x_3 = -8 , \\ 3x_1 + 6x_3 = -12 , \\ -2x_1 - 8x_2 + 4x_3 = -8 ; \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 , \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 , \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 , \\ 6x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 , \\ 7x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1 ; \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 , \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 , \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 . \end{cases}$$

5.14. Bepaal de normaalvorm van de volgende stelsels vergelijkingen:

a)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 1 , \\ -x_1 + x_3 - 3x_4 = 3 , \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 , \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 9x_4 = -5 ; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 1 , \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 , \\ 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 , \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 , \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -3 ; \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 - x_4 = -2 , \\ 4x_1 + 7x_2 + 9x_3 - x_4 = -4 , \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 4 , \\ 7x_1 + 11x_2 + 7x_3 - 5x_4 = -8 . \end{cases}$$

Week 6

6.1. V is de verzameling van de polynomen van de graad ≤ 2 (waarin we stilzwijgend het nulpolynoom opnemen; analoog bij V_1 en V_3).
V_1 is de verzameling van de polynomen van de graad ≤ 2 met een nulpunt in 1.
V_2 is de verzameling van de polynomen van de 2^e graad.
V_3 is de verzameling van de polynomen van de graad ≤ 1.
Welke van de verzamelingen V, V_1, V_2, V_3 zijn lineaire ruimten?
Bepaal in geval van lineaire ruimte een basis en de dimensie van de ruimte.

6.2. $C([0,1])$ is de verzameling van alle continue functies van het interval $[0,1]$ naar $\mathbb{R}$.
B_{100} is de verzameling van alle functies van $[0,1]$ naar $\mathbb{R}$, waarvoor geldt: $|f(x)| \leq 100$ voor alle $x \in [0,1]$.
B is de verzameling van alle functies van $[0,1]$ naar $\mathbb{R}$ met de eigenschap dat er voor iedere $f \in B$ een getal M bestaat zodat $|f(x)| < M$ voor alle $x \in [0,1]$, d.w.z. B is de verzameling van de begrensde functies op $[0,1]$.

a) Welke van de verzamelingen $C([0,1])$, B_{100}, B zijn vectorruimten?
b) De functies f en g zijn gedefinieerd door $f(x) = x$ en $g(x) = x^2$ voor $x \in [0,1]$.
Bewijs dat f en g onafhankelijke vectoren zijn in $C([0,1])$.
c) Welke van de onderstaande functies is een element van $\langle f,g\rangle \subset C([0,1])$?

i) h_1 met $h_1(x) = 8x$ voor alle $x \in [0,1]$;
ii) h_2 met $h_2(x) = x + 6x^2$ voor alle $x \in [0,1]$;
iii) h_3 met $h_3(x) = x + 5$ voor alle $x \in [0,1]$;
iv) h_4 met $h_4(x) = x^3 + x^2$ voor alle $x \in [0,1]$.

6.3. Gegeven is de lineaire ruimte $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$.
Ga na of de volgende deelverzamelingen W van $\mathbb{R}^n$ lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^n$ zijn.

a) $W = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \in \mathbb{Z}\}$;

b) $W = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 5x_1 - x_2 = 0\}$;

c) $W = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 3x_1 + 4x_2 = 1\}$;

d) $W = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$;

e) $W = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$.

6.4. Beschouw de lineaire ruimte ℓ^2, d.w.z. de verzameling rijen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ waarvoor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ convergeert.
Ga na of de volgende deelverzamelingen W van ℓ^2 lineaire deelruimten van ℓ^2 zijn.

a) $W = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq 1\}$;

b) $W = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 \mid a_n \in \mathbb{Q}$ voor alle $n \in \mathbb{N}\}$;

c) $W = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 \mid a_{2n} = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}\}$;

d) $W = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 \mid a_n \neq 0$ voor hoogstens eindig veel waarden van $n\}$.

6.5. Beschouw de lineaire ruimte $F(\mathbb{R})$, d.w.z. de verzameling van functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$.
Ga na of de volgende deelverzamelingen W van $F(\mathbb{R})$ lineaire deelruimten van $F(\mathbb{R})$ zijn.

a) $W = \{f \in F(\mathbb{R}) \mid f(4) = 0\}$;

b) $W = \{f \in F(\mathbb{R}) \mid 2f(0) = f(1)\}$;

c) $W = \{f \in F(\mathbb{R}) \mid f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}\}$;

d) $W = \{f \in F(\mathbb{R}) \mid f$ oneven$\}$;

e) $W = \{f \in F(\mathbb{R}) \mid f(1) = f(0) + 1\}$;

f) $W = \{f \in F(\mathbb{R}) \mid f$ differentieerbaar op $\mathbb{R}\}$.

6.6. Schrijf in de volgende gevallen $\underline{v}$ als lineaire combinatie van $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$.

i) $\underline{v} = (6,17,16)$, $\underline{a} = (1,4,5)$, $\underline{b} = (2,5,4)$, $\underline{c} = (1,2,0)$;

ii) $\underline{v} = (-1,4,7)$, $\underline{a} = (1,-2,3)$, $\underline{b} = (4,-3,1)$, $\underline{c} = (3,-2,5)$;

iii) $\underline{v} = (5,-2,3)$, $\underline{a} = (1,2,3)$, $\underline{b} = (2,1,1)$, $\underline{c} = (1,0,1)$.

6.7. De vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ in een lineaire ruimte V vormen een onafhankelijk stelsel. Toon aan dat $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} - \underline{b}$ en $\underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c}$ een onafhankelijk stelsel vormen.

6.8. De vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$ in een lineaire ruimte V vormen een afhankelijk stelsel. Het stelsel $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ is onafhankelijk. Toon aan dat $\underline{d}$ een lineaire combinatie is van $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$.

6.9. Onderzoek of de volgende stelsels $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ afhankelijk of onafhankelijk zijn.

i) $\underline{a} = (1,2,3)$, $\underline{b} = (3,2,1)$, $\underline{c} = (-3,2,7)$;

ii) $\underline{a} = (1,-1,4,2)$, $\underline{b} = (2,0,2,1)$, $\underline{c} = (7,-3,16,8)$;

iii) $\underline{a} = (4,5,2)$, $\underline{b} = (1,8,2)$, $\underline{c} = (14,4,1)$.

6.10. Onderzoek of de volgende stelsels $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ afhankelijk of onafhankelijk zijn.

i) $\underline{a} = (2,3,4)$, $\underline{b} = (5,2,1)$, $\underline{c} = (-4,5,10)$;

ii) $\underline{a} = (4,-3,5)$, $\underline{b} = (2,-4,7)$, $\underline{c} = (10,5,3)$;

iii) $\underline{a} = (2,4,-1,-1)$, $\underline{b} = (1,5,1,-2)$, $\underline{c} = (-1,3,3,-2)$.

6.11. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a} = (3,-1,4,7)$, $\underline{b} = (1,-3,2,5)$, $\underline{c} = (2,6,1,-2)$, $\underline{d} = (5,3,2,-1)$ en $\underline{e} = (0,4,-1,4)$.
Bepaal van elk der volgende vectorruimten een basis en de dimensie.

i) $U_1 = \langle \underline{a},\underline{b},\underline{c} \rangle$;

ii) $U_2 = \langle \underline{a},\underline{b},\underline{d} \rangle$;

iii) $U_3 = \langle \underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{e} \rangle$.

Geef een vector in $\mathbb{R}^4$ die niet in U_2 ligt.

6.12. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a} = (1,2,3,4)$, $\underline{b} = (2,-1,0,2)$ en $\underline{c} = (4,-3,-1,-1)$.
Zij $U = \langle \underline{a},\underline{b},\underline{c} \rangle$.

a) Bepaal dim U.
b) Geldt $\underline{d} = (-4,1,-2,10) \in U$?
c) Geldt $\underline{e} = (3,1,2,1) \in U$?

6.13. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a} = (3,-2,3,1)$, $\underline{b} = (2,1,-2,-1)$ en $\underline{c} = (1,1,2,3)$.
Zij $U = \langle \underline{a},\underline{b},\underline{c} \rangle$.

a) Bepaal dim U.
b) Behoort $\underline{d} = (1,4,3,1)$ tot U?
c) Behoort $\underline{e} = (-4,2,1,3)$ tot U?

6.14. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a} = (8,0,-9,8)$, $\underline{b} = (12,-10,6,6)$, $\underline{c} = (4,7,-6,-8)$, $\underline{d} = (8,-7,3,6)$ en $\underline{e} = (0,-3,12,-10)$.
Zij $U = \langle \underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d},\underline{e} \rangle$.
Bepaal dim U en een basis van U.

6.15. Beschouw de lineaire ruimte $F(\mathbb{R})$. De functies $f \in F(\mathbb{R})$, $g \in F(\mathbb{R})$ en $h \in F(\mathbb{R})$ zijn gedefinieerd door $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = x^2$ en $h(x) = x$.
Toon aan dat f, g, h een onafhankelijk stelsel is.

6.16. De functies $f \in F(\mathbb{R})$, $g \in F(\mathbb{R})$, $h \in F(\mathbb{R})$ zijn gedefinieerd door $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = x$.
Toon aan dat f, g en h onafhankelijk zijn.

6.17. Beschouw de lineaire ruimte $F(\mathbb{R})$. De functies $f_i \in F(\mathbb{R})$ $(i = 1,2,3,4)$ zijn gedefinieerd door

$$f_1(x) = 2,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = \sin^2 x,\ f_4(x) = \cos^2 x\ .$$

Zij $U = \langle f_1,f_2,f_3,f_4 \rangle$, $V = \langle f_2,f_3,f_4 \rangle$.
Bepaal dim U, dim V, een basis voor U en een basis voor V.

6.18. De functies $f_i \in F(\mathbb{R})$ $(i = 1,2,3,4)$ zijn gedefinieerd door

$$f_1(x) = e^{2x},\ f_2(x) = e^{-x},\ f_3(x) = \cosh x,\ f_4(x) = \sinh x\ .$$

Zij $U = \langle f_1,f_2,f_3,f_4 \rangle$, $V = \langle f_2,f_3,f_4 \rangle$.
Bepaal dim U, dim V, een basis voor U en een basis voor V.

Week 7

7.1. Ga na of de volgende afbeeldingen lineair zijn. Geef, als A lineair is, de beeldruimte en de nulruimte van A en controleer de dimensiestelling.

a) A: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $A(x,y) = (x+y,\ x)$;

b) A: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $A(x,y) = (x+1,\ 2y,\ x+y)$;

c) A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $A(x,y,z) = 2x - 3y + z$;

d) A: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $A(x,y) = xy$;

e) A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $A(x,y,z) = (x,0)$;

f) A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $A(x,y,z) = (|x|,0)$;

g) A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gedefinieerd door $A\underline{x} = \underline{a} + \underline{x}$, waarbij $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ een gegeven vector is.

7.2. Beschouw de lineaire ruimte $F(\mathbb{R})$. Welke van de volgende afbeeldingen A: $F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ zijn lineair?

a) $Af = f(1)$;

b) $Af = 1 + f(1)$;

c) $Af = (f(0))^2$;

d) $Af = 3f(0) + |f(1)|$.

7.3. Ga na of de volgende afbeeldingen lineair zijn.

a) A: $F(\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R})$ gedefinieerd door $(Af)(x) = 1 + f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$;

b) A: $F(\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R})$ gedefinieerd door $(Af)(x) = f(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$;

c) A: $F(\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R})$ gedefinieerd door $(Af)(x) = f(x^2)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$;

d) A: $\ell^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $A(a_n)_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$;

e) A: $\ell^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $A(a_n)_{n=1}^{\infty} = \lim_{n\to\infty} a_n^2$.

7.4. De lineaire afbeelding P: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de projectie op het vlak $x + y + z = 0$.

a) Bepaal de beeldruimte en de nulruimte van P,

b) Bepaal de verzameling oplossingen van de vergelijking $P\underline{x} = (1,-1,0)$,

c) Bepaal de verzameling oplossingen van de vergelijking $P\underline{x} = (1,1,2)$,

d) Toon aan dat $P^2 = P$,

e) Is de afbeelding P bijectief?

7.5. De lineaire afbeelding $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de projectie op de rechte $\underline{x} = \lambda(1,2,3)$.

a) Bepaal de beeldruimte en de nulruimte van P,

b) Bepaal de verzameling oplossingen van de vergelijking $P\underline{x} = (2,4,6)$,

c) Bepaal de verzameling oplossingen van de vergelijking $P\underline{x} = (1,2,2)$,

d) Is de afbeelding P bijectief?

7.6. De lineaire afbeelding $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van het vlak $x + y + 2z = 0$.

a) Bepaal de beeldruimte en de nulruimte van S,

b) Bepaal de verzameling oplossingen van de vergelijking $S\underline{x} = (1,2,3)$,

c) Bepaal de verzameling oplossingen van de vergelijking $S\underline{x} = (1,1,-1)$,

d) Toon aan dat de afbeelding S bijectief is,

e) Bepaal $S^{\leftarrow}$.

7.7. De lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$A(1,0,0) = (1,2,4),\ A(0,1,0) = (-1,3,-5),\ A(0,0,1) = (5,0,22)\ .$$

Bepaal:

a) de dimensie en een basis van de beeldruimte van A;

b) de dimensie en een basis van de nulruimte van A;

c) de verzameling oplossingen van de vergelijking $A\underline{x} = (3,-4,14)$.

7.8. De lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$A(1,0,0) = (5,2,-4),\ A(0,1,0) = (1,5,-3),\ A(0,0,1) = (7,-11,1).$$

Bepaal:

a) de dimensie en een basis van de beeldruimte van A;

b) de dimensie en een basis van de nulruimte van A;

c) de verzameling oplossingen van de vergelijking $A\underline{x} = (13,-4,-6)$.

7.9. De lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$A(2,1,1) = (7,6,7),\ A(1,0,2) = (1,15,10),\ A(-1,2,2) = (-1,7,4)\ .$$

Bepaal:

a) de dimensie en een basis van de beeldruimte van A;

b) de dimensie en een basis van de nulruimte van A;

c) de verzameling oplossingen van de vergelijking $A\underline{x} = (2,-3,-1)$.

7.10. De lineaire afbeelding $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$A(1,2,3) = A(2,3,1) = A(2,1,3) = (6,-36,30) .$$

Bepaal:

a) de dimensie en een basis van de beeldruimte van A;

b) de dimensie en een basis van de nulruimte van A;

c) de verzameling oplossingen van de vergelijking $A\underline{x} = (1,-6,5)$.

7.11. De lineaire afbeelding $A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$A(1,0,0,0) = (3,-1,1),\ A(0,1,0,0) = (1,3,1),\ A(0,0,1,0) = (1,1,1),$$
$$A(0,0,0,1) = (1,1,1) .$$

Bepaal:

a) de dimensie en een basis van de beeldruimte van A;

b) de dimensie en een basis van de nulruimte van A;

c) de verzameling oplossingen van de vergelijking $A\underline{x} = (1,1,1)$.

7.12. Laten $A\colon U \to V$ en $B\colon V \to W$ lineaire en bijectieve afbeeldingen zijn. Dan is $BA\colon U \to W$ een bijectieve lineaire afbeelding en er geldt $(BA)^{\leftarrow} = A^{\leftarrow}B^{\leftarrow}$. Toon dit aan.

7.13. In dit vraagstuk noteren we de beeldruimte van een lineaire afbeelding $A\colon V \to V$ door $\mathcal{R}(A)$ en de nulruimte van A door $\mathcal{N}(A)$.
Laten $A\colon V \to V$ en $B\colon V \to V$ lineaire afbeeldingen zijn en zij $\dim V = n$.
Bewijs dat geldt

a) $\dim \mathcal{R}(AB) \leq \dim \mathcal{R}(A)$;

b) $\dim \mathcal{N}(AB) \leq \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{N}(B)$;

c) $\dim \mathcal{R}(A) + \dim \mathcal{R}(B) - n \leq \dim \mathcal{R}(AB) \leq \min(\dim \mathcal{R}(A), \dim \mathcal{R}(B))$.

7.14. Bepaal de rang van de volgende matrices.

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -3 & 9 & -5 \end{pmatrix} ;$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7.15. Schrijf een 3×4 matrix A op met

a) rang A = 0;
b) rang A = 1;
c) rang A = 2;
d) rang A = 3.

7.16. De lineaire afbeelding R: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de draaiing om de oorsprong over een hoek $\frac{2\pi}{3}$. Bepaal de matrix van R.

7.17. De lineaire afbeelding R: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de draaiing om de oorsprong over een hoek $-\frac{5\pi}{6}$. Bepaal de matrix van R.

7.18. De lineaire afbeelding P: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de projectie op de rechte $y = 3x$. Bepaal de matrix van P.

7.19. De lineaire afbeelding P: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de projectie op de rechte $y = -2x$. Bepaal de matrix van P.

N.B. Onder de rang van een lineaire afbeelding A verstaan we de dimensie van de beeldruimte van A.

7.20. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ is gegeven door

$$A(1,0,0) = (1,2,3,5),\ A(0,1,0) = (3,2,1,3),\ A(0,0,1) = (2,1,3,4)\ .$$

Bepaal:

a) de matrix van A;

b) A(1,1,1) en A(2,-3,1);

c) de rang van de afbeelding A;

d) het beeld van de rechte gegeven door $3x + 2y = 0$, $y + 3z = 0$.

7.21. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ is gegeven door

$$A(1,0,0) = (1,1,2,3),\ A(0,1,0) = (1,-1,0,1),\ A(0,0,1) = (2,1,3,5)\ .$$

Bepaal:

a) de matrix van A;

b) A(1,-1,1) en A(3,-2,-1);

c) de rang van de afbeelding A;

d) het beeld van het vlak met vergelijking $x + 5y + 4z = 0$.

Week 8

8.1. De lineaire afbeelding S: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van het vlak $2x - y + 3z = 0$.
Bepaal:

a) de matrix van S;
b) de rang van de afbeelding S.

8.2. De lineaire afbeelding P: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de projectie op het vlak $2x + 2y + z = 0$.
Bepaal:

a) de matrix van P;
b) de rang van de afbeelding P.

8.3. De lineaire afbeelding P: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de projectie op het vlak $2x + y + z = 0$.
Bepaal:

a) de matrix van P;
b) $P(1,1,1)$ en $P(1,-1,-1)$.

8.4. De lineaire afbeelding R: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de rotatie om de as $\lambda(1,1,1)$ over een hoek π.
Bepaal:

a) de matrix van R;
b) de rang van de afbeelding R.

8.5. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ is gegeven door

i) $A(1,0,0) = (3,2)$;
ii) $A(1,1,1) = (4,3)$;
iii) de nulruimte van A is de rechte $\underline{x} = \lambda(1,-3,-2)$.

a) Bepaal de matrix van A.
b) Bepaal de rang van de afbeelding A.
c) Voor welke waarde van p is het beeld van het vlak $px + y + z = 0$ een rechte lijn?

8.6. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ is gegeven door

$$A(3,1,0) = (0,0,15,5),\ A(0,-1,5) = (12,-3,9,0),$$
$$A(2,0,-1) = (6,-2,3,-1)\ .$$

Bepaal:

a) een basis voor de beeldruimte van A;

b) de rang van de afbeelding A;

c) de matrix van A;

d) een basis voor de nulruimte van A.

8.7. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Bereken AA^T en AB.

8.8. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bereken AB en BA.

8.9. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bereken AB en BA.

8.10. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bereken, voor zover ze bestaan, de producten:

$$AB,\ BA,\ AB^T,\ BA^T,\ A^TB,\ B^TA,\ A^TB^T \text{ en } B^TA^T\ .$$

8.11. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ en } D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bereken, voor zover ze bestaan, de volgende matrices:

$$A + B,\ B + C,\ (A + B)C,\ AB,\ AD,\ D^TD,\ DD^T,\ D^TA^T .$$

8.12. De lineaire afbeelding $S_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van het vlak $z = 0$; de lineaire afbeelding $S_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van het vlak $x = 0$.
Bepaal de matrices van S_1S_2, S_2S_1 en geef de meetkundige interpretatie van de afbeeldingen S_1S_2, S_2S_1.

8.13. De lineaire afbeelding $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de rotatie om de z-as over een hoek π; de lineaire afbeelding $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van het vlak $y = 0$.
Bepaal de matrices van RS, SR en geef de meetkundige interpretatie van de afbeeldingen RS, SR.

8.14. De lineaire afbeelding $R_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de rotatie om de x-as over een hoek π; de lineaire afbeelding $R_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de rotatie om de y-as over een hoek $\frac{\pi}{2}$, waarbij (1,0,0) overgaat in (0,0,1).
Bepaal de matrices van R_1R_2, R_2R_1 en geef de meetkundige interpretatie van de afbeeldingen R_1R_2, R_2R_1.

8.15. Bepaal de inversen, voor zover ze bestaan, van de volgende matrices.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 6 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

g) $$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

8.16. Bereken de volgende determinanten.

a) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 8 \\ 9 & 11 & 5 \\ 8 & 8 & 3 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 7 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

8.17. Bereken de volgende determinanten.

a) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 6 & 2 \\ 7 & 10 & 8 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 11 & 3 & -4 & 5 \\ -13 & -4 & 5 & -6 \\ 18 & 5 & -5 & 7 \\ 8 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

8.18. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven de punten $\underline{a} = (7,9,4)$, $\underline{b} = (6,5,4)$ en $\underline{c} = (2,5,3)$. Bereken de inhoud van het parallellepipedum opgespannen door $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$.

8.19. In $\mathbb{R}^2$ zijn gegeven de punten $\underline{a} = (4,5)$ en $\underline{b} = (1,4)$. Bereken de oppervlakte van het parallellogram met hoekpunten $\underline{0}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{a} + \underline{b}$.

8.20. In $\mathbb{R}^2$ zijn gegeven de punten $\underline{a} = (2,1)$, $\underline{b} = (4,2)$ en $\underline{c} = (3,5)$. Bereken de oppervlakte van de driehoek met hoekpunten $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$.

8.21. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven de punten $\underline{a} = (1,2,3)$, $\underline{b} = (4,5,6)$ en $\underline{c} = (7,8,15)$. Bereken de inhoud van het viervlak met hoekpunten $\underline{0}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$.

8.22. Bereken de inhoud van het viervlak met hoekpunten $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$ als

i) $\underline{a} = (1,2,-1)$, $\underline{b} = (-2,0,3)$, $\underline{c} = (-3,4,-4)$, $\underline{d} = (2,1,0)$;

ii) $\underline{a} = (1,6,7)$, $\underline{b} = (3,9,11)$, $\underline{c} = (4,8,2)$, $\underline{d} = (2,1,8)$.

8.23. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven de vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$. Toon aan dat

$$|D(\underline{a},\underline{b},\underline{c})| \leq |\underline{a}|\,|\underline{b}|\,|\underline{c}| .$$

Week 9

9.1. Los met de regel van Cramer y op uit het stelsel vergelijkingen

$$
\begin{aligned}
2x + 3y - 2z &= -1 \,, \\
3x + y + 5z &= 11 \,, \\
x + 4y - 3z &= -2 \,.
\end{aligned}
$$

9.2. Los met de regel van Cramer x op uit het stelsel vergelijkingen

$$
\begin{aligned}
3x + 4y + 2z &= 6 \,, \\
4x + 6y + 3z &= 6 \,, \\
2x + 3y + z &= 1 \,.
\end{aligned}
$$

9.3. Los met de regel van Cramer z op uit het stelsel vergelijkingen

$$
\begin{aligned}
x - y + 3z &= 6 \,, \\
3x - 2y + 7z &= 14 \,, \\
x + 3y - 3z &= -4 \,.
\end{aligned}
$$

9.4. Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenruimten van de lineaire afbeeldingen gegeven door de volgende matrices.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 6 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

9.5. De lineaire afbeelding $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd door

$$A\underline{x} = \underline{x} + (\underline{a},\underline{x})\underline{a} \,,$$

waarin $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ een gegeven vector is met $|\underline{a}| = 1$.

a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

b) Toon aan dat de inverse afbeelding $A^{\leftarrow}$ bestaat.

c) Laat zien dat voor de afbeelding $A^{\leftarrow}$ geldt

$$A^{\leftarrow}\underline{x} = \underline{x} - \tfrac{1}{2}(\underline{a},\underline{x})\underline{a} \,.$$

9.6. De afbeelding A: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is gedefinieerd door

$$A\underline{x} = \underline{x} + \underline{a}.D(\underline{x},\underline{a}) \ ,$$

waarin $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ een gegeven vector is en $D(\underline{x},\underline{a})$ de determinant van de vectoren $\underline{x}$ en $\underline{a}$.

a) Toon aan dat A een lineaire afbeelding is.

b) Toon aan dat de nulruimte van A dimensie nul heeft.

c) Laat zien dat voor de inverse afbeelding $\overleftarrow{A}$ geldt

$$\overleftarrow{A}\underline{x} = \underline{x} - \underline{a}.D(\underline{x},\underline{a}) \ .$$

9.7. De afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd door

$$A\underline{x} = \underline{x} \times \underline{a} \ , \text{ waarin } \underline{a} = (1,1,1) \ .$$

De lineaire afbeelding B: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van het vlak $z = 0$.

a) Toon aan dat A een lineaire afbeelding is.

b) Bepaal de matrix van A.

c) Bepaal de beeldruimte en de nulruimte van de lineaire afbeelding C = BA.

d) Bereken de eigenwaarden en de eigenvectoren van C.

9.8. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd door

$$A\underline{x} = \underline{x} - 2(\underline{a},\underline{x})\underline{a} \ ,$$

waarin $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ een gegeven vector is met $|\underline{a}| = 1$.

a) Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van A.

b) Toon aan dat voor de inverse afbeelding $\overleftarrow{A}$ geldt $\overleftarrow{A} = A$.

c) Wat is de meetkundige betekenis van de afbeelding A?

9.9. Laten $\underline{v}$ en $\underline{w}$ eigenvectoren zijn van de lineaire afbeelding A: V $\to$ V, zodat $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ en $A\underline{w} = \mu\underline{w}$ en zij $\lambda \neq \mu$.
Toon aan dat $\underline{v}$ en $\underline{w}$ een onafhankelijk stelsel vormen.

9.10. In dit vraagstuk noteren we de beeldruimte van een lineaire afbeelding $A: V \to V$ door $\mathcal{R}(A)$.

Zij $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding waarvoor geldt

$$P^2 = P, \ 0 < \dim \mathcal{R}(P) < n \ .$$

Zij $L_1 = \mathcal{R}(P)$ en $L_2 = \mathcal{R}(I - P)$.

a) Toon aan:

i) Als $\underline{x} \in L_1$, dan is $P\underline{x} = \underline{x}$.

ii) Als $\underline{x} \in L_2$, dan is $P\underline{x} = \underline{0}$.

iii) $L_1 \cap L_2 = \{\underline{0}\}$.

iv) Elke $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ is op eenduidige wijze te schrijven als

$$\underline{x} = \underline{y} + \underline{z} \quad \text{met } \underline{y} \in L_1, \ \underline{z} \in L_2 \ .$$

b) Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van P. (P heet de projectie op L_1 in de richting van L_2.)

9.11. V is de vectorruimte van alle lineaire combinaties van de functies g en h gedefinieerd door $g(x) = e^x$, $h(x) = e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$. De lineaire afbeelding $D: V \to V$ is gedefinieerd door $Df = f'$.

Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van D.

9.12. V is de vectorruimte van alle lineaire combinaties van de functies g en h gedefinieerd door $g(x) = \cos x$, $h(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. De lineaire afbeelding $D: V \to V$ is gedefinieerd door $Df = f'$.

Toon aan dat D geen eigenwaarden heeft.

9.13. Beschouw de lineaire ruimte $F(\mathbb{R})$, d.w.z. de verzameling functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. De lineaire afbeelding $A: F(\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R})$ is gedefinieerd door

$$(Af)(x) = f(-x) \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R} \ .$$

Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van A.

9.14. Voor elke $\underline{x} = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\underline{y} = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ is gedefinieerd

$$(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 .$$

a) Toon aan dat $(\underline{x},\underline{y})$ een inwendig product op $\mathbb{R}^2$ is.

b) Is $(1,0)$, $(0,1)$ een orthonormale basis van $\mathbb{R}^2$?

c) Bereken de hoek tussen de vectoren $(1,0)$ en $(0,1)$.

d) Bereken $|(2,3)|$.

e) Bepaal een orthonormale basis van $\mathbb{R}^2$.

f) Zij $\underline{a} = (2,3)$. Bepaal alle vectoren $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ waarvoor geldt $(\underline{a},\underline{x}) = 0$.

9.15. Voor alle $\underline{x} = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\underline{y} = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ is gedefinieerd

$$(\underline{x},\underline{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 .$$

a) Toon aan dat $(\underline{x},\underline{y})$ een inwendig product op $\mathbb{R}^2$ is.

b) Is $(1,0)$, $(0,1)$ een orthonormale basis van $\mathbb{R}^2$?

c) Bereken de hoek tussen de vectoren $(1,0)$ en $(0,1)$.

d) Bereken $|(2,3)|$.

e) Bepaal een orthonormale basis van $\mathbb{R}^2$.

f) Zij $\underline{a} = (1,-2)$. Bepaal alle vectoren $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ waarvoor geldt $(\underline{a},\underline{x}) = 0$.

9.16. Beschouw de lineaire ruimte $C([0,1])$ met het inwendig product

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx .$$

Gegeven zijn de functies p en q, gedefinieerd door $p(x) = x$ en $q(x) = x^4$.

a) Bereken $|p|$ en $|q|$.

b) Bereken (p,q).

c) Bepaal de hoek tussen p en q.

9.17. Zij $\underline{x} = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ en $\underline{y} = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$. Ga voor elk van de volgende definities na of $(\underline{x},\underline{y})$ een inwendig product is op $\mathbb{R}^2$.

a) $(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$;

b) $(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$;

c) $(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$.

9.18. Voor alle $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ en $\underline{y} = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ is gedefinieerd

$$(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i, \quad \text{waarbij } \alpha_i \in \mathbb{R} \ (i = 1,\dots,n) .$$

Toon aan dat $(\underline{x},\underline{y})$ een inwendig product op $\mathbb{R}^n$ is dan en slechts dan als $\alpha_i > 0$ $(i = 1,\dots,n)$.

9.19. Beschouw de lineaire ruimte $C([-1,1])$. Ga voor elk van de volgende definities na of (f,g) een inwendig product is op $C([-1,1])$.

a) $$(f,g) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)g(x)dx ;$$

b) $$(f,g) = \int_{-1}^{1} xf(x)g(x)dx ;$$

c) $$(f,g) = \int_{0}^{1} f(x)g(x)dx .$$

9.20. Zij V de lineaire ruimte van de polynomen van de graad $\le n$, met $n \ge 1$, waarbij we stilzwijgend het nulpolynoom opnemen.
We definiëren voor alle $p \in V$, $q \in V$:

$$(p,q) = \sum_{k=0}^{n} p\left(\frac{k}{n}\right)q\left(\frac{k}{n}\right) .$$

Toon aan dat (p,q) een inwendig product op V is.

9.21. Zij $\underline{v}$ een vector in een lineaire ruimte V met inwendig product waarvoor geldt $(\underline{v},\underline{w}) = 0$ voor alle $\underline{w} \in V$. Dan is $\underline{v} = \underline{0}$. Bewijs dit.
Wat is de betekenis van deze stelling uitgeschreven voor $\mathbb{R}^n$ met het gebruikelijke inwendig product en voor $C([a,b])$ met het inwendig product

$$(f,g) = \int_{a}^{b} f(x)g(x)dx \ ?$$

9.22. a) Voor de reële getallen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ geldt $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Toon aan dat $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}$.

b) Zij $f \in C([a,b])$ waarvoor geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1 .$$

Toon aan dat

$$\int_a^b (f(x))^2\,dx \geq \frac{1}{b-a} .$$

Week 10

10.1. Bepaal het orthoplement van de volgende deelruimten van $\mathbb{R}^3$.

a) $W = <(1,1,2),(0,1,0)>$;

b) $W = <(1,1,2),(0,1,0),(4,5,8)>$;

c) $W = <(3,1,0),(2,1,-4),(5,1,4)>$;

d) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 5z = 0\}$.

10.2. In $\mathbb{R}^4$ is de deelruimte $W = <(1,0,1,2),(1,1,0,1)>$ gegeven.

a) Bepaal een basis van $W^\perp$.

b) Bepaal $\underline{v} \in W$ en $\underline{w} \in W^\perp$ zodanig dat $\underline{v} + \underline{w} = (2,2,3,2)$.

10.3. In $\mathbb{R}^4$ is de deelruimte $W = <(1,1,-1,0),(2,1,-1,-1),(1,-2,0,3)>$ gegeven.

a) Bepaal een basis van $W^\perp$.

b) Bepaal $\underline{v} \in W$ en $\underline{w} \in W^\perp$ zodanig dat $\underline{v} + \underline{w} = (3,6,-1,3)$.

10.4. In $\mathbb{R}^5$ is de deelruimte $W = <(1,2,3,-1,2);(2,4,7,2,-1)>$ gegeven.
Bepaal de projecties op W van de volgende vectoren in $\mathbb{R}^5$.

a) $\underline{u} = (-1,6,11,2,2)$;

b) $\underline{v} = (-4,0,1,1,1)$;

c) $\underline{w} = (3,6,11,5,-4)$.

10.5. In $\mathbb{R}^4$ zijn gegeven de vectoren $\underline{u}_1 = (1,1,1,1)$, $\underline{u}_2 = (3,3,-1,-1)$, $\underline{u}_3 = (7,9,3,5)$. Construeer met het orthonormalisatieproces van Gram-Schmidt een orthonormale basis van de deelruimte $<\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3>$. Vul de gevonden basis aan tot een orthonormale basis van $\mathbb{R}^4$.

10.6. In $\mathbb{R}^4$ vormen $\underline{u}_1 = \frac{1}{5}(4,2,2,1)$ en $\underline{u}_2 = \frac{1}{5}(-2,4,-1,2)$ een orthonormale basis van $<\underline{u}_1,\underline{u}_2>$. Breid deze basis uit tot een orthonormale basis van $<\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{v}>$, waarbij $\underline{v} = (0,4,2,3)$; en tenslotte tot een orthonormale basis van $\mathbb{R}^4$.

10.7. V is de lineaire ruimte van de polynomen van de graad ≤ 3, waarbij we stilzwijgend het nulpolynoom opnemen. Op V is een inwendig product gedefinieerd door

$$(p,q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx .$$

Beschouw de basis p_1, p_2, p_3, p_4 van V gedefinieerd door

$$p_1(x) = 1, \; p_2(x) = x, \; p_3(x) = x^2, \; p_4(x) = x^3, \qquad x \in \mathbb{R} .$$

a) Construeer, uitgaande van de basis p_1, p_2, p_3, p_4, een orthonormale basis van V met het orthonormalisatieproces van Gram-Schmidt.

b) Bepaal de projectie van het polynoom p, gedefinieerd door $p(x) = x^2 + x^3$, op de deelruimte $W = \langle p_1, p_2 \rangle$.

10.8. Beschouw de lineaire ruimte $C([-1,1])$. Op $C([-1,1])$ is een inwendig product gedefinieerd door

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx .$$

Zij V de deelruimte van $C([-1,1])$ van de polynomen van de graad ≤ 1, waarbij we stilzwijgend het nulpolynoom opnemen.
Bepaal de projectie op V van de volgende functies:

a) f gedefinieerd door $f(x) = e^x$;

b) g gedefinieerd door $g(x) = \cos x$;

c) h gedefinieerd door $h(x) = 3x^2 - 1$.

10.9. Ga na of de volgende matrices orthogonaal zijn, en zo ja, of de bijbehorende afbeelding een draaiing of een draaispiegeling is.

a) $$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3}\sqrt{5} & -\frac{2}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3}\sqrt{5} \end{pmatrix} ;$$

b) $$\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 8 & 12 & -9 \\ 12 & 1 & 12 \\ 9 & -12 & -8 \end{pmatrix} ;$$

orth. det 1 dus draaiing

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} & -\frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10.10. De lineaire afbeelding R: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de draaiing om de as $\lambda(1,2,0)$ over een hoek π; de lineaire afbeelding S: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van het vlak $z = 0$.
Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenruimten van de afbeelding RS.
Geef de meetkundige interpretatie van RS.

10.11. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Toon aan dat A een draaiing is.
b) Bepaal de draaiingsas.
c) Bepaal de draaiingshoek.

10.12. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Toon aan dat A een draaispiegeling is.
b) Bepaal het spiegelvlak en de draaiingshoek.

10.13. Door de volgende matrices zijn orthogonale afbeeldingen van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^3$ gegeven. Onderzoek van elk van deze afbeeldingen of hij een draaiing of een draaispiegeling is. Bepaal in geval van een draaiing de draaiingsas en de draaiingshoek, in geval van een draaispiegeling het spiegelvlak en de draaiingshoek.

a) $$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

b) $$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix};$$

c) $$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad 4+2+2 \quad (8)$$

d) $$\frac{1}{21}\begin{pmatrix} -5 & 4 & -20 \\ -20 & -5 & 4 \\ 4 & -20 & -5 \end{pmatrix}.$$

10.14. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is een draaiing, waarvan de as loodrecht staat op de vectoren $(2,0,-1)$ en $(2,-1,0)$. Verder is gegeven dat $A(2,0,-1) = (2,-1,0)$. Bepaal

a) de eigenwaarde(n) van A met de bijbehorende eigenvectoren;

b) $A(2,-1,0)$.

10.15. Bepaal de lengte van de kettinglijn gegeven door $y = \cosh x$ $(-1 \le x \le 1)$.

10.16. Bepaal de lengte van de kromme met parametervoorstelling

$$(x(t),y(t)) = (\cos t + t \sin t,\ \sin t - t \cos t), \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

10.17. Bepaal de lengte van de doorsnijdingskromme van de parabolische cylinder $2x - y^2 = 0$ en het vlak $x + z = 3$ voor zover deze boven het (x,y)-vlak ligt.

10.18. Toon aan dat de lengte van de kromme

$$\tfrac{1}{2}x^2 + y^2 = 1, \; x \geq 0, \; y \geq 0 \;,$$

gelijk is aan de lengte van de kromme

$$y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \;.$$

10.19. Bereken de lengte van de kromme met parametervoorstelling

$$(x(t),y(t),z(t)) = (\cos t - t \sin t, \; \sin t + t \cos t, t), \; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \;.$$

10.20. Bereken de lengte van de krommen in poolcoördinaten gegeven door de vergelijkingen

a) $r = \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \;;$

b) $r = \dfrac{e^\varphi - 1}{e^\varphi + 1}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \;;$

c) $r = \varphi^2 - 1 \;, \quad \pi \leq \varphi \leq 2\pi \;.$

10.21. Schets de kromme met parametervoorstelling

$$(x(t),y(t)) = (\sqrt{t^2 + 1}, \; \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})), \quad -\frac{4}{3} \leq t \leq \frac{4}{3} \;.$$

a) Bepaal de lengte van de kromme.

b) Bepaal de massa en het zwaartepunt van de kromme als de massadichtheid gelijk is aan de booglengte gemeten vanaf het punt (1,0).

Week 11

11.1. a) Zij G het gebied gegeven door $1 \le x \le 1$, $3 \le y \le 5$. Bereken

$$\iint_G x^2 y \, dxdy \; .$$

b) Zij G het gebied gegeven door $0 \le x \le 1$, $2 \le y \le 3$. Bereken

$$\iint_G x e^{xy} dxdy \; .$$

11.2. Zij G het gebied gegeven door $x \ge 0$, $y \ge x^2$, $y \le 2 - x^2$. Bereken

$$\iint_G y\sqrt{x} \, dxdy \; .$$

11.3. Zij G het gebied gegeven door $1 \le x \le 2$, $x^2 - y^2 \ge 1$. Bereken

$$\iint_G x \, dxdy \; .$$

11.4. Bereken $\iint_G (x + y)dxdy$, als G het gebied is ingesloten door de rechten

$y = 1$, $y = 2$, $y = x$, $x = 3y$.

11.5. Verwissel de integratievolgorde in de volgende herhaalde integralen:

a) $$\int_0^2 dy \int_y^{2y} f(x,y)dx \; ;$$

b) $$\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} f(x,y)dy \; ;$$

c) $$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy \; ;$$

d) $$\int_1^e dy \int_0^{\ln y} f(x,y)dx \; .$$

11.6. Bereken de volgende herhaalde integralen:

a) $$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx \; ;$$

b) $$\int_0^1 dy \int_{y^2}^1 y \frac{\sin x}{x} dx \; ;$$

c) $$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \frac{2 \arcsin y}{\sqrt{1-y^2}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \; ;$$

d) $$\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} y^2 e^{y^2} dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{1} y^2 e^{y^2} dy \, .$$

11.7. Het gebied G is gegeven door $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq y \leq x$. Bereken

$$\iint_G x^2 y \, dxdy \, .$$

11.8. Bereken de oppervlakte van het gebied ingesloten door de cardioïde met vergelijking $r = 1 + \cos \varphi$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ in poolcoördinaten.

11.9. Zij G het gebied binnen de cirkel $r = 2 \cos \varphi$ en buiten de cirkel $r = 1$ $(r,\varphi$ zijn poolcoördinaten).
Bereken de oppervlakte van G.

11.10. Bereken de oppervlakte van het gebied gegeven door $1 \leq x^2 + y^2 \leq x + y$ (maantje van Hippocrates).

11.11. Bereken de oppervlakte van het gebied gelegen binnen de kromme met vergelijking $x^4 + y^4 = x^2 - y^2$.

11.12. De strophoïde gegeven door de vergelijking $x(x^2 + y^2) = y^2 - x^2$ heeft $x = 1$ als asymptoot. Bereken de oppervlakte ingesloten door kromme en asymptoot voor zover gelegen in het eerste en vierde kwadrant.

11.13. Bereken het moment ten opzichte van een raaklijn van de cirkelschijf $x^2 + y^2 \leq R^2$ met massadichtheid 1.

11.14. Bereken het traagheidsmoment ten opzichte van de y-as van de homogene schijf gegeven door

$$0 \leq y \leq x \leq 8, \; xy \leq 16 \; .$$

11.15. Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van de homogene schijf ingesloten door $y = 0$ en $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.

Week 12

12.1. Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de cylinder $y^2 + z^2 = 1$ waarvoor geldt $z \geq 0$, $0 \leq x \leq y \leq 1$.

12.2. Bepaal de oppervlakte van de paraboloïdetop $2z = 3 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

12.3. Bereken het traagheidsmoment ten opzichte van de z-as van het deel van het zadeloppervlak $z = xy$ dat binnen de cylinder $x^2 + y^2 = 1$ ligt, aangenomen dat de massadichtheid constant is.

12.4. Bereken de oppervlakte van dat deel van de paraboloïde $2z = x^2 - y^2$ waarvan de projectie op het (x,y)-vlak binnen de kromme met vergelijking $r = \sqrt{\cos \varphi}$ valt.

12.5. Bereken de oppervlakte van dat deel van de paraboloïde $4z = x^2 + y^2$ waarvan de projectie op het (x,y)-vlak valt binnen de kromme met vergelijking $r^2 = 4 \cos 2\varphi$.

12.6. Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de cylinder $y^2 + z^2 = 36$ waarvoor geldt $x \geq 0$, $z \geq 0$, $0 \leq y \leq 3 - x$.

12.7. Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dat wordt afgesneden door de cylinder $x^2 + y^2 = x$.

12.8. Bereken de oppervlakte van de delen van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ binnen en buiten de kegel $z^2 = x^2 + (y - 1)^2$.

12.9. Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ afgesneden door de cylinder $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

12.10. Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de cylinder $y^2 + z^2 = 1$ dat binnen de cylinder $x^2 = y + 1$ ligt.

12.11. De kromme gegeven door $y = \cos 2x$, $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ wordt gewenteld om de x-as. Bereken de oppervlakte van het lichaam dat door deze wenteling ontstaat.

12.12. Bereken de oppervlakte van het omwentelingsoppervlak dat ontstaat door de kromme $y = e^{-x}$, $0 \le x < \infty$, te wentelen om de x-as.

12.13. De cardioïde $r = 1 - \cos\varphi$ wordt gewenteld om de x-as. Bereken de oppervlakte van het lichaam dat door deze wenteling ontstaat.

12.14. Bereken het volume van de volgende lichamen.

a) Het afgeknotte prisma begrensd door de vlakken $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, $z = x + 2y$;

b) Het lichaam ingesloten door $x = 0$, $z = 0$, $y = 2$, $x = y^2$, $z = xy$.

c) Het lichaam begrensd door $z = x$, $z = 2x$, $z = 2$, $y = 0$, $y = (z-x)(2x+z)$.

d) Het lichaam begrensd door de vlakken $z = 0$, $z = 2y$ en de rechte cylinder waarvan het grondvlak is het in het eerste kwadrant van het (x,y)-vlak gelegen gebied waarvoor geldt $9 \le x^2 \le 36 - y^2$.

e) Het lichaam in het eerste octant begrensd door de cylinder $x^2 = 4 - z$ en het vlak $4x + 3y = 12$.

f) Het lichaam in het eerste octant begrensd door $z = 0$, $z = y\sqrt{3}$, $4x^2 + 9(y^2 + z^2) = 36$.

g) Het lichaam begrensd door de cylinder $x^2 + y^2 = 2y$, het vlak $z = 0$ en de kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Week 13

13.1. Bereken $\iiint\limits_G (x + y + z)\,dxdydz$, waarin G het gebied is gegeven door $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 4$.

13.2. L is het lichaam begrensd door het vlak $z = 0$ en het omwentelingsoppervlak dat ontstaat door de kromme $x = \sqrt{1 - z}$, $y = 0$ te wentelen om de z-as. C is de rechte cirkelcylinder met $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$ als as en straal $\frac{1}{2}$. Bereken het volume van de delen van L binnen en buiten C.

13.3. Bereken het volume van het lichaam gegeven door

$$x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1,\ x + y + z \le 3\ .$$

13.4. Bereken het volume van het gedeelte van de bol $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ dat binnen de cylinder $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ ligt.

13.5. Bepaal de massa van de afgeknotte pyramide begrensd door de vlakken $y = 1$, $y = 2$, $z = 0$, $x = y$, $z = x$, als de massadichtheid $\frac{1}{x^2 + y^2}$ is.

13.6. Bereken $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}$, waarin G gegeven wordt door $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

13.7. Bereken $\iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z)\,dxdydz$, waarin G het gedeelte van het eerste octant is gegeven door $z \le y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$.

13.8. Bereken het volume van het lichaam begrensd door $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z$.

13.9. Bepaal het zwaartepunt van het homogene lichaam in het eerste octant begrensd door de oppervlakken $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.

13.10. Bereken $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}}$, waarin G gegeven wordt door $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

13.11. Bereken $\iiint_G e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dxdydz$, waarin G het gehele eerste octant voorstelt.

13.12. Bereken het volume van het lichaam in het eerste octant gegeven door

$$x^2 + y^2 \geq 1,\ \frac{1}{3}x\sqrt{3} \leq y \leq x\sqrt{3},\ 0 \leq z \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\ .$$

13.13. Bereken de massa van een heelal met massadichtheid $\frac{1}{(\rho^2+a^2)^2}$, waarin ρ de afstand is tot de oorsprong en waarin $a > 0$.

13.14. a) Bereken

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x e^{-x^2-x^2y^2}\,dxdy\ .$$

b) Bereken met behulp van a):

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\ .$$

13.15. Druk de volgende integralen uit in de gammafunctie:

a) $\int_0^{\pi/2} \sin^{3/2}\varphi\ d\varphi$;

b) $\iint_G x^{p-1}y^{q-1}\,dxdy$ $(p > 0,\ q > 0)$, waarin G het gebied is gegeven door $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 2$, en bereken de waarde van de integraal voor $p = \frac{3}{2}$, $q = 2$;

c) $\iiint_G x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\,dxdydz$ $(p > 0,\ q > 0,\ r > 0)$, waarin G het gebied is gegeven door $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y + z \leq 1$, en bereken de waarde van de integraal voor $p = \frac{3}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{4}$;

d) $\int_0^\infty \frac{x^{1/4}dx}{(1+x)^{3/2}}$; stel $\frac{x}{1+x} = t$.

e) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \sin\varphi)^p (1 - \sin\varphi)^q d\varphi$, $p > -\frac{1}{2}$, $q > -\frac{1}{2}$;

f) $\displaystyle\iiint_G dxdydz$, waarin G het gebied is gegeven door $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x^p + y^p + z^p \leq 1$ $(p > 0)$, en bereken de waarde van de integraal voor $p = \frac{1}{2}$.

13.16. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \int_{-1}^{1} e^{xt^2} dt .$$

Ga na dat f differentieerbaar is en bereken $f'(0)$.

13.17. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin xt}{t^2} dt .$$

Bereken $f''(x)$.

13.18. De functie $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \int_{0}^{1} \frac{\ln(1 + xt)}{1 + t^2} dt .$$

Ga na dat f differentieerbaar is en bereken $f'(0)$.

13.19. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \int_{0}^{x^2-x} \frac{\sin xt}{t + 1} dt .$$

Bereken $f'(1)$.

13.20. De functie f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \int_{-2x}^{1+2x} e^{(x-2)t^2}\,dt\ .$$

Bereken f'(2).

13.21. Toon aan dat

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab} \qquad (a > 0,\ b > 0)\ .$$

Bereken door differentiatie

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2}\ .$$