TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het College

Wiskunde 20

Voorjaarssemester 1978

Jaj / Tu

THE
Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.216
Prijs f. 4,50

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Vraagstukken bij het college

Wiskunde 20

20

Inhoudsbeschrijving
Vraagstukken bij het college Wiskunde 20
Voorjaar 1978

JdG, 6 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het college

WISKUNDE 20

Voorjaarssemester 1978

Week 1

1.1. Laat zien dat het punt (3,4) ligt op de rechte met parametervoorstelling $\underline{x} = (1,5) + \lambda(2,-1)$.
Bepaal de snijpunten van de rechte met de x-as en met de y-as.

1.2. Laat zien dat het punt $(3,-2\sqrt{2})$ ligt op de rechte $\underline{x} = (1,\sqrt{2}) + \lambda(-\sqrt{2},3)$.
Bepaal de snijpunten van de rechte met de x-as en met de y-as.

1.3. Bepaal het snijpunt van de rechten $\underline{x} = (2,1) + \lambda(1,3)$ en $x - y + 1 = 0$.

1.4. Bepaal het snijpunt van de rechten $\underline{x} = (9,0) + \lambda(7,3)$ en $\underline{x} = (0,-8) + \mu(2,1)$.

1.5. Bepaal het snijpunt van de rechten $\underline{x} = (2,1) + \lambda(1,3)$ en $\underline{x} = (0,3) + \mu(1,1)$.

1.6. Geef enkele parametervoorstellingen van de rechte met vergelijking $4x + 3y - 2 = 0$.

1.7. Geef enkele parametervoorstellingen van de rechte met vergelijking $4y - 5 = 0$.

1.8. Geef een parametervoorstelling van de rechte door de punten (-1,1,4) en (1,2,3). Bepaal het snijpunt van deze rechte met het (x,y)-vlak.

1.9. Geef een parametervoorstelling van de rechte door de punten (1,2,3) en (2,4,3). Bepaal het snijpunt van deze rechte met het (x,z)-vlak.

1.10. Geef enkele parametervoorstellingen van het vlak met vergelijking $2x + 4y + 4z = 7$.

1.11. Geef de vergelijking van het vlak met parametervoorstelling

$$\underline{x} = (1,1,3) + \lambda(0,1,1) + \mu(-1,0,1) .$$

1.12. Laat zien dat de rechte $\underline{x} = (1,2,3) + \lambda(2,3,5)$ evenwijdig is aan het vlak $x + 6y - 4z = 2$.

1.13. Laat zien dat de rechte $\underline{x} = (3,2,1) + \lambda(-1,1,3)$ evenwijdig is aan het vlak

$$\underline{x} = (1,0,0) + \mu(3,1,-3) + \nu(4,2,-3) \ .$$

1.14. Bepaal een parametervoorstelling van het vlak door het punt $(0,1,1)$ en de rechte $\underline{x} = (1,-1,0) + \lambda(2,1,1)$.
Bepaal ook de vergelijking van dit vlak.

1.15. Geef een parametervoorstelling van het vlak door het punt $(1,2,1)$ dat evenwijdig is aan de rechten $\underline{x} = (-6,2,0) + \lambda(1,1,1)$ en $\underline{x} = (5,1,3) + \mu(6,2,1)$.

1.16. Geef een parametervoorstelling van het vlak door de oorsprong en de rechte $\underline{x} = (1,-1,0) + \lambda(2,1,1)$.
Bepaal ook de vergelijking van dit vlak.

1.17. Bepaal het snijpunt van de rechte door de punten $(1,2,3)$ en $(4,5,-3)$ met het vlak $2x - y + 3z = 4$.

1.18. De rechte ℓ is gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x} = (0,2,1) + \lambda(1,1,0)$.
Het vlak V gaat door $(1,2,1)$ en is evenwijdig aan de z-as en aan de rechte $\underline{x} = \mu(3,1,0)$.
Bepaal het snijpunt van ℓ en V.

1.19. Het vlak V gaat door de punten $(1,2,3)$ en $(2,0,1)$ en is evenwijdig aan de rechte gegeven door de vergelijkingen

$$x + y - z = 2, \ 2x - y + 3z = 1 \ .$$

Bepaal de vergelijking van V.

1.20. De rechte ℓ is gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x} = (0,0,1) + \lambda(1,0,0)$.
Bepaal een parametervoorstelling van de rechte door het punt $(1,1,2)$ die ℓ en de y-as snijdt.

1.21. Gegeven zijn de rechten

ℓ: $\underline{x} = (1,2,3) + \lambda(1,0,1)$;

m: snijlijn van de vlakken $2x + y + z = 0$, $2x + y - z = 0$;

n: rechte door de punten (0,2,5) en (1,4,6) .

Bepaal een parametervoorstelling van de rechte die ℓ en m snijdt en evenwijdig is aan n.

1.22. Gegeven zijn

$V(p)$: $\underline{x} = (1,0,2) + \lambda(1,-1,0) + \mu(3,1,p)$,

ℓ : $\underline{x} = (-1,-1,0) + \rho(1,2,2)$,

m : $\underline{x} = (2,1,2) + \sigma(2,-3,4)$.

a) Bewijs dat V(p) voor iedere waarde van p een vlak (en geen lijn) voorstelt.
b) Bewijs dat er één waarde van p is, zodat ℓ in V(p) ligt; bepaal de vergelijking van dat vlak.
c) Bewijs dat er geen waarde van p is zodat m in V(p) ligt.

1.23. Gegeven zijn

V: $\underline{x} = (1,1,1) + \lambda(1,a,a^2) + \mu(1,a,4)$

en

ℓ: $\underline{x} = \sigma(1,3,3)$.

a) Voor welke a is V een vlak?
b) Voor welke a is ℓ evenwijdig aan V?

1.24. Bereken de afstand tussen de punten (2,1,3) en (-1,2,4).

1.25. Bereken de afstand tussen de punten (-1,1,-3) en (-3,-2,3).

1.26. Bepaal de scherpe hoek die de rechten $\underline{x} = (7,1,-2) + \lambda(2,-1,-3)$ en $\underline{x} = (0,4,5) + \mu(1,3,2)$ met elkaar maken.

1.27. Bepaal de scherpe hoek die de rechten $\underline{x} = (2,-3,4) + \lambda(1,2,3)$ en $\underline{x} = (5,1,-3) + \mu(-2,3,1)$ met elkaar maken.

1.28. Bepaal de afstand van het punt (3,-1,5) tot de rechte $\underline{x} = (0,-1,2) + \lambda(2,2,1)$.

1.29. Bepaal de afstand van het punt (2,-1) tot de rechte $\underline{x} = (1,2) + \lambda(3,-4)$.

1.30. Bepaal de afstand van het punt (1,0,0) tot het vlak $x + 2y + 2z = 10$.

1.31. Bepaal de afstand van het punt (1,1,1) tot het vlak $x + 2y = 8$.

1.32. Gegeven zijn de rechten

$$\ell: \underline{x} = (3,2,5) + \lambda(0,2,-1)$$

en

$$m: \underline{x} = (4,-3,-1) + \mu(3,-4,1) \ .$$

Bepaal de afstand tussen ℓ en m en een parametervoorstelling van de rechte die ℓ en m loodrecht snijdt.

1.33. Gegeven zijn de rechten

$$\ell: \underline{x} = (-1,3,6) + \lambda(6,1,-2)$$

en

$$m: \underline{x} = (0,-4,-3) + \mu(3,2,-2) \ .$$

Bepaal de afstand tussen ℓ en m en een parametervoorstelling van de rechte die ℓ en m loodrecht snijdt.

1.34. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven 4 punten A,B,C,D zodanig dat $AB \perp CD$ en $AC \perp BD$. Bewijs dat $AD \perp BC$.

1.35. Bepaal de afstand tussen de rechten

$$\underline{x} = (-1,2,0) + \lambda(1,-1,2) \quad \text{en} \quad \underline{x} = (2,1,1) + \mu(1,-1,2) \ .$$

1.36. Bepaal de scherpe hoek tussen de volgende rechten in $\mathbb{R}^2$:

a) $2x + 3y - 7 = 0$ en $x - 5y + 4 = 0$;

b) $x + y\sqrt{3} - 13 = 0$ en $x - y\sqrt{3} + 4 = 0$.

1.37. Bepaal de scherpe hoek tussen de vlakken

a) $5x + 3y - 8z = 13$ en $13x - 2y - 11z = 5$;

b) $x + y + 2z = 3$ en $2x - y + z = 4$.

1.38. Toon aan dat de rechte $\underline{x} = (1,0,20) + \lambda(2,1,3)$ evenwijdig is aan het vlak $x + y - z = 1$.

1.39. De rechte ℓ is de snijlijn van de vlakken

$$2x - 2y + z = 5 \quad \text{en} \quad x - 2y - 2z = -1 \ .$$

Bepaal de vergelijking van het vlak door het punt (2,3,4) en loodrecht op ℓ.

1.40. De rechte ℓ is de snijlijn van de vlakken

$$2x - y = 1 \quad \text{en} \quad x + 2z = 2 \ .$$

Bepaal de vergelijking van het vlak door het punt (1,2,-1) en loodrecht op ℓ.

1.41. Bepaal de vergelijking van het vlak door de punten (3,-6,3) en (1,6,0) dat loodrecht staat op het vlak $2x - 3y + 6z + 7 = 0$.

1.42. Bepaal de vergelijking van de middelloodlijn van het lijnstuk met eindpunten

$$\underline{a} = (7,-3) \quad \text{en} \quad \underline{b} = (3,-6) \ .$$

1.43. Bepaal de vergelijking van het middelloodvlak van het lijnstuk met eindpunten

$$\underline{a} = (2,1,0) \quad \text{en} \quad \underline{b} = (0,1,2) \ .$$

1.44. Gegeven zijn de vectoren

$$\underline{a} = (-2,1,0) \quad \text{en} \quad \underline{b} = (4,-1,0) \ .$$

Bepaal de verzameling van de vectoren, die gelijke hoeken maken met $\underline{a}$ en $\underline{b}$.

1.45. Gegeven is het vlak $V : \underline{x} = \lambda(1,1,0) + \mu(0,0,1)$ en het punt $\underline{x}_0 = (x_0,y_0,z_0)$. Toon aan dat de loodrechte projectie van $\underline{x}_0$ op V gelijk is aan

$$\tfrac{1}{2}(x_0 + y_0,\ x_0 + y_0,\ 2z_0) \ .$$

1.46. Bepaal een parametervoorstelling van de projectie van de rechte $\underline{x} = (-3,7,-1) + \lambda(3,-3,1)$ op het vlak $3x - 2y + 2z = 9$.

1.47. Bepaal een parametervoorstelling van de projectie van de rechte $\underline{x} = (3,-10,6) + \lambda(4,-9,7)$ op het vlak $x - 5y + 3z = 1$.

1.48. Gegeven zijn de vectoren

$$\underline{a} = (-2,3,4) \quad \text{en} \quad \underline{b} = (2,0,2) \ .$$

Ontbind $\underline{a}$ in een component langs $\underline{b}$ en een component loodrecht op $\underline{b}$.

1.49. Bereken het uitwendig product $\underline{a} \times \underline{b}$ van de vectoren

i) $\underline{a} = (-3,0,3)$, $\underline{b} = (1,-1,1)$;

ii) $\underline{a} = (3,2,5)$, $\underline{b} = (2,2,1)$.

1.50. Het vlak V door (2,3,4) heeft richtingsvectoren (1,4,2) en (4,7,11). Bepaal van deze vectoren het uitwendig product en daarmee de vergelijking van V.

1.51. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a} = (2,14,5)$ en $\underline{b} = (-11,-2,10)$.
Bereken de vectoren $\underline{c}$ waarvoor geldt $\underline{c} \perp \underline{a}$, $\underline{c} \perp \underline{b}$ en $\|\underline{c}\| = 15$.

1.52. Toon aan dat de rechte $\underline{x} = (0,7,6) + \lambda(-1,1,1)$ evenwijdig is aan het vlak $\underline{x} = (6,1,2) + \alpha(1,2,3) + \beta(5,1,3)$.

1.53. Toon aan dat de vlakken $\underline{x} = \lambda(1,2,4) + \mu(2,1,3)$ en $\underline{x} = (1,1,0) + \rho(-1,1,1) + \sigma(3,0,2)$ evenwijdig zijn.

1.54. Gegeven zijn de vectoren $\underline{u}_1 = (-1,2,2)$, $\underline{u}_2 = (2,-1,2)$. Bereken $\underline{u}_3 = \underline{u}_1 \times \underline{u}_2$.
Schrijf $(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) \times \underline{u}_3$ als lineaire combinatie van $\underline{u}_1$ en $\underline{u}_2$.

1.55. Laten in $\mathbb{R}^3$ de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ gegeven zijn met $\underline{a} \perp \underline{b}$, en zij $\underline{p} = \underline{a} \times \underline{b}$.
Dan geldt $\underline{b} \times \underline{p} = \lambda\underline{a}$.
Ga dit na en bepaal λ.
Druk $\underline{a} \times \underline{p}$ uit in $\underline{b}$ en $\|\underline{a}\|$.

1.56. Toon aan dat $\|\underline{a} \times \underline{b}\|^2 + (\underline{a},\underline{b})^2 = \|\underline{a}\|^2\|\underline{b}\|^2$ $(\underline{a} \in \mathbb{R}^3, \underline{b} \in \mathbb{R}^3)$.

1.57. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven de vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ die niet in één vlak liggen. Toon aan dat de inhoud van het parallellepipedum opgespannen door $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ gelijk is aan $|(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})|$.
N.B. Het parallellepipedum heeft de oorsprong als hoekpunt en $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ als zijden.

1.58. Bereken $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a}) + \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b})$, $(\underline{a} \in \mathbb{R}^3, \underline{b} \in \mathbb{R}^3, \underline{c} \in \mathbb{R}^3)$

Week 2

2.1. Geef een parametervoorstelling $\underline{f}$ van de krommen met de volgende vergelijkingen; geef hierbij ook DOM $\underline{f}$.

a) $y = mx + n$; b) $y = x^2 - 4$;

c) $y^2 = 2x$; d) $(y - b)^2 = 2(x - a)$;

e) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

f) $x^2 + 4y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$.

2.2. Idem voor

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 , \\ x + y + z = 1 ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y = 0 , \\ y^2 + z = 0 ; \end{cases}$

c) $\begin{cases} z = x^2 + y^2 , \\ x + y + z = 1 ; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 , \\ y^2 + z^2 = 1 . \end{cases}$

2.3. Gegeven is de kromme met parametervoorstelling $\underline{f}$ bepaald door

$$\underline{f}(t) = (2t,\ t^2 - 2t,\ t^3 + 2t^2) .$$

Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan de kromme in het punt corresponderend met $t = 1$.

2.4. Gegeven is de kromme met parametervoorstelling $\underline{f}$ bepaald door

$$\underline{f}(t) = (\tfrac{1}{4}\, t^4,\ \tfrac{1}{3}\, t^3,\ t) .$$

In welke punten van deze kromme is de raaklijn evenwijdig aan het vlak $x + 3y - 4z = 0$?

2.5. Gegeven is de kromme met parametervoorstelling

$$(x(t),y(t)) = (2t - \sin t,\ 2 - \cos t), \qquad t \in \mathbb{R}\ .$$

a) Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan de kromme in het punt corresponderend met $t = a$.

b) Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn evenwijdig is aan de x-as.

c) Teken de kromme.

d) Karakteriseer het ontstaan van deze kromme met behulp van mechanische middelen.

e) Bepaal de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen in de snijpunten van de kromme met de rechte $y = 2$.

2.6. Gegeven is de kromme met parametervoorstelling

$$(x(t),y(t)) = (\sin t - t\cos t,\ \cos t + t\sin t), \qquad t \in [0,\infty)\ .$$

a) Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan de kromme in het punt corresponderend met $t = a$.

b) Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn horizontaal is.

c) Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn verticaal is.

d) Teken de kromme.

e) Ga na dat de kromme ontstaat door een op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ opgerold koord af te wikkelen met de wijzers van de klok mee, te beginnen in het punt $(0,1)$.

f) Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn en de positieve x-as een hoek $\frac{\pi}{4}$ maken.

2.7. Gegeven is de kromme met parametervoorstelling

$$x(t) = t\cos t,\ y(t) = t\sin t,\ z(t) = t, \qquad t \in [0,\infty)\ .$$

a) Toon aan dat de kromme ligt op de halve kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan de kromme in het punt corresponderend met $t = a$.

c) Schets de kromme.

d) Bepaal de verzameling van de snijpunten van de raaklijnen met het vlak $z = 0$.

2.8. Gegeven is de kromme K met vergelijking

$$x^3 + y^3 = 3xy \ .$$

a) Bepaal een parametervoorstelling van K.
(Aanwijzing: stel $y = tx$.)

b) Bepaal de punten van K waar de raaklijn horizontaal is.

c) Bepaal de punten van K waar de raaklijn verticaal is.

d) Bepaal de asymptoten van K.

e) Teken K (folium van Descartes).

2.9. Gegeven is de kromme K met parametervoorstelling

$$(x(t),y(t)) = (\cos t \sqrt{\cos 2t}, \sin t \sqrt{\cos 2t}), \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}].$$

a) Bepaal de punten van K waar de raaklijn verticaal is.

b) Bepaal de punten van K waar de raaklijn horizontaal is.

c) Onderzoek het gedrag van K in (0,0).

d) Geef een vergelijking in rechthoekige coördinaten voor K.

e) Teken K (lemniscaat).

2.10. In $\mathbb{R}^2$ zijn gegeven de cirkel $C : (x - a)^2 + y^2 = a^2$ en de lijn $\ell : x = 2a$ $(a > 0)$. De kromme K bestaat uit alle punten $\underline{x} = (x,y)$, $x < 2a$ met de volgende eigenschap: Laat de rechte door $\underline{x}$ en $\underline{0}$ de cirkel C buiten $\underline{0}$ in $\underline{s}$ en de rechte ℓ in $\underline{t}$ snijden; dan is de afstand van $\underline{0}$ tot $\underline{s}$ gelijk aan de afstand van $\underline{x}$ tot $\underline{t}$.

a) Bepaal een vergelijking van K in poolcoördinaten.
b) Bepaal de asymptoten van K.
c) Teken K (strofoïde).

2.11. Gegeven is de kromme met vergelijking

$$y = \frac{2xe^x}{e^x + 1} + 1 \ .$$

Bepaal de asymptoten van deze kromme.

2.12. Een kromme in $\mathbb{R}^2$ is in poolcoördinaten gegeven door de vergelijking $r = r(\varphi)$, waarbij $r(\varphi)$ een functie is waarvan de tweede afgeleide bestaat en continu is. Een parametervoorstelling van de kromme is dan

$$(x(\varphi),y(\varphi)) = (r(\varphi)\cos\varphi\ ,\ r(\varphi)\sin\varphi)\ .$$

a) Druk $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ uit in r, φ, $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}$, $\ddot{r} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}$.

b) Laat zien dat $\tan\mu = \frac{r}{\dot{r}}$, waarbij μ de hoek voorstelt tussen de voerstraal en de raaklijn aan de kromme.

2.13*. Gegeven is de kromme met parametervoorstelling

$$(x(t),y(t)) = (\sin 2t,\ \sin 3t), \qquad t \in [-\pi,\pi)\ .$$

a) Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn horizontaal is.

b) Bepaal de punten van de kromme waar de raaklijn verticaal is.

c) Bewijs dat de x-as en de y-as as van symmetrie zijn.

d) Teken de kromme (figuur van Lissajous).

e) Bepaal de dubbelpunten.

2.14. Bepaal kromtestraal en kromtemiddelpunt van de kromme

$$y = \ln\frac{1}{\cos x} \qquad \text{in } (0,0)\ .$$

2.15. In welk punt is de kromme met parametervoorstelling

$$\underline{x}(t) = (t,e^t)$$

het sterkst gekromd?

2.16. Gegeven is de ellips met vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ .$$

Bereken kromtestraal en kromtemiddelpunt van de ellips in de snijpunten met de assen.

2.17. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \tfrac{1}{9}\sqrt{3}\,(-2x^2 + x + 10) \ .$$

Bepaal het kromtemiddelpunt van de grafiek van f in $(1,\sqrt{3})$.

2.18. Schets de hoogtekaarten van de functies f met

a) $f(x,y) = x - y$;

b) $f(x,y) = xy$;

c) $f(x,y) = \frac{y}{x}$;

d) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2$;

e) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$;

f) $f(x,y) = \max(x,y)$;

g) $f(x,y) = \max(|x|,|y|)$.

Week 3

3.1. Onderzoek of de volgende limieten bestaan:

a) $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{x - y + x^2}{x + y + y^2}$; b) $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{x - y + x^2}{-x + y + y^2}$;

c) $\lim\limits_{\underline{x}\to(1,1)} \dfrac{(x - y)(x + y - 2)}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$; d) $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$.

3.2. De functie f is gedefinieerd door

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x - 1} , & x \neq 1 , \\ \alpha , & (x,y) = (1,0) . \end{cases}$$

a) Schets de hoogtekaart van f.

b) Is het mogelijk α zo te bepalen dat f continu is in (1,0)?

3.3. De functie f is gedefinieerd door

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x - y}{x^2 - 1} , & x \neq \pm 1 , \\ \alpha , & (x,y) = (1,1) , \\ \beta , & (x,y) = (-1,-1) . \end{cases}$$

a) Schets de hoogtekaart van f.

b) Toon aan dat het niet mogelijk is α en β zo te bepalen dat f continu is in (1,1) en in (-1,-1).

3.4. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{voor } (x,y) \neq (0,0) , \\ f(0,0) = 0 . \end{cases}$$

Bewijs dat f continu is op $\mathbb{R}^2$.

3.5. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{voor } (x,y) \neq (0,0)\ , \\ f(0,0) = 0\ . & \end{cases}$$

Bewijs dat f continu is op $\mathbb{R}^2$.

3.6. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = 1 & \text{voor } xy \neq 0\ , \\ f(x,0) = x\ , & \\ f(0,y) = y^2\ . & \end{cases}$$

In welke punten is f discontinu?

3.7. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(\underline{x}) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{voor } \underline{x} \neq \underline{0}\ , \\ f(\underline{0}) = 0\ . & \end{cases}$$

a) Bereken $\lim\limits_{x\to 0} f(x,mx)$.

b) Bereken $\lim\limits_{x\to 0} f(x,mx^2)$.

c) Is f continu in $\underline{0}$?

3.8. Onderzoek de continuïteit in $\underline{0}$ van de functies

a) $f(\underline{x}) = \dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}$ voor $\underline{x} \neq \underline{0}$, $f(\underline{0}) = 1$;

b) $f(\underline{x}) = e^{-\frac{1}{|x-y|}}$ voor $x \neq y$, $f(x,x) = x^3$.

3.9. Toon met de definitie van differentieerbaarheid aan dat de volgende functies differentieerbaar zijn in het punt (1,2) en geef de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek door (1,2,f(1,2)) als

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$; b) $f(x,y) = 2x + y^3$.

3.10. Bepaal de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ van de functies

a) $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$; b) $f(x,y) = x^{\sin y}$;

c) $f(x,y) = \ln \tan \frac{x}{y}$; d) $f(x,y) = (x + y)^{x-2y}$;

e) $f(x,y) = xy^2 e^{x^3+2y}$.

3.11. De functie f is gegeven door

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0) .$$

Toon aan dat $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = -f(x,y)$.

3.12. De functie f is gegeven door

$$f(x,y) = x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, \quad x \neq 0,\ y \neq 0 .$$

Toon aan dat $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x,y)$.

3.13. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(\underline{x}) = \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{voor } \underline{x} \neq \underline{0} , \\ f(\underline{0}) = 0 . \end{cases}$$

a) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $\underline{0}$.
b) Onderzoek of f differentieerbaar is in $\underline{0}$.

3.14. De functie f is gedefinieerd door

$$f(\underline{x}) = |x + y| \qquad (\underline{x} \in \mathbb{R}^2) .$$

Toon aan dat f niet differentieerbaar is in $\underline{0}$ en verklaar dit meetkundig.

3.15. De functie f is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(\underline{x}) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{voor } \underline{x} \neq \underline{0}\ , \\ f(\underline{0}) = 0\ . \end{cases}$$

a) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $\underline{0}$.
b) Onderzoek of f differentieerbaar is in $\underline{0}$.

3.16. Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan het oppervlak met vergelijking

$$z = (12 - xy^2)^{1/3} \text{ in het punt } (1,2,2)\ .$$

3.17. De functie f is gedefinieerd door

$$f(\underline{x}) = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 4y + 10) \qquad (\underline{x} \in \mathbb{R}^2)\ .$$

Geef de functie die f in (0,0, ln 10) lineair benadert.

3.18. Bepaal de punten van het oppervlak met vergelijking

$$z = 15x + 4x^2y^2 - 2xy^2 - 2y^2$$

waar het raakvlak evenwijdig is aan het (x,y)-vlak.

3.19. Gegeven is het oppervlak met vergelijking

$$z = \sin x \sin y, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < y < 2\pi\ .$$

Bepaal de punten van het oppervlak waar het raakvlak evenwijdig is aan het (x,y)-vlak.

3.20. a) Gegeven: $z = xe^{xy}$ met $x = \ln t$, $y = \sin t$.
Bepaal $\frac{dz}{dt}$ met de kettingregel.
b) Gegeven: $z = \arctan(x^2 + y^2)$ met $x = e^t$, $y = \tan t$.
Bepaal $\frac{dz}{dt}$ met de kettingregel.

3.21. Gegeven: $w = \ln(x^3 + y^3 + z^3)$ met $x = t \sin t$, $y = t \cos t$, $z = t$.
Bepaal $\frac{dw}{dt}$ met de kettingregel.

3.22. Van de functie $f(x,y)$ is gegeven: $f(0,1) = -\frac{\pi}{4}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^x$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x - \frac{1}{1+y^2}$
Als $g(t) = f(x(t),y(t))$, waarin $x(t) = \ln t$ en $y(t) = t$, bepaal dan $g'(t)$ en hieruit $g(t)$.

3.23. Gegeven: $z = f(r)$ met $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
Toon aan:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = (f'(r))^2 .$$

3.24. Bepaal alle partiële afgeleiden van de eerste en tweede orde van de functies

a) $f(x,y) = 2x^3y^2 - 3xy + 5y + 7$; b) $f(x,y) = \sin(2x + y)$;

c) $f(x,y) = e^{xy^2}$; d) $f(x,y) = \ln xy^2$;

e) $f(x,y) = x^y$.

3.25. Bepaal de partiële afgeleiden van de derde orde van de functie

$$f(x,y) = x^2y \sin y .$$

Week 4

4.1. Geef de formule van Taylor om $\underline{a} = (0,0)$ tot en met de termen van de derde graad voor de functies

a) $f(x,y) = \sin x \ln(1 + y)$;

b) $f(x,y) = \dfrac{1}{1 - (x + y)}$;

c) $f(x,y) = ye^{x-y}$.

4.2. Geef de formule van Taylor tot en met de termen van de derde graad voor de functies

a) $f(x,y) = x^2y + xy - 3x$ met $\underline{a} = (2,3)$;

b) $f(x,y) = x^2y + x - 2y$ met $\underline{a} = (2,1)$;

c) $f(x,y) = \sin xy$ met $\underline{a} = (\frac{\pi}{2}, 1)$;

d) $f(x,y) = \dfrac{1}{1 + (x - y)}$ met $\underline{a} = (1,1)$.

4.3. Bepaal de aard en de doorsnijdingen met de coördinaatvlakken van het oppervlak

a) $x^2 - 6x - 8z - \frac{1}{4}y^2 + y - 8 = 0$,

b) $x^2 - 4x - 4y^2 - 8y - z^2 = 8$.

4.4. Onderzoek voor alle reële waarden van a de aard van het oppervlak

$$ax^2 + (1 + a)y^2 - az^2 = a - 1 .$$

Geef een schets van de gevonden typen.

4.5. a) Bepaal de vergelijking van de kegel met top (0,0,2) en richtkromme

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 1 . \end{cases}$$

b) Bepaal de projectie op het (x,y)-vlak van de doorsnede van de kegel met het vlak $z = x + 3$.

4.6. Bepaal de vergelijking van de kegel met $\underline{0}$ als top en als richtkromme

$$\underline{x}(t) = (t^2 + 1,\ 2t,\ t^2 - 1), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

4.7. Bepaal de rechte cirkelcilinder met als richtkromme de cirkel

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ 2x + y - z = 1\ . \end{cases}$$

4.8. Gegeven is de kromme K met parametervoorstelling

$$\underline{x}(\varphi) = (\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cos\varphi),\ \varphi \in [0,2\pi)\ .$$

Bepaal de cilinder met K als richtkromme en met beschrijvenden loodrecht $x = z$.

4.9. Bepaal de vergelijking van de cilinder waarvan de beschrijvenden loodrecht staan op het vlak $x + y + z = 0$ en waarvan de richtkromme is

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x - y + z = 0\ . \end{cases}$$

4.10. Men laat de lijn $\ell : \underline{x} = (1,0,0) + \lambda(0,1,-1)$ wentelen om de lijn $m : \underline{x} = \mu(0,0,1$
Bepaal de vergelijking en het type van het door ℓ beschreven oppervlak.

4.11. De rechte ℓ: $\underline{x} = (0,-3,0) + \lambda(1,2,0)$ wordt gewenteld om de rechte $m : \underline{x} = \mu(1,1,$
Bepaal de vergelijking van het omwentelingsoppervlak.

4.12. Bepaal de vergelijking van het omwentelingsoppervlak dat ontstaat als men de x-as wentelt om de lijn

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ \quad z = 1\ . \end{cases}$$

4.13. Bepaal de omhullingskegel van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ met top $(2,1,3)$.

4.14. Gegeven:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} .$$

Bereken

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} .$$

4.15. Gegeven: $w = f(r)$ met $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Toon aan:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) .$$

4.16. Bepaal de punten waar de raaklijn horizontaal is op de krommen met vergelijking

a) $xy^3 - x^2y^2 = 1$; b) $x^2y - xy^2 + y + 12 = 0$;

c) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$; d) $xy + x^2y^3 = 1$.

4.17. Bepaal de punten waar de raaklijn verticaal is op de krommen met vergelijking

a) $2x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0$;

b) $x^3y^2 - 6xy = 1$.

4.18. Bepaal de punten op de kromme $x^2 - 4xy + 5y^2 = 2$

a) waar de raaklijn verticaal is
b) waar de raaklijn richtingscoëfficiënt $\frac{1}{3}$ heeft.

4.19. Bepaal de punten op de kromme $x^2y^2 - 2xy - 2x - 2y = 0$ waar de raaklijn richtingscoëfficiënt -1 heeft.

4.20. Gegeven is de kromme K met vergelijking $x^2 + xy + y^2 = 1$.

a) Bepaal de punten op K waar

i) de raaklijn verticaal is

ii) de raaklijn horizontaal is

iii) de raaklijn richtingscoëfficiënt -1 heeft

iv) de raaklijn richtingscoëfficiënt 1 heeft.

b) Geef een vergelijking voor K in poolcoördinaten.

c) Teken K.

4.21. Gegeven is de kromme met vergelijking $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

a) Bepaal de punten op de kromme waar

i) de raaklijn verticaal is

ii) de raaklijn horizontaal is.

b) Vergelijk de uitkomsten met opgave 2.9.

4.22. Gegeven is de kromme K met vergelijking

$$x^4 + y^4 = 2(x^2 + y^2) \qquad ((x,y) \neq (0,0)) .$$

a) Bepaal de punten van K waar

i) de raaklijn horizontaal is

ii) de raaklijn verticaal is.

b) Bepaal de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan K in $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

c) Bepaal een vergelijking van K in poolcoördinaten.

d) Bepaal de punten van K waar de afstand tot de oorsprong extreem is.

e) Bepaal de vier assen van symmetrie.

f) Teken K.

4.23. Door de vergelijking $z^3 + xz^2 + yz + 2 = 0$ is z in een omgeving van (1,2,-1) impliciet gegeven als functie van x en y. Bepaal $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ in het punt (1,2,-1).

4.24. Door de vergelijking $x^2 - 4y^2 + z + \ln z = 1$ is z in een omgeving van (2,1,1) gegeven als functie van x en y. Bepaal $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ in het punt (2,1,1).

4.25. Gegeven: $2e^{xy} - z^2 - z \cos y = 0$. Beschouw z als functie van x en y en bepaal de partiële afgeleiden van de eerste en tweede orde van z in het punt (0,0,1).

4.26. Gegeven is dat het punt (a,b,c) voldoet aan de vergelijking $f(x,y,z) = 0$. In een omgeving U van (a,b,c) zijn $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\frac{\partial f}{\partial z}$ ongelijk nul. Men kan dus in die omgeving z opvatten als functie van x en y, maar ook y als functie van x en z of x als functie van y en z.
Toon aan dat voor deze functies geldt: $\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} = -1$.

Week 5

5.1. Bepaal de richtingsafgeleide in $\underline{a}$ in de richting van $\underline{v}$ van de volgende functies:

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy, \quad \underline{a} = (1,0),\ \underline{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$;

b) $f(x,y,z) = xy + yz + xz, \quad \underline{a} = (1,2,3),\ \underline{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$;

c) $f(x,y,z) = x^3y + y^3z + z^3x, \quad \underline{a} = (1,1,1),\ \underline{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$.

5.2. De functies f_1, f_2, f_3 en f_4 zijn gedefinieerd door

$$f_1(\underline{x}) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad \text{voor } \underline{x} \neq \underline{0},\quad f_1(\underline{0}) = 0$$

$$f_2(\underline{x}) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \quad \text{voor } \underline{x} \neq \underline{0},\quad f_2(\underline{0}) = 0$$

$$f_3(\underline{x}) = xy\ \ln(x^2+y^2) \quad \text{voor } \underline{x} \neq \underline{0},\quad f_3(\underline{0}) = 0$$

$$f_4(\underline{x}) = y \sin\frac{1}{x^2+y^2} \quad \text{voor } \underline{x} \neq \underline{0},\quad f_4(\underline{0}) = 0 .$$

Onderzoek van deze functies

a) de continuïteit in $\underline{0}$

b) de differentieerbaarheid in $\underline{0}$

c) het bestaan van richtingsafgeleiden in $\underline{0}$.

5.3. Bereken en schets de orthogonale trajectoriën van de niveaulijnen van de functies

a) $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \ln y$;

b) $f(x,y) = x^2 - y^2$;

c) $f(x,y) = \frac{y}{x^2}$.

5.4. Bepaal een parametervoorstelling van de kromme door het punt (1,1,1) die alle niveauvlakken van de functie $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ loodrecht snijdt.

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de volgende functies f op de aangegeven verzamelingen V:

5.5. $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $V = \{(x,y) \mid \frac{1}{2} \le x \le 1,\ \frac{1}{2} \le y \le 1\}$;

5.6. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$;

5.7. $f(x,y) = 4x^2 + y^2$, $V = \{(x,y) \mid |x| + |y| \le 1\}$;

5.8. $f(x,y) = x^2 - y$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$;

5.9. $f(x,y) = x^2y$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$;

5.10. $f(x,y) = 5x^4 - 4x^5 + 5y^4$, $V = \mathbb{R}^2$;

5.11. $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$, $V = \mathbb{R}^2$;

5.12. $f(x,y) = \ln(x^2 + 2x + y^2 + 2)$, $V = \{(x,y) \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$;

5.13. $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, $V = \{(x,y) \mid x^2 - 2x + y^2 \le 0\}$;

5.14. $f(x,y) = \frac{y}{x - 4}$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$;

5.15. $f(x,y) = x(x^2 + y^2 - 2x)$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$;

5.16. $f(x,y) = 4(x - 1)^2 - y^2$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$;

5.17. $f(x,y) = x^2y - 2y^3$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$;

5.18. $f(x,y) = (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - 2x)$, $V = \{(x,y) \mid y^2 \le x\}$;

5.19. $f(x,y) = (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - 2x)$, $V = \{(x,y) \mid y^2 \le x \le 3\}$;

5.20. $f(x,y) = (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - 2x)$, $V = \mathbb{R}^2$;

5.21. $f(x,y) = y^2 - (x^2 - 1)^2$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$;

5.22. $f(x,y) = y^2 - (x^2 - 1)^2$, $V = \mathbb{R}^2$.

Week 6

Bepaal (bijvoorbeeld met behulp van de multiplicatorenmethode van Lagrange) plaats, aard en waarde van de extrema van de volgende functies f op de aangegeven verzamelingen V:

6.1. $f(x,y) = (x + 1)^2 + y^2$, $V = \{(x,y) \mid x^3 = y^2\}$;

6.2. $f(x,y) = xy$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

6.3. $f(x,y) = xy$, $V = \{(x,y) \mid x^3 + y^3 = 3xy\}$;

6.4. $f(x,y) = xy$, $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 2x\}$;

6.5. $f(x,y,z) = x + y + z$, $V = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

6.6. Bepaal de extrema van de afstand van een punt op de ellips $x^2 + 4y^2 = 4$ tot de rechte $x + y = 4$.

6.7. Bepaal de extrema van de afstand van een punt op de parabool $4y = x^2$ tot het punt $(0,3)$.

6.8. Bepaal de extrema van de afstand van een punt op de ellips

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

tot de oorsprong.

6.9. Bepaal de extrema van de afstand van een punt op de kromme

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

tot de oorsprong.

6.10. Bereken

$$5 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} -7 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} +2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

6.11. Schrijf $\begin{pmatrix}5\\0\\7\\3\end{pmatrix}$ als een lineaire combinatie van

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

6.12. Gegeven zijn de lijn ℓ : $\underline{x} = (10,5,15,0) + \lambda(1,2,2,4)$ en het punt $\underline{a} = (1,3,1,4)$.

Bepaal een punt $\underline{b}$ op ℓ zodanig dat $\underline{a} - \underline{b}$ loodrecht staat op ℓ en toon aan dat voor alle $\underline{x}$ op ℓ geldt:

$$\|\underline{a} - \underline{b}\| \le \|\underline{a} - \underline{x}\| .$$

6.13. Gegeven zijn de lijn ℓ : $\underline{x} = (1,-1,2,1,-2) + \lambda(-1,2,-3,4,-5)$ en het punt $\underline{a} = (2,-5,4,-4,2)$.

Bepaal een punt $\underline{b}$ op ℓ, zodanig dat $\underline{a} - \underline{b}$ loodrecht staat op ℓ en toon aan dat voor alle $\underline{x}$ op ℓ geldt:

$$\|\underline{a} - \underline{b}\| \le \|\underline{a} - \underline{x}\| .$$

6.14. Bewijs dat de volgende twee vlakken evenwijdig zijn en niet samenvallen:

$$V_1 : \underline{x} = (1,0,0,0) + \lambda(2,7,-2,9) + \mu(2,1,-2,-1),$$

$$V_2 : \underline{x} = \rho(3,3,-3,1) + \sigma(1,2,-1,2) .$$

6.15. Gegeven zijn het vlak

$$V : \underline{x} = (5,-5,0,0) + \lambda(2,2,4,-5) + \mu(5,3,-1,1)$$

en het punt $\underline{a} = (11,1,-7,-12)$.

Bepaal een punt $\underline{b}$ in V zodanig dat $\underline{b} - \underline{a}$ loodrecht staat op V en bewijs dat voor alle $\underline{x}$ in V geldt:

$$\|\underline{a} - \underline{b}\| \le \|\underline{a} - \underline{x}\| .$$

6.16. Gegeven zijn het vlak

$$\underline{x} = \lambda(1,0,1,1,0) + \mu(0,2,0,1,2)$$

en het punt $\underline{a} = (4,-2,6,-3,-3)$.

Bepaal een punt $\underline{b}$ in V zodanig dat $\underline{b} - \underline{a}$ loodrecht staat op V en bewijs dat voor alle $\underline{x}$ in V geldt:

$$\|\underline{a} - \underline{b}\| \leq \|\underline{a} - \underline{x}\| .$$

6.17. Bewijs dat voor alle $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ en $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ geldt:

$$4(\underline{a},\underline{b}) \leq (\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \underline{b}) + (\underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \underline{b}) .$$

6.18. Voor welke $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ geldt:

$$(\underline{u},\underline{x}) = 0 \quad \text{voor alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ ?}$$

6.19. Gegeven: $|(\underline{a},\underline{b})| = \|\underline{a}\|\|\underline{b}\|$ en $\underline{b} \neq \underline{0}$.

Bewijs dat $\underline{a}$ een scalair veelvoud is van $\underline{b}$.

6.20. Gegeven: $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \neq \underline{0}$.

a) Bepaal alle $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ waarvoor geldt:

$$\|\underline{a} + \underline{u}\| = \|\underline{a}\| + \|\underline{u}\| .$$

b) Bepaal alle $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ waarvoor geldt:

$$\|\underline{a} - \underline{v}\| = \|\underline{a}\| + \|\underline{v}\| .$$

6.21. Bewijs dat voor alle $\underline{u},\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ geldt:

$$\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 + \|\underline{u} - \underline{v}\|^2 = 2\|\underline{u}\|^2 + 2\|\underline{v}\|^2 .$$

6.22. Gegeven:

$$\|\underline{a} + \underline{b}\|^2 = \|\underline{a}\|^2 + \|\underline{b}\|^2 \quad \text{met } \underline{a},\underline{b} \in \mathbb{R}^n .$$

Bewijs dat $(\underline{a},\underline{b}) = 0$.

6.23. Gegeven:

$$\|\underline{a}\| = \|\underline{b}\| \text{ met } \underline{a},\underline{b} \in \mathbb{R}^n .$$

Bewijs dat $\underline{a} + \underline{b}$ en $\underline{a} - \underline{b}$ loodrecht op elkaar staan.

6.24. a) Bereken de hoek tussen (1,4,4,1,1,1) en (0,-1,3,2,1,1).

b) Bereken de hoek tussen (2,3,0,2,1) en (0,2,2,2,2).

6.25. Bepaal het punt op de lijn

$$\underline{x} = (-1,0,9,1) + \lambda(3,-2,3,-1)$$

waarvan de lengte minimaal is.

6.26. Gegeven zijn de vlakken

$$V : \underline{x} = \alpha(4,3,2,1) + \beta(1,0,0,0)$$

$$W : \underline{x} = \gamma(2,1,0,0) + \delta(3,2,1,0) \ .$$

Bepaal $V \cap W$.

6.27. Gegeven zijn de vlakken

$$V : \underline{x} = (2,1,-1,1) + \alpha(-4,1,3,-1) + \beta(2,3,1,1)$$

$$W : \underline{x} = (1,1,-2,-2) + \gamma(7,3,1,2) + \delta(-3,2,2,2) \ .$$

Bepaal $V \cap W$.

Week 7

7.1. a) Schrijf de 3×4-matrix A op, gegeven door $a_{ij} = 2i + j$ $(i = 1,2,3;$ $j = 1,2,3,4)$.

b) Schrijf de 3×4-matrix B op, gegeven door $b_{ij} = i - j$ $(i = 1,2,3;$ $j = 1,2,3,4)$.

c) Bepaal $A + B$ en $A - 2B$.

7.2. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ en } D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bereken, voor zover ze bestaan, de volgende matrices:

$$A + B,\ B + C,\ (A + B)C,\ AB,\ AD,\ D^TD,\ DD^T,\ D^TA^T .$$

7.3. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Bereken AA^T en AB.

7.4. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bereken AB en BA.

7.5. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bereken AB en BA.

7.6. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} .$$

Bereken, voor zover ze bestaan, de producten:

$$AB,\ BA,\ AB^T,\ BA^T,\ A^TB,\ B^TA,\ A^TB^T \text{ en } B^TA^T .$$

7.7. Gegeven is de 4×1-matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Bereken A^TA en AA^T.

7.8. Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bereken A^2, A^3, $A^2 - 2A + 3I$.

7.9. Gegeven zijn de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} .$$

Bereken $B + C$, AB, BA, AC, CA, $A(2B - 3C)$, AA^T, A^TA, A^TC^T.

7.10. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} .$$

7.11. Gegeven is de matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{met } a \in \mathbb{R} .$$

S is gedefinieerd door: $S = I + N + N^2 + N^3$.
Bereken S en $(I - N)S$.

7.12. Gegeven is de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Bereken M^2, M^3, M^4, M^8.

7.13. In een fabriek maakt men uit de grondstoffen G_1 en G_2 in een eerste productiefase de tussenproducten T_1, T_2, T_3. In een tweede fase worden uit deze tussen producten de eindproducten E_1 en E_2 vervaardigd. Het materiaalverbruik per gep duceerde eenheid is gegeven in de volgende schema's:

	T_1	T_2	T_3
G_1	2	4	5
G_2	3	3	7

	E_1	E_2
T_1	2	4
T_2	6	4
T_3	4	2

a) Stel het schema op voor het verbruik van elke grondstof per eenheid eindproduct.

b) Hoeveel eenheden van elke grondstof zijn nodig voor de fabricage van 50 eenheden E_1 en 75 eenheden E_2 ?

7.14. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} .$$

Bereken A^2, A^3.

7.15. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Bereken A^2, A^3.

7.16. Gegeven zijn de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

en de vectoren

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{en } \underline{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

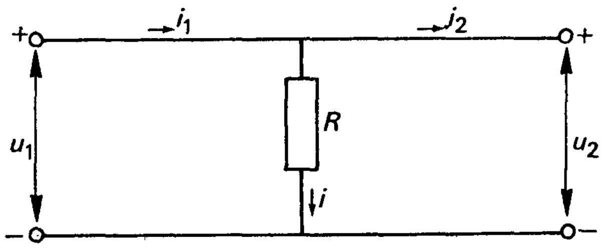
Bepaal $A\underline{x}$, $A^T\underline{y}$ en daarmee $(A\underline{x},\underline{y})$ en $(\underline{x},A^T\underline{y})$.

7.17. Uit onderzoekingen is van een bepaald soort kevers het volgende gebleken:
de maximale levensduur is 3 jaar,
de voortplanting geschiedt alleen in het derde levensjaar,
het gedeelte 1-jarigen dat het tweede levensjaar ingaat is p,
het gedeelte 2-jarigen dat het derde levensjaar ingaat is q,
het gemiddeld aantal nakomelingen van een 3-jarige kever is r.
In het jaar t zij
x_t het aantal 1-jarige,
y_t het aantal 2-jarige,
z_t het aantal 3-jarige kevers.
Bepaal de matrix P zodanig dat $\underline{x}_{t+1} = P\underline{x}_t$, waarin

$$\underline{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}.$$

Bereken P^3 en onderzoek voor welke waarden van p, q, r deze keversoort uitsterft, respectievelijk in aantal toeneemt, respectievelijk constant in aantal blijft.

7.18. Beschouw een tweepoort van de volgende gedaante:



Ga na dat volgens de wetten van Kirchhoff geldt:

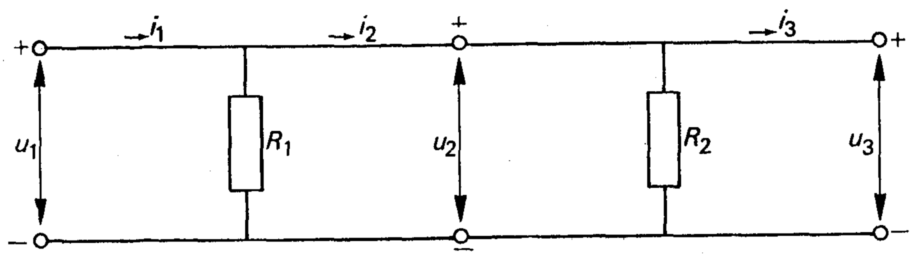
$$\left.\begin{aligned} u_1 &= iR \\ u_2 &= iR \\ i_1 &= i + i_2 \end{aligned}\right\}$$

Definieer:

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix} .$$

Bepaal de matrix M zodanig dat $\underline{u}_2 = M\underline{u}_1$.

Men schakelt twee van zulke tweepoorten in serie volgens onderstaand schema.



Definieer $\underline{u}_k = \begin{pmatrix} u_k \\ i_k \end{pmatrix}$ $\quad k = 1,2,3.$

Bepaal de matrices M_1 en M_2 zodanig dat

$$\underline{u}_2 = M_1\underline{u}_1 \text{ en } \underline{u}_3 = M_2\underline{u}_2 .$$

Bepaal de matrix M zodanig dat $\underline{u}_3 = M\underline{u}_1$.

Wat volgt hieruit voor de vervangingsweerstand R van twee parallel geschakelde weerstanden R_1 en R_2 ?

7.19. Zij $\underline{x}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ een differentieerbare vectorfunctie met $\|x(t)\| = c$ (c constant) voor alle t.
Bewijs dat $(\underline{x}, \frac{d\underline{x}}{dt}) = 0$ voor alle t.
Wat is de meetkundige betekenis van dit resultaat ?

7.20. Een star lichaam roteert om een vaste as $\lambda\underline{a}$ ($\underline{a} \neq \underline{0}$, λ reëel) in $\mathbb{R}^3$. De plaatsvector (= $\vec{OP}$) van een punt P van het lichaam ten tijde t zij $\underline{x}(t)$.

(i) Bewijs dat er een vector $\underline{\omega}(t)$ bestaat, zodat

$$\underline{v}(t) := \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\omega}(t) \times \underline{x}(t) .$$

(ii) Bewijs dat $\underline{\omega}(t)$ onafhankelijk is van P.
(De vector $\underline{\omega}(t)$ heet hoeksnelheidsvector en $\omega(t) = |\underline{\omega}(t)|$ is de hoeksnelheid.)

7.21. Ten tijde t is de plaatsvector van een bewegend deeltje in $\mathbb{R}^3$:

$$\underline{x} = \underline{p} \cos \omega t + \underline{q} \sin \omega t ,$$

waarbij $\underline{p}$ en $\underline{q}$ vaste vectoren zijn en ω een constante is.

(i) Bereken de snelheidsvector $\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt}$ en bewijs dat $\underline{x} \times \underline{v}$ onafhankelijk van t is.

(ii) Bewijs dat de versnellingsvector $\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}$ naar de oorsprong is gericht en dat $|\underline{a}|$ evenredig is met de afstand van het deeltje tot de oorsprong.

7.22. Een deeltje met massa m en plaatsvector $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ beweegt onder invloed van een kracht $\underline{K}(t)$. Bewijs de momentenstelling

$$\frac{d}{dt}(\underline{x} \times m\underline{v}) = \underline{x} \times \underline{K} .$$

7.23. Los de volgende stelsels vergelijkingen op:

a)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 , \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 , \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 ; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 , \\ 7x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 7x_4 = 0 , \\ -5x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 ; \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 , \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 , \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0 ; \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 , \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 , \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 , \\ 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 - 9x_4 = 0 ; \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 , \\ 13x_1 + 14x_2 - 4x_3 = 0 , \\ -7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 , \\ 11x_1 + 13x_2 - 3x_3 = 0 ; \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 , \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 , \\ 3x_1 - x_2 + 5x_4 = 0 , \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 . \end{cases}$$

7.24. Bepaal de oplossingsverzameling van de volgende stelsels vergelijkingen:

a)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 0\ , \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -4\ , \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 3\ ; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2\ , \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 3\ , \\ x_1 - x_3 + 7x_4 = 3\ ; \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1\ , \\ 2x_1 + 4x_2 - 8x_5 = 3\ , \\ -2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0\ ; \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0\ , \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4\ , \\ 2x_1 + 4x_3 = -8\ , \\ 3x_1 + 6x_3 = -12\ , \\ -2x_1 - 8x_2 + 4x_3 = -8\ ; \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\ , \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\ , \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\ , \\ 6x_1 - x_2 - 5x_3 = 0\ , \\ 7x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1\ ; \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1\ , \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2\ , \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3\ . \end{cases}$$

7.25. Bepaal een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen in x_1, x_2, x_3, x_4 zodanig dat de oplossingsruimte samenvalt met het vlak $\underline{x} = \alpha(1,1,-1,1) + \beta(4,3,-1,$

7.26. Bepaal een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen in x_1, x_2, x_3, x_4 zodanig dat de oplossingsruimte samenvalt met het vlak

$$\underline{x} = \alpha(1,2,1,1) + \beta(2,1,1,1) \ .$$

7.27. Bepaal een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen in x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 zodanig dat de oplossingsruimte samenvalt met de ruimte

$$\underline{x} = \alpha(1,0,2,3,1) + \beta(0,0,1,4,4) + \gamma(2,-1,4,0,2) \ .$$

7.28. Bepaal een stelsel lineaire vergelijkingen in x_1, x_2, x_3, x_4 zodanig dat de oplossingsruimte samenvalt met

$$\underline{x} = (2,-3,2,1) + \lambda(2,1,1,1) + \mu(-1,1,4,1) \ .$$

7.29. Bepaal de oplossingsverzameling van de volgende stelsels vergelijkingen

a)
$$\begin{aligned} x + 2y + az &= 3 \\ 2x + 3y + (a+1)z &= 5 \\ 2x + y + (a+2)z &= 3, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} ax + y + z &= 3 \\ 4x - 2y + az &= 3a \\ x + y + az &= 3 \ . \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} (a-1)x + 3y &= a \\ ax + 6y &= 4 \ . \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} px + y + z &= 0 \\ x - y + pz &= 0 \\ 2x + y + 3z &= 0 \ . \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} dx + y + z &= 1 \\ x + dy + z &= d \\ x + y + dz &= d^2 \ . \end{aligned}$$

Week 8

8.1. Bepaal de normaalvorm van de volgende stelsels vergelijkingen:

a)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 1 , \\ -x_1 + x_3 - 3x_4 = 3 , \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = -3 , \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 9x_4 = -5 ; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 1 , \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 , \\ 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 , \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 , \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -3 ; \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 - x_4 = -2 , \\ 4x_1 + 7x_2 + 9x_3 - x_4 = -4 , \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 4 , \\ 7x_1 + 11x_2 + 7x_3 - 5x_4 = -8 . \end{cases}$$

8.2. Welke van de volgende verzamelingen functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn vectorruimten onder de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging?

a) De functies f met $f(0) = f(1)$.

b) De functies f met $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

c) De functies f met $f(2) = 2f(0)$.

d) De functies f met $f(0) = 1 + f(1)$.

e) De functies f met $f(x) = f(1 - x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

f) De functies f met $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

g) De functies f met f differentieerbaar en $f'(x) + f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

8.3. Beschouw de verzameling functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ van het type: $f(x) = A \sin(x + \varphi)$ $(A \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathbb{R})$.

Vormen deze functies een vectorruimte onder de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging?

8.4. Onderzoek of de volgende verzamelingen vectorruimten zijn.

a) De rijen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ met $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
b) De rijen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ waarvoor geldt: er is een $p \in \mathbb{N}$ zodanig dat $a_n = 0$ voor $n >$

8.5. V is de verzameling van de polynomen van de graad ≤ 2 (waarin we stilzwijgend het nulpolynoom opnemen; analoog bij V_1 en V_3).
V_1 is de verzameling van de polynomen van de graad ≤ 2 met een nulpunt in 1.
V_2 is de verzameling van de polynomen van de 2^e graad.
V_3 is de verzameling van de polynomen van de graad ≤ 1.
Welke van de verzamelingen V, V_1, V_2, V_3 zijn lineaire ruimten?
Bepaal in geval van lineaire ruimte een basis en de dimensie van de ruimte.

8.6. $C([0,1])$ is de verzameling van alle continue functies van het interval $[0,1]$ naar $\mathbb{R}$.
B_{100} is de verzameling van alle functies van $[0,1]$ naar $\mathbb{R}$, waarvoor geldt: $|f(x)| \leq 100$ voor alle $x \in [0,1]$.
B is de verzameling van alle functies van $[0,1]$ naar $\mathbb{R}$ met de eigenschap dat er voor iedere $f \in B$ een getal M bestaat zodat $|f(x)| < M$ voor alle $x \in [0,1]$, d.w.z. B is de verzameling van de begrensde functies op $[0,1]$.

a) Welke van de verzamelingen $C([0,1])$, B_{100}, B zijn vectorruimten?
b) De functies f en g zijn gedefinieerd door $f(x) = x$ en $g(x) = x^2$ voor $x \in [0,1]$.
Bewijs dat f en g onafhankelijke vectoren zijn in $C([0,1])$.
c) Welke van de onderstaande functies is een element van $\langle f,g\rangle \subset C([0,1])$?

i) h_1 met $h_1(x) = 8x$ voor alle $x \in [0,1]$;
ii) h_2 met $h_2(x) = x + 6x^2$ voor alle $x \in [0,1]$;
iii) h_3 met $h_3(x) = x + 5$ voor alle $x \in [0,1]$;
iv) h_4 met $h_4(x) = x^3 + x^2$ voor alle $x \in [0,1]$.

8.7. Gegeven is de lineaire ruimte $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$.
Ga na of de volgende deelverzamelingen W van $\mathbb{R}^n$ lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^n$ zijn.

a) $W = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \in \mathbb{Z}\}$;
b) $W = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 5x_1 - x_2 = 0\}$;
c) $W = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 3x_1 + 4x_2 = 1\}$;
d) $W = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$;
e) $W = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$.

8.8. Gegeven: V en W zijn lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^n$. Onderzoek of de volgende verzamelingen deelruimten zijn van $\mathbb{R}^n$. Zo ja, bewijs dit, zo neen geef een tegenvoorbeeld.

a) $V \cap W$

b) $V \cup W$

c) V^* (complement van V in $\mathbb{R}^n$).

8.9. Onderzoek welke van de volgende verzamelingen deelruimten zijn van $\mathbb{R}^4$:

a) $\{(a, a + 2b, a - b - c, 3c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

b) $\{(1,a,0,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$.

c) $\{(0,a,a^2,a^3) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

8.10. V is een vectorruimte; $\underline{a} \in V$ en $\underline{b} \in V$.
Bewijs: $\langle\underline{a},\underline{b}\rangle = \langle\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} - \underline{b}\rangle$.

8.11. Zij $\{\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n\}$ een onafhankelijk stelsel vectoren in een vectorruimte V. Voor $\underline{x} \in V$ geldt

$$\underline{x} \notin \langle\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n\rangle \ .$$

Bewijs: $\{\underline{x},\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n\}$ is een onafhankelijk stelsel.

8.12. Gegeven: $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d} \in \mathbb{R}^n$ zodanig, dat

$$\underline{a} \in \langle\underline{b},\underline{c}\rangle \quad \text{en} \quad \underline{b} \in \langle\underline{c},\underline{d}\rangle \ .$$

Bewijs: $\{\underline{a},\underline{c},\underline{d}\}$ is een afhankelijk stelsel.

8.13. Gegeven: $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c}\}$ is een onafhankelijk stelsel vectoren.
Onderzoek of de volgende stelsels afhankelijk zijn:

a) $\{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}\ ,\ \underline{a} + 2\underline{b}\ ,\ \underline{c} - \underline{b}\}$.

b) $\{\underline{a} + 2\underline{b}\ ,\ \underline{a} + \underline{c},\ \underline{c}\}$.

8.14. Gegeven: $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c}\}$ is een onafhankelijk stelsel en

$$U = \langle\underline{b} - \underline{c},\ \underline{a} + \underline{b},\ \underline{a} + \underline{c}\rangle \ .$$

a) Bepaal de dimensie van U.

b) Onderzoek of $\underline{a}$, $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$, $2\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$ tot U behoren.

8.15. Gegeven: $\underline{a} = (-4,1,3,-2)$, $\underline{b} = (-2,3,1,2)$, $\underline{c} = (1,2,-2,5)$,

$\underline{d} = (5,5,-1,1)$.

Bepaal $\langle \underline{a},\underline{b} \rangle \cap \langle \underline{c},\underline{d} \rangle$.

8.16. Zij $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c}\}$ een onafhankelijk stelsel vectoren in een lineaire ruimte V. Toon aan dat $\{\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - 2\underline{b} + \underline{c}\}$ een onafhankelijk stelsel is.

8.17. Zij $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\}$ een afhankelijk stelsel vectoren in een lineaire ruimte V. Het stelsel $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c}\}$ is onafhankelijk. Toon aan dat $\underline{d}$ een lineaire combinatie is van $\underline{a},\underline{b}$ en $\underline{c}$.

8.18. Onderzoek of de volgende stelsels $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c}\}$ afhankelijk of onafhankelijk zijn.

i) $\underline{a} = (1,2,3)$, $\underline{b} = (3,2,1)$, $\underline{c} = (-3,2,7)$;

ii) $\underline{a} = (1,-1,4,2)$, $\underline{b} = (2,0,2,1)$, $\underline{c} = (7,-3,16,8)$;

iii) $\underline{a} = (4,5,2)$, $\underline{b} = (1,8,2)$, $\underline{c} = (14,4,1)$.

8.19. Onderzoek of de volgende stelsels $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c}\}$ afhankelijk of onafhankelijk zijn.

i) $\underline{a} = (2,3,4)$, $\underline{b} = (5,2,1)$, $\underline{c} = (-4,5,10)$;

ii) $\underline{a} = (4,-3,5)$, $\underline{b} = (2,-4,7)$, $\underline{c} = (10,5,3)$;

iii) $\underline{a} = (2,4,-1,-1)$, $\underline{b} = (1,5,1,-2)$, $\underline{c} = (-1,3,3,-2)$.

8.20. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a} = (3,-1,4,7)$, $\underline{b} = (1,-3,2,5)$, $\underline{c} = (2,6,1,-2)$, $\underline{d} = (5,3,2,-1)$ en $\underline{e} = (0,4,-1,4)$.
Bepaal van elk der volgende vectorruimten een basis en de dimensie.

i) $U_1 = \langle \underline{a},\underline{b},\underline{c} \rangle$;

ii) $U_2 = \langle \underline{a},\underline{b},\underline{d} \rangle$;

iii) $U_3 = \langle \underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{e} \rangle$.

Geef een vector in $\mathbb{R}^4$ die niet in U_2 ligt.

8.21. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a} = (1,2,3,4)$, $\underline{b} = (2,-1,0,2)$ en $\underline{c} = (4,-3,-1,-1)$.
Zij $U = \langle \underline{a},\underline{b},\underline{c} \rangle$.

a) Bepaal dim U.
b) Geldt $\underline{d} = (-4,1,-2,10) \in U$?
c) Geldt $\underline{e} = (3,1,2,1) \in U$?

8.22. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a} = (3,-2,3,1)$, $\underline{b} = (2,1,-2,-1)$ en $\underline{c} = (1,1,2,3)$.
Zij $U = \langle \underline{a},\underline{b},\underline{c} \rangle$.

a) Bepaal dim U.
b) Behoort $\underline{d} = (1,4,3,1)$ tot U?
c) Behoort $\underline{e} = (-4,2,1,3)$ tot U?

8.23. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a} = (8,0,-9,8)$, $\underline{b} = (12,-10,6,6)$, $\underline{c} = (4,7,-6,-8)$, $\underline{d} = (8,-7,3,6)$ en $\underline{e} = (0,-3,12,-10)$. Zij $U = \langle \underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d},\underline{e} \rangle$.
Bepaal dim U en een basis van U.

8.24. Zij $\underline{v} = (1,1,1,1)$. Schrijf $\underline{v}$ als lineaire combinatie van $\underline{a} = (2,-3,6,5)$, $\underline{b} = (4,-1,8,7)$, $\underline{c} = (4,9,0,1)$, $\underline{d} = (3,-3,5,3)$.

Bepaal dim $\langle \underline{a},\underline{b},\underline{v} \rangle$ en dim $\langle \underline{c},\underline{d},\underline{v} \rangle$.

8.25. Beschouw de lineaire ruimte $F(\mathbb{R})$. De functies $f \in F(\mathbb{R})$, $g \in F(\mathbb{R})$ en $h \in F(\mathbb{R})$ zijn gedefinieerd door $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = x^2$ en $h(x) = x$.
Toon aan dat $\{f,g,h\}$ een onafhankelijk stelsel is.

8.26. De functies $f \in F(\mathbb{R})$, $g \in F(\mathbb{R})$, $h \in F(\mathbb{R})$ zijn gedefinieerd door $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = x$.
Toon aan dat $\{f,g,h\}$ een onafhankelijk stelsel is.

8.27. Beschouw de lineaire ruimte $F(\mathbb{R})$. De functies $f_i \in F(\mathbb{R})$ $(i = 1,2,3,4)$ zijn gedefinieerd door

$$f_1(x) = 2,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = \sin^2 x,\ f_4(x) = \cos^2 x .$$

Zij $U = \langle f_1,f_2,f_3,f_4 \rangle$, $V = \langle f_2,f_3,f_4 \rangle$.
Bepaal dim U, dim V, een basis voor U en een basis voor V.

8.28. De functies $f_i \in F(\mathbb{R})$ $(i = 1,2,3,4)$ zijn gedefinieerd door

$$f_1(x) = e^{2x},\ f_2(x) = e^{-x},\ f_3(x) = \cosh x,\ f_4(x) = \sinh x\ .$$

Zij $U = \langle f_1,f_2,f_3,f_4\rangle$, $V = \langle f_2,f_3,f_4\rangle$.

Bepaal dim U, dim V, een basis voor U en een basis voor V.

8.29. V is de vectorruimte van alle 2×3-matrices onder de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging voor matrices.
Bepaal een basis en de dimensie van V.

8.30. W is de vectorruimte van alle 3×3-matrices onder de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging voor matrices.

a) Bepaal een basis en de dimensie van W.
b) Bewijs dat de 3×3-matrices waarvan de derde rij uit nullen bestaat een deelruimte van W vormen.

8.31. De polynomen f, g, h en p worden gedefinieerd door

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 5$$

$$g(x) = x^3 + 2x^2 + 10$$

$$h(x) = -2x^2 + x$$

$$p(x) = 2x^3 - 8x^2 + x - 10\ .$$

Zij $W = \langle f,g,h\rangle$.

a) Bewijs: $p \in W$.
b) Geef een polynoom q met $gr(q) \le 3$ en $q \notin W$.
c) Geef zo mogelijk een polynoom r met $gr(r) \le 3$ en $r \notin \langle f,g,h,q\rangle$.

Week 9

9.1. Ga na of de volgende afbeeldingen lineair zijn. Geef, als A lineair is, de beeldruimte en de nulruimte van A en controleer de dimensiestelling.

a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $A(x,y) = (x + y, x)$;
b) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $A(x,y) = (x + 1, 2y, x + y)$;
c) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $A(x,y,z) = 2x - 3y + z$;
d) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $A(x,y) = xy$;
e) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $A(x,y,z) = (x,0)$;
f) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $A(x,y,z) = (|x|,0)$;
g) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gedefinieerd door $A\underline{x} = \underline{a} + \underline{x}$, waarbij $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ een gegeven vector is.

9.2. Beschouw de lineaire ruimte $F(\mathbb{R})$. Welke van de volgende afbeeldingen $A : F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ zijn lineair?

a) $Af = f(1)$;
b) $Af = 1 + f(1)$;
c) $Af = (f(0))^2$;
d) $Af = 3f(0) + |f(1)|$.

9.3. Ga na of de volgende afbeeldingen lineair zijn.

a) $A : F(\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R})$ gedefinieerd door $(Af)(x) = 1 + f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$;
b) $A : F(\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R})$ gedefinieerd door $(Af)(x) = f(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$;
c) $A : F(\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R})$ gedefinieerd door $(Af)(x) = f(x^2)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

9.4. De lineaire afbeelding $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de projectie op het vlak $x + y + z = 0$

a) Bepaal de beeldruimte en de nulruimte van P;
b) Bepaal de verzameling oplossingen van de vergelijking $P\underline{x} = (1,-1,0)$;
c) Bepaal de verzameling oplossingen van de vergelijking $P\underline{x} = (1,1,2)$;
d) Toon aan dat $P^2 = P$;
e) Is de afbeelding P bijectief?

9.5. De lineaire afbeelding $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de projectie op de rechte $\underline{x} = \lambda(1,2,3)$

a) Bepaal de beeldruimte en de nulruimte van P;

b) Bepaal de verzameling oplossingen van de vergelijking $P\underline{x} = (2,4,6)$;

c) Bepaal de verzameling oplossingen van de vergelijking $P\underline{x} = (1,2,2)$;

d) Is de afbeelding P bijectief?

9.6. De lineaire afbeelding $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van het vlak $x + y + 2z = 0$.

a) Bepaal de beeldruimte en de nulruimte van S;

b) Bepaal de verzameling oplossingen van de vergelijking $S\underline{x} = (1,2,3)$;

c) Bepaal de verzameling oplossingen van de vergelijking $S\underline{x} = (1,1,-1)$;

d) Toon aan dat de afbeelding S bijectief is;

e) Bepaal $S^{\leftarrow}$.

9.7. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$A(2,1,1) = (7,6,7),\ A(1,0,2) = (1,15,10),\ A(-1,2,2) = (-1,7,4)\ .$$

Bepaal:

a) de dimensie en een basis van de beeldruimte van A;

b) de dimensie en een basis van de nulruimte van A;

c) de verzameling oplossingen van de vergelijking $A\underline{x} = (2,-3,-1)$.

9.8. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$A(1,2,3) = A(2,3,1) = A(2,1,3) = (6,-36,30)\ .$$

Bepaal:

a) de dimensie en een basis van de beeldruimte van A;

b) de dimensie en een basis van de nulruimte van A;

c) de verzameling oplossingen van de vergelijking $A\underline{x} = (1,-6,5)$.

9.9. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$A(1,0,0,0) = (3,-1,1),\ A(0,1,0,0) = (1,3,1),\ A(0,0,1,0) = (1,1,1),$$
$$A(0,0,0,1) = (1,1,1)\ .$$

Bepaal:

a) de dimensie en een basis van de beeldruimte van A;

b) de dimensie en een basis van de nulruimte van A;

c) de verzameling oplossingen van de vergelijking $A\underline{x} = (1,1,1)$.

9.10. Laten $A : U \to V$ en $B : V \to W$ lineaire en bijectieve afbeeldingen zijn. Dan is $B \circ A : U \to W$ een bijectieve lineaire afbeelding en er geldt $(B \circ A)^{\leftarrow} = A^{\leftarrow} \circ B^{\leftarrow}$. Toon dit aan.

9.11. Laten $A : V \to V$ en $B : V \to V$ lineaire afbeeldingen zijn en zij $\dim V = n$. Bewijs dat geldt

a) $\dim R(A \circ B) \leq \dim R(A)$

b) $\dim N(A \circ B) \leq \dim N(A) + \dim N(B)$

c*) $\dim R(A) + \dim R(B) - n \leq \dim R(A \circ B) \leq \min(\dim R(A), \dim R(B))$.

9.12. Gegeven: $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ met $\|\underline{a}\| = 1$.
Beschouw de lineaire afbeeldingen $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door:

$$S\underline{x} = \underline{x} - 2(\underline{a},\underline{x})\underline{a}$$

$$P\underline{x} = \underline{x} - (\underline{a},\underline{x})\underline{a} .$$

a) Bepaal van beide afbeeldingen de nulruimte en de beeldruimte.

b) Geef van beide afbeeldingen een meetkundige interpretatie.

c) Toon aan dat $S \circ P = P \circ S = P$.

9.13. Beschouw de afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $A\underline{x} = \underline{x} + (\underline{a},\underline{x})\underline{a}$ met $\underline{a} = (1,1,1)$.

a) Toon aan dat A lineair en bijectief is.

b) Bepaal $A^{\leftarrow}$.

9.14. Van de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zijn de beelden van de standaardbasis gegeven door:

$$A\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad A\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad A\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad A\underline{e}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

a) Bepaal dim $\langle A\underline{e}_1, A\underline{e}_2, A\underline{e}_3\rangle$.

b) Bepaal $\overleftarrow{A}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

9.15. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ heeft als matrix

$$A = \begin{pmatrix}-4 & 6 & 1 & 5\\ 3 & 5 & 4 & 1\\ 1 & 5 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

a) ℓ is de lijn in $\mathbb{R}^4$ met parametervoorstelling $\underline{x} = (5,3,-8,2) + \lambda(1,-3,2,1)$
Bepaal $A(\ell)$.

b) m is de lijn in $\mathbb{R}^3$ met parametervoorstelling $\underline{x} = \mu(-4,2,1)$. Bepaal $\overleftarrow{A}(m)$.

9.16. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft als matrix

$$A = \begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

a) Bepaal het beeld van de lijn

$$\underline{x} = (2,0,1) + \lambda(1,1,-1).$$

b) Bepaal $\overleftarrow{A}(m)$ waarin m de lijn

$$\underline{x} = (0,2,-2) + \lambda(1,-1,0)$$

is.

c) Bepaal beeldruimte en nulruimte van A.

9.17. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft als matrix

$$A = \begin{pmatrix}-5 & -3 & 6\\ -6 & -2 & 6\\ -6 & -3 & 7\end{pmatrix}.$$

De lijnen ℓ en m en het vlak V zijn gegeven door

$$\ell : \ \underline{x} = (1,0,1) + \lambda(1,1,1),$$

$$m : \ \underline{x} = (2,2,1) + \mu(3,2,4),$$

$$V : \ x + y - 2z = 2 .$$

a) Bepaal $A(\ell)$, $A(m)$ en $A^{\leftarrow}(V)$.

b) Bepaal beeldruimte en nulruimte van A.

9.18. De afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd door $A\underline{x} = (\underline{b},\underline{x})\underline{a}$ waarin $\underline{a} \neq \underline{0}$ en $\underline{b} \neq \underline{0}$.

a) Bewijs dat A lineair is.

b) Bepaal de vectoren $\underline{p}$ waarvoor geldt: $A\underline{p} = \lambda\underline{p}$ voor zekere λ.

c) Bepaal nulruimte en beeldruimte van A.

9.19. De functies f,g en h zijn op $\mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \cos x, \ g(x) = \sin x, \ h(x) = 3 \sin(x + \tfrac{\pi}{5}) .$$

$$V = \langle f,g \rangle .$$

a) Bewijs $h \in V$.

b) Van de lineaire afbeelding $A : V \to V$ is gegeven: $Af = g$ en $Ag = f$. Bepaal Ah.

9.20. V is een lineaire ruimte.
$A : V \to V$ is een lineaire afbeelding.

a) Bewijs: $A^2 = \mathcal{O} \Leftrightarrow R(A) \subset N(A)$.

b) Geef een voorbeeld van een lineaire afbeelding $A \neq \mathcal{O}$ waarvoor $A^2 = \mathcal{O}$.

9.21. A is een inverteerbare matrix.
Bewijs dat A^T ook een inverse heeft en dat $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

9.22. A is een vierkante matrix zodanig dat $A^2 = 0$.
Bewijs dat $A + I$ een inverse heeft en bereken $(A + I)^{-1}$.

9.23. A is een vierkante matrix zodanig dat $A^2 + A + I = 0$.
Bewijs dat A een inverse heeft en bereken A^{-1}.

9.24. Bepaal de rang van de volgende matrices.

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -3 & 9 & -5 \end{pmatrix};$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix};$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix};$$

d) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix};$$

e) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9.25. Schrijf een 3×4-matrix A op met

a) rang $A = 0$;

b) rang $A = 1$;

c) rang $A = 2$;

d) rang $A = 3$.

9.26. De lineaire afbeelding $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de draaiing om de oorsprong over een hoek $\frac{2\pi}{3}$. Bepaal de matrix van R.

9.27. De lineaire afbeelding $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de projectie op de rechte $y = -2x$. Bepaal de matrix van P.

9.28. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ is gegeven door

$$A(1,0,0) = (1,1,2,3),\ A(0,1,0) = (1,-1,0,1),\ A(0,0,1) = (2,1,3,5)\ .$$

Bepaal:

a) de matrix van A;

b) $A(1,-1,1)$ en $A(3,-2,-1)$;

c) de rang van de afbeelding A;

d) het beeld van het vlak met vergelijking $x + 5y + 4z = 0$.

9.29. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ is gegeven door

$$A(3,1,0) = (10,0,15,5),\ A(0,-1,5) = (12,-3,9,0)\ ,$$

$$A(2,0,-1) = (6,-2,3,-1)\ .$$

Bepaal:

a) een basis voor de beeldruimte van A;

b) de rang van de afbeelding A;

c) de matrix van A;

d) een basis voor de nulruimte van A.

9.30. De lineaire afbeelding $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van het vlak $2x - y + 3z = 0$.

Bepaal:

a) de matrix van S;

b) de rang van de afbeelding S.

9.31. De lineaire afbeelding $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de projectie op het vlak $2x + y + z = 0$.

Bepaal:

a) de matrix van P;

b) $P(1,1,1)$ en $P(1,-1,-1)$;

c) de rang van de afbeelding P.

9.32. De lineaire afbeelding $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de rotatie om de as $\lambda(1,1,1)$ over een hoek π.

Bepaal:

a) de matrix van R;

b) de rang van de afbeelding R.

9.33. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ is gegeven door

i) $A(1,0,0) = (3,2)$;

ii) $A(1,1,1) = (4,3)$;

iii) de nulruimte van A is de rechte $\underline{x} = \lambda(1,-3,-2)$.

a) Bepaal de matrix van A.

b) Bepaal de rang van de afbeelding A.

c) Voor welke waarde van p is het beeld van het vlak $px + y + z = 0$ een rechte lijn?

9.34. De lineaire afbeelding $S_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van het vlak $z = 0$; de lineaire afbeelding $S_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van het vlak $x = 0$.
Bepaal de matrices van $S_1 \circ S_2$, $S_2 \circ S_1$ en geef de meetkundige interpretatie van de afbeeldingen $S_1 \circ S_2$, $S_2 \circ S_1$.

9.35. De lineaire afbeelding $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de rotatie om de z-as over een hoek π de lineaire afbeelding $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van het vlak $y = 0$.
Bepaal de matrices van $R \circ S$, $S \circ R$ en geef de meetkundige interpretatie van de afbeeldingen $R \circ S$, $S \circ R$.

9.36. De lineaire afbeelding $R_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de rotatie om de x-as over een hoek de lineaire afbeelding $R_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de rotatie om de y-as over een hoek waarbij $(1,0,0)$ overgaat in $(0,0,1)$.
Bepaal de matrices van $R_1 \circ R_2$, $R_2 \circ R_1$ en geef de meetkundige interpretatie van de afbeeldingen $R_1 \circ R_2$, $R_2 \circ R_1$.

Week 10

10.1. Bepaal de inversen, voor zover ze bestaan, van de volgende matrices.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 6 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

10.2. Bereken de volgende determinanten.

a) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 8 \\ 9 & 11 & 5 \\ 8 & 8 & 3 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 7 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

10.3. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven de punten $\underline{a} = (7,9,4)$, $\underline{b} = (6,5,4)$ en $\underline{c} = (2,5,3)$. Bereken de inhoud van het parallellepipedum opgespannen door $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$.

10.4. In $\mathbb{R}^2$ zijn gegeven de punten $\underline{a} = (4,5)$ en $\underline{b} = (1,4)$. Bereken de oppervlakte van het parallellogram met hoekpunten $\underline{0}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{a} + \underline{b}$.

10.5. In $\mathbb{R}^2$ zijn gegeven de punten $\underline{a} = (2,1)$, $\underline{b} = (4,2)$ en $\underline{c} = (3,5)$. Bereken de oppervlakte van de driehoek met hoekpunten $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$.

10.6. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven de punten $\underline{a} = (1,2,3)$, $\underline{b} = (4,5,6)$ en $\underline{c} = (7,8,15)$. Bereken de inhoud van het viervlak met hoekpunten $\underline{0}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$.

10.7. Bereken de inhoud van het viervlak met hoekpunten $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$ als

i) $\underline{a} = (1,2,-1)$, $\underline{b} = (-2,0,3)$, $\underline{c} = (-3,4,-4)$, $\underline{d} = (2,1,0)$;

ii) $\underline{a} = (1,6,7)$, $\underline{b} = (3,9,11)$, $\underline{c} = (4,8,2)$, $\underline{d} = (2,1,8)$.

10.8. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven de vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$. Toon aan dat

$$|D(\underline{a},\underline{b},\underline{c})| \leq \|\underline{a}\|\|\underline{b}\|\|\underline{c}\| \quad .$$

10.9. Bereken de volgende determinanten

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$.

10.10. Voor welke α, β, γ zijn de vectoren $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\beta \\ 2\gamma \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2\alpha \\ 2\beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ afhankelijk?

10.11. Laten y_1 en y_2 de oplossingen zijn van de differentiaalvergelijking

$$y'' = ay' + by ,$$

met a en b constant, waarvoor $y_1(0) = y_2'(0) = 0$, $y_1'(0) = y_2(0) = 1$. Bereken

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} .$$

10.12. Los x op uit

$$\begin{vmatrix} a-x & a & a \\ b & b-x & b \\ c & c & c-x \end{vmatrix} = 0.$$

10.13. (x_1,y_1) en (x_2,y_2) zijn 2 verschillende punten in $\mathbb{R}^2$.
De verzameling $V \subset \mathbb{R}^2$ is gedefinieerd door

$$V = \{(x,y) \mid \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0\} .$$

Geef een meetkundige beschrijving van V.

10.14. Los met de regel van Cramer y op uit het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= -1 , \\ 3x + y + 5z &= 11 , \\ x + 4y - 3z &= -2 . \end{aligned}$$

10.15. Los met de regel van Cramer x op uit het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 2z &= 6 , \\ 4x + 6y + 3z &= 6 , \\ 2x + 3y + z &= 1 . \end{aligned}$$

10.16. Los met de regel van Cramer z op uit het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 6 , \\ 3x - 2y + 7z &= 14 , \\ x + 3y - 3z &= -4 . \end{aligned}$$

10.17. Gegeven: $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$.
Los op met behulp van de regel van Cramer:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 , \\ ax + by + cz &= d , \\ a^2x + b^2y + c^2z &= d^2 . \end{aligned}$$

10.18. Bereken de volgende determinanten.

a) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 6 & 2 \\ 7 & 10 & 8 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 11 & 3 & -4 & 5 \\ -13 & -4 & 5 & -6 \\ 18 & 5 & -5 & 7 \\ 8 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

10.19. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(t) = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & t & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} .$$

Bepaal $f'(t)$.

10.20. Bepaal een polynoom f met $gr(f) \leq 3$ zodanig dat $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 7$, $f(3) = 31$.

10.21. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeven door de volgende matrices

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10.22. Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenruimten van de lineaire afbeeldingen gegeven door de volgende matrices.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 6 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

10.23. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd door

$$A\underline{x} = \underline{x} + (\underline{a},\underline{x})\underline{a} ,$$

waarin $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ een gegeven vector is met $\|\underline{a}\| = 1$.

a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

b) Toon aan dat de inverse afbeelding $A^{\leftarrow}$ bestaat.

c) Laat zien dat voor de afbeelding $A^{\leftarrow}$ geldt

$$A^{\leftarrow}\underline{x} = \underline{x} - \tfrac{1}{2}(\underline{a},\underline{x})\underline{a} .$$

10.24. De afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is gedefinieerd door

$$A\underline{x} = \underline{x} + D(\underline{x},\underline{a})\cdot\underline{a} ,$$

waarin $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ een gegeven vector is en $D(\underline{x},\underline{a})$ de determinant van de vectoren $\underline{x}$ en $\underline{a}$.

a) Toon aan dat A een lineaire afbeelding is.

b) Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren van A.

c) Toon aan dat de nulruimte van A dimensie nul heeft.

d) Laat zien dat voor de inverse afbeelding $A^{\leftarrow}$ geldt

$$A^{\leftarrow}\underline{x} = \underline{x} - D(\underline{x},\underline{a})\cdot\underline{a} .$$

10.25. De afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd door

$$A\underline{x} = \underline{x} \times \underline{a}, \text{ waarin } \underline{a} = (1,1,1) .$$

De lineaire afbeelding $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van het vlak $z = 0$.

a) Toon aan dat A een lineaire afbeelding is.
b) Bepaal de matrix van A.
c) Bepaal de beeldruimte en de nulruimte van de lineaire afbeelding $C = B \circ A$.
d) Bereken de eigenwaarden en de eigenvectoren van C.

10.26. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd door

$$A\underline{x} = \underline{x} - 2(\underline{a},\underline{x})\underline{a} ,$$

waarin $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ een gegeven vector is met $\|\underline{a}\| = 1$.

a) Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van A.
b) Toon aan dat voor de inverse afbeelding $A^{\leftarrow}$ geldt $A^{\leftarrow} = A$.
c) Wat is de meetkundige betekenis van de afbeelding A?

10.27. Laten $\underline{v}$ en $\underline{w}$ eigenvectoren zijn van de lineaire afbeelding $A : V \to V$, zodat $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ en $A\underline{w} = \mu\underline{w}$ en zij $\lambda \neq \mu$.
Toon aan dat $\{\underline{v},\underline{w}\}$ een onafhankelijk stelsel is.

10.28. In dit vraagstuk noteren we de beeldruimte van een lineaire afbeelding $A : V \to V$ door $R(A)$.
Zij $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding waarvoor geldt

$$P^2 = P,\ 0 < \dim R(P) < n .$$

Zij $L_1 = R(P)$ en $L_2 = R(I - P)$.

a) Toon aan:

i) Als $\underline{x} \in L_1$, dan is $P\underline{x} = \underline{x}$.
ii) Als $\underline{x} \in L_2$, dan is $P\underline{x} = \underline{0}$.
iii) $L_1 \cap L_2 = \{\underline{0}\}$.
iv) Elke $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ is op eenduidige wijze te schrijven als

$$\underline{x} = \underline{y} + \underline{z} \quad \text{met} \quad \underline{y} \in L_1,\ \underline{z} \in L_2.$$

b) Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van P. (P heet de projectie op L_1 in de richting van L_2.)

10.29. V is de vectorruimte van alle lineaire combinaties van de functies g en h gedefinieerd door $g(x) = e^{x}$, $h(x) = e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$. De lineaire afbeelding $\mathcal{D} : V \to V$ is gedefinieerd door $\mathcal{D}f = f'$.
Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van $\mathcal{D}$.

10.30. V is de vectorruimte van alle lineaire combinaties van de functies g en h gedefinieerd door $g(x) = \cos x$, $h(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. De lineaire afbeelding $\mathcal{D} : V \to V$ is gedefinieerd door $\mathcal{D}f = f'$.
Toon aan dat $\mathcal{D}$ geen eigenwaarden heeft.

10.31. Beschouw de lineaire ruimte $F(\mathbb{R})$, d.w.z. de verzameling functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$.
De lineaire afbeelding $A : F(\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R})$ is gedefinieerd door

$$(Af)(x) = f(-x) \qquad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van A.

10.32. Van de reguliere lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ is eigenvector met eigenwaarde 2;

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \; ; \; A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

a) Bepaal de matrix van $A^{\leftarrow}$.
b) Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren van $A^{\leftarrow}$.

10.33. Van de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} .$$

a) Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren van A.
b) Bepaal α zodanig dat A regulier is en

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

10.34. Van de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}.$$

Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren van A.

10.35. De afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x-y)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bewijs dat A lineair is.

b) Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren van A.

10.36. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ heeft als matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren van A.

10.37. Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren van de lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door de volgende matrices:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10.38. Bepaal van de lineaire afbeeldingen uit de opgaven 9.30 tot en met 9.32 de eigenwaarden en bijbehorende eigenruimten.

10.39. a) Bepaal het karakteristieke polynoom van de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Bewijs: ieder polynoom $\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ is karakteristiek polynoom voor een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

10.40. In $\mathbb{R}^2$ zijn gegeven twee rechten ℓ en m, die elkaar in $\underline{0}$ snijden onder een hoek φ $(0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$.
De lineaire afbeeldingen A en $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zijn de (loodrechte) projecties op ℓ, respectievelijk m.

a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van $A \circ B$ en $B \circ A$.
b) Bewijs dat er een getal λ is zodanig dat $A \circ B \circ A = \lambda A$ en bereken λ.
c) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van $A + B$.

10.41. Stel dat we het volgende onderscheid in de beroepen aanbrengen: academisch, geschoold, en ongeschoold.
Bij een onderzoek is gebleken:

i) van de zonen van academici zijn 70% academicus, 20% geschoold en 10% ongeschoold.
ii) van de zonen van geschoolden zijn 20% academicus, 60% geschoold en 20% ongeschoold.
iii) van de zonen van ongeschoolden zijn 20% academicus, 30% geschoold en 50% ongeschoold.

We nemen aan dat iedere man één zoon heeft.
Geef de matrix die de overgang van de ene generatie op de andere beschrijft en bereken de percentages voor de kleinzonen van ongeschoolden.
Welke verdeling is stabiel?

10.42. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is een lineaire afbeelding.
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ $(m \le n)$ zijn m onderling verschillende eigenwaarden van A met bijbehorende eigenvectoren $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_m$.
Bewijs dat het stelsel $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_m\}$ onafhankelijk is.

10.43. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is een reguliere lineaire afbeelding. λ is een eigenwaarde van A.
Bewijs: $\lambda \neq 0$ en λ^{-1} is eigenwaarde van $A^{\leftarrow}$.

10.44. A en B zijn lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Bewijs: λ is eigenwaarde van $A \circ B \Leftrightarrow \lambda$ is eigenwaarde van $B \circ A$.

Week 11

11.1. Bepaal het orthoplement van de volgende deelruimten van $\mathbb{R}^3$.

a) $W = \langle(1,1,2),(0,1,0)\rangle$;

b) $W = \langle(1,1,2),(0,1,0),(4,5,8)\rangle$;

c) $W = \langle(3,1,0),(2,1,-4),(5,1,4)\rangle$;

d) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 5z = 0\}$.

11.2. In $\mathbb{R}^4$ is de deelruimte $W = \langle(1,0,1,2),(1,1,0,1)\rangle$ gegeven.

a) Bepaal een basis van $W^\perp$.

b) Bepaal $\underline{v} \in W$ en $\underline{w} \in W^\perp$ zodanig dat $\underline{v} + \underline{w} = (2,2,3,2)$.

11.3. In $\mathbb{R}^4$ is de deelruimte $W = \langle(1,1,-1,0),(2,1,-1,-1),(1,-2,0,3)\rangle$ gegeven.

a) Bepaal een basis van $W^\perp$.

b) Bepaal $\underline{v} \in W$ en $\underline{w} \in W^\perp$ zodanig dat $\underline{v} + \underline{w} = (3,6,-1,3)$.

11.4. In $\mathbb{R}^5$ is de deelruimte $W = \langle(1,2,3,-1,2),(2,4,7,2,-1)\rangle$ gegeven.
Bepaal de projecties op W van de volgende vectoren in $\mathbb{R}^5$.

a) $\underline{u} = (-1,6,11,2,2)$;

b) $\underline{v} = (-4,0,1,1,1)$;

c) $\underline{w} = (3,6,11,5,-4)$.

11.5. Gegeven zijn de vectoren $\underline{u} = (3,1,1)$ en $\underline{v} = (-1,2,1)$.
De lineaire afbeeldingen $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zijn de projecties op $\langle\underline{u}\rangle$ respectievelijk $\langle\underline{v}\rangle$.
Bepaal de matrix van $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ en van $(\mathcal{U} + \mathcal{V})^2$.
Verklaar het resultaat meetkundig.

11.6. Gegeven zijn de vectoren

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{en } \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

De lineaire deelruimten L, M, W van $\mathbb{R}^3$ zijn gedefinieerd door

$$L = \langle\underline{u}\rangle, \quad M = \langle\underline{v}\rangle, \quad W = \langle\underline{u},\underline{v}\rangle .$$

De lineaire afbeeldingen $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zijn gedefinieerd door

$\mathcal{U}$ is de projectie op L,
$\mathcal{V}$ is de projectie op M,
$\mathcal{W}$ is de projectie op W.

Bepaal de matrices van $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$.

11.7. Voor de vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ in $\mathbb{R}^4$ geldt:

$$\|\underline{a}\| = \|\underline{b}\| = \|\underline{c}\| .$$

Bewijs: $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \|\underline{x} - \underline{a}\| = \|\underline{x} - \underline{b}\| = \|\underline{x} - \underline{c}\|\} = \{\underline{a} - \underline{b},\ \underline{a} - \underline{c}\}^{\perp}$.

11.8. Bepaal de regressierechte bij de punten

a) (-2,5), (-1,3), (0,3), (1,4), (2,5) ;
b) (0,1), (2,2), (4,2), (6,5), (8,4) ;
c) (-2,5), (-1,5), (2,0), (3,0).

11.9. Tussen twee grootheden x en y bestaat een verband $y = \lambda x$. Een serie metingen levert het volgende resultaat op:

x :	-1	0	1	2
y :	-1	$-\frac{1}{2}$	1	1 .

Geef met behulp van de kleinste-kwadratenmethode een schatting voor λ.

11.10. Tussen twee grootheden x en y bestaat een verband $y = ax^b$. Een serie metingen levert het volgende resultaat op.

x =	1	2	4	8
y =	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$.

Geef met behulp van de kleinste-kwadratenmethode een schatting voor a en b.

11.11. De waarnemingsuitkomsten van een experiment zijn $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Welk getal benadert deze uitkomsten zo goed mogelijk in de zin van de methode van de kleinste kwadraten?

11.12. Bij gegeven getallen $x_1,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_n$ is de functie f gedefinieerd door

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 .$$

Bereken (a_0,b_0) zodanig dat grad $f(a_0,b_0) = \underline{0}$.

11.13. In een vat wordt op een tijdstip t = 0 een mengsel van radioactieve materialen A en B gedaan. Op tijdstip t zijn de stralingsintensiteiten van A en B gelijk aan $(0,9)^t a$ respectievelijk $(0,5)^t b$.

De totale stralingsintensiteit c_t wordt op verschillende tijdstippen gemeten. Men vindt voor (t,c_t) achtereenvolgens: (0,51), (1,30), (2,20), (3,16). Bereken de waarden van a en b die in de zin van de kleinste-kwadratenmethode het beste bij deze meetresultaten passen.

11.14. A is een willekeurige matrix.
Bewijs: $sp(A^T A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

11.15. Bewijs dat voor alle matrices A de Grammatrix $A^T A$ symmetrisch is en alleen niet-negatieve eigenwaarden heeft.

11.16*. Gegeven: $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ zijn vectoren in $\mathbb{R}^3$.
De matrices A, B en C zijn gegeven door

$A = [\underline{a}]$ (dus A is een 3 × 1-matrix),
$B = [\underline{a},\underline{b}]$ (dus B is een 3 × 2-matrix),
$C = [\underline{a},\underline{b},\underline{c}]$ (dus C is een 3 × 3-matrix).

Zij $\mathcal{O}$ de oppervlakte van het parallellogram, opgespannen door $\underline{a}$ en $\underline{b}$, en V de inhoud van het parallellepipedum, opgespannen door $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$.

Bewijs:

$$\det A^T A = \|\underline{a}\|^2$$

$$\det B^T B = \mathcal{O}^2$$

$$\det C^T C = V^2 .$$

11.17. Voor de vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ in $\mathbb{R}^n$ geldt:

$$\|\underline{a}\| = \|\underline{b}\| = \|\underline{c}\| = 1 ,$$

$$(\underline{a},\underline{b}) = (\underline{a},\underline{c}) = \tfrac{1}{2},\ (\underline{b},\underline{c}) = -\tfrac{1}{2}.$$

Bewijs dat het stelsel $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c}\}$ afhankelijk is.

11.18*. $\{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_k\}$ is een onafhankelijk stelsel vectoren in $\mathbb{R}^n$. De $n \times k$-matrix A is gegeven door

$$A = [\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_k] \ .$$

Stel: $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ maar $\underline{b} \notin \langle\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k\rangle$.
De vergelijking $A\underline{x} = \underline{b}$ heeft dan geen oplossing. We bepalen nu een $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ zodanig dat $\|A\underline{a} - \underline{b}\|$ minimaal is, dus waarvoor $A\underline{a}$ de projectie is van $\underline{b}$ op $\langle\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_k\rangle$.

a) Bewijs dat voor een vector $\underline{w} \in \mathbb{R}^n$ geldt:

$$\underline{w} \in \langle\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_k\rangle^{\perp} \Leftrightarrow A^T\underline{w} = \underline{0} \ .$$

b) Bewijs dat de vergelijking $A^TA\underline{x} = A^T\underline{b}$ precies één oplossing heeft en dat deze oplossing $\underline{a}$ is.

c) Bepaal de matrix van de projectie van $\mathbb{R}^n$ op $\langle\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_k\rangle$.

11.19. In $\mathbb{R}^n$ is $\{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n\}$ een orthonormaal stelsel vectoren.
Bewijs dat voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$(\underline{x},\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n} (\underline{x},\underline{v}_k)^2 \ .$$

11.20. Van de vectoren $\underline{u}_1,\underline{u}_2$ in $\mathbb{R}^2$ is gegeven: voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ geldt

$$(\underline{x},\underline{x}) = \sum_{k=1}^{2} (\underline{x},\underline{u}_k)^2 \ .$$

a) Bewijs dat $\{\underline{u}_1,\underline{u}_2\}$ een onafhankelijk stelsel is.
b) Bewijs dat $\{\underline{u}_1,\underline{u}_2\}$ een orthonormaal stelsel is.

11.21. In $\mathbb{R}^4$ zijn gegeven de vectoren $\underline{u}_1 = (1,1,1,1)$, $\underline{u}_2 = (3,3,-1,-1)$, $\underline{u}_3 = (7,9,3,5)$.
Construeer met het orthonormalisatieproces van Gram-Schmidt een orthonormale basis van de deelruimte $\langle\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3\rangle$. Vul de gevonden basis aan tot een orthonormale basis van $\mathbb{R}^4$.

11.22. In $\mathbb{R}^4$ vormen $\underline{u}_1 = \frac{1}{5}(4,2,2,1)$ en $\underline{u}_2 = \frac{1}{5}(-2,4,-1,2)$ een orthonormale basis van $<\underline{u}_1,\underline{u}_2>$. Breid deze basis uit tot een orthonormale basis van $<\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{v}>$, waarbij $\underline{v} = (0,4,2,3)$; en tenslotte tot een orthonormale basis van $\mathbb{R}^4$.

11.23. Ga na of de volgende matrices orthogonaal zijn, en zo ja, of de bijbehorende afbeelding een draaiing of een draaispiegeling is.

a) $$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3}\sqrt{5} & -\frac{2}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3}\sqrt{5} \end{pmatrix};$$

b) $$\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 8 & 12 & -9 \\ 12 & 1 & 12 \\ 9 & -12 & -8 \end{pmatrix};$$

c) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

d) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} & -\frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{35}} \end{pmatrix};$$

e) $$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.24. De lineaire afbeelding $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de draaiing om de as $\lambda(1,2,0)$ over een hoek π; de lineaire afbeelding $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van het vlak $z = 0$.
Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenruimten van de afbeelding $R \circ S$.
Geef de meetkundige interpretatie van $R \circ S$.

11.25. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Toon aan dat A een draaiing is.
b) Bepaal de draaiingsas.
c) Bepaal de draaiingshoek.

11.26. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Toon aan dat A een draaispiegeling is.
b) Bepaal het spiegelvlak en de draaiingshoek.

11.27. Door de volgende matrices zijn orthogonale afbeeldingen van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^3$ gegeven. Onderzoek van elk van deze afbeeldingen of hij een draaiing of een draaispiegeling is. Bepaal in geval van een draaiing de draaiingsas en de draaiingshoek, in geval van een draaispiegeling het spiegelvlak en de draaiingshoek.

a) $$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} ;$$

b) $$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} ;$$

c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\frac{1}{21}\begin{pmatrix} -5 & 4 & -20 \\ -20 & -5 & 4 \\ 4 & -20 & -5 \end{pmatrix}$.

11.28. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is een draaiing, waarvan de as loodrecht staat op de vectoren (2,0,-1) en (2,-1,0).
Verder is gegeven dat $A(2,0,-1) = (2,-1,0)$.
Bepaal
a) de eigenwaarde(n) van A met de bijbehorende eigenvectoren;
b) $A(2,-1,0)$.

11.29. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is een draaiing zodanig dat

$$A\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Bepaal de matrix van A.
De lineaire afbeelding $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de spiegeling in de lijn $y = x$.
Bepaal de matrix van S.
Bepaal de matrices van $A \circ S$ en $S \circ A$, en bepaal eigenwaarden en eigenvectoren van deze afbeeldingen.

11.30. Gegeven zijn de vectoren $\underline{x} = (0,3,3)$ en $\underline{y} = (4,-1,1)$.
De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is een draaiing zodanig dat de as loodrecht staat op $\langle \underline{x},\underline{y} \rangle$ en $A\underline{x} = \underline{y}$.
Bepaal de matrix van A en de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

11.31. De lineaire afbeelding $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling in het vlak $x + 2y + z = 0$.
De afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door

$$A\underline{x} = (\underline{a}, S\underline{x}) \quad \text{met} \quad \underline{a} = (1,1,1) .$$

a) Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.
b) Bepaal de nulruimte en beeldruimte van A.
c) Bepaal een $\underline{b} \in \mathbb{R}^3$ zodanig dat $A\underline{x} = (\underline{x},\underline{b})$.

11.32. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is een draaiing waarvan de as loodrecht staat op

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} , \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

en waarvoor geldt

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

a) Bepaal $A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

b) Bepaal de matrix van A.

11.33. Bewijs dat voor een orthogonale lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ geldt:

$$(A\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},A^{-1}\underline{y}) \quad \text{voor alle } \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^n .$$

11.34. Gegeven: twee vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ in $\mathbb{R}^n$ met $(\underline{a},\underline{b}) \neq 0$.
De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is gedefinieerd door

$$A\underline{x} = (\underline{a},\underline{b})\underline{x} + (\underline{b},\underline{x})\underline{a} .$$

a) Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren van A.

b) Bewijs dat A niet orthogonaal is.

11.35. Gegeven: twee vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ in $\mathbb{R}^n$ met

$$\|\underline{a}\| = \|\underline{b}\| = 1 \quad \text{en} \quad (\underline{a},\underline{b}) = 0.$$

De afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is gedefinieerd door

$$A\underline{x} = \underline{x} - (\underline{a} + \underline{b},\underline{x})\underline{a} + (\underline{a} - \underline{b},\underline{x})\underline{b} .$$

a) Bewijs dat A lineair is.

b) Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren van A.

c) Bewijs dat A orthogonaal is.

d) Geef een meetkundige interpretatie van A.

11.36. Van de vierkante matrix A is gegeven:

$$A + A^T = 0 .$$

Bewijs: A + I is regulier en $(A - I)(A + I)^{-1}$ is orthogonaal.

11.37. Van de vierkante matrix A is gegeven: A is orthogonaal en I + A is regulier.
Bewijs: $(I - A)(I + A)^{-1}$ is scheefsymmetrisch.

11.38. Bepaal λ, u, v, w zodanig dat de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met matrix

$$A = \lambda \begin{pmatrix} u & 4 & 7 \\ v & 8 & 4 \\ w & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

een draaispiegeling is.

11.39. Gegeven: $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is lineair.

a) Bewijs: $\mathcal{A}(\underline{x} \times \underline{y}) = \mathcal{A}\underline{x} \times \mathcal{A}\underline{y}$ voor alle $\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^3$ als $\mathcal{A}$ een draaiing is.

b) Probeer een analoge uitdrukking te vinden voor een draaispiegeling $\mathcal{B}$.

11.40. De lineaire afbeelding $\mathcal{D} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is een draaiing met as $\lambda(1,1,1)$ en er geldt $\mathcal{D}(1,0,0) = (0,0,\gamma)$.

a) Bepaal γ.

b) Bepaal de matrix van $\mathcal{D}$.

c) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{D}$.

d) Bepaal $\mathcal{D}^3$.

11.41. De lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ heeft als matrix

$$A = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

a) Bewijs dat $\mathcal{A}$ een orthogonale afbeelding is en dat 1 en -1 eigenwaarden zijn van $\mathcal{A}$.

b) Bepaal E_1 en E_{-1}.

c) Bewijs dat iedere $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ op precies één manier te schrijven is als $\underline{x} = \underline{y} +$ met $\underline{y} \in E_1$ en $\underline{z} \in E_{-1}$.

d) Wat is de meetkundige betekenis van A?

11.42. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ heeft als matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bewijs dat A een orthogonale afbeelding is en dat 1 en -1 eigenwaarden zijn van A.

b) Bepaal E_1 en E_{-1}.

c) Bepaal $V = \langle E_1, E_{-1}\rangle^{\perp}$.

d) Bewijs dat $AV = V$ en dat A op V als een draaiing werkt. Bepaal de draaiingshoek.

e) Bewijs dat iedere $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ op precies één manier te schrijven is als $\underline{x} = \underline{y} + \underline{z} + \underline{v}$ met $\underline{y} \in E_1$, $\underline{z} \in E_{-1}$, en $\underline{v} \in V$.

Week 12

12.1. Bepaal de lengte van de kettinglijn gegeven door $y = \cosh x$ $(-1 \le x \le 1)$.

12.2. Bepaal de lengte van de kromme met parametervoorstelling

$$(x(t),y(t)) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t), \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

12.3. Bepaal de lengte van de doorsnijdingskromme van de parabolische cylinder $2x - y^2 = 0$ en het vlak $x + z = 3$ voor zover deze boven het (x,y)-vlak ligt.

12.4. Toon aan dat de lengte van de kromme

$$\tfrac{1}{2}x^2 + y^2 = 1, \; x \ge 0, \; y \ge 0 ,$$

gelijk is aan de lengte van de kromme

$$y = \cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

12.5. Bereken de lengte van de kromme met parametervoorstelling

$$(x(t),y(t),z(t)) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, t), \; 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

12.6. Bereken de lengte van de krommen in poolcoördinaten gegeven door de vergelijkingen

a) $r = \varphi, \quad 0 \le \varphi \le 1$;

b) $r = \dfrac{e^{\varphi} - 1}{e^{\varphi} + 1}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$;

c) $r = \varphi^2 - 1, \quad \pi \le \varphi \le 2\pi$.

12.7. Schets de kromme met parametervoorstelling

$$(x(t),y(t)) = (\sqrt{t^2 + 1}, \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})), \quad -\frac{4}{3} \le t \le \frac{4}{3}.$$

a) Bepaal de lengte van de kromme.

b) Bepaal de massa en het zwaartepunt van de kromme als de massadichtheid gelijk is aan de booglengte gemeten vanaf het punt $(1,0)$.

12.8. a) Zij G het gebied gegeven door $1 \leq x \leq 2$, $3 \leq y \leq 5$. Bereken

$$\iint_G x^2 y \, dxdy .$$

b) Zij G het gebied gegeven door $0 \leq x \leq 1$, $2 \leq y \leq 3$. Bereken

$$\iint_G x e^{xy} \, dxdy .$$

12.9. Zij G het gebied gegeven door $x \geq 0$, $y \geq x^2$, $y \leq 2 - x^2$. Bereken

$$\iint_G y\sqrt{x} \, dxdy .$$

12.10. Zij G het gebied gegeven door $1 \leq x \leq 2$, $x^2 - y^2 \geq 1$. Bereken

$$\iint_G x \, dxdy .$$

12.11. Bereken $\iint_G (x + y)dxdy$, als G het gebied is ingesloten door de rechten $y = 1$, $y = 2$, $y = x$, $x = 3y$.

12.12. Verwissel de integratievolgorde in de volgende herhaalde integralen:

a) $$\int_0^2 dy \int_y^{2y} f(x,y)dx ;$$

b) $$\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} f(x,y)dy ;$$

c) $$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy ;$$

d) $$\int_1^e dy \int_0^{\ln y} f(x,y)dx .$$

12.13. Bereken de volgende herhaalde integralen:

a) $$\int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx \;;$$

b) $$\int_0^1 dy \int_{y^2}^1 y \frac{\sin x}{x} dx \;;$$

c) $$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \frac{2 \arcsin y}{\sqrt{1-y^2}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \;;$$

d) $$\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} y^2 e^{y^2} dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{1} y^2 e^{y^2} dy \;.$$

12.14. Het gebied G is gegeven door $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq y \leq x$. Bereken

$$\iint_G x^2 y \, dxdy \;.$$

12.15. Bereken de oppervlakte van het gebied ingesloten door de cardioïde met vergelijking $r = 1 + \cos \varphi$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ in poolcoördinaten.

12.16. Zij G het gebied binnen de cirkel $r = 2 \cos \varphi$ en buiten de cirkel $r = 1$ $(r, \varphi$ zijn poolcoördinaten).
Bereken de oppervlakte van G.

12.17. Bereken de oppervlakte van het gebied gegeven door $1 \leq x^2 + y^2 \leq x + y$ (maantje van Hippocrates).

12.18. Bereken de oppervlakte van het gebied gelegen binnen de kromme met vergelijking $x^4 + y^4 = x^2 - y^2$.

12.19. De strophoïde gegeven door de vergelijking $x(x^2 + y^2) = y^2 - x^2$ heeft $x = 1$ als asymptoot. Bereken de oppervlakte ingesloten door kromme en asymptoot voor zover gelegen in het eerste en vierde kwadrant.

12.20. Bereken het moment ten opzichte van een raaklijn van de cirkelschijf $x^2 + y^2 \leq R^2$ met massadichtheid 1.

12.21. Bereken het traagheidsmoment ten opzichte van de y-as van de homogene schijf gegeven door

$$0 \leq y \leq x \leq 8, \quad xy \leq 16 .$$

12.22. Bereken de coördinaten van het zwaartepunt van de homogene schijf ingesloten door $y = 0$ en $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.

Week 13

13.1. Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de cylinder $y^2 + z^2 = 1$ waarvoor geldt $z \geq 0$, $0 \leq x \leq y \leq 1$.

13.2. Bepaal de oppervlakte van de paraboloïdetop $2z = 3 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

13.3. Bereken het traagheidsmoment ten opzichte van de z-as van het deel van het zadeloppervlak $z = xy$ dat binnen de cylinder $x^2 + y^2 = 1$ ligt, aangenomen dat de massadichtheid constant is.

13.4. Bereken de oppervlakte van dat deel van de paraboloïde $2z = x^2 - y^2$ waarvan de projectie op het (x,y)-vlak binnen de kromme met vergelijking $r = \sqrt{\cos \varphi}$ valt.

13.5. Bereken de oppervlakte van dat deel van de paraboloïde $4z = x^2 + y^2$ waarvan de projectie op het (x,y)-vlak valt binnen de kromme met vergelijking $r^2 = 4 \cos 2\varphi$.

13.6. Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de cylinder $y^2 + z^2 = 36$ waarvoor geldt $x \geq 0$, $z \geq 0$, $0 \leq y \leq 3 - x$.

13.7. Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dat wordt afgesneden door de cylinder $x^2 + y^2 = x$.

13.8. Bereken de oppervlakte van de delen van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ binnen en buiten de kegel $z^2 = x^2 + (y - 1)^2$.

13.9. Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ afgesneden door de cylinder $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

13.10. Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de cylinder $y^2 + z^2 = 1$ dat binnen de cylinder $x^2 = y + 1$ ligt.

13.11. De kromme gegeven door $y = \cos 2x$, $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ wordt gewenteld om de x-as. Bereken de oppervlakte van het lichaam dat door deze wenteling ontstaat.

13.12. Bereken de oppervlakte van het omwentelingsoppervlak dat ontstaat door de kromme $y = e^{-x}$, $0 \leq x < \infty$, te wentelen om de x-as.

13.13. De cardioïde $r = 1 - \cos \varphi$ wordt gewenteld om de x-as. Bereken de oppervlakte van het lichaam dat door deze wenteling ontstaat.

13.14. Bereken het volume van de volgende lichamen.

a) Het afgeknotte prisma begrensd door de vlakken $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, $z = x + 2y$;

b) Het lichaam ingesloten door $x = 0$, $z = 0$, $y = 2$, $x = y^2$, $z = xy$.

c) Het lichaam begrensd door $z = x$, $z = 2x$, $z = 2$, $y = 0$, $y = (z - x)(2x + z)$.

d) Het lichaam begrensd door de vlakken $z = 0$, $z = 2y$ en de rechte cylinder waarvan het grondvlak is het in het eerste kwadrant van het (x,y)-vlak gelegen gebied waarvoor geldt $9 \leq x^2 \leq 36 - y^2$.

e) Het lichaam in het eerste octant begrensd door de cylinder $x^2 = 4 - z$ en het vlak $4x + 3y = 12$.

f) Het lichaam in het eerste octant begrensd door $z = 0$, $z = y\sqrt{3}$, $4x^2 + 9(y^2 + z^2) = 36$.

g) Het lichaam begrensd door de cylinder $x^2 + y^2 = 2y$, het vlak $z = 0$ en de kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Week 14

14.1. Bereken $\iiint_G (x + y + z)dxdydz$, waarin G het gebied is gegeven door $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 4$.

14.2. L is het lichaam begrensd door het vlak $z = 0$ en het omwentelingsoppervlak dat ontstaat door de kromme $x = \sqrt{1 - z}$, $y = 0$ te wentelen om de z-as. C is de rechte cirkelcylinder met $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$ als as en straal $\frac{1}{2}$. Bereken het volume van de delen van L binnen en buiten C.

14.3. Bereken het volume van het lichaam gegeven door

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y + z \leq 3 .$$

14.4. Bereken het volume van het gedeelte van de bol $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ dat binnen de cylinder $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ ligt.

14.5. Bepaal de massa van de afgeknotte pyramide begrensd door de vlakken $y = 1$, $y = 2$, $z = 0$, $x = y$, $z = x$, als de massadichtheid $\frac{1}{x^2 + y^2}$ is.

14.6. Bereken $\iiint_G \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}$, waarin G gegeven wordt door $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

14.7. Bereken $\iiint_G (x^2 + y^2 + z)dxdydz$, waarin G het gedeelte van het eerste octant is gegeven door $z \leq y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

14.8. Bereken het volume van het lichaam begrensd door $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z$.

14.9. Bepaal het zwaartepunt van het homogene lichaam in het eerste octant begrensd door de oppervlakken $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.

14.10. Bereken $\iiint_G \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}}$, waarin G gegeven wordt door $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

14.11. Bereken $\iiint\limits_G e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz$, waarin G het gehele eerste octant voorstelt.

14.12. Bereken het volume van het lichaam in het eerste octant gegeven door

$$x^2 + y^2 \geq 1,\ \frac{1}{3}x\sqrt{3} \leq y \leq x\sqrt{3},\ 0 \leq z \leq \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} .$$

14.13. Bereken de massa van een heelal met massadichtheid $\frac{1}{(\rho^2 + a^2)^2}$, waarin ρ de afstand is tot de oorsprong en waarin $a > 0$.

14.14. a) Bereken

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x e^{-x^2 - x^2 y^2} dxdy .$$

b) Bereken met behulp van a):

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx .$$

14.15. Druk de volgende integralen uit in de gammafunctie:

a) $\int_0^{\pi/2} \sin^{3/2}\varphi\, d\varphi$;

b) $\iint\limits_G x^{p-1}y^{q-1}dxdy$ $(p > 0,\ q > 0)$, waarin G het gebied is gegeven door $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 2$, en bereken de waarde van de integraal voor $p = \frac{3}{2}$, $q = 2$;

c) $\iiint\limits_G x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}dxdydz$ $(p > 0,\ q > 0,\ r > 0)$, waarin G het gebied is gegeven door $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y + z \leq 1$, en bereken de waarde van de integraal voor $p = \frac{3}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{4}$;

d) $\int_0^\infty \frac{x^{1/4}dx}{(1 + x)^{3/2}}$;

e) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \sin\varphi)^p (1 - \sin\varphi)^q d\varphi,\ p > -\tfrac{1}{2},\ q > -\tfrac{1}{2}$;

f) $\displaystyle\iiint_G dxdydz$, waarin G het gebied is gegeven door $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x^p + y^p + z^p \leq 1$ $(p > 0)$, en bereken de waarde van de integraal voor $p = \tfrac{1}{2}$.

14.16. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \int_{-1}^{1} e^{xt^2}\, dt .$$

Ga na dat f differentieerbaar is en bereken $f'(0)$.

14.17. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin xt}{t^2}\, dt .$$

Bereken $f''(x)$.

14.18. De functie $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \int_{0}^{1} \frac{\ln(1 + xt)}{1 + t^2}\, dt .$$

Ga na dat f differentieerbaar is en bereken $f'(0)$.

14.19. De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \int_{0}^{x^2-x} \frac{\sin xt}{t + 1}\, dt .$$

Bereken $f'(1)$.

14.20. De functie f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \int_{-2x}^{1+2x} e^{(x-2)t^2} dt .$$

Bereken f'(2).

14.21. Toon aan dat

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab} \qquad (a > 0,\ b > 0) .$$

Bereken door differentiatie

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2} .$$