TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

EXAMEN-

en

TENTAMENOPGAVEN

1965-1974

WISKUNDE 20

met antwoorden en oplossingen

7d 9

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Examen-en tentamenopgaven

Wiskunde 20

met antwoorden en oplossingen (1965-1974)

Dictaatnr. 2.201 Prijs ƒ 7,--

Inhoudsbeschrijving
Examen- Tentamenopgaven Wiskunde 20, (1965-1974) met antwoorden en oplossingen

(JdG, 6 Juli 2005)

Examen en Tentamen opgaven Wiskunde 20.

In dit tentamenboek zijn opgenomen alle wiskunde 20 tentamens:
uit 1965 t/m 1970 met antwoorden, resp.
uit 1971 t/m 1974 met uitgewerkte oplossingen
(de multiple choice proeftentamens 1966 en 1969 met antwoordcode).

Voor studenten, die oefenstof zoeken voor een bepaald onderdeel van wiskunde 20, is het boek toegankelijker gemaakt door toevoeging van een tabel (achterin dit boek), die de indeling van de collegestof geeft over de besproken tentamens.

Ieder tentamen is aangegeven met een code:
<u>in letters</u> (P, D, H) het soort (proef-, deel-, herkansings-) tentamen;
<u>in cijfers</u> de maand en het jaar waarin het tentamen plaats vond.

Examen/tentamen januari 1965

1. a) Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y^{(3)} - y'' + 2y = e^{x} + e^{-x}.$$

b) Ga na of deze differentiaalvergelijking oplossingen $y(x)$ bezit die begrensd zijn als $x \to -\infty$.

2. Schets in het complexe z-vlak het convergentiegebied van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n(z^2-|z|^{-2})}}{n^3 \log(1+\frac{1}{n})}.$$

3. Bereken $\int_{-1}^{2} \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}\, dx.$

4. Bepaal de inhoud van het gebied in R_3 dat is gegeven door

$$x^2 + y^2 \leqslant 4 - z \leqslant 2x.$$

5. Zij in R_2 een vector $\underline{a}$ gegeven.
Men beschouwt de afbeelding A van R_2 in R_2 die is gegeven door:

$$A\underline{x} = \underline{x} + \underline{a} \cdot D(\underline{x}, \underline{a}).$$

Hierin stelt $D(\underline{x}, \underline{a})$ de determinant van de vectoren $\underline{x}$ en $\underline{a}$ voor.

a) Bewijs dat A lineair is.

b) Bewijs dat de nulruimte van A de dimensie 0 heeft.

c) Toon aan dat A regulier is.

d) Laat zien dat voor de inverse afbeelding A^{-1} geldt:

$$A^{-1}\underline{x} = \underline{x} - \underline{a} \cdot D(\underline{x}, \underline{a}).$$

e) Toon aan dat 1 de enige eigenwaarde van A is, en bepaal de bijbehorende eigenvectoren (onderscheid nu de gevallen $\underline{a} = \underline{0}$ en $\underline{a} \neq \underline{0}$).

Antwoorden Tentamen januari 1965

1. a) $y(x) = \frac{1}{5}xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{x} + \lambda e^{-x} + \mu e^{x}\cos x + \nu e^{x}\sin x \quad (\lambda,\mu,\nu$ reëel).

b) Neen, want $(\frac{1}{5}x + \lambda)e^{-x} \to -\infty$ voor elke λ.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = e^{\mathrm{Re}\, z^2 - |z|^2}$ (insluitstelling $\sqrt[n]{n^3 \log(1 + \frac{1}{n})} \to 1$):

convergentiegebied $\mathrm{Re}\, z^2 - |z|^{-2} \leq 0$, dat is $x^4 - y^4 \leq 1$, zonder (0,0).

3. $\frac{3}{2}\pi$ (stel $\sqrt{\ } = t$, of werk met $\int\limits_{-1}^{2} \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2 + x - x^2}}$).

4. $\frac{\pi}{2} = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r\,dr \int\limits_{4-2r\cos\varphi}^{4-r^2} dz$.

5. a) $A(\lambda\underline{x} + \underline{y}) = \lambda\underline{x} + \underline{y} + \underline{a}\cdot D(\lambda\underline{x} + \underline{y},\underline{a}) = \lambda\{\underline{x} + \underline{a}\cdot D(\underline{x},\underline{a})\} + \underline{y} + \underline{a}\cdot D(\underline{y}.\underline{a})$.

b) $\underline{x} + \underline{a}\cdot D(\underline{x},\underline{a}) = \underline{0}$; dus $\underline{x}$ en $\underline{a}$ afhankelijk; dus $D(\underline{x},\underline{a}) = 0$; dus $\underline{x} = \underline{0}$.

c) dim (beeldruimte) = 2 - dim (nulruimte) = 2 .

d) $A\{\underline{x} - \underline{a}\cdot D(\underline{x},\underline{a})\} = A\underline{x} - A\underline{a}\cdot D(\underline{x},\underline{a}) = \underline{x}$ want $A\underline{a} = \underline{a}$.

e) $\underline{x} + \underline{a}\cdot D(\underline{x},\underline{a}) = \lambda\underline{x}$; dus bij $\underline{a} = \underline{0}$: $\lambda = 1$; èlke vector is eigenvector.

Bij $\underline{a} \neq \underline{0}$ is $\lambda \neq 1$ onmogelijk ($\underline{x}$ en $\underline{a}$ afh. $\to D(\underline{x},\underline{a}) = 0$) en $\lambda = 1$ geeft $D(\underline{x},\underline{a}) = 0$ dus $\underline{a}$ ($\neq \underline{0}$) is eigenvector.

Herkansingstentamen januari 1965

(1, 2, 3, 4: Wiskunde 10)

1. Bepaal de afgeleide van

$$y = x^{\log \frac{1}{x}} \qquad (x > 0).$$

2. Los op: $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ (z complex)

3. Bepaal a zodanig, dat het volgende stelsel oplosbaar is en bepaal in dat geval de oplossing

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ 2x - 3y + (2+a)z &= 6+a \\ -x + (2+a)y &= 2a-4. \end{aligned}$$

4. Gegeven

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) \\ x &= u + v \\ y &= u^2 + v^2. \end{aligned}$$

Druk $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ uit in x en y en de eerste en tweede afgeleiden van z naar x en y (onder de aanname dat $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$).

5. Voor welke reële waarden van x convergeert de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! + n^n} .$$

6. Bereken: $\int_0^4 \sqrt{\frac{x}{4-x}} \frac{dx}{x}$.

7. Bepaal de massa van het lichaam, gegeven door

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\le 2 \\ x^2 + y^2 &> z^2 \\ z &\ge 0 \end{aligned}$$

als de massadichtheid in het punt (x,y,z) gelijk is aan $(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$.

8. B is een lineaire afbeelding van R_3 in R_3, α is een vast getal.
De lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is gegeven door

$$A\underline{x} = B\underline{x} + \alpha\underline{x} \; .$$

Bewijs dat A dezelfde eigenvectoren heeft als B.

Antwoorden Herkansingstentamen januari 1965

1. $y = e^{-\log^2 x}$, $y' = -2x^{-1-\log x}\log x$.

2. $\dfrac{z^5+1}{z+1} = 0$; $z = e^{(i\pi+2ki\pi)/5}$ met k = 0,1,3,4 (niet 2).

3. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+2a & 3+2a \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & -(a-1)^2 \end{array}\right) \rightarrow$ als a = 1: (2,0,1) + λ(3,1,-1); als a = -1: strijdigheid;
als $|a| \neq 1$: $z = \dfrac{a-1}{a+1}$, $y = \dfrac{2a}{a+1}$, $x = \dfrac{6a+4}{a+1}$.

4. $\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\,2v$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)2v = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial u} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right)2v =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2(u+v)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 4uv\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 2(x^2-y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \; .$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{|x|^n}{n!+n^n}} \le \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|}{n} = 0$; dus convergent voor alle x.

6. $\displaystyle\int_0^4 \frac{d(x-2)}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = 2\int_0^2 \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \pi$.

7. $\displaystyle I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho = \pi\sqrt{2}$.

8. Elke $\underline{x} \neq \underline{0}$ waarvoor $B\underline{x} = \lambda\underline{x}$ geeft $A\underline{x} = (\lambda + \alpha)\underline{x}$; is dus ook eigenvector van A. Omgekeerd evenzo: elke e.v. van A ook e.v. van B.

Proeftentamen maart 1965

1. Los op, voor alle reële waarden van p, de volgende differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten:

$$y'' - py' + (p-1)y = e^{3x}.$$

2. a) Bepaal het gebied in het complexe vlak waar de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{n} (1+z)^n$$

convergeert.

b) Bepaal

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1-x^3)^{-\frac{1}{3}} - \arctan x - \frac{1}{3}x^3}{1 - \cosh x^2}$$

3. Men wil log 3 benaderen met behulp van de reeksontwikkeling voor $\log \frac{1+x}{1-x}$ rond $x = 0$.

Met hoeveel termen kan men volstaan opdat de fout kleiner is dan 2.10^{-4} ?

4. Geef van elk van de volgende uitspraken aan of hij al dan niet juist is en motiveer uw antwoord.

a) Als een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ absoluut convergeert, is $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$.

b) Zij S_n de n^e partiële som van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Als $\lim_{n \to \infty} (S_{n+10} - S_n) = 1$, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ divergent.

c) Als de partiële sommen van een reeks begrensd zijn, is die reeks convergent.

d) Als voor een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ met positieve termen voor oneindig veel waarden van n geldt dat $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, is die reeks divergent.

Antwoorden Proeftentamen maart 1965

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ p \neq 2:\ y = \lambda e^{x} + \mu e^{(p-1)x} + \frac{1}{8-2p} e^{3x} \quad \text{mits } p \neq 4; \\ p = 4:\ y = \lambda e^{x} + \mu e^{3x} + \tfrac{1}{2} x e^{3x}\ ; \\ p = 2:\ y = \lambda e^{x} + \mu x e^{x} + \tfrac{1}{4} e^{3x}\ . \end{array}\right\} \lambda,\mu \text{ complex}$$

2. a) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{(n+1)(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} |1 + z| = |1 + z|$.

Op $|1 + z| = 1$: $|u_n| < \frac{1}{n\sqrt{n}}$; dus op en binnen de cirkel: absolute convergentie; erbuiten divergentie.

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{x(1 + \frac{1}{5}x^3 + \ldots) - (x - \frac{1}{3}x^3 + \ldots) - \frac{1}{3}x^3}{1 - 1 - \frac{1}{2}x^4 - \ldots} = -\frac{2}{5}\ .$$

3. $\log 3 = 2\cdot\tfrac{1}{2} + \frac{2}{3}(\tfrac{1}{2})^3 + \frac{2}{5}(\tfrac{1}{2})^5 + \ldots$.

Na 5 termen: $\frac{2}{11}(\tfrac{1}{2})^{11} + \frac{2}{13}(\tfrac{1}{2})^{13} + \ldots < \frac{1}{11}\frac{1}{1024}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots) < \frac{2}{10000}$.

4. a) Niet juist; zie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

b) Juist; was nl. $\sum u_n$ convergent, dan $\lim_{n\to\infty} S_{n+10} = \lim_{n\to\infty} S_n$.

c) Niet juist! Zie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. [Wel juist voor positieve reeksen.]

d) Niet juist; zie $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots$.

Examen/tentamen juni 1965

1. a) Bereken van de differentiaalvergelijking

$$y''' + y' = 2x$$

de oplossing $y = f(x)$, die voldoet aan

$$f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0, \quad f'(0) = 1.$$

b) Schets in het complexe vlak het convergentiegebied van de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n^2 z^2 + nz} \qquad (z = x + iy).$$

Onderzoek vooral ook het gedrag van de reeks op de rand.

---

2. Gegeven de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} \qquad (x \text{ is reëel})$$

a) Bepaal alle waarden van x, waarvoor de reeks convergeert.
b) Bereken de som van de reeks voor alle waarden van x, waarvoor de reeks absoluut convergeert.

3. A en B zijn afbeeldingen van R_3 in zichzelf

$$A\underline{x} = \underline{x} \times \underline{a} \qquad \text{met } \underline{a} = (1,1,1).$$

B is de spiegeling t.o.v. het vlak $z = 0$.

a) Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.

b) Toon aan dat de matrix van A gelijk is aan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Bepaal de beeldruimte en de nulruimte van de afbeelding C = BA.

d) Bereken de eigenwaarden met bijbehorende eigenvectoren van C.

4. a) Bereken de oppervlakte van het gebied G in het XOY-vlak waarvoor geldt:

$$x \geq 0 \qquad x^2 + y^2 \leq 1$$
$$y \geq x \qquad y \leq 2x^2\sqrt{3}.$$

b) Bepaal op de boog van de cycloide, gegeven door

$$\begin{aligned} x &= t - \sin t \\ y &= 1 - \cos t \end{aligned} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

het punt P, dat, langs de boog gemeten, een afstand 2 tot de oorsprong heeft.

Antwoorden Tentamen juni 1965.

1\. a) $y = x^2 - \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\pi^2 \cos x + \sin x$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{n(x^2-y^2)+x} = 0$ resp. ∞ als $x^2 < y^2$ resp. $> y^2$.

Als $x^2 = y^2$ dan lim < 1 resp. > 1 als $x < 0$ resp. > 0; als $x = y = 0$ dan $u_n = 1$.
Alleen convergent (absoluut) als $|x| < |y|$ of $-x = |y| \neq 0$.

2\. a) $|x| < 1$; $x = -1$ (relatieve convergentie).

b) $$S(x) = S(0) + \int_0^x \frac{dt}{1-t^3} = \frac{1}{6}\log\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\,.$$

3\. a) $A(\underline{x}+\underline{y}) = (\underline{x}+\underline{y}) \times \underline{a} = \underline{x}\times\underline{a} + \underline{y}\times\underline{a} = A\underline{x} + A\underline{y}$.

$A(\lambda\underline{x}) = (\lambda\underline{x}) \times \underline{a} = \lambda(\underline{x}\times\underline{a}) = \lambda A\underline{x}$.

b) $A\underline{e}_1 = (1,0,0) \times (1,1,1) = (0,-1,1) \to$ 1ste kolom A; enz.

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; beeldruimte $\lambda\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d.i. het vlak $\perp (1,1,-1)$;

nulruimte $\nu(1,1,1)$.

d) E.w. $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -1$; met e.v. $\rho(1,1,1)$; $\sigma(0,1,1)$; $\tau(1,0,1)$.

4\. a) $$\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{24} + \frac{1}{72} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_{r(\varphi)}^{1} r\,dr \quad \text{met} \quad r(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{2\sqrt{3}\cos^2\varphi}\,.$$

b) $$\int_0^{t_p} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = 4 - 4\cos\tfrac{1}{2}t_p\,.$$

Dit is 2 als $t_p = \frac{2}{3}\pi$; $P = (\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2})$.

Herkansingstentamen juni 1965

(1, 2, 3, 4: Wiskunde 10)

1. a) Differentieer

$$y = (\sqrt{x})^{\sin x}.$$

b) Bereken $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\tan x}}{1 + \cos 2x}\, dx.$

2. Los voor de verschillende waarden van a op

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 3 \\ 4x - 2y + az &= 3a \\ x + y + az &= 3. \end{aligned}$$

3. Zij $z = f(x,y)$, met $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Druk $\frac{\partial z}{\partial x}$ uit in r, φ en de partiële afgeleiden van z naar r en φ.

4. Zij ρ het beeldpunt in het complexe vlak van een complex getal $\rho = a + ib$.
Construeer de beeldpunten van de wortels van de vergelijking

$$2z^2 + 2\rho z + \rho^2 = 0.$$

5. a) Bereken $\lim\limits_{x \to \infty} x^2\left(\sin \frac{1}{x} - \log \frac{1+x}{x}\right).$

b) Voor welke reële x convergeert de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n(n+1)}\ .$$

6. a) In R_3 is gegeven een vaste vector $\underline{a}$ met lengte 1. Bewijs dat voor elke x in R_3 de vector $(\underline{a}, \underline{x})\underline{a}$ de loodrechte projectie is van x op de rechte $\lambda \underline{a}$. .

b) Gegeven is in R_3 de lineaire afbeelding A gedefinieerd door:

$$A\underline{x} = \underline{x} - 2(\underline{a}, \underline{x})\underline{a} ,$$

waarin $\underline{a}$ een vaste vector is met lengte 1.
Wat betekent deze afbeelding meetkundig?
Bepaal zonder de matrix van A op te stellen, de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren van A.

7. Bepaal de vergelijking van de kegel met top (1,1,1) en richtkromme $x = \cos\varphi$; $y = \sin\varphi$; $z = 0$.

8. Bereken de massa van het deel van de cylinder $x^2 + y^2 = 2x$ begrensd door de vlakken $z = 0$; $z = 2x$ als de massadichtheid μ gegeven is door

$$\mu = \frac{z}{x^2 + y^2} .$$

Antwoorden Herkansingstentamen juni 1965

1. a) $\frac{1}{2}(\sqrt{x})^{\sin x}(\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x)$.

   b) $\lim\limits_{a\uparrow\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}e^{-\tan x}\Big|_0^a = \frac{1}{2}$.

2. $a \neq 1,-2$: $\underline{x} = (1,2-a,1)$

   $a = 1$: $\underline{x} = (1,1,1) + \lambda(1,1,-2)$

   $a = -2$: $\underline{x} = (1,4,1) + \lambda(1,1,1)$.

3. $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial\varphi}$.

4. $z_1 = -\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}i\rho$, $z_2 = -\frac{1}{2}\rho - \frac{1}{2}i\rho$.

5. a) $\frac{1}{2} = \lim\limits_{u\downarrow 0}(\frac{1}{u} - \frac{u}{3!} + \frac{u^3}{5!} - \ldots - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} - \frac{u}{3} + \ldots)$.

   b) $-1 < x < 5$ absolute convergentie

   $x = -1$ relatieve convergentie

   $x = 5$ divergentie.

6. a) $(\underline{x} - (\underline{a},\underline{x})\underline{a},\underline{a}) = (\underline{x},\underline{a}) - (\underline{a},\underline{x})(\underline{a},\underline{a}) = 0$.

   b) A is de spiegeling t.o.v. het vlak V door 0 $\perp$ $\underline{a}$.

   Eigenwaarde -1 met eigenvectoren $\mu\underline{a}$.

   Eigenwaarde 1 met eigenvectoren in vlak V.

7. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2yz + 2z - 1 = 0$.

8. $\frac{3}{2}\pi = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} dr \int\limits_0^{2r\cos\varphi} \frac{z}{r}\, dz$.

Examen/tentamen januari 1966

1. Bepaal de oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y''' - 3y'' + y' - 3y = e^{3x} ,$$

waarvan de grafiek in de oorsprong aan de lijn $y = x$ raakt.

2. Voor welke complexe waarden van z convergeert de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{(|z|^2 - z)n}}{n^2 \log n} \quad ?$$

3. Bereken $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} dx.$

4. Bepaal de oppervlakte van het deel van het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ binnen de cylinder $y^2 + z^2 - y = 0$.

5. Een lineaire afbeelding A van R_3 op R_2 heeft de nulruimte $\underline{x} = \lambda(1,-3,-2)$, terwijl $A(1,0,0) = (3,2)$ en $A(1,1,1) = (4,3)$.

   a) Bepaal de matrix van A.

   b) Voor welke waarde van p is het beeld van het vlak $px + y + z = 0$ een rechte lijn?

Antwoorden Tentamen januari 1966

1. Algemene reële oplossing: $y = \lambda e^{3x} + 10^{-1}\, x e^{3x} + \mu \cos x + \nu \sin x$ $(\lambda, \mu, \nu$ reëel).

   Extra eis: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$; μ en ν in λ uit te drukken:

   $y = \lambda e^{3x} + 10^{-1}\, x e^{3x} - \lambda \cos x + (0{,}9 - 3\lambda)\sin x$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|e^{|z|^2 - z}\right| = e^{|z|^2 - \mathrm{Re}\, z}$.

   Convergentie als $|z|^2 - \mathrm{Re}\, z \le 0$: z binnen of op cirkel om $\frac{1}{2}$ met straal $\frac{1}{2}$.

3. $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = t$; $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{4t^2\,dt}{(1+t^2)^2} = -2\int_0^1 t\,d\,\frac{1}{1+t^2} = -1 + \frac{\pi}{2}$.

4. Vervang z door x (mag, waarom?); cylindercoördinaten:

   $2\pi - 4 = 2 \displaystyle\iint_G \sqrt{1 + z_r^2 + r^{-2}\, z_\varphi^2}\; r\,dr\,d\varphi$, G: $|\varphi| \le \frac{\pi}{2}$, $r \le \cos\varphi$.

5. a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   b) $p = 5$ (meetkundig: $px + y + z = 0$ moet de nulruimte bevatten).

Herkansingstentamen januari 1966 (1, 2, 3, 4: Wiskunde 10).

1. Bereken $\int \frac{x \sin x}{\cos^2 x}\,dx$.

2. Los met behulp van de regel van Cramer x_2 op uit het stelsel

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 11 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}.$$

3. Bepaal de vergelijking van het raakvlak in het punt $(0,1,e)$ van het oppervlak

$$z = e^{x+y^2}.$$

4. Voor welke complexe z geldt: $\left|\frac{z-2}{z-4}\right| = 1$?

5. a) Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^p - (x+1)^q}{\log(x+1)}.$$

b) Voor welke reële waarden van x $(0 \leq x \leq \pi)$, convergeert de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \cos x)^n}{n+1}.$$

6. A is een afbeelding van R_3 in zichzelf, die aan elke vector $\underline{x}$ (behorende tot R_3) de projectie van $\underline{x}$ op het vlak $x + z = 0$ toevoegt.
   a) Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.
   b) Bepaal, zonder de matrix van A te gebruiken, de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren van A.
   c) Stel de matrix van A op.

7. De doorsnijding van de bol: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ met het vlak $z = 0$, is de richtkromme van een cylinder, waarvan de beschrijvenden evenwijdig zijn met de vector $\underline{a} = (1,1,2)$.
   Bepaal de vergelijking van dit cylinderoppervlak.

8. Bereken de totale massa M in het eerste octant van R_3 $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$, als de massadichtheid d in R_3 gegeven is door

$$d = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}.$$

Antwoorden Herkansingstentamen januari 1966

1. $\frac{x}{\cos x} - \log\left|\tan \tfrac{1}{2}(x + \tfrac{\pi}{2})\right| + C$.

2. $x_2 = \frac{-26}{-26} = 1$.

3. $z = ex + 2ey - e$.

4. Voor alle z met $\mathrm{Re}(z) = 3$.

5. a) $p - q$.

   b) $\frac{\pi}{3} < x \leq \frac{2}{3}\pi$.

6. a) De projectie van $\underline{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ blijkt:

$$A(x_1,y_1,z_1) = \left(\frac{x_1 - z_1}{2}, y_1, \frac{-x_1 + z_1}{2}\right) .$$

   Men vindt hiermee $A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = A\underline{x}_1 + A\underline{x}_2$, $A(\lambda\underline{x}_1) = \lambda A\underline{x}_1$.

   b) $\lambda = 1$ met eigenvectorenvlak $x + z = 0$;
   $\lambda = 0$ met eigenvectoren $\lambda(1,0,1)$.

   c) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

7. $(x - 1 - \tfrac{1}{2}z)^2 + (y - \tfrac{1}{2}z)^2 = 1$.

8. $M = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\rho^2 d\rho}{(\rho^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{2} \cdot -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \rho\, d\,\frac{1}{\rho^2 + 1} = \frac{\pi^2}{8}$.

Proeftentamen maart 1966

a. De differentiaalvergelijking $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$ heeft als oplossing:

(1) $y = Ae^{-x} + Be^{2x} + Ce^{3x}$; (2) $y = Ae^{x} + Be^{-2x} + Ce^{3x}$;

(3) $y = Ae^{x} + Be^{2x} + Ce^{-3x}$; (4) géén der antwoorden 1,2,3 is juist.

b. De differentiaalvergelijking $y''' = y$ heeft als oplossingsruimte:

(1) $y = Ae^{x} + Be^{-x} + C$; (2) $y = Ce^{x}$;

(3) $y = Ae^{x} + B\sin(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3})x + C\cos(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3})x$;

(4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

c. De functie $t(x)$ voldoet aan de vergelijking $\frac{d^3t}{dx^3} + \frac{dt}{dx} - 2x = 0$. Dan is

(1) $t(x) = e^{x}\{A + B\sin x + C\cos x\} + x^2$;

(2) $t(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + Ce^{2x}$;

(3) $t(x) = Ae^{x} + B\sin(x+\varphi) + x^2$;

(4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

d. Voor alle oplossingen van de differentiaalvergelijking $y'' + Ay' + y = 1$ (A reëel) geldt $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$ als

(1) $A > 0$; (2) $0 < A < 2$; niet voor $A \geqslant 2$;

(3) $A \geqslant 2$; niet voor $A < 2$; (4) $A > 0$ behalve voor $A = 2$.

e. De differentiaalvergelijking $y'' + (1+i)y' + iy = i$ heeft de volgende reële oplossingen.

(1) $y = Ae^{-x} + B\cos x + 1$ met A en B reëel;

(2) $y = Ae^{-x} + 1$ met A reëel; géén andere reële oplossing;

(3) $y = 1 + A\sin x + B\cos x + e^{-x}$;

(4) de vergelijking heeft géén reële oplossingen.

f. De definitie van een convergente reeks luidt: een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent als

(1) $\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right) = 0$;

(2) de partiële sommen s_n en s_{n+1} voor voldoend grote n willekeurig weinig van elkaar verschillen, dus $\lim_{n\to\infty}(s_{n+1} - s_n) = 0$;

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

(4) $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$ bestaat.

g. We kunnen besluiten dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergent is als bekend is dat

(1) $\sqrt[n]{|u_n|} < 1$ vanaf zeker rangnummer;

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$;

(3) $\sum_{n=1}^{N} u_n < C$ voor alle N vanaf zeker rangnummer;

(4) géén van de voorwaarden 1,2,3 is voldoende voor convergentie.

h. Voor de convergentiestraal R van de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ geldt:

(1) $R = 1$ als $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; (2) $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$;

(3) $R = \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$; (4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

i. Als $\{a_n\}$ een rij natuurlijke getallen met $a_n < a_{n+1}$ is, geldt voor de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} x^{a_n}$:

(1) de reeks is convergent voor $|x| < 1$;

(2) de convergentiestraal hangt af van $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$;

(3) de reeks is divergent voor $x \neq 0$ omdat a_n stijgend is;

(4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

j. Als $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$ dan is de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

(1) convergent; (2) convergent mits a_n monotoon daalt; (3) divergent;
(4) over de convergentie of divergentie is géén uitspraak te doen.

k. De reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1-n}{z}}$ is convergent:

(1) voor alle waarden van z behalve $z = 0$;
(2) voor geen enkele waarde van z; (3) voor $\mathrm{Re}\, z > 0$; (4) voor $|z| > 1$.

l. Beschouw de reeksen

$$\text{I} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sin \frac{1}{n}} ; \qquad \text{II} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cos \frac{1}{n}} .$$

(1) I en II zijn convergent; (2) I en II zijn divergent;
(3) I is convergent, II divergent; (4) I is divergent, II convergent.

m. De reeks $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ is

(1) divergent; (2) convergent op grond van d'Alembert;

(3) convergent omdat $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \leqslant 1$ is;

(4) convergent omdat n log n is te schrijven als $n^{1+\alpha}$ met $\alpha > 0$ (vanaf zeker rangnummer).

n. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \arcsin x}{x - \sin x} =$ (1) -1 ; (2) 0; (3) 1 ;
(4) de limiet bestaat niet.

o. Beschouw de reeksen

$$\text{I} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$

$$\text{II} \qquad 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{3}{15} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{3}{31} + \dots .$$

(1) I en II zijn convergent; (2) I en II zijn divergent;
(3) I is convergent, II is divergent; (4) I is divergent, II is convergent.

p. De reeks $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ is

(1) convergent omdat de reeks alternerend is met monotoon tot nul naderende termen;

(2) divergent omdat $a_{2n+1} > \frac{1}{2n+1}$ en $\Sigma \frac{1}{2n+1}$ divergent is;

(3) divergent omdat $|a_n|$ niet monotoon tot nul nadert;

(4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

q. De reeks $2! + \frac{1}{2} \cdot \frac{3!}{1!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4!}{2!} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5!}{3!} + \ldots$ is

(1) divergent; (2) convergent met som 16 ; (3) convergent met som $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$;
(4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

r. $\sqrt[5]{30}$ nauwkeurig in 2 decimalen is:

(1) 1,96 ; (2) 1,97 ; (3) 1,98 ; (4) 1,99 .

s. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \arctan x - \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\sin(x^3)} =$ (1) 0 ; (2) -4/3 ; (3) -1 ;
(4) de limiet bestaat niet.

t. De coëfficiënt van x^4 in de reeksontwikkeling van $\sqrt[5]{1-5x}$ is

(1) 5^5 ; (2) -21 ; (3) 79 4/5 ;
(4) géén van de antwoorden 1,2,3 is juist.

Antwoorden Proeftentamen maart 1966.

a2	b4	c4	d1	e2	f4	g4	h4	i1	j3
k3	l4	m1	n1	o1	p4	q2	r2	s2	t2

Examen/tentamen juni 1966

1. a) Bepaal alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' - y = e^{-x}$$

die voldoen aan $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = 0$.

b) Bepaal de reële getallen α waarvoor de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, 2^{n \cos \alpha} \text{ convergeert.}$$

Bereken voor die waarden van α de som van de reeks.

---

2. a) Bepaal $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x \log(1+x^2) + x^2 \arctan x}$.

b) Bereken

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x(x+1)}} .$$

3. a) Bepaal de lengte van de kromme

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{-\varphi} \cos \varphi \\ y &= e^{-\varphi} \sin \varphi \\ z &= 1 - e^{-\varphi} \end{aligned}\right\} \qquad 0 \leqslant \varphi < \infty .$$

b) Bereken de inhoud van het lichaam dat in R_3 wordt bepaald door

$$x^2 + z^2 \leqslant 9, \quad y^2 + z^2 \leqslant 9.$$

4. Voor alle reële getallen t en een vaste vector $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ met $|\underline{a}| = 1$ wordt een lineaire afbeelding A_t van R_3 in R_3 gedefinieerd door

$$A_t \underline{x} = \underline{x} + t(\underline{a}, \underline{x})\underline{a} .$$

Beantwoord de volgende vragen <u>zonder</u> van de matrix van A_t gebruik te maken:

a) Bewijs dat $\underline{a}$ voor alle waarden van t een eigenvector is van A_t en bepaal de bij $\underline{a}$ behorende eigenwaarde.

b) Bewijs dat 1 voor alle waarden van t een eigenwaarde is van A_t en bepaal de bij 1 behorende eigenvectoren.

c) Voor welke waarde(n) van t is A_t orthogonaal?

Antwoorden Tentamen juni 1966

1. a) Algemene oplossing: $y = \lambda e^{x} + (\mu - \frac{1}{2}x)e^{-x}$ (λ, μ complex).

   Aan de eis voldoen alleen $y = (\mu - \frac{1}{2}x)e^{-x}$.

   b) $\cos\alpha < 0$, d.w.z. $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

   De som is $2^{\cos\alpha}(1 - 2^{\cos\alpha})^{-2}$.

2. a) $-\frac{1}{6}$.

   b) $2\sqrt{2} - 2$.

3. a) $\lim\limits_{R\to\infty} \int_0^R \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + z^2}\, d\varphi = \sqrt{3}$.

   b) $\int_{-3}^{3} dz \int_{-\sqrt{9-z^2}}^{\sqrt{9-z^2}} dx \int_{-\sqrt{9-z^2}}^{\sqrt{9-z^2}} dy = 144$.

4. a) $A_t\underline{a} = \underline{a} + t(\underline{a},\underline{a})\underline{a} = (1 + t)\underline{a}$, dus $\underline{a}$ e.v. bij e.w. $1 + t$.

   b) $\underline{b} + t(\underline{a},\underline{b})\underline{a} = \underline{b}$, dus $t = 0$ dan $A_t = A_0 = I$: elke vector e.v.;
   of $t \neq 0$ dan alle $\underline{b} \perp \underline{a}$ eigenvector.

   c) $(\underline{x} + t(\underline{a},\underline{x})\underline{a},\ \underline{x} + t(\underline{a},\underline{x})\underline{a}) = (\underline{x},\underline{x})$ geeft $(2t + t^2)(\underline{a},\underline{x})^2 = 0$;
   dus $t = 0$ (identiteit) of $t = -2$ (A_{-2} spiegeling t.o.v. $(\underline{a},\underline{x}) = 0$).

<u>Herkansingstentamen juni 1966</u> (1, 2, 3, 4: Wiskunde 10).

1. Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$.

2. Differentieer

$$y = \log|x \arctan x| .$$

3. Zij $z = f(x,y)$ met $x = u$, $y = v - u^2$.

Druk $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ uit in u, v en de partiële afgeleiden van z naar u en v.

4. Voor welke reële waarde(n) van a is het onderstaande stelsel oplosbaar.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ ax + y + z = 3 \\ x + 2y - az = 2. \end{cases}$$

5. De lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is een draaiing, waarvan de as loodrecht staat op de vectoren (2,0,-1) en (2,-1,0).
Verder is gegeven dat A(2,0,-1) = (2,-1,0).
Bepaal:
a) De reële eigenwaarde van A en een bijbehorende eigenvector.
b) Het beeld A(2,-1,0).

6. Bereken $\displaystyle\int_2^3 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}}$.

7. Bereken de inhoud van het lichaam bepaald door

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2$$
$$x^2 + y^2 \leqslant z.$$

Antwoorden Herkansingstentamen juni 1966

1. $n^2 \log \dfrac{n^2+n}{n^2+n+1} = -n^2 \log\left(1+\dfrac{1}{n^2+n}\right) = -\dfrac{n^2}{n^2+n}(n^2+n)\log\left(1+\dfrac{1}{n^2+n}\right) \to -1.$

De gevraagde limiet is dus e^{-1}.

2. $y' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{(1+x^2)\arctan x}$.

3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2u\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right) + 2\dfrac{\partial z}{\partial v} + 4u^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

4. Voor $a = 0$, $a = 3$ is het stelsel strijdig; overigens oplosbaar.

5. a) Bij draaiingsas $(1,2,2)$ behoort $\lambda = 1$.

   b) $(2,0,-1)$ draait naar $(2,-1,0)$ en dit naar $A(2,-1,0) = \underline{b}$. Dus:
   $\frac{1}{2}\{\underline{b} + (2,0,-1)\}$ = voetpunt der projectie van $(2,0,-1)$ op $(2,-1,0)$, d.i.
   $\frac{4}{5}(2,-1,0)$; dus $\underline{b} = \frac{8}{5}(2,-1,0) - (2,0,-1) = (\frac{6}{5},-\frac{8}{5},1)$.

6. $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{(2x+2)dx}{\sqrt{1-(2x-5)^2}} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\varphi + 7)d\varphi = \frac{7\pi}{2} \quad (2x - 5 = \sin\varphi)$.

7. Vlak $z = z_0$, $0 < z_0 < 1$, snijdt bol en paraboloïde volgens cirkels met opp. $\pi(2 - z_0^2)$ en πz_0; dus heeft het lichaam tussen halve bol en paraboloïde de inhoud: $\pi\displaystyle\int_0^1 (2 - z^2 - z)dz = \frac{7}{6}\pi$. De gevraagde inhoud is $\frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\,\pi(\sqrt{2})^3 - \frac{7}{6}\pi$.

Examen/tentamen januari 1967

1. a) Bepaal alle reële oplossingen $y(x)$ van

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^{x} \cos x .$$

b) Bepaal $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x)$.

2. Onderzoek $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} \log \frac{n}{n+1}$ op convergentie.

3. a) Van een lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is $(1,0,0)$ eigenvector bij eigenwaarde 2; $A(0,1,0) = (4,1,-2)$; $A(0,0,1) = (2,1,-1)$.

a1) Bepaal de matrix van A^{-1}.

a2) Bepaal de eigenvector(en) en eigenwaarde(n) van A^{-1}.

b) Stel B is een lineaire afbeelding van R_3 in R_3 met $(\det B) \neq 0$. Zij $\underline{v}$ eigenvector van B met eigenwaarde λ.

b1) Bewijs, dat $\lambda \neq 0$.

b2) Bewijs, dat $\underline{v}$ eigenvector van B^{-1} is.

b3) Bepaal de bij $\underline{v}$ behorende eigenwaarde van B^{-1}.

4. Een bol B en een kegel K zijn resp. gegeven door de vergelijkingen

$$B : \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$$

$$K : \quad x^2 + 3y^2 = z^2 .$$

a) Laat zien dat de projectie van de doorsnijding van K en B op het XOY-vlak wordt voorgesteld door

$$\begin{cases} (x^2 + 2y^2)^2 - (x^2 + 3y^2) = 0 \\ z = 0 . \end{cases}$$

b) Bereken de oppervlakte van het deel van B dat binnen K ligt.

Antwoorden tentamen januari 1967

1. a) $y(x) = xe^x \sin x + \alpha e^x \cos x + \beta e^x \sin x \quad (\alpha, \beta$ reëel).

   b) 0 (met insluitstelling en $\lim_{x\to\infty} x^p e^{-x} = 0$).

2. Relatief convergent. (Vergeet niet dat $\log \frac{n}{n+1} < 0$.)

3. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; eigenvector $\rho(1,0,0)$ bij eigenwaarde $\frac{1}{2}$.

   b) $B\underline{v} = \lambda\underline{v}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$. Was $\lambda = 0$ dan $B\underline{v} = \underline{0}$, maar det $B \neq 0$ geeft dan $\underline{v} = 0$; tegenspraak. Dus $\lambda \neq 0$.
   $B\underline{v} = \lambda\underline{v}$, $\underline{v} = \lambda B^{-1}\underline{v}$, dus $B^{-1}\underline{v} = \frac{1}{\lambda}\underline{v}$ (eigenwaarde: $\frac{1}{\lambda}$).

4. a) Elimineer z uit B en K.

   b) $$\iint_G \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} \frac{rdr}{\sqrt{1 - r^2}} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 + \sin^2\varphi} = \pi\sqrt{2} .$$

Herkansingstentamen januari 1967 (1, 2, 3, 4: Wiskunde 10).

1. Gegeven: $\begin{cases} x = ue^{-v}, \\ y = ve^{-u}. \end{cases}$

   Druk $\frac{\partial u}{\partial x}$ en $\frac{\partial v}{\partial x}$ uit in u en v.

2. Bepaal een richtingsvector van de rechte, die door $P(6,2,1)$ gaat, evenwijdig is met het vlak met vergelijking $x - 2y - z = 0$ en de z-as snijdt.

3. Teken in het complexe vlak de beeldpunten van de wortels van de vergelijking

$$(z - i)^3 + 8i = 0 .$$

4. Bepaal $\int e^{2x} \cos x\,dx$.

5. Los op de differentiaalvergelijking

$$y''' - y'' + y' - y = e^x .$$

6. Bereken $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x^2 + x \log(1 - x)}{\sin x - x}$.

7. Gegeven is de lineaire afbeelding van R_2 in R_3 met matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & a \\ a & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

   a) Bepaal voor alle waarden van a de nulruimte van de afbeelding.

   b) Bepaal voor alle waarden van a de dimensie van en een basis voor de beeldruimte van de afbeelding.

8. Bereken voor het gebied G in het (x,y)-vlak, gegeven door $x \geqslant 0$, $y \geqslant \sqrt{x}$, de integraal

$$\iint_G x e^{-y^5}\,dx\,dy .$$

Antwoorden Herkansingstentamen januari 1967

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e^v}{1 - uv}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{ve^v}{1 - uv}$.

2. $(3,1,1)$

3. $z_1 = \sqrt{3}$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -\sqrt{3}$.

4. $\mathrm{Re} \int e^{(2+i)x}\,dx = \mathrm{Re}\,\frac{2-i}{5}\,e^{2x}(\cos x + i \sin x) + C = \frac{1}{5}\,e^{2x}(2 \cos x + \sin x) + C$.

5. $y(x) = (\tfrac{1}{2}x + \alpha_1)e^x + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 \sin x$.

6. 3.

7. a) Als $a = -1$: $N = \lambda(-1,1)$; als $a \neq -1$: $N = (0,0)$.
   b) Als $a = -1$: B 1-dimensionaal; met basis $(-1,-1,1)$;
   als $a \neq -1$: B 2-dimensionaal; met basis $\begin{cases}(-1,a,1)\\(1,-1,0)\end{cases}$.

8. $\int_0^{\infty} dy \int_0^{y^2} xe^{-y^5}\,dx = \frac{1}{10}$.

Proeftentamen maart 1967

1. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y''' + y'' + y' = 6x^2 + \sinh x + e^{-\frac{1}{2}} .$$

2. a) Bereken

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\log^2(1-x)}} .$$

b) Men benadert sinh 0,1 door de reeksontwikkeling van sinh x na de term met x^3 af te breken. Geef een schatting van de hierbij gemaakte fout.

3. a) Toon aan dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{1+p}}$ convergeert voor $p > 0$.

b) Bepaal alle complexe getallen z waarvoor de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} e^{niz}$ convergeert.

4. Geef van elk der volgende beweringen aan of deze al dan niet juist is. Bewijs Uw antwoorden.

a) Als $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ convergent.

b) Als de rij a_n begrensd is, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log n}{n}$ divergent.

c) Als de rij a_n begrensd is, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ absoluut convergent.

d) Als a_n een begrensde rij is van niet-negatieve getallen dan is $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n}$ convergent.

Opmerking: Een rij a_n heet begrensd als een getal C bestaat zodanig dat $|a_n| < C$ voor alle n.

Antwoorden Proeftentamen maart 1967

1. $\lambda + \mu e^{-\frac{1}{2}x} \cos(\frac{1}{2}x\sqrt{3}) + \nu e^{-\frac{1}{2}x} \sin(\frac{1}{2}x\sqrt{3}) + e^{-\frac{1}{2}}x - 6x^2 + 2x^3 + \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{2} e^{-x}$

(λ, μ, ν reëel).

2. $e^{-\frac{1}{2}}$.

3. a) Vergelijk $u_n = \dfrac{\log n}{n^{1+p}}$ met $v_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{2}p}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

   b) Als Im $z \geq 0$ convergent (absoluut); als Im $z < 0$ divergent.

4. a) Is juist; gebruik d'Alembert.
   b) Is onjuist; neem bv. $a_n = 0$.
   c) Is juist; neem $\sum \dfrac{1}{n^2}$ als vergelijkingsreeks.
   d) Is onjuist; neem bv. $a_{2k-1} = 0$ en $a_{2k} = 2$.

Examen/tentamen juni 1967

1. a) Los op $y'''' + y''' = x + e^x$.

   b) Onderzoek met de vergelijkingsstelling voor welke reële x de volgende reeks convergeert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^{2n}}{n^2}\right) .$$

---

2. De lineaire afbeelding A wordt gegeven als spiegeling t.o.v. het vlak

$$\alpha: x + y - z = 0 .$$

De lineaire afbeelding B wordt gegeven door de matrix

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} .$$

(Dit is een spiegeling t.o.v. het vlak

$$\beta: x - 2y - z = 0 .)$$

De lineaire afbeelding C wordt gedefinieerd door C = BA.

a) Bepaal de matrices van A en C.

b) Bewijs dat C direct orthogonaal, dus een draaiing is.

c) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van C, en bepaal de draaiingsas.

3. a) $$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^n} .$$

   Geef een reductieformule voor I_n.

   b) Bereken $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}$.

4. a) Bereken $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \frac{2 \arcsin y}{\sqrt{1 - y^2}} \frac{\sin^2 x}{x^2} \, dx$.

   b) Bereken $\displaystyle\iiint_G \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$,

   waarin G gegeven wordt door $\begin{cases} 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ z \geqslant 0 . \end{cases}$

Antwoorden Tentamen juni 1967

1. a) $y = \lambda + \mu x + \nu x^2 + \rho e^{-x} + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} e^x$.

b) Voor $|x| \leq 1$ convergentie; voor $|x| > 1$ divergentie.

2. a) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) C is, als product van twee spiegelingen, een orthogonale afbeelding; det C = + 1.

c) $\lambda_1 = 1$ met eigenvector $\rho(1,0,1)$ = draaiingsas.
$\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ (eigenvectoren in vlak $x + z = 0$).

3. a) $I_n = \frac{3 - 2n}{2n - 2} I_{n-1} - \frac{1}{2n - 2} \frac{x}{(x^2 - 1)^{n-1}}$.

b) $I_2 = - \frac{1}{4} \log\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| - \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 - 1} + C$.

4. a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \int_0^{\sin x} d \arcsin^2 y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}$.

b) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta \int_{\frac{1}{\sin \theta}}^{\frac{2}{\sin \theta}} \frac{\rho^2 d\rho}{\rho^3} = 2\pi \log 2$.

Herkansingstentamen juni 1967 (1, 2, 3, 4, 5: Wiskunde 10).

1. Bepaal $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \pi/4}$.

2. a) Bepaal de afgeleide van de functie

$$f(x) = x^{\arctan x}, \quad x > 0 .$$

b) Bepaal $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$.

3. Gegeven is het oppervlak

$$z = 2 \arctan \frac{e^x}{y}, \quad y \neq 0 .$$

Gevraagd wordt de vergelijking van het raakvlak in het punt $(0,1,\pi/2)$.

4. Los op

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 5 \\ 8x - 4y - z &= 0 \\ 3x + 2y - 3z &= 7 . \end{aligned}$$

5. Los op $z^3 = 4 + 4i\sqrt{3}$.

6. Voor welke reële waarden van x convergeert de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n} .$$

7. Een lineaire afbeelding A van R_3 heeft als matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Bewijs dat A een draaiing voorstelt.

8. Bepaal $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$.

9. Bereken de inhoud van het lichaam bepaald door

$$x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad x^2 - y^2 + z \leqslant 0, \quad z \geqslant 0 .$$

Antwoorden Herkansingstentamen juni 1967

1. $\sqrt{2}$.

2. a) $x^{\arctan x}\left(\frac{\arctan x}{x} + \frac{\log x}{1 + x^2}\right)$.

   b) $x \tan x + \log |\cos x| + C$.

3. $x - y - z = -\frac{\pi}{2} - 1$.

4. $\underline{x} = (0,\frac{1}{2}.-2) + \lambda(2,3,4)$.

5. $z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{9}}$, $z_2 = 2e^{\frac{7i\pi}{9}}$, $z_3 = 2e^{\frac{13i\pi}{9}} = 2e^{\frac{-5i\pi}{9}}$.

6. Reeks is absoluut convergent als $|x| < 1$
   relatief convergent als $|x| = 1$
   divergent als $|x| > 1$.

7. $A^TA = I$; det $A = +1$; dus A direct orthogonaal, dus draaiing.

8. $\frac{1}{3} \log\left|\frac{x - 1}{x + 2}\right| + C$.

9. $$2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r\, dr(r^2 \sin^2\varphi - r^2 \cos^2\varphi) = \frac{1}{2} .$$

Examen/tentamen januari 1968

1. a) Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{1-\cosh x - x^2\cos x + \arctan x^2} .$$

b) Gegeven is dat de reeks $\sum_1^\infty a_n$ convergeert en $a_n \geqslant 0$.

Onderzoek op convergentie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{\sqrt{1+a_n} - 1\} .$$

2. A is een lineaire afbeelding van R_3 in zichzelf, met als matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad (\alpha \text{ reëel}).$$

a) Bepaal eigenvectoren en eigenwaarden van A.

b) Bepaal α zó dat A regulier is en

$$A(1,0,-1) = A^2(1,0,-1) .$$

3. Bereken de inhoud van het gedeelte van de bol $x^2 + y^2 + z^2 - 2za = 0$ waarvoor $x^2 + y^2 \leqslant 3z^2$ $(a > 0)$.

4. a) Bepaal $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{(1+3\cos^2 x)\cos x}$.

b) Bereken

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(3x+1)\sqrt{x^2-1}} .$$

Antwoorden Tentamen januari 1968

1. a) -2.

   b) $\sqrt{1 + a_n} - 1 = \dfrac{a_n}{\sqrt{1 + a_n} + 1} \leq \frac{1}{2}a_n$: reeks convergeert absoluut.

2. a) $\lambda_1 = \alpha$, $\mu(0,1,0)$; $\lambda_2 = \alpha + 1$, $\mu(1,2\alpha,1)$; $\lambda_3 = \alpha - 1$, $\mu(1,0,-1)$.

   b) $\alpha = 2$ (bij $\alpha = 1$ is A singulier).

3. $\frac{5}{4}\pi a^3$.

4. a) $\frac{1}{2}\log(4 + \tan^2 x) + C$.

   b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Herkansingstentamen januari 1968 (1, 2, 3, 4: Wiskunde 10).

1. Door de betrekkingen

$$\begin{cases} y^x = 1 + z \\ xy + z^2 = 3 \end{cases}$$

zijn y en z vastgelegd als functies van x.
Bereken $\frac{dz}{dx}$ in het punt $(x,y,z) = (3,1,0)$.

2. Voor welke waarden van a heeft het stelsel

$$\begin{cases} (a-1)x + 3y = a \\ \qquad ax + 6y = 4 \end{cases}$$

oplossingen?
Bepaal voor die waarden van a alle oplossingen van het stelsel.

3. Teken in het complexe vlak de beeldpunten van de complexe getallen z waarvoor $\frac{z^2}{z+1}$ reëel is.

4. Bepaal de extrema van $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

5. Bepaal alle reële oplossingen van $y''' + 8y = 16x$.

6. Voor welke reële x convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n + \frac{1}{n}}$?

7. Bereken $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{(x-1)^2}\, dx$.

8. Gegeven is een lineaire afbeelding van R_4 in R_3 door de matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Bepaal
a) de rang van de matrix,
b) de dimensie en een basis van de nulruimte van de afbeelding,
c) de dimensie en een basis van de beeldruimte van de afbeelding.

Antwoorden Herkansingstentamen januari 1968

1. -1.

2. Voor $a \neq 2$: $(x,y) = (2, \frac{2}{3} - \frac{1}{3}a)$,

   $a = 2$: $(x,y) = (2,0) + \lambda(3,-1)$.

3. Punten van de reële as, exclusief -1 en van de cirkelomtrek met middelpunt $(-1,0)$ en straal 1.

4. $f(1) = \frac{\pi}{2}$, globaal maximum;

   $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$, globaal minimum.

5. $y = \lambda e^{-2x} + \mu e^{x} \cos x\sqrt{3} + \nu e^{x} \sin x\sqrt{3} + 2x$ (λ, μ, ν reëel).

6. Convergent (absoluut) als $|x| < 1$; divergent als $|x| > 1$ en als $x = 1$; relatief convergent als $x = -1$.

7. $2\frac{1}{2} - 2 \log 2$.

8. a) rang = 2.

   b) dimensie nulruimte = 4 - 2 = 2; basis $\begin{cases} (0,0,1,-1) \\ (1,1,0,-2) \end{cases}$.

   c) dimensie beeldruimte = rang = 2; basis $\begin{cases} (1,1,1) \\ (3,-1,1) \end{cases}$ of $\begin{cases} (1,-1,0) \\ (2,0,1) \end{cases}$.

Proeftentamen maart 1968

1. Bereken $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2} \arctan x - \sin(x\sqrt{2})}{x(2 + \cos x) - 3 \sin x}$.

2. Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1-x}{x}\right)^n \qquad (x \text{ is reëel}).$$

a) Voor welke waarden van x convergeert de reeks?

b) Bepaal de som van de reeks voor alle onder a) gevonden waarden van x.

3. Teken in het complexe vlak de beeldpunten van de complexe getallen z waarvoor de onderstaande reeks convergeert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{n}\right) (1-z)^n .$$

4. Bepaal voor alle reële waarden van de parameter a de oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' - ay' + (2a-4)y = 4x + 4 .$$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is een reeks met uitsluitend positieve termen.
Geef van elk der onderstaande uitspraken aan of hij juist is en motiveer Uw antwoord.

A. Als $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ convergeert, dan convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

B. Als de partiële sommen van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ kleiner zijn dan 100, dan geldt $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

C. Als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergeert, dan convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$.

D. Als er een natuurlijk getal N bestaat zodat voor alle $n > N$ geldt $\sqrt[n]{u_n} \leq \frac{5}{7}$, dan convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Antwoorden Proeftentamen maart 1968

1. $10\sqrt{2}$.

2. a) Convergentie als $x > \frac{1}{2}$; divergentie als $x \leq \frac{1}{2}$.

   b) $-\log(2 - \frac{1}{x})$ (als $x > \frac{1}{2}$).

3. De beeldpunten liggen binnen en op de cirkel om 1 met straal 1.

4. Als $a = 4$: $\lambda e^{2x} + \mu x e^{2x} + x + 2$;

   $a = 2$: $\lambda + \mu e^{2x} - x^2 - 3x$;

   $a \neq 4, \neq 2$: $\lambda e^{(a-2)x} + \mu e^{2x} + \dfrac{2}{a-2} x + \dfrac{3a-4}{(a-2)^2}$.

5. A onjuist: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergeert, maar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ niet.

   B juist: $\sum u_n$ is convergent (begrensd, termen > 0), dus $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

   C juist: zelfs absolute convergentie, want $\frac{u_n}{n} \leq u_n$.

   D juist: $u_n \leq (\frac{5}{7})^n$.

Examen/tentamen juni 1968

1. a) Onderzoek of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

convergeert, dan wel divergeert.

b) Bepaal de algemene reële oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y''' - y'' + y' - y = e^x + e^x \cos x .$$

---

2. a) Bepaal de vergelijking van de omwentelingscylinder met as $\underline{x} = \lambda(1,2,0)$, die gaat door het punt $(0,0,1)$.

b) Bereken de inhoud van het deel van de ruimte, waarvoor geldt

$$x \geq 0 , \qquad 0 \leq y \leq 1 ,$$

$$x^2 + y^2 \leq 2 , \qquad 0 \leq z \leq x\sqrt{1-y^2} .$$

3. Bereken de volgende integralen

a) $$\int \frac{4dx}{(x-1)(x^2-4x+3)} .$$

b) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x} .$$

4. De lineaire afbeelding A van R_2 in R_2 is gegeven door

$$A\underline{x} = p\underline{x} - (\underline{a}, \underline{x})\underline{a} ,$$

waarbij $\underline{a}$ een vaste vector met lengte 1 is, en p een reëel getal.

a) Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van A.

b) Voor welke p bestaat er een vector $\underline{x} \neq \underline{0}$ waarvoor geldt $A\underline{x} = \underline{0}$?

Antwoorden Tentamen juni 1968

1. a) $0 < u_n < \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$; convergent.

   b) $y = \lambda e^x + \mu \cos x + \nu \sin x + \frac{1}{2}xe^x - \frac{2}{5} e^x \cos x + \frac{1}{5} e^x \sin x$

   (λ, μ, ν reëel).

2. a) $4x^2 - 4xy + y^2 + 5z^2 = 5$.

   b) $\dfrac{7}{32}\pi$.

3. a) $\log\left|\dfrac{x - 3}{x - 1}\right| + \dfrac{2}{x - 1} + C$.

   b) $\tan x - \dfrac{2}{\tan x} - \dfrac{1}{3 \tan^3 x} + C$.

4. a) Bij eigenwaarde p zijn alle vectoren $\perp \underline{a}$ eigenvectoren.
   Bij eigenwaarde p-1 zijn alle vectoren $\rho\underline{a}$ eigenvectoren.

   b) Voor $p = 0$ en $p = 1$.

Herkansingstentamen juni 1968 (1, 2, 3, 4: Wiskunde 10).

1. Bepaal $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{2}{\sin 2x}\right)$.

2. z en u zijn impliciet gegeven als functies van x en y door

$$x + y + z + u = 1$$
$$x^2 - y^2 + z^2 - u^2 = 1 .$$

Bereken $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ in $(x,y,z,u) = (1,2,-2,0)$.

3. Voor welke reële waarde(n) van a is het volgende stelsel oplosbaar

$$x + ay = a^2$$
$$ax + y = 1 .$$

Bepaal voor die waarden van a de oplossing(en).

4. Bepaal de complexe getallen $z = re^{i\varphi}$ waarvoor

$$|e^{1/z^3}| = 1 .$$

5. Bepaal de vergelijking van de kegel met top (0,0,0) en richtkromme

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 . \end{cases}$$

6. Bepaal de as van de draaiing in R_3 die gegeven wordt door de matrix

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

7. Bereken de inhoud van het lichaam bepaald door

$$x^2 + y^2 + (z-\tfrac{1}{2})^2 \leq 1$$
$$x^2 + y^2 + (z+\tfrac{1}{2})^2 \leq 1 .$$

8. Ga na of de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$ convergeert.

Antwoorden Herkansingstentamen juni 1968

1. $-\frac{1}{2}$.

2. In (1,2,-2,0): $z_{xx} = -\frac{1}{2}$.

3. Als $a = 1$: $\underline{x} = (0,1) + \lambda(1,-1)$;

   $a = -1$: stelsel strijdig;

   $a \neq \pm 1$: $x = \dfrac{-a}{a+1}$, $y = 1 + \dfrac{a^2}{a+1}$.

4. De punten met Re $z = 0$ resp. met Im $z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ Re z (exclusief 0).

5. $xy + yz + zx = 0$.

6. $\alpha(1,1,0)$.

7. $\frac{5}{12}\pi$.

8. $|u_n| = \frac{1}{3!}\frac{1}{n^3} - \frac{1}{5!}\frac{1}{n^5} + \frac{1}{7!}\frac{1}{n^7} - \ldots < \frac{1}{6}\frac{1}{n^3}$, dus (absoluut) convergent.

Examen/tentamen januari 1969

1. a) Bepaal alle reële oplossingen van

$$y'' + y = \sin x \ .$$

b) Bepaal

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\log(1 + x) - x} \ .$$

2. a) Bepaal het convergentiegebied van

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n + 1} \qquad \text{(x reëel).}$$

b) Bepaal (met uitzondering van de randpunten) de som voor die waarden van x waarvoor de reeks convergeert.

3. Gegeven de lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 die aan $\underline{x} = (x,y,z)$ toevoegt

$$A\underline{x} = (-2y-z, -2x+4y, -x+4z) \ .$$

a) Toon aan dat (0,-1,2) eigenvector is van de afbeelding.

b) Bepaal de eigenwaarden van de afbeelding en bepaal een eigenvector bij de grootste eigenwaarde.

4. a) Bereken

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{-3 + 4x - x^2}} \ .$$

b) Bereken

$$\iiint_G (x^2 + y^2 + (z - 2)^2)\,dx\,dy\,dz \ ,$$

waarbij voor G in R_3 geldt: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Antwoorden Tentamen januari 1969.

1\. a) $y = -\frac{1}{2}x\cos x + \lambda\cos x + \mu\sin x,\qquad \lambda,\ \mu$ reëel.

b) -1.

2\. a) $-1 \le x \le 1$.

b) $S(x) = \dfrac{\arctan x - x}{x}$, $S(0) = 0$.

3\. a) $A(0,-1,2) = (0,-4,8) = 4(0,-1,2)$.

b) -1, 4, en 5 met e.v. $\rho(1,-2,-1)$ $(\rho \neq 0)$.

4\. a) $$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pi .$$

b) $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^2(\rho^2 - 4\rho\cos\theta + 4)d\rho = \frac{92}{15}\pi .$$

(N.B. niet $8\displaystyle\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^2(\rho^2 - 4\rho\cos\theta + 4)d\rho$.)

Herkansingstentamen januari 1969 (1, 2, 3, 4: Wiskunde 10).

1. a) Bereken

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{1969} .$$

b) Bereken

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)\sin x .$$

2. Bepaal de complexe wortels van

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 .$$

3.
$$z = \sin(u + v)$$
$$x = \cos(u - v)$$
$$y = \sin u .$$

Beschouw z als functie van x en y en druk $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ uit in u en v.

4. Bepaal voor alle reële a de rang van

$$\begin{pmatrix} a & a+1 & 1 \\ a+2 & 0 & -1 \\ 2 & a+1 & a-1 \end{pmatrix} .$$

5. Bepaal alle reële oplossingen van

$$y'' + y = e^{-x} .$$

6. Bepaal de oppervlakte van de figuur in het eerste kwadrant, ingesloten door de rechte $y = 1$ en de krommen $y = \frac{1}{2}x^2$ en $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

7. Ga na of de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n})\right)$ absoluut convergent, relatief convergent of divergent is.

8. Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van de spiegeling in R_3 t.o.v. het vlak $2x + 2y - z = 0$.

Antwoorden Herkansingstentamen januari 1969.

1. a) 1.

   b) 0. $\left[\, 0 \le \left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \downarrow 0 \,\right].$

2. $z_k = e^{\frac{2}{5}k\pi i}$, $k = 1,2,3,4.$

3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\cos(u+v)}{\sin(u-v)} = \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\cos(u+v)}{\sin(u-v)}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\cos 2u}{\sin^3(u-v)}.$

4. $a \ne -1, \ne 2$: rang = 3; $a = 2$: rang = 2; $a = -1$: rang = 1.

5. $y = \frac{1}{2}e^{-x} + \lambda \cos x + \mu \sin x$ (λ, μ reëel).

6. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} - \dfrac{\pi}{4}.$

7. Absoluut convergent $\left[\, u_n < \frac{1}{2}\dfrac{1}{n^2} \,\right].$

8. $\lambda = 1$ met als e.v.: alle vectoren $\ne \underline{0}$ in $2x + 2y - z = 0$;
   $\lambda = -1$ met als e.v.: $\alpha(2,2,-1)$ $(\alpha \ne 0)$.

Proeftentamen maart 1969

Multiple choice gedeelte (2 uur)

A. De wortels van de karakteristieke vergelijking behorend bij de differentiaalvergelijking

$$y''' + 3y'' - 4y = 0$$

zijn

(1) $t_1 = 0,\ t_2 = 1,\ t_3 = -4$.

(2) $t_1 = 0,\ t_2 = -1,\ t_3 = 4$.

(3) $t_1 = -1,\ t_2 = 2,\ t_3 = -2$.

(4) $t_1 = 1,\ t_2 = -2,\ t_3 = -2$.

B. Precies één van de volgende acht functies is een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x} .$$

In welke regel staat die functie?

(1) $y = 2e^{x} + 3e^{-x}$; $y = (2 + 3x)e^{-x}$.

(2) $y = 3e^{x} + e^{-x}$; $y = e^{-x}(2 \cos x + 3 \sin x)$.

(3) $y = (3 + x^2)e^{-x}$; $y = e^{x}(2x + 3)$.

(4) $y = e^{-x} + xe^{-x}$; $y = x^3e^{-x} + 2e^{-x}$.

C. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

is (1) $y = Ae^{x} \sin(x + B)$.

(2) $y = e^{x}(A \sin 2x + B \cos 2x)$.

(3) $y = e^{-x}(A \sin x + B \cos x)$.

(4) Geen van de antwoorden 1, 2, 3 is juist.

D. Men kan een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + 2y' + 10y = \cos 3x$$

vinden, door één van de onderstaande functies te proberen. Welke?

(1) $y = (A + Bx)e^{-x} \cos 3x$.

(2) $y = A \cos 3x + Bx \cos 3x$.

(3) $y = Ax \sin 3x + Bx \cos 3x$.

(4) $y = A \cos 3x + B \sin 3x$.

E. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + n}{e^{x+n}}$ (x reëel)

(1) is divergent voor $x < 0$,

(2) is convergent voor alle x,

(3) is alleen convergent als $x < 0$ en x geheel is.

(4) Geen van de antwoorden 1, 2, 3 is juist.

F. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2 \log(n + 1)}$ (x reëel) is convergent

(1) voor $-2 < x < 2$,

(2) alleen in $x = 0$,

(3) voor $-1 < x < 1$,

(4) voor $|x| < \sqrt{e}$.

G. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2x + 3}{x + 3}\right)^n$ is relatief convergent voor

(1) $x = -1$,

(2) $x = -2$,

(3) $x = 0$,

(4) $x = 1$.

H. Als in de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

(1) $u_n = \frac{1}{n^{1+(1/n)}}$, dan is de reeks convergent.

(2) $\lim_{n\to\infty} n|u_n| < 1$, dan is de reeks convergent.

(3) $\lim_{n\to\infty} |nu_n| = 1$, dan is de reeks divergent.

(4) Geen van de antwoorden 1, 2, 3 is juist.

I. De coëfficiënt van x^3 in de reeksontwikkeling van $\frac{1}{\sqrt[3]{1-6x}}$ is

(1) $-13\frac{1}{3}$,

(2) 224 ,

(3) $37\frac{1}{3}$,

(4) $74\frac{2}{3}$.

J. Zij $u_n = \{\frac{1}{n} + \log(1 - \frac{1}{n})\}$. Dan is $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$

(1) divergent omdat $u_n > \frac{1}{n}$ is,

(2) convergent omdat $u_n < \frac{1}{n^2}$ is,

(3) divergent omdat $\lim_{n\to\infty} nu_n = 1 + e^{-1} > 0$,

(4) convergent omdat $\lim_{n\to\infty} n^2u_n$ bestaat.

K. De coëfficiënt van x^5 in de reeksontwikkeling van e^{-x^2} arctan x is:

(1) $\frac{11}{30}$,

(2) $\frac{31}{30}$,

(3) $\frac{49}{5!}$.

(4) Geen van de antwoorden 1, 2, 3 is juist.

L. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + A\cos x}{x}$ bestaat voor

(1) A = 0,

(2) A = -1,

(3) geen enkele A,

(4) alle A.

<u>Antwoorden</u>. zie klassiek gedeelte.

Klassiek gedeelte (2 uur).

1. a) Los op: $y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$.

   b) Bepaal alle reële oplossingen van $y'' + 2y' + 5y = \sin 2x$.

2. Onderzoek voor welke reële x de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-1)^n}{\sqrt{n}}$$

absoluut convergent, relatief convergent, divergent is.

3. Onderzoek of de onderstaande reeks convergeert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt[4]{1+\tfrac{1}{n}}) \ .$$

4. Bereken $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2e^x + \sin x \log(1-x)}{x^2 \arctan x}$.

Antwoorden Proeftentamen maart 1969.

Meerkeuze gedeelte: A4, B3, C1, D4, E2, F3, G2, H4, I3, J4, K2, L2.

Klassiek gedeelte:

1. a) $y = Ae^x + Be^{3x} + \frac{1}{2}xe^{3x}$.

   b) $y = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^{-x} + \frac{1}{17}(\sin 2x - 4 \cos 2x)$, A, B reëel.

2. Absoluut convergent voor $-\sqrt{2} < x < 0$ en $0 < x < \sqrt{2}$,
   relatief convergent voor $x = 0$,
   divergent voor $x \leq -\sqrt{2}$ en $x \geq \sqrt{2}$.

3. Divergent $[\, -u_n = |u_n| > \frac{1}{5}\frac{1}{n}$ op den duur $]$.

4. $\frac{1}{2}$.

Examen/tentamen juni 1969

1. a) Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' + y = \cos x \ .$$

b) Bereken $\cosh \frac{1}{5}$ in drie decimalen nauwkeurig $\left(\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$.

---

2. a) Bepaal één stelsel rechten op het oppervlak ,

$$4x^2 - y^2 + z^2 = 9 \ .$$

Bepaal die rechten op dit stelsel die loodrecht staan op (2,1,-1).

b) Van twee lineaire afbeeldingen met matrices A en A^T is gegeven

(i) $A(1,0,0) = (0,2,4)$ en $A^T(1,0,0) = (0,3,2)$;

(ii) A is regulier en $A^{-1}(3,0,1) = (0,1,0)$;

(iii) (1,1,1) is een eigenvector van A.

Bepaal de matrix A.

3. Bepaal $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1 + 2 \sin x \cos x} \, dx$.

4. Bereken de inhoud van het lichaam in R_3 bepaald door

$$\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \le z \le x \ .$$

Antwoorden Tentamen juni 1969.

1. a) $y = \frac{1}{2}x \sin x + \lambda \cos x + \mu \sin x$ $(\lambda, \mu$ reëel$)$.

b) 1,020 [fout $< \dfrac{(0.2)^{2n}}{(2n)!} \left\{1 - \dfrac{(0.2)^2}{4n^2}\right\}^{-1} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$, $n = 2$].

2. a) $\begin{cases} (\frac{3}{2},0,0) + \lambda(0,1,1) \\ (0,0,3) + \mu(1,-2,0) \end{cases}$ of $\begin{cases} (0,0,-3) + \rho(1,-2,0) & [\text{ door } (\frac{3}{2},-3,-3)\ ] \\ (-\frac{3}{2},0,0) + \sigma(0,1,1) & [\text{ door } (-\frac{3}{2},3,3)\ ] \end{cases}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\frac{1}{4} \log(1 + \sin 2x) - \frac{1}{2} \dfrac{1}{1 + \tan x} + C$.

4. $\frac{\pi}{4}$ $\left[\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\,dr \int_{\frac{1}{2}r^2}^{r\cos\varphi} dz \right]$.

Herkansingstentamen juni 1969

1. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} + \sin x \ .$$

2. Geef de eerste drie termen van de reeksontwikkeling van tan x rond $x = \frac{\pi}{4}$.

3. Van een lineaire afbeelding $A : R_3 \to R_3$ is gegeven:

   1) A is een draaiing;

   2) $(2,-1,0)$ is een eigenvector bij eigenwaarde -1;

   3) $(1,0,1)$ is een eigenvector.

   Bepaal van A alle eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren.

4. Bepaal de vergelijking van de kegel met top $(0,0,1)$ en richtkromme

$$\begin{cases} z = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \ . \end{cases}$$

5. Bereken

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

   waarin G de verzameling punten in R_2 is bepaald door

$$x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \ .$$

Antwoorden Herkansingstentamen juni 1969.

1. $y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x + 1) - \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$ (A, B reëel).

2. $1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \ldots$.

3. $\lambda_1 = -1$: $\underline{x} = \rho(1,0,1) + \sigma(2,-1,0)$
   $\lambda_2 = 1$: $\underline{x} = \tau(1,2,-1)$.

4. $x^2 + 2x(z-1) + y^2 = 0$.

5. $2\pi - 4$ $\quad \left[\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{4 - r^2}}\right]$.

Examen/tentamen januari 1970.

1. Bereken alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking:

$$y'' + 4y = 2\sin^2 x \ .$$

2. Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\log(2+x) - (\log 2)\sin x}{(1+x)^{1/3} - \cos x - x/3} \ .$$

3. Zij A een lineaire afbeelding van R_3 in R_4. Gegeven:

$$A(3,1,0) = (10,0,15,5)$$
$$A(0,-1,5) = (12,-3,9,0)$$
$$A(2,0,-1) = (6,-2,3,-1) \ .$$

Bereken van deze afbeelding

a) een basis van de beeldruimte,

b) rang,

c) matrix,

d) een basis van de nulruimte.

Bereken voorts alle vectoren $\underline{x}$ waarvoor geldt: $A\underline{x} = (6,-2,3,-1)$.

4. In R_3 wordt een kromme gegeven door

$$y = 2 + \sin x$$
$$z = 0 \ .$$

Deze kromme wordt gewenteld om de x-as.

a) Geef de vergelijking van het omwentelingsoppervlak.

b) Bereken de inhoud van het lichaam begrensd door dit omwentelingsoppervlak en de vlakken $x = 0$ en $x = 2\pi$.

5. Bereken

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}} \ .$$

Antwoorden Tentamen januari 1970.

1. $y = \lambda \cos 2x + \mu \sin 2x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x \sin 2x$ $\quad (\lambda, \mu$ reëel).

2. $\frac{9}{7}$.

3. a) $\begin{cases} (2,0,3,1) \\ (4,-1,3,0) \ . \end{cases}$

   b) rang van afbeelding = dimensie beeldruimte = 2, zie a).

   c) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

   d) $(3,1,-5)$.

   $\underline{x} = (2,0,-1) + \lambda(3,1,-5)$.

4. a) $y^2 + z^2 = (2 + \sin x)^2$

   b) $9\pi^2$.

5. $\log \tan \frac{3\pi}{8} = \log(1 + \sqrt{2})$.

Herkansingstentamen januari 1970

1. Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1 - \frac{1}{2}\sin x}{1 - \cos x} .$$

2. Onderzoek de convergentie van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}) .$$

3. Bereken

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} .$$

4. Bereken de oppervlakte van het gedeelte van het XOY-vlak binnen de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ en buiten de cardioïde $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. Bereken de massa van de kegel met top $(0,0,h)$ en grondvlak $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq a^2$, boven het XOY-vlak. De massadichtheid van de kegel is kz ($a > 0$, $h > 0$, $k > 0$).

6. a) In R_3 is gegeven een vlak V: $\underline{x} = \lambda(1,1,0) + \mu(0,0,1)$ en een punt $\underline{x}_0 = (x_0,y_0,z_0)$. Toon aan dat de projectie (het voetpunt van de loodlijn) van $\underline{x}_0$ op V gelijk is aan

$$P\underline{x}_0 = \tfrac{1}{2}(x_0+y_0, x_0+y_0, 2z_0) .$$

b) We definiëren de lineaire afbeelding S van R_3 in R_3 door

$$S\underline{x} = 2P\underline{x} - \underline{x} .$$

(Voor de definitie van P zie 6a.)

Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de afbeelding S. Bepaal S^2.

Antwoorden Herkansingstentamen januari 1970.

1. $\frac{3}{4}$.

2. Absoluut convergent $\quad [\, -u_n = |u_n| = \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} - \frac{1}{5}\frac{1}{n^5} + \ldots < \frac{1}{3}\frac{1}{n^3}\,]$.

3. $\frac{1}{2}\log 2 \quad [\, \int_1^R \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log(1+R^{-2})\,]$.

4. $2 - \frac{\pi}{4} \quad [\, \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_{1-\cos\varphi}^{1} r\,dr\,]$.

5. $\frac{\pi}{12}kh^2a^2 \quad [\, \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\,dr \int_0^{h(1-\frac{r}{a})} kz\,dz\,]$.

6. a) $P\underline{x}_0 = \frac{1}{2}(x_0+y_0)(1,1,0) + z_0(0,0,1)$; ligt dus in V;

$\underline{x}_0 - P\underline{x}_0 = (\frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{2}y_0\,, -\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0\,, 0)$ is $\perp$ V.

b) S = spiegeling t.o.v. V:

$\left.\begin{array}{l} \lambda = 1:\ S(1,1,0) = (1,1,0) \\ \qquad\quad\ S(0,0,1) = (0,0,1) \end{array}\right\}$ e.v.: alle vectoren $\neq \underline{0}$ in V

$\lambda = -1$: $S(1,-1,0) = (-1,1,0)$, e.v.: alle vectoren ($\neq \underline{0}$) $\perp$ V.

$S^2 = I$, want $S(S\underline{x}) = S(2P\underline{x} - \underline{x}) = 2SP\underline{x} - S\underline{x} = 2P\underline{x} - 2P\underline{x} + \underline{x}$.

Proeftentamen maart 1970

1. a) Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y''' + y'' - 2y = 0 \ .$$

   b) Bepaal de oplossing $y = f(x)$ van de differentiaalvergelijking

$$y''' + y'' - 2y = -2e^{-x} \ ,$$

   die voldoet aan $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$ en $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

2. Bepaal voor alle waarden van de parameter α de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' - (\alpha + 1)y' + \alpha y = e^{2x} \ .$$

3. a) Voor welke reële waarden van x convergeert, respectievelijk divergeert, de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4 + (-1)^n)x^n \ .$$

   b) Onderzoek of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$$

   convergent is.

4. Gegeven is de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 \sin x)^n}{n + 1}$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

   a) Bepaal alle waarden van x waarvoor de reeks convergent is.

   b) Bereken de som van de reeks voor alle waarden van x binnen het convergentie interval.

Antwoorden Proeftentamen maart 1970.

1. a) $y = Ae^{x} + Be^{(-1+i)x} + Ce^{(-1-i)x}$, A, B, C complex.

   b) $y = e^{-x}$.

2. $$\left.\begin{array}{ll} \alpha \neq 1,\ \alpha \neq 2: & y = Ae^{x} + Be^{\alpha x} + (2-\alpha)^{-1}\, e^{2x}\,; \\ \alpha = 2: & y = Ae^{x} + Be^{2x} + xe^{2x}\,; \\ \alpha = 1\ : & y = Ae^{x} + Bxe^{x} + e^{2x}\,. \end{array}\right\}\ \text{A, B, } \alpha \text{ complex.}$$

3. a) Absoluut convergent voor $|x| < 1$; divergent voor $|x| \geq 1$.

   b) $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^2\sqrt{n}} - \ldots < \frac{1}{n^{3/2}}$, dus reeks convergent.

4. a) Absoluut convergent voor $|x| < \frac{\pi}{6}$, relatief convergent voor $x = -\frac{\pi}{6}$.

   b) $-1 - \frac{\log(1 - 2\sin x)}{2\sin x}$; en voor $x = 0$ de som 0.

Examen/tentamen juni 1970

1. a) Bepaal de oplossing $y = f(x)$ van de differentiaalvergelijking:

$$y'' - 4y' + 5y = 8 \sin x ,$$

waarvoor geldt $f(0) = 0$ en $f(\frac{\pi}{2}) = 1$.

b) Bereken

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - \arctan 2x}{x - \sin x} .$$

---

2. a) Bepaal de vergelijking van het oppervlak dat ontstaat bij wenteling van de X-as om de rechte met parametervoorstelling $\underline{x} = (0,1,0) + \lambda(1,0,1)$.

b) G is het gebied in het XOY-vlak, bepaald door

$$0 \le x \le 1$$
$$0 \le y \le 1$$
$$x^2 + y^2 \ge 2y .$$

Bereken $\iint_G xy \, dx \, dy$.

3. a) Bereken

$$\int \frac{\tan x}{\cos 2x - 7} \, dx .$$

b) Bereken

$$\int_0^1 \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{1 - x}} \, dx .$$

4. A is een lineaire afbeelding van R_3 in zichzelf, waarvan het volgende gegeven is:

(1,0,-1) is een eigenvector bij eigenwaarde 1;

alle vectoren van de vorm $\underline{x} = (3,0,0) + \rho(1,1,1)$ hebben (2,-1,-1) als beeld.

Bepaal van A:

a) de nulruimte;

b) de beeldruimte;

c) de matrix;

d) de eigenwaarden en eigenvectoren.

e) Wat is de meetkundige betekenis van A ?

Antwoorden Tentamen juni 1970.

1. a) $y = (1 - e^{2x})\cos x + \sin x$.

   b) 18.

2. a) $y^2 - 2y - 2xz = 0$.

   b) $\frac{1}{24}$ $\left[\int_0^1 x\,dx \int_0^{1-\sqrt{1-x^2}} y\,dy \quad \text{of} \quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \int_{2\sin\varphi}^{1/\cos\varphi} r^3\,dr \right]$.

3. a) $-\frac{1}{16}\log(3 + 4\tan^2 x) + C$.

   b) $\pi + 2$.

4. a) $\lambda(1,0,-1) + \mu(2,-1,-1)$.

   b) $\nu(1,1,1)$.

   c) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   d) $\lambda = 0$ met e.v.: $\nu(1,1,1)$, $\nu \neq 0$;
   $\lambda = 1$ met e.v.: alle vectoren $\neq \underline{0}$ in $x + y + z = 0$.

   e) Loodrechte projectie op $x + y + z = 0$; elke vector heeft nl. een component $/\!/ \, (1,1,1)$ en een in $x + y + z = 0$. De eerste wordt door A tot $\underline{0}$, de tweede blijft onveranderd.

Herkansingstentamen juni 1970

1. i) Los voor alle waarden van de reële parameter α op de differentiaalvergelijking

$$y'' - (1 + \alpha)y' + \alpha y = 0 .$$

ii) Bepaal die oplossing, die voldoet aan de voorwaarden $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

2. a) Voor welke reële waarden van x convergeert, resp. divergeert de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log |x|}{x^{2n} + 1} \qquad (x \neq 0) \ ?$$

b) Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 - \sqrt[3]{x^2 + 8}}{\tan x \log(1 + x)} .$$

3. a) Toon aan dat in R_3 de projectie van de vector $\underline{y}$ op het vlak met vergelijking $(\underline{a},\underline{x}) = 0$ $(\underline{a} \neq \underline{0})$ gelijk is aan

$$\underline{y} - \frac{(\underline{a},\underline{y})}{(\underline{a},\underline{a})} \underline{a} .$$

b) Zij A de projectie op het vlak $x + y + z = 0$ en B de projectie op het vlak $x + y - 2z = 0$. Bepaal de matrices van A en B.

c) Bereken eigenwaarden en eigenvectoren van de afbeelding BA.

4. a) Bereken

$$\int_0^{\infty} \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2} \, dx .$$

b) Bereken $\iint_G \frac{dx\,dy}{x^2 + y^2}$, als G het gebied is binnen de rechthoek met hoekpunten $(2a,2b)$, $(2a,-2b)$, $(-2a,2b)$ en $(-2a,-2b)$ en buiten de rechthoek met hoekpunten (a,b), $(a,-b)$, $(-a,b)$ en $(-a,-b)$. Hierbij zijn a en b positieve constanten.

Antwoorden Herkansingstentamen juni 1970.

1. i) $\alpha \neq 1$: $y(x) = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{x}$;

   $\alpha = 1$: $y(x) = \nu e^{x} + \rho x e^{x}$.

   ii) $\alpha \neq 1$: $y(x) = (1-\alpha)^{-1}(e^{\alpha x} - \alpha e^{x})$;

   $\alpha = 1$: $y(x) = e^{x} - x e^{x}$.

2. a) Convergent voor $|x| \geq 1$; divergent voor $|x| < 1$.

   b) $-\frac{1}{12}$.

3. a) $\underline{p} = \underline{y} - \frac{(\underline{a},\underline{y})}{(\underline{a},\underline{a})}\underline{a}$ geeft $(\underline{a},\underline{p}) = (\underline{a},\underline{y}) - \frac{(\underline{a},\underline{y})}{(\underline{a},\underline{a})}(\underline{a},\underline{a}) = 0$

   en $\underline{p} - \underline{y}$ is - evenals $\underline{a}$ - $\perp (\underline{a},\underline{x}) = 0$.

   b) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   c) Omdat $x + y + z = 0 \perp x + y - 2z = 0$ wordt elke vector $\underline{x}$ door BA geprojecteerd op de snijlijn, d.i. $\rho(1,-1,0)$. De punten hiervan blijven op hun plaats; de punten van $x - y = 0$ worden in $\underline{0}$ geprojecteerd; dus:
   AB heeft e.w. 1 met e.v. $\rho(1,-1,0)$, $\rho \neq 0$;
   e.w. 0 met e.v.: alle vectoren $\neq \underline{0}$ in $x - y = 0$.

4. a) $\log 2$ $\left[\frac{-x}{e^{x}+1} + \int \frac{e^{-x}\,dx}{1+e^{-x}}\right]$.

   b) $2\pi \log 2$ $\left[\int_a^{2a} dx \int_0^{bx/a} \frac{dy}{x^2+y^2} = \int_a^{2a} \frac{dx}{x} \arctan\frac{b}{a}\right]$.

Examen/tentamen januari 1971

1. Bepaal voor alle niet-negatieve reële waarden van α de reële oplossingen van de volgende differentiaalvergelijking:

$$y'' - \alpha^2 y = e^{-2x} .$$

2. a) Bereken

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{e^{(x^2)} - 1 - \sin(x^2)}.$$

b) Bewijs dat de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(\tfrac{1}{4})^n$$

convergeert en bepaal de som.

3. Van een draaiing A in R_3 is gegeven:
de draaiingsas is $\underline{x} = \lambda(1,1,0)$,
de vector $(-1,1,\sqrt{2})$ heeft als beeld $(1,-1,\sqrt{2})$.

a) Bewijs dat de draaiingshoek $\frac{\pi}{2}$ is.
b) Bepaal de matrix van A.
c) Bepaal de matrix van de inverse van A.

4. Beschouw in R_3 de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en het vlak met vergelijking $z = \frac{1}{2}$.
Bepaal de inhouden en de ronde oppervlakten van de delen waarin de bol door het vlak wordt verdeeld.

Oplossingen Tentamen januari 1971

1. Substitutie van $y = e^{tx}$ in de bijbehorende homogene vergelijking geeft de karakteristieke vergelijking $t^2 - \alpha^2 = 0$ en dus als algemene oplossing voor de homogene vergelijking

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} \qquad \text{voor } \alpha > 0\ ,$$

en

$$y = A + Bx \qquad \text{voor } \alpha = 0\ .$$

Een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking is van de gedaante $y = ae^{-2x}$ als $\alpha \neq 2$, en van de gedaante $y = axe^{-2x}$ als $\alpha = 2$. In het eerste geval vinden we $a = \dfrac{1}{4 - \alpha^2}$, in het tweede $a = -\frac{1}{4}$. De gevraagde oplossingen zijn:

α	y
0	$A + Bx + \frac{1}{4}e^{-2x}$
2	$Ae^{2x} + (B - \frac{1}{4}x)e^{-2x}$
$> 0,\ \neq 2$	$Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + \dfrac{1}{4 - \alpha^2}\, e^{-2x}$

2. a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{e^{(x^2)} - 1 - \sin(x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots - \{1 + \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}(-x^2)^2 + \ldots\}}{1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \ldots - 1 - (x^2 - \frac{x^6}{3!} + \ldots)} =$$

$$= \lim_{x\ 0} \frac{(\frac{1}{24} + \frac{1}{8})x^4 + \ldots}{\frac{1}{2}x^4 + \ldots} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\ .$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{4})^n$ is een reeks met positieve termen. Volgens het criterium van d'Alembert is de reeks convergent, omdat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\,\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} < 1 .$$

De som is gelijk aan de som van de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, voor $x = \frac{1}{4}$. (De machtreeks is convergent voor $|x| < 1$, ook volgens d'Alembert.)

Stel $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ voor $|x| < 1$, en stel $x \neq 0$. Dan is

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad \text{en} \quad \int \frac{S(x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n + C = \frac{x}{1-x} + C .$$

Differentiëren geeft: $\dfrac{S(x)}{x} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, en dus $S(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

Gevraagde antwoord: $S(\frac{1}{4}) = \frac{4}{9}$.

3. a) De gegeven vector $(-1,1,\sqrt{2})$ staat loodrecht op de as; zijn beeld uiteraard ook; de draaiingshoek is dus de hoek tussen $(-1,1,\sqrt{2})$ en $(1,-1,\sqrt{2})$: $\cos\varphi = 0$ dus $\angle\varphi = \frac{\pi}{2}$.

b) Beeldvector van $(1,1,0)$ is $(1,1,0)$.
Beeldvector van $(-1,1,\sqrt{2})$ is $(1,-1,\sqrt{2})$.
Om nog een derde vector met beeldvector te vinden bedenken we dat, omdat de draaiingshoek $\frac{\pi}{2}$ is, de vector $(1,-1,\sqrt{2})$ als beeld moet hebben $(1,-1,-\sqrt{2})$.
Uit deze drie gegevens wordt de matrix van A bepaald met behulp van rijbewerkingen in:

$$\begin{array}{lll} (1,1,0) & \to (1,1,0) & (1,1,0) \to (1,1,0) \\ (-1,1,\sqrt{2}) & \to (1,-1,\sqrt{2}) \sim & (0,2,\sqrt{2}) \to (2,0,\sqrt{2}) \quad \sim \\ (1,-1,\sqrt{2}) & \to (1,-1,-\sqrt{2}) & (0,-2,\sqrt{2}) \to (0,-2,-\sqrt{2}) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} & (1,1,0) & \to (1,1,0) & (1,0,0) \to (\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2}) \\ \sim & (0,4,0) & \to (2,2,2\sqrt{2}) \sim & (0,1,0) \to (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{2}) \\ & (0,0,2\sqrt{2}) & \to (2,-2,0) & (0,0,1) \to (\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2},0) \end{array}$$

De matrix van A is dus:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

c) De matrix van de inverse van A is de getransponeerde:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

omdat de matrix orthogonaal is. (Omdat de draaiingshoek $\frac{\pi}{2}$ is, is de matrix van de inverse van A gelijk aan de matrix van A^3. Dit zou ook tot een oplossing hebben kunnen leiden.)

4. Bol en vlak snijden elkaar volgens de cirkel $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$, $z = \frac{1}{2}$. Met cylindercoördinaten (r,φ,z) vinden we voor de inhoud van het bovenste deel:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} r(\sqrt{1-r^2} - \tfrac{1}{2})dr = 2\pi\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{4}r^2\right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{5}{24}\pi ,$$

en voor het ronde oppervlak van het bovenste deel:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} r\sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial z}{\partial \varphi})^2}\, dr = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} r\sqrt{1 + \frac{r^2}{1-r^2}}\, dr =$$

$$= \left[-2\pi\sqrt{1-r^2}\right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \pi .$$

Omdat $I_{Bol} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi$, zijn de inhouden der beide delen $\frac{5}{24}\pi$ en $\frac{9}{8}\pi$.
Omdat $O_{Bol} = 4\pi R^2 = 4\pi$, zijn de ronde oppervlakten der beide delen π en 3π.

Herkansingstentamen januari 1971

1. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking:

$$y^{(6)} + 2y^{(4)} + y^{(2)} = 2 \; .$$

2. Onderzoek de convergentie van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \; .$$

3. Gegeven is de vector $\underline{a} = (1,2,3)$ in R_3.
   De afbeelding A van R_3 in R_3 is gedefinieerd door

$$A\underline{x} = \underline{a} \times \underline{x} \qquad \text{(vectorproduct van } \underline{a} \text{ en } \underline{x}\text{)}.$$

   a) Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.
   b) Bewijs dat $\underline{a}$ een eigenvector is van A en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.
   c) Heeft A een inverse? Motiveer Uw antwoord.
   d) Bepaal de beeldruimte van A.
   e) Bepaal de matrix van A.

4. a) Bereken de inhoud van het lichaam bepaald door

$$x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2 \; .$$

   b) Bepaal de vergelijking van het oppervlak dat ontstaat als de kromme

$$\begin{cases} x^2 - 4z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

   gewenteld wordt om de z-as.

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1971

1. De karakteristieke vergelijking is:

$$\lambda^6 + 2\lambda^4 + \lambda^2 = 0 \ , \quad \text{dat is} \quad \lambda^2(\lambda^2+1)^2 = 0 \ .$$

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = 0\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}\lambda_3 = i\\ \lambda_4 = i\end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix}\lambda_5 = -i\\ \lambda_6 = -i\end{matrix}\right\}$$

De oplossing van de homogene vergelijking is dus

$$y = A + Bx + C\cos x + D\sin x + Ex\cos x + Fx\sin x \ .$$

Om een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking te vinden proberen we $y = ax^2$, dan is $y^{(2)} = 2a$, $y^{(4)} = 0$, $y^{(6)} = 0$. Dus $2a = 2$.
De algemene reële oplossing van de differentiaalvergelijking is dus

$$y = x^2 + A + Bx + C\cos x + D\sin x + Ex\cos x + Fx\sin x$$

met A, B, C, D, E, F reëel.

2.
$$u_n = \arctan(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \arctan\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \ ;$$

in ieder geval geldt dus $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Nu is

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})u_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})\arctan\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 1 \ .$$

Stel nl.: $\arctan\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = h$, dan is $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \tan h$ en de limiet gaat over in $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{\tan h} = 1$. Dus op den duur zal gelden $(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})u_n > \frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{matrix} u_n > \dfrac{1}{2\sqrt{n}+2\sqrt{n-1}} > \dfrac{1}{4\sqrt{n}} \\[2ex] \displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{4\sqrt{n}} \ \text{is divergent}\end{matrix}\right\} \ \text{dus} \ \sum_1^\infty \arctan(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) \ \text{is divergent.}$$

3\. a) $$A(\underline{x} + \underline{y}) = \underline{a} \times (\underline{x} + \underline{y}) = \underline{a} \times \underline{x} + \underline{a} \times \underline{y} = A\underline{x} + A\underline{y} .$$

$$A(\lambda\underline{x}) = \underline{a} \times (\lambda\underline{x}) = \lambda(\underline{a} \times \underline{x}) = \lambda A\underline{x} ,$$

dus A is een lineaire afbeelding.

b) $A\underline{a} = \underline{a} \times \underline{a} = \underline{0}$, dus $\underline{a}$ is eigenvector met eigenwaarde 0. Bovendien geldt:

$$A\underline{x} = \underline{0} \quad \text{d.w.z.} \quad \underline{a} \times \underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \lambda\underline{a} .$$

De nulruimte heeft dus dimensie 1.

c) Uit b) volgt, dat A niet regulier is en dus geen inverse heeft.

d) De dimensie van de beeldruimte is $3 - 1 = 2$. Bovendien geldt: $\underline{a} \times \underline{x} \perp \underline{a}$. Uit deze gegevens volgt: de beeldruimte is het vlak $(\underline{a},\underline{x}) = 0$, d.w.z. het vlak $x + 2y + 3z = 0$.

e) Men vindt het vectorproduct $\underline{a} \times \underline{b}$ van twee vectoren $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$ en $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$ op de volgende manier:

$$\underline{a} \times \underline{b} = a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{a} = (1,2,3) \\ \underline{x} = (x,y,z) \end{array}\right\} \ \underline{a} \times \underline{x} = (2z - 3y,\ 3x - z,\ y - 2x) .$$

Door voor $\underline{x}$ te nemen (1,0,0), (0,1,0) en (0,0,1) vindt men de matrix van A:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

4\. a) $$I = \iiint_L dx\, dy\, dz .$$

We gebruiken cylindercoördinaten:

$$I = \iiint_L r\, dr\, d\varphi\, dz ,$$

waarbij L wordt bepaald door: $r^2 - 1 \le z \le 2 - r^2$.

In het x,y-vlak moet dus gelden:

$$r^2 - 1 \leq 2 - r^2$$

$$2r^2 \leq 3$$

$$0 \leq r \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Dus

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} r\, dr \int_{r^2-1}^{2-r^2} dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} r(2 - r^2 - r^2 + 1)dr =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (3r - 2r^3)dr = 2\pi(\frac{3}{2}\, r^2 - \frac{2}{4}\, r^4)\Big|_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 2\pi(\frac{3}{2}\,\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{9}{4}) = \frac{9\pi}{4}\ .$$

b) De kromme $\left.\begin{array}{l} x^2 - 4z^2 = 1 \\ y = 0 \end{array}\right\}$ wordt gewenteld om de z-as.

Wanneer we x^2 vervangen door $x^2 + y^2$ krijgen we uit $x^2 - 4z^2 = 1$ de vergelijking van het omwentelingsoppervlak: $x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$.

We kunnen ook op de "standaardmanier" te werk gaan:
Punt P: $(x_0,0,z_0)$ op de kromme, dus $x_0^2 - 4z_0^2 = 1$.
De vergelijking van het vlak door P loodrecht op de z-as: $z = z_0$.
De vergelijking van de bol door P met middelpunt in (0,0,0):
$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + z_0^2$.
We elimineren x_0 en z_0 uit de vergelijkingen:

$$\left\{\begin{array}{l} x_0^2 - 4z_0^2 = 1 \\ z = z_0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + z_0^2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= z \\ x_0^2 &= 1 + 4z_0^2 = 1 + 4z^2 \end{aligned}\right\}$$ substitueer in de laatste vergelijking:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 4z^2 + z^2 \ .$$

De vergelijking van het omwentelingsoppervlak is dus

$$x^2 + y^2 - 4z^2 = 1 \ .$$

Proeftentamen maart 1971

1. Bepaal de reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' + 2y' + 2y = \cos x \; .$$

2. Gegeven de differentiaalvergelijking

$$y''' - k^2 y' = x \; .$$

Bepaal voor alle reële waarden van k de oplossingen.

3. a) Bereken

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + x^2 - \cos x - \arctan(x^2)}{1 + e^x - 2\sqrt{1 + x}} \; .$$

b) Bepaal alle reële waarden van p waarvoor de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n^2})}{n^p}$$

convergeert.

4. Gegeven is de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n} x^n \; .$$

a) Bepaal alle reële waarden van x waarvoor deze reeks convergent is.

b) Bepaal de som van de reeks.

5. Bereken sin 1 in drie decimalen nauwkeurig.

Oplossingen Proeftentamen maart 1971

1. De karakteristieke vergelijking is

$$t^2 + 2t + 2 = 0 \quad \text{met} \quad t_1 = -1 + i \; , \quad t_2 = -1 - i \; .$$

De reële oplossingen van de homogene vergelijking zijn dus

$$y = \lambda e^{-x} \cos x + \mu e^{-x} \sin x \qquad (\lambda, \mu \text{ reëel}).$$

Voor een particuliere oplossing proberen we

$$y = a \cos x + b \sin x \; .$$

Differentiëren geeft

$$y'' + 2y' + 2y = (a + 2b)\cos x + (-2a + b)\sin x$$

wat gelijk wordt aan het rechterlid als $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{2}{5}$.
De gevraagde oplossingen zijn dus

$$y = \frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x + \lambda e^{-x} \cos x + \mu e^{-x} \sin x \qquad (\lambda, \mu \text{ reëel}).$$

2. De karakteristieke vergelijking is

$$t^3 - k^2 t = 0 \quad \text{met} \quad t_1 = 0 \; , \quad t_2 = k \; , \quad t_3 = -k \; .$$

Voor $k \neq 0$ zijn de oplossingen van de homogene vergelijking

$$y = \lambda + \mu e^{kx} + \nu e^{-kx} \; .$$

Voor $k = 0$ echter

$$y = \lambda + \mu x + \nu x^2 \; .$$

Voor een particuliere oplossing verwachten we

$$\begin{array}{ll} \text{voor } k \neq 0 & y = ax^2 + bx \\ \phantom{\text{voor }} k = 0 & y = ax^4 + bx^3 \; . \end{array}$$

$$k \neq 0 \qquad y''' - k^2 y' = -k^2(2ax + b) \; ,$$

wat gelijk wordt aan x als $a = -\dfrac{1}{2k^2}$, $b = 0$;

$$k = 0 \qquad y''' = 24ax + 6b \,,$$

wat gelijk wordt aan x als $a = \frac{1}{24}$, $b = 0$.

De oplossingen zijn dus:

$$k \neq 0 \qquad y = -\frac{1}{2k^2}\,x^2 + \lambda + \mu e^{kx} + \nu e^{-kx} \;;$$

$$k = 0 \qquad y = \frac{1}{24}\,x^4 + \lambda + \mu x + \nu x^2 \;.$$

3\. a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 - \cos x - \arctan(x^2)}{1 + e^x - 2\sqrt{1+x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 - (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots) - (x^2 - \frac{x^6}{3} + \ldots)}{1 + (1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots) - 2(1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}\,x + \frac{\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}}{2!}\,x^2 + \ldots)} =$$

$$= \lim_{x\;0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + \text{hogere orde termen}}{\frac{3}{4}x^2 + \text{hogere orde termen}} = \frac{2}{3}\;.$$

b)

$$u_n = \frac{\log(1 + \frac{1}{n^2})}{n^p}\,, \qquad u_n > 0 \text{ voor alle n.}$$

Vergelijk u_n met $u_n = \frac{2}{n^{p+2}}$. Omdat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

geldt

1e Voor alle n groter dan zekere N_1:

$$\log(1 + \frac{1}{n^2}) < \frac{2}{n^2}\,, \qquad \text{dus ook} \quad u_n < v_n \;.$$

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ convergeert voor $p > -1$, dus ook $\sum_{1}^{\infty} u_n$ convergeert voor $p > -1$.

2e Voor alle n groter dan zekere N_2 geldt

$$\log(1 + \frac{1}{n^2}) > \frac{1}{2n^2}, \quad \text{dus ook} \quad u_n > \frac{1}{2n^{p+2}} .$$

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n^{p+2}}$ divergeert voor $p \leq -1$, dus ook $\sum_{1}^{\infty} u_n$.

De gegeven reeks convergeert dus alleen als $p > -1$.

4. a) Met het criterium van Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2+1}{n} x^n\right|} = |x| \qquad (\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n}} < \sqrt[n]{2n})$$

dus: absoluut convergent als $|x| < 1$

divergent als $|x| > 1$.

Als $|x| = 1$, dan $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, dus $\sum_{1}^{\infty} u_n$ divergent.

Het gebied van de convergentie is dus $-1 < x < 1$.

b) De reeks is voor $|x| < 1$ absoluut convergent, dus:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n = \sum_{1}^{\infty} nx^n + \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\sum_{1}^{\infty} nx^n = x \sum_{1}^{\infty} nx^{n-1} = x \frac{d}{dx} (\sum_{n=1}^{\infty} x_n) = x \frac{d}{dx} \frac{x}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$$

dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} x^n = \frac{x}{(1-x)^2} - \log(1-x) \qquad \text{voor } |x| < 1 .$$

5. Zie diktaat.

Examen/tentamen juni 1971.

1. a) Bepaal de reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y''' - y'' + y' - y = e^{x} - e^{-x} .$$

b) Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \sin^2 \frac{1}{n}) .$$

Onderzoek deze reeks op convergentie;

---

2. a) Bepaal voor alle reële waarden van α de convergentiestraal en het gedrag in de randpunten van de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \qquad (x \text{ is reëel}).$$

Bereken de som van de reeks voor $\alpha = -2$.

b) Bepaal de vergelijking van het oppervlak in R_3 dat de verzameling is van de rechten die evenwijdig zijn aan het XOY-vlak, de Z-as snijden en de rechte met parametervoorstelling $\underline{x} = (0,1,0) + \lambda(1,1,1)$ snijden.

3. a) Bereken

$$\int_1^3 \frac{1}{t}\sqrt{\frac{t-1}{3-t}}\, dt .$$

b) Bereken

$$\iint_G \sin \frac{\pi x}{2y}\, dxdy ,$$

waarbij G het gebied is in R_2 waarvoor geldt $y \geq \sqrt{x}$, $y \leq x$ en $y \leq 2$.

4. In R_3 zijn gegeven twee vectoren $\underline{a} = (2,2,1)$ en $\underline{b} = (-2,1,2)$. Een lineaire afbeelding A van R_3 in zichzelf wordt gedefinieerd door

$$A\underline{x} = (\underline{b},\underline{x})\underline{a} + (\underline{a},\underline{x})\underline{b} .$$

a) Bewijs dat $\underline{a} + \underline{b}$ een eigenvector is van A en bereken de bijbehorende eigenwaarde.

b) Bepaal de nulruimte van A.

c) Bepaal de beeldruimte van A.

d) Men beschouwt de vectoren $\underline{x} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{b}$, $\underline{x} \neq \underline{0}$.

Bereken het quotiënt $\dfrac{|A\underline{x}|}{|\underline{x}|}$ voor deze vectoren.

Oplossingen Tentamen juni 1971

1. a) Karakteristieke vergelijking: $t^3 - t^2 + t - 1 = 0$.

Wortels: $t = 1$, $t = -i$, $t = i$.

Basisoplossingen homogene vergelijking: e^x, $\sin x$, $\cos x$.

Voor de inhomogene vergelijking proberen we:

$$y = ae^{-x} + bxe^x$$

$$y' = -ae^{-x} + bxe^x + be^x$$

$$y'' = ae^{-x} + bxe^x + 2be^x$$

$$y''' = -ae^{-x} + bxe^x + 3b^x .$$

Substitueer dit in de vergelijking, dan komt er

$$e^{-x}(-a - a - a - a) + xe^x(b - b + b - b) + e^x(3b - 2b + b) = e^x - e^{-x} .$$

Dit geldt voor alle x als

$$\begin{aligned} -4a &= -1 & \qquad 2b &= 1 \\ a &= \tfrac{1}{4} & b &= \tfrac{1}{2} . \end{aligned}$$

Algemene oplossing:

$$y = \tfrac{1}{4}e^{-x} + \tfrac{1}{2}xe^x + \lambda e^x + \mu \sin x + \nu \cos x \qquad (\lambda, \mu, \nu \text{ reëel}).$$

1. b) We maken gebruik van

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + \sin^2 \frac{1}{n})}{\sin^2 \frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1$$

en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \ .$$

Voor voldoend grote n geldt dus

$$0 < u_n = \log(1 + \sin^2 \frac{1}{n}) < 2 \sin^2 \frac{1}{n} < 4 \frac{1}{n^2} \ .$$

$\sum 4 \frac{1}{n^2}$ convergeert, dus $\sum u_n$ convergeert eveneens (zelfs absoluut).

2. a) le:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} e^{\alpha \frac{\log n}{n}} = e^0 = 1 \quad \text{voor elke } \alpha \ ,$$

dus

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^\alpha}\right|} = |x| \ .$$

Convergentiestraal is 1 voor elke α.

Voor $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ convergent voor $\alpha > 1$,

$x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ convergent voor $\alpha > 0$,

want $\frac{1}{n^\alpha}$ daalt voor $\alpha > 0$ monotoon naar 0.

2e. Ga uit van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1 - x} \ .$$

Voor $|x| < 1$ geldt ook

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1 - x - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Opnieuw differentiëren levert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 - x\cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{1 - x + 2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}, \qquad \text{voor } |x| < 1 .$$

b) Neem een punt op de z-as: $P = (0,0,\mu)$ en een punt op de gegeven lijn: $Q = (\lambda, 1+\lambda, \lambda)$. De lijn door P en Q is:

$$(0,0,\mu) + \nu(\lambda, 1+\lambda, \lambda-\mu) .$$

Deze lijn loopt evenwijdig aan het XOY-vlak als $\lambda - \mu = 0$.
De punten (x,y,z) van het oppervlak moeten voldoen aan

$$\begin{cases} x = \nu\lambda \\ y = \nu(1+\lambda) \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \text{voor elke } \lambda \text{ en } \nu.$$

Dit geeft (elimineer λ)

$$\begin{cases} x = \nu z \\ y = \nu(1+z) . \end{cases}$$

Dus voor $z \neq 0$: $y = \frac{x}{z}(1+z)$.
Voor $z = 0$ moet $\lambda = 0$ zijn, dus $x = 0$, y willekeurig: y-as.
De y-as ligt inderdaad op het oppervlak $yz = x + xz$.
Dus is $yz = x + xz$ de gevraagde vergelijking.

3. a) $$\int_1^3 \frac{1}{t}\sqrt{\frac{t-1}{3-t}}\,dt \,.$$

Stel

$$\sqrt{\frac{t-1}{3-t}} = x \;; \qquad \begin{array}{l} t = 1 \text{ geeft } x = 0 \\ t \uparrow 3 \text{ geeft } x \to \infty \,. \end{array}$$

$$\frac{t-1}{3-t} = x^2 \quad \text{dus} \quad t = \frac{3x^2+1}{1+x^2} \,, \quad dt = \frac{4x}{(1+x^2)^2}\,dx \,.$$

$$\int \frac{1+x^2}{3x^2+1} \times \frac{4x}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{4x^2}{(3x^2+1)(1+x^2)}\,dx \,.$$

De breuksplitsing

$$\frac{4x^2}{(3x^2+1)(1+x^2)} = \frac{ax+b}{3x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

levert $a = 0$, $b = -2$, $c = 0$, $d = 2$.

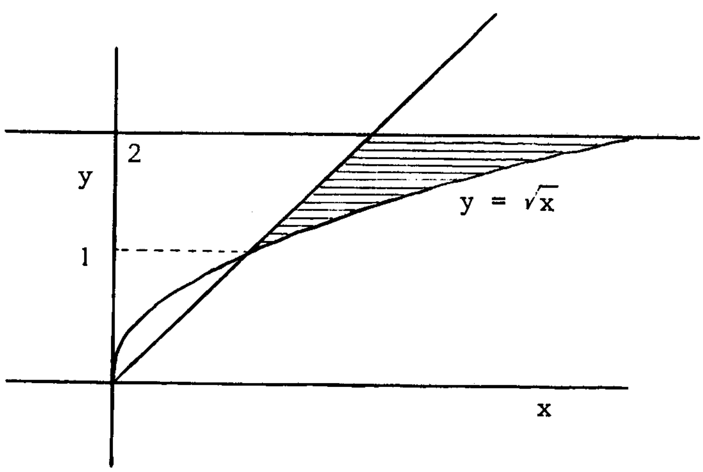
$$\int \frac{4x^2}{(3x^2+1)(1+x^2)}\,dx = -\int \frac{2dx}{3x^2+1} + \int \frac{2dx}{x^2+1} =$$

$$= -2\,\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan x\sqrt{3} + 2 \arctan x + C \,.$$

$$\int_0^\infty \frac{4x^2}{(3x^2+1)(1+x^2)}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan x\sqrt{3} + 2 \arctan x\right]_0^a =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{2} + 2\,\frac{\pi}{2} = \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \,.$$

b) Het gebied G is gearceerd.



$$\iint_G \sin\frac{\pi x}{2y}\,dxdy = \int_1^2 dy \int_y^{y^2} \sin\frac{\pi x}{2y}\,dx =$$

$$= -\int_1^2 \left\{\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2y}\Big|_y^{y^2}\right\}dy = -\int_1^2 \left\{\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2} - \frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\right\}dy =$$

$$= -\int_1^2 \frac{2y}{\pi}\frac{2}{\pi}\,d(\sin\frac{\pi y}{2}) = -\left[\frac{4y}{\pi^2}\sin\frac{\pi y}{2}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi y}{2}\,dy =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\frac{2}{\pi}\left[-\cos\frac{\pi}{2}y\right]_1^2 = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^3} = \frac{4}{\pi^3}(\pi + 2)\ .$$

4. a) We moeten laten zien dat er een getal λ is zó dat $A(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda(\underline{a} + \underline{b})$.

$$A(\underline{a} + \underline{b}) = (\underline{b},\underline{a} + \underline{b})\underline{a} + (\underline{a},\underline{a} + \underline{b})\underline{b} =$$
$$= (\underline{b},\underline{a})\underline{a} + (\underline{b},\underline{b})\underline{a} + (\underline{a},\underline{a})\underline{b} + (\underline{a},\underline{b})\underline{b}\ .$$

$$(\underline{a},\underline{b}) = 2\cdot -2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 = 0 \qquad (\underline{a},\underline{a}) = 9 \qquad (\underline{b},\underline{b}) = 9\ ,$$

dus

$$A(\underline{a} + \underline{b}) = 9\underline{a} + 9\underline{b} = 9(\underline{a} + \underline{b})\ .$$

$\underline{a} + \underline{b}$ is eigenvector met eigenwaarde 9.

b) De nulruimte van A is de verzameling van alle $\underline{x}$ zó dat

$$A\underline{x} = (\underline{b},\underline{x})\underline{a} + (\underline{a},\underline{x})\underline{b} = \underline{0}\ .$$

$\underline{a}$, $\underline{b}$ zijn onafhankelijk; dus moet $(\underline{b},\underline{x}) = 0$ en $(\underline{a},\underline{x}) = 0$ zijn.
Hieraan voldoen de vectoren $\underline{x}$ loodrecht op $\underline{a}$ en $\underline{b}$, d.w.z. de nulruimte is:

$$\underline{x} = \rho\underline{a} \times \underline{b} = \rho(1,-2,2)\ .$$

c) De beeldruimte is een deelruimte van de ruimte opgespannen door $\underline{a}$ en $\underline{b}$, immers $A\underline{x} = (\underline{b},\underline{x})\underline{a} + (\underline{a},\underline{x})\underline{b}$.
De dimensiestelling geeft: dim(beeldruimte) = 3 - 1 = 2; dus beeldruimte:

$$\underline{x} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{b}\ .$$

4. d) $$\frac{|A\underline{x}|}{|\underline{x}|} = \frac{|(\underline{b},\lambda\underline{a} + \mu\underline{b})\underline{a} + (\underline{a},\lambda\underline{a} + \mu\underline{b})\underline{b}|}{|\lambda\underline{a} + \mu\underline{b}|} = \frac{|9\mu\underline{a} + 9\lambda\underline{b}|}{|\lambda\underline{a} + \mu\underline{b}|} =$$

$$= \frac{9\{(\mu\underline{a} + \lambda\underline{b},\mu\underline{a} + \lambda\underline{b})\}^{\frac{1}{2}}}{\{(\lambda\underline{a} + \mu\underline{b},\lambda\underline{a} + \mu\underline{b})\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{9\{9\mu^2 + 9\lambda^2\}^{\frac{1}{2}}}{\{9\lambda^2 + 9\mu^2\}^{\frac{1}{2}}} = 9 \; .$$

Herkansingstentamen juni 1971

1. Bepaal de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 2y' - 3y = e^{-2x}$$

die voldoet aan

$$y(0) = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = 0 \ .$$

2. Bepaal voor alle reële $k \geq 0$ de reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' + y = \sin kx \ .$$

3. Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ .$$

i : Voor welke reële waarden van x convergeert deze reeks?

ii: Bepaal voor deze waarden van x de som van de reeks.

4. Stel de vergelijking op van het oppervlak dat ontstaat door de rechte

$$\underline{x} = (2,3,1) + \lambda(1,0,1)$$

te wentelen om de rechte

$$\underline{x} = \mu(1,1,1) \ .$$

5. Bereken

$$\int_1^{\infty} \frac{x \log x}{(x^2+1)^2}\, dx \ .$$

6. Bereken de inhoud van het gebied in R_3 dat wordt bepaald door

$$x^2 + y^2 \leq 2 \ ,$$
$$0 \leq y \leq x^2 \ ,$$
$$0 \leq z \leq x^2 \ .$$

7. In R_3 is een vector $\underline{a} = (1,1,1)$ gegeven.
De lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 wordt gegeven door

$$A\underline{x} = 2\underline{x} - (x_1 + x_2 + x_3)\underline{a} \qquad (\text{waarin } \underline{x} = (x_1,x_2,x_3)) \ .$$

i : Bewijs dat $\underline{a}$ een eigenvector is en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.
ii : Bepaal de overige eigenwaarden en eigenvectoren.
iii: Bepaal de matrix van A.
iv : Bewijs dat de nulruimte van A uitsluitend uit de vector $\underline{0}$ bestaat.

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1971

1. Substitutie van $y(x) = e^{tx}$ levert als karakteristieke vergelijking:

$$t^2 - 2t - 3 = (t + 1)(t - 3) = 0 \quad \text{met} \quad t_1 = -1,\ t_2 = 3 \ .$$

De algemene oplossing voor de homogene vergelijking is dus:

$$y_{hom} = ae^{-x} + be^{3x} \ .$$

Om een particuliere oplossing te vinden nemen we:

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha e^{-2x} \\ y'(x) &= -\ 2\alpha e^{-2x} \\ y''(x) &= 4\alpha e^{-2x} \end{aligned}$$

$$y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = (4\alpha + 4\alpha - 3\alpha)e^{-2x} = e^{-2x} \quad \text{als} \quad \alpha = \frac{1}{5} \ .$$

De algemene oplossing is dus:

$$y(x) = \frac{1}{5}\, e^{-2x} + ae^{-x} + be^{3x} \ .$$

Gevraagd wordt een oplossing met $y(0) = 0$ en $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$. Dit geeft

$$y(0) = \frac{1}{5} + a + b \ ;$$

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{5} e^{-2x} + ae^{-x} + be^{3x}\right) = \begin{cases} 0 \text{ als } b = 0 \\ +\infty \text{ als } b > 0 \\ -\infty \text{ als } b < 0 \end{cases}.$$

Hieruit volgt: $b = 0$ en $a = -\frac{1}{5}$. De gevraagde oplossing is dus:

$$y = \frac{1}{5} e^{-2x} - \frac{1}{5} e^{-x} .$$

2. De karakteristieke vergelijking is

$$t^2 + 1 = (t + i)(t - i) = 0 \quad \text{met} \quad t_1 = i,\ t_2 = -i .$$

De algemene oplossing van de homogene vergelijking is dus:

$$y(x) = ae^{ix} + be^{-ix} \quad \text{met } a \text{ en } b \text{ complex.}$$

De algemene vorm voor de reële oplossingen is:

$$y(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x \quad \text{met } \alpha \text{ en } \beta \text{ reëel.}$$

Bij het zoeken naar een particuliere oplossing hebben we te onderscheiden tussen de gevallen: $k = 1$ en $k \neq 1$.

I Stel $k = 1$: $y'' + y = \sin x$. We proberen nu als particuliere oplossing:

$$y = Ax \sin x + Bx \cos x$$

$$y'' = - Ax \sin x + 2A \cos x - Bx \cos x - 2B \sin x$$

$$y'' + y = 2A \cos x - 2B \sin x = \sin x .$$

We moeten dus $A = 0$ en $B = -\frac{1}{2}$ nemen.

II Stel $k \neq 1$; probeer als particuliere oplossing:

$$y = A \sin kx + B \cos kx$$

$$y'' = - Ak^2 \sin kx - Bk^2 \cos kx$$

$$y'' + y = (1 - k^2)\{A \sin kx + B \cos kx\} = \sin kx .$$

Nu moet $A = \dfrac{1}{1 - k^2}$ en $B = 0$ zijn.

Samengevat:

$k = 1$; algemene oplossing: $y = \alpha \sin x + \beta \cos x - \frac{1}{2}x \cos x$, α en β reëel.

$k \neq 1$; algemene oplossing: $y = \alpha \sin x + \beta \cos x + \dfrac{1}{1 - k^2} \sin kx$, α en β reëel.

Opmerking. Er is geen aanleiding $k = 0$ als apart geval te behandelen.

3\. i. Stel $\dfrac{x^{2n+1}}{2n + 1} = u_n$, dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} x^2 \frac{2n + 1}{2n + 3} = x^2 .$$

Dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} \begin{cases} \text{convergeert (absoluut) voor } x^2 < 1 \text{ of } |x| < 1 \\ \text{divergeert voor } |x| > 1 . \end{cases}$$

Randpunten:

$$x = 1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + 1} .$$

$\dfrac{1}{2n + 1} > \dfrac{1}{4n} > 0$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ divergeert, dus $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + 1}$ divergeert.

$$x = -1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(- \frac{1}{2n + 1}\right) .$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + 1}$ divergeert, dus $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(- \frac{1}{2n + 1}\right)$ divergeert ook.

Samenvatting:

Voor $|x| < 1$ convergeert $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}$ absoluut;

voor $|x| \geq 1$ divergeert $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}$.

ii. $$S = \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots ;$$

$$S' = x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots = \frac{x^2}{1 - x^2} ,$$

dus

$$S(x) = \int \frac{x^2}{1 - x^2}\, dx = \int \frac{dx}{1 - x^2} - \int dx = \tfrac{1}{2}\left[\int \frac{dx}{1 - x} + \int \frac{dx}{1 + x}\right] - x =$$

$$= \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x} - x + C ;$$

$x = 0$ geeft $S = 0$, dus $C = 0$.

$$S(x) = \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x} - x .$$

4. De bol om $(0,0,0)$ als middelpunt en door $(2+\lambda,3,1+\lambda)$ heeft als vergelijking:

(1) $$x^2 + y^2 + z^2 = (2 + \lambda)^2 + 9 + (1 + \lambda)^2 = 2\lambda^2 + 6\lambda + 14 .$$

Het vlak V door het punt $(2+\lambda,3,1+\lambda)$ loodrecht op ℓ: $\underline{x} = \mu(1,1,1)$ heeft als vergelijking:

(2) $$x + y + z = 6 + 2\lambda .$$

Invullen van $\lambda = \dfrac{x + y + z - 6}{2}$ in (1) geeft het gevraagde oppervlak:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \tfrac{1}{2}(x + y + z - 6)^2 + 3(x + y + z - 6) + 14$$

of

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz + 6x + 6y + 6z - 28 = 0 .$$

5. $$\int \frac{x \log x}{(x^2 + 1)^2}\, dx = \tfrac{1}{2} \int (x^2 + 1)^{-2} \log x \; d(x^2 + 1) =$$

$$= -\tfrac{1}{2} \int \log x \; d(x^2 + 1)^{-1} = -\tfrac{1}{2}\, \frac{\log x}{1 + x^2} + \tfrac{1}{2} \int \frac{1}{x(1 + x^2)}\, dx .$$

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2}\right) dx = \log|x| - \tfrac{1}{2} \log(1 + x^2) + C .$$

$$\int_1^\infty \frac{x \log x}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[-\tfrac{1}{2}\frac{\log N}{1+N^2} + \tfrac{1}{2}\log\frac{N}{\sqrt{1+N^2}}\right] + 0 - \tfrac{1}{2}\log\frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= -0 + 0 + 0 + \tfrac{1}{4}\log 2 = \tfrac{1}{4}\log 2\ .$$

6. Het gebied wordt bepaald door

(1) $\qquad x^2 + y^2 \le 2$

(2) $\qquad 0 \le y \le x^2$

(3) $\qquad 0 \le z \le x^2\ .$

Uit (1) volgt: $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$, $-\sqrt{2-x^2} \le y \le \sqrt{2-x^2}$.
Uit (2) volgt: $0 \le y$ en $y \le x^2$.

Samengevat: als $|x| \le 1$, dan $0 \le y \le x^2$,
als $1 \le |x| \le \sqrt{2}$, dan $0 \le y \le \sqrt{2-x^2}$.

Vanwege de symmetrie t.o.v. het YZ-vlak kunnen we ons tot het eerste octant beperken. De integraal wordt dus

$$2\int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \int_0^{x^2} dz + 2\int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} dy \int_0^{x^2} dz =$$

$$= 2\int_0^1 x^4 dx + 2\int_1^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{2-x^2}\,dx\ .$$

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{x}\,x^5\Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

Om

$$\int_1^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{2-x^2}\,dx = I$$

uit te rekenen stellen we $\frac{x}{\sqrt{2}} = t$, $dx = \sqrt{2}\,dt$, de grenzen $x = 1$ en $\sqrt{2}$ worden $t = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en 1. Dus

$$I = \int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1} 2t^2\sqrt{2 - 2t^2}\,\sqrt{2}\,dt = 4\int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1} t^2\sqrt{1 - t^2}\,dt\ .$$

Stel $t = \sin\varphi$; $\sqrt{1 - t^2} = \cos\varphi$, $dt = \cos\varphi\,d\varphi$. Dan wordt

$$I = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,\cos^2\varphi\,d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2\alpha\,d\alpha = \tfrac{1}{2}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}\ .$$

De inhoud wordt dus

$$2\,\frac{1}{5} + 2\,\frac{\pi}{8} = \frac{2}{5} + \frac{\pi}{4}\ .$$

7. i. $\underline{Aa} = 2\underline{a} - (1 + 1 + 1)\underline{a} = -\underline{a}$

dus $\underline{a}$ is eigenvector met eigenwaarde -1.

ii. Gevraagd worden de eigenvectoren die onafhankelijk zijn van $\underline{a}$. Zij $\underline{x}$ zo'n eigenvector, dan geldt:

$$A\underline{x} = \lambda\underline{x} = 2\underline{x} - (x_1 + x_2 + x_3)\underline{a}$$

of

$$(2 - \lambda)\underline{x} - (x_1 + x_2 + x_3)\underline{a} = \underline{0}\ .$$

Uit de onafhankelijkheid van $\underline{x}$ en $\underline{a}$ volgt dan

1) $\lambda = 2$
2) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Dus de eigenvectoren die onafhankelijk zijn van $\underline{a}$ hebben eigenwaarde 2 en liggen in het vlak V met vergelijking $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, of in parametervoorstelling:

$$\underline{x} = \lambda(1,-1,0) + \mu(0,1,-1)\ .$$

iii. $A(1,0,0) = (2,0,0) - (1,1,1) = (1,-1,-1)$
$A(0,1,0) = (0,2,0) - (1,1,1) = (-1,1,-1)$
$A(0,0,1) = (0,0,2) - (1,1,1) = (-1,-1,1)$.

De matrix van A is dus

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

iv. Uit ii blijkt dat er geen eigenvector met eigenwaarde 0 voorkomt, dus de nulruimte bevat enkel de vector $\underline{0}$.
Men kan ook rechtstreeks nagaan dat aan $A\underline{x} = \underline{0}$ uitsluitend door $\underline{x} = 0$ wordt voldaan.

Examen/tentamen januari 1972

1. a) Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y''' - 3y'' + 4y = e^{-x} .$$

b) Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y''' - y = 0$$

en daarna de oplossing die voldoet aan

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0 , \quad y(0) = 1 \quad \text{en} \quad y'(0) = 1 .$$

2. a) Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x^2) - x^2 \cos x}{(\arctan x - x)^2} .$$

b) Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 2}{n + 1} x^n .$$

1) Voor welke reële waarden van x convergeert deze reeks?

2) Bepaal voor deze waarden van x de som van de reeks.

3. Gegeven is de lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 met matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

a) Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren.

b) Bepaal parametervoorstellingen voor de nulruimte en beeldruimte van A.

c) Bewijs dat voor alle vectoren $\underline{x}$ geldt: $A\underline{x} - \underline{x}$ is een lineaire combinatie van (1,1,1).

d) Geef de meetkundige interpretatie van de lineaire afbeelding A.

e) Ga na of A een inverse heeft.

4. a) Bepaal

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{(1+x)^3}\, dx \,.$$

b) Bereken de inhoud van het gebied in R_3 dat wordt bepaald door

$$0 \le z \le \cos x \cos y$$

$$0 \le y \le \frac{\pi}{2} \sin x$$

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \,.$$

Oplossingen Tentamen januari 1972

1. a) Eerst de homogene vergelijking $y''' - 3y'' + 4y = 0$. Stel $y = e^{tx}$; de karakteristieke vergelijking $t^3 - 3t^2 + 4 = 0$ geeft $t_1 = -1$, $t_{2,3} = 2$. Oplossing:

$$y = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 x e^{2x} + \lambda_3 e^{2x} \,.$$

In de inhomogene vergelijking proberen we $y(x) = axe^{-x}$; dit geeft $y''' - 3y'' + 4y = 9ae^{-x}$; dus $y(x)$ voldoet als $a = \frac{1}{9}$.

De algemene oplossing wordt:

$$y = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 x e^{2x} + \lambda_3 e^{2x} + \frac{1}{9} x e^{-x} \,.$$

b) Stel $y = e^{tx}$. Karakteristieke vergelijking $t^3 - 1 = 0$ met $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $t_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$. Complexe oplossing:

$$y = \lambda_1 e^{x} + \lambda_2 e^{-\frac{1}{2}x} e^{\frac{1}{2}ix\sqrt{3}} + \lambda_3 e^{-\frac{1}{2}x} e^{-\frac{1}{2}ix\sqrt{3}} \,;$$

reële oplossing:

$$y = \lambda_1 e^{x} + \mu_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \tfrac{1}{2}x\sqrt{3} + \mu_3 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \tfrac{1}{2}x\sqrt{3}$$

met λ_1, μ_2, μ_3 reëel.

De bijzondere oplossing vinden we als volgt:

Daar $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$ moet $\lambda_1 = 0$ zijn. Uit $y(0) = \lambda_1 + \mu_2$ volgt $\mu_2 = 1$ en uit $y'(0) = -\frac{1}{2}\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_3\sqrt{3}$ volgt $\mu_3 = \sqrt{3}$. Dus de gevraagde bijzondere oplossing is

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \cos \tfrac{1}{2}x\sqrt{3} + \sqrt{3}\, e^{-\frac{1}{2}x} \sin \tfrac{1}{2}x\sqrt{3} .$$

2\. a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x^2) - x^2 \cos x}{(\arctan x - x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \ldots - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{4!} + \ldots}{(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots - x)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{1}{3} - \frac{1}{24})x^2 + \text{hogere orde termen}}{\frac{1}{9}\, x^6 + \text{hogere orde termen}} = \frac{21}{8} .$$

b) 1e. Als $x = 0$ dan convergeert de reeks. Stel $x \neq 0$. Dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n + 3)/(n + 2)}{(n + 2)/(n + 1)} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = |x| ,$$

zodat volgens het convergentiecriterium van d'Alembert de reeks convergeert voor $|x| < 1$ en divergeert voor $|x| > 1$.

Als $|x| = 1$ dan $\frac{n + 2}{n + 1} |x|^n = \frac{n + 2}{n + 1} \to 1$ als $n \to \infty$, dus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Bijgevolg is de reeks divergent als $|x| = 1$.

Conclusie: de reeks is convergent slechts als $|x| < 1$.

2e. $$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 2}{n + 1} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 2}{n + 1} x^{n+1} \quad \text{als } x \neq 0 .$$

Stel

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 2}{n + 1} x^{n+1} ,$$

dan

$$\int T(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n + 1} x^{n+2} + C = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n + 1} + C =$$

$$= - x \log(1 - x) + C.$$

Dan

$$T(x) = \frac{d}{dx}(-x\log(1-x)) = -\log(1-x) + \frac{x}{1-x},$$

dus

$$S(x) = -\frac{1}{x}\log(1-x) + \frac{1}{1-x} \quad \text{als } x \neq 0 .$$

$$S(x) = 2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}x^2 + \ldots , \quad \text{dus} \quad S(0) = 2 .$$

Andere manier: $T'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^n = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}\right)'$ enz.

3\. a) $$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -3 \\ 1 & 2-\lambda & -3 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0 , \quad \text{als } \lambda = 0 \text{ of } \lambda = 1.$$

Eigenvectoren bij $\lambda = 0$: $\underline{x} = \rho(1,1,1)$

bij $\lambda = 1$: $\underline{x} = \rho(3,0,1) + \sigma(0,3,1)$ (alle vectoren in het vlak $x + y - 3z = 0$).

b) De nulruimte bestaat uit alle vectoren $\underline{x}$ zo dat $A\underline{x} = \underline{0}$, of anders geschreven: $A\underline{x} = 0\cdot\underline{x}$. We zien aldus dat de deelruimte der eigenvectoren bij $\lambda = 0$ de nulruimte is: $\underline{x} = \rho(1,1,1)$.

De beeldruimte wordt opgespannen door de kolomvectoren van de matrix. Zoek hiervoor een basis:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

dus beeldruimte = ruimte der eigenvectoren bij $\lambda = 1$.

c) Stel $\underline{x} = (x,y,z)$. Dan

$$A\underline{x} = (2x + y - 3z,\ x + 2y - 3z,\ x + y - 2z) ,$$

dus

$$A\underline{x} - \underline{x} = (x + y - 3z,\ x + y - 3z,\ x + y - 3z) =$$

$$= (x + y - 3z)(1,1,1) .$$

d) Uit c) volgt dat de verbindingsrechte van de punten $\underline{x}$ en $A\underline{x}$ evenwijdig is aan de vector (1,1,1). Samen met b) levert dit de meetkundige interpretatie: A is een scheve projectie in de richting (1,1,1) op het vlak $x + y - 3z = 0$.

e) De beeldruimte is <u>niet</u> de gehele R_3; A is singulier. Bij een singuliere afbeelding bestaat geen inverse.

4. a)

$$\int \frac{\arctan x}{(1+x)^3}\,dx = -\tfrac{1}{2}\int \arctan x \; d\,\frac{1}{(1+x)^2} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\arctan x\,\frac{1}{(1+x)^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x)^2}\,d\arctan x =$$

$$= \frac{-\tfrac{1}{2}\arctan x}{(1+x)^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}\,dx\,.$$

Stel

$$\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\,,$$

dan

$$A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2 \equiv 1\,.$$

Door achtereenvolgens $x = -1$, $x = i$ en $x = 0$ in te vullen vinden we: $B = \tfrac{1}{2}$, $C = -\tfrac{1}{2}$, $D = 0$ en $A = \tfrac{1}{2}$. Dus

$$\int \frac{dx}{(1+x)^2(1+x^2)} = \tfrac{1}{2}\log|x+1| - \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} - \tfrac{1}{4}\log(x^2+1) + C =$$

$$= \tfrac{1}{4}\log\frac{(x+1)^2}{x^2+1} - \frac{1}{2(x+1)} + C\,.$$

De gevraagde integraal is dus

$$\lim_{p\to\infty}\left[\frac{-\tfrac{1}{2}\arctan x}{(1+x)^2} + \frac{1}{8}\log\frac{(x+1)^2}{x^2+1} - \frac{1}{4(x+1)}\right]_0^p =$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left(\frac{-\tfrac{1}{2}\arctan p}{(1+p)^2} + \frac{1}{8}\log\frac{(p+1)^2}{p^2+1} - \frac{1}{4(p+1)}\right) + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}\,.$$

b) Als G voorstelt het gebied in het x,y-vlak

$$0 \le y \le \frac{\pi}{2} \sin x$$
$$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

dan is de inhoud

$$I = \iint\limits_G \cos x \cos y \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \int_0^{\frac{\pi}{2}\sin x} \cos y \, dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right) d\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[- \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} .$$

Herkansingstentamen januari 1972

1. Bepaal de oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 2y' + y = 2e^x$$

die voldoet aan $y(0) = 1$ en $y'(0) = 3$.

2. Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1 - 2x}{1 + x}\right)^n \qquad (x \text{ is reëel}).$$

a) Bepaal de waarden van x waarvoor deze reeks convergeert.

b) Bepaal de som van de reeks in het convergentiegebied (behalve in de randpunten).

3. In R_3 is een lineaire afbeelding A gedefinieerd door

$$A(1,1,1) = (2,2,2)$$
$$A(1,0,1) = (1,2,1)$$
$$A(0,2,-1) = (2,-1,1) .$$

Bepaal de matrix, de eigenwaarden en de eigenvectoren van A.

4. In R_3 is een afbeelding A gedefinieerd door

$$A(x,y,z) = (x,z,y) \qquad \text{voor alle } \underline{x} = (x,y,z) .$$

a) Bewijs dat de afbeelding lineair is en bepaal de matrix van A.

b) Bewijs dat de meetkundige betekenis van A een spiegeling is t.o.v. een vlak en bepaal de vergelijking van dat vlak.

5. Bepaal de vergelijking van de kegel met top (0,0,1) en richtkromme

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x + y + z = 2 . \end{cases}$$

6. a) Bepaal

$$\int \sin x \sinh x \, dx \ .$$

b) Zij

$$I_n = \int_0^\infty e^{-x^2} x^n \, dx \ .$$

Leid voor $n \geq 2$ een reductieformule af voor I_n. Bepaal daarna I_3.

7. Bereken

$$\int_0^1 dx \int_1^2 \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} dy + \int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} dy \ .$$

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1972

1. De karakteristieke vergelijking is $t^2 - 2t + 1 = 0$ met $t_{1,2} = 1$. Dit geeft als oplossing van de homogene vergelijking

$$y = \lambda x e^x + \mu e^x \ .$$

Nu de inhomogene vergelijking. Als $y(x) = ax^2e^x$, dan $y'' - 2y' + y = 2ae^x$. Dus $y(x)$ voldoet als $a = 1$. Algemene oplossing:

$$y = \lambda x e^x + \mu e^x + x^2 e^x \ .$$

De gevraagde bijzondere oplossing vinden we als volgt: $y(0) = \mu$, dus $\mu = 1$; $y'(0) = \lambda + \mu$, dus $\lambda = 2$. Gevraagde oplossing:

$$y = 2xe^x + e^x + x^2 e^x \ .$$

2. a) Als $x = \frac{1}{2}$ is de reeks convergent, als $x = -1$ niet gedefinieerd. Als $x \neq \frac{1}{2}, -1$, dan

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{1 - 2x}{1 + x}\right| < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1 - 2x}{1 + x}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow x(x - 2) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2 \ .$$

Evenzo

$$\left|\frac{1-2x}{1+x}\right| > 1 \iff x < 0 \text{ of } x > 2 .$$

De reeks is dus volgens het convergentiecriterium van d'Alembert convergent als $0 < x < 2$ en divergent als $x < 0$ of $x > 2$ $(x \neq -1)$.

Als $x = 0$ staat er de divergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Als $x = 2$ staat er de alternerende reeks $\sum \frac{1}{n} (-1)^n$ die convergent is, omdat de termen in absolute waarde monotoon naar 0 gaan.

Conclusie: de reeks is slechts dan convergent als $0 < x \leq 2$.

b) Als $0 < x < 2$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1-2x}{1+x}\right)^n .$$

Stel $\frac{1-2x}{1+x} = y$, dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} y^n = -\log(1-y) ,$$

dus

$$S(x) = \log\left(1 - \frac{1-2x}{1+x}\right) = \log\left(\frac{1+x}{3x}\right) .$$

3.

$$\begin{array}{llcll} A(1,1,1) & = (2,2,2) & & A(1,1,1) & = (2,2,2) \\ A(1,0,1) & = (1,2,1) & \sim & A(0,-1,0) & = (-1,0,-1) \sim \\ A(0,2,-1) & = (2,-1,1) & & A(0,2,-1) & = (2,-1,1) \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} & A(1,0,1) = (1,2,1) & & A(1,0,0) = (1,1,0) \\ \sim & A(0,1,0) = (1,0,1) & \sim & A(0,1,0) = (1,0,1) \\ & A(0,0,-1) = (0,-1,-1) & & A(0,0,1) = (0,1,1) . \end{array}$$

De matrix van A is dus

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

De eigenwaarden volgen uit

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 : \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

Dit levert als eigenvectoren:

bij $\lambda = 1$: $\underline{x} = \rho(1,0,-1)$

bij $\lambda = -1$: $\underline{x} = \rho(1,-2,1)$

bij $\lambda = 2$: $\underline{x} = \rho(1,1,1)$ (zie het eerste gegeven).

4. a) Stel $\underline{x}_1 = (x_1,y_1,z_1)$ en $\underline{x}_2 = (x_2,y_2,z_2)$, dan

$$A(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = A(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2) =$$

$$= (x_1 + x_2,\ z_1 + z_2,\ y_1 + y_2) = A(\underline{x}_1) + A(\underline{x}_2)$$

en

$$A(\lambda\underline{x}_1) = A(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1) = (\lambda x_1,\lambda z_1,\lambda y_1) = \lambda A(\underline{x}_1) \ .$$

A heeft dus de twee kenmerkende eigenschappen van een lineaire afbeelding.

$$\begin{aligned} A(1,0,0) &= (1,0,0) \\ A(0,1,0) &= (0,0,1) \\ A(0,0,1) &= (0,1,0) \end{aligned} \ , \quad \text{dus} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

b) De werking van A op de basisvectoren (zie a)) suggereert dat A een spiegeling is t.o.v. het vlak $y = z$. Dit bewijzen we als volgt:

(1) Voor een willekeurige vector $\underline{x}_1 = (a,b,b)$ in het vlak $y = z$ geldt: $A\underline{x}_1 = \underline{x}_1$.

(2) Voor een willekeurige vector $\underline{x}_2 = (0,c,-c)$ loodrecht op het vlak $y = z$ geldt: $A\underline{x}_2 = -\underline{x}_2$.

(3) Elke vector $\underline{x}$ in R_3 is te ontbinden als $\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2$ met $\underline{x}_1$ in het vlak $y = z$ en $\underline{x}_2$ er loodrecht op. Dan geldt: $A\underline{x} = A\underline{x}_1 + A\underline{x}_2 = \underline{x}_1 - \underline{x}_2$. Dit betekent dat A een spiegeling is t.o.v. het vlak $y = z$.

5. Een lijn door de top

(*) $\quad x = \lambda u\ , \quad y = \lambda v\ , \quad z = 1 + \lambda w$

snijdt de richtkromme in een punt S als

$$\lambda_S^2\ uv = 1 \quad \text{en} \quad \lambda_S(u + v + w) = 1\ .$$

Dus moeten u, v en w voldoen aan de (homogene!) vergelijking

$$uv = (u + v + w)^2\ .$$

Dit betekent (zie (*)), dat x, y en z van een punt van het oppervlak moeten voldoen aan (λ valt weg)

$$xy = (x + y + z - 1)^2\ .$$

6. a) $\int \sin x \sinh x\, dx = \int \sin x\, d \cosh x = \sin x \cosh x - \int \cosh x\, d \sin x =$

$= \sin x \cosh x - \int \cos x \cosh x\, dx = \sin x \cosh x - \int \cos x\, d \sinh x =$

$= \sin x \cosh x - \cos x \sinh x + \int \sinh x\, d \cos x =$

$= \sin x \cosh x - \cos x \sinh x - \int \sin x \sinh x\, dx\ .$

Dus

$$\int \sin x \sinh x\, dx = \tfrac{1}{2}(\sin x \cosh x - \cos x \sinh x) + C\ .$$

b) $$I_n = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\, x^{n-1}\, d(-x^2) = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty x^{n-1}\, de^{-x^2} =$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left[-\tfrac{1}{2}x^{n-1}\, e^{-x^2}\right]_0^p + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx^{n-1} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\lim_{p\to\infty} p^{n-1}/e^{p^2} + \tfrac{1}{2}0^{n-1}\, e^0 + \tfrac{1}{2}(n - 1)I_{n-2}\ .$$

Hierin is $\lim\limits_{p\to\infty} = 0$ en $0^{n-1} = 0$ (want $n \geq 2$). Dus

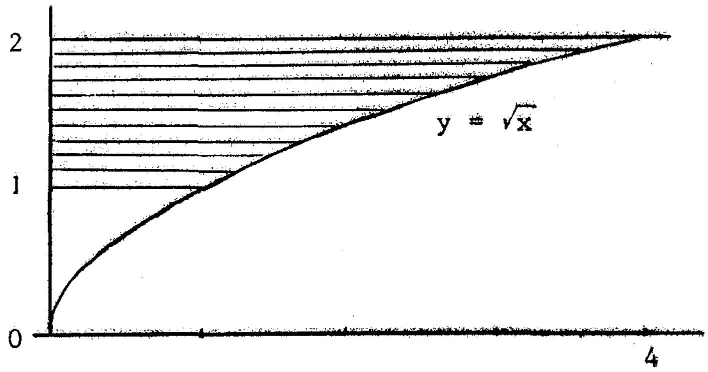
$$I_n = \tfrac{1}{2}(n - 1)I_{n-2} \qquad (n \geq 2)\ .$$

Hieruit volgt:

$$I_3 = I_1 = \int_0^\infty e^{-x^2}\, x\, dx = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\, d(-x^2) = \lim_{p\to\infty}\left[-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^p = \tfrac{1}{2}\ .$$

7. Het gebied G, waarover geïntegreerd wordt, wordt begrensd door de y-as, de rechten $y = 1$ en $y = 2$ en de grafiek van $y = \sqrt{x}$:

$$I = \iint_G \frac{1}{y}\, e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy\ .$$



Om I te bepalen integreren we in horizontale repen:

$$I = \int_1^2 dy \int_0^{y^2} \frac{1}{y}\, e^{\frac{x}{y}}\, dx = \int_1^2 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\, d\,\frac{x}{y} =$$

$$= \int_1^2 dy \left[e^{\frac{x}{y}}\right]_{x=0}^{x=y^2} = \int_1^2 (e^y - 1)dy = e^2 - e - 1\ .$$

Proeftentamen maart 1972

1. Bepaal voor alle reële waarden van α de algemene reële oplossing van de differentiaalvergelijking:

$$y''' + y'' - \alpha^2 y' - \alpha^2 y = 0 \ .$$

2. Gegeven is de differentiaalvergelijking:

$$y''' + y'' + y' + y = 2e^{-x} \ .$$

a) Bepaal de algemene reële oplossing van deze differentiaalvergelijking.

b) Bepaal ook de reële oplossing waarvoor

$$\int_0^\infty y(x)\,dx = 4 \ .$$

3. Bepaal

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos(\frac{1}{3} x\sqrt{3})}{x\{\log(1 + x^2) - \arctan(x^2)\}} \ .$$

4. Geef met behulp van standaardreeksen de eerste drie termen van de machtreeksontwikkeling in x van de functie f gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{\arctan x}{(1 + x^2)e^x} \ .$$

5. Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)\left(\frac{z}{z - 1}\right)^n \ .$$

a) Bepaal alle complexe waarden van z waarvoor deze reeks convergeert en alle complexe waarden van z waarvoor deze reeks divergeert.

b) Bepaal van deze reeks de som voor die reële waarden van z waarvoor de reeks convergeert.

6. Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}) .$$

Onderzoek of deze reeks convergent dan wel divergent is.

Oplossingen Proeftentamen maart 1972

1. Stel $y = e^{tx}$. Karakteristieke vergelijking:

$t^3 + t^2 - \alpha^2 t - \alpha^2 = 0$ of $(t + 1)(t^2 - \alpha^2) = 0$: $t_1 = -1$, $t_2 = +\alpha$, $t_3 = -\alpha$.

Dus de oplossing is:

$$y = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{\alpha x} + \lambda_3 e^{-\alpha x} \quad \text{als } \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1,\ \alpha \neq -1 ;$$

$$y = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 + \lambda_3 x \quad \text{als } \alpha = 0 ;$$

$$y = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 x e^{-x} + \lambda_3 e^{x} \quad \text{als } \alpha = \pm 1 .$$

2. a) Eerst de homogene vergelijking. Stel $y = e^{tx}$. Karakteristieke vergelijking:

$t^3 + t^2 + t + 1 = 0$ of $(t^2 + 1)(t + 1) = 0$: $t_1 = -1$, $t_2 = i$, $t_3 = -i$.

De complexe oplossing

$$y = \lambda e^{-x} + \mu e^{ix} + \nu e^{-ix}$$

levert als reëele oplossing:

$$y = \lambda e^{-x} + \rho \cos x + \sigma \sin x \qquad (\lambda, \rho, \sigma \text{ reëel}).$$

Nu de inhomogene vergelijking. Als $y(x) = cxe^{-x}$, dan $y''' + y'' + y' + y = 2ce^{-x}$. Dus $y(x)$ voldoet als $c = 1$.
De algemene oplossing is dus:

$$y(x) = xe^{-x} + \lambda e^{-x} + \rho \cos x + \sigma \sin x \qquad (\lambda, \rho, \sigma \text{ reëel}).$$

b) $$\int_0^t y(x)dx = -te^{-t} - e^{-t} - \lambda e^{-t} + \rho \sin t - \sigma \cos t + 1 + \lambda + \sigma .$$

Neemt men hierin $t = k\pi$, met $k \to \infty$, dan heeft wel $-te^{-t} - e^{-t} - \lambda e^{-t}$ een limiet (nl. 0), maar $\sigma \cos k\pi = \sigma(-1)^k$ niet, behalve als $\sigma = 0$. Evenzo blijkt met $t = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ dat $\rho = 0$ moet zijn wil

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t y(x)dx$$

bestaan.

M.a.w. alléén als $\rho = \sigma = 0$ bestaat de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty y(x)dx ,$$

en heeft dan de waarde $1 + \lambda$. Uit het gegeven volgt nu $\lambda = 3$. De gevraagde oplossing is dus

$$y = xe^{-x} + 3e^{-x} .$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x \cos \frac{1}{3} x\sqrt{3}}{x\{\log(1 + x^2) - \arctan(x^2)\}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots - x(1 - \frac{\frac{1}{3}x^2}{2!} + \frac{\frac{1}{9}x^4}{4!} + \ldots)}{x(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \ldots - x^2 + \frac{x^6}{3} + \ldots)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{1}{5!} - \frac{1}{9\cdot 4!})x^5 + \text{hogere orde termen}}{-\frac{1}{2}x^5 + \text{hogere orde termen}} = -\frac{1}{135} .$$

4. $$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots .$$

Dus

$$\frac{\arctan x}{1 + x^2} = x + (-\frac{1}{3} - 1)x^3 + (\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1)x^5 + \dots =$$

$$= x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{23}{15}x^5 + \dots$$

en

$$\frac{\arctan x}{(1 + x^2)e^x} = x - x^2 + (\frac{1}{2} - \frac{4}{3})x^3 + \dots = x - x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \dots .$$

5. a) De reeks is niet gedefinieerd als $z = 1$.
Als $z = 0$ is de reeks convergent. Stel $z \neq 0$. Stel $\frac{z}{z - 1} = w$. Daar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n + 2)|w|^{n+1}}{(n + 1)|w|^n} = |w|$$

volgt uit het convergentiecriterium van d'Alembert dat de reeks convergeert voor $|w| < 1$ en divergeert voor $|w| > 1$.
Als $|w| = 1$ dan $|a_n| \to \infty$ als $n \to \infty$, zodat de reeks dan divergeert.
Conclusie: de reeks convergeert slechts als $|w| < 1$, d.w.z. als $|z| < |z - 1|$. Dit is het geval als $\mathrm{Re}\, z < \frac{1}{2}$ (links van de middelloodlijn van $(0,1)$). Ook voor $z = 0$ geldt $\mathrm{Re}\, z < \frac{1}{2}$. Dus de reeks convergeert als $\mathrm{Re}\, z < \frac{1}{2}$, divergeert als $\mathrm{Re}\, z \geq \frac{1}{2}$ en $z \neq 1$, en is niet gedefinieerd als $z = 1$.

b) Stel z is reëel en zodanig dat de reeks convergeert, en $y = \frac{z}{z - 1}$. Als

$$S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)y^n ,$$

dan

$$\int S(y)dy = \sum_{n=0}^{\infty} y^{n+1} + C = y + y^2 + y^3 + \dots + C = \frac{y}{1-y} + C .$$

Er volgt dat

$$S(y) = \frac{1}{(1-y)^2} = (z-1)^2 .$$

6. $$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3!n^3} + \dots$$

dus

$$e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3!n^3} + \dots .$$

$$u_n = \log(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}) = \log(1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3!n^3} + \dots) .$$

Stel $\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3!n^3} + \dots = p$, dan is $0 < p < 1$ en dus geldt voor $u_n = \log(1+p)$:

$$0 < u_n = p - \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} - \dots < p ,$$

dus

$$0 < u_n < \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3!n^3} + \frac{1}{4!n^4} + \dots < \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{8n^2} + \dots = \frac{1}{n^2} .$$

$\sum u_n$ is dus een reeks met positieve termen, waarvoor $u_n < \frac{1}{n^2}$; dus een convergente reeks.

Examen/tentamen juni 1972

1. a) Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y''' - 2y'' + y' = xe^{-x} .$$

Bepaal de oplossing die voldoet aan $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$.

b) Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z - 1)e^{inz} .$$

Onderzoek voor welke complexe waarden van z de reeks convergeert en voor welke complexe waarden van z de reeks divergeert.

---

2. a) Bepaal

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{4}x^2 - \sqrt{1 + \sin x}}{\sinh x - x} .$$

b) In R_3 is gegeven de cirkel

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 . \end{cases}$$

Bepaal de vergelijking van de kegel die het punt (0,0,1) als top en de gegeven cirkel tot richtkromme heeft.
Bepaal daarna a zodanig dat de rechte

$$\underline{x} = (1,2,0) + \mu(-1,2,-1)$$

aan de kegel raakt.

3. a) Bereken

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x\sqrt{1 - x^2}}\, dx .$$

b) Zij G het gebied in het (x,y)-vlak gegeven door

$$x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ en } x + y \leq 1 .$$

Bereken

$$\iint_G \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ .}$$

4. In R_3 is gegeven de vector $\underline{u} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\ (1,1,-1)$.
Zij A de lineaire afbeelding van R_3 in zichzelf, gedefinieerd door

$$A\underline{x} = 2(\underline{u},\underline{x})\underline{u} - \underline{x} \text{ .}$$

a) Bewijs dat A orthogonaal is.
b) Bewijs dat $A^2 = I$ (I is de identieke afbeelding).
c) Bepaal de eigenwaarden van A met bijbehorende eigenvectoren.
d) Bepaal de matrix van A.
e) Geef de meetkundige interpretatie van A.

Oplossingen Tentamen juni 1972

1. a) Eerst de homogene vergelijking $y''' - 2y'' + y' = 0$. Stel $y = e^{tx}$.
Karakteristieke vergelijking:

$$t^3 - 2t^2 + t = 0 \quad \text{of} \quad t(t-1)^2 = 0 \quad \text{met } t_1 = 0,\ t_{2,3} = 1 \text{ .}$$

De algemene oplossing van de homogene vergelijking is dus

$$y = \lambda_1 e^x + \lambda_2 x e^x + \lambda_3 \text{ .}$$

Nu de inhomogene vergelijking. Als $y(x) = (ax + b)e^{-x}$, dan

$$y''' - 2y'' + y' = -4axe^{-x} + (8a - 4b)e^{-x} \text{ .}$$

Dus deze $y(x)$ is een oplossing als $-4a = 1$ en $8a - 4b = 0$, dus als $a = -\frac{1}{4}$ en $b = -\frac{1}{2}$. De algemene oplossing wordt:

$$y = (-\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2})e^{-x} + \lambda_1 e^x + \lambda_2 x e^x + \lambda_3 \text{ .}$$

Voor de bijzondere oplossing moet gelden dat $\lim_{x\to\infty} y(x)$ bestaat en gelijk is aan 1. Dit kan slechts als $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ en $\lambda_3 = 1$:

$$y(x) = (-\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2})e^{-x} + 1 \text{ .}$$

b) De reeks is convergent voor $z = 1$. Als $z \neq 1$ dan geldt:

$$\frac{|z-1|\,|e^{iz(n+1)}|}{|z-1|\,|e^{izn}|} = |e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = e^{-y}$$

wanneer we stellen $z = x + iy$. Volgens het convergentiecriterium van d'Alembert convergeert de reeks als $e^{-y} < 1$ (dus $y > 0$), maar divergeert hij als $e^{-y} > 1$ (dus $y < 0$).
Als $|e^{iz}| = e^{-y} = 1$ en $z \neq 1$, dan $|a_n| = |(z-1)e^{inz}| = |z-1|$, d.w.z. $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, zodat de reeks dan divergeert.
Conclusie: de reeks is slechts dan convergent als $y = \operatorname{Im} z > 0$ of als $z = 1$.

2\. a)

$$e^{\frac{1}{2}x} = 1 + \frac{\frac{1}{2}x}{1!} + \frac{\frac{1}{4}x^2}{2!} + \frac{\frac{1}{8}x^3}{3!} + \ldots ,$$

$$\sqrt{1+\sin x} = [1 + (x - \frac{x^3}{3!} + \ldots)]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots) +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots)^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots)^3 + \ldots ,$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots .$$

Invullen in de uitdrukking in kwestie geeft:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3 + \ldots - \frac{1}{4}x^2 - 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^3 + \ldots + \frac{1}{8}x^2 + \ldots - \frac{3}{48}x^3 + \ldots}{x + \frac{1}{6}x^3 + \ldots - x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\frac{1}{48} + \frac{1}{12} - \frac{3}{48})x^3 + \text{hogere orde termen}}{\frac{1}{6}x^3 + \text{hogere orde termen}} = \frac{1}{4} .$$

(De term $\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots)^3$ in de reeksontwikkeling van $\sqrt{1+\sin x}$ mag niet vergeten worden!!)

2. b) Zij $P = (p,q,r)$ een punt van de richtkromme. Dan

(1) $\quad p^2 + q^2 = a^2$ en

(2) $\quad r = 0$.

Parametervoorstelling van de lijn door P en de top is
$\underline{x} = (0,0,1) + \lambda(p,q,r-1)$. Dit geeft de vergelijkingen:

(3) $\quad x = \lambda p$

(4) $\quad y = \lambda q$

(5) $\quad z = 1 + \lambda(r - 1)$.

Eliminatie van λ, p, q en r uit (1) t/m (5) levert:

$$x^2 + y^2 = a^2(1 - z)^2 .$$

Snijding van de rechte en de kegel geeft:

$$(1 - \mu)^2 + 4(1 + \mu)^2 = a^2(1 + \mu)^2 ,$$

of

$$(a^2 - 5)\mu^2 + 2(a^2 - 3)\mu + a^2 - 5 = 0 .$$

Er zijn twee samenvallende snijpunten als $a^2 \neq 5$ en de discriminant $4(a^2 - 3)^2 - 4(a^2 - 5)^2 = 0$, wat het geval is als $a^2 = 4$. (Als $a = \pm\sqrt{5}$ is de rechte evenwijdig aan een beschrijvende van de kegel zodat er dan één snijpunt is dat geen raakpunt is.)
Conclusie: de rechte raakt aan de kegel als $a = \pm 2$.

3. a) Stel $x = \sin t$, dan

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t - 2\sin t + 1}{\sin t}\, dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2dt + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\, dt =$$

$$= \Big[-\cos t - 2t + \log|\tan \tfrac{1}{2}t| \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi - \log|\tan \frac{\pi}{12}| .$$

$(\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3})$.

b) Ga over op poolcoördinaten. Het grenslijnstuk $x + y = 1$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$ van het gebied G wordt dan:

$$r = \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi} \qquad (0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2})\ ,$$

zodat

$$\iint_G \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}} r\,\frac{1}{r}\,dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sin\varphi\cos\frac{\pi}{4} + \cos\varphi\sin\frac{\pi}{4}}\,d\varphi =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\Big[\log\big|\tan(\tfrac{\varphi}{2} + \tfrac{\pi}{8})\big|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(\log\tan\tfrac{3\pi}{8} - \log\tan\tfrac{\pi}{8}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\log\frac{\tan\frac{3\pi}{8}}{\tan\frac{\pi}{8}}\ .$$

$$(\ = -\sqrt{2}\,\log\tan\tfrac{\pi}{8} = -\sqrt{2}\,\log(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}\,\log(\sqrt{2}+1)\ ).$$

4. a) A is orthogonaal als $(A\underline{x},A\underline{x}) = (\underline{x},\underline{x})$ voor alle $\underline{x}$. Nu is

$$(A\underline{x},A\underline{x}) = (2(\underline{u},\underline{x})\underline{u} - \underline{x},\ 2(\underline{u},\underline{x})\underline{u} - \underline{x}) =$$

$$= 4(\underline{u},\underline{x})^2(\underline{u},\underline{u}) - 2(\underline{u},\underline{x})(\underline{u},\underline{x}) - 2(\underline{u},\underline{x})(\underline{u},\underline{x}) + (\underline{x},\underline{x})\ .$$

Omdat $(\underline{u},\underline{u}) = 1$, staat hier inderdaad $(A\underline{x},A\underline{x}) = (\underline{x},\underline{x})$.

b) $$A^2\underline{x} = A(A\underline{x}) = A(2(\underline{u},\underline{x})\underline{u} - \underline{x}) = 2(\underline{u},2(\underline{u},\underline{x})\underline{u} - \underline{x})\underline{u} - 2(\underline{u},\underline{x})\underline{u} + \underline{x} =$$

$$= 4(\underline{u},\underline{x})(\underline{u},\underline{u})\underline{u} - 2(\underline{u},\underline{x})\underline{u} - 2(\underline{u},\underline{x})\underline{u} + \underline{x} = \underline{x}$$

voor alle $\underline{x}$. Dus inderdaad $A^2 = I$.

4. c) Als de vector $\underline{x}$ niet in het verlengde van $\underline{u}$ ligt, dan kan $A\underline{x} = 2(\underline{u},\underline{x})\underline{u} - \underline{x}$ alleen dan gelijk zijn aan $\lambda\underline{x}$ voor zekere λ als $(\underline{u},\underline{x}) = 0$. In dat geval is $A\underline{x} = -\underline{x}$, dus $\lambda = -1$ is een eigenwaarde voor alle vectoren in het vlak $(\underline{u},\underline{x}) = 0$. Dit vlak heeft als vergelijking $x + y - z = 0$ en als parametervoorstelling $\underline{x} = \rho(1,0,1) + \sigma(0,1,1)$.

Stel nu dat $\underline{x}$ wel in het verlengde van $\underline{u}$ ligt, bijv. $\underline{x} = \tau\underline{u}$. Dan

$$A\underline{x} = A(\tau\underline{u}) = 2(\underline{u},\tau\underline{u})\underline{u} - \tau\underline{u} = 2\tau(\underline{u},\underline{u})\underline{u} - \tau\underline{u} = \tau\underline{u} = \underline{x}\ .$$

Dus $\lambda = 1$ is een eigenwaarde voor alle vectoren langs de as $\underline{x} = \tau\underline{u}$.

d) $A(1,0,0) = 2(\underline{u},(1,0,0))\underline{u} - (1,0,0) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\underline{u} - (1,0,0) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

Analoog:

$$A(0,1,0) = (\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}) \quad \text{en} \quad A(0,0,1) = (-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}),$$

dus

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

e) De as $\underline{x} = \tau\underline{u}$ staat loodrecht op het vlak $(\underline{u},\underline{x}) = 0$. Uit c) is nu in te zien dat A een rotatie is over een hoek π om de as $\underline{x} = \tau\underline{u}$. (Dat A een draaiing moet zijn blijkt ook al uit $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$: A is <u>direct</u> orthogonaal.)

Opmerking: De opgave kan natuurlijk ook worden opgelost door eerst de matrix A uit te rekenen (deel d)), vervolgens te laten zien dat de matrix orthogonaal is (deel a)) en dat $A^2 = I$ (deel b)), om daarna met hulp van de matrix deel c) op te lossen. Deel e) volgt dan net als boven.

Herkansingstentamen juni 1972

1. Bepaal de algemene reële oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' - y = \sinh x \ .$$

2. Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{nx}{x+n}\right)^n \qquad (x \neq -2,-3,-4,\ldots) \ .$$

Onderzoek voor welke reële waarden van x de reeks convergeert en voor welke reële waarden van x de reeks divergeert.

3. Bereken $e^{0,05}$ in 4 decimalen nauwkeurig.

4. Bepaal de vergelijking van het omwentelingsoppervlak dat ontstaat door de rechte

$$\begin{cases} x = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

te wentelen om de y-as.

5. Gegeven is de lineaire afbeelding A van R_3 in zichzelf met matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Bepaal de eigenwaarden van A met bijbehorende eigenvectoren.
b) Bepaal parametervoorstellingen voor de nulruimte en de beeldruimte van A.
c) Bepaal de rang van de matrix.

6. Een ruimtekromme is gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \\ z = t\sqrt{2} \ . \end{cases}$$

Bepaal de lengte van deze kromme tussen de punten die corresponderen met $t = 0$ en $t = 1$.

7. Bepaal het volume van het gebied dat begrensd wordt door het oppervlak $x^2 + y^2 = (z - 1)^2 + 1$ en de vlakken $z = 0$ en $z = 1$.

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1972

1. Los eerst de homogene vergelijking $y'' - y = 0$ op. Stel $y = e^{tx}$. De karakteristieke vergelijking: $t^2 - 1 = 0$ geeft $t = \pm 1$. De algemene oplossing van de homogene vergelijking is dus:

$$y = \lambda e^{x} + \mu e^{-x} .$$

Nu de inhomogene vergelijking $y'' - y = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}$. Als $y(x) = axe^{x} + bxe^{-x}$, dan $y'' - y = 2ae^{x} - 2be^{-x}$, dus $y(x)$ is een oplossing als $a = b = \frac{1}{4}$. Dus de algemene reële oplossing is

$$y = \lambda e^{x} + \mu e^{-x} + \tfrac{1}{2}x \cosh x .$$

2. Daar

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{nx}{x+n}\right|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+x}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right| = |x|$$

volgt uit het convergentiecriterium van Cauchy dat de reeks convergeert voor $|x| < 1$ en divergeert voor $|x| > 1$.

Als $x = 1$ staat er de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ die divergeert daar

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0 .$$

Als $x = -1$ staat er de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-n}{n-1}\right)^n$ die eveneens divergeert daar

$$\left(\frac{-n}{n-1}\right)^n = (-1)^n\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = (-1)^n \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n} ,$$

waarvoor de $\lim\limits_{n\to\infty}$ niet bestaat.

Conclusie: de reeks convergeert als $-1 < x < 1$ en divergeert als $|x| \geq 1$.

3. $$e^{0,05} = 1 + 0,05 + (0,05)^2 \frac{1}{2!} + (0,05)^3 \frac{1}{3!} + \ldots .$$

Afbreken na de derde term geeft als rest:

$$(0,05)^3 \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + (0,05)^4 \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + (0,05)^5 \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \ldots =$$

$$= \frac{(0,05)^3}{1\cdot2\cdot3} (1 + (0,05) \frac{1}{4} + (0,05)^2 \frac{1}{4\cdot5} + \ldots) \leq$$

$$\leq \frac{1}{6} (0,05)^3 (1 + (0,05) \frac{1}{4} + [(0,05) \frac{1}{4}]^2 + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{6} (0,05)^3 \frac{1}{1 - \frac{1}{4}(0,05)} < \frac{125}{6} 10^{-6}\cdot 2 < \tfrac{1}{2}\, 10^{-4} .$$

Bereken de som $1 + 0,05 + (0,05)^2 \frac{1}{2!}$ in vijf decimalen:

$$1,000.00 + 0,050.00 + 0,001.25 = 1,05125 .$$

Dit afgerond op 4 decimalen, 1,0513, geeft $e^{0,05}$ in 4 decimalen nauwkeurig.

4. Stel $P = (p,q,r)$ is een punt op de rechte. Dan

(1) $\quad p = 2 \quad$ en

(2) $\quad q + r = 0$.

Het loodvlak op de y-as door P heeft als vergelijking:

(3) $\quad y = q$.

De bol door P met middelpunt O heeft als vergelijking

(4) $\quad x^2 + y^2 + z^2 = p^2 + q^2 + r^2$.

Eliminatie van p, q en r uit (1) t/m (4) levert als vergelijking van het omwentelingsoppervlak:

$$x^2 - y^2 + z^2 = 4 .$$

5. a) De karakteristieke vergelijking

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda = 0$$

levert als eigenwaarden: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$.
Bij $\lambda = 0$ vinden we als eigenvectoren: $\underline{x} = \mu(1,-1,2)$, bij $\lambda = 2$: $\underline{x} = \rho(1,-1,0)$ en bij $\lambda = -2$: $\underline{x} = \sigma(3,5,-4)$.

b) De nulruimte bestaat uit die vectoren $\underline{x}$ waarvoor $A\underline{x} = \underline{0}$. Dat zijn: $\underline{x} = (0,0,0)$ en de eigenvectoren $\underline{x} = \mu(1,-1,2)$, want daarvoor geldt $A\underline{x} = 0\underline{x} = \underline{0}$. Dus $\mu(1,-1,2)$ ($\mu = 0$ is toegelaten) is de nulruimte. Alle eigenvectoren $\underline{x}$ bij $\lambda = 2$ liggen in de beeldruimte: $\underline{x} = A(\frac{1}{2}\underline{x})$, dus $\underline{x}$ is beeld van $\frac{1}{2}\underline{x}$. Evenzo alle eigenvectoren bij $\lambda = -2$. Dus

$$\underline{x} = \rho(1,-1,0) + \sigma(3,5,-4)$$

is de beeldruimte (dimensie = 2).

c) De rang van de matrix = de dimensie van de beeldruimte = 2.

6. Er geldt dat

$$\dot{x} = \cos t - t \sin t \;, \quad \dot{y} = \sin t + t \cos t \quad \text{en} \quad \dot{z} = \sqrt{2}\,.$$

Hieruit volgt dat de lengte ℓ gelijk is aan:

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{t^2+3}\, dt = \Big[t\sqrt{t^2+3}\Big]_0^1 -$$

$$- \int_0^1 t\, d(\sqrt{t^2+3}) = 2 - \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}\, dt = 2 - \int_0^1 \frac{t^2+3}{\sqrt{t^2+3}}\, dt +$$

$$+ 3\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}} = 2 - \int_0^1 \sqrt{t^2+3}\, dt + 3\Big[\log\left|t + \sqrt{t^2+3}\right|\Big]_0^1 =$$

$$= 2 - \int_0^1 \sqrt{t^2+3}\, dt + 3(\log 3 - \log\sqrt{3}) =$$

$$= 2 + \frac{3}{2}\log 3 - \int_0^1 \sqrt{t^2 + 3}\, dt .$$

Dus

$$2\ell = 2\int_0^1 \sqrt{t^2 + 3}\, dt = 2 + \frac{3}{2}\log 3 \quad \text{en} \quad \ell = 1 + \frac{3}{4}\log 3 .$$

Opmerking. De standaardsubstitutie $t = \sqrt{3}\tan\varphi$ is hier nogal bewerkelijk.

7. Stel $0 \le h < h + \Delta h \le 1$. Het deel van het gevraagde volume tussen $z = h$ en $z = h + \Delta h$ (het volume van een "plakje" met dikte Δh evenwijdig aan het x,y-vlak) is $\pi((h - 1)^2 + 1)\Delta h$. Het gevraagde volume is dus

$$\pi \int_0^1 ((h - 1)^2 + 1)dh = \pi\left[\frac{1}{3}(h - 1)^3 + h\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi .$$

Examen/tentamen januari 1973.

1. a) Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' + y = 3x^2 + \sin x \ .$$

b) Bereken

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\cos x - \sqrt{1 - x^2}} \ .$$

2. a) Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-nx} \arctan \frac{1}{n} \ .$$

Bepaal alle reële waarden van x waarvoor deze reeks convergeert respectievelijk divergeert.

b) Bepaal de convergentiestraal van de complexe machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \ z^n}{(1+i)(1+2i) \ \ldots \ (1+ni)} \ .$$

3. a) Bereken

$$\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} \, dx \ .$$

b) Bereken het volume van het lichaam bepaald door

$$x^2 \le z \le 8 - x^2 - 2y^2 \ .$$

4. In R_3 is gegeven de vector $\underline{r} = (1,2,2)$.
Zij A de lineaire afbeelding van R_3 in zichzelf, gedefinieerd door

$$A\underline{x} = \frac{1}{9} (\underline{x},\underline{r})\underline{r} \ .$$

a) Bewijs dat $A^2 = A$.

b) Bepaal de eigenwaarden van A met de bijbehorende eigenvectoren.

c) Bepaal de matrix van A.

Zij B een draaiing over π radialen om de as $\underline{x} = \alpha(4,-1,-1)$.

d) Bepaal de eigenwaarden van de lineaire afbeelding AB met de bijbehorende eigenvectoren.

Oplossingen Tentamen januari 1973.

1. a) $$y'' + y = 3x^2 + \sin x \qquad (1)$$

is een lineaire, inhomogene DV. Te bepalen dus: van

$$y'' + y = 0 \qquad (2)$$

de algemene oplossing en van (1) een particuliere.

i) De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 1 = 0$, met wortels $\lambda = \pm i$. Dus e^{ix} en e^{-ix} zijn onafhankelijke oplossingen van (2); hun lineaire combinaties

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x \quad \text{en} \quad \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$$

zijn onafhankelijke reële oplossingen van (2).
De algemene reële oplossing is dus:

$$y(x) = A \cos x + B \sin x \quad \text{met } A \text{ en } B \text{ reëel.}$$

ii) Kennelijk is $y_1 + y_2$ een particuliere oplossing van (1) als

$$y_1 \text{ voldoet aan } y'' + y = 3x^2 \qquad (3)$$

$$y_2 \text{ voldoet aan } y'' + y = \sin x\,. \qquad (4)$$

In (3) proberen we $y = ax^2 + bx + c$:

$$ax^2 + bx + c + 2a = 3x^2 \quad \text{voor alle } x\,,$$

dus $a = 3$, $b = 0$, $c = -6$; $y_1 = 3x^2 - 6$ voldoet.
In (4) proberen we $y = px \cos x + qx \sin x$:

$$-2p \sin x + 2q \cos x = \sin x \quad \text{voor alle } x\,,$$

dus $q = 0$ en $p = -\frac{1}{2}$; $y_2 = -\frac{1}{2}x \cos x$ voldoet.

iii) Combinatie geeft de algemene oplossing van (1):

$$y(x) = 3x^2 - 6 - \tfrac{1}{2}x \cos x + A \cos x + B \sin x\ , \qquad A \text{ en } B \text{ reëel.}$$

b) Blijkbaar hebben teller en noemer beide de limiet 0. Met behulp van de standaardreeksen kan de limiet bepaald worden.

$$e^{x^2} - 1 - x^2 = \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots \qquad \text{(alle } x\text{)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad \text{(alle } x\text{)}$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 + \ldots \qquad (|x| < 1)\ .$$

Dit geeft

$$\cos x - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}x^4 + x^6 \cdot g(x)\ ,$$

waarin $g(x)$ een voor $|x| < 1$ convergente machtreeks is.

Evenzo bepaalt $e^{x^2} - 1 - x^2 = \frac{1}{2}x^4 + x^6 \cdot h(x)$ een voor alle x convergente machtreeks $h(x)$.

Hiermee is, voor x voldoende dicht bij 0 (maar $\neq 0$), gedefinieerd:

$$f(x) = \frac{\frac{x^4}{2} + x^6\ h(x)}{\frac{1}{6}x^4 + x^6\ g(x)} = \frac{\frac{1}{2} + x^2\ h(x)}{\frac{1}{6} + x^2\ g(x)}\ .$$

Dit geeft

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{\frac{1}{2} + 0 \cdot h(0)}{\frac{1}{6} + 0 \cdot g(0)} = 3\ .$$

We maken hier gebruik van $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$ en $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = h(0)$, dus van de continuïteit van g en h voor $x = 0$.

2\. a) $$a_n(x) := (-1)^n\ e^{-nx} \arctan \frac{1}{n} \qquad \text{(alle } x\text{; } n \text{ een natuurlijk getal).}$$

i) Voor $x > 0$ geldt wegens $0 < \arctan \frac{1}{n} \leq \frac{\pi}{4} < 1$:

$$|a_n(x)| \leq e^{-nx} \quad \text{met } 0 < e^{-x} < 1\ .$$

Volgens de vergelijkingstelling is $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ dus voor alle $x > 0$ convergent en $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ dus ook.

ii) Voor $x = 0$ geldt $a_n(0) = (-1)^n \arctan \frac{1}{n}$. Wegens $\arctan \frac{1}{n} > 0$ is de reeks alternerend. Bovendien daalt de rij $\arctan \frac{1}{n}$, $n = 1,2,3,\ldots$ monotoon met limiet 0.
Dus (stelling van Leibniz): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)$ convergeert.

Opmerking. Door vergelijking van $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n}$ met $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is in te zien dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)$ niet absoluut convergeert.

iii) Bij $x < 0$ schrijven we

$$a_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{-nx} \frac{\arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} (-x) .$$

Hierin is x vast, terwijl we $n \to \infty$ laten gaan.
Noem $-nx = u > 0$, dan is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-nx}}{-nx} = \lim_{u\to\infty} \frac{e^u}{u} = \infty ;$$

Verder is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 , \quad \text{dus} \quad \lim_{n\to\infty} |a_n(x)| = \infty ,$$

d.w.z. de algemene term nadert niet tot 0.
Voor $x < 0$ is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ dus divergent.

b) $$\frac{(n+1)!\ |z|^{n+1}}{|1+i|\cdot|1+2i|\cdot\ldots\cdot|1+(n+1)i|} \; \frac{|1+i|\cdot|1+2i|\cdot\ldots\cdot|1+ni|}{n!\ |z|^n} =$$

$$= \frac{(n+1)|z|}{|1+(n+1)i|} = \frac{n+1}{\sqrt{1+(n+1)^2}} |z| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2}+1}} |z| .$$

Dus

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2} + 1}} |z| = |z| .$$

Volgens het convergentiecriterium van d'Alembert is de gegeven reeks dus absoluut convergent voor $|z| < 1$ en divergent voor $|z| > 1$.
De convergentiestraal is dus 1.

3. a) Noem de gevraagde (n.b. eigenlijke) integraal J:

$$J = 3 \int_3^6 \frac{\sqrt{(\frac{x}{3})^2 - 1}}{x}\, dx = 3 \int_1^2 \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u}\, du .$$

Voer de standaardsubstitutie $u = \frac{1}{\cos\varphi}$ uit. Dan geldt $\frac{1}{2} \le \cos\varphi \le 1$, zodat we voor φ het interval $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$ nemen.
Voor $u = 1$ is $\varphi = 0$, voor $u = 2$ is $\varphi = \frac{\pi}{3}$ en $\frac{du}{d\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$. Dus

$$J = 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{1 - \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}} \cos\varphi \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\, d\varphi ,$$

omdat voor $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$: $\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sin\varphi$ en $\sqrt{\cos^2\varphi} = \cos\varphi$.

$$J = 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2\varphi\, d\varphi = 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 3 \tan\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - 3\,\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3} - \pi .$$

b) Noem het lichaam L; dan is gevraagd

$$\iiint_L dx\, dy\, dz .$$

Bij elk paar x,y waarvoor $x^2 \le 8 - x^2 - 2y^2$, dus $x^2 + y^2 \le 4$, heeft men (x,y,z) met $x^2 \le z \le 8 - x^2 - 2y^2$. Dat wil zeggen: de projectie van L op het vlak $z = 0$ is de cirkelschijf $\begin{cases} z = 0 \\ z^2 + y^2 \le 4 \,. \end{cases}$

We gaan over op cylindercoördinaten (r,φ,z). Daarin wordt L beschreven door de ongelijkheden

$$0 \le r \le 2\,,$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi\,,$$
$$r^2\cos^2\varphi \le z \le 8 - r^2(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi)$$

$$\iiint\limits_L dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\,dr \int_{r^2\cos^2\varphi}^{8-r^2(\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi)} dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (8-2r^2)r\,dr = 2\pi(16 - \tfrac{1}{2}\cdot 16) = 16\pi\,.$$

4. a) De afbeelding A projecteert $\underline{x}$ op $\underline{r}$, want de verschilvector $\underline{x} - \frac{1}{9}(\underline{x},\underline{r})\underline{r}$ is $\perp \underline{r}$: $(\underline{x},\underline{r}) - \frac{1}{9}(\underline{x},\underline{r})(\underline{r},\underline{r}) = 0$ wegens $(\underline{r},\underline{r}) = 9$. Meetkundig is dus duidelijk dat $A^2 = A$.

Rekenenderwijs vindt men: $A^2\underline{x} = A(A\underline{x}) = A(\frac{1}{9}(\underline{x},\underline{r})\underline{r}) = \frac{1}{9}(\underline{x},\underline{r})A\underline{r} = \frac{1}{9}(\underline{x},\underline{r})\frac{1}{9}(\underline{r},\underline{r})\underline{r} = \frac{1}{9}(\underline{x},\underline{r})\underline{r} = A\underline{x}$. Dit geldt voor iedere $\underline{x}$ in R_3, dus $A^2 = A$.

b) Zij $\underline{x}$ een eigenvector van A bij de eigenwaarde λ: $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$, d.w.z. $\frac{1}{9}(\underline{x},\underline{r})\underline{r} = \lambda\underline{x}$ $(\underline{x} \ne \underline{0})$.

Er zijn twee mogelijkheden: $\underline{x}$ is voor te stellen door $\rho\underline{r}$ òf $\underline{x}$ en $\underline{r}$ zijn onafhankelijk.

In het laatste geval moet $(\underline{x},\underline{r}) = 0$ en $\lambda = 0$ zijn: elke $\underline{x} \perp \underline{r}$ is eigenvector bij eigenwaarde 0.

In het eerste geval geldt $A\underline{x} = A(\rho\underline{r}) = \rho\underline{r} = \underline{x}$: $\rho\underline{r}$ is eigenvector bij eigenwaarde 1.

Opmerking. Daar A een projectie op $\underline{r}$ is, zijn deze eigenvectoren en hun eigenwaarden ook zeer eenvoudig meetkundig te vinden.

4. c) $$A(1,0,0) = A\underline{e}_1 = \frac{1}{9}(\underline{e}_1,\underline{r})\underline{r} = \frac{1}{9}(1,2,2)\ .$$

Evenzo

$$A(0,1,0) = \frac{2}{9}(1,2,2) = A(0,0,1)\ .$$

De matrix van A heeft de drie beelden als kolommen:

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}\ .$$

d) Men kan ter bepaling van de eigenwaarden en eigenvectoren van AB de matrix van B bepalen, daarna de karakteristieke vergelijking

$$\det(AB - \lambda I) = 0$$

oplossen en tenslotte de eigenvectoren berekenen. Dit is minder omslachtig dan het lijkt want matrix AB blijkt $-A$ te zijn. Maar men kan dit beter meetkundig inzien. Merk op dat $\underline{p} = (4,-1,-1)$ loodrecht op $\underline{r}$ staat. Nu draait AB een vector $\underline{x}$ eerst over π om $\underline{p}$ en projecteert dan op $\underline{r}$. Het resultaat is tegengesteld aan $A\underline{x}$, de direkte projectie van $\underline{x}$ op $\underline{r}$. Dus voor elke $\underline{x} \in R_3$ geldt $AB\underline{x} = -A\underline{x}$. Voor de eigenvectoren betekent dit: AB heeft dezelfde eigenvectoren als A, maar met tegengestelde eigenwaarde:

elke $\underline{x} \perp \underline{r}$ is eigenvector van AB met eigenwaarde 0;
elke $\underline{x} = \rho\underline{r}$ is eigenvector van AB met eigenwaarde -1.

Herkansingstentamen januari 1973.

1. a) Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$$

b) Bereken met behulp van de reeksontwikkeling voor $(1+x)^{\frac{1}{5}}$ de waarde van $\sqrt[5]{1,1}$ in vier decimalen nauwkeurig.

2. Gegeven is de reële reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^n .$$

a) Bepaal de waarden van x waarvoor de reeks convergeert en de waarden van x waarvoor de reeks divergeert.

b) Bereken voor die waarden van x, waarvoor de reeks convergeert, de som van de reeks.

3. Van de lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is gegeven

$$A(1,0,0) = \tfrac{1}{2}(1,-\sqrt{2},1)$$

$$A(1,1,1) = \tfrac{1}{2}(2+\sqrt{2},0,2-\sqrt{2})$$

$$A(2,0,1) = \tfrac{1}{2}(3,-\sqrt{2},3) .$$

a) Bepaal de matrix van A.

b) Bewijs dat A een draaiing is.

c) Bepaal de as en de hoek van draaiing.

4. a) Bepaal de vergelijking van de kegel, die de oorsprong als top heeft en waarvan de richtkromme gegeven wordt door

$$2x^2 + (y-6)^2 + 3z^2 = 36$$
$$y = 2 .$$

b) Bepaal

$$\int \frac{x^3 + 2x + 1}{(x^2+1)^2}\, dx .$$

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1973.

1. a) $$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x \, .$$

Karakteristieke vergelijking: $t^2 - 2t + 2 = 0$; $t = 1 \pm i$.
Reële oplossingen van de homogene vergelijking: $y = \alpha e^x \cos x + \beta e^x \sin x$.
Gezien deze oplossing proberen we als particuliere oplossing:

$$y = e^x(Ax \cos x + Bx \sin x)$$

$$y' = e^x(Ax \cos x + Bx \sin x) + e^x(A \cos x + B \sin x - Ax \sin x + Bx \cos x)$$

$$y'' = e^x(Ax \cos x + Bx \sin x) + 2e^x(A \cos x + B \sin x - Ax \sin x + Bx \cos x) +$$
$$+ e^x(- 2A \sin x + 2B \cos x - Ax \cos x - Bx \sin x) \, .$$

Substitutie levert: $A = -\frac{1}{2}$ en $B = 0$.
De algemene reële oplossing is dus:

$$y = -\tfrac{1}{2} x e^x \cos x + \alpha e^x \cos x + \beta e^x \sin x \quad (\alpha \text{ en } \beta \text{ reëel}).$$

b) $$(1+x)^{\frac{1}{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{5}}{n} x^n \quad \text{voor } |x| < 1 \, .$$

$x = 0{,}1$ invullen:

$$\sqrt[5]{1{,}1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{5}}{0} (0{,}1)^n =$$

$$= 1 + \frac{1}{5}\, 0{,}1 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right) \frac{0{,}1^2}{2!} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\left(\frac{1}{5} - 2\right) \frac{0{,}1^3}{3!} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{5}\,\frac{1}{10} - \frac{1.4}{5^2}\,\frac{0{,}01}{2!} + \frac{1.4.9}{5^3}\,\frac{0{,}001}{3!} + \ldots \, .$$

De reeks is alternerend vanaf de tweede term en de termen zijn in absolute waarde monotoon dalend:

$$|u_n| = \frac{4.9 \ldots (4 + 5(n-2))}{5^n \; n!} \left(\frac{1}{10}\right)^n \, , \qquad n \geq 2 \, ,$$

dus

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{5n - 1}{5n + 5}\,\frac{1}{10} < 1 \, .$$

We zien dat $\dfrac{1.4.9}{5^3.3!}\, 10^{-3} < \dfrac{1}{2}\, 10^{-4}$; dus we kunnen volstaan met de eerste drie termen:

$$1 + \frac{1}{5}\,\frac{1}{10} - \frac{4}{5^2}\,\frac{0{,}01}{2!} = 1{,}0192 .$$

2. Stel in $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^n$: $y = \frac{x+1}{x+2}$; $u_n = \frac{n+1}{n} y^n$.

a) $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{n+2}{n+1}\,\frac{n}{n+1}\,y\right| ,$$

dus $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |y|$, waaruit volgt:

absolute convergentie voor $|y| < 1$,
divergentie voor $|y| > 1$.
Als $|y| = 1$ is $|u_n| = \frac{n+1}{n} > 1$, zodat niet geldt: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. De reeks divergeert dus ook voor $|y| = 1$.
De reeks convergeert blijkbaar alleen voor die waarden van x, waarvoor $|x+1| < |x+2|$, d.w.z. voor $x > -\frac{3}{2}$.

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} y^n = \sum_{n=1}^{\infty} y^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \frac{y}{1-y} - \log(1-y)$$

(alle reeksen convergeren voor $|y| < 1$).
Substitueer $y = \frac{x+1}{x+2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^n = x + 1 + \log(x+2) \qquad \text{voor } x > -\frac{3}{2} .$$

3. a) $$\left.\begin{array}{l} (1,0,0) \to (\frac{1}{2}\,, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,, \frac{1}{2} \\ (1,1,1) \to (1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,, 0\,, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) \\ (2,0,1) \to (\frac{3}{2}\,, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,, \frac{3}{2}) \end{array}\right\} \text{ is gelijkwaardig met}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1,0,0) \to (\frac{1}{2}\,, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,, \frac{1}{2}) \\ (0,1,1) \to (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,, \frac{1}{2}\sqrt{2}\,, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}) \\ (0,0,1) \to (\frac{1}{2}\,, \frac{1}{2}\sqrt{2}\,, \frac{1}{2}) \end{array}\right\} \text{ en met}$$

$$(1,0,0) \to (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \tfrac{1}{2})$$
$$(0,1,0) \to (\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2})$$
$$(0,0,1) \to (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \tfrac{1}{2})$$

dus A heeft de matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) De kolommen van de matrix van A staan loodrecht op elkaar en hebben lengte 1. Dus A is orthogonaal. Bovendien: det A = 1. A is dus een draaiing.

c) We zoeken een eigenvector met eigenwaarde 1:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & -2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dus de as is: $\sigma(1,0,1)$.
De vector $(0,1,0)$ staat loodrecht op de as en heeft als beeld: $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$. De draaiingshoek is dus $\frac{\pi}{2}$.

4. a) Elk punt op de kegel is weer te geven door $\underline{x} = \lambda(u,v,w)$ waarbij:

$$\left.\begin{array}{l} 2u^2 + (v-6)^2 + 3w^2 = 36 \\ v = 2 \end{array}\right\}$$

$$x = \lambda u, \quad y = \lambda v, \quad z = \lambda w.$$

We elimineren u, v, w en λ: zet $u = \frac{x}{\lambda}$, $v = \frac{y}{\lambda}$, $w = \frac{z}{\lambda}$ in de bovenste twee vergelijkingen:

$$2\frac{x^2}{\lambda^2} + (\frac{y}{\lambda} - 6)^2 + 3\frac{z^2}{\lambda^2} = 36, \quad \frac{y}{\lambda} = 2;$$

Vul $\lambda = \frac{1}{2}y$ in de eerste vergelijking in:

$$2x^2 + (y-3y)^2 + 3z^2 = 36\ \tfrac{1}{4}y^2\ .$$

De vergelijking van de kegel is dus: $2x^2 - 5y^2 + 3z^2 = 0$.

b) $$\frac{x^3+2x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$x^3 + 2x + 1 = (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D$ geeft $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 1$.

$$\int \frac{x^3+2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\log(x^2+1) - \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\log(x^2+1) - \tfrac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} + \tfrac{1}{2}\arctan x + \tfrac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + C\ .$$

Proeftentamen maart 1973.

1. Bepaal de algemene reële oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 2y' + 2y = 5\sin x\ .$$

2. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$y''' - (2k+1)y'' + (2k+1)y' - y = 0\ .$$

Bepaal voor alle reële waarden van k de algemene reële oplossing.

3. Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2+x^3} - \cosh x}{\sin x - \arctan x}\ .$$

4. Bereken sinh 2 in twee decimalen nauwkeurig.

5. Beschouw de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)}{n!} x^n$.

a) Voor welke reële waarden van x convergeert deze reeks?

b) Bepaal de som van de reeks voor die waarden van x waarvoor de reeks convergeert.

6. Voor welke reële waarden van p convergeert de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^p}\ .$$

7. Bepaal alle complexe waarden van z waarvoor de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3^n + (-2)^n)e^{inz}$$

convergeert.

Oplossingen Proeftentamen maart 1973.

1. De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$; de wortels $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$ bepalen de reële oplossingen $e^x \cos x$ en $e^x \sin x$; dit geeft

$$y_{hom} = e^x(A\cos x + B\sin x)\ , \quad A \text{ en } B \text{ reëel.}$$

We zoeken nu een particuliere oplossing van de gedaante $y = p\sin x + q\cos x$.
Invullen geeft:

$$(p+2q)\sin x + (q-2p)\cos x = 5\sin x \qquad \text{voor alle } x.$$

Dus geldt $p+2q = 5$ en $q = 2p$, waaruit $p = 1$ en $q = 2$.
We vinden als algemene reële oplossing

$$y = e^x(A\cos x + B\sin x) + \sin x + 2\cos x\ , \quad A \text{ en } B \text{ reëel.}$$

2. De karakteristieke vergelijking

$$\lambda^3 - (2k+1)\lambda^2 + (2k+1)\lambda - 1 = 0$$

heeft de wortels

$$\lambda_1 = 1\ , \quad \lambda_2 = k + \sqrt{k^2-1}\ , \quad \lambda_3 = k - \sqrt{k^2-1}\ .$$

Gelijke wortels treden op voor $k = 1$ of $k = -1$.
We vinden de volgende algemene oplossingen

i) $k = 1$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$ $\quad y = (Ax^2 + Bx + C)e^x$

ii) $k = -1$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$ $\quad y = Ae^x + (Bx + C)e^{-x}$

iii) $-1 < k < 1$ $\quad y = Ae^x + e^{kx}(B\sin\sqrt{1-k^2}\,x + C\cos\sqrt{1-k^2}\,x)$

iv) $k^2 > 1$ $\quad y = Ae^x + Be^{(k+\sqrt{k^2-1})x} + Ce^{(k-\sqrt{k^2-1})x}$

A, B en C reëel

3.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2+x^3} - \cosh x}{\sin x - \arctan x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{1}{2}(x^2+x^3) - \frac{1}{8}(x^2+x^3)^2 - \dots - 1 - \frac{1}{2}x^2 - \dots}{x - \frac{x^3}{6} + \dots - x + \frac{x^3}{3} - \dots} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\,x^3 + \text{hogere machten}}{\frac{1}{6}\,x^3 + \text{hogere machten}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + \text{machten van } x}{\frac{1}{6} + \text{machten van } x} = 3\ .$$

4. Er geldt: $\sinh 2 = 2 + \frac{8}{6} + \frac{32}{120} + \frac{128}{5040} + \ldots + \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} + \text{rest}$.

Schat de rest af: $\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{2^{2n+3}}{(2n+3)!} + \ldots <$

$$< \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(1 + \frac{4}{(2n+2)^2} + \frac{4^2}{(2n+2)^4} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{(n+1)^2}}\ .$$

Gevraagd wordt: rest $< \frac{1}{200}$. Dit is bij $n = 3$ nog niet het geval, want $\frac{128}{5040} > \frac{1}{200}$; maar wel bij $n = 4$ blijkens de afschatting: $\frac{512}{5040.72}\,\frac{25}{24} < \frac{1}{200}$.
We vinden dus

$$\sinh 2 = 2 + \frac{8}{6} + \frac{32}{120} + \frac{128}{5040} = 2 + \frac{8192}{5040} = 3{,}63\ .$$

5. $$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n!} + 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = (x+3)e^x\ .$$

Beide reeksen convergeren, zoals bekend is, voor iedere x. Dus ook de gegeven reeks.

6. Met behulp van de zgn. worteltruc vinden we

$$u_n = \frac{4}{n^p(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})} = \frac{4}{n^{p+\frac{1}{2}}(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1-\frac{2}{n}})}\ .$$

Hieruit blijkt $\lim_{n\to\infty} n^{p+\frac{1}{2}}\,u_n = 2$.

Voor $p > \frac{1}{2}$ vinden we: o.d.d. is $u_n < 3\,\frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$, dus convergentie voor $p > \frac{1}{2}$.

Voor $p \leq \frac{1}{2}$ geldt o.d.d. $u_n > \frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$, dus divergentie voor $p \leq \frac{1}{2}$.

7. $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{3^n + (-2)^n}\, e^{ix-y} = \frac{3 - 2(\frac{-2}{3})^n}{1 + (\frac{-2}{3})^n}\, e^{ix-y}$$

en dus geldt

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |3e^{ix-y}| = 3e^{-y} .$$

Dus convergentie voor $3e^{-y} < 1$, d.i. voor $y = \mathrm{Im}\, z > \log 3$;
en divergentie voor $y = \mathrm{Im}\, z < \log 3$.

Voor $y = \log 3$ is

$$u_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^n}\, e^{inx} , \quad \text{dus} \quad |u_n| = 1 + (-\tfrac{2}{3})^n .$$

Blijkbaar geldt niet: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$; dus divergentie.

Samengevat: convergentie voor $\mathrm{Im}\, z > \log 3$,
divergentie voor $\mathrm{Im}\, z \leq \log 3$.

Examen/tentamen juni 1973.

1. a) Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y''' + 2y'' + 5y' = 12e^x + 15x^2 + 16x - 2 .$$

b) Onderzoek of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{n^2} \left(e^{\frac{1}{n^3}} - 1\right)$$

convergeert.

---

2. a) Bepaal de Taylorreeks van log x rond x = 2.
Als we aannemen dat log 2 voldoende nauwkeurig bekend is, hoeveel termen van de reeks moeten dan tenminste nog worden berekend om log 2,1 in 4 decimalen nauwkeurig te berekenen?

b) Gegeven zijn het oppervlak S: $x^2 - y^2 = z^2 - 2z$
en het vlak V: $x + y + z = 1$.
Bepaal, in parametervoorstelling, de rechten op S die evenwijdig zijn met V.

3. a) Bepaal $\int \frac{3x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 - 2}\, dx$.

b) S is dat deel van het oppervlak $z = 4 - x^2 - y^2$ dat ligt binnen de bol $x^2 + y^2 + z^2 - 10z + 20 = 0$.
Bereken de oppervlakte van S.

4. In R_3 is gegeven het vlak V met vergelijking $(\underline{a},\underline{x}) = 0$, waarin $\underline{a} = \frac{1}{3}(1,2,2)$.
a) Bepaal voor iedere $\underline{x}$ in R_3 de loodrechte projectie $P\underline{x}$ van $\underline{x}$ op het vlak V.
b) Bepaal van de lineaire afbeelding P de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren.

De lineaire afbeelding D is gegeven door de matrix

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} .$$

c) Bewijs dat D een draaiing is en bepaal de draaiingsas en de draaiingshoek.

d) Bewijs dat $D P \underline{x} = \underline{a} \times \underline{x}$ voor iedere $\underline{x}$ in R_3.

<u>Oplossingen Tentamen juni 1973.</u>

1. a) De karakteristieke vergelijking is $t^3 + 2t^2 + 5t = 0$; wortels: $t_1 = 0$, $t_2 = -1 + 2i$, $t_3 = -1 - 2i$. De homogene vergelijking heeft dus tot algemene reële oplossing:

$$y_{hom}(x) = \alpha + e^{-x}(\beta \cos 2x + \gamma \sin 2x) \qquad (\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}) .$$

Om een particuliere oplossing te vinden proberen we:

$$y_{part}(x) = ae^{x} + bx^3 + cx^2 + dx .$$

Een constante is overbodig, omdat die al oplossing is van de homogene vergelijking. Substitutie geeft

$$8a = 12 , \quad 15b = 15 , \quad 10c + 12b = 16 , \quad 5d + 4c + 6b = -2 .$$

De algemene reële oplossing is dus

$$y(x) = e^{-x}(\beta \cos 2x + \gamma \sin 2x) + \frac{3}{2} e^{x} + x^3 + \frac{2}{5} x^2 - \frac{48}{25} x + \alpha$$

$$(\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}) .$$

b) $$u_n = \frac{n^3+1}{n^2} \left(e^{(\frac{1}{n})^3} - 1\right) = \frac{e^{(\frac{1}{n})^3} - 1}{(\frac{1}{n})^3} \, \frac{n^3+1}{n^3} \, \frac{1}{n^2} .$$

In verband met $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 < 2$ volgt dat $0 < u_n < 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{n^2}$ voor alle $n > N_0$. Volgens de vergelijkingsstelling is Σu_n dus convergent.

2. a) We bepalen de Taylorreeks met behulp van de standaardreeks voor $\log(1+t)$:

$$\log x = \log(2 + (x-2)) = \log\{2(1 + \frac{x-2}{2})\} =$$

$$= \log 2 + \log(1 + \frac{x-2}{2}) =$$

$$= \log 2 + t - \frac{t^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{t^n}{n} + \ldots , \quad \text{met} \quad t = \frac{x-2}{2} ;$$

dus

$$\log x = \log 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}(x-2)^2 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \ldots$$

$$(\text{voor } 0 < x < 4) .$$

We moeten van deze reeks na log 2 nog twee termen berekenen:

$$\log 2.1 = \log 2 + \frac{1}{20} - \frac{1}{800} ,$$

want de fout is, gezien het alterneren, kleiner dan de volgende term:

$$\frac{1}{3}\frac{1}{8}(0.1)^3 < \frac{1}{2}10^{-4} .$$

2. b) Op het oppervlak S liggen twee stelsels rechten:
Stelsel I

$$\ell(\alpha) \begin{cases} \alpha(x-y) = z-2 , \\ x + y = \alpha z \end{cases} \qquad \text{met lijn } \ell(\infty) \begin{cases} x - y = 0 , \\ z = 0 . \end{cases}$$

De richtingsvector van zo'n lijn staat loodrecht op de beide normalen der bepalende vlakken; is dus te bepalen met het uitwendig product; we zoeken de gevallen // $x+y+z = 1$, d.w.z. $\perp$ (1,1,1):

n_a: $(\alpha,-\alpha,-1)$	n_a: $(1,-1,0)$
n_b: $(1,1,-\alpha)$	n_b: $(0,0,1)$
$n_a \times n_b$: $(\alpha^2+1 , \alpha^2-1 , 2\alpha)$	$n_a \times n_b$: $(-1,-1,0)$
$\perp$ (1,1,1) als $2\alpha^2 + 2\alpha = 0$	niet $\perp$ (1,1,1)

Dit geeft $\alpha = 0$ of $\alpha = -1$ met de bijbehorende lijnen

$$\ell(0): \lambda(1,-1,0) + (0,0,2) \quad \text{en} \quad \ell(-1): \lambda(1,0,-1) + (0,-1,1) .$$

Nu stelsel II:

$$m(\beta) \begin{cases} \beta(x-y) = z \\ x + y = \beta(z-2) \end{cases} \qquad \text{met lijn } m(\infty) \begin{cases} x - y = 0 , \\ z = 2 . \end{cases}$$

Richting $m(\beta)$: $(\beta^2+1 , \beta^2-1 , 2\beta)$; richting $m(\infty)$: $(-1,-1,0)$.
$\perp$ (1,1,1) als $\beta = 0$ of $\beta = -1$, waarbij men vindt

$$m(0):\ \lambda(+1,-1,0) \qquad \text{en} \qquad m(-1):\ \lambda(1,0,-1) + (0,1,1)\ .$$

3. a) $$\frac{3x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 - 2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2}$$

geeft $A = \frac{6}{5}$, $B = \frac{9}{5}$, $C = -\frac{8}{5}$.

$$\int \frac{3x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 - 2}\,dx = \frac{6}{5}\log|x-1| + \frac{9}{10}\int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 2}\,dx - \frac{17}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} =$$

$$= \frac{6}{5}\log|x-1| + \frac{9}{10}\log|x^2 + 2x + 2| - \frac{17}{5}\arctan(x+1) + C\ .$$

b) We hebben te doen met een bol B: $x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 5$ om $(0,0,5)$ met straal $\sqrt{5}$ en met een om de z-as gewentelde bergparabool, de paraboloïde P: $z = 4 - x^2 - y^2$ met top $(0,0,4)$. Hun snijkromme voldoet, behalve aan de vergelijkingen B en P, ook aan de daaruit afgeleide vergelijking $4 + (z-5)^2 = z + 5$ of uitgewerkt $(z-3)(z-8) = 0$. Nu geeft $z = 8$ kennelijk géén snijpunten; $z = 3$ daarentegen snijdt B en P volgens de cirkel

$$\begin{cases} z = 3 \\ x^2 + y^2 = 1\ . \end{cases}$$

Gevraagd is blijkbaar de oppervlakte van dat deel van P, dat boven de eenheidscirkel in $z = 0$ ligt:

$$\text{Opp.} = \iint_{r\le 1} 1 + z_r^2 + \frac{1}{r^2}\, z^2\ r\,dr\,d\varphi \qquad \text{waarin } z = 4 - r^2\ .$$

Dit geeft

$$\text{Opp.} = \iint_{r\le 1} \sqrt{1 + 4r^2}\ r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr =$$

$$= 2\pi\,\frac{1}{8}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\ d(1 + 4r^2) = \frac{\pi}{6}\,(5\sqrt{5} - 1)\ .$$

4. a) De ontbinding $\underline{x} = \alpha\underline{a} + P\underline{x}$ langs $\underline{a}$ en $\perp$ $\underline{a}$ geeft

$(P\underline{x},\underline{a}) = (\underline{x} - \alpha\underline{a}\,,\underline{a}) = 0$ dus $(\underline{x},\underline{a}) = \alpha(\underline{a},\underline{a}) = \alpha$ en $P\underline{x} = \underline{x} - (\underline{x},\underline{a})\underline{a}$.

b) Meetkundig is duidelijk en narekenen bevestigt dat

$\rho\underline{a}$ $(\rho \neq 0)$: eigenvector is bij eigenwaarde 0,

$\forall_{\underline{x}\in V}$ met uitzondering van $\underline{0}$: eigenvector is bij eigenwaarde 1.

c) $$(D\underline{e}_i, D\underline{e}_j) = \begin{cases} 1 & i = j\,, \\ 0 & i \neq j\,, \end{cases}$$

dus D is orthogonaal en wegens det D = +1, direkt orthogonaal. Dus is D een draaiing (stelling), waarvan de as kan worden bepaald door $D\underline{x} = 1\underline{x}$ op te lossen:

$$\begin{matrix}(-8,-4,\ 8) & & \\ (\ 8,-5,\ 1) & \sim & (\ 0,-1,\ 1) \\ (-4,\ 7,-5) & & (-2,\ 1,0)\end{matrix} \qquad \text{as} = \underline{x} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Dit is een rechte door de vector $\underline{a}$.

Voor het bepalen van de hoek van draaiing nemen we $\underline{b} = (0,1,-1) \perp$ as en vinden daarbij $D\underline{b} = \frac{1}{3}(-4,1,1)$, een vector $\perp$ $\underline{b}$; dus draaiingshoek is $\frac{\pi}{2}$.

Merk op dat $D\underline{b} = \underline{a} \times \underline{b}$.

d) Oplossing 1: Door de matrix van $P = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}8 & -2 & -2\\ -2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$ te bepalen en te berekenen, of

Oplossing 2: $P\underline{x}$ is een vector $\perp$ as van draaiing net als $\underline{b}$; dus

$DP\underline{x} = \underline{a} \times P\underline{x} = \underline{a} \times (\underline{x} - (\underline{x},\underline{a})\underline{a}) = \underline{a} \times \underline{x}$.

Herkansingsexamen juni 1973.

1. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y''' + 6y'' + 13y' = 50 \sin 2x \ .$$

2. Ontwikkel $\cos^2 x$ in een machtreeks rond $\frac{\pi}{4}$ tot en met de term van de vierde graad.

3. Bepaal de vergelijking van het oppervlak dat ontstaat door de rechte $x = \lambda(1,2,3)$ te wentelen om de rechte $\underline{x} = (1,1,1) + \mu(1,2,3)$.

4. In R_3 zijn gegeven de vectoren $\underline{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ en $\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$.
   A is de lineaire afbeelding van R_3 in R_3 gedefinieerd door
   $A\underline{x} = (\underline{x},\underline{a})\underline{a} - (\underline{x},\underline{b})\underline{b}$.
   a) Bewijs dat $\underline{a}$ een eigenvector is van A en bepaal de bijbehorende eigenwaarde.
   b) Bepaal de overige eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren.
   c) Bepaal de nulruimte van A.
   d) Bepaal de beeldruimte van A.
   e) Geef een meetkundige interpretatie van de lineaire afbeelding.

5. Gegeven zijn de reële getallen a en b met $0 < a < b$.
   Bereken de inhoud van het lichaam bepaald door de volgende ongelijkheden:

$$a^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le b^2$$
$$x^2 + y^2 \le z^2$$
$$z \ge 0 \ .$$

6. Gegeven is de kromme met parametervoorstelling

$$\begin{cases} x(t) = t \cos t \\ y(t) = t \sin t \end{cases} \qquad (0 \le t \le \tfrac{\pi}{2}) \ .$$

   Bereken de lengte van deze kromme.

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1973.

1. De karakteristieke vergelijking is $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 13\lambda = 0$; wortels: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3+2i$, $\lambda_3 = -3-2i$. De homogene differentiaalvergelijking heeft dus de reële oplossingen

$$y = A + Be^{-3x}\sin 2x + Ce^{-3x}\cos 2x \quad \text{met A, B en C reëel.}$$

Om een particuliere oplossing te vinden proberen we $y = A\sin 2x + B\cos 2x$. Substitutie leidt tot de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{r} -24A - 18B = 50 \\ 18A - 24B = 0 \end{array}\right\} \text{ waaruit: } A = -\frac{4}{3} \text{ en } B = -1\,.$$

De algemene reële oplosssing is dus

$$y = -\frac{4}{3}\sin 2x - \cos 2x + A + Be^{-3x}\sin 2x + Ce^{-3x}\cos 2x$$

$$(A,B,C \in \mathbb{R})\,.$$

2. 1e manier: werk naar een standaardreeks toe.
$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$. Om een ontwikkeling in machten van $x - \frac{\pi}{4}$ te krijgen stellen we $x - \frac{\pi}{4} = y$, dan is $x = y + \frac{\pi}{4}$ en

$$\cos 2x = \cos(2y + \frac{\pi}{2}) = -\sin 2y = -2y + \frac{(2y)^3}{3!} - \frac{(2y)^5}{5!} + \dots\,.$$

Dus

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} - y + 0.y^2 + \frac{2}{3}y^3 + 0.y^4 + \dots \quad \text{met } y = x - \frac{\pi}{4}\,.$$

2e manier: ontwikkeling rond $x = \frac{\pi}{4}$ volgens Taylor.

$$\cos^2 x = (\cos^2 x)_{x=\frac{\pi}{4}} + (\cos^2 x)'_{x=\frac{\pi}{4}}(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{(\cos^2 x)''_{x=\frac{\pi}{4}}}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2 +$$

$$+ \frac{(\cos^2 x)'''_{x=\frac{\pi}{4}}}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3 + \frac{(\cos^2 x)''''_{x=\frac{\pi}{4}}}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4 + \dots$$

$\cos^2 x$ $\qquad\qquad (\cos^2 x)_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$

$(\cos^2 x)' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$ $\qquad (-\sin 2x)_{x=\frac{\pi}{4}} = -1$

$(\cos^2 x)'' = -2\cos 2x$ $\qquad (-2\cos 2x)_{x=\frac{\pi}{4}} = 0$

$(\cos^2 x)''' = 4\sin 2x$ $\qquad (4\sin 2x)_{x=\frac{\pi}{4}} = 4$

$(\cos^2 x)'''' = 8\cos 2x$ $\qquad (8\cos 2x)_{x=\frac{\pi}{4}} = 0$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} - (x - \frac{\pi}{2}) + \frac{4}{3!}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \ldots .$$

3. Neem op m: $\underline{x} = \lambda(1,2,3)$ een punt $P(\lambda_0, 2\lambda_0, 3\lambda_0)$.
Bij het wentelen van m om ℓ: $\underline{x} = (1,1,1) + \mu(1,2,3)$ doorloopt P in het vlak door $(\lambda_0, 2\lambda_0, 3\lambda_0)$ loodrecht op ℓ een cirkel: de doorsnijding van vlak V: $x + 2y + 3z = \lambda_0 + 4\lambda_0 + 9\lambda_0$ met de bol B: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (\lambda_0 - 1)^2 + (2\lambda_0 - 1)^2 + (3\lambda_0 - 1)^2$.
Eliminatie van λ_0 geeft de vergelijking van het oppervlak:

$$14\{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2\} = (x+2y+3z)^2 - 12(x+2y+3z) + 42$$

of

$$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 - 4xy - 6xz - 12yz - 16x - 4y + 8z = 0 .$$

4. a) Uit $(\underline{a},\underline{b}) = 0$ en $(\underline{a},\underline{a}) = 1$ volgt $A\underline{a} = (\underline{a},\underline{a})\underline{a} - (\underline{a},\underline{b})\underline{b} = \underline{a}$, dus $\underline{a}$ is eigenvector bij eigenwaarde 1.

b) Vector $\underline{b}$ geeft $A\underline{b} = (\underline{b},\underline{a})\underline{a} - (\underline{b},\underline{b})\underline{b} = -\underline{b}$. Verder geldt $A\underline{c} = \underline{0}$ voor een vector $\underline{c}$ met $(\underline{c},\underline{a}) = 0$ en $(\underline{c},\underline{b}) = 0$; neem $\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)$.
De eigenvectoren van A zijn dus
$\mu(1,0,1)$, $\mu \neq 0$, met eigenwaarde 1,
$\rho(1,1,-1)$, $\rho \neq 0$, met eigenwaarde -1,
$\nu(-1,2,1)$, $\nu \neq 0$, met eigenwaarde 0.

c) Uit b) volgt dat de nulruimte bestaat uit de vectoren $\underline{x} = \nu(-1,2,1)$.

d) De beeldruimte is het vlak V opgespannen door $\underline{a}$ en $\underline{b}$; dat is
$-x + 2y + z = 0 \quad (\perp (-1,2,1))$.

4. e) Elke vector $\underline{x} \in R_3$ kan worden uitgedrukt in $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$:

$$\underline{x} = \xi\underline{a} + \eta\underline{b} + \zeta\underline{c} \qquad\qquad \underline{a},\underline{b},\underline{c} \text{ orthonormaal.}$$

Dan wordt $A\underline{x} = \xi\underline{a} - \eta\underline{b}$.
De coördinaten (ξ,η,ζ) gaan dus over in $(\zeta,-\eta,0)$.
De afbeelding A is dus een projectie op het vlak $\zeta = 0$ (door $\underline{a}$ en $\underline{b}$) gevolgd door een spiegeling in het vlak $\eta = 0$ ($\perp \underline{b}$), of omgekeerd.

5. We gaan over op bolcoördinaten:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta\ , \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta\ , \quad z = \rho\cos\theta\ .$$

$$a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2 \text{ wordt } a \le \rho \le b \tag{1}$$

$$x^2+y^2 \le z^2 \quad \text{wordt} \quad \sin^2\theta \le \cos^2\theta \tag{2}$$

$$z \ge 0 \quad \text{wordt} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

Voor ρ, φ en θ vinden we dus de grenzen

$$a \le \rho \le b$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi$$
$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \qquad \text{(uit (2) en (3)).}$$

Het gevraagde volume is dus

$$\int_0^{2\pi}\int_a^b\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \sin\theta \, d\theta\, d\rho\, d\varphi = 2\pi \int_a^b \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\rho =$$

$$= 2\pi \int_a^b \left(-\rho^2\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) d\rho = 2\pi(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) \int_a^b \rho^2\, d\rho =$$

$$= \frac{2}{3}\pi(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2})\rho^3\Big|_a^b = \frac{2}{3}\pi(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2})(b^3-a^3)\ .$$

Opmerking. Dit resultaat is ook gemakkelijk af te leiden uit de inhoud van de bolsector, bekend uit de stereometrie.

6. De lengte van de kromme

$$\begin{cases} x(t) = t\cos t \\ y(t) = t\sin t \end{cases} \qquad (0 \le t \le \tfrac{\pi}{2})$$

is

$$\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt .$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 = 1 + t^2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+t^2}\, dt = t\sqrt{1+t^2}\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+t^2}\, dt + \log(t + \sqrt{1+t^2})\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} .$$

Dus

$$\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{4}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}\right) .$$

Examen/tentamen januari 1974.

1. Bepaal de algemene reële oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y''' - 2y'' + 2y' = e^{ax} + \cos x \qquad (a \text{ reëel}).$$

2. Bepaal van de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(e^{x^2-|x|}\right)^n$$

het convergentiegebied en de som.

3. Bepaal van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right) \frac{x^n}{(-2)^n}$$

het convergentiegebied.

4. Bepaal de vergelijking van de kegel met top (1,0,1) en richtkromme

$$\begin{cases} x = 0 \\ yz = 1 \end{cases}.$$

5. Bereken

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{2x+x^2}} .$$

6. Bepaal de massa van het lichaam met massadichtheid

$$m(x,y,z) = e^{x+y+z} ,$$

dat begrensd wordt door de vlakken

$$z = y - x , \quad z = 0 , \quad x = 0 , \quad y = 1 \quad \text{en} \quad y = 2 .$$

7. Een lineaire afbeelding van R_3 in R_3 wordt gegeven door de matrix

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Toon aan dat deze afbeelding een draaiing is.

b) Bepaal de as en de draaiingshoek.

Oplossingen Tentamen januari 1974.

1. Homogene vergelijking.

Substitutie van e^{tx} geeft de karakteristieke vergelijking $t^3 - 2t^2 + 2t = 0$ met wortels $t_1 = 0$, $t_2 = 1-i$, $t_3 = 1+i$.

De homogene vergelijking heeft dus als reële oplossing:

$$y = \lambda_1 + \lambda_2 e^x \cos x + \lambda_3 e^x \sin x \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ reëel}).$$

Inhomogene vergelijking.

Voor $a \neq 0$ proberen we als particuliere oplossing:

$$y = be^{ax} + c \cos x + d \sin x .$$

Substitutie geeft

$$b = \frac{1}{a^3 - 2a^2 + 2a} , \quad c = \frac{2}{5} , \quad d = \frac{1}{5} .$$

Algemene reële oplossing voor $a \neq 0$:

$$y = \frac{1}{a^3 - 2a^2 + 2a} e^{ax} + \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x + \lambda_1 + \lambda_2 e^x \cos x + \lambda_3 e^x \sin x .$$

Voor $a = 0$ is e^{ax} een oplossing van de homogene vergelijking. Probeer nu als particuliere oplossing:

$$y = bx + c \cos x + d \sin x .$$

Dit geeft als algemene reële oplossing voor $a = 0$:

$$y = \tfrac{1}{2}x + \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x + \lambda_1 + \lambda_2 e^x \cos x + \lambda_3 e^x \sin x .$$

2. Stel $y = e^{x^2-|x|}$ en beschouw $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ny^n$. Pas het criterium van Cauchy toe op de reeks van de absolute waarden:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|ny^n|} = \lim_{n\to\infty} |y| \sqrt[n]{n} = |y| \ .$$

De reeks is absoluut convergent voor $|y| < 1$ en divergent voor $|y| > 1$; in de randpunten $y = \pm 1$ is de reeks eveneens divergent, aangezien de n-de term niet naar nul gaat.
De oorspronkelijke reeks is convergent voor $e^{x^2-|x|} < 1$, dus voor $x^2 - |x| = |x|(|x| - 1) < 0$, d.w.z. het convergentiegebied is $|x| < 1$ met uitzondering van $x = 0$.

Voor $|y| < 1$ geldt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ny^n = y(1 + 2y + 3y^2 + \ldots + ny^{n-1} + \ldots) =$$

$$= y\frac{d}{dy}(1 + y + y^2 + \ldots + y^n + \ldots) =$$

$$= y\frac{d}{dy}\frac{1}{1-y} = \frac{y}{(1-y)^2} \ .$$

Dus

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(e^{x^2-|x|})^n = \frac{e^{x^2-|x|}}{(1 - e^{x^2-|x|})^2} \qquad \text{voor } 0 < |x| < 1 \ .$$

3. $$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{2} \frac{\tan(\frac{1}{n+1})}{\tan(\frac{1}{n})} = \frac{|x|}{2} \ .$$

Volgens het criterium van d'Alembert is de reeks absoluut convergent voor $|x| < 2$ en divergent voor $|x| > 2$.

Randpunten:

$x = 2$: $\sum (-1)^n \tan(\frac{1}{n})$ is alternerend en $\tan \frac{1}{n}$ nadert monotoon tot nul; dus convergentie (relatief).

$x = -2$: $\sum \tan(\frac{1}{n})$ is een reeks met positieve termen, $\tan \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$;
$\sum \frac{1}{n}$ is divergent, dus $\sum \tan(\frac{1}{n})$ ook.

4. $$x = 1 + \lambda(u-1) \;, \quad y = \lambda v \;, \quad z = 1 + \lambda(w-1) \qquad (1)$$

is een beschrijvende door een punt (u,v,w) van de richtkromme:

$$u = 0 \;, \quad vw = 1 \;. \qquad (2)$$

Eliminatie van u, v, w uit (1) en (2) geeft:

$$x = 1 - \lambda \;, \quad \frac{y}{\lambda}\left(1 + \frac{z-1}{\lambda}\right) = 1 \;.$$

Hieruit λ eliminerend vinden we de vergelijking

$$y(z-x) = (x-1)^2 \;.$$

5. $$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{2x+x^2}} = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{(1+x)^2-1}} \;.$$

Stel $x+1 = \dfrac{1}{\cos\varphi}$ en kies $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Dan geldt $0 \le x < \infty$ en $\sqrt{(1+x)^2-1} = |\tan\varphi| = \tan\varphi$ en $dx = \dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi$; dus

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi}{\tan\varphi}\,\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2} \;.$$

Opmerking. De niet-standaard substitutie $1+x = \dfrac{1}{y}$ geeft $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

6. $$\text{Massa} = \iiint_G e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz = \int_1^2 e^y\,dy \int_0^y e^x\,dx \int_0^{y-x} e^z\,dz =$$

$$= \int_1^2 e^y\,dy \int_0^y (e^y - e^x)\,dx = \int_1^2 (ye^{2y} - e^{2y} + e^y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{4}e^4 + \frac{5}{4}e^2 - e \;.$$

7. a) $$AA^T = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dus A is orthogonaal; en wel direkt want

$$\det A = \frac{1}{343}\begin{vmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \frac{343}{343} = 1 .$$

A is dus een draaiing om een as.

b) Bij eigenwaarde $\lambda = 1$ vindt men de eigenvector $\sigma(1,2,3)$; dit is de draaiingsas.

De draaiingshoek kan men bepalen door een vector $\underline{p}$ loodrecht op de as te kiezen en de hoek φ te bepalen tussen $\underline{p}$ en $A\underline{p}$.

Kies bijv. $\underline{p} = (-2,1,0)$, dan is $A\underline{p} = (2,-1,0)$.

Kennelijk is het een draaiing over π (= "spiegeling" t.o.v. de as; elke vector $\perp$ de as is eigenvector met eigenwaarde -1).

Herkansingstentamen januari 1974.

1. Bepaal de algemene reële oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y^{(4)} - y'' = (4x+2)e^x \; .$$

2. Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \arctan x - 2\sin x}{x\sqrt{1+x^2} - x\cos x - x^3} \; .$$

3. Onderzoek de convergentie van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} \left(\frac{x-x^2}{1+x}\right)^n \; , \qquad x \text{ reëel, } x \neq -1 \; .$$

4. Bepaal

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x \log x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx \; .$$

5. Bereken de inhoud van het lichaam in het eerste octant bepaald door

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 1 \leq 2x + 2y + z \; .$$

6. Een lineaire afbeelding is gegeven door de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 7 \\ -3 & -4 & 7 \\ -3 & -5 & 8 \end{pmatrix} .$$

a) Bepaal $A\underline{x} - \underline{x}$ voor $\underline{x} = (x,y,z)$.

b) Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren van A.

c) Bepaal nulruimte en beeldruimte van A.

d) Bepaal de vectoren in het vlak $x = y$, die loodrecht staan op hun beeld.

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1974.

1. Homogene vergelijking: $y^{(4)} - y'' = 0$.

Karakteristieke vergelijking: $\lambda^4 - \lambda^2 = 0$; wortels: $\lambda = 0$ (2-voudig), $\lambda = 1$, $\lambda = -1$.

Algemene reële oplossing van de homogene vergelijking

$$y = \alpha + \beta x + \gamma e^x + \delta e^{-x} \qquad (\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}) .$$

Particuliere oplossing. Stel $y = e^x z$. (Op voorhand: z is een afkorting voor $ax^2 + bx$.) Invullen levert

$$z^{(4)} + 4z^{(3)} + 5z'' + 2z' = 4x + 2 .$$

Deze differentiaalvergelijking heeft een oplossing, waarbij z' van de vorm $z' = 2x + b$ is. Invullen geeft $b = -4$, zodat we als particuliere oplossing $z = x^2 - 4x$ kunnen nemen.

Algemene reële oplossing:

$$y = (x^2 - 4x)e^x + \alpha + \beta x + \gamma e^x + \delta e^{-x} \qquad (\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}) .$$

2. $$x + \arctan x - 2 \sin x = x + \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\right) - 2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{11}{60} x^5 + x^6 y ,$$

$$x\sqrt{1+x^2} - x \cos x - x^3 = x\left(1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + \ldots\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) =$$

$$= -\frac{1}{6} x^5 + x^6 z ,$$

waarin y en z machtreeksen in x voorstellen (continu in $x = 0$).

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \arctan x - 2 \sin x}{x\sqrt{1+x^2} - x \cos x - x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{11 + 60xy}{-10 + 60xz} = -\frac{11}{10} .$$

3. Stel

$$y = \frac{x - x^2}{1 + x} \quad \text{en} \quad u_n(y) = \frac{n + 1}{n^2 + 1} y^n \qquad (n = 1,2,\ldots) .$$

$$\left|\frac{u_{n+1}(y)}{u_n(y)}\right| = \frac{n + 2}{n + 1} \frac{n^2 + 1}{n^2 + 2n + 2} |y| \to |y| \quad \text{als } n \to \infty .$$

Voor $|y| < 1$ is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)$ absoluut convergent. Voor $|y| > 1$ is de reeks divergent.

Randonderzoek: $|y| = 1$.

(1) $y = 1$

$$u_n(1) = \frac{n + 1}{n^2 + 1} \geq \frac{n}{n^2 + 1} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} > 0 \qquad (n \geq 1) .$$

Omdat $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergeert is eveneens $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(1)$ divergent (vgl. stelling).

(2) $y = -1$.

Voor $y = -1$ is de reeks alternerend. Verder is

$$\left|\frac{u_{n+1}(-1)}{u_n(-1)}\right| = \frac{(n + 2)}{(n + 1)^2 + 1} \frac{n^2 + 1}{n + 1} < \frac{(n + 2)n}{(n + 1)^2 + 1} < 1 ,$$

dus een monotone daling. Tenslotte is $\lim_{n\to\infty} |u_n(-1)| = 0$. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(-1)$ is dus (relatief) convergent (Leibniz).

Het convergentiegebied, bepaald door $-1 \leq \frac{x - x^2}{1 + x} < 1$, blijkt te zijn:

$$1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2} . \qquad \text{(N.B. links èn rechts } \leq.)$$

4. $$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x \log x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sqrt{x^2 + 1} \log x \Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + 1}\, dx .$$

Substitutie van $x = \tan \varphi$ geeft

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\tan^2\varphi+1}}{\tan\varphi\,\cos^2\varphi}\,d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2\varphi\,\sin\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi\,\sin\varphi}\,d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin\varphi}+\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= \left(\log(\tan\tfrac{1}{2}\varphi)+\frac{1}{\cos\varphi}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} .$$

Oplossing:

$$I = 3\log\sqrt{3} + \log(\sqrt{2}-1) - 2 + \sqrt{2} . \qquad (\tan\tfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1.)$$

5. De inhoud I is het verschil van twee integralen

$$I = \iint_{G_1} \sqrt{1-4(x^2+y^2)}\,dx\,dy - \iint_{G_2} (1-2x-2y)\,dx\,dy ,$$

met

$$G_1: \begin{array}{l} x \ge 0,\ y \ge 0 \\ x^2+y^2 \le \frac{1}{4} \end{array} , \qquad G_2: \begin{array}{l} x \ge 0,\ y \ge 0 \\ 2x+2y \le 1 \end{array}$$

$$\iint_{G_1} \sqrt{1-4(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} r\sqrt{1-4r^2}\,dr = \frac{1}{24}\pi$$

$$\iint_{G_2} (1-2x-2y)\,dy\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_0^{\frac{1}{2}-y} (1-2x-2y)\,dx = \frac{1}{24} ,$$

zodat

$$I = \frac{1}{24}(\pi-1) .$$

Bij gebruik van de inhoud-formules van ellipsoïde en viervlak is het vraagstuk elementair op te lossen.

6. a) $$A\underline{x} - \underline{x} = (A - I)\underline{x} = (-3x - 5y + 7z\ ,\ -3x - 5y + 7z\ ,\ -3x - 5y + 7z) =$$
$$= (-3x - 5y + 7z)(1,1,1)\ .$$

b) De eigenvectoren moeten voldoen aan $(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$, $\underline{x} \neq \underline{0}$. In verband met a) schrijven we hiervoor

$$(A - \lambda I)\underline{x} = (A - I + I - \lambda I)\underline{x} = (A - I)\underline{x} + (1 - \lambda)\underline{x} =$$
$$= (-3x - 5y + 7z)(1,1,1) + (1 - \lambda)(x,y,z) = (0,0,0)\ .$$

Als (x,y,z) en $(1,1,1)$ onafhankelijk zijn, dan moet $-3x - 5y + 7z = 0$ en $\lambda = 1$ zijn. Hieruit volgen de eigenvectoren $\underline{x} = \alpha(5,-3,0) + \beta(7,0,3)$ $(\underline{x} \neq \underline{0})$ met eigenwaarde 1.
Als $(x,y,z) = \rho(1,1,1)$, $\rho \neq 0$, dan moet $-(\rho,\rho,\rho) + (1 - \lambda)(\rho,\rho,\rho) = (0,0,0)$ zijn. Dus $\underline{x} = \rho(1,1,1)$ zijn de eigenvectoren met eigenwaarde 0.

c) Nulruimte: $\underline{x} = \rho(1,1,1)$, zie b).
Beeldruimte: Neem een willekeurige $\underline{x} \in R_3$, dan is hiervoor te schrijven: $\underline{x} = \xi_1(5,-3,0) + \xi_2(7,0,3) + \xi_3(1,1,1)$ zodat $A\underline{x} = \xi_1(5,-3,0) + \xi_2(7,0,3)$.
Hieruit volgt als parametervoorstelling van de beeldruimte:

$$\underline{x} = \xi_1(5,-3,0) + \xi_2(7,0,3)\ .$$

d) Omdat $(1,1,1)$ tot het vlak $x = y$ behoort, gebruiken we als parametervoorstelling voor dit vlak: $\underline{x} = \alpha(1,1,1) + \beta(0,0,1)$; dan is $A\underline{x} = \beta(7,7,8)$.
Dus $(A\underline{x},\underline{x}) = 22\alpha\beta + 8\beta^2 = 0$.
Hieruit volgt $\beta = 0$ of $\beta = -\frac{11}{4}\alpha$; de gevraagde vectoren zijn dus: $\alpha(1,1,1)$ (triviaal) resp. $\nu(4,4,-7)$.

Proeftentamen maart 1974.

1. Bepaal de begrensde reële oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 6$$

die voldoet aan $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

2. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y''' - 2y'' + 4y' = \sin^2 x \ ,$$

3. Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x + \log(1-x)}{\frac{a}{1+x^2} + x\sin x - 5}$$

voor elke waarde van a.

4. Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n(n-1)}{n!} x^n \ .$$

a) Voor welke reële waarden van x convergeert deze reeks?

b) Bepaal de som van de reeks voor deze waarden van x.

5. Voor welke reële waarden van p is de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n^p}$$

absoluut convergent, relatief convergent dan wel divergent?

6. Bereken door middel van reeksontwikkeling $\sqrt{26}$ in 2 decimalen nauwkeurig.

Oplossingen Proeftentamen maart 1974.

1. Karakteristieke vergelijking $t^4 + 2t^2 + 1 = 0$; wortels $t_{1,2} = i$, $t_{3,4} = -i$; dus $\cos x$, $\sin x$, $x \cos x$, $x \sin x$ zijn onafhankelijke reële oplossingen van de homogene vergelijking.
Aan $y^{(4)} + 2y'' + y = 6$ voldoet $y = 6$. Dus algemene reële oplossing:

$$y = A \cos x + B \sin x + Cx \cos x + Dx \sin x + 6 \, , \quad A,B,C,D \in \mathbb{R} \, .$$

Hieronder komen echter *onbegrensde* oplossingen voor. Want bijv.

$$y(k\pi) = (-1)^k(A + k\pi C) + 6 \, , \quad y(\tfrac{1}{2}\pi + k\pi) = (-1)^k(B + (\tfrac{1}{2} + k)\pi C) + 6$$

en dat geeft bij $k \to \pm\infty$: $|y(k\pi)| \to \infty$ en $|y(\frac{1}{2}\pi + k\pi)| \to \infty$.
Begrensd zijn alleen de oplossingen met $C = 0$ en $D = 0$:

$$y = A \cos x + B \sin x + 6 \, , \quad A, B \text{ reëel.}$$

Hiervoor geldt nl. $|y| \leq |A| + |B| + 6$ voor alle x (hoe groot ook).
Verdere eisen: $y(0) = y(\frac{1}{2}\pi) = 0$. De gevraagde oplossing is dus

$$y = -\,6 \cos x - 6 \sin x + 6 \, .$$

2. De homogene vergelijking heeft als onafhankelijke oplossingen e^{0x}, $e^{(1+i\sqrt{3})x}$, $e^{(1-i\sqrt{3})x}$, dus als algemene reële oplossing

$$y = A + Be^x \cos \sqrt{3}x + Ce^x \sin \sqrt{3}x \, , \quad A, B, C \text{ reëel.}$$

Het rechterlid $\sin^2 x$ is géén eerstegraads uitdrukking in e-machten, maar wordt dit door eenvoudig $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$ te schrijven:

$$y''' - 2y'' + 4y' = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2x \quad (= \tfrac{1}{2}e^{0x} - \tfrac{1}{4}e^{2ix} - \tfrac{1}{4}e^{-2ix}) \, .$$

De homogene vergelijking heeft e^{0x} als oplossing. We proberen daarom $y = ax + b \cos 2x + c \sin 2x$. Dit geeft

$$y''' - 2y'' + 4y' = 4a + (8b + 16c)\cos 2x + 8c \sin 2x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2x \, .$$

Wil dit voor alle x gelden, dan moet $a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{1}{16}$, $c = 0$ zijn. De gevraagde reële oplossingen zijn dus:

$$y = A + Be^x \cos \sqrt{3}x + Ce^x \sin \sqrt{3}x + \frac{x}{8} - \frac{1}{16} \cos 2x \, .$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x + \log(1-x)}{a(1+x^2)^{-1} + x \sin x - 5} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{3}x^3 + (-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3) + x^4 g(x)}{a(1-x^2) + x^2 - 5 + x^4 h(x)},$$

waarin $g(x)$ en $h(x)$ machtreeksen voorstellen (convergent voor $|x| < 1$).
Voor $a \neq 5$ is de limiet kennelijk 0.
Voor $a = 5$ komt er

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x + x^2 g(x)}{-4 + x^2 h(x)} = \frac{1}{8}.$$

4. a) Het criterium van d'Alembert geeft

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} n}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n (n-1)} |x| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2 - 1} |x| = 0 < 1,$$

d.w.z. de reeks is voor elke x convergent.

b) We schrijven de reeks als verschil

$$2x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}.$$

Deze splitsing is toegelaten, want beide reeksen convergeren.
Hun sommen zijn welbekend; zij leiden tot de uitkomst

$$2x\left[\frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots\right] - \left[\frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots\right] =$$

$$= 2x[e^{2x} - 1] - \left[e^{2x} - 1 - \frac{2x}{1!}\right] = (2x-1)e^{2x} + 1.$$

5. De reeks der absolute termen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^p}$ divergeert als $p \le 1$ want

$$\frac{\log n}{n^p} > \frac{1}{n^p} \quad \text{voor } n \ge 3$$

en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ divergeert voor $p \le 1$.

Voor $p > 1$, dus $p = 1 + q$ met $q > 0$, bedenken we dat

$$\frac{\log n}{n^{1+q}} = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}q}} \; \frac{\log n}{n^{\frac{1}{2}q}} < \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}q}} \quad \text{op den duur,}$$

want $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n^{\frac{1}{2}q}} = 0$. Nu is de reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{2}q}}$ convergent, d.w.z. de oorspronkelijke reeks is - absoluut - convergent voor $p > 1$.

Bij de alternerende reeks $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \log n}{n^p}$ onderscheiden we

$p \le 0$: dan is $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n^p} \ne 0$; de reeks divergeert dus;

$0 < p \le 1$: dan gaat $\dfrac{\log n}{n^p}$ naar 0 en wel vanaf zekere N monotoon, immers $\left(\dfrac{\log x}{x^p}\right)' = \dfrac{1 - p \log x}{x^{p+1}}$ en dit wordt negatief zodra $x > e^{1/p}$. Dus $|u_n|$ daalt monotoon zodra $n > e^{1/p}$ (bij $p = \frac{1}{3}$ bijv. is $N = 20$).

Samenvatting: voor $p > 1$ absolute convergentie,
voor $0 < p \le 1$ relatieve convergentie,
voor $p \le 0$ divergentie.

6. $\sqrt{26} = 5(1 + \frac{1}{25})^{\frac{1}{2}} = 5(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{(25)^2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \frac{1}{(25)^3} + \ldots)$.

Deze reeks is (vanaf de tweede term) alternerend en de absolute termen gaan kennelijk monotoon naar 0. De afbreekfout is dus kleiner dan de eerste weggelaten term. Nu is

$$5 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{25^2} = \frac{1}{1000} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} \, .$$

We kunnen dus volstaan met twee termen

$$\sqrt{26} = 5 + \frac{5}{50} = 5{,}10\ldots \, .$$

Tentamen mei 1974.

1. a) Bepaal voor alle reële waarden van a de reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 2ay' + a^2 y = 4e^{2x} .$$

b) Bepaal alle reële waarden van x waarvoor de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{\arctan(\sqrt{n}) - n}$$

convergeert.

---

2. a) Bereken

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(x + \sqrt{x^2+1}) - x}{x^3} .$$

b) Bereken

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} .$$

3. a) Bepaal de vergelijking van de cilinder die de bol $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$ omhult en loodrecht staat op het vlak $x+y+z = 1$.

b) Bepaal het volume van het lichaam dat begrensd wordt door de paraboloïde $z = 2x^2 + 2y^2 + 1$, de cilinder $x^2 + y^2 - x = 0$ en het vlak $z = 0$.

4. Van een lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is de matrix

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 & 2 & w \\ u & -1 & 2 \\ 2 & v & -1 \end{pmatrix} .$$

a) Bepaal α, u, v en w zodanig dat A gespiegeld en orthogonaal is.

b) Bepaal de eigenwaarden van A met de bijbehorende eigenvectoren.

c) Toon aan dat A een spiegeling is en bepaal het spiegelvlak.

Oplossingen Tentamen mei 1974.

1. a) De karakteristieke vergelijking heeft een tweevoudige wortel a.
De algemene reële oplossing van de homogene vergelijking is dus

$$y = Ae^{ax} + Bxe^{ax}, \qquad A \text{ en } B \text{ reëel.}$$

Nu de inhomogene vergelijking. We zoeken een particuliere oplossing door te stellen: $y(x) = e^{2x} \cdot z(x)$. Dit geeft voor z:

$$z'' - 2(a-2)z' + (a-2)^2 z = 4\ .$$

Als $a \neq 2$, dan voldoet $z = 4(a-2)^{-2}$; als $a = 2$, dan $z = 2x^2$.
De algemene reële oplossing voor y is dus

$$\left.\begin{array}{l} \text{als } a \neq 2\text{: } y = Ae^{ax} + Bxe^{ax} + 4(a-2)^{-2}\, e^{2x}, \\ \text{als } a = 2\text{: } y = (A + Bx + 2x^2)e^{2x}, \end{array}\right. \quad A, B \in \mathbb{R}\ .$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |3x+1| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}\arctan\sqrt{n}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\arctan\sqrt{n+1}} = |3x+1|\ ,$$

dus de reeks is divergent voor $|3x+1| > 1$, en absoluut convergent voor $-\frac{2}{3} < x < 0$.

Bij randpunt $x = 0$ zijn alle termen negatief maar in absolute waarde groter dan $\frac{1}{n}$; de reeks is dus divergent.

Bij randpunt $x = -\frac{2}{3}$ is de reeks alternerend, de termen gaan naar nul en hun absolute waarde $(n - \arctan\sqrt{n})^{-1}$ daalt monotoon, want $(x - \arctan\sqrt{x})' > 0$. De reeks is hier relatief convergent.

2. a) De afgeleide van de teller is $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \ldots$.
De teller zelf is nul voor $x = 0$ en heeft dus de machtreeksontwikkeling $-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \ldots$. De limiet is dus $-\frac{1}{6}$.

Anders: $\log(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^4 c(x)) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}x^2)^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^4 c^*(x)$.

2\. b) De oneigenlijke integraal gaat door de substitutie $x = \sin\varphi$ over in een eigenlijke:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\sin^3\varphi}\, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} - \tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\frac{1}{\sin^2\varphi} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} - \tfrac{1}{2}\left.\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sin^2\varphi} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\log\tan\frac{\varphi}{2} - \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\tfrac{1}{2}\log\tan\frac{\pi}{12} + \sqrt{3} \qquad \left(\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}\right).$$

3\. a) De lijn door een punt (p,q,r) loodrecht op het vlak $x+y+z = 1$ heeft als parametervoorstelling $\underline{x} = (p,q,r) + \lambda(1,1,1)$.

De λ's behorende bij de snijpunten met de bol volgen uit

$$(p+\lambda-1)^2 + (q+\lambda+1)^2 + (r+\lambda)^2 = 1 .$$

De lijn is beschrijvende van de cilinder als zij raakt aan de bol, dus als de discriminant van de vierkantsvergelijking in λ nul is:

$$4(p+q+r)^2 - 12((p-1)^2 + (q+1)^2 + r^2 - 1) = 0 .$$

De punten (p,q,r) die hieraan voldoen vormen de gevraagde cilinder. Deze heeft dus de vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 3x + 3y + \frac{3}{2} = 0 .$$

b) Het lichaam heeft tot grondvlak de cirkel $0 \le r \le \cos\varphi$, $z = 0$ (cilinder-coördinaten). De inhoud is dus

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{r=0}^{\cos\varphi} (2r^2+1)r\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{7}{16}\,\pi .$$

4. a) De kolommen zijn onderling loodrecht:

$$\left.\begin{array}{r} -2-u+2v=0 \\ -w+2u-2=0 \\ 2w-2-v=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -u+2v=2 \\ 4u-v=6 \end{array}\right\} 7u = 14 \rightarrow u = v = w = 2\ .$$

De lengte der kolommen moet 1 zijn: $\sqrt{9\alpha^2} = 3|\alpha| = 1$. Dus $\alpha = \pm\frac{1}{3}$. Nu leidt $\alpha = \frac{1}{3}$ tot $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ als beeld van $(1,0,0)$, enz. Kennelijk zou A dan een draaiing zijn (om $(1,1,1)$ over π), d.w.z. $|A| = 1$, een direct orthogonale afbeelding. We moeten dus hebben $\alpha = -\frac{1}{3}$. Nareke-nen geeft inderdaad $|A| = -1$.

b) Omdat A orthogonaal is kunnen de reële eigenwaarden alleen ± 1 zijn. Bij $\lambda = -1$ vinden we als eigenwaarden $\rho(1,1,1)$ met $\rho \neq 0$. Bij $\lambda = 1$ zijn alle vectoren $\neq 0$ uit het vlak $x+y+z = 0$ eigenvector.

c) Dat A een spiegeling is volgt onmiddellijk uit het feit dat het vlak $x+y+z = 0$ punt voor punt op zijn plaats blijft (spiegelvlak) en de vectoren loodrecht op dit vlak overgaan in hun tegengestelde.

Herkansingstentamen juni 1974.

1. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' + y = x^3 + \cos x \ .$$

2. Onderzoek de convergentie van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(\sqrt{n} - \sqrt{n+2}) \ .$$

3. Van een lineaire afbeelding A van R_3 in R_3 is de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

a) Bepaal de eigenwaarden van A met de bijbehorende eigenvectoren.

b) Bepaal de beeldruimte en de nulruimte van A.

4. Gegeven zijn de rechte $\ell: \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ en de rechte m: $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Bepaal de vergelijking van het oppervlak dat wordt gevormd door de rechten die ℓ en m snijden en evenwijdig aan het xOy-vlak zijn.

5. Bereken

$$\int_{3+\sqrt{3}}^{6} \frac{dx}{(4x^2 - 24x + 27)^{3/2}} \ .$$

6. Bereken de oppervlakte van dat deel van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ dat gelegen is buiten de paraboloïde $x^2 + y^2 + z = 16$.

7. Bereken

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

in 4 decimalen nauwkeurig.

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1974.

1. De karakteristieke vergelijking $t^2+1=0$ geeft e^{ix} en e^{-ix} als basis voor de oplossingsruimte van de homogene differentiaalvergelijking. Een reële basis is:

$$\tfrac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) = \cos x\ , \quad \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}) = \sin x\ .$$

Als particuliere oplossing proberen we

$$y = ax^3+bx^2+cx+d+ex\cos x+fx\sin x\ ,$$

$$y' = 3ax^2+2bx+c+e\cos x+f\sin x-ex\sin x+fx\cos x\ ,$$

$$y'' = 6ax+2b-2e\sin x+2f\cos x-ex\cos x-fx\sin x\ .$$

Nu moet voor alle x gelden

$$ax^3+bx^2+(6a+c)x+2b+d-2e\sin x+2f\cos x = x^3+\cos x\ ,$$

dus $a=1$, $b=0$, $6a+c=0$, $2b+d=0$, $-2e=0$, $2f=1$.
De algemene reële oplossing is dus

$$y = x^3-6x+\tfrac{1}{2}x\sin x+\lambda\cos x+\mu\sin x \qquad (\lambda,\ \mu \text{ reëel}).$$

2. De vergelijkingsstelling heeft betrekking op reeksen met positieve termen.
We beschouwen daarom eerst de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ met

$$b_n = \arctan(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) = \arctan\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} > \arctan\frac{1}{\sqrt{n+2}} > \frac{\tfrac{1}{2}}{\sqrt{n+2}}\ .$$

De laatste ongelijkheid volgt uit $\arctan x > \tfrac{1}{2}x$ voor $0<x<1$ $\left(\frac{1}{1+x^2} > \tfrac{1}{2}\right)$.

Nu is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ (dat is $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$) divergent. Dus $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is divergent en de oorspronkelijke reeks dus ook.

3. a) Ter bepaling van de eigenwaarden van de lineaire afbeelding A lossen we de karakteristieke vergelijking $\det(A-\lambda I)=0$ op:

$$-\lambda^3+(1+1+3)\lambda^2-(3-6-3)\lambda+(1.3-2.-3+3.-3)=0\ ,$$

$$\lambda^3-5\lambda^2-6\lambda=0\ ,\quad \lambda_1=0\ ,\quad \lambda_2=6\ ,\quad \lambda_3=-1\ .$$

$$\lambda_1=0\quad \begin{cases} x+2y+3z=0\\ 2x+y+3z=0\end{cases}\qquad \underline{x}=\rho(1,1,-1)$$

$$\lambda_2=-1\quad \begin{cases} 2x+2y+3z=0\\ 3x\qquad\ +4z=0\end{cases}\qquad \underline{x}=\sigma(8,1,-6)$$

$$\lambda_3=6\quad \begin{cases} -5x+2y+3z=0\\ 2x-5y+3z=0\end{cases}\qquad \underline{x}=\tau(1,1,1)$$

b) i. Nulruimte = $\{\underline{x}\mid A\underline{x}=\underline{0}\}$ = de eigenruimte bij eigenwaarde 0.
Dus de nulruimte wordt opgespannen door (1,1,-1).

ii. De eigenvectoren bij eigenwaarde ongelijk 0 liggen in de beeldruimte; de dimensie van de beeldruimte is 2.
Dus de beeldruimte wordt opgespannen door (1,1,1) en (8,1,-6).
(Andere voor de hand liggende basis: (1,2,3), (2,1,0).)

4. Kies een punt op ℓ: $P(\lambda,\lambda,0)$ en een punt op m: $Q(\mu,1-\mu,1)$.
Een parametervoorstelling van de lijn PQ is

$$\underline{x}=(\lambda,\lambda,0)+\rho(\mu-\lambda,1-\mu-\lambda,1)\ .$$

De lijn PQ moet evenwijdig aan het xOz-vlak zijn, d.w.z. de y-coördinaat van de richtingsvector moet 0 zijn: $1-\mu-\lambda=0$. Alle punten (x,y,z) van zulke rechten PQ vormen het oppervlak:

$$\left.\begin{aligned} x&=\lambda+\rho(\mu-\lambda)\\ y&=\lambda+\rho(1-\mu-\lambda)\\ z&=\rho\\ 1-\mu-\lambda&=0\end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned} x&=\lambda+\rho(1-2\lambda)\\ y&=\lambda\\ z&=\rho\ ,\end{aligned}$$

waaruit de vergelijking van het oppervlak volgt:

$$x=y+z(1-2y)\ .$$

5. $$\int_{3+\sqrt{3}}^{6} \frac{dx}{(4x^2 - 24x + 27)^{3/2}} = \frac{1}{8} \int_{3+\sqrt{3}}^{6} \frac{dx}{((x-3)^2 - \frac{9}{4})^{3/2}} \; .$$

Substitueer nu $x - 3 = \frac{3}{2} \cos^{-1} \varphi$; bij $x = 6$ wordt $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; bij $x = 3 + \sqrt{3}$, $\cos \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
De integraal wordt dus

$$\frac{1}{18} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \frac{1}{(\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1)^{3/2}} \, d\varphi = \frac{1}{18} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \, d\varphi =$$

$$= - \frac{1}{18} \frac{1}{\sin \varphi} \Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{9\sqrt{3}} \; .$$

6. De bol $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ en de paraboloïde $x^2 + y^2 + z = 16$ snijden elkaar in de cirkels

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \text{en} \quad z = 0 \; ,$$
$$x^2 + y^2 = 15 \quad \text{en} \quad z = 1 \; .$$

Het boloppervlak tussen deze twee cirkels is gelijk aan

$$\iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} \; r \, dr \, d\varphi \; ,$$

waarin G voorstelt het in $z = 0$ gelegen ringgebied: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\sqrt{15} \le r \le 4$, terwijl $z = \sqrt{16 - r^2}$ (cilindercoördinaten).

$$\text{Opp.} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt{15}}^{4} \sqrt{1 + \left(\frac{-r}{\sqrt{16 - r^2}}\right)^2} \; r \, dr = 2\pi \int_{\sqrt{15}}^{4} \frac{4r}{\sqrt{16 - r^2}} \, dr =$$

$$= 8\pi \left| -\sqrt{16 - r^2} \right|_{\sqrt{15}}^{4} = 8\pi \; .$$

(Men vindt dit ook gemakkelijk met wat stereometrie.)

7. $$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \ldots$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \frac{1}{7!7} + \ldots .$$

Omdat de termen alterneren en in absolute waarde monotoon naar 0 gaan, is de afbreekfout kleiner dan de eerste weggelaten term.
Nu is

$$\frac{1}{5!5} = \frac{1}{600} > \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-4} \quad \text{maar} \quad \frac{1}{7!7} = \frac{1}{35280} < \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-4} .$$

Dus

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} = 0{,}9461$$

in 4 decimalen nauwkeurig.