TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

EXAMEN-
en
TENTAMENOPGAVEN

1975-1980

WISKUNDE 20

met oplossingen

Voorjaar 1981

Jd ?

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Examen- en Tentamenopgaven

Wiskunde 20 (1975-1980)

met oplossingen

Dictaatnr. 2.281 Prijs f. 10,-

Inhoudsbeschrijving
Examen- Tentamenopgaven Wiskunde 20, (1975-1980) met oplossingen

JdG, 6 Juli 2005

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Examen- en tentamenopgaven Wiskunde 20 (1975-1980) met oplossingen

Voorjaar 1981

Proeftentamen maart 1975

1. Door de betrekkingen

$$\begin{cases} xy + 2x^3z = 3 \ , \\ x^2 + y^2 + 2xy + z^2 = 5 \ , \end{cases}$$

zijn y en z gegeven als functies van x.
Bereken $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{dz}{dx}$ in (1,1,1).

2. Bepaal de orthogonale trajectorie door (0,1) van het stelsel hoogtelijnen van de functie $f(x,y) = y^2 - x$.

3. De functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + 2y^2} & \text{voor } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ f(0,0) = 0 \ . \end{cases}$$

a) Bewijs dat f continu is in (0,0).
b) Bereken voor alle reële waarden van a de richtingsafgeleide in (a,0) in de richting van $\underline{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

4. Bereken plaats, aard (globaal/locaal, maximum/minimum) en waarde van de extrema van de functie $f(x,y) = (y - x^2)(y - 1)$ op

$$\begin{cases} -2 \le x \le 2 \ , \\ -2 \le y \le 2 \ . \end{cases}$$

5. De scholengemeenschap van een stad bestaat uit een gymnasium, atheneum en havo. Elk jaar gaan er 320 leerlingen van de basisschool naar deze scholengemeenschap.
Aan het einde van de eerste klas gaat er van het aantal leerlingen van de eerste klas gymnasium 25% naar de tweede atheneum, 15% naar de tweede havo, de rest naar de tweede gymnasium. Net zo gaat van de eerste atheneum steeds 10% naar de tweede gymnasium, 10% naar de tweede havo en de rest naar de tweede atheneum; van de eerste havo gaat 5% naar de tweede atheneum, de rest naar de tweede havo. Zittenblijven is er op deze scholengemeenschap niet bij.

a) Als het gymnasium dit jaar 100 leerlingen van de basisschool zou opnemen, het atheneum 80 en de havo 140, hoeveel leerlingen zitten er dan volgend jaar in de tweede klas van het gymnasium resp. atheneum en havo?

b) Hoe moeten de 320 leerlingen over het gymnasium, atheneum en havo verdeeld worden, opdat het aantal leerlingen dat volgend jaar in de tweede klas van het gymnasium resp. atheneum en havo zal zitten gelijk is aan het aantal leerlingen dat nu in de eerste klas gymnasium resp. atheneum en havo zit?

Oplossingen Proeftentamen maart 1975

1. Differentiëren van beide betrekkingen naar x geeft

$$\begin{cases} y + xy' + 6x^2z + 2x^3z' = 0 , \\ 2x + 2yy' + 2y + 2xy' + 2zz' = 0 . \end{cases}$$

In het punt (1,1,1) wordt dit

$$\begin{cases} 7 + y'(1) + 2z'(1) = 0 , \\ 4 + 4y'(1) + 2z'(1) = 0 , \end{cases}$$

met oplossing $y'(1) = 1$, $z'(1) = -4$.

2. De raaklijnen aan de orthogonale trajectorie $y = y(x)$ hebben in elk punt richtingsvector grad $f(x,y) = (-1,2y)$, zodat geldt $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{-1} = -2y$, met als oplossingen $y = Ce^{-2x}$. Substitutie van $x = 0$, $y = 1$ geeft $C = 1$. De vergelijking van de orthogonale trajectorie door het punt (0,1) is dus $y = e^{-2x}$.

3. a) Voor $\underline{x} = (x,y) \neq \underline{0}$ geldt

$$|f(\underline{x}) - f(\underline{0})| = \left|\frac{xy^2}{x^2 + 2y^2}\right| \le \frac{|x|y^2}{x^2 + y^2} \le \frac{\|\underline{x}\|^3}{\|\underline{x}\|^2} = \|\underline{x}\| .$$

Zij $\varepsilon > 0$. Neem $\delta = \varepsilon$.
Dan geldt voor alle $\underline{x}$ met $\|\underline{x}\| < \delta$ dat $|f(\underline{x}) - f(\underline{0})| < \varepsilon$, zodat f continu is in $\underline{0}$.

b) Zij $\underline{a} = (a,0)$, dan is de richtingsafgeleide in $\underline{a}$ in de richting van $\underline{v}$ per definitie gelijk aan

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{a} + t\underline{v}) - f(\underline{a})}{t} .$$

Voor $\underline{a} = \underline{0}$, dus $a = 0$, wordt dit

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\underline{v}) - f(\underline{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{t}{\sqrt{2}})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t^2}{2}}{t(\frac{t^2}{2} + 2\cdot\frac{t^2}{2})} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{6}\sqrt{2} .$$

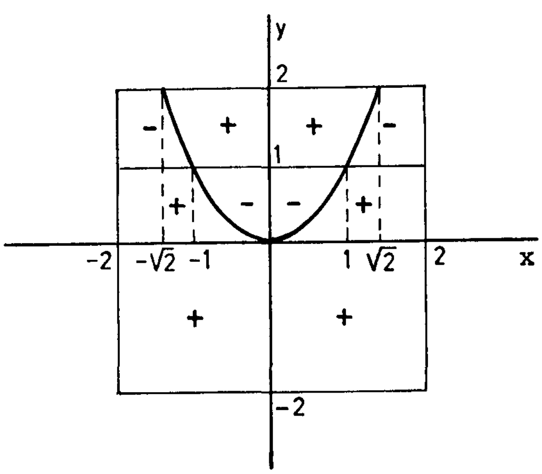
Voor $\underline{a} \neq \underline{0}$, dus $a \neq 0$, maken we gebruik van de differentieerbaarheid van f in $\underline{a}$ ($f = \frac{g}{h}$ met g en h differentieerbaar op $\mathbb{R}^2$, $h(\underline{a}) \neq 0$).
Dan is de richtingsafgeleide gelijk aan $(\text{grad } f(\underline{a}),\underline{v})$. Wegens

$$f_x(\underline{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,0) - f(a,0)}{h} = 0 \ ,$$

$$f_y(\underline{a}) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,k) - f(a,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{ak}{a^2 + 2k^2} = 0 \ , \quad \text{is}$$

$(\text{grad } f(\underline{a}),\underline{v}) = (\underline{0},\underline{v}) = 0$.
De richtingsafgeleide van f in het punt (a,0) in de richting van $\underline{v}$ is dus gelijk aan $\frac{1}{6}\sqrt{2}$ voor $a = 0$ en gelijk aan 0 voor $a \neq 0$.

4. We tekenen eerst de nullijnen van f en geven tevens de tekenverdeling van f aan op het vierkant $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$:



Stationaire punten van f vinden we uit grad $f = \underline{0}$, dus uit de vergelijkingen

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -2x(y-1) = 0 \ , \\ f_y(x,y) = y - 1 + y - x^2 = 0 \ , \end{cases}$$

met oplossingen $(x,y) = (0,\frac{1}{2})$, $(x,y) = (-1,1)$ en $(x,y) = (1,1)$. De stationaire punten $(-1,1)$ en $(1,1)$ zijn zadelpunten (zie de figuur).
In het punt $(0,\frac{1}{2})$ heeft f een minimum met waarde $-\frac{1}{4}$. Beschouw namelijk de begrensde gesloten verzameling

$$V = \{(x,y) \mid x^2 \le y \le 1\} \ .$$

Volgens de stelling van Weierstrass heeft de continue functie f op V een globaal minimum.

Op V is $f(x,y) \leq 0$ en op de rand van V is $f(x,y) = 0$, zodat f een minimum in het inwendige van V heeft, dus in het stationaire punt $(0,\frac{1}{2})$.

<u>Opmerking</u>. Uit

$$f_{xx}(0,\tfrac{1}{2}) = 1 > 0,\; f_{yy}(0,\tfrac{1}{2}) = 2 > 0$$

en

$$f_{xx}(0,\tfrac{1}{2}).f_{yy}(0,\tfrac{1}{2}) - (f_{xy}(0,\tfrac{1}{2}))^2 = 2 - 0 = 2 > 0$$

volgt met wat minder schrijfwerk dat f een minimum heeft in $(0,\frac{1}{2})$.
Tot zover de inwendige punten van het vierkant $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$.

We onderzoeken nu f op de rand van het vierkant.

i) Voor $x = 2$, $-2 \leq y \leq 2$ en ook voor $x = -2$, $-2 \leq y \leq 2$ vinden we

$$f(\pm 2,y) = (y-4)(y-1) = y^2 - 5y + 4 = (y - \tfrac{5}{2})^2 - \tfrac{9}{4}\,.$$

Deze functie heeft op het interval $-2 \leq y \leq 2$ een maximum voor $y = -2$ met waarde 18 en een minimum voor $y = 2$ met waarde -2.
Corresponderende punten op de rand van het vierkant zijn $(\pm 2,-2)$ met $f(\pm 2,-2) = 18$ en $(\pm 2,2)$ met $f(\pm 2,2) = -2$.

ii) Voor $y = -2$ vinden we $f(x,-2) = (-2-x^2)(-3) = 3x^2 + 6$, te beschouwen op het interval $-2 \leq x \leq 2$.
Deze functie heeft maxima voor $x = \pm 2$ met waarde 18 en een minimum voor $x = 0$ met waarde 6. De punten die corresponderen met $x = \pm 2$ hebben we al opgeschreven bij onderdeel i), zodat de enige nieuwe kandidaat is het punt $(0,-2)$ met $f(0,-2) = 6$.

iii) $f(x,2) = 2 - x^2$ voor $-2 \leq x \leq 2$ tenslotte, geeft minima voor $x = \pm 2$ met waarde -2 (al gevonden bij onderdeel i)) en een maximum voor $x = 0$. Het corresponderende punt is $(0,2)$ met $f(0,2) = 2$.

Met behulp van de stelling van Weierstrass, toegepast op het vierkant $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$, kunnen we nu concluderen:
in de punten $(\pm 2,-2)$ heeft f globale maxima met waarde 18,
in de punten $(\pm 2,2)$ heeft f globale minima met waarde -2.
In het punt $(0,\frac{1}{2})$ in het inwendige van het vierkant heeft f dus blijkbaar een locaal minimum met waarde $-\frac{1}{4}$.

Bovendien is er in het punt (0,2) nog een locaal maximum met waarde 2. Om dit in te zien beschouwen we de begrensde gesloten verzameling

$$W = \{(x,y) \mid (-2 \leq x \leq 2) \wedge (1 \leq y \leq 2)\} .$$

Op W heeft f een globaal maximum. In het inwendige van W heeft f geen stationaire punten, zodat f het globale maximum op de rand van W aanneemt. Het enige punt dat in aanmerking komt is (0,2). Ten opzichte van het vierkant $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$ is er in (0,2) dus een locaal maximum.

Rest ons nog het punt (0,-2) te onderzoeken. Ten opzichte van de rand van het vierkant is er in (0,-2) een minimum.
Ten opzichte van de y-as is er in (0,-2) een maximum, want $f(0,y) = y(y-1) \leq$ $\leq f(0,-2)$ voor $-2 \leq y \leq 2$.
Dus is er in (0,-2) geen extreem.

5. a) Van de 100 gymnasiumleerlingen gaan er 25 naar de tweede atheneum, 15 naar de tweede havo en 60 naar de tweede gymnasium.
Van de 80 atheneumleerlingen gaan er 8 naar de tweede gymnasium, 8 naar de tweede havo en 64 naar de tweede atheneum.
Van de 140 havoleerlingen gaan er 7 naar de tweede atheneum en 133 naar de tweede havo. Dus zitten er volgend jaar 60 + 8 = 68 leerlingen in de tweede klas van het gymnasium, 25 + 64 + 7 = 96 leerlingen in de tweede klas van het atheneum en 15 + 8 + 133 = 156 leerlingen in de tweede havo.

b) Zij g_1, a_1, h_1 het aantal leerlingen dat nu in de eerste klas gymnasium, resp. atheneum, resp. havo zit. Dan is $g_1 + a_1 + h_1 = 320$.
Volgend jaar zitten er dan

$$\begin{cases} g_2 = 0{,}60g_1 + 0{,}10a_1 & \text{in de tweede gymnasium ,} \\ a_2 = 0{,}25g_1 + 0{,}80a_1 + 0{,}05h_1 & \text{in de tweede atheneum ,} \\ h_2 = 0{,}15g_1 + 0{,}10a_1 + 0{,}95h_1 & \text{in de tweede havo .} \end{cases}$$

Gevraagd wordt nu g_1, a_1 en h_1 zo te bepalen dat $g_2 = g_1$, $a_2 = a_1$, $h_2 = h_1$.
Dit geeft het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} g_1 + a_1 + h_1 = 320 , \\ 4g_1 - a_1 = 0 , \\ 5g_1 - 4a_1 + h_1 = 0 , \\ 3g_1 + 2a_1 - h_1 = 0 , \end{cases}$$

dat we oplossen door vegen:

$$\left.\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & 1 & 320 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|l} 4 & 3 & 0 & 320 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|l} 16 & 0 & 0 & 320 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 0 & -80 \\ 0 & 0 & -1 & -220 \end{array}\right. ,$$

dus $g_1 = 20$, $a_1 = 80$, $h_1 = 220$.

Examen/tentamen mei 1975

1. a) Bepaal met behulp van de multiplicatorenmethode van Lagrange de extrema van

$$f(x,y) = 2xy + y$$

op de kromme

$$x^2 + 3y^2 = \frac{1}{4} .$$

b) Beschouw in $\mathbb{R}^2$ de kromme met vergelijking

$$3x^2y + 2x^3 + 7y^3 = 1 .$$

In welke punten is de raaklijn aan deze kromme horizontaal, en in welke verticaal?

---

2. Een afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$A\underline{x} = (\underline{a},\underline{x})\underline{a} - (\underline{b},\underline{x})\underline{b} \text{ met } \underline{a} = (1,1,0) \text{ en } \underline{b} = (2,1,-1) .$$

Bewijs dat de afbeelding A lineair is en bepaal matrix, rang, beeldruimte, nulruimte en eigenwaarden van deze afbeelding.

3. Vervalt in verband met een wijziging van de collegesyllabus.

4. Bereken de lengte van de kromme

$$\underline{x}(t) = (e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t,\ e^{-t}) \quad \text{met } 0 \le t < \infty .$$

5. Bereken

$$\iiint_G (x^2 + y^2)\,dxdydz$$

waarin G bepaald is door

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1 \text{ en } x^2 + y^2 \le z^2 .$$

Oplossingen Tentamen mei 1975

1. a) Zij $g(x,y) = x^2 + 3y^2 - \frac{1}{4}$, dan zijn f en g differentieerbaar, en grad $g(x,y) = (2x,6y) \neq \underline{0}$ op de kromme $g(x,y) = 0$. Punten (x,y) waar f een extreem heeft voldoen dan aan het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = \frac{1}{4}\ , \\ 2y + \lambda(2x) = 0\ , \\ 2x+1 + \lambda(6y) = 0\ , \end{cases}$$

voor zeker getal λ.
De oplossingen van dit stelsel zijn

$$\lambda = -1,\ (x,y) = (\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4})\ ,$$

$$\lambda = 0,\ (x,y) = (-\tfrac{1}{2},0)\ ,$$

$$\lambda = 1,\ (x,y) = (\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{4})\ ,$$

met $f(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = \frac{3}{8}$, $f(-\frac{1}{2},0) = 0$ en $f(\frac{1}{4},-\frac{1}{4}) = -\frac{3}{8}$.
De kromme $g(x,y) = 0$ is een begrensde gesloten verzameling. De functie f heeft dus volgens de stelling van Weierstrass een globaal maximum en een globaal minimum op de kromme, zodat $\frac{3}{8}$ het globale maximum en $-\frac{3}{8}$ het globale minimum moet zijn.
Op de kromme $x^2 + 3y^2 = \frac{1}{4}$ is $x \geq -\frac{1}{2}$, dus $2x + 1 \geq 0$, zodat voor alle punten op de kromme, behalve het punt $(-\frac{1}{2},0)$, geldt $f(x,y) = y(2x + 1)$ is positief voor $y > 0$ en negatief voor $y < 0$. In $(-\frac{1}{2},0)$ heeft f dus geen extreem.

b) Impliciet differentiëren van de vergelijking naar x geeft

$$6xy + 3x^2y' + 6x^2 + 21y^2y' = 0\ ,$$

waaruit volgt $y' = -\dfrac{2xy + 2x^2}{x^2 + 7y^2}$ voor $(x,y) \neq (0,0)$. Het punt $(0,0)$ ligt niet op de kromme, dus verticale raaklijnen zijn er niet.
De punten waar de raaklijn horizontaal is vinden we uit het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 2xy + 2x^2 = 0\ , \\ 3x^2y + 2x^3 + 7y^3 = 1\ . \end{cases}$$

Dit levert de punten $(x,y) = (0,\frac{1}{\sqrt[3]{7}})$ en $(x,y) = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

2. i) $A(\underline{x} + \underline{y}) = (\underline{a},\underline{x} + \underline{y})\underline{a} - (\underline{b},\underline{x} + \underline{y})\underline{b} =$

$= (\underline{a},\underline{x})\underline{a} + (\underline{a},\underline{y})\underline{a} - (\underline{b},\underline{x})\underline{b} - (\underline{b},\underline{y})\underline{b} = A\underline{x} + A\underline{y}$

voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^3$;

$A(\alpha\underline{x}) = (\underline{a},\alpha\underline{x})\underline{a} - (\underline{b},\alpha\underline{x})\underline{b} = \alpha(\underline{a},\underline{x})\underline{a} - \alpha(\underline{b},\underline{x})\underline{b} = \alpha A\underline{x}$

voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

De afbeelding A is dus lineair.

ii) $A(1,0,0) = \underline{a} - 2\underline{b} = (-3,-1,2)$, $A(0,1,0) = \underline{a} - \underline{b} = (-1,0,1)$ en $A(0,0,1) = \underline{b} = (2,1,-1)$, zodat de matrix van A is

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

iii) De rang van de afbeelding A is de dimensie van de beeldruimte van A. Uit de definitie van A volgt dat de dimensie van de beeldruimte ten hoogste 2 is.

Uit ii) volgt dat $\underline{a} - \underline{b}$ en $\underline{b}$, dus ook $\underline{a}$ en $\underline{b}$ in de beeldruimte liggen. De vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ zijn onafhankelijk. Dus is de rang van A gelijk aan 2.

iv) De beeldruimte van A is het vlak opgespannen door $\underline{a}$ en $\underline{b}$, in parametervoorstelling $\underline{x} = \lambda(1,1,0) + \mu(2,1,-1)$.

De vergelijking van dit vlak is $x - y + z = 0$.

v) $A\underline{x} = \underline{0} = (\underline{a},\underline{x})\underline{a} - (\underline{b},\underline{x})\underline{b}$ geeft, wegens de onafhankelijkheid van de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$, $(\underline{a},\underline{x}) = (\underline{b},\underline{x}) = 0$; $\underline{x} \perp \underline{a}$ en $\underline{x} \perp \underline{b}$, dus $\underline{x}$ loodrecht op het vlak $x - y + z = 0$. De nulruimte van A is de rechte $\underline{x} = \nu(1,-1,1)$.

vi) De karakteristieke vergelijking van A is

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ -1+2\lambda & 0 & 1-\lambda-\lambda^2 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1-\lambda \\ -1+2\lambda & 1-\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1+\lambda & \lambda-1 \\ 1-2\lambda & \lambda^2+\lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$= -[(\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda - 1) + (2\lambda - 1)(\lambda - 1)] = -(\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda) =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 + 4\lambda - 3) = -\lambda((\lambda + 2)^2 - 7) = -\lambda(\lambda + 2 + \sqrt{7})(\lambda + 2 - \sqrt{7}) = 0 .$$

De eigenwaarden van de lineaire afbeelding A zijn dus $\lambda_1 = 0$ (met eigenruimte $\underline{x} = \nu(1,-1,1)$, zie v)), $\lambda_2 = -2 + \sqrt{7}$ en $\lambda_3 = -2 - \sqrt{7}$.

4. Wegens

$$\underline{\dot{x}}(t) = (-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t,\ -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t,\ -e^{-t}) ,$$

$$\|\underline{\dot{x}}(t)\| = e^{-t}\sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 + 1} = e^{-t}\sqrt{3} ,$$

wordt de lengte van de kromme gegeven door

$$\int_0^\infty e^{-t}\sqrt{3}\,dt = \sqrt{3}\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-t}dt = \sqrt{3}\lim_{A\to\infty}(-e^{-A}+1) = \sqrt{3} .$$

5. Het gebied G wordt begrensd door de bol $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, met middelpunt $(0,0,1)$ en straal 1, en door de kegel $x^2 + y^2 = z^2$ met top $(0,0,0)$ en de z-as als as. De top van de kegel ligt op de bol.
Snijpunten van bol en kegel met $z \neq 0$ vinden we uit het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 , \\ x^2 + y^2 = z^2 . \end{cases}$$

Dit stelsel is equivalent met het stelsel

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 , \\ z = 1 , \end{cases}$$

zodat de snijkromme van bol en kegel is de cirkel $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$.
Het gebruik van cylindercoördinaten (r,φ,z) ligt voor de hand.
De vergelijking van de halve bol $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, $z \geq 1$ wordt dan $z = 1 + \sqrt{1-r^2}$ en de vergelijking van de halve kegel $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$ wordt $z = r$, zodat

$$\iiint_G (x^2 + y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr \int_r^{1+\sqrt{1-r^2}} r^2dz =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^3(1 + \sqrt{1-r^2} - r)dr = 2\pi \int_0^1 (r^3 - r^4)dr +$$

$$+ 2\pi \int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}dr = 2\pi(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}) - \pi \int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}d(1-r^2) =$$

T 5.75

$$= \frac{\pi}{10} + \pi \int_0^1 (1-u)\sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{10} + \pi\left(\frac{2}{3}u^{3/2} - \frac{2}{5}u^{5/2}\right)\Big|_{u=0}^{u=1} =$$

$$= \frac{\pi}{10} + \pi\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) = \frac{\pi}{10} + \frac{4\pi}{15} = \frac{11\pi}{30} ,$$

waarbij we de substitutie $1 - r^2 = u$ hebben gebruikt.

Opmerking. We kunnen ook bolcoördinaten (ρ,θ,φ) gebruiken. De vergelijking van de halve bol $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, $z \geq 1$ is dan $\rho = 2\cos\theta$ met $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ en de vergelijking van de halve kegel $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$ is $\theta = \frac{\pi}{4}$, zodat

$$\iiint_G (x^2 + y^2)\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 \sin^2\theta . \rho^2 d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^4 d\rho = \frac{2\pi}{5} \int_0^{\pi/4} 2^5 \cos^5\theta \sin^3\theta\, d\theta =$$

$$= -\frac{64\pi}{5} \int_0^{\pi/4} \cos^5\theta (1 - \cos^2\theta)\, d\cos\theta =$$

$$= \frac{64\pi}{5} \int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1} (u^5 - u^7)\,du = \frac{64\pi}{5}\left(\frac{1}{6}u^6 - \frac{1}{8}u^8\right)\Big|_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1} =$$

$$= \frac{64\pi}{5}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{48} + \frac{1}{128}\right) = \frac{\pi}{5}\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{11\pi}{30} ,$$

waarbij we de substitutie $\cos\theta = u$ hebben gebruikt.

Herkansingsexamen/tentamen juni 1975

1. Bereken de extrema van de functie

$$f(x,y) = x^2y - y$$

op het gebied bepaald door

$$x^2 + y^2 \le 4 .$$

2. Geef de termen tot en met de tweede graad van de Taylorreeksontwikkeling van

$$f(x,y) = \cos(xe^{y+1})$$

om het punt (1,0).

3. Van de lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven de matrix

$$\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 12 & -12 \\ -12 & 9 & 8 \\ 12 & 8 & 9 \end{pmatrix} .$$

a) Bewijs dat A een orthogonale afbeelding is en een eigenwaarde 1 heeft.

b) Bereken de eigenruimte bij de eigenwaarde 1.

c) Wat is de meetkundige betekenis van A?

4. Vervalt in verband met een wijziging van de collegesyllabus.

5. Bereken

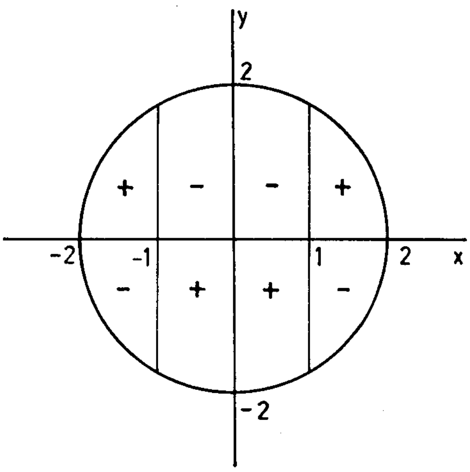
$$\iiint_G z^2 dxdydz ,$$

waarin G gegeven is door

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 \le 0 , \\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4 . \end{cases}$$

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1975

1. Nullijnen van de functie f zijn de rechten $y = 0$, $x = -1$ en $x = 1$. De tekenverdeling van f op de cirkelschijf $x^2 + y^2 \le 4$ is aangegeven in de figuur.



Uit grad $f(x,y) = (2xy, x^2 - 1) = \underline{0}$ volgt dat de stationaire punten van f zijn $(-1,0)$ en $(1,0)$. Dit zijn zadelpunten, zoals blijkt uit het plaatje.

Opmerking. Ook uit $f_{xx}(\pm1,0) = 0$, $f_{yy}(\pm1,0) = 0$, $f_{xy}(\pm1,0) = \pm2$ en dus

$$f_{xx}(\pm1,0).f_{yy}(\pm1,0) - (f_{xy}(\pm1,0))^2 = -4 < 0$$

volgt dat f in de punten $(\pm1,0)$ geen extreem heeft.

Op de rand van de cirkelschijf is $x^2 = 4 - y^2$ met $-2 \le y \le 2$. Substitutie geeft $f(x(y),y) = y(3 - y^2) = g(y)$, te beschouwen op het interval $-2 \le y \le 2$. Uit $g'(y) = 3 - 3y^2$ volgt: $g'(y) \le 0$ voor $|y| \ge 1$, $g'(y) \ge 0$ voor $|y| \le 1$, dus g dalend op $[-2,-1]$, g stijgend op $[-1,1]$, g dalend op $[1,2]$, zodat g maxima heeft voor $y = -2$ en voor $y = 1$ ($g(-2) = 2$, $g(1) = 2$) en minima voor $y = -1$ en voor $y = 2$ ($g(-1) = -2$, $g(2) = -2$).
De corresponderende punten op de cirkel $x^2 + y^2 = 4$ zijn respectievelijk $(0,-2)$, $(\pm\sqrt{3},1)$, $(\pm\sqrt{3},-1)$, $(0,2)$. Volgens de stelling van Weierstrass heeft f op de begrensde gesloten verzameling $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$ een globaal maximum en een globaal minimum, zodat 2 het globale maximum en -2 het globale minimum moet zijn.
Samenvattend: f heeft globale maxima 2 in de punten $(0,-2)$ en $(\pm\sqrt{3},1)$, en globale minima -2 in de punten $(\pm\sqrt{3},-1)$ en $(0,2)$.

2. De Taylorreeksontwikkeling van f rond het punt (1,0) is

$$f(x,y) = f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)y +$$

$$+ \frac{1}{2!}[f_{xx}(1,0)(x-1)^2 + 2f_{xy}(1,0)(x-1)y + f_{yy}(1,0)y^2] + \ldots .$$

Berekening van de partiële afgeleiden geeft

$$f_x(x,y) = -e^{y+1}\sin(xe^{y+1}),\quad f_y(x,y) = -xe^{y+1}\sin(xe^{y+1}) ,$$

$$f_{xx}(x,y) = -e^{2y+2}\cos(xe^{y+1}) ,$$

$$f_{xy}(x,y) = -e^{y+1}\sin(xe^{y+1}) - xe^{2y+2}\cos(xe^{y+1}) ,$$

$$f_{yy}(x,y) = -xe^{y+1}\sin(xe^{y+1}) - x^2e^{2y+2}\cos(xe^{y+1}) ;$$

$$f_x(1,0) = -e \sin e,\quad f_y(1,0) = -e \sin e ,$$

$$f_{xx}(1,0) = -e^2\cos e,\quad f_{xy}(1,0) = -e \sin e - e^2\cos e ,$$

$$f_{yy}(1,0) = -e \sin e - e^2\cos e ,$$

zodat met $f(1,0) = \cos e$ volgt

$$f(x,y) = \cos e - (x-1)e \sin e - ey \sin e +$$

$$- \tfrac{1}{2}(x-1)^2e^2\cos e - (x-1)y(e \sin e + e^2\cos e) +$$

$$- \tfrac{1}{2}y^2(e \sin e + e^2\cos e) + \ldots .$$

3. a) i) Voor de matrix van A geldt

$$A^TA = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & -12 & 12 \\ 12 & 9 & 8 \\ -12 & 8 & 9 \end{pmatrix}\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 12 & -12 \\ -12 & 9 & 8 \\ 12 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{289}\begin{pmatrix} 289 & 0 & 0 \\ 0 & 289 & 0 \\ 0 & 0 & 289 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

dus de afbeelding A is orthogonaal.

ii)
$$\det(A-1\cdot I) = \frac{1}{(17)^3}\begin{vmatrix} -16 & 12 & -12 \\ -12 & -8 & 8 \\ 12 & 8 & -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{(17)^3}\begin{vmatrix} -16 & 12 & -12 \\ -12 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

zodat 1 een eigenwaarde van A is.

b) De eigenruimte bij de eigenwaarde 1 bepalen we uit $(A - I)\underline{x} = \underline{0}$, dus uit het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} -16x + 12y - 12z = 0 , \\ -12x - 8y + 8z = 0 , \\ 12x + 8y - 8z = 0 . \end{cases}$$

Met vegen vinden we

$$\begin{matrix} -4 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix} .$$

Hieruit volgt $x = 0$, $y = z$, dus $\underline{x} = (x,y,z) = \alpha(0,1,1)$.

c) De dimensie van de eigenruimte bij de eigenwaarde 1 is gelijk aan 1. Dus is A een draaiing om de as $\underline{x} = \alpha(0,1,1)$.

Om de draaiingshoek te vinden nemen we een vector $\underline{v}$ in het vlak $y + z = 0$ loodrecht op de as, bijvoorbeeld $\underline{v} = (1,0,0)$. Dan is $A\underline{v} = \frac{1}{17}(1,-12,12)$ en de draaiingshoek φ is de hoek tussen $\underline{v}$ en $A\underline{v}$, dus

$$\cos\varphi = \frac{(\underline{v},A\underline{v})}{\|\underline{v}\|.\|A\underline{v}\|} = \frac{\frac{1}{17}}{1\,.\,1} = \frac{1}{17} , \quad \varphi = \arccos\frac{1}{17} .$$

A is een draaiing om de rechte $\underline{x} = \alpha(0,1,1)$ over een hoek $\arccos\frac{1}{17}$.

5. In cylindercoördinaten (r,φ,z) wordt het gebied G gegeven door $r \le 2\cos\varphi$, $z^2 \le 4 - r^2$ zodat

$$\iiint_G z^2\,dxdydz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\,dr \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} z^2dz =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\,dr \int_0^{\sqrt{4-r^2}} z^2dz = \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r(4-r^2)^{\frac{3}{2}}dr =$$

$$= -\frac{4}{15}\int_0^{\pi/2}\left[(4-r^2)^{\frac{5}{2}}\right]_{r=0}^{r=2\cos\varphi} d\varphi = -\frac{4}{15}\int_0^{\pi/2}\left[(4-4\cos^2\varphi)^{\frac{5}{2}}-4^{\frac{5}{2}}\right]d\varphi =$$

$$= -\frac{4}{15}\int_0^{\pi/2}(2^5\sin^5\varphi - 2^5)d\varphi = \frac{128}{15}\int_0^{\pi/2}\sin^4\varphi\ d\cos\varphi + \frac{128}{15}\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{128}{15}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\varphi)^2 d\cos\varphi + \frac{64\pi}{15} =$$

$$= -\frac{128}{15}\int_0^1(1-2u^2+u^4)du + \frac{64\pi}{15} = -\frac{128}{15}(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}) + \frac{64\pi}{15} = \frac{64\pi}{15} - \frac{1024}{225} ,$$

waarbij de substitutie $\cos\varphi = u$ is toegepast.

T 1.76

Examen/tentamen januari 1976

1. Gegeven is de kromme K met parametervoorstelling

$$\underline{x}(t) = (\sqrt{2}\cos t,\ \sin t + t,\ \sin t - t), \quad 0 \le t \le 2\pi .$$

Bepaal:

a) De raaklijn aan K in het punt $\underline{x}(\frac{\pi}{2})$.

b) De lengte van K.

2. Van de differentieerbare functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y + 2x}{1 + x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y + \arctan x, \quad f(0,\pi) = 1 .$$

a) Zij V het raakvlak in $(0,\pi,1)$ aan het oppervlak met vergelijking $z = f(x,y)$. Bepaal de vergelijking van V.

b) De functie g wordt gedefinieerd door

$$g(t) = f(\tan t, t) \quad \text{voor } \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} .$$

Bepaal $g'(t)$ voor $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$.

3. De lineaire afbeelding $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door de matrix

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

b) Bepaal de beeldruimte en de nulruimte van A.

c) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ is

$$A\underline{x} = (a, a^2, a^3)$$

oplosbaar?

d) Beschrijf de afbeelding A meetkundig.

4. Vervalt in verband met een wijziging van de collegesyllabus.

5. Het oppervlak V in $\mathbb{R}^3$ wordt gegeven door de vergelijking

$$z = x - x \ln x \quad (x > 0) .$$

Bepaal de oppervlakte van dat deel van V dat ligt boven

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq e \text{ en } 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\} .$$

Oplossingen Tentamen januari 1976

1. a) Een richtingsvector van de raaklijn aan K in het punt $\underline{x}(\frac{\pi}{2}) = (0, 1+\frac{\pi}{2}, 1-\frac{\pi}{2})$ is

$$\dot{\underline{x}}(\tfrac{\pi}{2}) = (-\sqrt{2}\sin\tfrac{\pi}{2}, \cos\tfrac{\pi}{2}+1, \cos\tfrac{\pi}{2}-1) = (-\sqrt{2},1,-1) ,$$

zodat een parametervoorstelling van deze raaklijn is

$$\underline{x} = (0,1+\tfrac{\pi}{2}, 1-\tfrac{\pi}{2}) + \lambda(\sqrt{2},-1,1) .$$

b) De lengte van K is gelijk aan

$$\int_0^{2\pi} \|\dot{\underline{x}}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sqrt{2}\sin t)^2 + (\cos t+1)^2 + (\cos t - 1)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 t + 2\cos^2 t + 2}\, dt = 2\int_0^{2\pi} dt = 4\pi .$$

2. a) De vergelijking van V is

$$z - f(0,\pi) = f_x(0,\pi)(x-0) + f_y(0,\pi)(y-\pi) .$$

Met $f(0,\pi) = 1$, $f_x(0,\pi) = \pi$, $f_y(0,\pi) = -2\pi$ wordt dit

$$z - 1 = \pi x - 2\pi(y-\pi) ,$$

$$z = 1 + 2\pi^2 + \pi x - 2\pi y .$$

b) $g(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ met $g_1(t) = \tan t$, $g_2(t) = t$. De functie f is differentieerbaar op $\mathbb{R}^2$ (gegeven), de functies g_1 en g_2 zijn differentieerbaar op het interval $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$.
Dan is de samengestelde functie $g(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ differentieerbaar op het interval $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ met afgeleide

$$g'(t) = f_x(g_1(t),g_2(t))g_1'(t) + f_y(g_1(t),g_2(t))g_2'(t) \quad \text{(kettingregel).}$$

We vinden

$$g'(t) = \frac{t + 2\tan t}{1+\tan^2 t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} - 2t + \arctan(\tan t) =$$

$$= t + 2\tan t - 2t + \arctan(\tan(t-\pi)) =$$

$$= -t + 2\tan t + t - \pi = 2\tan t - \pi \text{ voor } \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} .$$

Hierbij hebben we gebruikt dat voor $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ geldt $-\frac{\pi}{2} < t - \pi < \frac{\pi}{2}$ en dat slechts voor $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ geldt $\arctan(\tan x) = x$.

3. a) De karakteristieke vergelijking van A is

$$\frac{1}{2^3}\begin{vmatrix} 3-2\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 2-2\lambda & -2 \\ 3 & 0 & -1-2\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-2\lambda & -1 \\ 3 & -1-2\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}(1-\lambda)(4\lambda^2 - 4\lambda) = (1-\lambda)\lambda(\lambda-1) = -\lambda(\lambda-1)^2 = 0 \,,$$

zodat de eigenwaarden van A zijn $\lambda = 0$ en $\lambda = 1$.

De eigenvectoren bij $\lambda = 0$ bepalen we uit $A\underline{x} = \underline{0}$:

$$\begin{cases} 3x - z = 0 \,, \\ x + y - z = 0 \,, \\ 3x - z = 0 \,. \end{cases}$$

Stel $x = \alpha$, dan is $z = 3\alpha$, $y = z - x = 2\alpha$.

De eigenvectoren bij eigenwaarde 0 zijn dus $\underline{x} = \alpha(1,2,3)$ met $\alpha \neq 0$.

Uit $(A - I)\underline{x} = \underline{0}$ volgt $x - z = 0$, zodat de eigenvectoren bij eigenwaarde 1 zijn alle vectoren $\underline{x} \neq \underline{0}$ in het vlak $x - z = 0$.

b) De nulruimte $N(A)$ van A is de eigenruimte bij de eigenwaarde 0, dus de rechte $\underline{x} = \alpha(1,2,3)$ (zie a)). Voor de beeldruimte $R(A)$ van A geldt dan

1°. $\dim R(A) = 3 - 1 = 2$ op grond van de dimensiestelling;

2°. alle vectoren in het vlak $x - z = 0$ liggen in $R(A)$, omdat $\underline{x} = A\underline{x}$ voor alle $\underline{x}$ in dat vlak.

Dus $R(A)$ is het vlak met vergelijking $x - z = 0$.

<u>Opmerking</u>. We kunnen $R(A)$ ook vinden door te bedenken dat de beeldruimte van een lineaire afbeelding wordt opgespannen door de kolomvectoren van de matrix van die afbeelding.

Met vegen:

$$\begin{matrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{matrix} \sim \begin{matrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

zien we dat een parametervoorstelling van $R(A)$ is

$$\underline{x} = \lambda(0,1,0) + \mu(1,0,1) .$$

De vergelijking van $R(A)$ is dus $x - z = 0$.

Waarschuwing. Niet voor elke lineaire afbeelding A geldt dat de beeldruimte $R(A)$ wordt opgespannen door de eigenvectoren bij eigenwaarden ongelijk aan nul.
Tegenvoorbeeld: Een draaiing in $\mathbb{R}^3$ om een rechte over een hoek φ met $\varphi \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) De vergelijking $A\underline{x} = (a,a^2,a^3)$ is oplosbaar dan en slechts dan als (a,a^2,a^3) in de beeldruimte van A ligt, dus dan en slechts dan als $a - a^3 = 0$. Voor $a = 0$, $a = 1$ en voor $a = -1$ is $A\underline{x} = (a,a^2,a^3)$ oplosbaar.

d) De beeldruimte $R(A)$ van A is het vlak $z = x$, en de nulruimte $N(A)$ van A is de rechte $\underline{x} = \alpha(1,2,3)$ (zie b)).
Voor een willekeurige vector $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ beschouwen we de rechte $\underline{x} = \underline{a} + \lambda(1,2,3)$ door (het eindpunt van) $\underline{a}$ en evenwijdig aan $N(A)$.
Deze rechte snijdt het vlak $z = x$. Het snijpunt noemen we $\underline{b}$. Dan geldt

1°. $\underline{b} = \underline{a} + \lambda_0(1,2,3)$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$;
2°. $A\underline{b} = \underline{b}$ (zie a)).

Dus $\underline{b} = A\underline{b} = A\underline{a} + \lambda_0 A(1,2,3) = A\underline{a} + \underline{0} = A\underline{a}$, zodat $\underline{b}$ het beeld van $\underline{a}$ is.
Hieruit volgt dat A de projectie is op het vlak $z = x$ in de richting van de rechte $\underline{x} = \alpha(1,2,3)$.

5. De gevraagde oppervlakte σ wordt gegeven door

$$\sigma = \int_1^e dx \int_0^{1/x} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dy ,$$

waarbij $z = x - x \ln x$. Met $z_x = 1 - \ln x - \frac{x}{x} = -\ln x$, $z_y = 0$ wordt dit

$$\sigma = \int_1^e dx \int_0^{1/x} \sqrt{1 + \ln^2 x}\, dy = \int_1^e \frac{1}{x}\sqrt{1 + \ln^2 x}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\, dt ,$$

waarbij de substitutie $\ln x = t$ is toegepast.

Partieel integreren geeft

$$\sigma = t\sqrt{1+t^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{t^2+1-1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt =$$

$$= \sqrt{2} - \sigma + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{2} - \sigma + \ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_0^1 =$$

$$= \sqrt{2} - \sigma + \ln(1+\sqrt{2}) \ .$$

Dus

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \ .$$

Opmerking. De substitutie $t = \tan\varphi$ in $\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt$ geeft

$$\sigma = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \int_0^{\pi/4}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} =$$

$$= \int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{\cos^3\varphi}\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\ d\,\frac{1}{\cos^2\varphi} + \int_0^{\pi/4}\frac{d\varphi}{\cos\varphi} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\Big|_0^{\pi/4} - \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi + \int_0^{\pi/4}\frac{d\varphi}{\cos\varphi} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{d\varphi}{\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\left[\ln\left|\tan\tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi}{2}-\varphi)\right|\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\ln\tan\frac{\pi}{8} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1) \ .$$

Een andere manier om $\int_0^{\pi/4}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}$ te berekenen is de volgende. Herleid de integraal door de substitutie $\sin\varphi = u$ tot een integraal met rationale integrand en pas partieelbreuksplitsing toe.

Dit geeft

$$\vartheta = \int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos\varphi}{\cos^4\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{du}{(1-u^2)^2} = \tfrac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{du}{1-u} + \tfrac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{du}{(1-u)^2} + \tfrac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{du}{1+u} +$$

$$+ \tfrac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{du}{(1+u)^2} =$$

$$= \left[-\tfrac{1}{4}\ln|1-u| + \tfrac{1}{4}\frac{1}{1-u} + \tfrac{1}{4}\ln|1+u| - \tfrac{1}{4}\frac{1}{1+u}\right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} =$$

$$= \tfrac{1}{4}\ln\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}} + \tfrac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}} - \tfrac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}} =$$

$$= \tfrac{1}{4}\ln 2(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2 + \tfrac{1}{4}\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}-1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ .$$

Herkansingsexamen/tentamen januari 1976

1. Onderzoek of

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \frac{\sin(x-y)}{x-y+y^2}$$

bestaat.

2. In $\mathbb{R}^3$ is een kromme gegeven met parametervoorstelling

$$\underline{x}(t) = (t\sqrt{2}, e^{-t}, e^{t}), \qquad t \in \mathbb{R} ,$$

Bepaal de lengte van dat deel van de kromme waarvoor $0 \le t \le 1$.

3. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ is gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Toon aan dat A orthogonaal is.

b) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

c) Toon aan dat A de deelruimte V, bepaald door

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 , \\ x_2 + x_4 = 0 , \end{cases}$$

in zichzelf afbeeldt.

d) Bepaal het orthoplement van V.

4. Bereken

$$\int_0^1 dy \int_y^1 y^2 e^{x^2} dx .$$

5. Bepaal de extrema van $\cos \sqrt[3]{xy}$ op

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \le \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi^3}\} .$$

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1976

1. De functie $f(x,y) = \dfrac{\sin(x-y)}{x-y+y^2}$ is gedefinieerd voor $x - y + y^2 \neq 0$. De punten (x,y) waarvoor $x-y+y^2=0$ liggen op de parabool door $\underline{0}$ en $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ met as $y = \frac{1}{2}$, zodat $\underline{0}$ verdichtingspunt van DOM f is. De rechte $y = x$ $(x \neq 0)$ is een nullijn van f. Op de x-as $(x \neq 0)$ wordt de functie gegeven door $f(x,0) = \dfrac{\sin x}{x}$. Dus $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 0$ en $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1$. Hieruit volgt dat

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \frac{\sin(x-y)}{x-y+y^2}$$

niet bestaat.

2. De gevraagde lengte wordt gegeven door

$$\int_0^1 \|\dot{\underline{x}}(t)\|dt = \int_0^1 \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-e^{-t})^2 + (e^t)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2e^t.e^{-t} + (e^{-t})^2 + (e^t)^2}\,dt = \int_0^1 (e^t + e^{-t})dt =$$

$$= [e^t - e^{-t}]_0^1 = e - \frac{1}{e}.$$

3. a) De kolommen van de matrix van A vormen een orthonormaal stelsel. Dus A is een orthogonale afbeelding.

   b) De karakteristieke vergelijking van A is

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 1 = 0 .$$

   De eigenwaarden van A zijn de reële wortels van deze vergelijking, dus $\lambda = 1$ en $\lambda = -1$.

De eigenvectoren bij $\lambda = 1$ zijn oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} -x_1 + x_4 = 0 , \\ x_1 - x_2 = 0 , \\ x_2 - x_3 = 0 , \\ x_3 - x_4 = 0 . \end{cases}$$

Stel $x_1 = \alpha$, dan is $x_4 = \alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \alpha$. De eigenvectoren bij eigenwaarde 1 zijn dus $\underline{x} = \alpha(1,1,1,1)$ met $\alpha \neq 0$.

De eigenvectoren bij $\lambda = -1$ zijn oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 , \\ x_1 + x_2 = 0 , \\ x_2 + x_3 = 0 , \\ x_3 + x_4 = 0 . \end{cases}$$

Stel $x_1 = \beta$, dan is $x_4 = -\beta$, $x_2 = -\beta$, $x_3 = \beta$, zodat de eigenvectoren bij eigenwaarde -1 zijn $\underline{x} = \beta(1,-1,1,-1)$ met $\beta \neq 0$.

c) Bepaal een parametervoorstelling van V door te stellen $x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$. Dan is $x_3 = -\lambda$ en $x_4 = -\mu$, zodat $\underline{x} = \lambda(1,0,-1,0) + \mu(0,1,0,-1)$. Voor alle $\underline{x} \in V$ geldt dus

$$A\underline{x} = \lambda A(1,0,-1,0) + \mu A(0,1,0,-1) =$$
$$= \lambda(0,1,0,-1) + \mu(-1,0,1,0)$$

voor zekere $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Aangezien $(0,1,0,-1) \in V$, $(-1,0,1,0) \in V$ is ook $A\underline{x} \in V$. Dit betekent dat A de deelruimte V in zichzelf afbeeldt.

d) Het orthoplement van het vlak V is de verzameling

$$V^{\perp} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \underline{x} \perp V\} .$$

Daar $\underline{x} \perp V$ dan en slechts dan als $\underline{x} \perp (1,0,-1,0)$ en $\underline{x} \perp (0,1,0,-1)$ (zie c)) is $V^{\perp}$ de oplossingsverzameling van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 , \\ x_2 - x_4 = 0 . \end{cases}$$

Stel $x_1 = \rho$, $x_2 = \sigma$, dan is $x_3 = \rho$, $x_4 = \sigma$. Dus $V^{\perp}$ is het vlak $\underline{x} = \rho(1,0,1,0) + \sigma(0,1,0,1)$.

4. Er is geen elementaire functie waarvan de afgeleide e^{x^2} is, dus zullen we de integratievolgorde moeten verwisselen. Het integratiegebied is de driehoek G gegeven door $0 \le y \le 1$, $y \le x \le 1$, zodat

$$\int_0^1 dy \int_y^1 y^2 e^{x^2} dx = \iint_G y^2 e^{x^2} dxdy = \int_0^1 e^{x^2} dx \int_0^x y^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 te^t dt = \frac{1}{6} \int_0^1 tde^t = \frac{1}{6}\, te^t \Big|_0^1 - \frac{1}{6} \int_0^1 e^t dt = \frac{1}{6} e - \frac{1}{6} e + \frac{1}{6} = \frac{1}{6},$$

waarbij de substitutie $x^2 = t$ is toegepast.

5. De begrensde gesloten verzameling V gegeven door

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \le \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi^3}\}$$

is het vierkant met hoekpunten $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\pi^3},0)$, $(0,\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\pi^3})$. De functie $f(x,y) = \cos \sqrt[3]{xy}$ is continu op V. Volgens de stelling van Weierstrass heeft f op V een globaal maximum en een globaal minimum. Op de x-as en op de y-as heeft f de waarde $\cos 0 = 1$. Dit is uiteraard het globale maximum van f. Behalve de x-as en de y-as zijn niveaulijnen van f de hyperbolen $xy = C$ met $C \neq 0$.

In het eerste en derde kwadrant is $C > 0$ en in het tweede en vierde kwadrant is $C < 0$.

Beschouw het eerste kwadrant.

Als C toeneemt, neemt de functiewaarde $\cos \sqrt[3]{C}$ af (althans voor $0 < \sqrt[3]{C} \le \pi$).

Bepaal nu C zodanig dat de hyperbool $xy = C$ raakt aan de zijde $x + y = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi^3}$ van V. Op grond van symmetrieoverwegingen ligt het raakpunt op de rechte $y = x$.

Het raakpunt is dus $(\frac{1}{4}\sqrt{2\pi^3}, \frac{1}{4}\sqrt{2\pi^3})$ en de bijbehorende waarde van C is $(\frac{1}{4}\sqrt{2\pi^3})^2 = \pi^3/8$.

Hieruit volgt dat f in het punt $(\frac{1}{4}\sqrt{2\pi^3}, \frac{1}{4}\sqrt{2\pi^3})$ een minimum heeft met waarde $\cos \sqrt[3]{\pi^3/8} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

In het derde kwadrant vinden we op dezelfde manier een minimum 0 in het punt $(-\frac{1}{4}\sqrt{2\pi^3}, -\frac{1}{4}\sqrt{2\pi^3})$. (Dit minimum vinden we ook door te bedenken dat $f(-x,-y) = f(x,y)$.)

In het tweede en vierde kwadrant geldt: als C afneemt, neemt de functiewaarde $\cos\sqrt[3]{C}$ ook af (althans voor $-\pi \le \sqrt[3]{C} < 0$). Dit levert op dezelfde wijze minima in de punten $(-\frac{1}{4}\sqrt{2\pi^3}, \frac{1}{4}\sqrt{2\pi^3})$ en $(\frac{1}{4}\sqrt{2\pi^3}, -\frac{1}{4}\sqrt{2\pi^3})$ met waarde $\cos\sqrt[3]{-\pi^3/8} = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$.

(Eenvoudiger manier: bedenk dat $f(-x,y) = f(x,y)$).

Samenvattend: f heeft op V

een globaal maximum 1 in de punten $(x,0)$ met $|x| \le \frac{1}{2}\sqrt{2\pi^3}$ en in de punten $(0,y)$ met $|y| \le \frac{1}{2}\sqrt{2\pi^3}$;

een globaal minimum 0 in de punten $\pm(\frac{1}{4}\sqrt{2\pi^3}, \frac{1}{4}\sqrt{2\pi^3})$, $\pm(\frac{1}{4}\sqrt{2\pi^3}, -\frac{1}{4}\sqrt{2\pi^3})$.

N.B. Op de x-as en op de y-as is f niet differentieerbaar, behalve in (0,0):

1°. Voor $(a,0) \ne (0,0)$ geldt:

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(a,k) - f(a,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\cos\sqrt[3]{ak} - 1}{k}$$

bestaat niet; $f_y(a,0)$ bestaat niet.

2°. Voor $(0,b) \ne (0,0)$ geldt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,b) - f(0,b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos\sqrt[3]{hb} - 1}{h}$$

bestaat niet; $f_x(0,b)$ bestaat niet.

3°.
$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 ;$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0 ;$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - hf_x(0,0) - kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\cos\sqrt[3]{hk} - 1}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 ,$$

want

$$\left|\frac{\cos\sqrt[3]{hk} - 1}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right| = \frac{1 - \cos\sqrt[3]{hk}}{\|\underline{h}\|} = \frac{2\sin^2(\frac{1}{2}\sqrt[3]{hk})}{\|\underline{h}\|} \le \frac{2.(\frac{1}{2}\sqrt[3]{hk})^2}{\|\underline{h}\|} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{h^2k^2}}{2\|\underline{h}\|} \le \frac{\|\underline{h}\|^{4/3}}{2\|\underline{h}\|} = \frac{1}{2}\|\underline{h}\|^{1/3} \quad \text{en}$$

$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{1}{2}\|\underline{h}\|^{1/3} = 0$, waarin $\underline{h} = (h,k)$.

Gevolg. Het punt (0,0) is een stationair punt van f.

Opmerking. Daar het opsporen van dit stationaire punt al zoveel moeite kost is het eenvoudiger om een oplossing te kiezen die geen gebruik maakt van stationaire punten. Zo'n oplossing hebben we in het voorgaande gegeven.

P 3.76

Proeftentamen maart 1976

1. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven de rechten

$$\ell: \underline{x} = (3,2,-2) + \lambda(2,1,-3)$$

en

$$m: \underline{x} = (1,-5,1) + \mu(1,-2,1) .$$

Bepaal de vergelijking van het vlak dat evenwijdig is aan de rechten ℓ en m en waarvan de afstand tot ℓ gelijk is aan de afstand tot m.

2. Gegeven is de kromme K met parametervoorstelling

$$(x(t),y(t)) = (t - 2 \sin t,\ 1 - 2 \cos t), \quad t \in \mathbb{R} .$$

a) Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan K in het punt corresponderend met $t = \frac{\pi}{2}$.

b) Bepaal de punten van K waar de raaklijn horizontaal is en de punten van K waar de raaklijn verticaal is.

c) Schets het deel van K waarvoor $-\pi \le t \le \pi$.

3. De functie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x,y) = x \sin(x + y) .$$

a) Bepaal van de Taylorreeks van f rond $(\pi,0)$ de termen tot en met die van graad 2.

b) Bereken de richtingsafgeleide van f in het punt $(\pi,0)$ in de richting van $\frac{1}{5}(3,-4)$.

4. Gegeven is het oppervlak S: $x^2 - y^2 - 3z = 0$.

a) Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan S dat gaat door het punt (p,q,r), gelegen op S.

b) Bepaal het punt (p,q,r) op S zo, dat het raakvlak in dit punt aan S gaat door het punt $(0,0,-1)$ en evenwijdig is aan de rechte $\underline{x} = \lambda(2,1,2)$.

5. Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de functie

$$f(x,y) = (x^2 - y)^2 + x^5$$

op de verzameling

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1,\ x^2 - 1 \le y \le x^2 + 1\} .$$

Oplossingen Proeftentamen maart 1976

1. De richtingsvectoren $\underline{a} = (2,1,-3)$ en $\underline{b} = (1,-2,1)$ van ℓ en m zijn evenwijdig aan het gevraagde vlak V, dus $\underline{a} \times \underline{b} = (-5,-5,-5)$ staat er loodrecht op.
De vergelijking van V is dan $x + y + z = c$ met nader te bepalen c. De afstand van V tot ℓ is gelijk aan de afstand van een willekeurig punt $\underline{d}$ van ℓ tot V.
Kies $\underline{d} = (3,2,-2)$.
De afstand van V tot m is gelijk aan de afstand van $\underline{e} = (1,-5,1) \in m$ tot V.
Op grond van de stelling van Hesse zijn beide afstanden gelijk als

$$\left|\frac{3+2-2-c}{\sqrt{1+1+1}}\right| = \left|\frac{1-5+1-c}{\sqrt{1+1+1}}\right| .$$

Hieruit volgt $|3 - c| = |3 + c|$, $c = 0$, zodat de vergelijking van V wordt $x + y + z = 0$.

Opmerking. Een andere methode om de constante c te bepalen is de volgende. Voor een willekeurig punt $\underline{p}$ op ℓ en een willekeurig punt $\underline{q}$ op m geldt $\frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q}) \in V$.
Dus in het bijzonder $\frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{e}) = (2,-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}) \in V$, zodat $c = 2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

2. a) Een richtingsvector van de raaklijn aan K in het punt $(x(\frac{\pi}{2}),y(\frac{\pi}{2})) = (\frac{\pi}{2}-2,1)$ is

$$(\dot{x}(\tfrac{\pi}{2}),\dot{y}(\tfrac{\pi}{2})) = (1-2\cos\tfrac{\pi}{2}, 2\sin\tfrac{\pi}{2}) = (1,2) ,$$

zodat $\underline{x} = (\frac{\pi}{2}-2,1) + \lambda(1,2)$ een parametervoorstelling van deze raaklijn is.

b) De raaklijn aan K is horizontaal als $\dot{y}(t) = 2\sin t = 0$ en $\dot{x}(t) = 1 - 2\cos t \neq 0$, dus als $t = k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$; dit geeft de punten $(k\pi, 1 + 2(-1)^{k+1})$, $k \in \mathbb{Z}$.
De raaklijn aan K is verticaal als $\dot{x}(t) = 1 - 2\cos t = 0$ en $\dot{y}(t) = 2\sin t \neq 0$, dus als $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$ of $t = -\frac{\pi}{3} + 2\ell\pi$ met $\ell \in \mathbb{Z}$; dit geeft de punten

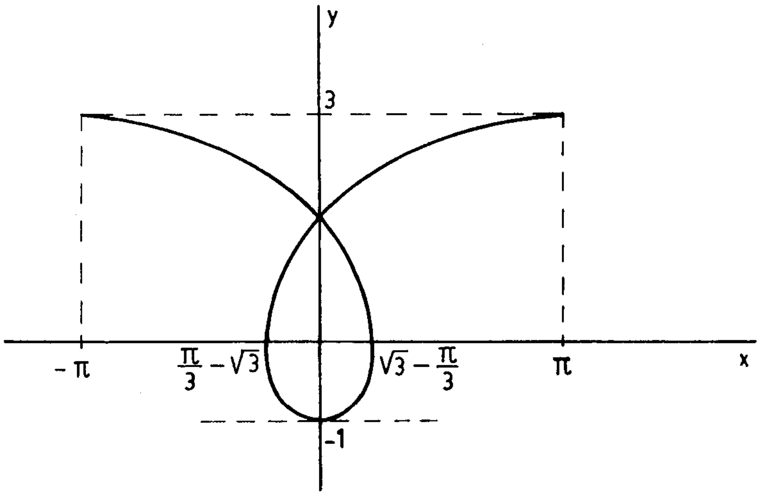
$$(\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi - \sqrt{3},0),\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{en} \quad (-\tfrac{\pi}{3} + 2\ell\pi + \sqrt{3},0),\ \ell \in \mathbb{Z} .$$

c) Het deel K' van K waarvoor $-\pi \le t \le \pi$ heeft een horizontale raaklijn in de punten $(-\pi,3)$, $(0,-1)$ en $(\pi,3)$ en een verticale raaklijn in de punten $(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3},0)$ en $(-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3},0)$ (zie b)).

Wegens $(x(-t),y(-t)) = (-x(t),y(t))$ is K' symmetrisch ten opzichte van de y-as.

Op het interval $0 \le t \le \pi$ is $\dot{y}(t) = 2 \sin t \ge 0$, dus y monotoon stijgend van $y(0) = -1$ tot $y(\pi) = 3$. Uit $\dot{x}(t) = 1 - 2 \cos t$ volgt dat x monotoon dalend is op het interval $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$ $(x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} = -0{,}68)$ en monotoon stijgend op het interval $\frac{\pi}{3} \le t \le \pi$ $(x(\pi) = \pi)$.

Met deze gegevens maken we de volgende tekening van K'.



3. a) De Taylorreeks van f rond $(\pi,0)$ is

$$f(\pi,0) + (x-\pi)f_x(\pi,0) + yf_y(\pi,0) +$$

$$+ \frac{1}{2!}[(x-\pi)^2 f_{xx}(\pi,0) + 2(x-\pi)yf_{xy}(\pi,0) + y^2 f_{yy}(\pi,0)] + \dots .$$

Met $f(\pi,0) = \pi \sin \pi = 0$,

$$f_x(x,y) = \sin(x+y) + x\cos(x+y) ,$$

$$f_y(x,y) = x\cos(x+y) ,$$

$$f_{xx}(x,y) = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y) ,$$

$$f_{xy}(x,y) = \cos(x+y) - x\sin(x+y) ,$$

$$f_{yy}(x,y) = -x\sin(x+y) ;$$

$$f(\pi,0) = 0,\ f_x(\pi,0) = -\pi,\ f_y(\pi,0) = -\pi,$$

$$f_{xx}(\pi,0) = -2,\ f_{xy}(\pi,0) = -1,\ f_{yy}(\pi,0) = 0 ,$$

wordt de reeks

$$-\pi(x-\pi) - \pi y - (x-\pi)^2 - (x-\pi)y + \dots .$$

Opmerking. Men kan ook gebruik maken van de bekende reeksontwikkeling van sin z (rond 0). Dan volgt

$$f(x,y) = f(\pi + h,k) = (\pi + h)\sin(\pi + h + k) =$$

$$= -(\pi + h)\sin(h + k) = -(\pi + h)[(h + k) - \frac{1}{3!}(h + k)^3 + \ldots] =$$

$$= -\pi(h + k) - h(h + k) + \ldots =$$

$$= -\pi(x - \pi) - \pi y - (x - \pi)^2 - (x - \pi)y + \ldots .$$

b) De functie f is differentieerbaar, zodat de richtingsafgeleide van f in $(\pi,0)$ in de richting van $\underline{v} = \frac{1}{5}(3,-4)$ gelijk is aan $(\text{grad } f(\pi,0),\underline{v}) = -\frac{3\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$ (zie a)).

4. a) Het punt (p,q,r) ligt op S, dus $p^2 - q^2 = 3r$. Het oppervlak S wordt gegeven door de vergelijking $z = (x^2 - y^2)/3$.
Hieruit volgt $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{3}$; $\frac{\partial z}{\partial x}(p,q) = \frac{2p}{3}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(p,q) = -\frac{2q}{3}$, zodat de vergelijking van het raakvlak V aan S in het punt (p,q,r) wordt

$$z - r = \frac{2p}{3}(x - p) - \frac{2q}{3}(y - q) = \frac{2px}{3} - \frac{2qy}{3} - \frac{2}{3}(p^2 - q^2) =$$

$$= \frac{2px}{3} - \frac{2qy}{3} - 2r ,$$

$$2px - 2qy - 3z = 3r .$$

b) 1°. $(0,0,-1)$ in V geeft $3 = 3r$, $r = 1$.
2°. V evenwijdig aan de rechte $\underline{x} = \lambda(2,1,2)$ geeft $(2p,-2q,-3) \perp (2,1,2)$, $4p - 2q - 6 = 0$, $q = 2p - 3$. (De rechte ligt niet in V omdat V niet door de oorsprong gaat!).
Uit $p^2 - q^2 = 3r = 3$ en $q = 2p - 3$ volgt $p^2 - (2p - 3)^2 = 3$, $-3p^2 + 12p - 12 = 0$, $(p - 2)^2 = 0$, dus $p = 2$, $q = 1$.
Het gevraagde punt is $(2,1,1)$.

5. V is de gesloten verzameling begrensd door de rechten $x = -1$, $x = 1$ en door de parabolen $y = x^2 - 1$, $y = x^2 + 1$.
Volgens de stelling van Weierstrass heeft de continue functie f op V een globaal maximum en een globaal minimum.
Nullijnen van f zijn moeilijk te bepalen en van het tekenverloop van f kunnen we weinig meer zeggen dan

1°. $f(x,y) > 0$ voor $x > 0$,

2°. $f(x,x^2) = x^5 \leq 0$ voor $x \leq 0$.

We proberen de extrema te berekenen zonder gebruik te maken van de hoogtekaart van f.

Uit grad $f(x,y) = (4x(x^2 - y) + 5x^4, -2(x^2 - y))$ volgt dat $(0,0)$ het enige stationaire punt van f is.

In $(0,0)$ heeft f geen extreem op grond van 1° en 2°.

Opmerking. Het zogenaamde Δ-criterium geeft hier geen uitsluitsel, want $f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 4y + 20x^3$, $f_{xy}(x,y) = -4x$, $f_{yy}(x,y) = 2$, zodat

$$\Delta(0,0) = f_{xx}(0,0).f_{yy}(0,0) - (f_{xy}(0,0))^2 = 0 .$$

De functie f heeft dus extrema in randpunten van V.

i) Voor $x = -1$ geldt $f(-1,y) = (1 - y)^2 - 1$, $0 \leq y \leq 2$. Deze functie heeft een minimum -1 voor $y = 1$ en een maximum 0 voor $y = 0$ en voor $y = 2$.

ii) Voor $x = 1$ geldt $f(1,y) = (1 - y)^2 + 1$, $0 \leq y \leq 2$. Deze functie heeft een minimum 1 voor $y = 1$ en een maximum 2 voor $y = 0$ en voor $y = 2$.

iii) Voor $y = x^2 - 1$ geldt $f(x,x^2 - 1) = 1 + x^5$, $-1 \leq x \leq 1$. Deze functie heeft een minimum 0 voor $x = -1$ en een maximum 2 voor $x = 1$.

iv) Voor $y = x^2 + 1$ geldt $f(x,x^2 + 1) = 1 + x^5$, $-1 \leq x \leq 1$. Dit is dezelfde functie als bij iii).

Hieruit volgt dat 2 het globale maximum van f op V is, aangenomen in de punten $(1,0)$ en $(1,2)$ (zie ii), iii) en iv)), en dat -1 het globale minimum van f op V is, aangenomen in het punt $(-1,1)$ (zie i)).

In de punten $(-1,0)$ en $(-1,2)$ heeft f een maximum 0 ten opzichte van $x = -1$ (zie i)) en een minimum 0 ten opzichte van $y = x^2 - 1$ resp. $y = x^2 + 1$ (zie iii) en iv)).

In deze punten heeft f dus geen extreem. In het punt $(1,1)$ tenslotte heeft f een minimum 1 ten opzichte van $x = 1$ (zie ii)). Ten opzichte van de parabool $y = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$, heeft f echter een maximum in $(1,1)$, want $f(x,x^2) = x^5$.

Dus ook in $(1,1)$ heeft f geen extreem.

Samenvattend: f heeft op V een globaal maximum 2 in de punten $(1,0)$ en $(1,2)$; een globaal minimum -1 in het punt $(-1,1)$.

Examen/tentamen mei 1976

1. a) Gegeven is de kromme met parametervoorstelling

$$(x(t),y(t)) = (\sin t - t\cos t,\ \cos t + t\sin t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Bepaal $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{d^2y}{dx^2}$ in het punt corresponderend met $t = \frac{\pi}{6}$.

b) Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de functie

$$f(x,y) = (x^2 - 1)^2 - y^4$$

op de verzameling

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2},\ y \leq 1\}.$$

---

2. a) Bepaal het orthoplement van de deelruimte $<\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}>$ van $\mathbb{R}^4$ waarbij

$\underline{a} = (4,7,-6,1)$,
$\underline{b} = (2,6,2,-2)$,
$\underline{c} = (-2,-1,8,-3)$,
$\underline{d} = (-2,-6,-2,2)$.

b) De lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ is gegeven door de matrix

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een basis voor de nulruimte en een basis voor de beeldruimte van A.

c) Voor welke waarden van p en q is het stelsel

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ 1 \\ q \end{pmatrix}$$

oplosbaar?

d) Er geldt $A^2 = A$. Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van A.

3. Bereken van de bol met straal R en het middelpunt in de oorsprong de oppervlakte van het deel dat in bolcoördinaten gegeven wordt door

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6} \quad \text{en} \quad \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{4} .$$

4. Bereken het volume van het lichaam in $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$x^2 + y^2 \le z \le 2x + 2y .$$

Oplossingen Tentamen mei 1976

1. a) Uit $\dot{x}(t) = \cos t - \cos t + t \sin t = t \sin t$, $\dot{y}(t) = t \cos t$ volgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{t \cos t}{t \sin t} = \cot t \quad \text{voor } t \sin t \neq 0 .$$

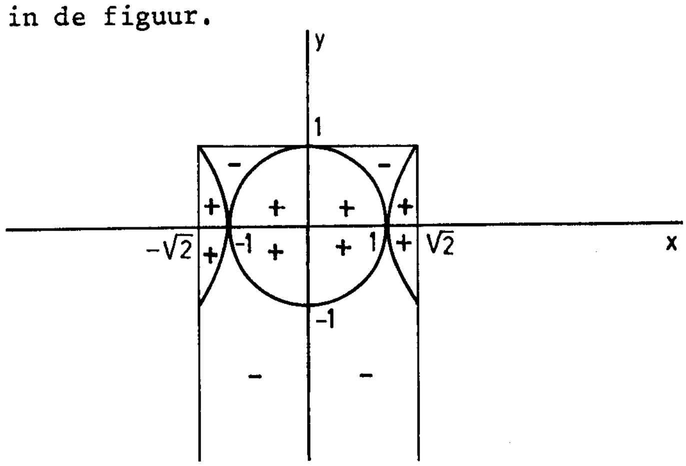
Met behulp van de kettingregel volgt hieruit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{\dot{x}(t)} = -\frac{1}{t \sin^3 t}, \qquad t \sin t \neq 0 .$$

In het punt corresponderend met $t = \frac{\pi}{6}$ geldt dus

$$\frac{dy}{dx} = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, \; \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6}{\pi \sin^3 \frac{\pi}{6}} = -\frac{48}{\pi} .$$

b) Nullijnen van f zijn de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ en de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$, want $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2 - 1)$. De tekenverdeling van f op V is aangegeven in de figuur.



Uit grad $f(x,y) = (4x(x^2 - 1), -4y^3)$ volgt dat $(-1,0)$, $(0,0)$ en $(1,0)$ de stationaire punten van f zijn. In $(-1,0)$ en in $(1,0)$ heeft f geen extreem zoals blijkt uit de figuur.

In het punt $(0,0)$ heeft f een maximum met waarde 1. Beschouw namelijk de begrensde gesloten verzameling

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} .$$

Op W heeft de continue functie f een globaal maximum en een globaal minimum volgens de stelling van Weierstrass. Het globale minimum van f op W is blijkbaar nul (zie figuur) en het globale maximum van f op W wordt aangenomen in een inwendig punt van W, dus in het enige stationaire punt $(0,0)$ in het inwendige van W.

Aangezien een globaal maximum op W zeker een locaal maximum ten opzichte van V is heeft f in (0,0) een (locaal) maximum.

Opmerking. Uit $f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 4$, $f_{xy}(x,y) = 0$ en $f_{yy}(x,y) = -12y^2$ volgt dat

$$\Delta(\underline{p}) = f_{xx}(\underline{p}) \cdot f_{yy}(\underline{p}) - (f_{xy}(\underline{p}))^2 = 0$$

voor $\underline{p} = (-1,0)$, $\underline{p} = (0,0)$ en voor $\underline{p} = (1,0)$, zodat het Δ-criterium geen uitsluitsel geeft.

Randonderzoek:

i) $y = 1$, $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$: $f(x,1) = (x^2-1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 = g(x)$. Uit $g'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$ volgt dat g een maximum heeft voor $x = -\sqrt{2}$ en voor $x = \sqrt{2}$ met waarde $g(\pm\sqrt{2}) = 0$, een maximum voor $x = 0$ met waarde $g(0) = 0$ en minima voor $x = -1$ en voor $x = 1$ met waarde $g(\pm 1) = -1$. Uit de figuur blijkt dat de maxima van f t.o.v. de rand van V geen extrema van f t.o.v. V zijn. In de punten (-1,1) en (1,1) heeft f minima t.o.v. V. Om dit in te zien passen we de stelling van Weierstrass toe op het "driehoekige" gebied in het eerste kwadrant waar $f(x,y) \le 0$ is. In dit gebied heeft f geen stationaire punten, zodat het globale minimum op de rand van het gebied wordt aangenomen, dus in (1,1). Op dezelfde manier (of door gebruik te maken van $f(-x,y) = f(x,y)$) bewijzen we dat f in (-1,1) een (locaal) minimum t.o.v. V heeft.

ii) $x = -\sqrt{2}$, $y \le 1$ en $x = \sqrt{2}$, $y \le 1$ geven $f(\pm\sqrt{2},y) = 1 - y^4$. Deze functie heeft voor $y = 0$ een maximum met waarde 1 en voor $y = 1$ een minimum met waarde 0. In de punten $(-\sqrt{2},1)$ en $(\sqrt{2},1)$ heeft f geen extrema (zie i)). In de punten $(-\sqrt{2},0)$ en $(\sqrt{2},0)$ heeft f maxima t.o.v. V, hetgeen weer volgt uit de stelling van Weierstrass toegepast op de gebieden gegeven door $-\sqrt{2} \le x \le -1$, $x^2 - y^2 \ge 1$ resp. $1 \le x \le \sqrt{2}$, $x^2 - y^2 \ge 1$. De locale maxima in $(-\sqrt{2},0)$, $(0,0)$ en $(\sqrt{2},0)$, alle met waarde 1, blijken tevens globale maxima van f op V te zijn (zie figuur).

De minima in (-1,1) en (1,1) zijn locale minima, want $\lim\limits_{y \to -\infty} f(\pm\sqrt{2},y) = -\infty$.

Samenvattend, f heeft op V een globaal maximum 1 in de punten $(\pm\sqrt{2},0)$ en (0,0); een locaal minimum -1 in de punten $(\pm 1,1)$.

2. a) Het orthoplement van $\langle \underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d} \rangle$ is de verzameling

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \underline{x} \perp \langle \underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d} \rangle\} ,$$

dus de oplossingsverzameling van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} (\underline{x},\underline{a}) = 4x_1 + 7x_2 - 6x_3 + x_4 = 0 , \\ (\underline{x},\underline{b}) = 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 , \\ (\underline{x},\underline{c}) = -2x_1 - x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 0 , \\ (\underline{x},\underline{d}) = -2x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 . \end{cases}$$

Met vegen bepalen we een equivalent stelsel vergelijkingen:

$$\begin{matrix} 4 & 7 & -6 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & -2 & 2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 5 & 10 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -5 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{matrix} ,$$

dus

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 , \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = 0 . \end{cases}$$

Stel $x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$, dan is $x_3 = \lambda + 2\mu$, $x_4 = 2\lambda + 5\mu$, zodat een parametervoorstelling van het gevraagde orthoplement is $\underline{x} = \lambda(1,0,1,2) + \mu(0,1,2,5)$.

b) De rijen van de matrix van A zijn $\frac{1}{10}\underline{a}$, $\frac{1}{10}\underline{b}$, $\frac{1}{10}\underline{c}$, $\frac{1}{10}\underline{d}$, zodat de nulruimte van A het in a) bepaalde orthoplement is. Een basis voor de nulruimte van A is dus $(1,0,1,2)$, $(0,1,2,5)$.

De beeldruimte van A wordt opgespannen door de kolomvectoren van de matrix van A. Een basis van de beeldruimte van A bepalen we door vegen:

$$\begin{matrix} 4 & 2 & -2 & -2 \\ 7 & 6 & -1 & -6 \\ -6 & 2 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 5 & 0 \\ -10 & 0 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & -5 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} .$$

Een basis voor de beeldruimte van A is dus

$$(1,1,0,-1),\ (1,0,-1,0) .$$

c) De vergelijking $A\underline{x} = \begin{pmatrix}1\\p\\1\\q\end{pmatrix}$ is oplosbaar dan en slechts dan als $\begin{pmatrix}1\\p\\1\\q\end{pmatrix}$ in de beeldruimte van A ligt, dus dan en slechts dan als

$$\begin{pmatrix}1\\p\\1\\q\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

voor zekere α en β (zie b)). Dit geeft het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases}1 = \alpha + \beta \,,\\ p = \alpha \,,\\ 1 = -\beta \,,\\ q = -\alpha \,.\end{cases}$$

Dus $\beta = -1$, $\alpha = 2$, zodat $p = 2$, $q = -2$.

d) Als λ eigenwaarde van A is, dan is er een vector $\underline{v} \in \mathbb{R}^4$ met $\underline{v} \neq \underline{0}$ en $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$. Dan is $A^2\underline{v} = \lambda A\underline{v} = \lambda^2\underline{v}$, waaruit met $A^2 = A$ volgt $\lambda^2\underline{v} = \lambda\underline{v}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$, dus $\lambda^2 = \lambda$.

Mogelijke eigenwaarden van A zijn dus $\lambda = 0$ en $\lambda = 1$. Dat $\lambda = 0$ inderdaad een eigenwaarde van A is volgt uit het feit dat de nulruimte van A dimensie 2 heeft (zie b)). Eigenvectoren bij $\lambda = 0$ zijn $\underline{v} = \alpha(1,0,1,2) + \beta(0,1,2,5)$, met $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$.

Ook $\lambda = 1$ is een eigenwaarde van A. Bijbehorende eigenvectoren zijn $\underline{v} \neq \underline{0}$ in de beeldruimte van A, dus

$$\underline{v} = \gamma(1,1,0,-1) + \delta(1,0,-1,0) \quad \text{met } (\gamma,\delta) \neq (0,0) \,.$$

Immers, uit $\underline{v} = A\underline{v}$ volgt dat $\underline{v}$ in de beeldruimte van A ligt. Anderzijds volgt voor $\underline{v}$ in de beeldruimte van A: $\underline{v} = A\underline{w}$ voor zekere $\underline{w}$, dus $A\underline{v} = A^2\underline{w} = A\underline{w} = \underline{v}$, zodat elke $\underline{v} \neq \underline{0}$ in de beeldruimte van A eigenvector bij eigenwaarde 1 is.

Opmerking. Uiteraard kan men de eigenvectoren bij $\lambda = 1$ ook vinden door de oplossingen te bepalen van $(A - I)\underline{x} = \underline{0}$.

3. Zij G het deel van de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gegeven door $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$.

T 5.76

Voor de maat $\Delta\sigma$ van het oppervlakte-element van G gegeven door $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_1 + \Delta\varphi$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + \Delta\theta$, $\Delta\varphi$ en $\Delta\theta$ klein, geldt $\Delta\sigma \approx R^2 \sin\theta_1 \Delta\varphi\Delta\theta$.

De oppervlakte van G is dus gelijk aan

$$\iint_G d\sigma = R^2 \int_0^{\pi/6} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin\theta\, d\theta = -\frac{1}{6}\pi R^2 \cos\theta \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} =$$

$$= \frac{1}{12}\pi R^2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \; .$$

4. Het lichaam wordt begrensd door de paraboloide $z = x^2 + y^2$ en het vlak $z = 2x + 2y$. De paraboloide snijdt het vlak volgens een kromme waarvan de projectie op het (x,y)-vlak gegeven wordt door $x^2 + y^2 = 2x + 2y$, $z = 0$. Dit is de cirkel met vergelijking $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ in het vlak $z = 0$. Het gevraagde volume is dan

$$V = \iint_{G_0} (2x + 2y - x^2 - y^2)dxdy = \iint_{G_0} (2 - (x-1)^2 - (y-1)^2)dxdy \; ,$$

waarin $G_0 = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2\}$.
Het is duidelijk dat

$$V = \iint_{H_0} (2 - u^2 - v^2)dudv \; ,$$

waarin $H_0 = \{(u,v) \mid u^2 + v^2 \leq 2\}$.
In poolcoördinaten wordt dit

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2)r\, dr = 2\pi[r^2 - \tfrac{1}{4}r^4]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \; .$$

Herkansingsexamen/tentamen juni 1976

1. a) In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven het vlak

$$V: 2x - y - 3z + 2 = 0$$

en de rechten

$$\ell: \underline{x} = (2,3,3) + \lambda(-1,2,1)$$

en

$$m: \underline{x} = (7,0,2) + \mu(1,2,3) .$$

Geef een parametervoorstelling van de rechte die evenwijdig is aan V, ℓ en m snijdt en loodrecht op ℓ staat.

b) De functie f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x,y) = xy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

i) Toon met behulp van de definitie van differentieerbaarheid aan dat f differentieerbaar is in elk punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

ii) Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt (1,1,1).

2. Onder $D(\underline{a},\underline{b},\underline{x})$ verstaan we de determinant van de vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{x}$ in $\mathbb{R}^3$.
Verder is van de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ gegeven dat $\|\underline{a}\| = 1$, $\|\underline{b}\| = 1$ en dat de hoek tussen $\underline{a}$ en $\underline{b}$ gelijk is aan $\frac{\pi}{6}$.
De lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd door

$$A\underline{x} = \underline{x} - 8D(\underline{a},\underline{b},\underline{x}) \cdot \underline{a} \times \underline{b} .$$

a) Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van A.

b) Bewijs dat A een spiegeling is.

3. Zij V de verzameling van alle polynomen van graad hoogstens 2 inclusief het nulpolynoom.
Laat voor iedere $f \in V$ de functie Tf gedefinieerd zijn door

$$(Tf)(x) = (x + 1)f'(x), \quad x \in \mathbb{R} .$$

Hierdoor is de afbeelding $T: V \to V$ bepaald, die lineair is.
Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van T.

4\. a) Zij A dat deel van het oppervlak van de cylinder $y^2 + z^2 = 1$ waarvoor geldt $y \geq 0$, $z \geq 0$ en $0 \leq x \leq \sqrt{y} \leq 1$.
De massadichtheid (massa per eenheid van oppervlakte) in het punt (x,y,z) van A is gelijk aan x.
Bepaal de massa van A.

b) Bereken

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-x^2-y^2-z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dxdydz \ .$$

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1976

1\. a) Neem een punt $\underline{p} = (2 - \lambda, 3 + 2\lambda, 3 + \lambda)$ op ℓ en een punt $\underline{q} = (7 + \mu, 2\mu, 2 + 3\mu)$ op m.
Een richtingsvector van de rechte door $\underline{p}$ en $\underline{q}$ is

$$\underline{p} - \underline{q} = (-5 - \lambda - \mu, 3 + 2\lambda - 2\mu, 1 + \lambda - 3\mu) .$$

De rechte door $\underline{p}$ en $\underline{q}$ is evenwijdig aan V als $(\underline{p} - \underline{q}, \underline{a}) = 0$, waarbij $\underline{a} = (2,-1,-3)$ een vector is loodrecht op V.
Deze rechte staat loodrecht op ℓ als $(\underline{p} - \underline{q}, \underline{b}) = 0$ met $\underline{b} = (-1,2,1)$.
Dit geeft de vergelijkingen

$$\begin{cases} 2(-5 - \lambda - \mu) - (3 + 2\lambda - 2\mu) - 3(1 + \lambda - 3\mu) = 0 , \\ -(-5 - \lambda - \mu) + 2(3 + 2\lambda - 2\mu) + (1 + \lambda - 3\mu) = 0 , \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7\lambda - 9\mu = -16 , \\ \lambda - \mu = -2 , \end{cases}$$

met oplossingen $\lambda = -1$, $\mu = 1$, zodat $\underline{p} = (3,1,2)$, $\underline{q} = (8,2,5)$.
Een parametervoorstelling van de gevraagde rechte is dus

$$\underline{x} = \underline{p} + \rho(\underline{q} - \underline{p}) = (3,1,2) + \rho(5,1,3) .$$

b) i) Kies een willekeurig punt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ en schrijf

$$f(a + h, b + k) = f(a,b) + Ah + Bk + \sqrt{h^2 + k^2}\,\rho(h,k)$$

met $A = f_x(a,b) = b$ en $B = f_y(a,b) = a$.
Dit geeft voor $(h,k) \neq (0,0)$

$$\rho(h,k) = \frac{(a + h)(b + k) - ab - bh - ak}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} .$$

Uit

$$|\rho(h,k)| = \left|\frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right| \leq \frac{\|\underline{h}\|\,\|\underline{h}\|}{\|\underline{h}\|} = \|\underline{h}\|$$

met $\underline{h} = (h,k) \neq (0,0)$ volgt $\lim_{\underline{h} \to \underline{0}} \rho(h,k) = 0$.
De functie f is dus differentieerbaar in elk punt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

ii) Uit i) volgt dat f in de omgeving van het punt (1,1) lineair benaderbaar is door $1 + (x-1) + (y-1)$, zodat de vergelijking van het gevraagde raakvlak is $z = x + y - 1$.

2. a) $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$, $\underline{x} \neq \underline{0}$ geeft

$$(\lambda - 1)\underline{x} + 8D(\underline{a},\underline{b},\underline{x})\cdot\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}, \quad \underline{x} \neq \underline{0} .$$

We onderscheiden twee gevallen.

1°. De vectoren $\underline{x}$ en $\underline{a} \times \underline{b}$ zijn onafhankelijk. Dan is $\lambda = 1$ en $D(\underline{a},\underline{b},\underline{x}) = 0$.
Wegens $D(\underline{a},\underline{b},\underline{x}) = (\underline{a} \times \underline{b},\underline{x})$ geldt dus: 1 is eigenwaarde van A en bijbehorende eigenvectoren zijn alle $\underline{x} \neq \underline{0}$ in het vlak $(\underline{a} \times \underline{b},\underline{x}) = 0$; dit is het vlak opgespannen door $\underline{a}$ en $\underline{b}$.
Controle: $A\underline{a} = \underline{a} - 8D(\underline{a},\underline{b},\underline{a})\cdot\underline{a} \times \underline{b} = \underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$, $A\underline{b} = \underline{b}$.

2°. De vectoren $\underline{x}$ en $\underline{a} \times \underline{b}$ zijn afhankelijk. Dan is $\underline{x} = \alpha(\underline{a} \times \underline{b})$, $\alpha \neq 0$.
De bijbehorende eigenwaarde bepalen we met de definitie:

$$\begin{aligned} A(\underline{a} \times \underline{b}) &= \underline{a} \times \underline{b} - 8D(\underline{a},\underline{b},\underline{a} \times \underline{b})\cdot\underline{a} \times \underline{b} = \\ &= \underline{a} \times \underline{b} - 8(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b})\cdot\underline{a} \times \underline{b} = \\ &= \underline{a} \times \underline{b} - 8\|\underline{a} \times \underline{b}\|^2\cdot\underline{a} \times \underline{b} = \\ &= \underline{a} \times \underline{b} - 8\|\underline{a}\|^2.\|\underline{b}\|^2.\sin^2\frac{\pi}{6}\cdot\underline{a} \times \underline{b} = \\ &= \underline{a} \times \underline{b} - 2(\underline{a} \times \underline{b}) = -(\underline{a} \times \underline{b}) . \end{aligned}$$

Dus -1 is eigenwaarde van A en de bijbehorende eigenvectoren zijn $\underline{x} = \alpha(\underline{a} \times \underline{b})$, $\alpha \neq 0$.

b) Uit a) volgt dat voor alle $\underline{y}$ in het vlak V opgespannen door $\underline{a}$ en $\underline{b}$ geldt $A\underline{y} = \underline{y}$, en dat voor alle $\underline{z} \perp V$ geldt $A\underline{z} = -\underline{z}$. Elke vector $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ is éénduidig te schrijven als $\underline{x} = \underline{y} + \underline{z}$ met $\underline{y} \in V$, $\underline{z} \perp V$. Dan geldt
$A\underline{x} = A\underline{y} + A\underline{z} = \underline{y} - \underline{z}$, zodat
1°. $A\underline{x} - \underline{x} = -2\underline{z}$, dus $A\underline{x} - \underline{x} \perp V$,
2°. $\|A\underline{x} - \underline{y}\| = \|\underline{x} - \underline{y}\|$.
Hieruit volgt dat A een spiegeling t.o.v. het vlak V is.

3. Uit $Tf = \lambda f$, f niet het nulpolynoom, volgt

$$(x + 1)f'(x) = \lambda f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

waarin $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.
Dit geeft $(x + 1)(2ax + b) = \lambda(ax^2 + bx + c)$, $x \in \mathbb{R}$, dus

$$(\lambda a - 2a)x^2 + (\lambda b - 2a - b)x + \lambda c - b = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Het linkerlid van de laatste betrekking is het nulpolynoom, d.w.z. dat moet gelden

$$(1) \qquad \begin{cases} (\lambda - 2)a = 0, \\ -2a + (\lambda - 1)b = 0, \\ -b + \lambda c = 0. \end{cases}$$

Dit stelsel vergelijkingen heeft dan en slechts dan een oplossing $(a,b,c) \neq$ $\neq (0,0,0)$ als

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)\lambda = 0.$$

De eigenwaarden van T zijn dus $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$. Voor $\lambda = 0$ gaat het stelsel (1) over in

$$\begin{cases} -2a = 0, \\ -2a - b = 0, \\ \quad\ - b = 0, \end{cases}$$

zodat $a = 0$, $b = 0$. De eigenvectoren van T bij eigenwaarde 0 zijn dus $f \in V$ gedefinieerd door $f(x) = c$ met $c \neq 0$.

Opmerking. Deze eigenvectoren hadden we makkelijker kunnen vinden uit $(x + 1)f'(x) = 0$, $f'(x) = 0$, $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$.

Voor $\lambda = 1$ geeft het stelsel (1) $a = 0$, $-b + c = 0$, zodat eigenvectoren van T bij eigenwaarde 1 zijn $f \in V$ gedefinieerd door $f(x) = bx + b = b(x + 1)$ met $b \neq 0$.
Voor $\lambda = 2$ tenslotte, vinden we $-2a + b = 0$, $-b + 2c = 0$ en eigenvectoren $f \in V$ gedefinieerd door $f(x) = ax^2 + 2ax + a = a(x + 1)^2$ met $a \neq 0$.

Opmerking. We kunnen het vraagstuk ook oplossen door eerst de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $(x + 1)f'(x) = \lambda f(x)$ te bepalen. Met scheiding van variabelen vinden we $f(x) = C(x + 1)^\lambda$, $C \in \mathbb{R}$. Vervolgens merken we op dat $f \in V$ dan en slechts dan als $((\lambda = 0) \vee (\lambda = 1) \vee (\lambda = 2))$. Hiermee zijn met de eigenwaarden van T ook meteen de eigenvectoren van T gevonden.

4\. a) De massa M van A wordt gegeven door

$$M = \iint_{G_0} x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \ ,$$

waarin $z = \sqrt{1 - y^2}$ en $G_0 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \sqrt{y} \le 1\}$. Met

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}\ ,\ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

volgt

$$M = \iint_{G_0} \frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\,dxdy = \int_0^1 x\,dx \int_{x^2}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{y}} x\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^1 \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{1-y^2}\,\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}\ .$$

<u>Opmerking</u>. De integraal $\displaystyle\int_0^1 x\,dx \int_{x^2}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ geeft wat meer rekenwerk:

$$M = \int_0^1 x[\arcsin y]_{y=x^2}^{y=1}\,dx = \int_0^1 x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x^2\right)dx =$$

$$= \int_0^1 x \arccos x^2 dx = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \arccos u\,du\ ,$$

waarbij de substitutie $u = x^2$ is gebruikt.
Met partiële integratie volgt dan

$$M = \tfrac{1}{2}u \arccos u\,\Big|_0^1 + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,du = 0 + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \tfrac{1}{2}\ .$$

b) Ga over op bolcoördinaten ρ, θ, φ:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-x^2-y^2-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty \frac{e^{-\rho^2}}{\rho}\,\rho^2 \sin\theta\,d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{2} \, . \, 1 \, . \, [-\tfrac{1}{2} e^{-\rho^2}]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4} \, .$$

Examen/tentamen januari 1977

1. a) Bepaal de raaklijn in $(\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2})$ aan de doorsnede van $x^2 + y^2 = 1$ en $y^2 + z^2 = 1$.

   b) Bereken de lengte van de kromme in poolcoördinaten gegeven door

$$r = \sqrt{1 + \cos 2\varphi}, \ -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} .$$

2. Bepaal plaats en aard en waarde van de extrema van de functie

$$f(x,y) = y(y-1)^2 - yx^2$$

op de verzameling

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\} .$$

3. De lineaire afbeelding $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door de matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} .$$

   a) Bepaal een basis voor de beeldruimte.

   b) Bepaal de doorsnede van de beeldruimte met het vlak $2x - y + z = 0$.

   c) Van welke vectoren ligt het beeld onder A in het vlak $2x - y + z = 0$?

4. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 1 \\ x + 2y - z + pt &= -2 \\ x + 4y + z + p^2t &= 4 \\ x + 8y - z + p^3t &= -8 . \end{aligned}$$

   i) Laat zien dat de determinant van de coëfficiëntenmatrix deelbaar is door $(p-1)(p-2)(p+1)$.

   ii) Neem $p = 3$ en los t op met behulp van de regel van Cramer.

5. $G = \{(x,y) \mid x \ge y^2,\ 5 - x \ge (y+1)^2\}$.

   Bereken

$$\iint_G y \, dxdy .$$

6. Bepaal de massa van de doorsnede van het eerste octant met de bol

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z \le 0$$

als de dichtheid in het punt (x,y,z) gelijk is aan

$$\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Oplossingen Tentamen januari 1977

1. a) Het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 , \\ y^2 + z^2 = 1 , \end{cases}$$

beschrijft een kromme K in $\mathbb{R}^3$.

Beschouw y en z als impliciet gegeven functies van x, dan is een parametervoorstelling van K

$$(x,y,z) = (x,y(x),z(x)) .$$

Het punt $(\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2})$ ligt op K, hetgeen impliceert dat $y(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $z(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Differentiatie naar x van $x^2 + y^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ levert

$$2x + 2yy' = 0, \ 2yy' + 2zz' = 0 .$$

Voor $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ volgt

$$\sqrt{2} - y'\sqrt{2} = 0, \ -y'\sqrt{2} + z'\sqrt{2} = 0 ,$$

$$y'(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = 1, \ z'(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = 1 .$$

Een parametervoorstelling van de raaklijn in $(\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2})$ aan K is dus

$$\underline{x} = (\tfrac{1}{2}\sqrt{2},-\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) + \lambda(1,y'(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}),z'(\tfrac{1}{2}\sqrt{2})) ,$$

$$\underline{x} = (\tfrac{1}{2}\sqrt{2},-\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) + \lambda(1,1,1) .$$

b) De lengte van de kromme wordt gegeven door

$$s = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2}\, d\varphi .$$

Met $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)^{-\frac{1}{2}}(-2 \sin 2\varphi) = \frac{-\sin 2\varphi}{\sqrt{1 + \cos 2\varphi}}$, dus

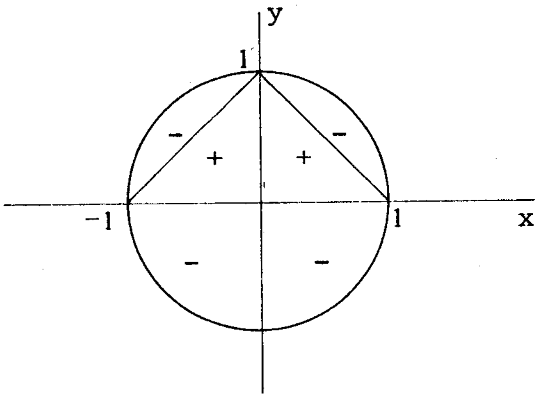
$$\dot{r}^2 + r^2 = \frac{\sin^2 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi} + 1 + \cos 2\varphi = \frac{1 - \cos^2 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi} + 1 + \cos 2\varphi =$$

$$= 1 - \cos 2\varphi + 1 + \cos 2\varphi = 2 ,$$

volgt

$$s = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{2}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\sqrt{2} .$$

2. Nullijnen van f zijn de rechten $y = 0$, $y = 1 + x$, $y = 1 - x$. In de figuur zijn de nullijnen getekend en is tevens de tekenverdeling van f op V aangegeven.



Stationaire punten van f vinden we uit

$$\text{grad } f(x,y) = (-2xy, 3y^2 - 4y + 1 - x^2) = \underline{0} \; .$$

De oplossingen van deze vergelijking zijn

$$x = 0,\ y = 1;\ x = 0,\ y = \frac{1}{3}\ ;\ x = -1,\ y = 0;\ x = 1,\ y = 0 \; .$$

Er is dus maar één stationair punt in het inwendige van V, namelijk $(0,\frac{1}{3})$.
De functiewaarde in $(0,\frac{1}{3})$ is $\frac{4}{27}$.
Op de rand van V geldt $x^2 = 1 - y^2$, $-1 \leq y \leq 1$.
Substitutie geeft

$$f(x(y),y) = y[(y-1)^2 - 1 + y^2] =$$
$$= y(2y^2 - 2y) = 2y^3 - 2y^2 = g(y),\ -1 \leq y \leq 1 \; .$$

Uit $g'(y) = 6y^2 - 4y = 2y(3y - 2)$ volgt dat g stijgt op de intervallen $[-1,0]$ en $[\frac{2}{3},1]$ en dat g daalt op $[0,\frac{2}{3}]$.
De functie g heeft dus minima voor $y = -1$ en $y = \frac{2}{3}$, en maxima voor $y = 0$ en $y = 1$.
Corresponderende punten op de rand van V zijn $(0,-1)$ en $(\pm\frac{1}{3}\sqrt{5},\frac{2}{3})$; $(\pm 1,0)$ en $(0,1)$ met functiewaarden resp. -4, $-\frac{8}{27}$; 0,0. In de punten $(\pm 1,0)$ en $(0,1)$ heeft f geen extrema (zie figuur).
In de punten $(\pm\frac{1}{3}\sqrt{5},\frac{2}{3})$ heeft f locale minima. Beschouw namelijk de begrensde en gesloten verzameling V' bepaald door $y \geq 1 - x$, $x^2 + y^2 \leq 1$.
Volgens de stelling van Weierstrass heeft de continue functie f op V' een globaal maximum en een globaal minimum. Het globale maximum is blijkbaar nul. Het globale minimum wordt niet aangenomen in het inwendige van V', want er zijn geen stationaire punten in het inwendige van V'.

Het globale minimum wordt dus aangenomen op de rand van V', dus in het punt $(\frac{1}{3}\sqrt{5},\frac{2}{3})$.
Een globaal minimum t.o.v. V' is zeker een locaal minimum t.o.v. V, zodat f in $(\frac{1}{3}\sqrt{5},\frac{2}{3})$ een locaal minimum heeft.
Op dezelfde wijze, of eenvoudiger door te bedenken dat $f(-x,y) = f(x,y)$, blijkt dat f in $(-\frac{1}{3}\sqrt{5},\frac{2}{3})$ een locaal minimum heeft.
Samenvattend: f heeft op V
een globaal maximum $\frac{4}{27}$ in het punt $(0,\frac{1}{3})$;
een globaal minimum -4 in het punt $(0,-1)$;
een locaal minimum $-\frac{8}{27}$ in de punten $(\pm\frac{1}{3}\sqrt{5},\frac{2}{3})$.

3. a) De beeldruimte van A wordt opgespannen door de kolomvectoren van de matrix van A.
Met vegen:

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} ,$$

blijkt dat $\{(1,0,1),(0,1,-2)\}$ een basis voor de beeldruimte van A is.

b) De beeldruimte van A is het vlak

$$\underline{x} = \lambda(1,0,1) + \mu(0,1,-2) \quad \text{(zie a))} .$$

Substitutie van $x = \lambda$, $y = \mu$, $z = \lambda - 2\mu$ in de vergelijking $2x - y + z = 0$ geeft

$$2\lambda - \mu + \lambda - 2\mu = 0, \ \mu = \lambda,$$

zodat een parametervoorstelling van de doorsnede van de twee vlakken wordt

$$\underline{x} = \lambda(1,0,1) + \lambda(0,1,-2), \ \underline{x} = \lambda(1,1,-1) .$$

c) Als voor een vector $\underline{x}$ geldt: $A\underline{x}$ in het vlak $2x - y + z = 0$, dan ligt $A\underline{x}$ in de doorsnede van dit vlak en de beeldruimte van A, dus

$$A\underline{x} = \lambda(1,1,-1) \quad \text{(zie b))} .$$

Deze vergelijking lossen we op met vegen:

$$\left.\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{matrix} \sim \left.\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \lambda \\ \lambda \\ 2\lambda \end{matrix} \sim \left.\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{matrix} ,$$

$$\begin{cases} 2x + z = \lambda , \\ x + y = \lambda . \end{cases}$$

Stel $x = \mu$, dan is $y = \lambda - \mu$, $z = \lambda - 2\mu$, zodat

$$\underline{x} = \lambda(0,1,1) + \mu(1,-1,-2) .$$

<u>Controle</u>. $A\underline{x} = \lambda A(0,1,1) + \mu A(1,-1,-2) =$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda(1,1,-1) + \mu(0,0,0) = \lambda(1,1,-1) .$$

4. i) De determinant van de coëfficiëntenmatrix,

$$D(p) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & p \\ 1 & 4 & 1 & p^2 \\ 1 & 8 & -1 & p^3 \end{vmatrix} ,$$

is een polynoom in p van de derde graad. Immers, ontwikkeling naar de vierde kolom geeft

$$D(p) = -D_{14} + pD_{24} - p^2D_{34} + p^3D_{44} ,$$

waarin D_{14}, D_{24}, D_{34} en D_{44} onderdeterminanten van D(p) zijn die niet van p afhangen; bovendien is

$$D_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 .$$

Voor $p = 1$, $p = 2$, $p = -1$ wordt de vierde kolom van D(p) gelijk aan resp. de eerste, de tweede en de derde kolom, dus $D(1) = D(2) = D(-1) = 0$, i.e. $1,2,-1$ zijn nulpunten van D.
Het polynoom D(p) is dus te ontbinden volgens

$$D(p) = D_{44}(p-1)(p-2)(p+1) = 6(p-1)(p-2)(p+1) ;$$

D(p) is deelbaar door $(p-1)(p-2)(p+1)$.

ii) Volgens i) is $D(3) = 6.2.1.4 = 48 \neq 0$. Dan is volgens de regel van Cramer $t = \frac{D'}{48}$, waarin

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & -1 & -8 \end{vmatrix} = D(-2) = 6(-3)(-4)(-1) = -72 .$$

Dus $t = -72/48 = -3/2$.

5. G is het gebied ingesloten door de parabolen $x = y^2$, $5 - x = (y+1)^2$. Snijpunten van de parabolen zijn (1,1) en (4,-2). We kunnen het gebied blijkbaar ook geven door

$$G = \{(x,y) \mid -2 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 5 - (y+1)^2\} \ .$$

De integraal wordt dan

$$\iint_G y \, dxdy = \int_{-2}^{1} y\, dy \int_{y^2}^{5-(y+1)^2} dx = \int_{-2}^{1} y[5 - (y+1)^2 - y^2]dy =$$

$$= \int_{-2}^{1} (4y - 2y^3 - 2y^2)dy = [2y^2 - \tfrac{1}{2}y^4 - \tfrac{2}{3}y^3]_{-2}^{1} = -\tfrac{9}{2} \ .$$

6. We gebruiken bolcoördinaten (ρ,θ,φ).
Het integratie-gebied G in $\mathbb{R}^3$ wordt dan bepaald door

$$0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2}\ ,\ 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}\ ,\ \rho^2 - 2\rho \sin\theta \cos\varphi - 2\rho \sin\theta \sin\varphi - 2\rho \cos\theta \le 0,$$

i.e.

$$0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2}\ .\ 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}\ ,\ 0 \le \rho \le 2 \sin\theta \cos\varphi + 2 \sin\theta \sin\varphi + 2 \cos\theta \ .$$

De gevraagde massa is dus

$$M = \iiint_G \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\rho_1} \frac{1}{\rho^2} . \rho^2 \sin\theta \, d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\rho_1} d\rho ,$$

waarin

$$\rho_1 = 2 \sin\theta \cos\varphi + 2 \sin\theta \sin\varphi + 2 \cos\theta \ .$$

Dit levert

$$M = \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \int_0^{\pi/2} (2 \sin\theta \cos\varphi + 2 \sin\theta \sin\varphi + 2 \cos\theta)d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\theta [2 \sin\theta \sin\varphi - 2 \sin\theta \cos\varphi + 2\varphi \cos\theta]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\theta (2 \sin\theta + 2 \sin\theta + \pi \cos\theta) d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (4\sin^2\theta + \pi \sin\theta \cos\theta)d\theta = \int_0^{\pi/2} (2 - 2\cos 2\theta)d\theta +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \sin^2\theta \Big|_0^{\pi/2} = [2\theta - \sin 2\theta]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} .$$

Herkansingsexamen/tentamen januari 1977

1. Gegeven is de kromme K met parametervoorstelling

$$\underline{x}(t) = (e^t, e^t \cos t, e^t \sin t), \qquad 0 \le t \le 2\pi \ .$$

Bepaal:

a) De raaklijn aan K in het punt $\underline{x}(\pi)$.

b) De lengte van K.

2. Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de functie

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$$

op de verzameling

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1\} \ .$$

3. In $\mathbb{R}^4$ zij U de lineaire deelruimte opgespannen door (1,1,1,1). Van de lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ is gegeven dat U de eigenruimte bij eigenwaarde 1 en het orthogonale complement $U^\perp$ eigenruimte bij eigenwaarde -1 is.

a) Bepaal een basis van $U^\perp$.

b) Bepaal de matrix van A.

c) Toon aan: A is orthogonaal en $A^2 = I$.

4. De lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd als de spiegeling aan het vlak $x = y$ gevolgd door de spiegeling aan het vlak $y = z$.

a) Laat zien dat A een draaiing is en bepaal draaiingsas en draaiingshoek.

b) Bepaal het beeld van het vlak $2x + y - 3z = 1$ onder de afbeelding A.

5. Bereken het volume van het lichaam in $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$16 \le x^2 + y^2 \le 8x,\ y \ge 0,\ -y \le z \le y \ .$$

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1977

1. a) Een richtingsvector van de raaklijn aan K in het punt $\underline{x}(\pi) = (e^{\pi},-e^{\pi},0)$ is

$$\dot{\underline{x}}(\pi) = (e^{\pi},e^{\pi}\cos\pi - e^{\pi}\sin\pi, e^{\pi}\sin\pi + e^{\pi}\cos\pi) = e^{\pi}(1,-1,-1) ,$$

zodat een parametervoorstelling van deze raaklijn is

$$\underline{x} = (e^{\pi},-e^{\pi},0) + \lambda(1,-1,-1) .$$

b) De lengte van K wordt gegeven door

$$s = \int_0^{2\pi} \|\dot{\underline{x}}(t)\|\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2t} + (e^t\cos t - e^t\sin t)^2 + (e^t\sin t + e^t\cos t)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^t\sqrt{1 + (\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2}\,dt = \sqrt{3}\int_0^{2\pi} e^t\,dt =$$

$$= (e^{2\pi} - 1)\sqrt{3} .$$

2. Uit grad $f(x,y) = (3x^2 - y,\ 3y^2 - x) = \underline{0}$ volgt het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 3x^2 = y, \\ 3y^2 = x, \end{cases}$$

met oplossingen $(x,y) = (0,0)$, $(x,y) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, zodat $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ het enige stationaire punt van f in het inwendige van V is.
Uit $f_{xx}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = 6.\frac{1}{3} = 2 > 0$, $f_{xy}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = -1$, $f_{yy}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = 2 > 0$;

$$\Delta(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) = f_{xx}(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}).f_{yy}(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) - (f_{xy}(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}))^2 = 3 > 0 ,$$

volgt dat f in $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ een (locaal) minimum heeft met waarde $f(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = -\frac{1}{27}$.
Randonderzoek:

i) $f(x,0) = x^3$, $0 \le x \le 1$.
Ten opzichte van de x-as heeft f een minimum 0 in het punt (0,0) en een maximum 1 in het punt (1,0).

ii) $f(0,y) = y^3$, $0 \le y \le 1$.
Ten opzichte van de y-as heeft f een minimum 0 in het punt (0,0) en een maximum 1 in het punt (0,1).

iii) $f(x,1-x) = x^3 + (1-x)^3 - x(1-x) = 4x^2 - 4x + 1 = 4(x-\frac{1}{2})^2$, $0 \le x \le 1$.
Ten opzichte van de rechte $x + y = 1$ heeft f een minimum 0 in het punt $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ en een maximum 1 in de punten (0,1) en (1,0).

Blijkbaar is 1 het globale maximum van f op V en $-\frac{1}{27}$ het globale minimum.
Blijven over te onderzoeken de punten (0,0) en $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
Beschouw f op de rechte $y = x$:

$$f(x,x) = 2x^3 - x^2 = g(x), \quad 0 \le x \le \tfrac{1}{2} .$$

Uit $g'(x) = 6x^2 - 2x = 2x(3x-1)$ volgt dat g dalend is op het interval $0 \le x \le \frac{1}{3}$ en stijgend op $\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2}$. Ten opzichte van de rechte $y = x$ heeft f dus maxima in de punten (0,0) en $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, hetgeen gecombineerd met de resultaten onder i), (ii)), iii) leidt tot de conclusie dat f in die punten geen extreem heeft.

Samenvattend: f heeft op V
een globaal maximum 1 in de punten (1,0) en (0,1),
een globaal minimum $-\frac{1}{27}$ in het punt $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

3. a) Het orthogonale complement van U is de verzameling

$$U^{\perp} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \underline{x} \perp (1,1,1,1)\},$$

dus de oplossingsverzameling van de vergelijking

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 .$$

Stel $x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$, $x_3 = \nu$, dan is $x_4 = -\lambda - \mu - \nu$, zodat een parametervoorstelling van $U^{\perp}$ wordt

$$\underline{x} = \lambda(1,0,0,-1) + \mu(0,1,0,-1) + \nu(0,0,1,-1) .$$

$U^{\perp}$ wordt dus opgespannen door de vectoren

$$\underline{a} = (1,0,0,-1), \ \underline{b} = (0,1,0,-1), \ \underline{c} = (0,0,1,-1) .$$

Het stelsel $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c}\}$ is een basis voor $U^{\perp}$ omdat het onafhankelijk is.

b) Voor $\underline{x} \in U$ geldt $A\underline{x} = \underline{x}$ en voor $\underline{x} \in U^{\perp}$ geldt $A\underline{x} = -\underline{x}$, dus door vegen:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & \rightarrow & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \rightarrow & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \rightarrow & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \rightarrow & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 1 & 2 & \rightarrow & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \rightarrow & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \rightarrow & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \rightarrow & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 1 & 3 & \rightarrow & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \rightarrow & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \rightarrow & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \rightarrow & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 4 & \rightarrow & 2 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \rightarrow & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \rightarrow & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \rightarrow & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & \rightarrow & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \rightarrow & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \rightarrow & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} ,$$

volgt voor de matrix van A:

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

c) i) De kolomvectoren van A hebben lengte 1 en zijn onderling orthogonaal, dus is A een orthogonale afbeelding.

ii) Beschouw de vectoren $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ (zie onderdeel a)) en $\underline{d} = (1,1,1,1)$. Het stelsel $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\}$ is een basis van $\mathbb{R}^4$, d.w.z. elke vector $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ is op eenduidige wijze te schrijven als

$$\underline{x} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} + \delta\underline{d} ,$$

dus als

$$\underline{x} = \underline{y} + \underline{z} \quad \text{met} \quad \underline{y} \in U^{\perp},\ \underline{z} \in U .$$

Dan geldt

$$A\underline{x} = A\underline{y} + A\underline{z} = -\underline{y} + \underline{z} ,$$

$$A^2\underline{x} = -A\underline{y} + A\underline{z} = \underline{y} + \underline{z} = \underline{x} = I\underline{x} \text{ voor alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^4 , \text{ i.e.}$$

$$A^2 = I \text{ (de identieke afbeelding) } .$$

4. a) Zij $S_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de spiegeling aan het vlak $x = y$,
$S_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de spiegeling aan het vlak $y = z$.

Dan is $A = S_2S_1$.

Meetkundig is eenvoudig in te zien dat

$$A(1,0,0) = S_2S_1(1,0,0) = S_2(0,1,0) = (0,0,1) \; ,$$
$$A(0,1,0) = S_2S_1(0,1,0) = S_2(1,0,0) = (1,0,0) \; ,$$
$$A(0,0,1) = S_2S_1(0,0,1) = S_2(0,0,1) = (0,1,0) \; .$$

De matrix van A,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

is orthogonaal met det A = 1, dus de lineaire afbeelding A is een draaiing.

De draaiingsas is de eigenruimte bij eigenwaarde 1, d.w.z. de oplossingsverzameling van de vergelijking $(A - I)\underline{x} = \underline{0}$; met vegen:

$$\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} ,$$

vinden we $y = z$, $x = z$, dus $\underline{x} = \lambda(1,1,1)$ is de draaiingsas.

We kiezen een vector $\underline{a} = (1,-1,0)$ loodrecht op de draaiingsas, bepalen

$$A\underline{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1,0,1)$$

en berekenen de draaiingshoek volgens

$$\varphi = \arccos \frac{(A\underline{a},\underline{a})}{\|A\underline{a}\| \; \|\underline{a}\|} = \arccos(-\tfrac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3} \; .$$

b) Stel $x = \lambda$, $z = \mu$, dan is $y = 1 - 2\lambda + 3\mu$.

Een parametervoorstelling van het vlak met vergelijking $2x + y - 3z = 1$ is dus

$$\underline{x} = (0,1,0) + \lambda(1,-2,0) + \mu(0,3,1) \; .$$

Het beeld van V onder de afbeelding A is de verzameling

$$W = \{A\underline{x} \mid \underline{x} \in V\} \; .$$

Zij $\underline{x} \in V$, dan is

$$A\underline{x} = A(0,1,0) + \lambda A(1,-2,0) + \mu A(0,3,1) =$$
$$= (1,0,0) + \lambda(-2,0,1) + \mu(3,1,0)$$

voor zekere $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Anderzijds, zij $\underline{y} = (1,0,0) + \lambda(-2,0,1) + \mu(3,1,0)$ voor zekere $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, dan is $\underline{y} = A\underline{x}$ met

$$\underline{x} = (0,1,0) + \lambda(1,-2,0) + \mu(0,3,1) \in V .$$

Dus W is het vlak met parametervoorstelling

$$\underline{x} = (1,0,0) + \lambda(-2,0,1) + \mu(3,1,0) .$$

De vergelijking van W is $x - 3y + 2z = 1$.
Merk op dat in deze oplossing niet gebruikt is dat de afbeelding A orthogonaal is.

Tweede oplossing.
Zij $\underline{a} = (2,1,-3)$, dan is de vergelijking van V te schrijven als $(\underline{a},\underline{x}) = 1$.
De afbeelding A is orthogonaal, dus geldt

$$(A\underline{x},A\underline{y}) = (\underline{x},\underline{y}) \quad \text{voor alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^3,\ \underline{y} \in \mathbb{R}^3 .$$

Zij $\underline{x} \in V$, dus $(\underline{a},\underline{x}) = 1$, dan is $(A\underline{a},A\underline{x}) = (\underline{a},\underline{x}) = 1$, i.e. $A\underline{x}$ in het vlak met vergelijking $(A\underline{a},\underline{x}) = 1$.
Anderzijds, zij $(A\underline{a},\underline{y}) = 1$, dan is $\underline{y}$ te schrijven als $\underline{y} = A\underline{x}$ met $\underline{x} \in V$.
Immers, uit $(A\underline{a},\underline{y}) = (A\underline{a},AA^{\leftarrow}\underline{y}) = 1$ volgt op grond van de orthogonaliteit van A,

$$(\underline{a},A^{\leftarrow}\underline{y}) = 1,\ A^{\leftarrow}\underline{y} \in V .$$

Inderdaad is $\underline{y} = AA^{\leftarrow}\underline{y}$.
Hieruit volgt dat W het vlak met vergelijking $(A\underline{a},\underline{x}) = 1$ is.
Met $A\underline{a} = A(2,1,-3) = (1,-3,2)$ vinden we $x - 3y + 2z = 1$.

5. De projectie van het lichaam op het (x,y)-vlak is het gebied in het eerste kwadrant tussen de cirkels $x^2 + y^2 = 16$ en $x^2 + y^2 = 8x$. Deze cirkels snijden elkaar in het punt $(2,2\sqrt{3})$.
In cylindercoördinaten (r,φ,z) wordt het lichaam bepaald door $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$, $4 \le r \le 8\cos\varphi$, $-r\sin\varphi \le z \le r\sin\varphi$, zodat het volume V van het lichaam gegeven wordt door

$$V = \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_4^{8\cos\varphi} r\,dr \int_{-r\sin\varphi}^{r\sin\varphi} dz = 2\int_0^{\pi/3} d\varphi \int_4^{8\cos\varphi} r^2 \sin\varphi\,dr =$$

$$= 2\int_0^{\pi/3} \sin\varphi \left[\tfrac{1}{3} r^3\right]_{r=4}^{r=8\cos\varphi} d\varphi =$$

H 1.77

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/3} (2^9 \cos^3\varphi \sin\varphi - 2^6 \sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}[-2^7 \cos^4\varphi + 2^6 \cos\varphi]_0^{\pi/3} = \frac{2}{3}(-2^3 + 2^7 + 2^5 - 2^6) = \frac{176}{3} .$$

Proeftentamen maart 1977.

1. Een kromme is gegeven door de parametervoorstelling

$$\underline{x}(t) = (4t(t-5), -t^2(t-5)^3); \qquad t \in [-1,6] .$$

   a) Bepaal de punten van de kromme, waar de raaklijn horizontaal resp. verticaal is.

   b) Schets de kromme.

2. Gegeven is de kromme met vergelijking

$$x^2 + 4xy - y^3 = -2 .$$

   In een omgeving van $(1,-1)$ is deze kromme de grafiek van de functie $y = y(x)$.

   a) Geef de raaklijn aan de kromme in $(1,-1)$.

   b) Wat is de absolute waarde van de kromtestraal van de kromme in $(1,-1)$?

3. Stel de vergelijking op van een omwentelingskegel, waarvan de coördinaatassen beschrijvenden zijn.

4. Geef de formule van Taylor om $(1,1)$ van de functie

$$f(x,y) = (x^6 - 1)(y^6 - 1)$$

   tot en met de termen van de 3^e graad.

5. Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de functie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met

$$f(x,y) = x^2y(x + y - 1) .$$

6. Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van $f(x,y) = x|y|$ op de cirkel $(x - 3)^2 + y^2 = 2$.

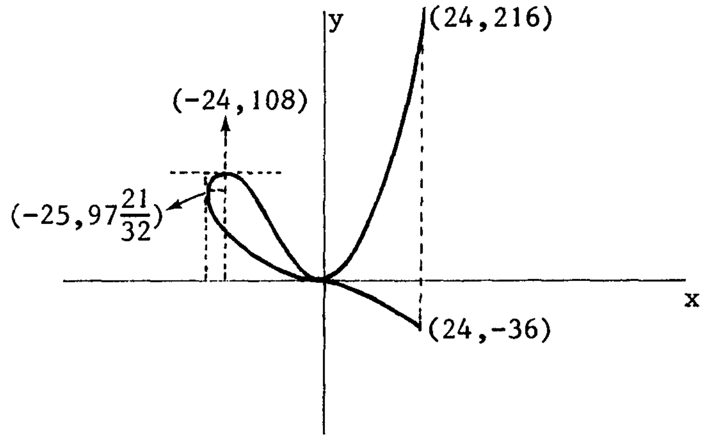
Oplossingen Proeftentamen maart 1977

1. a) De kromme heeft één dubbelpunt $\underline{x}(0) = \underline{x}(5) = \underline{0}$. Uit

$$\dot{\underline{x}}(t) = (4(2t-5), -5t(t-2)(t-5)^2) \neq \underline{0} \quad \text{voor } t \in [-1,6]$$

volgt dat het dubbelpunt het enige singuliere punt van de kromme is. Wegens $\dot{\underline{x}}(0) = (-20,0)$ en $\dot{\underline{x}}(5) = (20,0)$ is er in het dubbelpunt $\underline{0}$ één raaklijn $\underline{x} = \lambda(1,0)$ en deze raaklijn is horizontaal.
Uit $\dot{y}(t) = 0$, $t \neq 0$, $t \neq 5$ volgt $t = 2$, zodat er ook in $\underline{x}(2) = (-24,108)$ een horizontale raaklijn is. De vergelijking $\dot{x}(t) = 0$ geeft $t = \frac{5}{2}$, zodat in het punt $\underline{x}(\frac{5}{2}) = (-25, 97\frac{21}{32})$ de raaklijn verticaal is.

b) Uit $\dot{x}(t) = 4(2t-5)$ volgt dat $x(t)$ dalend is op het interval $[-1,\frac{5}{2}]$ en stijgend op $[\frac{5}{2},6]$.
Uit $\dot{y}(t) = -5t(t-2)(t-5)^2$ volgt dat $y(t)$ dalend is op de intervallen $[-1,0]$ en $[2,6]$ en stijgend op $[0,2]$. Met $\underline{x}(-1) = (24,216)$, $\underline{x}(6) = (24,-36)$ en gebruik makend van a) vinden we de volgende schets van de kromme.



2. a) Uit de vergelijking $x^2 + 4xy - y^3 = -2$ volgt door impliciet naar x te differentiëren:

(1) $$2x + 4y + 4xy' - 3y^2y' = 0 \;.$$

Substitutie van $x = 1$, $y(1) = -1$ geeft

$$2 - 4 + 4y'(1) - 3y'(1) = 0, \; y'(1) = 2 \;,$$

zodat een parametervoorstelling van de raaklijn aan de kromme in het punt $(1,-1)$ is

$$\underline{x} = (1,-1) + \lambda(1,2) \;.$$

De vergelijking van deze raaklijn is $y = -1 + 2(x - 1)$ of $y = 2x - 3$.

b) Uit de vergelijking (1) volgt door nogmaals impliciet naar x te differentiëren:

$$2 + 4y' + 4y' + 4xy'' - 6y(y')^2 - 3y^2y'' = 0 .$$

Substitutie van $x = 1$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 2$ geeft $y''(1) = -42$, zodat de kromtestraal van de kromme in het punt $(1,-1)$ is

$$\rho = \frac{[1 + (y'(1))^2]^{3/2}}{y''(1)} = -\frac{5\sqrt{5}}{42} .$$

Dus $|\rho| = \frac{5\sqrt{5}}{42}$.

3. De top van een kegel waarvan de coördinaatassen beschrijvenden zijn is uiteraard $\underline{0}$.
De as van een omwentelingskegel waarvan de coördinaatassen beschrijvenden zijn is een rechte door de top die gelijke hoeken met de coördinaatassen maakt, bijvoorbeeld $\underline{x} = \lambda(1,1,1)$.
De kegel is dan het oppervlak dat ontstaat door een beschrijvende, bijvoorbeeld de x-as ($\underline{x} = \mu(1,0,0)$), te wentelen om de rechte $\underline{x} = \lambda(1,1,1)$.
Door ieder punt van de x-as brengen we een vlak V_μ aan dat loodrecht op $\underline{x} = \lambda(1,1,1)$ staat:

$$V_\mu : x + y + z = \mu .$$

Dit vlak snijden we met de bol B_μ met middelpunt $\underline{0}$ (op $\underline{x} = \lambda(1,1,1)$) die gaat door het punt $(\mu,0,0)$:

$$B_\mu : x^2 + y^2 + z^2 = \mu^2 .$$

De vergelijking van de kegel krijgen we door μ te elimineren uit de vergelijkingen voor V_μ en B_μ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 ,$$

$$xy + xz + yz = 0 .$$

4. Uit $\quad f_x(x,y) = 6x^5(y^6 - 1)$, $f_y(x,y) = 6y^5(x^6 - 1)$,

$$f_{xx}(x,y) = 30x^4(y^6 - 1),\ f_{xy}(x,y) = 36x^5y^5 ,$$

$$f_{yy}(x,y) = 30y^4(x^6 - 1),\ f_{xxx}(x,y) = 120x^3(y^6 - 1) ,$$

$$f_{xxy}(x,y) = 180x^4y^5,\ f_{xyy}(x,y) = 180x^5y^4 ,$$

$$f_{yyy}(x,y) = 120y^3(x^6 - 1) \ ;$$
$$f(1,1) = f_x(1,1) = f_y(1,1) = 0,\ f_{xx}(1,1) = 0 \ ,$$
$$f_{xy}(1,1) = 36,\ f_{yy}(1,1) = f_{xxx}(1,1) = 0 \ ,$$
$$f_{xxy}(1,1) = f_{xyy}(1,1) = 180,\ f_{yyy}(1,1) = 0$$

volgt

$$f(x,y) = 36(x-1)(y-1) + 90(x-1)^2(y-1) + 90(x-1)(y-1)^2 + \ldots \ .$$

Opmerking. Toepassing van de substitutie $x = 1 + h$, $y = 1 + k$ en van het binomium van Newton geeft

$$f(x,y) = f(1+h,1+k) = [(1+h)^6 - 1][(1+k)^6 - 1] =$$
$$= [\tbinom{6}{1}h + \tbinom{6}{2}h^2 + \ldots][\tbinom{6}{1}k + \tbinom{6}{2}k^2 + \ldots] =$$
$$= (6h + 15h^2 + \ldots)(6k + 15k^2 + \ldots) = 36hk + 90h^2k + 90hk^2 + \ldots =$$
$$= 36(x-1)(y-1) + 90(x-1)^2(y-1) + 90(x-1)(y-1)^2 + \ldots \ ,$$

een sneller resultaat.

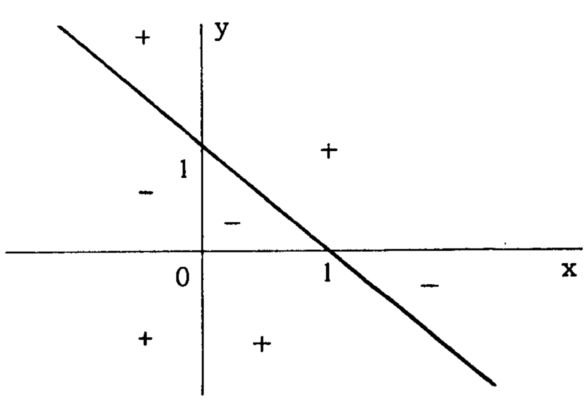
5. De functie f is differentieerbaar op $\mathbb{R}^2$ en elk punt $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ is inwendig punt van $\mathbb{R}^2$, zodat f slechts extrema kan hebben in zijn stationaire punten. Uit

$$\text{grad } f(x,y) = (xy(3x + 2y - 2), x^2(x + 2y - 1))$$

volgt dat $(0,y)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ en $(1,0)$ de stationaire punten van f zijn met functiewaarden

$$f(0,y) = 0,\ f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4}) = -\frac{1}{64} \ ,\ f(1,0) = 0 \ .$$

Nullijnen van f zijn de x-as, de y-as en de rechte $x + y = 1$.
In de volgende figuur is de tekenverdeling van f aangegeven.



Hieruit blijkt onmiddellijk dat er in de punten (0,0), (1,0) en (0,1) geen extrema zijn en dat er in de punten (0,y) met $y < 0$ of $y > 1$ locale minima, in de punten (0,y) met $0 < y < 1$ locale maxima optreden. In het punt $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ heeft f een locaal minimum. Om dit in te zien beschouwen we de driehoek D gegeven door $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$.
Op D (een begrensde gesloten verzameling) heeft f (een continue functie) volgens de stelling van Weierstrass een globaal minimum.
Op de rand van D is $f(x,y) = 0$, in het inwendige van D is $f(x,y) < 0$, zodat het minimum wordt aangenomen in het inwendige van D, dus in het enige stationaire punt $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ in het inwendige van D.
Ten opzichte van de gehele $\mathbb{R}^2$ heeft f in $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ slechts een locaal minimum omdat

$$f(x,-x) = x^3 \to -\infty, \qquad x \to -\infty .$$

Samenvattend: f heeft op $\mathbb{R}^2$ locale minima 0 in de punten (0,y) met $y < 0$ of $y > 1$, een locaal minimum $-\frac{1}{64}$ in het punt $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, locale maxima 0 in de punten (0,y) met $0 < y < 1$.

<u>Opmerking</u>. Uit

$$f_{xx}(x,y) = 2y(3x+y-1), \quad f_{xy}(x,y) = x(3x+4y-2), \quad f_{yy}(x,y) = 2x^2 ,$$

dus

$$\Delta(0,y) = f_{xx}(0,y)f_{yy}(0,y) - (f_{xy}(0,y))^2 = 0 ,$$

$$\Delta(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4}) = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2} - (\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{8} ,$$

$$\Delta(1,0) = 0.2 - 1 = -1 ,$$

blijkt dat het Δ-criterium slechts uitsluitsel geeft voor de punten $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ en (1,0).

6. Zij $g(x,y) = (x-3)^2 + y^2 - 2$, dan worden de extrema van f gevraagd onder de nevenvoorwaarde $g(x,y) = 0$. Willen we de multiplicatorenmethode van Lagrange toepassen dan doen zich twee moeilijkheden voor:

1°. f is niet differentieerbaar op de x-as;
2°. grad $f(x,y) = (y,x)$ voor $y > 0$ en grad $f(x,y) = (-y,-x)$ voor $y < 0$, zodat we twee stelsels vergelijkingen moeten oplossen, m.a.w. dat we de gevallen $y > 0$ en $y < 0$ apart moeten bekijken.

Ten aanzien van 1° merken we op dat punten waar f (of g) niet differentieerbaar is ook voor extrema in aanmerking komen.

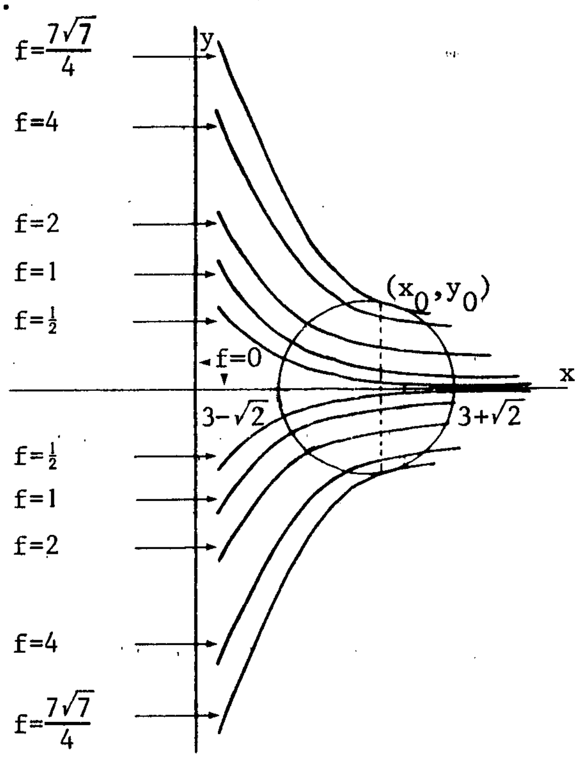
P 3.77

De snijpunten van de cirkel $(x-3)^2+y^2 = 2$ en de x-as zijn $(3\pm\sqrt{2},0)$; op de cirkel geldt $x \geq 3 - \sqrt{2} > 0$ en dus $f(x,y) = x|y| \geq 0 = f(3\pm\sqrt{2},0)$, zodat f in de punten $(3\pm\sqrt{2},0)$ globale minima 0 heeft.
Ten aanzien van 2° merken we op dat $f(x,-y) = f(x,y)$ en $g(x,-y) = g(x,y)$, zodat we ons kunnen beperken tot het geval $y > 0$: de oplossingen (x,y) van het stelsel vergelijkingen voor $y < 0$ liggen gespiegeld ten opzichte van de x-as.
Tenslotte: grad $g(x,y) = (2(x-3),2y) \neq \underline{0}$ voor $y > 0$. Het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 2 \,, \\ y + 2\lambda(x-3) = 0 \,, \\ x + 2\lambda y = 0 \,, \end{cases}$$

heeft maar één oplossing met $y > 0$, namelijk $\lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{7}$, $(x,y) = (\frac{7}{2},\frac{1}{2}\sqrt{7})$ met $f(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\sqrt{7}) = \frac{7}{4}\sqrt{7}$. Op grond van het voorgaande en op grond van de stelling van Weierstrass kunnen we concluderen:
f heeft op de cirkel $(x-3)^2 + y^2 = 2$
een globaal minimum 0 in de punten $(3\pm\sqrt{2},0)$,
een globaal maximum $\frac{7}{4}\sqrt{7}$ in de punten $(\frac{7}{2},\pm\frac{1}{2}\sqrt{7})$.

Opmerking. We kunnen dit vraagstuk handiger oplossen met behulp van de hoogtekaart van f (zie figuur).



P 3.77

We zien onmiddellijk dat f op de cirkel $(x-3)^2 + y^2 = 2$ een globaal minimum 0 heeft in de punten $(3\pm\sqrt{2},0)$. Het globale maximum van f op de cirkel $(x-3)^2 + y^2 = 2$ is die waarde van c waarvoor de kromme $x|y| = c$ raakt aan de cirkel.
Substitutie van $|y| = \frac{c}{x}$ in de vergelijking $(x-3)^2 + y^2 = 2$ geeft

$$x^4 - 6x^3 + 7x^2 + c^2 = 0 .$$

De voorwaarde is dan dat het polynoom $p(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + c^2$ een tweevoudig nulpunt x_0 heeft, waarvoor bovendien geldt $x_0 > 3$ (zie figuur).
Uit $p(x_0) = p'(x_0) = 0$ volgt

$$\begin{cases} x_0^4 - 6x_0^3 + 7x_0^2 + c^2 = 0 , \\ 4x_0^3 - 18x_0^2 + 14x_0 = 2x_0(x_0-1)(2x_0-7) = 0 , \end{cases}$$

dus $x_0 = \frac{7}{2}$, $c^2 = \frac{7^3}{16}$.
Het globale maximum van f op de cirkel $(x-3)^2 + y^2 = 2$ is dus $\frac{7}{4}\sqrt{7}$; het wordt aangenomen in de punten $(x_0, \pm y_0)$ met $y_0 = \frac{c}{x_0} = \frac{1}{2}\sqrt{7}$.

Opmerking. Uit de aard van het probleem blijkt dat het polynoom p ten hoogste twee reële nulpunten heeft voor elke c met $c > 0$.
We kunnen dit ook als volgt afleiden.
Uit

$$p'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 14x = 2x(x-1)(2x-7)$$

volgt dat p een minimum c^2 heeft voor $x = 0$, een maximum $c^2 + 2$ voor $x = 1$ en een minimum $c^2 - \frac{7^3}{16}$ voor $x = \frac{7}{2}$.

Als $c^2 > 0$ en $c^2 - \frac{7^3}{16} < 0$, dan heeft p twee reële nulpunten x_1 en x_2 met $1 < x_1 < \frac{7}{2}$, $x_2 > \frac{7}{2}$.
Als $c^2 > \frac{7^3}{16}$, dan heeft p geen reële nulpunten.
Als $c^2 = \frac{7^3}{16}$, dan heeft p een tweevoudig nulpunt $x_0 = 3{,}5$.

T 6.77

Examen/tentamen juni 1977

1. De functie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x,y) = y\{(x^2 + y^2)^2 - 4x^2\} .$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van f op het gebied

$$G: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\} .$$

---

2. In een lineaire ruimte L is gegeven een onafhankelijk stelsel bestaande uit vier vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$.
Zij S het stelsel $\{\underline{a} + 2\underline{b}, \underline{a} + \underline{c} + 2\underline{d}, 7\underline{c} + 6\underline{d}, 3\underline{b} + 2\underline{c}\}$ en T het stelsel $\{3\underline{a} - 4\underline{c}, 7\underline{b} - 4\underline{d}, 5\underline{a} + 3\underline{b} + 4\underline{d}\}$.

a) Als $\langle S\rangle$ en $\langle T\rangle$ de door S respectievelijk T opgespannen deelruimten van L zijn, toon dan aan dat $\langle T\rangle \subset \langle S\rangle$.

b) Is T een basis voor $\langle S\rangle$? **Motiveer Uw antwoord.**

3. Zij $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding met matrix

$$A = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & -7 & 5 \\ 2 & 2 & -10 \\ -7 & 5 & 5 \end{pmatrix} .$$

a) Toon aan, dat de beeldruimte het vlak V is met vergelijking $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

b) Bewijs, dat voor $\underline{x} \in V$ geldt $\|A\underline{x}\| = \|\underline{x}\|$.

c) Toon aan, dat voor alle $\underline{x} \in V$ met $\underline{x} \neq \underline{0}$ geldt dat de hoek tussen $\underline{x}$ en $A\underline{x}$ dezelfde grootte heeft en bepaal die hoek.

d) Bepaal de matrix B van een direct orthogonale afbeelding $\mathcal{B}$, waarvoor geldt $\mathcal{B}\underline{x} = A\underline{x}$ voor alle $\underline{x} \in V$.

4. a) Zij $R > 0$ en $0 < a < R$.
Als gegeven is de afgeknotte halve bol

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \ 0 \leq z \leq a\}$$

bereken dan

$$\iiint_A (x^2 + y^2)\,dxdydz .$$

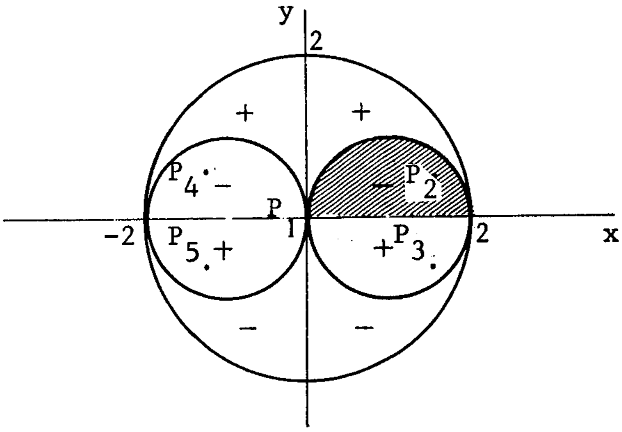
b) De functie F is voor $x > 1$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin xt}{t}\, dt .$$

Bereken $F'(x)$ voor $x > 1$.

Oplossingen Tentamen juni 1977

1. Nullijnen van f zijn de x-as en de cirkels $x^2 + y^2 + 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$. In de figuur zijn de nullijnen van f getekend en is bovendien de tekenverdeling van f op G aangegeven.



Uit

$$\text{grad } f(x,y) = (4xy(x^2 + y^2 - 2),\ x^4 - 4x^2 + 6x^2y^2 + 5y^4)$$

volgt dat er in het inwendige van G vijf stationaire punten zijn:

$P_1 = (0,0)$ met $f(0,0) = 0$,

$P_2 = (\frac{1}{3}\sqrt{15}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$ met $f(\frac{1}{3}\sqrt{15}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = -\frac{8}{9}\sqrt{3}$,

$P_3 = (\frac{1}{3}\sqrt{15}, -\frac{1}{3}\sqrt{3})$ met $f(\frac{1}{3}\sqrt{15}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{8}{9}\sqrt{3}$,

$P_4 = (-\frac{1}{3}\sqrt{15}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$ met $f(-\frac{1}{3}\sqrt{15}, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = -\frac{8}{9}\sqrt{3}$,

$P_5 = (-\frac{1}{3}\sqrt{15}, -\frac{1}{3}\sqrt{3})$ met $f(-\frac{1}{3}\sqrt{15}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{8}{9}\sqrt{3}$.

Uit de figuur blijkt dat f in P_1 geen extreem heeft. Beschouw de verzameling

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 2x \le 0) \wedge (y \ge 0)\} \quad \text{(zie figuur)}.$$

Op V is $f(x,y) \le 0$ en op de rand van V is $f(x,y) = 0$. Aangezien V een begrensde gesloten verzameling is, heeft f op V een globaal minimum (op grond van de stelling van Weierstrass) in het inwendige van V, dus in het enige stationaire punt P_2 in het inwendige van V.
Ten opzichte van G heeft f in P_2 dus zeker een locaal minimum.
Op dezelfde wijze kan men aantonen dat f in P_4 een (locaal) minimum heeft en in P_3 en P_5 een (locaal) maximum.

Op de rand van G geldt $x^2 = 4 - y^2$, $-2 \le y \le 2$ en

$$f(x,y) = 4y^3 .$$

Deze functie heeft op het interval $-2 \le y \le 2$ een minimum -32 voor $y = -2$ en een maximum 32 voor $y = 2$. In de corresponderende punten $(0,-2)$ en $(0,2)$ heeft f dus blijkbaar een globaal minimum resp. een globaal maximum <u>ten opzichte van G</u>.

Samenvattend: f heeft op G
locale maxima $\frac{8}{9}\sqrt{3}$ in de punten $(\pm\frac{1}{3}\sqrt{15},-\frac{1}{3}\sqrt{3})$,
locale minima $-\frac{8}{9}\sqrt{3}$ in de punten $(\pm\frac{1}{3}\sqrt{15},\frac{1}{3}\sqrt{3})$,
een globaal maximum 32 in het punt $(0,2)$,
een globaal minimum -32 in het punt $(0,-2)$.

2. a) Zij V de door $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ en $\underline{d}$ opgespannen lineaire deelruimte van L. Dan is het stelsel $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\}$ een basis voor V en dim V = 4.
Iedere vector $\underline{x} \in V$ kan dus op precies één manier geschreven worden als $\underline{x} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} + \delta\underline{d}$, d.w.z. iedere vector $\underline{x} \in V$ kan men representeren door een geordend viertal reële getallen $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.
We gebruiken hiervoor de notatie $\underline{x} = (\alpha,\beta,\gamma,\delta)$. Het stelsel S wordt dan $\{(1,2,0,0),(1,0,1,2),(0,0,7,6),(0,3,2,0)\}$ en het stelsel T wordt $\{(3,0,-4,0),(0,7,0,-4),(5,3,0,4)\}$.

We zoeken eerst door vegen een eenvoudige basis voor <S> en voor <T>.
Voor <S>:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} ;$$

$$\langle S\rangle = \langle(1,2,0,0),(0,3,2,0),(0,-7,0,4)\rangle .$$

Voor <T>:

$$\begin{matrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -4 \\ 5 & 10 & 0 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{matrix} ;$$

$$\langle T\rangle = \langle(0,3,2,0),(0,7,0,-4),(1,2,0,0)\rangle .$$

Blijkbaar is <T> = <S>.

b) Uit a) volgt dat het stelsel T onafhankelijk is en dat <T> = <S>. Dus is T een basis voor <S>.

3. a) De beeldruimte R van A wordt opgespannen door de kolommen $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3$ van de matrix A: $R = \langle \underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3 \rangle = \langle 12\underline{k}_1, 12\underline{k}_2, 12\underline{k}_3 \rangle$.

Wegens

$$\begin{matrix} 5 & 2 & -7 \\ -7 & 2 & 5 \\ 5 & -10 & 5 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 6 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

geldt

$$R = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{x} = \lambda(1,0,-1) + \mu(1,-1,0)\} =$$
$$= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = V .$$

b) Zij $\underline{x} = (x_1,x_2,x_3) \in V$ en zij $\underline{y} = (y_1,y_2,y_3) = A\underline{x}$.

Dan is $\underline{x} = \lambda(1,0,-1) + \mu(1,-1,0)$ en

$$\underline{y} = \lambda A(1,0,-1) + \mu A(1,-1,0) = \lambda(0,1,-1) + \mu(1,0,-1)$$

voor zekere $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, zodat

$$\|A\underline{x}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = \sqrt{\mu^2 + \lambda^2 + (-\lambda - \mu)^2} = \sqrt{(\lambda + \mu)^2 + (-\mu)^2 + (-\lambda)^2} =$$
$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \|\underline{x}\| .$$

c) Zij $\underline{x} \in V$ met $\underline{x} \neq \underline{0}$. Dan is $\underline{x} = \lambda(1,0,-1) + \mu(1,-1,0)$ met $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ en $A\underline{x} = \lambda(0,1,-1) + \mu(1,0,-1)$ (zie b)). Voor de hoek φ tussen $\underline{x}$ en $A\underline{x}$ geldt dan

$$\varphi = \arccos \frac{(\underline{x},A\underline{x})}{\|\underline{x}\| \, \|A\underline{x}\|} = \arccos \frac{(\lambda+\mu)\mu - \mu\lambda + \lambda(\lambda+\mu)}{\lambda^2 + \mu^2 + (\lambda + \mu)^2} =$$
$$= \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} .$$

d) Volgens b) en c) werkt de lineaire afbeelding A op V als een draaiing over een hoek $\frac{\pi}{3}$.

Een direct orthogonale afbeelding $B: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is een draaiing. De draaiingsas van B is, wegens $B\underline{x} = A\underline{x}$ voor alle $\underline{x} \in V$, de rechte $\underline{x} = \lambda(1,1,1)$ loodrecht op V. Uit

$$B(1,0,-1) = A(1,0,-1) = (0,1,-1) ,$$
$$B(1,-1,0) = A(1,-1,0) = (1,0,-1) ,$$
$$B(1,1,1) = (1,1,1) ,$$

volgt door vegen:

$$\begin{array}{rrrcrrr} 1 & 0 & -1 & \to & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & \to & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \to & 1 & 1 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{rrrcrrr} 1 & 0 & -1 & \to & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & \to & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & \to & 2 & 1 & 0 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{rrrcrrr} 1 & 0 & -1 & \to & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \to & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \to & 2 & -1 & 2 \end{array} \sim \begin{array}{rrrcrrr} 3 & 0 & 0 & \to & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & \to & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \to & 2 & -1 & 2 \end{array} ,$$

dat de matrix van $\mathcal{B}$ is

$$B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} .$$

4. a) Schrijf

$$\iiint_A (x^2 + y^2)\,dxdydz = \int_0^a \left(\iint_{G_z} (x^2 + y^2)\,dxdy \right) dz ,$$

waarin

$$G_z = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le R^2 - z^2\} .$$

Door overgang op poolcoördinaten vinden we

$$\iint_{G_z} (x^2 + y^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} r^3 dr = \frac{2\pi}{4}(R^2 - z^2)^2 ,$$

zodat

$$\iiint_A (x^2 + y^2)\,dxdydz = \frac{\pi}{2}\int_0^a (R^4 - 2R^2z^2 + z^4)\,dz =$$

$$= \frac{\pi}{2}(R^4 a - \frac{2}{3} R^2 a^3 + \frac{1}{5} a^5) .$$

b) Voor $x > 1$ geldt

$$F'(x) = \frac{\sin(x^3)}{x^2} .2x + \int_1^{x^2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin xt}{t}\right) dt =$$

$$= 2\,\frac{\sin(x^3)}{x} + \int_1^{x^2} \cos(xt)\,dt = 2\,\frac{\sin(x^3)}{x} + \left.\frac{\sin(xt)}{x}\right|_{t=1}^{t=x^2} =$$

$$= 3\,\frac{\sin(x^3)}{x} - \frac{\sin x}{x} .$$

H 6.77

Herkansingsexamen/tentamen juni 1977

1. Gegeven zijn de vlakken

$$V:\ x - 2y + 2z = 12$$

en

$$W:\ 2x - 3y - z = 14$$

en de lijnen:

$$\ell:\ \underline{x} = (1,1,1) + \lambda(3,2,1)$$

en

$$m:\ \underline{x} = (3,5,1) + \mu(-1,1,1)\ .$$

Bepaal een parametervoorstelling van de lijn, die ℓ en m snijdt en evenwijdig is aan V en W.

2. Voor $x > 0$ is de functie f gedefinieerd door

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2 + 4}{2x}\ .$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van f op het gebied

$$G:\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1\}\ .$$

3. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & a+1 & 1 \\ a+2 & 0 & -1 \\ 2 & a+1 & a-1 \end{pmatrix}\ .$$

a) Bepaal de rang van A voor alle reële waarden van a.

Beschouw het homogene stelsel lineaire vergelijkingen met coëfficiëntenmatrix A.

b) Los dit stelsel op voor alle reële waarden van a.

4. a) Laten a, b en c reële getallen zijn met $a^3 + b^3 + c^3 \neq 3abc$.
   Toon aan dat de vectoren (a,b,c); (b,c,a) en (c,a,b) onafhankelijk zijn.
   b) Van de lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven: $A(1,2,3) = (2,3,1)$; $A(2,3,1) = (3,1,2)$ en $A^3 = I$, waarbij I de identieke afbeelding is.
   i) Toon aan dat $A(3,1,2) = (1,2,3)$.
   ii) Bewijs dat $A(x,y,z) = (y,z,x)$ voor alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   iii) Laat zien, dat A een draaiing is; bepaal draaias en draaiingshoek.

5. Het lichaam L is bepaald door de ongelijkheden

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1 .$$

a) Bepaal de projectie van L op het (x,y)-vlak.

b) Bereken

$$\iiint_L z \, dxdydz \; .$$

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1977

1. Een willekeurig punt op ℓ is $\underline{p} = (1+3\lambda,\ 1+2\lambda,\ 1+\lambda)$ en een willekeurig punt op m is $\underline{q} = (3-\mu,\ 5+\mu,\ 1+\mu)$. Een parametervoorstelling van de rechte door $\underline{p}$ en $\underline{q}$ is dan $\underline{x} = \underline{p} + \nu(\underline{q} - \underline{p})$.
Deze rechte is evenwijdig aan V en W als zijn richtingsvector $\underline{q} - \underline{p}$ loodrecht staat op de vectoren $\underline{a} = (1,-2,2)$ en $\underline{b} = (2,-3,-1)$, wegens $\underline{a} \perp V$, $\underline{b} \perp W$.
Uit het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} (\underline{q} - \underline{p}, \underline{a}) = -6 - \mu - \lambda = 0 \ , \\ (\underline{q} - \underline{p}, \underline{b}) = -8 - 6\mu + \lambda = 0 \ , \end{cases}$$

volgt $\lambda = -4$, $\mu = -2$, dus

$$\underline{p} = (-11,-7,-3),\ \underline{q} = (5,3,-1),\ \underline{q} - \underline{p} = (16,10,2) \ ,$$

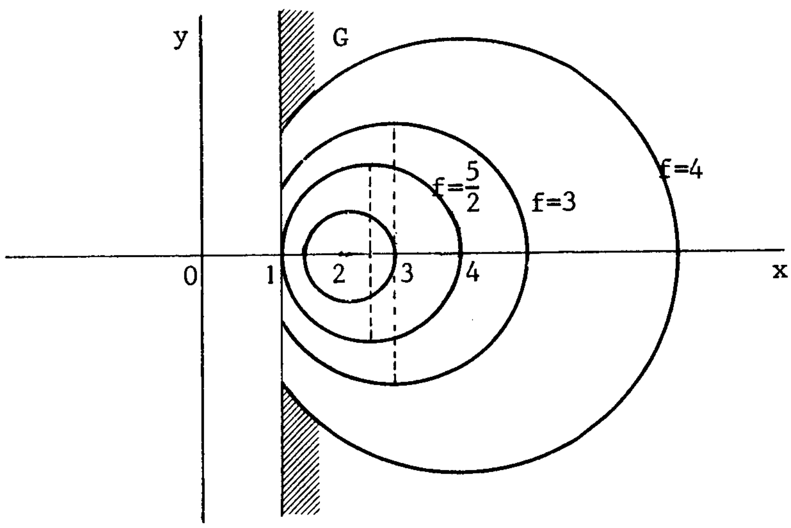
zodat een parametervoorstelling van de gevraagde rechte is

$$\underline{x} = (5,3,-1) + \rho(8,5,1) \ .$$

2. Hoogtelijnen van f zijn krommen met vergelijking

$$x^2 + y^2 + 4 = 2Cx,\ (x - C)^2 + y^2 = C^2 - 4 \ .$$

Als $C^2 < 4$, dan is er geen enkel punt (x,y) dat aan deze vergelijking voldoet.
Dus is $C^2 \geq 4$.
Hieruit volgt, wegens $f(x,y) > 0$ voor $(x,y) \in G$, dat f op G een globaal minimum 2 heeft in het punt (2,0). Als $C > 2$, dan is $(x - C)^2 + y^2 = C^2 - 4$ de vergelijking van de cirkel met middelpunt (C,0) en straal $\sqrt{C^2 - 4}$ (zie figuur).



Het punt (1,0) ligt, wegens $f(1,0) = \frac{5}{2}$, op de cirkel met vergelijking $(x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{9}{4}$.

Uit de figuur blijkt dat binnen deze cirkel geldt $f(x,y) < \frac{5}{2}$, en dat buiten deze cirkel geldt $f(x,y) > \frac{5}{2}$, zodat de functie f in het punt (1,0) geen extreem heeft ten opzichte van G.

Voor de overige punten van G is op analoge wijze in te zien dat f er geen extreem heeft.

Conclusie: f heeft op G enkel een globaal minimum 2 in het punt (2,0).

Opmerking. De stelling van Weierstrass kan men hier niet toepassen omdat G niet begrensd is.

3. a) Omdat in onderdeel b) de oplossing van het stelsel $A\underline{x} = \underline{0}$ gevraagd wordt, bepalen we de rang van A door met rijen te vegen:

$$\text{rang}\begin{bmatrix} a & a+1 & 1 \\ a+2 & 0 & -1 \\ 2 & a+1 & a-1 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} a & a+1 & 1 \\ a+2 & 0 & -1 \\ 2-a & 0 & a-2 \end{bmatrix}.$$

Voor $a = 2$:

$$\text{rang } A = \text{rang}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 .$$

Voor $a \neq 2$:

$$\text{rang } A = \text{rang}\begin{bmatrix} a & a+1 & 1 \\ a+2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} a+1 & a+1 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

zodat voor $a = -1$:

$$\text{rang } A = \text{rang}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 ;$$

voor $a \neq 2$, $a \neq -1$:

$$\text{rang } A = \text{rang}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{rang}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 .$$

Samenvattend:

rang A = 1 voor $a = -1$,

rang A = 2 voor $a = 2$,

rang A = 3 voor $a \neq -1$, $a \neq 2$.

b) Het stelsel $A\underline{x} = \underline{0}$ lossen we op met vegen, waarbij we gebruik maken van onderdeel a).

Voor a = -1 wordt een equivalent stelsel gerepresenteerd door

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} .$$

Stel $x = \lambda$, $y = \mu$, dan is $z = \lambda$, zodat de oplossing wordt gegeven door $\underline{x} = \lambda(1,0,1) + \mu(0,1,0)$.

Voor a = 2:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} ;$$

$x = \lambda$ heeft $y = -2\lambda$, $z = 4\lambda$; $\underline{x} = \lambda(1,-2,4)$.

Voor $a \neq -1$, $a \neq 2$ is de oplossing $\underline{x} = \underline{0}$.

4. a) Wegens

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - c^3 - b^3 - a^3 \neq 0$$

is het stelsel $\{(a,b,c),(b,c,a),(c,a,b)\}$ onafhankelijk.

b) i) Gebruik achtereenvolgens $(3,1,2) = A(2,3,1)$, $(2,3,1) = A(1,2,3)$ en $A^3 = I$, dan volgt

$$A(3,1,2) = A^2(2,3,1) = A^3(1,2,3) = I(1,2,3) = (1,2,3) .$$

ii) Zij $\underline{a} = (1,2,3)$, $\underline{b} = (2,3,1)$, $\underline{c} = (3,1,2)$. Volgens onderdeel a) is het stelsel $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c}\}$ onafhankelijk (omdat $1^3 + 2^3 + 3^3 \neq 3.1.2.3$), dus een basis voor $\mathbb{R}^3$, zodat elke $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ op precies één manier geschreven kan worden als

$$(x,y,z) = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} .$$

Hieruit volgt

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta + 3\gamma , \\ y = 2\alpha + 3\beta + \gamma , \\ z = 3\alpha + \beta + 2\gamma , \end{cases}$$

zodat geldt, wegens $A\underline{a} = \underline{b}$, $A\underline{b} = \underline{c}$, $A\underline{c} = \underline{a}$,

$$A(x,y,z) = \alpha\underline{b} + \beta\underline{c} + \gamma\underline{a} =$$

$$= (2\alpha + 3\beta + \gamma,\ 3\alpha + \beta + 2\gamma,\ \alpha + 2\beta + 3\gamma) = (y,z,x)$$

voor alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

iii) Uit ii) volgt onmiddellijk dat de afbeelding A orthogonaal is met matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wegens $\det A = 1$ is A een draaiing.

De draaiingsas is de eigenruimte bij de eigenwaarde 1. Met vegen:

$$\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} ;$$

$y = \alpha$ geeft $x = \alpha$, $z = \alpha$, vinden we als draaiingsas $\underline{x} = \alpha(1,1,1)$.

Kies een vector loodrecht op de draaiingsas, bijvoorbeeld $\underline{d} = (1,-1,0)$. Dan is de draaiingshoek φ de hoek tussen $\underline{d}$ en $A\underline{d} = (-1,0,1)$, dus

$$\varphi = \arccos \frac{(\underline{d}, A\underline{d})}{\|\underline{d}\|\ \|A\underline{d}\|} = \arccos(-\tfrac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}.$$

We merken nog op dat dit in overeenstemming is met het gegeven $A^3\underline{x} = \underline{x}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, omdat A^3 blijkbaar een draaiing is over $3.\frac{2\pi}{3} = 2\pi$.

5\. a) De projectie G van L op het (x,y)-vlak is de verzameling van punten (x,y) waarbij een z bestaat met $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$, $z^2 \leq 1 - (x-1)^2 - y^2$, dus met

$$x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1 - (x-1)^2 - y^2 ,$$

zodat

$$G = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 - (x-1)^2 - y^2\} =$$

$$= \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq x\} .$$

G is de cirkelschijf met middelpunt $(\tfrac{1}{2},0)$ en straal $\tfrac{1}{2}$.

b) Schrijf

$$\iiint\limits_L z\,dxdydz = \iint\limits_G \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2-y^2}} z\,dz \right) dxdy =$$

H 6.77

$$= \tfrac{1}{2} \iint_G (1 - (x-1)^2 - y^2 - (x^2+y^2))\,dxdy =$$

$$= \iint_G (x - x^2 - y^2)\,dxdy$$

en ga over op poolcoördinaten, dan volgt

$$\iiint_L z\;dxdydz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} (r \cos\varphi - r^2)r\;dr =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\tfrac{1}{3}\, r^3 \cos\varphi - \tfrac{1}{4}\, r^4]_{r=0}^{r=\cos\varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{12} \cos^4\varphi\; d\varphi =$$

$$= \frac{1}{12}\, B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2}) = \frac{1}{12}\, \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{1}{12}\, \frac{\sqrt{\pi}\,.\,\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{2!} = \frac{\pi}{32}\,.$$

Examen/tentamen januari 1978

1. a) Bepaal het punt op de kromme $3y = x^2 - x$, dat minimale afstand heeft tot de rechte $3y + 4x + 6 = 0$ en bereken deze minimale waarde.

   b) Zij $f(x,y) = x^y$.
   Geef de formule van Taylor voor f rond (1,0) tot en met de termen van de derde graad.

2. De lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd door $A\underline{x} = \underline{x} \times \underline{a} + (\underline{x},\underline{a})\underline{a}$, waarin $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ een gegeven vector is met $\|\underline{a}\| = 1$.

   a) Toon aan dat
      i) $\underline{a}$ eigenvector van A is.
      ii) voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, die loodrecht op $\underline{a}$ staan geldt: $A\underline{x} \perp \underline{x}$ en $A\underline{x} \perp \underline{a}$.
      iii) $\|A\underline{x}\| = \|\underline{x}\|$ voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$.

   b) Geef de meetkundige interpretatie van A.

3. De deelruimte U van $\mathbb{R}^4$ is gegeven door

$$U = \langle(-6,1,2,2),(2,-3,2,1),(-6,-7,10,7)\rangle .$$

   a) Bepaal een orthonormale basis van U, waarbij één van de basisvectoren loodrecht op (0,0,1,0) staat.
   b) Bepaal een parametervoorstelling van $U^{\perp}$.
   c) Bepaal een orthonormale basis voor $U^{\perp}$, waarbij één der basisvectoren loodrecht op (0,0,0,1) staat.
   d) Geef een orthonormale basis van $\mathbb{R}^4$ waarin geen vectoren uit de standaardbasis voorkomen.

4. Zij G het gedeelte van het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$ dat ligt boven het vlak $z = 0$ en binnen de cilinder $x^2 + y^2 = x$.
   We beschouwen G als een met massa belegd oppervlak. De massadichtheid in het punt (x,y,z) van G is gelijk aan z.
   Bereken de massa van G, dus $\iint_G z \, d\sigma$.

Oplossingen Tentamen januari 1978

1. a) De afstand van een punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tot de rechte met vergelijking $4x + 3y + 6 = 0$ is volgens de stelling van Hesse gelijk aan

$$\left|\frac{4x + 3y + 6}{\| (4,3) \|}\right| = \frac{1}{5}|4x + 3y + 6| \,.$$

Als het punt (x,y) op de kromme $3y = x^2 - x$ ligt, dan kunnen we hiervoor schrijven

$$\frac{1}{5}|4x + x^2 - x + 6| = \frac{1}{5}|x^2 + 3x + 6| = \frac{1}{5}|(x + \tfrac{3}{2})^2 + \tfrac{15}{4}| = \frac{1}{5}(x + \tfrac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} \,.$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat de minimale afstand gelijk is aan $\frac{3}{4}$ en dat het minimum wordt aangenomen voor $x = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{3}(\frac{9}{4} + \frac{3}{2}) = \frac{5}{4}$, dus in het punt $(-\frac{3}{2},\frac{5}{4})$.

b) Herleiden tot standaardreeksen geeft

$$f(x,y) = f(1+h,k) = (1+h)^k = e^{k\ln(1+h)} =$$

$$= e^{k(h-\frac{1}{2}h^2+\ldots)} = e^{hk-\frac{1}{2}h^2k+\ldots} = 1 + hk - \tfrac{1}{2}h^2k + \ldots =$$

$$= 1 + (x-1)y - \tfrac{1}{2}(x-1)^2y + \ldots \,.$$

2. a) i) $A\underline{a} = \underline{a} \times \underline{a} + (\underline{a},\underline{a})\underline{a} = \underline{0} + 1.\underline{a} = 1.\underline{a}$, $\underline{a} \neq \underline{0}$, dus $\underline{a}$ is eigenvector van A bij eigenwaarde 1.

ii) Voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ met $(\underline{a},\underline{x}) = 0$ is $A\underline{x} = \underline{x} \times \underline{a}$ en voor het uitwendig product $\underline{x} \times \underline{a}$ geldt: $\underline{x} \times \underline{a} \perp \underline{x}$, $\underline{x} \times \underline{a} \perp \underline{a}$.

iii) Zij U de rechte $\langle\underline{a}\rangle$, dan is $U^\perp$ het vlak $(\underline{a},\underline{x}) = 0$. Elke vector $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ kan op precies één manier worden geschreven als $\underline{x} = \underline{u} + \underline{v}$ met $\underline{u} \in U$, $\underline{v} \in U^\perp$ en $\|\underline{x}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2$.
Dan is $A\underline{x} = A\underline{u} + A\underline{v}$ met $A\underline{u} = \underline{u} \in U$ (volgens i)), $A\underline{v} \in U^\perp$ (omdat $A\underline{v} \perp \underline{a}$ volgens ii)), dus $\|A\underline{x}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|A\underline{v}\|^2$. Uit $A\underline{v} = \underline{v} \times \underline{a}$ en $\underline{v} \perp \underline{a}$ volgt $\|A\underline{v}\| = \|\underline{v}\|\,\|\underline{a}\| = \|\underline{v}\|$, zodat $\|A\underline{x}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 = \|\underline{x}\|^2$, $\|A\underline{x}\| = \|\underline{x}\|$ voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$.

b) Uit $\underline{x} = \underline{u} + \underline{v}$, $\underline{u} \in U$, $\underline{v} \in U^\perp$; $A\underline{x} = \underline{u} + A\underline{v}$, $A\underline{v} \perp \underline{v}$ en $A\underline{v} \perp \underline{a}$, volgt onmiddellijk dat A een draaiing om de rechte U over een hoek $\frac{\pi}{2}$ voorstelt.

3. a) Door vegen bepalen we eerst een eenvoudige basis voor U:

$$\begin{array}{rrrr} -6 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ -6 & -7 & 10 & 7 \end{array} \sim \begin{array}{rrrr} 0 & -8 & 8 & 5 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -16 & 16 & 10 \end{array} \sim \begin{array}{rrrr} 0 & -8 & 8 & 5 \\ 8 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} .$$

Het stelsel $\{(8,-4,0,-1),(0,-8,8,5)\}$ is dus een basis van U.
De vector $(8,-4,0,-1)$ staat al loodrecht op $(0,0,1,0)$. Kies

$$\underline{a}_1 = \frac{(8,-4,0,-1)}{\|(8,-4,0,-1)\|} = \frac{1}{9}(8,-4,0,-1) .$$

De projectie van $\underline{d} = (0,-8,8,5)$ op $<\underline{a}_1>$ is $(\underline{d},\underline{a}_1)\underline{a}_1 = \frac{1}{9}(32-5)\underline{a}_1 = 3\underline{a}_1$, zodat $\underline{d} - 3\underline{a}_1 = \frac{1}{3}(-8,-20,24,16) = -\frac{4}{3}(2,5,-6,-4)$ loodrecht op $\underline{a}_1$ staat. Neem

$$\underline{a}_2 = \frac{-\frac{4}{3}(2,5,-6,-4)}{\|-\frac{4}{3}(2,5,-6,-4)\|} = -\frac{1}{9}(2,5,-6,-4) .$$

Dan is $\{\underline{a}_1,\underline{a}_2\}$ een orthonormale basis van U met $\underline{a}_1 \perp (0,0,1,0)$.

b) $U^{\perp}$ is de oplossingsruimte van het stelsel vergelijkingen (zie a))

$$\begin{cases} \quad\; - 8x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0 , \\ 8x_1 - 4x_2 \qquad\quad\;\, - x_4 = 0 . \end{cases}$$

Stel $x_2 = 2\lambda$, $x_4 = 8\mu$, dan is $x_3 = 2\lambda - 5\mu$, $x_1 = \lambda + \mu$, zodat een parametervoorstelling van $U^{\perp}$ is

$$\underline{x} = \lambda(1,2,2,0) + \mu(1,0,-5,8) .$$

c) Het stelsel $\{(1,2,2,0),(1,0,-5,8)\}$ is een basis voor $U^{\perp}$, waarvan de vector $(1,2,2,0)$ al loodrecht op $(0,0,0,1)$ staat. Neem

$$\underline{b}_1 = \frac{(1,2,2,0)}{\|(1,2,2,0)\|} = \frac{1}{3}(1,2,2,0) .$$

De projectie van $\underline{e} = (1,0,-5,8)$ op $<\underline{b}_1>$ is $(\underline{e},\underline{b}_1)\underline{b}_1 = \frac{1}{3}(1-10)\underline{b}_1 = -3\underline{b}_1$, zodat $\underline{e} + 3\underline{b}_1 = (2,2,-3,8)$ loodrecht op $\underline{b}_1$ staat. Neem

$$\underline{b}_2 = \frac{(2,2,-3,8)}{\|(2,2,-3,8)\|} = \frac{1}{9}(2,2,-3,8) .$$

Dan is $\{\underline{b}_1,\underline{b}_2\}$ een orthonormale basis voor $U^{\perp}$ met $\underline{b}_1 \perp (0,0,0,1)$.

d) Het stelsel $\{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{b}_1,\underline{b}_2\}$ is orthonormaal, dus onafhankelijk, dus een basis van $\mathbb{R}^4$.
Hierin komen geen vectoren uit de standaardbasis voor.

4. Op G geldt $0 < z = \sqrt{\frac{1}{2} - x^2 - y^2}$, dus

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{1}{z}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{z\sqrt{2}} .$$

T 1.78

Op grond van symmetrie ten opzichte van het vlak $y = 0$ wordt de massa M van G dan gegeven door

$$M = \iint_G z\, d\sigma = 2 \iint_{G_0} z\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy = \sqrt{2} \iint_{G_0} dxdy\ .$$

Hierin is $G_0 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le \tfrac{1}{2},\ x^2 + y^2 \le x,\ y \ge 0\}$ de projectie op het (x,y)-vlak van het in het eerste octant gelegen deel van G.
In poolcoördinaten wordt G_0 gegeven door

$$G_0 = \{(r,\varphi) \mid r \le \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ r \le \cos\varphi;\ 0 \le \varphi \le \tfrac{1}{2}\pi\}\ ,$$

zodat

$$M = \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} r\, dr + \sqrt{2} \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} r\, dr =$$

$$= \sqrt{2}.\tfrac{1}{4}\pi.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{16}\pi\sqrt{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{16}\pi\sqrt{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{8}(\pi - 1)\sqrt{2}\ .$$

Herkansingsexamen/tentamen januari 1978

1. De functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x,y) = (y-1)^2 - (x^2-1)^2 \; .$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extremen van f op het gebied

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2 - x^2\} \; .$$

2. De lineaire afbeelding $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft $(2,-1,1)$ als eigenvector met eigenwaarde -2.
Verder is gegeven dat alle vectoren op de lijn $\underline{x} = (1,1,5) + \lambda(1,3,1)$ de vector $(-2,-2,-10)$ als beeld hebben.
Bepaal van A

i) de nulruimte,
ii) de beeldruimte,
iii) de eigenwaarden en eigenvectoren,
iv) de matrix.

3. Gegeven is de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & x+1 & (x+1)(x+2) & (x+1)(x+2)(x+3) \\ 1 & x+2 & (x+2)(x+3) & (x+2)(x+3)(x+4) \\ 1 & x+3 & (x+3)(x+4) & (x+3)(x+4)(x+5) \\ 1 & x+4 & (x+4)(x+5) & (x+4)(x+5)(x+6) \end{vmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \; .$$

Toon aan dat de waarde van deze determinant onafhankelijk van x is en bepaal deze waarde.

4. a) Het gebied G in $\mathbb{R}^3$ wordt gegeven door $1 \le z \le \dfrac{1}{x^2+y^2}$.
   i) Geef een schets van G.
   ii) Bereken

$$\iiint_G \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz \; .$$

   b) De functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \int_0^x (x-y)^2 e^{y^2}\, dy \; .$$

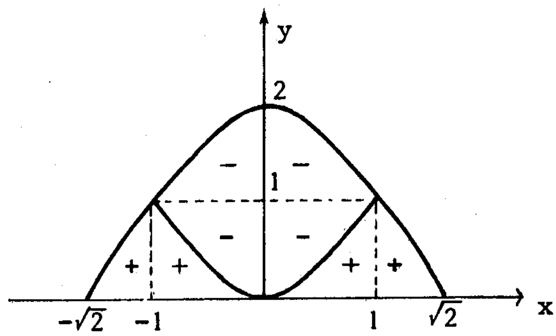
   Bereken $f'''(x)$.

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1978

1. Nullijnen van f zijn de parabolen $y = x^2$ en $y = 2 - x^2$, omdat

$$f(x,y) = (y - 1 - x^2 + 1)(y - 1 + x^2 - 1) = (y - x^2)(y - 2 + x^2) .$$

In onderstaande figuur is de tekenverdeling van f op G aangegeven.



Uit

$$\text{grad } f(x,y) = (-4x(x^2 - 1), 2(y - 1))$$

volgt dat (0,1) het enige stationaire punt van f is in het inwendige van G.

In (0,1) heeft f een globaal minimum met waarde −1. Immers, op de begrensde gesloten verzameling G heeft de continue functie f een globaal minimum volgens de stelling van Weierstrass.
Op de rand van G is $f(x,y) \geq 0$ (zie figuur), in het inwendige van G komen negatieve waarden van f voor, zodat f het globale minimum aanneemt in een inwendig punt van G, dus in het stationaire punt (0,1).

Op het deel van de rand van G gegeven door $y = 2 - x^2$, $y \geq 0$, heeft f

locale minima 0 in de punten (x,y) met $y = 2 - x^2$, $0 \leq y < 1$,
locale maxima 0 in de punten (x,y) met $y = 2 - x^2$, $1 < y \leq 2$,

zoals onmiddellijk blijkt uit de figuur.

Op het deel van de rand van G gegeven door $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$, $y = 0$, geldt

$$f(x,0) = 1 - (x^2 - 1)^2 .$$

Op het open interval $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ heeft deze functie een globaal minimum 0 voor $x = 0$ en een globaal maximum 1 voor $x = \pm 1$.
In het punt $(0,0)$ heeft f geen extreem ten opzichte van G (zie figuur).
Op grond van de stelling van Weierstrass heeft f op G een globaal maximum in de punten $(\pm 1,0)$.

Samenvattend: f heeft op G
een globaal minimum -1 in het punt $(0,1)$,
een globaal maximum 1 in de punten $(\pm 1,0)$,
locale minima 0 in de punten (x,y) met $y = 2 - x^2$, $0 \le y < 1$, en
locale maxima 0 in de punten (x,y) met $y = 2 - x^2$, $1 < y \le 2$.

2. Uit $A((1,1,5) + \lambda(1,3,1)) = (-2,-2,-10)$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$, volgt

$$A(1,1,5) = (-2,-2,-10) \quad (\text{neem } \lambda = 0) ,$$
$$A(1,3,1) = \underline{0} .$$

Met $\quad A(2,-1,1) = -2(2,-1,1) = (-4,2,-2)$

hebben we nu van drie vectoren de beelden.
Door vegen bepalen we eerst de matrix A van A:

$$\begin{array}{rrrcrrr} 1 & 1 & 5 & \to & -2 & -2 & -10 \\ 1 & 3 & 1 & \to & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & \to & -4 & 2 & -2 \end{array} \sim \begin{array}{rrrcrrr} 0 & 2 & -4 & \to & 2 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & 1 & \to & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & \to & 4 & -2 & 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{rrrcrrr} 0 & 1 & -2 & \to & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 & \to & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 15 & 0 & \to & 9 & -3 & 9 \end{array} \sim \begin{array}{rrrcrrr} 0 & 0 & 5 & \to & -1 & -3 & -11 \\ 5 & 0 & 0 & \to & -8 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & \to & 3 & -1 & 3 \end{array} ,$$

dus

iv) $$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -8 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -11 \end{bmatrix} .$$

Omdat het exerceren met deze matrix niet aantrekkelijk lijkt, zullen we er verder geen gebruik meer van maken.

Zij N de nulruimte en R de beeldruimte van A. Uit de gegevens volgt

$$(2,-1,1) \in R, \ (1,1,5) \in R, \ (1,3,1) \in N ,$$

dus $\dim \mathcal{R} \geq 2$ ($\{(2,-1,1),(1,1,5)\}$ is onafhankelijk), $\dim \mathcal{N} \geq 1$.
Op grond van de dimensiestelling, $\dim \mathcal{R} + \dim \mathcal{N} = 3$, geldt dan $\dim \mathcal{R} = 2$, $\dim \mathcal{N} = 1$, zodat

i) $\mathcal{N} = \langle(1,3,1)\rangle$,

ii) $\mathcal{R} = \langle(2,-1,1),(1,1,5)\rangle$.

iii) Uit het voorgaande volgt onmiddellijk dat 0 eigenwaarde van A is met bijbehorende eigenvectoren $\underline{x} \in \mathcal{N}$, $\underline{x} \neq \underline{0}$, dus $\underline{x} = \alpha(1,3,1)$, $\alpha \neq 0$.

Eigenvectoren bij een eigenwaarde $\lambda \neq 0$ zijn element van $\mathcal{R}$ ($\lambda\underline{x} \in \mathcal{R}$ met $\lambda \neq 0$ geeft $\underline{x} \in \mathcal{R}$).
Wegens

$$A(2,-1,1) = -2(2,-1,1),$$
$$A(1,1,5) = -2(1,1,5)\ ,$$

geldt $\quad A\underline{x} = -2\underline{x}\quad$ voor alle $\underline{x} \in \mathcal{R}$.

Hieruit volgt dat -2 de enige eigenwaarde ongelijk aan nul is; de bijbehorende eigenvectoren zijn

$$\underline{x} = \beta(2,-1,1) + \gamma(1,1,5),\ (\beta,\gamma) \neq (0,0)\ .$$

3. Noem de determinant $D(x)$ en veeg met de eerste kolom de eerste rij schoon, dan volgt

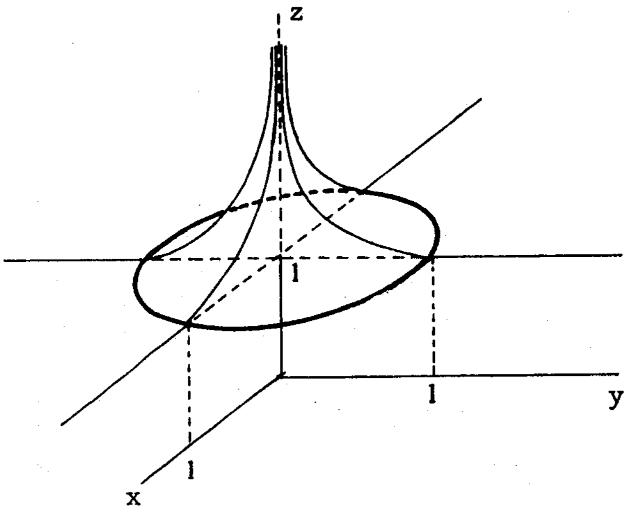
$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2x+4 & 3x^2+15x+18 \\ 1 & 2 & 4x+10 & 6x^2+36x+54 \\ 1 & 3 & 6x+18 & 9x^2+63x+114 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2x+4 & 3x^2+15x+18 \\ 2 & 4x+10 & 6x^2+36x+54 \\ 3 & 6x+18 & 9x^2+63x+114 \end{vmatrix}.$$

Nogmaals vegen met de eerste kolom geeft

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 6x+18 \\ 3 & 6 & 18x+60 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6x+18 \\ 6 & 18x+60 \end{vmatrix} = 12\ .$$

4. a) i)



ii) De projectie G_0 van G op het (x,y)-vlak wordt gegeven door

$$G_0 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\} ,$$

zodat

$$I := \iiint_G \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz = \iint_{G_0} \left(\int_1^{1/(x^2+y^2)} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz \right) dxdy =$$

$$= \iint_{G_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dxdy .$$

Overgang op poolcoördinaten geeft

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\tfrac{1}{r} - r) r\, dr = 2\pi \int_0^1 (1 - r^2) dr = 2\pi(1 - \tfrac{1}{3}) = \frac{4\pi}{3} .$$

b) Toepassen van de regel voor het differentiëren van een integraal met een parameter (aan de voorwaarden is ruimschoots voldaan) geeft achtereenvolgens:

$$f'(x) = 0 + \tfrac{1}{2} \int_0^x 2(x - y) e^{y^2} dy = \int_0^x (x - y) e^{y^2} dy ,$$

$$f''(x) = 0 + \int_0^x 1.e^{y^2} dy = \int_0^x e^{y^2} dy ,$$

$$f'''(x) = e^{x^2} .$$

P 3.78

Proeftentamen maart 1978

1. Gegeven is de ellips

$$\underline{f}(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t - \sin t) \quad (t \in \mathbb{R}) .$$

Bepaal die punten van de ellips waarvan de afstand tot het vlak $x + y - z = 6$ maximaal respectievelijk minimaal is.

2. Gegeven is de cirkel C gelegen in het vlak $x + y + z = 0$ met middelpunt $(0,0,0)$ en straal 1.
Bepaal de vergelijking van de cylinder waarvan C richtkromme is en de beschrijvenden loodrecht staan op het vlak $x + y + z = 0$.

3. In $\mathbb{R}^2$ is een kromme gegeven door

$$\underline{f}(t) = (t^3 - 6t^2 + 9t, t^2 - 4t + 4) \quad (t \in \mathbb{R}) .$$

Bepaal de punten waar de raaklijn aan de kromme horizontaal respectievelijk verticaal is en schets de kromme.

4. Geef de termen tot en met die van de tweede graad van de formule van Taylor rond $(0,0)$ voor de functie

$$f(x,y) = \arctan(x \sin y) .$$

5. Op het gebied $G = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4\}$ is de functie f gedefinieerd door

$$f(x,y) = x(2x^2 + y^2 - 1) .$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van deze functie.

6. De functie f wordt op $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x + y} & \text{als } x + y \neq 0 , \\ 0 & \text{als } x + y = 0 . \end{cases}$$

a) Bepaal de richtingsafgeleide van f in $(0,0)$ in de richting $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ $(0 \le \varphi < 2\pi)$.

b) Onderzoek of f continu is in $(0,0)$.

Oplossingen Proeftentamen maart 1978

1. De afstand van een punt (cos t, sin t, 1 - cos t - sin t) op de ellips tot het vlak x + y - z = 6 is volgens de stelling van Hesse gelijk aan

$$\left|\frac{\cos t + \sin t - (1 - \cos t - \sin t) - 6}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}(7 - 2\cos t - 2\sin t).$$

Uit

$$\frac{d}{dt}(7 - 2\cos t - 2\sin t) = 2\sin t - 2\cos t = 0$$

volgt

$$t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

of

$$t = \frac{5\pi}{4} + 2\ell\pi,\ \ell \in \mathbb{Z}.$$

Voor $t = \frac{\pi}{4}$ $(+2k\pi)$ is de afstand $\frac{1}{\sqrt{3}}(7 - 2\sqrt{2})$, voor $t = \frac{5\pi}{4}(+2\ell\pi)$ is de afstand $\frac{1}{\sqrt{3}}(7 + 2\sqrt{2})$, zodat in de punten $\underline{f}(5\pi/4) = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, $\underline{f}(\pi/4) = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ de afstand tot het vlak x + y - z = 6 maximaal resp. minimaal is.

2. De beschrijvenden van de cylinder worden gegeven door

$$\underline{x} = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(1,1,1), \quad (x_0, y_0, z_0) \in C.$$

Omdat C de doorsnede is van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en het vlak $x + y + z = 0$ levert dit het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda, \\ y = y_0 + \lambda, \\ z = z_0 + \lambda, \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1, \\ x_0 + y_0 + z_0 = 0. \end{cases}$$

Hieruit volgt de vergelijking van de cylinder door elimineren van x_0, y_0, z_0 en λ:

$$\begin{cases} (x-\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 + (z-\lambda)^2 = 1, \\ x + y + z = 3\lambda; \end{cases}$$

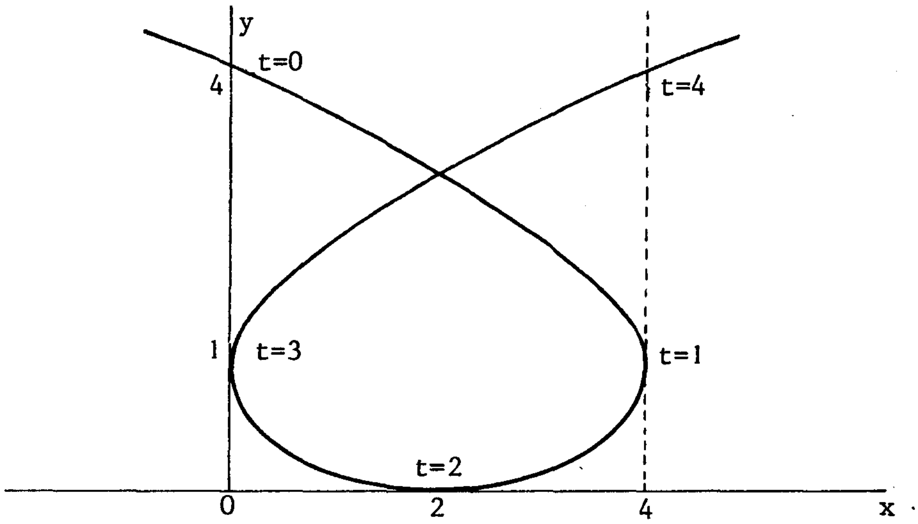
$$(2x - y - z)^2 + (2y - x - z)^2 + (2z - x - y)^2 = 9.$$

3. Uit

$$\dot{\underline{f}}(t) = (3(t-1)(t-3), 2(t-2))$$

volgt dat in het punt $\underline{f}(2) = (2,0)$ de raaklijn aan de kromme horizontaal, in de punten $\underline{f}(1) = (4,1)$, $\underline{f}(3) = (0,1)$ verticaal is.

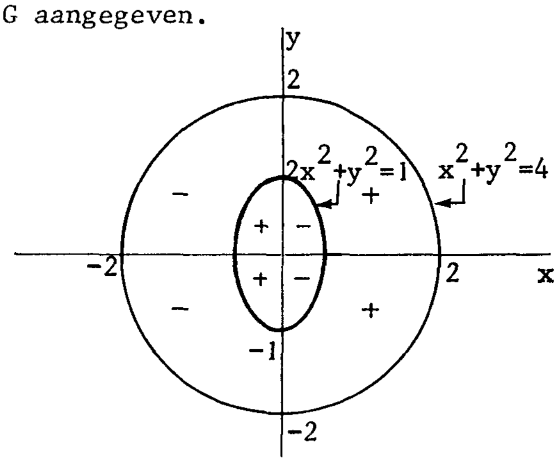
Uit het tekenverloop van $\dot{x}(t) = 3(t-1)(t-3)$, $\dot{y}(t) = 2(t-2)$ volgt dat $x(t)$ stijgend is voor $t < 1$ en voor $t > 3$, dalend voor $1 < t < 3$ en dat $y(t)$ daalt voor $t < 2$, stijgt voor $t > 2$.
Met $x(t) \to \pm\infty$, $y(t) \to \infty$ voor $t \to \pm\infty$ leidt dit tot de volgende globale schets van de kromme:



4. Met behulp van standaardreeksen:

$$f(x,y) = x \sin y - \frac{1}{3}(x \sin y)^3 + \ldots =$$
$$= x(y - \frac{1}{3!} y^3 + \ldots) + \ldots = xy + \ldots\ .$$

5. Nullijnen van f zijn de y-as en de ellips $2x^2 + y^2 = 1$. In de figuur is de tekenverdeling van f op G aangegeven.



Uit

$$\text{grad } f(x,y) = (6x^2 + y^2 - 1,\ 2xy)$$

volgt dat

$$(0,1),\ (0,-1),\ (\tfrac{1}{6}\sqrt{6},0) \text{ en } (-\tfrac{1}{6}\sqrt{6},0)$$

de stationaire punten van f zijn.
In (0,1) en (0,-1) heeft f geen extreem (zie figuur).

In het punt $(\frac{1}{6}\sqrt{6},0)$ heeft f een minimum met waarde $-\frac{1}{9}\sqrt{6}$.
Immers, volgens de stelling van Weierstrass heeft de continue functie f op de verzameling $V = \{(x,y) \mid 2x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$ een globaal minimum. Op de rand van V is $f(x,y) = 0$, in het inwendige van V is $f(x,y) < 0$, zodat het minimum wordt aangenomen in een inwendig punt van V, dus in het stationaire punt $(\frac{1}{6}\sqrt{6},0)$.
Ten opzichte van G heeft f in $(\frac{1}{6}\sqrt{6},0)$ dus zeker een locaal minimum.

Analoog: in het punt $(-\frac{1}{6}\sqrt{6},0)$ heeft f een maximum met waarde $\frac{1}{9}\sqrt{6}$.

Op de rand van G is $y^2 = 4 - x^2$, $-2 \leq x \leq 2$, zodat

$$f(x,y(x)) = x(x^2+3) = x^3 + 3x =: g(x)\ .$$

De functie g is stijgend, omdat $g'(x) = 3x^2 + 3 > 0$. Het minimum van f op de rand van G is dus $g(-2) = -14$, het maximum $g(2) = 14$.
Met behulp van de stelling van Weierstrass volgt dat -14 het globale minimum van f op G is en 14 het globale maximum.

Samenvattend: f heeft op G
een globaal maximum 14 in het punt (2,0),
een globaal minimum -14 in het punt (-2,0),
een locaal maximum $\frac{1}{9}\sqrt{6}$ in het punt $(-\frac{1}{6}\sqrt{6},0)$,
een locaal minimum $-\frac{1}{9}\sqrt{6}$ in het punt $(\frac{1}{6}\sqrt{6},0)$.

6. a) Als de richtingsvector $(\cos\varphi,\sin\varphi)$ niet op de rechte $x + y = 0$ ligt, dus als $\cos\varphi + \sin\varphi \neq 0$ is, dan is de richtingsafgeleide van f in (0,0) in de richting van $(\cos\varphi,\sin\varphi)$ gelijk aan

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\varphi, t\sin\varphi) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2(\cos\varphi + \sin\varphi)} = \frac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}\ .$$

P 3.78

De richtingsafgeleide van f in (0,0) in de richting van $(-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2})$ en van $(\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2})$ is gelijk aan nul.

b) Hoogtelijnen van f zijn de rechte $x + y = 0$ (nullijn), en de cirkels $x^2 + y^2 = c(x + y)$, $c \neq 0$, met uitzondering van de oorsprong.
In elke omgeving van (0,0) neemt f alle reële waarden aan.
Dus is f niet continu in (0,0).

Examen/tentamen mei 1978

1. a) De functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{als } (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0 & \text{als } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

Bepaal alle richtingsafgeleiden in (0,0) en onderzoek of f differentieerbaar is in (0,0).

b) Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x,y) = (y^2 - x^2)(x^2 - y^2 - 1)$$

op het gebied

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}\ .$$

---

2. a) In $\mathbb{R}^4$ is gegeven de deelruimte

$$U = \langle(1,3,1,2),(2,1,2,9),(1,2,1,3)\rangle\ .$$

Bepaal een basis voor U en een basis voor $U^\perp$.
Bepaal een parametervoorstelling van de projectie op U van de rechte

$$\underline{x} = (4,0,0,10) + \lambda(3,-1,-1,6)\ .$$

b) In $\mathbb{R}^4$ zijn vier onafhankelijke vectoren $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ gegeven. Voor de lineaire afbeelding $A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ geldt

$$A^2 = A,\ A\underline{a} = \underline{c},\ A\underline{b} = \underline{d}\ .$$

Bepaal een basis voor de nulruimte en een basis voor de beeldruimte van A.
Laat I de identieke afbeelding zijn.
Bewijs dat de afbeelding $I + A$ regulier is.

3. a) Tussen twee grootheden x en y bestaat een relatie $y = \lambda x^2 + 1$. Om λ te bepalen wordt een aantal metingen gedaan waarvan de resultaten zijn

x	−2	0	2	3
y	16	2	18	37 .

Geef met behulp van de methode der kleinste kwadraten een schatting voor λ.

b) Bepaal de lengte van de kromme

$$(x(t),y(t),z(t)) = (t\sqrt{2},\tfrac{1}{2}t^2,\ln t),\qquad 1 \leq t \leq 2\ .$$

T 5.78

4. De kegel $z^2 = x^2 - y^2$ is belegd met massa waarvan de massadichtheid gelijk is aan $\sqrt{x^2 - y^2}$. Bereken de massa van dat deel van het kegeloppervlak dat ligt binnen de cylinder $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Oplossingen Tentamen mei 1978

1. a) De richtingsafgeleide van f in (0,0) in de richting van $\underline{v} = (v_1, v_2)$, met $v_1^2 + v_2^2 = 1$, is per definitie gelijk aan

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3v_1^3 + t^3v_2^3}{t(t^2v_1^2 + t^2v_2^2)} =$$

$$= \frac{v_1^3 + v_2^3}{v_1^2 + v_2^2} = v_1^3 + v_2^3 \ .$$

Hieruit volgt $f_x(0,0) = 1$ ($\underline{v} = (1,0)$) en $f_y(0,0) = 1$ ($\underline{v} = (0,1)$).
Schrijf nu

$$f(h,k) = f(0,0) + hf_x(0,0) + kf_y(0,0) + \sqrt{h^2 + k^2}\, \rho(h,k) \ ,$$

dan volgt

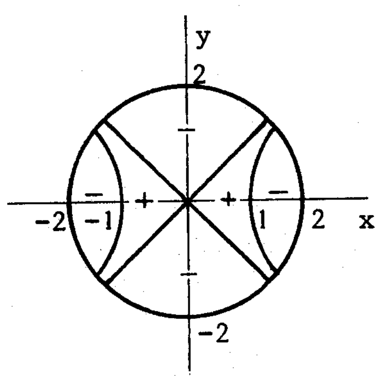
$$\rho(h,k) = -\frac{h^2k + hk^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}} \ , \qquad (h,k) \neq (0,0) \ .$$

Beschouw

$$\rho(h,h) = -\frac{h}{|h|\sqrt{2}} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \text{voor } h > 0 \ , \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \text{voor } h < 0 \ . \end{cases}$$

Dus $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \rho(h,k)$ bestaat niet: f is niet differentieerbaar in (0,0).

b) Nullijnen van f zijn de rechten y = x, y = -x en de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$. Deze verdelen G in zes gebieden waar f tekenvast is (zie figuur).



T 5.78

Het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -2x(2x^2 - 2y^2 - 1) = 0 \,, \\ f_y(x,y) = \ \ 2y(2x^2 - 2y^2 - 1) = 0 \,, \end{cases}$$

levert als stationaire punten van f: de oorsprong en alle punten op de hyperbool $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$.

In (0,0) heeft f geen extreem (zie figuur).
Op de hyperbool $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ is de waarde van f gelijk aan $(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2} - 1) = \frac{1}{4}$.
Dit is het globale maximum van f op G.
Immers, $f(x,y) = g(u) = -u(u-1) = \frac{1}{4} - (u-\frac{1}{2})^2$, waarin $u = x^2 - y^2$, en het globale maximum van g is $\frac{1}{4}$.

Met behulp van de functie g kunnen we nu op eenvoudige wijze de andere extrema van f vinden. Op G geldt $-4 \le x^2 - y^2 \le 4$, dus $-4 \le u \le 4$.
De functie g is stijgend voor $u \le \frac{1}{2}$, dalend voor $u \ge \frac{1}{2}$, dus $g(-4) = -20$ en $g(4) = -12$ zijn het globale resp. locale minimum van g op $[-4,4]$, en dus van f op G. De hyperbolen $x^2 - y^2 = -4$ en $x^2 - y^2 = 4$ hebben de punten $(0,\pm 2)$ resp. $(\pm 2,0)$ met G gemeen.

Conclusie: f heeft op G
een globaal minimum -20 in de punten $(0,\pm 2)$,
een locaal minimum -12 in de punten $(\pm 2,0)$, en
een globaal maximum $\frac{1}{4}$ op de hyperbool $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$.

2. a) Door vegen:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \,,$$

volgt
1°. dat $\{(1,5,1,0),(0,1,0,-1)\}$ een basis is voor U;
2°. dat $U^\perp$ de oplossingsverzameling is van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \,, \\ x_2 - x_4 = 0 \,, \end{cases}$$

dus

$$U^\perp = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \underline{x} = \lambda(1,0,-1,0) + \mu(0,1,-5,1)\} \,.$$

Een basis voor $U^\perp$ is $\{(1,0,-1,0),(0,1,-5,1)\}$.

Kies twee punten $\underline{a} = (4,0,0,10)$ en $\underline{b} = (1,1,1,4)$ op de rechte ℓ: $\underline{x} = (4,0,0,10) + \lambda(3,-1,-1,6)$. De projectie op U van $\underline{a},\underline{b}$ noemen we

$$\underline{a}_1 = \lambda_1(1,5,1,0) + \mu_1(0,1,0,-1) = (\lambda_1, 5\lambda_1 + \mu_1, \lambda_1, -\mu_1)$$

resp. $\underline{b}_1 = (\lambda_2, 5\lambda_2 + \mu_2, \lambda_2, -\mu_2)$.
Uit $\underline{a} - \underline{a}_1 \perp U$, $\underline{b} - \underline{b}_1 \perp U$, volgt dan

$$\begin{cases} 4 - \lambda_1 + 5(\;-5\lambda_1 - \mu_1) \quad - \lambda_1 = 0 \, , \\ \quad -5\lambda_1 - \mu_1 \quad - (10 + \mu_1) = 0 \, , \end{cases}$$

resp.

$$\begin{cases} 1 - \lambda_2 + 5(1 - 5\lambda_2 - \mu_2) + (1 - \lambda_2) = 0 \, , \\ \quad 1 - 5\lambda_2 - \mu_2 \quad - (4 + \mu_2) = 0 \, . \end{cases}$$

De oplossingen van deze stelsels vergelijkingen zijn $\lambda_1 = 2$, $\mu_1 = -10$, $\lambda_2 = 1$, $\mu_2 = -4$, zodat

$$\underline{a}_1 = (2,0,2,10), \; \underline{b}_1 = (1,1,1,4) \; .$$

De projectie op U van ℓ is nu de rechte door de punten $\underline{a}_1$ en $\underline{b}_1$:

$$\underline{x} = (2,0,2,10) + \alpha(1,-1,1,6) \; .$$

Hierbij merken we nog op dat de helft van het rekenwerk ons bespaard was gebleven als we hadden gezien dat $\underline{b}$ in U ligt!

b) Omdat $\mathbb{R}^4$ wordt opgespannen door $\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ is de beeldruimte R van A gelijk aan $\langle A\underline{a}, A\underline{b}, A\underline{c}, A\underline{d}\rangle$. Uit de gegevens volgt

$$A\underline{c} = A^2\underline{a} = A\underline{a} = \underline{c} \, ,$$

$$A\underline{d} = A^2\underline{b} = A\underline{b} = \underline{d} \, ,$$

zodat $R = \langle \underline{c},\underline{d},\underline{c},\underline{d}\rangle = \langle \underline{c},\underline{d}\rangle$.
Een basis voor R is $\{\underline{c},\underline{d}\}$.

De nulruimte N van A is de oplossingsverzameling van de vergelijking $A\underline{x} = \underline{0}$.
Op grond van de dimensiestelling geldt dim $N = 2$. Uit het voorgaande volgt

$$A(\underline{a} - \underline{c}) = A\underline{a} - A\underline{c} = \underline{c} - \underline{c} = \underline{0} \, ,$$
$$A(\underline{b} - \underline{d}) = A\underline{b} - A\underline{d} = \underline{d} - \underline{d} = \underline{0} \, ,$$

zodat $\underline{a} - \underline{c}$ en $\underline{b} - \underline{d}$ in N liggen.
Bovendien is $\{\underline{a} - \underline{c}, \underline{b} - \underline{d}\}$ een onafhankelijk stelsel, dus een basis voor N.

Uit

$$(I + A)\underline{a} = \underline{a} + \underline{c} ,$$
$$(I + A)\underline{b} = \underline{b} + \underline{d} ,$$
$$(I + A)\underline{c} = 2\underline{c} ,$$
$$(I + A)\underline{d} = 2\underline{d} ,$$

volgt dat voor de beeldruimte R^* van $I + A$ geldt

$$R^* = \langle \underline{a} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{d}, 2\underline{c}, 2\underline{d}\rangle =$$
$$= \langle \underline{a} + \underline{c}, \underline{b} + \underline{d}, \underline{c}, \underline{d}\rangle =$$
$$= \langle \underline{a}, \underline{b} + \underline{d}, \underline{c}, \underline{d}\rangle = \langle \underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\rangle = \mathbb{R}^4 .$$

De afbeelding $I + A$ is dus regulier.

3. a) Noem de paren metingen (a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3), (a_4,b_4). Dan is

$$[b_1 - (\lambda a_1^2 + 1)]^2 +\ldots+ [b_4 - (\lambda a_4^2 + 1)]^2 =$$
$$= [b_1 - 1 - \lambda a_1^2]^2 +\ldots+ [b_4 - 1 - \lambda a_4^2]^2$$

minimaal als de vector $\lambda\underline{\underline{aa}}$, met $\underline{\underline{aa}} = (a_1^2,\ldots,a_4^2)$, de projectie is op $\langle\underline{\underline{aa}}\rangle$ van de vector $\underline{b} = (b_1 - 1,\ldots,b_4 - 1)$, dus als $(\underline{b} - \lambda\underline{\underline{aa}},\underline{\underline{aa}}) = 0$. Met

$$\underline{\underline{aa}} = (4,0,4,9),\ \underline{b} = (15,1,17,36) ,$$
$$(\underline{\underline{aa}},\underline{\underline{aa}}) = 16 + 16 + 81 = 113 ,$$
$$(\underline{b},\underline{\underline{aa}}) = 60 + 68 + 324 = 452 ,$$

volgt

$$452 - 113\lambda = 0,\ \lambda = 4 .$$

b) De lengte van de kromme is gelijk aan

$$\int_1^2 \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\,dt = \int_1^2 \sqrt{2 + t^2 + (\tfrac{1}{t})^2}\,dt =$$

$$= \int_1^2 (t + \tfrac{1}{t})dt = \tfrac{1}{2}t^2 + \ln t\Big|_1^2 = \tfrac{3}{2} + \ln 2 .$$

4. De projectie G_0 op het (x,y)-vlak van het deel van het kegeloppervlak dat binnen de cylinder $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ligt wordt gegeven door

$$G_0 = \{(x,y) \mid -x \le y \le x,\ x^2 + y^2 - 2x \le 0\} .$$

T 5.78

Op grond van symmetrie ten opzichte van het (x,y)-vlak is de gevraagde massa gelijk aan

$$M = 2 \iint_{G_0} \sqrt{x^2 - y^2}\,\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\; dxdy, \text{ waarin } z = \sqrt{x^2 - y^2}\ .$$

Met

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\ ,\ z_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}\ ,$$

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{\sqrt{2x^2}}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - y^2}} \qquad (x \geq 0 \text{ op } G_0!)\ ,$$

volgt

$$M = 2\sqrt{2} \iint_{G_0} x\; dxdy\ .$$

In poolcoördinaten wordt G_0 gegeven door

$$G_0 = \{(r,\varphi)\ |\ -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\ ,\ 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi\}\ ,$$

zodat

$$M = 2\sqrt{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 \cos \varphi\; dr =$$

$$= \frac{32}{3}\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \cos^4\varphi\; d\varphi = \frac{8}{3}\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} (1 + 2 \cos 2\varphi + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cos 4\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{2}\left[\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{2}\left(\frac{3\pi}{8} + 1\right) = \frac{1}{3}(3\pi + 8)\sqrt{2}\ .$$

H 6.78

Herkansingsexamen/tentamen juni 1978

1. Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de functie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x,y) = (y - x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

op het gebied

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}, -1 \le y \le 3\} .$$

2. a) Bepaal van de functie

$$f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$$

de extrema op de driehoek $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x + y + z = 1$.

b) Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 0 , \\ (a^2 + 1)x_1 + (a^2 + 1)x_2 + (a^2 + a)x_3 + (a + 1)x_4 = 0 , \\ x_1 + (a + 1)x_2 + ax_3 + (a + 1)x_4 = 0 . \end{cases}$$

Bepaal a zodanig dat de dimensie van de oplossingsruimte van dit stelsel vergelijkingen gelijk is aan 3.

3. a) In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven de punten $\underline{a} = (1,1,1)$, $\underline{b} = (2,3,3)$ en $\underline{c} = (5,3,-3)$. Van de lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven

i) de rechte door $\underline{a}$ en $\underline{b}$ wordt afgebeeld op het punt $(2,-1,0)$,

ii) de richtingsvector van de rechte door $\underline{a}$ en $\underline{c}$ is eigenvector met eigenwaarde 3.

Bepaal

α) de nulruimte en de beeldruimte van A,

β) de matrix van A,

γ) de eigenwaarden en bijbehorende eigenruimten van A.

b) Een lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door de matrix

$$\alpha \begin{pmatrix} p^2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 - p^2 \\ 1 - p & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Bepaal α en p zodanig dat de afbeelding orthogonaal is.

Onderzoek voor de gevonden waarden van α en p of de afbeelding een draaiing of een draaispiegeling is, en bepaal in het geval dat A een draaiing is de draaiingshoek.

H 6.78

4. a) Bereken de inhoud van het lichaam bepaald door $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$, $z \geq x^2 + y^2$.

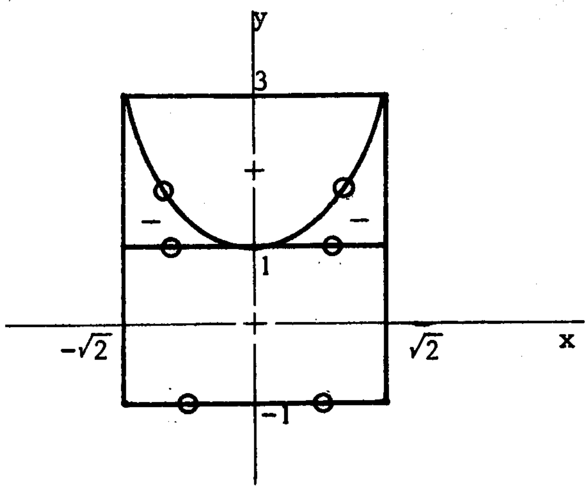
   b) De functie f wordt voor iedere $x \in \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \int_{x^2}^{1} \frac{\arctan xt}{t}\, dt \; .$$

   Bepaal $f'(1)$.

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1978

1. Nullijnen van f zijn de parabool $y = x^2 + 1$ en de rechten $y = 1$, $y = -1$. Deze verdelen G in vier gebieden waar f tekenvast is (zie figuur).



Uit de figuur volgt onmiddellijk dat f in de punten $(x,-1)$, $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$, een locaal minimum 0 heeft.

Het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -2x(y^2 - 1) = 0\ , \\ f_y(x,y) = y^2 - 1 + 2y(y - x^2 - 1) = 0\ , \end{cases}$$

levert $(0,1)$ en $(0,-\frac{1}{3})$ als stationaire punten van f.

In $(0,1)$ heeft f geen extreem (zie figuur).
Ook in het punt $(0,-\frac{1}{3})$ heeft f geen extreem, zoals blijkt uit het zgn. Δ-criterium:

$$\Delta(0,-\tfrac{1}{3}) = f_{xx}(0,-\tfrac{1}{3})f_{yy}(0,-\tfrac{1}{3}) - (f_{xy}(0,-\tfrac{1}{3}))^2 = \tfrac{16}{9}\cdot(-4) - 0 < 0.$$

Randonderzoek.

1°. $x = \pm\sqrt{2}$, $-1 \le y \le 3$: $f(\pm\sqrt{2},y) = (y-3)(y^2-1) =: g(y)$. Uit

$$g'(y) = y^2 - 1 + 2y(y-3) = 3y^2 - 6y - 1 = 3(y-1)^2 - 4 = 0$$

voor $y = 1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$, en

$$g(y) > 0 \quad \text{voor } -1 < y < 1\ ,$$
$$g(y) < 0 \quad \text{voor } 1 < y < 3 \quad \text{(zie figuur)}\ ,$$

volgt dat $g(1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}) = \frac{16}{9}\sqrt{3}$ het maximum en $g(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}) = -\frac{16}{9}\sqrt{3}$ het minimum van g is op het interval $[-1,3]$.

In de eindpunten -1 en 3 heeft g een locaal minimum 0 (de corresponderende punten $(\pm\sqrt{2},-1)$ zijn reeds gedetermineerd) resp. een locaal maximum 0; in de corresponderende punten $(\pm\sqrt{2},3)$ heeft f geen extreem (zie figuur).

2°. $y = 3$, $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$: $f(x,3) = 8(2 - x^2)$; het maximum van deze functie is $f(0,3) = 16$.

Op grond van de stelling van Weierstrass is $-\frac{16}{9}\sqrt{3}$ het globale minimum en 16 het globale maximum van f op G; bovendien is $\frac{16}{9}\sqrt{3}$ het globale maximum van f op het gebied $\{(x,y) \mid -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2},\ -1 \le y \le 1\}$ (zie figuur).

Samenvattend: f heeft op G
een globaal minimum $-\frac{16}{9}\sqrt{3}$ in de punten $(\pm\sqrt{2}, 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$,
een globaal maximum 16 in het punt $(0,3)$.
een locaal minimum 0 in de punten $(x,-1)$, $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$, en
een locaal maximum $\frac{16}{9}\sqrt{3}$ in de punten $(\pm\sqrt{2}, 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3})$.

2. a) Op de driehoek geldt $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$, dus $f(x,y,z) \ge 0$. Op de zijden $x = 0$, $y + z = 1$; $y = 0$, $x + z = 1$ en $z = 0$, $x + y = 1$ is $f(x,y,z) = 0$, zodat 0 het globale minimum is van f op de driehoek.

Op grond van de stelling van Weierstrass heeft f dan een globaal maximum in een punt (x,y,z) met $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$, $x + y + z = 1$.
Zij $g(x,y,z) = x + y + z - 1$.
Dan zijn f en g differentieerbaar, en er geldt $\operatorname{grad} g(x,y,z) = (1,1,1) \ne \underline{0}$.
Volgens de multiplicatorenmethode van Lagrange is (x,y,z) oplossing van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \, , \\ \cos x \sin y \sin z + \lambda = 0 \, , \\ \sin x \cos y \sin z + \lambda = 0 \, , \\ \sin x \sin y \cos z + \lambda = 0 \, . \end{cases}$$

Eliminatie van λ geeft

$$\begin{cases} x + y + z = 1 , \\ \sin z \sin(x - y) = 0 , \\ \sin y \sin(x - z) = 0 , \end{cases}$$

waaruit, wegens $0 < y < 1$, $0 < z < 1$, $-1 < x - y < 1$, $-1 < x - z < 1$, volgt

$$x = y = z = \frac{1}{3} .$$

Het globale maximum van f op de driehoek is dus $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = (\sin \frac{1}{3})^3$.

Opmerking. Door $z = 1 - x - y$ te substitueren in $\sin z$ is het vraagstuk als volgt te herleiden.
Bepaal van de functie $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$h(x,y) = \sin x \sin y \sin(1 - x - y)$$

de extrema op de driehoek

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\} .$$

De oplossing verloopt dan als volgt.

Op de rand van G is $h(x,y) = 0$, in het inwendige van G is $h(x,y) > 0$, zodat 0 het globale minimum is van h op G en dus van f op de gegeven driehoek. De rand van G correspondeert met de zijden van de driehoek.

Op grond van de stelling van Weierstrass heeft h een globaal maximum in een inwendig punt van G, dus in een stationair punt van h.

Het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} h_x(x,y) = \sin y \sin(1 - 2x - y) = 0 , \\ h_y(x,y) = \sin x \sin(1 - x - 2y) = 0 , \end{cases}$$

is, wegens $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $-1 < 1 - 2x - y < 1$, $-1 < 1 - x - 2y < 1$, equivalent met het stelsel

$$\begin{cases} 1 - 2x - y = 0 , \\ 1 - x - 2y = 0 , \end{cases}$$

waarvan de oplossing is $(x,y) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
Het globale maximum van h op G is dus $h(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = (\sin \frac{1}{3})^3$.

b) De dimensie van de oplossingsruimte van het stelsel vergelijkingen is gelijk aan 3 dan en slechts dan als de rang van de coëfficiëntenmatrix gelijk is aan 1.

Vegen met de eerste kolom geeft

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ a^2+1 & a^2+1 & a^2+a & a+1 \\ 1 & a+1 & a & a+1 \end{bmatrix} = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^2+1 & 0 & a^2(1-a) & a(1-a) \\ 1 & a & 0 & a \end{bmatrix} = 1$$

dan en slechts dan als $a = 0$.

3. a) Uit de gegevens volgt $\mathcal{A}\underline{a} = (2,-1,0) = \mathcal{A}\underline{b}$, $\mathcal{A}(\underline{c} - \underline{a}) = 3(\underline{c} - \underline{a})$, zodat $(2,-1,0)$ en $\underline{c} - \underline{a} = (4,2,-4)$ element zijn van de beeldruimte $\mathcal{R}$ van $\mathcal{A}$ en $\underline{b} - \underline{a} = (1,2,2)$ element is van de nulruimte $\mathcal{N}$ van $\mathcal{A}$.

Het stelsel $\{(2,-1,0),(4,2,-4)\}$ is onafhankelijk, dus geldt $\dim \mathcal{R} \geq 2$.

Uit $\dim \mathcal{N} \geq 1$ en de dimensiestelling $\dim \mathcal{N} + \dim \mathcal{R} = 3$ volgt dan $\dim \mathcal{R} = 2$, $\dim \mathcal{N} = 1$, dus

$$\mathcal{R} = \langle(2,-1,0),(2,1,-2)\rangle \;,$$
$$\mathcal{N} = \langle(1,2,2)\rangle \;.$$

De matrix A van $\mathcal{A}$ bepalen we door vegen:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 \to 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \to 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \to 6 & 3 & -6 \end{array} \sim \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 \to 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \to -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \to -2 & -5 & 6 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 \to 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \to -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \to 0 & -6 & 6 \end{array} \sim \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 \to 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \to -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \to 0 & -2 & 2 \end{array} ,$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} .$$

De karakteristieke vergelijking van $\mathcal{A}$ is

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-5\lambda+\lambda^2) + 2(2\lambda-4) = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-6) = 0,$$

zodat de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ zijn 0,3,6.

De eigenruimten E_0 en E_3 hebben we al:

$$E_0 = \mathcal{N} = \langle(1,2,2)\rangle \;;$$

$E_3 = \langle \underline{c} - \underline{a} \rangle = \langle(2,1,-2)\rangle$ ($E_3 \neq R$, want

$A(2,-1,0) = (10,-7,2) \neq 3(2,-1,0)$!) .

De eigenruimte E_6 is de oplossingsruimte van $(A - 6I)\underline{x} = \underline{0}$:

$$\begin{matrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2, \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad E_6 = \langle(2,-2,1)\rangle.$$

b) Laat de kolommen van de matrix zijn $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3$. Dan geldt: A is orthogonaal dan en slechts dan als $\{\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3\}$ een orthonormaal stelsel is. Uit

$$(\underline{k}_2, \underline{k}_2) = 2\alpha^2 = 1 ,$$
$$(\underline{k}_2, \underline{k}_3) = -\alpha^2(1 - p^2) = 0 ,$$
$$(\underline{k}_1, \underline{k}_3) = \alpha^2(1 - p^2) + \alpha^2(1 - p)\sqrt{2} = 0 ,$$

volgt $\alpha = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $p = 1$, dus

$$A = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} .$$

Wegens $\det A = \pm(\frac{1}{2}\sqrt{2})^3.\sqrt{2}.(-2) = \mp 1$, is A een draaispiegeling als $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en een draaiing als $\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

In het geval dat A een draaiing is, d.w.z. als

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ,$$

is het beeld van $(0,0,1)$ gelijk aan $(0,0,-1)$: de draaiingshoek is π.

4. a) De projectie G_0 van het lichaam op het (x,y)-vlak is de cirkelschijf $x^2 + y^2 \leq 1$, zodat de inhoud van het lichaam wordt gegeven door

$$I = \iint_{G_0} \left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz \right) dxdy = \iint_{G_0} [\sqrt{2 - x^2 - y^2} - (x^2 + y^2)]dxdy .$$

Overgang op poolcoördinaten geeft

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 [\sqrt{2 - r^2} - r^2]r\ dr = 2\pi[-\tfrac{1}{3}(2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{4}\ r^4]_{r=0}^{r=1} = \tfrac{1}{6}\ \pi(8\sqrt{2} - 7).$$

b) Uit

$$f'(x) = -\frac{\arctan(x^3)}{x^2}(x^2)' + \int_{x^2}^{1} \frac{1}{t}\,\frac{t}{1+x^2t^2}\,dt =$$

$$= -2\,\frac{\arctan(x^3)}{x} + \int_{x^2}^{1} \frac{dt}{1+x^2t^2}$$

(aan de voorwaarden voor het differentiëren van een integraal met een parameter is, bijvoorbeeld voor $x > \frac{1}{2}$, ruimschoots voldaan) volgt

$$f'(1) = -2 \arctan 1 = -\tfrac{1}{2}\pi\ .$$

Examen/tentamen januari 1979

1. Gegeven is de kromme

$$\underline{f}(t) = (\sin 2t,\ 1-\cos 2t,\ 2\cos t) \qquad (t \in \mathbb{R}) .$$

Bewijs dat alle raaklijnen aan deze kromme afstand 2 tot de oorsprong hebben.

2. Op het gebied $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ |y| \le 2\}$ is de functie f gedefinieerd door

$$f(x,y) = xy(y^2-1) .$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van deze functie.

3. De functie f is gedefinieerd door

$$f(x,y) = \sqrt{2+xy} .$$

Geef de Taylorreeks van f rond (1,2) tot en met de termen van de tweede graad.

4. Bepaal voor iedere reële a de oplossingsverzameling van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} ax - 5y + 15z = 1 , \\ x + y - 2z = 0 , \\ 6x + y + (a+3)z = -1 . \end{cases}$$

5. a) De lineaire afbeelding $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ voldoet aan $A^2 = A + 2I$ (I is de identieke afbeelding).
Bewijs dat -1 en $+2$ de enig mogelijke eigenwaarden van A zijn en bewijs dat A regulier is.
b) De lineaire afbeelding $A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ voldoet aan $A^2 = A + 2I$ en er geldt

$$A(1,1,0,0) = (1,0,1,0) ,$$
$$A(0,0,0,1) = (0,1,0,1) .$$

Bepaal de matrix van A.

6. Bereken de inhoud van het lichaam bepaald door

$$x^2 + y^2 - z^2 \ge 1 ,\ x^2 + y^2 + 2z^2 \le 25 .$$

7. Bepaal de lengte van de kromme gegeven door

$$(x(t),y(t),z(t)) = (\sin t^3, \cos t^3, \tfrac{3}{2}t^2), \quad -1 \le t \le 1 .$$

Oplossingen Tentamen januari 1979

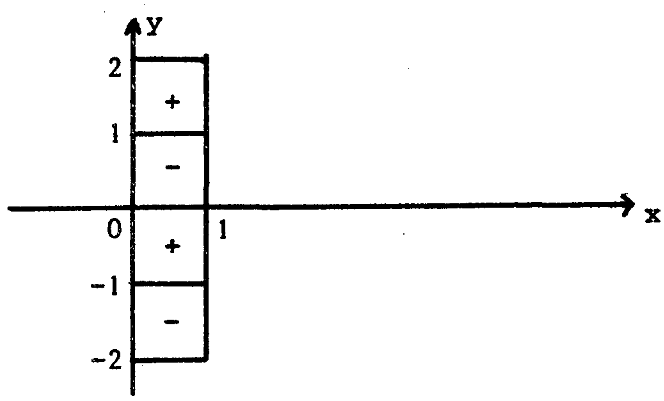
1. Uit

$$\sin^2 2t + (1-\cos 2t)^2 + 4\cos^2 t =$$

$$= 2 - 2\cos 2t + 4\cos^2 t = 4\sin^2 t + 4\cos^2 t = 4$$

volgt dat de kromme op de bol $x^2+y^2+z^2 = 4$ ligt. Alle raaklijnen aan de kromme zijn dus raaklijnen aan de bol en hebben derhalve afstand 2 tot de oorsprong.

2. Nullijnen van f zijn de x-as, de y-as en de rechten $y = 1$, $y = -1$. Het tekenverloop van f is in de figuur aangegeven.



Er zijn geen stationaire punten in het inwendige van G, want

$$\text{grad } f(x,y) = (y(y^2-1)\ ,\ x(y^2-1)+2xy^2) = \underline{0}$$

geeft de punten (0,0), (0,1) en (0,-1).

De extrema van f worden dus aangenomen op de rand van G.

i) Op het lijnstuk $x = 0$, $-2 \le y \le 2$ is $f(x,y) = 0$. Uit de figuur: in de punten (0,y) met $-1 < y < 0$ of $1 < y \le 2$ heeft f een locaal minimum 0 en in de punten (0,y) met $-2 \le y < -1$ of $0 < y < 1$ een locaal maximum 0.

ii) Uit $f(1,y) = y(y^2-1)$, $-2 \le y \le 2$, volgt, wegens

$$\frac{d}{dy} f(1,y) = 3y^2 - 1 \gtreqless 0 \quad \text{voor } y^2 \gtreqless \frac{1}{3}\ ,$$

dat f op het lijnstuk $x = 1$, $-2 \le y \le 2$, de volgende extrema heeft:

een globaal minimum -6 in $(1,-2)$,
een locaal minimum $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ in $(1,\frac{1}{3}\sqrt{3})$,
een globaal maximum 6 in $(1,2)$,
een locaal maximum $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ in $(1,-\frac{1}{3}\sqrt{3})$.

Het minimum $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ is volgens de stelling van Weierstrass het globale minimum van f op het vierkant $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, want er zijn geen stationaire punten in het inwendige van het vierkant en op de drie zijden die niet op de rechte $x = 1$ liggen geldt $f(x,y) = 0$.
Dus is $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ een locaal minimum van f op G.
Analoog: $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ is een locaal maximum van f op G.

iii) Uit $f(x,\pm 2) = \pm 6x$, $0 \le x \le 1$, volgt dat f op de lijnstukken $0 \le x \le 1$, $y = 2$ en $0 \le x \le 1$, $y = -2$ een globaal maximum 6 resp. een globaal minimum -6 heeft.
Volgens de stelling van Weierstrass zijn 6 en -6 het globale maximum resp. het globale minimum van f op G.

3. Met behulp van standaardreeksen volgt

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(1+h,2+k) = \sqrt{2+(1+h)(2+k)} = \\
&= \sqrt{4+2h+k+hk} = 2(1+\tfrac{1}{2}h+\tfrac{1}{4}k+\tfrac{1}{4}hk)^{\frac{1}{2}} = \\
&= 2[1+\tbinom{\frac{1}{2}}{1}(\tfrac{1}{2}h+\tfrac{1}{4}k+\tfrac{1}{4}hk)+\tbinom{\frac{1}{2}}{2}(\tfrac{1}{2}h+\tfrac{1}{4}k+\tfrac{1}{4}hk)^2+\dots] = \\
&= 2+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{4}k+\tfrac{1}{4}hk-\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4}h^2+\tfrac{1}{16}k^2+\tfrac{1}{4}hk+\dots)+\dots = \\
&= 2+\tfrac{1}{2}h+\tfrac{1}{4}k-\frac{1}{16}h^2+\frac{3}{16}hk-\frac{1}{64}k^2+\dots = \\
&= 2+\tfrac{1}{2}(x-1)+\tfrac{1}{4}(y-2)-\frac{1}{16}(x-1)^2+\frac{3}{16}(x-1)(y-2)+ \\
&\qquad -\frac{1}{64}(y-2)^2+\dots\,.
\end{aligned}
$$

4. Met vegen:

$$
\left.\begin{array}{ccc|c}
a & -5 & 15 & 1 \\
1 & 1 & -2 & 0 \\
6 & 1 & a+3 & -1
\end{array}\right.
\sim
\left.\begin{array}{ccc|c}
0 & -5-a & 15+2a & 1 \\
1 & 1 & -2 & 0 \\
0 & -5 & a+15 & -1
\end{array}\right.
\sim
\left.\begin{array}{ccc|c}
0 & 0 & a^2+10a & -a-10 \\
5 & 0 & a+5 & -1 \\
0 & -5 & a+15 & -1
\end{array}\right.,
$$

volgt voor $a \neq 0$, $a \neq -10$: $z = -\frac{1}{a}$, $x = \frac{1}{a}$, $y = -\frac{3}{a}$, dus de oplossingsverzameling

$$\{(\tfrac{1}{a}, -\tfrac{3}{a}, -\tfrac{1}{a})\} .$$

Voor $a = -10$ is een equivalent stelsel

$$\begin{cases} 5x - 5z = -1 , \\ - 5y + 5z = -1 , \end{cases}$$

met oplossingsverzameling

$$\{(-\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}, 0) + \lambda(1,1,1)\} .$$

Voor $a = 0$ is de oplossingsverzameling leeg, omdat de eerste vergelijking van het equivalente stelsel geeft $0 = -10$.

5. a) Uit

$$A\underline{x} = \lambda\underline{x} , \quad \underline{x} \neq \underline{0}$$

en

$$A^2\underline{x} = A\underline{x} + 2\underline{x} \quad \text{voor alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^n ,$$

volgt

$$\lambda^2\underline{x} = \lambda\underline{x} + 2\underline{x} , \quad \underline{x} \neq \underline{0} ,$$

dus

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 ,$$

zodat -1 en 2 de enig mogelijke eigenwaarden van A zijn.

Omdat er geen eigenwaarde 0 is bestaat de nulruimte van A slechts uit de nulvector, dus A is regulier.

b) Uit

$$A(1,1,0,0) = (1,0,1,0)$$

volgt

$$A^2(1,1,0,0) = A(1,0,1,0)$$

en dus, met $A^2 = A + 2I$,

$A(1,0,1,0) = A(1,1,0,0) + 2(1,1,0,0) = (1,0,1,0) + (2,2,0,0) = (3,2,1,0)$.

Analoog: $A(0,1,0,1) = (0,1,0,3)$.

T 1.79

Met vegen:

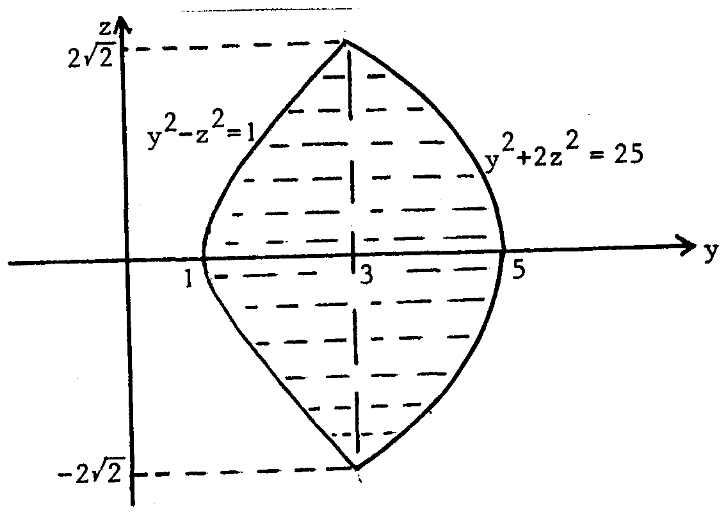
$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \to 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \to 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \to 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \to 0 & 1 & 0 & 3 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \to 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \to 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \to 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \to 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \to 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \to 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \to 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \to 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \to 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \to 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \to 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \to 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

volgt dat de matrix van A is

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

6. Het lichaam is het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied $x = 0,\ y^2 - z^2 \geq 1,\ y^2 + 2z^2 \leq 25,\ y \geq 0$ te wentelen om de z-as.



De doorsnede van een vlak loodrecht op de z-as en het lichaam is de cirkelring

$$G_z = \{(x,y) \mid 1 + z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 25 - 2z^2\} , \quad -2\sqrt{2} \leq z \leq 2\sqrt{2} .$$

De oppervlakte van G_z is $\pi(25 - 2z^2) - \pi(1 + z^2) = 3\pi(8 - z^2)$, zodat de inhoud van het lichaam gelijk is aan

T 1.79

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(\iint_{G_z} dx\,dy \right) dz = 3\pi \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (8 - z^2)dz = 6\pi \left[8z - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^{2\sqrt{2}} = 64\pi\sqrt{2} .$$

<u>Tweede oplossing</u>

In cylindercoördinaten wordt het lichaam gegeven door

$$L = \{(r,\varphi,z) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi,\ r^2 - z^2 \ge 1,\ r^2 + 2z^2 \le 25\} .$$

De doorsnede van L en een vlak φ = constant is het in de figuur aangegeven gebied met y vervangen door r.

Hieruit lezen we gemakkelijk af dat de inhoud van L gelijk is aan

$$\iiint_L dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^3 r\,dr \int_{-\sqrt{r^2-1}}^{\sqrt{r^2-1}} dz + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_3^5 r\,dr \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}(25-r^2)}}^{\sqrt{\frac{1}{2}(25-r^2)}} dz =$$

$$= 4\pi \int_1^3 r\sqrt{r^2 - 1}\, dr + 2\pi\sqrt{2} \int_3^5 r\sqrt{25 - r^2}\, dr =$$

$$= \frac{4\pi}{3} (r^2 - 1)^{3/2} \Big|_1^3 - \frac{2\pi}{3} \sqrt{2}\, (25 - r^2)^{3/2} \Big|_3^5 =$$

$$= \frac{32\pi}{3} \sqrt{8} + \frac{128\pi}{3} \sqrt{2} = 64\pi\sqrt{2} .$$

7. De lengte van de kromme is gelijk aan

$$\ell = \int_{-1}^{1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt .$$

Met

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = (3t^2 \cos t^3)^2 + (-3t^2 \sin t^3)^2 + (3t)^2 =$$

$$= 9t^4 + 9t^2 = 9t^2(t^2 + 1) :$$

$$\ell = \int_{-1}^{1} 3|t| \sqrt{t^2 + 1}\, dt = 6\int_0^t t\sqrt{t^2 + 1}\, dt = 2(t^2 + 1)^{3/2} \Big|_0^1 = 4\sqrt{2} - 2 .$$

Herkansingsexamen/tentamen januari 1979

1. Het oppervlak S is gegeven door de vergelijking $z = \frac{x}{1+y}$.
Bepaal het punt op S dat ligt in het vlak $z = 1$ en waarvoor geldt dat het raakvlak in dat punt aan S gaat door (0,5,0).

2. Op het gebied $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le 1,\ y \le 1,\ x+y \ge -1\}$ is de functie f gedefinieerd door
$$f(x,y) = (x+y)(x^2-y^2)\ .$$
Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van deze functie.

3. Bepaal van de functie
$$f(x,y) = \arctan(x-y)$$
plaats, aard en waarde van de extrema op de kromme $x^2 = y^3$.

4. Een lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door de matrix
$$\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 3 & b & 9 \\ 2 & 4 & c \end{pmatrix}.$$
Bepaal a, b en c zodanig dat de dimensie van de nulruimte 2 is, en bepaal voor de gevonden waarden van a, b en c de eigenwaarden en bijbehorende eigenruimten van A.

5. De deelruimte $U \subset \mathbb{R}^4$ is de oplossingsruimte van het stelsel vergelijkingen
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0\ , \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\ , \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\ . \end{cases}$$
   a) Bepaal een basis voor U en een basis voor $U^\perp$.
   b) Van de orthogonale lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ is gegeven: $A \neq I$ (I is de identieke afbeelding) en voor iedere $\underline{x} \in U^\perp$ geldt $A\underline{x} = \underline{x}$.
   Bepaal de matrix van A.

6. Bereken, bijvoorbeeld door middel van bolcoördinaten, de massa van het lichaam bepaald door

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 ,$$

met massadichtheid $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

7. De functie F wordt voor $x > 0$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin xt}{t} \, dt .$$

Bepaal $F'(x)$.

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1979

1. Zij $\underline{a} = (1+a,a,1)$ het gevraagde punt in de doorsnede van S en het vlak $z = 1$.
Het raakvlak in $\underline{a}$ aan S,

$$z - 1 = z_x(\underline{a})(x - a - 1) + z_y(\underline{a})(y - a) =$$

$$= \frac{1}{1+a}(x - a - 1) - \frac{1+a}{(1+a)^2}(y - a) \,,$$

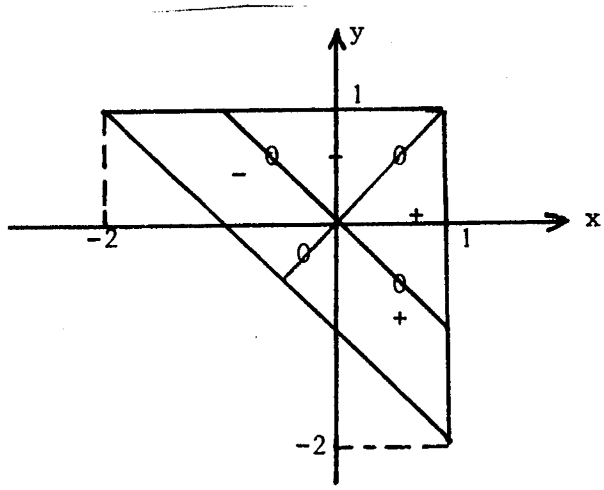
gaat door (0,5,0) als

$$-1 = \frac{-a-1}{1+a} - \frac{1}{1+a}(5 - a) = -1 - \frac{1}{1+a}(5 - a) \,, \qquad a = 5 \,.$$

Dus

$$\underline{a} = (6,5,1) \,.$$

2. Nullijnen van f zijn de rechten $y = x$ en $y = -x$.
In de figuur is het tekenverloop van f aangegeven.



Stationaire punten van f zijn alle punten op de rechte $y = -x$, zoals blijkt uit

$$f_x(x,y) = x^2 - y^2 + 2x(x+y) = (x+y)(3x-y) \,,$$

$$f_y(x,y) = x^2 - y^2 - 2y(x+y) = (x+y)(x-3y) \,.$$

Uit de figuur volgt onmiddellijk dat f in de punten $(x,-x)$ met $-1 \le x < 0$ een locaal maximum 0 heeft en in de punten $(x,-x)$ met $0 < x \le 1$ een locaal minimum 0.

Randonderzoek

i) Uit

$$f(1,y) = (1+y)(1-y^2)\ , \quad -2 \le y \le 1\ ,$$

en

$$\frac{d}{dy} f(1,y) = 1 - y^2 - 2y(1+y) = (1+y)(1-3y) \gtreqless 0$$

$$-1 < y < \frac{1}{3}\ ,$$

voor $y = -1,\ y = \frac{1}{3}$,

$$-2 \le y < -1,\ \frac{1}{3} < y \le 1\ ,$$

volgt dat f op het lijnstuk $x = 1$, $-2 \le y \le 1$ de volgende extrema heeft:

een globaal maximum 3 in $(1,-2)$,
een locaal maximum $\frac{32}{27}$ in $(1,\frac{1}{3})$,
een globaal minimum 0 in $(1,-1)$ en $(1,1)$.

In het punt $(1,-1)$ heeft f een locaal minimum ten opzichte van G (zie voorgaande), in het punt $(1,1)$ heeft f geen extreem (zie figuur).

In het punt $(1,\frac{1}{3})$ heeft f een locaal maximum ten opzichte van G, omdat $\frac{32}{27}$ het globale maximum van f is op de driehoek begrensd door de nul-lijnen $y = x$, $y = -x$ en de rechte $x = 1$ (stelling van Weierstrass; geen stationaire punten in het inwendige van de driehoek).

ii) $f(x,1) = (x+1)(x^2-1) = -(1+x)(1-x^2)$, $-2 \le x \le 1$, geeft onmiddellijk (zie i)):

een globaal minimum -3 in $(-2,1)$,
een locaal minimum $-\frac{32}{27}$ in $(\frac{1}{3},1)$.

iii) $x+y = -1$, $y = -1-x$, $-2 \le x \le 1$:

$$f(x,-1-x) = (-1)(x^2-(-1-x)^2) = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1\ ,$$

geeft

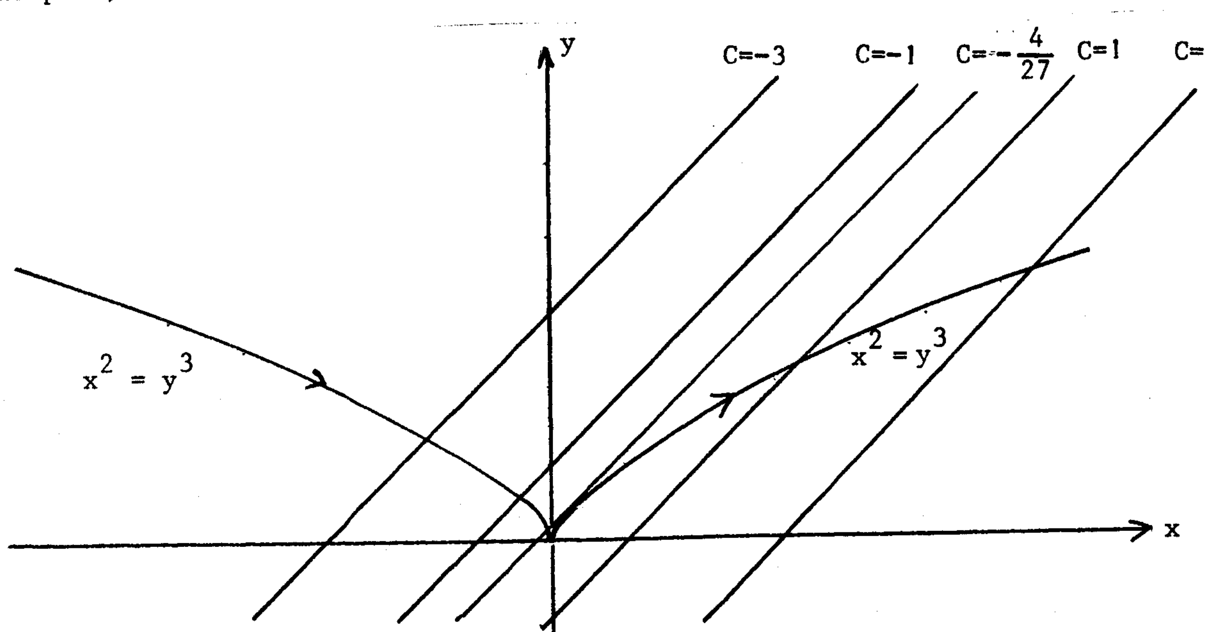
een globaal minimum -3 in $(-2,1)$,
een globaal maximum 3 in $(1,-2)$.

Uit de stelling van Weierstrass volgt dat de globale extrema 3 en -3 van f op de rand van G ook globale extrema van f op G zijn.

Samenvattend: f heeft op G

een globaal maximum 3 in het punt $(1,-2)$,
een globaal minimum -3 in het punt $(-2,1)$,
een locaal maximum $\frac{32}{27}$ in het punt $(1,\frac{1}{3})$,
een locaal minimum $-\frac{32}{27}$ in het punt $(\frac{1}{3},1)$,
een locaal maximum 0 in de punten $(x,-x)$ met $-1 \le x < 0$,
een locaal minimum 0 in de punten $(x,-x)$ met $0 < x \le 1$.

3. Hoogtelijnen van f zijn rechten $x-y=C$, de waarde van f op $x-y=C$ is arctan C.
Op de kromme $x^2=y^3$ neemt C alle reële waarden aan omdat de vergelijking $y^3=(y+C)^2$ voor elke C een reële, en dus niet-negatieve, wortel heeft (een polynoom van de graad 3 met reële coëfficiënten heeft tenminste één reëel nulpunt): de kromme $x^2=y^3$ snijdt alle rechten $x-y=C$.



Doorlopen van de kromme $x^2=y^3$ in de richting van de pijl geeft:
C stijgt van $-\infty$ naar 0 (in het punt (0,0)), daalt daarna van 0 naar C_0 en stijgt tenslotte van C_0 naar ∞, waarin C_0 de waarde van C is waarvoor de rechte $x-y=C$ raakt aan de kromme $y=x^{2/3}$.
De rechte $x-y=C$ raakt aan de kromme $y=x^{2/3}$ in het punt waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme gelijk is aan 1.
Dit geeft

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} = 1 \ , \quad x = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \ ; \quad y = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \ , \quad C_0 = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27} \ .$$

Omdat arctan C een stijgende functie van C is heeft f op de kromme $x^2 = y^3$ de volgende extrema:

een locaal maximum $\quad 0 \qquad$ in het punt $(0,0)$,
een locaal minimum $-\arctan\frac{4}{27}$ in het punt $(\frac{8}{27},\frac{4}{9})$.

<u>Opmerking</u>. Met de multiplicatorenmethode van Lagrange kan men alleen de <u>plaats</u> van de extrema opsporen.
Zij $g(x,y) = x^2 - y^3$. Dan zijn f en g differentieerbaar op $\mathbb{R}^2$.
Er geldt grad $g(x,y) = (2x,-3y^2)$, dus grad $g(0,0) = \underline{0}$.

Als f een extreem heeft onder de nevenvoorwaarde $x^2 - y^3 = 0$ in een punt $(x,y) \neq (0,0)$, dan is er een getal λ zodanig dat geldt

$$\begin{cases} x^2 - y^3 = 0 \ , \\[2ex] \dfrac{1}{1+(x-y)^2} + 2\lambda x = 0 \ , \\[2ex] \dfrac{-1}{1+(x-y)^2} - 3\lambda y^2 = 0 \ . \end{cases}$$

Na enig rekenwerk vindt men:

$$x = \frac{8}{27} \ , \quad y = \frac{4}{9} \ , \quad \lambda = -\frac{3^9}{2^4(3^6+2^4)} \ .$$

Conclusie: in de punten $(0,0)$ en $(\frac{8}{27},\frac{4}{9})$ kunnen extrema optreden.

4. De dimensie van de nulruimte N is 2 dan en slechts dan als de dimensie van de beeldruimte R gelijk is aan 1 (dimensiestelling), dus dan en slechts dan als de kolomvectoren van de matrix (alle zijn ongelijk aan de nulvector) veelvouden van elkaar zijn.
Dit geeft $2a = 2$, $6 = b$, $6 = c$, zodat de matrix wordt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} .$$

Er is een eigenwaarde 0; de bijbehorende eigenruimte E_0 is de nulruimte:

$$E_0 = \{(x,y,z) \mid x + 2y + 3z = 0\} = \langle(2,-1,0),(3,0,-1)\rangle .$$

Een eigenvector bij eigenwaarde $\lambda \neq 0$ is element van R ($\lambda\underline{x} \in R$ met $\lambda \neq 0$ geeft $\underline{x} \in R$).

Uit $A(1,3,2) = (13,39,26) = 13(1,3,2)$ volgt dat 13 eigenwaarde van A is met

$$E_{13} = \langle(1,3,2)\rangle .$$

5. a) Met vegen:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} ,$$

volgt het equivalente stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad - x_4 = 0 , \\ x_1 - x_2 \qquad\qquad\quad = 0 , \\ 2x_1 \qquad - x_3 \qquad = 0 , \end{cases}$$

met oplossingsruimte $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \underline{x} = \lambda(1,1,2,1)\} = U$, zodat een basis voor U is

$$\{(1,1,2,1)\} .$$

De deelruimte $U^\perp$ wordt gegeven door

$$U^\perp = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \underline{x} \perp (1,1,2,1)\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\} =$$

$$= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \underline{x} = \lambda(1,0,0,-1) + \mu(0,1,0,-1) + \nu(0,0,1,-2)\} ,$$

zodat een basis voor $U^\perp$ is

$$\{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-2)\} .$$

b) Voor $\underline{x} \in U$, dus $\underline{x} \perp U^\perp$, geldt $A\underline{x} \perp U^\perp$, dus $A\underline{x} \in U$, omdat A een orthogonale afbeelding is.

In het bijzonder

$$A(1,1,2,1) = \alpha(1,1,2,1) ,$$

zodat (1,1,2,1) eigenvector van A is bij eigenwaarde α.

Eigenwaarden van een orthogonale afbeelding kunnen slechts 1 of -1 zijn.

Als $\alpha = 1$ was, dan zou voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ gelden $A\underline{x} = \underline{x}$. Dit is in strijd met het gegeven $A \neq I$. Dus is $\alpha = -1$.

Met vegen:

$$\begin{array}{rrrrcrrrr} 1 & 1 & 2 & 1 & \to & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \to & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \to & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \to & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \sim$$

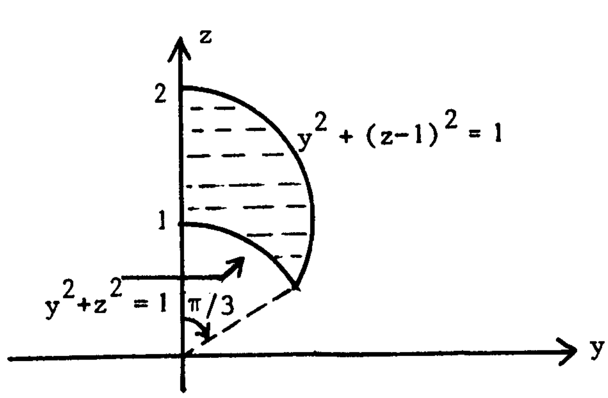
$$\sim \begin{array}{rrrrcrrrr} 0 & 1 & 2 & 2 & \to & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \to & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \to & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \to & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \sim \begin{array}{rrrrcrrrr} 0 & 0 & 2 & 3 & \to & -2 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \to & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \to & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \to & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{rrrrcrrrr} 0 & 0 & 0 & 7 & \to & -2 & -2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \to & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \to & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \to & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \sim \begin{array}{rrrrcrrrr} 0 & 0 & 0 & -7 & \to & 2 & 2 & 4 & -5 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & \to & 5 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & \to & -2 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & \to & -4 & -4 & -1 & -4 \end{array},$$

volgt dat de matrix van A is

$$-\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

6. Het lichaam is het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gearceerde gebied in het (y,z)-vlak te wentelen om de z-as.



In bolcoördinaten (ρ,θ,φ) wordt de bol $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ gegeven door $\rho = 2\cos\theta$, en het lichaam door

$$L = \{(\rho,\theta,\varphi) \mid 1 \le \rho \le 2\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{3},\ 0 \le \varphi \le 2\pi\} .$$

De massa van L is dus gelijk aan

$$\iiint_L (x^2+y^2+z^2)^{-1}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} \sin\theta\,d\theta \int_1^{2\cos\theta} d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/3} \sin\theta(2\cos\theta - 1)d\theta = 2\pi\Big[\sin^2\theta + \cos\theta\Big]_0^{\pi/3} =$$

$$= 2\pi(\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} - 1) = \tfrac{1}{2}\pi .$$

7. Er geldt

$$F'(x) = \frac{\sin x^2}{x}(x)' + \int_1^x \frac{\partial}{\partial x}\frac{\sin xt}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{x}\sin x^2 + \int_1^x \cos xt\,dt =$$

$$= \frac{1}{x}\sin x^2 + \Big[\frac{1}{x}\sin xt\Big]_{t=1}^{t=x} =$$

$$= \frac{2}{x}\sin x^2 - \frac{1}{x}\sin x , \quad x > 0 .$$

Proeftentamen maart 1979

1. In $\mathbb{R}^3$ is een kromme K gegeven door

$$\underline{f}(t) = (t^2 + t + 1\ ,\ 2t^2 + t + 2\ ,\ t + 3)\ , \qquad t \in \mathbb{R}\ .$$

   a) Geef een parametervoorstelling van de raaklijn aan K in de punten $\underline{f}(0)$ en $\underline{f}(1)$. Toon aan dat deze raaklijnen elkaar snijden en bepaal het snijpunt.

   b) Bewijs dat de kromme K in een vlak ligt en geef de vergelijking van dat vlak.

2. De rechte m gegeven door de vergelijkingen $z = 0$, $y = x$ wordt gewenteld om de as ℓ: $\underline{x} = (0,2,0) + \lambda(1,0,0)$.
Bepaal de vergelijking van het omwentelingsoppervlak en schets het oppervlak.

3. Bereken de termen tot en met die van de tweede graad van de formule van Taylor rond $(0,0)$ voor de functie

$$f(x,y) = \ln\left(1 + \frac{\sin x}{1-y}\right)\ .$$

4. Op het gebied $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 3\}$ is de functie f gedefinieerd door

$$f(x,y) = (x^2 + y^2 - 2)(x^2 - y^2 - 1)\ .$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van deze functie.

5. De functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-y}\ , & y \neq x\ , \\[2ex] x\ , & y = x\ . \end{cases}$$

   a) Bepaal de niveaulijnen van f; teken de hoogtekaart en onderzoek de continuïteit van f in $(0,0)$.

   b) Zij $\varphi \in [0,\pi)$. Beschouw de rechte met parametervoorstelling $\underline{x}(t) = t(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$, $t \in \mathbb{R}$.
   Bepaal $f(\underline{x}(t))$ als functie van t en schets de grafiek van deze functie.

   c) Bereken de richtingsafgeleide van f in $(0,0)$ in de richting $(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$, $(0 \le \varphi < 2\pi)$.

   d) Is f differentieerbaar in $(0,0)$? Motiveer Uw antwoord.

Oplossingen Proeftentamen maart 1979

1. a) Er geldt

$$\dot{\underline{f}}(t) = (2t+1, 4t+1, 1) \neq \underline{0}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Laat ℓ en m de raaklijnen aan K zijn in de punten $\underline{f}(0)$ en $\underline{f}(1)$.
Parametervoorstellingen van ℓ en m zijn dan

$$\underline{x} = \underline{f}(0) + \lambda\dot{\underline{f}}(0) = (1,2,3) + \lambda(1,1,1)\,,$$

resp.

$$\underline{x} = \underline{f}(1) + \mu\dot{\underline{f}}(1) = (3,5,4) + \mu(3,5,1)\,.$$

Het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 1 + \lambda = 3 + 3\mu\,, \\ 2 + \lambda = 5 + 5\mu\,, \\ 3 + \lambda = 4 + \mu\,, \end{cases}$$

is equivalent met

$$\begin{cases} 1 + \lambda = 3 + 3\mu\,, \\ 1 = 2 + 2\mu\,, \\ 2 = 1 - 2\mu\,, \end{cases}$$

met oplossing $\mu = -\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, zodat ℓ en m elkaar snijden.
Het snijpunt is

$$(1,2,3) + \tfrac{1}{2}(1,1,1) = (\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \tfrac{7}{2})\,.$$

b) De rechten ℓ en m liggen in het vlak V met parametervoorstelling

$$\underline{x} = (\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \tfrac{7}{2}) + \lambda(1,1,1) + \mu(3,5,1) \qquad \text{(zie a)).}$$

Elimineren van λ en μ uit

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \lambda + 3\mu\,, \\ y = \frac{5}{2} + \lambda + 5\mu\,, \\ z = \frac{7}{2} + \lambda + \mu\,, \end{cases}$$

geeft de vergelijking van V: $2x - y - z = -3$.
De kromme K ligt in V:

$$2(t^2 + t + 1) - (2t^2 + t + 2) - (t + 3) = -3 \quad \text{voor alle } t \in \mathbb{R}\,.$$

2. Zij (x_0,y_0,z_0) een (willekeurig) punt op m, dan geldt

(1) $\qquad z_0 = 0 \;,\quad y_0 = x_0 \;.$

Het vlak door (x_0,y_0,z_0) dat loodrecht op ℓ staat is

(2) $\qquad x = x_0 \;;$

de bol met middelpunt (0,2,0) door het punt (x_0,y_0,z_0) is

(3) $\qquad x^2 + (y-2)^2 + z^2 = x_0^2 + (y_0-2)^2 + z_0^2 \;.$

Elimineren van x_0, y_0 en z_0 uit (1), (2) en (3) geeft de vergelijking van het gevraagde omwentelingsoppervlak:

$$x^2 + (y-2)^2 + z^2 = x^2 + (x-2)^2 \;,$$

$$(y-2)^2 + z^2 = (x-2)^2 \;.$$

Dit is een rechte cirkelkegel met top (2,2,0). De as van de kegel is (uiteraard) de rechte ℓ.

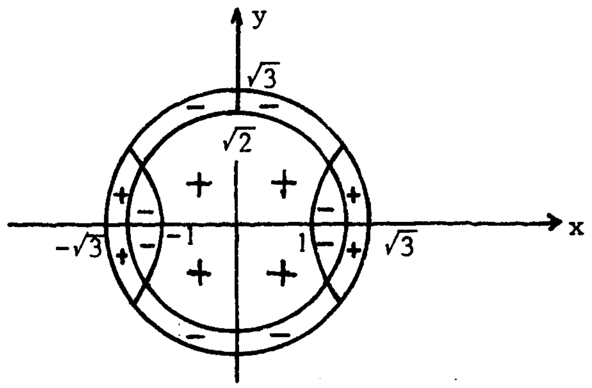
3. Met behulp van standaardreeksen:

$$\frac{\sin x}{1-y} = (x - \ldots)(1 + y + \ldots) = x + xy + \ldots \;;$$

$$\ln\left(1 + \frac{\sin x}{1-y}\right) = x + xy - \tfrac{1}{2}(x + xy + \ldots)^2 + \ldots =$$

$$= x - \tfrac{1}{2}x^2 + xy + \ldots \;.$$

4. Nullijnen van f zijn de cirkel $x^2 + y^2 = 2$ en de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$. Het tekenverloop van f is aangegeven in de figuur.



P 3.79

Uit

$$f_x(x,y) = 2x(x^2-y^2-1) + 2x(x^2+y^2-2) = 2x(2x^2-3) ,$$

$$f_y(x,y) = 2y(x^2-y^2-1) - 2y(x^2+y^2-2) = -2y(2y^2-1) ,$$

volgt dat er negen stationaire punten zijn in het inwendige van G, nl.

$$(0,0) , \quad (0,\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) , \quad (\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{6},0) , \quad (\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{6},\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) ,$$

met functiewaarden

$$2 , \quad \frac{9}{4} , \quad -\frac{1}{4} , \quad 0 .$$

De punten $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{6},\pm\frac{1}{2}\sqrt{2})$ zijn de snijpunten van de nullijnen $x^2+y^2 = 2$ en $x^2-y^2 = 1$.

In deze punten heeft f geen extreem (zie figuur).

In het punt $(\frac{1}{2}\sqrt{6},0)$ heeft f een globaal minimum ten opzichte van de begrensde gesloten verzameling

$$\{(x,y) \mid x > 0, \ x^2+y^2 \le 2, \ x^2-y^2 \ge 1\}$$

op grond van de stelling van Weierstrass.

Ten opzichte van G is er in $(\frac{1}{2}\sqrt{6},0)$ (en in $(-\frac{1}{2}\sqrt{6},0)$: symmetrie) dus zeker een locaal minimum.

Uit

$$f(0,y) = (y^2-2)(-y^2-1) = -y^4+y^2+2 ,$$

$$\frac{d}{dy} f(0,y) = -4y^3+2y = 2y(1-2y^2) ,$$

en

$$f(x,0) = (x^2-2)(x^2-1) = x^4 - 3x^2 + 2 ,$$

$$\frac{d}{dx} f(x,0) = 4x^3-6x = -2x(3-2x^2) ,$$

volgt dat

f(0,0) minimum is van f ten opzichte van de y-as en maximum ten opzichte van de x-as, zodat f in (0,0) geen extreem heeft.

Randonderzoek

Op de rand van G geldt $y^2 = 3 - x^2$, $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$,

$$f(x,y(x)) = 2x^2 - 4 .$$

Deze functie heeft een globaal maximum 2 in de punten $x = \pm\sqrt{3}$ en een globaal minimum -4 in het punt $x = 0$.

Het maximum 2 is het globale maximum van f op de begrensde gesloten verzameling

$$\{(x,y) \mid 2 \le x^2 + y^2 \le 3,\ x^2 - y^2 \ge 1\}$$

op grond van de stelling van Weierstrass.

Ten opzichte van G is 2 een locaal maximum.

Samenvattend: f heeft op G

een globaal maximum $\frac{9}{4}$ in de punten $(0, \pm\frac{1}{2}\sqrt{2})$,

een globaal minimum -4 in de punten $(0, \pm\sqrt{3})$,

een locaal maximum 2 in de punten $(\pm\sqrt{3}, 0)$,

een locaal minimum $-\frac{1}{4}$ in de punten $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}, 0)$.

5. a) De y-as (inclusief het punt (0,0)) is de nulniveaulijn van f.

Uit

$$f(x,y) = c , \quad c \neq 0 ,$$

volgt

$$x^2 = c(x - y) , \quad y \neq x \quad \text{en} \quad y = x = c ,$$

dus

$$y = x - \frac{1}{c} x^2 , \quad x \neq 0 \quad \text{en het punt } (c,c) .$$

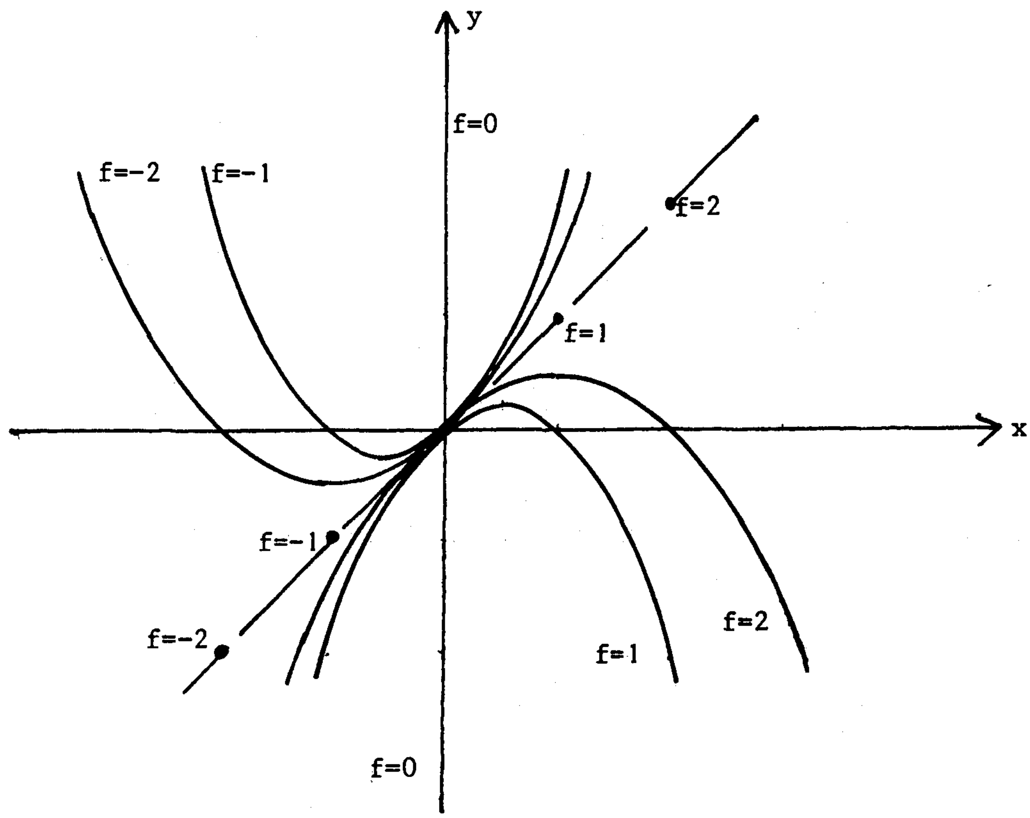
De c-niveaulijn van f, $c \neq 0$, bestaat dus uit een parabool door de oorsprong (exclusief het punt (0,0)) en een niet op de parabool gelegen punt.

Voor het tekenen van de hoogtekaart is nog van belang de opmerking dat alle parabolen

$$y = x - \frac{1}{c} x^2$$

in (0,0) raken aan de rechte $y = x$.

P 3.79



Uit de hoogtekaart volgt dat f niet continu is in het punt (0,0): in elke omgeving van (0,0) neemt f de waarden 0 en 1 aan.

b) Uit

$$f(\underline{x}(t)) = \frac{t^2\cos^2\varphi}{t\cos\varphi - t\sin\varphi} = \frac{t\cos^2\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}, \quad t\sin\varphi \neq t\cos\varphi,$$

$$f(\underline{x}(t)) = t\cos\varphi \qquad , \quad t\sin\varphi = t\cos\varphi,$$

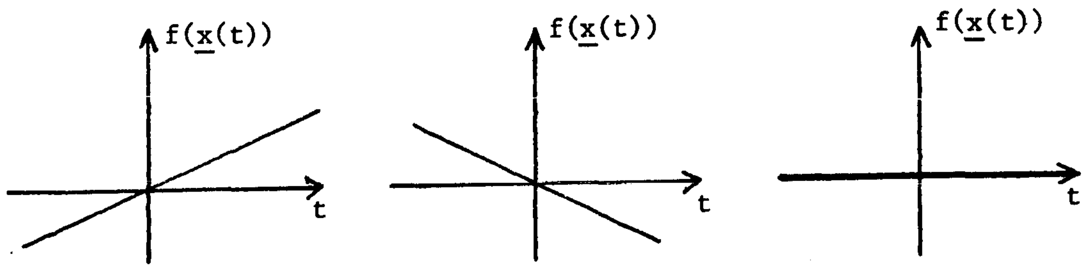
volgt

$$f(\underline{x}(t)) = at, \quad t \in \mathbb{R},$$

waarin het getal a van φ afhangt:

$$a = \begin{cases} \dfrac{\cos^2\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}, & 0 \le \varphi < \pi, \ \varphi \neq \frac{1}{4}\pi, \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}, & \varphi = \frac{1}{4}\pi. \end{cases}$$

P 3.79



$0 \le \varphi \le \frac{1}{4}\pi$ $\qquad$ $\frac{1}{4}\pi < \varphi < \pi,\ \varphi \ne \frac{1}{2}\pi$ $\qquad$ $\varphi = \frac{1}{2}\pi$

c) De richtingsafgeleide van f in (0,0) in de richting van ($\cos\varphi$, $\sin\varphi$) is per definitie gelijk aan (zie b))

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x}(t)) - f(\underline{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x}(t))}{t} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\cos^2\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}, & 0 \le \varphi < 2\pi\ ,\quad \varphi \ne \dfrac{1}{4}\pi,\quad \varphi \ne \dfrac{5}{4}\pi, \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & ,\quad \varphi = \dfrac{1}{4}\pi, \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & ,\quad \varphi = \dfrac{5}{4}\pi. \end{cases}$$

d) De functie f is niet differentieerbaar in het punt (0,0) omdat f niet continu is in (0,0) (zie a)).

Examen/tentamen mei 1979

1. a) In $\mathbb{R}^2$ is een kromme K gegeven door

$$\underline{f}(t) = (-t^3+3t-1\ ,\ t^3+3t^2)\ , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bepaal de punten van K waar de raaklijn horizontaal, respectievelijk verticaal is of richtingscoëfficiënt -1 heeft en geef een schets van K.

b) De functie f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x,y) = \frac{y-1}{e^x}.$$

i) Bepaal de hoogtelijnen van f en schets de hoogtekaart.

ii) Het oppervlak S wordt gegeven door de vergelijking $z = f(x,y)$. Bepaal het punt op S waar het raakvlak evenwijdig is aan de rechte $y = 0$, $z = 0$ en gaat door $(2,0,-1)$.

---

2. Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de functie f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x,y) = y - \tfrac{1}{3}x^3$$

op de kromme

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 2\}.$$

3. Van de lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven

$$A(1,1,1) = (6,6,-9)\ ,\quad A(2,1,0) = (6,5,-8)\ ,\quad A(-1,1,2) = (4,6,-8).$$

a) Bepaal de matrix van A.

b) Geef een basis van de nulruimte N en een orthonormale basis van de beeldruimte R.

c) Toon aan dat geldt $A^2 = A$ en bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenruimten van A.

d) Wat is de meetkundige interpretatie van A ?

4. Voor welke waarde(n) van a is de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

inverteerbaar? Bepaal de inverse voor $a = 0$.

5. Het oppervlak van de cilinder C_1 met vergelijking $y^2 + z^2 = 4$ wordt belegd met een massa waarvan de massadichtheid gelijk is aan $\sqrt{4 - y^2}$.
Bereken de massa van dat deel van het oppervlak van C_1 dat ligt binnen de cilinder C_2 met vergelijking $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

6. Bereken de lengte van de kromme K gegeven door

$$\underline{f}(t) = (t \cos t,\ t \sin t,\ \tfrac{1}{3}\sqrt{8t^3}) \ , \qquad 0 \le t \le 2 \, .$$

Oplossingen Tentamen mei 1979

1\. a) Zij

$$x(t) = -t^3 + 3t - 1\ ,\quad y(t) = t^3 + 3t^2\ ,\qquad t \in \mathbb{R}.$$

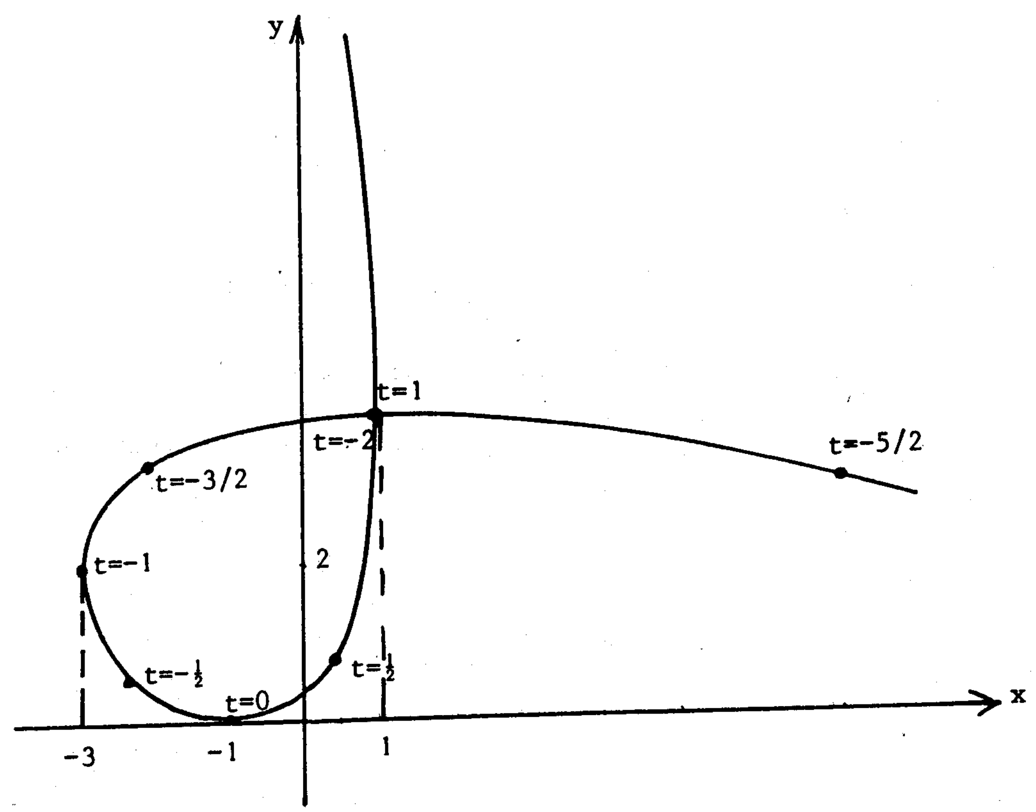
Dan is

$$\dot{x}(t) = -3t^2 + 3 = 0 \quad \text{voor } t = -1 \text{ en voor } t = 1\ ,$$

$$\dot{y}(t) = 3t^2 + 6t = 0 \quad \text{voor } t = -2 \text{ en voor } t = 0\ ,$$

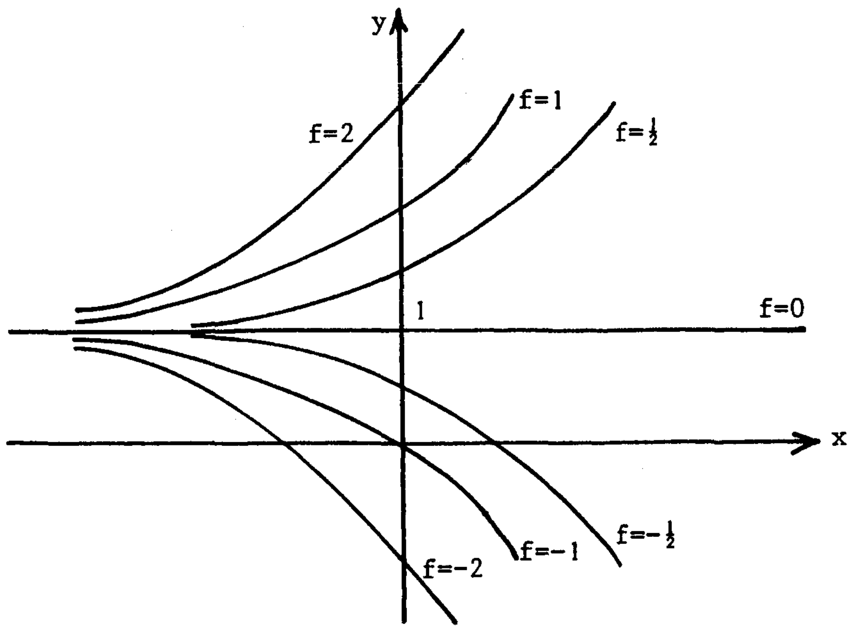
zodat in de punten $\underline{f}(-2) = (1,4)$, $\underline{f}(0) = (-1,0)$ de raaklijn aan K horizontaal is en in de punten $\underline{f}(-1) = (-3,2)$, $\underline{f}(1) = (1,4)$ verticaal.

Uit $\dot{y}(t) = -\dot{x}(t)$ volgt $6t = -3$, $t = -\frac{1}{2}$, zodat in het punt $\underline{f}(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}(-19,5)$ de raaklijn aan K richtingscoëfficiënt -1 heeft.



Bij de schets van K dient nog opgemerkt te worden dat $x(t) \to \pm\infty$, $y(t) \to \mp\infty$ voor $t \to \mp\infty$.

b) i) De functie is constant op de krommen met vergelijking $y = 1 + ce^{x}$:



ii) Zij $P = (a,b,(b-1)e^{-a})$ het gevraagde punt op S. Wegens

$$f_x(x,y) = -(y-1)e^{-x}, \quad f_y(x,y) = e^{-x},$$

is de vergelijking van het raakvlak V aan S in het punt P:

$$z - (b-1)e^{-a} = -(b-1)e^{-a}(x-a) + e^{-a}(y-b) .$$

V evenwijdig aan de x-as geeft $(b-1)e^{-a} = 0$, dus $b = 1$, zodat de vergelijking van V wordt

$$z = e^{-a}(y-1) .$$

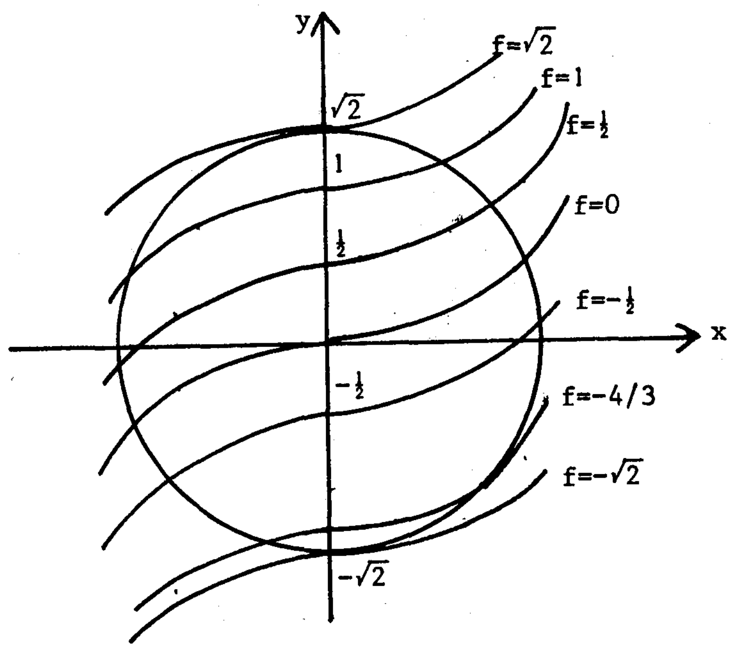
$(2,0,-1) \in V$ levert $-1 = -e^{-a}$, $a = 0$. Dus

$$P = (0,1,0) .$$

2. Hoogtelijnen van f zijn de krommen met vergelijking

$$y = c + \frac{1}{3}x^3 :$$

T 5.79



Uit de hoogtekaart volgt onmiddellijk dat f op K de volgende extrema heeft:

een globaal minimum $-\sqrt{2}$ in het punt $(0,-\sqrt{2})$,
een globaal maximum $\sqrt{2}$ in het punt $(0,\sqrt{2})$.

<u>Opmerking</u>. De multiplicatorenmethode van Lagrange geeft het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \,, \\ -x^2 + 2\lambda x = 0 \,, \\ 1 + 2\lambda y = 0 \,, \end{cases}$$

waarvan de oplossingen zijn

$$(x,y) = (0,-\sqrt{2}) \,, \quad \lambda = \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \,,$$
$$(x,y) = (0,\sqrt{2}) \,, \quad \lambda = -\tfrac{1}{4}\sqrt{2} \,,$$

en bovendien de snijpunten van K en de hyperbool $xy = -1$, dus

$$(x,y) = (1,-1) \quad \text{met } f(1,-1) = -\frac{4}{3} \,,$$
$$(x,y) = (-1,1) \quad \text{met } f(-1,1) = \frac{4}{3} \,.$$

Uit de hoogtekaart volgt dat $-\frac{4}{3}$ en $\frac{4}{3}$ geen extrema van f op K zijn.

3. a) Met vegen:

$$\begin{array}{rrrcrrr} 1 & 1 & 1 & \to & 6 & 6 & -9 \\ 2 & 1 & 0 & \to & 6 & 5 & -8 \\ -1 & 1 & 2 & \to & 4 & 6 & -8 \end{array} \sim \begin{array}{rrrcrrr} 1 & 1 & 1 & \to & 6 & 6 & -9 \\ 2 & 1 & 0 & \to & 6 & 5 & -8 \\ -3 & -1 & 0 & \to & -8 & -6 & 10 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{rrrcrrr} 1 & 0 & -1 & \to & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & \to & 6 & 5 & -8 \\ -1 & 0 & 0 & \to & -2 & -1 & 2 \end{array} \sim \begin{array}{rrrcrrr} 0 & 0 & -1 & \to & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \to & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & \to & 2 & 1 & -2 \end{array} ,$$

volgt voor de matrix A van $\mathcal{A}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} .$$

b) De nulruimte $\mathcal{N}$ van $\mathcal{A}$ is de oplossingsverzameling van $\mathcal{A}\underline{x} = \underline{0}$.
Met vegen:

$$\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -3 \end{array} \sim \begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array} \sim \begin{array}{rrr} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} ,$$

volgt dat $\mathcal{A}\underline{x} = \underline{0}$ equivalent is met het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x - y = 0 , \\ 2y + z = 0 , \end{cases}$$

zodat $\mathcal{N} = \langle (1,1,-2) \rangle$.
Een basis van $\mathcal{N}$ is dus $\{(1,1,-2)\}$.

De beeldruimte $\mathcal{R}$ van $\mathcal{A}$ wordt opgespannen door de kolommen van de matrix A.
Met vegen:

$$\begin{array}{rrr} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -3 \end{array} \sim \begin{array}{rrr} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \sim \begin{array}{rrr} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} ,$$

volgt $\mathcal{R} = \langle (2,-1,0),(0,1,-1) \rangle$.
Een vector $\underline{x} = \lambda(2,-1,0) + \mu(0,1,-1) = (2\lambda,-\lambda+\mu,-\mu)$ in $\mathcal{R}$ is orthogonaal met $(0,1,-1)$ als $\lambda = 2\mu$. Dit geeft

$$\underline{x} = \mu(4,-1,-1) .$$

Een orthonormale basis van $\mathcal{R}$ is dus

$$\left\{\frac{1}{3\sqrt{2}}(4,-1,-1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)\right\}.$$

c) Zij $\underline{a} = (1,1,-2)$, $\underline{b} = (2,-1,0)$, $\underline{c} = (0,1,-1)$. Dan is het stelsel $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c}\}$ onafhankelijk:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix},$$

dus een basis van $\mathbb{R}^3$.

Er geldt $A\underline{a} = \underline{0}$ (zie b)).

Met de matrix A (zie a)) leidt men af:

$$A\underline{b} = \underline{b}\,,\quad A\underline{c} = \underline{c}\,.$$

Zij $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$. Dan kan $\underline{x}$ op precies één manier geschreven worden als

$$\underline{x} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c}\,,\qquad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\,.$$

Hieruit volgt

$$A\underline{x} = \alpha A\underline{a} + \beta A\underline{b} + \gamma A\underline{c} = \beta\underline{b} + \gamma\underline{c}\,,$$
$$A^2\underline{x} = \beta A\underline{b} + \gamma A\underline{c} = \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} = A\underline{x}\,.$$

Dit geldt voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, zodat $A^2 = A$.

Zij $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$, $\underline{x} \neq \underline{0}$. Dan is $A^2\underline{x} = \lambda A\underline{x} = \lambda^2\underline{x}$, zodat wegens $A^2 = A$ geldt

$$\lambda^2\underline{x} = A^2\underline{x} = A\underline{x} = \lambda\underline{x}\,,\quad (\lambda^2-\lambda)\underline{x} = \underline{0}\,,\quad \underline{x} \neq \underline{0}\,.$$

Hieruit volgt dat $\lambda = 0$ en $\lambda = 1$ mogelijke eigenwaarden van A zijn.

Dat 0 eigenwaarde is volgt uit b): $E_0 = N$.

Voor de eigenvectoren bij eigenwaarde 1 geldt $\underline{x} = A\underline{x}$, dus $\underline{x} \in R$: $E_1 \subset R$.

Wegens $\underline{b} \in E_1$, $\underline{c} \in E_1$ geldt ook $R = \langle\underline{b},\underline{c}\rangle \subset E_1$.

Dus $E_1 = R$.

d) Volgens c) kan elke $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ op precies één manier geschreven (ontbonden) worden als

$$\underline{x} = \underline{y} + \underline{z} \quad \text{met } \underline{y} \in N\,,\ \underline{z} \in R\,.$$

Er geldt dan $A\underline{x} = \underline{z}$.

De lineaire afbeelding A is dus de projectie van $\mathbb{R}^3$ op R in de richting van N.

4. Vegen geeft

$$\left.\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a-2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \sim$$

$$\sim \left.\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ a-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a-2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 4-a & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 0 & 2-a & -1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. ,$$

zodat voor $a \neq 1$, $a \neq 2$ de matrix inverteerbaar is.
Voor $a = 0$ levert

$$\left.\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

de inverse matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

5. Zij G_0 het gebied in het (x,y)-vlak gegeven door $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$, dus de cirkelschijf met middelpunt $(0,1)$ en straal 1. Dan is de gevraagde massa gelijk aan

$$M = 2\iint\limits_{G_0} \sqrt{4-y^2}\,\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\;dx\,dy .$$

Hierin is $z = +\sqrt{4-y^2}$.
Met

$$z_x = 0 , \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{4-y^2}} ,$$

dus

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{2}{\sqrt{4-y^2}} ,$$

volgt

$$M = 4\iint_{G_0} dx\,dy = 4\pi \ .$$

6. Uit

$$\dot{\underline{f}}(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, \sqrt{2t}) \ ,$$

dus

$$\|\dot{\underline{f}}(t)\| = \sqrt{1 + t^2 + 2t} = t + 1 \ , \quad 0 \le t \le 2 \ ,$$

volgt voor de lengte van K:

$$\int_0^2 \|\dot{\underline{f}}(t)\|\,dt = \int_0^2 (t+1)dt = \tfrac{1}{2}(t+1)^2 \Big|_0^2 = 4 \ .$$

H 6.79

Herkansingsexamen/tentamen juni 1979

1. In $\mathbb{R}^3$ is een kromme K gegeven door

$$\underline{f}(t) = (\cos t, \sin t, t) , \quad t \in [0,\infty) .$$

a) Toon aan dat K ligt op de cilinder $x^2 + y^2 = 1$ en schets de kromme K.

b) Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan K in het punt $\underline{f}(a)$. Bepaal tevens het snijpunt $\underline{s}(a)$ van deze raaklijn met het vlak $z = 0$; bereken $\|\underline{s}(a)\|$ en schets de verzameling van de snijpunten $\underline{s}(a)$.

2. Op het gebied $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ is de functie f gedefinieerd door

$$f(x,y) = [(x+y)^2 - 1][(x-y)^2 - 1] .$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van deze functie.

3. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 2x_1 + (\alpha+2)x_2 + (\alpha+2)x_3 = \alpha - 2 , \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1 , \\ 2\alpha x_2 + (3\alpha^2 - \alpha^3)x_3 = 2\alpha^2 . \end{cases}$$

Onderzoek voor welke waarde(n) van α het stelsel oplosbaar is en bepaal voor die waarden de oplossingsverzameling.

4. In $\mathbb{R}^4$ is een orthonormale basis gegeven, bestaande uit de vectoren

$$\underline{a} = \tfrac{1}{5}(4,2,2,1) , \ \underline{b} = \tfrac{1}{5}(-2,4,-1,2) , \ \underline{c} = \tfrac{1}{5}(-2,-1,4,2) , \ \underline{d} = \tfrac{1}{5}(1,-2,-2,4) .$$

Van de lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ is gegeven dat

$$A^2 = I , \quad A\underline{a} = \underline{c} , \quad A\underline{b} = \underline{d} .$$

a) Toon aan dat A orthogonaal is.

b) Bepaal de matrix van A.

c) Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenruimten van A.

5. Bereken de massa van het lichaam bepaald door

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 , \quad 0 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2 ,$$

met massadichtheid

$$\rho(x,y,z) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + 2} .$$

6. Bereken de oppervlakte van het omwentelingslichaam dat ontstaat door de kromme in het (x,y)-vlak, gegeven door $4y = x^2$, $3 \le y \le 15$, te wentelen om de y-as.

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1979

1. a) Uit

$$x = \cos t \ , \quad y = \sin t$$

volgt

$$x^2 + y^2 = 1 \ .$$

De kromme K is een schroeflijn op het deel van de cilinder $x^2 + y^2 = 1$ met $z \geq 0$.

b) Een parametervoorstelling van de raaklijn aan K in het punt $\underline{f}(a)$, $a \geq 0$, is

$$\underline{x} = \underline{f}(a) + \lambda\dot{\underline{f}}(a) = (\cos a, \sin a, a) + \lambda(-\sin a, \cos a, 1) \ ,$$

waarbij opgemerkt dient te worden dat geldt

$$\dot{\underline{f}}(a) = (-\sin a, \cos a, 1) \neq \underline{0} \ .$$

Uit $\underline{s}(a) = (s_1, s_2, 0)$ volgt

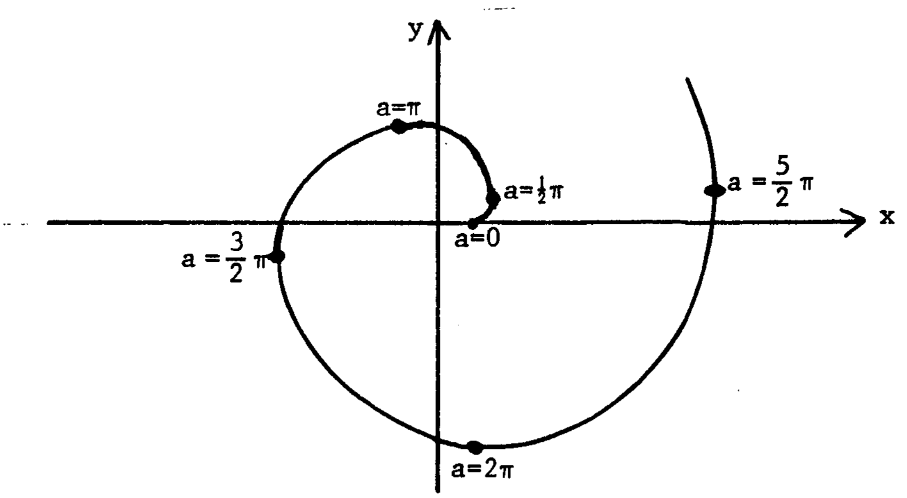
$$\begin{cases} s_1 = \cos a - \lambda \sin a \ , \\ s_2 = \sin a + \lambda \cos a \ , \\ 0 = a + \lambda \ . \end{cases}$$

Elimineren van λ uit dit stelsel vergelijkingen geeft

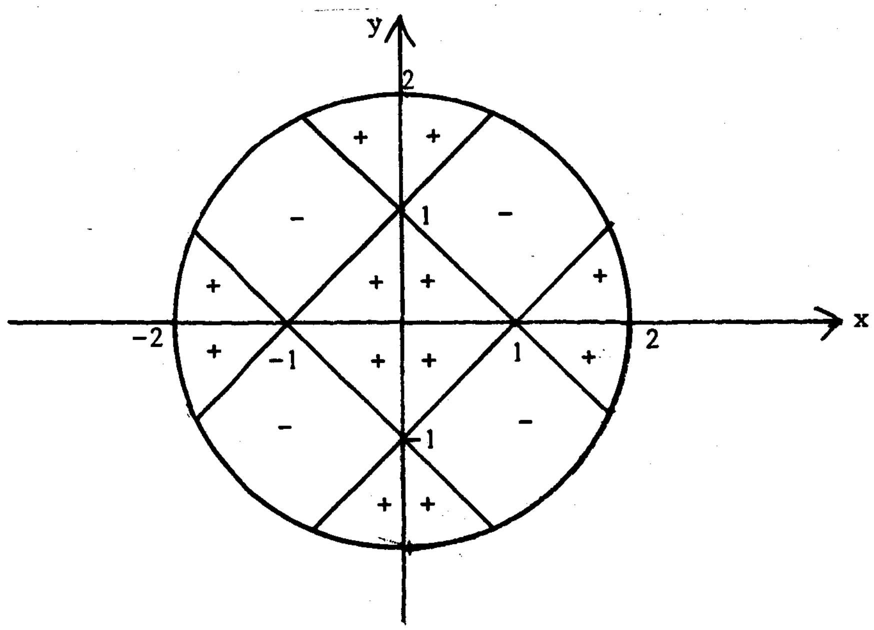
$$\underline{s}(a) = (\cos a + a \sin a, \sin a - a \cos a, 0) \ .$$

Dus

$$\|\underline{s}(a)\| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{1 + a^2} \ .$$



2. Nullijnen van f zijn de rechten $x+y = 1$, $x+y = -1$, $x-y = 1$, $x-y = -1$. De tekenverdeling van f op G is aangegeven in de figuur.



Schrijf

$$f(x,y) = (x^2+y^2-1+2xy)(x^2+y^2-1-2xy) = (x^2+y^2-1)^2-4x^2y^2 .$$

Uit

$$f_x(x,y) = 4x(x^2+y^2-1) - 8xy^2 = 4x(x^2-y^2-1) ,$$

$$f_y(x,y) = 4y(x^2+y^2-1) - 8x^2y = 4y(-x^2+y^2-1) ,$$

volgt dat (0,0), (0,-1), (0,1), (-1,0) en (1,0) de stationaire punten van f in het inwendige van G zijn.

In $(0,\pm 1)$ en $(\pm 1,0)$ heeft f geen extrema (zie figuur).
In (0,0) heeft f een maximum 1 op grond van de stelling van Weierstrass toegepast op het gesloten vierkant met hoekpunten $(\pm 1,0)$, $(0,\pm 1)$.

Op de rand van G geldt $y^2 = 4-x^2$, $-2 \le x \le 2$, en

$$f(x,y(x)) = 9 - 4x^2(4-x^2) = 4x^4 - 16x^2 + 9 =: g(x) .$$

Uit

$$g'(x) = 16x^3 - 32x = 16x(x^2-2)$$

en het schema

```
- - - o + + + + + o - - - - - - o + + +        g'(x)
      :           :             :
------+-----+-----+-------------+-----+--------
     -2   -√2     0            √2     2        x
```

volgt dat f op de rand van G maxima heeft in de punten $(-2,0)$, $(0,\pm 2)$, $(2,0)$ met waarden 9, 9, 9 en minima in de punten $(-\sqrt{2},\pm\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},\pm\sqrt{2})$ met waarden -7, -7.

Op grond van de stelling van Weierstrass volgt dat f op G de volgende extrema heeft:

een globaal maximum 9 in de punten $(\pm 2,0)$, $(0,\pm 2)$,
een globaal minimum -7 in de punten $\pm(\sqrt{2},\pm\sqrt{2})$,
een locaal maximum 1 in het punt $(0,0)$.

3. Met vegen:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & \alpha+2 & \alpha+2 & \alpha-2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2\alpha & 3\alpha^2-\alpha^3 & 2\alpha^2 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{ccc|c} 0 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2\alpha & 3\alpha^2-\alpha^3 & 2\alpha^2 \end{array}\right.$$

volgt dat voor $\alpha = 0$ de oplossingsverzameling is

$$\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1+x_2+x_3 = -1\} .$$

Voor $\alpha \neq 0$ is het stelsel te herleiden tot

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3\alpha-\alpha^2 & 2\alpha \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & (\alpha-1)(\alpha-2) & -2(\alpha-1) \end{array}\right. .$$

Voor $\alpha = 1$ is de oplossingsverzameling

$$\{\underline{x} = (x_1,x_2,x_3) \mid \underline{x} = (-2,1,0) + \lambda(0,1,-1)\} ,$$

voor $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 2$:

$$\{(-2, \tfrac{\alpha}{\alpha-2}, -\tfrac{2}{\alpha-2})\} .$$

Voor $\alpha = 2$ is het stelsel niet oplosbaar.

4. a) Zij $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$.

Schrijf $\underline{x} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} + \delta\underline{d}$. Dan is

$$(\underline{x},\underline{x}) = \alpha^2(\underline{a},\underline{a}) + 2\alpha\beta(\underline{a},\underline{b}) + \ldots + \delta^2(\underline{d},\underline{d}) = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 ,$$

omdat $\{\underline{a},\underline{b},\underline{c},\underline{d}\}$ een orthonormale basis is.

Met

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\underline{a} &= \underline{c} , \\ \mathcal{A}\underline{b} &= \underline{d} , \\ \mathcal{A}\underline{c} &= \mathcal{A}^2\underline{a} = \mathcal{I}\underline{a} = \underline{a} , \\ \mathcal{A}\underline{d} &= \underline{b} , \end{aligned}$$

volgt

$$\mathcal{A}\underline{x} = \alpha\underline{c} + \beta\underline{d} + \gamma\underline{a} + \delta\underline{b} .$$

Dus

$$(\mathcal{A}\underline{x},\mathcal{A}\underline{x}) = \gamma^2 + \delta^2 + \alpha^2 + \beta^2 = (\underline{x},\underline{x}) :$$

$\mathcal{A}$ is orthogonaal.

b) Met vegen:

$$\begin{array}{rrrrcrrrr} 4 & 2 & 2 & 1 & \to & -2 & -1 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 2 & \to & 1 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 4 & 2 & \to & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 4 & \to & -2 & 4 & -1 & 2 \end{array} \sim \begin{array}{rrrrcrrrr} 0 & 10 & 10 & -15 & \to & 6 & -17 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & \to & -3 & 6 & -4 & 8 \\ 0 & -5 & 0 & 10 & \to & 0 & 10 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & -2 & 4 & \to & -2 & 4 & -1 & 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{rrrrcrrrr} 0 & 10 & 0 & 5 & \to & 0 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & \to & -3 & 6 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \to & 0 & -2 & 0 & -1 \\ -5 & 10 & 0 & 0 & \to & 4 & -8 & -3 & 6 \end{array} \sim \begin{array}{rrrrcrrrr} 0 & 0 & 0 & 25 & \to & 0 & 15 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & \to & -3 & 6 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \to & 0 & -2 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & 0 & 20 & \to & 4 & 12 & -3 & 16 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{rrrrcrrrr} 0 & 0 & 0 & 5 & \to & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & \to & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & \to & 0 & -4 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & \to & -4 & 0 & 3 & 0 \end{array} ,$$

volgt voor de matrix A van $\mathcal{A}$:

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} .$$

c) Mogelijke eigenwaarden van A zijn -1 en $+1$.
$(A+I)\underline{x} = \underline{0}$ geeft:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \; ; \quad E_{-1} = \langle(3,0,-1,0),(0,3,0,-1)\rangle \, .$$

$(A-I)\underline{x} = \underline{0}$ geeft

$$\begin{matrix} -9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \; ; \quad E_{1} = \langle(1,0,3,0),(0,1,0,3)\rangle \, .$$

5. Zij

$$G_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4\} \, .$$

Dan wordt de gevraagde massa M gegeven door

$$M = \iint_{G_0} \left(\int_0^{1+x^2+y^2} \rho(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{G_0} (1+x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy = \iint_{G_0} \frac{x^2(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2+2}\,dx\,dy \, .$$

Overgang op poolcoördinaten r, φ levert

$$M = \int_1^2 r\,dr \int_0^{2\pi} \frac{(1+r^2)r^2\cos^2\varphi}{r^2+2}\,d\varphi =$$

$$= \int_1^2 r\,\frac{r^4+r^2}{r^2+2}\,dr \int_0^{2\pi} (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \tfrac{1}{2} \int_1^2 \frac{r^4+r^2}{r^2+2}\,dr^2 = \tfrac{1}{2}\pi \int_1^4 \frac{t^2+t}{t+2}\,dt =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \int_1^4 \frac{t(t+2)-(t+2)+2}{t+2}\,dt = \tfrac{1}{2}\pi \int_1^4 (t-1+\frac{2}{t+2})\,dt =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi\left[\tfrac{1}{2}(t-1)^2 + 2\ \ln(t+2)\right]_1^4 = \tfrac{1}{2}\pi(\tfrac{9}{2} + 2\ \ln\tfrac{6}{3}) =$$

$$= \frac{9}{4}\pi + \pi\ \ln 2\ .$$

6. Met $f(y) = 2\sqrt{y}$, $3 \le y \le 15$, volgt voor de gevraagde oppervlakte O:

$$O = \int_3^{15} 2\pi\, f(y)\sqrt{1+(f'(y))^2}\,dy =$$

$$= 4\pi \int_3^{15} \sqrt{y}\sqrt{1+(y^{-\frac{1}{2}})^2}\,dy = 4\pi \int_3^{15} \sqrt{y+1}\,dy =$$

$$= 4\pi \cdot \frac{2}{3}(y+1)^{3/2}\Big|_3^{15} = \frac{8}{3}\pi(64-8) = \frac{448}{3}\pi\ .$$

Examen/tentamen januari 1980

1. Een kromme K in $\mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$\underline{f}(t) = (\tfrac{1}{2}(t^2-1), t, \tfrac{1}{2}(t^2+1)) \ , \quad t \in \mathbb{R} .$$

a) Bepaal het (de) punt(en) van K waarvan de afstand tot de oorsprong extreem is.

b) Bepaal de vergelijking van de kegel met top (0,0,0) en met richtkromme K.

2. De functie f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x^5}{x^2+y^2}} \ , & (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 \ , & (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

Toon aan dat $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ niet continu is in (0,0).

3. Op het gebied $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, \ |y| \leq \sqrt{3}\}$ is de functie f gedefinieerd door

$$f(x,y) = (4x^2 - y^2 - 1)(4y^2 - x^2 - 1) \ .$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van deze functie.

4. In $\mathbb{R}^4$ zijn gegeven de vectoren

$$\begin{array}{ll} \underline{u}_1 = (1,-1,2,0) & \underline{v}_1 = (2,1,-2,0) \\ \underline{u}_2 = (4,-1,1,1) & \underline{v}_2 = (5,1,-3,1) \\ \underline{u}_3 = (-2,-1,3,-1) & \underline{v}_3 = (-1,1,-1,-1) \ . \end{array}$$

a) Bepaal de dimensie en een basis van $U = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3 \rangle$ en $V = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle$.

b) Bepaal alle $\underline{x} \in U$ en alle $\underline{y} \in V$ zodat $\underline{x} + \underline{y} = (4,-1,3,-1)$.

5. De lineaire afbeelding $\mathcal{D}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de draaiing om de as $\langle (1,0,-1),(1,-1,0) \rangle^{\perp}$ zodanig dat $\mathcal{D}(1,0,-1) = (0,-1,1)$ en $\mathcal{D}(1,-1,0) = (-1,0,1)$.
De lineaire afbeelding $\mathcal{P}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de projectie op het vlak V met vergelijking $x - y = 0$.
De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ is gedefinieerd door $\mathcal{A} = \mathcal{P} \circ \mathcal{D}$.

a) Toon aan dat de matrix van A gelijk is aan

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

b) Bepaal nulruimte, beeldruimte, eigenwaarden en bijbehorende eigenruimten van A.

6. Bereken de massa van het lichaam G, bepaald door

$$x^2 + y^2 - 1 \le z \ , \quad 0 \le z \le 3 \ ,$$

met massadichtheid

$$\rho(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \ .$$

Oplossingen Tentamen januari 1980

1. a) Uit

$$\|\underline{f}(t)\|^2 = \tfrac{1}{4}(t^2-1)^2 + t^2 + \tfrac{1}{4}(t^2+1)^2 = \tfrac{1}{2}t^4 + t^2 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(t^2+1)^2$$

volgt dat $\|\underline{f}(t)\|$ minimaal is voor $t = 0$.

Het punt $\underline{f}(0) = (-\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2})$ is het punt van K met de kleinste afstand tot de oorsprong.

b) Voor iedere $t \in \mathbb{R}$ is $\underline{x} = \lambda \underline{f}(t)$ de parametervoorstelling van een beschrijvende lijn van de kegel.

Elimineren van λ en t uit

$$\begin{cases} x = \tfrac{1}{2}\lambda(t^2-1) , \\ y = \lambda t , \\ z = \tfrac{1}{2}\lambda(t^2+1) , \end{cases}$$

geeft (zie a))

$$x^2 + y^2 + z^2 = \tfrac{1}{2}\lambda^2(t^2+1)^2 = 2z^2 ,$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 ,$$

de vergelijking van de kegel.

2. Er geldt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^{5/3}(x^2+y^2)^{-1/3}\right) = -\frac{2}{3}x^{5/3}\,y(x^2+y^2)^{-4/3} , \quad (x,y) \neq (0,0) ,$$

en

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0 .$$

Uit

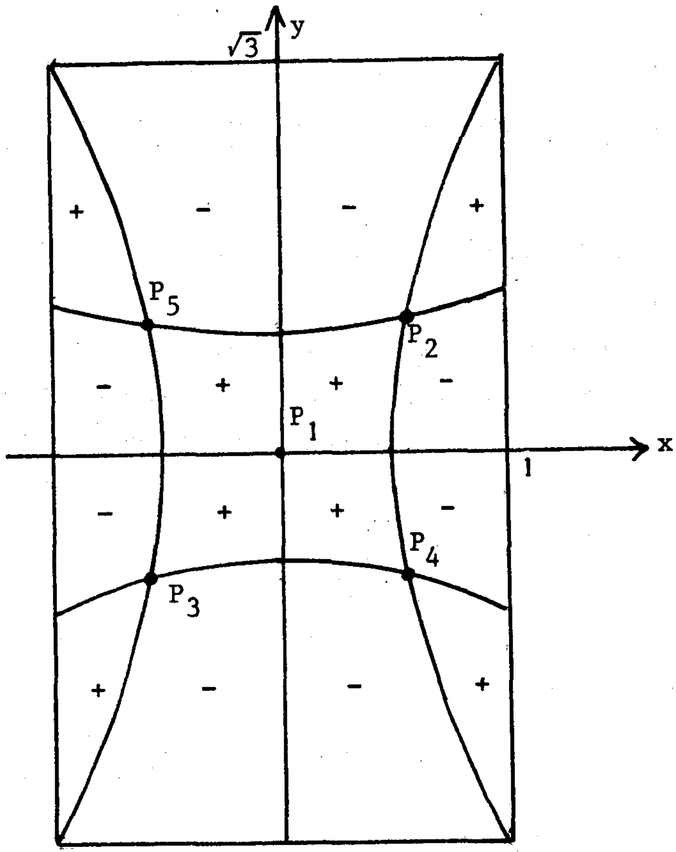
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,x) = -\frac{2}{3}x^{8/3}(2x^2)^{-4/3} = -\frac{1}{3}\cdot 2^{-1/3} , \qquad x \neq 0 ,$$

volgt dat niet geldt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) .$$

De functie $\frac{\partial f}{\partial y}$ is dus niet continu in het punt (0,0).

3. Nullijnen van f en de tekenverdeling van f op G zijn aangegeven in de figuur.



Stationaire punten van f:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 8x(4y^2 - x^2 - 1) - 2x(4x^2 - y^2 - 1) = 2x(17y^2 - 8x^2 - 3) = 0 \,, \\ f_y(x,y) = -2y(4y^2 - x^2 - 1) + 8y(4x^2 - y^2 - 1) = 2y(17x^2 - 8y^2 - 3) = 0 \,, \end{cases}$$

levert

$$P_1 = (0,0) \,, \quad P_{2,3} = \pm\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{3}, \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\right), \quad P_{4,5} = \pm\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{3}, -\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\right) .$$

In P_2, P_3, P_4 en P_5 heeft f geen extreem (zie figuur).
In P_1 heeft f een maximum 1 op grond van de stelling van Weierstrass (toegepast op het "vierkant" met hoekpunten P_2, P_3, P_4 en P_5).

Rand van G:

1°. $\quad x = \pm 1 \,, \quad -\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}$.

Uit

$$f(\pm 1,y) = (3 - y^2)(4y^2 - 2) \,,$$

$$\frac{d}{dy}\, f(\pm 1,y) = -\,2y(4y^2-2) + 8y(3-y^2) = 2y(14-8y^2)\ ,$$

	st.	dalend	stijgend	d.		$f(\pm 1,y)$
	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{7}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{7}$	$\sqrt{3}$	y

volgt dat $f(\pm 1,\pm\frac{1}{2}\sqrt{7}) = \frac{25}{4}$ een maximum en $f(\pm 1,0) = -6$ een minimum is van f op de rand van G.
Toepassen van de stelling van Weierstrass op deelgebieden van G geeft dat deze randextrema van f ook extrema zijn ten opzichte van G.
In de punten $(\pm 1,\pm\sqrt{3})$ heeft f geen extreem ten opzichte van G (zie figuur).

2°. $\quad -1 \le x \le 1\ ,\quad y = \pm\sqrt{3}\ .$

Uit

$$f(x,\pm\sqrt{3}) = (4x^2-4)(11-x^2)\ ,$$

$$\frac{d}{dx}\, f(x,\pm\sqrt{3}) = 8x(11-x^2) - 2x(4x^2-4) = 16x(6-x^2)\ ,$$

	dalend	stijgend	$f(x,\pm\sqrt{3})$
-1	0	1	x

volgt dat $f(0,\pm\sqrt{3}) = -44$ een minimum van f op de rand van G is.

Samengevat: f heeft op G

een globaal maximum $\frac{25}{4}$ in de punten $\pm(1,\pm\frac{1}{2}\sqrt{7})$,
een globaal minimum -44 in de punten $(0,\pm\sqrt{3})$,
een locaal maximum 1 in het punt $(0,0)$,
een locaal minimum -6 in de punten $(\pm 1,0)$.

4. a) Vegen in de stelsels $\{\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3\}$ en $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ geeft

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\ ,$$

$\dim U = 2$, $\{(1,-1,2,0),(3,0,-1,1)\}$ is een basis van U;

$$\begin{matrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} ,$$

dim V = 2, $\{(2,1,-2,0),(3,0,-1,1)\}$ is een basis van V.

b) Zij

$$\underline{x} = \lambda(1,-1,2,0) + \mu(3,0,-1,1) = (\lambda+3\mu \,,\, -\lambda \,,\, 2\lambda-\mu \,,\, \mu) \;,$$

$$\underline{y} = \rho(2,1,-2,0) + \sigma(3,0,-1,1) = (2\rho+3\sigma \,,\, \rho \,,\, -2\rho-\sigma \,,\, \sigma) \;.$$

Uit

$$\underline{x} + \underline{y} = (4,-1,3,-1)$$

volgt dan

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu + 2\rho + 3\sigma = 4 \,, \\ -\lambda + \rho = -1 \,, \\ 2\lambda - \mu - 2\rho - \sigma = 3 \,, \\ \mu + \sigma = -1 \,, \end{cases}$$

dus, met vegen:

$$\left.\begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{matrix} \sim \left.\begin{matrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} \sim \left.\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} ,$$

$$\rho = 2 \;, \quad \lambda = 1+\rho = 3 \;, \quad \mu = -1-\sigma \;.$$

Dit levert

$$\underline{x} = (-3\sigma,-3,7+\sigma,-1-\sigma) = (0,-3,7,-1) - \sigma(3,0,-1,1) \;,$$

$$\underline{y} = (4,2,-4,0) + \sigma(3,0,-1,1) \;.$$

Hierin is σ een willekeurig reëel getal.

5. a) De draaiingsas van $\mathcal{D}$ is

$$\langle(1,0,-1) \times (1,-1,0)\rangle = \langle(1,1,1)\rangle \;.$$

Uit

$$\mathcal{D}(1,1,1) = (1,1,1) \;, \quad \mathcal{D}(1,0,-1) = (0,-1,1) \;,$$

$$\mathcal{D}(1,-1,0) = (-1,0,1) \;,$$

volgt, met vegen,

T 1.80

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \to & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \to & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \to & -1 & 0 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 2 & 1 & 0 & \to & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & \to & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \to & -1 & 0 & 1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} 3 & 0 & 0 & \to & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & \to & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \to & -1 & 0 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \to & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \to & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \to & 1 & 0 & 0 \end{matrix} ,$$

dat de matrix D van $\mathcal{D}$ wordt gegeven door

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

De vectoren (1,1,0) en (0,0,1) liggen in V, de vector (1,-1,0) is orthogonaal met V, zodat

$$\mathcal{P}(1,1,0) = (1,1,0) \ , \quad \mathcal{P}(0,0,1) = (0,0,1) \ , \quad \mathcal{P}(1,-1,0) = (0,0,0) \ .$$

Met vegen:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & \to & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \to & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \to & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & \to & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \to & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \to & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & \to & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \to & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \to & 1 & 1 & 0 \end{matrix} ,$$

volgt voor de matrix P van $\mathcal{P}$:

$$P = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

De matrix A van $\mathcal{A} = \mathcal{P} \circ \mathcal{D}$ is dan gelijk aan

$$A = PD = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

b) i) Nulruimte N van A:

$$\begin{matrix} 0 & \frac12 & \frac12 \\ 0 & \frac12 & \frac12 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \quad N = \langle(0,1,-1)\rangle .$$

ii) Beeldruimte R van A:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac12 & \frac12 & 0 \\ \frac12 & \frac12 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \quad R = \langle(0,0,1),(1,1,0)\rangle .$$

iii) Eigenwaarden en bijbehorende eigenruimten van A:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac12 & \frac12 \\ 0 & \frac12-\lambda & \frac12 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\tfrac12-\lambda) + \tfrac14 - \tfrac12(\tfrac12-\lambda) = -\lambda(\lambda+\tfrac12)(\lambda-1) ,$$

$\lambda = 0$: $E_0 = N = \langle(0,1,-1)\rangle$;

$$\lambda=-\tfrac12: \quad \begin{matrix} \frac12 & \frac12 & \frac12 \\ 0 & 1 & \frac12 \\ 1 & 0 & \frac12 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \quad E_{-\frac12} = \langle(1,1,-2)\rangle ;$$

$$\lambda = 1: \quad \begin{matrix} -1 & \frac12 & \frac12 \\ 0 & -\frac12 & \frac12 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \quad E_1 = \langle(1,1,1)\rangle .$$

6. De massa M van G wordt gegeven door de integraal

$$M = \iiint_G \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 \left(\iint_{G_z} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,dx\,dy\right) dz ,$$

waarin

$$G_z = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1+z\} .$$

Overgang op poolcoördinaten (r,φ) geeft

$$\iint_{G_z} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{1+z}} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+1}} = 2\pi\sqrt{r^2+1}\Big|_0^{\sqrt{1+z}} = 2\pi(\sqrt{2+z}-1) ,$$

zodat

$$M = 2\pi \int_0^3 (\sqrt{2+z} - 1)\,dz = \frac{4\pi}{3}(2+z)^{3/2} - 2\pi z \Big|_0^3 =$$

$$= \frac{4\pi}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) - 6\pi = \frac{2\pi}{3}(10\sqrt{5} - 4\sqrt{2} - 9) \ .$$

Tweede oplossing.

$$M = \iint_{G_0} \left(\int_0^3 \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \right) dx\,dy + \iint_{G_1} \left(\int_{x^2+y^2-1}^3 \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \right) dx\,dy \ ,$$

waarin

$$G_0 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\} \ , \quad G_1 = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4\} \ .$$

Overgang op poolcoördinaten (r,φ) levert

$$M = 3\iint_{G_0} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,dx\,dy + \iint_{G_1} \frac{4-x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,dx\,dy =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{r^2+1}}\,dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{4-r^2}{\sqrt{r^2+1}}\,r\,dr =$$

$$= 6\pi\sqrt{r^2+1}\,\Big|_0^1 + 2\pi \int_1^2 \frac{4-r^2}{\sqrt{r^2+1}}\,r\,dr =$$

$$= 6\pi\sqrt{2} - 6\pi + \pi \int_1^2 \frac{4-r^2}{\sqrt{r^2+1}}\,dr^2 \ .$$

Substitutie van $r^2 = t$, $\sqrt{t+1} = u$ geeft

$$M = 6\pi\sqrt{2} - 6\pi + \pi \int_1^4 \frac{4-t}{\sqrt{t+1}}\,dt = 6\pi\sqrt{2} - 6\pi + 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} (5-u^2)\,du =$$

$$= 6\pi\sqrt{2} - 6\pi + 10\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2}) - \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) =$$

$$= \frac{2\pi}{3}(10\sqrt{5} - 4\sqrt{2} - 9) \ .$$

Herkansingsexamen/tentamen januari 1980

1. Een kromme K in $\mathbb{R}^2$ is gegeven door

$$\underline{f}(t) = (x(t),y(t)) = \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, (t-1)^2(t+1)\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bepaal de punten van K waar de raaklijn aan K horizontaal of vertikaal is, bereken $\lim_{t\to\infty} x(t)$ en $\lim_{t\to-\infty} x(t)$ en schets de kromme K.

2. De functie f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y+y^3x}{x^3+y^3}, & x \neq -y, \\ 0, & x = -y. \end{cases}$$

Onderzoek voor welke $\varphi \in [0,2\pi)$ de richtingsafgeleide van f in (0,0) in de richting $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ bestaat.

3. Op het gebied $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 8\}$ is de functie f gedefinieerd door

$$f(x,y) = (x^2-y^2)(x^2-4).$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van deze functie.

4. U is de lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^4$ opgespannen door $\underline{u}_1 = (4,5,-6,-8)$, $\underline{u}_2 = (-1,4,5,2)$, $\underline{u}_3 = (3,12,1,-6)$.
V_b is de oplossingsruimte van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - bx_4 = 0. \end{cases}$$

a) Bepaal de dimensie en een basis van U; bepaal evenzo voor elke $b \in \mathbb{R}$ de dimensie en een basis van V_b.

b) Voor welke waarde(n) van b geldt dat het stelsel vectoren bestaande uit de basisvector(en) van U en de basisvector(en) van V_b de $\mathbb{R}^4$ opspannen?

5. De lineaire afbeelding $\mathcal{D}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de draaiing om de z-as over een hoek $\frac{\pi}{2}$ zodanig dat $\mathcal{D}(1,-1,0) = (1,1,0)$.
De lineaire afbeelding S: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling ten opzichte van het vlak W: $x + y + z = 0$.
De lineaire afbeelding $A = S \circ \mathcal{D}$ is een draaispiegeling.

a) Toon aan dat de matrix van A gelijk is aan

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

b) Bepaal de draaiingsas, draaiingshoek en het spiegelvlak van A.

6. Bereken de massa van het lichaam G bepaald door

$$1 + z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4 ,$$

met massadichtheid

$$\rho(x,y,z) = \frac{1}{x^2 + y^2} .$$

Oplossingen Herkansingstentamen januari 1980

1. Uit

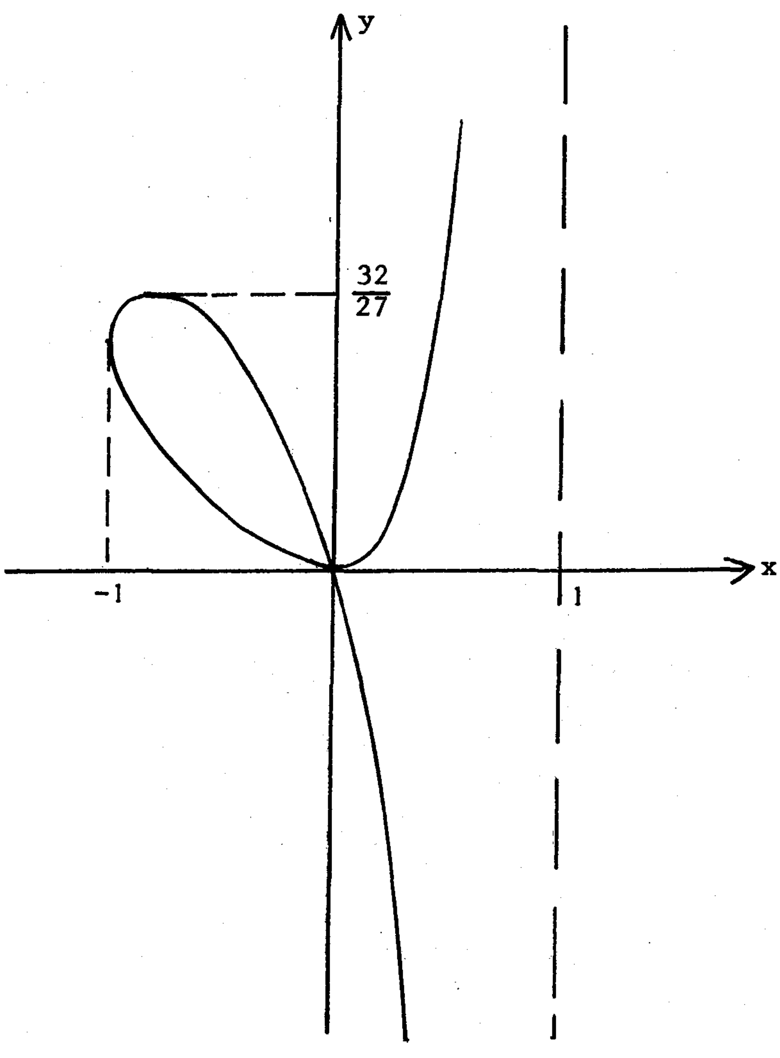
$$\dot{x}(t) = \frac{2t(t^2+1) - 2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2} = \frac{4t}{(t^2+1)^2} ,$$

$$\dot{y}(t) = 2(t-1)(t+1) + (t-1)^2 = (t-1)(3t+1) ,$$

volgt dat in $\underline{f}(-\frac{1}{3}) = (-\frac{4}{5}, \frac{32}{27})$ en $\underline{f}(1) = (0,0)$ de raaklijn aan K horizontaal, in $\underline{f}(0) = (-1,1)$ vertikaal is.

Er geldt

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t^2\to\infty} \frac{t^2-1}{t^2+1} = 1 .$$



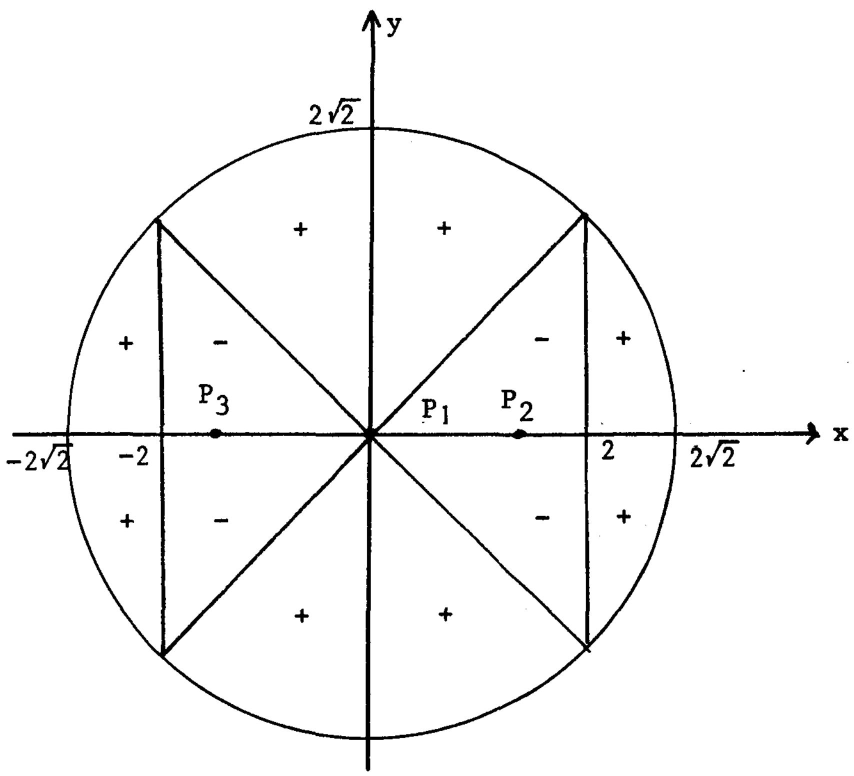
2. Beschouw de functie $g(t) = f(t \cos \varphi, t \sin \varphi)$, $t \in \mathbb{R}$. Als $g'(0)$ bestaat, dan is $g'(0)$ de richtingsafgeleide van f in (0,0) in de richting van $(\cos \varphi, \sin \varphi)$.
Voor $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ en voor $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ is $g(t) = 0$ voor alle $t \in \mathbb{R}$, dus $g'(0) = 0$.
Voor $\varphi \neq \frac{3\pi}{4}$, $\varphi \neq \frac{7\pi}{4}$ geldt

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos^2\varphi \sin \varphi + t \sin^3\varphi \cos \varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} & \text{voor } t \neq 0 \,, \\[2ex] 0 & \text{voor } t = 0 \,. \end{cases}$$

Als $\cos^2\varphi \sin \varphi \neq 0$, dan is g zelfs niet continu in $t = 0$; als $\varphi \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$, dan is $g(t) = 0$ voor alle $t \in \mathbb{R}$, dus $g'(0) = 0$.

Samengevat: de richtingsafgeleide van f in (0,0) in de richting van $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ bestaat (en is gelijk aan 0) voor $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$.

3. Nullijnen van f zijn de rechten $y = x$, $y = -x$, $x = 2$ en $x = -2$. Deze verdelen G in zes gebieden waar f tekenvast is (zie figuur).



Stationaire punten van f in het <u>inwendige</u> van G:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x(x^2-4) + 2x(x^2-y^2) = 2x(2x^2-y^2-4) = 0 \,, \\ f_y(x,y) = -\,2y(x^2-4) = 0 \,, \end{cases}$$

geeft

$$P_1 = (0,0) \;,\quad P_2 = (\sqrt{2},0) \;,\quad P_3 = (-\sqrt{2},0) \;.$$

In P_1 heeft f geen extreem (zie figuur).
Toepassen van de stelling van Weierstrass op elk van de driehoeken waarop $f(x,y) \le 0$ is, levert minima -4 in P_2 en P_3.
Op de rand van G geldt $y^2 = 8-x^2$, $-2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{2}$, dus

$$f(x,y(x)) = (2x^2-8)(x^2-4) = 2(x^2-4)^2 \;.$$

Uit

$$\frac{d}{dx} f(x,y(x)) = 8x(x^2-4) = 8x(x+2)(x-2) \;,$$

	d.	stijgend	dalend	st.		f(x,y(x))
$-2\sqrt{2}$	-2		0	2	$2\sqrt{2}$	x

volgt dat f ten opzichte van de rand van G een maximum heeft in de punten $(\pm 2\sqrt{2},0)$ en $(0,\pm 2\sqrt{2})$ met waarde 32 en een minimum in de punten $(-2,\pm 2)$ en $(2,\pm 2)$ met waarde 0.
Het minimum is geen extreem van f ten opzichte van G (zie figuur).

Op grond van de stelling van Weierstrass volgt samenvattend: f heeft op G

een globaal maximum 32 in de punten $(\pm 2\sqrt{2},0)$ en $(0,\pm 2\sqrt{2})$,
een globaal minimum -4 in de punten $(\pm\sqrt{2},0)$.

4. a) i) Vegen in het stelsel $\{\underline{u}_1,\underline{u}_2,\underline{u}_3\}$ levert

$$\begin{array}{rrrr} 4 & 5 & -6 & -8 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 12 & 1 & -6 \end{array} \sim \begin{array}{rrrr} 0 & 21 & 14 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 24 & 16 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{rrrr} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \,,$$

dim U = 2, $\{(0,3,2,0),(2,7,0,-4)\}$ is een basis van U.

ii) Oplossen van het stelsel vergelijkingen met vegen geeft

$$\begin{matrix} 2 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & -3 & -b \end{matrix} \sim \begin{matrix} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 0 & -b-2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{matrix} ;$$

voor $b = 4$ is een equivalent stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\quad - x_4 = 0 , \\ \quad 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 , \end{cases}$$

waaruit met $x_2 = \lambda$, $x_3 = \mu$ volgt

$$x_1 = x_4 = -2\lambda + 3\mu ,$$

dus

$$\underline{x} = \lambda(-2,1,0,-2) + \mu(3,0,1,3):$$

dim $V_4 = 2$, $\{(2,-1,0,2),(3,0,1,3)\}$ is een basis van V_4;

voor $b \neq 4$ is een equivalent stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\quad - x_4 = 0 , \\ \quad 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 , \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = 0 , \end{cases}$$

met oplossingsverzameling $<(0,3,2,0)>$:

dim $V_b = 1$, $\{(0,3,2,0)\}$ is een basis van V_b.

b) Drie vectoren spannen $\mathbb{R}^4$ niet op.
De basisvectoren van U en de basisvectoren van V_4 vormen een afhankelijk stelsel:

$$\begin{matrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & 0 & 6 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} .$$

Voor geen enkele waarde van $b \in \mathbb{R}$ wordt $\mathbb{R}^4$ opgespannen door het stelsel bestaande uit de basisvectoren van U en de basisvector(en) van V_b.

5. a) Meetkundig volgt eenvoudig

$$\mathcal{D}(1,0,0) = (0,1,0)\ , \quad \mathcal{D}(0,1,0) = (-1,0,0)\ , \quad \mathcal{D}(0,0,1) = (0,0,1)\ ,$$

zodat de matrix D van $\mathcal{D}$ wordt gegeven door

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

De vectoren $(1,-1,0)$ en $(1,0,-1)$ liggen in W, de vector $(1,1,1)$ staat loodrecht op W, zodat

$$\mathcal{S}(1,-1,0) = (1,-1,0)\ , \quad \mathcal{S}(1,0,-1) = (1,0,-1)\ , \quad \mathcal{S}(1,1,1) = (-1,-1,-1)\ .$$

Met vegen:

$$\begin{array}{rrrcrrr} 1 & -1 & 0 & \rightarrow & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \rightarrow & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \rightarrow & -1 & -1 & -1 \end{array} \sim \begin{array}{rrrcrrr} 1 & -1 & 0 & \rightarrow & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \rightarrow & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & \rightarrow & 0 & -1 & -2 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{rrrcrrr} 1 & -1 & 0 & \rightarrow & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \rightarrow & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & \rightarrow & 1 & -2 & -2 \end{array} \sim \begin{array}{rrrcrrr} 0 & 3 & 0 & \rightarrow & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & \rightarrow & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & \rightarrow & 1 & -2 & -2 \end{array} ,$$

volgt dat

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

de matrix is van $\mathcal{S}$.

De matrix A van $\mathcal{A} = \mathcal{S} \circ \mathcal{D}$ is dan gelijk aan

$$A = SD = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

b) i) De draaiingsas van $\mathcal{A}$ is E_{-1}, de eigenruimte bij de eigenwaarde -1.
Vegen geeft

$$\begin{array}{rrr} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{array} \sim \begin{array}{rrr} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{rrr} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} , \quad E_{-1} = \langle (2,0,1) \rangle \ .$$

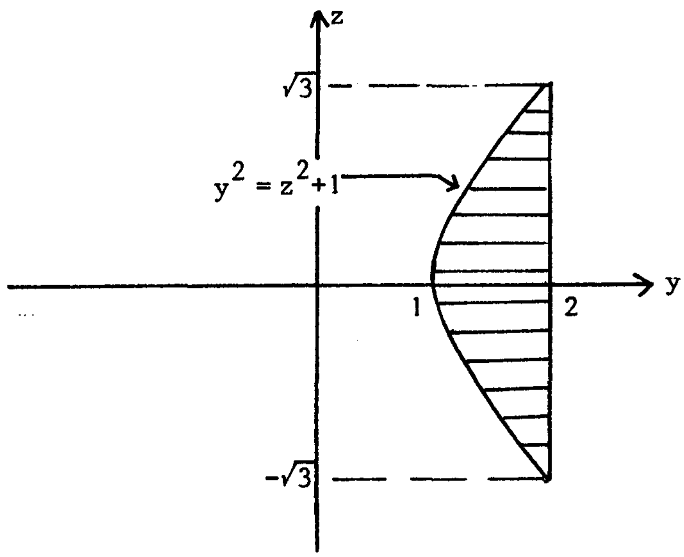
ii) Het spiegelvlak van A is $E_{-1}^{\perp}$, dus het vlak met vergelijking $2x+z = 0$.

iii) De vector $(0,1,0)$ is element van $E_{-1}^{\perp}$, $A(0,1,0) = \frac{1}{3}(-1,2,2)$, de draaiingshoek φ van A is de hoek tussen de vectoren $(0,1,0)$ en $\frac{1}{3}(-1,2,2)$.

Dus

$$\varphi = \arccos \frac{2/3}{1\cdot 1} = \arccos \frac{2}{3} .$$

6. Het lichaam G ontstaat door wenteling om de z-as van het geschetste gebied in het (y,z)-vlak.



Eerste oplossing.

De massa M van het lichaam G wordt gegeven door de integraal

$$M = \iiint_G \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{G_0} \left(\int_{-\sqrt{x^2+y^2-1}}^{\sqrt{x^2+y^2-1}} \frac{1}{x^2+y^2}\,dz \right) dx\,dy =$$

$$= 2 \iint_{G_0} \frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{x^2+y^2}\,dx\,dy ,$$

waarin

$$G_0 = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4\} .$$

Overgang op poolcoördinaten (r,φ) gevolgd door de substituties $r^2 = t$, $\sqrt{t-1} = u$, geeft

$$M = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{\sqrt{r^2-1}}{r^2}\, r\,dr =$$

$$= 2\pi \int_1^4 \frac{\sqrt{t-1}}{t}\,dt = 4\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{1+u^2}\,du =$$

$$= 4\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) du = 4\pi\,(\sqrt{3} - \arctan\sqrt{3}) =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\,(3\sqrt{3} - \pi)\ .$$

Tweede oplossing.

$$M = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\iint_{G_z} \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy\right) dz\ ,$$

waarin

$$G_z = \{(x,y)\ |\ 1+z^2 \le x^2+y^2 \le 4\}\ .$$

Overgang op poolcoördinaten (r,φ) levert

$$\iint_{G_z} \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt{1+z^2}}^2 \frac{1}{r^2}\, r\,dr =$$

$$= 2\pi \int_{\sqrt{1+z^2}}^2 \frac{1}{r}\,dr = 2\pi(\ln 2 - \tfrac{1}{2}\ln(1+z^2))\ ,$$

dus

$$M = 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (\ln 2 - \tfrac{1}{2}\ln(1+z^2))\,dz =$$

$$= 4\pi \int_0^{\sqrt{3}} (\ln 2 - \tfrac{1}{2}\ln(1+z^2))\,dz =$$

$$= 4\pi(\ln 2 - \tfrac{1}{2}\ln(1+z^2))z\Big|_0^{\sqrt{3}} - 4\pi\int_0^{\sqrt{3}} z(\ln 2 - \tfrac{1}{2}\ln(1+z^2))'\,dz =$$

$$= 0 + 4\pi\int_0^{\sqrt{3}} \frac{z^2}{1+z^2}\,dz = \frac{4\pi}{3}(3\sqrt{3} - \pi) .$$

(Zie de eerste oplossing voor de berekening van de laatste integraal.)

Proeftentamen maart 1980

1. a) Gegeven is de bol B met middelpunt M: (2,1,0) en straal $\sqrt{3}$, en het punt P: (-1,-2,-3).
Bepaal het punt van B waarvan de afstand tot P minimaal is en geef de vergelijking van het raakvlak aan B door dat punt.

b) In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven het zadelvlak

$$S: x^2 - y^2 = 2z$$

en de cilinder C die als richtkromme heeft de cirkel om (0,1,0) met straal 1 in het (x,y)-vlak en waarvan de beschrijvenden evenwijdig zijn met de z-as.
De kromme K is de doorsnijdingskromme van de oppervlakken S en C.
Geef een parametervoorstelling van K en bepaal de punten van K waarin de raaklijn evenwijdig is aan het (x,y)-vlak.

2. De functie f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x + x^2 - y^2}{x}, & (x \neq 0), \\ 1, & (x = 0). \end{cases}$$

a) Geef de richtingsafgeleiden in de richtingen (1,0), (0,1), $(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$ en $(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ in het punt (1,1), waar f uiteraard differentieerbaar is.

b) Bereken, voorzover ze bestaan, de richtingsafgeleiden in de richting (u,v) met $u^2 + v^2 = 1$ in het punt (0,0).

c) Is f differentieerbaar in (0,0) ?

3. Door de betrekking

$$x + x^2z - xy^2 + z^3 = 0$$

wordt z in een omgeving van (2,1,0) gegeven als functie van x en y.
Bepaal van deze functie z(x,y) de termen tot en met die van de tweede graad van de formule van Taylor rond (2,1).

P 3.80

4. De functie f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x,y) = \frac{36x}{4x^2 + y^2 + 1} .$$

Bepaal de plaats, de aard en de waarde van de extremen van f op het gebied

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\} .$$

Gebruik zonodig bij het onderzoek het gedrag van f op de lijn $x = 1$.

Oplossingen Proeftentamen maart 1980

1. a) De vergelijking van de bol B is

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3 .$$

Een parametervoorstelling van de rechte ℓ door de punten M en P is

$$\underline{x} = (2,1,0) + \lambda(1,1,1) .$$

Substitutie van $x = 2+\lambda$, $y = 1+\lambda$, $z = \lambda$ in de vergelijking van B levert $3\lambda^2 = 3$, dus $\lambda = \pm 1$, zodat

$$\underline{a} = (3,2,1) \quad \text{en} \quad \underline{b} = (1,0,-1)$$

de snijpunten van ℓ en B zijn.
De afstand van $\underline{a}$, $\underline{b}$ tot P is $4\sqrt{3}$ resp. $2\sqrt{3}$, zodat $\underline{b}$ het gevraagde punt is.
Het raakvlak aan B door $(1,0,-1)$ staat loodrecht op $(1,1,1)$. De vergelijking van dit raakvlak is dus

$$x+y+z = 1+0-1 = 0 .$$

b) De vergelijking van de cilinder C is

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 ,$$

zodat de kromme K gegeven wordt door

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 , \\ x^2 - y^2 = 2z . \end{cases}$$

Stel $x = \cos t$, $y-1 = \sin t$. Dan volgt

$$2z = \cos^2 t - (1+\sin t)^2 = \cos^2 t - 1 - 2\sin t - \sin^2 t =$$
$$= -2\sin^2 t - 2\sin t .$$

Een parametervoorstelling van K is dus

$$\underline{f}(t) = (\cos t,\ 1+\sin t,\ -\sin^2 t - \sin t) , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Er geldt

$$\dot{\underline{f}}(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ -2\sin t\cos t - \cos t) , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Omdat $(-\sin t, \cos t) \neq (0,0)$ is $\dot{\underline{f}}(t) \neq \underline{0}$ voor alle $t \in \mathbb{R}$, zodat K in elk punt een raaklijn heeft.

De raaklijn aan K in het punt $\underline{f}(t)$ is evenwijdig aan het (x,y)-vlak als $\dot{\underline{f}}(t)$ evenwijdig is aan het (x,y)-vlak, dus als

$$- 2 \sin t \cos t - \cos t = - \cos t\ (2 \sin t + 1) = 0\ .$$

Dit levert:

$\cos t = 0$, $\sin t = 1$ met het punt $(0,2,-2)$,
$\cos t = 0$, $\sin t = -1$ met het punt $(0,0,0)$,
$\sin t = -\frac{1}{2}$, $\cos t = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ met het punt $(\frac{1}{2}\sqrt{3},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$,
$\sin t = -\frac{1}{2}$, $\cos t = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ met het punt $(-\frac{1}{2}\sqrt{3},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$.

2. a) Omdat f differentieerbaar is in het punt (1,1) wordt de richtingsafgeleide van f in (1,1) in de richting van $\underline{v}$ ($\|\underline{v}\| = 1$) gegeven door

$$(\text{grad } f(1,1),\underline{v})\ .$$

Met

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(1 + x - y^2x^{-1}) = 1 + y^2x^{-2}\ , \quad x \neq 0\ ,$$

$$f_y(x,y) = - 2yx^{-1}\ , \quad x \neq 0\ ,$$

dus

$$\text{grad } f(1,1) = (2,-2)\ ,$$

geeft dit

$\underline{v}$	$(\text{grad } f(1,1),\underline{v})$
$(1,0)$	2
$(0,1)$	-2
$(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$	$\frac{14}{5}$
$(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$	$-\frac{14}{5}$

b) Beschouw de functie $g(t) := f(tu,tv)$, $t \in \mathbb{R}$.
Voor $u = 0$, dus $v = \pm 1$, is $g(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$, dus $g'(0) = 0$, zodat de richtingsafgeleiden van f in (0,0) in de richting van (0,1) en (0,-1) gelijk aan nul zijn.
Voor $u \neq 0$ is $g(t) = 1 + tu - tv^2u^{-1}$ (ook voor $t = 0$), dus

$$g'(0) = u - v^2u^{-1} = u - (1-u^2)u^{-1} = 2u - u^{-1}\ .$$

De richtingsafgeleide van f in (0,0) in de richting van (u,v) met $u \neq 0$ is dus gelijk aan $2u - u^{-1}$.

c) De functie f is niet differentieerbaar in het punt (0,0) omdat f niet continu is in (0,0):

$$\lim_{y\to 0} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0} y^2 = 0 \quad \text{en} \quad f(0,0) = 1 \, .$$

3. Er geldt

$$z(x,y) = z(2,1) + (x-2)z_x(2,1) + (y-1)z_y(2,1) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[(x-2)^2 z_{xx}(2,1) + 2(x-2)(y-1)z_{xy}(2,1) + (y-1)^2 z_{yy}(2,1)\right] + \dots \, .$$

De partiële afgeleiden van z volgen uit

$$x + x^2 z - xy^2 + z^3 = 0$$

door impliciet te differentiëren:

$$\begin{cases} 1 + 2xz + x^2 z_x - y^2 + 3z^2 z_x = 0 \, , \\ x^2 z_y - 2xy + 3z^2 z_y = 0 \, , \\ 2z + 4xz_x + x^2 z_{xx} + 6zz_x^2 + 3z^2 z_{xx} = 0 \, , \\ 2xz_y + x^2 z_{xy} - 2y + 6zz_x z_y + 3z^2 z_{xy} = 0 \, , \\ x^2 z_{yy} - 2x + 6zz_y^2 + 3z^2 z_{yy} = 0 \, . \end{cases}$$

Substitutie van x = 2, y = 1, z = 0 in dit stelsel vergelijkingen levert

$$\begin{cases} 1 + 4z_x - 1 = 0 \, , \\ 4z_y - 4 = 0 \, , \\ 8z_x + 4z_{xx} = 0 \, , \\ 4z_y + 4z_{xy} - 2 = 0 \, , \\ 4z_{yy} - 4 = 0 \, , \end{cases}$$

dus

$$z_x(2,1) = 0 \, , \quad z_y(2,1) = 1 \, ,$$
$$z_{xx}(2,1) = 0 \, , \quad z_{xy}(2,1) = -\tfrac{1}{2} \, , \quad z_{yy}(2,1) = 1 \, .$$

Hieruit volgt

$$z(x,y) = (y-1) - \tfrac{1}{2}(x-2)(y-1) + \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \dots \, .$$

4. Er geldt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \frac{36}{(4x^2+y^2+1)^2}(-4x^2+y^2+1,\ -2xy) \ .$$

Stationaire punten van f zijn $(-\frac{1}{2},0)$ en $(\frac{1}{2},0)$ met functiewaarden -9 en 9.

Op de rand van G is $y^2 = 2-x^2$ en dus

$$f(x,y(x)) = \frac{12x}{x^2+1} =: g(x) \qquad \text{met } -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \ .$$

Uit

$$g'(x) = \frac{12(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \ ,$$

$-4\sqrt{2}$		-6		6		$4\sqrt{2}$	$g(x)$
	$-\ -\ -$	0	$+ + + + + + + + + + +$	0	$-\ -\ -$		$g'(x)$
$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$	x

volgt dat f ten opzichte van de rand van G de volgende extremen heeft:

maxima $-4\sqrt{2}$ en 6 in de punten $(-\sqrt{2},0)$ resp. $(1,\pm 1)$,
minima -6 en $4\sqrt{2}$ in de punten $(-1,\pm 1)$ resp. $(\sqrt{2},0)$.

Er geldt

$$f(1,y) = \frac{36}{y^2+5} \ .$$

Dit is een dalende functie van y^2.

Op G is $y^2 \le 1$. Hieruit volgt dat f ten opzichte van de lijn $x = 1$ een minimum 6 heeft in de punten $(1,\pm 1)$, zodat 6 geen extreem is van f ten opzichte van G.

Analoog: -6 is geen extreem van f ten opzichte van G.

Op de begrensde gesloten verzameling

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 1,\ x^2+y^2 \le 2\}$$

heeft f op grond van de stelling van Weierstrass een globaal minimum. In het inwendige van V zijn geen stationaire punten van f, zodat het globale minimum van f op V wordt aangenomen op de rand van V, dus in het punt $(\sqrt{2},0)$.
Analoog kan men het punt $(-\sqrt{2},0)$ onderzoeken.

Samenvattend: f heeft op G

een globaal maximum 9 in het punt $(\frac{1}{2},0)$,
een globaal minimum -9 in het punt $(-\frac{1}{2},0)$,
een locaal maximum $-4\sqrt{2}$ in het punt $(-\sqrt{2},0)$,
een locaal minimum $4\sqrt{2}$ in het punt $(\sqrt{2},0)$.

Examen/tentamen mei 1980

1. a) Gegeven zijn de lijnen

$$\ell: \underline{x} = (0,-2,3) + \lambda(0,1,-2)$$

en

$$m: \underline{x} = (1,2,-2) + \mu(1,-1,1) .$$

Verder is V het vlak met vergelijking

$$x + y - z = 1 .$$

Laat ℓ' de projectie zijn van ℓ op V en m' de projectie van m op V. Bepaal het snijpunt van ℓ' en m'.

b) De functie f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x,y) = (y^2 - 1)^2 - x^2 .$$

Bepaal de plaats, aard en waarde van de extrema van f op het gebied

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 2 \text{ en } |y| \leq 1\} .$$

---

2. a) In $\mathbb{R}^4$ zijn gegeven de vectoren $\underline{a} = (1,2,-2,0)$, $\underline{b} = (2,1,0,4)$ en $\underline{c} = (5,7,3,2)$. Bepaal de loodrechte projectie van $\underline{c}$ op het orthoplement van $<\underline{a},\underline{b}>$.

b) In $\mathbb{R}^4$ zijn de lineaire deelruimten L en M gegeven door

$$L = <(2,3,-1,0),(0,1,4,2),(6,7,-11,-4)> ;$$
$$M = <(1,2,0,0),(0,2,3,0),(0,0,3,2)> .$$

Bepaal een basis van L, van M en van L $\cap$ M.

3. a) A is de draaispiegeling in $\mathbb{R}^3$, bepaald door

$$A(1,2,2) = (3,0,0) \;, \quad A(2,1,-2) = (0,0,-3) .$$

Bepaal de matrix van A.

b) B is een draaispiegeling in $\mathbb{R}^3$ met matrix

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Bepaal de as, het spiegelvlak en de draaiingshoek van B.

4\. a) G is het gebied in $\mathbb{R}^2$ gegeven door

$$x \geq 0\ ,\quad y \leq 1\ ,\quad y \geq x\ .$$

Bereken de oppervlakte van het deel van de cilinder $z = 1 - y^2$ dat boven G ligt.

b) De krommen K_1 en K_2 in $\mathbb{R}^2$ zijn in poolcoördinaten gegeven door

$$K_1:\ r = 3\sin\varphi\ ,\quad 0 \leq \varphi \leq \pi\ ;$$

$$K_2:\ r = 1 + \sin\varphi\ ,\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\ .$$

Bereken de oppervlakte van het gebied in $\mathbb{R}^2$ dat zowel binnen K_1 als binnen K_2 ligt.

Oplossingen Tentamen mei 1980

1. a) De vector $(1,1,-1)$ staat loodrecht op V. Het vlak V_1 door ℓ en ℓ' is dus evenwijdig aan de vectoren $(0,1,-2)$ en $(1,1,-1)$ en gaat door het punt $(0,-2,3)$.
Het vectorprodukt $(0,1,-2)\times(1,1,-1) = (1,-2,-1)$ staat loodrecht op V_1, zodat de vergelijking van V_1 is

$$x - 2y - z = 4 - 3 = 1 \ .$$

Het vlak V_2 door m en m' staat loodrecht op het vectorprodukt $(1,-1,1)\times(1,1,-1) = (0,2,2)$ en gaat door het punt $(1,2,-2)$, zodat de vergelijking van V_2 is

$$y + z = 2 - 2 = 0 \ .$$

Het snijpunt S van ℓ' en m' is het snijpunt van de vlakken V_1, V_2 en V.

Oplossen van het stelsel vergelijkingen

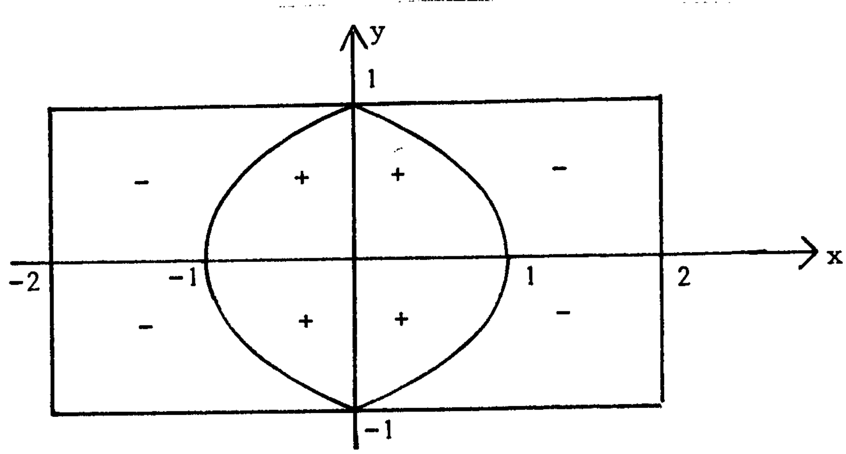
$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \ , \\ \quad\ \ y + z = 0 \ , \\ x + y - z = 1 \ , \end{cases} :$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

levert

$$S = (1,0,0) \ .$$

b) Nullijnen van f zijn de parabolen $x = y^2 - 1$ en $x = 1 - y^2$. In de figuur is het tekenverloop van f op G aangegeven.



Uit

$$\text{grad } f(x,y) = (-2x\,,\,4y(y^2-1))$$

volgt dat (0,0) het enige stationaire punt van f is in het inwendige van G.

Randonderzoek.

1°. $x = \pm 2$, $-1 \le y \le 1$: $f(\pm 2, y) = (y^2-1)^2 - 4 = g(y)$.

Uit

$$g'(y) = 4y(y^2-1)\ :$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & + & + & + & + & + & + & 0 & - & - & - & - & - & - & 0 \end{array} \quad g'(y)$$

$$\begin{array}{ccccc} -1 & \qquad & 0 & \qquad & 1 \end{array} \quad y$$

volgt dat g een minimum -4 heeft voor $y = \pm 1$ en een maximum -3 voor $y = 0$.

2°. $y = \pm 1$, $-2 \le x \le 2$: $f(x, \pm 1) = -x^2$.

Deze functie heeft een minimum -4 voor $x = \pm 2$ en een maximum 0 voor $x = 0$.

In de punten $(\pm 2, 0)$ heeft f geen extreem ten opzichte van G, want $f(x,0) = 1 - x^2$ heeft een minimum -3 voor $x = \pm 2$.

In de punten $(0, \pm 1)$ heeft f ook geen extreem ten opzichte van G (zie de figuur).

Op grond van de stelling van Weierstrass:

f heeft op G

een globaal maximum 1 in het punt (0,0),

een globaal minimum -4 in de punten $\pm(2, \pm 1)$.

2. a) Het orthoplement $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^{\perp}$ van $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ is de oplossingsverzameling van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} (\underline{a}, \underline{x}) = x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\,, \\ (\underline{b}, \underline{x}) = 2x_1 + x_2 + 4x_4 = 0\,. \end{cases}$$

Stel $x_1 = 2\lambda$, $x_2 = 4\mu$, dan volgt

$$x_3 = \lambda + 4\mu\,, \quad x_4 = -\lambda - \mu\,,$$

zodat

T 5.80

$$\underline{x} = \lambda(2,0,1,-1) + \mu(0,4,4,-1)$$

een parametervoorstelling van $\langle\underline{a},\underline{b}\rangle^{\perp}$ is.

Zij $\underline{d} = (2\lambda,4\mu,\lambda+4\mu,-\lambda-\mu)$ de loodrechte projectie van $\underline{c}$ op $\langle\underline{a},\underline{b}\rangle^{\perp}$.

Dan is

$$\underline{c}-\underline{d} = (5-2\lambda\ ,\ 7-4\mu\ ,\ 3-\lambda-4\mu\ ,\ 2+\lambda+\mu)$$

orthogonaal met $(2,0,1,-1)$ en $(0,4,4,-1)$.

Dit levert het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 11 - 6\lambda - 5\mu = 0\ , \\ 38 - 5\lambda - 33\mu = 0\ , \end{cases}$$

met oplossing $(\lambda,\mu) = (1,1)$. Dus

$$\underline{d} = (2,4,5,-2)\ .$$

b) Met vegen:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 7 & -11 & -4 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 9 & -3 & 0 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\ ,$$

$\{(2,3,-1,0),(0,1,4,2)\}$ is een basis van L;

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{matrix}\ ,$$

$\{(1,2,0,0),(0,2,3,0),(0,1,0,-1)\}$ is een basis van M.

Een parametervoorstelling van L, M is

$$\underline{x} = \lambda(2,3,-1,0) + \mu(0,1,4,2)$$

resp.

$$\underline{x} = \nu(1,2,0,0) + \rho(0,2,3,0) + \sigma(0,1,0,-1)\ .$$

Uit

$$(2\lambda,3\lambda+\mu,-\lambda+4\mu,2\mu) = (\nu,2\nu+2\rho+\sigma,3\rho,-\sigma)\ ,$$

dus

$$\begin{cases} 2\lambda - \nu = 0\ , \\ 3\lambda + \mu - 2\nu - 2\rho - \sigma = 0\ , \\ -\lambda + 4\mu - 3\rho = 0\ , \\ 2\mu + \sigma = 0\ , \end{cases}$$

volgt door vegen:

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} ,$$

een equivalent stelsel waarvan de tweede vergelijking is

$$\lambda - \mu = 0 .$$

Een parametervoorstelling van $L \cap M$ is dus

$$\underline{x} = \lambda(2,3,-1,0) + \lambda(0,1,4,2) = \lambda(2,4,3,2) ,$$

zodat $\{(2,4,3,2)\}$ een basis is van $L \cap M$.

3. a) Zij $\langle\underline{a}\rangle = \langle(a_1,a_2,a_3)\rangle$, $\|\underline{a}\| = 1$, de as van de draaispiegeling. Dan is $\langle\underline{a}\rangle^\perp$ het spiegelvlak van A.
Elke $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ kan geschreven worden als

$$\underline{x} = (\underline{a},\underline{x})\underline{a} + \underline{y} \quad \text{met} \quad \underline{y} \in \langle\underline{a}\rangle^\perp .$$

Er geldt $A\underline{a} = -\underline{a}$ en $A\underline{y} \in \langle\underline{a}\rangle^\perp$, dus

$$A\underline{x} = -(\underline{a},\underline{x})\underline{a} + A\underline{y} \quad \text{met } (A\underline{y},\underline{a}) = 0 .$$

Dit levert

$$(A\underline{x},\underline{a}) = -(\underline{a},\underline{x}) , \qquad (A\underline{x}+\underline{x},\underline{a}) = 0 .$$

Uit

$$A(1,2,2) + (1,2,2) = (4,2,2) \perp \underline{a} ,$$
$$A(2,1,-2) + (2,1,-2) = (2,1,-5) \perp \underline{a} ,$$

volgt

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 + a_3 = 0 , \\ 2a_1 + a_2 - 5a_3 = 0 , \end{cases}$$

dus $a_3 = 0$, $a_2 = -2a_1$; $\underline{a} = a_1(1,-2,0)$.

Door vegen:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 2 & \to & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & \to & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & \to & -1 & 2 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccccccc} 3 & 3 & 0 & \to & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & \to & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & \to & -1 & 2 & 0 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & \to & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & \to & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & \to & 1 & 2 & -2 \end{array} \sim \begin{array}{ccccccc} 0 & 3 & 0 & \to & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & \to & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & \to & 1 & 2 & -2 \end{array},$$

volgt de matrix van $\mathcal{A}$:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} .$$

b) Blijkbaar geldt $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. De as van $\mathcal{B}$ is dus $\langle(1,-2,0)\rangle$, het spiegelvlak

$$x - 2y = 0 .$$

De vector $(0,0,1)$ ligt in het spiegelvlak.
De draaiingshoek van $\mathcal{B}$ is de hoek tussen $(0,0,1)$ en $\mathcal{B}(0,0,1) = \frac{1}{3}(2,1,2)$, dus $\arccos \frac{2}{3}$.

4. a)

$$\mathcal{O} = \iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy = \iint_G \sqrt{1 + 4y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^y \sqrt{1 + 4y^2}\, dx = \int_0^1 y\sqrt{1 + 4y^2}\, dy =$$

$$= \frac{1}{12}\,(1 + 4y^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}\,(5\sqrt{5} - 1) ,$$

of

$$\mathcal{O} = \int_0^1 dx \int_x^1 \sqrt{1 + 4y^2}\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left(y\sqrt{1 + 4y^2}\,\Big|_{y=x}^{y=1} - \int_x^1 \frac{4y^2}{\sqrt{1 + 4y^2}}\, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{5} - x\sqrt{1+4x^2} - \int_x^1 \sqrt{1+4y^2}\, dy + \int_x^1 \frac{dy}{\sqrt{1+4y^2}} \right) dx =$$

$$= \sqrt{5} - \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\, dx - O + \int_0^1 \tfrac{1}{2} \ln(2y + \sqrt{1+4y^2}) \Big|_{y=x}^{y=1} dx =$$

$$= \sqrt{5} - \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\, dx - O + \tfrac{1}{2} \ln(2+\sqrt{5}) - \tfrac{1}{2} \int_0^1 \ln(2x + \sqrt{1+4x^2}) dx =$$

$$= \sqrt{5} - \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\, dx - O + \tfrac{1}{2} \ln(2+\sqrt{5}) - \tfrac{1}{2}x \ln(2x + \sqrt{1+4x^2}) \Big|_0^1 +$$

$$+ \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}}\, dx = \sqrt{5} - \frac{1}{12} (1+4x^2)^{3/2} \Big|_0^1 - O + \tfrac{1}{4} \sqrt{1+4x^2} \Big|_0^1 =$$

$$= \sqrt{5} - \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1) - O + \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 1) - O \;,$$

dus

$$O = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1) \;.$$

b) $$O = 2 \left(\int_0^{\pi/6} d\varphi \int_0^{3 \sin\varphi} r\, dr + \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1+\sin\varphi} r\, dr \right) =$$

$$= 9 \int_0^{\pi/6} \sin^2\varphi\, d\varphi + \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + \sin\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^{\pi/6} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi + \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + 2 \sin\varphi + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{9}{2} (\varphi - \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi) \Big|_0^{\pi/6} + (\frac{3}{2} \varphi - 2 \cos\varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{3}{4} \pi - \frac{9}{8} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \pi + \sqrt{3} + \frac{1}{8} \sqrt{3} = \frac{5}{4} \pi \;,$$

of

T 5.80

$$O = \frac{9}{4}\pi - 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_{1+\sin\varphi}^{3\sin\varphi} r\,dr =$$

$$= \frac{9}{4}\pi - \int_{\pi/6}^{\pi/2} (9\sin^2\varphi - (1+\sin\varphi)^2)d\varphi =$$

$$= \frac{9}{4}\pi - \int_{\pi/6}^{\pi/2} (8\sin^2\varphi - 1 - 2\sin\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{9}{4}\pi - \int_{\pi/6}^{\pi/2} (4 - 4\cos 2\varphi - 1 - 2\sin\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{9}{4}\pi - (3\varphi - 2\sin 2\varphi + 2\cos\varphi)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{9}{4}\pi - (\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi + \sqrt{3} - \sqrt{3}) = \frac{9}{4}\pi - \pi = \frac{5}{4}\pi\ .$$

Herkansingsexamen/tentamen juni 1980

1. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven het oppervlak

$$S: z = x^2 + y^2$$

en het vlak

$$V: z = 2x - 2y - 10 \ .$$

a) Bewijs dat S en V elkaar niet snijden.

b) Bepaal het punt van S dat minimale afstand heeft tot het vlak V en bepaal deze minimale afstand.

2. De kromme K in $\mathbb{R}^2$ is gegeven door de parametervoorstelling

$$\underline{x}(t) = (t - (e^{1/t} - 1)\cos t \ , \ t + (e^{1/t} - 1)\cos t) \ , \quad t > 0 \ .$$

a) Bepaal de asymptoten van K.

b) Bepaal de snijpunten van K met zijn asymptoten.

c) Schets K.

3. De lineaire deelruimte U van $\mathbb{R}^5$ is gegeven door

$$U = \langle(1,0,1,0,1),(1,1,1,1,1)\rangle \ .$$

a) Geef een parametervoorstelling van $U^{\perp}$.

b) Bepaal $\underline{u} \in U$ en $\underline{v} \in U^{\perp}$ zodanig dat

$$\underline{u} + \underline{v} = (3,2,2,0,1) \ .$$

4. Van de lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven

(i) 2 is een eigenwaarde met het vlak

$$x + 2y + z = 0$$

als eigenruimte;

(ii) $$A(1,2,3) = (2,2,2) \ .$$

a) Bewijs dat de inverse afbeelding van A de matrix

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

heeft.

b) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de inverse van A.

5. Bereken

$$\iint_G \frac{y}{\sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + x^2 + y^2}}\, dx\, dy ,$$

waarin

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 15 \text{ en } y \ge 0\} .$$

6. Bereken

$$\iiint_G x^2\, y^2\, z^2\, dx\, dy\, dz ,$$

waarin

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\} .$$

Oplossingen Herkansingstentamen juni 1980

1. De afstand van een punt $(x,y,x^2+y^2) \in S$ tot het vlak V is op grond van de stelling van Hesse gelijk aan

$$\frac{|x^2+y^2-2x+2y+10|}{\|(2,-2,-1)\|} = \frac{1}{3}\,|(x-1)^2 + (y+1)^2 + 8| =$$

$$= \frac{1}{3}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(y+1)^2 + \frac{8}{3},$$

dus minimaal $\frac{8}{3}$ voor $x = 1$, $y = -1$.
Hieruit volgt dat S en V elkaar niet snijden en dat $(1,-1,2)$ het punt van S is met minimale afstand tot V.

2. a) Er geldt

$$\|\underline{x}(t)\| = \left((t - (e^{1/t}-1)\cos t)^2 + (t + (e^{1/t}-1)\cos t)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (2t^2 + 2(e^{1/t}-1)^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}, \quad t > 0,$$

dus $\|\underline{x}(t)\| \to \infty$ voor $t \downarrow 0$ en voor $t \to \infty$.
Zij ℓ een rechte in $\mathbb{R}^2$ met vergelijking

$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

De afstand $d(\underline{x}(t),\ell)$ van een punt $\underline{x}(t) \in K$ tot ℓ is op grond van de stelling van Hesse gelijk aan

$$|(a+b)t + (b-a)(e^{1/t}-1)\cos t + c|.$$

Hieruit volgt

$$\lim_{t\downarrow 0} d(\underline{x}(t),\ell) = 0$$

dan en slechts dan als $b - a = 0$, $c = 0$;

$$\lim_{t\to\infty} d(\underline{x}(t),\ell) = 0$$

dan en slechts dan als $a + b = 0$, $c = 0$.
De asymptoten van K zijn dus

$$\ell_1 : x + y = 0 \quad \text{en} \quad \ell_2 : x - y = 0.$$

b) Snijpunten van K met ℓ_1 zijn er niet, want

$$x(t) + y(t) = 2t > 0 \quad \text{voor } t > 0 .$$

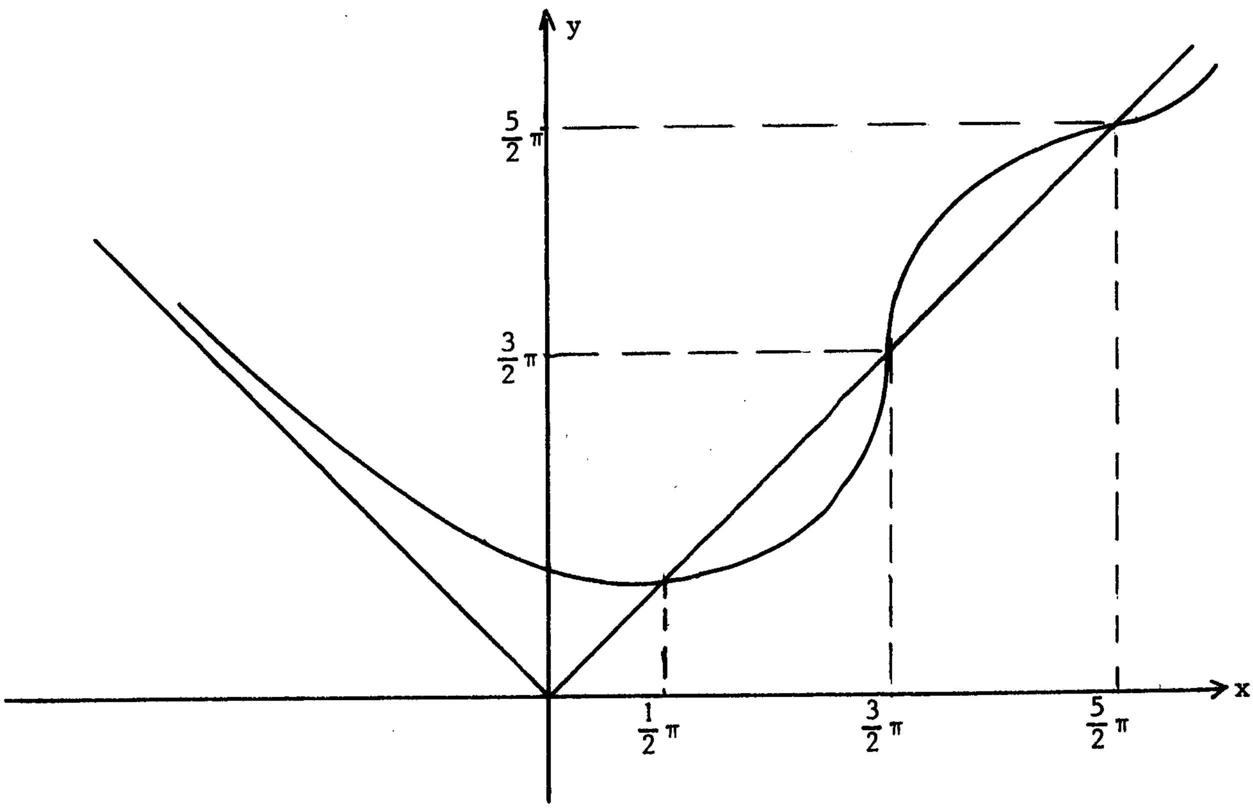
Er geldt

$$x(t) - y(t) = -2(e^{1/t} - 1)\cos t = 0$$

voor $t = \frac{1}{2}\pi + n\pi$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, zodat de snijpunten van K met ℓ_2 zijn

$$(\tfrac{1}{2}\pi + n\pi\ ,\ \tfrac{1}{2}\pi + n\pi)\ , \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} .$$

c)



3. a) $U^{\perp}$ is de oplossingsruimte van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 , \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 : \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} .$$

Stel $x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$, $x_3 = \nu$. Dan volgt $x_4 = -\mu$, $x_5 = -\lambda - \nu$.
Een parametervoorstelling van $U^{\perp}$ is dus

$$\underline{x} = \lambda(1,0,0,0,-1) + \mu(0,1,0,-1,0) + \nu(0,0,1,0,-1) .$$

b) Zij

$$\underline{u} = \alpha(1,0,1,0,1) + \beta(1,1,1,1,1) = (\alpha+\beta,\beta,\alpha+\beta,\beta,\alpha+\beta) ,$$

dan is

$$\underline{v} = (3-\alpha-\beta\ , 2-\beta\ , 2-\alpha-\beta\ , -\beta\ , 1-\alpha-\beta) \in U^{\perp}$$

dan en slechts dan als $\underline{v} \perp (1,0,1,0,1)$ en $\underline{v} \perp (1,1,1,1,1)$.
Dit levert het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 6 - 3\alpha - 3\beta = 0 , \\ 8 - 3\alpha - 5\beta = 0 , \end{cases}$$

met oplossing

$$(\alpha,\beta) = (1,1) .$$

Dus

$$\underline{u} = (2,1,2,1,2) , \quad \underline{v} = (1,1,0,-1,-1) .$$

4. a) Uit (i) volgt

$$A(1,0,-1) = (2,0,-2) , \quad A(2,-1,0) = (4,-2,0) .$$

Het stelsel vectoren $\{(2,0,-2),(4,-2,0),(2,2,2)\}$ is onafhankelijk, zodat de inverse afbeelding $\overleftarrow{A}$ van A bestaat.
Er geldt

$$\overleftarrow{A}(2,0,-2) = (1,0,-1) , \quad \overleftarrow{A}(4,-2,0) = (2,-1,0) , \quad \overleftarrow{A}(2,2,2) = (1,2,3) .$$

Met vegen:

$$\begin{array}{rrrcrrr} 2 & 0 & -2 & \to & 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & \to & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \to & 1 & 2 & 3 \end{array} \sim \begin{array}{rrrcrrr} 2 & 0 & -2 & \to & 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & \to & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & \to & 2 & 2 & 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{rrrcrrr} 2 & 0 & -2 & \to & 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & \to & 2 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & \to & 4 & 1 & 2 \end{array} \sim \begin{array}{rrrcrrr} 0 & 0 & 8 & \to & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & \to & 0 & 3 & 2 \\ 8 & 0 & 0 & \to & 4 & 1 & 2 \end{array} ,$$

volgt dat $\overleftarrow{A}$ de matrix

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

heeft.

b) De karakteristieke vergelijking van $\overleftarrow{A}$ is

$$\left(\frac{1}{8}\right)^3 \begin{vmatrix} 4-8\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 6-8\lambda & 1 \\ 2 & 4 & 6-8\lambda \end{vmatrix} = 8^{-3}(4-8\lambda)((6-8\lambda)^2-4) =$$

$$= 8^{-3}(4-8\lambda)(4-8\lambda)(8-8\lambda) = 0 \; .$$

De eigenwaarden van $\overleftarrow{A}$ zijn dus $\frac{1}{2}$ en 1.

Eigenvectoren bij eigenwaarde $\frac{1}{2}$:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} :$$

alle $\underline{x} \neq \underline{0}$ in het vlak $x + 2y + z = 0$.

Dit resultaat is in overeenstemming met het gegeven.

Eigenvectoren bij eigenwaarde 1:

$$\begin{matrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} : \quad \underline{x} = \alpha(0,1,2) \;, \quad \alpha \neq 0 \; .$$

5. Het gebied G wordt in poolcoördinaten gegeven door

$$G = \{(r,\varphi) \mid 0 \le r \le \sqrt{15},\ 0 \le \varphi \le \pi\} \; .$$

Dus

$$\iint_G \frac{y}{\sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + x^2 + y^2}} \, dx\, dy =$$

$$= \iint_G \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^2 + x^2 + y^2}} \, dx\, dy = \iint_G \frac{r \sin\varphi}{\sqrt{r^4 + r^2}} \, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \iint_G \frac{r \sin\varphi}{\sqrt{r^2+1}} \, dr\, d\varphi = \int_0^{\sqrt{15}} \frac{r}{\sqrt{r^2+1}} \, dr \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{15}} \frac{r}{\sqrt{r^2+1}} \, dr = 2\sqrt{r^2+1}\,\Big|_0^{\sqrt{15}} = 6 \; .$$

6. Overgang op bolcoördinaten geeft

$$\iiint\limits_G x^2 y^2 z^2 \, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^8 \sin^5\theta \cos^2\theta \sin^2\varphi \cos^2\varphi \, d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^5\theta \cos^2\theta \, d\theta \int_0^1 \rho^8 \, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} B(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}) \cdot \frac{1}{2} B(3, \tfrac{3}{2}) \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)} \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{9}{2})} =$$

$$= \frac{1}{36} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{4} \frac{8}{7\cdot 5\cdot 3} = \frac{\pi}{1890} .$$