

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 30

bestemd voor

WSK-III, N-III, W-III, E-III en T-III

WISKUNDE 39

bestemd voor

BDK-III, W-III, T-III

Najaarssemester 1971

Onderafdeling der Wiskunde

Wiskunde 30

bestemd voor WSK-III, N-III, W-III, E-III, T-III

Wiskunde 39

bestemd voor BDK-III, W-III, T-III

Wiskunde 30: hoofdstukken I, II, III.

Wiskunde 39: hoofdstuk I, hoofdstuk III, § 1 t/m § 6

Najaarssemester 1971



TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

	Pag.
Hoofdstuk I. Differentiaalvergelijkingen	
§ 1. Inleiding	1
§ 2. Scheiding van variabelen	1
§ 3. Lineaire differentiaalvergelijkingen	1
§ 4. Differentiaalvergelijkingen type Bernoulli	5
§ 5. Homogene differentiaalvergelijkingen	6
§ 6. Exacte differentiaalvergelijkingen	8
§ 7. Integrerende factor	10
§ 8. Substituties en kunstgrepen	12
§ 9. Impliciete differentiaalvergelijkingen	14
§ 10. Differentiaalvergelijkingen van hogere orde	17
§ 11. Lineaire stelsels D.V. met constante coëfficiënten	20
§ 12. Laplace-transformatie	26
§ 13. Machtreekssubstitutie	31
§ 14. Uitgebreide machtreekssubstitutie	37
§ 15. Iteratiemethode	43
§ 16. Numerieke methode	46
Hoofdstuk II. Lineaire Algebra	50
§ 1. Lineaire afbeeldingen en matrices	50
§ 2. Basisovergang	54
§ 3. Eigenwaarden en eigenvectoren	58
§ 4. Vectorruimten met inproduct	62
§ 5. Orthonormale bases	66
§ 6. Symmetrische lineaire afbeeldingen en symmetrische matrices	69
§ 7. Kwadratische vormen	74
§ 8. Inhomogene kwadratische vormen	81
Hoofdstuk III. Fourierreeksen	84
§ 1. Trigonometrische reeksen	84
§ 2. Fourierreeksen, periode 2π	86
§ 3. Fourierreeksen, periode p	90
§ 4. Fourierintegralen	93
§ 5. Complexe schrijfwijze voor fourierreeksen en fourierintegralen	97
§ 6. Toepassing op partiële differentiaalvergelijkingen	99
§ 7. De ongelijkheid van Bessel	109
§ 8. Het bewijs van de hoofdstelling	112
§ 9. Rijen van functies, uniforme convergentie	114
§ 10. Reeksen van functies, uniforme fourierreeksen	119
§ 11. Het verschijnsel van Gibbs	122
Appendix. Slingerbeweging van een ketting	124

HOOFDSTUK I

Differentiaalvergelijkingen

§1. Inleiding

Een gewone differentiaalvergelijking van de eerste orde

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

is een vraag naar de functies $y(x)$, oplossingen genaamd, die aan (1) voldoen voor alle x uit een zeker interval. Wij beperken ons voorlopig tot differentiaalvergelijkingen van het type

$$y' = f(x, y). \quad (2)$$

Vb.1.1. $x + y + y' = 0$

heeft als oplossing $y = e^{-x} - x + 1$, maar ook $y = 3e^{-x} - x + 1$, algemeen $y = Ce^{-x} - x + 1$.

Vb.1.2. $y' = -\frac{y}{x}$

heeft als oplossingskrommen de hyperbolen $xy = C$.

Meetkundig stelt de afgeleide van de functie $y(x)$ in $x = x_0$ voor de tangens van de hellingshoek van de grafiek in het punt $(x_0, y(x_0))$. Door de betrekking (2) wordt in elk geoorloofd punt (x_0, y_0) een richting

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

gedefinieerd. Het zo met richtingen bezaaide (x, y) vlak heet een richtingsveld. Meetkundig gezien komt het oplossen van de differentiaalvergelijking

$$y' = f(x, y)$$

neer op het vinden van krommen, waarvan de richting in elk van zijn punten overeenkomt met de richting van het richtingsveld aldaar.

In de volgende paragrafen behandelen wij eerst enige elementaire typen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde, die door integratie zijn op te lossen.

§2. Scheiding van variabelen

$$P(y)y' = Q(x).$$

Gebruik makend van differentiaal, $y' = \frac{dy}{dx}$, schrijven wij

$$P(y)dy = Q(x)dx.$$

Na integratie vinden wij de oplossingen.

Vb.2.1. $x + yy' = 0.$

Uit $2xdx + 2ydy = 0$ volgt na integratie $x^2 + y^2 = C$. Strikt genomen zijn de oplossingen van de D.V. de functies $y = \pm \sqrt{C - x^2}$, $|x| < \sqrt{C}$, en zijn de oplossingskrommen de cirkels $x^2 + y^2 = C$, $C \geq 0$, met uitzondering van de punten $(\pm \sqrt{C}, 0)$. Zulke uitzonderingspunten zullen wij verwaarlozen. Oplossingskrommen willen wij echter niet verliezen.

Vb.2.2. $xy' - y = 0.$

Deel door xy , dan

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad y \neq 0.$$

Integratie geeft

$$\log |y| = \log |x| + C$$

waaruit, met $e^C = D$,

$$|y| = |x| \cdot D, \quad D > 0, \quad \text{dus } y = Ex, \quad E \neq 0.$$

Echter ook $y = 0$ is een oplossing. De oplossingen zijn dus de rechten $y = Ex$, $-\infty < E < \infty$.

Vb.2.3. Gevraagd de krommen die in elk van zijn punten loodrecht staat op de door dat punt gaande ellips $x^2 + 2y^2 = a^2$.

Oplossing. Voor de raakrichtingen aan de ellipsen geldt

$$2xdx + 4ydy = 0.$$

De gevraagde krommen zijn de oplossingen van

$$y' = \frac{2y}{x}$$

en dit zijn de parabolen $y = Cx^2$, $-\infty < C < \infty$.

§3. Lineaire differentiaalvergelijkingen

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Teneinde deze inhomogene differentiaalvergelijking op te lossen beschouwen wij eerst de homogene vergelijking

$$y' + P(x)y = 0.$$

Met de methode van scheiding van variabelen vinden wij de oplossingen

$$y(x) = cy_h(x), \text{ met } y_h(x) = e^{-\int_0^x P(t)dt}, \quad -\infty < c < \infty.$$

Vervolgens wordt één oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking bepaald. Dit geschiedt met behulp van de methode der variatie van constanten, d.w.z. door een oplossing van de vorm

$$c(x) y_h(x)$$

te zoeken. Dan moet gelden

$$c'(x)y_h(x) + c(x)y_h'(x) + P(x)c(x)y_h(x) = Q(x),$$

dus, omdat $y_h(x)$ aan de homogene vergelijking voldoet,

$$c'(x)y_h(x) = Q(x).$$

Hieruit is, door scheiding der variabelen, een $c(x)$, en dus een

$$y_i(x) = c(x)y_h(x)$$

te vinden. De inhomogene differentiaalvergelijking heeft dan de oplossingen

$$y(x) = cy_h(x) + y_i(x), \quad -\infty < c < \infty.$$

Vb.3.1. $xy' - (x+1)y = x^2 - x^3.$

Aan de homogene vergelijking

$$xy' - (x+1)y = 0$$

voldoet $y = 0.$

Wegens

$$\frac{dy}{y} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx, \log |y| = x + \log |x|$$

zijn de oplossingen van de homogene vergelijking

$$c y_h(x) = c x e^x, -\infty < c < \infty.$$

Probeer nu in de inhomogene vergelijking

$$c(x) y_h(x) = c(x) x e^x, \text{ dan}$$

$$x c'(x) y_h(x) + x c(x) y_h'(x) - (x+1) c(x) y_h(x) = x^2 - x^3,$$

$$x c'(x) x e^x = x^2 - x^3$$

$$c'(x) = (1-x) e^{-x}$$

Hieraan voldoet $c(x) = x e^{-x}$, en wij hebben een oplossing

$$c(x) y_h(x) = x^2$$

van de inhomogene vergelijking gevonden. De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking is

$$y = c x e^x + x^2, -\infty < c < \infty.$$

Vb.3.2. In een stroomkring met constante zelfinductie L en weerstand R loopt een stroom I onder invloed van een electromotorische kracht E . Als t de tijd is, dan geldt

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t).$$

De homogene vergelijking heeft de oplossingen $c e^{-\frac{R}{L} t}$. Probeer

$$c(t) e^{-\frac{R}{L} t}$$

in de inhomogene vergelijking, dan volgt

$$Lc'(t) = E(t)e^{\frac{R}{L}t}, \quad c(t) = \frac{1}{L} \int E(t)e^{\frac{R}{L}t} dt,$$

waarmee een oplossing van de inhomogene vergelijking gevonden is. In het geval van constante $E(t) = E$ is deze oplossing $\frac{E}{R}$, dus luidt de algemene oplossing

$$I(t) = c e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}.$$

Wanneer I_0 de stroom ten tijde $t = 0$ voorstelt, dan geldt $I_0 = c + \frac{E}{R}$, dus is

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

de oplossing voor constante E .

Opmerking. Voor grote t is de e -macht klein en geldt in benadering $I = E/R$.

Voor inschakelstroom ($I_0 = 0$) en voor relaxatiestroom ($E = 0$) gelden respectievelijk

$$I(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad \text{en} \quad I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Vb.3.3. $(1 - x^2)y' - 2xy = 1.$

Gemakkelijker dan met de algemene methode lossen wij deze vergelijking als volgt op. Wij zien direct dat

$$\frac{d}{dx} [(1 - x^2)y] = 1$$

en vinden de algemene oplossing

$$(1 - x^2)y = x + C.$$

84. Differentiaalvergelijkingen type Bernoulli

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \quad \text{met } \alpha \neq 1.$$

Stel $y \neq 0$ en deel door y^α , dan

$$\frac{y'}{y^\alpha} + \frac{P(x)}{y^{\alpha-1}} = Q(x).$$

Wegens

$$\frac{d}{dx} (y^{1-\alpha}) = (1-\alpha) \frac{y'}{y^\alpha}$$

is dit gelijkwaardig met

$$\frac{d}{dx} (y^{1-\alpha}) + (1-\alpha)P(x)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)Q(x).$$

Dit is een lineaire D.V.

Vb.4.1. $xy' + y = y^2 \log x.$

$y = 0$ is een oplossing. Stel verder $y \neq 0$. Dan

$$x \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \log x; \quad -x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y} = \log x.$$

Deze lineaire vergelijking is snel op te lossen als men door x^2 deelt:

$$\frac{x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y}}{x^2} = - \frac{\log x}{x^2},$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{xy}\right) = - \frac{\log x}{x^2},$$

$$\frac{1}{xy} = - \int \frac{\log x}{x^2} dx = \int \log x \, x d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\log x + 1}{x} + C.$$

De oplossingen zijn $y = 0$ en $y = \frac{1}{\log x + 1 + Cx}$.

§5. Homogene differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Substitueer $\frac{y}{x} = z$, dus $y = xz$, dan

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z$$

en de D.V. wordt

$$x \frac{dz}{dx} + z = g(z),$$

oplosbaar door scheiding der variabelen.

Opmerking. Uit het richtingsveld van dit type D.V. blijkt dat y' dezelfde waarde heeft in alle punten van de rechte $y = zx$, z constant.

Vb.5.1. $y' = \frac{4x-y}{2x+y}.$

Stel $y = xz$ dan

$$xz' + z = \frac{4-z}{2+z},$$

$$xz' = \frac{4-3z-z^2}{2+z},$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(z+2)dz}{z^2+3z-4} = 0,$$

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{5} \int \frac{dz}{z-1} + \frac{2}{5} \int \frac{dz}{z+4} = 0,$$

$$x^5 (z-1)^3 (z+4)^2 = C, \text{ dus } (y-x)^3 (y+4x)^2 = C,$$

voor alle C , omdat $y = x$ en $y = -4x$ ook oplossing zijn.

Vb.5.2. $y' = \frac{4x-y+7}{2x+y-1}.$

Deze D.V. is niet homogeen. Door een eenvoudige substitutie is hij echter homogeen te maken. Stel

$$x = \xi + p, \quad y = \eta + q,$$

met nader te bepalen p en q . Dan wordt de D.V.

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{4\xi - \eta + 4p - q + 7}{2\xi + \eta + 2p + q - 1}.$$

Door p en q zo te kiezen dat

$$\begin{cases} 4p - q + 7 = 0 \\ 2p + q - 1 = 0, \end{cases}$$

dus door $p = -1$ en $q = 3$ te nemen, wordt de D.V.

$$\frac{dn}{d\xi} = \frac{4\xi - n}{2\xi + n},$$

met oplossing $(n-\xi)^3 (n+4\xi)^2 = C$. De oorspronkelijke D.V. heeft dus de oplossing

$$(y-x-4)^3 (y+4x+1)^2 = C.$$

Opmerking. Dezelfde methode is van toepassing op alle D.V. van het type

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right),$$

behalve als de vergelijkingen, waaruit p en q moeten worden bepaald, strijdig zijn. Dan gaat het echter nog eenvoudiger.

Vb.5.3. $y' = \frac{2x+y+1}{2x+y+2}.$

Stel $z = 2x + y$ dan $z' - 2 = \frac{z+1}{z+2},$

oplosbaar met scheiding der variabelen. De algemene oplossing is

$$e^{3(y-x)}(3y + 6x + 5) = C.$$

§6. Exacte differentiaalvergelijkingen

Beschouw een stelsel krommen gegeven door

$$F(x,y) = C.$$

Elke waarde van C geeft een exemplaar van het stelsel. Langs zo'n exemplaar is

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0.$$

Deze formule bevat C niet meer. Hij is een D.V. van het type

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0,$$

waarbij echter wegens

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

de functies $P(x,y)$ en $Q(x,y)$ voldoen aan

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Definitie. Een exacte differentiaalvergelijking is een differentiaalvergelijking van het type

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

$$\text{waarvoor geldt } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Vb.6.1. $x + 2y + (2x + 1)y' = 0$

is een exacte D.V. omdat

$$\frac{\partial}{\partial y} (x + 2y) = 2 = \frac{\partial}{\partial x} (2x + 1).$$

Ter oplossing van dit voorbeeld zoeken wij $F(x,y)$ zodat

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x + 2y \text{ en } \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 1.$$

Aan de linker vergelijking voldoet $F = \frac{1}{2} x^2 + 2xy$; voor elke vaste waarde van y mag hierbij nog een constante worden opgeteld, die voor verschillende waarden van y verschillend mag zijn, d.w.z. die een functie van y mag zijn. De oplossing van de linker vergelijking is dus

$$F(x,y) = \frac{1}{2} x^2 + 2xy + \varphi(y),$$

waarin φ alleen van y en niet van x afhangt. Nu trachten wij bovendien aan de rechter vergelijking

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 1$$

te voldoen. Dit leidt tot

$$2x + \frac{d\varphi}{dy} = 2x + 1.$$

Wij constateren dat de term $2x$ wegvalt en dat

$$\frac{d\varphi}{dy} = 1, \text{ waaruit } \varphi = y - C.$$

De algemene oplossing van de D.V. is dus

$$\frac{1}{2}x^2 + 2xy + y = C.$$

In het algemene geval gaan wij op analoge wijze te werk. Bij de gegeven functies $P(x,y)$ en $Q(x,y)$ zoeken wij $F(x,y)$ zodat geldt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \text{ en } \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

Aan de linker vergelijking voldoet

$$F = \int P \, dx + \varphi(y).$$

Opdat bovendien wordt voldaan aan de rechter vergelijking moet gelden

$$\frac{d\varphi}{dy} = Q - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P \, dx \right).$$

Hieruit is $\varphi(y)$ te bepalen als het rechterlid alleen van y en niet van x afhangt. Dit is inderdaad het geval omdat

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ Q - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P \, dx \right) \right\} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\int P \, dx \right) \right\} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

dankzij de exactheid. De functie $\varphi(y)$ is dus door directe integratie te bepalen.

Opmerking. In de praktijk is het feit, dat in de D.V. voor φ geen x mag voorkomen, een controle op rekenfouten.

§7. Integrerende factor

Wanneer de D.V. van het type

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

niet exact is, kan bovenstaande methode niet worden toegepast. Soms is het dan echter mogelijk om een z.g. integrerende factor $\mu(x,y)$ te vinden, zodat de na vermenigvuldiging met μ verkregen D.V.

$$\mu P + \mu Q y' = 0$$

wel exact is. Dan moet voldaan zijn aan

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x},$$

$$P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mu.$$

In het algemeen is deze (partiële) D.V. voor $\mu(x,y)$ veel moeilijker oplosbaar dan de oorspronkelijke vergelijking. Wij hebben echter slechts één $\mu(x,y)$ nodig. In enkele gevallen is met enige handigheid wel in te zien dat een speciale functie μ voldoet, bijvoorbeeld een functie μ die alleen van x afhangt, of een μ die alleen van y afhangt, of een μ die alleen van $x+y$ afhangt.

Vb.7.1. $(1 - xy)dx + (xy - x^2)dy = 0.$

Deze vergelijking is niet exact. Vermenigvuldig met μ , dan is

$$\mu(1 - xy)dx + \mu(xy - x^2)dy = 0$$

exact wanneer is voldaan aan

$$\frac{\partial}{\partial y} [\mu(1 - xy)] = \frac{\partial}{\partial x} [\mu(xy - x^2)],$$

$$(1 - xy) \frac{\partial \mu}{\partial y} - (xy - x^2) \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu(y - x).$$

Probeer $\mu = \mu(x)$, dan moet

$$-x(y - x) \frac{d\mu}{dx} = \mu(y - x),$$

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{\mu}{x}.$$

Hieraan is voldaan door $\mu = \frac{1}{x}$. De D.V.

$$\left(\frac{1}{x} - y\right)dx + (y - x)dy = 0$$

is dus wel exact. Via

$$F = \int \left(\frac{1}{x} - y\right)dx + \varphi(y) = \log |x| - xy + \varphi(y),$$

en $-x + \varphi'(y) = \frac{\partial F}{\partial y} = y - x$

komen wij tot $\varphi'(y) = y$, waaruit $\varphi(y) = \frac{1}{2}y^2 - C$. De oplossing luidt dus

$$\log |x| - xy + \frac{1}{2}y^2 = C.$$

Vb.7.2. $2xy \, dx + (y - x^2) \, dy = 0.$

Vermenigvuldig met μ . De verkregen D.V. is exact als

$$\frac{\partial}{\partial y} [2\mu xy] = \frac{\partial}{\partial x} [\mu(y - x^2)],$$

$$2xy \frac{\partial \mu}{\partial y} - (y - x^2) \frac{\partial \mu}{\partial x} = -4\mu x.$$

Probeer $\mu = \mu(y)$, dan moet

$$y \frac{d\mu}{dy} = -2\mu.$$

Hieraan is voldaan door $\mu = \frac{1}{y^2}$. Dit leidt tot de oplossing

$$\frac{x^2}{y} + \log |y| = C.$$

Ook $y = 0$ is oplossing van de oorspronkelijke D.V.

§8. Substituties en kunstgrepen

Vb.8.1. $x(y' + 1) + \tan(x + y) = 0.$

Substitutie van $z = x + y$ leidt tot

$$xz' + \tan z = 0,$$

een D.V. die met scheiding der variabelen kan worden opgelost. Oplossing:

$$x \sin(x + y) = C.$$

Vb.8.2. $xy' - y = x^2 + y^2.$

Deel door x^2 , dan

$$\frac{xy' - y}{x^2} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \text{ dus } \left(\frac{y}{x}\right)' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Substitutie $y/x = z$ leidt tot de oplossing

$$y = x \tan(x + C).$$

Vb.8.3. $2(1 + x)yy' + y^2 + 2x - 3x^2 = 0.$

Substitutie $y^2 = z$ leidt tot de oplossing

$$y^2(1 + x) = x^3 - x^2 + C.$$

Vb.8.4. $(x^2 - y^4) \frac{dy}{dx} = 2xy.$

Het is voordelig niet $y = y(x)$, maar $x = x(y)$ te beschouwen. Als men in

$$x^2 - y^4 = 2xy \frac{dx}{dy}$$

substitueert $x^2 = z$, dan ontstaat de lineaire D.V.

$$z - y^4 = y \frac{dz}{dy},$$

die zich na deling door y^2 reduceert tot

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{z}{y} \right) = -y^2.$$

Dit leidt tot de oplossing

$$x^2 = -\frac{1}{3}y^4 + Cy$$

waaraan de bij de overgang van $y = y(x)$ op $x = x(y)$ verduisterde oplossing $y = 0$ moet worden toegevoegd.

Vb.8.5. $xy' + y + x^2 e^{xy} + 1 = 0.$

Stel $xy = z$, dan is

$$z' + x^2 e^z + 1 = 0.$$

Stel $e^z = t$ dan is $z' = t'/t$ en men krijgt

$$t' + t + x^2 t^2 = 0.$$

In deze D.V. van Bernoulli stellen wij $t = 1/w$, dan is

$$w' - w - x^2 = 0.$$

Aan $w' - w = 0$ voldoen ce^x . Probeer aan de inhomogene D.V. te voldoen door $w = c(x)e^x$, dan

$$c'(x) = x^2 e^{-x}, \quad c(x) = \int x^2 e^{-x} dx = e^{-x}(-x^2 - 2x - 2).$$

Dus $w = -x^2 - 2x - 2 + Ce^x$.

Daar $w = 1/t = e^{-z} = e^{-xy}$ is de algemene oplossing

$$e^{-xy} = -x^2 - 2x - 2 + Ce^x.$$

59. Impliciete differentiaalvergelijkingen

Moelijker dan de tot nu toe behandelde differentiaalvergelijking $y' = f(x,y)$ is de impliciete differentiaalvergelijking

$$F(x,y,y') = 0.$$

Zo bezit bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking van Clairaut

$$f(y') - xy' + y = 0$$

behalve het stelsel rechten

$$y = Cx - f(C)$$

nog een extra oplossing, de zogenaamde singuliere oplossing, die niet tot het stelsel behoort. Wij demonstreren het optreden van zulk een singuliere oplossing aan het volgend voorbeeld

Vb.9.1. $(y')^2 - xy' + y = 0.$

Na differentiatie krijgen wij

$$2y'y'' - xy'' - y' + y' = 0,$$

$$y''(2y' - x) = 0.$$

Hieraan kan op twee manieren worden voldaan:

$$y'' = 0 \text{ levert } y' = C \text{ en } y = Cx + D;$$

substitutie in de oorspronkelijke vergelijking geeft $D = -C^2$, waarmee als

oplossing het stelsel rechten

$$y = Cx - C^2$$

is verkregen. De andere factor levert

$$2y' - x = 0 \text{ dus } y = \frac{1}{4}x^2 + E;$$

substitutie in de oorspronkelijke vergelijking geeft $E = 0$, waarmee als oplossing de parabool

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

is verkregen. Wij merken op dat elke rechte uit het stelsel raakt aan de parabool, omdat de raaklijn in het punt (x_0, y_0) van de parabool als vergelijking heeft

$$\frac{1}{2}(y + y_0) = \frac{1}{2}xx_0,$$

$$y = \frac{1}{2}x_0x - \frac{1}{2}x_0^2, \text{ dus } y = Cx - C^2$$

als $C = \frac{1}{2}x_0$ wordt gesteld. Men drukt het geconstateerde feit ook als volgt uit: de rechten omhullen de parabool. Wij concluderen uit dit voorbeeld:

Impliciete differentiaalvergelijkingen hebben, behalve een stelsel oplossingen, soms nog een singuliere oplossing, waarvan de grafiek de omhullende is van het stelsel oplossingskrommen.

Ook met het richtingsveld is deze conclusie verklaarbaar. Wij demonstreren dit weer met Vb.9.1. Uit

$$(y')^2 - xy' + y = 0$$

wordt door expliciete oplossing verkregen

$$y' = \frac{1}{2}[x \pm \sqrt{x^2 - 4y}].$$

Voor de punten met $y > \frac{1}{4}x^2$, dus binnen de parabool, is er geen richting gegeven. Voor de punten van de parabool $y = \frac{1}{4}x^2$ is één richting gegeven, namelijk $y' = \frac{1}{2}x$. Voor de punten buiten de parabool zijn door de D.V. twee richtingen gegeven.

Vb.9.2. $y^2(y')^2 + y^2 = 1.$

Scheiding der variabelen geeft

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\pm y}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$x - C = \pm \sqrt{1-y^2}.$$

Als oplossingen vinden wij het stelsel cirkels

$$(x - C)^2 + y^2 = 1.$$

~~De omhullenden van dit stelsel, de rechten~~

$$y = 1 \text{ en } y = -1$$

zijn echter ook oplossingen van de oorspronkelijke D.V.

Opmerking. Niet iedere singuliere oplossing van een D.V. is omhullende van de algemene oplossing.

Opmerking. Door het richtingsveld gesuggereerd zou men kunnen vermoeden dat voor de oplossingen van een expliciete differentiaalvergelijking

$$y' = f(x,y)$$

geldt, dat er door elk punt (a,b) van het (x,y) vlak precies één en niet meer dan één oplossingskromme gaat. Voorbeeld 9.2 maant reeds tot voorzichtigheid.

Vb.9.3. $y' = y^{2/3}$

heeft als oplossingen $y = 0$ en $y = \frac{1}{27} (x - C)^3$. Voor de punten van de x -as is er dus geen eenduidige oplossing.

In de volgende existentie- en eenduidigheidsstelling wordt een voorwaarde aangegeven waaronder een oplossing bestaat (existentie) en ten hoogste één oplossing bestaat (eenduidigheid). De stelling wordt hier niet bewezen.

Definitie. $f(x,y)$ voldoet in (a,b) aan de Lipschitz-voorwaarde als er een constant getal M is zodat in een omgeving van (a,b) geldt:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq M|y_1 - y_2|.$$

Stelling. Als $f(x,y)$ continu is in een omgeving van (a,b) en in (a,b) voldoet aan de Lipschitz-voorwaarde, dan is er precies één continue functie $y(x)$ die voldoet aan

$$y' = f(x,y) \text{ en } y(a) = b.$$

§10. Differentiaalvergelijkingen van hogere orde

Een gewone differentiaalvergelijking van de orde n

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}) = 0$$

is een vraag naar de functies $y(x)$ die voldoen aan de betrekking voor alle x uit een zeker interval. In het college Wiskunde 20 is vermeld de

Stelling. De oplossingen van een lineaire homogene D.V. van de orde n

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-2}(x)y'' + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

vormen een vectorruimte van de dimensie n .

Voorts zijn daar behandeld oplossingsmethoden voor lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten. Wij behandelen hier nog de differentiaalvergelijking van het type Euler:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + ax \frac{dy}{dx} + by = 0 \text{ met } a, b \text{ constant.}$$

Wij voeren een nieuwe onafhankelijk veranderlijke t in door de substitutie

$$t = \log |x| \quad (x \neq 0).$$

Dan is

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \text{ en}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

De differentiaalvergelijking gaat over in

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (a - 1) \frac{dy}{dt} + by = 0,$$

die wordt opgelost door $y = e^{\lambda t}$ te proberen. λ moet voldoen aan

$$\lambda^2 + (a - 1)\lambda + b = 0.$$

Als λ_1 en λ_2 de wortels zijn van deze vergelijking, dan zijn voor $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y_1 = e^{\lambda_1 t} = |x|^{\lambda_1} \text{ en } y_2 = e^{\lambda_2 t} = |x|^{\lambda_2}$$

twee onafhankelijke oplossingen van de differentiaalvergelijking. In het geval $\lambda_1 = \lambda_2$ zijn

$$y_1 = |x|^{\lambda_1} \text{ en } y_2 = t e^{\lambda_1 t} = |x|^{\lambda_1} \log |x|$$

twee onafhankelijke oplossingen. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking van Euler is dus

$$y(x) = \alpha |x|^{\lambda_1} + \beta |x|^{\lambda_2} \text{ voor } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ en}$$

$$y(x) = |x|^{\lambda_1} (\alpha + \beta \log |x|) \text{ voor } \lambda_1 = \lambda_2.$$

Er bestaat een verband tussen differentiaalvergelijkingen van hogere orde en stelsels differentiaalvergelijkingen van de eerste orde, die in de volgende paragraaf aan de orde zullen komen.

Vb.10.1. Gevraagd alle functies $z(x)$ en $y(x)$ die voor alle x voldoen aan de vergelijkingen

$$\begin{cases} z + z' - 2y' = 0 \\ z - z' - 2y = 0. \end{cases}$$

Uit de tweede vergelijking volgt $y = \frac{1}{2}(z - z')$. Substitueren wij dit in de eerste vergelijking dan is

$$z'' + z = 0,$$

welke vergelijking als oplossingen heeft

$$z = \alpha \cos x + \beta \sin x.$$

Substitutie levert

$$y = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)\cos x + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin x.$$

In dit voorbeeld zien wij hoe een stelsel van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde leidt tot een differentiaalvergelijking van hogere orde. Omgekeerd kan een D.V. van hogere orde worden opgevat als een stelsel D.V. van de eerste orde:

$$\text{Vb.10.2. } yy'' + x^2(y')^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Stel $y' = z$ dan komt er het stelsel

$$\begin{cases} yz' + x^2z^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y' - z = 0. \end{cases}$$

Algemeen geldt dat de D.V. van orde n

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

door de substituties

$$y = y_1, y' = y_2, y'' = y_3, \dots, y^{(n-1)} = y_n$$

kan worden opgevat als het volgende stelsel van n differentiaalvergelijkingen van de eerste orde:

$$y_1' = y_2, y_2' = y_3, \dots, y_{n-1}' = y_n, F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_n') = 0.$$

Dit is één van de motiveringen voor onze interesse in stelsels differentiaalvergelijkingen van de eerste orde.

Tenslotte geven wij zonder bewijs de volgende stellingen over de existentie en de eenduidigheid van de oplossingen van differentiaalvergelijkingen. De voorwaarden waaronder deze stellingen gelden gelijken op de aan het eind van §9 genoemde Lipschitz-voorwaarde.

Stelling Als f continu is en voldoet aan een Lipschitz-voorwaarde, dan bestaat er bij elk stel getallen $(a, b_1, b_2, \dots, b_n)$ precies één functie $y=y(x)$ waarvoor geldt

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \text{ en}$$

$$y(a) = b_1, y'(a) = b_2, \dots, y^{(n-1)}(a) = b_n.$$

Stelling Als f_1, f_2, \dots, f_n continu zijn en voldoen aan een Lipschitz-voorwaarde, dan bestaat er bij elk stel getallen $(a, b_1, b_2, \dots, b_n)$ precies één stelsel functies $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ waarvoor geldt

$$\begin{array}{ll} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) & y_1(a) = b_1 \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) & y_2(a) = b_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \text{en} \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) & y_n(a) = b_n. \end{array}$$

Stelling Als \underline{f} continu is en voldoet aan een Lipschitz-voorwaarde, dan bestaat er bij elk paar (a, b) precies één $\underline{y}(x)$ waarvoor geldt

$$\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \quad \text{en} \quad \underline{y}(a) = \underline{b}.$$

Uit de tweede stelling volgt de eerste stelling op grond van het in deze paragraaf behandelde. De derde stelling is kortschrift voor de tweede, met

$$\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n), \quad \underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \underline{y}' = (y_1', y_2', \dots, y_n').$$

§11. Lineaire stelsels D.V. met constante coëfficiënten.

Vb.11.1. Gevraagd functies $x_1(t)$ en $x_2(t)$ zodat voor alle t geldt

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 5x_1 - 6x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 4x_2 \end{cases}, \text{ m.a.w. } \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Probeer $x_1 = a_1 e^{\lambda t}$
 $x_2 = a_2 e^{\lambda t}$, m.a.w. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$,

dan $\lambda a_1 e^{\lambda t} = (5a_1 - 6a_2)e^{\lambda t}$
 $\lambda a_2 e^{\lambda t} = (3a_1 - 4a_2)e^{\lambda t}$, m.a.w. $\lambda e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$

dus $(5 - \lambda)a_1 - 6a_2 = 0$
 $3a_1 + (-4 - \lambda)a_2 = 0.$

Dit stelsel vergelijkingen in a_1 en a_2 heeft een van $(0,0)$ verschillende oplossing als

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -6 \\ 3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ dus als } \lambda = 2 \text{ en als } \lambda = -1.$$

Voor $\lambda = 2$ levert $3a_1 - 6a_2 = 0: (a_1, a_2) = (2, 1);$

voor $\lambda = -1$ levert $6a_1 - 6a_2 = 0: (a_1, a_2) = (1, 1).$

De oplossing van het stelsel is

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha e^{2t} + \beta e^{-t} \\ x_2 = \alpha e^{2t} + \beta e^{-t} \end{cases}, \text{ m.a.w. } \underline{x} = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ook in het algemene geval gebruiken wij deze methode. Ter oplossing van het stelsel van n lineaire homogene differentiaalvergelijkingen van de eerste orde met n onbekende functies met constante koëfficiënten

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{array} \right\} \text{ m.a.w. } \frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x},$$

waarin de van t onafhankelijke A de matrix van een lineaire afbeelding in R_n voorstelt, proberen wij oplossingen van de soort

$$\underline{x} = e^{\lambda t} \underline{a} \text{ met } \underline{a} \neq \underline{0}$$

te vinden. Na substitutie blijkt dat aan

$$\lambda \underline{a} = A\underline{a}$$

moet worden voldaan. Wij zoeken dus de eigenwaarden λ en de daarbij behorende eigenvectoren van de matrix A . Wanneer deze matrix n verschillende eigenwaarden heeft dan vindt men n onafhankelijke oplossingen van het stelsel. Wanneer de matrix meervoudige eigenwaarden bezit, dan kan men met ad hoc methoden toch wel tot n verschillende oplossingen komen. De algemene oplossing

wordt dan verkregen door toepassing van de volgende stelling, waarvan de geldigheid zich niet beperkt tot lineaire stelsels met constante coëfficiënten.

Stelling De oplossingen van het stelsel van n lineaire homogene differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}$$

vormen een vectorruimte. [Deze vectorruimte heeft dimensie n].

Bewijs: Zij $\mathbf{u}(t)$ en $\mathbf{v}(t)$ oplossing, dus zij

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = A(t)\mathbf{u}(t) \text{ en } \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = A(t)\mathbf{v}(t) .$$

Op grond van de eigenschappen van lineaire afbeeldingen en van het differentieren volgt hieruit voor constante α en β dat

$$\frac{d}{dt} (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = A(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) .$$

Hieruit volgt dat ook $\alpha\mathbf{u}(t) + \beta\mathbf{v}(t)$ oplossing is. Dit betekent dat de oplossingen een vectorruimte vormen. Wij zullen hier niet bewijzen dat elke oplossing te schrijven is als lineaire combinatie van n onafhankelijke oplossingen.

Vb. 11.2.
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

Probeer $\mathbf{x} = e^{\lambda t} \mathbf{a}$, dan volgt $\lambda \mathbf{a} = A\mathbf{a}$. Los op de eigenwaardenvergelijking

$$\det(A - \lambda I) = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} .$$

Deze vergelijking heeft wortels $\lambda = 2$ en $\lambda = -1$ (dubbel).

Voor $\lambda = 2$ heeft $\left. \begin{aligned} -2a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 - 2a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 - 2a_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$ als oplossing $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$.

Voor $\lambda = -1$ heeft $\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$ twee onafhankelijke oplossingen, bv. $(1, -1, 0)$ en $(1, 0, -1)$.

Wij hebben gevonden de drie oplossingen

$$e^{2t}(1,1,1), e^{-t}(1,-1,0), e^{-t}(1,0,-1).$$

De algemene oplossing van het stelsel is dus

$$\underline{x} = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vb. 11.3.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Probeer $\underline{x} = e^{\lambda t} \underline{a}$. De eigenwaardenvergelijking

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & 4 \\ -4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

heeft de dubbele wortel $\lambda = 2$. Voor deze λ volgt uit

$$\left. \begin{array}{l} 4a_1 + 4a_2 = 0 \\ -4a_1 - 4a_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ dat } \underline{a} = (1, -1).$$

Wij vinden dus slechts één oplossing $e^{2t}(1,-1)$. Om nog een oplossing te krijgen proberen wij

$$\underline{x} = e^{\lambda t} (\underline{a}t + \underline{b}) \text{ met } \lambda = 2, \underline{a} = (1, -1)$$

en nader te bepalen \underline{b} . Substitutie levert

$$e^{\lambda t} (\lambda \underline{a}t + \lambda \underline{b} + \underline{a}) = e^{\lambda t} A(\underline{a}t + \underline{b}).$$

Opdat hieraan is voldaan voor alle t , moet

$$\lambda \underline{a} = A\underline{a} \text{ en } \lambda \underline{b} + \underline{a} = A\underline{b}.$$

De laatste vergelijking leidt tot

$$\underline{a} = (A - \lambda I)\underline{b}.$$

In ons geval:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2 & 4 \\ -4 & -2 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} .$$

Wij kiezen $\underline{b} = (0, \frac{1}{4})$. De algemene oplossing is dus

$$\underline{x} = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right] .$$

Vb. 11.4.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Probeer $\underline{x} = e^{\lambda t} \underline{a}$; de eigenwaardenvergelijking

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

heeft complexe wortels $\lambda = 2 \pm 3i$.

$$\lambda = 2 + 3i: (3 - 2 - 3i)a_1 - 5a_2 = 0 \text{ geeft } \underline{a} = (5, 1 - 3i),$$

$$\lambda = 2 - 3i: (3 - 2 + 3i)a_1 - 5a_2 = 0 \text{ geeft } \underline{a} = (5, 1 + 3i).$$

Zo vinden wij de complexe oplossingen

$$\underline{y} = e^{2t + 3it} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 - 3i \end{pmatrix} \text{ en } \underline{z} = e^{2t - 3it} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 + 3i \end{pmatrix} .$$

Deze oplossingen zijn toegevoegd complex. Ook oplossing zijn

$$\frac{1}{2}(\underline{y} + \underline{z}) = e^{2t} \begin{pmatrix} 5 \cos 3t \\ \cos 3t + 3 \sin 3t \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2i}(\underline{y} - \underline{z}) = e^{2t} \begin{pmatrix} 5 \sin 3t \\ \sin 3t - 3 \cos 3t \end{pmatrix} .$$

De algemene oplossing is dus

$$\underline{x} = e^{2t} \begin{pmatrix} 5\alpha \cos 3t + 5\beta \sin 3t \\ (3\alpha + \beta)\sin 3t + (\alpha - 3\beta)\cos 3t \end{pmatrix} .$$

Kiezen wij nu α en β reëel, dan krijgen wij alle reële oplossingen.

Ter oplossing van een lineair inhomogeen stelsel D.V.

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A(t)\underline{x} + \underline{b}(t) \quad (1)$$

bepalen wij eerst de algemene oplossing van het bijbehorende lineaire homogene stelsel

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A(t)\underline{x}. \quad (2)$$

Vervolgens zoeken wij één oplossing van (1). De algemene oplossing van (1) volgt dan door toepassing van de volgende stelling.

Stelling Als $\underline{i}(t)$ een oplossing is van (1) en als $\underline{h}(t)$ de algemene oplossing is van (2), dan is $\underline{i} + \underline{h}$ de algemene oplossing van (1).

Bewijs. Als $\underline{i}(t)$ voldoet aan (1) en $\underline{h}(t)$ voldoet aan (2), dan

$$\frac{d\underline{i}(t)}{dt} = A(t)\underline{i}(t) + \underline{b}(t), \quad \frac{d\underline{h}(t)}{dt} = A(t)\underline{h}(t).$$

Na optelling volgt, op grond van de lineariteitseigenschappen van afgeleiden en lineaire afbeeldingen, dat

$$\frac{d}{dt} [\underline{i}(t) + \underline{h}(t)] = A(t)[\underline{i}(t) + \underline{h}(t)] + \underline{b}(t),$$

dus dat $\underline{i}(t) + \underline{h}(t)$ voldoet aan (1).

Anderzijds, zij $\underline{i}(t)$ oplossing van (1) en zij $\underline{y}(t)$ een willekeurige andere oplossing van (1). Dan

$$\frac{d\underline{y}}{dt} = A\underline{y} + \underline{b}, \quad \frac{d\underline{i}}{dt} = A\underline{i} + \underline{b}, \quad \frac{d}{dt} (\underline{y} - \underline{i}) = A(\underline{y} - \underline{i}).$$

Dus $\underline{y} - \underline{i}$ is een oplossing, zeg \underline{h} , van (2):

$$\underline{y} - \underline{i} = \underline{h}, \quad \underline{y}(t) = \underline{i}(t) + \underline{h}(t).$$

Elke oplossing van (1) is te schrijven als $\underline{i}(t) +$ een oplossing van (2).

Vb. 11.5.
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - e^t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Ter bepaling van een oplossing proberen wij

$$\underline{x} = e^{t\underline{b}}, \text{ dan } e^t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - e^t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = 5b_1 - 6b_2 - 4$$

$$b_2 = 3b_1 - 4b_2 - 3,$$

waaruit $\underline{b} = (1,0)$. Met Vb.11.1. volgt de algemene oplossing van het inhomogene stelsel

$$\underline{x} = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Opmerking. Wanneer in de inhomogene term dezelfde e-macht voorkomt als in de algemene oplossing van het homogene stelsel, dan is een meer geraffineerde substitutie nodig.

§12. Laplace-transformatie

Zij $f(t)$ zodanig, dat voor alle voldoende grote p

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

bestaat. De aldus gedefinieerde functie $F(p)$ heet de Laplace-getransformeerde van $f(t)$

Notatie: $F = \mathcal{L}(f)$ of $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Voorbeelden 12.1.

$f(t)$	$F(p)$	geldig voor
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	$p > \alpha$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	$p > 0$
$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$p > \alpha$

$f(t)$	$F(p)$	geldig voor
$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$p > 0$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	$p > 0$
$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$	$p > \alpha$
$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$	$p > \alpha$

Bewijs: Zie Wiskunde 20, hoofdstuk 10 en de hierna volgende Fig. 2.

Voor de overgang van $f(t)$ naar $F(p)$, de zogenaamde Laplace-transformatie gelden de volgende eigenschappen:

Eig. 1 \mathcal{L} is een lineaire afbeelding: voor α en β constant geldt

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Bewijs: Uit de definitie.

Eig. 2 Als $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, dan $\mathcal{L}\{e^{\alpha t} f(t)\} = F(p - \alpha)$.

Bewijs:
$$\int_0^{\infty} e^{\alpha t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-\alpha)t} dt.$$

Eig. 3 $\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + p \mathcal{L}\{f(t)\}$ als $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-pt} = 0$

Bewijs:
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = [f(t) e^{-pt}]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \\ &= -f(0) + p \mathcal{L}\{f(t)\}. \end{aligned}$$

Eig. 4 $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = -f^{(n-1)}(0) - p f^{(n-2)}(0) - \dots - p^{n-1} f(0) + p^n \mathcal{L}\{f(t)\}$,

als $\lim_{t \rightarrow \infty} f^{(k)}(t) e^{-pt} = 0$, $k=0, 1, \dots, n-1$.

Eig. 5 Als $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$ voor alle voldoende grote p en als $f(t)$ en $g(t)$ continu zijn, dan is $f(t) = g(t)$ voor alle $t \geq 0$.

Bewijs: Met complexe functietheorie.

Definitie: De convolutie van $f(t)$ en $g(t)$ is de volgende functie van t :

$$f \circledast g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Opmerking. $f \circledast g = g \circledast f$ omdat (noem $t-\tau = \sigma$)

$$\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau = - \int_t^0 g(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma.$$

Eig. 6 $\mathcal{L}\{f \circledast g\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}.$

$$\begin{aligned} \text{Bewijs: } \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} &= \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau \int_0^{\infty} g(\sigma)e^{-p\sigma}d\sigma = \\ &= \iiint f(\tau)g(\sigma)e^{-p(\tau+\sigma)}d\tau d\sigma \end{aligned}$$

over het eerste kwadrant. Noem $\sigma = t-\tau$, dan

$$= \int_0^{\infty} e^{-pt}dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \mathcal{L}\{f \circledast g\}.$$

Vb.12.2. $\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}$. Gevraagd $h(t)$ als $\alpha \neq \beta$.

Oplossing met eig. 6:

$$\frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)} = \mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} \cdot \mathcal{L}\{e^{\beta t}\} = \mathcal{L}\{e^{\alpha t} \circledast e^{\beta t}\}$$

en

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \circledast e^{\beta t} &= \int_0^t e^{\alpha\tau}e^{\beta(t-\tau)}d\tau = [e^{\beta t} \cdot \frac{1}{\alpha-\beta} e^{(\alpha-\beta)\tau}]_0^t = \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta} (e^{\alpha t} - e^{\beta t}). \end{aligned}$$

Oplossing met eig. 1:

$$\frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta} \left[\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p-\beta} \right] = \mathcal{L}\left\{ \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha-\beta} \right\}.$$

Vb.12.3.

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{p}{(p-\alpha)^2 + \beta^2}. \text{ Gevraagd } h(t).$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{(p-\alpha)^2 + \beta^2} &= \frac{p-\alpha + \frac{\alpha}{\beta} \beta}{(p-\alpha)^2 + \beta^2} = \mathcal{L}\{e^{\alpha t} \cos \beta t\} + \frac{\alpha}{\beta} \mathcal{L}\{e^{\alpha t} \sin \beta t\} = \\ &= \mathcal{L}\{e^{\alpha t} (\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t)\} \text{ voor } \beta \neq 0. \end{aligned}$$

In het bovenstaande zijn gegeven een beknopt "woordenboek" en enige "taalregels" voor de Laplace-transformatie. Wij kunnen de Laplace-transformatie gebruiken om een probleem voor een functie te "vertalen" in een probleem voor de Laplace-getransformeerde $F = \mathcal{L}\{f\}$. Soms is dit laatste probleem eenvoudiger op te lossen dan het oorspronkelijke probleem; dan rest nog het "terugvertalen".

Deze methode kan met vrucht worden gebruikt bij het oplossen van een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten van orde n , in het bijzonder wanneer de oplossing wordt gevraagd die aan gegeven beginvoorwaarden voldoet. Wanneer $y(a)$, $y'(a)$, ..., $y^{(n-1)}(a)$ zijn gegeven, dan leidt de Laplace-transformatie naar de ene verlangde oplossing soms op meer directe wijze dan de vroegere methode, waarbij eerst de algemene oplossing moest worden bepaald.

Vb.12.4. $y'' - 4y' + 5y = 2e^t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Zij $y(t)$ de gevraagde oplossing en zij $\mathcal{L}\{y\} = Y$, dan volgt met eig. 3 en 4:

$$\mathcal{L}\{y'\} = pY - 2 \text{ en } \mathcal{L}\{y''\} = p^2Y - 2p.$$

Voorts volgt uit Vb.12.1.

$$\mathcal{L}\{2e^t\} = \frac{2}{p-1}.$$

Het probleem voor $y(t)$ wordt dus getransformeerd in het volgende probleem voor $Y(p)$:

$$(p^2 - 4p + 5)Y = 2p - 8 + \frac{2}{p-1}.$$

Deze vergelijking kan eenvoudig worden opgelost:

$$Y = \frac{2p^2 - 10p + 10}{(p^2 - 4p + 5)(p-1)}.$$

Omdat het rechterlid niet in de rechterkolom van Vb.12.1. voorkomt, splitsen wij ten bate van het terugvertalen als volgt in breuken:

$$Y = \frac{1}{p-1} + \frac{p-2}{(p-2)^2 + 1} - \frac{3}{(p-2)^2 + 1}.$$

Hieruit volgt de gevraagde oplossing

$$y(t) = e^t + e^{2t} \cos t - 3e^{2t} \sin t.$$

Vb.12.5. $y'' + b^2 y = t^2 + t + 2/b^2$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Zij $y(t)$ de gevraagde oplossing en zij $\mathcal{L}\{y\} = Y$. De Laplace-transformatie leidt tot

$$(p^2 + b^2) Y = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{b^2 p}.$$

Breuksplitsing leidt weer tot de oplossing $y(t)$. Wij kiezen een andere weg, via de convolutie en Eig. 6:

$$Y = \frac{1}{b} \cdot \frac{b}{p^2 + b^2} \cdot \left(\frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{b^2 p} \right),$$

$$y(t) = \frac{1}{b} (\sin bt) \otimes \left(t^2 + t + \frac{2}{b^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{b} \int_0^t \left(\tau^2 + \tau + \frac{2}{b^2} \right) \sin b(t-\tau) d\tau.$$

Deze integraal is elementair uit te rekenen:

$$y(t) = \frac{t^2}{b^2} + \frac{t}{b^2} - \frac{\sin bt}{b^3}.$$

Vb.12.6. $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - e^t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$.

Zij $\underline{x}(t)$ de gevraagde oplossing. Noem

$$\mathcal{L}\{x_1\} = X_1 \quad \text{en} \quad \mathcal{L}\{x_2\} = X_2.$$

De Laplace-transformatie van het probleem luidt:

$$p \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{p-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$(p-5)X_1 + 6X_2 = -4/(p-1)$$

$$-3X_1 + (p+4)X_2 = -3/(p-1),$$

$$X_1 = \frac{2-4p}{(p-1)(p+1)(p-2)} = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p-2}$$

$$X_2 = \frac{-3}{(p+1)(p-2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-2},$$

dus

$$x_1 = e^t + e^{-t} - 2e^{2t} \quad \text{en} \quad x_2 = e^{-t} - e^{2t}.$$

Vb. 12.7.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x_1(0) = a, \\ x_2(0) = b. \end{matrix}$$

Noem $\mathcal{L}\{\underline{x}\} = \underline{X}$, dan volgt

$$\begin{pmatrix} p-6 & -4 \\ 4 & p+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Dit heeft als oplossing

$$X_1 = \frac{(p+2)a + 4b}{(p-2)^2} = \frac{a}{p-2} + \frac{4(a+b)}{(p-2)^2}$$

$$X_2 = \frac{(p-6)b - 4a}{(p-2)^2} = \frac{b}{p-2} - \frac{4(a+b)}{(p-2)^2},$$

zodat de gevraagde functies zijn

$$x_1 = ae^{2t} + 4(a+b)te^{2t}$$

$$x_2 = be^{2t} - 4(a+b)te^{2t}.$$

§13. Machtreekssubstitutie

Met de in het voorgaande behandelde methoden is slechts een betrekkelijk klein aantal typen van differentiaalvergelijkingen oplosbaar, zeker indien men met "oplosbaar" bedoelt dat de oplossingen zijn te schrijven als poly-

nomen, e-machten, sinussen, etc., en inversen en combinaties van deze elementaire functies. Een grotere klasse van differentiaalvergelijkingen wordt oplosbaar, wanneer ook wordt toegelaten dat een oplossing wordt gegeven als som van een convergente machtreeks.

In een aantal gevallen kan men oplossingen in de vorm van machtreeksen verkrijgen door in de differentiaalvergelijking voor de onbekende functie een machtreeks met nader te bepalen koëfficiënten te substitueren. De eis wordt dan dat de koëfficiënten van gelijke machten van de onafhankelijk variabele in linker- en rechterlid gelijk zijn.

Vb.13.1. $y' - xy = 0$.

Probeer $y = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$,

dan $y' = u_1 + 2u_2x + 3u_3x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nu_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)u_{n+1}x^n$.

Substitutie levert

$$u_1 + 2u_2x + 3u_3x^2 + 4u_4x^3 + \dots = x(u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \dots).$$

Gelijkstelling van de koëfficiënten van

$$x^0, x^1, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}, \dots$$

levert

$$u_1 = 0, 2u_2 = u_0, 3u_3 = u_1, 4u_4 = u_2, \dots, nu_n = u_{n-2}, \dots$$

Hieruit volgt

$$0 = u_1 = u_3 = u_5 = \dots$$

en

$$u_2 = \frac{1}{2}u_0, u_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot u_0, u_6 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot u_0, \dots,$$

$$u_{2n} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} u_0 = \frac{u_0}{2^n n!}.$$

De oplossing luidt dus

$$y(x) = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} .$$

Deze reeks is convergent voor alle x.

Opmerking. In dit voorbeeld kunnen wij zelfs de reeks sommeren, d.w.z. de som uitdrukken in een elementaire functie, namelijk

$$y(x) = u_0 e^{\frac{1}{2}x^2} .$$

Inderdaad is de D.V. door scheiding van variabelen direct oplosbaar.

Vb.13.2. $y' = x + y^2, y(0) = 1.$

Machtrees substitutie levert

$$u_1 + 2u_2x + 3u_3x^2 + \dots = x + (u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots)(u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots).$$

Door gelijkstelling van coëfficiënten van gelijke machten van x verkrijgt men:

koëf. x^0 : $u_1 = u_0^2.$

koëf. x^1 : $2u_2 = 1 + u_0u_1 + u_1u_0$

koëf. x^2 : $3u_3 = u_0u_2 + u_1u_1 + u_2u_0$

koëf. x^3 : $4u_4 = u_0u_3 + u_1u_2 + u_2u_1 + u_3u_0.$

Teneinde een overzichtelijker geheel te krijgen gebruiken wij het sommatieteken.

Substitutie van $y = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ geeft

$$\begin{aligned} y^2 &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k \right] \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} u_{\ell} x^{\ell} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} u_k u_{\ell} x^{k+\ell} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n u_k u_{n-k} \right] x^n, \end{aligned}$$

waarbij $k+\ell = n$ gezet is. De D.V. wordt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)u_{n+1} x^n = x + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n u_k u_{n-k} \right] x^n .$$

Gelijkstelling van koëfficiënten geeft

$$u_1 = u_0^2$$

$$2u_2 = 1 + 2u_0u_1$$

$$(n+1)u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k} \quad \text{voor } n \geq 2.$$

Uit de beginvoorwaarde $y(0) = 1$ volgt $u_0 = 1$. De overige koëfficiënten zijn uit de zojuist afgeleide relaties successievelijk uit te rekenen, omdat u_{n+1} uitgedrukt is in u_0, u_1, \dots, u_n . Daarmee is het vraagstuk in principe opgelost, wanneer wij ons er nog van overtuigen dat de verkregen machtreeks althans voor zekere $x \neq 0$ convergent is. Met dat doel constateren wij eerst

$$u_0 = u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{3}{2}, \quad u_3 = \frac{1}{3} (u_0u_2 + u_1^2 + u_2u_0) < \frac{3}{2},$$

en claimen wij vervolgens dat voor $n \geq 0$

$$u_n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n+1}{3}}.$$

Bewijs (volledige inductie):

$$(n+1)u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{k+1}{3}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n-k+1}{3}} = (n+1) \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n+2}{3}}.$$

De termen van de oplossing

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

zijn dus voor $x > 0$ kleiner dan de termen van de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n+1}{3}} x^n.$$

Voor de laatste reeks volgt uit het criterium van Cauchy de convergentie voor

$$|x| < \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

De gevonden oplossing is dus eveneens voor tenminste deze waarden van x convergent.

Algemeen beschouwen wij thans een lineaire differentiaalvergelijking van hogere orde

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \quad y(0) = p, \quad y'(0) = q,$$

waarvan de koëfficiënten ontwikkelbaar zijn als machtreeksen in x met een positieve convergentiestraal

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.$$

De bewering is dat deze D.V. oplosbaar is door machtreekssubstitutie.

Stel

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n, \quad \text{dan } y' = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) u_{n+1} x^n, \quad \text{en}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) u_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n.$$

Substitutie levert

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) u_{n+2} x^n + \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right] \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) u_{\ell+1} x^\ell \right] + \\ + \left[\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right] \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} u_\ell x^\ell \right] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n. \end{aligned}$$

Bedenkend dat de beide producten kunnen worden geschreven als

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^n a_{n-\ell} (\ell+1) u_{\ell+1} \right) x^n \quad \text{en} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^n b_{n-\ell} u_\ell \right) x^n,$$

krijgen wij door gelijkstelling van koëfficiënten van gelijke machten van x

$$(n+2)(n+1) u_{n+2} = f_n - \sum_{\ell=0}^n a_{n-\ell} (\ell+1) u_{\ell+1} - \sum_{\ell=0}^n b_{n-\ell} u_\ell$$

voor alle gehele $n \geq 0$. Hierdoor wordt u_{n+2} uitgedrukt in $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}$. De beginvoorwaarden geven

$$u_0 = p, \quad u_1 = q,$$

en alle andere koëfficiënten zijn dus in p en q uit te drukken. Hiermee is in principe de oplossingsmethode behandeld. Zonder bewijs delen wij mee dat de gevonden oplossing $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ inderdaad een positieve convergentiestraal heeft.

Vb.13.3. $y'' + \frac{2}{1-x^2} y = 0$

De machtrekssubstitutie leidt via

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)u_{n+2}x^n + 2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \right] \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} u_{\ell}x^{\ell} \right] = 0$$

tot resultaat. Het is handiger om in plaats van de gegeven differentiaalvergelijking te beschouwen

$$(1 - x^2)y'' + 2y = 0.$$

Machtrekssubstitutie in deze vergelijking geeft

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)u_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)u_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = 0.$$

Hieruit volgt

$$2u_2 + 2u_0 = 0, \quad 3 \cdot 2 \cdot u_3 + 2u_1 = 0 \text{ en, voor } n \geq 2:$$

$$(n+2)u_{n+2} = (n-2)u_n.$$

Het is zinvol om even en oneven indices apart te bekijken.

Voor $n = 2m$: $u_2 = -u_0, \quad 4u_4 = 0, \quad u_6 = 0, \dots$

en er blijft : $u_0(1 - x^2).$

Voor $n = 2m-1$: $u_3 = -\frac{1}{3}u_1$ en, voor $m \geq 2$: $(2m+1)u_{2m+1} = (2m-3)u_{2m-1}.$

Uit

$$\begin{aligned} u_{2m+1} &= \frac{2m-3}{2m+1} u_{2(m-1)+1} = \frac{2m-3}{2m+1} \cdot \frac{2m-5}{2m-1} u_{2(m-2)+1} = \dots = \\ &= \frac{(2m-3)(2m-5)(2m-7) \dots 3 \cdot 1}{(2m+1)(2m-1)(2m-3) \dots 7 \cdot 5} u_3 = \frac{3}{4m^2-1} \left(-\frac{1}{3} u_1\right) = \frac{-u_1}{4m^2-1} \end{aligned}$$

volgt voor de oneven termen

$$- u_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{4m^2-1}.$$

De algemene oplossing is dus

$$y = u_0(1 - x^2) - u_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{4m^2-1};$$

de machtreeks is convergent voor $|x| < 1$.

Opmerking. Het gevolgde procédé van machtreekssubstitutie kan ook worden uitgevoerd met machtreeksen in $(x-a)$, a constant, dus met reeksen van de vorm

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n (x - a)^n.$$

§14. Uitgebreide machtreekssubstitutie

Vb.14.1. $2xy' - y = 0$.

Substitutie van $y = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ leidt tot

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n u_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = 0,$$

waaruit volgt

$$(2n-1)u_n = 0, \text{ dus } u_n = 0 \text{ voor alle } n \geq 0.$$

Machtreekssubstitutie levert dus alleen de nuloplossing. Met scheiding van variabelen is eenvoudig in te zien dat de algemene oplossing luidt

$$y = C\sqrt{|x|}.$$

Deze oplossing is inderdaad niet in een machtreeks naar machten van x te ontwikkelen. Het is niet verbazingwekkend, dat onze methode faalt, omdat in de differentiaalvergelijking

$$y' - \frac{1}{2x} y = 0$$

de koëfficiënt van y niet ontwikkelbaar is als machtreeks in x .

Opmerking. Substitutie van een machtreeks in $(x-a)$ met $a \neq 0$ leidt wel tot het gestelde doel.

De voor toepassingen in natuurkunde en techniek belangrijke differentiaalvergelijkingen zijn vaak van het type waarin de gewone machtreekssubstitutie faalt. Wij bespreken een gewijzigde methode die bruikbaar is voor D.V. van de vorm

$$x^2 y'' + xa(x)y' + b(x)y = 0, \text{ met}$$

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Substitueer, met $u_0 \neq 0$,

$$y = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n, \text{ dan}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)u_n x^{n+\lambda} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+\lambda)u_\ell x^{\ell+\lambda} \right) + \\ + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} u_\ell x^{\ell+\lambda} \right) = 0. \end{aligned}$$

Nadat weer $k+\ell = n$ gezet is, volgt voor de koëfficiënten van $x^{\lambda+n}$ voor $n \geq 0$:

$$(n+\lambda)(n+\lambda-1)u_n + \sum_{\ell=0}^n a_{n-\ell} (\ell+\lambda)u_\ell + \sum_{\ell=0}^n b_{n-\ell} u_\ell = 0.$$

Voor $n = 0$ staat hier de z.g. indiciaalvergelijking

$$\lambda^2 + (a_0 - 1)\lambda + b_0 = 0,$$

waarvan wij de wortels noemen λ_1 en λ_2 . Voor alle $n \geq 1$ herleiden wij tot

$$[(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda)a_0 + b_0]u_n = - \sum_{\ell=0}^{n-1} [(\ell+\lambda)a_{n-\ell} + b_{n-\ell}]u_\ell,$$

$$(n+\lambda-\lambda_1)(n+\lambda-\lambda_2)u_n = - \sum_{\ell=0}^{n-1} [(\ell+\lambda)a_{n-\ell} + b_{n-\ell}]u_\ell.$$

Nadat voor λ één der wortels uit de indiciaalvergelijking is gekozen, kan hieruit successievelijk u_1, u_2, u_3, \dots worden bepaald, mits

$$(n+\lambda-\lambda_1)(n+\lambda-\lambda_2) \neq 0.$$

Als $\lambda_1 - \lambda_2 \neq$ geheel getal, dan is aan deze voorwaarde steeds voldaan. Wij vinden dan twee oplossingen van de vorm

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{n+\lambda_1} \text{ en } y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{n+\lambda_2}.$$

Als $\lambda_1 - \lambda_2 =$ geheel getal ≥ 0 , dan is aan de voorwaarde steeds voldaan voor $\lambda = \lambda_1$, maar niet voor $\lambda = \lambda_2$. Wij vinden dan in het algemeen slechts één oplossing van de vorm

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{n+\lambda_1}.$$

Zonder bewijs delen wij mee, dat er in dit geval een tweede oplossing te vinden is van de vorm

$$y_2(x) = y_1(x) \log x + \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^{n+\lambda_2}$$

(vergelijk de D.V. van Euler in §10 voor $\lambda_1 = \lambda_2$).

Vb.14.2. De differentiaalvergelijking van Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad p \geq 0 \text{ const.}$$

Probeer met nader te kiezen λ en u_n en $u_0 \neq 0$

$$y = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n,$$

dan volgt na substitutie van

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) u_n x^{\lambda+n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) u_n x^{\lambda+n-2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1) u_n x^{\lambda+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n) u_n x^{\lambda+n} + \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{\lambda+n+2} - p^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{\lambda+n} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(\lambda+n)^2 - p^2] u_n x^{\lambda+n} + \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{\lambda+n+2} = 0.$$

Gelijkstelling der coëfficiënten van x^λ , van $x^{\lambda+1}$ en, voor $n \geq 2$ van $x^{\lambda+n}$ levert

$$(\lambda^2 - p^2)u_0 = 0,$$

$$[(\lambda+1)^2 - p^2]u_1 = 0,$$

$$[(\lambda+n)^2 - p^2]u_n + u_{n-2} = 0.$$

De indiciaalvergelijking geeft $\lambda_1 = p$ en $\lambda_2 = -p$.

Als $\lambda = p$, dan volgt uit de overige vergelijkingen

$$u_1 = u_3 = u_5 = \dots = 0$$

en voor de even indices

$$[(p + 2n)^2 - p^2]u_{2n} + u_{2n-2} = 0,$$

$$u_{2n} = -\frac{u_{2(n-1)}}{4n(n+p)} = \dots = (-1)^n \frac{u_0}{4^n n! (n+p)(n+p-1) \dots (2+p)(1+p)}.$$

Dit geeft de oplossing $\alpha J_p(x)$, waarin α constant en

$$J_p(x) = c_p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+p)(n+p-1) \dots (2+p)(1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p},$$

genaamd de Besselfunctie van de eerste soort van orde p.

Als $\lambda = -p$, en $\lambda_1 - \lambda_2 = 2p \neq$ geheel getal, dan volgt, op dezelfde manier als voor $\lambda = p$: $u_1 = u_3 = u_5 = \dots = 0$ en wij vinden een oplossing die ontstaat uit de eerste door overal p door $-p$ te vervangen:

$$J_{-p}(x) = c_{-p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n-p)(n-p-1) \dots (2-p)(1-p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

Opmerking. c_p en c_{-p} zijn hier niet nader aan te duiden constanten.

Als $\lambda = -p$, en $\lambda_1 - \lambda_2 = 2p =$ geheel getal ≥ 0 , dan zijn er twee mogelijkheden die wij zonder bewijs medelen.

a) p geheel. In dit geval is er een tweede oplossing van de vorm

$$Y_p(x) = J_p(x) \log x + \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^{2n-p}$$

te vinden, genaamd de Besselfunctie van de tweede soort van orde p .

b) $p = \ell + \frac{1}{2}$ ($\ell=0,1,2,\dots$)

In dit geval is de tweede oplossing $J_{-\ell-\frac{1}{2}}(x)$.

Wij concluderen: als p niet geheel is, dan zijn de oplossingen van de D.V. van Bessel

$$\alpha J_p(x) + \beta J_{-p}(x).$$

Opmerking.

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

De grafiek van Besselfuncties is voor grote x oscillerend. Dit constateert men uit de differentiaalvergelijking zelf:

$$y'' + \frac{y'}{x} + y - \frac{p^2}{x^2} y = 0.$$

Direct te schetsen is de grafiek van

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} x^{2n+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Vb.14.3. De gemodificeerde differentiaalvergelijking van Bessel

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0.$$

Als oplossingen treden op de gemodificeerde Besselfuncties

$$I_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! (n+p)(n+p-1) \dots (1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

en, voor p geheel,

$$K_p(x) = I_p(x) \log x + x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^{2n}.$$

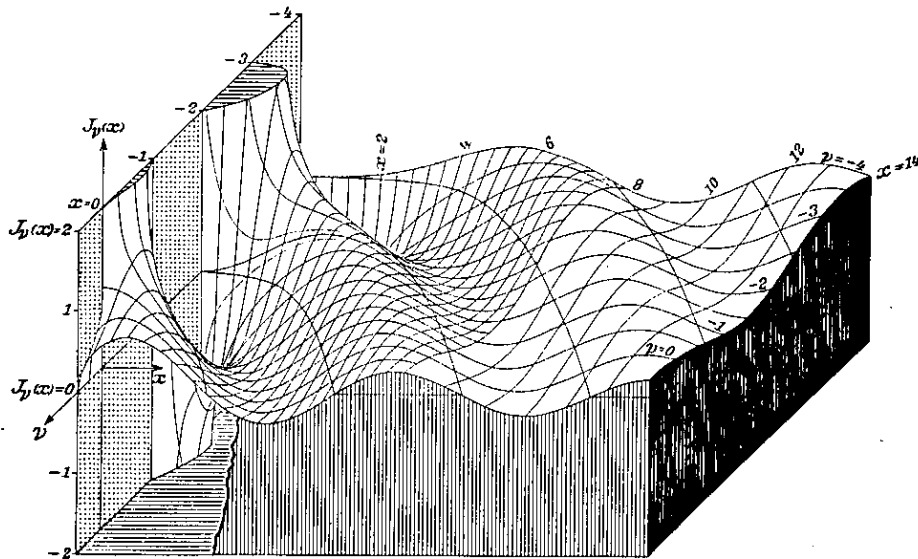
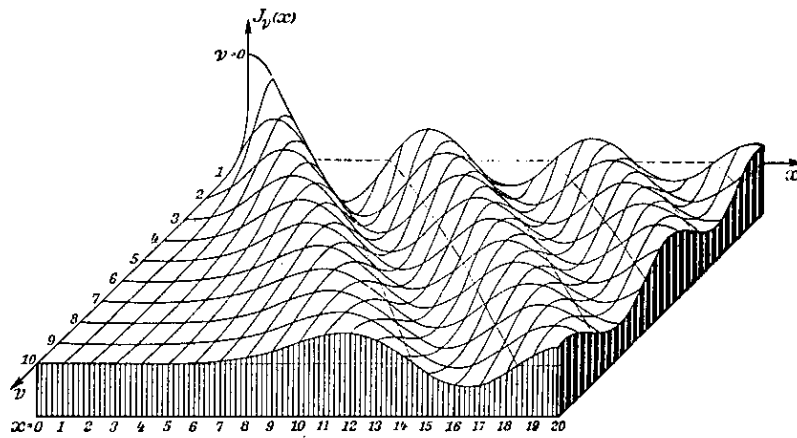


Fig. 77 und 78 Die Besselsche Funktion $J_\nu(x)$ der beiden reellen Veränderlichen x und ν
 Fig. 77 and 78 The Bessel function $J_\nu(x)$ of the two real variables x and ν
 ($-4 < \nu < 10$)

Uit: Jahnke - Emde - Lösch, Tafeln höherer Funktionen, Teubner.

§15. Iteratiemethode

Gevraagd wordt een benadering van de oplossing $y(x)$ van

$$y' = f(x,y), y(a) = b.$$

Substitueer $y(x)$ en integreer tussen de grenzen a en x , dan krijgt men

$$y(x) = b + \int_a^x f[t, y(t)] dt,$$

een integraalvergelijking die gelijkwaardig is met het oorspronkelijke probleem. Wij trachten deze integraalvergelijking op te lossen door in het rechterlid een "benadering" $y_1(t)$ in te zetten in de hoop dan een "betere benadering"

$$y_2(x) = b + \int_a^x f[t, y_1(t)] dt$$

te verkrijgen. Dit proces wordt een aantal keren herhaald. Gaat men bijvoorbeeld uit van de constante functie $y_1(x) = b$, dan worden successievelijk $y_2(x), y_3(x), \dots$ bepaald door

$$y_{n+1}(x) = b + \int_a^x f[t, y_n(t)] dt, n \geq 1.$$

De vraag is nu, of de rij functies $y_1(x), y_2(x), \dots$ convergeert naar een limietfunctie, die oplossing is van het gestelde probleem. Op grond van

$$y_n(x) = y_1(x) + [y_2(x) - y_1(x)] + [y_3(x) - y_2(x)] + \dots \\ \dots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)]$$

komt dit neer op de vraag of de reeks

$$\sum_{i=1}^{\infty} [y_{i+1}(x) - y_i(x)]$$

convergeert. Hieróver bestaan algemene uitspraken. In concrete gevallen is ook zonder theorie soms wel iets te zeggen.

Vb. 15.1. $y' = x + y^2, y(0) = 0.$

Begin met $y_1(x) = 0$, dan

$$y_2(x) = 0 + \int_0^x [t + y_1^2(t)] dt = \int_0^x t dt = \frac{1}{2} x^2,$$

$$y_3(x) = \int_0^x (t + \frac{1}{4} t^4) dt = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{20} x^5,$$

$$y_4(x) = \int_0^x (t + \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{20} t^7 + \frac{1}{400} t^{10}) dt = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{20} x^5 + \\ + \frac{1}{160} x^8 + \frac{1}{4400} x^{11}, \text{ etc.}$$

Over de fout is het volgende te zeggen. Zij $y(x)$ de oplossing, dan geldt voor $x > 0$

$$y' = x + y^2 > x, \text{ dus } y > \frac{1}{2} x^2,$$

$$y' = x + y^2 > x + \frac{1}{4} x^4, \text{ dus } y > \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{20} x^5, \text{ etc.}$$

Voorts geldt, zolang $y(x) < 1$ blijft,

$$y' = x + y^2 < x + 1, \text{ dus } y < x + \frac{1}{2} x^2,$$

$$y' = x + y^2 < x + x^2 + x^3 + \frac{1}{4} x^4, \text{ dus } y < \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{20} x^5 \\ \text{etc.}$$

Over de convergentie kan het volgende worden gezegd. Uit de iteratieformule

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x [t + y_n^2(t)] dt$$

volgt dat

$$y_{n+1}(x) - y_n(x) = \int_0^x [y_n^2(t) - y_{n-1}^2(t)] dt = \\ = \int_0^x [y_n(t) + y_{n-1}(t)][y_n(t) - y_{n-1}(t)] dt.$$

Zolang maar geldt $|y_n(x)| \leq 1$, volgt hieruit voor $x > 0$

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq 2 \int_0^x |y_n(t) - y_{n-1}(t)| dt.$$

Wegens

$$|y_2(t) - y_1(t)| = \frac{1}{2} t^2$$

is dus

$$|y_3 - y_2| \leq 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3, \quad |y_4 - y_3| \leq 2^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} x^4, \quad \text{etc.},$$

$$|y_{n+1} - y_n| \leq \frac{1}{4} \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Wegens convergentie van $\Sigma (2x)^{n+1} / (n+1)!$ is ook de reeks $\Sigma (y_{n+1}(x) - y_n(x))$, dus de rij $y_n(x)$, convergent.

Dezelfde methode kan worden toegepast op stelsels D.V. van de eerste orde. Dit is ook van belang voor D.V. van hogere orde.

$$y' = f(x, y, z), \quad z' = g(x, y, z), \quad y(a) = b, \quad z(a) = c$$

is gelijkwaardig met

$$y(x) = b + \int_a^x f[t, y(t), z(t)] dt, \quad z(x) = c + \int_a^x g[t, y(t), z(t)] dt$$

Begin met $y_1(x) = b$ en $z_1(x) = c$ en definieer voor $n \geq 1$ de functies $y_{n+1}(x)$ en $z_{n+1}(x)$ door

$$y_{n+1}(x) = b + \int_a^x f[t, y_n(t), z_n(t)] dt, \quad z_{n+1}(x) = c + \int_a^x g[t, y_n(t), z_n(t)] dt$$

Vb.15.2. $y'' = x + y^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

Noem $z = y'$ dan krijgen wij het stelsel

$$y' = z, \quad z' = x + y^2, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1,$$

dat gelijkwaardig is met

$$y(x) = \int_0^x z(t) dt, \quad z(x) = 1 + \int_0^x [t + y^2(t)] dt.$$

De iteratie verloopt nu als volgt

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 0 & y_2(x) &= x & y_3(x) &= x + \frac{1}{6} x^3 \\ z_1(x) &= 1, & z_2(x) &= 1 + \frac{1}{2} x^2, & z_3(x) &= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3, \\ y_4(x) &= x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{12} x^4 \\ z_4(x) &= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{15} x^5 + \frac{1}{252} x^7, \text{ etc.} \end{aligned}$$

§16. Numerieke methode

De oplossing door het punt $P_0 = (x_0, y_0)$ van de D.V.

$$y' = f(x, y)$$

heeft in P_0 een raaklijn met richtingscoëfficiënt $f(x_0, y_0)$, dus met vergelijking

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Door het punt $P_1 = (x_1, y_1)$ van deze rechte, waarvoor geldt

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0),$$

gaat een oplossing van de D.V. waarvan de raaklijn in P_1 de vergelijking

$$y - y_1 = f(x_1, y_1)(x - x_1)$$

heeft. Door het punt $P_2 = (x_2, y_2)$ van deze rechte, waarvoor geldt

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$$

gaat een oplossing waarvan de raaklijn in P_2 is

$$y - y_2 = f(x_2, y_2)(x - x_2).$$

Zo verder gaand bereiken wij het punt $P_n = (x_n, y_n)$ met

$$y_n - y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}), \text{ waaruit}$$

$$\begin{aligned} y_n &= (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + (y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) + y_0 \\ &= y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + \dots \\ &\quad \dots + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

De gebroken lijn, die in $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ de richting van het richtingsveld heeft, wordt nu als benadering van de oplossing door P_0 genomen. De vraag is in hoeverre deze gebroken lijn van de werkelijke oplossing afwijkt en over welke middelen wij beschikken om de benadering te verbeteren.

Wanneer de stapgrootte constant wordt genomen,

$$x_k - x_{k-1} = h,$$

dan vereenvoudigen de formules zich tot

$$y_n - y_{n-1} = h f(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

$$y_n = y_0 + h \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}, y_{k-1}).$$

Vb.16.1. $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$. Gevraagd in 3 dec. nauwkeurig $y(1)$.

Wij verdelen het interval $0 \leq x \leq 1$ eerst in 2 gelijke stukken ($h = \frac{1}{2}$), en vervolgens in 4 gelijke stukken ($h = \frac{1}{4}$). Achtereenvolgens berekenen en tabelleren wij

$$x_k, y_k, f(x_k, y_k), h f(x_k, y_k),$$

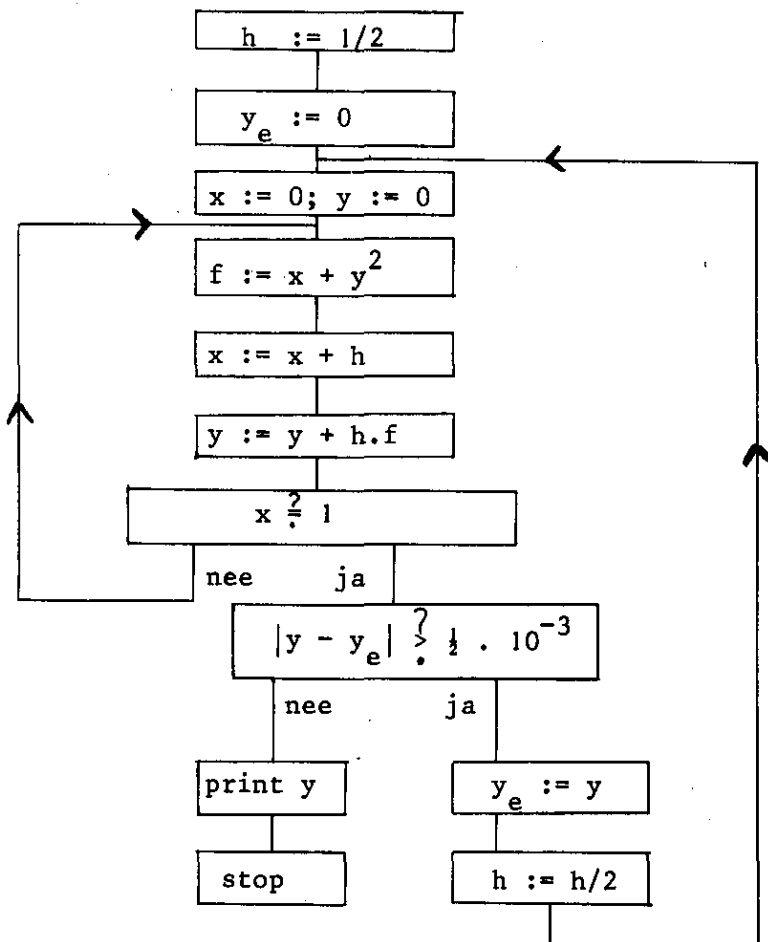
waarbij

$$y_k = y_{k-1} + h f(x_{k-1}, y_{k-1})$$

wordt gevonden door optelling van het resultaat in de derde en vijfde kolom van de vorige regel.

k	x_k	y_k	$f(x_k, y_k)$	$hf(x_k, y_k)$
0	0	0	0	0
1	0.5	0	0.5	0.25
2	1	<u>0.25</u>	---	---
0	0	0	0	0
1	0.25	0	0.25	0.0625
2	0.5	0.0625	0.5039	0.1260
3	0.75	0.1885	0.7855	0.1966
4	1	<u>0.3851</u>	---	---

Vervolgens maken wij $h = \frac{1}{8}$, dan $\frac{1}{16}$, etc., net zo lang totdat de uitkomsten minder dan $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$ van elkaar verschillen. Dit rekenproces wordt nu eerst geanalyseerd met een blokschema en vervolgens beschreven met ALGOL.



```
begin   real h, x, y, ye, f; h := 1/2; ye := 0;
        one: x := 0; y := 0;
        two: f := x + y ↑ 2; x := x + h; y := y + h * f;
           if x < 1 then goto two;
           if abs (y - ye) > . 0005
           then begin ye := y; h := h/2; goto one end;
           print (y)

end
```

Opmerking 1. Het is de vraag of dit rekenproces ooit ophoudt, m.a.w. of ooit

$$|y - y_e| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$$

wordt.

Opmerking 2. Het is de vraag hoe dicht de berekende waarde bij $y(1)$ ligt.

Als y_k de berekende waarde na de k^{e} halvering aanduidt, dan volgt uit $|y_{k+1} - y_k| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$ nog niet dat ook $|y(1) - y_k| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

Opmerking 3. De geschetste methode is een der meest eenvoudige numerieke methoden. In de praktijk maakt men gebruik van meer geavanceerde methoden die ontwikkeld zijn in de numerieke analyse.

HOOFDSTUK II

Lineaire Algebra

§1. Lineaire afbeeldingen en matrices

Zij V een vectorruimte. Wij beschouwen lineaire afbeeldingen van V in zichzelf, aangeduid door geschreven hoofdletters:

$$A: V \rightarrow V, \quad B: V \rightarrow V.$$

Twee lineaire afbeeldingen heten gelijk, $A = B$, als $A\underline{x} = B\underline{x}$ voor alle $\underline{x} \in V$. De som $A+B$, het scalaire veelvoud αA , het product AB , de identiteit I , de nulafbeelding O , worden gedefinieerd door respectievelijk

$$\begin{aligned} (A+B)\underline{x} &= A\underline{x} + B\underline{x}, & (\alpha A)\underline{x} &= \alpha(A\underline{x}), \\ (AB)\underline{x} &= A(B\underline{x}), & I\underline{x} &= \underline{x}, & O\underline{x} &= \underline{0}, \end{aligned}$$

voor alle $\underline{x} \in V$.

Stelling 1 De lineaire afbeeldingen van V in zichzelf vormen een vectorruimte. De vermenigvuldiging van lineaire afbeeldingen voldoet aan:

$$\begin{aligned} \alpha(AB) &= (\alpha A)B, & A(BC) &= (AB)C, & (A+B)C &= AC+BC, \\ A(B+C) &= AB+AC. \end{aligned}$$

Bewijs. Wij bewijzen slechts de associatieve eigenschap. Per definitie geldt

$$\begin{aligned} [A(BC)]\underline{x} &= A[(BC)\underline{x}] = A[B(C\underline{x})], \\ [(AB)C]\underline{x} &= (AB)(C\underline{x}) = A[B(C\underline{x})]. \end{aligned}$$

Omdat voor elke $\underline{x} \in V$ de rechterleden gelijk zijn, geldt per definitie $A(BC) = (AB)C$. De andere eigenschappen worden op analoge wijze bewezen.

Opmerking: De commutatieve eigenschap geldt in het algemeen niet voor de vermenigvuldiging van lineaire afbeeldingen.

Vb.1.1. Zij $V = R_2$, A de rotatie over $\frac{1}{2}\pi$, B de projectie op $\underline{e}_1 = (1,0)$. Zij $\underline{e}_2 = (0,1)$ dan is $AB\underline{e}_1 = A(B\underline{e}_1) = A\underline{e}_1 = \underline{e}_2$, $BA\underline{e}_1 = B(A\underline{e}_1) = B\underline{e}_2 = \underline{0}$.

Vb.1.2. Zij $V = R_3$, A de rotatie over $\frac{1}{2}\pi$ om de x -as, B de rotatie over $\frac{1}{2}\pi$ om de y -as. Dan is $A^4 = B^4 = I$, $AB \neq BA$, $A^2B^2 = B^2A^2$.

Vb.1.3. Zij V de vectorruimte van alle polynomen $x(t)$. De differentiatie A en het met t vermenigvuldigen B zijn lineaire afbeeldingen:

$$Ax(t) = x'(t), \quad Bx(t) = tx(t).$$

Dan is $\mathcal{A}\mathcal{B}-\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{I}$ omdat voor elke $x(t)$ geldt

$$[tx(t)]' - tx'(t) = x(t).$$

Wanneer V eindig dimensionaal is en de gehele V beeldruimte van \mathcal{A} is, dan bestaat de inverse \mathcal{A}^{-1} van \mathcal{A} , gedefinieerd door

$$\underline{y} = \mathcal{A}^{-1} \underline{x} \text{ als } \underline{x} = \mathcal{A} \underline{y},$$

en met de eigenschappen

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I} \quad , \quad (\mathcal{A}\mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}.$$

Een basis van een vectorruimte V van dimensie n is een stelsel van n onafhankelijke vectoren waarvan elke vector uit V een lineaire combinatie is. Zij $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ basis van V en zij voor $\underline{x} \in V$

$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_n \underline{e}_n = \sum_{j=1}^n x_j \underline{e}_j .$$

De $n \times 1$ matrix, die bestaat uit de componenten x_j heet de kolom van \underline{x} t.o.v. de basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ en wordt als volgt genoteerd:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Bij gegeven basis wordt \underline{x} omgekeerd bepaald door X .

Stelling 2 De kolom van een lineaire combinatie van vectoren is de overeenkomstige lineaire combinatie van de kolommen van deze vectoren.

Bewijs. Zij $\underline{z} = \alpha \underline{x} + \beta \underline{y}$ en zij X, Y, Z de kolom van $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ t.o.v. de basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$. Bewering: $Z = \alpha X + \beta Y$.

Inderdaad, voor

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^n x_j \underline{e}_j, \quad \underline{y} = \sum_{j=1}^n y_j \underline{e}_j \quad \text{is} \quad \underline{z} = \sum_{j=1}^n (\alpha x_j + \beta y_j) \underline{e}_j ,$$

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha X + \beta Y.$$

Het bewijs voor het geval van een lineaire combinatie van meer dan twee vectoren gaat net zo.

De lineaire afbeelding $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ heeft ten opzichte van de basis e_1, \dots, e_n de $n \times n$ matrix A , waarvan de kolommen zijn de kolommen t.o.v. e_1, \dots, e_n van de beelden $\mathcal{A}e_j$ van de basisvectoren ($j=1, \dots, n$). Als

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i, \text{ dan } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bij gegeven basis wordt \mathcal{A} omgekeerd bepaald door A .

Stelling 3 Zij X de kolom van \underline{x} en A de matrix van \mathcal{A} t.o.v. de basis e_1, \dots, e_n van V . Dan is AX de kolom van $\mathcal{A}\underline{x}$ t.o.v. e_1, \dots, e_n .

Bewijs. $\mathcal{A}\underline{x} = \mathcal{A}(\sum_{j=1}^n x_j e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \mathcal{A}e_j$ heeft wegens stelling 2 ten gevolge dat

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \text{kolom} \\ \text{van} \\ \mathcal{A}\underline{x} \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = AX \end{aligned}$$

Vb.1.4. Zij $\mathcal{A}: R_3 \rightarrow R_3$. Noem $\mathcal{A}\underline{x} = \underline{y}$, dan $Y = AX$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{dus} \quad \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

Vb.1.5. Zij $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$ de projectie op de x-as. T.o.v. de basis $\underline{e}_1 = (1,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1)$ is

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Vb.1.6. Zij $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$ de spiegeling aan $y = x$. T.o.v. de basis $\underline{e}_1 = (1,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1)$ is

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De volgende stelling vat een aantal eenvoudig te bewijzen en reeds vroeger bewezen zaken samen.

Stelling 4 Als \mathcal{A} heeft de matrix A en \mathcal{B} heeft de matrix B t.o.v. de basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ van V, dan hebben $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\alpha \mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{B}$, \mathcal{A}^{-1} t.o.v. die basis de matrix $A + B$, αA , AB , A^{-1} . Voor matrices gelden eigenschappen overeenkomstig de in stelling 1 genoemde.

Vb.1.7.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vb.1.8.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vb.1.9.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad A^4 = 0, \quad \text{de nulmatrix.}$$

§2. Basisovergang

Beschouw twee bases van een vectorruimte V van dimensie n

$$\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \quad \text{en} \quad \underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n.$$

Elke \underline{e}'_j is lineaire combinatie van $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$, zeg

$$\underline{e}'_j = s_{1j}\underline{e}_1 + \dots + s_{nj}\underline{e}_n = \sum_{k=1}^n s_{kj}\underline{e}_k, \quad \text{voor } j = 1, \dots, n.$$

De matrix

$$S = (s_{kj}) = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1j} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & \dots & s_{2j} & \dots & s_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ s_{n1} & \dots & s_{nj} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

heet de overgangsmatrix bij de overgang van de basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ op de basis $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$. Merk op dat de j^{e} kolom van S bestaat uit de componenten van de vector \underline{e}'_j t.o.v. de basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$. Wij zullen weldra bewijzen, dat voor de overgangsmatrix T bij de overgang van de basis $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ op de basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ geldt:

$$T = S^{-1}.$$

Vb.2.1. $V = \mathbb{R}_2$, $\underline{e}_1 = (1,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1)$, $\underline{e}'_1 = (4,3)$, $\underline{e}'_2 = (5,4)$.

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vb.2.2. $V = \mathbb{R}_2$, $\underline{e}_1 = (1,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1)$, $\underline{e}'_1 = (1,0)$, $\underline{e}'_2 = (\beta,1)$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vb.2.3. $V = R_2$, $\underline{e}_1 = (1,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1)$, \underline{e}'_j is de over hoek φ gedraaide \underline{e}_j , $j = 1,2$.

$$S = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ en } S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Vb.2.4. $V = R_3$, $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$,
 $\underline{e}'_1 = (1,1,1)$, $\underline{e}'_2 = (1,0,1)$, $\underline{e}'_3 = (1,1,0)$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vb.2.5. $V = R_2$, $\underline{e}_1 = (2,1)$, $\underline{e}_2 = (-1,1)$, $\underline{e}'_1 = (1,5)$, $\underline{e}'_2 = (3,0)$.

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ en } S^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vb.2.6. $V = R_3$, $\underline{e}_1 = (1,a,b)$, $\underline{e}_2 = (0,1,c)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$,
 $\underline{e}'_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}'_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}'_3 = (0,0,1)$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{pmatrix} \text{ en } S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Wij onderzoeken het verband tussen de kolom X van een vector \underline{x} t.o.v. de basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ en de kolom X' van dezelfde \underline{x} t.o.v. de basis $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$.

Stelling 1 Zij S de overgangsmatrix bij de overgang van de basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ op de basis $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$. Voor de kolom X t.o.v. $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ en de kolom X' t.o.v. $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ van elke vector \underline{x} uit V geldt

$$X = SX' \quad \text{en} \quad X' = S^{-1}X.$$

Bewijs. Voor $\underline{x} = \sum_{j=1}^n x'_j \underline{e}'_j$ volgt

$$\begin{aligned}
 X &= x'_1 \begin{pmatrix} s_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x'_n \begin{pmatrix} s_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}x'_1 + \dots + s_{1n}x'_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ s_{n1}x'_1 + \dots + s_{nn}x'_n \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{pmatrix} = SX'.
 \end{aligned}$$

Dit bewijst de eerste bewering. Zij T de overgangsmatrix bij de overgang van de basis e'_1, \dots, e'_n op de basis e_1, \dots, e_n . Dan geldt op grond van het zojuist bewezene $X' = TX$. Dus

$$X = SX' = STX$$

voor alle x . Substitueer voor x de vector e_j , $j = 1, \dots, n$, dan

$$j \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = ST \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = j^e \text{ kolom van } ST.$$

Hieruit volgt $ST = I$ dus $T = S^{-1}$.

Wij passen deze stelling toe op de voorbeelden:

Vb.2.1. $x = 4x' + 5y'$ $x' = 4x - 5y$
 $y = 3x' + 4y'$, $y' = -3x + 4y$.

Vb.2.2. $x = x' + \beta y'$ $x' = x - \beta y$
 $y = \quad y'$, $y' = \quad y$.

Vb.2.3. $x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$ $x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi$
 $y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$, $y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$.

Vb.2.4. $x = x' + y' + z'$ $x' = -x + y + z$
 $y = x' + z'$ $y' = x - y$.
 $z = x' + y'$, $z' = x - z$

Een onmiddellijk gevolg van stelling 1 is

Stelling 2 De overgangsmatrix S bij overgang van de basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ op de basis $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ is regulier. De overgangsmatrix bij overgang van $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ op $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ is S^{-1} .

Stelling 3 Een lineaire afbeelding \mathcal{A} heeft matrix A t.o.v. de basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ en matrix A' t.o.v. de basis $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$. De overgangsmatrix bij overgang van $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ op $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ zij S . Dan geldt

$$A' = S^{-1} AS.$$

Bewijs. $\mathcal{A} \underline{x}$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ de kolom AX en t.o.v. $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ de kolom $A'X'$. Volgens stelling 1 geldt

$$A'X' = S^{-1}AX \quad \text{en} \quad X' = S^{-1}X.$$

Voor elke X is dus $A'S^{-1}X = S^{-1}AX$. In het bijzonder geldt dit voor de kolommen der basisvectoren \underline{e}_j , dus

$$A'S^{-1} = S^{-1}A, \text{ waaruit } A' = S^{-1}AS.$$

Vb.2.7. $\underline{e}_1 = (1,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1)$, $\underline{e}'_1 = (4,3)$, $\underline{e}'_2 = (5,4)$,
 $\mathcal{A}(1,0) = (0,-1)$, $\mathcal{A}(0,1) = (-1,1)$. Dan is

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{en}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} .$$

Controle: $\mathcal{A} \underline{e}'_1 = \mathcal{A}(4,3) = 4\mathcal{A}(1,0) + 3\mathcal{A}(0,1) = 4(0,-1) + 3(-1,1) =$
 $= (-3,-1) = -7(4,3) + 5(5,4).$

Vb.2.8. $\underline{e}_1 = (1,0), \underline{e}_2 = (0,1), \underline{e}'_1 = (1,1), \underline{e}'_2 = (1,-2).$

Gegeven

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ gevraagd } A. \text{ Uit } A' = S^{-1}AS \text{ volgt}$$

$$A = SA'S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

§3. Eigenwaarden en eigenvectoren

Een vector $\underline{v} \neq \underline{0}$ heet eigenvector van een lineaire afbeelding \mathcal{A} , als er een getal λ bestaat zodat $\mathcal{A}\underline{v} = \lambda\underline{v}$. Het getal λ heet een eigenwaarde van \mathcal{A} behorende bij de eigenvector \underline{v} .

Vb.3.1. $\mathcal{A}: \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$ is de projectie op de x-as.

$\underline{e}_1 = (1,0)$ is eigenvector met $\lambda = 1$, omdat $\mathcal{A}\underline{e}_1 = \underline{e}_1$.

$\underline{e}_2 = (0,1)$ is eigenvector met $\lambda = 0$, omdat $\mathcal{A}\underline{e}_2 = \underline{0} = 0\underline{e}_2$.

Vb.3.2. $\mathcal{A}: \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$ is de spiegeling t.o.v. de rechte $y = x$.

$\underline{v} = (1,1)$ is eigenvector met $\lambda = 1$, omdat $\mathcal{A}\underline{v} = \underline{v}$.

$\underline{w} = (-1,1)$ is eigenvector met $\lambda = -1$, omdat $\mathcal{A}\underline{w} = -\underline{w}$.

Stelling 1 Zij $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ eigenvectoren van een lineaire afbeelding

$\mathcal{A}: \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$ en zij $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ de bijbehorende eigenwaarden.

Als deze eigenwaarden twee aan twee verschillend zijn, dan zijn

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ onafhankelijk.

Bewijs. Stel dat $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ afhankelijk zijn. Kies hieruit een maximaal onafhankelijk deelstelsel, zeg $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$, dan is $k < m$ en

$$\underline{v}_m = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{v}_i.$$

Substitueer dit in $\mathcal{A}\underline{v}_m = \lambda_m \underline{v}_m$, dan

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathcal{A}\underline{v}_i = \lambda_m \sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{v}_i,$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^k \lambda_m \alpha_i \underline{v}_i,$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i (\lambda_i - \lambda_m) \underline{v}_i = \underline{0}.$$

Omdat $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ onafhankelijk zijn en omdat $\lambda_i \neq \lambda_m$, volgt dat $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_m) = 0$ dus $\alpha_i = 0$ voor $i = 1, \dots, k$. Dus volgt $\underline{v}_m = \underline{0}$. Dit is een contradictie omdat \underline{v}_m eigenvector is. De conclusie is dat $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ onafhankelijk zijn.

De eigenwaarden en de eigenvectoren van een lineaire afbeelding \mathcal{A} worden als volgt berekend. Zij \underline{v} een eigenvector en zij λ de bijbehorende eigenwaarde, dan is $\mathcal{A}\underline{v} = \lambda \underline{v}$. Neem de kolom t.o.v. een basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$, dan

$$AV = \lambda V, \text{ m.a.w. } \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j = \lambda v_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Deze n vergelijkingen met n onbekenden hebben een oplossing $(v_1, \dots, v_n) \neq (0, \dots, 0)$ wanneer λ voldoet aan

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

De wortels van deze karakteristieke vergelijking zijn de eigenwaarden van \mathcal{A} .

Stelling 2 De karakteristieke vergelijking is onafhankelijk van de basiskeuze.

Bewijs. Ga van de basis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ over op een andere basis $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ met overgangsmatrix S . De karakteristieke vergelijking t.o.v. deze nieuwe basis $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ luidt

$$\det(A' - \lambda I) = 0,$$

dus, na substitutie van $A' = S^{-1}AS$,

$$\det(S^{-1}AS - \lambda I) = 0.$$

Wegens

$$S^{-1}AS - \lambda I = S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S = S^{-1}(A - \lambda I)S$$

en

$$\det S^{-1} \cdot \det S = \det S^{-1} S = \det I = 1$$

geldt voor het linkerlid

$$\det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det S^{-1}(A - \lambda I)S = \det S^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det S = \det(A - \lambda I).$$

De vergelijkingen $\det(A - \lambda I) = 0$ en $\det(A' - \lambda I) = 0$ zijn dus dezelfde.

Vb.3.3. In Vb.2.7. is

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

$$A' = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \det(A' - \lambda I) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & -11 \\ 5 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (-7-\lambda)(8-\lambda) + 55 = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Wij stellen ons nu de volgende

Vraag: Heeft de matrix van een gegeven lineaire afbeelding \mathcal{A} een eenvoudige gedaante bij een slimme basiskeuze?

Het antwoord is bevestigend, wanneer er een basis van eigenvectoren

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ van \mathcal{A} bestaat. Immers dan is

$$\mathcal{A} \underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1, \dots, \mathcal{A} \underline{v}_n = \lambda_n \underline{v}_n,$$

en heeft \mathcal{A} ten opzichte van de basis $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Volgens stelling 1 bestaat er zeker een basis van eigenvectoren wanneer de karakteristieke vergelijking n verschillende reële wortels heeft. Dan zijn de bijbehorende eigenvectoren namelijk onafhankelijk. Hiermee hebben wij de volgende stellingen verkregen.

Stelling 2 Een lineaire afbeelding, waarvan de karakteristieke vergelijking wortels heeft die reëel en verschillend zijn, heeft als matrix t.o.v. de basis der eigenvectoren een diagonaalmatrix, waarvan de diagonaalelementen de eigenwaarden zijn.

Stelling 3 Bij een $n \times n$ matrix B, waarvan de karakteristieke vergelijking n verschillende reële wortels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heeft, behoort een reguliere matrix S zodat

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \circ & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Vb.3.4. $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1 = (1,0)$ en $\underline{e}_2 = (0,1)$ de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix} . \quad \begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 \\ -18 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

de karakteristieke vergelijking, heeft oplossingen $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$.

Op grond van stelling 2 kennen wij nu reeds de matrix van \mathcal{A} t.o.v. de basis der eigenvectoren. Wij controleren via de berekening van eigenvectoren en overgangsmatrix:

$$\lambda_1 = 2, \text{ dan } \begin{aligned} 6v_1 + 3v_2 &= 0 & \text{eigenvector } \underline{v} &= (1,-2), \\ -18v_1 - 9v_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = -1, \text{ dan } \begin{aligned} 9v_1 + 3v_2 &= 0 & \text{eigenvector } \underline{w} &= (1,-3). \\ -18v_1 - 6v_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} & \text{en } S^{-1}AS &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Vb.3.5. $\mathcal{A}: R_3 \rightarrow R_3$ is de spiegeling t.o.v. het vlak

$$x + y + 2z = 0.$$

De eigenwaarden zijn $\lambda = -1$ bij eigenvector $\underline{v}_1 = (1,1,2)$ en $\lambda = 1$ bij eigenvector $\underline{v}_2 = (2,0,-1)$ en bij eigenvector $\underline{v}_3 = (0,2,-1)$.

Deze drie eigenvectoren vormen een basis voor R_3 . Ten opzichte van deze basis van eigenvectoren heeft \mathcal{A} de matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wij berekenen nog de matrix A' van \mathcal{A} t.o.v. de basis $\underline{v}'_1 = (1,0,0)$, $\underline{v}'_2 = (0,1,0)$, $\underline{v}'_3 = (0,0,1)$.

$$\begin{aligned} A' &= S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vb.3.6. De matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ is niet in diagonaalvorm te brengen. De hierboven behandelde theorie is niet van toepassing, omdat bij de dubbele eigenwaarde $\lambda = 0$ slechts één eigenvector $(1,0)$ wordt gevonden.

§4. Vectorruimten met inproduct

Een vectorruimte V bezit een inproduct als bij elk paar vectoren \underline{x} en \underline{y} uit V een reëel getal $(\underline{x}, \underline{y})$ behoort dat voor elke reële α voldoet aan

$$(1) \quad (\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{y}, \underline{x}),$$

$$(2) \quad (\underline{x}, \underline{y} + \underline{z}) = (\underline{x}, \underline{y}) + (\underline{x}, \underline{z}),$$

$$(3) \quad (\underline{x}, \alpha \underline{y}) = \alpha (\underline{x}, \underline{y}),$$

$$(4) \quad (\underline{x}, \underline{x}) > 0 \text{ voor } \underline{x} \neq \underline{0}.$$

Twee vectoren \underline{x} en \underline{y} heten loodrecht als hun inproduct $(\underline{x}, \underline{y}) = 0$.

Vb.4.1. In R_3 is $(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ een inproduct.

Vb.4.2. De continue functies op $[-\pi, \pi]$ vormen een vectorruimte, waarvoor het bij twee functies f en g behorende getal

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

een inproduct is. De functies $\sin t$ en $\cos t$, $-\pi \leq t \leq \pi$, behoren tot deze vectorruimte en zijn loodrecht wegens

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2t dt = \frac{1}{2} [-\cos 2t]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Stelling 1 De projectie van \underline{x} op $\underline{y} \neq \underline{0}$ is de vector $\frac{(\underline{x}, \underline{y})}{(\underline{y}, \underline{y})} \underline{y}$.

Bewijs. Wij tonen aan dat \underline{y} en $\underline{x} - \frac{(\underline{x}, \underline{y})}{(\underline{y}, \underline{y})} \underline{y}$ loodrecht zijn:

$$\left(\underline{x} - \frac{(\underline{x}, \underline{y})}{(\underline{y}, \underline{y})} \underline{y}, \underline{y}\right) = (\underline{x}, \underline{y}) - \frac{(\underline{x}, \underline{y})}{(\underline{y}, \underline{y})} (\underline{y}, \underline{y}) = 0.$$

Vb.4.3. De projectie van $(3, 2, -1)$ op $(3, 4, 12)$ is $\frac{5}{169} (3, 4, 12)$.

Vb.4.4. De projectie van de functie f op de functie \cos onder het inproduct van vb.4.2. is de functie \cos vermenigvuldigd met de factor

$$\frac{(\underline{f}, \underline{c})}{(\underline{c}, \underline{c})} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t dt}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t dt.$$

Definitie. Het orthogonale complement van \underline{y} in V is de verzameling der vectoren \underline{x} uit V waarvoor geldt $(\underline{y}, \underline{x}) = 0$.

Stelling 2 Het orthogonale complement W van $\underline{v} \neq \underline{0}$ in een vectorruimte V met inproduct is een deelruimte van V . Als $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ basis van W is, dan is $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k, \underline{v}$ basis van V .

Bewijs. W is een deelruimte omdat uit $(\underline{v}, \underline{x}) = (\underline{v}, \underline{y}) = 0$ volgt dat $(\underline{v}, \alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) = 0$. Zij nu $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ basis van W . Dan zijn $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k, \underline{v}$ onafhankelijk. Immers, stel

$$\lambda_1 \underline{e}_1 + \dots + \lambda_k \underline{e}_k + \mu \underline{v} = \underline{0},$$

dan (neem inproduct met \underline{v}) is $\mu(\underline{v}, \underline{v}) = 0$, dus $\mu = 0$, en $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Voorts is elke \underline{x} uit V lineaire combinatie van $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k, \underline{v}$, immers

$$\underline{y} = \underline{x} - \frac{(\underline{x}, \underline{v})}{(\underline{v}, \underline{v})} \underline{v}$$

ligt in W dus is lineaire combinatie van $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$

$$\underline{x} - \frac{(\underline{x}, \underline{v})}{(\underline{v}, \underline{v})} \underline{v} = \alpha_1 \underline{e}_1 + \dots + \alpha_k \underline{e}_k,$$

$$\underline{x} = \frac{(\underline{x}, \underline{v})}{(\underline{v}, \underline{v})} \underline{v} + \alpha_1 \underline{e}_1 + \dots + \alpha_k \underline{e}_k.$$

Hiermee is het gestelde bewezen.

Stelling 3 Een vectorruimte met inproduct van eindige dimensie bezit een basis die bestaat uit onderling loodrechte vectoren.

Bewijs. Zij V een vectorruimte met inproduct en $\dim V = n$. Neem $\underline{w}_1 \neq \underline{0}$ en zij W_1 het orthogonale complement van \underline{w}_1 in V . Volgens stelling 2 is W_1 een vectorruimte en is $\dim W_1 = n-1$. Neem $\underline{w}_2 \neq \underline{0}$ in W_1 en zij W_2 het orthogonale complement in W_1 van \underline{w}_2 , dan is $\dim W_2 = n-2$. Neem $\underline{w}_3 \neq \underline{0}$ in W_2 en zij W_3 het orthogonale complement in W_2 van \underline{w}_3 , dan is $\dim W_3 = n-3$. Zo voortgaande komen wij tot de deelruimte W_{n-1} met $\dim W_{n-1} = 1$. Neem tenslotte $\underline{w}_n \neq \underline{0}$ in W_{n-1} . De verkregen vectoren $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ zijn twee aan twee loodrecht en vormen een basis van V . Hiermee is de stelling bewezen.

Een meer constructieve manier ter verkrijging van een basis van onderling loodrechte vectoren is het volgende zogenaamde orthogonalisatieproces van Gram-Schmidt.

Ga uit van een basis e_1, \dots, e_n van V en vorm achtereenvolgens

$$f_1 = e_1, \quad f_2 = e_2 - \frac{(e_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1,$$

$$f_3 = e_3 - \frac{(e_3, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2 - \frac{(e_3, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1,$$

$$f_4 = e_4 - \frac{(e_4, f_3)}{(f_3, f_3)} f_3 - \frac{(e_4, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2 - \frac{(e_4, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1,$$

enzovoort. De verkregen f_1, \dots, f_n zijn twee aan twee loodrecht en vormen een basis van V .

Vb.4.5. Gevraagd wordt een basis van onderling loodrechte vectoren van de deelruimte van R_3 die wordt opgespannen door $e_1 = (2, 2, 1)$ en $e_2 = (1, -3, 1)$. Volgens Gram-Schmidt voldoet $f_1 = e_1$ en

$$f_2 = (1, -3, 1) - \frac{-3}{9} (2, 2, 1) = \frac{1}{3} (5, -7, 4).$$

Vb.4.6. De functies $1, t, t^2, t^3$ spannen de vectorruimte der derdegraadsfuncties $at^3 + bt^2 + ct + d$ op. Zoek een basis van functies die volgens het

inproduct $\int_{-1}^1 f(t) g(t) dt$ onderling loodrecht zijn. Wij gebruiken het

Gram-Schmidt proces en construeren achtereenvolgens de functies $1,$

$$t - \frac{\int_{-1}^1 t dt}{\int_{-1}^1 dt} \cdot 1 = t, \quad t^2 - \frac{\int_{-1}^1 t^3 dt}{\int_{-1}^1 t^2 dt} t - \frac{\int_{-1}^1 t^2 dt}{\int_{-1}^1 dt} = t^2 - \frac{1}{3},$$

$$t^3 - \frac{\int_{-1}^1 t^3 (t^2 - \frac{1}{3}) dt}{\int_{-1}^1 (t^2 - \frac{1}{3})^2 dt} (t^2 - \frac{1}{3}) - \frac{\int_{-1}^1 t^4 dt}{\int_{-1}^1 t^2 dt} t - \frac{\int_{-1}^1 t^3 dt}{\int_{-1}^1 dt} = t^3 - \frac{3}{5} t.$$

De gevraagde functies zijn $1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5}t$.

§5. Orthonormale bases

Definitie. Een basis g_1, \dots, g_n van een vectorruimte met inproduct heet orthonormaal als zijn vectoren de lengte 1 hebben en paarsgewijs loodrecht zijn, m.a.w. als voor $i, j = 1, \dots, n$ geldt $(g_i, g_j) = 0$ als $i \neq j$ en $= 1$ als $i = j$.

Wegens stelling 3 van §4 bezit elke vectorruimte met inproduct van eindige dimensie een orthonormale basis; deel elke vector van een basis van onderling loodrechte vectoren maar door zijn lengte.

Stelling 1 Voor de kolommen X en Y van de vectoren $\underline{x} = \sum_{i=1}^n x_i g_i$ en $\underline{y} = \sum_{i=1}^n y_i g_i$ ten opzichte van een orthonormale basis g_1, \dots, g_n geldt

$$(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = X^T Y.$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} (\underline{x}, \underline{y}) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i g_i, \sum_{j=1}^n y_j g_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (g_i, g_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T Y. \end{aligned}$$

Vb.5.1. Als t.o.v. een orthonormale basis de lineaire afbeelding \mathcal{A} de matrix A en de vectoren \underline{x} en \underline{y} de kolom X en Y hebben, dan is

$$(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{y}) = (AX)^T Y = X^T A^T Y \text{ en } (\underline{x}, \mathcal{A}\underline{y}) = X^T AY.$$

Stelling 2 De overgangsmatrix, behorend bij de overgang van een orthonormale basis op een andere orthonormale basis, is een orthogonale matrix.

Bewijs. Zij S de overgangsmatrix behorend bij de overgang van de orthonormale basis g_1, \dots, g_n op de orthonormale basis g'_1, \dots, g'_n . De kolommen van S zijn de kolommen van g'_i t.o.v. de basis g_1, \dots, g_n . Omdat $(g'_i, g'_j) = 0$ voor $i \neq j$ en $= 1$ voor $i = j$, is $S^T S = I$, dus is S orthogonaal.

Opmerking. Uit $S^T S = I$ volgt $(\det S)^2 = \det I = 1$. Voor de orthogonale matrix S geldt dus

$$\det S = \det(\mathbf{g}'_1, \dots, \mathbf{g}'_n) = \pm 1.$$

Als $\det S = 1$ dan heten de bases $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n$ en $\mathbf{g}'_1, \dots, \mathbf{g}'_n$ gelijk georiënteerd, als $\det S = -1$ dan heten de bases tegengesteld georiënteerd.

Vb.5.2. $\mathbf{g}_1 = (5,0), \mathbf{g}_2 = (0,5), \mathbf{g}'_1 = (4,3), \mathbf{g}'_2 = (3,-4)$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}, \quad \text{en } S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Vb.5.3. $\mathbf{g}_1 = (1,0,0), \mathbf{g}_2 = (0,1,0), \mathbf{g}_3 = (0,0,1),$

$$\mathbf{g}'_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \mathbf{g}'_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \mathbf{g}'_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{en } S^{-1} = S^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vb.5.4. Zij $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ en $\mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2, \mathbf{g}'_3$ orthonormale bases van R_3 met overgangsmatrix S . Noem $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ de hoeken die \mathbf{g}'_i maakt met $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$. Dus

$$\mathbf{g}'_1 = \mathbf{g}_1 \cos \alpha_1 + \mathbf{g}_2 \cos \beta_1 + \mathbf{g}_3 \cos \gamma_1,$$

$$\mathbf{g}'_2 = \mathbf{g}_1 \cos \alpha_2 + \mathbf{g}_2 \cos \beta_2 + \mathbf{g}_3 \cos \gamma_2,$$

$$\mathbf{g}'_3 = \mathbf{g}_1 \cos \alpha_3 + \mathbf{g}_2 \cos \beta_3 + \mathbf{g}_3 \cos \gamma_3,$$

$$S = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Op grond van stelling 2 geldt: S is orthogonaal. Merk op dat uit $S^T S = I$ volgt $SS^T = I$. Niet alleen de kolommen van S zijn dus onderling loodrecht en hebben de lengte 1, ook de rijen van S hebben deze eigenschap.

Stelling 3 (Pythagoras) Voor elke \underline{x} en orthonormale basis $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$ van een vectorruimte V geldt

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n (\underline{x}, \underline{g}_i) \underline{g}_i \quad \text{en} \quad (\underline{x}, \underline{x}) = \sum_{i=1}^n (\underline{x}, \underline{g}_i)^2.$$

Bewijs. Neem het inproduct van \underline{g}_i en

$$\underline{x} = x_1 \underline{g}_1 + \dots + x_n \underline{g}_n,$$

dan volgt dat $(\underline{x}, \underline{g}_i) = x_i$, de projectie van \underline{x} op \underline{g}_i . Neem vervolgens het inproduct van

$$\underline{x} = (\underline{x}, \underline{g}_1) \underline{g}_1 + \dots + (\underline{x}, \underline{g}_n) \underline{g}_n$$

met zichzelf. Wegens de orthonormaliteit van $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$ volgt

$$(\underline{x}, \underline{x}) = (\underline{x}, \underline{g}_1)^2 + \dots + (\underline{x}, \underline{g}_n)^2,$$

de stelling van Pythagoras.

Wij beschouwen nu van een vectorruimte V een deelruimte W met dimensie m en orthonormale basis $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_m$. Wij wensen een gegeven vector $\underline{x} \in V$ te projecteren op W , m.a.w. wij wensen \underline{x} te schrijven als som van een vector $\underline{y} \in W$ en een vector \underline{z} loodrecht op alle vectoren van W . Dan moet

$$\underline{x} = \underline{y} + \underline{z}, \quad \underline{y} = y_1 \underline{g}_1 + \dots + y_m \underline{g}_m, \quad (\underline{z}, \underline{g}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Combinatie van deze eisen geeft

$$0 = (\underline{x} - \underline{y}, \underline{g}_i) = (\underline{x}, \underline{g}_i) - (\underline{y}, \underline{g}_i) = (\underline{x}, \underline{g}_i) - y_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Bij gegeven \underline{x} en $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_m$ vinden wij $y_i = (\underline{x}, \underline{g}_i)$, en daarmee \underline{y} en $\underline{z} = \underline{x} - \underline{y}$.

Stelling 4 Zij V een vectorruimte en W een deelruimte met orthonormale basis $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_m$. Elke $\underline{x} \in V$ is te schrijven als

$$\underline{x} = \underline{y} + \underline{z}, \quad \underline{y} \in W, \quad \underline{z} \perp W.$$

Voor de componenten y_i van \underline{y} t.o.v. $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_m$ geldt

$$y_i = (\underline{x}, \underline{g}_i) \quad \text{en} \quad \sum_{i=1}^m y_i^2 = \sum_{i=1}^m (\underline{x}, \underline{g}_i)^2 \leq (\underline{x}, \underline{x}).$$

Bewijs. Slechts de laatste ongelijkheid is hierboven nog niet bewezen. Hij volgt direct uit de stelling van Pythagoras voor $\underline{y} = \sum_{i=1}^m (\underline{x}, \underline{g}_i) \underline{g}_i$ en

$$(\underline{x}, \underline{x}) = (\underline{y} + \underline{z}, \underline{y} + \underline{z}) = (\underline{y}, \underline{y}) + 2(\underline{y}, \underline{z}) + (\underline{z}, \underline{z}) = (\underline{y}, \underline{y}) + (\underline{z}, \underline{z}) \geq (\underline{y}, \underline{y}).$$

Opmerking. De ongelijkheid

$$\sum_{i=1}^m y_i^2 = \sum_{i=1}^m (\underline{x}, \underline{g}_i)^2 \leq (\underline{x}, \underline{x})$$

draagt de naam ongelijkheid van Bessel. Merk op dat de ongelijkheid overgaat in de gelijkheid van Pythagoras zodra \underline{x} in de deelruimte W ligt.

Vb.5.5. In R_4 is W de door $\underline{e} = (2, 1, 1, -1)$ en $\underline{f} = (1, 1, 3, 0)$ opgespannen deelruimte. Gevraagd wordt $\underline{x} = (5, 2, -2, 2)$ te schrijven als $\underline{y} + \underline{z}$ met $\underline{y} \in W$ en $\underline{z} \perp W$. Ter oplossing zoeken wij $\underline{y} = \lambda(2, 1, 1, -1) + \mu(1, 1, 3, 0)$ zodat

$$\underline{x} - \underline{y} = \underline{x} - \lambda \underline{e} - \mu \underline{f} = (5 - 2\lambda - \mu, 2 - \lambda - \mu, -2 - \lambda - 3\mu, 2 + \lambda)$$

loodrecht staat op \underline{e} en op \underline{f} , dus zodat

$$2(5 - 2\lambda - \mu) + 2 - \lambda - \mu - 2 - \lambda - 3\mu - (2 + \lambda) = 0$$

$$5 - 2\lambda - \mu + 2 - \lambda - \mu + 3(-2 - \lambda - 3\mu) = 0,$$

$$-7\lambda - 6\mu + 8 = 0$$

$$-6\lambda - 11\mu + 1 = 0, \quad \lambda = 2, \mu = -1.$$

De vectoren $\underline{y} = (3, 1, -1, -2)$ en $\underline{z} = (2, 1, -1, 4)$ voldoen aan de vraag.

Vb.5.6. Projecteer $\underline{x} = (3, 3, 3)$ op het vlak $x + y + 2z = 0$.

Een orthonormale basis van het vlak is $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ en $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$. De projectie \underline{y} van \underline{x} op het vlak heeft componenten $y_1 = 0$ en $y_2 = \sqrt{3}$ t.o.v. de orthonormale basis, dus $\underline{y} = (1, 1, -1)$.

§6. Symmetrische lineaire afbeeldingen en symmetrische matrices

Definitie. Een matrix M heet symmetrisch als $M^T = M$.

Een lineaire afbeelding \mathcal{A} heet symmetrisch als voor elk tweetal vectoren \underline{x} en \underline{y} geldt $(\underline{x}, \mathcal{A}\underline{y}) = (\mathcal{A}\underline{x}, \underline{y})$.

Stelling 1 Een symmetrische lineaire afbeelding heeft ten opzichte van een orthonormale basis een symmetrische matrix. Als een lineaire afbeelding t.o.v. een orthonormale basis een symmetrische matrix heeft, dan is de lineaire afbeelding symmetrisch.

Bewijs. Zij \mathcal{A} een symmetrische lineaire afbeelding met matrix A t.o.v. een orthonormale basis g_1, \dots, g_n . Dan geldt in het bijzonder $(g_i, \mathcal{A} g_j) = (\mathcal{A} g_i, g_j)$. Echter

$$(g_i, \mathcal{A} g_j) = (0 \dots 1 \dots 0) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij},$$

$$(\mathcal{A} g_i, g_j) = (a_{1i} \dots a_{ni}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{ji},$$

dus $a_{ij} = a_{ji}$.

Zij nu \mathcal{A} een lineaire afbeelding met een symmetrische matrix $A = A^T$ t.o.v. de orthonormale basis g_1, \dots, g_n . Als \underline{x} de kolom X heeft t.o.v. deze basis, dan heeft $\mathcal{A} \underline{x}$ de kolom AX . Dus is

$$(\underline{x}, \mathcal{A} \underline{y}) = X^T A Y \quad \text{en} \quad (\mathcal{A} \underline{x}, \underline{y}) = (AX)^T Y = X^T A^T Y.$$

Deze uitdrukkingen zijn hetzelfde.

Vb. 6.1.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$(\underline{x}, \mathcal{A} \underline{y}) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} ay_1 + by_2 \\ by_1 + cy_2 \end{pmatrix} = x_1 (ay_1 + by_2) + x_2 (by_1 + cy_2).$$

$$(\mathcal{A} \underline{x}, \underline{y}) = (ax_1 + bx_2 \quad bx_1 + cx_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (ax_1 + bx_2)y_1 + (bx_1 + cx_2)y_2.$$

$$X^T A Y = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

De drie uitdrukkingen hebben dezelfde uitkomst

$$ax_1 y_1 + b(x_1 y_2 + x_2 y_1) + cx_2 y_2.$$

Stelling 2 De eigenwaarden van een reële symmetrische lineaire afbeelding zijn reëel.

Bewijs. Stel de symmetrische lineaire afbeelding \mathcal{A} heeft t.o.v. een ortho-normale basis een reële matrix A en een eigenvector \underline{x} met kolom $X = Y + iZ$ bij $\lambda = \alpha + i\beta$, met Y, Z, α , β reëel. Uit $\mathcal{A}\underline{x} = \lambda\underline{x}$ volgt $AX = \lambda X$ dus

$$AY + iAZ = \alpha Y - \beta Z + i(\beta Y + \alpha Z).$$

Gelijkstelling der reële en imaginaire delen geeft

$$AY = \alpha Y - \beta Z, \quad AZ = \beta Y + \alpha Z.$$

De vectoren \underline{y} en \underline{z} , die t.o.v. de basis de kolommen Y en Z hebben, voldoen aan

$$\mathcal{A}\underline{y} = \alpha\underline{y} - \beta\underline{z}, \quad \mathcal{A}\underline{z} = \beta\underline{y} + \alpha\underline{z},$$

$$(\mathcal{A}\underline{y}, \underline{z}) = \alpha(\underline{y}, \underline{z}) - \beta(\underline{z}, \underline{z}), \quad (\underline{y}, \mathcal{A}\underline{z}) = \beta(\underline{y}, \underline{y}) + \alpha(\underline{y}, \underline{z}),$$

$$\beta(\underline{z}, \underline{z}) + \beta(\underline{y}, \underline{y}) = 0,$$

dus $\beta = 0$ omdat $(\underline{z}, \underline{z}) + (\underline{y}, \underline{y}) > 0$. Hieruit volgt dat de eigenwaarde λ reëel is.

$$\text{Vb. 6.2.} \quad \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$$

heeft reële wortels als a, b, c reëel zijn. Inderdaad, de discriminant is

$$(a+c)^2 - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

$$\text{Vb. 6.3.} \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{heeft 3 reële wortels, als alle } a_{ij} \text{ reëel zijn.}$$

Opmerking. In het vervolg van dit hoofdstuk beperken wij ons tot reële vectorruimten van eindige dimensie tenzij een afwijking van deze beperking uitdrukkelijk wordt vermeld.

Stelling 3 Zij $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ een symmetrische lineaire afbeelding. Dan bezit V een orthonormale basis die bestaat uit louter eigenvectoren van \mathcal{A} .

Bewijs. Wij gebruiken inductie naar $n = \dim V$. Voor $n = 1$ is elke vector $\neq \underline{0}$ eigenvector, dus geldt de bewering.

Wij nemen nu aan dat de bewering geldt voor vectorruimten van dimensie $n - 1$. Zij λ eigenwaarde van $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ met de eigenvector $\underline{v} \neq \underline{0}$ van lengte 1. Dan is λ reëel en heeft het orthogonale complement W van \underline{v} in V dimensie $n - 1$. Voor elke \underline{x} in W ligt ook $\mathcal{A}\underline{x}$ in W , immers

$$(\underline{v}, \mathcal{A}\underline{x}) = (\mathcal{A}\underline{v}, \underline{x}) = (\lambda\underline{v}, \underline{x}) = \lambda(\underline{v}, \underline{x}) = 0.$$

\mathcal{A} is dus een symmetrische lineaire afbeelding van W in zichzelf. Volgens de inductieaanname bezit W een orthonormale basis van eigenvectoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}$. Volgens stelling 2 van §4 heeft V de basis $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}, \underline{v}$. Deze basis is orthonormaal en bestaat uit louter eigenvectoren van \mathcal{A} .

Wij stellen ons nu de volgende

Vraag: Heeft de matrix van een gegeven symmetrische lineaire afbeelding \mathcal{A} een eenvoudige gedaante bij een slimme basiskeuze?

Het antwoord op deze vraag is zonder meer bevestigend, omdat V volgens stelling 3 een orthonormale basis van eigenvectoren van \mathcal{A} bezit. Ten opzichte van deze basis heeft \mathcal{A} als matrix een diagonaalmatrix, waarvan de diagonaal-elementen de eigenwaarden van \mathcal{A} zijn. Hiermee is tevens de volgende stelling bewezen.

Stelling 4 Bij een symmetrische $n \times n$ matrix B met eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ behoort een orthogonale matrix S zodat

$$S^{-1}BS = S^TBS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \circ & & \\ & & \ddots & \\ & & & \circ \\ \circ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Opmerking. Wij kunnen de orthogonale matrix S zo kiezen dat $\det S = 1$ door, zo nodig, twee kolommen te verwisselen.

Vb.6.4. Breng $A = \begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix}$ in diagonaalvorm.

Wij bepalen eerst de eigenwaarden, $\lambda_1 = 50$ en $\lambda_2 = 25$ en concluderen dat t.o.v. een orthonormale basis van eigenvectoren de bij A behorende lineaire afbeelding \mathcal{A} de matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

heeft. Dit controleren wij via berekening van eigenvectoren en overgangsmatrix.

Bij $\lambda_1 = 50$ hoort $\underline{v} = (4, -3)$ en ook eenheidsvector $\underline{w}_1 = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

Bij $\lambda_2 = 25$ hoort $\underline{v} = (3, 4)$ en ook eenheidsvector $\underline{w}_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

Vb.6.5. $\mathcal{A}(1,0,0) = (1,-4,8)$, $\mathcal{A}(0,1,0) = (-4,7,4)$, $\mathcal{A}(0,0,1) = (8,4,1)$.

Gevraagd wordt een diagonaalmatrix voor \mathcal{A} en de basis ten opzichte waarvan \mathcal{A} die diagonaalmatrix heeft. Uit de karakteristieke vergelijking van \mathcal{A}

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 81\lambda + 729 = 0 = (\lambda + 9)(\lambda - 9)^2$$

volgt de gevraagde diagonaalmatrix reeds. Wij berekenen een orthonormale basis van eigenvectoren.

$$\begin{aligned} \lambda = -9 \quad 10v_1 - 4v_2 + 8v_3 &= 0 \\ -4v_1 + 16v_2 + 4v_3 &= 0 \\ 8v_1 + 4v_2 + 10v_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\underline{v} = (2, 1, -2), \quad \underline{w}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} \lambda = 9 \quad -8v_1 - 4v_2 + 8v_3 &= 0 \\ -4v_1 - 2v_2 + 4v_3 &= 0 \\ 8v_1 + 4v_2 - 8v_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\underline{v} = (2, -2, 1), \quad \underline{w}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

en

$$\underline{v} = (1, 2, 2), \quad \underline{w}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Controle:

$$\begin{aligned}
 A' &= S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Vb.6.6. Bewijs dat verschillende eigenwaarden λ_1, λ_2 van een symmetrische afbeelding \mathcal{A} horen bij onderling loodrechte eigenvectoren $\underline{v}_1, \underline{v}_2$.

Inderdaad,

$$\lambda_1(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = (\lambda_1 \underline{v}_1, \underline{v}_2) = (\mathcal{A} \underline{v}_1, \underline{v}_2) = (\underline{v}_1, \mathcal{A} \underline{v}_2) = (\underline{v}_1, \lambda_2 \underline{v}_2) = \lambda_2(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$$

dus

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = 0, \text{ waaruit } (\underline{v}_1, \underline{v}_2) = 0.$$

§7. Kwadratische vormen

Vb.7.1. Een kwadratische vorm in twee variabelen x en y is als volgt te schrijven in termen van een symmetrische lineaire afbeelding \mathcal{A} en een vector \underline{x} in \mathbb{R}_2 , die t.o.v. de basis $\underline{e}_1 = (1,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1)$ de matrix A en de kolom X hebben:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X^T A X = (\underline{x}, \mathcal{A} \underline{x}) = (\mathcal{A} \underline{x}, \underline{x}).$$

Vb.7.2. Een kwadratische vorm in drie variabelen x_1, x_2, x_3 is als volgt te schrijven in termen van een symmetrische lineaire afbeelding \mathcal{A} en een vector \underline{x} in \mathbb{R}_3 , die t.o.v. de basis $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$ de matrix A en de kolom X hebben:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 =$$

$$= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X^T A X = (\underline{x}, \mathcal{A} \underline{x}) = (\mathcal{A} \underline{x}, \underline{x}).$$

Definitie. De bij een vectorruimte V en een symmetrische lineaire afbeelding $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ behorende kwadratische vorm is de functie die aan elke $\underline{x} \in V$ het getal $(\mathcal{A} \underline{x}, \underline{x})$ toevoegt.

Ten opzichte van een orthonormale basis $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$, waarvoor \mathcal{A} en \underline{x} de matrix A en de kolom X hebben, kan deze functie als volgt worden geschreven als een kwadratische vorm in n variabelen x_1, \dots, x_n :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \underline{x}, \underline{x}) &= (\underline{x}, \mathcal{A} \underline{x}) = X^T A X = (x_1 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \\ &= x_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n) + \\ &+ x_2 (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n) + \\ &+ \dots + \dots + \\ &+ x_n (a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \end{aligned}$$

waarin $a_{ij} = a_{ji}$ voor alle $i, j = 1, \dots, n$.

Ten opzichte van een andere orthonormale basis $\underline{g}'_1, \dots, \underline{g}'_n$, waarvoor \mathcal{A} en \underline{x} de matrix A' en de kolom X' hebben, wordt dezelfde functie $(\mathcal{A} \underline{x}, \underline{x})$ geschreven als een andere kwadratische vorm in n andere variabelen x'_1, \dots, x'_n :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \underline{x}, \underline{x}) &= (\underline{x}, \mathcal{A} \underline{x}) = (X')^T A' X' = (x'_1 \ \dots \ x'_n) \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_n \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a'_{ij} x'_i x'_j. \end{aligned}$$

Als S de (orthogonale) overgangsmatrix is bij de overgang van de orthonormale basis $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$ op de orthonormale basis $\underline{g}'_1, \dots, \underline{g}'_n$, dan is volgens §2 het verband tussen A en A' en tussen X en X'

$$X = SX', \quad X' = S^{-1}X \quad \text{en} \quad A' = S^{-1}AS.$$

Ook hieruit volgt de gelijkheid van de beide schrijfwijzen ($\mathcal{A}_{\underline{x}, \underline{x}}$):

$$(X')^T A' X' = (S^T X)^T (S^{-1} AS) (S^{-1} X) = X^T S S^{-1} A S S^{-1} X = X^T A X.$$

Vb.7.3. $x^2 - y^2$ is een kwadratische vorm geschreven op de basis $(1,0)$ en $(0,1)$. Schrijf deze vorm op de basis $\underline{g}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\underline{g}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$.

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dus} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}.$$

$$A' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{dus}$$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x' \ y') \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -2x'y' = \\ &= -2 \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{-x+y}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Wij stellen ons nu de volgende

Vraag: Heeft de kwadratische vorm ($\mathcal{A}_{\underline{x}, \underline{x}}$) een eenvoudige gedaante bij een slimme basiskeuze?

Het antwoord op deze vraag is zonder meer bevestigend, immers neem als basis een orthonormale basis van eigenvectoren van de symmetrische \mathcal{A} . Ten opzichte van die basis is de matrix van \mathcal{A} een diagonaalmatrix, waarvan de diagonaalelementen de eigenwaarden van \mathcal{A} zijn. Ten opzichte van die basis luidt de kwadratische vorm

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_{\underline{x}, \underline{x}}) &= (X')^T A' X' = (x'_1 \ \dots \ x'_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \circ & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \\ & & & & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \\ &= \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 + \dots + \lambda_n (x'_n)^2. \end{aligned}$$

Hiermee is verkregen de volgende stelling.

Stelling 1 De kwadratische vorm $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x})$ is, door overgang op een orthonormale basis van eigenvectoren van \mathcal{A} , te schrijven als som van kwadraten met als koëfficiënten de eigenwaarden van \mathcal{A} .

Vb.7.4. Schrijf $7x^2 - 12xy - 2y^2$ als som van kwadraten. Wij berekenen de eigenwaarden en eigenvectoren van

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \cdot 0 = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -6 \\ -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 50 = (\lambda-10)(\lambda+5).$$

Bij $\lambda = 10$ hoort eigenvector $(2, -1)$. Normeer: $\underline{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2, -1)$.

Bij $\lambda = -5$ hoort eigenvector $(1, 2)$. Normeer: $\underline{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 2)$.

De overgangsmatrix bij overgang van $(1, 0)$ en $(0, 1)$ op \underline{w}_1 en \underline{w}_2 is

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X' = S^{-1}X = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+2y \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dus } 7x^2 - 12xy - 2y^2 = 10 \left(\frac{2x-y}{\sqrt{5}}\right)^2 - 5 \left(\frac{x+2y}{\sqrt{5}}\right)^2$$

Meetkundige interpretatie: de kegelsnede met vergelijking

$$7x^2 - 12xy - 2y^2 = 1$$

heeft op de assen door \underline{w}_1 en \underline{w}_2 de vergelijking

$$10(x')^2 - 5(y')^2 = 1$$

en is daarom een hyperbool met $a = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Vb.7.5. Welk type heeft het kwadratische oppervlak in R_3 met vergelijking $6x^2 + y^2 - 8xz = 1$?

Wij berekenen de eigenwaarden van de bij de kwadratische vorm $6x^2 + y^2 - 8xz$ behorende matrix:

$$0 = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-6)(\lambda-1) - 16(1-\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-8).$$

Ten opzichte van de ons niet interesserende basis der eigenvectoren luidt de vergelijking

$$(x')^2 - 2(y')^2 + 8(z')^2 = 1.$$

Het oppervlak is een éénbladige hyperboloïde met

$$a = 1, b = \frac{1}{\sqrt{2}}, c = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Vb.7.6. Welk type heeft het kwadratische oppervlak in R_3 met vergelijking $x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2xz = 1$?

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)^2 - 2 + \lambda - 3 + \lambda - 3 + \lambda - 1 = \\ &= (1-\lambda)(\lambda-3)^2 + 3\lambda - 9 = -(\lambda-3)\lambda(\lambda-4). \end{aligned}$$

Ten opzichte van de basis der eigenvectoren is de vergelijking

$$3(x')^2 + 4(y')^2 = 1.$$

Het oppervlak is daarom een elliptische cilinder. De as van deze cilinder is gericht volgens de eigenvector van de eigenwaarde 0, die t.o.v. de oorspronkelijke basis de componenten (2,1,1) heeft, een oplossing van de vergelijkingen

$$\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ -x + 3y - z &= 0 \\ -x - y + 3z &= 0. \end{aligned}$$

Vb.7.7. Welk type heeft het kwadratische oppervlak in R_3 met vergelijking $x^2 - 8xy + 16xz + 7y^2 + 8yz + z^2 = 9$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ heeft eigenwaarden } \lambda_1 = -9, \lambda_2 = \lambda_3 = 9,$$

vergelijk Vb.6.5.. Ten opzichte van een orthonormale basis van eigenvectoren is de vergelijking van het oppervlak

$$-(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1.$$

Het oppervlak is een éénbladige omwentelingshyperboloïde. De omwentelingsas is gericht volgens de eigenvector van de eigenwaarde -9 , die t.o.v. de oorspronkelijke basis de componenten $(2, 1, -2)$ heeft.

Vb.7.8. Bepaal de eigenwaarden en een orthonormaal stelsel van eigenvectoren van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Via de berekening van de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren,

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 & \text{ met } \alpha(1, 1, 0, 0, 0) + \beta(0, 0, 1, -1, 0), \\ \lambda_3 = \lambda_4 = 2 & \text{ met } \alpha(1, -1, 0, 0, 0) + \beta(0, 0, 1, 1, 0), \\ \lambda_5 = -1 & \text{ met } (0, 0, 0, 0, 1), \end{aligned}$$

komt men tot een orthonormale basis

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1).$$

Deze conclusie kan ook worden bereikt door beschouwing der bij A behorende kwadratische vorm

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2 - x_5^2 &= \\ = 2 \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + 0 \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + 2 \left(\frac{x_3 + x_4}{\sqrt{2}} \right)^2 + 0 \left(\frac{x_3 - x_4}{\sqrt{2}} \right)^2 - x_5^2. \end{aligned}$$

In bovenstaande voorbeelden is reeds verband gelegd tussen de theorie der kwadratische vormen en die der kwadratische krommen in R_2 en kwadratische oppervlakken in R_3 . Wij lichten dit verband verder toe in de volgende stellingen. Daarbij wordt onder een kwadriek verstaan de verzameling der vectoren $\underline{x} \in R_n$ die voldoen aan de betrekking $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) = 1$, waarbij $\mathcal{A}: R_n \rightarrow R_n$ een symmetrische lineaire afbeelding is.

Stelling 2 De middens van de koorden, die worden uitgesneden uit de kwadriek

$$(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) = 1 \text{ door het stelsel evenwijdige rechten } \underline{x} = \underline{m} + t\underline{v},$$

\underline{v} vast, \underline{m} variabel, liggen in het hypervlak $(\mathcal{A}\underline{v}, \underline{x}) = 0$.

Bewijs. Snijding van $\underline{x} = \underline{m} + t\underline{v}$ en $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) = 1$ geeft

$$(\mathcal{A}\underline{m} + t\mathcal{A}\underline{v}, \underline{m} + t\underline{v}) = 1,$$

$$t^2(\mathcal{A}\underline{v}, \underline{v}) + 2t(\mathcal{A}\underline{v}, \underline{m}) + (\mathcal{A}\underline{m}, \underline{m}) = 1.$$

Laat \underline{m} het midden van de koorde zijn, dan heeft deze vierkantsvergelijking tegengestelde oplossingen t , dus dan is $(\mathcal{A}\underline{v}, \underline{m}) = 0$. Alle middens van koorde voldoen dus aan $(\mathcal{A}\underline{v}, \underline{x}) = 0$, de vergelijking van een hypervlak.

Opmerking Als $\mathcal{A}\underline{v} = \underline{0}$, dus als \underline{v} een bij de eigenwaarde 0 behorende eigenvector is, dan stelt $(\mathcal{A}\underline{v}, \underline{x}) = 0$ geen hypervlak voor. In dit geval geeft snijding van $\underline{x} = \underline{m} + t\underline{v}$ met $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) = 1$:

$$t^2 \cdot 0 + 2t \cdot 0 + (\mathcal{A}\underline{m}, \underline{m}) = 1.$$

De rechte heeft geen snijpunten met de kwadriek tenzij de rechte geheel op de kwadriek ligt. Dit geval doet zich voor wanneer de kwadriek een cilinder is.

Definitie. Het aan \underline{v} t.o.v. $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) = 1$ toegevoegde hypervlak is het hypervlak $(\mathcal{A}\underline{v}, \underline{x}) = 0$ [resp. $(\underline{v}, \underline{x}) = 0$, als \underline{v} eigenvector bij de eigenwaarde 0 van \mathcal{A} is].

Stelling 3 Het toegevoegde hypervlak van een eigenvector van \mathcal{A} is een symmetrievlak van de kwadriek $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) = 1$.

Bewijs. Zij \underline{v} eigenvector behorende bij de eigenwaarde λ van \mathcal{A} . Als $\lambda \neq 0$ dan is het toegevoegde hypervlak

$$(\mathcal{A}\underline{v}, \underline{x}) = 0, \lambda(\underline{v}, \underline{x}) = 0, (\underline{v}, \underline{x}) = 0.$$

Als $\lambda = 0$ dan is het toegevoegde hypervlak per definitie $(\underline{v}, \underline{x}) = 0$. De vector \underline{v} staat dus loodrecht op zijn toegevoegde hypervlak. Met stelling 2 volgt de symmetrie.

Vb.7.9. Ten opzichte van de kegelsnede

$$x^2 + 4xy + 5y^2 = 1$$

heeft $\underline{v} = (u, v)$ als toegevoegde middellijn

$$(u + 2v)x + (2u + 5v)y = 0, ux + 2uy + 2vx + 5vy = 0.$$

Bij eigenwaarde $3 \pm 2\sqrt{2}$ hoort de eigenvector $(1, 1 \pm \sqrt{2})$ die loodrecht staat op de aan hem toegevoegde middellijn $(3 \pm 2\sqrt{2})x + (7 \pm 5\sqrt{2})y = 0$.

§8. Inhomogene kwadratische vormen

Vb.8.1. Ons uit Vb.7.4. herinnerend dat

$$7x^2 - 12xy - 2y^2 - 1 = 10 \left(\frac{2x-y}{\sqrt{5}} \right)^2 - 5 \left(\frac{x+2y}{\sqrt{5}} \right)^2 - 1 = 2(2x-y)^2 - (x+2y)^2 - 1,$$

zien wij snel in dat

$$2(2x-y+1)^2 - (x+2y+3)^2 - 1 = 7x^2 - 12xy - 2y^2 + 2x - 16y - 8.$$

De vraag is, hoe omgekeerd een inhomogene kwadratische vorm kan worden geschreven als som van kwadraten.

Wij verstaan onder een inhomogene kwadratische vorm in \underline{x} een functie van \underline{x} die som is van een kwadratische vorm in \underline{x} , een lineaire vorm in \underline{x} en een constant getal:

$$f(\underline{x}) = (\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) + 2(\underline{b}, \underline{x}) + c.$$

Substitutie van $\underline{x} = \underline{y} + \underline{p}$ geeft

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\underline{y} + \mathcal{A}\underline{p}, \underline{y} + \underline{p}) + 2(\underline{b}, \underline{y} + \underline{p}) + c = \\ & = (\mathcal{A}\underline{y}, \underline{y}) + (\mathcal{A}\underline{p}, \underline{y}) + (\mathcal{A}\underline{y}, \underline{p}) + (\mathcal{A}\underline{p}, \underline{p}) + 2(\underline{b}, \underline{y}) + 2(\underline{b}, \underline{p}) + c = \\ & = (\mathcal{A}\underline{y}, \underline{y}) + 2(\mathcal{A}\underline{p} + \underline{b}, \underline{y}) + (\mathcal{A}\underline{p}, \underline{p}) + 2(\underline{b}, \underline{p}) + c = \\ & = (\mathcal{A}\underline{y}, \underline{y}) + 2(\mathcal{A}\underline{p} + \underline{b}, \underline{y}) + f(\underline{p}). \end{aligned}$$

Wanneer \underline{p} oplossing is van de z.g. middelpuntsvergelijkingen

$$\mathcal{A}\underline{p} + \underline{b} = \underline{0}.$$

dan blijft $(\mathcal{A}\underline{y}, \underline{y}) + f(\underline{p})$.

Wanneer de middelpuntsvergelijkingen een oplossing hebben, dan kan dus de lineaire vorm door de substitutie $\underline{x} = \underline{y} + \underline{p}$ worden verwijderd.

Vb.8.1.

$$7x_1^2 - 12x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_1 - 16x_2 - 8$$

De middelpuntsvergelijkingen luiden

$$AP + B = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7p-6q+1 \\ -6p-2q-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

waaruit $p = -1$, $q = -1$. De substitutie $\underline{x} = \underline{y} + \underline{p}$ geeft

$$\begin{aligned} 7y_1^2 - 12y_1y_2 - 2y_2^2 - 1 &= \\ &= 2(2y_1 - y_2)^2 - (y_1 + 2y_2)^2 - 1 = 2(2x_1 - x_2 + 1)^2 - (x_1 + 2x_2 + 3)^2 - 1. \end{aligned}$$

Vb.8.2. Welk type heeft het kwadratische oppervlak in R_3 met vergelijking

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 - 10x_1 - 10x_2 + 6x_3 + \frac{23}{3} = 0?$$

De middelpuntsvergelijkingen luiden

$$AP + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 5/3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Daar $f(\underline{p}) = 0$, geeft substitutie $\underline{x} = \underline{y} + \underline{p}$

$$y_1^2 + 4y_1y_2 + y_2^2 - y_3^2 = 0.$$

Omdat A eigenwaarden $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$ heeft, wordt de vergelijking na overgang op een orthonormale basis van eigenvectoren van A

$$-(y'_1)^2 - (y'_2)^2 + 3(y'_3)^2 = 0.$$

Het oppervlak is een omwentelingskegel. De as is de rechte langs de bij $\lambda_3 = 3$ behorende eigenvector. Daar $(1,1,0)$ zo'n eigenvector blijkt te zijn, is de as in het oorspronkelijke stelsel: $\underline{x} = (5/3, 5/3, 3) + \alpha(1,1,0)$.

Vb.8.3. Van welke type is

$$4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2 - 14x_1 + 10x_2 - 12x_3 + 19 = 0?$$

De middelpuntsvergelijkingen

$$AP + B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zijn strijdig. Er is blijkbaar geen middelpunt. Wij gaan over op een ortho-
normale basis van eigenvectoren van \mathcal{A} . De eigenwaarden en eigenvectoren van
 \mathcal{A} blijken te zijn

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 6, & \underline{w}_1 &= \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \\ \lambda_2 &= 3, & \underline{w}_2 &= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right) \\ \lambda_3 &= 0, & \underline{w}_3 &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right),\end{aligned} \quad S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} .$$

Vul in $X = SY$, dan wordt de vergelijking

$$6y_1^2 + 3y_2^2 - 20y_1 + 2y_2 - 6y_3 + 19 = 0$$

$$6\left(y_1 - \frac{5}{3}\right)^2 + 3\left(y_2 + \frac{1}{3}\right)^2 - 6y_3 + 2 = 0,$$

en na verschuiving $\underline{z} = \underline{y} + \left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$$6z_1^2 + 3z_2^2 - 6z_3 = 0.$$

Het oppervlak is een elliptische paraboloid.

HOOFDSTUK III

Fourierreeksen

§1. Trigonometrische reeksen

Stelling 1 De functies uit de rij

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

hebben de eigenschap, dat voor elk tweetal f en g geldt

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \begin{cases} 1 & \text{als } f \text{ en } g \text{ dezelfde} \\ 0 & \text{als } f \text{ en } g \text{ verschillend.} \end{cases}$$

Bewijs.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} = 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 nx}{\pi} dx = 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 nx}{\pi} dx = 1, \quad \text{voor } n \geq 1,$$

wegens

$$\cos^2 nx = \frac{1}{2}(1 + \cos 2nx), \quad \sin^2 nx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\pi}} dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\pi}} dx \text{ en}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx \cdot \sin mx}{\pi} dx = 0, \text{ voor } n \geq 1, m \geq 1,$$

wegens

$$2 \cos nx \cdot \sin mx = \sin(n+m)x - \sin(n-m)x.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx \cdot \cos mx}{\pi} dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx \cdot \sin mx}{\pi} dx = 0,$$

voor $n \geq 1, m \geq 1, m \neq n,$

wegens

$$2 \cos nx \cdot \cos mx = \cos(n+m)x + \cos(n-m)x,$$

$$2 \sin nx \cdot \sin mx = \cos(n-m)x - \cos(n+m)x.$$

Stelling 2 Voor de koëfficiënten van een trigonometrisch polynoom

$$s_N(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

geldt, voor $k=0,1,2,\dots,N$ en voor $\ell=1,2,\dots,N$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_N(x) \cos kx dx, \quad b_\ell = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_N(x) \sin \ell x dx.$$

Bewijs.

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_N(x) \cos kx dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^N [a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx dx +$$

$$+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos kx dx] = \frac{1}{2} a_0 \cdot 2\pi \text{ voor } k=0 \text{ en}$$

$$= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = a_k \cdot \pi \text{ voor } k \neq 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_N(x) \sin \ell x dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin \ell x dx + \sum_{n=1}^N [a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin \ell x dx +$$

$$+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin \ell x dx] = b_\ell \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \ell x dx = b_\ell \cdot \pi.$$

Definitie. Een trigonometrische reeks is een reeks van de vorm

$$s(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

De som $s(x)$ is gedefinieerd voor zover de reeks convergent is. De vraag is, of nu weer geldt

$$\begin{Bmatrix} a_k \\ b_\ell \end{Bmatrix} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) \begin{Bmatrix} \cos kx \\ \sin \ell x \end{Bmatrix} dx.$$

Volgens het bewijs van de vorige stelling komt dit neer op de vraag

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{?}{\cdot} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} .$$

Het antwoord op deze vraag is lang niet steeds bevestigend. Het antwoord op deze vraag is wèl bevestigend, wanneer de trigonometrische reeks uniform convergeert is, zie §10.

§2. Fourierreeksen, periode 2π

Definitie f heet periodiek met periode 2π , wanneer voor alle x , waarvoor f gedefinieerd is, geldt:

$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

Stelling 1 (versleepstelling). Als f integreerbaar is en periodiek met periode 2π , dan geldt voor elke a

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Bewijs.

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_a^{-\pi} f(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{a+2\pi} f(x) dx.$$

Door substitutie van $x = y + 2\pi$ tonen wij aan dat de laatste integraal te-
gengesteld aan de eerste is:

$$\int_{\pi}^{a+2\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^a f(y + 2\pi) dy = \int_{-\pi}^a f(y) dy = - \int_a^{-\pi} f(y) dy.$$

Wij nemen nu verder f integreerbaar en periodiek met periode 2π .

Definitie De fourierkoefficienten van f zijn

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \text{ en } b_{\ell} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \ell x dx,$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{en } \ell = 1, 2, 3, \dots$$

Als f een even functie is, dus als $f(-x) = f(x)$ voor alle x , waarvoor f continu is, dan zijn de fourierkoefficienten

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_l = 0,$$

omdat dan $f(x) \cos kx$ even en $f(x) \sin lx$ oneven is.

Als f een oneven functie is, dus als $f(-x) = -f(x)$ voor alle x , waarvoor f continu is, dan zijn de fourierkoefficienten

$$a_k = 0, \quad b_l = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin lx dx.$$

Definitie De fourierreeks van f is de reeks

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

waarin a_n en b_n de fourierkoefficienten van f zijn.

Er doen zich nu twee vragen voor:

- a) Onder welke voorwaarden voor de functie f convergeert de fourierreeks van f ?
- b) Indien de fourierreeks van f convergent is voor zekere x , wat heeft dan de som $s(x)$ te maken met $f(x)$?

Een antwoord wordt gegeven door de hoofdstelling der fourierreeksen.

Notatie: $\lim_{h \rightarrow 0} f(\xi+h)$ noteren wij als $f(\xi+0)$ en $\lim_{h \rightarrow 0} f(\xi-h)$ als $f(\xi-0)$.

Definitie $f(x)$ voldoet aan de Dirichlet condities voor $x = \xi$, als

$$f(\xi+0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi+h) \quad \text{en} \quad f(\xi-0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi-h) \quad \text{bestaan,}$$

en als $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi+0)}{h}$ en $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi-h) - f(\xi-0)}{-h}$ bestaan.

Hoofdstelling Als f integreerbaar is en periodiek met periode 2π , en als f voldoet aan de Dirichlet condities voor $x = \xi$, dan is de fourierreeks van f voor $x = \xi$ convergent met som $\frac{1}{2}[f(\xi+0) + f(\xi-0)]$.

Deze stelling wordt bewezen in §8.

Als $f(x)$ continu is voor $x = \xi$ en als voldaan is aan de Dirichlet condities voor $x = \xi$, dan zegt de stelling dat de som $s(\xi) = f(\xi)$.

Als $f(x)$ niet continu is voor $x = \xi$ en als voldaan is aan de Dirichlet condities voor $x = \xi$, dan zegt de stelling dat de som $s(\xi)$ gelijk is aan het gemiddelde van de linker- en de rechterlimiet van f ; dan heeft $s(\xi)$ dus niets te maken met $f(\xi)$.

Vb.2.1. $f(x) = x$ voor $-\pi < x \leq \pi$ en verder periodiek met periode 2π .

De functie is oneven voor $-\pi < x < \pi$, dus

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0,$$

$$b_\ell = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \ell x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin \ell x dx =$$

$$= -\frac{2}{\ell\pi} [x \cos \ell x]_0^{\pi} + \frac{2}{\ell\pi} \int_0^{\pi} \cos \ell x dx = \frac{2}{\ell} (-1)^{\ell-1}.$$

Omdat f voldoet aan de veronderstellingen van de hoofdstelling, volgt voor de fourierreeks van f :

$$2 \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell-1} \frac{\sin \ell x}{\ell} = x \quad \text{voor} \quad -\pi < x < \pi.$$

Voor $x = \pi$ is de som 0, in overeenstemming met $f(\pi-0) = \pi$ en $f(\pi+0) = -\pi$. Substitutie in het resultaat van $x = \frac{\pi}{2}$ levert

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Opmerking De reeksontwikkeling voor arctan x werd in Wiskunde 20 afgeleid voor $|x| < 1$. Hier zien wij dat deze reeksontwikkeling ook geldt voor $x = 1$ en voor $x = -1$.

Opmerking Uit $\sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell-1} \frac{\sin \ell x}{\ell} = \frac{1}{2}x$, $-\pi < x < \pi$, volgt door substitutie

van $x = y - \pi$ dat

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell y}{\ell} = \frac{1}{2}(\pi - y), \quad 0 < y < 2\pi.$$

Vb.2.2. $f(x) = x^2$ voor $|x| \leq \pi$ en verder periodiek met periode 2π .

De functie is even, dus

$$b_{\ell} = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}, \quad \text{en voor } k \geq 1$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin kx}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi k} \int_0^{\pi} x \sin kx dx =$$

$$= \frac{4}{\pi k} \left[\frac{x \cos kx}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi k^2} \int_0^{\pi} \cos kx dx = \frac{4}{k^2} (-1)^k.$$

Daar $f(x)$ voor alle x continu is en voldoet aan de voorwaarden van de hoofdstelling, geldt

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Voor $x = \pi$, resp. voor $x = 0$ komt er

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{resp.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Vb.2.3. $f(x) = \begin{cases} c & \text{voor } -\pi < x < 0 \\ d & \text{voor } 0 < x < \pi, \end{cases}$ c en d constant.

De fouriercoëfficiënten van f zijn

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 c \cos kx dx + \int_0^{\pi} d \cos kx dx \right] =$$

$$= \begin{cases} c+d & \text{voor } k = 0 \\ 0 & \text{voor } k \neq 0. \end{cases}$$

$$b_l = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin lx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 c \sin lx dx + \int_0^{\pi} d \sin lx dx \right] =$$

$$= (c-d) \frac{(-1)^l - 1}{\pi l} = \begin{cases} 0 & \text{voor } l \text{ even,} \\ -\frac{2(c-d)}{\pi l} & \text{voor } l \text{ oneven.} \end{cases}$$

Er is voldaan aan de voorwaarden van de hoofdstelling, dus

$$\frac{1}{2}(c+d) - \frac{2(c-d)}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right] = \begin{cases} c & \text{voor } -\pi < x < 0 \\ d & \text{voor } 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2}(c+d) & \text{voor } x=0, x = \pm \pi. \end{cases}$$

Voor $d = -c = 1$ volgt hieruit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad \text{voor } 0 < x < \pi.$$

§3. Fourierreeksen, periode p

Definitie f heet periodiek met periode p , wanneer voor alle x , waarvoor f gedefinieerd is, geldt
 $f(x+p) = f(x)$.

Vb.3.1. $\sin ax$ en $\cos ax$ zijn periodiek met kleinste positieve periode $2\pi/a$, voor $a > 0$.

Vb.3.2. Als f integreerbaar is en periodiek met periode p , dan geldt voor elke a

$$\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) dx .$$

Door verandering van de onafhankelijk veranderlijke is het geval van periodieke functies met periode p te herleiden tot dat met periode 2π . Definieer y door

$$2\pi x = py,$$

en definieer de functie g door

$$f(x) = f\left(\frac{py}{2\pi}\right) = g(y).$$

Daar f periodiek is met periode p , is g periodiek met periode 2π , wegens

$$g(y+2\pi) = f\left(\frac{p(y+2\pi)}{2\pi}\right) = f\left(\frac{py}{2\pi} + p\right) = f\left(\frac{py}{2\pi}\right) = g(y).$$

Als f voldoet aan de overige voorwaarden van de hoofdstelling, dan gelden deze voorwaarden ook voor g . Volgens de hoofdstelling geldt dus voor de fourierreeks van g voor $y = n$:

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nn + b_n \sin nn) = \frac{1}{2}[g(n+0) + g(n-0)],$$

met

$$\begin{Bmatrix} a_k \\ b_l \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \begin{Bmatrix} \cos ky \\ \sin ly \end{Bmatrix} dy.$$

In beide formules van y op x overgaand concluderen wij:

Hoofdstelling Als f integreerbaar is en periodiek met periode p , en als f voldoet aan de Dirichlet condities voor $x = \xi$, dan is de fourierreeks van f voor $x = \xi$ convergent:

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n \xi}{p} + b_n \sin \frac{2\pi n \xi}{p} \right) = \frac{1}{2}[f(\xi+0) + f(\xi-0)],$$

met

$$\begin{Bmatrix} a_k \\ b_l \end{Bmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{2}p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) \begin{Bmatrix} \cos \frac{2\pi kx}{p} \\ \sin \frac{2\pi lx}{p} \end{Bmatrix} dx.$$

Reeks en coëfficiënten heten de fourierreeks en de fouriercoëfficiënten van f .

Ook aan een functie F , die slechts is gedefinieerd voor $0 < x < a$ en waarvoor $F(0+0)$ en $F(a-0)$ bestaan, kunnen wij een fourierreeks toekennen. Daar toe zetten wij F periodiek voort, d.w.z. definiëren wij $f(x)$ door $f(x) = F(x)$ voor $0 < x < a$, $f(0) = \frac{1}{2}[F(0+0) + F(a-0)]$, $f(x+a) = f(x)$ voor alle x .

De verkregen f is periodiek met periode a . Aan F wordt nu toegekend de fourierreeks van f , dus

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2\pi n x}{a} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{a} \right] \text{ met } \begin{cases} a_k \\ b_\ell \end{cases} = \frac{1}{\frac{1}{2}a} \int_0^a F(x) \begin{cases} \cos \frac{2\pi k x}{a} \\ \sin \frac{2\pi \ell x}{a} \end{cases} dx.$$

Wanneer wij voor F , gedefinieerd voor $0 < x < a$, een fourier-cosinusreeks wensen, d.w.z. een fourierreeks met louter cosinustermen, dan dienen wij F voort te zetten tot een even functie. Dit kan door $g(x)$ te definiëren volgens

$$g(0) = F(0+0), \quad g(x) = F(x) \text{ voor } 0 < x < a, \quad g(x) = F(-x) \text{ voor } -a < x < 0,$$

$$g(a) = F(a-0), \quad g(x+2a) = g(x) \text{ voor alle } x.$$

De aldus gedefinieerde g is even en periodiek met periode $2a$. Aan F wordt nu toegekend de fourierreeks

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n x}{2a} \text{ met } a_k = \frac{2}{a} \int_0^a F(x) \cos \frac{2\pi k x}{2a} dx.$$

Willen wij voor $F(x)$, $0 < x < a$, een fourier-sinusreeks, d.w.z. een fourierreeks met louter sinustermen, dan dienen wij F voort te zetten tot een oneven functie. Wij krijgen dan de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n x}{2a} \text{ met } b_\ell = \frac{2}{a} \int_0^a F(x) \sin \frac{2\pi \ell x}{2a} dx.$$

Vb.3.1. De fourier-cosinusreeks van $\sin x$, $0 < x < \pi$, is de fourierreeks van $|\sin x|$, namelijk

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n x \text{ met } a_0 = \frac{4}{\pi} \text{ en}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(k+1)x - \sin(k-1)x] dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(k+1)\pi}{k+1} + \frac{\cos(k-1)\pi}{k-1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} \right], \text{ voor } k > 1.$$

Voor oneven k is $a_k = 0$, voor even k is $a_k = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k-1} \right] = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{k^2-1}$, dus

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}, \quad -\pi < x < \pi,$$

en zelfs voor alle x , omdat $|\sin x|$ periodiek is met periode 2π .

§4. Fourierintegralen

De methode van de vorige paragraaf betreffende toevoeging van een fourierreeks aan f is niet van toepassing op functies die voor alle x gedefinieerd zijn en niet periodiek zijn. Voor zulke functies, waarvoor

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

bestaat, geldt een op de hoofdstelling lijkende stelling waarin echter de fourierreeks wordt vervangen door de fourierintegraal. Deze stelling is van belang voor de beschrijving van niet zuiver periodieke verschijnselen, bijvoorbeeld die waar demping optreedt.

Wij beschouwen eerst een integreerbare functie f met $f(x) = 0$ voor $|x| > c$. Voor $\frac{1}{2}N > c$ en voor alle ξ , met $-\frac{N}{2} < \xi < \frac{N}{2}$, waarvoor f voldoet aan de Dirichlet condities, geldt volgens §3

$$\frac{1}{2}[f(\xi+0) + f(\xi-0)] = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n \xi}{N} + b_n \sin \frac{2\pi n \xi}{N} \right)$$

met

$$\begin{Bmatrix} a_n \\ b_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{2}N} \int_{-c}^c f(x) \begin{Bmatrix} \cos \frac{2\pi n x}{N} \\ \sin \frac{2\pi n x}{N} \end{Bmatrix} dx.$$

Na substitutie van a_n en b_n volgt

$$\frac{1}{2}[f(\xi+0) + f(\xi-0)] = \frac{1}{N} \int_{-c}^c f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{N} \int_{-c}^c f(x) \cos \frac{2\pi n(x-\xi)}{N} dx.$$

Noem $F(y) = \int_{-c}^c f(x) \cos y(x-\xi) dx$, dan staat er

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[f(\xi+0) + f(\xi-0)] &= \frac{1}{N} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{N} F\left(\frac{2\pi n}{N}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{N} \left[\dots + F\left(-\frac{4\pi}{N}\right) + F\left(-\frac{2\pi}{N}\right) + F(0) + F\left(\frac{2\pi}{N}\right) + F\left(\frac{4\pi}{N}\right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

De limiet voor $N \rightarrow \infty$ van het rechterlid is

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) dy, \text{ dus}$$

$$\frac{1}{2}[f(\xi+0) + f(\xi-0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-c}^c f(x) \cos y(x-\xi) dx.$$

Zonder bewijs delen wij mee dat deze formule niet alleen voor eindige c , maar ook voor $c \rightarrow \infty$ juist is, mits is voldaan aan zekere condities, waar-

onder het bestaan van $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$. Zo wordt verkregen de volgende ontwikke-

ling van f als fourierintegraal:

$$\frac{1}{2}[f(\xi+0) + f(\xi-0)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos y(x-\xi) dx.$$

Na uitwerking van $\cos(yx - y\xi)$ krijgen wij het volgende analogon van de hoofdstelling.

Stelling Als f , gedefinieerd voor alle x , integreerbaar is met eindige

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

en als f voldoet aan de Dirichlet condities voor $x = \xi$, dan geldt

$$\frac{1}{2}[f(\xi+0) + f(\xi-0)] = \int_0^{\infty} [A(y)\cos y\xi + B(y)\sin y\xi]dy,$$

met

$$A(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos yx dx \text{ en } B(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin yx dx.$$

Vb.4.1.

$$f(x) = 1 \text{ voor } 0 < x < 1, \quad f(x) = 0 \text{ voor } x < 0 \text{ en voor } x > 1, \\ f(0) = f(1) = \frac{1}{2}.$$

De fourierintegraal van f is

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_0^1 \cos y(x-\xi) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \left[\frac{\sin y(x-\xi)}{y} \right]_{x=0}^{x=1} = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin y(1-\xi) + \sin y\xi}{y} dy .$$

Voor $\xi = 0$, en ook voor $\xi = 1$, levert dit

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{1}{2} \pi .$$

Vb.4.2. $f(x) = e^{-hx} \sin px$ voor $x \geq 0$, $f(x) = 0$ voor $x < 0$.

Zij $h > 0$, dan stelt $f(x)$ voor positieve x een gedempte trilling voor. Er geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq \int_0^{\infty} e^{-hx} dx = \frac{1}{h} .$$

De fourierintegraal is

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{-hx} \sin px \cos y(x-\xi) dx.$$

Wij berekenen de fourierkoefficienten, met behulp van Hst. I, vb. 12.1.

$$A(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-hx} \sin px \cos yx dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-hx} [\sin(p+y)x + \sin(p-y)x] dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{p+y}{h^2 + (p+y)^2} + \frac{p-y}{h^2 + (p-y)^2} \right] = \frac{p}{\pi} \frac{h^2 + p^2 - y^2}{(h^2 + p^2 + y^2)^2 - 4p^2 y^2}.$$

$$B(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-hx} \sin px \sin yx dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-hx} [\cos(p-y)x - \cos(p+y)x] dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{h}{h^2 + (p-y)^2} - \frac{h}{h^2 + (p+y)^2} \right] = \frac{p}{\pi} \frac{2hy}{(h^2 + p^2 + y^2)^2 - 4p^2 y^2}.$$

Op grond van de fourierintegraal

$$f(\xi) = \int_0^{\infty} [A(y) \cos y\xi + B(y) \sin y\xi] dy$$

is de gedempte trilling gesplitst in een continu spectrum van harmonisch periodieke bewegingen met hoeksnelheid y (frequentie $y/2\pi$) en met als amplitude de wortel uit

$$A^2(y) + B^2(y) = \frac{p^2}{\pi^2} \frac{(h^2 + p^2 - y^2)^2 + 4h^2 y^2}{[(h^2 + p^2 + y^2)^2 - 4p^2 y^2]^2} =$$

$$= \frac{p^2}{\pi^2} \frac{1}{(h^2 - p^2 + y^2)^2 + 4h^2 p^2}.$$

Voor $h \geq p$ is de amplitude een dalende functie van y , dalend van $\frac{p}{\pi(h^2 + p^2)}$ naar 0. Voor $h < p$ echter is de amplitude stijgend voor $0 < y < \sqrt{p^2 - h^2}$ en vervolgens dalend naar 0; het maximum van de amplitude is $\frac{1}{2\pi h}$ en treedt op

bij $y = \sqrt{p^2 - h^2}$. Door de invloed van de demping krijgen wij dus niet één scherpe spectraallijn bij $y = p$, maar een band die des te smaller is naarmate de demping kleiner is.

§5. Complexe schrijfwijze voor fourierreksen en fourierintegralen

Zij f integreerbaar en periodiek met periode p . De algemene term van de fourierreks van f is

$$\begin{aligned} a_n \cos \frac{2\pi n \xi}{p} + b_n \sin \frac{2\pi n \xi}{p} &= \frac{1}{2} a_n \left(e^{\frac{2\pi i n \xi}{p}} + e^{-\frac{2\pi i n \xi}{p}} \right) + \frac{1}{2i} b_n \left(e^{\frac{2\pi i n \xi}{p}} - e^{-\frac{2\pi i n \xi}{p}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (a_n - i b_n) e^{\frac{2\pi i n \xi}{p}} + \frac{1}{2} (a_n + i b_n) e^{-\frac{2\pi i n \xi}{p}} = c_n e^{\frac{2\pi i n \xi}{p}} + c_{-n} e^{-\frac{2\pi i n \xi}{p}}, \end{aligned}$$

met, voor $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n) = \frac{1}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) \left[\cos \frac{2\pi n x}{p} - i \sin \frac{2\pi n x}{p} \right] dx = \frac{1}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{p}} dx,$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + i b_n) = \frac{1}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) \left[\cos \frac{2\pi n x}{p} + i \sin \frac{2\pi n x}{p} \right] dx = \frac{1}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) e^{\frac{2\pi i n x}{p}} dx.$$

Noem voorts $c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) dx$.

Als f voldoet aan de Dirichletvoorwaarden voor ξ , dan geldt

$$\frac{1}{2} [f(\xi+0) + f(\xi-0)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{\frac{2\pi i n \xi}{p}}, \text{ met } c_n = \frac{1}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{p}} dx$$

voor alle gehele n . Voorzichtigheidshalve hebben wij geschreven $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N$ en

niet $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$, omdat dit laatste symbool anders geïnterpreteerd zou kunnen worden.

Vb. 15.1. $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{N} - \frac{1}{N-1} - \dots - \frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} \right) = 0,$

maar

$$-\frac{1}{M} - \frac{1}{M-1} - \dots - \frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N}$$

heeft geen limiet voor M vast en $N \rightarrow \infty$.

Van een niet-periodieke f is de fourierintegraal

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos y(x-\xi) dx = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iy(x-\xi)} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iy(x-\xi)} dx = \end{aligned}$$

(vervang y in de eerste term door $-2\pi y$, in de tweede door $2\pi y$)

$$\begin{aligned} & = \int_{-\infty}^0 dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi iy(x-\xi)} dx + \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi iy(x-\xi)} dx = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi iy\xi} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi iyx} dx. \end{aligned}$$

Onder de bekende voorwaarden voor f geldt dus

$$\frac{1}{2}[f(\xi+0) + f(\xi-0)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi iy\xi} dy \text{ met } F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi iyx} dx.$$

Opmerking F(y) heet de fouriergetransformeerde van f(x). Als f bovendien continu is, dan geldt voor f en z'n fouriergetransformeerde F

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi iyx} dx \text{ en } f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{2\pi iy\xi} dy .$$

Opmerking De tweede integraal $\int_{-\infty}^{\infty}$ dient weer als $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N$ te worden geïnterpreteerd.

§6. Toepassing op partiële differentiaalvergelijkingen

We beschouwen drie voorbeelden van homogeen lineaire partiële differentiaalvergelijkingen van de tweede orde, namelijk

1. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (van hyperbolisch type),
2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ (van elliptisch type),
3. $\frac{\partial z}{\partial y} = k \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (van parabolisch type).

Wij interesseren ons voor oplossingen van zo'n partiële D.V., die voldoen aan een stelsel voorwaarden. Sommige van deze voorwaarden zijn homogeen lineair, d.w.z. zij hebben de eigenschap dat, met z_1 en z_2 , ook de lineaire combinatie $\alpha z_1 + \beta z_2$ eraan voldoen.

Voorbeelden van zulke homogeen lineaire voorwaarden zijn:

$$\begin{aligned} z(x,0) = 0 \text{ voor } 0 \leq x \leq 1, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(0,y) = 0 \text{ voor } 0 \leq y \leq 1, \\ z(1,y) = 0 \text{ voor alle } y, \quad z(x,y) \text{ is begrensd.} \end{aligned}$$

Lineaire combinaties van functies, die aan een homogeen lineaire D.V. en aan een stelsel homogeen lineaire voorwaarden voldoen, zijn eveneens oplossing van de D.V. en voldoen ook aan de homogeen lineaire voorwaarden. Andere voorwaarden zijn niet lineair, bijvoorbeeld de randvoorwaarde

$$(*) \quad z[x(s), y(s)] = f(s),$$

met $f(s) \neq 0$, die in elk punt van een gegeven kromme $x = x(s)$, $y = y(s)$ de waarde van z voorschrijft.

Wanneer de voorwaarden daartoe geschikt zijn kan men oplossingen construeren met de volgende methode van Fourier. Eerst probeert men een voorraad functies te verkrijgen die voldoen aan de partiële D.V. en aan de homogeen lineaire voorwaarden, maar wellicht niet aan alle voorwaarden.

Hiertoe zullen wij gebruiken de methode van separatie van variabelen, door oplossingen te zoeken van de vorm

$$z(x,y) = X(x) Y(y).$$

Vervolgens kan men, afhankelijk van de voorraad, op twee manieren verder gaan.

Bij een rij van aan de partiële D.V. en aan homogeen lineaire voorwaarden voldoende functies $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$, $z_3(x,y)$, ... probeert men coëfficiënten α_n te vinden zodat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n(x,y)$$

voldoet aan de partiële D.V. en aan alle voorwaarden. Daarbij rijzen twee vragen, die wij toelichten voor de randvoorwaarde (*):

Is $f(s)$ te schrijven als $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n[x(s), y(s)]$?

Geldt

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n(x,y) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{\partial}{\partial x} z_n(x,y) \text{ en } \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n(x,y) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{\partial}{\partial y} z_n(x,y).$$

De eerste vraag ligt, als $z_n[x(s), y(s)]$ sinus en cosinus zijn, op het gebied der Fourierreeksen. De tweede vraag ligt op het gebied der uniforme convergentie, te behandelen in §10.

Een tweede weg, die kan leiden tot het vinden van een oplossing van de partiële D.V. en de voorwaarden, is de volgende. Bij een schaar van aan de partiële D.V. en aan homogeen lineaire voorwaarden voldoende functies $z(x,y,\mu)$, voor alle reële μ , probeert men een functie $\alpha(\mu)$ te vinden zodat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\mu) z(x,y,\mu) d\mu$$

voldoet aan de partiële D.V. en aan alle voorwaarden. Dan rijzen twee vragen, die wij toelichten voor de randvoorwaarde (*):

Is $f(s)$ te schrijven als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\mu) z[x(s), y(s), \mu] d\mu ?$$

Geldt

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} ? \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \text{ en } \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} ? \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} .$$

De eerste vraag ligt, voor passende $z[x(s), y(s), \mu]$, op het gebied der Fourierintegralen. De tweede vraag ligt op het gebied der uniforme convergentie.

Vb.6.1. De één-dimensionale golfvergelijking

Een dunne, homogene, gespannen snaar met spanning s en dichtheid ρ trilt in het (x,u) -vlak. Neem aan dat elk punt van de snaar een beweging loodrecht op de x -as uitvoert. Zij $u(x,t)$ de uitwijking in x ten tijde t . De snaar is ingeklemd in de punten $(0,0)$ en $(\frac{1}{2}p,0)$ van het (x,u) -vlak. Ten tijde $t = 0$ is de uitwijking $f(x)$ en de snelheid $g(x)$. De uitwijking $u(x,t)$ wordt dan beschreven door de volgende partiële differentiaalvergelijking en voorwaarden:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ met } \alpha^2 = \frac{s}{\rho}, t > 0, 0 < x < \frac{1}{2}p,$$

randvoorwaarden:

$$u(0,t) = 0, u(\frac{1}{2}p,t) = 0, \text{ voor alle } t \geq 0,$$

beginvoorwaarden:

$$u(x,0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \text{ voor alle } 0 < x < \frac{1}{2}p.$$

De methode van separatie van variabelen toepassend, zoeken wij niet-triviale oplossingen van de vorm

$$u(x,t) = X(x) T(t).$$

De homogeen lineaire voorwaarden worden

$$X(0) = 0, X(\frac{1}{2}p) = 0,$$

en substitutie in de D.V. levert

$$X \frac{d^2 T}{dt^2} = \alpha^2 T \frac{d^2 X}{dx^2}, \text{ dus } \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{\alpha^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}.$$

Het linkerlid van de laatste vergelijking is onafhankelijk van x , en het rechterlid is onafhankelijk van t . Hieruit volgt dat beide leden onafhankelijk van x en van t , dus constant zijn. Wij noemen deze constante $-\mu^2$, en krijgen de twee gewone differentiaalvergelijkingen

$$(i) \quad \frac{d^2 T}{dt^2} + \mu^2 T = 0,$$

$$(ii) \quad \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\mu^2}{\alpha^2} X = 0, \text{ met } X(0) = X(\frac{1}{2}p) = 0.$$

De vergelijking (ii) heeft als oplossingen de lineaire combinaties van

$$\cos \frac{\mu x}{\alpha} \text{ en } \sin \frac{\mu x}{\alpha}.$$

Wegens $X(0) = X(\frac{1}{2}p) = 0$ kan echter geen cosinus optreden en moet

$$\sin \frac{\mu p}{2\alpha} = 0, \quad \frac{\mu p}{2\alpha} = n\pi, \quad \frac{\mu}{\alpha} = \frac{2\pi n}{p}, \quad n \text{ geheel.}$$

Als oplossingen van (ii) vinden wij

$$X(x) = \sin \frac{2\pi n x}{p}, \quad n=1,2,3,\dots,$$

en als oplossingen van (i) lineaire combinaties van

$$T(t) = \cos \frac{2\pi n \alpha t}{p} \text{ en } T(t) = \sin \frac{2\pi n \alpha t}{p}, \quad n=1,2,3,\dots$$

Voor een gedetailleerde afleiding wordt verwezen naar de opmerking aan het eind van dit voorbeeld.

De partiële D.V. en de randvoorwaarden laten dus als oplossingen toe de lineaire combinaties van

$$\sin \frac{2\pi n x}{p} \cos \frac{2\pi n \alpha t}{p} \text{ en } \sin \frac{2\pi n x}{p} \sin \frac{2\pi n \alpha t}{p}, \quad n=1,2,3,\dots$$

Wij proberen nu aan de oorspronkelijke D.V. met rand- en beginvoorwaarden te voldoen door

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2\pi n \alpha t}{p} + b_n \sin \frac{2\pi n \alpha t}{p} \right] \sin \frac{2\pi n x}{p},$$

met nader te bepalen a_n en b_n .

De fysische interpretatie hiervan is, dat de beweging een superpositie is van trillingen. Elke term van de reeks stelt een trillingsvorm van de snaar voor die bestaat uit een sinusoïde (factor $\sin \frac{2\pi nx}{p}$), die zelf harmonisch in de tijd oscilleert (factor $a_n \cos + b_n \sin$). De trillingstijd T van de n^e trilling is $T = \frac{p}{n\alpha}$; de frequenties $\frac{1}{T} = \frac{n\alpha}{p}$ zijn gehele veelvouden van de grondfrequentie $\frac{\alpha}{p}$ van de snaar.

De gestelde oplossing moet voldoen aan de beginvoorwaarden:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{2\pi nx}{p},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n\alpha}{p} b_n \sin \frac{2\pi nx}{p}.$$

Teneinde de onbekende koëfficiënten a_n en b_n te bepalen, zetten wij de op $0 < x < \frac{1}{2}p$ gegeven functies $f(x)$ en $g(x)$ voort tot oneven periodieke functies met periode p . Hun ontwikkeling als Fourier-sinusreeks luidt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{2\pi nx}{p}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin \frac{2\pi nx}{p},$$

met

$$f_n = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{1}{2}p} f(\xi) \sin \frac{2\pi n\xi}{p} d\xi, \quad g_n = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{1}{2}p} g(\xi) \sin \frac{2\pi n\xi}{p} d\xi.$$

Wat de beginvoorwaarden betreft leveren de Fourierkoëfficiënten f_n en g_n ons dus de gevraagde a_n en b_n . Rest nog het onderzoek, of de verkregen $u(x,t)$ inderdaad aan de partiële D.V. voldoet, hetgeen neerkomt op de vraag of geldt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Dit soort vragen wordt behandeld in §10.

Opmerking De differentiaalvergelijking

$$(ii) \quad \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\mu}{\alpha^2} X = 0, \quad \text{met } X(0) = X(\frac{1}{2}p) = 0,$$

heeft in het algemeen slechts de nuloplossing $X(x) \equiv 0$, tenzij μ speciale waarden aanneemt. Wij zoeken deze speciale waarden van μ .

De algemene oplossing van (ii) is

$$X(x) = A_{\mu} e^{\frac{i\mu x}{\alpha}} + B_{\mu} e^{-\frac{i\mu x}{\alpha}} \quad \text{voor } \mu \neq 0,$$

$$X(x) = A_0 + B_0 x \quad \text{voor } \mu = 0.$$

Invullen van $X(0) = X(\frac{1}{2}p) = 0$ levert

$$A_{\mu} + B_{\mu} = 0, \quad A_{\mu} e^{\frac{i\mu p}{2\alpha}} + B_{\mu} e^{-\frac{i\mu p}{2\alpha}} = 0, \quad \mu \neq 0.$$

Een van $A_{\mu} = B_{\mu} = 0$ verschillende oplossing wordt verkregen als

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{i\mu p}{2\alpha}} & e^{-\frac{i\mu p}{2\alpha}} \end{vmatrix} = 0, \quad e^{\frac{i\mu p}{\alpha}} = 1, \quad \mu = \frac{2\pi n \alpha}{p},$$

voor $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Neem $A_{\mu} = 1, B_{\mu} = -1$, dan volgen als oplossingen van (ii)

$$X(x) = \sin \frac{2\pi n x}{p},$$

voor elke gehele n .

Vb.6.2. Twee-dimensionale stationaire warmtegeleiding

De stationaire temperatuurverdeling T in een tweedimensionaal gebied G wordt beschreven door de voorgeschreven temperatuurverdeling op de rand van G en door de vergelijking van Laplace

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Voor een cirkelvormige schijf met straal 1 dient uit de gegeven temperatuurverdeling $T(1, \varphi) = f(\varphi)$ op de rand te worden bepaald de temperatuurverdeling $T(r, \varphi)$ over de schijf. Dit komt, in poolcoördinaten, neer op het volgende probleem:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0,$$

$$T(1, \varphi) = f(\varphi) \quad \text{voor alle } \varphi,$$

$$T(r, \varphi + 2\pi) = T(r, \varphi) \text{ voor alle } 0 < r \leq 1 \text{ en alle } \varphi,$$

$$T(r, \varphi) \text{ begrensd.}$$

Met de methode van separatie der variabelen bepalen wij eerst een voorraad functies van de vorm

$$T(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi)$$

die voldoen aan de partiële D.V. en aan de homogeen lineaire randvoorwaarden. Substitutie geeft

$$\frac{d^2 R}{dr^2} \Phi + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \Phi + \frac{1}{r^2} R \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0,$$

$$\frac{1}{R} \left(r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}.$$

Het linkerlid is onafhankelijk van φ , het rechterlid is onafhankelijk van r . Hieruit volgt dat beide leden onafhankelijk van r en van φ , dus constant zijn. Noem de constante c , dan geldt

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - cR = 0; \quad \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + c\Phi = 0.$$

Substitutie van $T(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi)$ in de homogeen lineaire randvoorwaarden geeft

$$R(r) \text{ begrensd; } \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \text{ voor alle } \varphi.$$

De differentiaalvergelijking voor $\Phi(\varphi)$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + c\Phi = 0, \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

heeft slechts dan een van de nuloplossing verschillende oplossing, wanneer $c = n^2$, $n=0, 1, 2, \dots$, namelijk

$$\Phi(\varphi) = \cos n\varphi \quad \text{en} \quad \Phi(\varphi) = \sin n\varphi.$$

De differentiaalvergelijking voor $R(r)$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - n^2 R = 0, \quad R(r) \text{ begrensd,}$$

is van het type Euler, heeft de oplossingen

$$R(r) = 1 \quad \text{en} \quad R(r) = \log r \quad \text{als } n = 0,$$

$$R(r) = r^n \quad \text{en} \quad R(r) = r^{-n} \quad \text{als } n \neq 0,$$

dus heeft de begrensde oplossingen

$$R(r) = r^n, \quad n=0,1,2,\dots$$

De gezochte voorraad functies $T(r, \varphi)$ bestaat dus uit de lineaire combinaties van

$$r^n \cos n\varphi \quad \text{en} \quad r^n \sin n\varphi, \quad n=0,1,2,\dots$$

Wij trachten nu een oplossing van het oorspronkelijke probleem te vinden van de vorm

$$T(r, \varphi) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

De onbekende coëfficiënten a_n en b_n kunnen worden bepaald uit de randvoorwaarde:

$$T(1, \varphi) = f(\varphi) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Inderdaad, wanneer $f(\varphi)$ aan zekere voorwaarden voldoet, dan zijn deze coëfficiënten de Fouriercoëfficiënten van $f(\varphi)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx,$$

voor $n=1,2,3,\dots$

Wanneer de coëfficiënten gevonden zijn, dient nog te worden geverifieerd of de gevonden oplossing $T(r, \varphi)$ inderdaad aan de partiële D.V. voldoet.

Vb.6.3. Tijdafhankelijke warmtegeleiding

De tijdafhankelijke warmtegeleiding, voor een langs de x-as gelegen dunne homogene staaf van lengte ℓ , wordt beheerst door de partiële D.V.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = k \frac{\partial^2 W}{\partial x^2},$$

waarin W de temperatuur, k de warmtegeleidingscoëfficiënt, en t de tijd is. Laat de volgende voorwaarden gegeven zijn:

randvoorwaarden: $W(0,t) = 0, W(\ell,t) = 0;$

beginvoorwaarde: $W(x,0) = f(x).$

Teneinde een oplossing $W(x,t)$ te vinden van de partiële D.V. en de voorwaarden bepalen wij eerst een voorraad oplossingen $W(x,t) = X(x) T(t)$ die voldoen aan de D.V. en aan de homogeen lineaire randvoorwaarden:

$$\frac{1}{kT} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}, X(0) = X(\ell) = 0.$$

De beide leden van de differentiaalvergelijking zijn constant. Noem deze constante $-\mu^2$, dan volgt

$$\frac{dT}{dt} = -k\mu^2 T; \frac{d^2 X}{dx^2} + \mu^2 X = 0, X(0) = X(\ell) = 0.$$

De tweede D.V. heeft slechts niet-triviale oplossingen als $\mu = \pi n/\ell$, n geheel, en wij vinden als voorraad:

$$T = e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\ell^2} kt}, X = \sin \frac{\pi n x}{\ell}, W = e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\ell^2} kt} \sin \frac{\pi n x}{\ell},$$

voor $n=1,2,3,\dots$

Aanpassing aan de beginvoorwaarde geeft als oplossing voor het oorspronkelijke probleem

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\ell^2} kt} \sin \frac{\pi n x}{\ell},$$

met

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi .$$

Vb.6.4. Eéndimensionale diffusie

Diffusie in een ééndimensionale kolom langs de x-as wordt beschreven door de vergelijking

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} ,$$

waarin $C(x,t)$ de concentratie, k de diffusiecoëfficiënt, en t de tijd is. Wij beschouwen een oneindig lange kolom, $-\infty < x < \infty$, en de voorwaarden:

$$C(x,t) \text{ is begrensd, } C(x,0) = f(x).$$

Uit de eerste, homogeen lineaire, voorwaarde en de partiële D.V. wordt met de methode van separatie als volgt een voorraad functies verkregen:

$$C(x,t) = X(x) T(t), \quad \frac{1}{kT} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\mu^2 ,$$

$$C(x,t) = e^{-\mu^2 kt} e^{i\mu x}, \quad \mu \text{ reëel.}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de begrensdheid van $C(x,t)$, dus van $X(x)$ en $T(t)$. Met behulp van de theorie der Fourierintegralen proberen wij nu een oplossing te vinden van het oorspronkelijke probleem, door te stellen

$$C(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\mu) e^{-\mu^2 kt + i\mu x} d\mu .$$

Aan de beginvoorwaarde is voldaan als

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\mu) e^{i\mu x} d\mu .$$

Stel $\mu = 2\pi y$, dan moet in

$$C(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(y) e^{-4\pi^2 y^2 kt + 2\pi i y x} dy$$

A(y) zo worden bepaald dat is voldaan aan

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(y) e^{2\pi i y x} dy.$$

Onder zekere voorwaarden lukt dit met

$$A(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-2\pi i y \xi} d\xi.$$

§7. De ongelijkheid van Bessel

Alle in deze § voorkomende functies zijn periodiek met periode 2π en integreerbaar op $-\pi \leq t \leq \pi$ voorondersteld. Zulke functies vormen een vectorruimte, want als f en g periodiek en integreerbaar zijn dan is, met reële getallen α en β , de functie $\alpha f + \beta g$ dat ook.

Definitie Het inwendig product van twee functies f en g is

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

Dit inwendig product voldoet aan de eigenschappen

$$(f,g) = (g,f); (f,\alpha g + \beta h) = \alpha(f,g) + \beta(f,h); (f,f) \geq 0.$$

Definitie Een rij functies $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ heet orthonormaal als

$$(\varphi_k, \varphi_\ell) = \begin{cases} 1 & \text{voor } k = \ell \\ 0 & \text{voor } k \neq \ell \end{cases}.$$

Stelling Als $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ orthonormaal is, dan geldt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2 \leq (f,f),$$

genaamd de ongelijkheid van Bessel.

Bewijs. Beschouw eerst een eindige orthonormale rij $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Voor willekeurige reële getallen α_k geldt

$$\begin{aligned} (f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k) &= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k (f, \varphi_k) + (\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \varphi_\ell) = \\ &= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \\ &= (f, f) - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2 + \sum_{k=1}^n [\alpha_k - (f, \varphi_k)]^2. \end{aligned}$$

De gehele uitdrukking is ≥ 0 en, als functie van α_k , minimaal voor

$$\alpha_k = (f, \varphi_k), \quad k=1, \dots, n.$$

Hieruit volgt (vergelijk Hoofdstuk II, §5, stelling 4)

$$\sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2 \leq (f, f).$$

Voor een oneindige orthonormale rij geldt dit voor elke n , dus de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2$ is convergent met som $\leq (f, f)$. Dit bewijst de stelling. Een gevolg van de stelling is dat voor de algemene term van de reeks geldt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f, \varphi_k) = 0.$$

Wij passen de ongelijkheid van Bessel toe op de orthonormale rij

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Op de factor $\sqrt{\pi}$ na zijn dan (f, φ_k) , voor $k \geq 1$, juist de fourierkoefficienten van f

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad b_\ell = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \ell t dt.$$

Voor deze koëfficiënten geldt dus

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{\ell=1}^{\infty} (a_{\ell}^2 + b_{\ell}^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt,$$

met als gevolg

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt = 0, \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} b_{\ell} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \ell t dt = 0.$$

Hieruit volgt direct de volgende hulpstelling, die wij in §8 zullen gebruiken.

Hulpstelling Als a en b constant met $-\pi \leq a < b \leq \pi$ en als $f(t)$ integreerbaar tussen a en b , dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt = 0.$$

Bewijs. Definieer $g(t)$ door

$$g(t) = f(t) \text{ voor } a \leq t \leq b, \quad g(t) = 0 \text{ voor } -\pi \leq t < a \text{ en voor } b < t \leq \pi,$$

dan is

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(n + \frac{1}{2})t dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos \frac{1}{2}t \sin nt dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin \frac{1}{2}t \cos nt dt. \end{aligned}$$

Beide integralen naderen tot 0 voor $n \rightarrow \infty$.

Opmerking Behalve de ongelijkheid van Bessel geldt voor de orthonormale trigonometrische rij ook de

gelijkheid van Parseval: $\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{\ell=1}^{\infty} (a_{\ell}^2 + b_{\ell}^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt,$

die wij niet zullen bewijzen.

§8. Het bewijs van de hoofdstelling

Ter voorbereiding tonen wij aan dat $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ky = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})y}{2 \sin \frac{1}{2}y}$ (1)

immers

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ky &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}y} \left[\sin \frac{1}{2}y + \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{1}{2}y \cos ky \right] = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}y} \left[\sin \frac{1}{2}y + \sum_{k=1}^n \{ \sin(k + \frac{1}{2})y - \sin(k - \frac{1}{2})y \} \right] = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}y} \left[\sin \frac{1}{2}y + \sin \frac{3}{2}y - \sin \frac{1}{2}y + \sin \frac{5}{2}y - \sin \frac{3}{2}y + \dots + \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. + \sin(n + \frac{1}{2})y - \sin(n - \frac{1}{2})y \right] = \\ &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})y}{2 \sin \frac{1}{2}y} . \end{aligned}$$

Dit is goed voor $\sin \frac{1}{2}y \neq 0$, maar ook voor $y \rightarrow 0$ omdat dan beide leden naderen tot $\frac{1}{2} + n$. Wij merken nog op dat

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{1}{2}y} dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ky \right) dy = 1. \quad (2)$$

Hoofdstelling Als f integreerbaar is en periodiek met periode 2π en als f aan de Dirichlet condities voor ξ voldoet, dan geldt

$$\frac{1}{2} [f(\xi+0) + f(\xi-0)] = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\xi + b_n \sin n\xi),$$

met

$$\begin{cases} a_k \\ b_\ell \end{cases} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \begin{cases} \cos kx \\ \sin \ell x \end{cases} dx.$$

Bewijs. Zij $s_n(x)$ de n-de partiële som van de fourierreeks van f .

Vul de fouriercoëfficiënten in, dan krijgt men voor $x = \xi$:

$$\begin{aligned} s_n(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n [\cos k\xi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + \sin k\xi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos k\xi \cos kx + \sin k\xi \sin kx) \right] f(x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-\xi) \right] f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ky \right] f(\xi+y) dy, \end{aligned}$$

waarin $x - \xi = y$ is gesteld en gebruik is gemaakt van de periodiciteit van

de integrand. Wij splitsen de integraal in $\int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi}$ en vervangen in de

eerste integraal y door $-y$, dan

$$\begin{aligned} s_n(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ky \right] [f(\xi+y) + f(\xi-y)] dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})y}{2 \sin \frac{1}{2}y} \cdot [f(\xi+y) + f(\xi-y)] dy, \end{aligned}$$

volgens de voorbereidende formule (1). Wanneer wij links en rechts van (2) vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}[f(\xi+0) + f(\xi-0)]$ en de resultaten aftrekken van de zojuist verkregen uitdrukking voor $s_n(\xi)$, dan is

$$s_n(\xi) - \frac{1}{2}[f(\xi+0) + f(\xi-0)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})y}{2 \sin \frac{1}{2}y} [f(\xi+y) + f(\xi-y) - f(\xi+0) - f(\xi-0)] dy.$$

Wanneer deze uitdrukking limiet 0 heeft voor $n \rightarrow \infty$, dan is de fourierreeks van f convergent met som $\frac{1}{2}[f(\xi+0) + f(\xi-0)]$.

Volgens de hulpstelling van §7 is dit het geval als

$$\frac{f(\xi+y) + f(\xi-y) - f(\xi+0) - f(\xi-0)}{2 \sin \frac{1}{2}y} = \frac{\frac{1}{2}y}{\sin \frac{1}{2}y} \left[\frac{f(\xi+y) - f(\xi+0)}{y} - \frac{f(\xi-y) - f(\xi-0)}{-y} \right]$$

integreerbaar is voor $0 \leq y \leq \pi$. Dit is waar, omdat deze uitdrukking een limiet voor $y \rightarrow 0$ bezit, dank zij de voorwaarden van Dirichlet voor ξ . Hiermee is de hoofdstelling bewezen.

§9. Rijen van functies, uniforme convergentie

Vb.9.0. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-x)^n = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{voor } x = 0 \end{cases}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x(1-x)^n = 0$ voor $0 \leq x \leq 1$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} nx(1-x)^n = 0$ voor $0 \leq x \leq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 x(1-x)^n = 0$ voor $0 \leq x \leq 1$.

Definitie Een rij functies f_n convergeert puntgewijs naar de functie f , als voor alle geoorloofde x geldt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Vb.9.1. Zij $f_n(x) = (1-x)^n$, $0 \leq x \leq 1$ en $d(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{voor } x = 0 \end{cases}$.

De rij functies f_n convergeert puntgewijs naar de functie d . Voor elke n doorloopt

$$|f_n(x) - d(x)|$$

de getallen van 0 tot 1.

Vb.9.2. Zij $g_n(x) = x(1-x)^n$, $0 \leq x \leq 1$ en $\sigma(x) = 0$, $0 \leq x \leq 1$.

De rij g_n convergeert puntgewijs naar de functie σ . De functie g_n neemt zijn maximum aan voor $x = \frac{1}{n+1}$ en

$$g_n \left(\frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Voor elke $0 \leq x \leq 1$ geldt dus

$$|g_n(x) - \sigma(x)| \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Het rechterlid nadert tot 0 voor $n \rightarrow \infty$.

Vb.9.3. Zij $h_n(x) = nx(1-x)^n$, $0 \leq x \leq 1$, en $\sigma(x) = 0$, $0 \leq x \leq 1$.

De rij h_n convergeert puntgewijs naar de functie σ . De functie h_n neemt zijn maximum aan voor $x = \frac{1}{n+1}$ en

$$h_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} \text{ voor } n \rightarrow \infty.$$

Voor elke n doorloopt dus

$$|h_n(x) - \sigma(x)|$$

de getallen van 0 tot een getal in de buurt van $\frac{1}{e}$.

Vb.9.4. Zij $i_n(x) = n^2 x(1-x)^n$, $0 \leq x \leq 1$, en $\sigma(x) = 0$, $0 \leq x \leq 1$.

De rij i_n convergeert puntgewijs naar de functie σ . De functie i_n neemt zijn maximum aan voor $x = \frac{1}{n+1}$ en

$$i_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \infty \text{ voor } n \rightarrow \infty.$$

Voor elke n doorloopt dus

$$|i_n(x) - \sigma(x)|$$

de getallen van 0 tot een groot getal.

Definitie De ϵ -band om een functie f is de verzameling der functies g zodat

$$|f(x) - g(x)| < \epsilon$$

voor alle x waarvoor $f(x)$ is gedefinieerd.

Definitie De rij functies $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$ convergeert uniform naar een functie f , als bij elke $\epsilon > 0$ een N bestaat zodat voor $n \geq N$ alle f_n behoren tot de ϵ -band om f .

Opmerking N hangt alleen af van ϵ , niet van x !

Wanneer een rij $\{f_n\}$ uniform convergeert naar f , dan convergeert $\{f_n\}$ ook puntgewijs naar f . Dit volgt direct uit de definities. Het omgekeerde is niet juist zoals blijkt uit onze voorbeelden.

Vb.9.2. De rij g_n convergeert uniform naar σ omdat

$$|g_n(x) - \sigma(x)| \leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} < \epsilon \text{ voor } n > \frac{1}{2\epsilon}.$$

Vb.9.1,3,4. De rij f_n is niet uniform convergent naar d omdat $|f_n(x) - d(x)|$ niet voor alle x kleiner dan $\epsilon < 1$ te krijgen is. Evenmin zijn de rijen h_n en i_n uniform convergent naar σ .

Vb.9.5. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, 0 \leq x \leq 1.$

Wegens $|f_n(x) - \sigma(x)| = \left| \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

is f_n binnen de ϵ -band om σ als $n > \frac{1}{\epsilon^2}$. De rij f_n convergeert dus uniform naar σ op $0 \leq x \leq 1$.

Vb.9.6. $f_n(x) = x^n, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$

Daar

$$|f_n(x) - \sigma(x)| = |x^n - 0| = |x|^n \leq \frac{1}{2^n} \text{ op het betreffende interval,}$$

is f_n binnen de ϵ -band om σ voor $n > -2 \log \epsilon$. De rij convergeert uniform op $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Vb.9.7. $f_n(x) = nx^2 \sin \frac{1}{nx}$ voor $x \neq 0, f_n(0) = 0.$

De rij f_n convergeert puntgewijs naar $f(x) = x$. Wij tonen aan dat deze convergentie uniform is, gebruik makend van de formule van Taylor voor \sin :

$$\left| x - nx^2 \sin \frac{1}{nx} \right| = nx^2 \left| \frac{1}{nx} - \sin \frac{1}{nx} \right| = nx^2 \left| \sin \frac{\theta}{nx} \right| \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2 x^2} \leq \frac{1}{2n}.$$

Inderdaad ligt f_n in de ϵ -band van de limietfunctie voor $n > \frac{1}{2\epsilon}$.

Na deze voorbeelden worden drie stellingen bewezen, die een gedeeltelijk antwoord geven op de vragen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} s_n(x+h) \stackrel{?}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x+h),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(x) dx \stackrel{?}{=} \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} s_n(x) \stackrel{?}{=} \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x).$$

Stelling 1 De limietfunctie van een uniform convergente rij van continue functies is continu.

Bewijs. Laat de rij continue functies s_n uniform convergeren naar de functie s op $a \leq x \leq b$.

Merk op dat

$$|s(x+h) - s(x)| \leq |s(x+h) - s_n(x+h)| + |s_n(x+h) - s_n(x)| + |s_n(x) - s(x)|.$$

Neem $n(\epsilon)$ zodat s_n in de $(\frac{1}{3}\epsilon)$ -band van s ligt, dan zijn de eerste en de derde term $< \frac{1}{3}\epsilon$. Kies vervolgens, op grond van de continuïteit van s_n , het getal δ zo, dat ook de tweede term $< \frac{1}{3}\epsilon$ is voor $|h| < \delta$. Dan geldt

$$|s(x+h) - s(x)| < 3 \cdot \frac{1}{3}\epsilon \text{ voor } |h| < \delta,$$

waarmee de continuïteit van s voor elke x in $a \leq x \leq b$ is bewezen.

Opmerking Een gevolg van deze stelling is:

Als een rij continue functies in een interval convergeert naar een discontinue functie, dan is deze convergentie niet uniform. Vgl. Vb.9.1.

Opmerking Vb.9.3. toont, dat ook niet-uniform convergente rijen van continue functies puntgewijs kunnen convergeren naar een continue functie.

Stelling 2 Als de functies s_1, s_2, \dots en s gedefinieerd en eigenlijk integreerbaar zijn op $a \leq x \leq b$ en als de rij s_n uniform convergeert naar s , dan geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(x) dx = \int_a^b s(x) dx. \text{ Voorts convergeert de rij}$$

$$\int_a^x s_n(t) dt \text{ uniform naar } \int_a^x s(t) dt \text{ op } a \leq x \leq b.$$

Bewijs. Zij ℓ een vast getal $> b - a$. Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Bepaal N zodat voor $n > N$ de functies s_n in de $(\frac{\epsilon}{\ell})$ -band van s liggen. Merk op dat N alleen van ϵ en ℓ afhangt. Daarom volgt

$$\left| \int_a^b s(t) dt - \int_a^b s_n(t) dt \right| \leq \int_a^b |s(t) - s_n(t)| dt \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{\ell} dt = \frac{\epsilon(b-a)}{\ell} < \epsilon.$$

Hieruit volgen de beweringen.

Opmerking Vb.9.4. handelt over een niet-uniform convergente rij $i_n(x) = n^2 x(1-x)^n$, waarvoor

$$\int_0^1 i_n(x) dx = \int_0^1 n^2 x(1-x)^n dx = n^2 \int_0^1 (1-y)y^n dy =$$

$$= n^2 \int_0^1 (y^n - y^{n+1}) dy = n^2 \left[\frac{y^{n+1}}{n+1} - \frac{y^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 i_n(x) dx = 1, \text{ echter } \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} i_n(x) dx = 0.$$

Stelling 3 Als de rij functies s_n puntgewijs convergeert naar de functie s , als alle s_n differentieerbaar zijn met continue afgeleide en als de rij der afgeleiden s'_n uniform convergeert naar de functie σ , alles op $a \leq x \leq b$, dan is ook s differentieerbaar en geldt $s'(x) = \sigma(x)$, $a \leq x \leq b$.

Bewijs. Uit het gegeven volgt met Stelling 2:

$$\int_a^x \sigma(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x s'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n(x) - s_n(a)) = s(x) - s(a).$$

En hieruit volgt $s'(x) = \sigma(x)$.

Opmerking In de stelling wordt uitdrukkelijk de uniforme convergentie geëist van de rij der afgeleiden. De uniforme convergentie van de rij functies zelf is niet voldoende. Dit zien wij aan het volgende voorbeeld.

Vb.9.8. De rij functies

$$s_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$$

convergeert uniform naar 0 op elk interval $a \leq x \leq b$. De rij der afgeleiden

$$s'_n(x) = \cos nx$$

is voor geen enkele $x \neq 2k\pi$ convergent.

§10. Reeksen van functies, uniforme fourierreeksen

Definitie Een reeks van functies convergeert puntgewijs resp. uniform op een interval $a \leq x \leq b$, als de rij der partiële sommen puntgewijs resp. uniform convergeert in dat interval.

Een herformulering van de stellingen van §9 luidt:

Stelling 1 De somfunctie van een uniform convergente reeks van continue functies is continu.

Stelling 2 Als de functies u_1, u_2, \dots en s gedefinieerd en eigenlijk integreerbaar zijn op $a \leq x \leq b$, als $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uniform convergeert met som s , dan geldt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(t) dt = \int_a^b s(t) dt .$$

Voorts convergeert de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt \text{ uniform op } a \leq x \leq b$$

met som $\int_a^x s(t) dt$.

Stelling 3 Als u_1, u_2, u_3, \dots differentieerbare functies zijn met continue afgeleide, als $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ puntgewijs convergeert met som s , als $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'$ uniform convergeert met som σ , alles op $a \leq x \leq b$, dan is ook s differentieerbaar en geldt $s' = \sigma$.

Vb.10.1. De fourierreeks $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{voor } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{voor } x = 0, \pi \end{cases}$

van Vb.2.3. is volgens stelling 1 niet uniform convergent op $0 \leq x \leq \pi$.

De hoofdstelling der fourierreeksen zegt, dat onder de Dirichlet condities de fourierreeks van een functie f voor $-\pi \leq x \leq \pi$ puntgewijs convergeert naar $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$. Wij zoeken voorwaarden voor f onder welke deze convergentie uniform is voor $-\pi \leq x \leq \pi$. Daartoe hebben wij nodig het volgende criterium van Weierstrass voor uniforme convergentie.

Stelling 4 Wanneer de absolute waarden van de termen van een reeks van functies kleiner zijn dan de termen van een convergente reeks van getallen, dan convergeert de reeks van functies uniform.

Bewijs. Zij $|u_k(x)| \leq v_k$ voor $a \leq x \leq b$ en $k=1,2,3,\dots$. Zij voorts $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ convergent met som V . Op grond van de vergelijkingsstelling is dan $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ absoluut convergent. Noem de som $s(x)$, $a \leq x \leq b$. Dan is

$$\left| s(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k = V - \sum_{k=1}^n v_k.$$

Wegens de convergentie van $\sum v_k$ is bij gegeven $\epsilon > 0$ te vinden $N(\epsilon)$ zodat voor $n \geq N$ rechts $< \epsilon$. Dan is echter ook links $< \epsilon$. Omdat N niet van x afhangt,

is $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ uniform convergent.

$$\text{Vb. 10.2. } \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kx}{k^2},$$

de fourierreeks van $f(x) = x^2$, is voor $-\pi \leq x \leq \pi$ uniform convergent, omdat de termen $< \frac{1}{k^2}$ en $\sum \frac{1}{k^2}$ convergeert.

Vb. 10.3. De machtreeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ is uniform convergent voor $|x| \leq p$, waar p kleiner is dan de convergentiestraal R van de machtreeks. Inderdaad, de algemene term van de machtreeks voldoet aan

$$|a_n x^n| \leq |a_n p^n| \text{ en } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n p^n| \text{ convergeert voor } p < R.$$

Stelling 5 Zij f continu en periodiek met periode 2π . Zij voorts f differentieerbaar voor $-\pi \leq x \leq \pi$, eventueel op een eindig aantal uitzonderingen na, met integreerbare afgeleide. Dan is de fourierreeks van f uniform convergent op $-\pi \leq x \leq \pi$.

Bewijs. Voor de fourierkoëfficiënten a_n en b_n van f geldt, voor $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \begin{pmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \begin{pmatrix} \frac{1}{n} d \sin nx \\ -\frac{1}{n} d \cos nx \end{pmatrix} dx \\ &= \frac{-1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \sin nx \\ -\frac{1}{n} \cos nx \end{pmatrix} dx \end{aligned}$$

de laatste gelijkheid met behulp van partiële integratie. Als c_n en d_n de fourierkoëfficiënten van $f'(x)$ zijn, dan volgt

$$c_n = nb_n \text{ en } d_n = -na_n, \text{ dus } c_n^2 + d_n^2 = n^2(a_n^2 + b_n^2).$$

Volgens de ongelijkheid van Bessel, toegepast op f' , geldt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_k^2 + d_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 dx.$$

De reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2)$$

is dus convergent. Voor de algemene term van de fourierreeks van f geldt nu

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{1}{k} k \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k^2} + k^2 (a_k^2 + b_k^2) \right],$$

waarbij de laatste ongelijkheid is verkregen met behulp van $pq \leq \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$.

De algemene term van de fourierreeks van f is dus in absolute waarde kleiner dan de algemene term van een convergente reeks waar x niet in voorkomt. Volgens Stelling 4 is de fourierreeks voor $-\pi \leq x \leq \pi$ uniform convergent.

Opmerking De som van de fourierreeks van f is $f(x)$ voor elke x waar f voldoet aan de Dirichlet condities.

§11. Het verschijnsel van Gibbs

$$\text{De fourierreeks } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{voor } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{voor } x = 0, \pi, \end{cases}$$

uit Vb.2.3. en Vb.10.1. is niet uniform convergent voor $0 \leq x \leq \pi$. Wij onderzoeken het gedrag van deze reeks nader door het maximum te bepalen van

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

$$\frac{ds_n(x)}{dx} = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k+1)x = \frac{1}{2 \sin x} \sum_{k=0}^{n-1} 2 \sin x \cos(2k+1)x =$$

$$= \frac{1}{2 \sin x} \sum_{k=0}^{n-1} [\sin(2k+2)x - \sin 2kx] = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$$

voor $x \neq m\pi$. Voor $x = \pi/2n$ bereikt $s_n(x)$ zijn eerste, tevens grootste, maximum

$$s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}}{2k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{n} \frac{\sin(k + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{n}}{(k + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{n}}$$

Nu geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt ,$$

immers de rechterintegraal kan worden benaderd door het interval $0 \leq t \leq \pi$ te verdelen in n gelijke delen ter lengte $\frac{\pi}{n}$ en de functiewaarde telkens in het midden $(k + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{n}$ van het k -de deel te nemen. De waarde 0.926 van het rechterlid vinden wij uit een tabel. De hoogte van de eerste top van $s_n(x)$, waarvan de abscis $\pi/2n$ tot nul nadert voor $n \rightarrow \infty$, heeft dus een limietwaarde die ongeveer 18% groter is dan de waarde $\frac{1}{2}\pi = 0.785$. Dit noemt men het verschijnsel van Gibbs (vgl. Vb.9.3.). Dit verschijnsel is geenszins in strijd met de formule

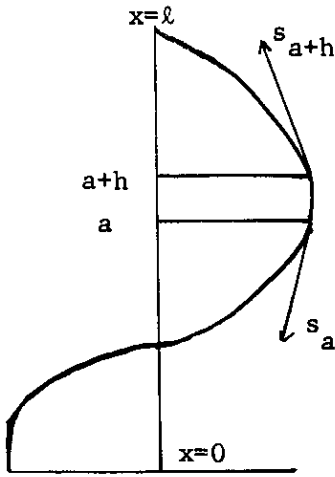
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{voor } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{voor } x = 0, \pi \end{cases}$$

Immers voor $x = 0$ is $s_n(0) = 0$ voor alle n . Voor een vaste $x > 0$ geldt voor voldoende grote n dat $\frac{\pi}{2n} < x$, zodat de ongelijkheid

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) > \frac{1}{2}\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x), \quad 0 < x < \pi,$$

geen contradictie inhoudt. Wel zien wij dat, naarmate x dichterbij 0 ligt, n groter moet worden gemaakt om een goede benadering van de limietwaarde te krijgen. De convergentie van de reeks wordt dus steeds slechter naarmate x dichterbij nul ligt.

Appendix: Slingerbeweging van een ketting



Spanning $s(x)$,
 uitwijking $u(x,t)$
 massa per lengte-eenheid ρ .

Op elk der uiteinden van een stukje ketting, tussen $x = a$ en $x = a+h$, werkt een kracht in tangentiële richting. De resulterende kracht heeft in u -richting de component

$$s_{a+h} \sin \alpha_2 - s_a \sin \alpha_1, \text{ met } \tan \alpha_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=a}, \tan \alpha_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=a+h}.$$

Neem aan dat α_1 en α_2 zo klein zijn dat \sin kan worden vervangen door \tan . Pas toe $K = ma$ op het beschouwde stukje, dan volgt

$$\left[s \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=a+h} - \left[s \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=a} = \int_a^{a+h} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx.$$

Deel door h , en laat $h \rightarrow 0$, dan wordt verkregen de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(s \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Voor s en ρ constant, $\alpha^2 = s/\rho$, is dit de partiële differentiaalvergelijking voor de trillende snaar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Voor een ketting, met $s(x) = \rho g x$, komt er

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

De methode van separatie van variabelen, $u(x,t) = X(x) T(t)$, geeft

$$\frac{g}{X(x)} \left[x \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{dX}{dx} \right] = \frac{1}{T(t)} \frac{d^2T}{dt^2} = -\omega^2,$$

dus harmonische trillingen waarbij $X(x)$ voldoet aan

$$x \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{dX}{dx} + \frac{\omega^2}{g} X = 0.$$

Neem als nieuwe variabele y , met $x = y^2$, dan volgt

$$y^2 \frac{d^2X}{dy^2} + y \frac{dX}{dy} + \left(\frac{2\omega}{\sqrt{g}} \right)^2 y^2 X = 0.$$

Dit is de differentiaalvergelijking van Bessel van de nulde orde, in de variabele $\frac{2\omega y}{\sqrt{g}}$.

De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking luidt

$$X(x) = A J_0(2\omega\sqrt{x/g}) + B Y_0(2\omega\sqrt{x/g}).$$

Nu wordt de functie Y_0 oneindig voor $x = 0$ (zie p.40). De functies $u(x,t)$, $X(x)$ dienen zeker eindig te zijn voor $x = 0$, zodat we moeten stellen $B = 0$. Er volgt dan

$$X(x) = A J_0(2\omega\sqrt{x/g}), \quad u(x,t) = A J_0(2\omega\sqrt{x/g}) \cos(\omega t + \varphi).$$

De uitwijking $u(x,t)$ moet tenslotte nog voldoen aan de voorwaarde $u(\ell,t) = 0$, corresponderend met het vaste uiteinde van de ketting. We vinden dan

$$J_0(2\omega\sqrt{\ell/g}) = 0.$$

Nu heeft de Besselfunctie $J_0(r)$ oneindig veel positieve nulpunten $r = \gamma_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (zie de fig. op p.42). Deze nulpunten zijn uitvoerig getabelleerd: zo is bijvoorbeeld

$$\gamma_1 = 2.40, \quad \gamma_2 = 5.52, \quad \gamma_3 = 8.65, \quad \gamma_4 = 11.79, \quad \gamma_n \approx (n - \frac{1}{4})\pi \text{ voor } n \text{ groot.}$$

We vinden dan dat de eigenfrequenties van de slingerende ketting worden gegeven door

$$\omega_n = \frac{1}{2} \gamma_n \sqrt{g/l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

terwijl de "eigenslingeringen" worden beschreven door

$$u_n(x, t) = A J_0(\gamma_n \sqrt{x/l}) \cos(\omega_n t + \varphi).$$

Opmerking. Deze behandeling is afkomstig van D. Bernoulli (1738) en L. Euler (1784). Voor een verdere behandeling van de methode van separatie van variabelen, zie het collegedictaat Toegepaste Analyse I, hoofdstuk V. Verdere literatuur:

G. Pétiau, La théorie des fonctions de Bessel, Paris, 1955, chap. 18.

G. N. Watson, Theory of Bessel functions, Cambridge, 1958, inleiding.