TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

en

Antwoorden

bij

Wiskunde 30 en 39

Najaarssemester 1973

Jas

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken en antwoorden bij de colleges

Wiskunde 30 en 39

Dictaatnr. 2.260 Prijs f 4,50

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken en Antwoorden
bij de colleges

Wiskunde 30 en 39

Najaarssemester 1973

I N H O U D

Aanvullende Inhoudsbeschrijving Tentamenopgaven bij Wiskunde 30/39 1973

JdG, 8 Juli 2005

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

§1 t/m §9:

1. $xy' + 2y = xyy'$.

2. $xy^2 - x - (yx^2 - y)y' = 0$.

3. $y' = \dfrac{\log x - y}{x \log x}$.

4. $(x^2 + 1)y' = (y + 2)(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

5. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$.

6. $y'(x - \sin y) + y = 0$.

7. $y + xy^2 - xy' = 0$.

8. $y' + \dfrac{x}{1 + x^2}\, y = \dfrac{1}{x(1 + x^2)}$.

9. $x(y - x)y' = y^2$.

10. $\{\tan(x + y) - 1\}y' = 1$.

11. $(3x^2 - 1)y + (x^3 - x + 2y)y' = 0$.

12. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{y}{x^2} + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{x}\right)y' = 0$.

13. $y' - \frac{1}{2}y = y^3 e^{-x}$.

14. $2y' - y = 10x^3y^5$.

15. $(x - y)^2 y' = (x - y + 1)^2$.

16. $e^x y \log y = (e^x + y \log^2 y)y'$.

17. $2x^3y^2 - y + (2x^2y^3 - x)y' = 0$ (int. factor: $\mu(x.y)$) .

18. $\dfrac{y'}{y} - x^2 y = \dfrac{1}{x}$.

19. $x - y^2 + 2xyy' = 0$.

20. $y + xy + \sin y + (x + \cos y)y' = 0$ (int. factor $\mu(x)$) .

21. $3xy^2y' + 2y^3 = 2$.

22. $(3x + 5y + 6)y' = x + 7y + 2$.

23. $y' \cos y + \sin y = x$.

24. $y^2(xyy' - 1) = 1 - x^2(1 + y^2)$.

25. $(x - 3y)y' + 3x - y = 0$.

26. $x(1 - x^2)y' + (3x^2 - 1)y = 2x^3$.

27. $(2x - 4y + 5)y' = 2y - x - 3$.

28. $3x^2 + 6xy^2 + (6x^2y + 4y^3)y' = 0$.

29. $(x - y + 1)y' = 1$.

30. $2xy + (y^2 - 3x^2)y' = 0$.

31. $y = xy' + y' - (y')^2$.

32. $xy' + 2y - \sin x = 0$.

33. $y \sin x - 1 + y' \cos x = 0$.

34. $y'(y^2 - x) - y = 0$.

35. $y' + 2y = 2xy\sqrt{y}$.

36. $y^2 + (xy + 1)y' = 0$.

§11:

1. $\frac{dx}{dt} = x + y$

$\frac{dy}{dt} = 8x + 3y$.

2. $\frac{dx}{dt} = 2x + y + z$

$\frac{dy}{dt} = x + 2y + z$

$\frac{dz}{dt} = x + y + 2z$.

3. $\frac{dx}{dt} = 5x + y$

$\frac{dy}{dt} = - 4x + y$.

4. $\frac{dx}{dt} = 4x - 2y + 2e^{-t}$

$\frac{dy}{dt} = 6x - 3y - e^{2t} + 2e^{-t}$.

5. $\frac{dx}{dt} = x - y - z + 2e^{t}$

$\frac{dy}{dt} = -2x + 2y - z + 2e^{t}$

$\frac{dz}{dt} = 2x + 3z - 3e^{t}$.

6. $\frac{dx}{dt} = x - 2y$

$\frac{dy}{dt} = 5x + 3y$.

7. $\frac{dx}{dt} + y = 2e^{t}$

$\frac{dy}{dt} + z = e^{t}$

$\frac{dz}{dt} + x = e^{t}$.

8. $\frac{dx}{dt} + p^2 y = \cos pt$

(p reëel)

$\frac{dy}{dt} + p^2 x = \sin pt$.

9. $\frac{dx}{dt} + x - 2y = \sin t$

$\frac{dy}{dt} + x - y = 3t$.

10. Herleid de volgende differentiaalvergelijking tot een stelsel differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en los dit stelsel op

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0 .$$

11. $7\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x = 0$

$\frac{dx}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + y = 0$

$x(0) = 1;\ y(0) = 0$.

§12:

1. $y'' + y = xe^x$

   $y(0) = y'(0) = 0$.

2. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$

   $y(0) = 1;\ y'(0) = 2;\ y''(0) = 5$.

3. $7\dot{x} + \dot{y} + 2x = 0$

   $\dot{x} + 3\dot{y} + y = 0$

   $x(0) = 1;\ y(0) = 0$.

4. $\ddot{x} - 3x - 4y = 0$

   $\ddot{y} + x + y = 0$

   $x(0) = \dot{y}(0) = 1;\ y(0) = \dot{x}(0) = 0$.

5. $\ddot{x} + \dot{y} + x + y = 2e^t \cos t$

   $\ddot{y} + \dot{x} + 4x = e^t\ (7 \cos t - \sin t)$

   $x(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 1;\ y(0) = 0$.

§13 en §14:

1. $y'' - xy = 0$.
2. $y''' + xy = 0$.
3. $(1 - x^2)y'' + 6y = 0$.
4. $(1 - x^2)y'' - xy' + 9y = 0$.
5. $y'' - xy = 1$.
6. $xy'' - (1 + x)y' + y = 0$.
7. $2x(1 + x^2)y'' + y' - 12xy = 0$.
8. $x^2(1 + x)y'' - xy' + y = 0$.
9. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$.
10. $xy'' + 2y' + xy = 0$.

LINEAIRE ALGEBRA

§1.

1. Bewijs dat voor elk tweetal matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \quad \text{geldt } AB = BA \text{ .}$$

2. Voor de lineaire afbeeldingen $\mathcal{A}$: V → V en $\mathcal{B}$: V → V geldt $\mathcal{AB} = \mathcal{A}$ en $\mathcal{BA} = \mathcal{B}$.
Bewijs dat hieruit volgt $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ en $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}$.

3. In R_2 zijn gegeven de basisvectoren $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$.
Wat zijn de kolommen ten opzichte van deze basis van de volgende vectoren?

$$\underline{a} = \underline{e}_1$$
$$\underline{b} = \underline{e}_2$$
$$\underline{c} = \underline{e}_1 - \underline{e}_2$$
$$\underline{d} = \sqrt{3}\,\underline{e}_1 - \frac{1}{9}\,\underline{e}_2 \text{ .}$$

4. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ heeft de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gevraagd:

a) dimensie beeldruimte

b) dimensie nulruimte

c) de vergelijking van de beeldruimte

d) de kolom van $\underline{x}$, als $\mathcal{A}\underline{x}$ de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ heeft.

5. Gegeven zijn twee lineaire afbeeldingen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ van R_3 in R_3 met matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -11 & 8 & -7 \\ -8 & 6 & -5 \end{pmatrix} \text{ .}$$

Bepaal de matrices behorende bij de afbeeldingen $\mathcal{AB}$ en $\mathcal{BA}$.

6. Gegeven is de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ met de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Bepaal de kolom van alle vectoren $\underline{x}$, die op zichzelf worden afgebeeld.

7. Zij $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ een basis van R_n.
Een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ is als volgt gedefinieerd:

$$\mathcal{A}\underline{e}_1 = \underline{0}$$

$$\mathcal{A}\underline{e}_i = \underline{e}_{i-1} \quad \text{voor} \quad i = 2,3,\ldots,n .$$

Wat is de matrix A van $\mathcal{A}$ t.o.v. $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$?
Toon aan dat $\mathcal{A}^n\underline{x} = \underline{0}$ voor elke $\underline{x}$ uit R_n.
Toon aan dat alle eigenwaarden van $\mathcal{A}$ nul zijn.

8. Zij $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ de loodrechte projectie op het vlak opgespannen door de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$, die resp. kolommen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hebben.

De vector $\underline{x}$ heeft de kolom $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Toon aan dat $\mathcal{A}$ een lineaire afbeelding is.
b) Bepaal de kolom van de vector $\mathcal{A}\underline{e}_i$ voor $i = 1,2,3$.
c) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$.
d) Bepaal de kolom van het beeld van $\underline{x}$.
e) Heeft $\mathcal{A}$ een inverse?
f) Bewijs $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.

9. Zij $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ de spiegeling aan het vlak opgespannen door de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$, die resp. kolommen $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ hebben.

V is het vlak $(\underline{p},\underline{x}) = 0$, waarbij $\underline{p}$ de kolom $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ heeft.

a) Toon aan dat deze afbeelding lineair is.
b) Wat is de matrix van $\mathcal{A}$?

c) Wat is het beeld W onder de afbeelding $\mathcal{A}$ van het vlak V?

d) Als $\underline{p}$ de kolom $\begin{pmatrix} p \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ heeft, voor welke waarde(n) van p is dan W ⊥ V?

e) Bewijs $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$.

10. Zij V de vectorruimte van de polynomen $at^3 + bt^2 + ct + d$ van ten hoogste de derde graad.
De polynomen $1, t, t^2, t^3$ vormen een basis van V.
De afbeelding $\mathcal{D}$ is gedefinieerd door

$$\mathcal{D}(at^3 + bt^2 + ct + d) = 3at^2 + 2bt + c .$$

a) Toon aan dat $\mathcal{D}$ een lineaire afbeelding is.
b) Wat is de matrix D van $\mathcal{D}$ t.o.v. de basis $1, t, t^2, t^3$?
c) Wat zijn de matrices van $\mathcal{D}^2$, $\mathcal{D}^3$ en $\mathcal{D}^4$?

11. Zij V de vectorruimte van de polynomen $at^3 + bt^2 + ct + d$ van ten hoogste de derde graad.
De afbeelding $\mathcal{T}: V \to V$ is gedefinieerd door

$$\mathcal{T}(at^3 + bt^2 + ct + d) = a(1 + t)^3 + b(1 + t)^2 + c(1 + t) + d .$$

a) Toon aan dat $\mathcal{T}$ een lineaire afbeelding is.
b) Wat is de matrix T van $\mathcal{T}$ t.o.v. de basis $1, t, t^2, t^3$?
c) Toon aan dat $1, 1+t, (1+t)^2, (1+t)^3$ ook een basis van V is.
d) Heeft $\mathcal{T}$ een inverse? Zo ja, wat is de matrix van $\mathcal{T}^{-1}$ t.o.v. de basis $1, 1+t, (1+t)^2, (1+t)^3$?

12. V is de vectorruimte der op $[0,1]$ continue functies met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging.
De afbeelding $\mathcal{A}: V \to R_1$ is gedefinieerd door $\mathcal{A}f = f(0)$.

a) Toon aan dat $\mathcal{A}$ een lineaire afbeelding is.
b) Wat is de nulruimte N van $\mathcal{A}$?
c) Heeft $\mathcal{A}$ een inverse?
d) Als de functie f een oplossing van de vergelijking $\mathcal{A}x = c$ is, dan vinden wij alle oplossingen van de vergelijking door te nemen $x = f + n$ met $n \in N$.
Bewijs dit.

13. Zij $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ een lineaire afbeelding met de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & a \\ \beta & \delta & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{t.o.v. een basis } \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 .$$

V is het vlak opgespannen door $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$ en W het beeld van V onder de afbeelding $\mathcal{A}$.

a) Wanneer is de beeldruimte W een deel van het vlak V?

b) Wanneer is W een 2-dimensionale deelruimte?

c) Wanneer heeft $\mathcal{A}$ een inverse?

d) Wanneer gaat V punt voor punt in zichzelf over?

e) Toon aan dat voor $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma \geq 0$ er steeds een vector $\underline{x} \neq \underline{0}$ is uit V, die in een veelvoud van zichzelf over gaat.

f) Wat zijn de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ als $\beta = 0$ is?

14. L en M zijn deelruimten van de n-dimensionale vectorruimte V.
L en M hebben alleen de nulvector gemeen. Bewijs dat dim L + dim M $\leq$ n.
Als geldt dim L + dim M = n, dan is elke $\underline{x}$ uit V eenduidig te schrijven als $\underline{x} = \underline{\ell} + \underline{m}$ met $\underline{\ell}$ uit L en $\underline{m}$ uit M. Bewijs dit.

15. Zij V de vectorruimte van alle polynomen.
De afbeeldingen $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_0$ en $\mathcal{A}_{-1}$ worden als volgt gedefinieerd.

$$\mathcal{A}_1(a_0x^k + a_1x^{k-1} +\ldots+ a_k) = \frac{1}{k+1}\, a_0x^{k+1} + \frac{1}{k}\, a_1x^k +\ldots+ a_kx$$

$$\mathcal{A}_{-1}(a_0x^k + a_1x^{k-1} +\ldots+ a_k) = ka_0x^{k-1} + (k-1)a_1x^{k-2} +\ldots+ a_{k-1}$$

en $\mathcal{A}_0$ is de identieke afbeelding.
Zij verder de afbeelding $\mathcal{A}_n$ gedefinieerd door

$$\mathcal{A}_n = \begin{cases} \mathcal{A}_1^n & \text{voor } n > 0 \text{ en geheel} \\ \mathcal{A}_0 & \text{voor } n = 0 \\ \mathcal{A}_{-1}^{-n} & \text{voor } n < 0 \text{ en geheel .} \end{cases}$$

Toon aan dat $\mathcal{A}_n$ een lineaire afbeelding is voor elke gehele n.
Wat zijn de beeldruimten van de afbeeldingen $\mathcal{A}_n$?
Hebben de afbeeldingen $\mathcal{A}_n$ inversen?

§2.

1. In R_1 is een basis $\underline{e}_1$ gegeven.
Een andere basis $\underline{f}_1$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$ de kolom (5).
Een vector $\underline{x}$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$ de kolom (x).
Bepaal de overgangsmatrix S van $\underline{e}_1$ naar $\underline{f}_1$.
Wat is de kolom van $\underline{x}$ t.o.v. $\underline{f}_1$?

2. In R_2 is een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ gegeven.
Een andere basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ resp. de kolommen $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.
Bepaal de overgangsmatrix S van $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ naar $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$.
Wat is de kolom t.o.v. $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ van een vector $\underline{x}$, die t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ de kolom $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ heeft?
Maak dit duidelijk in een tekening voor het geval x = 4 en y = 7.

3. In R_3 is een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ gegeven. De vector $\underline{x}$ heeft t.o.v. deze basis de kolom $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.
Een andere basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$ heeft t.o.v. de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ resp. de kolommen $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
Wat is de overgangsmatrix S van $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ naar $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$?
Wat is de kolom van $\underline{x}$ t.o.v. $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$?

4. In R_3 is een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ gegeven.
Een andere basis $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ resp. de kolommen
$$\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}g_1\\g_2\\g_3\end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}.$$
Wat is de kolom t.o.v. $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ van een vector $\underline{x}$, die t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de kolom $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ heeft?

5. Gegeven is de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ met de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

t.o.v. een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.
Men gaat over op een nieuwe basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$ met resp. de kolommen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ t.o.v. de oude basis.

Gevraagd de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. de nieuwe basis.

6. Gegeven is de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ met t.o.v. de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Men gaat over op een nieuwe basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$, waarbij een overgangsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

behoort.
Wat is de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$?

De vector $\underline{x}$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wat is de kolom van de beeldvector $\mathcal{A}\underline{x}$ t.o.v. de oude en t.o.v. de nieuwe basis?

7. Gegeven zijn de afbeelding $\mathcal{A}$ en de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ van vraagstuk 8, §1.

De vector $\underline{c}$ heeft de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

T.o.v. de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ heeft $\mathcal{A}$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ga dit na.

8. Gegeven zijn de afbeelding $\mathcal{A}$ en de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ van vraagstuk 9, §1.
De vector $\underline{c}$ heeft de kolom $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
Wat is de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$?

9. De vector $\underline{x} \neq \underline{0}$ uit R_n heeft t.o.v. de basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ de kolom $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \xi_n\end{pmatrix}$.

Aan welke eisen moet de basis $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n$ voldoen opdat $\underline{x}$ de kolom $\begin{pmatrix}1\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{pmatrix}$ heeft t.o.v. deze basis?

Aan welke eisen moet de basis $\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_n$ voldoen opdat $\underline{x}$ de kolom $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{pmatrix}$ heeft t.o.v. deze basis?

10. In R_n zijn drie bases $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$, $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n$ en $\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_n$ gekozen. De overgangsmatrix van $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ naar $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n$ zij S en die van $\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_n$ naar $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n$ zij T.
De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ de matrix A.
Druk de matrix B van $\mathcal{A}$ t.o.v. $\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_n$ uit in A, S en T.

11. Zij V gedefinieerd als in opgaven 10 en 11, §1 en de afbeeldingen $\mathcal{D}$ en $\mathcal{T}$ eveneens.
Laat zien dat de matrix D' van $\mathcal{D}$ op de basis 1, 1+t, $(1+t)^2$, $(1+t)^3$ is gegeven door $D' = T^{-1}DT$.

§3.

1. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ heeft t.o.v. een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de matrix

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Bepaal een onafhankelijk stelsel eigenvectoren.

2. Van een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ zijn gegeven de eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -2$. De kolommen van de hierbij behorende eigenvectoren zijn resp.
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   Verder is $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ de kolom van het beeld van de eerste basisvector.

   Bepaal:

   a) de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. de gebruikte basis;

   b) de derde eigenwaarde en de kolom van de bijbehorende eigenvector.

3. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ heeft op $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} .$$

   Bepaal de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ en de kolommen der eigenvectoren $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.
   Neem $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ als nieuwe basis voor R_3. Zij S de overgangsmatrix.
   Controleer dat $S^{-1}AS$ een diagonaalmatrix is.

4. Bepaal de eigenwaarden en de kolommen der eigenvectoren van de afbeeldingen $\mathcal{A}$ uit vraagstukken 8 en 9, §1.
   Wat is de meetkundige interpretatie hiervan?

5. Bepaal een matrix S zodanig dat $S^{-1}AS$ een diagonaalmatrix is en bereken $S^{-1}AS$ voor

   a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

6. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ heeft op een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Bepaal de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ en de kolommen der eigenvectoren.

b) Wat is de matrix van de lineaire afbeelding $\mathcal{A}^7$?

7. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ heeft eigenwaarden $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.
Toon aan dat de lineaire afbeelding $\mathcal{B} = \mathcal{A} + c\mathcal{I}$ de eigenwaarden $\lambda_1+c,\ldots,\lambda_n+c$ heeft.

8. Zij N de nulruimte van de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$.
$\mathcal{A}$ heeft een eigenwaarde $\lambda = 0$ dan en slechts dan als dimensie $N \geq 1$ is.
Bewijs dit.

9. $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ zijn lineaire afbeeldingen $R_n \to R_n$ met een gemeenschappelijk stelsel onafhankelijke eigenvectoren $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n$. Hoe zien de matrices van $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ er uit op de basis $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n$?
Toon aan dat $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.

10. V is de vectorruimte van alle lineaire combinaties van de functies e^t en e^{2t}.
$\mathcal{D}$ is de lineaire afbeelding die aan een functie uit V zijn afgeleide naar t toevoegt.
Wat zijn de eigenwaarden van $\mathcal{D}$?

11. De reguliere lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ heeft eigenwaarden $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$.
Wat zijn de eigenwaarden van $\mathcal{A}^{-1}$?
Wat zijn de eigenvectoren hierbij?

12. $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ zijn lineaire afbeeldingen $R_n \to R_n$ en $\mathcal{A}$ is regulier.
Toon aan dat $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}$ dezelfde eigenwaarden hebben.

13. $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ zijn lineaire afbeeldingen $R_n \to R_n$, die voldoen aan $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$;
λ is een eigenwaarde van $\mathcal{A}$ met eigenvector $\underline{v}$.
Als $\mathcal{B}\underline{v} \neq \underline{0}$ is, dan is $\mathcal{B}\underline{v}$ ook een eigenvector van $\mathcal{A}$ bij de eigenwaarde λ.
Bewijs dit.

14. $\mathcal{A}$ is een lineaire afbeelding $R_3 \to R_3$ met op zekere basis de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Het spoor van A is gedefinieerd door $sp(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}$.
Zij S de overgangsmatrix naar een andere basis.
Bewijs dat $sp(A) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i$ als λ_1, λ_2 en λ_3 de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ zijn.
Bewijs dat $sp(A) = sp(S^{-1}AS)$.
Zoudt U het spoor van de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ kunnen definiëren?

15. Het spoor van een $n \times n$ matrix A wordt gedefinieerd door $sp(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (verg. vorige opgave).

a) Laat zien dat $sp(AB) = sp(BA)$ als A en B $n \times n$ matrices zijn.

b) Laat zien dat voor twee lineaire afbeeldingen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ van $R_n \to R_n$ niet kan gelden $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{I}$.

§4.

1. Bewijs dat voor elk tweetal vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ uit een vectorruimte met inproduct geldt:

a) $|(\underline{x},\underline{y})| \leq |\underline{x}|\ |\underline{y}|$

b) $|\underline{x} + \underline{y}| \leq |\underline{x}| + |\underline{y}|$

c) $|\underline{x} + \underline{y}|^2 + |\underline{x} - \underline{y}|^2 = 2|\underline{x}|^2 + 2|\underline{y}|^2$.

Wat is de meetkundige betekenis?

2. De vectoren $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n$ uit een vectorruimte zijn onderling loodrecht en alle ongelijk de nulvector.
Bewijs dat $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n$ onafhankelijk zijn.

3. In R_3 wordt een vector $\underline{x}$ geprojecteerd op het vlak opgespannen door de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$. Als de projectie $\underline{y}$ geschreven wordt als $\underline{y} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$, toon dan aan dat

$$\alpha = \frac{(\underline{x},\underline{a})(\underline{b},\underline{b}) - (\underline{x},\underline{b})(\underline{a},\underline{b})}{(\underline{a},\underline{a})(\underline{b},\underline{b}) - (\underline{a},\underline{b})^2}$$

en

$$\beta = \frac{(\underline{x},\underline{b})(\underline{a},\underline{a}) - (\underline{x},\underline{a})(\underline{a},\underline{b})}{(\underline{a},\underline{a})(\underline{b},\underline{b}) - (\underline{a},\underline{b})^2} .$$

4. Voor een vector $\underline{x}$ uit de vectorruimte V geldt dat $(\underline{x},\underline{y}) = 0$ voor alle vectoren $\underline{y}$ uit V.
   Bewijs dat $\underline{x} = \underline{0}$.

5. De vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn van gelijke lengte.
   Bewijs dat $\underline{x} - \underline{y}$ en $\underline{x} + \underline{y}$ loodrecht zijn.
   Wat is de meetkundige betekenis?

6. In R_3 heeft een vector $\underline{a}$ de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ t.o.v. een orthonormale basis.

   Construeer met behulp van het orthogonalisatieproces van Gram-Schmidt een basis van onderling loodrechte vectoren waar $\underline{a}$ deel van uitmaakt.

7. V is de vectorruimte der op $[-1,1]$ continue functies. Ga voor elk van de onderstaande definities na of (f,g) voldoet aan de eisen voor een inproduct.

   a) $$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

   b) $$(f,g) = \int_{-1}^{1} t^2 f(t)g(t)dt$$

   c) $$(f,g) = \int_{0}^{1} t^2 f(t)g(t)dt .$$

8. V is de vectorruimte van alle polynomen op het interval $[0,1]$.

   Er is gedefinieerd $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$

   a) Is V een vectorruimte met inproduct?
   b) Vindt een polynoom in de deelruimte L opgespannen door de polynomen t en 1-t, dat loodrecht staat op t.

c) Geef een tweedegraadspolynoom aan, dat loodrecht staat op L.

d) Bepaal de projectie van t^2 op L.

9. V is de vectorruimte van alle lineaire combinaties van de functies e^t en e^{2t}.
Construeer een basis van functies die volgens het inproduct

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt$$ (ga na dat dit inderdaad een inproduct is) loodrecht zijn.

10. V is de vectorruimte van alle polynomen van de graad ≤ 3 op $[0,\infty)$.

Er is gedefinieerd $$(f,g) = \int_0^\infty e^{-t}f(t)g(t)dt \, .$$

a) Ga na dat (f,g) een inproduct is.

b) Bepaal, uitgaande van de basis 1, t, t^2, t^3, een basis van onderling loodrechte vectoren met het orthogonalisatieproces van Gram-Schmidt.

11. $\mathcal{A}$ is een afbeelding van de vectorruimte V in zichzelf.
Voor $\mathcal{A}$ geldt dat $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},\mathcal{A}\underline{y})$ voor elk tweetal vectoren $\underline{x},\underline{y}$ uit V.
Bewijs dat de afbeelding $\mathcal{A}$ lineair is (gebruik opgave 4, §4).

§5.

1. W is een k-dimensionale deelruimte van de n-dimensionale vectorruimte V.
$W_\perp$ is de verzameling van vectoren uit V, die loodrecht staan op alle vectoren uit W.
$W_\perp$ heet het orthogonale complement van W.

a) Toon aan dat $W_\perp$ een deelruimte van V is.

b) Toon aan dat W en $W_\perp$ alleen de nulvector gemeen hebben.

c) Wat is de dimensie van $W_\perp$?

2. In R_5 wordt de deelruimte U opgespannen door de vectoren met kolommen

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$ t.o.v. een orthonormale basis.

a) Bepaal een basis van het orthogonale complement van U.

b) Bepaal de loodrechte projectie op U van de vector $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$.

3. In R_4 zijn gegeven drie vectoren met kolommen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ t.o.v. een orthonormale basis.
Construeer een orthonormale basis voor de deelruimte opgespannen door deze drie vectoren. Hoe zoudt U de gevonden basis aanvullen tot een orthonormale basis voor R_4?

4. De vectorruimte V is eindig dimensionaal. De vectoren $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$ vormen een orthonormaal stelsel, d.w.z. zij hebben lengte 1 en zijn onderling loodrecht.
Voor elke $\underline{v}$ uit V geldt $(\underline{v},\underline{v}) = \sum_{i=1}^{m} (\underline{v},\underline{v}_i)^2$. Toon aan dat $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$ een orthonormale basis van V is.
Kent U het omgekeerde van deze stelling?

5. Een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: V → V heet orthogonaal als voor elke $\underline{x} \in V$ geldt $(\underline{x},\underline{x}) = (\mathcal{A}\underline{x},\mathcal{A}\underline{x})$.
Bewijs dat voor elk tweetal vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ uit V geldt $(\mathcal{A}\underline{x},\mathcal{A}\underline{y}) = (\underline{x},\underline{y})$.

6. Een vierkante matrix A heet orthogonaal als geldt $A^{-1} = A^T$.
Een orthogonale afbeelding heeft t.o.v. een orthonormale basis in een eindig dimensionale vectorruimte een orthogonale matrix.
Als een lineaire afbeelding t.o.v. een orthonormale basis een orthogonale matrix heeft, dan is de lineaire afbeelding orthogonaal.
Bewijs dit. Zie ook Wiskunde 20.

7. De afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ is orthogonaal.
Bewijs dat voor elk tweetal vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ uit R_n geldt

$$(\mathcal{A}\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},\mathcal{A}^{-1}\underline{y}).$$

8. In R_3 zijn twee vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ gegeven met respectievelijk kolommen
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{6} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{6} \end{pmatrix}$ t.o.v. een orthonormale basis.
De draaiing $\mathcal{A}$ beeldt $\underline{x}$ op $\underline{y}$ af. De draaiingsas staat loodrecht op $\underline{x}$ en $\underline{y}$.
Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$.

Wat is de matrix van $\mathcal{A}$ op de basis $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ als $\underline{z}$ de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ heeft?

9. Een orthogonale afbeelding $\mathcal{A}$: $V \to V$ heeft als reële eigenwaarden +1 of -1.
Bewijs dit.

10. In R_n is een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ gedefinieerd met de eigenschap
$|\mathcal{A}\underline{x}| = |\lambda|\ |\underline{x}|$ voor alle $\underline{x}$ uit R_n.
Toon aan dat $\mathcal{A}$ het product is van een scalaire vermenigvuldiging met λ' en een orthogonale afbeelding, waarbij $|\lambda'| = |\lambda|$.

Wat kunt U zeggen van de kolommen van de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. een orthonormale basis?

11. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ heeft t.o.v. een orthonormale basis de matrix A.
$\mathcal{A}^T$ is de lineaire afbeelding die t.o.v. deze basis de matrix A^T heeft.
Toon aan dat $\mathcal{A}^T\mathcal{A}$ t.o.v. deze basis een diagonaalmatrix heeft dan en slechts dan als de kolommen van A onderling loodrecht zijn.

§6.

1. De afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ is lineair en symmetrisch.
Is de matrix van $\mathcal{A}$ op elke basis symmetrisch?
Zo neen, construeer dan een tegenvoorbeeld.

2. De lineaire afbeeldingen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ van R_n in R_n zijn symmetrisch.
Toon aan: $\mathcal{A}\mathcal{B}$ is symmetrisch dan en slechts dan als $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.

3. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ is symmetrisch.
Toon aan:

a) $\mathcal{A}^{-1}$ is symmetrisch als $\mathcal{A}$ regulier is.
b) $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}$ is symmetrisch als $\mathcal{B} : R_n \to R_n$ orthogonaal is.
c) $\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}$ is symmetrisch als $\mathcal{B} : R_n \to R_n$ symmetrisch is.

4. V is de vectorruimte der op $[0,1]$ oneindig vaak differentieerbare functies f, die aan de randcondities $f(0) = f(1) = 0$ en $f'(0) = f'(1) = 0$ voldoen.

De afbeelding $\mathcal{L}$: $V \to V$ is gedefinieerd door $\mathcal{L}f = -(rf')' + sf$, waarin r en s gegeven, niet-negatieve functies uit V zijn.

Verder is gedefinieerd $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$

a) Laat zien dat V een ruimte met inproduct is.
b) Laat zien dat $\mathcal{L}$ een lineaire symmetrische afbeelding is.
c) Laat zien dat $(\mathcal{L}f,f) \geq 0$ is.

5. Laat zien dat de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ uit opgave 8, §1 symmetrisch is en dat $(\mathcal{A}\underline{v},\underline{v}) \geq 0$ voor alle $\underline{v}$ uit R_3. Wat is van dit laatste de meetkundige betekenis?
Algemeen geldt: zij $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ de loodrechte projectie op een vlak V door de oorsprong, dan is $\mathcal{A}$ symmetrisch en $(\mathcal{A}\underline{v},\underline{v}) \geq 0$ voor alle $\underline{v}$ uit R_3. Toon dit aan.

6. Laat zien dat de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ uit opgave 9, §1 symmetrisch is. Geldt algemeen dat spiegeling aan een vlak door de oorsprong in R_3 een symmetrische afbeelding is?

7. Van een symmetrische lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ is de nulruimte het orthogonale complement van de beeldruimte. Toon dit aan.

8. Een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ is gegeven met matrix A t.o.v. een orthonormale basis $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$.
$\mathcal{A}^T$ is gedefinieerd als de lineaire afbeelding van R_n in R_n, die op deze basis de matrix A^T heeft.

a) Laat zien dat de definitie van $\mathcal{A}^T$ onafhankelijk van de keuze van de orthonormale basis is.
b) Bewijs dat voor elk tweetal vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ uit R_n geldt $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},\mathcal{A}^T\underline{y})$.
c) Bewijs dat $\mathcal{A}$ symmetrisch is dan en slechts dan als $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$.

9. Zij $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ een lineaire afbeelding. De afbeelding $\mathcal{A}^T$ is gedefinieerd als in opgave 8.

Toon aan:

a) $\mathcal{A}^T\mathcal{A}$ is symmetrisch.

b) $(\mathcal{A}^T\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) \geq 0$ voor alle $\underline{x}$ uit R_n.

c) de eigenwaarden van $\mathcal{A}^T\mathcal{A}$ zijn ≥ 0.

10. De lineaire afbeelding $\mathcal{B}$: $R_n \to R_n$ is symmetrisch en alle eigenwaarden van $\mathcal{B}$ zijn ≥ 0.

Toon aän dat er een afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ bestaat, zodanig dat $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}$ is.

11. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ heeft t.o.v. een orthonormale basis een matrix A, waarvan de kolommen onderling loodrecht zijn.

Toon aan:

a) $A = A_1A_2$, waarbij A_1 een orthogonale matrix is en A_2 een diagonaalmatrix.

b) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$, waarbij $\mathcal{A}_1$ een orthogonale afbeelding en $\mathcal{A}_2$ een symmetrische afbeelding is.

12. Gegeven de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$.

Kies een orthonormale basis, bestaande uit eigenvectoren van de symmetrische afbeelding $\mathcal{A}^T\mathcal{A}$.

Toon aan dat de matrix A van $\mathcal{A}$ t.o.v. deze basis onderling loodrechte kolommen heeft (zie ook opgave 11, §5).

13. Elke lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ is te schrijven als het product van een orthogonale afbeelding en een symmetrische afbeelding (Combineer opgaven 11 en 12).

14. $N(\mathcal{A})$ en $B(\mathcal{A})$ zijn respectievelijk de nulruimte en de beeldruimte van een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$. De afbeelding $\mathcal{A}^T$ is gedefinieerd als in opgave 8.

Toon aan:

a) $N(\mathcal{A}^T)$ is het orthogonale complement van $B(\mathcal{A})$

b) $B(\mathcal{A}^T)$ is het orthogonale complement van $N(\mathcal{A})$.

15. $\mathcal{A}$ is een lineaire afbeelding van R_n in R_n met matrix A t.o.v. een orthonormale basis $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$.
De kolom van een vector $\underline{x}$ uit R_n zij X.
Een orthonormale basis $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n$ met kolommen

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, U_n = \begin{pmatrix} u_{1n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{pmatrix} \text{ t.o.v. } \underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$$

wordt door $\mathcal{A}$ respectievelijk op $\lambda_1\underline{u}_1,\ldots,\lambda_n\underline{u}_n$ afgebeeld.

a) Toon aan dat

$$A = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{1n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

b) Is $\mathcal{A}$ een symmetrische afbeelding?

c) Toon aan dat geldt $AX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i U_i^T X$.

16. Zij $\mathcal{B} : R_n \to R_n$ een symmetrische lineaire afbeelding, waarvan alle eigenwaarden ≥ 0 zijn.
Bepaal alle lineaire afbeeldingen $\mathcal{A}: R_n \to R_n$ zó dat $\mathcal{A}^T\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
(Gebruik opgave 11 van §5 en opgaven 10 en 11 van §6).

§7.

1. $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) = 1$ is de kwadriek behorende bij de symmetrische en reguliere lineaire afbeelding $\mathcal{A}: R_n \to R_n$.
De vector $\underline{x}$ ligt in het aan $\underline{y}$ toegevoegde hypervlak.
Toon aan dat $\underline{y}$ in het aan $\underline{x}$ toegevoegde hypervlak ligt.

2. $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) = 1$ is de kwadriek behorende bij de symmetrische en reguliere lineaire afbeelding $\mathcal{A}: R_n \to R_n$, die een orthonormaal stelsel eigenvectoren $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n$ heeft.
Toon aan dat $\underline{v}_i$ in het aan $\underline{v}_j$ toegevoegde hypervlak ligt voor $j \neq i$.

3. $\mathcal{A}$ is de projectie uit opgave 8, §1, A de in die opgave bepaalde matrix t.o.v. de basis $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$ en $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x})$ de bijbehorende kwadratische vorm.

De vector $\underline{x}$ heeft kolom $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ t.o.v. deze basis en kolom $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$

t.o.v. een nieuwe basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ gedefinieerd door de kolommen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ t.o.v. } \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3.$$

a) Bepaal de matrix A' van $\mathcal{A}$ t.o.v. $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

b) Schrijf $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x})$ als kwadratische vorm in x_1, x_2, x_3.

c) Schrijf $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x})$ als kwadratische vorm in x'_1, x'_2, x'_3.

d) Bereken $X'^T A'X'$.

e) Waarom geven c) en d) een verschillend resultaat?

4. $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ is de loodrechte projectie op een vlak V door de oorsprong. Wat is het type van het kwadratisch oppervlak $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) = 1$?

5. $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ is de spiegeling aan een vlak V door de oorsprong. Wat is het type van het kwadratisch oppervlak $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) = 1$ en van het kwadratisch oppervlak $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) = 0$?

6. $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ is een symmetrische lineaire afbeelding, $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x})$ de bijbehorende kwadratische vorm.
Toon aan:

$$\max_{|\underline{x}|=1} (\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) = \text{grootste eigenwaarde van } \mathcal{A};$$

$$\min_{|\underline{x}|=1} (\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) = \text{kleinste eigenwaarde van } \mathcal{A}.$$

7. Voor de kwadratische vormen $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x})$ en $(\mathcal{B}\underline{x},\underline{x})$ behorende bij de symmetrische lineaire afbeeldingen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ van $R_n \to R_n$ geldt $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) \geq (\mathcal{B}\underline{x},\underline{x})$ voor alle $\underline{x}$ uit R_n.
Toon aan:

a) de afbeelding $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ heeft eigenwaarden ≥ 0;

b) de grootste eigenwaarde van $\mathcal{A} \geq$ de grootste eigenwaarde van $\mathcal{B}$.

8. $\mathcal{A}$: $R_2 \to R_2$ is een symmetrische lineaire afbeelding met positieve eigenwaarden. Van de kwadriek $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) = 1$ zijn $\underline{v}$ en $\underline{m}$ aan elkaar toegevoegde richtingen. Toon aan dat $\underline{v}$ en $\underline{m}$ onafhankelijk zijn.

Neem $\underline{v}$ en $\underline{m}$ als basis en laat $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ de kolom van een vector $\underline{x}$ t.o.v. deze basis zijn.

a) Toon aan dat de kwadriek $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) = 1$ op de basis $\underline{v}$, $\underline{m}$ de gedaante $(\mathcal{A}\underline{v},\underline{v})\xi^2 + (\mathcal{A}\underline{m},\underline{m})\eta^2 = 1$ heeft.

b) Wat is de gedaante van de kwadriek op deze basis als $\underline{v}$ en $\underline{m}$ bovendien vectoren op de kwadriek zijn?

9. Vindt een gemeenschappelijk paar aan elkaar toegevoegde richtingen $\underline{v}$ en $\underline{m}$ voor de kwadrieken die op de basis $\underline{e}_1 = (1,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1)$ de vergelijkingen $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ en $2xy = 1$ hebben.

Welke gedaanten nemen deze kwadrieken aan op de basis $\underline{v}$, $\underline{m}$?

§8.

1. Bepaal van elk der volgende tweedegraadskrommen het (de) eventueel aanwezige middelpunt(en), een transformatie die de kromme in standaardvorm doet overgaan, de standaardvorm en het type.

a) $7x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_1 - 12x_2 - 9 = 0$.

b) $4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2 - 7x_1 + 4x_2 + 9 = 0$.

c) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_1 - 12x_2 + 8 = 0$.

d) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 1 = 0$.

2. Bepaal van elk der volgende tweedegraadoppervlakken het (de) eventueel aanwezige middelpunt(en), een transformatie die het oppervlak in standaardvorm doet overgaan, de standaardvorm en het type.

a) $6x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_3 - 4x_1 - 2x_2 = 0$.

b) $x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_3 + 1 = 0$.

c) $x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 1 = 0$.

d) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 - 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 1 = 0$.

e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 0$.

f) $7x_1^2 + 4x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3 + 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 - 8 = 0$.

g) $x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 - x_3 = 0$.

h) $2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$.

j) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_1x_3 = 1$.

k) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$.

FOURIERREEKSEN

§2.

Bepaal de fourierreeks van de volgende functies (met periode 2π):

1. $f(x) = \sin \frac{1}{2}x$ voor $-\pi \le x < \pi$.

2. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{voor } 0 \le x \le \pi \\ -x^3 & \text{voor } -\pi \le x < 0 \end{cases}$.

3. $f(x) = \sinh x$ voor $0 \le x < 2\pi$.

4. $f(x) = x \sin x$ voor $-\pi \le x < \pi$.

5. $f(x) = \begin{cases} x \sin x & \text{voor } 0 \le x < \pi \\ -x \sin x & \text{voor } -\pi \le x < 0 \end{cases}$.

Bereken de som van de volgende réeksen:

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ (aanwijzing: gebruik het resultaat van vraagstuk 2 en $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-2} = \pi^2/12$).

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (aanwijzing: gebruik het resultaat van vraagstuk 3).

8. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(4n+1)^2(4n+3)^2}$ (aanwijzing: gebruik het resultaat van vraagstuk 5).

§3.

Bepaal de fourierreeks van de volgende functies:

9. $f(x) = x - [x]$, als $[x]$ het grootste gehele getal $\le x$ is.

10. $$f(x) = \begin{cases} x & \text{voor } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{voor } 1 \le x \le 2 \\ 3 - x & \text{voor } 2 < x < 3 \end{cases}$$

$f(x + 3) = f(x)$ voor alle x.

11. $f(x) = e^x$ voor $-c \le x < c$ $(c > 0)$

$f(x + 2c) = f(x)$ voor alle x.

12. Bepaal de fourier-sinusreeks voor $f(x) = \cos x$ in het interval $0 < x < \pi$.

13. Bepaal de fourier-cosinusreeks voor $f(x) = x$ in het interval $0 \le x \le \pi$.

§4.

Gebruik de fourierintegraal bij het bewijzen van de volgende formules:

14. $$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin y \cos yx}{y}\, dy = \begin{cases} 1 & \text{voor } |x| < 1 \\ 0 & \text{voor } |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{voor } |x| = 1\ . \end{cases}$$

15. $$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos yx dy \int_0^1 \theta^2 \cos(\theta y) d\theta = \begin{cases} x^2 & \text{voor } |x| < 1 \\ 0 & \text{voor } |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{voor } |x| = 1\ . \end{cases}$$

16. $$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin yx dy \int_0^1 \theta^2 \sin(\theta y) d\theta = \begin{cases} x^2 & \text{voor } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{voor } 1 < x \\ \frac{1}{2} & \text{voor } x = 1\ . \end{cases}$$

17. Wat zijn de uitkomsten van vraagstuk 16 voor $x < 0$?

§5.

Bepaal de fouriergetransformeerde $F(y)$ van de volgende functies:

18. $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{voor } x = 0 \\ e^{-x} & \text{voor } x > 0. \end{cases}$$

19. $f(x) = (ax + b)e^{-|x|}$.

Bereken met het gevonden resultaat:

$$\int_0^\infty \frac{y \sin yx}{(1+y^2)^2}\,dy \quad \text{en} \quad \int_0^\infty \frac{\cos yx}{1+y^2}\,dy \ .$$

20. $f(x) = |x|e^{-|x|}$.

Bereken: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos yx}{(1+y^2)^2}\,dy$ (gebruik ook het resultaat van vraagstuk 19).

§6.

21. Op de rand van de eenheidscirkel (in poolcoördinaten: $r = 1$, $-\pi \le \varphi \le \pi$) is de temperatuurverdeling $T(1,\varphi) = |\varphi|$ gegeven.
Bepaal de temperatuurverdeling $T(r,\varphi)$ over de schijf.
Bereken $T(\frac{1}{2},\pi)$ in 2 decimalen nauwkeurig.
Bewijs dat $T(r, \pm\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.
Schets de hoogtekaart van $T(r,\varphi)$ voor $r \le 1$.

22. Op de rand van de halve eenheidscirkel (in poolcoördinaten: $r = 1$, $0 \le \varphi \le \pi$) is de temperatuurverdeling gegeven: $T(r,0) = T(r,\pi) = 0$ $(0 \le r \le 1)$;
$T(1,\varphi) = \varphi(\pi - \varphi)$ $\quad (0 \le \varphi \le \pi)$.
Bepaal de temperatuurverdeling $T(r,\varphi)$ over de halve cirkelschijf.

23. Op de rand van het ringgebied G: $1 \le r \le 2$, $-\pi \le \varphi \le \pi$ is de temperatuurverdeling gegeven: $T(1,\varphi) = |\varphi|$, $T(2,\varphi) = 0$.
Bepaal de temperatuurverdeling $T(r,\varphi)$ over G.

24. Bepaal de temperatuurverdeling $T(x,y)$ binnen de rechthoek $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$ als gegeven is:

$$T(0,y) = 0; \quad T(x,0) = \sin \pi x;$$

$$T(1,y) = 0; \quad T(x,2) = x(1 - x).$$

25. Bepaal de temperatuurverdeling $T(x,y)$ binnen de halfoneindige strip $0 \le x \le 1$, $0 \le y < \infty$ als gegeven is:

$$T(0,y) = T(1,y) = 0,$$

$$T(x,0) = x(1 - x),$$

$T(x,y)$ is begrensd.

26. Een dunne, homogene, gespannen snaar met spanning s en dichtheid ρ trilt in een xu-vlak om zijn evenwichtstoestand $u = 0$, $0 \le x \le \ell$.
Gegeven zijn de beginvoorwaarden $u(x,0) = 0$ en $(\frac{\partial u}{\partial t})_{t=0} = ax(\ell - x)$.
Bepaal de uitwijking $u(x,t)$ ten tijde t en voor $0 \le x \le \ell$.

27. Als vraagstuk 26 met beginvoorwaarden:

$$(\frac{\partial u}{\partial t})_{t=0} = 0 \text{ en } u(x,0) = \begin{cases} ax & \text{voor } 0 \le x \le \frac{1}{2}\ell \\ a(\ell - x) & \text{voor } \frac{1}{2}\ell \le x \le \ell. \end{cases}$$

Wat is de stand van de snaar op het tijdstip $t = \frac{\ell}{2\alpha}$ als $\alpha^2 = s/\rho$?

28. Als vraagstuk 26 met beginvoorwaarden:

$$(\frac{\partial u}{\partial t})_{t=0} = 0 \text{ en } u(x,0) = \begin{cases} 2ax & \text{voor } 0 \le x \le \frac{\ell}{4} \\ \frac{2}{3}\, a(\ell - x) & \text{voor } \frac{\ell}{4} \le x \le \ell. \end{cases}$$

Wat valt U op betreffende het voorkomen van grond- en boventonen in de vraagstukken 27 en 28?

29. De tijdafhankelijke warmtegeleidingsvergelijking voor een dunne homogene staaf langs de x-as heeft de gedaante $\frac{\partial T}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (T = temperatuur, k = warmtegeleidingscoëfficiënt, t = tijd).
Beschouw een dergelijke staaf $(0 \le x \le \ell)$ en bepaal met de methode van separatie van variabelen $T(x,t)$ onder de voorwaarden $T(x,0) = x(\ell - x)(0 \le x \le \ell)$, $T(0,t) = T(\ell,t) = 0 \quad (t \ge 0)$.
Wat is de stationaire temperatuurverdeling over de staaf?
Wat is het resultaat als $k = 0$? Kunt U dat fysisch inzien?

30. Als vraagstuk 29 onder de voorwaarden:

$$T(x,0) = x(\ell - x) \quad (0 \le x \le \ell),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial T}{\partial x}(\ell,t) = 0 \quad (t \ge 0).$$

(Staaf is aan beide uiteinden geïsoleerd).

31. Als vraagstuk 29 onder de voorwaarden:

$$T(x,0) = x(\ell - x) \quad (0 \le x \le \ell),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = T(\ell,t) = 0 \quad (t \ge 0).$$

32. Beschouw een eendimensionale diffusiekolom langs de x-as. Bepaal de concentratie $C(x,t)$ als functie van plaats en tijd als gegeven is:

$$C(x,0) = |x|e^{-|x|}, \; C(x,t) \text{ is begrensd.}$$

Vul in de uitkomst $t = 0$ in en laat met behulp van de vraagstukken 19 en 20 zien dat we de beginconcentratie terugkrijgen.

33. Beschouw een halfoneindige diffusiekolom $x \ge 0$.
Bepaal de concentratie $C(x,t)$ onder de voorwaarden:

$$C(x,0) = xe^{-x} \quad (x \ge 0),$$

$$C(0,t) = 0 \;(t \ge 0), \; C(x,t) \text{ is begrensd.}$$

Substitueer in de uitkomst $t = 0$ en laat met behulp van de vraagstukken 19 en 20 zien dat we de beginconcentratie terugkrijgen.

34. Als vraagstuk 33 onder de voorwaarden:

$$C(x,0) = xe^{-x} \quad (x \ge 0),$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}(0,t) = 0 \;(t \ge 0), \; C(x,t) \text{ is begrensd.}$$

§9 en §10.

35. Bewijs dat de rij functies $g_n(x) = \frac{1}{1 + n^2x^2}$ uniform convergeert op elk interval $a \le x \le b$ dat $x = 0$ niet bevat.
Is de rij uniform convergent voor $0 < x \le 1$?

36. Onderzoek de uniforme convergentie van de rij $g_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$.

37. Bewijs: $\sum_{n=0}^{\infty} x(1 - x)^n$ is uniform convergent voor $a \le x \le \frac{3}{2}$ $(a > 0)$.
Is de reeks uniform convergent op het interval $0 \le x \le 1$?

38. Bewijs:

$$\lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!\ (1 + a^{2n}x^2)} = e^{-a}.$$

39. Bewijs: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + x^n}$ is uniform convergent voor $x \ge 1+c$ $(c > 0)$.

40. Gegeven: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is absoluut convergent.

Bewijs: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$ is uniform convergent voor alle x.

41. Bewijs:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left[1 - (\tfrac{1}{2})^2\frac{k^2}{1} - (\tfrac{1.3}{2.4})^2\frac{k^4}{3} - (\tfrac{1.3.5}{2.4.6})^2\frac{k^6}{5} - \ldots\right]$$

voor $k^2 < 1$.

42. Gegeven: $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n^2} \sin(2^{n^2} x)$ $(a > 1)$.

Bewijs:

a) $s(x)$ is een continue functie van x;
b) $s'(x)$ bestaat voor alle x, als $a > 2$;

c) $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2a^{-1})^{n^2} \cos(2^{n^2} x) \qquad (a > 2).$

43. Gegeven: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^4x^2}$.

Bewijs: $f'(x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4x}{(n^3 + n^4x^2)^2}$.

Kan men f"(x) vinden door nogmaals termsgewijs te differentiëren?

44. Bewijs dat in het antwoord van vraagstuk 26 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ door termsgewijze differentiatie kunnen worden gevonden.

45. Bewijs dat u(x,t) uit vraagstuk 27 een continue functie is van t bij elke vaste $x = x_0$.

46. Gegeven: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} \qquad (x > 1).$

Bewijs:

a) f(x) is oneindig vaak differentieerbaar;

b) $f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\log n)^k n^{-x} \qquad (k = 1,2,\ldots).$

Opmerking: Uit de uniforme convergentie van de afgeleidenreeks op het interval $x \geq p > 1$ bij elke vastgehouden p volgt de differentieerbaarheid op $x > p > 1$ voor elke vaste p, dus de differentieerbaarheid in elk punt $x > 1$.

ANTWOORDEN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

§1 t/m §9:

1. $yx^2 = Ce^y$.

2. $y^2 - 1 = C(x^2 - 1)$.

3. $y = \frac{1}{2}\log x + \frac{C}{\log x}$.

4. $y = -2 + C(x\sqrt{x^2+1} + 1 + x^2)$.

5. $C(x^2 + y^2) = x$.

6. $xy + \cos y = C$.

7. $2x + yx^2 = Cy;\ y = 0$.

8. $y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\log\frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{|x|}$.

9. $y = Ce^{y/x}$.

10. $\sin(x + y) = Ce^y$.

11. $x^3y - xy + y^2 = C$.

12. $\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} = C$.

13. $e^x = Cy^2 - 2xy^2;\ y = 0$.

14. $y^4(Ce^{-2x} - 10x^3 + 15x^2 - 15x + \frac{15}{2}) = 1;\ y = 0$.

15. $(2x - 2y + 1)e^{2(x-y)^2+6x+2y} = C$.

16. $e^x = (y + C)\log y;\ y = 1$.

17. $xy(x^2 + y^2) + 1 = Cxy;\ y = 0$.

18. $4x = (C - x^4)y$.

19. $y^2 = Cx - x\log|x|$.

20. $(xy + \sin y)e^{x} = C$.

21. $(y^{3} - 1)x^{2} = C$.

22. $(y - x - 2)^{4} = C(5y + x + 2)$; $5y + x + 2 = 0$.

23. $\sin y = Ce^{-x} + x - 1$.

24. $x^{2}(1 + y^{2}) = Ce^{x^{2}+y^{2}}$.

25. $(y + x)^{2}(y - x) = C$.

26. $Cx(1 - x^{2}) = y - x$.

27. $e^{4x+8y}(4x - 8y + 11) = C$.

28. $x^{3} + 3x^{2}y^{2} + y^{4} = C$.

29. $y - x = Ce^{y}$.

30. $x^{2} - y^{2} = Cy^{3}$; $y = 0$.

31. $y = Cx + C - C^{2}$; $4y = (x + 1)^{2}$.

32. $x^{2}y = C + \sin x - x \cos x$.

33. $y = \sin x + C \cos x$.

34. $y(3x - y^{2}) = C$.

35. $(Ce^{x} + x + 1)\sqrt{y} = 1$; $y = 0$.

36. $ye^{xy} = C$.

§11:

1. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{5t} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} .$$

2. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} .$$

3. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t} + \beta \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t \right\} e^{3t} .$$

4. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} .$$

5. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t \right\} e^{t} .$$

6. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\frac{1}{2} \sin 3t - \frac{3}{2} \cos 3t \end{pmatrix} e^{2t} + \beta \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \frac{3}{2} \sin 3t - \frac{1}{2} \cos 3t \end{pmatrix} e^{2t} .$$

7. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \beta \begin{pmatrix} \sin \frac{1}{2}t\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}t\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos \frac{1}{2}t\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}t\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos \frac{1}{2}t\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{\frac{1}{2}t} +$$

$$+ \gamma \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}t\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \frac{1}{2}t\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}t\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \frac{1}{2}t\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}t\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{\frac{1}{2}t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} .$$

8. Voor $p \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{p^2 t} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-p^2 t} + \frac{1}{p(1 + p^2)} \begin{pmatrix} (p + 1)\sin pt \\ (p - 1)\cos pt \end{pmatrix} .$$

Voor $p = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t .$$

9. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \sin t \\ \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t \sin t + \frac{1}{2} t \cos t + 6t \\ \frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{4} \cos t - \frac{1}{4} \sin t + 3t + 3 \end{pmatrix} .$$

10. $$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t} + \gamma \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} e^{2t} .$$

11. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} e^{\frac{-2t}{5}} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{4}t} .$$

§12.

1. $y = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} x e^{x} - \frac{1}{2} e^{x}$.

2. $y = e^{x} + x e^{2x}$.

3. $$x = \frac{1}{3} e^{-\frac{2}{5}t} + \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{4}t}$$

$$y = -\frac{2}{3} e^{-\frac{2}{5}t} + \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{4}t} .$$

4. $$x = \tfrac{1}{2}(3t - 1)e^{t} + \tfrac{1}{2}(t + 3)e^{-t}$$

$$y = \tfrac{1}{4}(4 - 3t)e^{t} - \tfrac{1}{4}(4 + t)e^{-t} .$$

5. $$x = e^{t} \cos t$$

$$y = e^{t} \sin t .$$

§13 en §14.

1. $$y = u_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^n n! \ (3n-1)(3n-4)(3n-7) \ldots 8.5.2}\right] +$$

$$+ u_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3^n n! \ (3n+1)(3n-2)(3n-5) \ldots 10.7.4}\right] .$$

$$2.\ y = u_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{4^n n!\ (4n-1)(4n-2)(4n-5)(4n-6)\ \ldots\ 7.6.3.2}\right] +$$

$$+ u_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4^n n!\ (4n+1)(4n-1)(4n-3)(4n-5)\ \ldots\ 9.7.5.3}\right] +$$

$$+ u_2 \left[x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{4^n n!\ (4n+2)(4n+1)(4n-2)(4n-3)\ \ldots\ 10.9.6.5}\right] .$$

$$3.\ y = 3u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)(2n-3)} + u_1\ (x - x^3) .$$

$$4.\ y = 3u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!\ x^{2n}}{(2n)!!\ (2n-1)(2n-3)} + u_1\ (x - \tfrac{4}{3} x^3).$$

$$5.\ y = u_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^n n!\ (3n-1)(3n-4)(3n-7)\ \ldots\ 8.5.2}\right] +$$

$$+ u_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3^n n!\ (3n+1)(3n-2)(3n-5)\ \ldots\ 10.7.4}\right] +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)(3n+1)(3n-1)(3n-2)(3n-4)(3n-5)\ \ldots\ 8.7.5.4}\right] .$$

$$6.\ y = \alpha(1 + x) + \beta e^x .$$

$$7.\ y = \alpha\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n(-3)(-1).1.3\ \ldots\ (2n-5)}{3.7\ \ldots\ (4n-1)}\ x^{2n}\right] +$$

$$+ \beta\sqrt{x}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-5)(-1).3.7\ \ldots\ (4n-9)}{4^n n!}\ x^{2n}\right] .$$

$$8.\ y = \alpha x + \beta\left(x \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{n+1}\right) = \alpha x + \beta(x \log x - x \log(1 + x)) .$$

9. $y = \alpha x^2 + \beta x^3$.

10. $y = \frac{1}{x} (\alpha \sin x + \beta \cos x)$.

ANTWOORDEN LINEAIRE ALGEBRA

§1.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

4. a) 2; b) 1; c) $2x + y - 3z = 0$; d) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $X = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \bigcirc & & & 0 \end{pmatrix}$.

8. b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; d) $AX = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \end{pmatrix}$; e) nee.

9. b) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; c) het vlak $(\underline{p},\underline{x}) = 0$; d) $p = -2 \pm \sqrt{3}$.

10. b) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

D^4 = nulmatrix.

11. b) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) ja, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. b) de deelruimte van functies f uit V met $f(0) = 0$; c) nee.

13. a) altijd; b) $\alpha\delta \neq \gamma\beta$; c) $\alpha\delta \neq \gamma\beta$ en $c \neq 0$; d) $\alpha = \delta = 1$ en $\beta = \gamma = 0$; f) α, δ en c .

§2.

1. $S = (5)$; $(x/5)$.

2. $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3x + 2y \\ 2x - y \end{pmatrix}$.

3. $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ met $x' = \dfrac{\begin{vmatrix} x & g_1 & h_1 \\ y & g_2 & h_2 \\ z & g_3 & h_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}}$; analoog voor y' en z' .

5. $A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. $A' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -12 & -26 & -44 \\ 9 & 20 & 32 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$; $AX = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$; $A'X' = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

8. $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9. De bases $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$ en $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \ldots, \underline{g}_n$ moeten zodanig zijn dat $\underline{f}_1$ en $\underline{g}_1 + \underline{g}_2$ t.o.v. de basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ de kolom $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ hebben.

10. $B = TS^{-1}AST^{-1}$.

§3.

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ b) 3; $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

3. $\lambda_1 = 1$, $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2$, $U_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 3$, $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Opgave 8, §1: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 0$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Opgave 9, §1: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -1$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. a) $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$; $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 0$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $3^6\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \lambda_2 & \\ \bigcirc & & \ddots \;\lambda_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \bigcirc \\ & \mu_2 & \\ \bigcirc & & \ddots \;\mu_n \end{pmatrix}$ met $\mathcal{A}\underline{u}_i = \lambda_i\underline{u}_i$ en $\mathcal{B}\underline{u}_i = \mu_i\underline{u}_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$.

10. 1 en 2.

11. $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_k}$; de eigenvectoren van $\mathcal{A}$ bij $\lambda_1,\dots,\lambda_k$.

§4.

5. De diagonalen van een ruit staan loodrecht op elkaar.

7. a) voldoet; b) voldoet; c) voldoet niet.

8. a) ja; b) bijv. $1 - \frac{3}{2}t$; c) bijv. $6t^2 - 6t + 1$; d) $t - \frac{1}{6}$.

9. e^t en $e^{2t} - \frac{2}{3}\frac{e^3 - 1}{e^2 - 1}e^t$.

10. 1; $t - 1$; $t^2 - 4t + 2$; $t^3 - 9t^2 + 18t - 6$.

§5.

1. c) $n - k$.

2. a) bijv. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$; b) $\frac{3}{5}\begin{pmatrix}5\\3\\1\\2\\1\end{pmatrix}$.

8. $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -2+\sqrt{6} & 1+2\sqrt{6}\\ -2-\sqrt{6} & 4 & -2+\sqrt{6}\\ 1-2\sqrt{6} & -2-\sqrt{6} & 1\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

10. De kolommen zijn onderling loodrecht en hebben lengte $|\lambda|$.

§6.

1. Nee; v.b.: $\mathcal{A}$: $R_2 \to R_2$ met matrix $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ t.o.v. een orthonormale basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$. T.o.v. de basis $\underline{f}_1 = 2\underline{e}_1$, $\underline{f}_2 = \underline{e}_2$ heeft $\mathcal{A}$ de matrix $A' = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

5. De hoek tussen $\underline{v}$ en $\mathcal{A}\underline{v}$ is $\leq \frac{\pi}{2}$.

6. Ja.

15. b) Ja.

16. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2$ met $\mathcal{A}_2^2 = \mathcal{B}$, $\mathcal{A}_1$ orthogonaal, $\mathcal{A}_2$ symmetrisch.

§7.

3. a) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_3$;

c) $2x_1'^2 + 6x_2'^2 + 4x_1'x_2'$; d) $x_1'^2 + x_2'^2$; e) de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ is niet orthonormaal.

4. cirkelcylinder.

5. eenbladige hyperboloïde; kegel.

8. b) $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

9. Bijv. $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\underline{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$2x'^2 + 2y'^2 = 1$; $4x'^2 - 4y'^2 = 1$.

§8.

1. a) middelpunt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ;$$

$3z_1^2 + 8z_2^2 - 24 = 0$, ellips.

b) geen middelpunt;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$13z_2^2 - z_1\sqrt{13} = 0$, parabool.

c) rechte van middelpunten: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix};$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$5z_2^2 - 1 = 0$, evenwijdig lijnenpaar.

d) rechte van middelpunten: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$2z_2^2 = 0$, samenvallend lijnenpaar.

2. a) middelpunt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$z_1^2 + 8z_2^2 - 2z_3^2 - 1 = 0$, éénbladige hyperboloïde.

b) middelpunt: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} ;$$

$z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_3^2 = 0$, kegel.

c) rechte van middelpunten: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} ;$$

$3z_2^2 + 4z_3^2 - 2 = 0$, elliptische cylinder.

d) vlak van middelpunten: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} ;$$

$6z_1^2 = 0$, samenvallend vlakkenpaar.

e) geen middelpunt;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 24 \end{pmatrix};$$

$z_1^2 + 2z_3^2 - 6z_2\sqrt{2} = 0$, elliptische paraboloïde.

f) middelpunt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$12z_1^2 + 3z_2^2 + 3z_3^2 - 12 = 0$, ellipsoïde.

g) geen middelpunt;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$2z_1^2 - \frac{1}{2}z_3\sqrt{2} = 0$, parabolische cylinder.

h) rechte van middelpunten: $\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix};$$

$-z_2^2 + 3z_3^2 = 0$, snijdend vlakkenpaar.

j) vlak van middelpunten: $\lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{3}\sqrt{3}\\ \frac{1}{3}\sqrt{6} & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3}\\ \frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{3}\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} ;$$

$6z_1^2 - 1 = 0$, evenwijdig vlakkenpaar.

k) middelpunt: $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{6}\\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6}\\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} ;$$

$z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 - \frac{1}{2}z_3^2 = 0$, kegel.

ANTWOORDEN FOURIERREEKSEN

1. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{4n^2-1}$.

2. $\frac{\pi^3}{4}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n(n^2\pi^2-2)}{n^4}\cos nx$.

3. $\frac{\cosh 2\pi-1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cosh 2\pi-1)\cos nx-n\sinh 2\pi\sin nx}{n^2+1}$.

4. $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2-1}$.

5. $\frac{\pi}{2}\sin x-\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{(4n^2-1)^2}$.

6. $\frac{\pi^4}{96}$.

7. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\frac{\sinh 2\pi}{\cosh 2\pi-1}$.

8. $\frac{\pi^2\sqrt{2}}{128}$.

9. $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}$.

10. $\frac{2}{3}-\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin\frac{n\pi}{3})^2\cos\frac{2\pi nx}{3}}{n^2}$.

11. $\frac{\sinh c}{c}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{c\sinh c}{c^2+n^2\pi^2}\cos\frac{\pi nx}{c}-\frac{\pi n\sinh c}{c^2+n^2\pi^2}\sin\frac{\pi nx}{c}\right\}$.

12. $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}$.

13. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

17. $\begin{cases} -x^2 & \text{voor } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{voor } \quad x < -1 \\ -\frac{1}{2} & \text{voor } \quad x = -1. \end{cases}$

18. $F(y) = \dfrac{1}{1 + 2\pi i y}$.

19. $F(y) = \dfrac{2b}{1 + 4\pi^2 y^2} - \dfrac{8\pi i y a}{(1 + 4\pi^2 y^2)^2}$; $\quad \frac{\pi}{4} x e^{-|x|}$, $\quad \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$.

20. $F(y) = 2\,\dfrac{1 - 4\pi^2 y^2}{(1 + 4\pi^2 y^2)^2}$; $\quad \frac{\pi}{4}(1 + |x|)e^{-|x|}$.

21. $T(r,\varphi) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)\varphi$.

$T(\frac{1}{2},\pi) = 2.23$ want

$$0 \le T(\tfrac{1}{2},\pi) - \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} - \frac{1}{18\pi} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2^5.5^2} + \frac{1}{2^7.7^2} + \dots\right) <$$

$$< \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{5^2}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots\right) = \frac{4}{25\pi}\,\frac{1}{2^5}\,\frac{1}{3/4} = \frac{1}{150\pi} .$$

22. $T(r,\varphi) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)^3} \sin(2n+1)\varphi$.

23. $T(r,\varphi) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\log r}{\log 2}\right) - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\left(\frac{4}{r}\right)^{2n+1} - r^{2n+1}\right\} \frac{\cos(2n+1)\varphi}{(2n+1)^2(4^{2n+1} - 1)}$.

24. $T(x,y) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\pi x)\,\sinh((2n+1)\pi y)}{(2n+1)^3\,\sinh(2(2n+1)\pi)} + \frac{\sinh(\pi(2-y))\,\sin \pi x}{\sinh 2\pi}$.

25. $T(x,y) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)\pi y} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^3}$.

26. $u(x,t) = \frac{8a\ell^3}{\alpha\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{\ell} \sin \frac{(2n+1)\pi\alpha t}{\ell}$ $(\alpha = \sqrt{\frac{s}{\rho}})$.

27. $u(x,t) = \frac{4a\ell}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi\alpha t}{\ell}$; $u(x, \frac{\ell}{2\alpha}) = 0$.

28. $u(x,t) = \frac{16a\ell}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{4} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi\alpha t}{\ell}$.

In vraagstuk 27 komen de $(2n - 1)^e$ boventonen niet voor, in vraagstuk 28 ontbreken de $(4n - 1)^e$ boventonen $(n = 1,2,3,\ldots)$.

29. $T(x,t) = \frac{8\ell^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 kt}{\ell^2}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{\ell}$.

$\lim_{t\to\infty} T(x,t) = 0$ $(0 \leq x \leq \ell)$: koeling van de staaf tot temperatuur $T = 0$.

Voor $k = 0$: $T(x,t) \equiv T(x,0)$: geen warmtegeleiding.

30. $T(x,t) = \frac{\ell^2}{6} - \frac{\ell^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{4n^2\pi^2 kt}{\ell^2}} \cos \frac{2n\pi x}{\ell}$.

$\lim_{t\to\infty} T(x,t) = \frac{\ell^2}{6}$ (gemiddelde temperatuur op tijdstip $t = 0$).

31. $T(x,t) = \frac{8\ell^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n - \pi(2n+1)}{(2n+1)^3} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 kt}{4\ell^2}} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}$.

$\lim_{t\to\infty} T(x,t) = 0$: koeling van de staaf tot temperatuur $T = 0$.

32. $C(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 - y^2) \cos yx}{(1 + y^2)^2} e^{-y^2kt} dy$.

33. $C(x,t) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{y \sin yx}{(1 + y^2)^2} e^{-y^2kt} dy$.

34. $C(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 - y^2) \cos yx}{(1 + y^2)^2} e^{-y^2kt} dy$.

35. Neen.

36. Uniform convergent op elk interval $a \leq x \leq b$ dat de punten $x = \pm 1$ niet bevat.

37. Neen.

43. Ja.

TENTAMENOPGAVEN EN HERKANSINGEN MET ANTWOORDEN

TENTAMENOPGAVEN

6 juni 1966 (Wiskunde 30)

1. De functie f is voor alle reële x gedefinieerd en heeft de volgende eigenschappen

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \text{ als } 0 < x \le \frac{\pi}{2},$$

$$f(x) = \pi - x \text{ als } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi.$$

$f(x)$ is oneven,

$f(x)$ is periodiek met periode 2π,

$f(0) = 0$.

a) Bepaal de fourierreeks van f.

b) Geef een formulering van de hoofdstelling en leidt daaruit af voor welke x de fourierreeks naar $f(x)$ convergeert.

2. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x^2y'' + xy' - y = 0.$$

3. Bepaal van het kwadratische oppervlak

$$8x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 - 13x_1 - 8x_2 - 10x_3 + 9 = 0.$$

a) de eventueel aanwezige middelpunt(en),

b) de standaardvorm en het type,

c) de bijbehorende coördinatentransformatie,

d) de vergelijking $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \sigma$ van een raakvlak door de top.

4. Beantwoord de volgende beweringen alleen met ja, nee, of blanco. Een onjuist antwoord wordt negatief gerekend.

4.1. De rij $f_n(x) = x^n$ convergeert voor $0 \le x \le 1$.

4.2. De rij $f_n(x) = x^n$ convergeert uniform op $0 \le x < 1$.

Zij $g_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+n^2x^4}$ en $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$.

4.3. $g(x)$ is continu.

4.4. De rij $g_n(x)$ is uniform convergent op $x \geq 1$.

4.5. De rij $g_n(x)$ is uniform convergent op $0 \leq x \leq 1$.

4.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} g_n(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)dx$.

Zij $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + \sin nx}{n^2}$.

4.7. De reeks is convergent voor alle reële x.

4.8. De reeks is uniform convergent op $0 < x < \pi$.

4.9. De reeks is uniform convergent op de reële as.

4.10. $f(x)$ is overal continu.

<u>10 januari 1967</u> (Wiskunde 30)

1. Los op het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = x - y + z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y - z$$

$$\frac{dz}{dt} = 2x - y$$

met beginvoorwaarden $x(0) = y(0) = 0$; $z(0) = -6$.

2. Gegeven:

$f(x) = 1 - x$ voor $0 \leq x \leq 1$,

$f(x) = -1 - x$ voor $-1 < x < 0$,

f is periodiek met periode 2.

a) Bepaal de fourierreeks van de functie f,

b) Voor welke waarden van x convergeert de fourierreeks naar f(x) en voor welke niet? Licht Uw antwoord toe.

c) Convergeert de fourierreeks uniform op $-1 \leq x \leq 1$?

3. Gegeven de rij functies $g_n(x) = n^3x^3e^{-n^2x^2}$ $(n = 1,2,\ldots)$.

a) Onderzoek deze rij op uniforme convergentie voor $0 \leq x \leq 1$.

b) Bereken $\int_0^1 (\lim\limits_{n\to\infty} n^3x^3e^{-n^2x^2})dx$ en $\lim\limits_{n\to\infty} (\int_0^1 n^3x^3e^{-n^2x^2}dx)$.

c) Wat concludeert U uit het gevondene in a) en b)?

4. V is een vectorruimte van dimensie 4. De vectoren $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ en $\underline{e}_4$ vormen in V een orthonormale basis. $\mathcal{A}$ is een lineaire afbeelding van V in V die ten opzichte van de gegeven basis vastgelegd wordt door de matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Bepaal een nieuwe orthonormale basis van V, ten opzichte waarvan $\mathcal{A}$ een matrix met diagonaalvorm heeft.

b) Zij $\underline{x} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 + \underline{e}_4$.
Druk de vector $\mathcal{A}\underline{x}$ uit in de nieuwe en in de oude basis.

<u>10 juni 1967</u> (Wiskunde 30)

1. Los op:

a) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + \sin y}{x \cos y};$$

b) Het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y$$

met beginvoorwaarden $x(0) = 14$, $y(0) = 0$.

2. De functie f wordt gedefinieerd door:

$$f(x) = |x| + \sin \pi x \quad \text{voor} \quad -1 < x \leq 1,$$

$f(x)$ is periodiek met periode 2.

a) Bepaal de fourierreeks van f.

b) Bepaal de som van de fourierreeks voor $-1 < x \leq 1$; licht Uw antwoord toe.

c) Convergeert de fourierreeks van f uniform op $-1 < x \leq 1$?

3. Gegeven de rij functies $g_n(x) = x \cos \dfrac{x}{x+n}$ voor $n = 1,2,\ldots$ en $x \geq 0$.
Gevraagd:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ voor $x \geq 0$.

b) Laat zien, dat de rij functies niet uniform convergeert op het gebied $x \geq 0$.

c) Ga na of de rij uniform convergeert op het interval $0 \leq x \leq 10$.

4. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ beeldt R_3 in R_3 af.
De matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van de basis

$$\underline{a}_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(0,1,1)$$

$$\underline{a}_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(1,0,1)$$

$$\underline{a}_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(1,1,0)$$

is

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bereken de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van de oorspronkelijke basis

$$\underline{e}_1 = (1,0,0)$$

$$\underline{e}_2 = (0,1,0)$$

$$\underline{e}_3 = (0,0,1).$$

b) Wat is het beeld van de vector $\underline{a}_1 - \underline{a}_2$ onder $\mathcal{A}$, uitgedrukt in de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ en wat uitgedrukt in de basis $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$?

9 januari 1968 (Wiskunde 30)

1. Bepaal de oplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = x \cos\alpha - y \sin\alpha,$$

$$\frac{dy}{dt} = x \sin\alpha + y \cos\alpha, \quad \alpha \text{ constant,}$$

die voldoen aan de beginvoorwaarden $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

2. V is een eindig dimensionale vectorruimte met inproduct. $\mathcal{A} : V \to V$ is een symmetrische lineaire afbeelding.
Bewijs:
   a) Als $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) > 0$ voor alle $\underline{x} \neq \underline{0}$, dan zijn alle eigenwaarden van $\mathcal{A}$ positief.
   b) Als alle eigenwaarden van $\mathcal{A}$ positief zijn, dan is $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) > 0$ voor alle $\underline{x} \neq \underline{0}$.

3. Gegeven $f(x) = x$ voor $0 \leq x \leq \pi$.
Bepaal de fourier-cosinusreeks van deze functie.

4. De temperatuurverdeling $T(x,t)$ van een geïsoleerde staaf voldoet aan de differentiaalvergelijking

(i) $$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0,$$

aan de beginvoorwaarde

(ii) $$T(x,0) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

en aan de randvoorwaarden

(iii) $$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\pi} = 0, \quad t > 0.$$

a) Bewijs dat de functies

$$e^{-k^2 t} \cos kx, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

voldoen aan de differentiaalvergelijking (i) en aan de randvoorwaarden (iii).

b) Bepaal de functie $T(x,t)$ die voldoet aan (i), (ii) en (iii).

Opmerking: Het resultaat van vraagstuk 3 kan worden gebruikt bij de oplossing van vraagstuk 4.

5. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 x}, \quad x \geq 1.$

a) Bewijs dat de reeks uniform convergent is.

b) Is $f(x)$ continu voor $x \geq 1$?

c) Is $f(x)$ differentieerbaar voor $x > 1$?

<u>11 juni 1968</u> (Wiskunde 30)

1. Bepaal de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + y - e^{-t}$$

met beginvoorwaarden $x(0) = 2$ en $y(0) = 0$.

2. a) Los op de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 2xy^3 .$$

b) Gegeven de rij functies $f_n(x) = \dfrac{\arctan \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}}$ voor $n = 1,2,\ldots$ en $x \geq 0$.

i) Bepaal $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

ii) Ga na of de rij uniform convergeert op het interval $0 \leq x \leq 1$.

iii) Ga na of de rij uniform convergeert voor $x > 1$.

3. Op de rand van een cirkelvormige schijf met straal 2 is de temperatuurverdeling $T(2,\varphi) = \cos \frac{1}{2}\varphi$ met $-\pi < \varphi \leq \pi$ gegeven. De temperatuurverdeling $T(r,\varphi)$ over de schijf voldoet aan de vergelijking van Laplace; in poolcoördinaten

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0.$$

a) Bepaal de functie $T(r,\varphi)$ die voldoet aan de differentiaalvergelijking en aan de randvoorwaarde.
b) Bereken $T(\frac{1}{2},0)$ in twee decimalen nauwkeurig.

4. V is de vectorruimte van alle veeltermen in t.

Voor twee veeltermen f en g is gedefinieerd $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

a) Ga na dat (f,g) een inproduct is.
b) Bepaal een orthonormale basis van de deelruimte L opgespannen door 1, t en t^2.
c) Bepaal de projectie van t^3 op L.

5. V is een vectorruimte. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}: V \to V$ heeft de eigenschap $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.

Bewijs:

a) De eigenwaarden van $\mathcal{A}$ zijn 0 en/of 1.
b) Elke vector $\neq \underline{0}$ uit de beeldruimte van $\mathcal{A}$ is eigenvector bij de eigenwaarde 1.
c) Als $\mathcal{A}$ een inverse heeft, dan is $\mathcal{A}$ de identieke afbeelding.

7 januari 1969

Wiskunde 30

1. Gegeven is in R_2 de kwadratische kromme

$$-3x_1^2 - 8x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1 + 14x_2 + 3 = 0 .$$

Gevraagd wordt een coördinatentransformatie (verband tussen de oude en de nieuwe coördinaten) die de vergelijking in standaardgedaante brengt.
Geef de standaardvorm en het type van de kwadratische kromme.

2. a) V is een vectorruimte van dimensie 3 met inproduct.
   $\mathcal{A}$: $V \to V$ is een lineaire afbeelding met de eigenschap dat $\mathcal{A}^2 = \mathcal{O}$ (de nulafbeelding).

   i) Bereken de eigenwaarden van $\mathcal{A}$.

   ii) Bewijs dat $\mathcal{A} = \mathcal{O}$ als $\mathcal{A}$ symmetrisch is.

   iii) Geef een voorbeeld van een niet-symmetrische $\mathcal{A}$, waarvoor geldt $\mathcal{A} \neq \mathcal{O}$.

   b) Los op de differentiaalvergelijking $y(xy' + y) = x$.

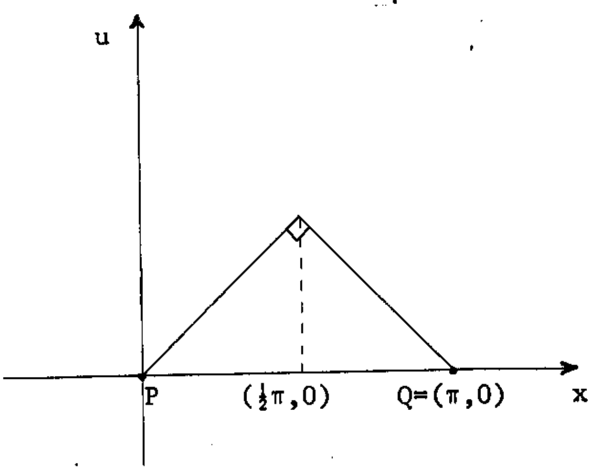
3. Los op het stelsel

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 - 2x_3 + e^{-t}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2e^{-t}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_3 \; .$$

4.



Een dunne homogene snaar trilt in het (x,u)-vlak om zijn evenwichtsstand u = 0.
De uitwijking u(x,t) voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (t > 0,\ 0 < x < \pi).$$

De beginvoorwaarden zijn

$$(2) \qquad u(x,0) = f(x) \quad \text{met} \quad \begin{cases} f(x) = x & \text{voor } 0 \le x \le \tfrac{1}{2}\pi \\ f(x) = \pi - x & \text{voor } \tfrac{1}{2}\pi \le x \le \pi \quad \text{(zie figuur)} \end{cases}$$

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \; .$$

De randvoorwaarden zijn

$$(4) \qquad u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 \qquad (t \ge 0) \; .$$

a) Leid af, met behulp van de methode van separatie, dat de functies

$$B_n \cos nt \sin nx \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

voldoen aan (1), (3) en (4).

b) Bepaal met behulp van de functies onder a) de oplossing $u(x,t)$ die bovendien aan (2) voldoet.

Wiskunde 39

1. Zie opgave 2b) bij Wiskunde 30.

2. Bepaal de fourierreeks van de functie f die gedefinieerd wordt door

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{voor } 0 \le x \le \frac{1}{2}\pi \\ \pi - x & \text{voor } \frac{1}{2}\pi \le x \le \pi \end{cases},$$

f is een oneven functie en periodiek met periode 2π.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 30.

4. Zie opgave 4 bij Wiskunde 30.

3 juni 1969

Wiskunde 30

1. Bepaal de algemene oplossing van het stelsel

$$\frac{dx}{dt} = y + z$$

$$\frac{dy}{dt} = x - z + 2e^{2t}$$

$$\frac{dz}{dt} = -x - y + 4e^{2t}.$$

2. R_3 heeft de orthonormale basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.
Zij $\mathcal{A}: R_3 \to R_3$ de spiegeling aan een vlak V: $x - y + z = 0$.

a) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$.

b) Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{A}$.

c) Bepaal een nieuwe orthonormale basis $\underline{e}_1'$, $\underline{e}_2'$, $\underline{e}_3'$ ten opzichte waarvan $\mathcal{A}$ een matrix met diagonaalvorm heeft en geef deze diagonaalmatrix.

3.
$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2} & \text{voor } 0 \le x \le \pi \\ -\cos \frac{x}{2} & \text{voor } -\pi \le x < 0 . \end{cases}$$

f(x) heeft periode 2π.

a) Bepaal de fourierreeks van f(x).

b) Voor welke x is f(x) gelijk aan de som van de fourierreeks (argumentatie!)?

4. Beschouw de rij functies $f_n(x)$ met

$$f_n(x) = \frac{n}{x + n} e^{-nx} \quad (x \ge 0).$$

a) Bereken $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

b) Is deze rij uniform convergent in het interval $0 \le x \le 1$?

c) Is deze rij uniform convergent voor $x \ge 1$?

d) Onderzoek de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ op uniforme convergentie voor $x \ge 1$.

<u>Wiskunde 39</u>

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Los op:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x - e^y}{xe^y} .$$

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 30.

4. De temperatuurverdeling $T(x,t)$ van een dunne homogene staaf ter lengte π voldoet aan

(i) $$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (0 < x < \pi,\ t > 0)\ ,$$

aan de beginvoorwaarde

(ii) $$T(x,0) = \sin x + \sin 5x \quad (0 \le x \le \pi)$$

en aan de randvoorwaarden

(iii) $$T(0,t) = 0\ ,\quad T(\pi,t) = 0 \quad (t \ge 0)\ .$$

Bepaal de functie $T(x,t)$, die voldoet aan (i), (ii) en (iii).

<u>13 januari 1970</u>

<u>Wiskunde 30</u>

1. Los op de differentiaalvergelijking

$$y' + y(x^2 + \cos x) = x^2 + \cos x\ ,$$

2. De functie f van x is als volgt gedefinieerd:

$$f(x) = 0 \qquad \text{voor } -\pi \le x \le -\pi/2$$

$$f(x) = \sin 2x \qquad \text{voor } -\pi/2 < x < \pi/2$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{voor } \pi/2 \le x \le \pi\ ,$$

f is periodiek met periode 2π.

a) Bepaal de fourierreeks van f.

b) Waarom zijn de volgende uitspraken juist?

b1. Voor alle x is de som van de fourierreeks gelijk aan $f(x)$.

b2. De fourierreeks is uniform convergent voor $-\pi \le x \le \pi$.

3. Een snaar is gespannen tussen de vaste punten $A = (0,0)$ en $B = (\pi,0)$. Op het tijdstip $t = 0$ is de snelheid van de snaar nul en de uitwijking

$$u(x,0) = \sin 3x + \sin 17x\ .$$

De snaarvergelijking luidt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad .$$

Bepaal met behulp van separatie van variabelen de uitwijking $u(x,t)$ voor $t > 0$ $(0 \leq x \leq \pi)$.

4. In R_3 zijn gegeven drie (niet noodzakelijk onderling loodrechte) onafhankelijke vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ met lengte 1.
Beschouw de lineaire afbeelding

$$\mathcal{A}\underline{x} = (\underline{a},\underline{x})\underline{a} + (\underline{b},\underline{x})\underline{b} + (\underline{c},\underline{x})\underline{c} \ .$$

a) Toon aan:
   a1. de afbeelding is symmetrisch,
   a2. $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) > 0$ voor alle $\underline{x}$ van R_3 $(\underline{x} \neq \underline{0})$,
   a3. alle eigenwaarden zijn positief.
b) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$.
c) Toon aan dat, als er één eigenwaarde 1 optreedt, tenminste twee van de vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ loodrecht op elkaar staan.

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 30 met

b) Bereken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - 4}$.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 30.

4. Los x en y op uit het stelsel

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - y = 1$$

als gegeven is $x(0) = 3$, $x'(0) = -2$ en $y(0) = 0$.

2 juni 1970

Wiskunde 30

1. Los op:

$$x^3y' + 3xy^2y' - 2y^3 = 0 .$$

2. Gegeven: $f(x)$ heeft periode 2π.

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x & \text{voor } |x| \le \frac{\pi}{2} , \\ 0 & \text{voor } \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi . \end{cases}$$

Bepaal de fourierreeks van $f(x)$.

3. In een cirkelvormige schijf met straal 1 wordt de temperatuurverdeling constant gehouden.
De temperatuurverdeling wordt beschreven door de vergelijking van Laplace in poolcoördinaten:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0 , \qquad 0 < r < 1$$

met de voorwaarden

$T(r,\varphi)$ is begrensd,

$T(r,\varphi + 2\pi) = T(r,\varphi)$ voor $0 < r \le 1$ en alle φ ,

$T(1,\varphi) = 1 + \sin\varphi + \cos\varphi$ voor alle φ .

Gevraagd wordt de temperatuurverdeling $T(r,\varphi)$ over de schijf.

4. Zij V een vectorruimte van dimensie 3 met inproduct.
$\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ vormen een basis van V.

$$|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}| = 1 \; ; \quad (\underline{a},\underline{b}) = 0 , \quad (\underline{a},\underline{c}) = \frac{1}{3} , \quad (\underline{b},\underline{c}) = \frac{2}{3} .$$

$\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ is een orthonormale basis, zodanig dat $\underline{e}_1 = \underline{a}$, $\underline{e}_2 = \underline{b}$ en $(\underline{e}_3,\underline{c}) > 0$.

a) Bepaal de overgangsmatrix van $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ naar $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$. (Maak een tekening van de vectoren.)

$\mathcal{A}$ is een lineaire afbeelding van V op V bepaald door $\mathcal{A}\underline{a} = \underline{a}$, $\mathcal{A}\underline{b} = \underline{b}$, $\mathcal{A}\underline{c} = \frac{2}{3}\underline{a} + \frac{4}{3}\underline{b} - \underline{c}$.

b) Wat is de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$?

c) Bewijs dat $\mathcal{A}$ een symmetrische lineaire afbeelding is.

d) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{A}$.

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 30.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 30.

4. Los op:

$$\frac{dx}{dt} + 3x + 4y = 16$$

$$\frac{dy}{dt} + 4x - 3y = -12$$

met beginvoorwaarden x(0) = 1, y(0) = 2.

19 januari 1971

Wiskunde 30

1. Bepaal de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{dx}{dt} = 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 4z$$

$$\frac{dz}{dt} = 4y$$

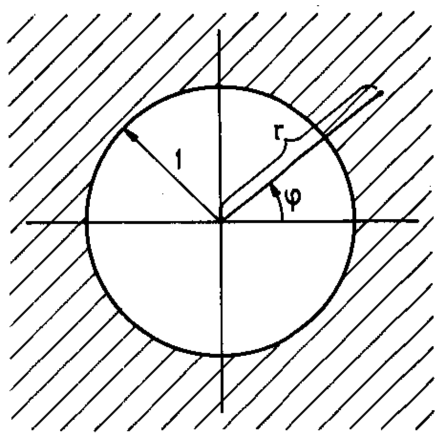
2. De functie f is als volgt gedefinieerd:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{voor } -\pi \le x < -\pi/2 \\ x & \text{voor } -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ \pi - x & \text{voor } \pi/2 < x < \pi \end{cases},$$

f is periodiek met periode 2π.

Bepaal de fourierreeks van f.

3. We beschouwen de stationaire temperatuurverdeling $T(r,\varphi)$ in een vlakke oneindig grote plaat met een cirkelvormig gat met straal 1 (zie figuur).



$T(r,\varphi)$ voldoet aan:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (r > 1 \text{ en alle } \varphi),$$

$T(r,\varphi)$ is begrensd buiten de cirkel met straal 1,

$T(r,\varphi+2\pi) = T(r,\varphi)$ voor $r \ge 1$ en alle φ,

$T(1,\varphi) = 2\sin\varphi + \sin 2\varphi$ voor alle φ.

Bepaal met behulp van separatie van variabelen $T(r,\varphi)$ voor $r \ge 1$ en alle φ.

4. V is een vectorruimte van dimensie 3 met inproduct.
W is een plat vlak in V door de oorsprong en $\underline{n}$ is een vector in V die loodrecht op W staat. Verder is $|\underline{n}| = 1$ en $\underline{a}$ is een vector in V met $(\underline{a},\underline{n}) \neq 0$.
De afbeelding $\mathcal{A}$: $V \to V$ is gedefinieerd door:

$$\mathcal{A}\underline{x} = \underline{x} - \frac{(\underline{x},\underline{n})}{(\underline{a},\underline{n})}\,\underline{a}\,.$$

a) Bewijs dat $\mathcal{A}$ een lineaire afbeelding is.

b) Toon aan dat voor iedere $\underline{x}$ in V het beeld $\mathcal{A}\underline{x}$ in W ligt.

c) Bewijs dat voor iedere vector $\underline{x}$ in V geldt: $\mathcal{A}^2\underline{x} = \mathcal{A}\underline{x}$.

d) Bepaal de eigenwaarden met de bijbehorende eigenvectoren van $\mathcal{A}$.

5. Gegeven is de rij functies $f_n(x) = e^{-nx}\sin nx$ voor $n = 1,2,\ldots$ en $x \ge 0$.

a) Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \ge 0$.

b) Bewijs dat deze rij uniform convergeert voor $x \ge 1$.

c) Toon aan dat deze rij <u>niet</u> uniform convergeert voor $x \ge 0$.

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 30 met

   a) Bepaal de fourierreeks van f.

   b) Bepaal de som van de fourierreeks van f in $x = \frac{\pi}{2}$.
   (Motiveer Uw antwoord!)

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 30.

4. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} + (2x - 2x^3y)y = 0 \; .$$

1 juni 1971

Wiskunde 30

1. Bepaal de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{dx}{dt} = \quad - \; y + z$$

$$\frac{dy}{dt} = x - 2y + z$$

$$\frac{dz}{dt} = x - \; y \qquad .$$

2. De functie f is periodiek met periode 2π en $f(x) = \cos \alpha x$ voor $-\pi \le x \le \pi$ met α niet geheel.

   a) Bepaal de fourierreeks van deze functie.

   b) Beredeneer dat de som van deze fourierreeks gelijk is aan $\cos \alpha x$ voor $-\pi \le x \le \pi$.

3. De temperatuurverdeling $T(r,\varphi)$ in een halve cirkelschijf, in poolcoördinaten gegeven door $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi$, voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (0 < r < 1,\ 0 < \varphi < \pi)$$

en aan de voorwaarden:

$T(r,0) = T(r,\pi) = 0$ voor $0 \le r \le 1$,

$T(1,\varphi) = \sin 2\varphi$ voor $0 \le \varphi \le \pi$ en

$T(r,\varphi)$ is begrensd op de halve cirkelschijf.

Bepaal met de methode van separatie van variabelen de temperatuurverdeling $T(r,\varphi)$ in de halve cirkelschijf.

4. Gegeven is een lineaire symmetrische afbeelding $\mathcal{P}: R_3 \to R_3$ met de eigenschap $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$.

a) Bewijs dat iedere eigenwaarde van $\mathcal{P}$ gelijk is aan 0 of 1.

b) Laat zien dat de beeldruimte van $\mathcal{P}$ het orthogonale complement van de nulruimte van $\mathcal{P}$ is.

c) Zij gegeven dat de vector $(1,1,1)$ de nulruimte van $\mathcal{P}$ opspant. Bepaal de matrix van $\mathcal{P}$ ten opzichte van de basis $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 30.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 30.

4. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking:

$$x\,\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x + y} \quad .$$

18 januari 1972

Wiskunde 30

1. Bepaal alle reële oplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{dx}{dt} = x - 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y \ .$$

2. De functie f is als volgt gedefinieerd:

$$f(x) = e^{-x} \quad \text{voor } 0 \le x < 2\pi \ ,$$

f is periodiek met periode 2π .

a) Bepaal de fourierreeks van f.

b) Bepaal de som van deze fourierreeks voor $x = 0$.

3. De temperatuur $T(x,t)$ van een dunne homogene staaf langs de x-as tussen de punten $x = 0$ en $x = \frac{\pi}{2}$ voldoet aan

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{voor } 0 < x < \frac{\pi}{2}\ ,\ t > 0\ ,$$

$$T(0,t) = 0 \quad \text{voor } t > 0\ ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \quad \text{voor } t > 0\ ,$$

$$T(x,0) = \sin 13x \quad \text{voor } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\ .$$

Bepaal met de methode van separatie van variabelen $T(x,t)$ voor $t > 0$ en $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

4. In R_3 is gegeven een orthonormale basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.
$\mathcal{A}$ is een symmetrische lineaire afbeelding van R_3 in R_3 waarvoor geldt:

$$\mathcal{A}\underline{a} = \underline{a}\ ,\ \mathcal{A}\underline{b} = \underline{0} \quad \text{en} \quad \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}.$$

a) Bewijs: $(\mathcal{A}\underline{c},\underline{a}) = 0$ en $(\mathcal{A}\underline{c},\underline{b}) = 0$.

b) Bewijs dat $\mathcal{A}\underline{c} = \gamma\underline{c}$ met $\gamma = 0$ of $\gamma = 1$.

c) Bewijs dat voor $\gamma = 0$ $\mathcal{A}$ de loodrechte projectie op de rechte $\underline{x} = \lambda\underline{a}$ voorstelt.

d) Bewijs dat voor $\gamma = 1$ $\mathcal{A}$ de loodrechte projectie op het vlak $\underline{x} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{c}$ is.

5. Bewijs dat de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n^4x^2 + 1}$$

uniform convergeert op het interval $(-\infty,\infty)$.

Wiskunde 39

1. Bepaal alle reële oplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2y + z$$

$$\frac{dz}{dt} = -5x + y + 3z \quad .$$

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 30.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 30.

4. Bepaal alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y = xy' - 2(y')^2 \; .$$

30 mei 1972

Wiskunde 30

1. Bepaal de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = y + z \quad ,$$

$$\frac{dy}{dt} = x + z \quad ,$$

$$\frac{dz}{dt} = 2x - 2y + z \quad ,$$

welke voldoet aan de beginvoorwaarden

$$x(0) = 1 \;, \quad y(0) = z(0) = 0 \;.$$

2. De functie f is als volgt gedefinieerd:

$$f(x) = \sin x \quad \text{voor } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \;,$$

f is periodiek met periode $\frac{\pi}{2}$.

a) Bepaal de fourierreeks van f.

b) Bepaal de som van deze reeks voor $x = 0$.
Motiveer Uw antwoord.

3. De temperatuurverdeling $W(x,t)$ in een dunne staaf, gelegen langs de x-as tussen $x = 0$ en $x = \pi$, voldoet aan

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad \text{voor } 0 < x < \pi,\; t > 0 \;,$$

$$W(0,t) = W(\pi,t) = 0 \quad \text{voor } t \ge 0 \;,$$

$$W(x,0) = e^x \quad \text{voor } 0 < x < \pi \;.$$

Bepaal met de methode van separatie van variabelen $W(x,t)$ voor $0 \le x \le \pi$ en $t > 0$.

4. In R_3 is een basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ gegeven. De vector $\underline{d}$ heeft als kolom

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ ten opzichte van deze basis met $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Van de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ is gegeven

$$\mathcal{A}\underline{a} = \mathcal{A}\underline{b} = \mathcal{A}\underline{c} = \underline{d} \text{ .}$$

a) Toon aan dat $\underline{d}$ een eigenvector van $\mathcal{A}$ is met eigenwaarde 1.

b) Bepaal de overige eigenwaarden en eigenvectoren.

c) Geef een basis aan ten opzichte waarvan $\mathcal{A}$ een diagonaalmatrix heeft en bepaal deze diagonaalmatrix.

d) Bepaal de overgangsmatrix S bij overgang van de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ op de onder c) gevonden basis.

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 30.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 30.

4. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = \sin x \text{ .}$$

16 januari 1973

Wiskunde 30

1. Bepaal alle reële oplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \quad y - 3z \\ \frac{dy}{dt} &= -x \quad\quad + z \\ \frac{dz}{dt} &= \quad y - z \text{ .} \end{aligned}$$

2. De functie f is als volgt gedefinieerd:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{voor } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{voor } \frac{\pi}{2} < x \le \pi . \end{cases}$$

Bepaal de fourier-sinusreeks van f.

3. De stationaire temperatuurverdeling $T(x,y)$ in het vierkant $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ voldoet aan

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{voor } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 ,$$

$$T(0,y) = T(1,y) = 0 \qquad \text{voor } 0 \le y \le 1 ,$$

$$T(x,0) = 0 \qquad \text{voor } 0 \le x \le 1 ,$$

$$T(x,1) = \sin 2\pi x \qquad \text{voor } 0 \le x \le 1 .$$

Bepaal $T(x,y)$ voor $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ met de methode van separatie van variabelen.

4. V is een vectorruimte van dimensie 3 met inproduct.
In V is gegeven een basis $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ met de eigenschappen

$$|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}| = 1 ,$$

$$(\underline{a},\underline{b}) = \tfrac{1}{2}$$

en $$(\underline{a},\underline{c}) = (\underline{b},\underline{c}) = 0 .$$

De lineaire afbeelding $\mathcal{A}: V \to V$ is gedefinieerd door

$$\mathcal{A}\underline{x} = \underline{x} - 2(\underline{x},\underline{c})(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}) .$$

a) Bewijs dat $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$ (de identiteit).
b) Bepaal een basis ten opzichte waarvan $\mathcal{A}$ een diagonaalmatrix heeft.
c) Is de afbeelding $\mathcal{A}$ symmetrisch? Motiveer Uw antwoord.

Wiskunde 39

1. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(1+x)y' + y = 3x^2 - 2x \ .$$

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 30.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 30.

4. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

HERKANSINGEN

22 juni 1966 (Wiskunde 30)

1. Los op: $xy'' - (1 + x^2)y' = 0.$

2. Bereken de fourierreeks van de functie f bepaald door

   $f(x) = \pi - x$ als $0 \leq x \leq \pi$,

   $f(x)$ is even,

   $f(x)$ is periodiek met periode 2π.

3. Gegeven is het kwadratische oppervlak in R_3 met vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2z - 2 = 0.$$

   Bepaal:

   a) de standaardgedaante van de vergelijking;

   b) het type van het oppervlak.

21 januari 1967 (Wiskunde 30)

1. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x + y + 1}{x - y} .$$

2. Zij $f(x) = |\sin x| - \sin x$ voor $-\pi \leq x < \pi$ en periodiek met periode 2π.
   Bepaal de fourierreeks van $f(x)$.

3. In R_3 is het kwadratische oppervlak H gegeven waarvan de vergelijking luidt

$$-24xy + 7y^2 + z^2 = 1 .$$

   Bepaal de vergelijking van H t.o.v. een orthonormale basis, waarvan de basisvectoren langs de hoofdassen van H vallen.
   Bepaal het type van H.

21 juni 1967 (Wiskunde 30)

1. Los op: $(x^3y^2 - \sin y)y' = x - x^2y^3$.

Bepaal de oplossing waarvan de grafiek gaat door het punt (1,0).

2. De functie f(x) is gegeven door

$f(x) = 2x$ voor $-\pi < x \leq \pi$,

f(x) is periodiek met periode 2π.

Bepaal de reeks van Fourier van f(x).

3. a) Bepaal de vergelijking van de grootste bol die beschreven kan worden in de ellipsoïde met vergelijking

$$5x^2 + 6xz + 2y^2 + 5z^2 = 8 .$$

b) Bepaal ook de coördinaten van de beide raakpunten.

22 januari 1968 (Wiskunde 30)

1. Los op de differentiaalvergelijking

$$(6x^2y + 9xy^2 - 5)dx + (2x^3 + 9x^2y)dy = 0 .$$

2. Bepaal de fourierreeks van de functie f, die periodiek is met periode 2, terwijl verder gegeven is

$f(x) = x + 1$, $0 < x < 1$,

f(x) is oneven.

3. Zij V een driedimensionale vectorruimte met inproduct. In V is een onafhankelijke basis $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ gegeven , zodat $|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}| = 1$ en een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ die gedefinieerd is door

$$\mathcal{A}\underline{x} = (\underline{a},\underline{x})\underline{a} + (\underline{b},\underline{x})\underline{b} + (\underline{c},\underline{x})\underline{c} .$$

a) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

b) Bewijs dat 1 een eigenwaarde van $\mathcal{A}$ is, dan en slechts dan als het drietal basisvectoren een loodrecht paar bevat.

17 juni 1968 (Wiskunde 30)

1. Los op: $x\frac{dy}{dx} + y(x^2+1) + x = 0$.

2. $f(x) = \cos \frac{1}{2}x$ is gedefinieerd voor $-\pi < x \leq \pi$ en heeft periode 2π.
Bepaal de fouriercoëfficiënten van $f(x)$.

3. In R_3 is gegeven de kwadratische vorm

$$3x^2 - y^2 + 8xz - 3z^2 .$$

Bepaal de overgangsmatrix van een zodanige coördinatentransformatie, dat deze vorm t.o.v. de nieuwe orthogonale basis van de gedaante $au^2 + bv^2 + cw^2$ is.

20 januari 1969 (Wiskunde 30)

1. Los op: $(x^2 + x - 3y^2)dy + (2xy + y + 1)dx = 0$.

2. De functie $f(x)$ is gegeven door

$f(x) = 1 - x$ voor $0 \leq x \leq 1$,

$f(x)$ is even,

$f(x)$ is periodiek met periode 2.

Bepaal de fourierreeks van $f(x)$.

3. In R_2 hebben de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ de kolommen $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ t.o.v. een orthonormale basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$.
De lineaire afbeelding $\mathcal{A}: R_2 \to R_2$ heeft t.o.v. de basis $\underline{a},\underline{b}$ de matrix

$$A = \begin{pmatrix}3 & 10\\0 & -1\end{pmatrix} .$$

Onderzoek of $\mathcal{A}$ symmetrisch is.

16 juni 1969 (Wiskunde 30)

1. Los op: $\frac{y'}{y} - x^2y = \frac{1}{x}$.

2. Los op:

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = 5x - 2y \ ,$$

met de randvoorwaarden

$$x(0) = 8 \quad \text{en} \quad \left\{\frac{dx}{dt}\right\}_{t=0} = 3.$$

3. De functie f is als volgt gedefinieerd:

$f(x) = x - 2 \quad \text{voor } 0 \leq x \leq 1$,

f is even en periodiek met periode 2.

a) Bepaal de fourierreeks van f.

b) Bereken $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

4. In R_3 zijn gegeven $\underline{x} = (0,3,3)$ en $\underline{y} = (4,-1,1)$ t.o.v. een orthonormale basis. De draaiing $\mathcal{A}$ beeldt $\underline{x}$ op $\underline{y}$ af. De draaiingsas staat loodrecht op $\underline{x}$ en $\underline{y}$. Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$.

<u>19 januari 1970</u>

<u>Wiskunde 30</u>

1. Bepaal de oplossingen van

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + 7y \ ,$$

die voldoen aan de beginvoorwaarden $x(0) = 0$, $y(0) = -1$.

2. Zij $\mathcal{A}$: $R_3 \rightarrow R_3$ de projectie op een vlak V door de oorsprong en $\mathcal{B} : R_3 \rightarrow R_3$ gedefinieerd door $\mathcal{B} = \mathcal{A} + \mathcal{I}$, waarbij $\mathcal{I}$ de identieke afbeelding is.

a) Bereken de eigenwaarden van $\mathcal{B}$.

b) Bewijs dat $\mathcal{B}$ inverteerbaar is.

3. De functie f is gedefinieerd voor alle x door

$$f(x) = 2 - x \quad (0 \leq x \leq 2) ,$$

$$f(x) = x - 2 \quad (2 \leq x \leq 4) ,$$

$$f(x + 4) = f(x) .$$

a) Bepaal de fourierreeks van f.

b) Bereken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

4. Gegeven de rij functies $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $n = 1,2,\ldots$ en $x \geq 0$.

a) Bepaal $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \geq 0$.

b) Ga na of de rij uniform convergeert op het interval $0 \leq x \leq 1$.

c) Ga na of de rij uniform convergeert op het interval $[1,\infty)$.

<u>Wiskunde 39</u>

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$(y - 3x)y' = 7x + 3y$$

$$y(1) = -1 .$$

Los y op; de oplossing moet gegeven worden in de vorm $y = f(x)$.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 30.

4. Los met behulp van een machtreekssubstitutie op

$$y'' - 2xy' + 4y = 0$$

$$y(0) = -2 \ ; \ y'(0) = 0 .$$

17 juni 1970

Wiskunde 30

1. Bepaal de algemene reële oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{dx}{dt} = 4x - y + 6$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + 2y - 2 \; .$$

2. V is een driedimensionale vectorruimte met inproduct, opgespannen door de vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$. Zij $\mathcal{A}$ een lineaire afbeelding van V in V.
Gegeven is, dat

$$\mathcal{A}\underline{a} = \underline{a} \; , \; \mathcal{A}\underline{b} = \underline{c} \; , \; \mathcal{A}^2 = \mathcal{I} \, .$$

($\mathcal{I}$ is de identieke afbeelding) .

a) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.
b) Bepaal een nieuwe basis, ten opzichte waarvan $\mathcal{A}$ een diagonaalmatrix heeft, en geef deze diagonaalmatrix.
c) Gegeven is, dat $(\underline{a},\underline{b}) = 1$ en $(\underline{a},\underline{c}) = -1$.
Is de afbeelding $\mathcal{A}$ symmetrisch? Motiveer Uw antwoord.

3. De functie f(x) is als volgt gedefinieerd:

$$f(x) = 0 \quad \text{voor } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \cos x \quad \text{voor } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi$$

$$f(x) = -\cos x \quad \text{voor } -\pi < x \le -\frac{\pi}{2}$$

f(x) is periodiek met periode 2π .

a) Bepaal de fourierreeks van f.
b) Is de fourierreeks uniform convergent voor $0 \le x \le 2\pi$?
Motiveer Uw antwoord.

4. De tijdafhankelijke warmtegeleidingsvergelijking voor een dunne homogene staaf langs de x-as heeft de gedaante:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (1)$$

waarin T de temperatuur en t de tijd is.
Beschouw een staaf ter lengte π.
Gevraagd wordt een functie $T(x,t)$ te bepalen, die aan (1) voldoet (voor $0 < x < \pi$, $t > 0$) en aan de voorwaarden:

$$\left.\begin{aligned} T(0,t) &= 0 \\ T(\pi,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ voor } t > 0$$

$T(x,0) = 2$ voor $0 < x < \pi$.

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Zie opgave 3 bij Wiskunde 30 met

   b) Voor welke waarden van x is de som van de fourierreeks gelijk aan $f(x)$? Motiveer Uw antwoord.

3. Zie opgave 4 bij Wiskunde 30.

4. Bepaal de algemene reële oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x^2y'' + 2x - 6y = 0 .$$

25 januari 1971

Wiskunde 30

1. Bepaal de algemene oplossing van

$$xydx + (x^2 + 2y^2 + 3y)dy = 0 .$$

2. Gegeven is de functie f(x) met

$$f(x) = \begin{cases} 3 + 2\sin^2 x & \text{voor } -\pi < x < 0 \\ 3 - 2\cos^2 x & \text{voor } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

en f(x) is periodiek met periode 2π.
Bepaal:

a) de fourierreeks van f(x)

b) de som van de fourierreeks van f(x) voor $x = \pi$.

3. Een dunne platte ringvormige schijf, begrensd door cirkels met straal 1 resp. 2, wordt langs de binnencirkel op temperatuur 1 gehouden en langs de buitencirkel op temperatuur 2.
De temperatuurverdeling op de schijf volgt de vergelijking van Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

(in poolcoördinaten: $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0$).

Bepaal de temperatuurverdeling.

4. Ten opzichte van een orthonormale basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ zijn gegeven: $\underline{a} = (0,1,1)$, $\underline{b} = (1,0,1)$, $\underline{c} = (1,1,0)$.
Een kwadriek heeft ten opzichte van de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ de vergelijking:

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1 .$$

a) Bepaal de vergelijking t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.

b) Bepaal de lengte der assen en de aard van de kwadriek.

c) Toon aan dat $\alpha(1,1,1)$ rotatie-as is.

Wiskunde 39

1. Bepaal de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{dx}{dt} = 3x - y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + 3y - z$$

$$\frac{dz}{dt} = -x - y + 3z \ .$$

2. Gegeven is de functie f(x) met

$$f(x) = \begin{cases} 4 - \cos 2x & \text{voor } -\pi < x < 0 \\ 2 - \cos 2x & \text{voor } 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

en $f(x)$ is periodiek met periode 2π.

Bepaal:

a) de fourierreeks van $f(x)$

b) de som van de fourierreeks van $f(x)$ voor $x = \pi$.

3. Bepaal de stationaire temperatuurverdeling $T(r,\varphi)$ binnen de eenheidscirkel (in poolcoördinaten: $r = 1$, $-\pi < \varphi \le \pi$) als gegeven is:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \text{voor alle } \varphi \text{ en } 0 < r \le 1 \ ,$$

$T(r,\varphi + 2\pi) = T(r,\varphi)$ voor alle φ en $0 < r \le 1$,

$T(r,\varphi)$ is begrensd op de cirkelschijf en

$T(1,\varphi) = \cos(\varphi + \frac{\pi}{4})$ voor alle φ.

4. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

16 juni 1971

Wiskunde 30

1. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking:

$$(x - y + 1)\frac{dy}{dx} = y .$$

2. De functie f is als volgt gedefinieerd:

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \cos\frac{x}{2} \quad \text{voor } -\pi < x \leq \pi ,$$

f is periodiek met periode 2π.

Bepaal de fourierreeks van f.

3. Een dunne homogene staaf met lengte π, gelegen langs de x-as tussen $x = 0$ en $x = \pi$, wordt aan de uiteinden op de constante temperatuur $W = 0$ gehouden. De begintemperatuur op het tijdstip $t = 0$ is

$$W(x,0) = 1 \quad \text{voor } 0 < x < \pi .$$

De temperatuur $W(x,t)$ voldoet verder aan de vergelijking

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} .$$

Bepaal met de methode van separatie van variabelen $W(x,t)$ voor $t > 0$ en $0 \leq x \leq \pi$.

4. De functies $f_n(x)$ zijn als volgt gedefinieerd:

$$f_n(x) = \sin(x^n) \quad (0 \leq x \leq 1,\ n = 1,2,\ldots) .$$

a) Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $0 \leq x \leq 1$.

b) Bewijs dat de rij functies uniform convergeert op $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

c) Bewijs dat de rij functies niet uniform convergeert op $0 \leq x \leq 1$.

5. In de driedimensionale ruimte R_3 vormen $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ een basis. We gaan over op een nieuwe basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$ waarbij

$$\begin{aligned} \underline{f}_1 &= \underline{e}_1 + \underline{e}_3 \\ \underline{f}_2 &= \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \\ \underline{f}_3 &= \underline{e}_1 \quad . \end{aligned}$$

Ten opzichte van deze nieuwe basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$ heeft de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ de matrix

$$A' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} .$$

Bepaal de matrix A van $\mathcal{A}$ ten opzichte van de oude basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.

<u>Wiskunde 39</u>

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 30.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 30.

4. Bepaal de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + 2y \quad .$$

<u>25 januari 1972</u>

<u>Wiskunde 30</u>

1. Bepaal met behulp van machtreekssubstitutie de oplossing y(x) van de differentiaalvergelijking

$$(1 - x^2)y'' + 2y = 0 \, ,$$

die voldoet aan

$$y(0) = 0 \, , \quad y'(0) = 1 \, .$$

2. De functie f is voor $x \geq 0$ als volgt gedefinieerd:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{voor } x = 1 \\ 0 & \text{voor } x > 1 . \end{cases}$$

Bewijs dat $f(x)$ geschreven kan worden in de vorm

$$f(x) = \int_0^\infty A(y) \cos yx \, dy \;, \quad x \geq 0 \;,$$

en bereken $A(y)$.

3. De stationaire temperatuurverdeling $T(x,y)$ in de halfoneindige strook $0 \leq x \leq 1$, $y \geq 0$ voldoet aan

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{voor } 0 < x < 1,\ y > 0 \;,$$

$T(x,y)$ is begrensd voor $0 \leq x \leq 1$, $y \geq 0$,

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial T}{\partial x}(1,y) = 0 \quad \text{voor } y > 0 \;,$$

$$T(x,0) = \cos 2\pi x \quad \text{voor } 0 \leq x \leq 1 \;.$$

Bepaal met de methode van separatie van variabelen $T(x,y)$ voor $y > 0$ en $0 \leq x \leq 1$.

4. V is een vectorruimte van dimensie 3 met inproduct.
In V is een niet-orthonormale basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ gegeven met de eigenschappen

$$|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}| = 1 \;, \quad (\underline{a},\underline{b}) = (\underline{a},\underline{c}) = 0 \;, \quad (\underline{b},\underline{c}) = \tfrac{1}{2} \;.$$

De lineaire afbeelding $\mathcal{A}: V \to V$ is gedefinieerd door:

$$\mathcal{A}\underline{x} = 2(\underline{a},\underline{x})\underline{a} + (\underline{b},\underline{x})\underline{b} + (\underline{c},\underline{x})\underline{c} \;.$$

a) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.
b) Bepaal de eigenvectoren en eigenwaarden van $\mathcal{A}$.
c) Toon aan dat de eigenvectoren onderling loodrecht zijn.
d) Bewijs dat $\mathcal{A}$ symmetrisch is.

5. Bereken

$$\int_0^1 \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}\}dx .$$

Noem de stellingen die U gebruikt.

Wiskunde 39

1. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 .$$

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 30.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 30 met randvoorwaarde:

$$T(x,0) = 1 + \cos 2\pi x \quad \text{voor } 0 \le x \le 1 .$$

4. Bepaal de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = y$$

$$\frac{dz}{dt} = x + 2z ,$$

welke voldoet aan de beginvoorwaarden

$$x(0) = 0 , \quad y(0) = 1 \quad \text{en} \quad z(0) = 0 .$$

14 juni 1972

Wiskunde 30

1. a) Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$2xy \frac{dy}{dx} = y^2 - x^2 .$$

b) Geef een beschrijving van de oplossingskrommen van deze differentiaalvergelijking.

2. De functie f is als volgt gedefinieerd:

$$f(x) = \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) \quad \text{voor } -\pi \le x < \pi ,$$

f is periodiek met periode 2π .

a) Bepaal de fourierreeks van f.

b) Bepaal de som van deze reeks voor $x = 0$.
Motiveer Uw antwoord.

3. Een dunne homogene snaar, gespannen langs de x-as tussen de punten $x = 0$ en $x = 2$, trilt om zijn evenwichtsstand. De uitwijking $u(x,t)$ op de plaats x ten tijde t voldoet aan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{voor } 0 < x < 2,\ t > 0 ,$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0 \quad \text{voor } t \ge 0 ,$$

$$u(x,0) = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin \pi x \quad \text{voor } 0 \le x \le 2 .$$

Bepaal met de methode van separatie van variabelen $u(x,t)$ voor $0 \le x \le 2$ en $t > 0$.

4. Bewijs dat de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 2^n x^n e^{-nx}$$

uniform convergent is op het interval $[0,\infty)$.

5. In R_2 is een basis $\underline{a}$, $\underline{b}$ gegeven met $|\underline{a}| = \sqrt{2}$ en $|\underline{b}| = \sqrt{5}$.
$\mathcal{A}$: $R_2 \to R_2$ is een symmetrische lineaire afbeelding die t.o.v. de basis $\underline{a},\underline{b}$ de volgende matrix heeft:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -1 & 11 \end{pmatrix} .$$

a) Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van $\mathcal{A}$.

b) Bereken $(\underline{a},\underline{b})$.

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 30.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 30.

4. Bepaal de algemene oplossing van het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{dx}{dt} = y + z - 1$$

$$\frac{dy}{dt} = x + z + 1$$

$$\frac{dz}{dt} = x + y \quad .$$

23 januari 1973

Wiskunde 30

1. Bepaal de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = x - y + e^t$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 3y - e^t ,$$

die voldoet aan de beginvoorwaarden

$$x(0) = 1 , \quad y(0) = 0 .$$

2. De functie f is als volgt gedefinieerd:

$$f(x) = 1 - x \quad \text{voor } 0 \leq x < 1 ,$$
f is periodiek met periode 1 .

Bepaal de fourierreeks van f.

3. De stationaire temperatuurverdeling op een kwart cirkelschijf met straal 2, in poolcoördinaten gegeven door $0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, voldoet aan

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad \text{voor } 0 < r < 2,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

$$T(r,0) = T(r,\tfrac{\pi}{2}) = 0 \qquad \text{voor } 0 \le r \le 2,$$

$$T(2,\varphi) = 3\sin 4\varphi + 5\sin 6\varphi \qquad \text{voor } 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$

$T(r,\varphi)$ is begrensd op de kwart cirkelschijf.

Bepaal $T(r,\varphi)$ voor $0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ met de methode van separatie van variabelen.

4. In R_4 met het gebruikelijke inproduct zijn gegeven twee vlakken, namelijk vlak V opgespannen door $(1,0,0,0)$ en $(0,1,0,0)$ en vlak W opgespannen door $(1,0,\sqrt{2},0)$ en $(0,1,0,\sqrt{2})$.

   a) Bepaal de loodrechte projecties op W van de vectoren $(1,0,0,0)$ en $(0,1,0,0)$.

   b) Bereken de cosinus van de hoek tussen een willekeurige vector in V en zijn loodrechte projectie op W.

Wiskunde 39

1. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x + y^2 + xyy' = 0 .$$

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 30.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 30.

4. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

ANTWOORDEN TENTAMENOPGAVEN

6 juni 1966

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2}\right) \sin nx$.

   b) Zie dictaat; voor alle x.

2. $y = \alpha x + \beta x^{-1}$.

3. a) Geen middelpunt.

   b) $z_1 = 3z_2^2 + 3z_3^2$;   omwentelingsparaboloïde.

   c) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 4 \\ 2\sqrt{2} & 3 & -1 \\ -2\sqrt{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

   d) $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$.

4. 4.1. ja
   4.2. nee
   4.3. ja
   4.4. ja
   4.5. nee
   4.6. ja
   4.7. ja
   4.8. ja
   4.9. nee
   4.10. ja.

10 januari 1967

1. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

2. a) $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi nx)}{n}$.

b) Voor $x \neq 2k$ (k geheel): convergentie naar $f(x)$.
Voor $x = 2k$ (k geheel): convergentie naar 0, terwijl $f(2k) = 1$.

c) Nee.

3. a) Geen uniforme convergentie.
b) 0 en 0.
c) Ook als de rij $\{g_n(x)\}$ niet uniform convergeert, dan kan toch

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx = \int_a^b \{\lim_{n\to\infty} g_n(x)\}dx \quad \text{zijn.}$$

4. a) $\underline{e}'_1 = (1,0,0,0)$
$\underline{e}'_2 = (0,0,1,0)$
$\underline{e}'_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(0,1,0,-1)$
$\underline{e}'_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(0,1,0,1)$.
b) $\mathcal{A}\underline{x} = 4\underline{e}'_1 - \underline{e}'_2 + 7\sqrt{2}\,\underline{e}'_4$
$\mathcal{A}\underline{x} = 4\underline{e}_1 + 7\underline{e}_2 - \underline{e}_3 + 7\underline{e}_4$.

<u>10 juni 1967</u>

1. a) $x \sin y + x^2 = C$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 14e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$.

2. a) $\frac{1}{2} + \sin \pi x - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

b) $|x| + \sin \pi x$; zie hoofdstelling.
c) Ja.

3. a) x.
c) Ja.

4. a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   b) $\mathcal{A}(\underline{a}_1 - \underline{a}_2) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + 2\underline{e}_3)$

   $\mathcal{A}(\underline{a}_1 - \underline{a}_2) = \underline{a}_1 + \underline{a}_2$.

<u>9 januari 1968</u>

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{t \cos \alpha}\begin{pmatrix} \cos(t \sin \alpha) \\ \sin(t \sin \alpha) \end{pmatrix}$.

3. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

4. b) $T(x,t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)^2 t} \cos(2n+1)x$.

5. b) Ja.

   c) Ja.

<u>11 juni 1968</u>

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + te^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. a) $y^2(x + \frac{1}{4} + Ce^{4x}) = 1$ en $y = 0$.

   b) i) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$;

   ii) uniform convergent voor $0 \le x \le 1$;

   iii) niet uniform convergent voor $x > 1$.

3. a) $T(r,\varphi) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(4n^2-1)} r^n \cos n\varphi$.

3. b) 0,74.

4. b) bijv. $f_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$f_2 = \tfrac{1}{2}t\sqrt{6}$$

$$f_3 = \tfrac{3}{4}\sqrt{10}(t^2 - \tfrac{1}{3}) \ .$$

c) $\frac{3}{5}$ t.

7 januari 1969

Wiskunde 30

1. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$z_1^2 - z_2^2 = 1$; hyperbool.

2. a) i) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

iii) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

b) $y^2 = \frac{2}{3} x + \frac{C}{x^2}$.

3. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} -1/8 \\ -5/8 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

4. b) $$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)t \sin(2n+1)x .$$

Wiskunde 39

2. $$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)x .$$

3 juni 1969

Wiskunde 30

1. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} .$$

2. a) $$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

b) $$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 : \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \lambda_3 = -1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

c) $$\underline{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\underline{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) .$$

3. a) $$\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin nx .$$

b) Voor $x \neq 2k\pi$ (k geheel) .

4. a) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } x = 0 \\ 0 & \text{voor } x > 0 \end{cases}$$

b) neen;

c) ja;

d) uniform convergent voor $x \geq 1$.

Wiskunde 39

2. $xe^y + \cos x = C$.

4. $T(x,t) = e^{-t}\sin x + e^{-25t}\sin 5x$.

13 januari 1970

Wiskunde 30

1. $y = 1 + Ce^{-\frac{1}{3}x^3 - \sin x}$.

2. a) $\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)(2n-1)} \sin(2n+1)x$.

3. $u(x,t) = \sin 3x \cos 3t + \sin 17x \cos 17t$.

4. b) $\begin{pmatrix} 1 & (\underline{a},\underline{b}) & (\underline{a},\underline{c}) \\ (\underline{a},\underline{b}) & 1 & (\underline{b},\underline{c}) \\ (\underline{a},\underline{c}) & (\underline{b},\underline{c}) & 1 \end{pmatrix}$.

Wiskunde 39

2. b) 0 .

4. $x = 3 + \frac{1}{2}t^2 - 2\sin t$
   $y = 2\sin t$.

2 juni 1970

Wiskunde 30

1. $y(x^2 + y^2) = Cx^2$.

2. $\frac{2}{\pi} + \cos x + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 2nx$.

3. $T(r,\varphi) = 1 + r\cos\varphi + r\sin\varphi$.

4. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

d) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 : \alpha\underline{e}_1 + \beta\underline{e}_2$; $\lambda_3 = -1 : \underline{e}_3$.

Wiskunde 39

4. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

19 januari 1971

Wiskunde 30

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta e^{5t}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \gamma e^{-5t}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x$.

3. $T(r,\varphi) = 2r^{-1}\sin\varphi + r^{-2}\sin 2\varphi$.

4. d) $\underline{a}$ is eigenvector bij eigenwaarde 0,
alle $\underline{x} \neq \underline{0}$ met $(\underline{x},\underline{n}) = 0$ zijn eigenvectoren met eigenwaarde 1.

5. a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ voor $x \geq 0$.

b) $|f_n(x) - 0| \leq e^{-n}$ voor $x \geq 1$.

Wiskunde 39

2. b) $\frac{\pi}{2}$.

4. $y(x^2 + 1 + Ce^{x^2}) = 1$ en $y = 0$.

1 juni 1971

Wiskunde 30

1. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

2. a) $\frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - \alpha^2} \cos nx$.

3. $T(r,\varphi) = r^2 \sin 2\varphi$.

4. c) $$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Wiskunde 39

4. $(y - x)^2 e^{\frac{y}{x}} = Cx$.

18 januari 1972

Wiskunde 30

1. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \end{pmatrix} ;$$ α en β reëel .

2. a) $\frac{1-e^{-2\pi}}{2\pi} + \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx + n \sin nx}{n^2+1}$

   b) $\frac{1}{2}(1 + e^{-2\pi})$.

3. $T(x,t) = e^{-169t} \sin 13x$.

Wiskunde 39

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta e^{3t} \begin{pmatrix} 2\cos t + \sin t \\ 5\cos t \\ 5\cos t - 5\sin t \end{pmatrix} + \gamma e^{3t} \begin{pmatrix} 2\sin t - \cos t \\ 5\sin t \\ 5\sin t + 5\cos t \end{pmatrix}$; α, β en γ reëel.

4. $y = Cx - 2C^2$, $y = \frac{1}{8} x^2$.

30 mei 1972

Wiskunde 30

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$.

2. a) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4nx + 4n \sin 4nx}{16n^2 - 1}$

   b) $\frac{1}{2}$.

3. $W(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^{n+1} e^{\pi})n}{n^2+1} e^{-n^2 t} \sin nx$.

4. b) $\lambda = 0$: $\mu(\underline{a} - \underline{b}) + \nu(\underline{a} - \underline{c})$.

   c) bijv.: $\underline{a} - \underline{b}$, $\underline{a} - \underline{c}$, $\underline{d}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. d) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ -1 & 0 & \beta \\ 0 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$.

<u>Wiskunde 39</u>

4. $x^2y + x\cos x - \sin x = C$.

<u>16 januari 1973</u>

<u>Wiskunde 30</u>

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \beta \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{-t} + \gamma \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{-t}$; α, β en γ reëel.

2. $\frac{1}{2}\sin x + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{4n^2-1} \sin 2nx$.

3. $T(x,y) = \frac{\sinh 2\pi y}{\sinh 2\pi} \sin 2\pi x$.

4. b) Bijv.: $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$.

   c) Nee: $0 = (\underline{a},\underline{c}) = (\mathcal{A}\underline{a},\underline{c}) \neq (\underline{a},\mathcal{A}\underline{c}) = (\underline{a}, -2\underline{a} - 2\underline{b} - \underline{c}) = -3$.

<u>Wiskunde 39</u>

1. $(1+x)y + x^2 - x^3 = C$.

ANTWOORDEN HERKANSINGEN

22 juni 1966

1. $y = C_1 e^{\frac{1}{2}x^2} + C_2$.

2. $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n + 1)x}{(2n + 1)^2}$.

3. a) $2z_1^2 + z_2^2 = 3$.

   b) Elliptische cylinder.

21 januari 1967

1. $x^2 + 2xy - y^2 + 2x = C$.

2. $\frac{2}{\pi} - \sin x - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$.

3. $z_1^2 + 16z_2^2 - 9z_3^2 = 1$;

   éénbladige hyperboloïde.

21 juni 1967

1. $2x^3y^3 - 3x^2 + 6 \cos y = 3$.

2. $4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$.

3. a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

   b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1,0,1)$ en $\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1,0,-1)$.

22 januari 1968

1. $4x^3y + 9x^2y^2 - 10x = C$.

2. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2(-1)^{n+1}}{n}\sin\pi nx$.

3. a) $\begin{pmatrix} 1 & (\underline{a},\underline{b}) & (\underline{a},\underline{c}) \\ (\underline{b},\underline{a}) & 1 & (\underline{b},\underline{c}) \\ (\underline{c},\underline{a}) & (\underline{c},\underline{b}) & 1 \end{pmatrix}$.

17 juni 1968

1. $y = -\frac{1}{x} + \frac{C}{x}e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

2. $a_k = -\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}$ $\quad (k = 0,1,2,\ldots)$;

$b_\ell = 0$ $\quad (\ell = 1,2,\ldots)$.

3. $S = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

20 januari 1969

1. $x^2y + xy - y^3 + x = C$.

2. $\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi x$.

3. $\mathcal{A}$ is symmetrisch.

16 juni 1969

1. $4x = (C - x^4)y$.

2. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{15}{2} \end{pmatrix} e^{-4t} .$$

3. a) $$-\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi(2n+1)x}{(2n+1)^2} .$$

   b) $\pi^2/8$.

4. $$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & -7 \\ -8 & -1 & 4 \end{pmatrix} .$$

19 januari 1970

Wiskunde 30

1. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{5t} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} te^{5t} .$$

2. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$;

   $\lambda_3 = 1$.

3. a) $$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n+1)^2} \cos \frac{\pi}{2} (2n+1)x .$$

   b) $\pi^2/8$.

4. a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ voor $x \geq 0$.

   b) Niet uniform convergent voor $0 \leq x \leq 1$;

   c) uniform convergent voor $x \geq 1$.

Wiskunde 39

2. $y = -x$.

4. $y = 4x^2 - 2$.

17 juni 1970

Wiskunde 30

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix} + \beta e^{3t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; α, β reëel.

2. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) bijv.: $\underline{a}$, $\underline{b} + \underline{c}$, $\underline{b} - \underline{c}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Nee, want $(\underline{a}, \lambda \underline{b}) \neq (\lambda \underline{a}, \underline{b})$.

3. a) $-\frac{1}{\pi} \sin x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(-1)^n + \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 - 1} \sin nx$;

b) Nee: discontinue som.

4. $T(x,t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x$.

Wiskunde 39

2. b) Voor alle $x \neq (2n+1)\pi$, n geheel.

4. $y = \alpha x^3 + \beta x^{-2} + \frac{1}{3} x$; α en β reëel.

25 januari 1971

Wiskunde 30

1. $y^2(x^2 + y^2 + 2y) = C$.

2. a) $3 - \cos 2x - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

   b) 2 .

3. $T(r,\varphi) = 1 + \frac{\log r}{\log 2}$.

4. a) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 4 = 0$.

   b) lengte der assen: 4, 2, 2; ellipsoïde.

Wiskunde 39

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Zie antwoord van opgave 2 bij Wiskunde 30.

3. $T(r,\varphi) = r \cos(\varphi + \frac{\pi}{4})$.

16 juni 1971

Wiskunde 30

1. $ye^{\frac{x+1}{y}} = C$.

2. $\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos nx$.

3. $W(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x$.

4. a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 \le x < 1 \\ \sin 1 & \text{voor } x = 1 \end{cases}$.

5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Wiskunde 39

4. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^t \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

25 januari 1972

Wiskunde 30

1. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-4n^2}$.

2. $A(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{voor } y = 0 \\ \frac{2}{\pi y} \sin y & \text{voor } y > 0 \end{cases}$.

3. $T(x,y) = e^{-2\pi y} \cos 2\pi x$.

4. a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\lambda_1 = \frac{1}{2}$: $\underline{b} - \underline{c}$; $\lambda_2 = \frac{3}{2}$: $\underline{b} + \underline{c}$; $\lambda_3 = 2$: $\underline{a}$.

5. 1 .

Wiskunde 39

1. $y = \alpha x^2 + \beta x^2 \log |x|$.

3. $T(x,y) = 1 + e^{-2\pi y} \cos 2\pi x$.

4. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

14 juni 1972

Wiskunde 30

1. a) $x^2 + y^2 = Cx$.

   b) cirkels met middelpunt $(\frac{1}{2}C,0)$ en straal $\frac{1}{2}|C|$.

2. a) $\frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \cos nx$.

   b) 1 .

3. $u(x,t) = \frac{1}{\pi} \sin \pi t \sin \pi x$.

5. a) $\lambda_1 = 3 : 2\underline{a} + \underline{b}$; $\lambda_2 = 4 : \underline{a} - \underline{b}$.

   b) -1 .

Wiskunde 39

4. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>23 januari 1973</u>

<u>Wiskunde 30</u>

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$.

2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n}$.

3. $T(r,\varphi) = 3(\frac{r}{2})^4 \sin 4\varphi + 5(\frac{r}{2})^6 \sin 6\varphi$.

4. a) $\frac{1}{3}(1,0,\sqrt{2},0)$ en $\frac{1}{3}(0,1,0,\sqrt{2})$.

   b) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

<u>Wiskunde 39</u>

1. $2x^3 + 3x^2y^2 = C$.