

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

## **WISKUNDE 30**

bestemd voor

**WSK-III, N-III, W-III, E-III en T-III**

## **WISKUNDE 39**

bestemd voor

**BDK-III, T-III**

**Najaarssemester 1981**

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 30

bestemd voor

WSK-III, N-III, W-III, E-III en T-III

Wiskunde 39 (alleen de hoofdstukken 1 en 4)

bestemd voor BDK-III, T-III

Najaarssemester 1981

## INHOUDSOPGAVE

	blz.
Hoofdstuk 1. Lineaire algebra	1
1.1. Lineaire afbeeldingen en matrices	1
1.2. Basisovergang	9
1.3. Eigenwaarden en eigenvectoren	13
1.4. Vectorruimten met inproduct, orthonormale bases	20
1.5. Symmetrische matrices en lineaire afbeeldingen, projecties	28
1.6. Kwadratische vormen	38
Hoofdstuk 2. Functies $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	48
2.1. Notatie, continuïteit	48
2.2. Differentieerbaarheid, kettingregel	53
2.3. Inverse functies, impliciete functies	59
2.4. Transformatie van meervoudige integralen	70
Hoofdstuk 3. Fourierreeksen, uniforme convergentie	77
3.1. Fourierreeksen met periode $2\pi$	77
3.2. Bewijs van de hoofdstelling der Fourierreeksen	86
3.3. Fourierreeksen met periode $p$ , complexe schrijfwijze voor Fourierreeksen	89
3.4. Fourierintegralen	97
3.5. Uniforme convergentie van rijen van functies	102
3.6. Uniforme convergentie van reeksen van functies	113
3.7. Het verschijnsel van Gibbs	121
Hoofdstuk 4. Differentiaalvergelijkingen	123
4.1. Lineaire stelsels differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten	123
4.2. Laplace transformatie	139
4.3. Differentiaalvergelijkingen van het type Euler, machtrekssubstitutie	148
4.4. Numerieke oplossing van differentiaalvergelijkingen	158

Hoofdstuk 1. Lineaire algebra

1.1. Lineaire afbeeldingen en matrices

Ter inleiding herhalen we enige begrippen uit het college Wiskunde 20, hoofdstuk 3.

1.1.1. Definitie. Een reële vectorruimte (of kortweg vectorruimte of lineaire ruimte) is een verzameling  $L$  van elementen, genaamd vectoren (genoteerd  $\underline{a}, \underline{b}, \dots$ ) waarin twee bewerkingen gedefinieerd zijn, namelijk een optelling: bij elk tweetal vectoren  $\underline{a}$  en  $\underline{b}$  is er één vector die we  $\underline{a} + \underline{b}$  noemen, en een scalaire vermenigvuldiging: bij elk reëel getal  $r$  en elke vector  $\underline{a}$  is er één vector die we  $r\underline{a}$  noemen, en wel zo dat deze optelling en scalaire vermenigvuldiging voldoen aan onderstaande regels 1 t/m 8; hierin zijn  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in L$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$ .

- 1)  $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$  (associatieve eigenschap);
- 2)  $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$  (commutatieve eigenschap);
- 3) er is precies één vector  $\underline{0}$  (genaamd nulvector), zodat  $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$  voor elke  $\underline{a} \in L$ ;
- 4) bij elke  $\underline{a} \in L$  bestaat er precies één vector, genoteerd  $-\underline{a}$ , waarvoor  $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$ ;
- 5)  $1\underline{a} = \underline{a}$ ;
- 6)  $r(\underline{sa}) = (rs)\underline{a}$ ;
- 7)  $(r+s)\underline{a} = r\underline{a} + s\underline{a}$ ; (distributieve eigenschappen)
- 8)  $r(\underline{a} + \underline{b}) = r\underline{a} + r\underline{b}$ .

Opmerking. Evenals in Wiskunde 20 vatten we elementen van  $\mathbb{R}^n$  gewoonlijk op als kolomvectoren en we zullen ook de kolomvector  $\underline{a}$  met componenten  $a_1, \dots, a_n$  noteren als  $(a_1, \dots, a_n)$  i.p.v.

$[a_1, \dots, a_n]^T$  of  $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$  (zie de inleiding van hoofdstuk 3 van Wiskunde 20).

Met de bekende optelling en scalaire vermenigvuldiging is  $\mathbb{R}^n$  een vectorruimte.

Daarnaast zullen we in  $\mathbb{R}^n$  ook vaak een meetkundige terminologie gebruiken, zie Wiskunde 20, 3.1.2. Een element  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  wordt dan opgevat als een punt met cartesische coördinaten  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , of als verbindingspijl van  $\underline{0}$  (oorsprong) naar dit punt.

Definitie. Een deelverzameling  $V$  van een vectorruimte  $L$  heet een (lineaire) deelruimte als  $V$  met de aanwezige optelling en scalaire vermenigvuldiging zelf een vectorruimte is.

Voorbeeld.  $\mathbb{R}^3$  heeft als deelruimten:  $\{0\}$ ; rechten door  $0$ ; vlakken door  $0$ ;  $\mathbb{R}^3$  zelf.

Definitie. Zij  $L$  een vectorruimte. De vectoren  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  uit  $L$  heten (lineair) afhankelijk als er reële getallen  $r_1, r_2, \dots, r_k$  bestaan, die niet alle nul zijn, zodanig dat

$$r_1 \underline{v}_1 + r_2 \underline{v}_2 + \dots + r_k \underline{v}_k = \underline{0} .$$

Anders gezegd: de vectoren  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  zijn afhankelijk als  $\underline{0}$  op meer dan één manier te schrijven is als lineaire combinatie van  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  (steeds is:  $\underline{0} = 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + \dots + 0\underline{v}_k$ ).

De vectoren  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  uit  $L$  heten (lineair) onafhankelijk als ze niet afhankelijk zijn.

Anders gezegd: de vectoren  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  zijn onafhankelijk als uit  $r_1 \underline{v}_1 + r_2 \underline{v}_2 + \dots + r_k \underline{v}_k = \underline{0}$  volgt  $r_1 = r_2 = \dots = r_k = 0$ .

Definitie. Zij  $L$  een vectorruimte en zij  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_m$  een stelsel van  $m$  onafhankelijke vectoren uit  $L$ , zodanig dat elke vector uit  $L$  te schrijven is als lineaire combinatie van  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_m$ . Dan heet  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_m$  een basis van  $L$ .

Definitie. Het aantal vectoren in een basis van een vectorruimte  $L$  heet de dimensie van  $L$ ; notatie:  $\dim L$ .

De dimensie van een vectorruimte is onafhankelijk van de gekozen basis; alle bases bestaan namelijk uit evenveel vectoren.

Opmerking. In  $\mathbb{R}^n$  wordt vaak als basis gekozen de zgn. standaardbasis:  
 $\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\underline{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $\underline{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ ;  $\dim \mathbb{R}^n = n$ .

In dit hoofdstuk zullen we vrijwel uitsluitend werken met vectorruimten van eindige dimensie. Kiezen we daarin een basis  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ , dan zullen wel die voor de duur der beschouwing niet veranderen, ook niet voor wat de volgorde der vectoren betreft.

1.1.2. Definitie. Laat  $L$  en  $M$  vectorruimten zijn. Een afbeelding  $A: L \rightarrow M$  heet lineair als voor alle  $\underline{x} \in L$ ,  $\underline{y} \in L$  en alle  $r \in \mathbb{R}$  geldt:

- 1)  $A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y}$ ,
- 2)  $A(r\underline{x}) = rA\underline{x}$ .

We noteren lineaire afbeeldingen met geschreven hoofdletters. In het vervolg beperken we ons tot het geval dat  $M = L$ , d.w.z. we beschouwen alleen afbeeldingen  $L \rightarrow L$ .

Voor lineaire afbeeldingen  $L \rightarrow L$  laat zich een optelling en een vermenigvuldiging met een scalar invoeren:

Definitie. Laat  $A: L \rightarrow L$  en  $B: L \rightarrow L$  lineaire afbeeldingen zijn, dan wordt de som  $A + B$  en het scalaire veelvoud  $rA$ ,  $r \in R$ , gegeven door

$$(A + B)\underline{x} := A\underline{x} + B\underline{x} ,$$

$$(rA)\underline{x} := rA\underline{x} ,$$

voor alle  $\underline{x} \in L$ .

1.1.3. Stelling. De lineaire afbeeldingen  $L \rightarrow L$  vormen een vectorruimte.

Bewijs. We moeten eerst bewijzen dat  $A + B$  en  $rA$  lineaire afbeeldingen zijn. We doen dit slechts voor  $rA$ :

$$(rA)(\underline{x} + \underline{y}) = rA(\underline{x} + \underline{y}) = r(A\underline{x} + A\underline{y}) = rA\underline{x} + rA\underline{y} = (rA)\underline{x} + (rA)\underline{y} ,$$

$$(rA)(s\underline{x}) = rA(s\underline{x}) = r(sA\underline{x}) = (rs)A\underline{x} = s(rA\underline{x}) = s(rA)\underline{x} .$$

Vervolgens moet geverifieerd worden dat de axioma's van een vectorruimte (zie 1.1.1) vervuld zijn; dit wordt aan de lezer overgelaten.  $\square$

Bijzondere lineaire afbeeldingen  $L \rightarrow L$  zijn de identieke afbeelding  $I$  en de nulafbeelding  $O$ , gedefinieerd door

$$I\underline{x} := \underline{x} , \quad O\underline{x} := \underline{0} ,$$

voor alle  $\underline{x} \in L$ .

De operatie van na elkaar uitvoeren van twee lineaire afbeeldingen wordt product genoemd.

Definitie. Laat  $A: L \rightarrow L$  en  $B: L \rightarrow L$  lineaire afbeeldingen zijn, dan wordt het product  $AB$  gegeven door

$$(AB)\underline{x} := A(B\underline{x})$$

voor alle  $\underline{x} \in L$ .

N.B.  $AB$  betekent: eerst  $B$ , dan  $A$ .

Opmerking. In plaats van product spreekt men ook wel van de samengestelde afbeelding van A en B; in de colleges Wiskunde 10 en 20 is hiervoor de notatie  $A \circ B$  gebruikt.

1.1.4. Stelling. Het product van twee lineaire afbeeldingen is een lineaire afbeelding. Voorts geldt

$$(AB)C = A(BC) , \quad A(B+C) = AB + AC , \\ (A+B)C = AC + BC , \quad (rA)B = A(rB) = r(AB) .$$

Opgave. Bewijs deze stelling.

Het product van twee lineaire afbeeldingen is in het algemeen niet commutatief, d.w.z.  $AB = BA$  hoeft niet te gelden.

Voorbeelden. 1) Laat L het platte vlak  $\mathbb{R}^2$  zijn, A de rotatie over  $\frac{1}{2}\pi$ , B de projectie op de x-as. Zij  $\underline{e}_1 = (1,0)$ ,  $\underline{e}_2 = (0,1)$ , dan is  $AB\underline{e}_1 = A\underline{e}_1 = \underline{e}_2$ , maar  $BA\underline{e}_1 = B\underline{e}_1 = \underline{0}$ .

2) Laat L de ruimte  $\mathbb{R}^3$  zijn, A de rotatie over  $\frac{1}{2}\pi$  om de x-as, B de rotatie over  $\frac{1}{2}\pi$  om de y-as. Zij  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$  de standaardbasis van  $\mathbb{R}^3$ , dan is  $AB\underline{e}_1 = A(-\underline{e}_3) = \underline{e}_2$ , maar  $BA\underline{e}_1 = B\underline{e}_1 = -\underline{e}_3$ . Voorts geldt  $A^4 = B^4 = I$ ,  $A^2B^2 = B^2A^2$ ; ga dit na.

Zij  $A: L \rightarrow L$  een lineaire afbeelding. De verzameling  $AL := \{A\underline{x} \mid \underline{x} \in L\}$  heet de beeldruimte van A. De beeldruimte AL is een deelruimte van L die niet de hele L hoeft te zijn. Zo heeft de afbeelding B in voorbeeld 1) als beeldruimte de x-as. De nulafbeelding 0 heeft als beeldruimte enkel de nulvector 0. Als L een eindige dimensie heeft en  $AL = L$ , dan is er bij iedere  $\underline{y} \in L$  precies één  $\underline{x} \in L$  waarvoor geldt  $A\underline{x} = \underline{y}$ ; we noemen deze  $\underline{x} = A^+\underline{y}$ . Hierdoor is een afbeelding  $A^+: L \rightarrow L$  gedefinieerd, waarvoor geldt  $AA^+\underline{y} = \underline{y}$  voor alle  $\underline{y} \in L$ , oftewel

$$AA^+ = I .$$

De afbeelding  $A^+$  is eveneens lineair en heet de inverse van A. De inverse van  $A^+$  is weer A:

$$(A^+)^+ = A , \quad A^+A = I .$$

Als de lineaire afbeeldingen  $A$  en  $B$  beide een inverse hebben, dan is  $(AB)^{\wedge} = B^{\wedge}A^{\wedge}$ .

Zij  $L$  een vectorruimte met eindige dimensie  $n$ , dan bezit  $L$  een basis aan te geven door  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ . Elke vector  $\underline{x} \in L$  is nu op precies één wijze te schrijven als een lineaire combinatie van  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ :

$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n = \sum_{j=1}^n x_j \underline{e}_j .$$

De getallen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  worden genoteerd in de vorm van een kolomvector:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

en  $X$  heet de kolom van  $\underline{x}$  t.o.v. de basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ .

1.1.5. Stelling. Als  $\underline{z} = r\underline{x} + s\underline{y}$  en als  $X, Y, Z$  de kolommen van  $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$  zijn t.o.v. een basis, dan is  $Z = rX + sY$ .

Bewijs. Zij

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^n x_j \underline{e}_j , \quad \underline{y} = \sum_{j=1}^n y_j \underline{e}_j ,$$

uitgedrukt in de basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ , dan is

$$\underline{z} = r\underline{x} + s\underline{y} = \sum_{j=1}^n (rx_j + sy_j) \underline{e}_j .$$

Daaruit volgt

$$Z = \begin{bmatrix} rx_1 + sy_1 \\ rx_2 + sy_2 \\ \vdots \\ rx_n + sy_n \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = rX + sY .$$

□

De stelling is direct uit te breiden tot een lineaire combinatie van meer dan twee vectoren.



Zij  $L$  een  $n$ -dimensionale vectorruimte met basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  en laat  $A: L \rightarrow L$  een lineaire afbeelding zijn. Vorm dan de  $(n \times n)$ -matrix  $A$ , waarvan de kolommen achtereenvolgens zijn de kolommen van de vectoren  $A\underline{e}_1, A\underline{e}_2, \dots, A\underline{e}_n$  t.o.v. de basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ A\underline{e}_1 & A\underline{e}_2 & \dots & A\underline{e}_n \end{matrix}$

waarbij

$$A\underline{e}_j = a_{1j}\underline{e}_1 + a_{2j}\underline{e}_2 + \dots + a_{nj}\underline{e}_n = \sum_{i=1}^n a_{ij}\underline{e}_i \quad \text{voor } j = 1, 2, \dots, n.$$

$A$  heet de matrix van  $A$  t.o.v. de basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ .

Opmerking. Evenals in het college Wiskunde 20, hoofdstuk 3, duiden we een lineaire afbeelding met een schrijffletter en haar matrix met de corresponderende drukletter aan.

1.1.6. Stelling. Als  $\underline{x}$  de kolom van  $\underline{x}$  is en  $A$  de matrix van  $A$ , dan heeft  $A\underline{x}$  kolom  $A\underline{x}$ , alles t.o.v. dezelfde basis. (Met  $A\underline{x}$  is het matrixproduct van  $A$  en  $\underline{x}$  bedoeld.)

Bewijs. Zij

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^n x_j \underline{e}_j, \quad A\underline{e}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \underline{e}_i,$$

uitgedrukt in de basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ , dan is

$$A\underline{x} = A\left(\sum_{j=1}^n x_j \underline{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j A\underline{e}_j.$$

Op grond van 1.1.5 heeft  $A\underline{x}$  als kolom

$$\begin{aligned} x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} &= \\ = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = AX. \quad \square \end{aligned}$$

Voorbeelden. 3)  $\mathbb{R}^3$  is de verzameling van alle kolomvectoren met drie elementen;  $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$  betekent  $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Kies als basis in  $\mathbb{R}^3$  de standaardbasis  $\underline{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\underline{e}_3 = (0, 0, 1)$ . Dan is  $\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3$  en de kolom van  $\underline{x}$  t.o.v. de standaardbasis is  $(x_1, x_2, x_3)$ . De kolom van  $\underline{x}$  is dus in dit geval gelijk aan  $\underline{x}$ .  
Laat  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  een lineaire afbeelding zijn. De matrix van  $A$  t.o.v. de standaardbasis heeft als kolommen

$$A\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad A\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \quad A\underline{e}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}.$$

Als nu  $A\underline{x} = \underline{y}$  met  $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ , dan is op grond van 1.1.6:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

oftewel

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}.$$

4) Laat  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de projectie op de x-as zijn. Voor de basisvectoren  $e_1 = (1,0)$ ,  $e_2 = (0,1)$  geldt:  $Ae_1 = e_1$ ,  $Ae_2 = \underline{0}$ , waarna volgt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5) Laat  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de spiegeling aan de rechte  $y = x$  zijn. Voor de vectoren  $e_1, e_2$  van de standaardbasis geldt:  $Ae_1 = e_2$ ,  $Ae_2 = e_1$ , waarna volgt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

6) Laat  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de draaiing over  $\frac{1}{2}\pi$  zijn. Dan is:  $Ae_1 = e_2$ ,  $Ae_2 = -e_1$ , waarna volgt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}.$$

1.1.7. Stelling. Als  $A$  de matrix van  $A$  is en  $B$  de matrix van  $B$ , dan hebben  $rA$ ,  $A+B$ ,  $AB$  en  $A^{-1}$  matrices  $rA$ ,  $A+B$ ,  $AB$  en  $A^{-1}$ , alles t.o.v. dezelfde basis. De identieke afbeelding  $I$  en de nulafbeelding  $O$  hebben matrices

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

t.o.v. elke basis.

Opgave. Bewijs deze stelling.

Opmerking.  $I$  is de eenheidsmatrix;  $O$  is de nulmatrix, d.i. de matrix waarvan alle elementen nul zijn. De inverse matrix  $A^{-1}$  voldoet aan  $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ .

### 1.2. Basisovergang

Laat  $e_1, e_2, \dots, e_n$  en  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  twee bases zijn van dezelfde (n-dimensionale) vectorruimte L. Iedere vector uit L is lineaire combinatie van  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , dus ook  $e'_1$ :

$$e'_1 = s_{11}e_1 + s_{21}e_2 + \dots + s_{n1}e_n = \sum_{i=1}^n s_{i1}e_i,$$

en evenzo  $e'_2, \dots, e'_n$ . Algemeen geldt voor  $j = 1, 2, \dots, n$ ,

$$e'_j = s_{1j}e_1 + s_{2j}e_2 + \dots + s_{nj}e_n = \sum_{i=1}^n s_{ij}e_i.$$

Vorm met de aldus gevonden getallen  $s_{ij}$  de matrix

$$S = [s_{ij}] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1j} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2j} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nj} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix};$$

S heet de overgangsmatrix van de basis  $e_1, e_2, \dots, e_n$  op de basis  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ . De j-de kolom van S is de kolom van  $e'_j$  t.o.v. de basis  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

In 1.2.2 zal worden bewezen dat de overgangsmatrix van de basis  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  op de basis  $e_1, e_2, \dots, e_n$  gelijk is aan  $S^{-1}$ .

Voorbeelden. 1) Laat  $e_1, e_2$  de standaardbasis van  $\mathbb{R}^2$  zijn en zij  $e'_1 = (4, 3)$ ,  $e'_2 = (5, 4)$ . Dan is

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},$$

en inderdaad geldt

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 4e'_1 - 3e'_2,$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -5 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = -5e'_1 + 4e'_2.$$

2) Laat  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$  de standaardbasis van  $\mathbb{R}^2$  zijn;  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2$  ontstaat uit  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$  door draaiing over een hoek  $\varphi$ . Dan is

$$\underline{e}'_1 = (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad , \quad \underline{e}'_2 = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$$

en

$$S = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad , \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} .$$

3) In  $\mathbb{R}^2$  zijn gegeven de bases  $\underline{e}_1 = (2, 1)$  ,  $\underline{e}_2 = (-1, 1)$  en  $\underline{e}'_1 = (1, 5)$  ,  $\underline{e}'_2 = (3, 0)$  . De elementen van de overgangsmatrix S worden als volgt bepaald:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = s_{11} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + s_{21} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2s_{11} - s_{21} = 1 \\ s_{11} + s_{21} = 5 \end{cases} \quad s_{11} = 2, \quad s_{21} = 3 ;$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = s_{12} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + s_{22} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2s_{12} - s_{22} = 3 \\ s_{12} + s_{22} = 0 \end{cases} \quad s_{12} = 1, \quad s_{22} = -1 ;$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad S^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} .$$

1.2.1. Stelling. Zij S de overgangsmatrix van de basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  op de basis  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \dots, \underline{e}'_n$ . Voor de kolom X t.o.v.  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  en de kolom X' t.o.v.  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \dots, \underline{e}'_n$  van een vector  $\underline{x} \in L$  geldt  $X = SX'$ .

Bewijs. Zij  $\underline{x} = \sum_{j=1}^n x'_j \underline{e}'_j$ . Op grond van 1.1.5 is dan

$$\begin{aligned}
 X &= x'_1 \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{bmatrix} + x'_2 \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{bmatrix} + \dots + x'_n \begin{bmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} s_{11}x'_1 + s_{12}x'_2 + \dots + s_{1n}x'_n \\ s_{21}x'_1 + s_{22}x'_2 + \dots + s_{2n}x'_n \\ \vdots \\ s_{n1}x'_1 + s_{n2}x'_2 + \dots + s_{nn}x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = SX' .
 \end{aligned}$$

1.2.2. Stelling. De overgangsmatrix  $S$  van de basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  op de basis  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \dots, \underline{e}'_n$  is inverteerbaar. De overgangsmatrix van de basis  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \dots, \underline{e}'_n$  op de basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  is  $S^{-1}$ .

Bewijs. Zij  $T$  de overgangsmatrix van de basis  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \dots, \underline{e}'_n$  op de basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ . Zij verder  $\underline{x} \in L$ ,  $X$  de kolom van  $\underline{x}$  t.o.v.  $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$  en  $X'$  de kolom van  $\underline{x}$  t.o.v.  $\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n$ . Dan geldt volgens (1.2.1)  $X' = TX$ . Hieruit volgt  $X = SX' = STX$ . Kies nu  $\underline{x} = \underline{e}_j$ , dan is  $X = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  waarbij het element 1 op de  $j$ -de plaats staat.  $X$  is juist de  $j$ -de kolom van de eenheidsmatrix  $I$ ,  $STX$  is de  $j$ -de kolom van  $ST$ . Omdat deze kolommen gelijk zijn voor alle  $j = 1, 2, \dots, n$ , is  $ST = I$ , dus  $T = S^{-1}$ .  $\square$

We passen deze resultaten toe op de eerder behandelde voorbeelden. In voorbeeld 1 geldt

$$\begin{cases} x = 4x' + 5y' \\ y = 3x' + 4y' \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 4x - 5y \\ y' = -3x + 4y \end{cases} ;$$

in voorbeeld 2 geldt

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases} .$$

Uit het bewijs van 1.2.1 volgt ook:

1.2.3. Stelling. Zij  $S$  de overgangsmatrix van de basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  op de basis  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \dots, \underline{e}'_n$ . Laat  $A$  een lineaire afbeelding zijn met matrix  $A$  t.o.v.  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  en matrix  $A'$  t.o.v.  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \dots, \underline{e}'_n$ , dan geldt  $A' = S^{-1}AS$ .

Bewijs. Ga uit van een vector  $\underline{x}$  met kolom  $X$  t.o.v.  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  en kolom  $X'$  t.o.v.  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \dots, \underline{e}'_n$ . Op grond van 1.1.6 heeft de beeldvector  $A\underline{x}$  dan kolom  $AX$  t.o.v.  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  en kolom  $A'X'$  t.o.v.  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \dots, \underline{e}'_n$ . Uit 1.2.1 volgt nu  $A'X' = S^{-1}AX = S^{-1}ASX'$ . Kies  $\underline{x} = \underline{e}_j$  met achtereenvolgens  $j = 1, 2, \dots, n$ , dan volgt op analoge wijze als in het bewijs van 1.2.2, dat  $A' = S^{-1}AS$ . Omgekeerd is  $A = SA'S^{-1}$ . □

Voorbeelden. 4) In  $\mathbb{R}^2$  zijn gegeven de bases  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$  en  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2$  als in voorbeeld 1; ook  $S$  en  $S^{-1}$  zijn dan als in voorbeeld 1. Definieer de lineaire afbeelding  $A$  door  $A\underline{e}_1 = -\underline{e}_2$ ,  $A\underline{e}_2 = -\underline{e}_1 + \underline{e}_2$ , dan is

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A' = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -11 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ter controle berekenen we de kolom van  $A\underline{e}'_1$  t.o.v. de basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

en t.o.v. de basis  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2$ :

$$\begin{bmatrix} -7 & -11 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Inderdaad geldt nu

$$-7\underline{e}'_1 + 5\underline{e}'_2 = -7 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

zodat beide kolommen dezelfde vector voorstellen.

5) Laat  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$  de standaardbasis van  $\mathbb{R}^2$  zijn en zij  $\underline{e}'_1 = (1, 1)$ ,  $\underline{e}'_2 = (1, -2)$ . Gegeven is een lineaire afbeelding  $A$  met matrix

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

t.o.v. de basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ . De matrix van  $A$  t.o.v. de basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$  wordt dan gegeven door

$$A = SA'S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 1.3. Eigenwaarden en eigenvectoren

In het college Wiskunde 20, 3.7, zijn gedefinieerd de begrippen eigenwaarde, eigenvector van een lineaire afbeelding  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . We geven hier de overeenkomstige definitie voor een lineaire afbeelding  $A: L \rightarrow L$ .

1.3.1. Definitie. Zij  $A: L \rightarrow L$  een lineaire afbeelding. Een getal  $\lambda \in \mathbb{R}$  heet een eigenwaarde van  $A$  als er een vector  $\underline{v} \in L$  met  $\underline{v} \neq \underline{0}$  bestaat, zodat  $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ . Zo'n vector  $\underline{v}$  heet een eigenvector behorend bij de eigenwaarde  $\lambda$ .

Opmerking. Eigenwaarden mogen nul zijn, eigenvectoren niet! Als  $\underline{v}$  eigenvector van  $A$  is bij eigenwaarde  $\lambda$ , dan is voor alle getallen  $r \neq 0$  de vector  $r\underline{v}$  eveneens eigenvector van  $A$  bij eigenwaarde  $\lambda$ .

De volgende stelling is eenvoudig te bewijzen.

Stelling. Als  $\lambda$  een eigenwaarde van  $A$  is, dan is  $\{\underline{v} \in L \mid A\underline{v} = \lambda\underline{v}\}$  een deelruimte van  $L$  met positieve dimensie.

De deelruimte uit deze stelling heet de eigenruimte van  $A$  bij de eigenwaarde  $\lambda$ .

Voorbeelden. 1)  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  is de projectie op de  $x$ -as. Dan is  $A\underline{e}_1 = \underline{e}_1$ , dus  $\underline{e}_1$  is eigenvector bij eigenwaarde 1;  $A\underline{e}_2 = \underline{0} = 0\underline{e}_2$ , dus  $\underline{e}_2$  is eigenvector bij eigenwaarde 0.

2)  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  is de spiegeling aan de rechte  $y = x$ . Dan geldt:  $\underline{v}_1 = (1,1)$  is eigenvector bij eigenwaarde 1, want  $A\underline{v}_1 = \underline{v}_1$ ;  $\underline{v}_2 = (-1,1)$  is eigenvector bij eigenwaarde -1, want  $A\underline{v}_2 = -\underline{v}_2 = (-1)\underline{v}_2$ .

1.3.2. Stelling. Laat  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  eigenvectoren zijn van de lineaire afbeelding  $A$ , behorend bij de eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ . Als  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  twee aan twee verschillend zijn, dan zijn  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  lineair onafhankelijk.



Bewijs. We passen volledige inductie toe naar het getal  $m$ . Als  $m = 1$  dan is er maar één  $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ , die onafhankelijk is.

Veronderstel nu dat de stelling juist is voor een zekere  $m$ . Laat

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{m+1}$  eigenvectoren zijn behorend bij de eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}$ , welke twee aan twee verschillend zijn. Dan zijn  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  eigenvectoren bij eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  (twee aan twee verschillend) en volgens de inductieveronderstelling zijn  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  onafhankelijk.

Veronderstel nu dat  $\underline{v}_{m+1}$  een lineaire combinatie is van  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$ :

$$\underline{v}_{m+1} = \sum_{j=1}^m r_j \underline{v}_j .$$

Nu is  $A\underline{v}_{m+1} = \lambda_{m+1} \underline{v}_{m+1}$ . Na substitutie vinden we

$$A\underline{v}_{m+1} = A \sum_{j=1}^m r_j \underline{v}_j = \sum_{j=1}^m r_j A\underline{v}_j = \sum_{j=1}^m r_j \lambda_j \underline{v}_j ,$$

$$\lambda_{m+1} \underline{v}_{m+1} = \lambda_{m+1} \sum_{j=1}^m r_j \underline{v}_j = \sum_{j=1}^m r_j \lambda_{m+1} \underline{v}_j ,$$

waaruit volgt

$$\sum_{j=1}^m r_j (\lambda_j - \lambda_{m+1}) \underline{v}_j = \underline{0} .$$

Omdat echter  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  onafhankelijk zijn, moet gelden  $r_j (\lambda_j - \lambda_{m+1}) = 0$  voor  $j = 1, 2, \dots, m$ . Bedenk dat  $\lambda_j \neq \lambda_{m+1}$  is, zodat  $r_j = 0$  voor  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Dus

$$\underline{v}_{m+1} = \sum_{j=1}^m r_j \underline{v}_j = \underline{0}$$

in strijd met het gegeven dat  $\underline{v}_{m+1}$  eigenvector is.

De veronderstelling dat  $\underline{v}_{m+1}$  lineaire combinatie is van  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$ , is dus onjuist gebleken. Omdat  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$  reeds onafhankelijk zijn, volgt dat ook  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{m+1}$  onafhankelijk zijn, waarmee de stelling bewezen is.  $\square$

De eigenwaarden en eigenvectoren van een lineaire afbeelding  $A: L \rightarrow L$  worden als volgt berekend. Kies een basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  in  $L$  ( $\dim L = n$ ). Zij nu  $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ ; laat  $V$  de kolom van  $\underline{v}$  en  $A$  de matrix van  $A$  zijn t.o.v.  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ , dan is

$$AV = \lambda V \quad \text{of} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j = \lambda v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Voor vaste  $\lambda$  is dit een stelsel van  $n$  homogene lineaire vergelijkingen in de onbekenden  $v_1, v_2, \dots, v_n$  met coëfficiëntenmatrix  $A - \lambda I$ . Dit stelsel vergelijkingen heeft dan en slechts dan een oplossing verschillend van de nuloplossing als

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Na uitwerking van de determinant ontstaat een  $n$ -de graadsvergelijking voor  $\lambda$ ; deze wordt de karacteristieke vergelijking van  $A$  genoemd; het linkerlid van de karakteristieke vergelijking wordt de karacteristieke veelterm genoemd. De karakteristieke vergelijking heeft ten hoogste  $n$  reële wortels. Deze reële wortels zijn de eigenwaarden van  $A$ .

1.3.3. Stelling. De karakteristieke veelterm is onafhankelijk van de basiskeuze.

Bewijs. Kies een tweede basis  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \dots, \underline{e}'_n$  en laat  $S$  de overgangsmatrix zijn van  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  op  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \dots, \underline{e}'_n$ . De matrix van  $A$  t.o.v.  $\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \dots, \underline{e}'_n$  is dan  $A' = S^{-1}AS$  en de karakteristieke vergelijking wordt nu

$$\det(A' - \lambda I) = 0.$$

De determinant is te herleiden volgens

$$\begin{aligned} \det(A' - \lambda I) &= \det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) = \\ &= \det S^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det S = \det(A - \lambda I), \end{aligned}$$

omdat uit  $S^{-1}S = I$  volgt

$$1 = \det I = \det(S^{-1}S) = \det S^{-1} \cdot \det S.$$

De karakteristieke veelterm blijft dus dezelfde bij verandering van basis.

□

Voorbeeld. 3) In 1.2, voorbeeld 4, is gevonden dat

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} -7 & -11 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

matrices zijn van eenzelfde lineaire afbeelding t.o.v. verschillende bases.

De karakteristieke vergelijking

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

$$\det(A' - \lambda I) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & -11 \\ 5 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

is inderdaad in beide gevallen dezelfde; de eigenwaarden zijn  $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ .

Laat  $L$  een vectorruimte zijn van dimensie  $n$ . Veronderstel dat de lineaire afbeelding  $A: L \rightarrow L$   $n$  verschillende eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  heeft. Volgens 1.3.2 zijn de bijbehorende eigenvectoren  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$  dan lineair onafhankelijk en deze kunnen dus als basis van  $L$  worden gekozen. Omdat  $A\underline{v}_1 = \lambda_1\underline{v}_1$ ,  $A\underline{v}_2 = \lambda_2\underline{v}_2, \dots, A\underline{v}_n = \lambda_n\underline{v}_n$ , heeft  $A$  t.o.v. de basis  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$  de volgende matrix:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

d.i. een diagonaalmatrix met de eigenwaarden als diagonaalelementen. We hebben hiermee de volgende stelling verkregen.

- 1.3.4. Stelling. Als de karakteristieke vergelijking van de lineaire afbeelding  $A: L \rightarrow L$  ( $\dim L = n$ )  $n$  verschillende reële wortels heeft, dan is er een basis van eigenvectoren van  $A$  en de matrix van  $A$  t.o.v. deze basis is een diagonaalmatrix met de eigenwaarden van  $A$  als diagonaalelementen.

We vertalen dit nog in matrixtaal:

1.3.5. Stelling. Als  $B$  een  $(n \times n)$ -matrix is waarvan de karakteristieke vergelijking  $\det(B - \lambda I) = 0$   $n$  verschillende reële wortels  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  heeft, dan bestaat er een inverteerbare matrix  $S$ , zodat

$$S^{-1}BS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \circ & & \\ & & & \ddots & \\ \circ & & & & \lambda_n \end{bmatrix} .$$

Opmerking. Door voor-vermenigvuldiging met  $S^{-1}$  en na-vermenigvuldiging met  $S$  is  $B$  op "diagonaalvorm" gebracht.

Bewijs. Vat  $B$  op als matrix van een lineaire afbeelding  $\mathcal{B}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  t.o.v. de standaardbasis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ . Dan zijn  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de eigenwaarden van  $\mathcal{B}$  en de bijbehorende eigenvectoren  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$  vormen een basis van  $\mathbb{R}^n$ . Laat  $S$  de overgangsmatrix zijn van de basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  op de basis  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ . De matrix van  $\mathcal{B}$  t.o.v. de basis  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$  is dan  $S^{-1}BS$  volgens 1.2.3, en er geldt

$$S^{-1}BS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \circ & & \\ & & & \ddots & \\ \circ & & & & \lambda_n \end{bmatrix} .$$

□

Voorbeelden. 4) Laat  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  t.o.v. de standaardbasis gegeven zijn door haar matrix

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{bmatrix} .$$

De karakteristieke vergelijking van  $A$  luidt

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 \\ -18 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 ;$$

$A$  heeft dus eigenwaarden  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Bereken nu de bijbehorende eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 2 : \begin{cases} 6v_1 + 3v_2 = 0 & (v_1, v_2) = \alpha(1, -2) , \\ -18v_1 - 9v_2 = 0 & \text{kies bijv. } \underline{v}_1 = (1, -2) ; \end{cases}$$
$$\lambda_2 = -1 : \begin{cases} 9v_1 + 3v_2 = 0 & (v_1, v_2) = \alpha(1, -3) , \\ -18v_1 - 6v_2 = 0 & \text{kies bijv. } \underline{v}_2 = (1, -3) . \end{cases}$$

De overgangsmatrix  $S$  van de standaardbasis op de basis  $\underline{v}_1, \underline{v}_2$  wordt dan gegeven door

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bereken nu  $S^{-1}AS$ :

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

in overeenstemming met 1.3.5.

- 5) Zij  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de spiegeling aan het vlak  $x+y+2z=0$ . Het is in dit geval niet verstandig om rechtstreeks de matrix van  $A$  t.o.v. de standaardbasis uit te rekenen, omdat de eigenvectoren hier eenvoudig meetkundig te vinden zijn. Een vector  $\neq \underline{0}$  loodrecht op het vlak is eigenvector bij eigenwaarde  $-1$  en een vector  $\neq \underline{0}$  in het vlak is eigenvector bij eigenwaarde  $1$ . Kies nu als basis van eigenvectoren

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= (1, 1, 2) & \text{bij } \lambda_1 &= -1, \\ \underline{v}_2 &= (2, 0, -1) & \text{bij } \lambda_2 &= 1, \\ \underline{v}_3 &= (0, 2, -1) & \text{bij } \lambda_3 &= 1. \end{aligned}$$

Ten opzichte van deze basis heeft  $A$  de matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hieruit berekenen we nog de matrix  $A'$  van  $A$  t.o.v. de standaardbasis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ . Laat  $S$  de overgangsmatrix van  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$  op  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$  zijn, dan is  $A' = S^{-1}AS$  en

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad S = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix},$$

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

hetgeen de matrix van  $A$  is t.o.v. de standaardbasis. Dit resultaat kan gecontroleerd worden door rechtstreekse berekening van  $Ae_1, Ae_2, Ae_3$ .

Het resultaat uit 1.3.4 is afgeleid in de veronderstelling dat de karakteristieke vergelijking  $n$  verschillende reële wortels heeft. Indien de karakteristieke vergelijking complexe, niet-reële wortels heeft, zal de stelling niet gelden. We beschouwen nog het geval dat de karakteristieke vergelijking twee of meer gelijke wortels bezit. Laat bijv.  $\lambda_1$  een  $k$ -voudige wortel zijn terwijl de overige  $n-k$  reële wortels twee aan twee verschillend zijn. In dat geval blijft de conclusie van 1.3.4 geldig mits bij  $\lambda_1$   $k$  onafhankelijke eigenvectoren behoren, anders gezegd: mits de eigenruimte bij  $\lambda_1$  dimensie  $k$  heeft. We verwijzen nog naar voorbeeld 5 waar een dubbele wortel  $\lambda = 1$  optreedt; hierbij behoren twee onafhankelijke eigenvectoren  $v_2, v_3$ . Bij een  $k$ -voudige wortel  $\lambda_1$  als boven kunnen ook minder dan  $k$  onafhankelijke vectoren behoren, in welk geval 1.3.4 niet geldt.

Voorbeelden. 6)  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  is de rotatie over  $\frac{1}{2}\pi$ . Meetkundig is duidelijk dat er geen eigenvectoren zijn. Matrix en karakteristieke vergelijking worden

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \quad \text{met wortels } i \text{ en } -i.$$

7)  $A$  is gegeven door de matrix  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . De karakteristieke vergelijking

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 = 0$$

heeft een dubbele wortel  $\lambda = 1$ . De eigenvectoren bij  $\lambda = 1$  worden gegeven door

$$\begin{cases} v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (v_1, v_2) = \alpha(1, 0) .$$

Er is maar één richting van eigenvectoren; de eigenruimte bij  $\lambda = 1$  heeft dimensie 1. De afbeelding  $A$  heeft geen diagonaalmatrix.

#### 1.4. Vectorruimten met inproduct, orthonormale bases

In het college Wiskunde 20, 3.1.3, is ingevoerd het inwendig product van twee vectoren uit  $\mathbb{R}^n$ : zij  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , dan is

$$(\underline{x}, \underline{y}) := \underline{x}^T \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{j=1}^n x_j y_j .$$

In een willekeurige vectorruimte  $L$  geven we een axiomatische karakterisering van het inwendig product of inproduct.

1.4.1. Definitie. Een vectorruimte  $L$  heeft een inproduct als aan ieder paar vectoren  $\underline{x} \in L$  en  $\underline{y} \in L$  een reëel getal  $(\underline{x}, \underline{y})$  is toegevoegd, zodat voldaan is aan

- 1)  $(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{y}, \underline{x})$ ,
- 2)  $(\underline{x}, \underline{y} + \underline{z}) = (\underline{x}, \underline{y}) + (\underline{x}, \underline{z})$ ,
- 3)  $(\underline{x}, r\underline{y}) = r(\underline{x}, \underline{y})$ ,
- 4)  $(\underline{x}, \underline{x}) > 0$  als  $\underline{x} \neq \underline{0}$ ,

voor alle  $\underline{x} \in L$ ,  $\underline{y} \in L$ ,  $\underline{z} \in L$  en alle  $r \in \mathbb{R}$ .

Definitie. Zij  $L$  een vectorruimte met inproduct.

De lengte van een vector  $\underline{x} \in L$  (notatie  $|\underline{x}|$ ) is  $\sqrt{(\underline{x}, \underline{x})}$ .

Twee vectoren  $\underline{x} \in L$  en  $\underline{y} \in L$  heten loodrecht of orthogonaal (notatie:  $\underline{x} \perp \underline{y}$ ) als  $(\underline{x}, \underline{y}) = 0$ .

Opmerking. In wiskunde 20, hoofdstuk 3 wordt de notatie  $\|\underline{x}\|$  i.p.v.  $|\underline{x}|$  voor de lengte van een vector gebruikt.

Voorbeelden. 1) Het inwendig product  $(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$  in  $\mathbb{R}^n$  voldoet aan

bovenstaande axioma's. Tenzij anders vermeld, zullen we voortaan steeds dit inwendig product in  $\mathbb{R}^n$  kiezen.

2) De continue functies op het interval  $[0, 1]$  vormen een vectorruimte.

Definieer voor ieder paar functies  $f$  en  $g$ ,

$$(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt ,$$

dan is  $(f, g)$  een inproduct (ga na). De functies  $f$  en  $g$  gegeven door  $f(t) = t$ ,  $g(t) = 3t - 2$  voor  $0 \leq t \leq 1$  zijn orthogonaal, immers

$$\int_0^1 t(3t - 2)dt = 0 .$$

Stelling (ongelijkheid van Cauchy-Schwarz). Zij  $L$  een vectorruimte met inproduct. Voor alle  $\underline{x} \in L$ ,  $\underline{y} \in L$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  geldt:  $|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq |\underline{x}| |\underline{y}|$ ,  
 $|\underline{x} + \underline{y}| \leq |\underline{x}| + |\underline{y}|$ ,  $|\alpha \underline{x}| = |\alpha| \cdot |\underline{x}|$ .

Het bewijs is analoog aan het bewijs gegeven in het college wiskunde 20, 3.1.3.

Analoog als in het college Wiskunde 20, 3.8.3 definiëren we:

1.4.2. Definitie. Een stelsel vectoren  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$  in een vectorruimte  $L$  met inproduct heet orthonormaal, als voor  $i, j = 1, 2, \dots, k$  geldt:  $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0$  als  $i \neq j$  en  $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 1$  als  $i = j$  (in woorden: als alle  $\underline{v}_j$  lengte 1 hebben en twee aan twee orthogonaal zijn). Een stelsel  $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_n$  heet een orthonormale basis van  $L$  als  $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_n$  een basis en een orthonormaal stelsel vormen.

Opmerking. De standaardbasis van  $\mathbb{R}^n$  is orthonormaal.

De volgende stelling kan op dezelfde manier als in Wiskunde 20, 3.8.3 worden bewezen.

Stelling. De vectoren van een orthonormaal stelsel zijn onafhankelijk.

Zij  $L$  een vectorruimte met inproduct en  $M$  een deelruimte van  $L$ . We zeggen dat een vector  $\underline{z} \in L$  loodrecht op  $M$  staat (notatie  $\underline{z} \perp M$ ), als  $\langle \underline{z}, \underline{x} \rangle = 0$  voor alle  $\underline{x} \in M$ . Als verder  $\underline{x}$  een willekeurig element van  $L$  is, dan noemen we  $\underline{y} \in L$  de projectie van  $\underline{x}$  op  $M$  als

- 1)  $\underline{y} \in M$
- 2)  $\underline{x} - \underline{y} \perp M$ .

Als we aannemen dat  $M$  een orthonormale basis  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_m$  heeft, dan kunnen we een formule vinden voor  $\underline{y}$ . Daar  $\underline{y} \in M$ , bestaan er  $n$ l. getallen



$\alpha_1, \dots, \alpha_m$  zo dat

$$\underline{y} = \alpha_1 \underline{g}_1 + \dots + \alpha_m \underline{g}_m.$$

Het is gemakkelijk in te zien dat  $\alpha_k = (\underline{y}, \underline{g}_k)$ . Wil  $\underline{y}$  aan 2) voldoen, dan moet  $(\underline{x} - \underline{y}, \underline{g}_k) = 0$  gelden voor  $k = 1, \dots, m$ . Hieruit volgt

$$\alpha_k = (\underline{y}, \underline{g}_k) = (\underline{x}, \underline{g}_k).$$

We vinden voor  $\underline{y}$  de volgende formule

$$\underline{y} = (\underline{x}, \underline{g}_1) \underline{g}_1 + \dots + (\underline{x}, \underline{g}_m) \underline{g}_m.$$

Het is anderzijds gemakkelijk te verifiëren dat de vector  $\underline{y}$  gegeven door deze formule, inderdaad aan 1) en 2) voldoet. We kunnen concluderen, dat de projectie van  $\underline{x}$  op  $M$  bestaat en eenduidig bepaald is, althans onder de veronderstelling dat  $M$  een orthonormale basis heeft. Dat dit inderdaad het geval is, zegt de volgende stelling.

1.4.3. Stelling. Een vectorruimte  $L$  van eindige dimensie met inproduct heeft een orthonormale basis.

Een bewijs van deze stelling kan men geven d.m.v. van het orthogonalisatieproces van Gram-Schmidt. Met behulp van dit proces kan men uit een willekeurig stelsel onafhankelijke vectoren  $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m$  in  $L$  een orthonormaal stelsel  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_m$  construeren zo dat voor  $k = 1, \dots, m$  het lineaire opspansel van de vectoren  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_k$  gelijk is aan het lineaire opspansel van  $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ . Men gaat hierbij als volgt te werk:

Stap 1. Definieer  $\underline{g}_1 := \underline{e}_1 / |\underline{e}_1|$ . Dit is mogelijk omdat  $\underline{e}_1 \neq \underline{0}$  ( $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m$  zijn onafhankelijk!).

Nu geldt  $|\underline{g}_1| = 1$ .

Stap 2. Zij  $M_1$  de ruimte opgespannen door  $\underline{g}_1$  (d.w.z., de rechte door  $\underline{g}_1$ ). De projectie van  $\underline{e}_2$  op  $M_1$  is  $(\underline{e}_2, \underline{g}_1) \underline{g}_1$ , immers  $\underline{g}_1$  is een orthonormale basis van  $M_1$ . Daar  $\underline{e}_1$  en  $\underline{e}_2$  onafhankelijk zijn geldt  $\underline{e}_2 \notin M_1$ , zodat

$$\underline{v}_2 := \underline{e}_2 - (\underline{e}_2, \underline{g}_1) \underline{g}_1$$

ongelijk  $\underline{0}$  is. Verder is  $\underline{v}_2 \perp M_1$ , dus  $(\underline{v}_2, \underline{g}_1) = 0$ . We definiëren

$$\underline{g}_2 := \underline{v}_2 / |\underline{v}_2|.$$

Stap k. Veronderstel dat  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_{k-1}$  geconstrueerd zijn. Zij  $M_{k-1}$  de ruimte opgespannen door  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_{k-1}$ . Daar  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_{k-1}$  een orthonormale basis is van  $M_{k-1}$ , is de projectie van  $\underline{e}_k$  op  $M_{k-1}$  gelijk aan  $(\underline{e}_k, \underline{g}_1)\underline{g}_1 + \dots + (\underline{e}_k, \underline{g}_{k-1})\underline{g}_{k-1}$ . We definiëren

$$\underline{v}_k := \underline{e}_k - (\underline{e}_k, \underline{g}_1)\underline{g}_1 - \dots - (\underline{e}_k, \underline{g}_{k-1})\underline{g}_{k-1}.$$

Daar  $M_{k-1}$  de ruimte opgespannen door  $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{k-1}$  is en daar  $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$  onafhankelijk zijn, geldt  $\underline{e}_k \notin M_{k-1}$ , zodat  $\underline{v}_k \neq \underline{0}$ . Verder is  $\underline{v}_k \perp M_{k-1}$  en dus  $(\underline{v}_k, \underline{g}_i) = 0$  ( $i=1, \dots, k-1$ ).

Tenslotte definiëren we

$$\underline{g}_k := \underline{v}_k / |\underline{v}_k|.$$

Op deze manier kan men zo'n orthonormaalstelsel construeren. Als  $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$  een basis is van  $L$ , dan is  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$  een orthonormale basis van  $L$ . □

Vaak kan men het rekenwerk enigszins vereenvoudigen door met de vectoren  $\underline{v}_k$  te werken i.p.v. met  $\underline{g}_k$ . Achteraf kan men dan de  $\underline{g}_k$ 's vinden door de  $\underline{v}_k$ 's te normeren (d.w.z., te delen door hun lengte). De betrekking waaruit de  $\underline{v}_k$ 's successievelijk worden berekend luidt dan

$$\underline{v}_1 := \underline{e}_1,$$
$$\underline{v}_k := \underline{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \left( \frac{\underline{e}_k, \underline{v}_i}{\underline{v}_i, \underline{v}_i} \right) \underline{v}_i.$$

Voorbeeld.3) Zij  $L$  de vectorruimte der polynomen van de graad  $\leq 2$ . In  $L$  definiëren we een inproduct door

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Uit de basis  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = x$ ,  $e_3 = x^2$  construeren we een orthonormale basis:

$$\underline{v}_1 = \underline{e}_1 = 1,$$
$$(\underline{v}_1, \underline{v}_1) = \int_0^1 1^2 dx = 1,$$
$$(\underline{e}_2, \underline{v}_1) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Dus

$$v_2 = e_2 - \frac{(e_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = x - \frac{1}{2}.$$

Verder

$$(v_2, v_2) = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx = \frac{1}{12},$$

$$(e_3, v_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$(e_3, v_2) = \int_0^1 x^2 (x - \frac{1}{2}) dx = \frac{1}{12}.$$

Dus

$$\begin{aligned} v_3 &= e_3 - \frac{(e_3, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(e_3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 = \\ &= x^2 - \frac{1}{3} - \frac{1/12}{1/12} (x - \frac{1}{2}) = x^2 - x + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

en

$$(v_3, v_3) = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2 dx = \frac{1}{180}.$$

Tenslotte vinden we

$$g_1 = v_1 / |v_1| = 1,$$

$$g_2 = v_2 / |v_2| = \sqrt{12} (x - \frac{1}{2}),$$

$$g_3 = v_3 / |v_3| = \sqrt{180} (x^2 - x + \frac{1}{6}).$$

In analogie met wiskunde 20, 3.8.1 voeren we in

1.4.4. Definitie. Zij  $L$  een vectorruimte met inproduct en zij  $M$  een deelruimte van  $L$ . Het orthogonale complement (orthoplement)  $M^\perp$  van  $M$  is de verzameling van alle vectoren uit  $L$  die loodrecht op  $M$  staan:

$$M^\perp := \{ \underline{x} \in L \mid \underline{x} \perp M \}.$$

Zoals men gemakkelijk kan verifiëren is ook  $M^\perp$  een deelruimte van  $L$ . Evenals in Wiskunde 20, 3.8.1 kan men bewijzen dat  $\dim M^\perp = \dim L - \dim M$ . Als  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_m$  een orthonormale basis van  $M$  is en  $\underline{g}_{m+1}, \dots, \underline{g}_n$  een orthonormale basis van  $M^\perp$ , dan is  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$  een orthonormale basis van  $L$ . Op grond van stelling 1.4.3 en de overwegingen die eraan vooraf gingen, bestaat er voor elke deelruimte  $M$  en voor elke  $\underline{x} \in L$  een eenduidige vector  $\underline{y}$  die de projectie van  $\underline{x}$  op  $M$  is. Als we  $\underline{z} := \underline{x} - \underline{y}$  definiëren, dan kunnen we zeggen dat  $\underline{y}$  gekarakteriseerd is door eigenschappen  $\underline{y} \in M$ ,  $\underline{z} \in M^\perp$ . Derhalve kunnen het voorgaande resultaat ook als volgt formuleren: Er bestaan eenduidig bepaalde vectoren  $\underline{y}$  en  $\underline{z}$  met eigenschappen

$$\underline{y} \in M, \quad \underline{z} \in M^\perp, \quad \underline{x} = \underline{y} + \underline{z}.$$

Daar  $(\underline{y}, \underline{z}) = 0$ , geldt  $|\underline{x}|^2 = (\underline{y} + \underline{z}, \underline{y} + \underline{z}) = (\underline{y}, \underline{y}) + (\underline{z}, \underline{z}) = |\underline{y}|^2 + |\underline{z}|^2$ . (De stelling van Pythagoras.) Hieruit volgt in het bijzonder: De projectie  $\underline{y}$  van  $\underline{x}$  heeft een lengte die niet groter is dan die van  $\underline{x}$ , d.w.z.  $|\underline{y}| \leq |\underline{x}|$ . Het gelijkteken geldt dan en slechts dan als  $\underline{z} = \underline{0}$ , m.a.w. als  $\underline{x} \in M$ . Als  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_m$  een orthonormale basis van  $M$  is, dan geldt voor de projectie  $\underline{y}$  van  $\underline{x}$  zoals we hebben gezien

$$1.4.5. \quad \underline{y} = \sum_{j=1}^m (\underline{x}, \underline{g}_j) \underline{g}_j$$

en verder  $(\underline{x}, \underline{g}_j) = (\underline{y}, \underline{g}_j)$ . Daarna kunnen we uit het voorafgaande de volgende resultaten afleiden.

1.4.6. Stelling. Als  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$  een orthonormale basis van  $L$  is, dan geldt voor alle  $\underline{x} \in L$ ,  $\underline{y} \in L$

$$1) \quad \underline{x} = \sum_{j=1}^n (\underline{x}, \underline{g}_j) \underline{g}_j,$$

$$2) \quad (\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{j=1}^n (\underline{x}, \underline{g}_j) (\underline{y}, \underline{g}_j), \quad (\text{Stelling van Parseval})$$

$$3) \quad |\underline{x}|^2 = \sum_{j=1}^n (\underline{x}, \underline{g}_j)^2. \quad (\text{Pythagoras})$$

Als  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_m$  een orthonormaal stelsel is in  $L$  (niet noodzakelijk een basis), dan geldt voor elke  $\underline{x} \in L$

$$4) \quad |\underline{x}|^2 \geq \sum_{j=1}^m (\underline{x}, \underline{g}_j)^2 \quad (\text{ongelijkheid van Bessel}).$$

Bewijs. 1) Daar  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$  de hele ruimte  $L$  opspannen geldt voor de projectie van  $\underline{x}$  op deze ruimte  $\underline{y} = \underline{x}$ . We kunnen 1.4.5 toepassen.

2) Voor  $\underline{x} \in L, \underline{y} \in L$  geldt

$$(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}, \sum_{j=1}^n (\underline{y}, \underline{g}_j) \underline{g}_j) = \sum_{j=1}^n (\underline{x}, \underline{g}_j) (\underline{y}, \underline{g}_j).$$

3) Neem in het voorafgaande  $\underline{x} = \underline{y}$ .

4) Zij  $M$  de ruimte opgespannen door  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_m$ . Als  $\underline{v}$  de projectie is van  $\underline{x}$  op  $M$ , dan geldt

$$|\underline{x}|^2 \geq |\underline{v}|^2 = \sum_{j=1}^m (\underline{v}, \underline{g}_j)^2 = \sum_{j=1}^m (\underline{x}, \underline{g}_j)^2.$$

We hebben hier bij de eerste gelijkheid 3) toegepast op  $M$  en  $\underline{v}$  en bij de tweede gelijkheid gebruikt, dat  $(\underline{v}, \underline{g}_j) = (\underline{x}, \underline{g}_j)$  □

Opmerking. Laat  $X = (x_1, \dots, x_n)$  en  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  de kolommen zijn van de vectoren  $\underline{x}$  en  $\underline{y}$  t.o.v. een orthonormale basis  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$ . De stelling van Parseval kan dan als volgt geformuleerd worden

$$(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{j=1}^n x_j y_j = X^T Y.$$

Voorbeeld. 4) Laat  $A : L \rightarrow L$  een lineaire afbeelding zijn met een matrix  $A$  t.o.v. een orthonormale basis van  $L$ . Laat  $\underline{x} \in L$  en  $\underline{y} \in L$  vectoren zijn met kolom  $X$  en  $Y$  t.o.v. de gegeven orthonormale basis. Dan geldt

$$(A\underline{x}, \underline{y}) = (AX)^T Y = X^T A^T Y,$$

$$(\underline{x}, A\underline{y}) = X^T AY.$$

Voorbeeld. 5) Laat  $M$  de deelruimte van  $\mathbb{R}^4$  zijn, opgespannen door  $\underline{e}_1 = (2, 2, 1, 0)$  en  $\underline{e}_2 = (0, 2, -1, 0)$ . Gevraagd de projectie  $\underline{y}$  van  $\underline{x} = (6, -3, 3, 4)$  op  $M$ .

Eerste methode. Schrijf  $\underline{x} = \underline{y} + \underline{z}$  met  $\underline{y} \in M$  en  $\underline{z}$  orthogonaal met alle vectoren van  $M$ . Dan is

$$\underline{y} = \lambda \underline{e}_1 + \mu \underline{e}_2 = (2\lambda, 2\lambda + 2\mu, \lambda - \mu, 0),$$

waarna

$$\underline{z} = \underline{x} - \underline{y} = (6 - 2\lambda, -3 - 2\lambda - 2\mu, 3 - \lambda + \mu, 4)$$

orthogonaal moet zijn met  $\underline{e}_1$  en  $\underline{e}_2$ . Het laatste leidt tot de vergelijkingen

$$- 9\lambda - 3\mu = - 9$$

$$- 3\lambda - 5\mu = 9$$

met oplossing  $\lambda = 2$ ,  $\mu = -3$ . Hieruit volgt  $\underline{y} = (4, -2, 5, 0)$ .

Tweede methode. Bepaal eerst een orthonormale basis van M met het proces van Gram-Schmidt.

$$\underline{g}_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1, 0) , \quad \underline{g}_2 = \frac{1}{3}(-1, 2, -2, 0)$$

Bereken nu  $(\underline{x}, \underline{g}_1) = 3$  ,  $(\underline{x}, \underline{g}_2) = -6$ , waarna eenvoudig volgt

$$\underline{y} = (\underline{x}, \underline{g}_1)\underline{g}_1 + (\underline{x}, \underline{g}_2)\underline{g}_2 = (4, -2, 5, 0).$$

De tweede methode verdient de voorkeur als van meer vectoren de projectie op dezelfde M bepaald moet worden.

1.4.7. Stelling. De overgangsmatrix van een orthonormale basis op een orthonormale basis is een orthogonale matrix.

Bewijs. Laat  $S = [s_{ij}]$  de overgangsmatrix zijn van de orthonormale basis  $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_n$  op de orthonormale basis  $\underline{g}'_1, \underline{g}'_2, \dots, \underline{g}'_n$ . Volgens de definitie van overgangsmatrix (zie 1.2) is

$$\underline{g}'_i = \sum_{k=1}^n s_{ki} \underline{g}_k , \quad \underline{g}'_j = \sum_{\ell=1}^n s_{\ell j} \underline{g}_\ell ,$$

waaruit volgt

$$(\underline{g}'_i, \underline{g}'_j) = \left( \sum_{k=1}^n s_{ki} \underline{g}_k , \sum_{\ell=1}^n s_{\ell j} \underline{g}_\ell \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n s_{ki} s_{\ell j} (\underline{g}_k, \underline{g}_\ell) .$$

Omdat beide bases orthonormaal zijn, geldt

$$(\underline{g}'_i, \underline{g}'_j) = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j , \\ 1 & \text{als } i = j , \end{cases} \quad (\underline{g}_k, \underline{g}_\ell) = \begin{cases} 0 & \text{als } k \neq \ell , \\ 1 & \text{als } k = \ell . \end{cases}$$

Na substitutie van deze resultaten vinden we

$$\sum_{k=1}^n s_{ki} s_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j , \\ 1 & \text{als } i = j . \end{cases}$$

Merk nu op dat  $\sum_{k=1}^n s_{ki} s_{kj} = (S^T S)_{ij}$ . Hieruit volgt  $S^T S = I$ , dus S is een orthogonale matrix. □

Opmerking. Voor een orthogonale matrix  $S$  geldt  $\det S = \pm 1$ . Als  $\det S = 1$ , heten de bases  $g_1, g_2, \dots, g_n$  en  $g'_1, g'_2, \dots, g'_n$  gelijk georiënteerd; als  $\det S = -1$  heten ze tegengesteld georiënteerd.

De kolommen van een orthogonale matrix  $S$  vormen een orthonormaal stelsel. Omdat ook  $S^{-1} = S^T$  orthogonaal is, vormen ook de rijen van  $S$  een orthonormaal stelsel. Zie ook college Wiskunde 20, 3.9.1.

Voorbeelden. 6) In  $\mathbb{R}^3$  zijn gegeven de standaardbasis  $g_1, g_2, g_3$  (deze is tevens orthonormaal) en de orthonormale basis  $g'_1 = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$ ,  $g'_2 = \frac{1}{3}(-1, 2, -2)$ ,  $g'_3 = \frac{1}{3}(-2, 1, 2)$ . Voor de overgangsmatrix  $S$  geldt

$$S = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = S^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det S = 1.$$

7) Laat in  $\mathbb{R}^3$  gegeven zijn de orthonormale bases  $g_1, g_2, g_3$  en  $g'_1, g'_2, g'_3$ . Als  $\alpha_{ij}$  de hoek is tussen  $g_i$  en  $g'_j$ , dan is

$$g'_j = \sum_{i=1}^3 \cos \alpha_{ij} g_i.$$

De overgangsmatrix  $S$  wordt dan

$$S = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} \\ \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{23} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{33} \end{bmatrix}.$$

### 1.5. Symmetrische matrices en lineaire afbeeldingen, projecties

1.5.1. Definitie. Een matrix  $A$  heet symmetrisch als  $A^T = A$ .

Zij  $L$  een vectorruimte met inproduct dan heet een lineaire afbeelding

$A: L \rightarrow L$  symmetrisch, als voor alle  $x \in L$ ,  $y \in L$  geldt:  $(x, Ay) = (Ax, y)$ .

1.5.2. Stelling. Een lineaire afbeelding  $A: L \rightarrow L$  is dan en slechts dan symmetrisch als de matrix van  $A$  t.o.v. een orthonormale basis van  $L$  symmetrisch is.

Bewijs. 1) Laat  $A: L \rightarrow L$  een symmetrische lineaire afbeelding zijn met matrix  $A$  t.o.v. een orthonormale basis  $g_1, g_2, \dots, g_n$  van  $L$ . Dan geldt in het bijzonder

$$(g_i, Ag_j) = (Ag_i, g_j).$$

Na uitwerking

$$(\underline{g}_i, A\underline{g}_j) = (\underline{g}_i, \sum_{k=1}^n a_{kj} \underline{g}_k) = \sum_{k=1}^n a_{kj} (\underline{g}_i, \underline{g}_k) = a_{ij} ,$$

$$(A\underline{g}_i, \underline{g}_j) = (\sum_{k=1}^n a_{ki} \underline{g}_k, \underline{g}_j) = \sum_{k=1}^n a_{ki} (\underline{g}_k, \underline{g}_j) = a_{ji} ,$$

volgt  $a_{ij} = a_{ji}$  voor alle  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , dus  $A = A^T$ .

2) Laat  $A: L \rightarrow L$  een lineaire afbeelding zijn met matrix  $A$  t.o.v. een ortho-  
normale basis  $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_n$  van  $L$  en zij  $A$  symmetrisch, d.w.z.  $A = A^T$ .

Laat  $\underline{x} \in L$  en  $\underline{y} \in L$  vectoren zijn met kolom  $X$  en  $Y$  t.o.v. de gegeven ortho-  
normale basis, dan geldt (zie 1.4, voorbeeld 4):

$$(\underline{x}, A\underline{y}) = X^T A Y , \quad (A\underline{x}, \underline{y}) = X^T A^T Y .$$

Omdat  $A^T = A$  volgt hieruit  $(\underline{x}, A\underline{y}) = (A\underline{x}, \underline{y})$ , dus  $A$  is symmetrisch.  $\square$

Voorbeeld. 1) Zij gegeven

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} , \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} .$$

Dan is

$$(\underline{x}, A\underline{y}) = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} ay_1 + by_2 \\ by_1 + cy_2 \end{bmatrix} = x_1 (ay_1 + by_2) + x_2 (by_1 + cy_2) ,$$

$$(A\underline{x}, \underline{y}) = [ax_1 + bx_2 \quad bx_1 + cx_2] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = (ax_1 + bx_2)y_1 + (bx_1 + cx_2)y_2 .$$

Beide resultaten zijn gelijk aan

$$ax_1 y_1 + b(x_1 y_2 + x_2 y_1) + cx_2 y_2 = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = X^T A Y = X^T A^T Y .$$

1.5.3. Stelling. Alle wortels van de karakteristieke vergelijking van een (reële)  
symmetrische lineaire afbeelding zijn reëel.

Bewijs. Laat  $A: L \rightarrow L$  ( $\dim L = n$ ) een symmetrische lineaire afbeelding zijn  
met matrix  $A$  t.o.v. een basis van  $L$ . Laat  $\lambda = \alpha + i\beta$  ( $\alpha$  en  $\beta$  reëel) een



eventueel complexe wortel zijn van de karakteristieke vergelijking  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Dan heeft het stelsel lineaire vergelijkingen  $(A - \lambda I)V = 0$  een eventueel complexe, van de nuloplossing verschillende oplossing

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{bmatrix} = X + iY \quad \text{met reële } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{en } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

en er geldt

$$\begin{aligned} A(X + iY) &= (\alpha + i\beta)(X + iY), \\ AX + iAY &= (\alpha X - \beta Y) + i(\beta X + \alpha Y). \end{aligned}$$

Gelijkstelling van reële en imaginaire delen geeft

$$AX = \alpha X - \beta Y, \quad AY = \beta X + \alpha Y.$$

Vat  $X$  en  $Y$  op als kolom van vectoren  $\underline{x}$  en  $\underline{y}$  t.o.v. de gegeven basis, dan geldt

$$A\underline{x} = \alpha\underline{x} - \beta\underline{y}, \quad A\underline{y} = \beta\underline{x} + \alpha\underline{y}.$$

Vorm nu de inproducten

$$\begin{aligned} (A\underline{x}, \underline{y}) &= (\alpha\underline{x} - \beta\underline{y}, \underline{y}) = \alpha(\underline{x}, \underline{y}) - \beta(\underline{y}, \underline{y}), \\ (\underline{x}, A\underline{y}) &= (\underline{x}, \beta\underline{x} + \alpha\underline{y}) = \beta(\underline{x}, \underline{x}) + \alpha(\underline{x}, \underline{y}). \end{aligned}$$

Wegens  $(\underline{x}, A\underline{y}) = (A\underline{x}, \underline{y})$  is dan  $\beta\{(\underline{x}, \underline{x}) + (\underline{y}, \underline{y})\} = 0$ , dus  $\beta = 0$ . Bedenk namelijk dat  $(\underline{x}, \underline{x}) + (\underline{y}, \underline{y}) > 0$  is; immers beide termen zijn  $\geq 0$  en de som kan alleen 0 zijn als  $\underline{x} = \underline{y} = \underline{0}$ ; maar dan is  $X = Y = \underline{0}$  en dus  $V = \underline{0}$ , in strijd met het gegeven dat  $V$  verschilt van de nuloplossing. Uit  $\beta = 0$  volgt dat de wortel  $\lambda$  reëel is. □

Voorbeeld. 2) De symmetrische matrix  $A$  uit voorbeeld 1 heeft als karakteristieke vergelijking

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0.$$

De wortels van deze vergelijking zijn reëel want de discriminant is

$$(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

1.5.4. Stelling. Zij  $A: L \rightarrow L$  een lineaire afbeelding in een vectorruimte  $L$  van eindige dimensie met inproduct. Als  $A$  symmetrisch is, dan heeft  $L$  een orthonormale basis bestaande uit eigenvectoren van  $A$ . Bovendien geldt: is  $\lambda$  een  $k$ -voudige eigenwaarde van  $A$ , dan is de eigenruimte bij  $\lambda$  juist  $k$ -dimensionaal.

Bewijs. Zij  $A$  symmetrisch. We passen volledige inductie toe naar  $\dim L$ . In het geval  $\dim L = 1$  is elke vector  $\underline{v} \neq 0$  eigenvector. Kies een vector  $\underline{v}$  met  $|\underline{v}| = 1$ , dan is  $\underline{v}$  orthonormale basis van  $L$ .

Veronderstel nu dat de stelling juist is voor vectorruimten van dimensie  $n$ . Laat  $\dim L = n + 1$  zijn. Kies in  $L$  een basis en bepaal de matrix  $A$  van  $A$  t.o.v. die basis. De karakteristieke vergelijking  $\det(A - \lambda I) = 0$  is van de graad  $n + 1$ . Volgens de hoofdstelling van de algebra (zie college Wiskunde 10, 5.3.2) heeft deze vergelijking precies  $n + 1$  wortels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ , die op grond van 1.5.3. reëel zijn; dit zijn de eigenwaarden van  $A$ . Bij  $\lambda_{n+1}$  behoort een eigenvector  $\underline{v}$  zodat  $A\underline{v} = \lambda_{n+1}\underline{v}$ ; tevens kiezen we  $\underline{v}$  zo dat  $|\underline{v}| = 1$ . Laat nu  $V$  het orthogonale complement van de deelruimte opgespannen door  $\underline{v}$  zijn, dan is  $V$  deelruimte van  $L$  en  $\dim V = n$  (zie 1.4.4). Voorts geldt voor elke  $\underline{x} \in V$ , dat ook  $A\underline{x} \in V$ , want

$$(\underline{v}, A\underline{x}) = (A\underline{v}, \underline{x}) = (\lambda_{n+1}\underline{v}, \underline{x}) = \lambda_{n+1}(\underline{v}, \underline{x}) = 0.$$

Laat men  $A$  alleen op vectoren uit  $V$  werken (restrictie van  $A$  tot  $V$ ), dan levert dit een lineaire afbeelding  $V \rightarrow V$ , die uiteraard symmetrisch is. Omdat  $\dim V = n$ , mogen we de inductieveronderstelling toepassen:  $V$  heeft een orthonormale basis  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ , bestaande uit eigenvectoren van  $A$ . Op grond van 1.4.4 is  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}$  dan een orthonormale basis van  $L$  en deze basis bestaat uit eigenvectoren van  $A$ .

Het tweede deel van de stelling wordt met een soortgelijke inductie bewezen. De inductiestap hierbij verloopt als volgt, met gebruikmaking van de bovenstaande notaties: laat  $\lambda_{n+1}$  een  $k$ -voudige eigenwaarde van  $A$  zijn. Ten opzichte van de basis  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}$  van  $L$  heeft de matrix van  $A$  diagonaalvorm met diagonaalelementen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ ; evenzo heeft ten opzichte van de basis  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  van  $V$  de matrix van de restrictie van  $A$  tot  $V$  diagonaalvorm met diagonaalelementen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Door ontwikkelen naar de laatste kolom blijkt hieruit, dat de karakteristieke veelterm van  $A$  gelijk is aan die van de restrictie van  $A$  tot  $V$ , vermenigvuldigd met  $-(\lambda - \lambda_{n+1})$ . Hieruit volgt, dat  $\lambda_{n+1}$  een  $(k - 1)$ -voudige eigenwaarde van de restrictie van  $A$  tot  $V$  is. Uit de inductieonderstelling en het loodrecht staan van  $\underline{v}$  op  $V$  volgt dat de

eigenruimte bij  $\lambda_{n+1}$  van  $A$   $k$ -dimensionaal is, en eveneens dat de overige eigenruimten van  $A$  (die overeenkomen met de eigenruimten van de restrictie van  $A$  tot  $V$ ) als dimensie de multipliciteit van de bijbehorende eigenwaarde hebben.  $\square$

Opmerkingen. 1) Het eerste deel van stelling 1.5.4 is omkeerbaar: als  $A: L \rightarrow L$  een lineaire afbeelding is die een orthogonale basis  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$  van eigenwaarden heeft, dan is  $A$  symmetrisch. Immers, ten opzichte van  $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$  heeft de matrix van  $A$  diagonaalvorm en is dus symmetrisch. Uit 1.5.2 volgt dat dan ook  $A$  symmetrisch is.

2) Uit stelling 1.5.4 en opmerking 1 blijkt, dat de symmetrische afbeeldingen gekarakteriseerd worden door de eigenschap, dat er een basis van onderling loodrechte vectoren  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  bestaat zodanig dat  $A(\underline{v}_k) = \lambda_k \underline{v}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Het beeld van een willekeurige vector wordt nu door lineair combineren verkregen.

3) De symmetrische afbeeldingen zijn kennelijk ook die afbeeldingen, die ten opzichte van een geschikt gekozen orthonormale basis een diagonaalmatrix hebben (met eigenwaarden als diagonaalelementen). We vertalen dit resultaat in matrixtaal:

1.5.5. Stelling. Als  $B$  een (reële) symmetrische  $(n \times n)$ -matrix is met eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , dan bestaat er een orthogonale matrix  $S$ , zodat

$$S^{-1}BS = S^TBS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \circ & & \\ & & \dots & \dots & \\ \circ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Bewijs. Vat  $B$  op als matrix van een symmetrische lineaire afbeelding  $\beta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  t.o.v. de standaardbasis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ . Dan heeft  $\beta$  eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . De bijbehorende eigenvectoren  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$  worden zo gekozen dat ze een orthonormale basis van  $\mathbb{R}^n$  vormen. Laat  $S$  de overgangsmatrix zijn van de basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  op de basis  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ , dan is  $S$  een orthogonale matrix (zie 1.4.7). De matrix van  $\beta$  t.o.v. de basis  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$  is dan  $S^{-1}BS$  (zie 1.2.3) en er geldt dat  $S^{-1}BS = S^TBS$  diagonaalvorm heeft met als diagonaalelementen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .  $\square$

Opmerking. Door zonodig een kolom van  $S$  met  $-1$  te vermenigvuldigen kan men zorgen dat  $\det S = 1$ .

Voorbeeld. 3) Breng op diagonaalvorm met behulp van een orthogonale matrix:

$$B = \begin{bmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{bmatrix} .$$

Bepaal eerst de eigenwaarden en eigenvectoren van B; dit leidt tot

$$\lambda_1 = 50 \text{ met eigenvectoren } \alpha(4, -3)$$

en

$$\lambda_2 = 25 \text{ met eigenvectoren } \beta(3,4).$$

Normeer de eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 50 , \quad \underline{v}_1 = \frac{1}{5} (4, -3) ; \quad \lambda_2 = 25 , \quad \underline{v}_2 = \frac{1}{5} (3, 4) .$$

Merk op dat de vectoren  $\underline{v}_1, \underline{v}_2$  een orthonormale basis van  $\mathbb{R}^2$  vormen.

De overgangsmatrix S van de standaardbasis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$  op de basis  $\underline{v}_1, \underline{v}_2$  wordt gegeven door

$$S = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} , \quad S^{-1} = S^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} .$$

Bereken nu  $S^{-1}BS$ :

$$S^{-1}BS = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} ,$$

in overeenstemming met 1.5.5.

- 4) Zij  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$  de standaardbasis van  $\mathbb{R}^3$  en laat de lineaire afbeelding  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeven zijn door  $A\underline{e}_1 = (1, -4, 8)$  ,  $A\underline{e}_2 = (-4, 7, 4)$  ,  $A\underline{e}_3 = (8, 4, 1)$  .  
Ten opzichte van de standaardbasis heeft A de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix} ,$$

dus A is symmetrisch. We bepalen een orthonormale basis van eigenvectoren.

De karakteristieke vergelijking

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 8 \\ -4 & 7-\lambda & 4 \\ 8 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 81\lambda - 729 = -(\lambda+9)(\lambda-9)^2 = 0$$

heeft wortels  $\lambda_1 = 9$ ,  $\lambda_2 = 9$ ,  $\lambda_3 = -9$ . Bepaal de bijbehorende eigenvectoren

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 9 : \begin{cases} -8v_1 - 4v_2 + 8v_3 = 0 & (v_1, v_2, v_3) = \alpha_1(1, -2, 0) + \alpha_2(1, 0, 1); \\ -4v_1 - 2v_2 + 4v_3 = 0 & \text{orthonormaal stelsel} \\ 8v_1 + 4v_2 - 8v_3 = 0 & \underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0), \underline{v}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(4, 2, 5); \end{cases}$$

$$\lambda_3 = -9 : \begin{cases} 10v_1 - 4v_2 + 8v_3 = 0 & (v_1, v_2, v_3) = \alpha_3(2, 1, -2); \\ -4v_1 + 16v_2 + 4v_3 = 0 & \text{eenheidsvector } \underline{v}_3 = \frac{1}{3}(2, 1, -2). \\ 8v_1 + 4v_2 + 10v_3 = 0 \end{cases}$$

De vectoren  $\underline{v}_1, \underline{v}_2$  werden bepaald door middel van het orthonormalisatieproces van Gram-Schmidt toegepast op de vectoren  $(1, -2, 0)$  en  $(1, 0, 1)$ .

De aldus gekozen eigenvectoren  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$  vormen een orthonormale basis van  $\mathbb{R}^3$ .

De overgangsmatrix  $S$  van de standaardbasis op de basis  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$  wordt gegeven door

$$S = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2\sqrt{5} \\ -6 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 5 & -2\sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = S^T = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & -2\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

$$S^{-1}AS = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & -2\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2\sqrt{5} \\ -6 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & 5 & -2\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

Laat  $L$  een vectorruimte met inproduct zijn. Laat  $M$  een deelruimte zijn met dimensie  $m$ . Volgens 1.4 bestaat er dan bij elke  $\underline{x} \in L$  een eenduidig bepaalde projectie  $\underline{y}$  van  $\underline{x}$  op  $M$ , gekarakteriseerd door de eigenschappen  $\underline{y} \in M$  en  $\underline{x} - \underline{y} \perp M$ . Als  $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_m$  een orthonormale basis is van  $M$ , dan kunnen we schrijven

$$\underline{y} = \sum_{j=1}^m (\underline{x}, \underline{g}_j) \underline{g}_j.$$

Uit deze representatie volgt gemakkelijk, dat de afbeelding die aan  $\underline{x}$  de vector  $\underline{y}$  toevoegt, lineair is. Deze afbeelding noemen we de projectie van  $L$  op  $M$ . We gebruiken de notatie  $P$ , of als we expliciet willen aangeven waarop  $P$  projecteert:  $P_M$  (zie ook Wiskunde 20, 3.8.2).



Opmerkingen. 1) Bijzondere projecties zijn de identieke afbeelding  $P_L = I$  (met  $\lambda = 1$  als enige eigenwaarde) en de nulafbeelding  $P_{\{0\}} = 0$  (met  $\lambda = 0$  als enige eigenwaarde).

2) Als  $\dim M = m$ , dan is  $\lambda = 1$  een  $m$ -voudige eigenwaarde en  $\lambda = 0$  een  $(n-m)$ -voudige eigenwaarde.

3) Uit de definitie van projectie volgt gemakkelijk

$$P_{M^\perp} = I - P_M.$$

**1.5.8. Stelling.** Een idempotente symmetrische lineaire afbeelding  $A: L \rightarrow L$  is een projectie.

Bewijs. Volgens het gegeven van de stelling geldt

$$A^2 = A, \quad (\underline{x}, A\underline{y}) = (A\underline{x}, \underline{y}) \quad \text{voor alle } \underline{x} \in L, \underline{y} \in L.$$

Laat  $M$  de beeldruimte van  $A$  zijn:

$$M := \{A\underline{x} \mid \underline{x} \in L\};$$

$M$  is een deelruimte van  $L$ .

Elke vector  $\underline{x} \in L$  is te schrijven in de vorm

$$\underline{x} = A\underline{x} + (I - A)\underline{x},$$

waarbij  $A\underline{x} \in M$  en  $(I - A)\underline{x} \in M^\perp$ . Immers, elke vector uit  $M$  is van de vorm  $A\underline{y}$ ,  $\underline{y} \in L$ , en er geldt

$$((I - A)\underline{x}, A\underline{y}) = (\underline{x}, A\underline{y}) - (A\underline{x}, A\underline{y}) = (\underline{x}, A\underline{y}) - (\underline{x}, A^2\underline{y}) = 0,$$

omdat  $A$  idempotent en symmetrisch is.

Uit het voorgaande volgt dat  $A$  de projectie van  $L$  op  $M$  is. □

Voorbeelden. 5) De  $(n \times n)$ -matrix

$$P = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

waarvan alle elementen gelijk aan  $\frac{1}{n}$  zijn, is idempotent en symmetrisch.

Vat  $P$  op als matrix van een lineaire afbeelding  $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  t.o.v. de standaardbasis. Dan is  $P$  de projectie van  $\mathbb{R}^n$  op de beeldruimte

$M := \{P\underline{x} \mid \underline{x} \in \mathbb{R}^n\}$ . Meetkundig is  $M$  de rechte  $\underline{x} = \alpha(1, 1, \dots, 1)$ .

De matrix  $P$  en de projectie  $P$  hebben één eigenwaarde  $1$  met bijbehorende eigenvector  $(1, 1, \dots, 1)$ , en  $n - 1$  eigenwaarden  $0$ .

- 6) Laat  $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de projectie zijn van  $\mathbb{R}^3$  op de rechte met parametervoorstelling  $\underline{x} = \lambda \underline{a}$ , waarbij  $|\underline{a}| = 1$ . De rechte is deelruimte van  $\mathbb{R}^3$  en de vector  $\underline{a}$  is orthonormale basis van deze deelruimte. Volgens 1.4.5 geldt dan voor de projectie  $P\underline{x}$  van een vector  $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ :

$$P\underline{x} = (\underline{x}, \underline{a})\underline{a} = (\underline{a}^T \underline{x})\underline{a} = \underline{a}(\underline{a}^T \underline{x}) = (\underline{a}\underline{a}^T)\underline{x}.$$

Bedenk dat in  $\mathbb{R}^3$  de kolom van een vector t.o.v. de standaardbasis samenvalt met de vector. De matrix van  $P$  t.o.v. de standaardbasis wordt daarom gegeven door

$$P = \underline{a}\underline{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} [a_1 \quad a_2 \quad a_3] = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{bmatrix}.$$

De matrix  $P$  is symmetrisch en idempotent, immers

$$P^2 = (\underline{a}\underline{a}^T)(\underline{a}\underline{a}^T) = \underline{a}(\underline{a}^T \underline{a})\underline{a}^T = \underline{a}\underline{a}^T = P,$$

omdat  $|\underline{a}|^2 = \underline{a}^T \underline{a} = 1$ .

In overeenstemming met de meetkundige interpretatie is

$$P\underline{a} = (\underline{a}, \underline{a})\underline{a} = \underline{a},$$

$$P\underline{x} = (\underline{x}, \underline{a})\underline{a} = \underline{0} \quad \text{als} \quad (\underline{x}, \underline{a}) = 0.$$

Daaruit volgt:  $P$  (en ook  $P$ ) heeft eigenwaarde 1 met bijbehorende eigenvector  $\underline{a}$ , en eigenwaarde 0 met als bijbehorende eigenruimte het vlak met vergelijking  $(\underline{x}, \underline{a}) = 0$ .

- 7) Laat  $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de projectie zijn van  $\mathbb{R}^3$  op het vlak met vergelijking  $(\underline{x}, \underline{a}) = 0$ ; veronderstel dat de normaalvector  $\underline{a}$  de lengte 1 heeft, dus  $(\underline{a}, \underline{a}) = \underline{a}^T \underline{a} = 1$ . Uit opmerking 3 van 1.5.7. volgt dat  $Q = I - P$ , waarbij  $P$  de projectie van  $\mathbb{R}^3$  op de rechte  $\underline{x} = \lambda \underline{a}$  is; vergelijk voorbeeld 6. Voor  $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$  geldt dan

$$Q\underline{x} = (I - P)\underline{x} = \underline{x} - \underline{a}\underline{a}^T \underline{x}.$$

De matrix van  $Q$  t.o.v. de standaardbasis wordt gegeven door

$$Q = I - \underline{a}\underline{a}^T.$$

Deze matrix is symmetrisch en idempotent, immers



$$Q^2 = (I - \underline{a}\underline{a}^T)(I - \underline{a}\underline{a}^T) = I - 2\underline{a}\underline{a}^T + \underline{a}\underline{a}^T\underline{a}\underline{a}^T = I - \underline{a}\underline{a}^T = Q,$$

omdat  $\underline{a}^T\underline{a} = 1$ . De eigenwaarden van  $Q$  volgen eenvoudig uit de eigenwaarden van  $P$ , zie voorbeeld 6.

## 1.6. Kwadratische vormen

1.6.1. Definitie. Zij  $L$  een vectorruimte van eindige dimensie met inproduct en zij  $A: L \rightarrow L$  een symmetrische lineaire afbeelding. De bij  $A$  behorende kwadratische vorm is een functie  $Q: L \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeven door  $Q(\underline{x}) = (A\underline{x}, \underline{x})$ .

We zullen deze definitie nader uitwerken. Kies in  $L$  een orthonormale basis  $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_n$ , waarbij  $\dim L = n$ . Laat  $A = [a_{ij}]$  de matrix van  $A$  en  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  de kolom van  $\underline{x} \in L$  zijn t.o.v. deze basis. Dan is  $A$  symmetrisch en er geldt (zie 1.4, voorbeeld 4):

$$\begin{aligned} Q(\underline{x}) &= (A\underline{x}, \underline{x}) = X^T A^T X = X^T A X = \sum_{i=1}^n x_i (AX)_i = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j. \end{aligned}$$

De kwadratische vorm  $Q(\underline{x})$  is dus een homogene veelterm van de graad 2 in  $n$  variabelen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Omgekeerd is elke homogene veelterm van de graad 2

$$\sum_{i=1}^n b_i x_i^2 + \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j$$

te schrijven als een kwadratische vorm. Definieer nl.  $a_{ii} := b_i$ ,  $a_{ij} := a_{ji} := \frac{1}{2} b_{ij}$ , dan is

$$\sum_{i=1}^n b_i x_i^2 + \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = X^T A X$$

met symmetrische matrix  $A$ .

1.6.2. Opmerking. Uit de relatie  $(A\underline{x}, \underline{x}) = X^T A X$  volgt, dat de uitdrukking  $X^T A X$  onafhankelijk is van de basiskeuze. Dit kan men ook door berekening verifiëren. Immers, kies een tweede orthonormale basis  $\underline{g}'_1, \underline{g}'_2, \dots, \underline{g}'_n$  en laat  $S$  de overgangsmatrix zijn van  $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_n$  op  $\underline{g}'_1, \underline{g}'_2, \dots, \underline{g}'_n$ . Volgens 1.4.6 is  $S$  orthogonaal, dus  $S^{-1} = S^T$ . De matrix van  $A$  t.o.v.  $\underline{g}'_1, \underline{g}'_2, \dots, \underline{g}'_n$  is  $A' = S^{-1} A S$  en de kolom van  $\underline{x}$  t.o.v. deze basis is  $X' = S^{-1} X = S^T X$ . Daaruit volgt

$$(X')^T A' X' = (S^T X)^T (S^{-1} A S) (S^{-1} X) = X^T S S^{-1} A S S^{-1} X = X^T A X .$$

Overeenkomstig 1.5.4 heeft  $L$  een orthonormale basis  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ , bestaande uit eigenvectoren van  $A$ . De matrix van  $A$  t.o.v. deze basis is een diagonaalmatrix met de eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  als diagonaalelementen. Laat  $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  de kolom van  $\underline{x}$  zijn t.o.v. de basis  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ , dan neemt de kwadratische vorm  $Q(\underline{x})$  de volgende eenvoudige gedaante aan:

$$Q(\underline{x}) = [x'_1, x'_2, \dots, x'_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \circ & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \circ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x'_i)^2 .$$

We vatten dit resultaat samen in de volgende stelling.

1.6.3. Stelling. De kwadratische vorm  $(A\underline{x}, \underline{x})$  is, door overgang op een orthonormale basis van eigenvectoren van  $A$ , te schrijven als een veelterm die bestaat uit kwadraten met als coëfficiënten de eigenwaarden van  $A$ .

We vertalen dit resultaat nog in matrixtaal:

1.6.4. Stelling. Zij  $B$  een (reële) symmetrische  $(n \times n)$ -matrix met eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Dan bestaat er bij de kwadratische vorm  $X^T B X$ ,  $X \in \mathbb{R}^n$ , een orthogonale matrix  $S$ , zodat na substitutie van  $X = S X'$  volgt  $X^T B X = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x'_i)^2$ .

Bewijs. Vat  $B$  op als matrix van een symmetrische lineaire afbeelding  $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  t.o.v. de standaardbasis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ . Dan heeft  $B$  eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Kies de bijbehorende eigenvectoren  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$  zodanig dat ze een orthonormale basis van  $\mathbb{R}^n$  vormen. Laat  $S$  de overgangsmatrix zijn van de basis  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  op de basis  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ , dan is  $S$  orthogonaal overeenkomstig 1.4.7. De matrix  $S$  is dezelfde als in 1.5.5, dus  $S^T B S$  is een diagonaalmatrix met diagonaalelementen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Na substitutie van  $X = S X'$  in  $X^T B X$  volgt dan

$$\begin{aligned} X^T B X &= (S X')^T B (S X') = (X')^T (S^T B S) X' = \\ &= [x'_1, x'_2, \dots, x'_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \circ & \\ & & \dots & \\ \circ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x'_i)^2 . \end{aligned}$$

□

De herleiding van kwadratische vormen tot "diagonaalvorm" vindt toepassing bij het onderzoek van kwadratische krommen in  $\mathbb{R}^2$  gegeven door de vergelijking

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = c ,$$

resp. van kwadratische oppervlakken in  $\mathbb{R}^3$  gegeven door de vergelijking

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = c ;$$

in beide vergelijkingen is  $c$  een reële constante.

Voorbeelden. 1) Herleid de kwadratische vorm  $Q(x,y) = 7x^2 - 12xy - 2y^2$  tot diagonaalvorm.

We schrijven de kwadratische vorm als volgt:

$$Q(x,y) = 7x^2 - 12xy - 2y^2 = [x \ y] \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X^T A X .$$

Bepaal nu de eigenwaarden en eigenvectoren van  $A$ . De karakteristieke vergelijking wordt

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -6 \\ -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 50 = (\lambda - 10)(\lambda + 5) = 0 ;$$

de eigenwaarden zijn dus  $\lambda_1 = 10$ ,  $\lambda_2 = -5$ .

Bij  $\lambda_1 = 10$  behoort de eigenvector  $(2, -1)$  of, na normering:  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$ .

Bij  $\lambda_2 = -5$  behoort de eigenvector  $(1, 2)$  of, na normering:  $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$ .

De overgangsmatrix  $S$  van de standaardbasis  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  op de basis  $v_1, v_2$  wordt nu gegeven door

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Substitueer in  $Q(x,y)$ ,

$$X = SX' \quad \text{oftewel} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} (2x' + y') , \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} (-x' + 2y') , \end{cases}$$

dan volgt

$$Q(x,y) = 7x^2 - 12xy - 2y^2 = 10(x')^2 - 5(y')^2 .$$

Meetkundige interpretatie: Beschouw de kwadratische kromme in  $\mathbb{R}^2$  beschreven door de vergelijking

$$7x^2 - 12xy - 2y^2 = 1 .$$

Na overgang op een cartesisch coördinatenstelsel met coördinaatassen door  $\underline{v}_1$  en  $\underline{v}_2$  luidt de vergelijking

$$10(x')^2 - 5(y')^2 = 1 .$$

De kromme is een hyperbool.

- 2) Herleid de kwadratische vorm  $Q(x,y) = 41x^2 - 24xy + 34y^2$  tot diagonaalvorm. De bij  $Q$  behorende symmetrische matrix wordt gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{bmatrix} .$$

De eigenwaarden en eigenvectoren van deze matrix werden reeds bepaald in 1.5, voorbeeld 3:

$$\lambda_1 = 50 , \quad \underline{v}_1 = \frac{1}{5} (4, -3) ; \quad \lambda_2 = 25 , \quad \underline{v}_2 = \frac{1}{5} (3, 4) .$$

De overgangsmatrix  $S$  van de standaardbasis op de basis  $\underline{v}_1, \underline{v}_2$  wordt dan gegeven door

$$S = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} .$$

Door de substitutie

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5} x' + \frac{3}{5} y' , \\ y = -\frac{3}{5} x' + \frac{4}{5} y' , \end{cases}$$

gaat  $Q(x,y)$  over in:

$$Q(x,y) = 41x^2 - 24xy + 34y^2 = 50(x')^2 + 25(y')^2 .$$

Meetkundige interpretatie: Beschouw de kwadratische kromme in  $\mathbb{R}^2$  beschreven door de vergelijking

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 = 1 .$$

Na orthogonale transformatie (draaiing) van het  $(x,y)$ -coördinatenstelsel luidt de vergelijking in de nieuwe  $(x',y')$ -coördinaten:

$$50(x')^2 + 25(y')^2 = 1 .$$

De kromme is een ellips.

3) Herleid de kwadratische vorm

$$Q(x,y,z) = x^2 + 7y^2 + z^2 - 8xy + 16xz + 8yz$$

tot diagonaalvorm.

De bij  $Q$  behorende symmetrische matrix is

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix} .$$

Overeenkomstig 1.5, voorbeeld 4 heeft  $A$  eigenwaarden  $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ ,  $\lambda_3 = -9$ .

Na overgang op een orthonormale basis van eigenvectoren neemt  $Q$  dus de volgende gedaante aan:

$$Q = 9(x')^2 + 9(y')^2 - 9(z')^2 .$$

Meetkundige interpretatie: Beschouw het kwadratisch oppervlak in  $\mathbb{R}^3$  beschreven door de vergelijking

$$x^2 + 7y^2 + z^2 - 8xy + 16xz + 8yz = c ,$$

waarbij  $c$  een reële constante is.

Door orthogonale coördinatentransformatie gaat de vergelijking over in

$$9(x')^2 + 9(y')^2 - 9(z')^2 = c .$$

Het oppervlak is nu, afhankelijk van de waarde van  $c$ , van het volgende type:  
(i)  $c > 0$ : éénbladige omwentelingshyperboloïde; (ii)  $c < 0$ : tweebladige omwentelingshyperboloïde; (iii):  $c = 0$ : omwentelingskegel met de oorsprong als top. De omwentelingsas is in alle drie gevallen de rechte door de oorsprong met richting  $\underline{v}_3$ , d.i. de eigenvector behorend bij de eigenwaarde  $\lambda_3 = -9$ ; in 1.5, voorbeeld 4 is berekend  $\underline{v}_3 = \frac{1}{3} (2, 1, -2)$  .

- 4) Bepaal het type van het kwadratisch oppervlak in  $\mathbb{R}^3$  gegeven door de vergelijking

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 1 .$$

We beschouwen de kwadratische vorm

$$Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$

en de bijbehorende symmetrische matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} .$$

Bereken de eigenwaarden van  $A$ :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 12\lambda = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-4) = 0 ,$$

dus  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = 4$ .

De bijbehorende genormeerde eigenvectoren vormen een orthonormale basis van  $\mathbb{R}^3$ . Ten opzichte van deze basis wordt de vergelijking van het oppervlak:

$$3(y')^2 + 4(z')^2 = 1 .$$

Het oppervlak is een elliptische cylinder. De as van deze cylinder is de rechte door de oorsprong met richting  $\underline{v}_1$ , d.i. de eigenvector behorend bij de eigenwaarde  $\lambda_1 = 0$ . De eigenvector  $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$  volgt door oplossing van het stelsel vergelijkingen  $A\underline{v} = \underline{0}$ , oftewel

$$\begin{cases} v_1 - v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 + 3v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 - v_2 + 3v_3 = 0 ; \end{cases}$$

we vinden dan  $\underline{v} = \alpha(2,1,1)$  .

1.6.5. Definitie. Zij  $L$  een vectorruimte van eindige dimensie met inproduct. Een kwadratische functie is een functie  $f: L \rightarrow \mathbb{R}$  van de gedaante:

$$f(\underline{x}) = (A\underline{x}, \underline{x}) + 2(\underline{b}, \underline{x}) + c ,$$

waarbij  $A: L \rightarrow L$  een symmetrische lineaire afbeelding,  $\underline{b} \in L$  en  $c \in \mathbb{R}$  is.

Een kwadratische functie is dus som van een kwadratische vorm  $(A\underline{x}, \underline{x})$ , een zg. lineaire vorm  $2(\underline{b}, \underline{x})$  en een constante  $c$ . Kies in  $L$  een orthonormale basis  $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_n$ . Laat  $A = [a_{ij}]$  de matrix van  $A$  zijn,  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  de kolom van  $\underline{b}$  en  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de kolom van  $\underline{x} \in L$ , alles t.o.v. de basis  $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_n$ . Dan is

$$f(\underline{x}) = X^T A X + 2B^T X + c = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c .$$

De kwadratische functie  $f(\underline{x})$  is dus een veelterm van de graad 2 in  $n$  variabelen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Omgekeerd is elke veelterm van de graad 2 te schrijven als een kwadratische functie.

We proberen nu de lineaire vorm  $2(\underline{b}, \underline{x})$  in  $f(\underline{x})$  te verdrijven. Substitueer daartoe  $\underline{x} = \underline{y} + \underline{p}$ , dan volgt

$$\begin{aligned} f(\underline{y} + \underline{p}) &= (A\underline{y} + A\underline{p}, \underline{y} + \underline{p}) + 2(\underline{b}, \underline{y} + \underline{p}) + c = \\ &= (A\underline{y}, \underline{y}) + (A\underline{p}, \underline{y}) + (A\underline{y}, \underline{p}) + (A\underline{p}, \underline{p}) + 2(\underline{b}, \underline{y}) + 2(\underline{b}, \underline{p}) + c = \\ &= (A\underline{y}, \underline{y}) + 2(A\underline{p}, \underline{y}) + 2(\underline{b}, \underline{y}) + (A\underline{p}, \underline{p}) + 2(\underline{b}, \underline{p}) + c = \\ &= (A\underline{y}, \underline{y}) + 2(A\underline{p} + \underline{b}, \underline{y}) + f(\underline{p}) . \end{aligned}$$

Veronderstel nu eens dat er een  $\underline{p}$  is zodanig dat voldaan wordt aan de zg. middelpuntsvergelijkingen

$$A\underline{p} + \underline{b} = \underline{0} ,$$

of, in matrixnotatie,

$$A\underline{p} + B = \underline{0}$$

waarbij  $P$  de kolom van  $\underline{p}$  is t.o.v. de basis  $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_n$ .

Dan is

$$f(\underline{x}) = f(\underline{y} + \underline{p}) = (A\underline{y}, \underline{y}) + f(\underline{p}) ,$$

waarmee de lineaire vorm in  $f$  verdreven is.

Kwadratische functies vinden toepassing bij de classificatie van kwadratische krommen resp. kwadratische oppervlakken beschreven door de vergelijking

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0$$

met  $n = 2$  resp.  $n = 3$ . De hierboven bepaalde vector  $\underline{p}$  stelt dan voor het middelpunt van de kromme resp. het oppervlak. Immers, als  $\underline{p}$  aan de middelpuntsvergelijkingen voldoet dan geldt

$$f(\underline{p} + \underline{y}) = (A\underline{y}, \underline{y}) + f(\underline{p}) ,$$

$$f(\underline{p} - \underline{y}) = (A(-\underline{y}), -\underline{y}) + f(\underline{p}) = (A\underline{y}, \underline{y}) + f(\underline{p}) ,$$

dus  $f(\underline{p} + \underline{y}) = f(\underline{p} - \underline{y})$ . Indien nu  $\underline{p} + \underline{y}$  punt is van de kromme resp. het oppervlak met vergelijking  $f(\underline{x}) = 0$ , dan is  $f(\underline{p} + \underline{y}) = f(\underline{p} - \underline{y}) = 0$  en  $\underline{p} - \underline{y}$  is eveneens punt van de kromme resp. het oppervlak. De punten van de kromme resp. het oppervlak komen voor in paren  $\underline{p} + \underline{y}$ ,  $\underline{p} - \underline{y}$ . Elk paar bepaalt een koorde die  $\underline{p}$  tot midden heeft; het punt  $\underline{p}$  is daarom middelpunt van de kromme resp. het oppervlak.

Voorbeelden. 5) Bepaal het type van het kwadratisch oppervlak in  $\mathbb{R}^3$  gegeven door de vergelijking

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz - 2x - 2y + 6z + 3 = 0 .$$

We schrijven de vergelijking in de vorm

$$X^T A X + 2B^T X + 3 = 0 ,$$

waarin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} , \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} .$$



In de middelpuntsvergelijkingen  $AP + B = 0$  stellen we  $P = (p, q, r)$ , dan volgt

$$\begin{cases} p & - 1 = 0 \\ 3q - r - 1 = 0 \\ -q + 3r + 3 = 0 . \end{cases}$$

De oplossing is  $P = (1, 0, -1)$ , d.i. het middelpunt van het kwadratisch oppervlak.

Substitueer

$$x = x' + 1, \quad y = y', \quad z = z' - 1$$

in de vergelijking van het oppervlak, dan gaat deze over in

$$(x')^2 + 3(y')^2 + 3(z')^2 - 2y'z' = 1, \quad \text{of} \quad (X')^T A X' = 1 .$$

Bepaal nu de eigenwaarden van de matrix A:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1] = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4) = 0 ,$$

dus  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$ .

Na overgang op een orthonormale basis van eigenvectoren van A wordt de vergelijking

$$(x'')^2 + 2(y'')^2 + 4(z'')^2 = 1 .$$

Het oppervlak is een ellipsoïde.

- 6) Bepaal het type van het kwadratisch oppervlak in  $\mathbb{R}^3$  gegeven door de vergelijking

$$4x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 4xy - 4yz - 14x + 10y - 12z + 19 = 0 .$$

De middelpuntsvergelijkingen luiden in dit geval

$$AP + B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Na uitwerking blijkt dit stelsel vergelijkingen strijdig te zijn; het oppervlak heeft dus geen middelpunt.

Beschouw vervolgens de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

corresponderend met de kwadratische termen van de vergelijking.

De eigenwaarden en eigenvectoren zijn op de bekende wijze te bepalen:

$$\lambda_1 = 6, \quad \underline{v}_1 = \frac{1}{3} (2, -2, 1) \quad ; \quad \lambda_2 = 3, \quad \underline{v}_2 = \frac{1}{3} (2, 1, -2) \quad ; \\ \lambda_3 = 0, \quad \underline{v}_3 = \frac{1}{3} (1, 2, 2) \quad .$$

De overgangsmatrix  $S$  van de standaardbasis in  $\mathbb{R}^3$  op de basis  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$  wordt dan gegeven door

$$S = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} .$$

Substitueer nu in de vergelijking van het oppervlak

$$X = SX' \quad \text{oftewel} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} (2x' + 2y' + z') , \\ y = \frac{1}{3} (-2x' + y' + 2z') , \\ z = \frac{1}{3} (x' - 2y' + 2z') , \end{cases}$$

dan gaat deze vergelijking over in

$$6(x')^2 + 3(y')^2 - 20x' + 2y' - 6z' + 19 = 0 ,$$

of, na kwadraatafsplitsing,

$$6\left(x' - \frac{5}{3}\right)^2 + 3\left(y' + \frac{1}{3}\right)^2 - 6z' + 2 = 0 .$$

Na translatie

$$x' = x'' + \frac{5}{3} , \quad y' = y'' - \frac{1}{3} , \quad z' = z'' + \frac{1}{3} ,$$

luit de vergelijking

$$6(x'')^2 + 3(y'')^2 - 6z'' = 0 .$$

Het oppervlak is een elliptische paraboloid.

## Hoofdstuk 2. Functies $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

### 2.1. Notatie, continuïteit

We beschouwen een stelsel van  $m$  functies van  $n$  variabelen

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) , \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) , \\ \text{-----} \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) . \end{cases} \quad (1)$$

We voeren in de notaties  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  met  $\underline{x}$  en  $\underline{y}$  opgevat als vectoren in resp.  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$ .

Het stelsel (1) is nu kortweg te schrijven als  $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$  waarbij  $\underline{f}$  een afbeelding van  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$  is. We noemen deze afbeelding een vectorfunctie,  $\underline{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Gemakshalve gebruiken we de laatste notatie ook indien de definitieverzameling  $\text{DOM } \underline{f}$  van  $\underline{f}$  niet samenvalt met de hele  $\mathbb{R}^n$ .

De functies  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heten componentfuncties van  $\underline{f}$ . We spreken daarbij af dat  $\text{DOM } f_i = \text{DOM } \underline{f}$  zal zijn.

In  $\mathbb{R}^n$  wordt de afstand van twee punten  $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  en  $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  gegeven door

$$|\underline{a} - \underline{b}| := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2} .$$

Definitie. Zij  $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$  en  $\delta > 0$ , dan heet

$$B(\underline{a}, \delta) := \{ \underline{x} \mid |\underline{x} - \underline{a}| < \delta \}$$

de open bol met middelpunt  $\underline{a}$  en straal  $\delta$ .

2.1.1. Definitie. Een verzameling  $V \subset \mathbb{R}^n$  heet open indien bij elke  $\underline{a} \in V$  een  $\delta > 0$  bestaat zó dat  $B(\underline{a}, \delta) \subset V$ .

Opmerking. Een open bol is een open verzameling.

Definitie. Een verzameling  $V \subset \mathbb{R}^n$  heet een omgeving van  $\underline{a}$  indien  $\underline{a} \in V$  en  $V$  open is.

Definitie. Een punt  $\underline{p} \in \mathbb{R}^n$  heet een verdichtingspunt van een verzameling  $A \subset \mathbb{R}^n$  als voor elke omgeving  $V$  van  $\underline{p}$  geldt  $A \cap (V \setminus \{\underline{p}\}) \neq \emptyset$ .

2.1.2. Definitie. Zij  $\underline{f}$  een vectorfunctie van  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$ , zij  $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{L} \in \mathbb{R}^m$  en  $\underline{a}$  een verdichtingspunt van  $\text{DOM } \underline{f}$ . Dan betekent  $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{L}$ , dat er voor iedere omgeving  $V_m$  van  $\underline{L}$  een omgeving  $V_n$  van  $\underline{a}$  bestaat zodat voor alle  $\underline{x} \in V_n \cap \text{DOM } \underline{f}$  met  $\underline{x} \neq \underline{a}$  geldt:  $\underline{f}(\underline{x}) \in V_m$ .

2.1.3. Definitie. Een vectorfunctie  $\underline{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heet continu in  $\underline{a} \in \text{DOM } \underline{f}$  indien er voor iedere omgeving  $V_m$  van  $\underline{f}(\underline{a})$  een omgeving  $V_n$  van  $\underline{a}$  bestaat zó dat voor alle  $\underline{x} \in V_n \cap \text{DOM } \underline{f}$  geldt:  $\underline{f}(\underline{x}) \in V_m$ .

De functie heet continu op een verzameling  $W \subset \mathbb{R}^n$  indien  $\underline{f}$  continu is in elk punt van  $W$ .

Bewijs zelf de volgende twee stellingen.

Stelling. Een vectorfunctie  $\underline{f}$  is continu in  $\underline{a} \in \text{DOM } \underline{f}$  dan en slechts dan als

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \underline{x} \in \text{DOM } \underline{f} [|\underline{x} - \underline{a}| < \delta \rightarrow |\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{a})| < \epsilon] .$$

Stelling. Zij  $\underline{f}$  een vectorfunctie en zij  $\underline{a} \in \text{DOM } \underline{f}$  een verdichtingspunt van  $\text{DOM } \underline{f}$ , dan is  $\underline{f}$  continu in  $\underline{a}$  dan en slechts dan als  $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{a})$ .

2.1.4. Stelling. Een vectorfunctie  $\underline{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  is continu in  $\underline{a} \in \text{DOM } \underline{f}$  dan en slechts dan als al haar componentfuncties  $f_i$  in  $\underline{a}$  continu zijn.

Bewijs. Merk op dat de afstand  $|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{a})|$  in  $\mathbb{R}^m$  gegeven wordt door

$$|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{a})| = \sqrt{\sum_{i=1}^m [f_i(\underline{x}) - f_i(\underline{a})]^2} .$$

(i) Zij nu  $\underline{f}(\underline{x})$  continu in  $\underline{a}$ . Zij  $\epsilon > 0$ , dan is er een  $\delta > 0$  zodat voor alle  $\underline{x} \in \text{DOM } \underline{f}$  met  $|\underline{x} - \underline{a}| < \delta$  geldt:  $|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{a})| < \epsilon$ . Voor elke  $i$  met  $1 \leq i \leq m$  zal dan gelden:

$$|f_i(\underline{x}) - f_i(\underline{a})| \leq |\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{a})| < \epsilon ,$$

waaruit de continuïteit van de componentfuncties  $f_i$  in  $\underline{a}$  volgt.

- (ii) Zij  $f_i(\underline{x})$  continu in  $\underline{a}$  voor elke  $i$  met  $1 \leq i \leq m$ . Zij  $\epsilon > 0$ , dan is er een  $\delta_i > 0$  zodat voor alle  $\underline{x} \in \text{DOM } \underline{f}$  met  $|\underline{x} - \underline{a}| < \delta_i$  geldt:  
 $|f_i(\underline{x}) - f_i(\underline{a})| < \epsilon/\sqrt{m}$ . Voer in  $\delta := \min_{1 \leq i \leq m} \delta_i$ . Voor alle  $\underline{x} \in \text{DOM } \underline{f}$  met  $|\underline{x} - \underline{a}| < \delta$  zal dan gelden:  $|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{a})| < \epsilon$ , i.e.  $\underline{f}(\underline{x})$  is continu in  $\underline{a}$ .  $\square$

2.1.5. Lemma. Zij  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  een lineaire afbeelding, dan bestaat er een getal  $M > 0$  zó dat  $|A\underline{x}| \leq M|\underline{x}|$  voor alle  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Bewijs. Laat  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$  de standaardbasis van  $\mathbb{R}^n$  zijn. Dan is

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{e}_i, \quad A\underline{x} = \sum_{i=1}^n x_i A\underline{e}_i,$$

$$|A\underline{x}| = \left| \sum_{i=1}^n x_i A\underline{e}_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |A\underline{e}_i| \leq |\underline{x}| \sum_{i=1}^n |A\underline{e}_i|.$$

Stel nu  $M := 1 + \sum_{i=1}^n |A\underline{e}_i| > 0$ , dan is  $|A\underline{x}| \leq M|\underline{x}|$  voor alle  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

2.1.6. Stelling. Een lineaire afbeelding  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  is continu op  $\mathbb{R}^n$ .

Bewijs. Bij de afbeelding  $A$  bestaat een getal  $M > 0$  zó dat  $|A\underline{x}| \leq M|\underline{x}|$  voor alle  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ . Zij  $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\epsilon > 0$ , dan geldt voor alle  $\underline{x}$  met  $|\underline{x} - \underline{a}| < \epsilon/M$ :

$$|A\underline{x} - A\underline{a}| = |A(\underline{x} - \underline{a})| \leq M|\underline{x} - \underline{a}| < \epsilon.$$

Daaruit volgt de continuïteit van  $A$  in  $\underline{a}$  en daarmee op de hele  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

Met behulp van de volgende stelling kan men snel inzien of een functie continu is.

2.1.7. Stelling. Zijn de functies  $\underline{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  en  $\underline{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  continu in  $\underline{a}$ , dan zijn ook  $\underline{f} + \underline{g}$ ,  $\lambda \underline{f}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) continu in  $\underline{a}$ .

Zijn de functies  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continu in  $\underline{a}$ , dan zijn ook  $fg$ ,  $f/g$  (mits  $g(\underline{a}) \neq 0$ ) continu in  $\underline{a}$ .

Opgave. Bewijs deze stelling.

Definitie. Zij  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ , dan is de samengestelde vectorfunctie  $f \circ g$  een afbeelding van  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^p$  gedefinieerd door  $(f \circ g)(\underline{x}) = f(g(\underline{x}))$ , voor alle  $\underline{x} \in \text{DOM } g$  met  $g(\underline{x}) \in \text{DOM } f$ .

Deze definitie is een bijzonder geval van de algemene definitie van samengestelde afbeelding als gegeven in het college Wiskunde 10, 0.5.7.

2.1.8. Stelling. Zij  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  continu in  $\underline{a}$  en  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  continu in  $\underline{b} = g(\underline{a})$ , dan is  $f \circ g$  continu in  $\underline{a}$ .

Bewijs. Zij  $V_p$  een omgeving van  $f(\underline{b}) = f(g(\underline{a}))$ , dan is er een omgeving  $V_m$  van  $\underline{b} = g(\underline{a})$  zodat voor alle  $\underline{y} \in V_m \cap \text{DOM } f$  geldt:  $f(\underline{y}) \in V_p$ . De functie  $g$  is continu in  $\underline{a}$ ,  $V_m$  is een omgeving van  $g(\underline{a})$ , dus is er een omgeving  $V_n$  van  $\underline{a}$  zodat voor alle  $\underline{x} \in V_n \cap \text{DOM } g$  geldt:  $g(\underline{x}) \in V_m$ . Voor alle  $\underline{x} \in V_n \cap \text{DOM}(f \circ g)$  geldt dan:  $f(g(\underline{x})) \in V_p$ , i.e.  $f \circ g$  is continu in  $\underline{a}$ .  $\square$

Voorbeelden. 1) Door de betrekkingen

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy, \end{cases}$$

wordt een vectorfunctie van  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^2$  gedefinieerd. Deze vectorfunctie is continu op het hele  $(x,y)$ -vlak.

Het beeld van de  $y$ -as ( $x=0$ ) wordt gegeven door  $u = -y^2$ ,  $v = 0$ , d.i. de negatieve  $u$ -as.

Het beeld van de  $x$ -as ( $y=0$ ) wordt gegeven door  $u = x^2$ ,  $v = 0$ , d.i. de positieve  $u$ -as.

De rechte  $x = c$  ( $c \neq 0$ ) heeft als beeld de verzameling van punten  $(u,v)$  bepaald door  $u = c^2 - y^2$ ,  $v = 2cy$ , oftewel  $u = c^2 - v^2/4c^2$ , d.i. een parabool met top  $(c^2, 0)$  en as samenvallend met de  $u$ -as.

Daaruit volgt dat elk der halfvlakken  $x \geq 0$  resp.  $x \leq 0$  het hele  $(u,v)$ -vlak tot beeld heeft. Op analoge wijze kan men onderzoeken het beeld van de halfvlakken  $y \geq 0$  resp.  $y \leq 0$ .

De vectorfunctie is niet injectief: bij de punten  $(x,y)$ ,  $(-x,-y)$  behoort hetzelfde beeldpunt in het  $(u,v)$ -vlak. Omgekeerd kan men eenvoudig inzien dat bij elk punt  $(u,v) \neq (0,0)$  precies twee punten in het  $(x,y)$ -vlak behoren welke het punt  $(u,v)$  tot beeld hebben. We zeggen dan dat het  $(x,y)$ -vlak tweevoudig wordt afgebeeld op het  $(u,v)$ -vlak.

2) Door de betrekkingen

$$u = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad v = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad w = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1},$$

wordt een vectorfunctie van  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^3$  gedefinieerd. Deze vectorfunctie is continu op het hele  $(x,y)$ -vlak.

Uit de relatie

$$u^2 + v^2 + w^2 = \frac{4x^2 + 4y^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = 1$$

volgt dat het  $(x,y)$ -vlak wordt afgebeeld in het oppervlak met vergelijking  $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ . Dit oppervlak is de eenheidsbol met middelpunt  $(0,0,0)$  en straal 1 in de  $(u,v,w)$ -ruimte.

Het binnengebied van de eenheidsbol, i.e. de verzameling  $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ , wordt afgebeeld op de verzameling

$$\{(u,v,w) \mid u^2 + v^2 + w^2 = 1 \wedge w < 0\},$$

d.i. de "onderste" helft van de eenheidsbol. Evenzo wordt het buitengebied van de eenheidsbol in het  $(x,y)$ -vlak afgebeeld in de "bovenste" helft ( $w > 0$ ) van de eenheidsbol.

Merk op dat het punt  $(0,0,1)$  van de eenheidsbol niet optreedt als beeldpunt. Men kan aantonen dat elk punt  $(u,v,w) \neq (0,0,1)$  beeldpunt is van precies één punt in het  $(x,y)$ -vlak. De vectorfunctie is dus een bijectie van het  $(x,y)$ -vlak op de eenheidsbol minus het punt  $(0,0,1)$  in de  $(u,v,w)$ -ruimte.

3) De elektrische veldsterkte  $\underline{E}$  tengevolge van een eenheidslading in de oorsprong wordt gegeven door

$$\underline{E} = (E_x, E_y, E_z) = \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

of, in korte notatie,  $\underline{E}(\underline{x}) = \underline{x}/|\underline{x}|^3$ .

$\underline{E}$  is te beschouwen als een vectorfunctie van  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^3$ ;  $\underline{E}$  is niet gedefinieerd in  $\underline{x} = \underline{0}$ . Veelal wordt de vectorfunctie  $\underline{E}(\underline{x})$  geïnterpreteerd als een vectorveld, d.w.z. aan ieder punt  $\underline{x}$  hechten we de vector  $\underline{E}(\underline{x})$ . We denken dus de vector  $\underline{E}(\underline{x})$  niet als een pijl vanuit de oorsprong maar vanuit het punt  $\underline{x}$ . De vector  $\underline{E}(\underline{x})$  heeft dezelfde richting als de vector  $\underline{x}$ . Het veldverloop kan worden geïllustreerd met behulp van zgn. veldlijnen, dat zijn krommen die in elk van hun punten raken aan de veldsterkte ter plaatse. Voor het hier beschouwde voorbeeld is elke rechte door de oorsprong veldlijn.

## 2.2. Differentieerbaarheid, kettingregel

In Wiskunde 10, hoofdstuk 3 en Wiskunde 20, hoofdstuk 2 is gedefinieerd de differentieerbaarheid van een functie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , resp.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , resp.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Geleid door deze eerdere definities komen we nu tot de volgende definitie van differentieerbaarheid van een vectorfunctie  $\underline{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

2.2.1. Definitie. Zij  $\underline{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gedefinieerd in een omgeving  $B(\underline{a}, \eta)$  van  $\underline{a}$  voor zekere  $\eta > 0$ . De functie  $\underline{f}$  heet differentieerbaar in  $\underline{a}$ , indien er een lineaire afbeelding  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  bestaat en een vectorfunctie  $\underline{\rho}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , gedefinieerd in de omgeving  $B(\underline{0}, \eta)$  van  $\underline{0}$ , zodanig dat

$$\text{i) } \quad \underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) = \underline{f}(\underline{a}) + A\underline{h} + |\underline{h}|\underline{\rho}(\underline{h}) \quad \text{voor alle } \underline{h} \in B(\underline{0}, \eta) ,$$

$$\text{ii) } \quad \lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} |\underline{\rho}(\underline{h})| = 0 .$$

De lineaire afbeelding  $A$  heet de functionaaloperator van  $\underline{f}$  in  $\underline{a}$ . De matrix van  $A$  t.o.v. de standaardbasis heet de functionaalmatrix. De definitie van differentieerbaarheid drukt uit dat  $\underline{f}$  in  $\underline{a}$  lineair benaderbaar is, d.w.z. voor  $\underline{x}$  in de buurt van  $\underline{a}$  is  $\underline{f}(\underline{x})$  te benaderen door de lineaire functie  $\underline{f}(\underline{a}) + A(\underline{x} - \underline{a})$ . Bij deze benadering maken we een fout gegeven door  $|\underline{x} - \underline{a}| |\underline{\rho}(\underline{x} - \underline{a})|$ , waarbij  $|\underline{\rho}(\underline{x} - \underline{a})| \rightarrow 0$  ( $\underline{x} \rightarrow \underline{a}$ ).

Definitie. Een vectorfunctie  $\underline{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heet differentieerbaar op een open verzameling  $W \subset \mathbb{R}^n$  indien  $\underline{f}$  differentieerbaar is in elk punt  $\underline{a} \in W$ . (De functionaaloperator en functionaalmatrix hangen dan van  $\underline{a}$  af.)

Bewijs zelf de volgende stelling.

Stelling. Als  $\underline{f}$  differentieerbaar is in  $\underline{a}$ , dan is  $\underline{f}$  continu in  $\underline{a}$ .

2.2.2. Stelling. Een vectorfunctie  $\underline{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  is differentieerbaar in  $\underline{a}$  dan en slechts dan als al haar componentfuncties  $f_i$  differentieerbaar in  $\underline{a}$  zijn. De functionaalmatrix wordt gegeven door:



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

waarbij  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  de waarde van de partiële afgeleide van  $f_i$  naar  $x_j$  in het punt  $\underline{a}$  voorstelt.

Bewijs. 1) Zij  $\underline{f}$  differentieerbaar in  $\underline{a}$  met functionaaloperator  $A$ , dan is volgens definitie

$$\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) = \underline{f}(\underline{a}) + A\underline{h} + |\underline{h}|\underline{\rho}(\underline{h}), \quad (1)$$

$$\lim_{\underline{h} \rightarrow 0} |\underline{\rho}(\underline{h})| = 0. \quad (2)$$

Zij de matrix van  $A$  gegeven door  $[a_{ij}]$ , zij  $\underline{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$  en noem de componentfuncties van  $\underline{\rho}$ :  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ . Dan is (1) uit te schrijven in componenten en de  $i$ -de component wordt gegeven door

$$f_i(\underline{a} + \underline{h}) = f_i(\underline{a}) + \sum_{j=1}^n a_{ij} h_j + |\underline{h}|\rho_i(\underline{h}). \quad (3)$$

Zij  $A_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de lineaire afbeelding met matrix  $[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$  dan volgt

$$f_i(\underline{a} + \underline{h}) = f_i(\underline{a}) + A_i \underline{h} + |\underline{h}|\rho_i(\underline{h}), \quad (4)$$

terwijl  $\lim_{\underline{h} \rightarrow 0} |\rho_i(\underline{h})| = 0$  op grond van (2). Volgens definitie (2.2.1) is dan  $f_i$  differentieerbaar in  $\underline{a}$ .

2) Omgekeerd, zij voor elke  $i$  met  $1 \leq i \leq m$   $f_i$  differentieerbaar in  $\underline{a}$  met functionaaloperator  $A_i$ . Dan geldt de relatie (4) met  $\lim_{\underline{h} \rightarrow 0} |\rho_i(\underline{h})| = 0$ . Zij de matrix van  $A_i$  gegeven door  $[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$ , dan is (4) te schrijven in de vorm (3). De relatie (3) is nu juist de  $i$ -de component van de vectorrelatie (1) waarbij  $A$  de lineaire afbeelding is met matrix  $[a_{ij}]$  en  $\underline{\rho}$  de vectorfunctie met componentfuncties  $\rho_i$ . Omdat  $\lim_{\underline{h} \rightarrow 0} |\rho_i(\underline{h})| = 0$  voor elke  $i$  met

$1 \leq i \leq m$ , is tevens  $\lim_{\underline{h} \rightarrow 0} |\underline{\rho}(\underline{h})| = 0$ . Derhalve is  $\underline{f}$  differentieerbaar in  $\underline{a}$ .  
Stel in (3)  $\underline{h} = (0, 0, \dots, h_j, 0, \dots, 0)$ , dan is

$$f_i(a_1, a_2, \dots, a_j + h_j, \dots, a_n) = f_i(a_1, a_2, \dots, a_n) + a_{ij} h_j + |h_j| \rho_i(\underline{h}),$$
$$\frac{f_i(a_1, a_2, \dots, a_j + h_j, \dots, a_n) - f_i(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h_j} = a_{ij} \pm \rho_i(\underline{h}),$$

met  $\pm$  teken afhankelijk van  $h_j \gtrless 0$ . Neem hiervan de limiet voor  $h_j \rightarrow 0$ , dan vinden we

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad \square$$

In het bijzondere geval  $m = n$  kan men van de functionaalmatrix de determinant vormen. Deze heet functionaaldeterminant of determinant van Jacobi of Jacobiaan van  $\underline{f}$  in  $\underline{a}$ , genoteerd als

$$J(\underline{a}) = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\underline{a}).$$

Voorbeelden. 1) Zij  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  een lineaire afbeelding, dan geldt voor elke  $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\phi(\underline{a} + \underline{h}) = \phi \underline{a} + \phi \underline{h}.$$

Vergelijk deze regel met de definitie van differentieerbaarheid. Dan blijkt dat  $\underline{\rho}(\underline{h}) = \underline{0}$  voor elke  $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$  en dat  $\phi$  differentieerbaar is op de hele  $\mathbb{R}^n$  met (constante) functionaaloperator  $\phi$ .

2) De transformatieformules bij overgang op poolcoördinaten

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

zijn op te vatten als vectorfunctie (afbeelding van een ruimte  $\mathbb{R}^2$  met coördinaten  $r, \varphi$  in een  $\mathbb{R}^2$  met coördinaten  $x, y$ ).

De functionaalmatrix wordt gegeven door

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}$$

en de functionaaldeterminant door

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r .$$

3) Evenzo zijn de transformatieformules

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi , \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi , \\ z = \rho \cos \theta , \end{cases}$$

bij overgang op bolcoördinaten  $\rho, \theta, \varphi$ , op te vatten als een afbeelding van een  $\mathbb{R}^3$  in een  $\mathbb{R}^3$ .

Functionaalmatrix en functionaaldeterminant worden gegeven door

$$\begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2 \sin \theta .$$

4) Beschouw het speciale geval van een functie  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , i.e.  $f$  is een functie van  $n$  variabelen. De functionaalmatrix van  $f$  bestaat nu uit slechts één rijvector

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] .$$

Deze rijvector is in het college Wiskunde 20, 2.5.1 de gradiënt van  $f$  genoemd. Notatie:  $\text{grad } f$  of  $\nabla f$ .

5) Beschouw het speciale geval van een functie  $\underline{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , i.e.  $\underline{f}$  is een vectorfunctie van één variabele,  $t$  te noemen. De functionaalmatrix van  $\underline{f}$  bestaat nu uit slechts één kolomvector

$$\begin{bmatrix} \frac{df_1}{dt} \\ \frac{df_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{df_m}{dt} \end{bmatrix} ,$$

ook genoteerd als  $\frac{d\underline{f}}{dt}$ .

De functie  $\underline{f}(t)$  is te beschouwen als de parametervoorstelling van een kromme in  $\mathbb{R}^m$ , vergelijk met college Wiskunde 20, 2.1.1. In elk punt van deze kromme is de vector  $d\underline{f}/dt$  gericht langs de raaklijn aan de kromme in dat punt (vergelijk met college Wiskunde 20, 2.1.3.). Immers, de vector  $\underline{f}(t+h) - \underline{f}(t)$  geeft de richting van de koorde die de punten  $\underline{f}(t)$  en  $\underline{f}(t+h)$  verbindt. De vector  $\{\underline{f}(t+h) - \underline{f}(t)\}/h$  heeft dezelfde richting en de limiet van deze vector voor  $h \rightarrow 0$  is  $d\underline{f}/dt$ .

Voor het differentiëren van een samengestelde vectorfunctie geldt de volgende kettingregel:

2.2.3. Stelling. Zij  $\underline{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  differentieerbaar in  $\underline{a}$  met functionaaloperator  $A$  en zij  $\underline{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  differentieerbaar in  $\underline{b} = \underline{g}(\underline{a})$  met functionaaloperator  $B$ , dan is  $\underline{f} \circ \underline{g}$  differentieerbaar in  $\underline{a}$  met functionaaloperator  $BA$ .

Bewijs. Uit de definitie van differentieerbaarheid volgt

$$\underline{g}(\underline{a} + \underline{h}) = \underline{g}(\underline{a}) + A\underline{h} + |\underline{h}|\underline{\rho}(\underline{h}), \quad \lim_{\underline{h} \rightarrow 0} |\underline{\rho}(\underline{h})| = 0; \quad (1)$$

$$\underline{f}(\underline{b} + \underline{k}) = \underline{f}(\underline{b}) + B\underline{k} + |\underline{k}|\underline{\sigma}(\underline{k}), \quad \lim_{\underline{k} \rightarrow 0} |\underline{\sigma}(\underline{k})| = 0. \quad (2)$$

Neem in (2)  $\underline{k} = \underline{g}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{g}(\underline{a})$  dan ontstaat er

$$\begin{aligned} \underline{f}(\underline{g}(\underline{a} + \underline{h})) &= \underline{f}(\underline{g}(\underline{a})) + B(\underline{g}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{g}(\underline{a})) + \\ &\quad + |\underline{g}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{g}(\underline{a})| \underline{\sigma}(\underline{g}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{g}(\underline{a})) = \\ &= \underline{f}(\underline{g}(\underline{a})) + BA\underline{h} + |\underline{h}|\underline{\tau}(\underline{h}), \end{aligned}$$

waarbij  $\underline{\tau}(\underline{h})$  gegeven wordt door

$$\underline{\tau}(\underline{h}) = B\underline{\rho}(\underline{h}) + \frac{|\underline{g}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{g}(\underline{a})|}{|\underline{h}|} \underline{\sigma}(\underline{g}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{g}(\underline{a})), \quad \underline{h} \neq 0.$$

$A, B$  zijn lineaire afbeeldingen. Volgens 2.1.5 bestaan er dus constanten  $M_1, M_2 > 0$  zodat  $|A\underline{x}| \leq M_1|\underline{x}|$ ,  $|B\underline{x}| \leq M_2|\underline{x}|$  voor alle  $\underline{x}$ . Met behulp van (1) volgt

$$\frac{|\underline{g}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{g}(\underline{a})|}{|\underline{h}|} = \frac{|A\underline{h} + |\underline{h}|\underline{\rho}(\underline{h})|}{|\underline{h}|} \leq \frac{|A\underline{h}| + |\underline{h}||\underline{\rho}(\underline{h})|}{|\underline{h}|} \leq M_1 + |\underline{\rho}(\underline{h})|.$$

Voor  $|\underline{r}(h)|$  vinden we op deze manier de ongelijkheid

$$|\underline{r}(h)| \leq M_2 |\underline{\rho}(h)| + [M_1 + |\underline{\rho}(h)|] |\underline{\sigma}(\underline{g}(\underline{a}+h) - \underline{g}(\underline{a}))| ,$$

waaruit eenvoudig volgt:  $\lim_{h \rightarrow 0} |\underline{r}(h)| = 0$ . Bedenk namelijk dat voor  $h \rightarrow 0$  geldt:  $|\underline{g}(\underline{a}+h) - \underline{g}(\underline{a})| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  op grond van (1) en dus  $|\underline{\sigma}(\underline{g}(\underline{a}+h) - \underline{g}(\underline{a}))| \rightarrow 0$ . Daarmee is bewezen dat de samengestelde vectorfunctie  $\underline{f}(\underline{g}(\underline{x}))$  differentieerbaar is in  $\underline{a}$  met functionaaloperator  $\mathcal{B}A$ .  $\square$

In deze stelling zijn alle vroegere kettingregels als bijzonder geval begrepen.

Voorbeelden. 6) Zijn gegeven de differentieerbare functies  $z = z(x,y)$ ,  $x = x(u,v)$ ,  $y = y(u,v)$ . De samengestelde functie  $z = z(x(u,v), y(u,v))$  is dan eveneens differentieerbaar met functionaalmatrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} ,$$

waaruit volgt

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} .$$

7) Zij  $\underline{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{y} = \underline{g}(\underline{x})$ ,  $\underline{z} = \underline{f}(\underline{y})$ . De functionaalmatrix van de samengestelde functie  $\underline{f}(\underline{g}(\underline{x}))$  is gelijk aan het product van de functionaalmatrices der functies  $\underline{f}$  en  $\underline{g}$ . Voor de bijbehorende determinant van Jacobi zal dan gelden

$$\frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} .$$



$$\begin{cases} x_1 = g_1(y_1, y_2, \dots, y_n) , \\ \dots \dots \dots \\ x_n = g_n(y_1, y_2, \dots, y_n) . \end{cases}$$

Voorbeelden. 1) De transformatieformules bij overgang op poolcoördinaten

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi , \\ y = r \sin \varphi , \end{cases} \tag{1}$$

zijn op te vatten als een vectorfunctie van  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^2$ ; zie 2.2, voorbeeld 2. De functionaaldeterminant wordt gegeven door  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$ .

In een omgeving van een punt  $(r, \varphi)$  met  $r \neq 0$  bestaat nu de inverse functie

$$\begin{cases} r = g_1(x,y) , \\ \varphi = g_2(x,y) , \end{cases} \tag{2}$$

met functionaalmatrix gelijk aan de inverse van de functionaalmatrix van (1), i.e.

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{bmatrix} .$$

Hieruit zijn de partiële afgeleiden van de functies (2) af te lezen:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r} , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r} .$$

Met behulp van de kettingregel zijn vervolgens hogere partiële afgeleiden te berekenen, bijv.

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\sin^2 \varphi}{r} ,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{r^2} .$$

Dat de inverse functie niet bestaat in de omgeving van een punt  $(0, \varphi)$  is meetkundig duidelijk.

2) Beschouw de vectorfunctie van  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^2$  gegeven door

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy, \end{cases}$$

zie 2.1, voorbeeld 1.

Functionaalmatrix resp. functionaaldeterminant worden gegeven door

$$\begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4x^2 + 4y^2.$$

In een omgeving van een punt  $(x,y) \neq (0,0)$  bestaat de inverse functie

$$\begin{cases} x = h_1(u,v), \\ y = h_2(u,v), \end{cases}$$

met functionaalmatrix

$$\begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2(x^2+y^2)} & \frac{y}{2(x^2+y^2)} \\ -\frac{y}{2(x^2+y^2)} & \frac{x}{2(x^2+y^2)} \end{bmatrix}.$$

De inverse functie heeft dus partiële afgeleiden gegeven door

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x}{2(x^2+y^2)}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{y}{2(x^2+y^2)}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{y}{2(x^2+y^2)},$$
$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{x}{2(x^2+y^2)}.$$

3) Beschouw de vectorfunctie van  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^2$  gegeven door

$$\begin{cases} u = e^x \cos y, \\ v = e^x \sin y. \end{cases}$$

De functionaaldeterminant  $J$  is eenvoudig te berekenen:

$$J = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x}.$$

Merk op dat  $J \neq 0$  is in het hele  $(x,y)$ -vlak, en dat ieder punt behalve  $(0,0)$  als beeld optreedt. Bij elk punt  $(u_0, v_0) \neq (0,0)$  bestaat dan de inverse functie  $x = \varphi(u,v)$ ,  $y = \psi(u,v)$ . Deze inverse functie is gedefinieerd in een omgeving van







Voorbeelden. 4) De vergelijking  $F(x,y,z) = 0$  beschrijft een oppervlak in  $\mathbb{R}^3$  (vergelijk met college Wiskunde 20, 2.4.2. Zij  $(a,b,c)$  een punt van dit oppervlak, dan is  $F(a,b,c) = 0$ . Zij voorts  $\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$ , dan bestaat er een functie  $z = g(x,y)$ , gedefinieerd in een omgeving van  $(a,b)$ , zodanig dat

$$g(a,b) = c, \quad F(x,y,g(x,y)) = 0.$$

In een omgeving van  $(a,b,c)$  is het oppervlak dus te beschrijven door  $z = g(x,y)$ . De partiële afgeleiden  $\frac{\partial g}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y}$  zijn te berekenen door differentiatie van  $F(x,y,g(x,y)) = 0$  onder toepassing van de kettingregel:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = - \frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial z};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = - \frac{\partial F}{\partial y} / \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Indien  $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) \neq 0$  is, dan bestaat er een functie  $y = h(x,z)$ , gedefinieerd in een omgeving van  $(a,c)$ , zodanig dat

$$h(a,c) = b, \quad F(x,h(x,z),z) = 0.$$

De partiële afgeleiden van  $h(x,z)$  worden gegeven door

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = - \frac{\partial F}{\partial z} / \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Een analoog resultaat kan worden afgeleid indien  $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) \neq 0$  is.

5) Het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

beschrijft een kromme in  $\mathbb{R}^3$  (vergelijk met college Wiskunde 20, 2.4.3). Zij  $(a,b,c)$  een punt van deze kromme, dan is  $F(a,b,c) = 0$ ,  $G(a,b,c) = 0$ . Onderstel nu

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(a,b,c) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}(a,b,c) \neq 0,$$

dan zijn  $y$  en  $z$  te beschouwen als impliciet gegeven functies van  $x$ . Er bestaan dus functies  $y = g_1(x)$ ,  $z = g_2(x)$ , gedefinieerd in een omgeving van  $a$ , zodanig dat

$$g_1(a) = b, \quad g_2(a) = c,$$

$$F(x, g_1(x), g_2(x)) = 0, \quad G(x, g_1(x), g_2(x)) = 0.$$

In een omgeving van  $(a, b, c)$  is de kromme dan te beschrijven door  $y = g_1(x)$ ,  $z = g_2(x)$ . De afgeleiden  $g_1'(x)$ ,  $g_2'(x)$  (of gemakshalve  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{dz}{dx}$ ) worden berekend door differentiatie van  $F(x, g_1(x), g_2(x)) = 0$ ,  $G(x, g_1(x), g_2(x)) = 0$  met behulp van de kettingregel:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

De coëfficiëntendeterminant van dit stelsel is weer gelijk aan de Jacobiaan  $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}$ ; deze is  $\neq 0$  in een omgeving van  $(a, b, c)$ . Oplossing van het stelsel levert daarom op eenduidige wijze de waarde van  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{dz}{dx}$ .

Onderstel vervolgens

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}(a, b, c) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}(a, b, c) \neq 0.$$

Dan bestaan er functies  $x = h_1(y)$ ,  $z = h_2(y)$ , gedefinieerd in een omgeving van  $b$ , zodanig dat

$$h_1(b) = a, \quad h_2(b) = c,$$

$$F(h_1(y), y, h_2(y)) = 0, \quad G(h_1(y), y, h_2(y)) = 0.$$

De afgeleiden  $h_1'(y) = \frac{dx}{dy}$ ,  $h_2'(y) = \frac{dz}{dy}$  zijn weer op de bekende manier te berekenen.

Analoog is te behandelen het geval

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(a, b, c) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}(a, b, c) \neq 0.$$

6) Een kromme in  $\mathbb{R}^3$  wordt beschreven door de vergelijkingen

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x^2 - y^2 + y - 2z = 0, \\ G(x, y, z) = y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z = 0. \end{cases}$$

Het punt  $(0,0,0)$  behoort tot de kromme. In dit punt wordt de functionaalmatrix van  $F, G$  gegeven door

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{bmatrix} (0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} .$$

Daaruit is eenvoudig af te lezen dat

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} (0,0,0) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 ,$$

terwijl bijv.  $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} (0,0,0) \neq 0$  is. Op grond van de impliciete-functiestelling (2.3.3) bestaan er nu functies  $x = f(z)$ ,  $y = g(z)$  gedefinieerd in een omgeving van 0 zodanig dat

$$f(0) = 0 , \quad g(0) = 0 ,$$

$$F(f(z), g(z), z) = 0 , \quad G(f(z), g(z), z) = 0 .$$

In een omgeving van  $(0,0,0)$  is de kromme dan te beschrijven door  $x = f(z)$ ,  $y = g(z)$ .

De afgeleiden  $f'(z)$ ,  $g'(z)$  (of gemakshalve  $\frac{dx}{dz}$ ,  $\frac{dy}{dz}$ ) worden berekend door differentiatie van  $F = 0$ ,  $G = 0$  onder toepassing van de kettingregel:

$$\begin{cases} 2x \frac{dx}{dz} - 2y \frac{dy}{dz} + \frac{dy}{dz} - 2 = 0 , \\ 2y \frac{dy}{dz} + 2z + 4 \frac{dx}{dz} - 2 \frac{dy}{dz} + 4 = 0 . \end{cases}$$

In  $(0,0,0)$  vinden we  $\frac{dx}{dz} = 0$ ,  $\frac{dy}{dz} = 2$ . De raaklijn aan de kromme in  $(0,0,0)$  heeft dan richtingsvector  $(0,2,1)$ .

7) Aan de twee vergelijkingen

$$\begin{cases} F(x,y;u,v) = u^2 + v^2 - x^2 - y = 0 , \\ G(x,y;u,v) = u + v - x^2 + y = 0 , \end{cases}$$

wordt onder meer voldaan door  $x = 2$ ,  $y = 1$ ,  $u = 1$ ,  $v = 2$ . Bereken nu de Jacobiaan

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} (2,1;1,2) = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix} (2,1;1,2) = -2 \neq 0 .$$

Er bestaan dan functies  $u = \varphi(x,y)$ ,  $v = \psi(x,y)$ , gedefinieerd in een omgeving van  $(2,1)$ , zodanig dat

$$\varphi(2,1) = 1, \quad \psi(2,1) = 2,$$

$$F(x,y;\varphi(x,y),\psi(x,y)) = 0, \quad G(x,y;\varphi(x,y),\psi(x,y)) = 0.$$

De partiële afgeleiden van  $\varphi, \psi$  worden berekend door differentiatie van  $F = 0$ ,  $G = 0$ . Zo vinden we bij differentiatie naar  $x$ ,

$$\begin{cases} 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} - 2x = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2x = 0, \end{cases}$$

waaruit volgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x(1-2v)}{u-v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x(2u-1)}{u-v},$$

geldig in een omgeving van  $(2,1)$ .

Op analoge wijze zijn de afgeleiden  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  te berekenen.

8) We beschouwen een stelsel van twee functies

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

of in korte notatie  $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$  met  $\underline{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Dit stelsel is equivalent met de twee vergelijkingen

$$\begin{cases} F_1(y_1, y_2; x_1, x_2) := y_1 - f_1(x_1, x_2) = 0, \\ F_2(y_1, y_2; x_1, x_2) := y_2 - f_2(x_1, x_2) = 0, \end{cases}$$

of kort genoteerd  $\underline{F}(\underline{y}; \underline{x}) = \underline{0}$  met  $\underline{F}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Onderstel nu

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & -\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0.$$

Op grond van de impliciete-functie-stelling bestaat er dan een vectorfunctie  $\underline{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\underline{x} = \underline{g}(\underline{y})$  zodanig dat  $\underline{F}(\underline{y}; \underline{g}(\underline{y})) = \underline{0}$ .

Uitgeschreven in componenten vinden we

$$\begin{cases} y_1 - f_1(g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2)) = 0, \\ y_2 - f_2(g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2)) = 0, \end{cases}$$

oftewel  $\underline{f}(\underline{g}(\underline{y})) = \underline{y}$ . De functie  $\underline{g}$  is dan de inverse functie van  $\underline{f}$ . We hebben hier de existentie van de inverse functie aangetoond met behulp van de impliciete-functie-stelling. De inverse-functie-stelling (2.3.2) is dus te beschouwen als een bijzonder geval van de impliciete-functie-stelling (2.3.3).

9) Beschouw een stelsel van twee functies

$$u = F(x, y), \quad v = G(x, y).$$

Laat in een omgeving van het punt  $(a, b)$  gelden

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dan is de inverse-functie-stelling (2.3.2) niet van toepassing op het stelsel, m.a.w. het is de vraag of er een inverse functie

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

bestaat zodanig dat

$$u = F(\varphi(u, v), \psi(u, v)), \quad v = G(\varphi(u, v), \psi(u, v)).$$

Beschouw nu de functie  $u = F(x, y)$  en schrijf deze als een vergelijking

$$f(u, x, y) := u - F(x, y) = 0.$$

Onderstel dat bijv.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(F(a, b), a, b) = -\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) \neq 0.$$

Op grond van de impliciete-functie-stelling (2.3.3) kan dan de variabele  $x$  worden "opgelost" als functie van  $u$  en  $y$ , i.e. er bestaat een functie  $x = g(u, y)$ , gedefinieerd in een omgeving van  $(F(a, b), b)$ , zodanig dat

$$g(F(a, b), b) = a,$$

$$f(u, g(u, y), y) = u - F(g(u, y), y) = 0.$$

Differentieer de laatste betrekking partieel naar  $y$ , dan volgt onder toepassing van de kettingregel:

$$-\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 ,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = - \frac{\partial F}{\partial y} / \frac{\partial F}{\partial x} ,$$

geldig in de eerder genoemde omgeving.

Substitueer vervolgens  $x = g(u,y)$  in  $v = G(x,y)$ , dan wordt  $v$  een samengestelde functie van  $u$  en  $y$ ,

$$v = G(x,y) = G(g(u,y),y) =: H(u,y) .$$

Bereken nu met de kettingregel de afgeleide  $\frac{\partial H}{\partial y}$ ,

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} / \frac{\partial F}{\partial x} ,$$

waarbij voor  $\frac{\partial g}{\partial y}$  de boven gevonden uitkomst gesubstitueerd is.

Uit het gegeven aan het begin van dit voorbeeld volgt  $\frac{\partial H}{\partial y} = 0$ , i.e.  $H$  hangt niet af van  $y$ .

Er bestaat dus een functie  $H$  zodanig dat  $v = H(u)$  of, na terugkeer naar het oorspronkelijke stelsel,

$$G(x,y) = H(F(x,y)) .$$

In dat geval noemen we de functies  $F$  en  $G$  afhankelijk.

Als concreet voorbeeld beschouwen we het stelsel van twee functies

$$\begin{cases} u = \log x + \sin y , \\ v = x e^{\sin y} , \end{cases}$$

gedefinieerd voor alle  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  met  $x > 0$ .

(N.B.  $\log$  stelt hier en verder in deze syllabus de natuurlijke logaritme voor.)

Berekening van de Jacobiaan leidt tot

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \cos y \\ e^{\sin y} & x \cos y e^{\sin y} \end{vmatrix} = 0 .$$

Inderdaad zijn nu de twee functies afhankelijk, er geldt namelijk  $v = e^u$ . Het halfvlak  $x > 0$  wordt afgebeeld op de kromme  $v = e^u$  in het  $(u,v)$ -vlak. Deze afbeelding is niet bijectief.



## 2.4. Transformatie van meervoudige integralen

Voor enkelvoudige bepaalde integralen geldt de substitutieregel

$$2.4.1. \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du ,$$

waarbij  $a = \varphi(\alpha)$ ,  $b = \varphi(\beta)$ ; vergelijk met college Wiskunde 10, 3.4.17.

Voor meervoudige integralen, over een begrensde gebied in  $\mathbb{R}^2$  of  $\mathbb{R}^3$ , gelden de volgende analoge transformatieformules:

$$2.4.2. \quad \iint_G f(x,y) dx dy = \iint_{G'} f(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

waarbij de differentieerbare vectorfunctie

$$x = \varphi_1(u,v) , \quad y = \varphi_2(u,v)$$

een bijectie is van het gebied  $G'$  in het  $(u,v)$ -vlak op het gebied  $G$  in het  $(x,y)$ -vlak;

$$2.4.3. \quad \iiint_G f(x,y,z) dx dy dz = \\ = \iiint_{G'} f(\varphi_1(u,v,w), \varphi_2(u,v,w), \varphi_3(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du dv dw ,$$

waarbij de differentieerbare vectorfunctie

$$x = \varphi_1(u,v,w) , \quad y = \varphi_2(u,v,w) , \quad z = \varphi_3(u,v,w)$$

een bijectie is van het gebied  $G'$  in de  $(u,v,w)$ -ruimte op het gebied  $G$  in de  $(x,y,z)$ -ruimte.

We zullen deze transformatieformules niet bewijzen, doch volstaan met de volgende toelichting waarbij we ons beperken tot 2.4.3.

In het college Wiskunde 20, 4 werd de integraal van een functie  $f$  over een begrensde gebied  $G$  als volgt ingevoerd. Verdeel  $G$  in (infinitesimale) elementen  $E_i$  met maat  $\mu(E_i)$ , kies punten  $\xi_i \in E_i$  en vorm de Riemann-som  $\sum_i f(\xi_i) \mu(E_i)$ . Laat vervolgens het aantal elementen tot oneindig en de afmetingen der elementen tot nul naderen. Indien nu de Riemann-som een limiet heeft, dan noemt men deze limiet de integraal van  $f$  over  $G$ , algemeen genoteerd als  $\int_G f d\mu$ .

In het college Wiskunde 20, 4. is gesteld dat  $\int_G f d\mu$  zeker bestaat als  $G$  een begrensde en gesloten gebied is met voldoende gladde rand en de functie  $f$  continu is op  $G$ . De integraal is onafhankelijk van de keuze van de punten  $\xi_i$  en van het type infinitesimale elementen waarin  $G$  verdeeld is. Voorts mag de maat  $\mu(E_i)$ , nodig voor de berekening van de Riemann-som, worden vervangen door een benaderende uitdrukking mits de daarbij gemaakte fout van kleinere orde is dan  $\mu(E_i)$  (zie college Wiskunde 20, 4.1.6 en 4.5.2).

De transformatieformule 2.4.3 volgt nu door  $\int_G f d\mu$  op twee manieren te berekenen, corresponderend met twee verschillende verdelingen van  $G$  in infinitesimale elementen:

(i) Verdeel  $G$  in blokken van de gedaante

$$\tilde{E}_i := \{(x,y,z) \mid x_i \leq x \leq x_i + \Delta x, y_i \leq y \leq y_i + \Delta y, z_i \leq z \leq z_i + \Delta z\}$$

met maat  $\mu(\tilde{E}_i) = \Delta x \Delta y \Delta z$ . Overeenkomstig de afspraak in het college Wiskunde 20, 4.5.4 wordt de aldus berekende integraal genoteerd als

$$\iiint_G f(x,y,z) dx dy dz := \int_G f d\mu . \quad (1)$$

(ii) Het gebied  $G$  in de  $(x,y,z)$ -ruimte is beeld van het gebied  $G'$  in de  $(u,v,w)$ -ruimte onder de afbeelding

$$x = \varphi_1(u,v,w) , \quad y = \varphi_2(u,v,w) , \quad z = \varphi_3(u,v,w)$$

of in vectornotatie:  $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{u})$ , waarbij  $\underline{x} = (x,y,z)$ ,  $\underline{u} = (u,v,w)$ . Verdeel nu  $G'$  in blokken van de gedaante

$$E_i' := \{(u,v,w) \mid u_i \leq u \leq u_i + \Delta u, v_i \leq v \leq v_i + \Delta v, w_i \leq w \leq w_i + \Delta w\}$$

met maat  $\mu(E_i') = \Delta u \Delta v \Delta w$ . Door de afbeelding  $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{u})$  wordt deze verdeling overgevoerd in een verdeling van  $G$  in (infinitesimale) elementen  $E_i := \underline{\varphi}(E_i')$ .

In het algemeen zullen deze  $E_i'$ 's niet van een eenvoudige vorm zijn zodat de maat  $\mu(E_i)$  niet bepaald kan worden. Bedenk nu dat de vectorfunctie  $\underline{\varphi}$  differentieerbaar is en dus lineair benaderbaar in  $\underline{u}_i := (u_i, v_i, w_i)$ , d.w.z. voor  $\underline{u}$  in de buurt van  $\underline{u}_i$  is  $\underline{\varphi}(\underline{u})$  te benaderen door de lineaire functie

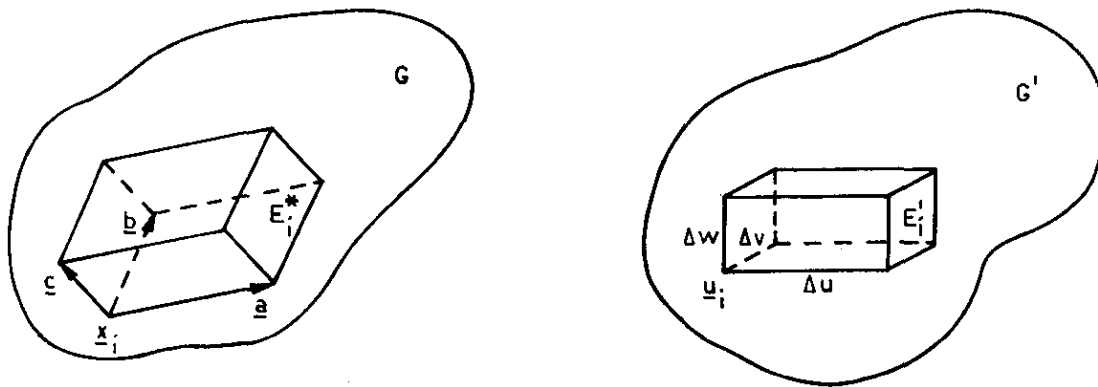
$\underline{\psi}(\underline{u}) := \underline{\varphi}(\underline{u}_i) + A(\underline{u} - \underline{u}_i)$ , waarbij  $A$  de functionaaloperator van  $\underline{\varphi}$  in  $\underline{u}_i$  is.

Onder de lineaire afbeelding  $\underline{x} = \underline{\psi}(\underline{u})$  zal  $E_i'$  overgaan in  $E_i^* := \underline{\psi}(E_i')$ . Men kan dan bewijzen dat  $\mu(E_i) \approx \mu(E_i^*)$ , waarbij de fout in deze benadering van

kleinere orde is dan  $\mu(E_i)$ . De elementen  $E_i^*$  zijn nu wel van een eenvoudige vorm. Men kan eenvoudig inzien dat  $E_i^*$  een parallellepipedum is opgespannen door de vectoren

$$\underline{a} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \Delta u, \quad \underline{b} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \Delta v, \quad \underline{c} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} \Delta w,$$

aangrijpend in het punt  $\underline{x}_i := \varphi(\underline{u}_i)$ ; zie onderstaande figuur.



De inhoud van dit parallellepipedum is gelijk aan (zie college Wiskunde 20, 3.6.2) de absolute waarde van de determinant

$$\begin{aligned} D(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial x}{\partial w} \Delta w \\ \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial y}{\partial w} \Delta w \\ \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial z}{\partial w} \Delta w \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \Delta u \Delta v \Delta w = J(\underline{u}_i) \Delta u \Delta v \Delta w, \end{aligned}$$

waarin  $J(\underline{u}_i)$  de determinant van Jacobi is. We vinden dus  $\mu(E_i^*) = |J(\underline{u}_i)| \Delta u \Delta v \Delta w$ . Vorm nu de Riemann-som behorend bij de functie  $f$  en het gebied  $G$  verdeeld in elementen  $E_i$ . Kies gemakshalve  $\underline{\xi}_i = \underline{x}_i$  en benader  $\mu(E_i)$  door  $\mu(E_i^*)$ , dan wordt de Riemann-som gegeven door

$$\sum_i f(\underline{x}_i) \mu(E_i^*) = \sum_i f(\underline{\varphi}(\underline{u}_i)) |J(\underline{u}_i)| \Delta u \Delta v \Delta w .$$

De laatste som is ook op te vatten als een Riemann-som behorend bij de functie  $f(\underline{\varphi}(\underline{u})) |J(\underline{u})|$  en het gebied  $G'$  verdeeld in elementen  $E_i^1$  met maat  $\mu(E_i^1) = \Delta u \Delta v \Delta w$ . Laat nu het aantal elementen  $E_i^1$  tot oneindig en de afmetingen der elementen tot nul naderen, dan nadert de Riemann-som tot de limiet

$$\begin{aligned} & \iiint_{G'} f(\underline{\varphi}(\underline{u})) |J(\underline{u})| du dv dw = \\ & = \iiint_{G'} f(\varphi_1(u,v,w), \varphi_2(u,v,w), \varphi_3(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du dv dw . \quad (2) \end{aligned}$$

Gelijkstelling van de resultaten (1) en (2) levert precies de transformatieformule 2.4.3.

De formules 2.4.2, 2.4.3 zijn bijzondere gevallen van de volgende algemene transformatieformule voor meervoudige integralen over een begrensde gebied in  $\mathbb{R}^n$ :

$$2.4.4. \quad \iiint_G \dots \int f(\underline{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \iiint_{G'} \dots \int f(\underline{\varphi}(\underline{u})) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \right| du_1 du_2 \dots du_n ,$$

waarbij de differentieerbare vectorfunctie

$$\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{u}) , \quad x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \dots, u_n) , \quad i = 1, 2, \dots, n ,$$

een bijjectie is van  $G'$  op  $G$ .

Voor  $n = 1$  gaat 2.4.4 over in

$$2.4.5. \quad \int_G f(x) dx = \int_{G'} f(\varphi(u)) |\varphi'(u)| du .$$

Laat hierin  $G'$  het interval  $\alpha \leq u \leq \beta$  zijn, dan is  $G$  het beeldinterval onder de bijjectie  $x = \varphi(u)$ ;  $G$  heeft eindpunten  $a := \varphi(\alpha)$ ,  $b := \varphi(\beta)$ . De formule 2.4.5 stemt overeen met de substitutieregel 2.4.1, behalve dat in 2.4.5  $\varphi'(u)$  is omgeven door modulus-strepen. De achtergrond hiervan is dat voor enkelvoudige integralen de volgende afspraak over oriëntering geldt: als  $a > b$ , dan is  $\int_a^b = - \int_b^a$ .

Onderscheid nu twee gevallen met betrekking tot 2.4.5:

(i) Zij  $\varphi'(u) > 0$  voor  $\alpha < u < \beta$ , dan is  $\varphi(u)$  monotoon stijgend op  $[\alpha, \beta]$ .  
Daaruit volgt  $a < b$ , waarna  $\int_G = \int_a^b$  en 2.4.5 precies overeenstemt met 2.4.1.

(ii) Zij  $\varphi'(u) < 0$  voor  $\alpha < u < \beta$ , dan is  $\varphi(u)$  monotoon dalend op  $[\alpha, \beta]$ .  
Daaruit volgt  $a > b$ , waarna  $\int_G = \int_b^a$  en 2.4.5 overgaat in

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du .$$

Dankzij de afspraak over oriëntering is deze uitkomst gelijkwaardig met 2.4.1.

Voor meervoudige integralen kan men niet een dergelijke afspraak over oriëntering maken. Vandaar dat in 2.4.4 de functionaaldeterminant voorkomt omgeven door modulus-strepen.

Voorbeelden. 1) De transformatieformules bij overgang op poolcoördinaten zijn op te vatten als een vectorfunctie met functionaaldeterminant

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r ;$$

zie 2.2, voorbeeld 2.

Daarmee correspondeert de volgende transformatieformule voor integralen over een gebied in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \iint_{G'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi .$$

$G$  en  $G'$  zijn meetkundig dezelfde gebieden, beschreven in resp. cartesische coördinaten  $x, y$  en poolcoördinaten  $r, \varphi$ . De voorgaande transformatieformules werden reeds eerder toegepast in het college Wiskunde 20, 4.3.

2) De transformatieformules bij overgang op bolcoördinaten zijn op te vatten als een vectorfunctie met functionaaldeterminant

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2 \sin \theta ;$$

zie 2.2, voorbeeld 3.

De overeenkomstige transformatieformule voor integralen over een gebied in  $\mathbb{R}^3$  luidt dan

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x,y,z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{G'} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi ; \end{aligned}$$

zie ook college Wiskunde 20, 4.5.4.

- 3) Bereken de oppervlakte van het gebied  $G$  in het eerste kwadrant dat begrensd wordt door de krommen  $xy = 1$ ,  $xy = 5$ ,  $y = x$ ,  $y = 2x$ .

Onder de transformatie

$$u = xy, \quad v = y/x$$

zal  $G$  overgaan in de rechthoek

$$G' := \{(u,v) \mid 1 \leq u \leq 5, 1 \leq v \leq 2\}.$$

De inverse transformatie van  $G'$  in  $G$  wordt gegeven door

$$x = \sqrt{u/v}, \quad y = \sqrt{uv}$$

en de bijbehorende functionaaldeterminant is

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-3/2} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

De gevraagde oppervlakte is nu gelijk aan

$$\iint_G dx dy = \iint_{G'} \frac{du dv}{2v} = \int_1^5 du \int_1^2 \frac{dv}{2v} = 2 \log 2.$$

- 4) Bereken  $\iint_G (x^4 - y^4) dx dy$  als  $G$  het gebied is, gelegen in het eerste kwadrant en begrensd door de  $x$ -as en de krommen  $x^2 - y^2 = 3$ ,  $x^2 - y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 5$ .  
Onder de transformatie

$$u = x^2 - y^2, \quad v = x^2 + y^2$$

zal  $G$  overgaan in het trapezium  $G'$  begrensd door de rechten  $u = v$ ,  $u = 3$ ,  $u = 4$ ,  $v = 5$ .

De functionaaldeterminant van deze transformatie is

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 8xy ,$$

waaruit voor de inverse transformatie volgt

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{8xy} = \frac{1}{4\sqrt{v^2 - u^2}} .$$

De gevraagde integraal is nu te herleiden tot

$$\begin{aligned} \iint_G (x^4 - y^4) dx dy &= \iint_{G'} \frac{uv}{4\sqrt{v^2 - u^2}} du dv = \frac{1}{4} \int_3^4 u du \int_u^5 \frac{v dv}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \\ &= \frac{1}{4} \int_3^4 u \sqrt{25 - u^2} du = -\frac{1}{12} (25 - u^2)^{3/2} \Big|_3^4 = \frac{37}{12} . \end{aligned}$$

Hoofdstuk 3. Fourierreeksen, uniforme convergentie

3.1. Fourierreeksen met periode  $2\pi$

In de lineaire algebra spelen vectorruimten met inproduct en de daarmee samenhangende begrippen orthonormaal stelsel en orthonormale basis een belangrijke rol; zie 1.4.1, 1.4.2. Volgens 1.4.6 is elke vector  $\underline{x}$  in een vectorruimte met orthonormale basis  $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_n$  te schrijven als  $\underline{x} = \sum_{j=1}^n (\underline{x}, \underline{g}_j) \underline{g}_j$ .

We zullen nu deze begrippen en resultaten uitbreiden tot ruimten van functies. Doel hierbij is de ontwikkeling van een willekeurige functie naar een orthonormaal stelsel van functies. Omdat de dimensie van een functieruimte in het algemeen niet eindig is, zal deze ontwikkeling niet meer een eindige som maar een reeks zijn. De convergentie van deze reeks dient dan nader onderzocht te worden.

In dit hoofdstuk beperken we ons tot een speciaal geval van reeksontwikkeling, nl. de Fourierreeks corresponderend met een orthonormaal stelsel van cosinus- en sinusfuncties. De Fourierreeks is echter in veel opzichten representatief voor het algemene probleem van reeksontwikkeling naar een orthonormaal stelsel.

Beschouw de verzameling van functies die gedefinieerd zijn op  $[-\pi, \pi]$  en (eigenlijk) integreerbaar zijn over  $[-\pi, \pi]$ . Met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging is deze verzameling een vectorruimte of lineaire ruimte; men kan eenvoudig nagaan dat aan de axioma's 1.1.1 voldaan is. We noemen deze vectorruimte  $R(-\pi, \pi)$ .

In  $R(-\pi, \pi)$  definiëren we het inproduct van twee functies  $f$  en  $g$  door

3.1.1. 
$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx .$$

Dit inproduct heeft dan de volgende eigenschappen:

- 1)  $(f, g) = (g, f) ,$
- 2)  $(f, g+h) = (f, g) + (f, h) ,$
- 3)  $(f, rg) = r(f, g) ,$
- 4)  $(f, f) \geq 0 ,$

voor alle  $f, g, h \in R(-\pi, \pi)$  en alle  $r \in \mathbb{R}$ .



Opmerking. Vergelijk deze eigenschappen met die vermeld in de definitie 1.4.1 van inproduct. Dan blijkt dat 1.4.1, eigenschap 4):  $(f,f) > 0$  als  $f \neq 0$ , hier niet geldt maar vervangen is door de zwakkere eigenschap:  $(f,f) \geq 0$ . Desondanks zullen we  $(f,g)$  toch een inproduct noemen. Op analoge wijze is te definiëren het inproduct in  $R(a,b)$ , d.i. de verzameling van functies integreerbaar over  $[a,b]$ .

De definitie van orthonormaal stelsel is dezelfde als in 1.4.2. We introduceren nu een speciaal orthonormaal stelsel in  $R(-\pi,\pi)$ .

3.1.2. Stelling. De functies  $\varphi_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , gegeven door

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_{2n}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

vormen een orthonormaal stelsel in  $R(-\pi,\pi)$ , d.w.z.  $(\varphi_m, \varphi_n) = 0$  als  $m \neq n$  en  $(\varphi_m, \varphi_n) = 1$  als  $m = n$ .

Bewijs. Het bewijs volgt door expliciete berekening van de betreffende integralen:

$$(i) \quad (\varphi_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1,$$

$$(\varphi_{2n-1}, \varphi_{2n-1}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = 1,$$

$$(\varphi_{2n}, \varphi_{2n}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = 1.$$

$$(ii) \quad (\varphi_0, \varphi_{2n-1}) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0,$$

$$(\varphi_0, \varphi_{2n}) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad (\varphi_{2m-1}, \varphi_{2n-1}) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = 0, \quad m \neq n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_{2m}, \varphi_{2n}) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx = 0, \quad m \neq n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_{2m-1}, \varphi_{2n}) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)x - \sin(m-n)x] dx = 0. \quad \square \end{aligned}$$

De functies  $\varphi_n$  als gegeven in 3.1.2 hebben de bijzondere eigenschap dat ze periodiek zijn met periode  $2\pi$ , d.w.z. voor alle  $x \in \mathbb{R}$  geldt  $\varphi_n(x+2\pi) = \varphi_n(x)$ . Op grond van deze eigenschap vormen de functies  $\varphi_n$  ook een orthonormaal stelsel op het interval  $[a, a+2\pi]$  met willekeurige  $a \in \mathbb{R}$ . Dit is eenvoudig in te zien met behulp van de volgende stelling.

3.1.3. Stelling ("versleepstelling"). Zij  $f$  integreerbaar over  $[-\pi, \pi]$  en periodiek met periode  $2\pi$ , dan geldt voor elke  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx .$$

Bewijs. Uit de gegevens van de stelling volgt dat  $f$  integreerbaar is over elk interval  $[a, b]$ . We schrijven nu

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_a^{-\pi} f(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{a+2\pi} f(x) dx .$$

De eerste en derde integraal in het rechterlid van deze betrekking zijn juist tegengesteld, zoals blijkt door de substitutie  $x = y + 2\pi$  in de derde integraal:

$$\int_{\pi}^{a+2\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^a f(y+2\pi) dy = \int_{-\pi}^a f(y) dy = - \int_a^{-\pi} f(y) dy . \quad \square$$

Uit 3.1.2, 3.1.3 volgt:

3.1.4. Stelling. De functies  $\varphi_n$  als gegeven in 3.1.2 vormen een orthonormaal stelsel in  $R(a, a+2\pi)$  voor elke  $a \in \mathbb{R}$ .

We beschouwen nu de ontwikkeling van een functie  $f \in R(-\pi, \pi)$  naar het orthonormale stelsel functies  $\varphi_n$ . Geleid door het overeenkomstige resultaat 1.4.6 uit de lineaire algebra, stellen we

$$3.1.5. \quad f \sim \sum_{n=0}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n ,$$

waarbij het " $\sim$ "-teken slechts voorlopig is en aangeeft dat de reeks "behoort" bij de functie  $f$ . We zullen 3.1.5 nader uitwerken. Substitueer de functies  $\varphi_n$  als gegeven in 3.1.2 en voer in de korte notaties

$$3.1.6. \quad \begin{cases} \frac{1}{2} a_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx , \\ a_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}} (f, \varphi_{2n-1}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx , \quad n \in \mathbb{N} , \\ b_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}} (f, \varphi_{2n}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx , \quad n \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

De aldus gedefinieerde coëfficiënten  $a_n, b_n$  heten de Fouriercoëfficiënten van  $f$ . De reeksontwikkeling 3.1.5 gaat nu over in

$$3.1.7. \quad f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) .$$

Het rechterlid heet de Fourierreeks (met periode  $2\pi$ ) van  $f$ .

Ten aanzien van 3.1.7 doen zich nu twee vragen voor:

- 1) Is de Fourierreeks van  $f$  convergent?
- 2) Indien de Fourierreeks van  $f$  convergent is voor zekere  $x$ , is dan de som gelijk aan  $f(x)$ ?

Een groot deel van de theorie der Fourierreeksen is aan deze vragen gewijd. Het blijkt dat niet voor elke functie  $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$  de bijbehorende Fourierreeks convergent is met som  $f(x)$ . Evenwel, voor een belangrijke deelverzameling van  $\mathcal{R}(-\pi, \pi)$  wordt in de hierna volgende hoofdstelling der Fourierreeksen bewezen dat het antwoord op de vragen 1) en 2) bevestigend is.

Vooraf zij nog opgemerkt dat, in geval van convergentie, de som van de Fourierreeks van  $f$  periodiek is met periode  $2\pi$ . We zullen daarom zo nodig  $f$  periodiek voortzetten met periode  $2\pi$  door middel van de betrekking  $f(x+2\pi) = f(x)$ . In dat geval wordt stilzwijgend verondersteld dat  $f(-\pi) = f(\pi)$ .

3.1.8. Definitie. Een functie  $f$  voldoet in  $\xi \in \mathbb{R}$  aan de Dirichlet-condities als

- i)  $f(\xi+) := \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi+h)$  en  $f(\xi-) := \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi-h)$  bestaan,
- ii)  $f'(\xi+) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi+)}{h}$  en  $f'(\xi-) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi-h) - f(\xi-)}{h}$  bestaan.

Opmerking. De rechter- en linkerlimiet  $f(\xi+)$  en  $f(\xi-)$  behoeven niet gelijk te zijn, evenmin als  $f'(\xi+)$  en  $f'(\xi-)$ .

3.1.9. Stelling (hoofdstelling der Fourierreeksen). Zij  $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$  en periodiek voortgezet met periode  $2\pi$ . Indien  $f$  in  $\xi$  voldoet aan de Dirichlet-condities, dan is de Fourierreeks van  $f$  convergent in  $\xi$  met som  $\frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)]$ .

Opmerkingen. 1) Indien  $f$  tevens continu is in  $\xi$ , dan is de som van de Fourierreeks in  $\xi$  gelijk aan  $f(\xi)$ .

2) Beperkt tot de oorspronkelijke definitieverzameling  $[-\pi, \pi]$  van  $f$  is de hoofdstelling als volgt te formuleren. Indien  $f$  in  $\xi \in (-\pi, \pi)$  voldoet aan de Dirichlet-condities, dan is de Fourierreeks van  $f$  convergent in  $\xi$  met som  $\frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)]$ . Indien  $f$  in  $\pm\pi$  aan de Dirichlet-condities voldoet, d.w.z. indien de limieten  $f(-\pi+)$ ,  $f(\pi-)$ ,  $f'(-\pi+)$ ,  $f'(\pi-)$  bestaan, dan is de Fourierreeks van  $f$  in  $\pm\pi$  convergent met som  $\frac{1}{2}[f(-\pi+) + f(\pi-)]$ .

Het bewijs van de hoofdstelling zal worden gegeven in 3.2.

We bespreken nog een tweetal bijzondere gevallen van de Fourierreeks 3.1.7.

Zij  $f \in R(-\pi, \pi)$  een even functie, d.w.z.  $f(-x) = f(x)$  voor  $x \in [-\pi, \pi]$ . Dan volgt voor de Fouriercoëfficiënten  $b_n, a_n$ :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

omdat  $f(x) \sin nx$  oneven en  $f(x) \cos nx$  even is.

De Fourierreeks van  $f$  bestaat nu enkel uit cosinustermen

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

en we spreken van een Fourier-cosinusreeks.

Zij  $f \in R(-\pi, \pi)$  een oneven functie, d.w.z.  $f(-x) = -f(x)$  voor  $x \in [-\pi, \pi]$ .

Dan volgt voor de Fouriercoëfficiënten  $a_n, b_n$ :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

en de Fourierreeks van  $f$  gaat over in

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

We spreken dan van een Fourier-sinusreeks.

Voorbeelden. 1) Zij  $f(x) = x$  voor  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

De functie  $f$  is oneven zodat  $a_n = 0$ , terwijl

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = -\frac{2}{n\pi} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{2}{n} (-1)^{n-1}.$$

Omdat  $f$  voldoet aan de Dirichlet-condities op  $(-\pi, \pi)$ , volgt met de hoofdstelling (3.1.9) voor de Fourierreeks van  $f$ :

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} = x \quad \text{voor } -\pi < x < \pi.$$

Voor  $x = \pm \pi$  is de som van de Fourierreeks 0, in overeenstemming met  $f(-\pi+) = -\pi$  en  $f(\pi-) = \pi$ .

Substitutie van  $x = \pi/2$  geeft

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4},$$

in overeenstemming met college Wiskunde 10, 4.5.14, voorbeeld 2; de reeks in het linkerlid is de machtreeks van arctan  $x$  met  $x = 1$  gesubstitueerd.

2) Zij  $f(x) = x^2$  voor  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

De functie  $f$  is even zodat  $b_n = 0$ , terwijl

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2x^3}{3\pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi} x^2 \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{4}{n^2} (-1)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

met gebruikmaking van het resultaat voor  $b_n$  uit voorbeeld 1.

Omdat  $f$  continu is op  $[-\pi, \pi]$  en voldoet aan de Dirichlet-condities, volgt voor de Fourierreeks van  $f$ :

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \quad \text{voor } -\pi \leq x \leq \pi.$$

Substitutie van  $x = \pi$ , resp.  $x = 0$  geeft

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

3) Zij de functie  $f$  gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{voor } -\pi < x < 0, \\ d & \text{voor } 0 < x < \pi, \\ \frac{1}{2}(c+d) & \text{voor } x = 0, x = \pm\pi, \end{cases}$$

waarbij  $c$  en  $d$  constanten zijn.

We berekenen de Fouriercoëfficiënten van  $f$ :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 c \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d \, dx = c + d ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 c \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d \cos nx \, dx = 0 , \quad n = 1, 2, 3, \dots ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 c \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d \sin nx \, dx =$$

$$= (c - d) \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} = \begin{cases} 0 & \text{voor } n \text{ even,} \\ -\frac{2(c-d)}{n\pi} & \text{voor } n \text{ oneven.} \end{cases}$$

Omdat  $f$  voldoet aan de Dirichlet-condities volgt met de hoofdstelling (3.1.9):

$$\frac{1}{2}(c+d) - \frac{2(c-d)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} c & \text{als } -\pi < x < 0 , \\ d & \text{als } 0 < x < \pi , \\ \frac{1}{2}(c+d) & \text{als } x = 0, x = \pm \pi . \end{cases}$$

4) Neem in het voorgaande voorbeeld  $c = -\pi/4$ ,  $d = \pi/4$ , dan volgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} -\pi/4 & \text{als } -\pi < x < 0 , \\ \pi/4 & \text{als } 0 < x < \pi , \\ 0 & \text{als } x = 0, x = \pm \pi . \end{cases}$$

We komen nog terug op de oorspronkelijke reeksontwikkeling 3.1.5.

3.1.10. Stelling. Laat de functies  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  een orthonormaal stelsel in  $R(-\pi, \pi)$  vormen en zij  $f \in R(-\pi, \pi)$ . Dan is de reeks  $\sum_{n=0}^{\infty} (f, \varphi_n)^2$  convergent en er geldt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (f, \varphi_n)^2 \leq (f, f) \quad (\text{ongelijkheid van Bessel}).$$

Opmerking. Vergelijk deze ongelijkheid met de ongelijkheid van Bessel (1.4.6) uit de lineaire algebra.

Bewijs. Voer in de korte notatie  $c_n := (f, \varphi_n)$ , dan is

$$\begin{aligned}
 & (f - \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n, f - \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n) = \\
 & = (f, f) - 2(f, \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n) + (\sum_{m=0}^N c_m \varphi_m, \sum_{n=0}^N c_n \varphi_n) = \\
 & = (f, f) - 2 \sum_{n=0}^N c_n (f, \varphi_n) + \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N c_m c_n (\varphi_m, \varphi_n) = \\
 & = (f, f) - 2 \sum_{n=0}^N c_n^2 + \sum_{n=0}^N c_n^2 = (f, f) - \sum_{n=0}^N c_n^2 .
 \end{aligned}$$

Het eerste lid van deze identiteit is  $\geq 0$ , zodat

$$\sum_{n=0}^N c_n^2 \leq (f, f) ,$$

geldig voor elke  $N$ . Daaruit volgt dat de reeks  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \varphi_n)^2$  convergent is met som  $\leq (f, f)$ .  $\square$

De voorgaande stelling geldt voor een willekeurig orthonormaal stelsel in  $R(-\pi, \pi)$ . We passen nu de stelling toe op het orthonormale stelsel ingevoerd in 3.1.2. Dan is volgens 3.1.6:

$$(f, \varphi_0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} a_0 , \quad (f, \varphi_{2n-1}) = \sqrt{\pi} a_n , \quad (f, \varphi_{2n}) = \sqrt{\pi} b_n ,$$

waarbij  $a_n, b_n$  de Fouriercoëfficiënten van  $f$  zijn. Substitutie in de ongelijkheid van Bessel leidt tot

3.1.11. 
$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx .$$

Uit de convergentie van de reeks in het linkerlid volgt dat  $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$  als  $n \rightarrow \infty$ . Dit levert de volgende

3.1.12. Stelling. Zij  $f \in R(-\pi, \pi)$ , dan is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0 , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0 .$$



Opmerking. We vermelden dat voor  $f \in R(-\pi, \pi)$  zelfs het gelijkteken geldt in 3.1.11:

3.1.13. 
$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (\text{gelijkheid van Parseval}).$$

Men bewijs van deze gelijkheid (onder zekere extra voorwaarden voor  $f$ ) wordt gegeven in 3.6.11.

Voorbeeld. 5) Pas de gelijkheid van Parseval toe op de Fourierreeks uit voorbeeld 1, dan volgt

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

in overeenstemming met het resultaat uit voorbeeld 2.

De voorgaande theorie der Fourierreeksen is in verschillende richtingen uit te breiden. Uit 3.1.4 volgt dat een functie  $f \in R(a, a+2\pi)$  eveneens te ontwikkelen is in een reeks naar de functies  $\varphi_n$ ; de hoofdstelling (3.1.9) blijft na passende modificatie van kracht. In de literatuur wordt ook wel het interval  $[0, 2\pi]$  en de functieruimte  $R(0, 2\pi)$  als uitgangspunt voor de Fourierreeks genomen.

Een verdere uitbreiding tot Fourierreeksen met periode  $p$  voor functies  $f \in R(-\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p)$  wordt besproken in 3.3.

Tenslotte kan men naast de Fourierreeks ook reeksontwikkelingen naar andere orthonormale stelsels beschouwen. Hierbij zal voor de coëfficiënten in de ontwikkeling weer de ongelijkheid van Bessel (3.1.10) gelden.

### 3.2. Bewijs van de hoofdstelling der Fourierreeksen

Als voorbereiding geven we eerst een tweetal hulpstellingen.

3.2.1. Lemma. 
$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nt = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t}.$$

Bewijs. We gebruiken een complexe schrijfwijze:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nt &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^N e^{int} = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i(N+1)t} - e^{it}}{e^{it} - 1} \right] = \\ &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{\frac{1}{2}it}}{2i \sin \frac{1}{2}t} \right] = \frac{1}{2} + \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t - \sin \frac{1}{2}t}{2 \sin \frac{1}{2}t} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t}. \end{aligned}$$

Deze afleiding is correct mits  $\sin \frac{1}{2}t \neq 0$ , i.e. mits  $t \neq 2m\pi$ ,  $m$  geheel.

Voor  $t = 2m\pi$  is de te onderzoeken som gelijk aan  $\frac{1}{2} + N$ . We definiëren dan

$$\left. \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} \right|_{t=2m\pi} := \lim_{t \rightarrow 2m\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} = N + \frac{1}{2}. \quad \square$$

3.2.2. Gevolg.  $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nt \right] dt = 1.$

3.2.3. Lemma. Zij  $-\pi \leq a < b \leq \pi$  en zij  $f$  (eigenlijk) integreerbaar over  $[a, b]$ , dan geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(n+\frac{1}{2})t dt = 0.$$

Bewijs. Voer in de functie  $g(t)$  gegeven door

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{als } a \leq t \leq b, \\ 0 & \text{als } -\pi \leq t < a \text{ en als } b < t \leq \pi, \end{cases}$$

dan is

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \sin(n+\frac{1}{2})t dt &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(n+\frac{1}{2})t dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos \frac{1}{2}t \sin nt dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin \frac{1}{2}t \cos nt dt. \end{aligned}$$

De laatste integralen naderen tot 0 als  $n \rightarrow \infty$  op grond van 3.1.12.  $\square$

3.2.4. Stelling (hoofdstelling der Fourierreeksen). Zij  $f \in R(-\pi, \pi)$  en periodiek voortgezet met periode  $2\pi$ . Indien  $f$  in  $\xi$  voldoet aan de Dirichlet-condities, dan is de Fourierreeks van  $f$  convergent in  $\xi$  met som  $\frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)]$ .

Bewijs. Zij  $S_N(\xi)$  de N-de partiële som van de Fourierreeks van  $f$  in  $\xi$ :

$$S_N(\xi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\xi + b_n \sin n\xi) .$$

Substitueer voor  $a_n$ ,  $b_n$  de integralen 3.1.6, dan ontstaat er

$$\begin{aligned} S_N(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{n=1}^N \left[ \frac{\cos n\xi}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin n\xi}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N (\cos n\xi \cos nx + \sin n\xi \sin nx) \right] f(x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(x-\xi) \right] f(x) dx . \end{aligned}$$

De integrand in de laatste integraal is periodiek met periode  $2\pi$ ; volgens de versleepstelling (3.1.3) geldt dan  $\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{\xi-\pi}^{\xi+\pi}$ . Stel in de aldus verkregen integraal  $x-\xi = t$ , dan volgt

$$S_N(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nt \right] f(\xi+t) dt .$$

Splits deze integraal in  $\int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi}$  en vervang in de eerste integraal  $t$  door  $-t$ . Dan ontstaat er

$$\begin{aligned} S_N(\xi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nt \right] [f(\xi+t) + f(\xi-t)] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} [f(\xi+t) + f(\xi-t)] dt , \end{aligned}$$

op grond van 3.2.1.

Vorm nu het verschil

$$\begin{aligned}
 S_N(\xi) - \frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)] &= \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} [f(\xi + t) + f(\xi - t)] dt - \frac{1}{2\pi} [f(\xi+) + f(\xi-)] \int_0^\pi \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} [f(\xi + t) - f(\xi+) + f(\xi - t) - f(\xi-)] dt,
 \end{aligned}$$

waarbij gebruik gemaakt is van 3.2.2.

Op de laatste integraal is het lemma 3.2.3 van toepassing. Schrijf daartoe

$$\begin{aligned}
 g(t) &:= \frac{f(\xi + t) - f(\xi+) + f(\xi - t) - f(\xi-)}{2 \sin \frac{1}{2}t} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \left[ \frac{f(\xi + t) - f(\xi+)}{t} + \frac{f(\xi - t) - f(\xi-)}{t} \right].
 \end{aligned}$$

De functie  $g$  is integreerbaar over  $[a, \pi]$  voor elke  $a \in (0, \pi]$ , terwijl  $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$  bestaat omdat de functie  $f$  voldoet aan de Dirichlet-condities in  $\xi$ . De functie  $g$  is dan integreerbaar over  $[0, \pi]$ . Met behulp van 3.2.3 volgt dan tenslotte

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(t) \sin(N + \frac{1}{2})t dt = 0, \quad \text{dus} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\xi) = \frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)],$$

i.e. de Fourierreeks van  $f$  is convergent in  $\xi$  met som  $\frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)]$ .  $\square$

### 3.3. Fourierreeksen met periode $p$ , complexe schrijfwijze voor Fourierreeksen

Beschouw de verzameling  $R(-\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p)$  van functies die gedefinieerd zijn op  $[-\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p]$  en integreerbaar zijn over  $[-\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p]$ . Door een simpele transformatie van de onafhankelijke variabele zijn nu de resultaten uit 3.1 over te dragen naar de functieruimte  $R(-\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p)$ . Ga daartoe uit van een functie  $f \in R(-\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p)$ . Onder de transformatie  $2\pi x = py$  zal  $f(x)$  overgaan in

$$3.3.1. \quad f(x) = f\left(\frac{py}{2\pi}\right) =: g(y)$$

met  $g \in R(-\pi, \pi)$ . De functie  $g$  is nu te ontwikkelen in een Fourierreeks met periode  $2\pi$ :

$$g(y) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny)$$

met Fouriercoëfficiënten  $a_n, b_n$  gegeven door

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos ny \, dy, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin ny \, dy.$$

Substitueer  $y = 2\pi x/p$ , dan gaan deze resultaten over in

3.3.2. 
$$a_n = \frac{2}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{p} \, dx, \quad b_n = \frac{2}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{p} \, dx,$$

3.3.3. 
$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{2n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{p}).$$

De coëfficiënten  $a_n, b_n$  als gegeven in 3.3.2, heten weer de Fouriercoëfficiënten van  $f$ . Het rechterlid van 3.3.3 heet de Fourierreeks (met periode  $p$ ) van  $f$ . De functies  $\cos(2n\pi x/p), \sin(2n\pi x/p)$  zijn namelijk periodiek met periode  $p$ , d.w.z. voor alle  $x \in \mathbb{R}$  geldt  $\varphi(x+p) = \varphi(x)$  waarbij  $\varphi(x) = \cos(2n\pi x/p)$  of  $\varphi(x) = \sin(2n\pi x/p)$ .

In geval van convergentie is de som van de Fourierreeks van  $f$  eveneens periodiek met periode  $p$ . We zullen daarom zo nodig  $f$  periodiek voortzetten met periode  $p$  door middel van de betrekking  $f(x+p) = f(x)$ . Hierbij wordt stilzwijgend verondersteld dat  $f(-\frac{1}{2}p) = f(\frac{1}{2}p)$ .

Indien  $f(x)$  voldoet aan de Dirichlet-condities in  $x = \xi$ , dan zal  $g(y)$ , als gedefinieerd in 3.3.1, voldoen aan de Dirichlet-condities in  $y = 2\pi\xi/p$ . Op de Fourierreeks van  $g$  is dan de hoofdstelling (3.1.9) van toepassing:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{2n\pi\xi}{p} + b_n \sin \frac{2n\pi\xi}{p}) = \frac{1}{2}[g(\frac{2\pi\xi}{p} +) + g(\frac{2\pi\xi}{p} -)].$$

Het linkerlid is tevens de Fourierreeks van  $f$  in  $\xi$ ; het rechterlid is over te voeren in  $\frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)]$ . De hoofdstelling blijft dus geldig voor de Fourierreeks (met periode  $p$ ) van  $f$ .

3.3.4. Stelling (hoofdstelling der Fourierreeksen). Zij  $f \in R(-\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p)$  en periodiek voortgezet met periode  $p$ . Indien  $f$  in  $\xi$  voldoet aan de Dirichlet-condities, dan is de Fourierreeks van  $f$  convergent in  $\xi$  met som  $\frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)]$ .

Analoog aan 3.1.3 is te bewijzen:

3.3.5. Stelling ("versleepstelling"). Zij  $f$  integreerbaar over  $[-\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p]$  en periodiek met periode  $p$ , dan geldt voor elke  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) dx .$$

Met behulp van deze stelling volgt dat ook een functie  $f \in R(a, a+p)$  te ontwikkelen is in een Fourierreeks met periode  $p$  van de gedaante 3.3.3. De hoofdstelling (3.3.4) blijft daarbij van kracht. De Fouriercoëfficiënten van  $f$  worden in dit geval gegeven door

$$a_n = \frac{2}{p} \int_a^{a+p} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{p} dx , \quad b_n = \frac{2}{p} \int_a^{a+p} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{p} dx .$$

Voorbeeld. 1) Zij  $f(x) = \cos x$  voor  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ .

Gevraagd wordt om de functie  $f$  te ontwikkelen in een Fourierreeks met periode  $\frac{1}{2}\pi$ . Bereken daartoe de Fouriercoëfficiënten van  $f$ :

$$a_0 = \frac{2}{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x dx = \frac{4}{\pi} ,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x \cos 4nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [\cos(4n+1)x + \cos(4n-1)x] dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n-1} \right) = - \frac{4}{\pi(16n^2 - 1)} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x \sin 4nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [\sin(4n+1)x + \sin(4n-1)x] dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n-1} \right) = \frac{16n}{\pi(16n^2 - 1)} . \end{aligned}$$

Omdat  $f$  voldoet aan de Dirichlet-condities op  $(0, \frac{1}{2}\pi)$ , volgt met de hoofdstelling voor de Fourierreeks van  $f$ :

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{\cos 4nx}{16n^2 - 1} + \frac{4n \sin 4nx}{16n^2 - 1} \right] = \cos x \quad \text{voor } 0 < x < \frac{1}{2}\pi$$

Voor  $x = 0$  en voor  $x = \frac{1}{2}\pi$  is de som van de Fourierreeks gelijk aan  $\frac{1}{2}[f(0+) + f(\frac{1}{2}\pi-)] = \frac{1}{2}$ ; er moet dus gelden

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

Splits  $1/(16n^2 - 1)$  in partiële breuken, dan ontstaat er

$$\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{2}{\pi} (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots) = \frac{1}{2},$$

in overeenstemming met het resultaat uit 3.1, voorbeeld 1.

Zij  $f \in R(0,p)$ , d.w.z. de functie  $f$  is gedefinieerd op  $[0,p]$  en integreerbaar over  $[0,p]$ . We wensen nu  $f$  te ontwikkelen in een Fourier-cosinusreeks, d.i. een Fourierreeks met louter cosinus-termen. Daartoe wordt  $f$  voortgezet tot een even functie op  $[-p,p]$  door middel van de definitie  $f(x) := f(-x)$  als  $-p \leq x < 0$ . De voortgezette functie  $f$  behoort tot  $R(-p,p)$  en is te ontwikkelen in een Fourierreeks met periode  $2p$ . Bepaal de Fouriercoëfficiënten van  $f$  door

$$a_n = \frac{2}{2p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{2n\pi x}{2p} dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{2n\pi x}{2p} dx,$$

terwijl  $b_n = 0$  omdat  $f$  even is. De Fourier-cosinusreeks van  $f$  luidt nu

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi x}{2p}.$$

De hoofdstelling (3.3.4) blijft geldig: indien  $f$  in  $\xi$  voldoet aan de Dirichlet-condities, dan is de Fourier-cosinusreeks van  $f$  convergent in  $\xi$  met som  $\frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)]$  als  $0 < \xi < p$ ,  $f(0+)$  als  $\xi = 0$ ,  $f(p-)$  als  $\xi = p$ ; ga dit na.

Evenzo kan men een functie  $f \in R(0,p)$  ontwikkelen in een Fourier-sinusreeks, d.i. een Fourierreeks met louter sinustermen. Daartoe dient  $f$  te worden voortgezet tot een oneven functie op  $[-p,p]$  door middel van de definitie  $f(x) := -f(-x)$  als  $-p \leq x < 0$ . Ontwikkel de voortgezette functie  $f$  in een

Fourierreeks met periode  $2p$ . Voor de Fouriercoëfficiënten van  $f$  vinden we:

$a_n = 0$  omdat  $f$  oneven is, terwijl

$$b_n = \frac{2}{2p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{2n\pi x}{2p} dx = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{2n\pi x}{2p} dx .$$

De Fourier-sinusreeks van  $f$  luidt dan

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2n\pi x}{2p} .$$

Ook nu geldt de hoofdstelling: indien  $f$  voldoet aan de Dirichlet-condities in  $\xi \in (0,p)$ , dan is de Fourier-sinusreeks van  $f$  convergent in  $\xi$  met som  $\frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)]$ . In  $x = 0$  en in  $x = p$  is steeds de Fourier-sinusreeks convergent met som  $0$ .

Opmerking. Blijkens het voorgaande is een functie  $f \in R(0,p)$  te ontwikkelen in (i) een Fourierreeks met periode  $p$ , (ii) een Fourier-cosinusreeks, (iii) een Fourier-sinusreeks. De drie reeksen zijn in het algemeen verschillend; ze hebben evenwel dezelfde som op  $(0,p)$ , aangenomen dat  $f$  op  $(0,p)$  aan de Dirichlet-condities voldoet. Let er voorts op dat de cosinus- en sinusreeks periode  $2p$  hebben.

Voorbeelden. 2) Zij  $f(x) = \sin x$  voor  $0 \leq x \leq \pi$ .

Gevraagd wordt  $f$  te ontwikkelen in een Fourier-cosinusreeks. We zetten de functie  $f$  voort tot een even functie op  $[-\pi, \pi]$ , met het resultaat:

$f(x) = |\sin x|$  voor  $-\pi \leq x \leq \pi$ . De Fourierreeks (met periode  $2\pi$ ) van de voortgezette functie  $f$  vormt nu de gevraagde Fourier-cosinusreeks.

Bepaal de Fouriercoëfficiënten van  $f$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1 + (-1)^n}{n+1} - \frac{1 + (-1)^n}{n-1} \right] = \begin{cases} 0 & \text{voor } n \text{ oneven, } n \neq 1, \\ -\frac{4}{\pi(n^2-1)} & \text{voor } n \text{ even;} \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = 0,$$

in het bijzonder  $a_0 = 4/\pi$ , terwijl  $b_n = 0$ .

Omdat de voortgezette functie  $f$  continu is op  $[-\pi, \pi]$  en voldoet aan de Dirichlet-condities, volgt met de hoofdstelling:



$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} = |\sin x| \quad \text{voor } -\pi \leq x \leq \pi .$$

Omdat linkerlid en rechterlid periodiek zijn met periode  $2\pi$ , geldt dit resultaat zelfs voor elke  $x$ .

3) Zij  $f(x) = x$  voor  $0 \leq x \leq 1$ .

Ontwikkel  $f$  in een Fourierreeks met periode 1. De Fouriercoëfficiënten worden dan gegeven door

$$a_0 = 2 \int_0^1 x \, dx = 1 ,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 x \cos 2n\pi x \, dx = \frac{1}{n\pi} x \sin 2n\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin 2n\pi x \, dx = 0 ,$$

$$b_n = 2 \int_0^1 x \sin 2n\pi x \, dx = -\frac{1}{n\pi} x \cos 2n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos 2n\pi x \, dx = -\frac{1}{n\pi} .$$

Omdat  $f$  voldoet aan de Dirichlet-condities geldt voor de Fourierreeks:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n} = x \quad \text{voor } 0 < x < 1 .$$

Vervolgens ontwikkelen we  $f$  in een Fourier-cosinusreeks (met periode 2).

De Fourier-coëfficiënten  $a_n^*$  worden dan bepaald door

$$a_0^* = 2 \int_0^1 x \, dx = 1 ,$$

$$a_n^* = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x \, dx = \frac{2}{n\pi} x \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x \, dx =$$

$$= -\frac{2}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0 & \text{voor } n \text{ even,} \\ -\frac{4}{n^2 \pi^2} & \text{voor } n \text{ oneven.} \end{cases}$$

Met behulp van de hoofdstelling volgt dat de Fourier-cosinusreeks convergent is voor  $0 \leq x \leq 1$  met som  $f(x)$ , zodat we vinden

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2} = x \quad \text{voor } 0 \leq x \leq 1 .$$

Tenslotte ontwikkelen we  $f$  in een Fourier-sinusreeks. De Fouriercoëfficiënten  $b_n^*$  worden dan bepaald door

$$b_n^* = 2 \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = -\frac{2}{n\pi} x \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x \, dx = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n-1} .$$

Op grond van de hoofdstelling geldt voor de Fourier-sinusreeks:

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin n\pi x = x \quad \text{voor } 0 \leq x < 1 .$$

Fourierreeksen vinden toepassing bij de beschrijving van fysische verschijnselen die periodiek zijn in de tijd of in de ruimte. Laat bijv.  $f(t)$  een "signaal" zijn dat periodiek is in de tijd  $t$  met periode of trillingstijd  $T$ , i.e.  $f(t+T) = f(t)$ . Dan is  $f(t)$  voor te stellen door de Fourierreeks met periode  $T$ :

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

waarin  $\omega = 2\pi/T$  de zg. grondfrequentie is. De  $n$ -de term van de Fourierreeks kan als volgt worden herschreven:

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t &= \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} [\cos \varphi_n \cos n\omega t - \sin \varphi_n \sin n\omega t] = \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\omega t + \varphi_n) , \end{aligned}$$

waarin voor de hoek  $\varphi_n$  geldt  $\tan \varphi_n = -b_n/a_n$ . De  $n$ -de term beschrijft nu een harmonische trilling met amplitude  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ , hoekfrequentie  $n\omega$  en fasehoek  $\varphi_n$ . Men noemt deze  $n$ -de term wel de  $n$ -de harmonische van het signaal  $f(t)$ . De hoekfrequentie van de opvolgende harmonischen is een geheel veelvoud van de grondfrequentie.

Tenslotte bespreken we nog de complexe schrijfwijze voor Fourierreeksen. Beschouw de Fourierreeks 3.3.3 en herschrijf de n-de term volgens

$$\begin{aligned} a_n \cos \frac{2n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{p} &= \\ &= \frac{1}{2} a_n \left\{ \exp \left[ \frac{2in\pi x}{p} \right] + \exp \left[ -\frac{2in\pi x}{p} \right] \right\} + \frac{1}{2i} b_n \left\{ \exp \left[ \frac{2in\pi x}{p} \right] - \exp \left[ -\frac{2in\pi x}{p} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) \exp \left[ \frac{2in\pi x}{p} \right] + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) \exp \left[ -\frac{2in\pi x}{p} \right]. \end{aligned}$$

Voer nu in de coëfficiënten

$$\begin{aligned} c_n := \frac{1}{2} (a_n - ib_n) &= \frac{1}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) \left[ \cos \frac{2n\pi x}{p} - i \sin \frac{2n\pi x}{p} \right] dx = \\ &= \frac{1}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) \exp \left[ -\frac{2in\pi x}{p} \right] dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{-n} := \frac{1}{2} (a_n + ib_n) &= \frac{1}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) \left[ \cos \frac{2n\pi x}{p} + i \sin \frac{2n\pi x}{p} \right] dx = \\ &= \frac{1}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) \exp \left[ \frac{2in\pi x}{p} \right] dx, \end{aligned}$$

$$c_0 := \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) dx,$$

waarbij de Fouriercoëfficiënten  $a_n$ ,  $b_n$  ontleend werden aan 3.3.2.

In complexe schrijfwijze neemt de Fourierreeks 3.3.3 dan de volgende vorm aan:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left[ \frac{2in\pi x}{p} \right]$$

met coëfficiënten

$$c_n = \frac{1}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f(x) \exp \left[ -\frac{2in\pi x}{p} \right] dx.$$

### 3.4. Fourierintegralen

Zij de functie  $f$  gedefinieerd op  $(-\infty, \infty)$  en zij  $f$  niet periodiek. De voorgaande theorie der Fourierreeksen is dan niet van toepassing op  $f$ . Men kan de functie  $f$  niet ontwikkelen in een Fourierreeks die overal op  $(-\infty, \infty)$  de functie  $f$  voorstelt. In plaats daarvan is  $f$  voor te stellen door een Fourierintegraal zoals we in deze paragraaf zullen afleiden. Deze voorstelling is van praktisch belang voor de beschrijving van fysische verschijnselen die niet periodiek zijn, bijv. tengevolge van het optreden van demping. Beschouw een functie  $f$  die gedefinieerd is op  $(-\infty, \infty)$  en integreerbaar is over elk eindig interval. We veronderstellen voorts dat  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  convergent is. Voer nu in de hulpfunctie  $f_c(x)$  gegeven door

$$f_c(x) = \begin{cases} f(x) & \text{voor } |x| \leq c, \\ 0 & \text{voor } |x| > c. \end{cases}$$

Beschouw  $f_c$  op het interval  $[-\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}p]$  met  $\frac{1}{2}p > c$ , en ontwikkel  $f_c$  in een Fourierreeks met periode  $p$ . Laat de functie  $f$  in  $\xi \in (-c, c)$  voldoen aan de Dirichlet-condities, dan voldoet ook  $f_c$  aan de Dirichlet-condities in  $\xi$ . Op grond van de hoofdstelling (3.3.4) geldt dan voor de genoemde Fourierreeks van  $f_c$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi\xi}{p} + b_n \sin \frac{2n\pi\xi}{p} \right) = \\ = \frac{1}{2}[f_c(\xi+) + f_c(\xi-)] = \frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)]. \end{aligned}$$

Hierin worden de Fouriercoëfficiënten  $a_n$ ,  $b_n$  gegeven door

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f_c(x) \cos \frac{2n\pi x}{p} dx = \frac{2}{p} \int_{-c}^c f(x) \cos \frac{2n\pi x}{p} dx, \\ b_n &= \frac{2}{p} \int_{-\frac{1}{2}p}^{\frac{1}{2}p} f_c(x) \sin \frac{2n\pi x}{p} dx = \frac{2}{p} \int_{-c}^c f(x) \sin \frac{2n\pi x}{p} dx. \end{aligned}$$

Substitueer deze coëfficiënten in de Fourierreeks, dan ontstaat er

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)] &= \\ &= \frac{1}{p} \int_{-c}^c f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p} \int_{-c}^c f(x) \left[ \cos \frac{2n\pi\xi}{p} \cos \frac{2n\pi x}{p} + \sin \frac{2n\pi\xi}{p} \sin \frac{2n\pi x}{p} \right] dx = \\ &= \frac{1}{p} \int_{-c}^c f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p} \int_{-c}^c f(x) \cos \frac{2n\pi(x-\xi)}{p} dx . \end{aligned}$$

Voer nu in de notatie

$$F(y) := \int_{-c}^c f(x) \cos y(x-\xi) dx ,$$

dan is  $F(y)$  even in  $y$  en het voorgaande resultaat kan als volgt worden herschreven:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)] &= \frac{1}{p} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p} F\left(\frac{2n\pi}{p}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{p} F\left(\frac{2n\pi}{p}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{p} \left[ \dots + F\left(-\frac{4\pi}{p}\right) + F\left(-\frac{2\pi}{p}\right) + F(0) + F\left(\frac{2\pi}{p}\right) + F\left(\frac{4\pi}{p}\right) + \dots \right] . \end{aligned}$$

De laatste som is op te vatten als een soort Riemann-som behorend bij de functie  $F(y)$  en het interval  $(-\infty, \infty)$  verdeeld in deelintervallen

$[2(k-1)\pi/p, 2k\pi/p]$  ( $k$  geheel) met lengte  $2\pi/p$ . Intuïtief verwachten we dat voor  $p \rightarrow \infty$  deze som overgaat in de integraal

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(y) dy ;$$

bedenk dat  $F$  even is. We vinden dan

$$\frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-c}^c f(x) \cos y(x-\xi) dx .$$

Hierin is de parameter  $c$  willekeurig. Neem nu  $c \rightarrow \infty$ , dan ontstaat er

3.4.1. 
$$\frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos y(x-\xi) dx .$$

Het rechterlid heet de Fourierintegraal van  $f$ .

Merk op dat de binnenste integraal  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos y(x-\xi) dx$  convergent is omdat  $|f(x) \cos y(x-\xi)| \leq |f(x)|$  voor alle  $x \in \mathbb{R}$  en (volgens onderstelling)  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  convergent is.

De voorgaande afleiding van de Fourierintegraal is verre van streng en voornamelijk heuristisch bedoeld. Zonder verder streng bewijs vatten we de resultaten samen in de volgende stelling, verkregen uit 3.4.1 na uitwerking van de factor  $\cos y(x-\xi)$ .

3.4.2. Stelling (integraalstelling van Fourier). Zij de functie  $f$  gedefinieerd op  $(-\infty, \infty)$ , zij  $f$  integreerbaar over elk eindig interval en zij  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  convergent. Indien  $f$  in  $\xi$  voldoet aan de Dirichlet-condities, dan geldt

$$\frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)] = \int_0^{\infty} [A(y) \cos y\xi + B(y) \sin y\xi] dy$$

met

$$A(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos yx dx, \quad B(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin yx dx.$$

Deze stelling vormt het analogon van de hoofdstelling der Fourierreeksen. Vergelijken we de Fourierintegraal met de Fourierreeks (3.1.7, 3.3.3), dan blijkt dat het  $\Sigma$ -teken in de reeks vervangen is door een  $\int$ -teken, terwijl de rol van de Fouriercoëfficiënten  $a_n, b_n$  is overgenomen door de functies  $A(y), B(y)$ .

Ook voor de Fourierintegraal kan men een complexe schrijfwijze invoeren. Ga daartoe uit van 3.4.1 en schrijf

$$\frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iy(x-\xi)} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iy(x-\xi)} dx.$$

Omschrijf in de buitenste integralen  $\int_0^{\infty}$  met  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N$ , vervang in de tweede integraal  $y$  door  $-y$  en neem beide integralen samen, dan ontstaat er

$$3.4.3. \quad \frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)] = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iy(x-\xi)} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{-iy\xi} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iyx} dx.$$

Indien de tweevoudige oneigenlijke integraal

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iyx} dx$$

bestaat, is kennelijk  $\frac{1}{2}[f(\xi+) + f(\xi-)]$  hieraan gelijk. We merken echter op, dat deze integraal divergent kan zijn in een punt  $\xi$  waar  $f$  aan de Dirichlet-condities voldoet; zie bijvoorbeeld voorbeeld 1) en wel in de punten  $\pm 1$ .

In zo'n geval moet men het resultaat blijven omschrijven met behulp van  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N$  deze limiet wordt wel de "Cauchy-Hoofdwaarde" van de integraal  $\int_{-\infty}^{\infty}$  genoemd.

Geleid door 3.4.3 definiëren we nu de Fourier transformatie:

De Fourier-getransformeerde  $F(y)$  van een functie  $f(x)$  wordt gegeven door

$$3.4.4. \quad F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iyx} dx.$$

Uit 3.4.3, met  $\xi$  vervangen door  $x$ , volgt dan de inverse transformatie, geldig voor die punten  $x$  waarin  $f$  aan de Dirichlet-condities voldoet:

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N F(y) e^{-ixy} dy,$$

en dus

$$3.4.5. \quad \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-ixy} dy,$$

wanneer bovendien de laatste oneigenlijke integraal bestaat. We merken op, dat er verschillende versies van de definitie van Fourier-getransformeerde bestaan. Hieronder geven we de formulering in een veel gebruikte andere versie met de bijbehorende formulering van de inverse transformatie.

Zoals reeds opgemerkt vindt de Fourierintegraal toepassing bij de beschrijving van fysische verschijnselen die niet periodiek zijn in de tijd. Laat weer  $f(t)$  een "signaal" zijn dat afhangt van de tijd  $t$ . Vervang nu in 3.4.4, 3.4.5 de variabelen  $x$  en  $y$  door resp.  $t$  en  $-\omega$ , en  $F(-\omega)$ , door  $F(\omega)$ , dan ontstaat er

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

wanneer de laatste oneigenlijke integraal bestaat.

Blijkens de laatste formule is het signaal  $f(t)$  op te vatten als een superpositie van harmonische trillingen  $F(\omega)e^{i\omega t}$  met hoekfrequentie  $\omega$ . De functie  $F(\omega)$  heet het (complexe) frequentiespectrum van  $f(t)$ ;  $F(\omega)$  is te schrijven als  $F(\omega) = |F(\omega)|e^{i\varphi(\omega)}$  met amplitude  $|F(\omega)|$  en fase  $\varphi(\omega)$ . De mate waarin de component met hoekfrequentie  $\omega$  bijdraagt tot het signaal, wordt bepaald door de amplitude  $|F(\omega)|$ .

Voorbeelden. 1) Zij de functie  $f$  gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{voor } |x| = 1, \\ 0 & \text{voor } |x| > 1. \end{cases}$$

De functie  $f$  voldoet overal aan de Dirichlet-condities, terwijl de definitie van  $f$  zo gekozen is dat  $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = f(x)$  voor alle  $x \in \mathbb{R}$ .

We bepalen de Fourier-getransformeerde van  $f$ :

$$F(y) = \int_{-1}^1 e^{iyx} dx = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{iy} = \frac{2 \sin y}{y}.$$

Omgekeerd zal nu gelden

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} e^{-ixy} dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} [e^{-ixy} + e^{ixy}] dy = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin y \cos xy}{y} dy. \end{aligned}$$

Substitueer hierin  $x = 0$ , resp.  $x = 1$ , dan vinden we

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}, \text{ resp. } 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin y \cos y}{y} dy = \int_0^{\infty} \frac{\sin 2y}{y} dy = \frac{\pi}{2}.$$

Merk op dat deze twee integralen in elkaar over te voeren zijn.

2) Zij de functie  $f$  gegeven door

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0, \\ e^{-\alpha t} e^{i\omega_0 t} & \text{voor } t \geq 0, \end{cases}$$

met  $\alpha > 0$ . De functie  $f(t)$  beschrijft een gedempte trilling. Zoals in de trillingsleer gebruikelijk, is hierbij de complexe schrijfwijze gevolgd; de "echte" trilling wordt beschreven door  $\text{Re } f(t)$ .

Merk op dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha},$$



zodat  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  inderdaad convergent is.

Het frequentiespectrum van  $f(t)$  wordt nu gegeven door

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\alpha + i(\omega - \omega_0)} .$$

Omdat  $f(t)$  continu is en voldoet aan de Dirichlet-condities voor  $t > 0$ , geldt dan omgekeerd

$$e^{-\alpha t} e^{i\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\alpha + i(\omega - \omega_0)} d\omega \quad \text{voor } t > 0 .$$

De amplitude

$$|F(\omega)| = \left[ \frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

bereikt een maximum  $1/\alpha$  voor  $\omega = \omega_0$ . Dit maximum zal des te meer gepro-  
nonceerd zijn naarmate de dempingsconstante  $\alpha$  kleiner is. Het spectrum  
vertoont dan steeds meer een "spectraallijn" in  $\omega = \omega_0$ .

### 3.5. Uniforme convergentie van rijen van functies

Ter inleiding definiëren we eerst de begrippen supremum en infimum van een verzameling, en norm van een functie.

Zij de verzameling  $V \subset \mathbb{R}$  niet leeg en naar boven begrensd, d.w.z. er be-  
staat een getal  $G \in \mathbb{R}$  zodat voor alle  $x \in V$  geldt  $x \leq G$ . Het getal  $G$  heet  
een bovengrens van  $V$ . Voor elke  $p > 0$  is dan ook  $G+p$  een bovengrens van  $V$ .  
Intuïtief is duidelijk dat onder de bovengrenzen van  $V$  een kleinste voor-  
komt. Deze noemen we de kleinste bovengrens of het supremum van  $V$ .

Analoog is te beschouwen een niet-lege verzameling  $V \subset \mathbb{R}$  die naar beneden  
begrensd is, d.w.z. er bestaat een getal  $g \in \mathbb{R}$  zodat voor alle  $x \in V$  geldt  
 $x \geq g$ . Het getal  $g$  heet een ondergrens van  $V$ . Onder de ondergrenzen van  $V$   
zal een grootste voorkomen die we de grootste ondergrens of het infimum van  
 $V$  noemen.

3.5.1. Definitie. Het supremum van een verzameling  $V \subset \mathbb{R}$  (notatie:  $\sup V$ ) is een  
getal  $M$  zodanig dat:

- (i) Voor alle  $x \in V$  geldt  $x \leq M$ .
- (ii) Bij elke  $\varepsilon > 0$  is er een  $x_0 \in V$  zodat  $x_0 > M - \varepsilon$ .

Het infimum van een verzameling  $V \subset \mathbb{R}$  (notatie:  $\inf V$ ) is een getal  $m$  zodanig dat:

- (i) Voor alle  $x \in V$  geldt  $x \geq m$ .
- (ii) Bij elke  $\varepsilon > 0$  is er een  $x_0 \in V$  zodat  $x_0 < m + \varepsilon$ .

Ga na dat een eventueel supremum/infimum door deze definitie eenduidig bepaald is. Zonder bewijs geven we de volgende stelling die hierboven reeds toegelicht is.

Stelling. Een niet-lege verzameling die naar boven begrensd is, heeft een supremum. Een niet-lege verzameling die naar beneden begrensd is, heeft een infimum. Een niet-lege, begrensde verzameling heeft een supremum en een infimum.

Het supremum en infimum van een verzameling hoeven niet tot de verzameling te behoren. Indien dit wel het geval is, dan is  $\sup V$  tevens het maximum van  $V$  en  $\inf V$  tevens het minimum van  $V$ .

Voorbeelden. Zij  $V = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ , dan is  $\sup V = \max V = 1$ ,  $\inf V = 0$ , terwijl  $V$  geen minimum heeft.

Voor  $V = (0, 1)$  is  $\sup V = 1$ ,  $\inf V = 0$ ;  $V$  heeft geen maximum en geen minimum. Zij  $V = [0, 1]$ , dan is  $\sup V = \max V = 1$  en  $\inf V = \min V = 0$ .

Vergelijken met het college Wiskunde 10, 2.1.1 leert ons: Een functie  $f$  is begrensd op een verzameling  $V \subset \text{DOM } f$  dan en slechts dan als de verzameling  $f(V) = \{f(x) \mid x \in V\}$  begrensd is.

Uit deze definitie volgt eenvoudig: Als een functie  $f$  begrensd is op een verzameling  $V \subset \text{DOM } f$ , dan is ook  $|f|$  begrensd op  $V$ .

3.5.2. Definitie. Zij de functie  $f$  begrensd op het interval  $I \subset \text{DOM } f$ , dan wordt de norm van  $f$  op  $I$  (notatie:  $\|f\|_I$ ) gedefinieerd door

$$\|f\|_I := \sup\{|f(x)| \mid x \in I\}.$$

Gemakshalve zullen we meestal de index  $I$  weglaten en spreken over de norm van  $f$ :  $\|f\|$ . Uit het verband is dan wel duidelijk op welk interval de norm bedoeld is.

Uit de definitie 3.5.1 van supremum volgt voor  $\|f\|$ :

- (i) Voor alle  $x \in I$  geldt  $|f(x)| \leq \|f\|$ .
- (ii) Bij elke  $\epsilon > 0$  is er een  $x_0 \in I$  zodat  $|f(x_0)| > \|f\| - \epsilon$ .

Eigenschappen van de norm:

- 1)  $\|f\| \geq 0$ ,  $\|f\| = 0$  dan en slechts dan als  $f = 0$ ,
- 2)  $\|rf\| = |r|\|f\|$ ,
- 3)  $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$  (driehoeksongelijkheid),

voor alle  $r \in \mathbb{R}$  en alle  $f, g$  die begrensd zijn op  $I$ .

Verifieer deze eigenschappen.

Opmerking. Zij  $I = [a, b]$  en  $f$  continu op  $[a, b]$ , dan is ook  $|f|$  continu op  $[a, b]$ . Volgens de stelling van Weierstrass (college Wiskunde 10, 2.4.19) heeft dan  $|f|$  op  $[a, b]$  een globaal maximum, d.w.z. er bestaat een punt  $c \in [a, b]$  zodat  $|f(x)| \leq |f(c)|$  voor alle  $x \in [a, b]$ . In dat geval is  $\|f\| = |f(c)|$ .

Ook algemeen geldt: Als de functie  $|f|$  op het interval  $I$  een globaal maximum heeft, dan is  $\|f\|$  gelijk aan dat maximum.

Beschouw een rij van functies  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , kortweg genoteerd als  $(f_n)$ . We voeren nu in de begrippen puntsgewijze convergentie en uniforme convergentie van een rij  $(f_n)$ .

3.5.3. Definitie. Een rij  $(f_n)$  heet puntsgewijs convergent op een interval  $I$  met limiet  $f$ , indien  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  voor alle  $x \in I$ .

3.5.4. Definitie. Een rij  $(f_n)$  heet uniform convergent op een interval  $I$  met limiet  $f$ , indien  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_I = 0$ .

3.5.5. Stelling. Een uniform convergente rij is tevens puntsgewijs convergent.

Bewijs. Zij de rij  $(f_n)$  uniform convergent op het interval  $I$  met limiet  $f$ , dan is  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ . Met de ongelijkheid

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| \text{ voor alle } x \in I,$$

volgt dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{voor alle } x \in I.$$

Dus de rij  $(f_n)$  is puntsgewijs convergent op  $I$  met limiet  $f$ . □

Opmerking. Het omgekeerde van deze stelling geldt in het algemeen niet. Een puntsgewijs convergente rij hoeft niet uniform convergent te zijn; zie de nog te bespreken voorbeelden.

We zullen het onderscheid tussen puntsgewijze en uniforme convergentie nog verduidelijken door uitwerking van de definities 3.5.3, 3.5.4.

Laat de rij  $(f_n)$  puntsgewijs convergent zijn op het interval  $I$  met limiet  $f$ , dan is  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  voor alle  $x \in I$ . Maak nu gebruik van de definitie van convergentie van een rij, zie college Wiskunde 10, 1.2.1. Voor alle  $\epsilon > 0$  en alle  $x \in I$  is er een getal  $N = N(\epsilon, x)$  zodanig dat

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{voor } n > N(\epsilon, x) \text{ en } x \in I.$$

Het getal  $N$  hangt af van  $\epsilon$  en van  $x$ , vandaar de notatie  $N(\epsilon, x)$ .

Laat nu de rij  $(f_n)$  uniform convergent zijn op het interval  $I$  met limiet  $f$ , dan is  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ . Maak gebruik van dezelfde limietdefinitie als boven. Voor alle  $\epsilon > 0$  is er een getal  $N = N(\epsilon)$  zodanig dat

$$\|f_n - f\| < \epsilon \quad \text{voor } n > N(\epsilon).$$

Met de definitie van norm volgt hieruit

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| < \epsilon \quad \text{voor } n > N(\epsilon) \text{ en } x \in I.$$

Merk op dat  $N = N(\epsilon)$  nu alleen afhangt van  $\epsilon$  en niet meer van  $x$ .

De laatste ongelijkheid is te schrijven als

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon \quad \text{voor } n > N(\epsilon) \text{ en } x \in I.$$

Dit betekent dat de grafiek van  $f_n(x)$  geheel verloopt binnen een "band" met breedte  $2\epsilon$  en symmetrisch gelegen om de grafiek van  $f(x)$ .

In concrete voorbeelden zullen we de uniforme convergentie van een rij  $(f_n)$  met limiet  $f$  als volgt vaststellen. Bereken zo mogelijk  $\|f_n - f\|$  en verifieer of  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ . Indien  $\|f_n - f\|$  niet expliciet te berekenen is of indien de uitkomst van een ingewikkelde vorm is, trachten we een bovengrens  $M_n$  te

bepalen zodanig dat  $\|f_n - f\| \leq M_n$  en  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ . Als dit lukt, dan is ook  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$  en de rij  $(f_n)$  is uniform convergent met limiet  $f$ .

Voorbeelden. 1) Zij  $f_n(x) = (1-x)^n$ , beschouwd op  $[0,1]$ .

De rij  $(f_n)$  is puntsgewijs convergent op  $[0,1]$  met limiet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } x = 0, \\ 0 & \text{voor } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Beschouw nu het verschil

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x = 0, \\ (1-x)^n & \text{voor } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

dan is  $\|f_n - f\| = 1$ . Immers, er geldt:

(i) Voor alle  $x \in [0,1]$  is  $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$ .

(ii) Bij elke  $\varepsilon > 0$  is er een  $x_0 \in [0,1]$  zodat  $|f_n(x_0) - f(x_0)| > 1 - \varepsilon$ ;  
neem bijv.  $x_0 = 1 - (1 + \varepsilon)^{-1/n}$ , dan is  $f_n(x_0) - f(x_0) = (1 - x_0)^n =$   
 $= (1 + \varepsilon)^{-1} > 1 - \varepsilon$ .

Hieruit volgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 1 \neq 0$ , zodat de rij  $(f_n)$  niet uniform convergent is op  $[0,1]$ .

Beschouw de rij  $(f_n)$  vervolgens op  $[\delta,1]$  met  $0 < \delta < 1$ . Daar de verschil-functie  $f_n - f$  continu is op  $[\delta,1]$ , geldt

$$\|f_n - f\|_{[\delta,1]} = \max_{x \in [\delta,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in [\delta,1]} (1-x)^n = (1-\delta)^n.$$

Omdat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-\delta)^n = 0$ , is de rij  $(f_n)$  wel uniform convergent op  $[\delta,1]$  met limiet  $f = 0$ .

2) Zij  $f_n(x) = x(1-x)^n$ , beschouwd op  $[0,1]$ .

De rij  $(f_n)$  is puntsgewijs convergent op  $[0,1]$  met limiet  $f(x) = 0$ ,  $x \in [0,1]$ .

Bepaal  $\|f_n - f\| = \|f_n\|$ . Omdat  $f_n$  continu is op  $[0,1]$ , is  $\|f_n\|$  gelijk aan het maximum van  $|f_n| = f_n$  op  $[0,1]$ . Bereken de afgeleide

$$f'_n(x) = (1-x)^n - nx(1-x)^{n-1} = [1 - (n+1)x](1-x)^{n-1},$$

dan blijkt dat  $f_n(x)$  op  $[0,1]$  een maximum heeft in  $x = 1/(n+1)$ . We vinden dus

$$\|f_n\| = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Omdat  $\|f_n\| \rightarrow 0$  als  $n \rightarrow \infty$ , is de rij  $(f_n)$  uniform convergent op  $[0,1]$  met limiet 0.

3) Zij  $f_n(x) = nx(1-x)^n$ , beschouwd op  $[0,1]$ .

De rij  $(f_n)$  is puntsgewijs convergent op  $[0,1]$  met limiet  $f(x) = 0$ ,  $x \in [0,1]$ .

Analoog aan voorbeeld 2 is nu

$$\|f_n - f\| = \|f_n\| = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1};$$

de rij  $(f_n)$  is dus niet uniform convergent op  $[0,1]$ .

De rij  $(f_n)$  is wel uniform convergent op  $[\delta,1]$  met  $0 < \delta < 1$ . Merk daartoe op dat de functie  $f_n(x)$  een maximum heeft in  $x = 1/(n+1)$  en monotoon dalend is voor  $x \geq 1/(n+1)$ . Zij nu  $n$  zo groot dat  $1/(n+1) < \delta$ , dan is

$$\|f_n - f\|_{[\delta,1]} = \max_{x \in [\delta,1]} f_n(x) = f_n(\delta) = n\delta(1-\delta)^n$$

en  $\lim_{n \rightarrow \infty} n\delta(1-\delta)^n = 0$ , waaruit de uniforme convergentie volgt.

4) Zij  $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$  beschouwd op  $[0,1]$ .

De rij  $(f_n)$  is puntsgewijs convergent op  $[0,1]$  met limiet  $f(x) = 0$ ,  $x \in [0,1]$ .

Analoog aan de voorbeelden 2 en 3 is nu

$$\|f_n - f\| = \frac{n^2}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow \infty \text{ als } n \rightarrow \infty.$$

De rij  $(f_n)$  is niet uniform convergent op  $[0,1]$ .

5) Beschouw de rij van functies  $f_n(x)$  gegeven door

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x = 0, \\ \frac{x^n \log x}{x^n + 1} & \text{voor } x > 0. \end{cases}$$

De rij  $(f_n)$  is puntsgewijs convergent op  $[0,\infty)$  met limiet

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 \leq x \leq 1, \\ \log x & \text{voor } x > 1. \end{cases}$$

We onderzoeken nu de verschilfunctie  $f_n(x) - f(x)$ . Voor  $0 < x \leq 1$  geldt

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^n \log x}{x^n + 1} \right| \leq x^n |\log x| \leq \max_{x \in (0,1]} x^n |\log x| = \frac{e^{-1}}{n},$$

waarbij het maximum van  $x^n |\log x|$  bepaald is door berekening van de afgeleide. Voor  $x > 1$  geldt

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^n \log x}{x^n + 1} - \log x \right| = \frac{\log x}{x^n + 1} = \frac{1}{n} \frac{\log x^n}{x^n + 1} < \frac{1}{n} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} < \frac{1}{n},$$

waarbij gebruik gemaakt is van de ongelijkheid  $\log(1+t) < t$  geldig voor  $t > 0$ .

Uit de voorgaande ongelijkheden en  $f_n(0) - f(0) = 0$  volgt  $\|f_n - f\| < \frac{1}{n}$  en dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

De rij  $(f_n)$  is dus uniform convergent op  $[0, \infty)$  met limiet  $f$ .

6) Beschouw de rij van functies  $f_n(x)$  gegeven door

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x = 0, \\ nx^2 \sin \frac{1}{nx} & \text{voor } x \neq 0. \end{cases}$$

De rij  $(f_n)$  is puntsgewijs convergent op  $(-\infty, \infty)$  met limiet  $f(x) = x$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ .

Vorm nu de verschilfunctie  $f_n(x) - f(x)$  en maak gebruik van de formule van Taylor toegepast op de sinus-functie, zie college Wiskunde 10, 4.6.2. Dan vinden we

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| nx^2 \sin \frac{1}{nx} - x \right| = nx^2 \left| \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{nx} \right| = \frac{nx^2}{2} \left| \sin \frac{\theta}{nx} \right| \frac{1}{n^2 x^2} \leq \frac{1}{2n}$$

geldig voor  $x \neq 0$ ; hierin is  $\theta \in (0,1)$ . Voor  $x = 0$  is  $f_n(0) - f(0) = 0$ . Uit deze resultaten volgt

$$\|f_n - f\| \leq \frac{1}{2n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0,$$

zodat de rij  $(f_n)$  uniform convergent is op  $(-\infty, \infty)$  met limiet  $f$ .

Het begrip uniforme convergentie speelt een belangrijke rol bij de volgende vraagstelling. Zij de rij  $(f_n)$  convergent met limiet  $f$  en laat de functies  $f_n$  een bepaalde eigenschap bezitten, bijv. continuïteit, integreerbaarheid of differentieerbaarheid. Dan doet zich de vraag voor of deze eigenschap ook geldig blijft voor de limiet-functie  $f$ . Puntsgewijze convergentie van de rij  $(f_n)$  is daarvoor in het algemeen niet genoeg: zo is in voorbeeld 1 elk der functies  $f_n$  continu in 0 maar de limiet  $f$  is niet continu in 0. We dienen dus naar een "sterkere" vorm van convergentie te zoeken. Het begrip uniforme convergentie voorziet nu juist in die behoefte. Het zal blijken dat uniforme convergentie van de rij  $(f_n)$  een voldoende voorwaarde vormt opdat de genoemde eigenschappen van  $f_n$  behouden blijven bij limietovergang. We geven hierover een drietal stellingen.

3.5.6. Stelling. Zij de rij  $(f_n)$  uniform convergent op het interval  $I$  met limiet  $f$ . Indien voor elke  $n \in \mathbb{N}$  de functie  $f_n$  continu is in  $a \in I$ , dan is ook de limiet  $f$  continu in  $a$ .

Bewijs. Ga uit van de ongelijkheid

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \leq \\ &\leq 2\|f_n - f\| + |f_n(x) - f_n(a)|, \end{aligned}$$

waarbij  $x \in I$ .

Kies een getal  $\varepsilon > 0$ . Wegens  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$  is er een getal  $N$  zodat voor  $n > N$  geldt

$$\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fixeer nu  $n$  op een waarde  $> N$ . Daar  $f_n$  continu is in  $a$ , is er een getal  $\delta > 0$  zodanig dat voor  $(x \in I) \wedge (|x - a| < \delta)$  geldt

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Combineer de voorgaande ongelijkheden tot

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{voor } (x \in I) \wedge (|x - a| < \delta).$$

Dit betekent dat  $f$  continu is in  $a$ . □



Kort samengevat luidt het resultaat van 3.5.6:

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x),$$

d.w.z. de twee limiet-operaties mogen worden verwisseld.

Opmerkingen. 1) De stelling 3.5.6 heeft als gevolg: Indien een rij van continue functies convergent is op een interval met discontinue limiet, dan is de convergentie van de rij niet uniform. Toegepast op voorbeeld 1 waar de limiet  $f$  niet continu is in 0, volgt nog eens dat de rij  $(f_n)$  niet uniform convergent is op  $[0,1]$ .

2) De voorwaarde van uniforme convergentie in 3.5.6 is een voldoende voorwaarde voor de geldigheid van de stelling. De voorwaarde is zeker niet een nodige voorwaarde, d.w.z. ook voor een niet-uniform convergente rij van continue functies kan de limiet toch wel continu zijn, zie voorbeelden 3 en 4.

3.5.7. Stelling. Zij de rij  $(f_n)$  uniform convergent op het interval  $[a,b]$  met limiet  $f$ . Indien de functies  $f_1, f_2, f_3, \dots$  en  $f$  integreerbaar zijn over  $[a,b]$ , dan geldt:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx ;$$

$$2) \text{ de rij } \left( \int_a^x f_n(t) dt \right) \text{ is uniform convergent op } [a,b] \text{ met limiet } \int_a^x f(t) dt .$$

Bewijs. 1) Kies een getal  $\epsilon > 0$ . Wegens  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$  is er een getal  $N$  zodat voor  $n > N$  geldt

$$\|f_n - f\| < \frac{\epsilon}{b-a} .$$

Dan is vervolgens

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \|f_n - f\| (b-a) < \epsilon$$

voor  $n > N$ . Daar  $\epsilon$  willekeurig was is het gestelde bewezen.

2) Voer in de notaties

$$g_n(x) := \int_a^x f_n(t) dt, \quad g(x) := \int_a^x f(t) dt, \quad (x \in [a, b]).$$

Dan geldt voor alle  $x \in [a, b]$ ,

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq \|f_n - f\| (b - a).$$

Daaruit volgt

$$\|g_n - g\| \leq (b - a) \|f_n - f\|, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\| = 0,$$

zodat de rij  $(g_n)$  uniform convergent is op  $[a, b]$  met limiet  $g$ .  $\square$

Het resultaat van 3.5.7, punt 1 is ook als volgt te schrijven:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx,$$

d.w.z. limiet- en integraalteken mogen worden verwisseld.

De voorwaarde van uniforme convergentie in 3.5.7 is weer voldoende voorwaarde doch zeker geen nodige voorwaarde voor de geldigheid van de stelling.

Voorbeeld. 7) Blijkens voorbeeld 3 is de rij  $(f_n)$  met  $f_n(x) = nx(1-x)^n$  niet uniform convergent op  $[0, 1]$ . Omdat

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 nx(1-x)^n dx = \frac{n}{(n+1)(n+2)},$$

geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0.$$

Ook is

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0 .$$

Beschouw vervolgens de rij  $(f_n)$  met  $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$ ; zoals afgeleid in voorbeeld 4 is deze rij niet uniform convergent op  $[0,1]$ . In dit geval geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1 ,$$

terwijl

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0 .$$

3.5.8. Stelling. Zij de functie  $f_n$  continu differentieerbaar op het interval  $(a,b)$  voor elke  $n \in \mathbb{N}$ , zij voor zekere  $c \in (a,b)$  de rij  $(f_n(c))$  convergent, en zij de rij  $(f'_n)$  uniform convergent op  $(a,b)$  met limiet  $\varphi$ . Dan geldt:

- 1) de rij  $(f_n)$  is uniform convergent op  $(a,b)$ ;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x)$  is continu differentieerbaar op  $(a,b)$  en  $f'(x) = \varphi(x)$ .

Bewijs. 1) Met behulp van 3.5.7, punt 2 volgt dat de rij van functies

$$\int_c^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(c) , \quad (x \in (a,b))$$

uniform convergent is op  $(a,b)$  met limiet  $\int_c^x \varphi(t) dt$ . Zij nu  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) =: \ell$ , dan is de rij  $(f_n)$  uniform convergent op  $(a,b)$  met limiet

$$\ell + \int_c^x \varphi(t) dt =: f(x) .$$

2) Merk op dat  $\varphi$  continu is op  $(a,b)$  op grond van 3.5.6. Volgens college Wiskunde 10, 3.4.11 is dan  $f$  differentieerbaar op  $(a,b)$  met afgeleide  $f'(x) = \varphi(x)$ . □

Kort samengevat luidt het resultaat van 3.5.8, punt 2:

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) ,$$

d.w.z. limietovergang en differentiatie mogen worden verwisseld.

In 3.5.8 wordt uitdrukkelijk geëist de uniforme convergentie van de rij  $(f'_n)$  der afgeleiden. Uniforme convergentie van de rij  $(f_n)$  zelf is niet voldoende zoals blijkt uit het volgende voorbeeld.

Voorbeeld. 8) Beschouw de rij van functies  $f_n(x)$ , gedefinieerd op  $(-1,1)$  en gegeven door

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} [-1 + (1+x)^n] & \text{voor } -1 < x < 0, \\ \frac{1}{n} [1 - (1-x)^n] & \text{voor } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

De rij  $(f_n)$  is puntsgewijs convergent op  $(-1,1)$  met limiet  $f(x) = 0$ ,  $x \in (-1,1)$ . De rij  $(f_n)$  is tevens uniform convergent op  $(-1,1)$  wegens  $\|f_n - f\| = 1/n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ .

Voor elke  $n \in \mathbb{N}$  is de functie  $f_n$  continu differentieerbaar op  $(-1,1)$  met afgeleide

$$f'_n(x) = \begin{cases} (1+x)^{n-1} & \text{voor } -1 < x < 0, \\ 1 & \text{voor } x = 0, \\ (1-x)^{n-1} & \text{voor } 0 < x < 1. \end{cases}$$

De rij  $(f'_n)$  van afgeleiden is puntsgewijs convergent op  $(-1,1)$  met limiet  $\varphi$ , gegeven door

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } -1 < x < 0, \\ 1 & \text{voor } x = 0, \\ 0 & \text{voor } 0 < x < 1. \end{cases}$$

De rij  $(f'_n)$  is niet uniform convergent op  $(-1,1)$ ; vergelijk voorbeeld 1. Merk nu op dat  $f'(0) \neq \varphi(0)$  is.

### 3.6. Uniforme convergentie van reeksen van functies

Uit het college Wiskunde 10, 4.2.2 citeren we:

Een reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heet convergent met som  $S$  indien de rij der partiële sommen  $S_N := \sum_{n=1}^N a_n$  convergent is met limiet  $S$ .

Beschouw nu een reeks van functies  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ; de N-de partiële som van de reeks wordt gegeven door  $S_N(x) := \sum_{n=1}^N u_n(x)$ .

Analoog aan 3.5.3, 3.5.4 voeren we in de begrippen puntsgewijze convergentie en uniforme convergentie van een reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ .

3.6.1. Definitie. Een reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  heet puntsgewijs convergent op een interval I met som S(x), indien de rij  $(S_N(x))$  puntsgewijs convergent op I is met limiet S(x), d.w.z. indien  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = S(x)$  voor alle  $x \in I$ .

3.6.2. Definitie. Een reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  heet uniform convergent op een interval I met som S(x), indien de rij  $(S_N(x))$  uniform convergent op I is met limiet S(x), d.w.z. indien  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N - S\|_I = 0$ .

Men kan nu eenvoudig de stellingen uit 3.5 herformuleren voor reeksen.

3.6.3. Stelling. Een uniform convergente reeks is tevens puntsgewijs convergent.

3.6.4. Stelling. Zij de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  uniform convergent op het interval I met som S(x). Indien voor elke  $n \in \mathbb{N}$  de functie  $u_n$  continu is in  $a \in I$ , dan is ook de som S continu in a.

3.6.5. Stelling (termsgewijs integreren). Zij de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  uniform convergent op het interval  $[a, b]$  met som S(x). Indien de functies  $u_1, u_2, u_3, \dots$  en S integreerbaar zijn over  $[a, b]$ , dan geldt:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx ;$$

$$2) \text{ de reeks } \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt \text{ is uniform convergent op } [a, b] \text{ met som } \int_a^x S(t) dt .$$

3.6.6. Stelling (termsgewijs differentiëren). Zij de functie  $u_n(x)$  continu differentieerbaar op het interval  $(a,b)$  voor elke  $n \in \mathbb{N}$ , zij voor zekere  $c \in (a,b)$  de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$  convergent, en zij de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  uniform convergent op  $(a,b)$ . Dan geldt:

1) de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  is uniform convergent op  $(a,b)$ ;

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  is continu differentieerbaar op  $(a,b)$  en

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Een belangrijk hulpmiddel om uniforme convergentie van een reeks aan te tonen wordt gegeven in de volgende stelling.

3.6.7. Stelling (kenmerk van Weierstrass). Zij  $|u_n(x)| \leq a_n$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$  en alle  $x$  in een interval  $I$ . Indien de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  convergent is, dan is de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  absoluut en uniform convergent op  $I$ .

Bewijs. Met behulp van de vergelijkingsstelling (zie college Wiskunde 10, 4.4.16) volgt dat de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  absoluut convergent en dus convergent is voor alle  $x \in I$ .

Zij nu  $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ,  $S_N(x) := \sum_{n=1}^N u_n(x)$  en  $A := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Dan geldt voor alle  $x \in I$ :

$$|S_N(x) - S(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = A - \sum_{n=1}^N a_n.$$

Daaruit volgt

$$\|S_N - S\| \leq A - \sum_{n=1}^N a_n$$

en omdat  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = A$ , is  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N - S\| = 0$ .

De reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  is dus uniform convergent op  $I$  met som  $S(x)$ . □

Voorbeelden. 1) In 3.1, voorbeeld 2 is afgeleid de Fourierreeks

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \quad \text{voor } -\pi \leq x \leq \pi .$$

Deze reeks is uniform convergent op  $[-\pi, \pi]$  op grond van 3.6.7; immers

$$\left| (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

en de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  is convergent.

Door termgewijze integratie van de Fourierreeks volgt

$$x^3 - \pi^2 x = 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3} \quad \text{voor } -\pi \leq x \leq \pi .$$

Deze termgewijze integratie is geoorloofd op grond van 3.6.5. De resulterende reeks is opnieuw uniform convergent op  $[-\pi, \pi]$ .

2) Zij  $u_n(x) = \frac{x^3}{1 + n^2 x^4}$  gedefinieerd op  $(-\infty, \infty)$ .

Via berekening van de afgeleide blijkt dat  $u_n(x)$  een maximum heeft in  $x = 3^{\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{2}}$  en een minimum in  $x = -3^{\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{2}}$ . We vinden nu

$$|u_n(x)| \leq u_n\left(\frac{3^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{3^{3/4}}{4n^{3/2}} \quad \text{voor alle } x \in (-\infty, \infty) .$$

Daar de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  convergent is, is de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  uniform convergent op  $(-\infty, \infty)$ .

Uit het college Wiskunde 10, 4.5 citeren we:

Een reeks van de vorm  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  heet een machtreeks. Bij elke machtreeks bestaat er een getal  $R$  zodanig dat de machtreeks absoluut convergent is voor  $|x| < R$  en divergent voor  $|x| > R$ . Het getal  $R$  heet de convergentiestraal van de machtreeks. Eventueel kan  $R = 0$  of  $R = \infty$  zijn.

3.6.8. Stelling. Een machtreeks  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  met convergentiestraal  $R \neq 0$  is uniform convergent op elk interval  $[a, b] \subset (-R, R)$ .

Bewijs. Voer in  $p := \max\{|a|, |b|\}$  dan is  $|a_n x^n| \leq |a_n| p^n$  voor alle  $x \in [a, b]$ .

Omdat  $p < R$ , is de reeks  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| p^n$  convergent. Met het kenmerk van

Weierstrass (3.6.7) volgt dan dat de reeks  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  uniform convergent is op  $[a, b]$ . □

Opmerking. Uit 3.6.8, 3.6.4 en 3.6.5 volgt: Een machtreeks  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  met convergentiestraal  $R \neq 0$  mag termsgewijs worden geïntegreerd over elk interval  $[a, b] \subset (-R, R)$ ; vergelijk dit met college Wiskunde 10, 4.5.10.

We geven tenslotte nog een stelling over uniforme convergentie van Fourierreeksen.

3.6.9. Definitie. Een functie  $f$  heet stuksgewijs glad op een interval  $[a, b]$  indien

- (i)  $f$  continu is op  $[a, b]$ ;
- (ii)  $f$  continu differentieerbaar is op  $(a, b)$ , eventueel met uitzondering van een eindig aantal punten  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) waarbij  $f'(c_j+)$  en  $f'(c_j-)$  bestaan;
- (iii)  $f'(a+)$  en  $f'(b-)$  bestaan.

3.6.10. Stelling. Zij de functie  $f$  stuksgewijs glad op  $[-\pi, \pi]$  en zij  $f(-\pi) = f(\pi)$ , dan is de Fourierreeks van  $f$  uniform convergent op  $[-\pi, \pi]$  met som  $f$ .

Bewijs. De functie  $f$  is continu op  $[-\pi, \pi]$  en voldoet overal aan de Dirichletcondities. Volgens de hoofdstelling (3.1.9) geldt dan voor de Fourierreeks van  $f$ :

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x) \quad \text{voor } -\pi \leq x \leq \pi .$$

Beschouw nu de Fourierreeks van  $f'$ ,

$$f'(x) \sim \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) ,$$

waarin de Fouriercoëfficiënten  $\alpha_n, \beta_n$  gegeven worden door

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx , \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx .$$



Herleid deze integralen door partiële integratie als volgt. Volgens het gegeven van de stelling is  $f$  continu differentieerbaar op  $(-\pi, \pi)$ , eventueel met uitzondering van een eindig aantal punten  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) waarbij  $f'(c_j+)$  en  $f'(c_j-)$  bestaan. Splits dan de integraal over  $[-\pi, \pi]$  in integralen over elk der intervallen  $[-\pi, c_1]$ ,  $[c_j, c_{j+1}]$  ( $j = 1, 2, \dots, m-1$ ) en  $[c_m, \pi]$ , en integreer partieel:

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{c_1} f'(x) \cos nx \, dx + \\
 &+ \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{\pi} \int_{c_j}^{c_{j+1}} f'(x) \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{c_m}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx = \\
 &= \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{c_1} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{c_1} f(x) \sin nx \, dx + \\
 &+ \sum_{j=1}^{m-1} \left[ \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \Big|_{c_j}^{c_{j+1}} + \frac{n}{\pi} \int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x) \sin nx \, dx \right] + \\
 &+ \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \Big|_{c_m}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{c_m}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \\
 &= \frac{1}{\pi} f(c_1) \cos nc_1 - \frac{(-1)^n}{\pi} f(-\pi) + \\
 &+ \sum_{j=1}^{m-1} \left[ \frac{1}{\pi} f(c_{j+1}) \cos nc_{j+1} - \frac{1}{\pi} f(c_j) \cos nc_j \right] + \\
 &+ \frac{(-1)^n}{\pi} f(\pi) - \frac{1}{\pi} f(c_m) \cos nc_m + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \\
 &= \frac{(-1)^n}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = nb_n .
 \end{aligned}$$

Merk op dat hierbij de stoktermen telkens twee aan twee tegen elkaar wegval-  
len. Analoog is af te leiden

$$\beta_n = -\frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = -n a_n .$$

Hiermee zijn de coëfficiënten  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  uitgedrukt in  $a_n$ ,  $b_n$ ; merk op dat  $\alpha_0 = 0$ .  
Maak nu gebruik van de ongelijkheid van Bessel (3.1.11), toegepast op de  
Fouriercoëfficiënten  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  van  $f'$ , dan is

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 \, dx .$$

De reeks in het linkerlid is gelijk aan

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2)$$

en de laatste reeks is dus convergent.

Beschouw nu de algemene term van de Fourierreeks van  $f$ . Voor  $-\pi \leq x \leq \pi$   
geldt

$$\begin{aligned} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| &\leq |a_n| + |b_n| = \frac{1}{n} n |a_n| + \frac{1}{n} n |b_n| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n^2} + n^2 a_n^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n^2} + n^2 b_n^2 \right] = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} n^2 (a_n^2 + b_n^2) , \end{aligned}$$

waarbij de laatste ongelijkheid is verkregen met behulp van  $pq \leq \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ .

Daar de reeksen  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  en  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2)$  convergent zijn, volgt met het  
kenmerk van Weierstrass (3.6.7) dat de Fourierreeks van  $f$  uniform convergent  
is op  $[-\pi, \pi]$ . □

Voorbeeld. 3) De functie  $f(x) = x^2$  is stuksgewijs glad op  $[-\pi, \pi]$  en  
 $f(-\pi) = f(\pi)$ . De Fourierreeks van  $f$  is dus uniform convergent op  $[-\pi, \pi]$  met  
som  $f$ , zoals ook reeds gevonden in voorbeeld 1.

Met behulp van 3.6.10 is de gelijkheid van Parseval (zie 3.1.13) eenvoudig  
te bewijzen.

3.6.11. Stelling. Zij de functie  $f$  stuksgewijs glad op  $[-\pi, \pi]$  en zij  $f(-\pi) = f(\pi)$ ,  
dan geldt voor de Fouriercoëfficiënten  $a_n$ ,  $b_n$  van  $f$ :

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (\text{gelijkheid van Parseval}).$$

Bewijs. Volgens 3.6.10 is de Fourierreeks van  $f$  uniform convergent op  $[-\pi, \pi]$  met som  $f$ , dus

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{voor } -\pi \leq x \leq \pi.$$

Bereken nu

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[ \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx = \\ &= \frac{a_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx + \frac{b_n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right] = \\ &= \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \end{aligned}$$

waarbij de termgewijze integratie geoorloofd is op grond van de uniforme convergentie van de reeks.

Hiermee is de gelijkheid van Parseval bewezen. □

Opmerking. Zoals reeds opgemerkt in 3.1.13 geldt de gelijkheid van Parseval ook onder de zwakkere voorwaarde  $f \in R(-\pi, \pi)$ , d.w.z.  $f$  is gedefinieerd op  $[-\pi, \pi]$  en (eigenlijk) integreerbaar over  $[-\pi, \pi]$ .

Voorbeeld. 4) Pas de gelijkheid van Parseval toe op de Fourierreeks uit voorbeeld 1, dan volgt

$$\frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{5}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

### 3.7. Het verschijnsel van Gibbs

In 3.1, voorbeeld 4 is afgeleid de Fourierreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{voor } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{voor } x = 0, x = \pi. \end{cases}$$

De som van de reeks

$$S(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{voor } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{voor } x = 0, x = \pi, \end{cases}$$

is niet continu in  $x = 0$  en in  $x = \pi$ . De Fourierreeks is daarom niet uniform convergent op  $[0, \pi]$ .

We onderzoeken nu de partiële som  $S_N(x)$  van de reeks, gegeven door

$$S_N(x) := \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

De afgeleide  $S'_N(x)$  is expliciet te bepalen met behulp van een complexe schrijfwijze:

$$\begin{aligned} S'_N(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2n+1)x = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(2n+1)x} = \operatorname{Re} \frac{e^{i(2N+1)x} - e^{ix}}{e^{2ix} - 1} \\ &= \operatorname{Re} \frac{e^{2iNx} - 1}{2i \sin x} = \frac{\sin 2Nx}{2 \sin x}, \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Deze afgeleide is gelijk aan 0 in  $x = m\pi/2N$ ,  $m = 1, 2, \dots, 2N-1$ . In deze punten heeft  $S_N(x)$  extremen, en wel lokale maxima in  $x = m\pi/2N$  met  $m$  oneven en lokale minima in  $x = m\pi/2N$  met  $m$  even.

Men kan nagaan dat het grootste maximum optreedt in  $x = \pi/2N$ . Dit globale maximum van  $S_N(x)$  op  $[0, \pi]$  wordt dan gegeven door

$$S_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi}{2N}}{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\pi}{N} \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{N}}{(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{N}}.$$

De laatste som is op te vatten als een Riemann-som behorend bij de functie  $t^{-1} \sin t$  en het interval  $[0, \pi]$  verdeeld in  $N$  gelijke deelintervallen met lengte  $\pi/N$ . Voor  $N \rightarrow \infty$  zal deze som overgaan in een integraal:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = 0.92596\dots,$$

waarbij de waarde van de integraal ontleend is aan een tabel. De grafiek van  $S_N(x)$  op  $[0, \pi]$  vertoont een eerste, tevens hoogste top voor  $x = \pi/2N$ . Als  $N \rightarrow \infty$  zal de abscis  $\pi/2N$  tot 0 naderen terwijl de hoogte van de top nadert tot 0.926, een waarde die 18% groter is dan  $\pi/4$ . Men noemt dit verschijnsel dat algemeen optreedt bij Fourierreeksen van discontinue functies, het verschijnsel van Gibbs.

We zetten nog eens naast elkaar

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt > \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{\pi}{4} \quad \text{voor vaste } x \in (0, \pi).$$

Deze resultaten zijn niet met elkaar in strijd omdat het hier om twee verschillende limieten gaat. Het verschijnsel van Gibbs is dan ook niet in strijd met de puntsgewijze convergentie van  $S_N(x)$  naar  $\pi/4$  op  $(0, \pi)$ . Wel blijkt dat de convergentie van de rij  $(S_N(x))$ , en daarmee de convergentie van de Fourierreeks steeds "slechter" wordt, naarmate  $x$  dichter bij 0 ligt (of dichter bij  $\pi$ ). Een steeds groter aantal termen moet in aanmerking worden genomen opdat de partiële som een "goede" benadering vormt voor de som van de reeks.

## Hoofdstuk 4. Differentiaalvergelijkingen

### 4.1. Lineaire stelsels differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

We beschouwen een stelsel van  $n$  gewone differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) , \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) , \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) , \end{cases}$$

of, in vectornotatie,

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \underline{f}(x, \mathbf{y}) .$$

Hierin is  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  een onbekende vectorfunctie van  $x$ . De vectorfunctie  $\underline{f}$  is een afbeelding van  $\mathbb{R}^{n+1}$  in  $\mathbb{R}^n$  met definitieverzameling  $\text{DOM } \underline{f} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

Zij de vectorfunctie  $\mathbf{y}(x)$  gedefinieerd en differentieerbaar op het interval  $(a, b)$ , dan heet  $\mathbf{y}(x)$  een oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen op  $(a, b)$ , indien  $(x, \mathbf{y}(x)) \in \text{DOM } \underline{f}$  en  $d\mathbf{y}/dx = \underline{f}(x, \mathbf{y}(x))$  voor alle  $x \in (a, b)$ .

Een stelsel van  $n$  differentiaalvergelijkingen van de eerste orde heeft in het algemeen meerdere oplossingen. Indien alle oplossingen van het stelsel kunnen worden voorgesteld door

$$\mathbf{y} = \underline{\varphi}(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

met  $n$  vrije parameters  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , dan heet  $\underline{\varphi}(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  de algemene oplossing van het stelsel. Substitueren we hierin voor  $C_1, C_2, \dots, C_n$  bepaalde getalwaarden, dan vinden we een zg. particuliere oplossing van het stelsel. Essentieel is dat elke oplossing van het stelsel op deze wijze te verkrijgen is. De algemene oplossing bevat dus alle oplossingen als bijzonder geval. Een stelsel differentiaalvergelijkingen als boven wordt vaak vergezeld door  $n$  beginvoorwaarden van de vorm  $y_1(a) = b_1, y_2(a) = b_2, \dots, y_n(a) = b_n$ , ofte-

wel  $y(a) = b$ , waaraan de oplossing moet voldoen. Door deze voorwaarden worden in het algemeen de parameters  $C_1, C_2, \dots, C_n$  vastgelegd.

Een gewone differentiaalvergelijking van de n-de orde

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

is te herleiden tot een stelsel van n differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. Stel daartoe

$$y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \dots, y_n = y^{(n-1)},$$

dan voldoen de componentfuncties  $y_1, y_2, \dots, y_n$  aan het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3, \\ \text{-----} \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ \frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{array} \right.$$

Resultaten voor stelsels zijn daardoor over te dragen naar de bijbehorende differentiaalvergelijkingen van hogere orde.

Een belangrijke klasse van stelsels wordt gevormd door de lineaire stelsels differentiaalvergelijkingen. In de notatie voor stelsels zullen we de letters  $y, x$  vervangen door  $x, t$ . De algemene vorm van een lineair stelsel differentiaalvergelijkingen is dan

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \text{-----} \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{array} \right.$$

of, in vectornotatie,

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\underline{x} + \underline{f}(t) .$$

Hierin is  $A(t) = [a_{ij}(t)]$  een  $(n \times n)$ -matrix waarvan de elementen continue functies van  $t$  zijn, terwijl  $\underline{f}(t)$  een continue vectorfunctie  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  is. Indien  $\underline{f}(t) = \underline{0}$  voor alle  $t$  dan heet het stelsel homogeen, anders inhomogeen. Zonder bewijs vermelden we de volgende existentiestelling:

4.1.1. Stelling. Zij  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  en zij  $T$  een positief getal. Dan heeft het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\underline{x} + \underline{f}(t)$$

een oplossing  $\underline{\varphi}(t)$  op het interval  $[0, T]$  met beginwaarde  $\underline{\varphi}(0) = \underline{x}_0$ .

De oplossing genoemd in deze stelling is eenduidig bepaald. Om dit te bewijzen maken we gebruik van de volgende hulpresultaten.

Lemma 1. Zij  $h: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  een continue niet-negatieve functie. Als er een  $\alpha \geq 0$  bestaat zo dat

$$h(t) \leq \alpha \int_0^t h(\tau) d\tau \quad (0 \leq t \leq T),$$

dan is  $h(t) = 0$  voor  $0 \leq t \leq T$ .

Bewijs. De functie

$$H(t) := e^{-\alpha t} \int_0^t h(\tau) d\tau$$

is continu differentieerbaar en niet-negatief op  $[0, T]$ . Er geldt

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= -\alpha H(t) + e^{-\alpha t} h(t) \leq -\alpha H(t) + \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t h(\tau) d\tau = \\ &= -\alpha H(t) + \alpha H(t) = 0. \end{aligned}$$

De functie  $H(t)$  is dus niet-stijgend op  $[0, T]$ . Daar  $H(0) = 0$ , volgt hieruit dat  $H(t) \leq 0$  op  $[0, T]$ . Omdat anderzijds  $H(t)$  niet-negatief is, moeten we concluderen dat  $H(t) = 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ). Dan is ook  $\int_0^t h(\tau) d\tau = 0$ . Na differentiatie volgt  $h(t) = 0$  voor  $0 \leq t \leq T$ . □



Lemma 2. Zij  $A(t)$  een  $n \times n$ -matrix waarvan de elementen  $a_{ij}(t)$  continue functies zijn op het interval  $[0, T]$ . Dan bestaat er een getal  $M \geq 0$  zo dat voor elke  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  en voor elke  $t \in [0, T]$  geldt

$$|A(t)\underline{x}| \leq M|\underline{x}|.$$

Bewijs. Omdat de functies  $a_{ij}(t)$  continu zijn op  $[0, T]$  bestaan er constanten  $\gamma_{ij}$  zo dat  $|a_{ij}(t)| \leq \gamma_{ij}$ . Zij  $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}$ .

Als  $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$  de standaardbasis is in  $\mathbb{R}^n$ , dan is  $\underline{x} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{e}_i$  en  $A(t)\underline{x} = \sum_{i=1}^n x_i A(t)\underline{e}_i$ .

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} |A(t)\underline{x}| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |A(t)\underline{e}_i| \leq |\underline{x}| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ji}(t)| \leq \\ &\leq |\underline{x}| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} = M|\underline{x}|. \end{aligned} \quad \square$$

4.1.2. Stelling. Zij  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  en  $T > 0$ . Dan heeft het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A(t)\underline{x}(t) + \underline{f}(t)$$

precies één oplossing  $\underline{\varphi}(t)$  op  $[0, T]$  die voldoet aan  $\underline{\varphi}(0) = \underline{x}_0$ .

Bewijs van de eenduidigheid: Veronderstel dat  $\underline{\varphi}(t)$  en  $\underline{\psi}(t)$  beide oplossingen zijn en dat  $\underline{\varphi}(0) = \underline{\psi}(0) = \underline{x}_0$ . Dan voldoet  $\underline{\eta}(t) := \underline{\varphi}(t) - \underline{\psi}(t)$  aan

$$\frac{d\underline{\eta}}{dt} = A(t)\underline{\eta}, \quad \underline{\eta}(0) = \underline{0}.$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{d}{dt} |\underline{\eta}(t)|^2 = \frac{d}{dt} (\underline{\eta}(t), \underline{\eta}(t)) = 2(\underline{\eta}(t), \frac{d\underline{\eta}}{dt}) = 2(\underline{\eta}(t), A(t)\underline{\eta}(t)).$$

Integreer van 0 tot  $t$  en gebruik dat  $\underline{\eta}(0) = \underline{0}$ :

$$|\underline{\eta}(t)|^2 = 2 \int_0^t (\underline{\eta}(\tau), A(\tau)\underline{\eta}(\tau)) d\tau \leq 2M \int_0^t |\underline{\eta}(\tau)|^2 d\tau,$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz en lemma 2:

$$(\underline{\eta}(\tau), A(\tau)\underline{\eta}(\tau)) \leq |\underline{\eta}(\tau)| \cdot |A(\tau)\underline{\eta}(\tau)| \leq M |\underline{\eta}(\tau)|^2.$$

Uit lemma 1 volgt nu dat  $|\underline{\eta}(t)|^2 = 0$ , d.w.z.  $\underline{\eta}(t) = \underline{0}$ . Dus  $\underline{\varphi}(t) = \underline{\psi}(t)$   $\square$

Beschouw nu het homogene lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A(t)\underline{x} .$$

Laat de vectorfuncties  $\underline{\varphi}(t)$  en  $\underline{\psi}(t)$  oplossingen zijn van dit stelsel, dan is ook elke lineaire combinatie  $r\underline{\varphi}(t) + s\underline{\psi}(t)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , een oplossing van het stelsel. Immers,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (r\underline{\varphi}(t) + s\underline{\psi}(t)) &= r \frac{d\underline{\varphi}}{dt} + s \frac{d\underline{\psi}}{dt} = rA(t)\underline{\varphi}(t) + sA(t)\underline{\psi}(t) = \\ &= A(t)[r\underline{\varphi}(t) + s\underline{\psi}(t)] . \end{aligned}$$

De oplossingen van een homogeen lineair stelsel vormen dus een vectorruimte. Functies  $\underline{\varphi}_1(t), \dots, \underline{\varphi}_m(t)$ , gedefinieerd op een interval  $[0, T]$ , zijn in deze vectorruimte afhankelijk als er getallen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , niet alle gelijk aan nul, bestaan zo dat

$$\lambda_1 \underline{\varphi}_1(t) + \dots + \lambda_m \underline{\varphi}_m(t) = \underline{0} \quad (0 \leq t \leq T).$$

Een eenvoudig criterium voor de afhankelijkheid van oplossingen (en dus ook voor de onafhankelijkheid) geeft de volgende eigenschap.

Lemma 3. Laat  $\underline{\varphi}_1(t), \dots, \underline{\varphi}_m(t)$  oplossingen zijn van  $\frac{d\underline{x}}{dt} = A(t)\underline{x}(t)$  op  $[0, T]$ . Dan zijn  $\underline{\varphi}_1(t), \dots, \underline{\varphi}_m(t)$  afhankelijk dan en slechts dan als de beginwaarden  $\underline{\varphi}_1(0), \dots, \underline{\varphi}_m(0)$  afhankelijke vectoren zijn in  $\mathbb{R}^n$ .

Bewijs.

(i) Stel dat  $\underline{\varphi}_1(t), \dots, \underline{\varphi}_m(t)$  afhankelijk zijn. Dan zijn er getallen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , niet alle gelijk aan nul, zo dat voor alle  $t \in [0, T]$  geldt

$$\lambda_1 \underline{\varphi}_1(t) + \dots + \lambda_m \underline{\varphi}_m(t) = \underline{0}.$$

I.h.b. geldt dit voor  $t = 0$ . D.w.z.

$$\lambda_1 \underline{\varphi}_1(0) + \dots + \lambda_m \underline{\varphi}_m(0) = \underline{0} ,$$

waaruit volgt dat  $\underline{\varphi}_1(0), \dots, \underline{\varphi}_m(0)$  afhankelijk zijn.

(ii) Veronderstel nu dat  $\underline{\varphi}_1(0), \dots, \underline{\varphi}_m(0)$  afhankelijk zijn, d.w.z. dat er getallen  $\mu_1, \dots, \mu_m$  bestaan, niet alle gelijk aan nul, zo dat

$$\mu_1 \underline{\varphi}_1(0) + \dots + \mu_m \underline{\varphi}_m(0) = \underline{0}.$$

De functie  $\underline{\psi}(t)$  gedefinieerd door

$$\underline{\psi}(t) := \mu_1 \underline{\varphi}_1(t) + \dots + \mu_m \underline{\varphi}_m(t)$$

is een lineaire combinatie van  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  en dus ook een oplossing. Verder geldt  $\underline{\psi}(0) = \underline{0}$ . Daar ook de functie die identiek gelijk aan  $\underline{0}$  is, een oplossing is met beginwaarde gelijk aan  $\underline{0}$ , volgt uit de eenduidigheid van oplossingen met gegeven beginwaarden (4.1.2), dat  $\underline{\psi}(t) = \underline{0}$  voor alle  $t \in [0, T]$ . D.w.z.  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$  zijn afhankelijk.  $\square$

Uit het voorafgaande kan men onmiddellijk het volgende afleiden:

4.1.3. Stelling. Een homogeen lineair stelsel van  $n$  differentiaalvergelijkingen,  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ , met  $A(t)$  continu op het interval  $[0, T]$ , bezit  $n$  lineair onafhankelijke oplossingen  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ . De algemene oplossing van het stelsel wordt gegeven door

$$\underline{x} = C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t) + \dots + C_n \varphi_n(t),$$

waarin  $C_1, C_2, \dots, C_n$  willekeurige constanten zijn. De dimensie van de oplossingsruimte is dus  $n$ .

Bewijs. Kies een basis  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$  van  $\mathbb{R}^n$ . Laat  $\varphi_k(t)$  de oplossing zijn met  $\varphi_k(0) = \underline{x}_k$ . Uit lemma 3 volgt dat  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$  onafhankelijk zijn. Het is duidelijk dat iedere lineaire combinatie

$$\underline{x}(t) = C_1 \varphi_1(t) + \dots + C_n \varphi_n(t)$$

een oplossing is. We moeten laten zien dat ook elke oplossing in deze gedaante kan worden geschreven. Zij  $\underline{\psi}(t)$  een oplossing en zij  $\underline{\psi}(0) = \underline{x}_0$ . De vectoren  $\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_n$  ( $n+1$  stuks) zijn afhankelijk in  $\mathbb{R}^n$ . Derhalve zijn ook  $\underline{\psi}, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  afhankelijk (lemma 3):

$$\lambda_0 \underline{\psi}(t) + \lambda_1 \varphi_1(t) + \dots + \lambda_n \varphi_n(t) = \underline{0} \quad (0 \leq t \leq T),$$

waarbij niet alle  $\lambda_k$ 's gelijk aan nul zijn. Daar  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  onafhankelijk zijn kan niet  $\lambda_0 = 0$  gelden. Als we  $C_k := -\lambda_k / \lambda_0$  definiëren, dan vinden we

$$\underline{\psi}(t) = C_1 \varphi_1(t) + \dots + C_n \varphi_n(t). \quad \square$$

Uit 4.1.3. volgt dat de algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking  $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$  bekend is, zodra  $n$  onafhankelijke oplossingen  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$  berekend zijn. Men noemt  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$  dan een fundamenteelsysteem van oplossingen.

De oplossing van een inhomogeen lineair stelsel differentiaalvergelijkingen  $\frac{d\underline{x}}{dt} = A(t)\underline{x} + \underline{f}(t)$  is terug te brengen tot die van het bijbehorende homogene lineaire stelsel  $\frac{d\underline{x}}{dt} = A(t)\underline{x}$ .

4.1.4. Stelling. De algemene oplossing van een inhomogeen lineair stelsel differentiaalvergelijkingen is gelijk aan een particuliere oplossing van het inhomogene lineaire stelsel plus de algemene oplossing van het bijbehorende homogene lineaire stelsel.

Opmerking. In het college Wiskunde 10, 6.3.3, werd dezelfde stelling geformuleerd voor de enkele lineaire differentiaalvergelijking van de n-de orde.

Bewijs. Beschouw het inhomogene lineaire stelsel

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A(t)\underline{x} + \underline{f}(t)$$

en zij  $\underline{x} = \underline{\varphi}_p(t)$  een particuliere oplossing van dit stelsel.

Laat de algemene oplossing van het bijbehorende homogene lineaire stelsel

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A(t)\underline{x}$$

gegeven zijn door

$$\underline{x} = \underline{\varphi}_{\text{hom}}(t) = C_1 \underline{\varphi}_1(t) + C_2 \underline{\varphi}_2(t) + \dots + C_n \underline{\varphi}_n(t),$$

waarin  $C_1, C_2, \dots, C_n$  willekeurige constanten zijn.

Voor elke keuze van  $C_1, C_2, \dots, C_n$  is nu

$$\underline{x} = \underline{\varphi}_p(t) + \underline{\varphi}_{\text{hom}}(t) = \underline{\varphi}_p(t) + C_1 \underline{\varphi}_1(t) + C_2 \underline{\varphi}_2(t) + \dots + C_n \underline{\varphi}_n(t)$$

oplossing van het inhomogene lineaire stelsel. Immers

$$\frac{d}{dt} (\underline{\varphi}_p + \underline{\varphi}_{\text{hom}}) = A(t)\underline{\varphi}_p + \underline{f}(t) + A(t)\underline{\varphi}_{\text{hom}} = A(t)(\underline{\varphi}_p + \underline{\varphi}_{\text{hom}}) + \underline{f}(t).$$

Omgekeerd, zij  $\underline{x} = \underline{\varphi}(t)$  een willekeurige oplossing van het inhomogene lineaire stelsel. Door aftrekken van

$$\frac{d\underline{\varphi}}{dt} = A(t)\underline{\varphi} + \underline{f}(t), \quad \frac{d\underline{\varphi}_p}{dt} = A(t)\underline{\varphi}_p + \underline{f}(t),$$

volgt dan

$$\frac{d}{dt} (\underline{\varphi} - \underline{\varphi}_p) = A(t)(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}_p),$$

d.w.z.  $\varphi(t) - \varphi_p(t)$  is oplossing van het bijbehorende homogene lineaire stelsel. Er bestaan dan constanten  $C_1, C_2, \dots, C_n$  zo dat

$$\varphi(t) - \varphi_p(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \dots + C_n\varphi_n(t) ,$$

en dus

$$\varphi(t) = \varphi_p(t) + C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \dots + C_n\varphi_n(t) .$$

Daarmee is bewezen dat de algemene oplossing van het inhomogene lineaire stelsel gegeven wordt door  $\underline{x} = \varphi_p(t) + \varphi_{\text{hom}}(t)$ . □

In concrete voorbeelden is de benodigde particuliere oplossing van het inhomogene lineaire stelsel vaak te vinden door geschikt "proberen"; vergelijk met college Wiskunde 10, 6.4.12.

We beperken ons nu verder tot het onderzoek van lineaire stelsels differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\underline{x} + \underline{f}(t) ,$$

of, uitgeschreven,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t) , \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t) , \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t) . \end{array} \right.$$

De matrix  $A$  hangt niet van  $t$  af, de elementen van  $A$  zijn constant.

Beschouw eerst het homogene lineaire stelsel

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\underline{x} .$$

Analoog als voor de lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten (zie college Wiskunde 10, 6.4) verwachten we oplossingen van de vorm

$$\underline{x} = e^{\lambda t} \underline{y}$$

of, uitgeschreven,

$$x_1 = v_1 e^{\lambda t}, x_2 = v_2 e^{\lambda t}, \dots, x_n = v_n e^{\lambda t},$$

met nader te bepalen  $\lambda$  en  $\underline{v}$  ( $\underline{v} \neq \underline{0}$ ).

Na substitutie in het homogene lineaire stelsel volgt

$$\lambda e^{\lambda t} \underline{v} = e^{\lambda t} A \underline{v}, \quad A \underline{v} = \lambda \underline{v}.$$

Het getal  $\lambda$  is dus eigenwaarde van de matrix  $A$  en de vector  $\underline{v}$  is een bij  $\lambda$  behorende eigenvector. De oplossing van een homogeen lineair stelsel is daarmee teruggebracht tot het bepalen van de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix van het stelsel.

4.1.5. Stelling. Laat de  $(n \times n)$ -matrix  $A$   $n$  verschillende (reële) eigenwaarden  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  bezitten met bijbehorende eigenvectoren  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ . De algemene oplossing van het homogene lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen  $\frac{d\underline{x}}{dt} = A \underline{x}$  wordt dan gegeven door

$$\underline{x} = C_1 e^{\lambda_1 t} \underline{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \underline{v}_2 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \underline{v}_n,$$

waarin  $C_1, C_2, \dots, C_n$  willekeurige constanten zijn.

Bewijs. De oplossingen  $\underline{\varphi}_k(t) = e^{\lambda_k t} \underline{v}_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) zijn onafhankelijk, daar  $\underline{\varphi}_k(0) = \underline{v}_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) onafhankelijk zijn (zie 1.3.2). Het gestelde volgt nu uit 4.1.3.  $\square$

Opmerking. De voorwaarde dat  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  verschillend zijn, kan worden vervangen door de eis dat  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  onafhankelijk zijn.

Voorbeelden. 1) Gevraagd de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 5x_1 - 6x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 4x_2, \end{cases}$$

of, in vectornotatie,

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\underline{x} \quad \text{met matrix } A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A. De karakteristieke vergelijking

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

heeft wortels  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Bereken nu de bijbehorende eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 2 : \begin{cases} 3v_1 - 6v_2 = 0 & [v_1, v_2]^T = \alpha[2, 1]^T, \\ 3v_1 - 6v_2 = 0 & \text{kies bijv. } \underline{v}_1 = [2, 1]^T; \end{cases}$$

$$\lambda_2 = -1 : \begin{cases} 6v_1 - 6v_2 = 0 & [v_1, v_2]^T = \alpha[1, 1]^T, \\ 3v_1 - 3v_2 = 0 & \text{kies bijv. } \underline{v}_2 = [1, 1]^T. \end{cases}$$

De algemene oplossing van het stelsel wordt dan gegeven door

$$\underline{x} = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

oftewel

$$x_1 = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t},$$

$$x_2 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t},$$

waarin  $C_1, C_2$  willekeurige constanten zijn.

2) Gevraagd de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 .$$

We lossen de vergelijking eerst op met de methode uit het college Wiskunde 10, 6.4. De karakteristieke vergelijking is

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

met wortels  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 2$ . De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking wordt dan gegeven door

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x} ,$$

waarin  $C_1, C_2, C_3$  willekeurige constanten zijn.

Los de vergelijking vervolgens op via herleiding tot een stelsel van drie differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. Stel daartoe

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'' ,$$

dan ontstaat er voor  $y_1, y_2, y_3$  het stelsel

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = & y_2 & , \\ \frac{dy_2}{dx} = & & y_3 , \\ \frac{dy_3}{dx} = -2y_1 + y_2 + 2y_3 , \end{cases}$$

of, in vectornotatie

$$\frac{dy}{dx} = Ay \quad \text{met matrix } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

De karakteristieke vergelijking van A luidt

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2) = 0$$

en is, afgezien van het teken, dezelfde als de karakteristieke vergelijking boven. A heeft dus eigenwaarden  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 2$ .



De bijbehorende eigenvectoren zijn eenvoudig te bepalen:

$$\underline{v}_1 = [1, -1, 1]^T, \quad \underline{v}_2 = [1, 1, 1]^T, \quad \underline{v}_3 = [1, 2, 4]^T.$$

De algemene oplossing van het stelsel wordt dan gegeven door

$$\underline{y} = C_1 e^{-x} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Neem hiervan de eerste component, dan vinden we nog eens

$$y_1 = y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$$

als algemene oplossing van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking.

De algemene oplossing 4.1.5 van een homogeen lineair stelsel  $\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\underline{x}$  is afgeleid in de veronderstelling dat de matrix  $\underline{A}$   $n$  verschillende eigenwaarden heeft, m.a.w. dat de karakteristieke vergelijking van  $\underline{A}$   $n$  verschillende reële wortels heeft. Deze algemene oplossing bestaat uit alle lineaire combinaties van de onafhankelijke oplossingen  $e^{\lambda_i t} \underline{v}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

We beschouwen nog het geval dat de karakteristieke vergelijking van  $\underline{A}$  twee of meer gelijke wortels bezit. Laat bijv.  $\lambda_1$  een  $k$ -voudige wortel zijn, terwijl de overige  $n - k$  reële wortels twee aan twee verschillend zijn. In dat geval blijft het resultaat uit 4.1.5 geldig mits bij  $\lambda_1$   $k$  onafhankelijke eigenvectoren behoren, anders gezegd: mits de eigenruimte bij  $\lambda_1$  dimensie  $k$  heeft. Indien bij  $\lambda_1$  slechts  $\ell$  onafhankelijke eigenvectoren behoren met  $\ell < k$ , dan dienen de ontbrekende  $k - \ell$  onafhankelijke oplossingen van het stelsel langs andere weg bepaald te worden; zie het navolgende voorbeeld 4. De karakteristieke vergelijking van  $\underline{A}$  kan eventueel complexe, niet-reële wortels bezitten. Laat bijv.  $\lambda$  een complexe wortel zijn, dan is ook  $\bar{\lambda}$  wortel van de karakteristieke vergelijking. Laat nu het stelsel  $(\underline{A} - \lambda \underline{I})\underline{v} = \underline{0}$  een (complexe) oplossing  $\underline{v}$  bezitten, dan is  $\bar{\underline{v}}$  oplossing van het stelsel  $(\underline{A} - \bar{\lambda} \underline{I})\bar{\underline{v}} = \underline{0}$ . Hiermee corresponderen twee toegevoegd complexe oplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen, namelijk  $e^{\lambda t} \underline{v}$  en  $e^{\bar{\lambda} t} \bar{\underline{v}}$ . Vorm nu de lineaire combinaties

$$\frac{1}{2} [e^{\lambda t} \underline{v} + e^{\bar{\lambda} t} \bar{\underline{v}}] = \text{Re}(e^{\lambda t} \underline{v}), \quad \frac{1}{2i} [e^{\lambda t} \underline{v} - e^{\bar{\lambda} t} \bar{\underline{v}}] = \text{Im}(e^{\lambda t} \underline{v}),$$

en gebruik deze als elementen van een basis van de vectorruimte van reële oplossingen.

Voorbeelden. 3) Beschouw het homogene lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{met matrix } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

De karakteristieke vergelijking van A,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 ,$$

heeft wortels  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$  (tweevoudige wortel).

Bereken nu de bijbehorende eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 2 : \begin{cases} -2v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - 2v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 \end{cases} \quad [v_1, v_2, v_3]^T = \alpha_1 [1, 1, 1]^T ,$$

kies bijv.  $\underline{v}_1 = [1, 1, 1]^T$  ;

$$\lambda_2 = \lambda_3 = -1 : \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0 \end{cases} \quad [v_1, v_2, v_3]^T = \alpha_2 [1, -1, 0]^T + \alpha_3 [1, 0, -1]^T ,$$

kies bijv. de onafhankelijke oplossingen  
 $\underline{v}_2 = [1, -1, 0]^T$ ,  $\underline{v}_3 = [1, 0, -1]^T$  .

Hiermee zijn drie onafhankelijke oplossingen van het stelsel gevonden, namelijk

$$e^{2t}[1, 1, 1]^T, \quad e^{-t}[1, -1, 0]^T, \quad e^{-t}[1, 0, -1]^T .$$

De algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen wordt dan gegeven door

$$\underline{x} = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} ,$$

waarin  $C_1, C_2, C_3$  willekeurige constanten zijn.

N.B. In dit voorbeeld horen bij de tweevoudige eigenwaarde  $\lambda = -1$  twee onafhankelijke eigenvectoren, oftewel, de eigenruimte bij  $\lambda = -1$  heeft dimensie 2. Daardoor blijft het resultaat 4.1.3 geldig in dit geval.

4) Beschouw het homogene lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{met matrix } A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

De eigenwaarden van de matrix A worden bepaald door

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 4 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0;$$

we vinden een dubbele wortel  $\lambda = 2$ . Bereken nu de bijbehorende eigenvector(en):

$$\lambda = 2 : \begin{cases} 4v_1 + 4v_2 = 0 \\ -4v_1 - 4v_2 = 0 \end{cases} \quad \text{oplossing bijv. } \underline{v} = [1, -1]^T.$$

We vinden slechts één eigenvector  $\underline{v} = [1, -1]^T$  bij de eigenwaarde  $\lambda = 2$ , en daarmee slechts één oplossing  $e^{2t}[1, -1]^T$  van het stelsel.

Teneinde een tweede onafhankelijke oplossing te vinden, proberen we

$$\underline{x} = e^{\lambda t}(\underline{tv} + \underline{w}) \quad \text{met } \lambda = 2, \underline{v} = [1, -1]^T$$

en nader te bepalen  $\underline{w}$ . Na substitutie in het stelsel volgt

$$e^{\lambda t}(\lambda \underline{tv} + \lambda \underline{w} + \underline{v}) = e^{\lambda t}(tA\underline{v} + A\underline{w}),$$

waaruit we afleiden

$$\lambda \underline{v} = A\underline{v}, \quad \lambda \underline{w} + \underline{v} = A\underline{w}.$$

Na uitwerken van de laatste vergelijking vinden we

$$\begin{cases} 4w_1 + 4w_2 = 1 \\ -4w_1 - 4w_2 = -1 \end{cases}$$

met oplossing bijv.  $\underline{w} = [\frac{1}{4}, 0]^T$ .

De algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen wordt dan gegeven door

$$\underline{x} = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \left( t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

of, uitgeschreven,

$$x_1 = (C_1 + C_2 t + \frac{1}{2} C_2) e^{2t},$$

$$x_2 = - (C_1 + C_2 t) e^{2t},$$

waarin  $C_1, C_2$  willekeurige constanten zijn.

5) Beschouw het homogene lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{met matrix } A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

De karakteristieke vergelijking van  $A$ ,

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

heeft twee complexe wortels  $\lambda = 2 \pm 3i$ . Bereken de bijbehorende oplossing van het stelsel  $(A - \lambda I)\underline{v} = \underline{0}$ :

$$\lambda = 2 + 3i : (1 - 3i)v_1 - 5v_2 = 0 \quad \text{oplossing bijv. } \underline{v}_1 = [5, 1-3i]^T,$$

$$\lambda = 2 - 3i : (1 + 3i)v_1 - 5v_2 = 0 \quad \text{oplossing bijv. } \underline{v}_2 = [5, 1+3i]^T.$$

Hiermee corresponderen twee toegevoegd complexe oplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen, namelijk

$$e^{(2+3i)t} \begin{bmatrix} 5 \\ 1+3i \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \cos 3t \\ \cos 3t + 3 \sin 3t \end{bmatrix} \pm ie^{2t} \begin{bmatrix} 5 \sin 3t \\ \sin 3t - 3 \cos 3t \end{bmatrix}.$$

Ook het reële resp. imaginaire deel van deze oplossingen is oplossing van het stelsel. Gebruik nu de laatste als basis van de vectorruimte van oplossingen, dan wordt de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen gegeven door

$$\underline{x} = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \cos 3t \\ \cos 3t + 3 \sin 3t \end{bmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \sin 3t \\ \sin 3t - 3 \cos 3t \end{bmatrix},$$

of, uitgeschreven,

$$x_1 = e^{2t} (5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t),$$

$$x_2 = e^{2t} \{ (C_1 - 3C_2) \cos 3t + (3C_1 + C_2) \sin 3t \}.$$

Hierin zijn  $C_1, C_2$  willekeurige constanten.

De oplossing van een inhomogeen lineair stelsel differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten,  $\frac{dx}{dt} = Ax + f(t)$ , is overeenkomstig 4.1.4 terug te brengen tot die van het bijbehorende homogene lineaire stelsel  $\frac{dx}{dt} = Ax$ . De benodigde particuliere oplossing van het inhomogene lineaire stelsel is veelal te vinden door geschikt proberen. Indien bijv.  $f(t) = e^{\mu t} b$  met  $\mu$  geen eigenwaarde van de matrix  $A$ , proberen we als particuliere oplossing van het inhomogene stelsel  $x = e^{\mu t} w$  met nader te bepalen  $w$ .

Voorbeeld. 6) Gevraagd de algemene oplossing van het inhomogene lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 5x_1 - 6x_2 - 4e^t, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 4x_2 - 3e^t. \end{cases}$$

De algemene oplossing van het bijbehorende homogene lineaire stelsel werd afgeleid in voorbeeld 1:

$$\underline{x} = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Probeer als particuliere oplossing van het inhomogene lineaire stelsel,  $x = e^t w$ , dan volgt na substitutie in het stelsel

$$\begin{cases} w_1 = 5w_1 - 6w_2 - 4, \\ w_2 = 3w_1 - 4w_2 - 3, \end{cases}$$

waaruit we vinden  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = 0$ .

De algemene oplossing van het inhomogene lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen wordt nu gegeven door

$$\underline{x} = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

waarin  $C_1$ ,  $C_2$  willekeurige constanten zijn.

## 4.2. Laplace transformatie

4.2.1. Definitie. Zij de functie  $f(t)$  gedefinieerd voor  $t \geq 0$  en integreerbaar over  $[0, A]$  voor elke  $A > 0$ , dan wordt de Laplace-getransformeerde van  $f(t)$  gedefinieerd door

$$F(p) := \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt ,$$

mits de integraal convergent is.

Notatie:  $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  of  $F = \mathcal{L}(f)$ .

De overgang van  $f(t)$  naar  $F(p)$  heet Laplace transformatie. Deze transformatie heeft een inverse (zie 4.2.3, eigenschap 5), de inverse Laplace transformatie, genoteerd als  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$  of  $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$ .

Ten aanzien van de convergentie van de Laplace-integraal (4.2.1) doen zich drie mogelijkheden voor:

- 1) De Laplace-integraal is convergent voor alle  $p$ ; voorbeeld:  $f(t) = e^{-t^2}$ .
- 2) De Laplace-integraal is divergent voor alle  $p$ ; voorbeeld:  $f(t) = e^{t^2}$ .
- 3) Er bestaat een getal  $\alpha \in \mathbb{R}$  zodanig dat de Laplace-integraal convergent is voor  $p > \alpha$  en divergent voor  $p < \alpha$ . We laten het bewijs van de existentie van een dergelijke  $\alpha$  achterwege.

Het getal  $\alpha$  heet de convergentie-abscis van de Laplace-integraal. In de gevallen 1) en 2) stellen we de convergentie-abscis gelijk aan  $-\infty$  resp.  $+\infty$ .

We geven een korte tabel van een aantal functies met hun Laplace-getransformeerden.

4.2.2. Tabel.

$f(t)$	$F(p)$	conv.-abscis
$e^{at}$	$\frac{1}{p-a}$	$a$
$\frac{t^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	$0$
$\frac{t^n}{n!} e^{at}, n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{1}{(p-a)^{n+1}}$	$a$
$\cos bt$	$\frac{p}{p^2 + b^2}$	$0$
$\sin bt$	$\frac{b}{p^2 + b^2}$	$0$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}$	$a$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(p-a)^2 + b^2}$	$a$

Afleiding. Een deel van de in de tabel voorkomende Laplace-integralen is te berekenen met de methoden van het college Wiskunde 10. De overige resultaten volgen eenvoudig met behulp van 4.2.3, eigenschap 2.

4.2.3. Eigenschappen van de Laplace transformatie

1) Voor  $r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$  geldt

$$\mathcal{L}\{rf(t) + sg(t)\} = r\mathcal{L}\{f(t)\} + s\mathcal{L}\{g(t)\},$$

i.e. de Laplace transformatie is een lineaire afbeelding.

2) Zij  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ , dan is  $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(p-a)$ .

3) Zij  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$  en  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt}f(t) = 0$ , dan is

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + pF(p).$$

4) Zij  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$  en  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt}f^{(k)}(t) = 0$  voor  $k = 0, 1, \dots, n-1, n \in \mathbb{N}$ , dan is

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = -f^{(n-1)}(0) - pf^{(n-2)}(0) - \dots - p^{n-1}f(0) + p^n F(p).$$

5) Zij  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ . Dan is  $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(p)$  en  $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(p)$ .

6) Laat de functies  $f(t)$ ,  $g(t)$  continu zijn voor  $t \geq 0$  en Laplace-getransformeerden  $F(p)$ ,  $G(p)$  bezitten. Indien er een  $\alpha \in \mathbb{R}$  bestaat zodat  $F(p) = G(p)$  voor  $p > \alpha$ , dan is  $f(t) = g(t)$  voor  $t \geq 0$ .

Bewijs. 1) Triviaal.

$$2) \quad \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} f(t) dt = F(p-a).$$

3) Door partiële integratie volgt

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = -f(0) + pF(p).$$

4) We passen volledige inductie toe naar  $n$ . Als  $n = 1$  stemt de te bewijzen eigenschap overeen met eigenschap 3.

Veronderstel nu dat de eigenschap juist is voor  $f^{(n)}(t)$ . Dan volgt met behulp van partiële integratie

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f^{(n+1)}(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f^{(n+1)}(t) dt = e^{-pt} f^{(n)}(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f^{(n)}(t) dt = \\ &= -f^{(n)}(0) + p\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = \\ &= -f^{(n)}(0) + p[-f^{(n-1)}(0) - pf^{(n-2)}(0) - \dots - p^{n-1}f(0) + p^n F(p)] = \\ &= -f^{(n)}(0) - pf^{(n-1)}(0) - p^2 f^{(n-2)}(0) - \dots - p^n f(0) + p^{n+1} F(p), \end{aligned}$$

d.i. precies de te bewijzen eigenschap voor  $f^{(n+1)}(t)$ .

5) We kunnen het resultaat als volgt "afleiden"

$$\begin{aligned} F'(p) &= \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dp} (e^{-pt}) f(t) dt = \\ &= - \int_0^{\infty} t e^{-pt} f(t) dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}. \end{aligned}$$

Dat de verwisseling van differentiatie en integratie hier is geoorloofd zullen we niet bewijzen.



6) Deze eigenschap bewijzen we niet.

Opmerking. Eigenschap 6 drukt uit dat de Laplace transformatie toegepast op de verzameling der continue functies, een injectie is. Bij elke  $F(p)$  bestaat er hoogstens één continue inverse  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$ , verkregen door inverse Laplace transformatie.

4.2.4. Definitie. De convolutie van twee functies  $f$  en  $g$  is de functie  $h$  gegeven door

$$h(t) := \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau .$$

Notatie:  $h = f * g$ .

Opmerking. Met behulp van de substitutie  $t - \tau = \sigma$  volgt

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\sigma)f(t-\sigma)d\sigma ,$$

zodat  $f * g = g * f$ ; de convolutie is commutatief.

4.2.5. Stelling (convolutiestelling). Laat de functies  $f(t)$  en  $g(t)$  continu zijn voor  $t \geq 0$ , en laat de Laplace-integralen  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ ,  $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(p)$  absoluut convergent zijn voor  $p > \alpha$ . Dan geldt voor  $p > \alpha$ ,

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(p)G(p) .$$

Bewijs. Op grond van 4.2.1, 4.2.4 is te schrijven

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt}(f * g)(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(u)g(t-u)du .$$

De aldus gevonden herhaalde integraal is gelijk aan de oppervlakte-integraal over de sector van het  $(u,t)$ -vlak die begrensd wordt door de positieve  $t$ -as en de halfrechte  $t = u$ ,  $t \geq 0$ . Verwissel nu de volgorde van integratie. Men kan bewijzen dat deze verwisseling voor  $p > \alpha$  geoorloofd is omdat de betrokken integralen absoluut convergent zijn. We vinden dan

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^{\infty} f(u)du \int_u^{\infty} e^{-pt}g(t-u)dt .$$

Substitueer in de binnenste integraal  $t - u = v$ , dan volgt

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pu}f(u)du \int_0^{\infty} e^{-pv}g(v)dv = F(p)G(p) . \quad \square$$

Voorbeelden. 1) Volgens de tabel 4.2.2 is

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}, \quad \mathcal{L}\{e^{bt}\} = \frac{1}{p-b}.$$

Met behulp van de convolutiestelling (4.2.5) volgt dan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-a)(p-b)}\right\} &= e^{at} * e^{bt} = \int_0^t e^{a\tau} e^{b(t-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{1}{a-b} e^{a\tau} e^{b(t-\tau)} \Big|_0^t = \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt}), \end{aligned}$$

in de onderstelling  $a \neq b$ .

Hetzelfde resultaat is ook af te leiden door splitsing in partiële breuken en gebruikmaking van de tabel 4.2.2:

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)} = \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-b} \right) = \mathcal{L}\left\{ \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b} \right\}.$$

2) Beschouw de  $n$ -voudig geïtereerde integraal ( $n \in \mathbb{N}$ ) van een functie  $f$ :

$$y(t) := \int_0^t d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1} \dots d\tau_2 \int_0^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1.$$

Dan geldt:

$$y^{(n)}(t) = f(t)$$

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Pas Laplace-transformatie toe. Dit levert

$$p^n Y(p) = F(p),$$

dus

$$Y(p) = \frac{F(p)}{p^n}.$$

Uit de tabel 4.2.2 is af te lezen:  $\frac{1}{p^n} = \mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$ , waarna met behulp van de convolutiestelling volgt:

$$y(t) = f(t) * \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{n-1} d\tau.$$

Hiermee is de n-voudig geïtereerde integraal van f herleid tot een enkelvoudige integraal. Vergelijk het hierboven afgeleide resultaat met de formule van Taylor als gegeven in het college Wiskunde 10, 4.6.1.

Een vergelijking waarin een onbekende functie f optreedt, is door Laplace transformatie te "vertalen" in een vergelijking voor de Laplace getransformeerde  $F = \mathcal{L}(f)$ . Bij deze vertaling fungeert de tabel 4.2.2 als een beknopt "woordenboek", terwijl de eigenschappen 4.2.3 te hanteren zijn als "taalregels". In een aantal gevallen is de getransformeerde vergelijking eenvoudiger op te lossen dan de oorspronkelijke vergelijking. De oplossing van de getransformeerde vergelijking dient dan nog "terugvertaald" te worden door inverse Laplace transformatie.

Zo kan de methode van Laplace transformatie met veel vrucht worden gebruikt bij het oplossen van lineaire differentiaalvergelijkingen, c.q. lineaire stelsels differentiaalvergelijkingen, met constante coëfficiënten. Daarbij veronderstellen we dat de differentiaalvergelijking of het stelsel vergezeld wordt door zekere beginvoorwaarden. In geval van één enkele differentiaalvergelijking van de n-de orde voor de onbekende functie  $y(t)$  dienen de waarden van  $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$  voorgeschreven te zijn. In geval van een stelsel differentiaalvergelijkingen (van eerste orde) voor de vectorfunctie  $\underline{x}(t)$  zal  $\underline{x}(0)$  gegeven zijn. Gelet op 4.2.3, eigenschappen 3 en 4, zal de differentiaalvergelijking door Laplace transformatie overgaan in één algebraïsche vergelijking, terwijl het stelsel differentiaalvergelijkingen in een lineair stelsel algebraïsche vergelijkingen overgaat. Beide zijn eenvoudig op te lossen. Door de voorgeschreven beginvoorwaarden ligt de oplossing van de differentiaalvergelijking c.q. het stelsel eenduidig vast. De methode

van Laplace transformatie voert rechtstreeks tot deze ene gezochte oplossing, dit in tegenstelling tot de vroegere methode waarbij eerst de algemene oplossing moest worden bepaald en vervolgens aangepast aan de beginvoorwaarden.

Voorbeelden. 3) Gevraagd de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 4y' + 5y = 2e^t$$

onder de beginvoorwaarden  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$ .

Zij  $y(t)$  de gevraagde oplossing met Laplace-getransformeerde  $\mathcal{L}(y) = Y$ .

Dan volgt met 4.2.3, eigenschappen 3 en 4:

$$\mathcal{L}(y') = -2 + pY, \quad \mathcal{L}(y'') = -2p + p^2Y.$$

Verder is uit de tabel 4.2.2 af te lezen

$$\mathcal{L}\{2e^t\} = \frac{2}{p-1}.$$

De differentiaalvergelijking plus beginvoorwaarden gaat nu door Laplace transformatie over in

$$(p^2 - 4p + 5)Y = 2p - 8 + \frac{2}{p-1},$$

met oplossing

$$Y = \frac{2p^2 - 10p + 10}{(p^2 - 4p + 5)(p-1)}.$$

Splits dit resultaat in partiële breuken:

$$Y = \frac{p-5}{p^2-4p+5} + \frac{1}{p-1} = \frac{p-2}{(p-2)^2+1} - \frac{3}{(p-2)^2+1} + \frac{1}{p-1},$$

dan volgt na inverse transformatie met gebruikmaking van tabel 4.2.2 de gevraagde oplossing:

$$y(t) = e^{2t} \cos t - 3e^{2t} \sin t + e^t.$$

4) Gevraagd de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + b^2y = t^2 + t + \frac{2}{b},$$

onder de beginvoorwaarden  $y(0) = y'(0) = 0$ .

Zij  $y(t)$  de gevraagde oplossing met Laplace-getransformeerde  $\mathcal{L}(y) = Y$ . Door Laplace transformatie gaat de differentiaalvergelijking plus beginvoorwaarden over in

$$(p^2 + b^2)Y = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{b^2 p}.$$

Schrijf de oplossing van de laatste vergelijking in de vorm

$$Y = \frac{1}{b} \frac{b}{p^2 + b^2} \left[ \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{b^2 p} \right].$$

Voer nu de inverse Laplace transformatie uit met gebruikmaking van de convolutiestelling (4.2.5), dan vinden we voor de gevraagde oplossing:

$$y(t) = \frac{1}{b} (\sin bt) * \left( t^2 + t + \frac{2}{b^2} \right) = \frac{1}{b} \int_0^t \left( \tau^2 + \tau + \frac{2}{b^2} \right) \sin b(t-\tau) d\tau.$$

De laatste integraal is te berekenen door partiële integratie, met als resultaat

$$y(t) = \frac{t^2}{b^2} + \frac{t}{b^2} - \frac{\sin bt}{b^3}.$$

5) Gevraagd de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 5x_1 - 6x_2 - 4e^t, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 4x_2 - 3e^t, \end{cases}$$

onder de beginvoorwaarden  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ .

Voer in de Laplace-getransformeerden  $\mathcal{L}(x_1) = X_1$ ,  $\mathcal{L}(x_2) = X_2$  van de gevraagde oplossing  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ . Door Laplace transformatie gaat het stelsel plus beginvoorwaarden over in

$$\begin{cases} pX_1 = 5X_1 - 6X_2 - \frac{4}{p-1}, \\ pX_2 = 3X_1 - 4X_2 - \frac{3}{p-1}, \end{cases}$$

oftewel

$$\begin{cases} (p-5)X_1 + 6X_2 = -\frac{4}{p-1}, \\ -3X_1 + (p+4)X_2 = -\frac{3}{p-1}. \end{cases}$$

De oplossing van het laatste stelsel is eenvoudig te bepalen:

$$X_1 = \frac{-4p+2}{(p-1)(p^2-p-2)} = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p-2},$$

$$X_2 = \frac{-3}{p^2-p-2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-2}.$$

Na inverse transformatie met gebruikmaking van de tabel 4.2.2 vinden we de gevraagde oplossing:

$$x_1 = e^t + e^{-t} - 2e^{2t},$$

$$x_2 = e^{-t} - e^{2t}.$$

N.B. Hetzelfde stelsel differentiaalvergelijkingen (zonder beginvoorwaarden) werd eerder behandeld in 4.1, voorbeeld 6. De benodigde particuliere oplossing van het inhomogene stelsel werd daarbij bepaald door geschikt proberen. Bij gebruik van de methode van Laplace transformatie als boven behoeft niet eerst een particuliere oplossing te worden bepaald, maar wordt de eindoplossing rechtstreeks verkregen.

6) Gevraagd de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{A}\underline{x} \quad \text{met matrix } \underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix},$$

onder de beginvoorwaarde  $\underline{x}(0) = \underline{a}$ .

Voer in de Laplace-getransformeerde  $\mathcal{L}(\underline{x}) = \underline{X}$ , dan gaat het stelsel plus beginvoorwaarde door Laplace transformatie over in

$$-\underline{a} + p\underline{X} = \underline{A}\underline{X}$$

of, uitgeschreven,

$$\begin{cases} (p-6)X_1 - 4X_2 = a_1, \\ 4X_1 + (p+2)X_2 = a_2. \end{cases}$$

De oplossing van het laatste stelsel is

$$X_1 = \frac{(p+2)a_1 + 4a_2}{p^2 - 4p + 4} = \frac{a_1}{p-2} + \frac{4(a_1 + a_2)}{(p-2)^2},$$
$$X_2 = \frac{(p-6)a_2 - 4a_1}{p^2 - 4p + 4} = \frac{a_2}{p-2} - \frac{4(a_1 + a_2)}{(p-2)^2}.$$

De gevraagde oplossing volgt nu door inverse Laplace transformatie:

$$x_1 = a_1 e^{2t} + 4(a_1 + a_2) t e^{2t},$$
$$x_2 = a_2 e^{2t} - 4(a_1 + a_2) t e^{2t}.$$

Indien we  $a_1, a_2$  opvatten als willekeurige constanten, is de aldus gevonden oplossing tevens de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen. Vergelijk deze algemene oplossing met het resultaat uit 4.1, voorbeeld 4, waar hetzelfde stelsel differentiaalvergelijkingen behandeld werd.

#### 4.3. Differentiaalvergelijkingen van het type Euler, machtrekssubstitutie

De algemene vorm van een differentiaalvergelijking van het type Euler is

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x),$$

waarin  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  constanten zijn. Het is voldoende de differentiaalvergelijking te beschouwen voor  $x > 0$ . Indien namelijk  $x < 0$ , kan men de substitutie  $x = -\xi$  toepassen waarna de differentiaalvergelijking overgaat in een vergelijking van hetzelfde type voor  $y$  als functie van  $\xi$  met  $\xi > 0$ .

De differentiaalvergelijking van het type Euler is te herleiden tot een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten door middel van de substitutie  $x = e^t$ . We zullen dit nader uitwerken voor het geval  $n = 2$ , dus voor de differentiaalvergelijking

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_2 y = f(x), \quad x > 0. \quad (1)$$

Onder de substitutie  $x = e^t$ , oftewel  $t = \log x$ , geldt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2} \left( \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right),$$

zodat de differentiaalvergelijking (1) overgaat in

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - 1) \frac{dy}{dt} + a_2 y = f(e^t). \quad (2)$$

De aldus gevonden differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten is op te lossen met de methode uit het college Wiskunde 10, 6.4.

Beschouw eerst het geval  $f(x) = 0$  voor alle  $x > 0$ , dan zijn de vergelijkingen (1) en (2) homogeen. Bij de homogene vergelijking (2) behoort de karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 + (a_1 - 1)\lambda + a_2 = 0$$

met wortels  $\lambda_1, \lambda_2$  te noemen. De algemene oplossing van (2) luidt dan

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} && \text{als } \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ y &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} && \text{als } \lambda_1 = \lambda_2; \end{aligned} \quad (3)$$

zie college Wiskunde 10, 6.4.

Hiermee correspondeert als algemene oplossing van de homogene vergelijking (1):

$$\begin{aligned} y &= C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} && \text{als } \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ y &= C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_1} \log x && \text{als } \lambda_1 = \lambda_2, \end{aligned} \quad (4)$$

waarbij  $C_1, C_2$  willekeurige constanten zijn.

In het geval  $f(x) \neq 0$ , zijn de vergelijkingen (1) en (2) inhomogeen. Bij de algemene oplossing (3) of (4) dient dan nog een particuliere oplossing van de betreffende vergelijking te worden opgeteld. Deze particuliere oplossing is veelal weer te bepalen door geschikt proberen. Zij bijv.  $f(x) = x^r$ , dan is  $f(e^t) = e^{rt}$  en als particuliere oplossing van (2) kan men proberen  $y = ae^{rt}$  met  $a$  te bepalen.



Voor praktisch gebruik is de voorgaande oplossingsmethode als volgt te bekorten. Los de homogene differentiaalvergelijking (1) rechtstreeks op door te proberen:  $y = x^\lambda$ , verkregen door combinatie van  $x = e^t$  en  $y = e^{\lambda t}$ . Na invullen in (1) vinden we dan

$$\lambda(\lambda - 1)x^\lambda + a_1\lambda x^\lambda + a_2x^\lambda = 0,$$

$$\lambda^2 + (a_1 - 1)\lambda + a_2 = 0,$$

d.i. dezelfde vergelijking als boven met wortels  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$ . Vervolgens wordt de algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking (1) dan gegeven door (4). Evenzo is een particuliere oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking (1) veelal te vinden door geschikt proberen, rechtstreeks in (1). Zij bijv.  $f(x) = x^r$ , dan kan men als oplossing proberen  $y = ax^r$  met  $a$  te bepalen.

De aldus verkorte methode is zonder meer over te dragen naar de differentiaalvergelijking van het type Euler van de  $n$ -de orde. Als oplossing van de homogene differentiaalvergelijking proberen we:  $y = x^\lambda$ , waarna voor  $\lambda$  een algebraïsche vergelijking van de graad  $n$  ontstaat. Indien de wortels  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  van deze vergelijking onderling verschillend zijn, dan zijn de corresponderende oplossingen  $x^{\lambda_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , onafhankelijk en de algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking wordt gegeven door

$$y = C_1x^{\lambda_1} + C_2x^{\lambda_2} + \dots + C_nx^{\lambda_n}$$

met willekeurige constanten  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Indien  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$  en  $\lambda_j \neq \lambda_k$  voor  $j > k$ , dan behoren bij  $\lambda_1$  de  $k$  onafhankelijke oplossingen  $x^{\lambda_1}, x^{\lambda_1} \log x, \dots, x^{\lambda_1} (\log x)^{k-1}$ .

Opmerking.  $\log$  betekent hier en elders in deze syllabus de natuurlijke logarithme.

Voorbeelden. 1) Beschouw de differentiaalvergelijking van het type Euler

$$x^2y'' + xy' - n^2y = 0, \quad x > 0,$$

waarin  $n$  geheel,  $\geq 0$  is. Substitutie van  $y = x^\lambda$  leidt tot de vierkantsvergelijking

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - n^2 = 0, \quad \lambda^2 - n^2 = 0,$$

met wortels  $\lambda_1 = n$ ,  $\lambda_2 = -n$ . In het geval  $n = 0$  zijn deze wortels gelijk. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking wordt nu gegeven door

$$y = C_1 + C_2 \log x \quad \text{als } n = 0 ,$$

$$y = C_1 x^n + C_2 x^{-n} \quad \text{als } n \neq 0 .$$

Hierbij zijn  $C_1$ ,  $C_2$  willekeurige constanten.

2) Gevraagd de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = x, \quad x > 0 .$$

Substitueer in de homogene vergelijking  $y = x^\lambda$ , dan volgt voor  $\lambda$  de vierkantsvergelijking

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

met twee gelijke wortels  $\lambda = 2$ . De homogene vergelijking heeft dus onafhankelijke oplossingen  $x^2$ ,  $x^2 \log x$ .

Bepaal nu een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking door proberen van  $y = ax$ , dan vinden we  $a = 1$ .

De gevraagde algemene oplossing luidt dan

$$y = x + C_1 x^2 + C_2 x^2 \log x ,$$

waarbij  $C_1$ ,  $C_2$  willekeurige constanten zijn.

Bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen is tot dusver steeds gezocht naar een oplossing uitgedrukt in elementaire functies zoals polynomen, exponentiële functies, goniometrische functies, inversen van deze functies, enz. We zullen nu toelaten dat de oplossing gegeven wordt door de som van een convergente machtreeks. Een dergelijke machtreeks-oplossing wordt verkregen door in de differentiaalvergelijking voor de onbekende functie een machtreeks te substitueren met nader te bepalen coëfficiënten. Deze worden dan vastgelegd door de eis dat de coëfficiënten van gelijke machten van de onafhankelijke variabele in linker- en rechterlid gelijk zijn. We geven eerst een tweetal voorbeelden.

Voorbeelden. 3) Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y' - xy = 0 .$$

Substitueer voor  $y$  de machtreeks

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

met nader te bepalen coëfficiënten  $a_n$ . Neem aan dat deze machtreeks een convergentiestraal  $R > 0$  heeft. Voor  $|x| < R$  wordt  $y'$  verkregen door termsgewijs differentiëren:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} ,$$

en de laatste machtreeks heeft eveneens een convergentiestraal  $R$ ; zie college Wiskunde 10, 4.5.8.

Substitueer nu deze machtreeks in de differentiaalvergelijking, dan ontstaat er

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} .$$

Stel vervolgens de coëfficiënten van gelijke machten van  $x$  in linker- en rechterlid aan elkaar gelijk:

$$\text{coëff. van } x^0 \quad : \quad a_1 = 0 ,$$

$$\text{coëff. van } x^{n-1}, n \geq 2 : n a_n = a_{n-2} .$$

Door herhaald toepassen van de laatste betrekking volgt dat de coëfficiënt  $a_n$  kan worden uitgedrukt in  $a_{n-2}$ ,  $a_{n-2}$  in  $a_{n-4}$ , enz., eindigend met  $a_0$  als  $n$  even is en met  $a_1$  als  $n$  oneven is. Omdat  $a_1 = 0$ , zullen de coëfficiënten  $a_n$  met oneven index alle nul zijn:  $a_{2m+1} = 0$ . Voor de coëfficiënten met even index vinden we

$$a_{2m} = \frac{1}{2m} a_{2m-2} = \frac{1}{2m} \frac{1}{2m-2} a_{2m-4} = \dots = \frac{1}{2m} \frac{1}{2m-2} \dots \frac{1}{4} \frac{1}{2} a_0 = \frac{a_0}{2^m m!} .$$

De machtreeks-oplossing wordt dan gegeven door

$$y = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2^m m!} ,$$

waarbij  $a_0$  een willekeurige constante is. Deze machtreeks is convergent voor alle  $x$ , i.e.  $R = \infty$ .

In dit voorbeeld is de machtreeks nog te sommeren tot

$$y = a_0 e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

De oplossing in deze vorm is ook af te leiden met de methode van scheiding van variabelen; zie college Wiskunde 10, 6.2.

4) Beschouw de niet-lineaire differentiaalvergelijking

$$y' = x + y^2$$

onder de beginvoorwaarde  $y(0) = 1$ .

Substitueer voor  $y$  de machtreeks

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

dan is

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

$$y^2 = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right] \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} x^{\ell} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_k a_{\ell} x^{k+\ell} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right] x^n,$$

waarbij  $k + \ell = n$  gesteld is. Na substitutie in de differentiaalvergelijking ontstaat er

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = x + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right] x^n.$$

Stel nu de coëfficiënten van  $x^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) in linker- en rechterlid aan elkaar gelijk:

$$\text{coëff. van } x^0 \quad : \quad a_1 = a_0^2,$$

$$\text{coëff. van } x^1 \quad : \quad 2a_2 = 1 + 2a_0 a_1,$$

$$\text{coëff. van } x^n, \quad n \geq 2 \quad : \quad (n+1) a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

Door de laatste betrekking wordt  $a_{n+1}$  uitgedrukt in de voorgaande coëfficiënten  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . De coëfficiënten  $a_n$  zijn nu volledig bepaald. Immers, uit de beginvoorwaarde  $y(0) = 1$  volgt  $a_0 = 1$ , waarna we successievelijk vinden met behulp van bovenstaande betrekkingen:

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{1}{3} (a_0 a_2 + a_1^2 + a_2 a_0) = \frac{4}{3},$$

$$a_4 = \frac{1}{4} (a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0) = \frac{17}{12}, \text{ enz.}$$

Hiermee is de machtreeks-oplossing  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  in principe bepaald.

We onderzoeken nog de convergentie van de machtreeks. Daartoe bewijzen we door volledige inductie dat

$$0 < a_n \leq ar^n \text{ voor } n \geq 0,$$

met nader te bepalen  $a$  en  $r$ .

Veronderstel dat voor zekere  $n \geq 2$  geldt

$$0 < a_k \leq ar^k \text{ voor } k = 0, 1, \dots, n.$$

Met behulp van de betrekking

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$$

volgt dan

$$0 < a_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a^2 r^k r^{n-k} = a^2 r^n.$$

Kies nu  $a = r$ , dan is  $0 < a_{n+1} \leq a^2 r^n = ar^{n+1}$ , d.i. de te bewijzen ongelijkheid voor  $a_{n+1}$ .

Vervolgens wordt  $r$  zo bepaald dat  $0 < a_n \leq ar^n = r^{n+1}$  voor  $n = 0, 1, 2$ . Hieraan wordt voldaan door  $r = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}$ , zodat

$$0 < a_n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{(n+1)/3} \text{ voor } n \geq 0.$$

De machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{(n+1)/3} x^n$$

heeft convergentiestraal  $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ ; zie college Wiskunde 10, 4.4.20.

Volgens de vergelijkingsstelling (college Wiskunde 10, 4.4.16) is dan de machtreeks  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  convergent, tenminste voor  $|x| < \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = 0.87\dots$

We beschouwen nu algemeen de inhomogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) ,$$

onder de beginvoorwaarden  $y(0) = a_0, y'(0) = a_1$ .

We veronderstellen dat de coëfficiënten  $p(x), q(x)$  en het rechterlid  $f(x)$  ontwikkeld kunnen worden in machtreeksen naar machten van  $x$ , welke convergent zijn voor  $|x| < R$ :

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n .$$

Substitueer voor  $y$  de machtreeks

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

met nader te bepalen coëfficiënten  $a_n, n \geq 2$ . Merk op dat automatisch voldaan is aan de beginvoorwaarden  $y(0) = a_0, y'(0) = a_1$ . Neem aan dat de machtreeks een convergentiestraal  $R_1 > 0$  heeft, dan geldt voor  $|x| < R_1$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n ,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n ,$$

en de aldus verkregen machtreeksen hebben eveneens een convergentiestraal  $R_1$ . Substitueer de voorgaande machtreeksen in de differentiaalvergelijking, dan ontstaat er

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} p_{\ell}x^{\ell} \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k \right] +$$

$$+ \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} q_{\ell}x^{\ell} \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \right] = \sum_{n=0}^{\infty} f_nx^n,$$

of, na herschrijven van de machtreeksprodukten met  $k + \ell = n$  gesteld,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n p_{n-k}(k+1)a_{k+1} \right] x^n +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n q_{n-k}a_k \right] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_nx^n.$$

Stel de coëfficiënten van  $x^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) in linker- en rechterlid aan elkaar gelijk, dan volgt

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = f_n - \sum_{k=0}^n p_{n-k}(k+1)a_{k+1} - \sum_{k=0}^n q_{n-k}a_k, \quad n \geq 0.$$

Door deze betrekking wordt  $a_{n+2}$  uitgedrukt in de voorgaande coëfficiënten  $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ . Aangezien  $a_0, a_1$  bekend zijn, kan men successievelijk  $a_2, a_3, a_4, \dots$  berekenen. De machtreeks-oplossing  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$  is hierdoor in principe volledig bepaald. Zonder bewijs vermelden we dat de gevonden machtreeks  $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$  convergent is, tenminste voor  $|x| < R$ .

De methode van machtreekssubstitutie kan ook worden uitgevoerd met machtreeksen naar machten van  $x - a$ , waarbij  $a$  een constante is. Voor de onbekende functie in de differentiaalvergelijking wordt dan gesubstitueerd de machtreeks  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  met nader te bepalen coëfficiënten  $a_n$ .

Voorbeeld. 5) Beschouw de homogene lineaire differentiaalvergelijking

$$y'' + \frac{2}{1-x^2}y = 0.$$

Ontwikkel  $2/(1-x^2)$  in een machtreeks en substitueer  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ , dan volgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + 2 \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} x^{2\ell} \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right] = 0 .$$

Hieruit zijn de coëfficiënten  $a_n$  successievelijk te bepalen.

Het is in dit geval echter handiger om de differentiaalvergelijking te herschrijven in de vorm

$$(1-x^2)y'' + 2y = 0 .$$

Substitutie van de machtreeks  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  leidt dan tot

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 .$$

Stel de totale coëfficiënt van  $x^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) in het linkerlid gelijk aan 0:

$$\text{coëff. van } x^0 \quad : 2a_2 + 2a_0 = 0 ,$$

$$\text{coëff. van } x^1 \quad : 6a_3 + 2a_1 = 0 ,$$

$$\text{coëff. van } x^n, n \geq 2 : (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2 - n - 2)a_n = 0 ,$$

$$(n+2)a_{n+2} = (n-2)a_n .$$

Uit de eerste twee betrekkingen volgt  $a_2 = -a_0$ ,  $a_3 = -\frac{1}{3}a_1$ . Uit de laatste betrekking met  $n = 2$  gesteld, volgt  $a_4 = 0$ . Door herhaald toepassen van de laatste betrekking vinden we dat de coëfficiënt  $a_n$  kan worden uitgedrukt in  $a_{n-2}$ ,  $a_{n-2}$  in  $a_{n-4}$ ,  $a_{n-4}$  in  $a_{n-6}$ , enz. Omdat  $a_4 = 0$ , zullen de coëfficiënten  $a_n$  met even index  $\geq 4$  alle nul zijn:  $a_{2m} = 0$  voor  $m \geq 2$ .

Voor de coëfficiënten met oneven index vinden we

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= \frac{2m-3}{2m+1} a_{2(m-1)+1} = \frac{2m-3}{2m+1} \frac{2m-5}{2m-1} a_{2(m-2)+1} = \dots = \\ &= \frac{(2m-3)(2m-5)(2m-7) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{(2m+1)(2m-1)(2m-3) \dots 9 \cdot 7 \cdot 5} a_3 = \frac{3}{4m^2-1} \left(-\frac{1}{3}a_1\right) = -\frac{a_1}{4m^2-1} . \end{aligned}$$

De machtreeks-oplossing wordt dan gegeven door

$$y = a_0(1-x^2) - a_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{4m^2-1} .$$



Indien we  $a_0, a_1$  opvatten als willekeurige constanten, is de aldus gevonden oplossing tevens de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking.

In dit voorbeeld is de machtreeks nog te sommeren tot

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{4m^2 - 1} &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2m-1} - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2m+1} = \\ &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x^2 - 1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2m+1} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(x^2 - 1) \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right); \end{aligned}$$

zie college Wiskunde 10, 4.8.7.

#### 4.4. Numerieke oplossing van differentiaalvergelijkingen

Tot dusver zijn in dit hoofdstuk, en in het college Wiskunde 10, hoofdstuk 6 een aantal analytische methoden besproken voor de oplossing van differentiaalvergelijkingen c.q. stelsels differentiaalvergelijkingen. Deze analytische methoden voeren veelal tot een oplossing in gesloten vorm, d.w.z. uitgedrukt in elementaire functies zoals polynomen, exponentiële functies, goniometrische functies, enz., en in integralen van zulke functies. Evenwel, slechts een beperkt aantal klassen van differentiaalvergelijkingen laat een dergelijke oplossing in gesloten vorm toe. Vele andere differentiaalvergelijkingen zijn niet op te lossen in termen van elementaire functies.

Daarnaast is een oplossing in gesloten vorm niet altijd geschikt voor praktisch numeriek gebruik. Beschouw bijv. de lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde

$$y' - e^{x^2}y = e^x$$

onder de beginvoorwaarde  $y(0) = 0$ . Met de methode van variatie van constanten (zie college Wiskunde 10, 6.3) is af te leiden dat de oplossing gegeven wordt door

$$y = \int_0^x \exp\left[\xi + \int_{\xi}^x e^{t^2} dt\right] d\xi,$$

doch deze is zeker niet geschikt om de numerieke waarde van bijv.  $y(1)$  eenvoudig af te lezen.

Om deze redenen zijn er verschillende numerieke methoden ontwikkeld voor de berekening van een benadering voor de oplossing van een differentiaalverge-

lijking. Deze methoden hebben gemeen dat de exacte oplossing  $y(x)$  benaderd wordt, niet op een volledig interval, maar slechts in een aantal discrete punten  $x = x_0, x_1, x_2, \dots$ . Veelal worden deze punten equidistant gekozen:  $x_n = x_0 + nh$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , waarbij  $h$  de stapgrootte genoemd wordt. We bespreken hier de eenvoudigste numerieke methode, namelijk de methode van Euler, toegelicht aan de differentiaalvergelijking van eerste orde met beginvoorwaarde

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Het geheel van differentiaalvergelijking plus beginvoorwaarde heet een beginwaardeprobleem. We veronderstellen dat  $f(x, y)$  continu differentieerbaar is op de strook  $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b\}$ , d.w.z.  $f$  is differentieerbaar naar  $x$  en  $y$  op  $S$  en de partiële afgeleiden  $f_x$  en  $f_y$  zijn continu op  $S$ . Voorts zal  $x_0 \in (a, b)$  zijn. Men kan dan bewijzen dat het beginwaardeprobleem (1) precies één oplossing  $y(x)$  heeft, gedefinieerd in een omgeving  $I$  van  $x_0$ . In deze omgeving is de oplossing zelfs tweemaal continu differentieerbaar, immers,  $y'(x) = f(x, y(x))$  en het rechterlid van deze vergelijking is een continu differentieerbare functie van  $x$ .

Beschouw nu de oplossing  $y(x)$  op het interval  $[x, x+h] \subset I$ . Op grond van de formule van Taylor (college Wiskunde 10, 4.6) is

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + hy'(x) + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi) = \\ &= y(x) + hf(x, y(x)) + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi) \end{aligned} \quad (2)$$

met  $\xi \in (x, x+h)$ . Door weglating van de restterm  $\frac{1}{2}h^2 y''(\xi)$  vinden we de benaderingsformule

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y(x)), \quad (3)$$

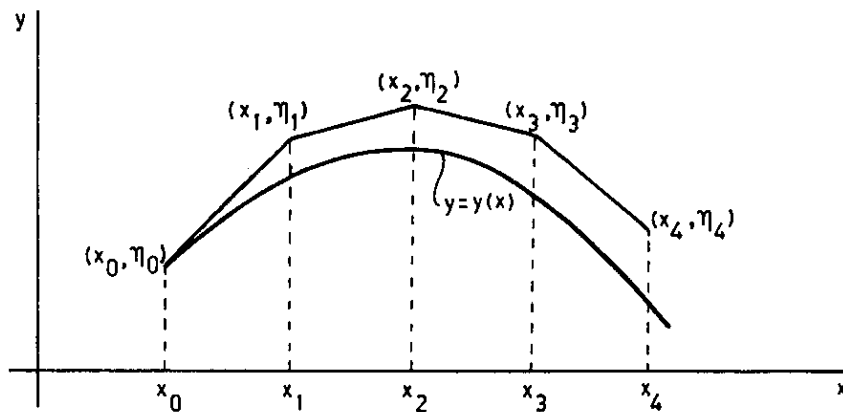
die het uitgangspunt vormt voor de methode van Euler. De hierbij gemaakte fout  $\frac{1}{2}h^2 y''(\xi)$  heet de lokale afbreekfout over het interval  $[x, x+h]$ .

De methode van Euler bestaat nu hierin dat we voor de oplossing  $y(x)$  in de punten  $x = x_n := x_0 + nh$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , een benadering  $\eta_n$  construeren, gegeven door

$$\begin{cases} \eta_0 := y_0, \\ \eta_{n+1} := \eta_n + hf(x_n, \eta_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4)$$

Uiteraard wordt de constructie niet onbeperkt voortgezet, maar uitgevoerd slechts voor die waarden van  $n$  waarvoor  $x_n \in (a, b)$ .

De benadering  $\eta_n$  is als volgt meetkundig te interpreteren. Bij de differentiaalvergelijking  $y' = f(x, y)$  behoort een richtingsveld: aan elk punt  $(x, y) \in S$  is een vector  $(1, f(x, y))$  toegevoegd. De grafiek van de oplossing  $y(x)$ , i.e. de gezochte integraalkromme, gaat door het punt  $(x_0, y_0)$  en raakt in elk van zijn punten aan de vector van het richtingsveld ter plaatse. De punten  $(x_n, \eta_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , zijn op te vatten als hoekpunten van een gebroken lijn. Elk lijnsegment van deze gebroken lijn heeft een richting overeenstemmend met de vector van het richtingsveld in het linker eindpunt. De gebroken lijn gaat door  $(x_0, y_0)$  en vormt een benadering voor de (exacte) integraalkromme; zie onderstaande figuur.



De benaderingen  $\eta_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , hangen uiteraard af van de stapgrootte  $h$ . Voor de duidelijkheid zullen we daarom ook de notatie  $\eta(x_n; h)$  gebruiken in plaats van  $\eta_n$ . De "benaderende oplossing"  $\eta(x; h)$  is dan een functie die bij vaste  $h$  gedefinieerd is voor  $x = x_0 + nh$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , en bij vaste  $x > x_0$  gedefinieerd is voor  $h = (x - x_0)/n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

We onderzoeken nu de zg. globale afbreekfout in  $x_n$ , gedefinieerd door

$$e_n := y_n - \eta_n,$$

of, in uitvoeriger notatie,

$$e(x_n;h) := y(x_n) - \eta(x_n;h) . \quad (5)$$

Stel daartoe in (2)  $x = x_n$ , dan volgt

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_n)$$

met  $\xi_n \in (x_n, x_{n+1})$ . Trek hiervan af de betrekking (4), dan vinden we

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n + h[f(x_n, y_n) - f(x_n, \eta_n)] + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_n) = \\ &= [1 + hf_y(x_n, \zeta_n)]e_n + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_n) \end{aligned} \quad (6)$$

onder toepassing van de middelwaardstelling (college Wiskunde 10, 3.2.5);  
hierin is  $\zeta_n = \eta_n + \theta_n(y_n - \eta_n)$ ,  $\theta_n \in (0,1)$ .

Beschouw nu de oplossing  $y(x)$  en de benadering  $\eta(x;h)$  op een interval  
 $[x_0, x_0+H] \subset I$ . Op grond van de continuïteit van  $f_y$  en  $y''$  kan men inzien dat  
er constanten  $L$  en  $C$  bestaan zodanig dat

$$|f_y(x_n, \zeta_n)| \leq L , \quad |\frac{1}{2}y''(\xi_n)| \leq C$$

als  $x_n \in [x_0, x_0+H]$ .

Voor de globale afbreekfout  $e_n$  volgt dan de ongelijkheid

$$|e_{n+1}| \leq (1+hL)|e_n| + Ch^2 . \quad (7)$$

Pas deze ongelijkheid herhaald toe, uitgaande van  $e_0 = y_0 - \eta_0 = 0$ , dan vinden we

$$|e_1| \leq Ch^2 ,$$

$$|e_2| \leq [(1+hL) + 1]Ch^2 ,$$

$$\begin{aligned} |e_n| &\leq [(1+hL)^{n-1} + (1+hL)^{n-2} + \dots + (1+hL) + 1]Ch^2 = \\ &= \frac{(1+hL)^n - 1}{L} Ch . \end{aligned}$$

Maak gebruik van de ongelijkheid  $0 < 1 + hL \leq e^{hL}$ , dan is  $(1+hL)^n \leq e^{nhL} = e^{L(x_n - x_0)}$  en dus

$$|e_n| \leq \frac{e^{L(x_n - x_0)} - 1}{L} Ch ,$$

oftewel, in uitvoeriger notatie,

$$|e(x;h)| \leq \frac{e^{L(x-x_0)} - 1}{L} Ch . \quad (8)$$

Uit de laatste ongelijkheid volgt dat voor vaste  $x$  geldt

$$\lim_{h \rightarrow 0} e(x;h) = 0 , \quad \lim_{h \rightarrow 0} \eta(x;h) = y(x) ;$$

de benaderende oplossing  $\eta(x;h)$  convergeert dus naar de exacte oplossing  $y(x)$  als  $h \rightarrow 0$ . De ongelijkheid (8) levert tevens een bovengrens voor de globale afbrekfout  $e(x;h)$ . Evenwel, in praktische gevallen is deze bovengrens meestal erg onrealistisch. Bovendien zijn de constanten  $L$  en  $C$  niet altijd eenvoudig te bepalen.

In de (praktische) numerieke wiskunde wordt daarom een andere methode gevolgd waarbij een realistische schatting voor de fout wordt verkregen. Door verfijning van het foutonderzoek als boven kan men afleiden dat  $e(x;h)$  te schrijven is in de vorm

$$e(x;h) = hE_1(x) + h^2E_2(x;h) , \quad (9)$$

waarin  $E_1(x)$  onafhankelijk is van  $h$  en  $E_2(x;h)$  bij vaste  $x$  begrensd is voor alle  $h = (x - x_0)/n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . De afleiding van (9) is gebaseerd op de extra veronderstelling dat de functie  $f(x,y)$  tweemaal continu differentieerbaar is op de strook  $S$ , d.w.z. ook de partiële afgeleiden van tweede orde  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$ ,  $f_{yy}$  bestaan en zijn continu op  $S$ .

Bereken nu de benadering  $\eta(x;h)$  volgens de methode van Euler met stapgrootte  $h$ . Herhaal de berekening met stapgrootte  $\frac{1}{2}h$  en bepaal aldus de benadering  $\eta(x; \frac{1}{2}h)$ . Indien de term  $h^2E_2(x;h)$  in (9) verwaarloosd wordt (voor kleine  $h$  is dit geoorloofd), dan worden de bijbehorende afbrekfouten gegeven door

$$e(x;h) \approx hE_1(x) , \quad e(x; \frac{1}{2}h) \approx \frac{1}{2}hE_1(x) ,$$

zodat

$$e(x;h) \approx 2e(x; \frac{1}{2}h) .$$

Nu is

$$y(x) = \eta(x;h) + e(x;h) , \quad y(x) = \eta(x; \frac{1}{2}h) + e(x; \frac{1}{2}h) ,$$

waaruit door aftrekken volgt

$$\eta(x; \frac{1}{2}h) - \eta(x; h) = e(x; h) - e(x; \frac{1}{2}h) \approx e(x; \frac{1}{2}h) .$$

Daarmee is verkregen

$$e(x; \frac{1}{2}h) \approx \eta(x; \frac{1}{2}h) - \eta(x; h) \tag{10}$$

als schatting voor de fout bij benadering van  $y(x)$  door  $\eta(x; \frac{1}{2}h)$ .

Eventueel is deze schatting nog te gebruiken om te komen tot een verbeterde benadering

$$\eta^*(x; \frac{1}{2}h) := \eta(x; \frac{1}{2}h) + [\eta(x; \frac{1}{2}h) - \eta(x; h)]$$

voor de oplossing  $y(x)$ .

Opmerking. De hier gevolgde methode van fout-schatting is dezelfde als die toegepast in het college Wiskunde 10, 3.6, bij de numerieke integratie met behulp van de samengestelde trapeziumregel (3.6.8).

Tenslotte merken we nog op dat de methode van Euler ook te gebruiken is voor de numerieke oplossing van een stelsel differentiaalvergelijkingen van de vorm  $dy/dx = \underline{f}(x, \underline{y})$ . De details zijn analoog aan die voor het geval van een enkele differentiaalvergelijking  $y' = f(x, y)$ . Evenzo is een differentiaalvergelijking van hogere orde te herleiden tot een stelsel differentiaalvergelijkingen van de eerste orde (zie 4.1) en vervolgens numeriek op te lossen met de methode van Euler.

Voorbeelden. 1) Het beginwaardeprobleem

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

heeft als oplossing  $y(x) = e^x$ .

Numerieke oplossing met de methode van Euler leidt tot een benadering  $\eta_n$  voor  $y(x)$  in de punten  $x = x_n := nh, n = 0, 1, 2, \dots$ . In dit voorbeeld wordt  $\eta_n$  gegeven door

$$\begin{cases} \eta_0 := 1, \\ \eta_{n+1} := \eta_n + h\eta_n = (1+h)\eta_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

of, na uitwerking,

$$\eta_n = (1+h)^n, \quad \eta(x_n;h) = (1+h)^{x_n/h}.$$

Ontwikkel de benaderende oplossing  $\eta(x;h)$  bij vaste  $x$  naar machten van  $h$ :

$$\begin{aligned} \eta(x;h) &= \exp\left[\frac{x}{h} \log(1+h)\right] = \exp\left[x\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} - \dots\right)\right] = \\ &= e^x \exp\left[-\frac{1}{2}hx + \frac{1}{3}h^2x - \dots\right] = e^x\left[1 - \frac{1}{2}hx + h^2\left(\frac{x}{3} + \frac{x^2}{8}\right) - \dots\right]. \end{aligned}$$

De globale afbreekfout  $e(x;h)$  is dan voor te stellen door

$$e(x;h) = e^x - \eta(x;h) = \frac{1}{2}hxe^x - h^2\left(\frac{x}{3} + \frac{x^2}{8}\right)e^x + \dots$$

Vergelijk dit resultaat met (9); in dit voorbeeld is  $E_1(x) = \frac{1}{2}xe^x$ .

2) Beschouw het beginwaardeprobleem

$$y' = x + y^2, \quad y(0) = 0.$$

Gevraagd wordt de waarde van  $y(1)$  in 3 decimalen nauwkeurig te berekenen.

De berekening geschiedt met de methode van Euler. In de discrete punten  $x = x_n := nh$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , wordt de exacte oplossing  $y(x)$  benaderd door de waarden  $\eta_n = \eta(x_n;h)$  gegeven door

$$\begin{cases} \eta_0 := 0, \\ \eta_{n+1} := \eta_n + h(x_n + \eta_n^2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

We berekenen nu de benadering  $\eta(1;h)$  voor stapgroottes  $h = 1/2, 1/4, 1/8, 1/16$ , enz. De halvering van de stapgrootte wordt zover voortgezet totdat het verschil tussen twee opeenvolgend berekende benaderingen minder is dan  $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$ . De berekening is uitgevoerd met een computer en de resultaten (in zes decimalen) zijn weergegeven in de volgende tabel:

$h^{-1}$	$\eta(1;h)$	$\eta(1;h) - \eta(1;2h)$	$\eta^*(1;h)$
2	0.250000		
4	0.384857	0.134857	0.519714
8	0.463583	0.078726	0.542309
16	0.507943	0.044360	0.552303
32	0.531846	0.023903	0.555749
64	0.544313	0.012467	0.556780
128	0.550687	0.006374	0.557061
256	0.553912	0.003225	0.557137
512	0.555534	0.001622	0.557156
1024	0.556347	0.000813	0.557160
2048	0.556754	0.000407	0.557161

In de derde kolom is een schatting voor de afbreekfout gegeven, gebaseerd op (10). Merk op dat bij halvering van de stapgrootte de geschatte fout op den duur eveneens gehalveerd wordt, in overeenstemming met (9). Met gebruik van de foutschatting is een verbeterde benadering  $\eta^*(1;h) := \eta(1;h) + [\eta(1;h) - \eta(1;2h)]$  berekend, welke is weergegeven in de vierde kolom. Blijkens de tabel is voor  $h = 1/2048$ :  $\eta(1;h) = 0.556754$  met een geschatte afbreekfout 0.0004. Daaruit leiden we af  $y(1) = 0.557$  in drie decimalen nauwkeurig. De vierde kolom van de tabel suggereert dat zelfs  $y(1) = 0.55716$  in 5 decimalen nauwkeurig. Beide uitkomsten stemmen overeen met de (langs andere weg berekende) exacte waarde  $y(1) = 0.55716175\dots$