TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij de colleges

Wiskunde 30 en 39

Met antwoorden

Najaarssemester 1981

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Wiskunde 30

bestemd voor WSK-III, N-III, W-III, E-III, T-III

Wiskunde 39

bestemd voor BDK-III, T-III

Dictaatnr. 2.258 Prijs *f* 8,50

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij de colleges

Wiskunde 30 en 39

met antwoorden

Dictaatnr. 2.260   Prijs *f* 7,00

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij de colleges
Wiskunde 30 en 39
Met antwoorden

Najaarssemester 1981

Inhoud

Aanvullende Inhoudsbeschrijving
Tentamenopgaven bij Wiskunde 30/39
1981

Verzamelde oudere Tentamenopgaven:

Tentamens 1976-1979:

JdG, 8 Juli 2005

Hoofdstuk 1. Lineaire algebra

1.1.1. Voor de lineaire afbeeldingen $\mathcal{A} : L \to L$ en $\mathcal{B} : L \to L$ geldt $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}$ en $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
Bewijs: $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}$.

1.1.2. Zij L de vectorruimte van alle polynomen p gedefinieerd op $(-\infty,\infty)$.
De afbeeldingen $\mathcal{A} : L \to L$ en $\mathcal{B} : L \to L$ zijn gedefinieerd door $\mathcal{A}p(x) := \frac{dp}{dx}$, $\mathcal{B}p(x) := xp(x)$.
Bewijs dat $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ lineaire afbeeldingen zijn en dat geldt $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{I}$.

1.1.3. L is de vectorruimte der op $[0,1]$ continue functies met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging.
De afbeelding $\mathcal{A} : L \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $\mathcal{A}f := f(0)$.

a) Toon aan dat $\mathcal{A}$ een lineaire afbeelding is.
b) Wat is de nulruimte N van $\mathcal{A}$?
c) Heeft $\mathcal{A}$ een inverse?
d) Als de functie f een oplossing van de vergelijking $\mathcal{A}x = c$ is, dan vinden wij alle oplossingen van de vergelijking door te nemen $x = f + n$ met $n \in N$.
Bewijs dit.

1.1.4. In $\mathbb{R}^2$ zijn gegeven de basisvectoren $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$.
Wat zijn de kolommen ten opzichte van deze basis van de volgende vectoren?

$$\underline{a} = \underline{e}_1$$
$$\underline{b} = \underline{e}_2$$
$$\underline{c} = \underline{e}_1 - \underline{e}_2$$
$$\underline{d} = \sqrt{3}\,\underline{e}_1 - \frac{1}{9}\,\underline{e}_2 \,.$$

1.1.5. De lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ t.o.v. de standaardbasis.}$$

Gevraagd:

a) dimensie beeldruimte ;

b) dimensie nulruimte ;

c) de vergelijking van de beeldruimte ;

d) de kolom van $\underline{x}$, als $A\underline{x}$ de kolom $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ heeft.

1.1.6. Gegeven zijn de lineaire afbeeldingen $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -11 & 8 & -7 \\ -8 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$ t.o.v. de standaardbasis.

Bepaal de matrices behorende bij de afbeeldingen AB en BA.

1.1.7. Gegeven is de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ t.o.v. de standaardbasis.

Bepaal de kolom van alle vectoren $\underline{x}$ die op zichzelf worden afgebeeld.

1.1.8. Zij $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ een basis van $\mathbb{R}^n$.
De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is als volgt gedefinieerd:

$$A\underline{e}_1 = \underline{0} \; ;$$

$$A\underline{e}_i = \underline{e}_{i-1} \quad \text{voor } i = 2,3,\ldots,n \; .$$

Wat is de matrix A van A t.o.v. $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$?
Toon aan dat $A^n\underline{x} = \underline{0}$ voor elke $\underline{x}$ uit $\mathbb{R}^n$.

1.1.9. Zij $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de loodrechte projectie op het vlak opgespannen door de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$, die resp. kolommen $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ hebben t.o.v. de standaardbasis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.

De vector $\underline{x}$ heeft de kolom $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.

a) Toon aan dat A een lineaire afbeelding is.

b) Bepaal de kolom van de vector $A\underline{e}_i$ voor $i = 1,2,3$.

c) Bepaal de matrix van A t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.

d) Bepaal de kolom van het beeld van $\underline{x}$.

e) Heeft A een inverse?

f) Bewijs $A^2 = A$.

1.1.10. Zij $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de spiegeling aan het vlak opgespannen door de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$, die resp. kolommen $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ hebben t.o.v. de standaardbasis.

V is het vlak $(\underline{p},\underline{x}) = 0$, waarbij $\underline{p}$ de kolom $\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix}$ heeft.

a) Toon aan dat deze afbeelding lineair is.

b) Wat is de matrix van A?

c) Wat is het beeld W onder de afbeelding A van het vlak V?

d) Als $\underline{p}$ de kolom $\begin{bmatrix}p\\-1\\0\end{bmatrix}$ heeft, voor welke waarde(n) van p is dan $W \perp V$?

e) Bewijs $A^2 = I$.

1.1.11. Zij L de vectorruimte van de polynomen $at^3 + bt^2 + ct + d$ van ten hoogste de derde graad.

De polynomen $1, t, t^2, t^3$ vormen een basis van L.

De afbeelding $\mathcal{D} : L \to L$ is gedefinieerd door

$$\mathcal{D}(at^3 + bt^2 + ct + d) := 3at^2 + 2bt + c\ .$$

a) Toon aan dat $\mathcal{D}$ een lineaire afbeelding is.

b) Wat is de matrix D van $\mathcal{D}$ t.o.v. de basis $1, t, t^2, t^3$?

c) Wat zijn de matrices van $\mathcal{D}^2$, $\mathcal{D}^3$ en $\mathcal{D}^4$?

1.1.12. Zij L de vectorruimte van de polynomen $at^3 + bt^2 + ct + d$ van ten hoogste de derde graad.
De afbeelding T: L $\to$ L is gedefinieerd door

$$T(at^3 + bt^2 + ct + d) := a(1 + t)^3 + b(1 + t)^2 + c(1 + t) + d \ .$$

a) Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.
b) Wat is de matrix T van T t.o.v. de basis $1, t, t^2, t^3$?
c) Toon aan dat $1, 1+t, (1+t)^2, (1+t)^3$ ook een basis van L is en bepaal de matrix van T t.o.v. deze basis.
d) Heeft T een inverse? Zo ja, wat zijn de matrices van $T^{\leftarrow}$ t.o.v. de bases $1, t, t^2, t^3$ en $1, 1+t, (1+t)^2, (1+t)^3$?

1.1.13. Laten U en V deelruimten zijn van de n-dimensionale vectorruimte L die alleen de nulvector gemeen hebben.

a) Bewijs dat $\dim U + \dim V \leq n$.
b) Als geldt $\dim U + \dim V = n$, dan is elke $\underline{x} \in L$ éénduidig te schrijven als $\underline{x} = \underline{u} + \underline{v}$ met $\underline{u} \in U$, $\underline{v} \in V$. Bewijs dit.

1.2.1. In $\mathbb{R}$ is een basis $\underline{e}_1$ gegeven.
Een andere basis $\underline{f}_1$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$ de kolom $[5]$.
Een vector $\underline{x}$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$ de kolom $[x]$.
Bepaal de overgangsmatrix S van de basis $\underline{e}_1$ op de basis $\underline{f}_1$.
Wat is de kolom van $\underline{x}$ t.o.v. $\underline{f}_1$?

1.2.2. In $\mathbb{R}^2$ is een basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ gegeven.
Een andere basis $\underline{f}_1, \underline{f}_2$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ resp. de kolommen $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$.
Bepaal de overgangsmatrix S van de basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ op de basis $\underline{f}_1, \underline{f}_2$.
Wat is de kolom t.o.v. $\underline{f}_1, \underline{f}_2$ van een vector $\underline{x}$, die t.o.v. $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ de kolom $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ heeft?
Maak dit duidelijk in een tekening voor het geval $x = 4$ en $y = 7$.

1.2.3. In $\mathbb{R}^3$ is een basis $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ gegeven. De vector $\underline{x}$ heeft t.o.v. deze basis de kolom $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$.

Een andere basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$ heeft t.o.v. de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ resp. de kolommen $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

Wat is de overgangsmatrix S van de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ op de basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$?
Wat is de kolom van $\underline{x}$ t.o.v. $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$?

1.2.4. In $\mathbb{R}^3$ is een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ gegeven.
Een andere basis $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ resp. de kolommen

$$\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}g_1\\g_2\\g_3\end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{bmatrix}.$$

Wat is de kolom t.o.v. $\underline{f}$, $\underline{g}$, $\underline{h}$ van een vector $\underline{x}$, die t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de kolom $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ heeft?

1.2.5. Gegeven is de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met de matrix

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\\0 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

t.o.v. een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.
Men gaat over op de basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$ met resp. de kolommen $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix}$
t.o.v. de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.
Gevraagd de matrix van A t.o.v. de basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$.

1.2.6. Gegeven is de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met t.o.v. de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de matrix

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 1 & 3\\3 & 1 & 4\end{bmatrix}.$$

Men gaat over op de basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$, waarbij de overgangsmatrix

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

behoort.

Wat is de matrix van A t.o.v. $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$?

De vector $\underline{x}$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de kolom $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Wat is de kolom van de beeldvector $A\underline{x}$ t.o.v. de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ en t.o.v. de basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$?

1.2.7. Gegeven zijn de afbeelding A en de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ van opgave 1.1.9.

De vector $\underline{c}$ heeft de kolom $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ t.o.v. de standaardbasis.

Ten opzichte van de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ heeft A de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Ga dit na.

1.2.8. Gegeven zijn de afbeelding A en de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ van opgave 1.1.10.

De vector $\underline{c}$ heeft de kolom $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ t.o.v. de standaardbasis.

Wat is de matrix van A t.o.v. de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$?

1.2.9. In $\mathbb{R}^n$ zijn drie bases $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$; $\underline{f}_1,\dots,\underline{f}_n$ en $\underline{g}_1,\dots,\underline{g}_n$ gegeven. De overgangsmatrix van $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ op $\underline{f}_1,\dots,\underline{f}_n$ zij S en die van $\underline{g}_1,\dots,\underline{g}_n$ op $\underline{f}_1,\dots,\underline{f}_n$ zij T.
De lineaire afbeelding A heeft t.o.v. $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ de matrix A.
Druk de matrix B van A t.o.v. $\underline{g}_1,\dots,\underline{g}_n$ uit in A, S en T.

1.2.10. Zij L gedefinieerd als in opgaven 1.1.11 en 1.1.12 en de afbeeldingen $\mathcal{D}$ en $\mathcal{T}$ eveneens.
Laat zien dat voor de matrix D' van $\mathcal{D}$ t.o.v. de basis 1, $1+t$, $(1+t)^2$, $(1+t)^3$ geldt $D' = T^{-1}DT$.

1.3.1. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft t.o.v. de standaardbasis de matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Bepaal een onafhankelijk stelsel eigenvectoren.

1.3.2. Van een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zijn gegeven de eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -2$. De kolommen van de hierbij behorende eigenvectoren zijn resp.
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ t.o.v. een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.
Verder is $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$ de kolom van het beeld van de eerste basisvector.
Bepaal:

a) de matrix van A t.o.v. de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$;
b) de derde eigenwaarde en de kolom van de bijbehorende eigenvector.

1.3.3. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft t.o.v. de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} .$$

Bepaal de eigenwaarden van A en de kolommen der eigenvectoren $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.
Neem $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ als nieuwe basis voor $\mathbb{R}^3$. Zij S de overgangsmatrix.
Controleer dat $S^{-1}AS$ een diagonaalmatrix is.

1.3.4. Bepaal de eigenwaarden en de eigenvectoren van de afbeeldingen A uit opgaven 1.1.9 en 1.1.10.
Wat is de meetkundige interpretatie hiervan?

1.3.5. Bepaal een matrix S zodanig dat $S^{-1}AS$ een diagonaalmatrix is en bereken $S^{-1}AS$ voor

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

1.3.6. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft t.o.v. een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Bepaal de eigenwaarden van A en de kolommen der eigenvectoren.
b) Wat is de matrix van de lineaire afbeelding A^7 t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$?

1.3.7. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heeft de eigenwaarden $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.
• Toon aan dat de lineaire afbeelding $B = A + cI$ de eigenwaarden $\lambda_1 + c,\dots,\lambda_n + c$ heeft ($c \in \mathbb{R}$).

1.3.8. Zij N de nulruimte van de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
A heeft een eigenwaarde $\lambda = 0$ dan en slechts dan als dim $N \geq 1$ is.
Bewijs dit.

1.3.9. A en B zijn lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ met een gemeenschappelijk stelsel onafhankelijke eigenvectoren $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_n$. Hoe zien de matrices van A en B er uit t.o.v. de basis $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_n$?
Toon aan dat $AB = BA$.

1.3.10. L is de vectorruimte van alle lineaire combinaties van de functies e^t en e^{2t}.
$\mathcal{D} : L \to L$ is de lineaire afbeelding die aan een functie uit L zijn afgeleide naar t toevoegt.
Wat zijn de eigenwaarden van $\mathcal{D}$?

1.3.11. De inverteerbare lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heeft eigenwaarden $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$.
Wat zijn de eigenwaarden van $A^{\leftarrow}$?
Wat zijn de eigenvectoren hierbij?

1.3.12. A en B zijn lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en A is inverteerbaar.
Toon aan dat $A^{\leftarrow}B$ en $BA^{\leftarrow}$ dezelfde eigenwaarden hebben.

1.3.13. A en B zijn lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die voldoen aan $AB = BA$;
λ is een eigenwaarde van A met eigenvector $\underline{v}$.
Als $B\underline{v} \neq \underline{0}$, dan is $B\underline{v}$ ook een eigenvector van A bij de eigenwaarde λ.
Bewijs dit.

1.3.14. A is een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met t.o.v. zekere basis de matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Het spoor van A is gedefinieerd door $\mathrm{sp}(A) := \sum_{i=1}^{3} a_{ii}$.
Zij S de overgangsmatrix naar een andere basis.
Bewijs dat $\mathrm{sp}(A) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i$ als λ_1, λ_2 en λ_3 de wortels van de karakteristieke vergelijking van A zijn.
Bewijs dat $\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(S^{-1}AS)$.
Zoudt U het spoor van de lineaire afbeelding A kunnen definiëren?

1.3.15. Het spoor van een n×n matrix A wordt gedefinieerd door $\mathrm{sp}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
(verg. vorige opgave).

a) Laat zien dat sp(AB) = sp(BA) als A en B n×n matrices zijn.
b) Laat zien dat voor twee lineaire afbeeldingen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ niet kan gelden $AB - BA = I$.

1.4.1. Zij L een vectorruimte met inproduct. Bewijs dat voor alle $\underline{x} \in L$, $\underline{y} \in L$ geldt:

a) $$|\underline{x} + \underline{y}| \le |\underline{x}| + |\underline{y}| \; ;$$

b) $$|\underline{x} + \underline{y}|^2 + |\underline{x} - \underline{y}|^2 = 2|\underline{x}|^2 + 2|\underline{y}|^2 \, .$$

Wat is de meetkundige betekenis als $L = \mathbb{R}^3$?

1.4.2. De vectoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ in een vectorruimte met inproduct zijn twee aan twee orthogonaal en alle ongelijk de nulvector. Bewijs dat $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ onafhankelijk zijn.

1.4.3. In $\mathbb{R}^3$ wordt een vector $\underline{x}$ geprojecteerd op het vlak opgespannen door de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$. Als de projectie $\underline{y}$ geschreven wordt als $\underline{y} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$, toon dan aan dat

$$\alpha = \frac{(\underline{x},\underline{a})(\underline{b},\underline{b}) - (\underline{x},\underline{b})(\underline{a},\underline{b})}{(\underline{a},\underline{a})(\underline{b},\underline{b}) - (\underline{a},\underline{b})^2}$$

en

$$\beta = \frac{(\underline{x},\underline{b})(\underline{a},\underline{a}) - (\underline{x},\underline{a})(\underline{a},\underline{b})}{(\underline{a},\underline{a})(\underline{b},\underline{b}) - (\underline{a},\underline{b})^2} \, .$$

1.4.4. Zij L een vectorruimte met inproduct. Voor de vectoren $\underline{a} \in L$, $\underline{b} \in L$ geldt $|\underline{a}| = |\underline{b}|$.
Bewijs dat $\underline{a} - \underline{b}$ en $\underline{a} + \underline{b}$ orthogonaal zijn.
Wat is de meetkundige betekenis als $L = \mathbb{R}^3$?

1.4.5. Voor het orthoplement V van een vector $\underline{v}$ in een vectorruimte L met inproduct geldt V = L.
Bewijs dat $\underline{v} = \underline{0}$ is.

1.4.6. L is de vectorruimte der op $[-1,1]$ continue functies. Ga voor elk van de volgende definities na of (f,g) voldoet aan de eisen voor een inproduct.

a) $$(f,g) := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt \quad ;$$

b) $$(f,g) := \int_{-1}^{1} t^2 f(t)g(t)dt;$$

c) $$(f,g) := \int_{0}^{1} t^2 f(t)g(t)dt \; .$$

1.4.7. In $\mathbb{R}^3$ is gegeven de vector $\underline{a}$ met kolom $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ t.o.v. een orthonormale basis.
Construeer met behulp van het orthonormalisatieproces van Gram-Schmidt een orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$ waar $\underline{a}$ deel van uitmaakt.

1.4.8. In $\mathbb{R}^4$ zijn gegeven drie vectoren met kolommen $\begin{bmatrix}1\\2\\2\\4\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\2\\2\\1\end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix}1\\-2\\-8\\-4\end{bmatrix}$ t.o.v. een orthonormale basis.
Construeer een orthonormale basis van de deelruimte opgespannen door deze drie vectoren. Hoe zoudt U de gevonden basis aanvullen tot een orthonormale basis van $\mathbb{R}^4$?

1.4.9. L is de vectorruimte van alle lineaire combinaties van de functies e^t en e^{2t}.
Construeer een basis van functies die volgens het inproduct

$$(f,g) := \int_{0}^{1} f(t)g(t)dt$$ (ga na dat dit inderdaad een inproduct is)

orthogonaal zijn.

1.4.10. L is de vectorruimte van alle polynomen van de graad ≤ 3 op $[0,\infty)$.

Er is gedefinieerd $$(f,g) := \int_{0}^{\infty} e^{-t} f(t)g(t)dt \; .$$

a) Ga na dat (f,g) een inproduct is.
b) Bepaal, uitgaande van de basis 1, t, t^2, t^3, een orthonormale basis van L met het orthonormalisatieproces van Gram-Schmidt.

1.4.11. Zij L een vectorruimte met inproduct met dimensie n en zij M een deelruimte van L met dimensie m.
Het orthogonale complement van M zij $M^{\perp}$.

a) Toon aan dat M en $M^{\perp}$ alleen de nulvector gemeen hebben.

b) Wat is de dimensie van $M^{\perp}$?

1.4.12. In $\mathbb{R}^5$ wordt de deelruimte U opgespannen door de vectoren met kolommen
$\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$ t.o.v. een orthonormale basis.

a) Bepaal een basis van het orthogonale complement van U.

b) Bepaal de loodrechte projectie op U van de vector met kolom $\begin{bmatrix}8\\0\\2\\-7\\-4\end{bmatrix}$.

1.4.13. L is de vectorruimte van alle polynomen op het interval [0,1].

Er is gedefinieerd $(f,g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

a) Is L een vectorruimte met inproduct?

b) Bepaal een polynoom in de deelruimte M, opgespannen door de polynomen t en $1-t$, dat loodrecht staat op t.

c) Geef een tweedegraadspolynoom aan dat loodrecht staat op M.

d) Bepaal de projectie van t^2 op M.

1.4.14. Zij L een vectorruimte met inproduct van eindige dimensie.
Het stelsel vectoren $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_m$ in L zij orthonormaal.
Als voor alle $\underline{x} \in L$ geldt $(\underline{x},\underline{x}) = \sum_{k=1}^{m} (\underline{x},\underline{v}_k)^2$ dan is $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_m$ een orthonormale basis van L.
Bewijs dit.

1.4.15. Zij L een vectorruimte met inproduct van eindige dimensie.
Een lineaire afbeelding $A : L \to L$ heet orthogonaal als voor alle $\underline{x} \in L$ geldt $|A\underline{x}| = |\underline{x}|$.
Bewijs dat de volgende beweringen gelijkwaardig zijn:
a) A is orthogonaal;
b) voor alle $\underline{x} \in L$, $\underline{y} \in L$ geldt $(A\underline{x}, A\underline{y}) = (\underline{x},\underline{y})$;
c) A is inverteerbaar en voor $A^{\leftarrow}$ geldt

$$(A\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},A^{\leftarrow}\underline{y}) \text{ voor alle } \underline{x} \in L,\ \underline{y} \in L.$$

Zie ook college Wiskunde 20, 3.9.1.

1.4.16. Zij L een vectorruimte met inproduct van eindige dimensie.
Bewijs de stelling:
Een lineaire afbeelding $A : L \to L$ is dan en slechts dan orthogonaal als de matrix van A t.o.v. een orthonormale basis van L orthogonaal is.

1.4.17. Zij L een vectorruimte met inproduct van eindige dimensie.
De lineaire afbeelding $A : L \to L$ heeft t.o.v. een orthonormale basis van L de matrix A.
$A^* : L \to L$ is de lineaire afbeelding die t.o.v. deze basis de matrix A^T heeft.
Toon aan dat A^*A t.o.v. deze basis dan en slechts dan een diagonaalmatrix heeft als de kolommen van A twee aan twee orthogonaal zijn.

1.4.18. Laat M de deelruimte van $\mathbb{R}^4$ zijn, opgespannen door $[1,2,2,4]^T$, $[3,2,2,1]^T$ en $[1,-2,-8,-4]^T$.
Bepaal de projecties van de vectoren $[5,2,-4,1]^T$ en $[10,-9,6,9]^T$ op M.
(Zie ook opgave 1.4.8.)

1.4.19. Zij L de vectorruimte van de continue functies op $[0,1]$ met inproduct

$$(f,g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Laat M de deelruimte zijn van alle polynomen met graad ≤ 2.
Bepaal de projectie van de functie $\cos 2\pi t$ op M.

1.5.1. Zij L een vectorruimte met inproduct.
$A : L \to L$ is een afbeelding. Voor alle $\underline{x} \in L$, $\underline{y} \in L$ geldt

$$(A\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},A\underline{y}) .$$

Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.

1.5.2. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is symmetrisch.
Is de matrix van A t.o.v. een willekeurige basis symmetrisch? Zo neen, construeer een tegenvoorbeeld.

1.5.3. De lineaire afbeeldingen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zijn symmetrisch.
Bewijs dat AB symmetrisch is dan en slechts dan als $AB = BA$.

1.5.4. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is symmetrisch.
Bewijs:
a) Als A inverteerbaar is, dan is $A^{\leftarrow}$ symmetrisch.
b) Als $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ orthogonaal is, dan is $B^{\leftarrow}AB$ symmetrisch.
c) Als $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ symmetrisch is, dan is BAB symmetrisch.

1.5.5. Zij L de vectorruimte van de op $[0,1]$ willekeurig vaak differentieerbare functies f waarvoor geldt $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$.
De afbeelding $A : L \to L$ is gedefinieerd door

$$Af := -(rf')' + sf,$$

waarin $r \in L$, $s \in L$ gegeven niet-negatieve functies zijn.
Verder is gedefinieerd

$$(f,g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt, \quad f \in L, g \in L .$$

a) Bewijs dat L een vectorruimte met inproduct is.
b) Bewijs dat A een symmetrische lineaire afbeelding is.
c) Bewijs dat voor alle $f \in L$ geldt $(Af,f) \geq 0$.

1.5.6. Van een symmetrische lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is de nulruimte het orthogonale complement van de beeldruimte. Toon dit aan.

1.5.7. Gegeven is de lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ met matrix A t.o.v. een orthonormale basis $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ van $\mathbb{R}^n$.
A^*: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is gedefinieerd als de lineaire afbeelding die t.o.v. deze basis de matrix A^T heeft.

a) Laat zien dat de definitie van A^* onafhankelijk van de keuze van de orthonormale basis is.
b) Bewijs dat $(A^*)^* = A$.
c) Bewijs dat voor elk tweetal vectoren $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ geldt $(A\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},A^*\underline{y})$.
d) Als B: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding is zo dat voor elk tweetal vectoren $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ geldt $(A\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},B\underline{y})$, dan is $B = A^*$. Bewijs dit.
e) Bewijs dat A symmetrisch is dan en slechts dan als $A^* = A$.

1.5.8. N(A) en B(A) zijn respectievelijk de nulruimte en de beeldruimte van een lineaire afbeelding A : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
De afbeelding A^* wordt gedefinieerd als in opgave 1.5.7.
Toon aan dat geldt
a) N(A^*) is het orthogonale complement van B(A);
b) B(A^*) is het orthogonale complement van N(A).

1.5.9. Zij A : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding. De afbeelding A^* is gedefinieerd als in opgave 1.5.7.
Toon aan:

a) A^*A is symmetrisch;
b) $(A^*A\underline{x},\underline{x}) \geq 0$ voor alle $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$;
c) de eigenwaarden van A^*A zijn ≥ 0.

1.5.10. De lineaire afbeelding B: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is symmetrisch en alle eigenwaarden van B zijn ≥ 0.
Toon aan dat er een lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bestaat, zodanig dat $A^2 = B$ is.

1.5.11. De lineaire afbeelding A : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heeft t.o.v. een orthonormale basis een matrix A, waarvan de kolommen twee aan twee orthogonaal zijn.
Toon aan:

a) $A = A_1A_2$, waarbij A_1 een orthogonale matrix is en A_2 een diagonaalmatrix.
b) $A = A_1A_2$, waarbij A_1 een orthogonale afbeelding en A_2 een symmetrische afbeelding is.

1.5.12. Gegeven de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Kies een orthonormale basis, bestaande uit eigenvectoren van de symmetrische afbeelding A^*A.
Toon aan dat de kolommen van de matrix van A t.o.v. deze basis twee aan twee orthogonaal zijn (zie ook opgave 1.4.17).

1.5.13. Zij $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een symmetrische lineaire afbeelding, waarvan alle eigenwaarden ≥ 0 zijn.
Bepaal alle lineaire afbeeldingen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zo dat $A^*A = B$.
(Gebruik opgave 1.4.17 en opgaven 1.5.10 en 1.5.11.)

1.5.14. Elke lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is te schrijven als het product van een orthogonale afbeelding en een symmetrische afbeelding (combineer opgaven 1.5.11 en 1.5.12).

1.5.15. Zij $A : L \to L$ een symmetrische lineaire afbeelding met eigenwaarden λ_1, λ_2 en bijbehorende eigenvectoren $\underline{v}_1, \underline{v}_2$. Als $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dan zijn $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ orthogonaal. Bewijs dit.

1.5.16. Laat zien dat de lineaire afbeelding A uit opgave 1.1.9 symmetrisch is en dat $(A\underline{v},\underline{v}) \geq 0$ voor alle $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$. Wat is van dit laatste de meetkundige betekenis?
Algemeen geldt: zij $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de orthogonale projectie op een vlak V door de oorsprong, dan is A symmetrisch en $(A\underline{v},\underline{v}) \geq 0$ voor alle $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$. Toon dit aan.

1.5.17. Laat zien dat de lineaire afbeelding A uit opgave 1.1.10 symmetrisch is.
Geldt algemeen dat spiegeling aan een vlak door de oorsprong in $\mathbb{R}^3$ een symmetrische afbeelding is?

1.5.18. Breng op diagonaalvorm met behulp van een orthogonale matrix:

a) $$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} ;$$

b) $$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

1.5.19. Laten $P_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $P_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de projecties zijn van $\mathbb{R}^3$ op de rechten met parametervoorstelling $\underline{x} = \lambda\underline{a}$, $\underline{x} = \mu\underline{b}$, waarbij $|\underline{a}| = |\underline{b}| = 1$.
Bewijs dat de afbeelding $P_1 + P_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ een projectie is dan en slechts dan als $(\underline{a},\underline{b}) = 0$.

1.5.20. Zij L een vectorruimte met inproduct. Laten $P_1 : L \to L$, $P_2 : L \to L$ projecties zijn van L op deelruimten van L van eindige dimensie.
Bewijs dat geldt

a) $P_1 + P_2$ is een projectie dan en slechts dan als

$$P_1P_2 = P_2P_1 = 0 \;;$$

b) $P_1 - P_2$ is een projectie dan en slechts dan als

$$P_1P_2 = P_2P_1 = P_2 \;.$$

1.5.21. Zij L een vectorruimte van eindige dimensie met inproduct en zij $A : L \to L$ een symmetrische lineaire afbeelding.
Bewijs dat A geschreven kan worden in de vorm $A = BP$, waarbij B een inverteerbare symmetrische afbeelding is en P de projectie van L op de beeldruimte van A.

1.6.1. A is de projectie uit opgave 1.1.9, A de in die opgave bepaalde matrix t.o.v. de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$ en $(A\underline{x},\underline{x})$ de bij A behorende kwadratische vorm.
Ten opzichte van de basis $\underline{a} = [1,0,1]^T$, $\underline{b} = [1,2,1]^T$, $\underline{c} = [1,0,-1]^T$ heeft de vector $\underline{x} = [x_1,x_2,x_3]^T$ de kolom $X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$.

a) Bepaal de matrix A' van A t.o.v. $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.
b) Schrijf $(A\underline{x},\underline{x})$ als kwadratische vorm in x_1, x_2, x_3.
c) Schrijf $(A\underline{x},\underline{x})$ als kwadratische vorm in x_1', x_2', x_3'.
d) Bereken $(X')^TA'X'$.
e) Waarom geven c) en d) een verschillend resultaat?

1.6.2. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de orthogonale projectie op een vlak door de oorsprong. Wat is het type van het kwadratisch oppervlak met vergelijking $(A\underline{x},\underline{x}) = 1$?

1.6.3. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de spiegeling aan een vlak door de oorsprong. Wat is het type van de kwadratische oppervlakken gegeven door de vergelijkingen $(A\underline{x},\underline{x}) = 1$ resp. $(A\underline{x},\underline{x}) = 0$?

1.6.4. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is een symmetrische lineaire afbeelding. Beschouw het kwadratisch oppervlak S in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijking $(A\underline{x},\underline{x}) = 1$.

a) Bewijs dat de middens van de koorden, die door S worden uitgesneden uit het stelsel evenwijdige rechten $\underline{x} = \underline{m} + t\underline{v}$ ($\underline{v}$ vast, $\underline{m}$ variabel), in het vlak $(A\underline{v},\underline{x}) = 0$ liggen.
Dit vlak heet het t.o.v. S aan $\underline{v}$ toegevoegde vlak. (Als $A\underline{v} = \underline{0}$ definiëren we het toegevoegde vlak als $(\underline{v},\underline{x}) = 0$).

b) Als $\underline{v}$ eigenvector van A is, dan is het aan $\underline{v}$ toegevoegde vlak symmetrievlak van S. Bewijs dit.

1.6.5. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is een symmetrische lineaire afbeelding, $(A\underline{x},\underline{x})$ de bij A behorende kwadratische vorm.
Toon aan:

$$\max_{|\underline{x}|=1} (A\underline{x},\underline{x}) = \text{grootste eigenwaarde van } A \; ;$$

$$\min_{|\underline{x}|=1} (A\underline{x},\underline{x}) = \text{kleinste eigenwaarde van } A \; .$$

1.6.6. Bepaal het type van de kwadratische krommen in $\mathbb{R}^2$ gegeven door de volgende vergelijkingen:

a) $7x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x - 12y - 9 = 0$,

b) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 7x + 4y + 9 = 0$.

1.6.7. Bepaal het type van de kwadratische oppervlakken in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de volgende vergelijkingen:

a) $6x^2 + y^2 - 8xz - 4x - 2y = 0$,

b) $z^2 + 4xy - 2z + 1 = 0$,

c) $x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz + 2x + 2y - 6z + 1 = 0$,

d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4x + 8y + 4z = 0$,

e) $7x^2 + 4y^2 + 7z^2 - 4xy + 8xz - 4yz + 4x - 8y + 4z - 8 = 0$,

f) $x^2 + z^2 + 2xz - z = 0$,

g) $xy + xz + yz = 0$.

Hoofdstuk 2. Functies $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

2.1.1. Door de betrekkingen

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 , \\ v = x + y , \end{cases}$$

wordt een vectorfunctie van $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd.

a) Bewijs dat deze vectorfunctie continu is op het hele (x,y)-vlak.

b) Bewijs dat het beeld van elk punt (x,y) binnen of op de parabool met vergelijking $v^2 = 2u$ ligt.

c) Bepaal het beeld van het halfvlak $x \geq y$.

2.1.2. Door de betrekkingen

$$\begin{cases} u = x + y , \\ v = x - y , \\ w = x^2 , \end{cases}$$

wordt een vectorfunctie van $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ gedefinieerd.

a) Bewijs dat deze vectorfunctie continu is op het hele (x,y)-vlak.

b) Bewijs dat het (x,y)-vlak wordt afgebeeld in het oppervlak met vergelijking $(u+v)^2 = 4w$.

c) Bepaal het beeld van het halfvlak $x \geq 0$.

d) Bewijs dat elk punt (u,v,w) van het oppervlak met vergelijking $(u+v)^2 = 4w$ beeldpunt is van precies één punt in het (x,y)-vlak.

2.1.3. Onderzoek de continuïteit van de volgende vectorfuncties:

a) $f(\underline{x}) = f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad (\underline{x} \neq \underline{0}) \; ; \; f(\underline{0}) = 0;$

b) $f(\underline{x}) = f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^4} \quad (\underline{x} \neq \underline{0}) \; ; \; f(\underline{0}) = 0;$

c) $f(\underline{x}) = f(x,y) = xy \log(x^2 + y^2) \quad (\underline{x} \neq \underline{0}) \; ; \; f(\underline{0}) = 0;$

d) $f(\underline{x}) = f(x,y) = \exp\left[-\frac{1}{|x-y|}\right]$ $(x \neq y)$; $f(x,x) = x$;

e) $\underline{u}(\underline{x}) = (u_1(x,y), u_2(x,y)) = \left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}, \frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)$ $(\underline{x} \neq \underline{0})$; $\underline{u}(\underline{0}) = \underline{0}$.

2.2.1. De vectorfunctie $\underline{f}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ wordt gedefinieerd door de betrekkingen

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x + y^2 , \\ f_2(x,y) = xy , \\ f_3(x,y) = x^2 + y . \end{cases}$$

Bewijs met definitie 2.2.1 dat $\underline{f}$ differentieerbaar is in het punt $\underline{a} = (1,2)$.

2.2.2. Bereken de functionaalmatrices van de volgende vectorfuncties in het opgegeven punt $\underline{a}$:

a) $f(x,y) = 3x^2y - xy^3 + 2$, $\quad \underline{a} = (1,2)$;

b) $f(x,y,z) = x^2yz + 3xz^2$, $\quad \underline{a} = (1,2,-1)$;

c) $\begin{cases} f_1(x,y,z) = x^2 + y - z , \\ f_2(x,y,z) = xyz^2 , \\ f_3(x,y,z) = 2xy - y^2z , \end{cases}$ $\quad \underline{a} = (1,1,1)$;

d) $\begin{cases} f_1(x,y,z) = xyz^2 - 4y^2 , \\ f_2(x,y,z) = 3xy^2 - y^2z , \end{cases}$ $\quad \underline{a} = (1,-2,3)$;

e) $\begin{cases} f_1(x,y) = x + 6y , \\ f_2(x,y) = 3xy , \\ f_3(x,y) = x^2 - 3y^2 . \end{cases}$ $\quad \underline{a} = (1,1)$.

2.2.3. Onderzoek de differentieerbaarheid van de vectorfuncties uit opgave 2.1.3.

2.2.4. Beschouw de vectorfunctie $\underline{f}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door de betrekkingen:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x(1-r^2)^{-\frac{1}{2}} , \\ f_2(x,y,z) = y(1-r^2)^{-\frac{1}{2}} , \\ f_3(x,y,z) = z(1-r^2)^{-\frac{1}{2}} , \text{ waarin } r^2 = x^2+y^2+z^2 < 1 . \end{cases}$$

Bereken

$$\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)} .$$

2.2.5. Een complexe functie $w = f(z)$ van een complexe veranderlijke kan men opvatten als een vectorfunctie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ door te stellen $w = u+iv$, $z = x+iy$.
Beschouw de functie $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x-iy}$.
Schrijf u en v als functies van x en y.
Bewijs dat de Jacobiaan van deze functie gelijk is aan $-|z|^{-4}$ en schrijf x en y als functies van u en v.

2.2.6. Een kromme in $\mathbb{R}^3$ is gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} t^4 , \\ y = \frac{1}{3} t^3 , \\ z = t . \end{cases}$$

Bepaal de punten van de kromme waarin de raaklijn evenwijdig is met het vlak met vergelijking $x+3y-4z = 0$.

2.2.7. Een kromme in $\mathbb{R}^3$ is gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = \sin t + \cos t , \\ y = \sin t - \cos t , \\ z = e^{-t} . \end{cases}$$

Bewijs dat alle raaklijnen aan de kromme het (x,y)-vlak snijden op de cirkel met vergelijking $x^2+y^2 = 4$.

2.2.8. Een deeltje in $\mathbb{R}^3$ bevindt zich op het tijdstip t in het punt P. De vector $\vec{\mathcal{O}P}$, van de oorsprong $\mathcal{O}$ naar P (de plaatsvector), is dan een vectorfunctie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$: $\vec{\mathcal{O}P} = \underline{x}(t)$.
Zij $\underline{x}(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

a) Schets de baan van het deeltje.

b) Bereken de snelheid $\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt}$ en schets die voor $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$.

c) Bereken de versnelling $\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}$ en schets die voor $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$.

2.2.9. Op een massapunt P in $\mathbb{R}^3$ (massa m, plaatsvector $\underline{x}(t)$) werkt de kracht $\underline{K} = (0,0,-mg)$. Volgens de wet van Newton geldt $\underline{K} = m\underline{a} = m \frac{d^2\underline{x}}{dt^2}$.
Bereken $\underline{x}(t)$ als gegeven is $\underline{x}(0) = (0,0,0)$, $\frac{d\underline{x}}{dt}(0) = (1,1,1)$.
Bewijs dat de som van potentiële energie (mgz) en kinetische energie ($\frac{1}{2}m|\underline{v}|^2$) constant is en dat de baan van P een parabool is.

2.2.10. Gegeven is de vectorfunctie $\underline{f}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$\begin{cases} f_1(x,y) = \frac{1}{5}(x^2 - x - y^2) , \\ f_2(x,y) = \frac{1}{5}(2xy - y) . \end{cases}$$

Er geldt $\underline{f}(2,2) = (-\frac{2}{5}, \frac{6}{5})$.
Bewijs dat de beelden van twee krommen die elkaar in (2,2) onder een hoek α snijden, elkaar in $\frac{1}{5}(-2,6)$ onder dezelfde hoek snijden.

2.2.11. Zij $\underline{f}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ een differentieerbare vectorfunctie en zij $t = t(s)$ een differentieerbare functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dan geldt voor de samengestelde functie $\underline{f}(t(s))$: $\frac{d\underline{f}}{ds} = \frac{d\underline{f}}{dt}\frac{dt}{ds}$, met andere woorden:

de raaklijnrichting van een kromme is onafhankelijk van de parameterkeuze.
Ga dit na.

2.2.12. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differentieerbaar met $[\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}] \neq [0,0]$ voor alle $(u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$

Laat voor de differentieerbare functies $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ gelden

$f(u_1(x,y),\ u_2(x,y)) = 0$ voor alle x en y.

Dan geldt $\frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(x,y)} = 0$.

Bewijs dit.

2.2.13. Zij $\underline{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\underline{y} = \underline{g}(\underline{x})$, $\underline{z} = \underline{f}(\underline{u})$ gedefinieerd door de betrekkingen:

$$\begin{cases} y_1 = x_1x_2 , \\ y_2 = 2x_1 , \\ y_3 = -x_2 . \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = u_1 - u_2 , \\ z_2 = u_2u_3 . \end{cases}$$

Bewijs dat $\underline{f}$ en $\underline{g}$ differentieerbaar zijn en dat de samengestelde functies $\underline{f} \circ \underline{g}$ en $\underline{g} \circ \underline{f}$ beide bestaan.

Bepaal de functionaalmatrices van $\underline{f} \circ \underline{g}$ en $\underline{g} \circ \underline{f}$.

2.3.1. Beschouw de vectorfunctie van $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ gegeven in opgave 2.1.1.

Zij (x_0,y_0) een punt met $x_0 \neq y_0$ en beeldpunt (u_0,v_0).

Bewijs dat in een omgeving van (u_0,v_0) de inverse functie

$$\begin{cases} x = g_1(u,v) , \\ y = g_2(u,v) , \end{cases}$$

bestaat en bepaal de functionaalmatrix van deze functie.

Bepaal g_1,g_2 expliciet, bereken $\frac{\partial g_1}{\partial u}$, $\frac{\partial g_1}{\partial v}$, $\frac{\partial g_2}{\partial u}$, $\frac{\partial g_2}{\partial v}$ en controleer de gevonden functionaalmatrix.

2.3.2. Beschouw de vectorfunctie van $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$\begin{cases} u = x^2 + y - z , \\ v = xyz^2 , \\ w = 2xy - y^2z . \end{cases}$$

Bewijs dat in een omgeving van het punt $(x,y,z) = (0,1,1)$ de inverse functie

$$\begin{cases} x = g_1(u,v,w) , \\ y = g_2(u,v,w) , \\ z = g_3(u,v,w) , \end{cases}$$

bestaat en bereken de partiële afgeleiden $\frac{\partial g_i}{\partial u}$, $\frac{\partial g_i}{\partial v}$, $\frac{\partial g_i}{\partial w}$ $(i = 1,2,3)$ in het punt $(u,v,w) = (0,0,-1)$.

2.3.3. Beschouw de vectorfunctie van $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de betrekkingen

$$\begin{cases} u = x(1-r^2)^{-\frac{1}{2}} , \\ v = y(1-r^2)^{-\frac{1}{2}} , \\ w = z(1-r^2)^{-\frac{1}{2}} , \quad \text{waarin } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} < 1 . \end{cases}$$

Ga na dat de inverse functie

$$\begin{cases} x = g_1(u,v,w) , \\ y = g_2(u,v,w) , \\ z = g_3(u,v,w) , \end{cases}$$

in de gehele (u,v,w)-ruimte gedefinieerd is.
Zie ook opgave 2.2.4.

2.3.4. Een kromme in $\mathbb{R}^3$ wordt beschreven door de vergelijkingen

$$\begin{cases} x^2 + 2y + z = 1 , \\ x^2 - y^2 + 4z^2 = 16 . \end{cases}$$

Bepaal een parametervoorstelling van de raaklijn aan de kromme in het punt $(1,-1,2)$.
Laat zien dat er geen functies $x = g(z)$, $y = h(z)$ bestaan die de kromme in een omgeving van $(1,-1,2)$ beschrijven.

2.3.5. Een kromme in $\mathbb{R}^3$ wordt beschreven door de vergelijkingen

$$\begin{cases} xy + xz = 2 , \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1 . \end{cases}$$

Bewijs dat de kromme in het punt $(1,1,1)$ raakt aan het oppervlak met vergelijking $x^2 - xyz + 6y = 6$.

2.3.6. Bewijs dat voor $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ met $a > 1$, $0 < b < 1$ geldt: de ellipsoïde met vergelijking

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 - 1} = 1$$

en de éénbladige hyperboloïde met vergelijking

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{1 - b^2} = 1$$

snijden elkaar loodrecht.

2.3.7. Beschouw het stelsel van twee functies

$$\begin{cases} u = x + y + z + t \ , \\ v = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \ . \end{cases}$$

Voor $(x,y,z,t) = (1,0,0,0)$ geldt $(u,v) = (1,1)$. Bewijs dat in een omgeving van het punt $(u,v,z,t) = (1,1,0,0)$ functies $x = \varphi(u,v,z,t)$, $y = \psi(u,v,z,t)$ bestaan, zodanig dat

$$\begin{cases} u = \varphi(u,v,z,t) + \psi(u,v,z,t) + z + t \ , \\ v = (\varphi(u,v,z,t))^2 + (\psi(u,v,z,t))^2 + z^2 + t^2 \ , \end{cases}$$

en bepaal de partiële afgeleiden van φ, ψ naar u, v, z, t.

2.3.8. Aan de twee vergelijkingen

$$\begin{cases} f_1(x,y;\ z,t) = x + y^3 + z^2 + t = 0 \ , \\ f_2(x,y;\ z,t) = 3x^2 + 2y + z + t^5 = 0 \ , \end{cases}$$

wordt onder meer voldaan door $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$.

Bewijs dat in een omgeving van $(0,0)$ functies $x = \psi_1(z,t)$, $y = \psi_2(z,t)$ bestaan, zodanig dat

$$\psi_1(0,0) = \psi_2(0,0) = 0 \ ,$$

$$f_1(\psi_1(z,t),\ \psi_2(z,t);\ z,t) = f_2(\psi_1(z,t),\ \psi_2(z,t);\ z,t) = 0 \ .$$

Zij $B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{bmatrix}$ en $A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$.

Bewijs dat voor de functionaalmatrix C van de vectorfunctie gegeven door

$$\begin{cases} x = \psi_1(z,t) \ , \\ y = \psi_2(z,t) \ , \end{cases}$$

geldt $C = -A^{-1}B$ en bereken C.

2.3.9. Beschouw het stelsel van drie functies

$$\begin{cases} u = 3x + 2y - z \ , \\ v = x - 2y + z \ , \\ w = x^2 + 2xy - xz \ . \end{cases}$$

Bepaal $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$.

Beschouw nu het stelsel

$$\begin{cases} u = 3x + 2y - z \ , \\ v = x - 2y + z \ , \end{cases}$$

bewijs dat er functies $x = f_1(u,v,z)$, $y = f_2(u,v,z)$ bestaan zodanig dat

$$\begin{cases} u = 3f_1(u,v,z) + 2f_2(u,v,z) - z \ , \\ v = f_1(u,v,z) - 2f_2(u,v,z) + z \ , \end{cases}$$

en bepaal de functionaalmatrix van f_1, f_2.
Substitueer vervolgens $x = f_1(u,v,z)$, $y = f_2(u,v,z)$ in $w = x^2 + 2xy - xz$: $w = (f_1(u,v,z))^2 + 2(f_1(u,v,z))(f_2(u,v,z)) - zf_1(u,v,z)$ en bereken met de kettingregel de functionaalmatrix

$$\left[\frac{\partial w}{\partial u} \ , \ \frac{\partial w}{\partial v} \ , \ \frac{\partial w}{\partial z}\right] .$$

Leid tenslotte af dat geldt $8w = u^2 - v^2$.

2.3.10. Bewijs dat het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 , \\ x - 2y + z = 2 , \\ x^2 + 2xy - xz = 0 , \end{cases}$$

equivalent is met het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 2 , \\ x - 2y + z = 2 , \end{cases}$$

en geef de oplossingen.
Aanwijzing: gebruik het resultaat van opgave 2.3.9.

2.3.11. Behandel op dezelfde wijze als in opgave 2.3.9 het stelsel van drie functies

$$\begin{cases} u = x + y - z , \\ v = 2x - y + z , \\ w = 8xy - 8xz - y^2 + 2yz - z^2 . \end{cases}$$

2.3.12. Los het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 , \\ 2x - y + z = -1 , \\ 8xy - 8xz - y^2 + 2yz - z^2 = -1. \end{cases}$$

2.4.1. Bereken

$$\iint_G xydxdy ,$$

als G het gebied is begrensd door de parabolen $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $x = y^2$, $2x = y^2$.

2.4.2. Bereken

$$\iint_G (x^2 + y^2)dxdy ,$$

als G het gebied is, gelegen in het eerste kwadrant, begrensd door de krommen $xy = 1$, $xy = 3$, $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$.

2.4.3. Bereken

$$\iint_G (x+y)^2 dxdy ,$$

als G het gebied is gegeven door $0 \leq x-y \leq 1$, $0 \leq x+2y \leq 2$.

2.4.4. Bereken

$$\iint_G \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy ,$$

als G het gebied is begrensd door de parabolen $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -4x + 4$.
Aanwijzing: gebruik de transformatie $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$.

2.4.5. Bereken

$$\iint_G \exp\left[\frac{x-y}{x+y}\right] dxdy ,$$

als G de driehoek is met hoekpunten (0,0), (0,1), (1,0).

2.4.6. Bereken

$$\iint_G (x-y)^2 \sin^2(x+y) dxdy ,$$

als G het vierkant is met hoekpunten $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$.

2.4.7. Bereken

$$\int_0^1 dx \int_{3x}^{4-x} \frac{x+y}{(3x-y+8)^2} dy .$$

Aanwijzing: gebruik de transformatie $u = x+y$, $v = 3x-y$.

2.4.8. Bereken

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{(x+y)^2} dy .$$

2.4.9. Bereken

$$\iint_G (x+y)^2 e^{x^2-y^2}\,dxdy \ ,$$

als G het gebied is begrensd door de rechten $x = 0$, $x+y = 1$, $x-y = 1$.

2.4.10. Bereken

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\, \exp[x^2+y^2-x^2y^2]dy \ .$$

Aanwijzing: gebruik de transformatie $u = x\sqrt{1-y^2}$, $v = y$.

Hoofdstuk 3. Fourierreeksen, uniforme convergentie

Bepaal de Fourierreeks (met periode 2π) van de volgende functies en onderzoek de convergentie van de gevonden reeks met de hoofdstelling:

3.1.1. $f(x) = \sin \frac{1}{2}x \qquad \text{voor } -\pi \le x \le \pi$.

3.1.2. $f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{voor } -\pi \le x \le 0 \,, \\ x^3 & \text{voor } 0 < x \le \pi \,. \end{cases}$

3.1.3. $f(x) = x \sin x \qquad \text{voor } -\pi \le x \le \pi$.

3.1.4. $f(x) = \begin{cases} -x \sin x & \text{voor } -\pi \le x \le 0 \,, \\ x \sin x & \text{voor } 0 < x \le \pi \,. \end{cases}$

3.1.5. $f(x) = \sinh x \qquad \text{voor } 0 \le x \le 2\pi$.

Bereken de som van de volgende reeksen:

3.1.6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ (gebruik het resultaat van opgave 3.1.2).

3.1.7. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(4n+1)^2(4n+3)^2}$ (gebruik het resultaat van opgave 3.1.4).

3.1.8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (gebruik het resultaat van opgave 3.1.5).

3.1.9. Pas de gelijkheid van Parseval toe op de Fourierreeks uit opgave 3.1.1 en bereken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}$.

3.1.10. Bereken de som van de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)^2} \,.$$

Bepaal de Fourierreeks van de volgende functies:

3.3.1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{voor } 0 \le x \le 1 , \\ 1 & \text{voor } 1 < x \le 2 , \\ 3-x & \text{voor } 2 < x \le 3 . \end{cases}$

3.3.2. $f(x) = e^x \quad \text{voor } -1 \le x \le 1 .$

3.3.3. $f(x) = \begin{cases} x & \text{voor } 0 \le x \le \frac{1}{2} , \\ 1-x & \text{voor } \frac{1}{2} < x \le 1 . \end{cases}$

Bepaal de Fourier-cosinusreeks van de volgende functies en onderzoek de convergentie van de gevonden reeks met de hoofdstelling:

3.3.4. $f(x) = x(1-x)$ voor $0 < x < 1$.

3.3.5. $f(x) = e^x$ voor $0 \le x \le 1$ (vergelijk met opgave 3.3.2).

3.3.6. Bereken

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2 + 1} \quad \text{en} \quad T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2 + 1}$$

(gebruik het resultaat van opgave 3.3.5).

Bepaal de Fourier-sinusreeks van de volgende functies en onderzoek de convergentie van de gevonden reeks met de hoofdstelling:

3.3.7. $f(x) = \cos x$ voor $0 \le x \le \pi$.

3.3.8. $f(x) = e^x$ voor $0 \le x \le 1$ (vergelijk met opgaven 3.3.2 en 3.3.5).

3.3.9. $f(x) = x(1-x)$ voor $0 \le x \le 1$ (vergelijk met opgave 3.3.4).

Bepaal de Fourier-getransformeerde $F(y)$ van de volgende functies:

3.4.1. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 , \\ \frac{1}{2} & \text{voor } x = 0 , \\ e^{-x} & \text{voor } x > 0 . \end{cases}$

Bewijs dat voor $x > 0$ geldt

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy + y \sin xy}{1+y^2}\, dy = \pi e^{-x} .$$

3.4.2. $f(x) = (ax+b)e^{-|x|}$.

Bereken

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{1+y^2}\, dy \quad \text{en} \quad \int_0^\infty \frac{y \sin xy}{(1+y^2)^2}\, dy .$$

3.4.3. $f(x) = |x|e^{-|x|}$.

Bereken

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{(1+y^2)^2}\, dy \quad \text{(gebruik ook het resultaat van opgave 3.4.2).}$$

3.5.1. Bepaal sup V en inf V van de volgende verzamelingen $V \subset \mathbb{R}$:

a) $V = \{x \mid 0 < x^2 < 2\}$,

b) $V = \{x \mid 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$,

c) $V = \{x \mid (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}$, $a < b < c < d$,

d) $V = \{2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r} \mid p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{N}\}$.

3.5.2. Laat U en V niet-lege, naar boven begrensde verzamelingen zijn. Zij sup $U = a$, sup $V = b$. Vorm de verzameling W van alle sommen $u+v$ met $u \in U$, $v \in V$:

$$W = \{u + v \mid u \in U,\ v \in V\} .$$

Bewijs dat sup $W = a + b$.

3.5.3. Laat U en V niet-lege, naar boven begrensde verzamelingen zijn met $\sup U = a$, $\sup V = b$.
Zij $W = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$.
Laat aan een voorbeeld zien dat in het algemeen niet geldt

$$\sup W = ab \ . \qquad (1)$$

Geef ook een voorbeeld van verzamelingen U, V waarvoor (1) wel geldt.

3.5.4. Bereken de norm $\| f \|$ van de volgende functies:

a) $f(x) = x^2 - 1$ op $[-1,1]$,

b) $f(x) = x^2 - 1$ op $(-2,1)$,

c) $f(x) = (x^2-1)(x^2-4)$ op $[-2,2]$,

d) $f(x) = (x^2-1)(x^2-4)$ op $[1,2]$,

e) $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$ op $[2,3]$,

f) $f(x) = \frac{1}{x} \log x$ op $[1,\infty)$,

g) $f(x) = \frac{1}{x} \log x$ op $(\frac{1}{2}, 2)$.

3.5.5. Beschouw de rij van functies (f_n) gegeven door

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1} \text{ voor } x > 0 \ .$$

a) Bewijs dat de rij (f_n) puntsgewijs convergent is op $(0,\infty)$ en bepaal de limiet f.

b) Bewijs dat de rij (f_n) niet uniform convergent is op $(0,1]$.

c) Bewijs dat de rij (f_n) uniform convergent is op $[\delta,\infty)$ met $\delta > 0$.

d) Bewijs dat $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

3.5.6. Beschouw de rij van functies (f_n) met $f_n(x) = \frac{1}{n}\log(nx+1)$ voor $x \geq 0$.

a) Bewijs dat de rij (f_n) uniform convergent is op $[0,a]$ met $a > 0$.

b) Bewijs dat de rij (f_n) niet uniform convergent is op $[0,\infty)$.

3.5.7. Beschouw de rij (f_n) met $f_n(x) = \arctan nx$ op $(-\infty,\infty)$.

a) Bewijs dat de rij (f_n) niet uniform convergent is op $[-1,1]$.

b) Bewijs dat de rij (f_n) uniform convergent is op $[\delta,\infty)$ met $\delta > 0$.

c) Bewijs dat $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)dx = \int_{-1}^{1} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

3.5.8. a) Onderzoek de uniforme convergentie van de rij (f_n) met $f_n(x) = \dfrac{x}{nx+1}$ voor $x \geq 0$.

b) Bewijs dat de rij $\left(\int_0^x f_n(t)dt\right)$ niet uniform convergent is op $[0,\infty)$.

3.5.9. a) Onderzoek de uniforme convergentie van de rij (f_n) met $f_n(x) = \dfrac{x}{nx^2+1}$ op $(-\infty,\infty)$.

b) Onderzoek ook de uniforme convergentie van de rij (f_n') op $(-\infty,\infty)$.

c) Bewijs dat de rij (f_n') uniform convergent is op $[\delta,\infty)$ met $\delta > 0$.

3.5.10. Onderzoek als in opgave 3.5.9 de uniforme convergentie van de rij (f_n) en van de rij (f_n') met $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-n^2x^2}$, $x \in (-\infty,\infty)$.

3.5.11. a) Bewijs dat de rij van functies (f_n) met $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$ uniform convergent is op elk interval $[a,b]$ dat $x = 0$ niet bevat.

b) Bewijs dat de rij (f_n) niet uniform convergent is op $[0,1]$.

c) Geldt $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)dx = \int_0^{\infty} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$?

3.5.12. Onderzoek de uniforme convergentie van de rij (f_n) met $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$, $x \in (-\infty,\infty)$.

3.5.13. Onderzoek de uniforme convergentie van de rij (f_n) gegeven door $f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$, $x \in (-\infty,\infty)$.

3.5.14. Bewijs dat de rij van functies (f_n) gegeven door

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}e^x}{1+x^{2n}}, \quad x \in (-\infty,\infty),$$

niet uniform convergent is op $[1+\delta,\infty)$ met $\delta > 0$, maar wel uniform convergeert op $(-\infty,-1-\delta]$ met $\delta > 0$.
Is de rij (f_n) uniform convergent op $[-\delta,\delta]$ met $0 < \delta < 1$?

3.5.15. Bewijs dat de rij van functies (f_n) gegeven door

$$f_n(x) = \frac{1}{x}\arctan nx, \quad x \in (0,\infty)$$

niet uniform convergent is op $(0,\infty)$, maar wel uniform convergeert op $[\delta,\infty)$ met $\delta > 0$.

3.6.1. Bewijs dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$ niet uniform convergent is op $[0,1)$, terwijl de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ wel uniform convergent is op $[0,1)$.

3.6.2. Bewijs dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2}\right)$ niet uniform convergent is op $[0,1]$.

3.6.3. a) Bewijs dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$ uniform convergent is op $(-\infty,\infty)$ als $\alpha > \frac{1}{2}$. Noem de som van de reeks $S(x)$.

b) Bewijs dat de reeks $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx^2)}{n^{\alpha+1}}$ uniform convergent is op $[0,a]$, $a > 0$, met som $\int_0^x S(t)dt$ als $\alpha > \frac{1}{2}$.

c) Is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx^2)}{n^{\alpha+1}}$ uniform convergent op $[0,\infty)$ als $\alpha > \frac{1}{2}$?

d) Bewijs dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$ uniform convergent is op $(-\infty,\infty)$ als $\alpha > 1$. Noem de som van deze reeks $T(x)$.

e) Bewijs dat voor $\alpha > 1$ geldt $S'(x) = T(x)$, $x \in (-\infty,\infty)$.

3.6.4. a) Bewijs dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!(1+a^{2n}x^2)}$ $(a \in \mathbb{R})$ uniform convergent is op $(-\infty,\infty)$. Noem de som van de reeks $S(x)$.

b) Bewijs dat geldt $\int_0^1 S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \arctan(a^n)$.

c) Bewijs dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $S'(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^{3n} x}{n!(1+a^{2n}x^2)^2}$.

3.6.5. a) Bewijs dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ uniform convergent is op $[1+\delta,\infty)$ met $\delta > 0$.

b) Bewijs dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ niet uniform convergent is op $(1,\infty)$.

3.6.6. Bewijs:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \ldots\right]$$

voor $-1 < k < 1$.

3.6.7. Gegeven is: de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is absoluut convergent.

a) Bewijs dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ uniform convergent is op $(-\infty,\infty)$.

b) Bewijs dat geldt $\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} dx$.

3.6.8. Gegeven $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n^2} \sin(2^{n^2} x)$, $x \in (-\infty,\infty)$, $a > 1$.

Bewijs:

a) S is continu op $(-\infty,\infty)$.

b) $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2a^{-1})^{n^2} \cos(2^{n^2} x)$, $x \in (-\infty,\infty)$, $a > 2$.

3.6.9. De functie f wordt gedefinieerd door

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(1+nx^2)} , \quad x \in (-\infty,\infty) .$$

Bewijs:

a) $$f'(x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2(1+nx^2)^2} , \quad x \in (-\infty,\infty) .$$

b) $$f''(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3nx^2-1}{n^2(1+nx^2)^3} , \quad x \in (-\infty,\infty) .$$

3.6.10. De functie f wordt gedefinieerd door

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} , \quad x \in (1,\infty) .$$

a) Bewijs dat de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-\log n)^m \, n^{-x}$$

uniform convergent is op $(1+\delta,\infty)$, $\delta > 0$, voor alle $m \in \mathbb{N}$.

b) Bewijs dat geldt

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\log n)^m \, n^{-x} , \quad x \in (1,\infty), \; m \in \mathbb{N}.$$

3.6.11. Zij de functie f gedefinieerd door

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x + \cos nx}{n^2} , \quad x \in (-\infty,\infty) .$$

a) Bewijs dat de reeks puntsgewijs convergent is op $(-\infty,\infty)$.

b) Bewijs dat de reeks uniform convergent is op $[-a,a]$, $a > 0$.

c) Bewijs dat de reeks niet uniform convergent is op $(-\infty,\infty)$.

d) Bewijs dat f continu is op $(-\infty,\infty)$.

e) Bepaal de functie $f(x)$.

Hoofdstuk 4. Differentiaalvergelijkingen

Bepaal de algemene oplossing van de volgende stelsels differentiaalvergelijkingen:

4.1.1. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 , \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 8x_1 + 3x_2 . \end{cases}$$

4.1.2. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 - x_3 , \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 2x_2 - x_3 , \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 2x_1 + 3x_3 . \end{cases}$$

4.1.3. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + x_3 , \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2 + x_3 , \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + 2x_3 . \end{cases}$$

4.1.4. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 5x_1 + x_2 , \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 + x_2 . \end{cases}$$

4.1.5. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 , \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 3x_2 . \end{cases}$$

4.1.6. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \quad - x_2 \quad + 2e^t , \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \quad - x_3 + e^t , \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -x_1 \quad + e^t . \end{cases}$$

4.1.7. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 2x_2 + 2e^{-t} , \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 6x_1 - 3x_2 + 2e^{-t} - e^{2t} . \end{cases}$$

4.1.8. $$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = x_1 - x_2 - x_3 + 2e^t , \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2e^t , \\ \dfrac{dx_3}{dt} = 2x_1 \quad + 3x_3 - 3e^t . \end{cases}$$

4.1.9. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \quad - p^2 x_2 + \cos pt , \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -p^2 x_1 \quad + \sin pt , \quad p \in \mathbb{R} . \end{cases}$$

4.1.10. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2 + \sin t , \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 + 3t . \end{cases}$$

4.1.11. Herleid de volgende differentiaalvergelijking tot een stelsel differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en los dit stelsel op:

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0 .$$

4.1.12. Bepaal de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} 7\,\dfrac{dx_1}{dt} + \dfrac{dx_2}{dt} + 2x_1 = 0\ , \\[2ex] \dfrac{dx_1}{dt} + 3\,\dfrac{dx_2}{dt} + x_2 = 0\ , \end{cases}$$

die voldoet aan $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

4.2.1. Bepaal de Laplace-getransformeerde van de volgende functies gedefinieerd op $[0,\infty)$:

a) $$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 \le t < a\ , \\ 1 & \text{voor } a \le t \le b\ , \\ 0 & \text{voor } t > b\ . \end{cases}$$

b) $$f(t) = \begin{cases} t & \text{voor } 0 \le t \le 1\ , \\ 1 & \text{voor } t > 1\ . \end{cases}$$

c) $f(t) = t^{\nu}$, $\nu > -1$ (zie college Wiskunde 20, 4.7.1).

d) $f(t) = t^{n-\frac{1}{2}}$, $n = 0,1,2,\ldots$ (zie college Wiskunde 20, 4.7.2).

e) $$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{voor } 2n \le t < 2n+1\ , \\ -\frac{1}{2} & \text{voor } 2n+1 \le t < 2n+2\ ,\ n = 0,1,2,\ldots\ . \end{cases}$$

f) $f(t) = t \cos bt$.

g) $f(t) = |\sin bt|$.

4.2.2. Laat $F = \mathcal{L}(f)$ de Laplace-getransformeerde zijn van f, en zij $c > 0$.

a) Toon aan dat $\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{p}{c}\right)$.

b) Zij

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < c\ , \\ f(t-c) & \text{voor } t \ge c\ , \end{cases}$$

toon dan aan dat $\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-cp}F(p)$.

4.2.3. Laat de functies f, g, h continu zijn op $[0,\infty)$.
Toon aan dat

$$f * (g * h) = (f * g) * h \ .$$

4.2.4. De functies f en g zijn gedefinieerd op $[0,\infty)$ door

$$f(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{2}} & \text{voor } 0 < t < 1 \ , \\ 0 & \text{voor } t \geq 1 \ ; \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} (1-t)^{-\frac{1}{2}} & \text{voor } 0 \leq t < 1 \ , \\ 0 & \text{voor } t \geq 1 \ . \end{cases}$$

Bereken $f * g$.

4.2.5. Overeenkomstig opgave 4.2.1. c) is

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha} \ , \ \mathcal{L}\{t^{\beta-1}\} = \frac{\Gamma(\beta)}{p^\beta} \ , \text{ geldig voor } \alpha > 0, \ \beta > 0 \ .$$

a) Bereken $t^{\alpha-1} * t^{\beta-1}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

b) Toon aan met behulp van de convolutiestelling dat

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \ ;$$

zie ook college Wiskunde 20, 4.7.5.

c) Toon aan dat

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}\, dt \ .$$

d) Leid uit c) en b) af de verdubbelingsformule voor de gammafunctie

$$\Gamma(2\alpha)\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2^{2\alpha-1}\, \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\tfrac{1}{2}) \ .$$

Los op, met behulp van Laplace transformatie, de volgende (stelsels) differentiaalvergelijkingen onder de aangegeven beginvoorwaarden.

4.2.6. $y'' + y = xe^x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

4.2.7. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 5$.

4.2.8. $y''' - 2y'' + y' = 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -2$.

4.2.9. $y'' = f(x)$, $y(0) = y'(0) = 1$ met

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 , \\ x & \text{voor } 0 \le x \le 1 , \\ 1 & \text{voor } x > 1 . \end{cases}$$

4.2.10. $$\begin{cases} 7\dfrac{dx_1}{dt} + \dfrac{dx_2}{dt} + 2x_1 = 0 , \\ \dfrac{dx_1}{dt} + 3\dfrac{dx_2}{dt} + x_2 = 0 , \quad x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0 . \end{cases}$$

4.2.11. $$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} - 3x_1 - 4x_2 = 0 , \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} + x_1 + x_2 = 0 , \quad x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,\ \dot{x}_1(0) = 0,\ \dot{x}_2(0) = 1 . \end{cases}$$

4.2.12. $$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \dot{x}_2 + x_1 + x_2 = 2e^t \cos t , \\ \ddot{x}_2 + \dot{x}_1 + 4x_1 = e^t(7\cos t - \sin t) , \quad x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 1 . \end{cases}$$

Bepaal voor $x > 0$ de algemene oplossing van de volgende differentiaalvergelijkingen:

4.3.1. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$.

4.3.2. $x^2y'' - xy' + y = x^2$.

4.3.3. $x^2y'' - xy' + y = x$.

4.3.4. $6x^2y'' + 7xy' - y = \log x$.

Bepaal de machtreeks-oplossingen van de volgende differentiaalvergelijkingen:

4.3.5. $(1-x^2)y'' + 6y = 0$.

4.3.6. $y'' - xy' + y = 0$.

4.3.7. $(1-x^3)y'' + 6xy = 0$.

4.3.8. $(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$.

4.3.9. $y'' - xy = 1$.

4.3.10. $y''' + xy = 0$.

Antwoorden Lineaire algebra

1.1.3. b) $N = \{f \in L \mid f(0) = 0\}$;   c) nee.

1.1.4. $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\-\frac{1}{9}\end{bmatrix}$.

1.1.5. a) 2; b) 1; c) $2x+y-3z = 0$; d) $X = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$.

1.1.6. $AB = BA = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

1.1.7. $X = \lambda\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$.

1.1.8. $A = \begin{bmatrix}0&1&0&0&.&.&.&0\\0&0&1&0&.&.&.&0\\0&0&0&1&.&.&.&0\\.&.&.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.&.&.&1\\0&0&0&0&.&.&.&0\end{bmatrix}$.

1.1.9. c) $\begin{bmatrix}\frac12&0&\frac12\\0&1&0\\\frac12&0&\frac12\end{bmatrix}$; d) $AX = \begin{bmatrix}\frac12 x+\frac12 z\\y\\\frac12 x+\frac12 z\end{bmatrix}$; e) nee.

1.1.10. b) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{bmatrix}$; c) het vlak $(A\underline{p},\underline{x}) = 0$; d) $p = -2 \pm \sqrt{3}$.

1.1.11. b) $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; c) $D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

D^4 = nulmatrix.

1.1.12. b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; d) ja, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.2.1. $S = [5]$; $\frac{1}{5}[x]$.

1.2.2. $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -3x + 2y \\ 2x - y \end{bmatrix}$.

1.2.3. $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

1.2.4. $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ met $x' = \dfrac{\begin{vmatrix} x & g_1 & h_1 \\ y & g_2 & h_2 \\ z & g_3 & h_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}}$, enz.

1.2.5. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

1.2.6. $A' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -12 & -26 & -44 \\ 9 & 20 & 32 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix}$; $AX = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$; $A'X' = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$.

1.2.8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

1.2.9. $B = TS^{-1}AST^{-1}$.

1.3.1. $[1,2,2]^T$, $[2,1,-2]^T$, $[2,-2,1]^T$.

1.3.2. a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$; b) 3; $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$.

1.3.3. $\lambda_1 = 1$: $U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = 2$: $U_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\lambda_3 = 3$: $U_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

1.3.4. Vraagstuk 1.1.9: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 : \alpha[1,0,1]^T + \beta[1,2,1]^T$, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$

$\lambda_3 = 0 : \gamma[1,0,-1]^T$, $\gamma \neq 0$;

vraagstuk 1.1.10: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$: $\alpha[1,-1,0]^T + \beta[1,0,-1]^T$, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$

$\lambda_3 = -1 : \gamma[1,1,1]^T$, $\gamma \neq 0$.

1.3.5. a) $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; $S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$;

b) $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$; $S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

1.3.6. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$: $\alpha\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$

$\lambda_3 = 0$: $\gamma\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\gamma \neq 0$.

b) $3^6\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

1.3.9. $A = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \bigcirc\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & \lambda_n\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}\mu_1 & & & \bigcirc\\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & \mu_n\end{bmatrix}$ met $A\underline{u}_i = \lambda_i\underline{u}_i$, $B\underline{u}_i = \mu_i\underline{u}_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$.

1.3.10. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

1.3.11. $\frac{1}{\lambda_1}$, $\frac{1}{\lambda_2}$,..., $\frac{1}{\lambda_k}$; de eigenvectoren van A bij $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$.

1.4.4. De diagonalen van een ruit staan loodrecht op elkaar.

1.4.6. a) en b) voldoen, c) niet.

1.4.8. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1\\2\\2\\4\end{bmatrix}$, $\frac{1}{15}\begin{bmatrix}12\\4\\4\\-7\end{bmatrix}$, $\frac{1}{15}\begin{bmatrix}6\\2\\-13\\4\end{bmatrix}$; $\frac{1}{15}\begin{bmatrix}6\\-13\\2\\4\end{bmatrix}$.

1.4.9. e^t, $e^{2t} - \frac{2}{3}\frac{e^3-1}{e^2-1}e^t$.

1.4.10. 1, $t-1$, $\frac{1}{2}(t^2-4t+2)$, $\frac{1}{6}(t^3-9t^2+18t-6)$.

1.4.11. b) $n-m$.

1.4.12. a) bijv. $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-2\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$; b) $\frac{3}{5}\begin{bmatrix}5\\3\\1\\2\\1\end{bmatrix}$.

1.4.13. a) ja; b) bijv. $2-3t$; c) bijv. $1-6t+6t^2$; d) $t-\frac{1}{6}$.

1.4.18. $[5,2,-4,1]^T$, $[4,4,4,5]^T$.

1.4.19. $\frac{15}{\pi^2}(6t^2-6t+1)$.

1.5.2. Nee; v.b.: $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ met matrix $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ t.o.v. een orthonormale basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$. T.o.v. de basis $\underline{f}_1 = 2\underline{e}_1$, $\underline{f}_2 = \underline{e}_2$ heeft A de matrix $A' = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\2 & 0\end{bmatrix}$.

1.5.13. $A = A_1A_2$ met $A_2^2 = B$, A_1 orthogonaal, A_2 symmetrisch.

1.5.16. De hoek tussen een vector en zijn projectie op een vlak is $\leq \frac{\pi}{2}$.

1.5.17. Ja.

1.5.18. a) $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}$;

b) $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0\\\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1\\-\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1\\0 & -\sqrt{2} & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

1.6.1. a) $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_3 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2$;

c) $2(x_1')^2 + 6(x_2')^2 + 4x_1'x_2'$; d) $(x_1')^2 + (x_2')^2$; e) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ niet orthonormaal.

1.6.2. cirkelcylinder.

1.6.3. éénbladige omwentelingshyperboloïde, resp. omwentelingskegel.

1.6.6. a) $3(x'')^2 + 8(y'')^2 = 24$, ellips

b) $x'' = (y'')^2\sqrt{13}$, parabool

1.6.7. a) $(x'')^2 + 8(y'')^2 - 2(z'')^2 = 1$, éénbladige hyperboloïde

b) $(x'')^2 + 2(y'')^2 = 2(z'')^2$, kegel

c) $3(y'')^2 + 4(z'')^2 = 2$, elliptische cylinder

d) $(x'')^2 + 2(z'')^2 = 6y''\sqrt{2}$, elliptische paraboloïde

e) $4(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2 = 4$, ellipsoïde

f) $2(x'')^2\sqrt{2} = z''$, parabolische cylinder

g) $2(x')^2 = (y')^2 + (z')^2$, omwentelingskegel.

Antwoorden Functies $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

2.1.1. c) $\{(u,v) \mid 2u \geq v^2\}$.

2.1.2. c) $\{(u,v,w) \mid (u+v)^2 = 4w,\ u+v \geq 0\}$.

2.1.3. a) continu voor $(x,y) \neq (0,0)$;

b) continu op het hele (x,y)-vlak;

c) continu op het hele (x,y)-vlak;

d) continu voor $x \neq y$ en in $(0,0)$;

e) continu voor $(x,y) \neq (0,0)$.

2.2.2. a) $[4 \quad -9]$

b) $[-1 \quad -1 \quad -4]$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -18 & 25 & -12 \\ 12 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$.

2.2.3. a) differentieerbaar voor $(x,y) \neq (0,0)$;

b) en c) differentieerbaar op het hele (x,y)-vlak;

d) differentieerbaar voor $x \neq y$;

e) differentieerbaar voor $(x,y) \neq (0,0)$.

2.2.4. $(1-r^2)^{-\frac{5}{2}}$.

2.2.5. $\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$, $\begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y = \dfrac{v}{u^2+v^2} \end{cases}$.

2.2.6. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1)$, $(4, -\frac{8}{3}, -2)$.

2.2.8. a) schroeflijn op de cylinder met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$.

b) $\underline{v} = (-\sin t\,,\ \cos t\,, 1)$; $(0,1,1)$, $(-1,0,1)$.

c) $\underline{a} = (-\cos t\,,\ -\sin t\,, 0)$; $(-1,0,0)$, $(0,-1,0)$.

2.2.9. $\underline{x}(t) = (t,t,t-\frac{1}{2}gt^2)$, $\underline{v}(t) = (1,1,1-gt)$,

$m\,g\,z + \frac{1}{2}m|\underline{v}|^2 = \frac{3}{2}m$.

Baan van P: doorsnijding van het vlak y = x met de parabolische cylinder $z = x - \frac{1}{2}gx^2$.

2.2.10. De functionaaloperator van $\underline{f}$ in (2,2) is een draaiïng:

functionaalmatrix $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

2.2.13. $\begin{bmatrix} x_2-2 & x_1 \\ -2x_2 & -2x_1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} u_2u_3 & u_1u_3-2u_2u_3 & u_1u_2-u_2^2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -u_3 & -u_2 \end{bmatrix}$.

2.3.1. $\frac{1}{2(x-y)}\begin{bmatrix} 1 & -2y \\ -1 & 2x \end{bmatrix}$;

$$\begin{cases} g_1(u,v) = \frac{1}{2}v \pm \frac{1}{2}\sqrt{2u-v^2} & (+ \text{ als } x > y,\ - \text{ als } x < y)\ , \\ g_2(u,v) = \frac{1}{2}v \mp \frac{1}{2}\sqrt{2u-v^2} & (- \text{ als } x > y,\ + \text{ als } x < y)\ . \end{cases}$$

2.3.2. $\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} & \frac{\partial g_1}{\partial w} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} & \frac{\partial g_2}{\partial w} \\ \frac{\partial g_3}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial v} & \frac{\partial g_3}{\partial w} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

2.3.3. $(x,y,z) = (u,v,w)(1+\rho^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\rho = \sqrt{u^2+v^2+w^2}$.

2.3.4. $\underline{x} = (1,-1,2) + \lambda(1,-1,0)$.

2.3.7. $$\begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial z} & \frac{\partial\psi}{\partial t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2(x-y)}\begin{bmatrix} -2y & 1 & 2(y-z) & 2(y-t) \\ 2x & -1 & -2(x-z) & -2(x-t) \end{bmatrix}.$$

2.3.8. $AC = -B\ ,\quad C = -A^{-1}B =$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 3y^2 \\ 6x & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2z & 1 \\ 1 & 5t^4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2(9xy^2-1)}\begin{bmatrix} 2 & -3y^2 \\ -6x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2z & 1 \\ 1 & 5t^4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2(1-9xy^2)}\begin{bmatrix} 3y^2-4z & 15y^2t^4-2 \\ 12xz-1 & 6x-5t^4 \end{bmatrix}.$$

2.3.9. $0;\ \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$;

$$\left[\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial w}{\partial z}\right] = [2x+2y-z,\ 2x,\ -x]\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\frac{3}{4}x + \frac{2}{4}y - \frac{1}{4}z,\ -\frac{1}{4}x + \frac{2}{4}y - \frac{1}{4}z,\ 0\right] = \left[\frac{1}{4}u,\ -\frac{1}{4}v,\ 0\right].$$

2.3.10. $(x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(0,1,2)$.

2.3.11. $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = 0$;

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial w}{\partial z}\right] = [8y-8z,\ 8x-2y+2z,\ -8x+2y-2z]\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\frac{16}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{4}{3}z,\ -\frac{8}{3}x + \frac{10}{3}y - \frac{10}{3}z,\ 0\right] =$$

$$= \left[\frac{4}{3}(2u+v),\ \frac{2}{3}(2u-3v), 0\right] ;$$

$$3w = 4u^2 + 4uv - 3v^2 .$$

2.3.12. $(x,y,z) = (0,0,-1) + \lambda(0,1,1)$.

2.4.1. $\frac{3}{4}$.

2.4.2. 3.

2.4.3. $\frac{46}{81}$.

2.4.4. $\frac{224}{45}$.

2.4.5. $\frac{1}{4}(e-e^{-1})$.

2.4.6. $\frac{1}{3}\pi^4$.

2.4.7. $2\log 2 - \frac{5}{4}$.

2.4.8. $\frac{1}{2}(e-1)$.

2.4.9. e^{-1}.

2.4.10. $\frac{\pi}{4}(e-1)$.

Antwoorden Fourierreeksen, uniforme convergentie

3.1.1. $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n \sin nx}{4n^2 - 1}$.

3.1.2. $\frac{\pi^3}{4} + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n (n^2\pi^2 - 2)}{n^4} \cos nx$.

3.1.3. $1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos nx}{n^2 - 1}$.

3.1.4. $\frac{\pi}{2} \sin x - \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{(4n^2 - 1)^2}$.

3.1.5. $\frac{\cosh 2\pi - 1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cosh 2\pi - 1)\cos nx - n \sinh 2\pi \sin nx}{n^2 + 1}$.

3.1.6. $\frac{\pi^4}{96}$.

3.1.7. $\frac{\pi^2\sqrt{2}}{128}$.

3.1.8. $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{\sinh 2\pi}{\cosh 2\pi - 1}$.

3.1.9. $\frac{\pi^2}{64}$.

3.1.10. $\frac{1}{48} (4\pi^2 - 33)$.

3.3.1. $\frac{2}{3} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin \frac{n\pi}{3})^2 \cos \frac{2n\pi x}{3}}{n^2}$.

3.3.2. $\sinh 1 + 2(\sinh 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2 + 1} (\cos n\pi x - n\pi \sin n\pi x)$.

3.3.3. $\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

3.3.4. $\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^2}$.

3.3.5. $e - 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e - 1}{n^2\pi^2 + 1} \cos n\pi x$.

3.3.6. $S = \frac{1}{e^2 - 1}$, $T = \frac{e^2 - 2e - 1}{2(e^2 - 1)}$.

3.3.7. $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1}$.

3.3.8. $2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1 + (-1)^{n+1} e)}{n^2\pi^2 + 1} \sin n\pi x$.

3.3.9. $\frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^3}$.

3.4.1. $F(y) = \frac{1}{1 - iy}$.

3.4.2. $F(y) = \frac{2b}{1 + y^2} + \frac{4iay}{(1 + y^2)^2}$; $\frac{\pi}{2} e^{-|x|}$, $\frac{\pi}{4} xe^{-|x|}$.

3.4.3. $F(y) = \frac{2(1 - y^2)}{(1 + y^2)^2}$; $\frac{\pi}{4}(1 + |x|)e^{-|x|}$.

3.5.1. a) $\sup V = \sqrt{2}$, $\inf V = -\sqrt{2}$;

b) $\sup V = 3$, $\inf V = \frac{1}{3}$;

c) $\sup V = d$, $\inf V = a$;

d) $\sup V = \frac{31}{30}$, $\inf V = 0$.

3.5.3. $U = V = \{u \mid u \le -1\}$, $W = \{w \mid w \ge 1\}$;

$U = V = \{u \mid 0 \le u \le 1\}$, $W = \{w \mid 0 \le w \le 1\}$.

3.5.4. a) 1; b) 3; c) 4; d) $\frac{9}{4}$; e) 5; f) $\frac{1}{e}$; g) 2 log 2 .

3.5.5. a) $f(x) = 0$, $x \in (0,\infty)$.

b) $\| f_n - f \|_{(0,1]} = 1$.

c) $\| f_n - f \|_{[\delta,\infty)} = \frac{1}{n\delta + 1}$ en $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\delta + 1} = 0$.

3.5.6. a) $f(x) = 0$, $x \in [0,\infty)$; $\| f_n - f \|_{[0,a]} = \frac{1}{n} \log(na + 1) \to 0$, $n \to \infty$.

3.5.8. a) Uniform convergent op $[0,\infty)$ met limiet 0.

3.5.9. a) Uniform convergent op $(-\infty,\infty)$ met limiet 0;

b) niet uniform convergent op $(-\infty,\infty)$.

3.5.10. a) (f_n) uniform convergent op $(-\infty,\infty)$ met limiet 0;

b) (f_n') niet uniform convergent op $(-\infty,\infty)$.

3.5.11. c) ja.

3.5.12. (f_n) uniform convergent op elk interval $[a,b]$ dat de punten $\pm$ 1 niet bevat met limiet 0.

3.5.13. (f_n) uniform convergent op elk interval $[a,b]$ dat de punten $\pm$ 1 niet bevat.

3.5.14. (f_n) is uniform convergent op $[-\delta,\delta]$ met limiet 0.

3.6.1. $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} x^n(1-x) = 1 - x^N$,

$S(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = 1$, $x \in [0,1)$, dus

$\| S_N - S \|_{[0,1)} = \sup\{x^N \mid x \in [0,1)\} = 1$;

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x^n (1-x) = \frac{(1-x)(1+(-1)^{N+1}x^N)}{1+x} ,$$

$T(x) = \lim_{N\to\infty} T_N(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $x \in [0,1)$;

op $[0,1)$ geldt $|T_N(x) - T(x)| = \frac{(1-x)x^N}{1+x} \le (1-x)x^N$, dus

$$\| T_N - T \|_{[0,1)} \le \max\{(1-x)x^N \mid x \in [0,1)\} = \frac{1}{N+1}\left(\frac{N}{N+1}\right)^N ,$$

$\lim_{N\to\infty} \| T_N - T \|_{[0,1)} = 0$;

de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ is *uniform* convergent op $[0,1)$ met som T.

3.6.2. $S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(1+x) & \text{voor } 0 \le x < 1 , \\ \log 2 & \text{voor } x = 1 . \end{cases}$

Pas stelling 3.6.4. toe.

3.6.3. c) de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx^2)}{n^{\alpha+1}}$ is puntsgewijs convergent op $[0,\infty)$.

Zij $x \in [0,\infty)$, dan geldt

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\log(1+nx^2)}{n^{\alpha+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx^2)}{n^{\alpha+1}} \right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\log(1+nx^2)}{n^{\alpha+1}} \ge \frac{\log(1+(N+1)x^2)}{(N+1)^{\alpha+1}}$$

en $\frac{\log(1+(N+1)x^2)}{(N+1)^{\alpha+1}}$ is niet begrensd op $[0,\infty)$, dus de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx^2)}{n^{\alpha+1}}$

is niet uniform convergent op $[0,\infty)$.

3.6.10. a) Op $(1+\delta,\infty)$ geldt

$$|(-\log\ n)^m n^{-x}| = \frac{(\log\ n)^m}{n^x} \le \frac{(\log\ n)^m}{n^{1+\delta}} < \frac{n^{\frac{1}{2}\delta}}{n^{1+\delta}} = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}\delta}} \text{ voor } n > N_0;$$

de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-\log\ n)^m n^{-x}$ is uniform convergent op $(1+\delta,\infty)$.

b) Uit a) en herhaalde toepassing van stelling 3.6.6 volgt de gevraagde betrekking voor $x \in (1+\delta,\infty)$, $\delta > 0$.
Kies nu een willekeurig punt $x_0 \in (1,\infty)$ en zij $\delta = \frac{x_0 - 1}{2}$, dan is $\delta > 0$ en $x_0 \in (1+\delta,\infty)$, dus de betrekking geldt voor $x = x_0$.

3.6.11. c) $$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n x + \cos nx}{n^2}\right| \ge |x| \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\right| - \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}\right| \ge$$

$$\ge |x| \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\right| - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = |x|\alpha_N - \beta_N \text{ met } \alpha_N \downarrow 0,\ \beta_N \downarrow 0 \text{ voor } N \to \infty.$$

Kies $|x| = \frac{1}{\alpha_N}$, dan geldt $|x|\alpha_N - \beta_N \to 1$, $N \to \infty$.

d) Kies een vaste $x \in (-\infty,\infty)$ en een $a > |x|$ en gebruik b).

e) $$f(x) = g(x) - \frac{\pi^2 x}{12} \text{ met } \begin{cases} g(x) = \frac{1}{4}x(x-2\pi) + \frac{1}{6}\pi^2, & x \in [0,2\pi], \\ g(x+2\pi) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Antwoorden Differentiaalvergelijkingen

4.1.1. $\underline{x} = C_1 e^{5t}\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$.

4.1.2. $\underline{x} = C_1 e^{t}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} + C_3 e^{3t}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$.

4.1.3. $\underline{x} = C_1 e^{t}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + C_2 e^{t}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + C_3 e^{4t}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

4.1.4. $\underline{x} = C_1 e^{3t}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} + C_2 e^{3t}\left(t\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$.

4.1.5. $\underline{x} = C_1 e^{2t}\begin{bmatrix}2\cos 3t\\3\sin 3t - \cos 3t\end{bmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{bmatrix}2\sin 3t\\-\sin 3t - 3\cos 3t\end{bmatrix}$.

4.1.6. $\underline{x} = e^{t}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + C_1 e^{-t}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + C_2 e^{\frac{1}{2}t}\begin{bmatrix}2\sin \frac{1}{2}t\sqrt{3}\\-\sqrt{3}\cos \frac{1}{2}t\sqrt{3} - \sin \frac{1}{2}t\sqrt{3}\\\sqrt{3}\cos \frac{1}{2}t\sqrt{3} - \sin \frac{1}{2}t\sqrt{3}\end{bmatrix} +$

$+ C_3 e^{\frac{1}{2}t}\begin{bmatrix}2\cos \frac{1}{2}t\sqrt{3}\\\sqrt{3}\sin \frac{1}{2}t\sqrt{3} - \cos \frac{1}{2}t\sqrt{3}\\-\sqrt{3}\sin \frac{1}{2}t\sqrt{3} - \cos \frac{1}{2}t\sqrt{3}\end{bmatrix}$.

4.1.7. $\underline{x} = e^{-t}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + C_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + C_2 e^{t}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$.

4.1.8. $\underline{x} = e^{t}\left(t\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) + C_1 e^{t}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} + C_3 e^{3t}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$.

4.1.9. $\underline{x} = \dfrac{1}{p(1+p^2)} \begin{bmatrix} (p+1)\ \sin pt \\ (p-1)\ \cos pt \end{bmatrix} + C_1 e^{p^2 t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-p^2 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(p \neq 0)$;

$\underline{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(p = 0)$.

4.1.10. $\underline{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{2}t \sin t + 6t \\ \frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{4} \cos t - \frac{1}{4} \sin t + 3t + 3 \end{bmatrix} +$

$+ C_1 \begin{bmatrix} 2 \cos t \\ \cos t - \sin t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix}$.

4.1.11. $\begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{bmatrix} = C_1 e^{x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + C_3 e^{2x} \left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

4.1.12. $\underline{x} = \frac{1}{3} e^{-\frac{2t}{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} e^{-\frac{t}{4}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4.2.1. a) $\frac{1}{p}(e^{-ap} - e^{-bp})$;

b) $\frac{1}{p^2}(1 - e^{-p})$, $p > 0$;

c) $\dfrac{\Gamma(\nu + 1)}{p^{\nu+1}}$, $p > 0$;

d) $\dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{p^{n+\frac{1}{2}}\ 2^{2n}\ n!}$, $p > 0$;

e) $\dfrac{1}{2p} \tanh(\frac{1}{2}p)$, $p > 0$;

f) $\dfrac{p^2 - b^2}{(p^2 + b^2)^2}$, $p > 0$;

g) $\dfrac{b}{p^2 + b^2} \coth(\frac{\pi p}{2b})$, $p > 0$.

4.2.4. $(f * g)(t) = \begin{cases} \log \dfrac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} & \text{voor } 0 \le t < 1 \;, \\[2ex] \log \dfrac{1+\sqrt{2-t}}{1-\sqrt{2-t}} & \text{voor } 1 < t \le 2 \;, \\[2ex] 0 & \text{voor } t > 2 \;; \end{cases}$

$f * g$ is niet gedefinieerd in $t = 1$.

4.2.5. a) $B(\alpha,\beta)\ t^{\alpha+\beta-1}$;

d) gebruik in c) de substitutie $t = \frac{1}{2}(1-\sqrt{u})$.

4.2.6. $y = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}e^x$.

4.2.7. $y = e^x + xe^{2x}$.

4.2.8. $y = 3 + 4x - 2e^x$.

4.2.9. $y = 1 + x + \int_0^x (x-t)f(t)dt = \begin{cases} 1 + x & \text{voor } x < 0 \;, \\ 1 + x + \frac{1}{6}x^3 & \text{voor } 0 \le x \le 1 \;, \\ \frac{7}{6} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 & \text{voor } x > 1 \;. \end{cases}$

4.2.10. $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}e^{-\frac{2t}{5}} + \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{4}} \;, \\[2ex] x_2 = -\frac{2}{3}e^{-\frac{2t}{5}} + \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{4}} \;. \end{cases}$

4.2.11. $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(3t-1)e^t + \frac{1}{2}(t+3)e^{-t} \;, \\[2ex] x_2 = \frac{1}{4}(4-3t)e^t - \frac{1}{4}(4+t)e^{-t} \;. \end{cases}$

4.2.12. $\begin{cases} x_1 = e^t \cos t , \\ x_2 = e^t \sin t . \end{cases}$

4.3.1. $y = C_1 x^2 + C_2 x^3$.

4.3.2. $y = x^2 + C_1 x + C_2 x \log x$.

4.3.3. $y = \frac{1}{2} x \log^2 x + C_1 x + C_2 x \log x$.

4.3.4. $y = -1 - \log x + C_1 x^{\frac{1}{3}} + C_2 x^{-\frac{1}{2}}$.

4.3.5. $y = 3a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)(2n-3)} + a_1 (x - x^3)$.

4.3.6. $y = a_1 x - a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n! (2n-1)}$.

4.3.7. $y = a_0 (1 - x^3) - 2a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n-2)(3n+1)}$.

4.3.8. $y = 3a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!\, x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2 (2n-1)(2n-3)} + a_1 (x - \frac{4}{3} x^3)$.

4.3.9. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n n!}{(3n+2)!} x^{3n+2} + a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+1)(3n-2)(3n-5) \ldots 7.4.1}{(3n+1)!} x^{3n} +$

$$+ a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+2)(3n-1)(3n-4) \ldots 8.5.2}{(3n+2)!} x^{3n+1} .$$

4.3.10. $$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(4n+1)(4n-3)(4n-7)\ \ldots\ 9.5.1}{(4n+1)!} x^{4n} +$$

$$+ a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(4n+2)(4n-2)(4n-6)\ \ldots\ 10.6.2}{(4n+2)!} x^{4n+1} +$$

$$+ 2a_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(4n+3)(4n-1)(4n-5)\ \ldots\ 11.7.3}{(4n+3)!} x^{4n+2} .$$

Tentamenopgaven

Tentamenopgaven

1.1. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heeft t.o.v. een orthonormale basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ in $\mathbb{R}^2$ de matrix

$$A = \begin{bmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{bmatrix} .$$

a) Zij $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de kolom van $\underline{x}$ en $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ de kolom van $A\underline{x}$ t.o.v. de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$. Bewijs: $u^2 - v^2 = x^2 - y^2$.

b) Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren van A.

c) Bepaal de overgangsmatrix van de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ op een orthonormale basis ten opzichte waarvan A een diagonaalmatrix heeft.

1.2. In een driedimensionale vectorruimte L met inproduct is een basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ gegeven waarvoor geldt

$$(\underline{a},\underline{b}) = (\underline{b},\underline{c}) = 0 , \ |\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}| = 1 .$$

De lineaire afbeelding $A : L \to L$ is gegeven door

$$A\underline{x} = (\underline{x},\underline{a})\underline{a} - (\underline{x},\underline{b})\underline{b} + (\underline{x},\underline{c})\underline{c} .$$

a) Toon aan dat de afbeelding A symmetrisch is.

b) Bepaal de matrix van A t.o.v. de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

c) Bewijs dat A inverteerbaar is.

d) Onder welke voorwaarden voor de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ is de afbeelding A orthogonaal?

e) Wat stelt A meetkundig voor in het geval dat A orthogonaal is?

1.3. In $\mathbb{R}^3$ is een basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ gegeven met

$$(\underline{a},\underline{b}) = (\underline{a},\underline{c}) = (\underline{b},\underline{c}) = 1, \ |\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}| = \sqrt{2} .$$

De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft t.o.v. de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

a) Bepaal de overgangsmatrix van de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ op een basis ten opzichte waarvan A een diagonaalmatrix heeft.

b) Onderzoek of A orthogonaal is.

c) Geef een meetkundige interpretatie van A.

1.4. Van een symmetrische lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is gegeven $A^2 = I$ (I is de identieke afbeelding).
De matrix van A t.o.v. een orthonormale basis van $\mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix} .$$

a) Bewijs dat het spoor van A, d.w.z. $p+r$, gelijk is aan 0, 2 of −2.

b) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van A in de onder a) genoemde gevallen.

c) Geef de meetkundige interpretatie van A in de onder a) genoemde gevallen.

1.5. L is een vectorruimte van dimensie 3 met inproduct.
De lineaire afbeelding $A : L \to L$ is gedefinieerd door

$$A\underline{x} = \underline{x} + (\underline{x},\underline{n})\underline{n} ,$$

waarbij $\underline{n}$ een gegeven vector met lengte 1 is.

a) Is A symmetrisch? Motiveer Uw antwoord.

b) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

c) Toon aan dat $A^{\leftarrow} = \frac{1}{2}(3I - A)$, waarbij I de identieke afbeelding is.

1.6. In $\mathbb{R}^4$ met het gebruikelijke inproduct zijn gegeven twee vlakken, namelijk

vlak V opgespannen door $[1,0,0,0]^T$, $[0,1,0,0]^T$ en
vlak W opgespannen door $[1,0,\sqrt{2},0]^T$, $[0,1,0,\sqrt{2}]^T$.

a) Bepaal de projecties op W van $[1,0,0,0]^T$, $[0,1,0,0]^T$.

b) Bereken de cosinus van de hoek tussen een willekeurige vector $\neq \underline{0}$ in V en zijn projectie op W.

1.7. L is een vectorruimte van dimensie 3 met inproduct.
In L is gegeven een basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ met de eigenschappen

$$|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}| = 1 \ , \ (\underline{a},\underline{b}) = \tfrac{1}{2} \ , \ (\underline{a},\underline{c}) = (\underline{b},\underline{c}) = 0 \ .$$

De lineaire afbeelding $A : L \to L$ is gedefinieerd door

$$A\underline{x} = \underline{x} - 2(\underline{x},\underline{c})(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}) \ .$$

a) Bewijs dat $A^2 = I$ (de identieke afbeelding).

b) Bepaal een basis ten opzichte waarvan A een diagonaalmatrix heeft.

c) Is de afbeelding A symmetrisch? Motiveer Uw antwoord.

1.8. In $\mathbb{R}^2$ is een basis $\underline{a}$, $\underline{b}$ gegeven met $|\underline{a}| = \sqrt{2}$, $|\underline{b}| = \sqrt{5}$.
$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is een symmetrische lineaire afbeelding die t.o.v. de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$ de matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$$

heeft.

a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

b) Bereken $(\underline{a},\underline{b})$.

1.9. In $\mathbb{R}^3$ is een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ gegeven. De basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} \underline{f}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_3 \ , \\ \underline{f}_2 = \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \ , \\ \underline{f}_3 = \underline{e}_1 \ . \end{cases}$$

Ten opzichte van de basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$ heeft de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrix

$$A' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} .$$

Bepaal de matrix van A t.o.v. de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.

1.10. Zij $A : L \to L$ een symmetrische lineaire afbeelding van een vectorruimte L van eindige dimensie met inproduct.

Bewijs:

a) Als voor alle $\underline{x} \in L$ geldt $(A\underline{x},\underline{x}) > 0$ voor $\underline{x} \neq \underline{0}$, dan zijn alle eigenwaarden van A positief.

b) Als alle eigenwaarden van A positief zijn, geldt $(A\underline{x},\underline{x}) > 0$ voor alle $\underline{x} \in L$, $\underline{x} \neq \underline{0}$.

1.11. L is de vectorruimte van alle polynomen.

Voor $f \in L$, $g \in L$ wordt gedefinieerd

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt \ .$$

a) Ga na dat (f,g) een inproduct is.

b) Bepaal een orthonormale basis van de deelruimte V opgespannen door 1, t, t^2.

c) Bepaal de projectie van t^3 op V.

1.12. Bepaal het type van het kwadratisch oppervlak in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijking

$$8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 4xz + 8yz - 13x - 8y - 10z + 9 = 0$$

en geef de vergelijking van het raakvlak door de top.

1.13. Bepaal het type van de kwadratische kromme in $\mathbb{R}^2$ gegeven door de vergelijking

$$3x^2 + 8xy - 3y^2 + 2x - 14y - 3 = 0 \ .$$

1.14. Bepaal de vergelijking van de grootste bol die beschreven kan worden in de ellipsoïde met vergelijking

$$5x^2 + 6xz + 2y^2 + 5z^2 = 8$$

en bepaal de raakpunten van bol en ellipsoïde.

1.15. Bepaal het type van het kwadratisch oppervlak in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijki

$$2x^2 + 4xy - 7y^2 + 16xz - 20yz - 4z^2 - 4x + 32y + 56z = 43 \ .$$

2.1. Door de betrekkingen

$$\begin{cases} u = 2xz + 2yz & , \\ v = x^2 + 2xy + y^2 - z^2 & , \\ w = x^2 + 2xy + y^2 + z^2 & , \end{cases}$$

wordt een vectorfunctie van $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ gedefinieerd.
Bepaal het beeld van de (x,y,z)-ruimte in de (u,v,w)-ruimte.
Wat stelt dit beeld meetkundig voor?

2.2. Bereken met behulp van de transformatie

$$x = \frac{u}{u^2+v^2} \; , \; y = \frac{v}{u^2+v^2} \; ,$$

de integraal

$$\iint_G \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2} \; ,$$

als G het gebied is gegeven door

$$x \geq 0, \; y \geq 0, \; x^2+y^2-5x \geq 0, \; 2x^2+2y^2-5y \geq 0 \; .$$

2.3. Bereken met behulp van de transformatie

$$x = u+v \; , \; y = \sqrt{uv} \; ,$$

de integraal

$$\iint_G \frac{dxdy}{\sqrt{x^2-4y^2}} \; ,$$

als G het gebied is gegeven door

$$y \geq 0, \; y^2+1 \leq x \leq \tfrac{1}{2}y^2+2 \; .$$

2.4. Bereken

$$\iint_G \sqrt{x}\, e^{-x-y^2}\, dxdy \; ,$$

als G het gebied is gegeven door

$$0 \le x \le 1 - y^2 .$$

Aanwijzing: zoek een transformatie

$$x = f(u,v) \ , \ y = g(u,v) \ ,$$

waardoor het binnengebied van de eenheidscirkel in het (u,v)-vlak wordt afgebeeld op G.

2.5. Bereken de oppervlakte van het gebied in het eerste kwadrant dat begrensd wordt door de krommen

$$y = x^3, \ y = \tfrac{1}{4}x^3 \ , \ x = y^3 \ , \ x = 4y^3 \ .$$

2.6. Door de betrekkingen

$$x = e^v \cos u \ , \ y = e^v \sin u \ ,$$

wordt een gebied G' in het (u,v)-vlak afgebeeld op een gebied G in het (x,y)-vlak.

a) Als G' gegeven wordt door

$$\tfrac{\pi}{4} \le u \le 1 \ , \ 0 \le v \le 1 \ ,$$

bepaal dan G.

b) Bereken

$$\iint_G \frac{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2 + y^2}\, dxdy \ .$$

2.7. a) Door de betrekkingen

$$u = \frac{x}{y} \ , \ v = xy \ ,$$

wordt een vectorfunctie van $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd.

Bereken $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

b) Bereken

$$\iint_G \sqrt{\frac{v}{u}}\, \sin v \;\, du dv ,$$

als G het gebied is gegeven door

$$1 \le uv \le 16 \;,\; 0 \le v \le 4\pi^2 u \;.$$

3.1. Zij $f(x) = |x - \sin x|$ voor $-\pi \le x \le \pi$.
Bepaal de Fourierreeks (met periode 2π) van f.

3.2. Zij $f(x) = \sin \alpha x$ voor $-\pi \le x \le \pi$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Bepaal de Fourierreeks (met periode 2π) van f.

3.3. Onderzoek of de volgende reeksen uniform convergent zijn op $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} (\cos x)^n \quad ;$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos x}{2}\right)^n \quad ;$$

c) $$\sum_{n=0}^{\infty} x^2 (\cos x)^n \ .$$

3.4. De functie f is als volgt gedefinieerd:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{voor } 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{voor } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi ; \end{cases}$$

f is oneven.

Bepaal de Fourierreeks (met periode 2π) van f en bereken met het gevonden resultaat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \ .$$

3.5. Van de Fourierreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)x$$

is gegeven

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)x = x \quad \text{voor } 0 < x < \frac{\pi}{2} \ .$$

a) Bepaal

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)x \quad \text{voor } \frac{\pi}{2} < x < \pi .$$

b) Bereken a_{2n-1} voor $n = 1,2,3,\ldots$.

3.6. Bepaal de eerste vier van nul verschillende termen van de Fourierreeks (met periode 8) van de functie f gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{voor } 0 \le x < 1 , \\ 2-x & \text{voor } 1 \le x < 2 , \\ 0 & \text{voor } 2 \le x \le 4 ; \end{cases}$$

f is oneven.

3.7. Een sinusoïdale wisselspanning $E \sin \omega t$ wordt toegevoerd aan een halfgeleider. De uitgangsspanning P wordt dan gegeven door

$$P(t) = \begin{cases} E \sin \omega t & \text{voor } 0 \le t < \frac{T}{2} , \\ 0 & \text{voor } \frac{T}{2} \le t \le T , \end{cases}$$

periodiek voortgezet met periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
Bepaal de Fourierreeks van P.

3.8. De functie f_n is gedefinieerd op $[0,1]$ door

$$f_n(x) = \begin{cases} xn^{\alpha} & \text{voor } 0 \le x < \frac{1}{n} , \\ (\frac{2}{n} - x)n^{\alpha} & \text{voor } \frac{1}{n} \le x < \frac{2}{n} , \\ 0 & \text{voor } \frac{2}{n} \le x \le 1 , \end{cases}$$

waarbij $n \ge 2$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ is.

a) Schets de grafiek van f_n.

b) Bepaal $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Voor welke α is de rij (f_n) uniform convergent op $[0,1]$?

3.9. De functie f is als volgt gedefinieerd:

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{voor } 0 \le x < \frac{1}{2} , \\ 0 & \text{voor } \frac{1}{2} \le x \le 1 . \end{cases}$$

Bepaal de Fourierreeks van f.

3.10. Bewijs dat de rij van functies

$$f_n(x) = \sqrt{n} \arctan \frac{x}{n}$$

niet en de rij van functies

$$f'_n(x) = \frac{n\sqrt{n}}{n^2 + x^2}$$

wel uniform convergent is op $[0,\infty)$.

3.11. Bereken

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}\, dx .$$

Noem de stellingen die U gebruikt.

3.12. De functie f wordt op $[0,\infty)$ gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } 0 \le x < 1 , \\ \frac{1}{2} & \text{voor } x = 1 , \\ 0 & \text{voor } x > 1 . \end{cases}$$

Bewijs dat f(x) geschreven kan worden in de vorm

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(y) \cos xy\, dy , \quad x \in [0,\infty) ,$$

en bereken A(y), $y \in [0,\infty)$.

3.13. Bewijs dat de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n^4x^2+1}$$

uniform convergent is op $(-\infty,\infty)$.

3.14. Beschouw de rij van functies (f_n) gedefinieerd door

$$f_n(x) = \frac{n}{n+x}\, e^{-nx} , \quad x \in [0,\infty) .$$

a) Bereken $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

b) Is de rij (f_n) uniform convergent op $[0,1]$?

c) Is de rij (f_n) uniform convergent op $[1,\infty)$?

d) Onderzoek of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

uniform convergent is op $[1,\infty)$.

3.15. Zij

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2x} , \quad x \in [1,\infty) .$$

a) Is f continu op $[1,\infty)$?

b) Is f differentieerbaar op $(1,\infty)$?

3.16. Beschouw de rij van functies (f_n) gedefinieerd door

$$f_n(x) = x \cos \frac{x}{n+x} , \quad x \in [0,\infty) .$$

a) Bereken $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

b) Laat zien dat de rij (f_n) niet uniform convergent is op $[0,\infty)$.

c) Ga na of de rij (f_n) uniform convergent is op $[0,a]$ met $a > 0$.

3.17. Zij de functie f gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{voor } |x| \le \frac{\pi}{2} , \\ 0 & \text{voor } |x| > \frac{\pi}{2} . \end{cases}$$

Laat zien dat f(x) geschreven kan worden in de vorm

$$f(x) = \int_0^\infty [A(y) \cos xy + B(y) \sin xy] dy , \quad x \in (-\infty,\infty) ,$$

en bereken A(y), B(y), $y \in [0,\infty)$.

3.18. Bereken

$$\int_0^1 \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(n^2 - x)^2} dx .$$

Motiveer de bewerkingen die U uitvoert.

3.19. Bewijs

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy \ \sin^2 \frac{1}{2}y}{y^2} dy = \begin{cases} \frac{\pi}{4}(1 - |x|) & \text{voor } |x| \le 1 , \\ 0 & \text{voor } |x| > 1 . \end{cases}$$

3.20. a) Bewijs dat geldt

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2 + 1} = \frac{\pi \cosh x}{2 \sinh \pi} - \frac{1}{2} , \quad x \in [-\pi,\pi] .$$

b) Bereken

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2 + 1} .$$

3.21. a) Bepaal de Fourier-getransformeerde van de functie f, gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{voor } |x| < 2\pi \,, \\ 5 & \text{voor } |x| = 2\pi \,, \\ 0 & \text{voor } |x| > 2\pi \,. \end{cases}$$

b) Bereken

$$\int_0^\infty \frac{y \sin 4\pi y}{y^2 - 1}\, dy \,.$$

3.22. Bepaal de reële waarden van x waarvoor de reeks

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{x^n}{n^2(n-x)}$$

convergent is.

Zij S(x) de som van de reeks voor die waarden van x.

Bewijs dat S continu differentieerbaar is op $(-1,1)$.

3.23. Toon aan dat de reeks

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\log(n+x)}{n^2}$$

op $[0,\infty)$ puntsgewijs, maar niet uniform convergent is.

3.24. Zij de reeks $\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)|$ uniform convergent op $[0,1]$ met som S(x).

a) Bewijs dat de rij van functies (f_n) uniform convergent is op $[0,1]$.

b) Zij f_n bovendien integreerbaar over $[0,1]$.

Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

4.1. Bepaal de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0 ,$$

welke voldoet aan $y(0) = 0$, $y(1) = 3$.
(Bijvoorbeeld met de methode van machtreekssubstitutie.)

4.2. Bepaal de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x^2y'' + 3xy' - 3y = 10x^2$$

die voor alle $x \in \mathbb{R}$ continu is en waarvoor bovendien geldt $y(1) = 6$.

4.3. Bepaal de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(x^2+1)^2y'' - 4x(x^2+1)y' + (6x^2-2)y = 0 ,$$

welke voldoet aan $y(0) = y'(0) = 1$.

4.4. Bepaal de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} 3\dot{x} = 8x - 6y - z , \\ 3\dot{y} = 8x - 9y - 4z , \\ 3\dot{z} = -2x + 6y + 7z , \end{cases}$$

welke voldoet aan de beginvoorwaarden

$$x(0) = y(0) = 0 , \quad z(0) = 3 .$$

4.5. Los op met behulp van machtreekssubstitutie de differentiaalvergelijking

$$xy'' - y' + 4x^3y = 0$$

en druk de gevonden oplossing uit in elementaire functies.

4.6. Bepaal de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y + z , \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z , \\ \frac{dz}{dt} = 2x + 3y , \end{cases}$$

welke voldoet aan de beginvoorwaarden $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = 3$.

4.7. Bepaal de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + e^t , \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - e^t , \end{cases}$$

die voldoet aan de beginvoorwaarden $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

4.8. Bepaal alle reële oplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 3z , \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + z , \\ \\ \dfrac{dz}{dt} = y - z . \end{cases}$$

4.9. Bepaal de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z - 1 , \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z + 1 , \\ \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y . \end{cases}$$

4.10. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x^2y'' - 6y = -2x , \quad x > 0 .$$

4.11. Bepaal de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = t , \\ \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} - y = 1 , \end{cases}$$

onder de beginvoorwaarden $x(0) = 3$, $x'(0) = -2$, $y(0) = 0$.

4.12. Bepaal de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \cos \alpha - y \sin \alpha \,, \\ \dfrac{dy}{dt} = x \sin \alpha + y \cos \alpha \,, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onder de beginvoorwaarden $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

4.13. Bepaal met behulp van Laplace transformatie de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} - x = -2 \sin t \,, \\ \dfrac{dx}{dt} + y = 2e^{t} + 2 \cos t \,, \end{cases}$$

onder de beginvoorwaarden $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

4.14. Bepaal met Laplace transformatie de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y''' + y'' + y' + y = 1 + t$$

onder de beginvoorwaarden $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Examen/tentamen januari 1976

Wiskunde 30

1. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ heeft ten opzichte van de standaardbasis de matrix A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

a) Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van A.

b) Bepaal een orthogonale matrix S zodanig dat $S^{-1}AS$ een diagonaalmatrix is.

2. De vectorfunctie $\underline{F}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ is gegeven door

$$\begin{cases} u = F_1(x,y,z) = 3x + 2y - z , \\ v = F_2(x,y,z) = y^2 - z^2 + xy + xz . \end{cases}$$

Voor deze functie geldt

$$\underline{F}(1,1,1) = (4,2) .$$

a) Bepaal de functionaalmatrix van $\underline{F}$.

b) Toon aan dat in een omgeving van het punt $(u,v,z) = (4,2,1)$ x en y geschreven kunnen worden als functies van u, v en z.

3. Bereken

$$\iint_G (x^5 y - xy^5)\,dxdy ,$$

als G het gebied is bepaald door

$$\begin{cases} x \geq 0 , \\ y \geq 0 , \\ 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4 , \\ 1 \leq x^2 - y^2 \leq 2 . \end{cases}$$

4. De functie f is gedefinieerd door

$$f(x) = |\sin x|, \quad -\pi \le x \le \pi \ .$$

(Merk op dat f een even functie is.)

a) Bewijs dat de Fourierreeks van f gelijk is aan

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \ .$$

b) Bewijs dat deze Fourierreeks uniform convergeert op $\mathbb{R}$.

c) Bereken met behulp van de gelijkheid van Parseval de som van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} \ .$$

5. Bepaal met behulp van Laplace transformatie de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t$$

welke voldoet aan

$$y(0) = y'(0) = 0, \ y''(0) = -2 \ .$$

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Door de vergelijking

$$x^2 - 24xy + 19y^2 + 4x - 48y = 21$$

wordt een kromme in $\mathbb{R}^2$ gegeven.

a) Bepaal het type van deze kwadratische kromme.

b) Geef de eenvoudigste vergelijking voor deze kromme.

3. Zie opgave 5 bij Wiskunde 30.

4. Bepaal met behulp van machtreekssubstitutie de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(1 - x^3)y'' - 6x^2y' - 6xy = 0$$

en druk deze oplossing uit in elementaire functies.

Herkansingsexamen/tentamen januari 1976

Wiskunde 30

1. De lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heeft ten opzichte van de standaardbasis de matrix

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix} .$$

a) Bewijs dat er een lineaire afbeelding B bestaat zodanig dat $B^2 = A$.

b) Bepaal de matrix van B ten opzichte van de standaardbasis.

2. Beschouw het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x + 2y + 3u + 4v = 13 , \\ xyuv = 4 . \end{cases}$$

Aan dit stelsel voldoet onder andere het punt $(x,y,u,v) = (2,2,1,1)$.

a) Bewijs dat in een omgeving van $(x,y) = (2,2)$ u en v door deze vergelijkingen bepaald zijn als functies van x en y.

b) Bereken

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

in het punt $(x,y) = (2,2)$.

3. Het gebied G wordt gedefinieerd door

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \quad (a > 0,\ b > 0) .$$

a) Geef een transformatie die de rechthoek met hoekpunten $(0,0)$, $(2\pi,0)$, $(2\pi,1)$ en $(0,1)$ op G afbeeldt.

b) Bereken

$$\iint_G (x^2 + y^2)\,dxdy .$$

4. De functie f is op $\mathbb{R}$ gegeven door

$$\begin{cases} f(x) = \sin \frac{x}{2}\,, & 0 \le x < \pi\,, \\ f(x+\pi) = f(x)\,. \end{cases}$$

a) Bepaal de Fourierreeks van f.

b) Bereken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-16n^2}\,.$$

5. Bepaal met de methode van machtreekssubstitutie de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' + 2xy' + 4y = 0$$

welke voldoet aan

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,.$$

Druk de oplossing in elementaire functies uit.

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Zie opgave 5 bij Wiskunde 30.

3. Bepaal de algemene reële oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_3 - x_2\,, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3\,, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_3 - x_1\,. \end{cases}$$

4. Zij C de vectorruimte van alle continue functies op het interval [0,1]. In C definiëren we voor elk tweetal functies f en g het inproduct

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \ .$$

De functie f wordt gedefinieerd door

$$f(x) = e^x, \quad 0 \le x \le 1 \ .$$

Bepaal de projectie van f op de deelruimte van polynomen van de graad kleiner dan of gelijk aan één.

Examen/tentamen juni 1976

Wiskunde 30

1. Zij V de vectorruimte van alle reële (3 × 3)-matrices met de gebruikelijke optelling van matrices en vermenigvuldiging van een matrix met een reëel getal.
De lineaire afbeelding Φ: V → V is gedefinieerd door

$$\Phi(A) = MA$$

waarin

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Bepaal een (reële) eigenwaarde van Φ en de bij deze eigenwaarde behorende eigenruimte.

2. Een kwadratische kromme in $\mathbb{R}^2$ is gegeven door de vergelijking

$$x^2 + 8xy + y^2 = 45 \ .$$

Bepaal het type van deze kwadratische kromme en schets de kromme in het (x,y)-vlak.

3. Zij G het gebied gegeven door

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq x^2 \leq 2y,\ 1 \leq x^2 + y \leq 2 \ .$$

Bereken de integraal

$$\iint\limits_G \frac{1}{xy}\,dxdy \ .$$

4. Zij $f(x) = \cos \frac{1}{2}x$ voor $0 \leq x \leq 2\pi$.

a) Bepaal de Fourierreeks (met periode 2π) van f.

b) Bereken met behulp van de gelijkheid van Parseval

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2} \ .$$

c) Ga na of de in a) bepaalde Fourierreeks uniform convergent is op $\mathbb{R}$.

5. Bepaal (bijvoorbeeld met behulp van machtreekssubstitutie) een polynoom y dat voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 20y = 0$$

en waarvoor

$$y(0) = 1 \ .$$

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 30.

3. Zie opgave 5 bij Wiskunde 30.

4. Bepaal, met behulp van Laplace transformatie, de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{y} + x = \sin t \ , \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + y = \cos t \ , \end{cases}$$

die voldoet aan de beginvoorwaarden

$$x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0 \ .$$

Herkansingsexamen/tentamen juni 1976

Wiskunde 30

1. In $\mathbb{R}^2$ zijn gegeven de rechten ℓ en m door de oorsprong die een hoek $\frac{\pi}{3}$ maken. Zij $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de loodrechte projectie op ℓ, $B: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de loodrechte projectie op m en $I: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de identiteit.
Bewijs dat er een getal λ bestaat, zodat

$$(A - B)^2 = \lambda I \ .$$

2. Aan het stelsel vergelijkingen

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0 \ , \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 2 \ , \\ xy - \sin u \cos v + z = 0 \ , \end{cases}$$

wordt onder meer voldaan door

$$(x,y,z,u,v) = (1,1,0,\tfrac{\pi}{2},0) \ .$$

a) Bewijs dat in een omgeving van het punt $(u,v) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ functies $\xi(u,v)$, $\eta(u,v)$ en $\zeta(u,v)$ bestaan zodanig dat in een omgeving van het punt $(x,y,z,u,v) = (1,1,0,\frac{\pi}{2},0)$ de oplossingen van (1) te schrijven zijn als

$$(x,y,z,u,v) = (\xi(u,v), \eta(u,v), \zeta(u,v), u, v) \ .$$

b) Bepaal de partiële afgeleiden van ξ, η en ζ naar u en v in het punt $(u,v) = (\frac{\pi}{2}, 0)$.

3. De functie δ_n is gedefinieerd door

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n \ , & \text{als } |x| < \frac{1}{2n} \ , \\ \frac{1}{2}n, & \text{als } |x| = \frac{1}{2n} \ , \\ 0 \ , & \text{als } |x| > \frac{1}{2n} \qquad (n \in \mathbb{N}) \ . \end{cases}$$

a) Bepaal de Fourier-getransformeerde van δ_n.

b) Bereken, via de inverse transformatie, de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y} \sin \frac{y}{2n}\, dy$$

voor alle n.

4. Bepaal, met behulp van Laplace transformatie, de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} -2\dot{x} + 4\dot{y} - 5x + 10y = 0\ , \\ \dot{x} + 15x - 18y = 12\ , \end{cases}$$

die voldoet aan de beginvoorwaarden

$$x(0) = 4,\ y(0) = 2\ .$$

5. Beschouw de rij functies (f_n) gedefinieerd door

$$f_n(x) = \frac{n(x + x^2)}{e^{nx}}\ , \qquad x \in [0,1]\ .$$

Onderzoek puntsgewijze convergentie en uniforme convergentie van de rij (f_n).

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. De lineaire afbeelding $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heeft ten opzichte van de standaardbasis de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}\ .$$

a) Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren van A.
b) Bepaal de matrix A^n $(n \in \mathbb{N})$.

3. Zie opgave 4 bij Wiskunde 30.

4. Bepaal de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{x} \qquad + y - 3z = e^t , \\ \dot{y} + 4x \qquad + 5z = 0 , \\ \dot{z} + 2x + y \qquad = 0 . \end{cases}$$

Examen/tentamen januari 1977

Wiskunde 30

1. Zij V de vectorruimte van alle (reële) 2×2 matrices met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging.
Voor elke vector $A \in V$ met

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

definiëren we het spoor: $sp(A) = a_{11} + a_{22}$.
Verder wordt voor elk tweetal vectoren A en B in V gedefinieerd

$$(A,B) = sp(A^T B) .$$

a) Toon aan dat (A,B) een inwendig product is.

Zij

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

De lineaire afbeelding $\mathcal{L}$: $V \to V$ wordt voor alle $X \in V$ gedefinieerd door

$$\mathcal{L}X = (U,X)U - X .$$

b) Toon aan dat $\mathcal{L}$ symmetrisch is.
c) Toon aan dat $\mathcal{L}$ orthogonaal is.

2. De lineaire afbeelding A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd als de orthogonale projectie in $\mathbb{R}^3$ op het vlak met vergelijking $(\underline{a},\underline{x}) = 0$, waarin $\underline{a} = (1,1,-1)$ t.o.v. de standaardbasis.
Bepaal de aard van het oppervlak $(A\underline{x},\underline{x}) = 1$ en de vergelijking van dit oppervlak t.o.v. de standaardbasis.

3. De vectorfunctie $\underline{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wordt gedefinieerd door

$$\begin{cases} f_1(x,y) = \frac{1}{5}(2xy + x + 2y) , \\ f_2(x,y) = \frac{1}{5}(x^2 + xy + x - 2y^2) . \end{cases}$$

Er geldt $\underline{f}(1,1) = (1,\frac{1}{5})$.
Twee krommen snijden elkaar in het punt $(1,1)$ onder een hoek α.
Bewijs dat de beelden van deze krommen elkaar in $(1,\frac{1}{5})$ onder dezelfde hoek α snijden.

4. Bepaal de Fouriergetransformeerde van de functie f, gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & -1 < x \le 1 , \\ -1, & x = -1 , \\ 0, & |x| > 1 . \end{cases}$$

Bereken met behulp van deze Fouriergetransformeerde

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx .$$

5. Beschouw de rij van functies (f_n) gegeven door

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^4} , \quad -1 \le x \le 1 .$$

a) Bewijs:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)dx = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx .$$

b) Bereken

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx .$$

c) Zij $0 < \delta < 1$.
Op welk van de intervallen $[-1,1]$, $[\delta,1]$ en $[\delta,1)$ is de rij (f_n) uniform convergent?

6. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$t\ddot{y} + (1-t)\dot{y} + ky = 0, \quad \text{met } k \in \mathbb{N} .$$

a) Bereken met behulp van machtreekssubstitutie een oplossing die voldoet aan $y(0) = 1$.

b) Bewijs dat de Laplace-getransformeerde van de functie f_k gedefinieerd door

$$f_k(t) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \binom{k}{n} \frac{t^n}{n!}$$

gelijk is aan

$$\frac{(p-1)^k}{p^{k+1}} .$$

c) Zij

$$g(x) = (f_k * f_m)(x) = \int_0^x f_k(t) f_m(x-t)\,dt .$$

Bewijs met behulp van de convolutiestelling dat

$$g'(x) = f_{k+m}(x) .$$

<u>Wiskunde 39</u>

1. Zij V de vectorruimte van alle (reële) 2×2 matrices met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging.
Voor elke vector $A \in V$ met

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

definiëren we het spoor: $sp(A) = a_{11} + a_{22}$.
Verder wordt voor elk tweetal vectoren A en B in V gedefinieerd

$$(A,B) = sp(A^T B) .$$

a) Toon aan dat (A,B) een inwendig product is.

b) Toon aan dat de dimensie van V vier is.

c) Toon aan dat de vectoren P, Q, R en S gedefinieerd door

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ en } S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

een orthonormale basis van V vormen.

Zij

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

De lineaire afbeelding $\mathcal{L}$: $V \to V$ wordt voor alle $X \in V$ gedefinieerd door

$$\mathcal{L}X = (U,X)U - X .$$

d) Toon aan dat $\mathcal{L}$ symmetrisch is.

e) Toon aan dat $\mathcal{L}$ orthogonaal is.

f) Toon aan dat P, Q, R en S eigenvectoren zijn van $\mathcal{L}$.

g) Bepaal de matrix van $\mathcal{L}$ ten opzichte van de basis P, Q, R, S.

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 30.

3. Zie opgave 6 bij Wiskunde 30.

4. Herleid de volgende differentiaalvergelijking tot een differentiaalvergelijking van het type Euler en geef vervolgens voor $x > -\frac{3}{2}$ de algemene oplossing:

$$(2x + 3)^2y'' + (2x + 3)y' - 2y = 24x^2 .$$

Herkansingsexamen/tentamen januari 1977

Wiskunde 30

1. Bepaal de aard van het oppervlak met vergelijking

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 12x - 12y + 6z = 0 .$$

2. Bereken

$$\iint_G (x + y)^3 e^{x^2-y^2} dxdy$$

als G het gebied is gedefinieerd door

$$G: \begin{cases} 1 \le x + y \le 2 \\ 1 \le x^2 - y^2 \le 2 . \end{cases}$$

3. De functie f wordt gedefinieerd door $f(x) = \cosh x$, $-\pi \le x \le \pi$, en verder periodiek voortgezet met periode 2π.

   a) Bepaal de Fourierreeks van f.

   b) Bepaal

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} .$$

4. Beschouw de rij functies (f_n) gedefinieerd door

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \quad 0 \le x \le 1 .$$

   a) Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

   b) Ga na of de rij (f_n) uniform convergent is op $[0,1]$.

5. Bepaal de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y , \\ \dot{y} = -x + 2y - 5e^t \sin t , \end{cases}$$

   welke voldoet aan

$$\begin{cases} x(0) = 4 , \\ y(0) = 3 . \end{cases}$$

<u>Wiskunde 39</u>

1. Zij V de verzameling van functies van de gedaante

$$f(x) = a + b \sin x + c \cos x \quad (a,b,c \in \mathbb{R}) .$$

   In V wordt een inproduct ingevoerd door

$$(f,g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx .$$

   Zij $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Laat zien dat de functies f_1, f_2, f_3 gedefinieerd door

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \ f_2(x) = \sin(x+\alpha), \ f_3(x) = \cos(x+\alpha)$$

   een orthonormale basis vormen van V.

b) Beschouw de orthonormale basis $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, sin x, cos x.
Bepaal de overgangsmatrix bij overgang van deze basis op de basis f_1, f_2, f_3.

c) De lineaire afbeelding A: V → V is gedefinieerd door $Af = f + f'$.
Bepaal de matrix van A t.o.v. de basis f_1, f_2, f_3.

2. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

3. Zie opgave 5 bij Wiskunde 30.

4. Bepaal met behulp van machtreekssubstitutie de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(1 + x^2)y'' - 2y = 1 \ .$$

Examen/tentamen juni 1977

Wiskunde 30

1. Zij L de vectorruimte van de polynomen $at^3 + bt^2 + ct + d$ van ten hoogste de graad drie.
Als basis in L nemen we t^3, t^2, t, 1.
De lineaire afbeelding T: L → L wordt gedefinieerd door

$$T(at^3 + bt^2 + ct + d) = a(t + 1)^3 + b(t + 2)^2 + c(t + 3) + d \ .$$

a) Bepaal de matrix T van T t.o.v. de gegeven basis.

b) Bewijs dat $(t + 1)^3$, $(t + 2)^2$, $(t + 3)$, 1 ook een basis is.

c) Toon aan dat T de overgangsmatrix is bij overgang van de oorspronkelijke basis op de onder b) gegeven basis.
In L definiëren we voor alle polynomen f en g uit L

$$(f,g) = f(1)g(1) + f(2)g(2) + f(3)g(3) + f(4)g(4) \ .$$

d) Ga na dat (f,g) een inproduct in L is.

e) Zij P: L → L de projectie op het vlak door t en 1.
Bepaal de matrix van P t.o.v. de basis t^3, t^2, t, 1.

2. Beschouw de vectorfunctie $\underline{f}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$\begin{cases} f_1(x,y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{x}{r^2} \\ f_2(x,y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\frac{y}{r^2} \ , \quad \text{waarin } r^2 = x^2 + y^2 \ . \end{cases}$$

a) Bepaal de functionaalmatrix van $\underline{f}$.

b) Twee rechten snijden elkaar in (1,1) onder een hoek α.
Toon aan dat de beelden van deze rechten elkaar in $\underline{f}(1,1)$ eveneens onder een hoek α snijden.

c) Bepaal het beeld van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = \rho^2$, $\rho > 1$.

d) Bepaal het beeld van het gebied bepaald door $x^2 + y^2 > 1$.

3. Bepaal de Fouriergetransformeerde F(y) van de functie f, gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \quad , & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Bereken vervolgens

$$\int_0^\infty \frac{y}{y^2 - 1} \cos \frac{\pi}{2} y \sin xy \, dy \, .$$

4. Bereken de inverse Laplace getransformeerde van

$$F(p) = \frac{1}{p^3(1 + p^2)}$$

i) door de gegeven functie F in partiële breuken te splitsen,

ii) door gebruik te maken van de convolutiestelling.

<u>Wiskunde 39</u>

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Bepaal het type van het kwadratische oppervlak in $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xy + 2x + 10y - 2z + 11 = 0 \, .$$

3. Zie opgave 4 bij Wiskunde 30.

4. Bepaal met behulp van machtreekssubstitutie de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0 \, .$$

5. Bepaal met behulp van Laplace-transformatie de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 5x + 4y \ , \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = 4x + 5y \ , \end{cases}$$

welke voldoet aan

$$x(0) = \frac{dy}{dt}(0) = 0; \ \frac{dx}{dt}(0) = y(0) = -1 \ .$$

<u>Herkansingsexamen/tentamen juni 1977</u>

<u>Wiskunde 30</u>

1. Zij gegeven de volgende matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} .$$

Beschouw A als de matrix van een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ t.o.v. de standaardbasis.

a) Bepaal een basis ten opzichte waarvan $\mathcal{A}$ een diagonaalmatrix heeft.
b) Bepaal de overgangsmatrix bij overgang van de standaardbasis op de onder a) gevonden basis.
c) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. de onder a) gevonden basis.

2. Zij V een vectorruimte van dimensie 3 met inproduct.
De vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ vormen een basis van V.

$$|\underline{a}| = |\underline{b}| = |\underline{c}| = 1, \quad (\underline{a},\underline{b}) = 0 \ .$$

Van de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ is gegeven

i) $\mathcal{A}$ is symmetrisch.
ii) $\mathcal{A}\underline{a} = \underline{a}$, $\mathcal{A}\underline{b} = \underline{b}$, $\mathcal{A}\underline{c} = \frac{1}{4}\underline{a} + \frac{1}{6}\underline{b} + \frac{1}{2}\underline{c}$.

a) Bereken $(\underline{a},\underline{c})$ en $(\underline{b},\underline{c})$.
b) Bereken de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van $\mathcal{A}$.
c) Bepaal een orthonormale basis $\underline{e},\underline{f},\underline{g}$ van eigenvectoren van $\mathcal{A}$.
d) Bepaal de overgangsmatrix bij overgang van de basis $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ op de basis $\underline{e},\underline{f},\underline{g}$.

3. Bereken

$$\iint_G xydxdy \ ,$$

waarbij G het gebied is gedefinieerd door

$$\begin{cases} x \geq 0 \ , \\ y \geq 0 \ , \\ (\frac{x}{a})^4 + (\frac{y}{b})^4 \leq x^2 + y^2 \ . \end{cases}$$

Gebruik de transformatie

$$\begin{cases} x = ar\sqrt{\cos \varphi} \ , \\ y = br\sqrt{\sin \varphi} \ . \end{cases}$$

4. Onderzoek de uniforme convergentie van de rij functies (f_n), gedefinieerd door

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ .$$

5. Bepaal voor $x > 0$ de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x^3y''' + x^2y'' = 0 \ .$$

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 30.

3. Zij A een $n \times n$ matrix.
Zij L de vectorruimte van alle symmetrische $n \times n$ matrices.
Voor elke $S \in L$ definiëren we $\mathcal{Q}(S) = A^TSA$.
   a) Bewijs dat voor elke $S \in L$ geldt: $\mathcal{Q}(S) \in L$.
   b) Bewijs dat $\mathcal{Q}$: $L \to L$ een lineaire afbeelding is.
   c) Bewijs dat $\mathcal{Q}$ een inverse heeft als A inverteerbaar is.
   d) Bepaal de inverse afbeelding van $\mathcal{Q}$ als A niet singulier is.

4. Zie opgave 5 bij Wiskunde 30.

5. Bepaal de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x \, , \\ \dot{y} = 4x + y \, , \\ \dot{z} = 2x + y - z \, . \end{cases}$$

Examen/tentamen januari 1978

Wiskunde 30

1. De lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft de eigenschappen $A^3 = 0$ en $A^2 \neq 0$ (0 is de nulafbeelding).

   a) Zij $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ waarvoor geldt $A^2\underline{x} \neq \underline{0}$. Bewijs dat $\underline{x}$, $A\underline{x}$, $A^2\underline{x}$ een basis is van $\mathbb{R}^3$.

   De matrix van A wordt t.o.v. de standaardbasis gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} .$$

   b) Bepaal een vector $\underline{x}$ met $A^2\underline{x} \neq \underline{0}$ en geef de matrix A' van A t.o.v. de basis $\underline{x}$, $A\underline{x}$, $A^2\underline{x}$.

   c) Er geldt $A' = S^{-1}AS$. Bepaal de overgangsmatrix S.

2. Bereken

$$\iint_G (x^2 + y^2)e^{y^2-x^2}\,dxdy$$

   als G het gebied is gedefinieerd door

$$G: \begin{cases} x \geq 0, \; y \geq 0 \, , \\ xy \leq 1 \, , \\ 0 \leq x^2 - y^2 \leq 4 \, . \end{cases}$$

3. Beschouw de rij van functies (f_n) gedefinieerd door

$$f_n(x) = n \sin \frac{x}{n} .$$

   a) Bewijs dat de rij (f_n) puntsgewijs convergent is op $\mathbb{R}$.

   b) Bewijs dat de rij (f_n) uniform convergent is op $[-2,2]$.

   c) Ga na of de rij (f_n) uniform convergent is op $\mathbb{R}$.

4. Bepaal met behulp van Laplace transformatie de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \ddot{x} = -4x + 2y \ , \\ \ddot{y} = \ \ 2x - 4y \ , \end{cases}$$

welke voldoet aan

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = y(0) = 0 \ , \\ \dot{y}(0) = 2 \ . \end{cases}$$

5. Bepaal de Fouriergetransformeerde van de functie f, gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} e^{-3x} & \text{voor } x \geq 0 \ , \\ 0 & \text{voor } x < 0 \ . \end{cases}$$

Bereken hiermee

$$\int_0^\infty \frac{\cos 3x}{x^2 + 9} \, dx \ .$$

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Bepaal het type van het kwadratisch oppervlak in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijking

$$x^2 + 4yz - 2x + 1 = 0 \ .$$

3. Zie opgave 4 bij Wiskunde 30.

4. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x, \qquad x > 0 \ .$$

5. Bepaal door middel van machtreekssubstitutie een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$xy'' + y' + xy = 0$$

welke voldoet aan $y(0) = 1$.

Herkansingsexamen/tentamen januari 1978

Wiskunde 30

1. De lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft t.o.v. de basis $(1,0,0)$, $(-1,1,0)$, $(0,0,1)$ de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} .$$

   a) Toon aan dat A een symmetrische afbeelding is.
   b) Bewijs dat de nulruimte van A het orthogonale complement van de beeldruimte van A is.
   c) De vector $\underline{x}$ wordt t.o.v. de standaardbasis gegeven door $\underline{x} = (3,1,2)$. Bepaal de coördinaten t.o.v. de standaardbasis van een vector $\underline{y}$ uit de beeldruimte van A en een vector $\underline{z}$ uit de nulruimte van A zodat $\underline{x} = \underline{y} + \underline{z}$.

2. Bereken

$$\iint_G (x+y)^2 e^{x^2-y^2}\, dxdy$$

als G het gebied is gegeven door

$$G: \begin{cases} 0 \le y - x \le 1 , \\ 0 \le x + y \le 1 . \end{cases}$$

3. Zij

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)} , \qquad x \in (0,1) .$$

Bewijs dat voor iedere $x \in (0,1)$ geldt dat

$$T'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} .$$

4. Bepaal de Fourierreeks van de functie $f(x)$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{voor } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} , \\ 0 & \text{voor } \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi . \end{cases}$$

Geef de som van de reeks voor $x = \frac{\pi}{2}$.

5. Bepaal door middel van machtreekssubstitutie de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' - xy' + 4y = 0 \ .$$

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. In $\mathbb{R}^2$ worden de vectoren $\underline{f}_1 = (1,1)$ en $\underline{f}_2 = (2,1)$ als basis genomen. De punten van een lijn ℓ hebben t.o.v. de basis $\underline{f}_1,\underline{f}_2$ coördinaten (x',y') die voldoen aan de vergelijking

$$x' + y' = 0 \ .$$

a) Bewijs dat de vector met coördinaten $(-2,1)$ t.o.v. de basis $\underline{f}_1,\underline{f}_2$ loodrecht op ℓ staat.

b) Bepaal de vergelijking in coördinaten t.o.v. de basis $\underline{f}_1,\underline{f}_2$ van de lijn die door $\underline{0}$ gaat en loodrecht staat op ℓ.

3. Bepaal de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 4y + 2e^{5t} \ , \\ \dot{y} = 4x - 3y + 6e^{5t} \ . \end{cases}$$

4. Zie opgave 5 bij Wiskunde 30.

Examen/tentamen juni 1978

Wiskunde 30

1. Zij V een drie-dimensionale reële vectorruimte met inproduct $(\underline{x},\underline{y})$. De lineaire afbeelding A: $V \to V$ wordt gedefinieerd door

$$A\underline{x} = p\underline{x} + (\underline{a},\underline{x})\underline{a} - (\underline{b},\underline{x})\underline{b} \ .$$

Hierbij is $|\underline{a}| = |\underline{b}| = \sqrt{2}$, $(\underline{a},\underline{b}) = 0$ en $p \in \mathbb{R}$.

a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

b) Geef de matrix van A t.o.v. een basis van eigenvectoren.

c) Bepaal de matrix van A t.o.v. de vectoren $\underline{v}_1 = \underline{a} + \underline{b}$, $\underline{v}_2 = \underline{a} - \underline{b}$ en een vector $\underline{v}_3 \neq \underline{0}$ waarvoor geldt

$$(\underline{a},\underline{v}_3) = (\underline{b},\underline{v}_3) = 0 \ .$$

d) Onderzoek of A symmetrisch is.

2. Bepaal de Fourierreeks van de functie f(x), gedefinieerd door

$$f(x) = |x| \cos \pi x, \quad -1 \le x \le 1 .$$

Bereken vervolgens

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 1}{(4n^2 - 1)^2} .$$

3. Bepaal de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{x} = \quad\; y + z , \\ \dot{y} = x \quad\; + z , \\ \dot{z} = x + y \quad\; , \end{cases}$$

welke voldoet aan $x(0) = y(0) = 0$ en $z(0) = 3$.

4. Beschouw de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^5 + n^2}, \qquad x \ge 0 .$$

Ga na of deze reeks uniform convergeert op $[0,\infty)$.

5. Bereken

$$\iint_G \sin(xy)\,dxdy ,$$

als G het gebied is, bepaald door

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} \le xy \le \pi , \\ 0 < x \le y \le 4x . \end{cases}$$

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. In de lineaire ruimte V van polynomen van de graad ≤ 2 wordt een inproduct gedefinieerd door

$$(p(x),q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx .$$

W is de deelruimte opgespannen door de polynomen 1 en x.

a) Bepaal het orthoplement van W in V.

b) Bepaal de projectie van x^2 op W.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 30.

4. Bepaal door middel van machtreekssubstitutie de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0 ,$$

welke voldoet aan $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$.

5. Bepaal alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x \qquad (x > 0) .$$

Herkansingsexamen/tentamen juni 1978

Wiskunde 30

1. In $\mathbb{R}^3$ is $(\underline{x},\underline{y})$ het gewone inproduct.
De lineaire afbeelding $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft t.o.v. de standaardbasis de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Laat zien dat $[\underline{x},\underline{y}] = (A\underline{x},\underline{y})$ een inproduct in $\mathbb{R}^3$ is.

b) Bepaal de verzameling vectoren $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ waarvoor geldt dat voor iedere $\underline{y} \in \mathbb{R}^3$: $[\underline{x},\underline{y}] = (\underline{x},\underline{y})$.

c) Geef een t.o.v. het inproduct $[\underline{x},\underline{y}]$ orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$.

d) Wat stelt $[\underline{x},\underline{x}] = 1$ meetkundig voor?

2. Bepaal met behulp van Laplace-transformatie de oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{x} + x + y = 1 , \\ \dot{y} + 3x - y = t , \end{cases}$$

welke voldoet aan $x(0) = \frac{1}{2}$, $y(0) = \frac{3}{2}$.

3. Bewijs dat door de vergelijkingen

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^2 + 3x_3^4 - 5x_4^3 = 0 \,, \\ x_1^2 - 2x_2 + x_3^3 - 5x_3 + 3x_4^2 = 0 \,, \end{cases}$$

in een omgeving van het punt (1,2,0,1) de variabelen x_3 en x_4 kunnen worden opgevat als functies van x_1 en x_2. Bereken van deze functies de functionaaldeterminant

$$\left(\frac{\partial(x_3,x_4)}{\partial(x_1,x_2)}\right)_{(1,2,0,1)} .$$

4. Gegeven de rij functies

$$f_n(x) = n^2xe^{-nx^2} .$$

Onderzoek of de rij uniform convergeert op $\mathbb{R}$.

5. Bepaal met behulp van machtreekssubstitutie alle reële oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 .$$

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. Zij V een reële drie-dimensionale lineaire ruimte met inproduct.
De vectoren $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vormen een orthonormale basis van V.
De lineaire afbeelding A: $V \to V$ wordt gegeven door $A\underline{a} = \underline{a} - 2\underline{b}$, $A\underline{b} = -2\underline{a} + 2\underline{c}$ en $A\underline{c} = -2\underline{b} + \underline{c}$.

   a) Bepaal de matrix van A t.o.v. de basis $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$.

   W is de deelruimte opgespannen door de eigenvectoren van A.

   b) Bepaal $W^\perp$.

   c) Geef de matrix van A t.o.v. een basis bestaande uit onderling loodrechte vectoren uit W en $W^\perp$.

3. Zie opgave 2 bij Wiskunde 30.

4. Bepaal alle reële oplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y \ , \\ \dot{y} = 4x + 2y \ . \end{cases}$$

5. Zie opgave 5 bij Wiskunde 30.

Examen/tentamen januari 1979.

Wiskunde 30

1. L is een vectorruimte van dimensie 3 met inproduct. De vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ vormen een orthonormale basis van L.
Gegeven is de lineaire afbeelding $A: L \to L$ waarvoor geldt:

$$A\underline{x} = \tfrac{1}{2}\{(\underline{x},\underline{a})\underline{b} + (\underline{x},\underline{b})\underline{a}\} \ .$$

a) Toon aan dat $|A\underline{x}| \leq \tfrac{1}{2}|\underline{x}|$.
b) Bepaal een basis van L ten opzichte waarvan A een diagonaalmatrix heeft.

2. In $\mathbb{R}^3$ is de kromme K gegeven door

$$K: \begin{cases} x^2 - 2x + 2y^2 + z^2 = 0 \ , \\ z = xy \ . \end{cases}$$

Het punt P = (2,0,0) ligt op K.

a) Bewijs dat in een omgeving van P de kromme beschreven kan worden door middel van een parametervoorstelling met y als parameter.
b) Geef een parametervoorstelling van de raaklijn aan K in P.
c) Bewijs dat K in P raakt aan het oppervlak S met vergelijking

$$x^2 + 2xy + z^2 - 4x - 2z = -4 \ .$$

3. a) Bewijs dat de Fourier-cosinusreeks van de functie f(x) = x op het interval $[0,\pi]$ gelijk is aan

$$\frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \ .$$

b) Bewijs dat deze reeks uniform convergent is op $[-\pi,\pi]$.
c) Bepaal de som van de reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3} \quad \text{voor } -\pi \leq x \leq \pi \ .$$

4. Los op het stelsel differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten:

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

5. a) Bepaal de Fouriergetransformeerde van

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{voor } x \geq 0 , \\ 0 & \text{voor } x < 0 . \end{cases}$$

b) Bewijs met behulp daarvan dat

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^2} = \int_0^\infty \frac{y^2 dy}{(1+y^2)^2} .$$

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. De vectoren

$$\underline{a} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \underline{b} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \underline{c} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

vormen een orthonormale basis voor een coördinatenstelsel in $\mathbb{R}^3$, waarbij $\underline{a}$ de richting heeft van de positieve x'-as, $\underline{b}$ die van de positieve y'-as en $\underline{c}$ die van de positieve z'-as. In dit coördinatenstelsel is gegeven de vergelijking

$$x'^2 - 3y'^2 + 2z'^2 = 1$$

van een tweedegraadsoppervlak.

a) Wat is het type van het oppervlak?

b) Bepaal de vergelijking van het oppervlak in x,y,z-coördinaten, ten opzichte van de standaardbasis.

3. Bepaal, bijvoorbeeld met machtreekssubstitutie, de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 2xy' - 2y = 0 .$$

4. Zie opgave 4 bij Wiskunde 30.

Herkansingsexamen/tentamen januari 1979.

Wiskunde 30

1. Van de lineaire afbeelding $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zijn de vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ met de kolommen ten opzichte van de standaardbasis respectievelijk

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ 1 \end{bmatrix}$$

eigenvectoren bij de eigenwaarden 1, 2, respectievelijk 3.

a) Voor welke waarde(n) van p is $\mathcal{A}$ symmetrisch?

b) Bepaal voor iedere waarde van p de matrix A van $\mathcal{A}$ ten opzichte van de standaardbasis.

c) Neem p = 0. Toon aan dat

$$\max_{|\underline{x}|\leq 1} (\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) = 3 .$$

2. Bereken

$$\iint_G \frac{x^2+y^2}{xy}\, dxdy ,$$

waarbij G gegeven is door $x \geq 0$, $x \leq y \leq 3x$, $\frac{1}{2} \leq xy \leq 2$.

3. De functie f wordt voor $0 \leq x < 2\pi$ gedefinieerd door $f(x) = x^2$ en is verder periodiek met periode 2π.

a) Bepaal de Fourierreeks van f.

b) Is deze reeks uniform convergent op $[0,2\pi]$?

4. Voor $x > 0$ is gegeven de differentiaalvergelijking

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 12x^2 .$$

Bepaal hiervan de algemene oplossing.

5. Toon aan dat voor de oplossingen x(t) en y(t) van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + y = 2e^t + 1 , \\ x + \dfrac{dy}{dt} = -e^t , \end{cases}$$

met $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ en $y(0) = 1$ geldt: $x(t) + y(t) = 1$.

Wiskunde 39

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 30.

2. In $\mathbb{R}^2$ is gegeven de parabool met vergelijking

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 30x + 10y + 25 = 0 .$$

Bepaal de vergelijking van de as van symmetrie van de parabool.

3. Zie opgave 4 bij Wiskunde 30.

4. Zie opgave 5 bij Wiskunde 30.

Antwoorden Tentamenopgaven

1.1. b) $\alpha = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, eigenvectoren: alle $\underline{x} \neq \underline{0}$;

$\alpha \neq 0$: $\lambda_1 = e^{\alpha}$, $\underline{v} = \mu[1,1]^T$, $\mu \neq 0$,

$\lambda_2 = e^{-\alpha}$, $\underline{v} = \mu[1,-1]^T$, $\mu \neq 0$.

c) $\alpha = 0$: S willekeurige orthogonale matrix;

$\alpha \neq 0$: $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

1.2. a) Voor alle $\underline{x} \in L$, $\underline{y} \in L$ geldt $(\underline{x}, A\underline{y}) = (A\underline{x}, \underline{y})$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & (\underline{a},\underline{c}) \\ 0 & -1 & 0 \\ (\underline{a},\underline{c}) & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $AL = L$ want $(\underline{a},\underline{c}) \neq \pm 1$ (ga na).

d) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ orthonormaal.

e) spiegeling aan het vlak opgespannen door $\underline{a}$, $\underline{c}$.

1.3. a) $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

b) A is orthogonaal want t.o.v. de orthonormale basis $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{a}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{b}-\underline{c})$, $\frac{1}{2}(\underline{a}-\underline{b}-\underline{c})$ heeft A de orthogonale matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) spiegeling aan het vlak $(\underline{a}-\underline{b}-\underline{c}, \underline{x}) = 0$.

1.4. b) $p + r = 0$: $\lambda_1 = 1$, $\underline{v} = \mu[q,\ 1-p]^T$, $\mu \neq 0$, $p \neq 1$,
$\underline{v} = \mu[1,0]^T$, $\mu \neq 0$, $p = 1$,

$\lambda_2 = -1$, $\underline{v} = \mu[-q,\ 1+p]^T$, $\mu \neq 0$, $p \neq -1$,
$\underline{v} = \mu[1,0]^T$, $\mu \neq 0$, $p = -1$;

$p + r = 2$: $\lambda = 1$, alle $\underline{x} \neq \underline{0}$ eigenvector ;

$p + r = -2$: $\lambda = -1$, alle $\underline{x} \neq \underline{0}$ eigenvector .

c) $p + r = 0$: spiegeling aan de rechte $\underline{x} = \lambda[q,1-p]^T$, $p \neq 1$,
resp. aan de rechte $\underline{x} = \lambda[1,0]^T$, $p = 1$;

$p + r = 2$: $A = I$;

$p + r = -2$: draaiing over hoek π.

1.5. a) Ja, want voor alle $\underline{x} \in L$, $\underline{y} \in L$ geldt $(\underline{x},A\underline{y}) = (A\underline{x},\underline{y})$.

b) $\lambda = 1$, eigenvectoren: alle $\underline{x} \neq \underline{0}$ in het vlak $(\underline{n},\underline{x}) = 0$;

$\lambda = 2$, $\underline{v} = \alpha\underline{n}$, $\alpha \neq 0$.

c) dimensie nulruimte van A is 0 (geen eigenwaarde 0), dus
$AL = L$, dus $A^{\leftarrow}$ bestaat met $A^{\leftarrow}A = I$:

$\underline{x} = A^{\leftarrow}(A\underline{x}) = A^{\leftarrow}\underline{x} + (\underline{x},\underline{n})A^{\leftarrow}\underline{n}$, enz.

1.6. a) $\frac{1}{3}[1,0,\sqrt{2},0]^T$, $\frac{1}{3}[0,1,0,\sqrt{2}]^T$.

b) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

1.7. b) Bijv. $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$.

c) Nee: $-3 = (\underline{a},A\underline{c}) \neq (A\underline{a},\underline{c}) = 0$.

1.8. a) $\lambda_1 = 3$, $\underline{v} = \mu(2\underline{a}+\underline{b})$, $\mu \neq 0$,
$\lambda_2 = 4$, $\underline{v} = \mu(\underline{a}-\underline{b})$, $\mu \neq 0$.

b) -1 .

1.9. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

1.11. b) bijv. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}t\sqrt{6}$, $\frac{3}{4}(t^2-\frac{1}{3})\sqrt{10}$;

c) $\frac{3}{5}t$.

1.12. $x'' = 3(y'')^2 + 3(z'')^2$, omwentelingsparaboloïde;

$x + 2y - 2z = 0$.

1.13. $(x'')^2 - (y'')^2 = 1$, hyperbool.

1.14. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $\frac{1}{2}\sqrt{2}[1,0,1]^T$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}[-1,0,-1]^T$.

1.15. $2(x'')^2 - (y'')^2 + 1 = 0$, hyperbolische cylinder.

2.1. $\{(u,v,w) \mid w = \sqrt{u^2+v^2}\}$, "halve" kegel.

2.2. $\int_0^{\frac{1}{5}} du \int_0^{\frac{2}{5}} dv = \frac{2}{25}$.

2.3. $\frac{1}{2} \int_1^2 du \int_0^1 (uv)^{-\frac{1}{2}} dv = 2(\sqrt{2} - 1)$.

2.4. $x = u^2$, $y = v$: $2 \iint_{G'} u^2 e^{-u^2-v^2} dudv$ met G' gegeven door $u \geq 0$, $u^2+v^2 \leq 1$;

$\frac{\pi}{2}(1 - \frac{2}{e})$.

2.5. $\frac{1}{8} \int_1^4 du \int_{\frac{1}{4}}^1 (uv)^{-\frac{1}{2}} dv = \frac{1}{4}$.

2.6. a) $G = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq e^2,\ x \leq y \leq x \tan 1\}$

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^1 u\, du \int_0^1 dv = \frac{1}{32}(16 - \pi^2)$.

2.7. a) $\frac{2x}{y}$

b) $2 \int_1^4 x dx \int_0^{2\pi} \sin xy\, dy = 6$.

3.1. $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

3.2. $\sin \alpha x$ voor $\alpha = 1,2,3,\ldots$;

$- \sin(-\alpha x)$ voor $\alpha = -1,-2,-3,\ldots$;

$\frac{2 \sin(\pi\alpha)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{n^2 - \alpha^2}$ voor $\alpha \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

3.3. a) niet uniform convergent, want niet convergent voor $x = 0$;

b) uniform convergent, want $\left|\left(\frac{\cos x}{2}\right)^n\right| \leq \frac{1}{2^n}$, kenmerk van Weierstrass ;

c) niet uniform convergent, want $S(x)$ niet continu in $x = 0$ (stelling 3.6.4).

3.4. $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\right)\sin x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 4nx}{16n^2 - 1} +$

$+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4n+2}{4(2n+1)^2 - 1} - \frac{1}{2n+1}\right) \sin(4n+2)x; \quad \frac{\pi}{4}$.

3.5. a) $x - \pi$.

b) $a_{2n-1} = \frac{2}{2n-1} (-1)^{n-1} - \frac{4}{(2n-1)^2 \pi}$.

3.6. $\frac{4}{\pi^2} [(2\sqrt{2} - 2)\sin \frac{\pi x}{4} + \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{2}{9}(1 + \sqrt{2})\sin \frac{3\pi x}{4} - \frac{2}{25}(1 + \sqrt{2})\sin \frac{5\pi x}{4} + \ldots]$.

3.7. $\frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin \omega t - \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\omega t}{4n^2 - 1}$.

3.8. b) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $x \in [0,1]$.

c) $\alpha < 1$.

3.9. $\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n^2 \pi} \cos 2\pi nx + \frac{1}{n} \sin 2\pi nx \right)$.

3.10. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,\ x \in [0,\infty);\ |f_n(n) - f(n)| = \frac{\pi}{4}\sqrt{n} \to \infty,\ n \to \infty;$

$g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 0,\ x \in [0,\infty);\ \| f_n' - g \|_{[0,\infty)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,\ n \to \infty$.

3.11. 1 ; stellingen 3.6.4 en 3.6.5.

3.12. $A(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{voor } y = 0 , \\ \frac{2 \sin y}{\pi y} & \text{voor } y > 0 . \end{cases}$

3.13. $\left| \frac{x}{n^4 x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2n^2}$, $x \in (-\infty,\infty)$.

3.14. a) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor } x = 0 , \\ 0 & \text{voor } x > 0 . \end{cases}$

b) nee, want $\| f_n - f \|_{[0,1]} = 1$ of met stelling 3.5.6 .

c) ja, want $\| f_n - f \|_{[1,\infty)} = f_n(1) = \frac{n}{n+1} e^{-n} \to 0,\ n \to \infty$.

d) ja, want $|f_n(x)| \leq \frac{ne^{-n}}{n+1}$, $x \in [1,\infty)$.

3.15. a) ja .

b) ja .

3.16. a) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x,\ x \in [0,\infty)$.

b) $|f_n(n) - f(n)| = n(1 - \cos \frac{1}{2}) \to \infty,\ n \to \infty$.

c) $\| f_n - f \|_{[0,a]} = a(1 - \cos \frac{a}{n+a}) \to 0,\ n \to \infty$, dus de rij (f_n) is uniform convergent op $[0,a]$.

3.17. $A(y) = \begin{cases} \dfrac{2\cos\frac{\pi y}{2}}{\pi(1-y^2)} & \text{voor } y \neq 1\,, \\ \dfrac{1}{2} & \text{voor } y = 1\,; \end{cases}$

$B(y) = 0$.

3.18. $\frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6}$; stellingen 3.6.7, 3.6.4, 3.6.5.

3.20. b) $\frac{\pi}{2} \coth \pi - \frac{1}{2}$.

3.21. a) $F(y) = \begin{cases} \dfrac{2y \sin 2\pi y}{y^2-1} & \text{voor } |y| \neq 1\,, \\ 2\pi & \text{voor } |y| = 1\,; \end{cases}$

b) $\frac{\pi}{2}$.

3.22. $-1 \le x \le 1$; stellingen 3.6.7 en 3.6.6.

3.23. $\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \dfrac{\log(n+x)}{n^2} \right| \geq \dfrac{\log(N+1+x)}{(N+1)^2}$ en $\log(N+1+x)$ niet begrensd op $[0,\infty)$.

3.24. a) Voor $n \geq 2$ geldt

$$\|f_n\|_{[0,1]} = \|S_n - S_{n-1}\|_{[0,1]} \leq \|S_n - S\|_{[0,1]} + \|S_{n-1} - S\|_{[0,1]} \to 0$$

voor $n \to \infty$, dus de rij (f_n) is uniform convergent op $[0,1]$ met limiet $f = 0$.

b) 0, stelling 3.5.7.

4.1. $y = 3x$.

4.2. $y = 4x + 2x^2$.

4.3. $y = 1 + x + x^2 + x^3$.

4.4. $\underline{x} = e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} - 2e^{t}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$.

4.5. $y = a_0 \cos(x^2) + a_2 \sin(x^2)$.

4.6. $\underline{x} = \begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.

4.7. $\underline{x} = e^{2t}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + te^{2t}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} + e^{t}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$.

4.8. $$\underline{x} = C_1e^{t}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} + C_2e^{-t}\begin{bmatrix}2\cos t - \sin t\\ -\sin t\\ \cos t\end{bmatrix} +$$
$$+ C_3e^{-t}\begin{bmatrix}2\sin t + \cos t\\ \cos t\\ \sin t\end{bmatrix}, \; C_1 \in \mathbb{R},\; C_2 \in \mathbb{R},\; C_3 \in \mathbb{R}.$$

4.9. $\underline{x} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + C_1e^{-t}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + C_2e^{-t}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + C_3e^{2t}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

4.10. $y = \frac{1}{3}x + C_1x^3 + C_2x^{-2}$.

4.11. $\begin{cases} x = 3 + \frac{1}{2}t^2 - 2\sin t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$.

4.12. $\underline{x} = e^{t \cos \alpha} \begin{bmatrix} \cos(t \sin \alpha) \\ \sin(t \sin \alpha) \end{bmatrix}$.

4.13. $\begin{cases} x = e^t + \sin t \ , \\ y = e^t + \cos t \ . \end{cases}$

4.14. $y = t - \sin t$.

Tentamen januari 1976

Wiskunde 30

1. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, eigenvectoren: alle $\underline{x} \neq \underline{0}$ met $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$;

   $\lambda_4 = 3$, $\underline{v} = \alpha[1,1,1,1]^T$, $\alpha \neq 0$.

   b) bijv. $S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$.

2. a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ y+z & 2y+x & -2z+x \end{bmatrix}$.

   b) Definieer de vectorfunctie $\underline{f} = (f_1;f_2): \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ door

$$\begin{cases} f_1(u,v,z;x,y) = u - 3x - 2y + z \; , \\ f_2(u,v,z;x,y) = v - y^2 + z^2 - xy - xz \; . \end{cases}$$

   Dan geldt

   1° $\underline{f}$ is continu differentieerbaar op $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$;

   2° $\underline{f}(4,2,1;1,1) = \underline{0}$;

   3° $\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}(4,2,1;1,1) = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$.

   Op grond van de impliciete-functie-stelling volgt nu het gestelde.

3. $\frac{21}{32}$.

4. b) $\left|-\frac{4}{\pi}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}\right| \leq \frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}$, $n = 1,2,\ldots$, $x \in \mathbb{R}$;

   $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ is convergent, kenmerk van Weierstrass.

   c) $\frac{1}{16}(\pi^2 - 8)$.

5. $y = \frac{1}{60}t^5e^t - t^2e^t$.

Wiskunde 39

2. b) en a) $5(x'')^2 - (y'')^2 = 5$, hyperbool.

4. $y = \dfrac{a_0 + a_1 x}{1 - x^3}$.

Herkansingstentamen januari 1976

Wiskunde 30

1. b) bijv. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

2. a) Definieer de vectorfunctie $\underline{f} = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ door

$$\begin{cases} f_1(x,y;u,v) = x + 2y + 3u + 4v - 13 , \\ f_2(x,y;u,v) = xyuv - 4 . \end{cases}$$

Dan geldt

1° $\underline{f}$ is continu differentieerbaar op $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$;

2° $\underline{f}(2,2;1,1) = \underline{0}$;

3° $\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}(2,2;1,1) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.

Op grond van de impliciete-functie-stelling volgt nu het gestelde.

b) $\frac{1}{2}$.

3. a) $\begin{cases} x = a\ r \cos\varphi , \\ y = b\ r \sin\varphi ,\ 0 \le \varphi < 2\pi ,\ 0 \le r \le 1 . \end{cases}$

b) $\frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$.

4. a) $\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2nx + 4n \sin 2nx}{1 - 16n^2}$.

b) $\frac{1}{8}(\pi - 4)$.

5. $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!} = xe^{-x^2}$.

Wiskunde 39

3. $$\underline{x} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \quad C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R},\ C_3 \in \mathbb{R}.$$

4. $4e - 10 + (18 - 6e)x$.

Tentamen juni 1976

Wiskunde 30

1. $$\lambda = 6,\ A = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R},\ \gamma \in \mathbb{R}.$$

2. Hyperbool met middelpunt $[0,0]^T$, met hoofdassen $y = \pm x$, door de punten $\pm \frac{3}{2}\sqrt{2}[1,1]^T$, $\pm [3\sqrt{5},0]^T$, $\pm [0,3\sqrt{5}]^T$.

3. $\frac{1}{2}(\log 2)^2$.

4. a) $\dfrac{8}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \sin nx}{4n^2 - 1}$.

   b) $\dfrac{\pi^2}{64}$.

   c) Niet uniform convergent op $\mathbb{R}$.

5. $y = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3} x^4$.

Wiskunde 39

4. $$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t}, \\ y = -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t}. \end{cases}$$

Herkansingstentamen juni 1976

Wiskunde 30

1. $\lambda = \frac{3}{4}$.

2. a) Definieer de vectorfunctie $\underline{f}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ door

$$\begin{cases} f_1(u,v;x,y,z) = x^2 - y\cos(uv) + z^2 , \\ f_2(u,v;x,y,z) = x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 - 2 , \\ f_3(u,v;x,y,z) = xy - \sin u \cos v + z . \end{cases}$$

Dan geldt

1° $\underline{f}$ is continu differentieerbaar op $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$;
2° $\underline{f}(\frac{\pi}{2},0;1,1,0) = \underline{0}$;
3° $\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)}(\frac{\pi}{2},0;1,1,0) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$

Het gestelde volgt nu uit de impliciete-functie-stelling.

b) $\frac{\partial\xi}{\partial u}(\frac{\pi}{2},0) = \frac{\partial\eta}{\partial u}(\frac{\pi}{2},0) = \frac{\partial\zeta}{\partial u}(\frac{\pi}{2},0) = 0,$

$\frac{\partial\xi}{\partial v}(\frac{\pi}{2},0) = \frac{\pi}{12}$, $\frac{\partial\eta}{\partial v}(\frac{\pi}{2},0) = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial v}(\frac{\pi}{2},0) = -\frac{\pi}{4}$.

3. a) $F(y) = \begin{cases} \frac{2n}{y}\sin\frac{y}{2n} & \text{voor } y \neq 0 , \\ 1 & \text{voor } y = 0 . \end{cases}$

b) π .

4. $\begin{cases} x = 2 + 2e^{-6t}, \\ y = 1 + e^{-6t} . \end{cases}$

5. Puntsgewijs convergent met limiet 0;
niet uniform convergent op [0,1], want $\|f_n\|_{[0,1]} \geq f_n(\frac{1}{n}) = (1 + \frac{1}{n})e^{-1} > e^{-1}$.

Wiskunde 39

2. a) $\lambda_1 = -6$, $\underline{v} = \alpha[1,-1]^T$, $\alpha \neq 0$,
   $\lambda_2 = 10$, $\underline{v} = \beta[1,1]^T$, $\beta \neq 0$.

   b) $A^n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10^n + (-1)^n 6^n & 10^n + (-1)^{n+1}6^n \\ 10^n + (-1)^{n+1}6^n & 10^n + (-1)^n 6^n \end{bmatrix}$.

4. $\underline{x} = \frac{1}{2}e^t\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} + C_1 e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix} + C_3 e^{-t}\left\{t\begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Tentamen januari 1977

Wiskunde 30

2. Rechte cirkelcylinder; $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz + 2yz = 3$.

4. $F(y) = \frac{2i}{y^2}(\sin y - ye^{-iy})$, $y \neq 0$; $F(0) = -2$; $\frac{\pi}{2}$.

5. b) 0; $\frac{\pi}{2}$.
   c) Op de intervallen $[\delta,1]$ en $[\delta,1)$.

6. a) $y = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \binom{k}{n}\frac{t^n}{n!}$.

Wiskunde 39

1. g) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $y = \frac{3}{5}(2x+3)^2 - 6(2x+3)\log(2x+3) - 27 + C_1(2x+3) + C_2(2x+3)^{-\frac{1}{2}}$.

Herkansingstentamen januari 1977

Wiskunde 30

1. Parabolische cylinder.

2. $\frac{7}{6}\, e(e-1)$.

3. a) $\frac{1}{\pi}\sinh\pi + \frac{2}{\pi}\sinh\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx.$

b) $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2\sinh\pi}$.

4. a) 0; b) niet uniform convergent op [0,1].

5. $\begin{cases} x = e^{3t} + e^t + 2e^t\cos t - e^t\sin t, \\ y = -e^{3t} + e^t + 3e^t\cos t + e^t\sin t. \end{cases}$

Wiskunde 39

1. b) $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $y = a_0 + (\frac{1}{2} + a_0)x^2 + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1}.$

Tentamen juni 1977

Wiskunde 30

1. a) $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20,8 & 5 & 1 & 0 \\ -27 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r^{-2} - x^2r^{-4} & -xyr^{-4} \\ xyr^{-4} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r^{-2} + y^2r^{-4} \end{bmatrix}$.

c) Ellips met vergelijking $\frac{f_1^2}{(\frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}\rho^{-1})^2} + \frac{f_2^2}{(\frac{1}{2}\rho - \frac{1}{2}\rho^{-1})^2} = 1.$

d) $\mathbb{R}^2$ minus het lijnsegment $-1 \le f_1 \le 1$, $f_2 = 0$.

3. $F(y) = \frac{2iy}{1-y^2}\cos(\frac{\pi}{2}y)$;

$$\int_0^\infty \frac{y}{y^2-1}\cos\frac{\pi}{2}y\,\sin xy\,dy = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{voor } x = -\frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2}\sin x & \text{voor } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{4} & \text{voor } x = \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{voor } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4. $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = -1 + \frac{1}{2}t^2 + \cos t.$

Wiskunde 39

2. Ellipsoïde.

4. $y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = \frac{a_0 + a_1 x}{1-x^2}$.

5. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{6}e^{-3t}, \\ y = -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{6}e^{-3t}. \end{cases}$

Herkansingstentamen juni 1977

Wiskunde 30

1. a) Bijvoorbeeld (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,1,-1,0), (0,0,1,-1).

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

2. a) $(\underline{a},\underline{c}) = \frac{1}{2}$, $(\underline{b},\underline{c}) = \frac{1}{3}$.

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$: $\underline{v} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$;
$\lambda_3 = \frac{1}{2}$: $\underline{v} = \gamma(3\underline{a} + 2\underline{b} - 6\underline{c})$, $\gamma \neq 0$.

c) $\underline{e} = \underline{a}$, $\underline{f} = \underline{b}$, $\underline{g} = \frac{1}{\sqrt{23}}(3\underline{a} + 2\underline{b} - 6\underline{c})$.

d) $\frac{1}{\sqrt{23}}\begin{bmatrix} \sqrt{23} & 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{23} & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$.

3. $\frac{1}{8}\, a^2b^2(\frac{1}{4}\,\pi a^4 + \frac{1}{4}\,\pi b^4 + a^2b^2)$.

4. Uniform convergent op $\mathbb{R}$ met limiet f: $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

5. $y = C_1 + C_2x + C_3x \log x$.

Wiskunde 39

3. d) $\overleftarrow{Q}: L \to L$ met $\overleftarrow{Q}(S) = (A^T)^{-1}SA^{-1}$, $S \in L$.

5. $\underline{x} = C_1e^t\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} + C_2e^{-t}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} + C_3e^{-t}\left(t\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$.

Tentamen januari 1978

Wiskunde 30

1. b) Bijvoorbeeld $\underline{x} = (1,0,0)$; $A' = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

   c) $S = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & 3\end{bmatrix}$.

2. $\frac{1}{2}(1 - e^{-4})$.

3. c) Niet uniform convergent op $\mathbb{R}$.

4. $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{6}}\sin(t\sqrt{6}), \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin(t\sqrt{6}). \end{cases}$

5. $F(y) = \frac{1}{3 - iy}$; $\frac{1}{6}\,\pi e^{-9}$.

Wiskunde 39

2. Kegel.

4. $y = \frac{1}{2}\, x^3 \ln x - \frac{3}{4}\, x^3 + C_1x + C_2x^2$.

5. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n (n!)^2}$.

Herkansingstentamen januari 1978

Wiskunde 30

1. c) $\underline{y} = (2,-1,0)$, $\underline{z} = (1,2,2)$.

2. $\frac{1}{e} - \frac{1}{4}$.

4. $\frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{\pi n^2}(\cos \frac{n\pi}{2} - 1)]\cos nx$; $\frac{\pi}{4}$.

5. $y = a_0(1 - 2x^2 + \frac{1}{3} x^4) + 3a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)(2n-1)(2n-3)n!}$.

Wiskunde 39

2. b) $x' + 2y' = 0$.

3. $\underline{x} = e^{5t}\left\{t\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\right\} + C_1 e^{5t}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + C_2 e^{-5t}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$.

Tentamen juni 1978

Wiskunde 30

1. a) $\lambda_1 = p + 2$: $\underline{v} = \alpha\underline{a}$, $\alpha \neq 0$;
   $\lambda_2 = p - 2$: $\underline{v} = \beta\underline{b}$, $\beta \neq 0$;
   $\lambda_3 = p$: $\underline{v} = \underline{c}$, $\underline{c} \neq \underline{0}$ met $\underline{c} \perp \underline{a}$, $\underline{c} \perp \underline{b}$.

   b) $\begin{bmatrix}p+2 & 0 & 0\\ 0 & p-2 & 0\\ 0 & 0 & p\end{bmatrix}$.

   c) $\begin{bmatrix}p & 2 & 0\\ 2 & p & 0\\ 0 & 0 & p\end{bmatrix}$; d) A is symmetrisch.

2. $-\frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{2}\cos \pi x - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2} \cos 2n\pi x$; $\frac{1}{8}(4 + \pi^2)$.

3. $\underline{x} = e^{2t}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + e^{-t}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$.

4. Uniform convergent op $[0,\infty)$.

5. ln 2.

Wiskunde 39

2. a) $W^{\perp} = \langle 6x^2 - 6x + 1\rangle$; b) $x - \frac{1}{6}$.

4. $y = x$.

5. $y = -x \ln x + C_1x + C_2x^2,\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Herkansingstentamen juni 1978

Wiskunde 30

1. b) $\langle(1,-1,0),(0,0,1)\rangle$.

   c) $(0,0,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,0)$.

   d) Ellipsoïde.

2. $\begin{cases} x = \frac{7}{16}e^{-2t} - \frac{3}{16}e^{2t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}t, \\ y = \frac{7}{16}e^{-2t} + \frac{9}{16}e^{2t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t. \end{cases}$

3. $\frac{\partial(x_3,x_4)}{\partial(x_1,x_2)}(1,2,0,1) = \frac{14}{75}$.

4. Niet uniform convergent op $\mathbb{R}$.

5. $y = a_1x - a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1} = a_1x + a_0 - \frac{1}{2}a_0x\ln\frac{1+x}{1-x}$, $a_0 \in \mathbb{R},\ a_1 \in \mathbb{R}$.

Wiskunde 39

2. a) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\-2 & 0 & -2\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}$; b) $\langle\underline{a} + \underline{c}\rangle$; c) $\begin{bmatrix}0 & 0 & -4\\-2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

4. $\underline{x} = C_1\begin{bmatrix}\cos 2t + \sin 2t\\ -2\cos 2t\end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix}\cos 2t - \sin 2t\\ 2\sin 2t\end{bmatrix}$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Tentamen januari 1979

Wiskunde 30

1. b) $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} - \underline{b}$, $\underline{c}$.

2. b) $\underline{x} = (2,0,0) + \lambda(0,1,2)$.

3. c) $\frac{1}{8}\pi x(\pi - |x|)$.

4. $\underline{x} = C_1e^t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + C_2e^t\left(t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right) + C_3e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-1\end{bmatrix}$.

5. a) $F(y) = \dfrac{1}{(1-iy)^2}$.

Wiskunde 39

2. a) Eenbladige hyperboloïde.
   b) $2x^2 + y^2 - 3z^2 + 12xy + 4xz + 8yz + 3 = 0$.

3. $y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!} x^{2n+1} = a_0e^{x^2} + a_1e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt.$

Herkansingstentamen januari 1979

Wiskunde 30

1. a) $p = 0$; b) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 0 & 2\\ p & 4 & p\\ 2 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

2. 2.

3. a) $\frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n}\right)$; b) Nee.

4. $y = 6x^2\ln^2x + C_1x^2 + C_2x^2\ln x$.

Wiskunde 39

2. $x - 2y = 5$.

Lijst van functies en hun Laplace-getransformeerden.

$f(t)$	$F(p)$
$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$
$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$f^{(n)}(t)$	$-f^{(n-1)}(0) - pf^{(n-2)}(0) \ldots - p^{n-1} f(0) + p^n F(p)$.