TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 40

bestemd voor

WSK-IV, N-IV, W-IV, E-IV en T-IV

Voorjaarssemester 1974

Bibl / Mag

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Wiskunde 40

bestemd voor WSK-IV, N-IV, W-IV, E-IV en T-IV

Dictaatnr. 2.210 Prijs f 3,--

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 40
bestemd voor WSK-IV, N-IV, W-IV, E-IV en T-IV

Voorjaarssemester 1974

Inhoud

Literatuur

T.M. Apostol : Mathematical Analysis

R.C. Buck : Advanced Calculus

R. Courant and D. Hilbert : Methods of Mathematical Physics

F.B. Hildebrand : Advanced calculus for applications

W. Kaplan : Advanced calculus

Hoofdstuk I. Differentiaalrekening van functies van meer veranderlijken

§ 1. Notatie, continuïteit

Een verkorte notatie voor het stelsel functies

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ \text{--------------------} \\ y_m = f_m(x_1,x_2,\dots,x_n) \end{cases}$$

vinden we door $\underline{y} = (y_1,y_2,\dots,y_m)$ en $\underline{x} = (x_1,x_2,\dots,x_n)$ te schrijven waardoor (1) een afbeelding van R_n in R_m wordt. We noemen deze afbeelding een <u>vectorfunctie</u> en schrijven $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$. De functies f_i heten componentfuncties van $\underline{f}$. Om aan te geven dat $\underline{f}$ een afbeelding van R_n in R_m is gebruiken we de notatie $\underline{f}$: $R_n \to R_m$. We gebruiken deze notatie ook indien de functie niet voor de hele R_n gedefinieerd is. We beperken ons meestal tot $n,m = 1,2,3$.

<u>Definitie.</u>

Zij $\underline{a}$ een punt uit R_n; een deelverzameling V van R_n heet <u>omgeving</u> van $\underline{a}$, indien er een getal $\delta > 0$ bestaat zó dat alle vectoren $\underline{x}$ met $|\underline{x} - \underline{a}| < \delta$ tot V behoren.

<u>Definitie.</u>

Zij $\underline{f}$: $R_n \to R_m$; zij W een deelverzameling van R_n dan is $\underline{f}(W)$ de deelverzameling van R_m bestaande uit de beelden van alle geoorloofde punten uit W.

<u>Notatie.</u>

Zijn V en W deelverzamelingen van R_n dan betekent $V \subset W$ dat ieder punt in V ook in W ligt.

<u>Definitie.</u>

Een vectorfunctie $\underline{f}$: $R_n \to R_m$ heet <u>continu</u> in $\underline{a}$ indien $\underline{f}(\underline{a})$ gedefinieerd is, en er bij iedere omgeving V_m van $\underline{f}(\underline{a})$ een omgeving V_n van $\underline{a}$ bestaat met $\underline{f}(V_n) \subset V_m$. De functie heet continu in een deelverzameling W van R_n indien $\underline{f}$ continu is in ieder punt van W.

Stelling.

$\underline{f}$: $R_n \to R_m$ is dan en slechts dan continu in $\underline{a}$ als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle geoorloofde vectoren $\underline{x}$ met $|\underline{x} - \underline{a}| < \delta$ geldt $|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{a})| < \varepsilon$.

Opgave.

Maak duidelijk aan de hand van een plaatje wat continuïteit voor $R_2 \to R_1$ functies betekent.

Opgave.

De continuïteitsdefinitie die in wiskunde 10 gegeven is luidt voor $R_n \to R_1$ functies: f is continu in $(a_1,\ldots,a_n)$ indien er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle geoorloofde vectoren $(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n)$ met $|h_1| < \delta$, $|h_2| < \delta,\ldots,|h_n| < \delta$ geldt:

$$|f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1,a_2,\ldots,a_n)| < \varepsilon .$$

Laat zien dat deze definitie gelijkwaardig is met de nu gegeven definitie.

Stelling.

Een vectorfunctie $\underline{f}$ is dan en slechts dan continu in $\underline{a}$ als al haar componentfuncties in $\underline{a}$ continu zijn.

Stelling.

Een lineaire afbeelding A van R_n in R_m is overal continu.

Opgaven.

1) Als A een lineaire afbeelding van R_n in R_m is, bestaat er een positief getal M, zo dat $|A\underline{x}| \leq M|\underline{x}|$ voor alle $\underline{x}$ in R_n.
Bewijs dit.

2) Door de betrekkingen $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x + y \end{cases}$ is een vectorfunctie van R_2 in R_2 gedefinieerd.
Bewijs dat het beeld van elke vector $\underline{x} = (x,y)$ binnen of op de parabool met vergelijking $v^2 = 2u$ ligt. Wat is het beeld van het halfvlak $x \geq y$?

3) Een vectorfunctie van R_2 in R_3 is gegeven door de betrekkingen:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \\ w = x^2 \end{cases}$$

Bewijs dat het xy-vlak wordt afgebeeld op het oppervlak met vergelijking

$$(u + v)^2 = 4w \;.$$

4) Zijn de volgende functies continu in $\underline{x} = \underline{0}$?

a) $$f(\underline{x}) = f(x,y) = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2} \qquad \underline{x} \neq \underline{0}.$$

$$f(\underline{0}) = 2$$

b) $$f(\underline{x}) = e^{-\frac{|x - y|}{x^2 - 2xy + y^2}} \qquad x \neq y.$$

$$f(x,x) = x^3$$

§ 2. Differentieerbaarheid

Voor we algemeen zullen definiëren wat we onder de differentieerbaarheid van een vectorfunctie zullen verstaan beschouwen we eerst nog eens het ons al bekende geval van een $R_1 \rightarrow R_1$ functie.

We hebben vroeger gezien dat de bewering: "f is differentieerbaar in a" o.a. betekende dat de grafiek van f in het punt (a,f(a)) een raaklijn heeft. Deze raaklijn is <u>in de buurt van dit punt</u> een goede benadering van de grafiek. De definitie herhalen we ook: f is differentieerbaar in a met afgeleide A (we schrijven later f'(a) i.p.v. A) als

$$f(a + h) = f(a) + Ah + h\varepsilon(h)$$

waarin de functie $\varepsilon(h)$ de eigenschap $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ heeft.

Bovengenoemde raaklijn heeft als vergelijking

$$y - f(a) = A(x - a) \;.$$

Precies zo kunnen we het oppervlak $z = f(x,y)$ in de buurt van het punt $(a,b,f(a,b))$ in eerste benadering vervangen door een stukje van het raakvlak. Vergelijk hiertoe de vroegere definitie van totaaldifferentieerbaar.
We generaliseren nu:

Definitie.

We noemen de vectorfunctie $\underline{f}$ van R_n in R_m differentieerbaar in $\underline{a}$ als er een lineaire afbeelding A van R_n in R_m bestaat ző dat

$$\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) = \underline{f}(\underline{a}) + A\underline{h} + |\underline{h}|\ \underline{e}(\underline{h})$$

waarin de vectorfunctie $\underline{e}$ de eigenschap $\lim\limits_{|\underline{h}|\to 0} |\underline{e}(\underline{h})| = 0$ heeft.

Stelling.

Een vectorfunctie $\underline{f}$, die differentieerbaar is in $\underline{a}$, is continu in $\underline{a}$.

De lineaire afbeelding A uit de definitie van differentieerbaarheid heet functionaaloperator van $\underline{f}$ in $\underline{a}$. De matrix van A heet functionaalmatrix.

Stelling.

Een vectorfunctie $\underline{f}$ is dan en slechts dan differentieerbaar als al haar componentfuncties differentieerbaar zijn. De functionaalmatrix is

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ - & - & - & - \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

waarbij $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ de waarde van de partiële afgeleide van f_i naar x_j in het punt $\underline{a}$ voorstelt.

Als m = n kan men van deze matrix de determinant vormen. Deze heet <u>functionaaldeterminant</u> of <u>determinant van Jacobi</u> of <u>Jacobiaan</u> van $\underline{f}$ in $\underline{a}$.
<u>Notatie:</u>

$$\left(\frac{\partial(f_1,f_2,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}\right)_{\underline{x}=\underline{a}}$$

De functie $\underline{f}$ heet differentieerbaar in een verzameling W als $\underline{f}$ differentieerbaar is in ieder punt van W. De functionaaloperator en functionaalmatrix hangen dan van het punt van W af. Zo wordt de Jacobiaan een functie: $R_n \to R_1$.

<u>Voorbeelden.</u>

a) De transformatieformules van overgang op poolcoördinaten $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ zijn op te vatten als vectorfunctie (afbeelding van een ruimte R_2 met coördinaten r en φ in een R_2 met coördinaten x en y).
De functionaaldeterminant is $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$.

b) Evenzo is de overgang op bolcoördinaten:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

op te vatten als een afbeelding van een R_3 in een R_3.
Nu is:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\sin\theta\ .$$

c) Een kromme in R_3 gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x} = \underline{x}(t)$ noemen wij een vectorfunctie van R_1 in R_3. De functionaalmatrix is nu

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

ook geschreven als $\frac{d\underline{x}}{dt}$.
In ieder punt van de kromme is dit een vector in de richting van de raaklijn in dat punt.

Opgaven.

1) De functie $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$ is gegeven door de betrekkingen:

$$\begin{cases} y_1 = x_1x_2x_3 \\ y_2 = x_1x_2 - x_1x_2x_3 \\ y_3 = x_2 - x_1x_2 \end{cases}$$

Bereken:

$$\frac{\partial(y_1,y_2,y_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)} .$$

2) Een kromme in R_3 is gegeven door de parametervoorstelling:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 - 2t \\ z = t^3 + 2t^2 . \end{cases}$$

Bereken de raaklijn in het met $t = 1$ corresponderende punt van de kromme.

3) Een kromme in R_3 is gegeven door de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 - y^2 + 4z^2 = 16 . \end{cases}$$

Bereken de raaklijn in het punt (2,2,2).

4) Van de vectorfunctie $\underline{f}$: $R_2 \to R_2$ gedefinieerd door

$$\begin{cases} u = \frac{1}{5}\,(x^2 - x - y^2) \\ v = \frac{1}{5}\,(2xy - y) \end{cases}$$

is $\underline{f}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$. Bewijs dat de beelden van twee krommen die elkaar in (2,2) onder een hoek α snijden, elkaar in $\frac{1}{5}(-2,6)$ onder dezelfde hoek snijden. (Aanwijzing: de functionaaloperator van $\underline{f}$ in (2,2) is een draaiing).

De definitie van differentialen is geheel analoog aan die bij $R_1 \to R_1$ functies. We voeren nl. in de vector $d\underline{x}$ en definiëren de differentiaal van de vectorfunctie $\underline{z} = \underline{f}(\underline{x})$ door $d\underline{z} = A(d\underline{x})$ als A de functionaaloperator van $\underline{f}$ is. Symbolisch kunnen we dan schrijven: $A = \frac{d\underline{z}}{d\underline{x}}$.

§ 3. Kettingregels

Samengestelde vectorfunctie. Zij $\underline{f}$: $R_n \to R_m$; $\underline{g}$: $R_m \to R_p$ dan is de samengestelde functie $\underline{g} \circ \underline{f}$ een afbeelding van R_n in R_p gedefinieerd door:

$$(\underline{g} \circ \underline{f})(\underline{x}) = \underline{g}(\underline{f}(\underline{x})) .$$

Stelling.

Zij $\underline{f}$: $R_n \to R_m$ differentieerbaar in $\underline{a}$ met functionaaloperator A; zij $\underline{g}$: $R_m \to R_p$ differentieerbaar in $\underline{b} = \underline{f}(\underline{a})$ met functionaaloperator B, dan is $\underline{g} \circ \underline{f}$ differentieerbaar in $\underline{a}$ met functionaaloperator BA.

Uit de zojuist geformuleerde stelling volgen alle kettingregels voor afgeleiden van de eerste orde door specialisatie.

Voorbeelden.

a) Als $z = z(x,y)$; $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, dan is

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u} \ \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \ \frac{\partial z}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} .$$

b) Zij $\underline{f}$: $R_n \to R_n$; $\underline{g}$: $R_n \to R_n$; $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$; $\underline{z} = \underline{g}(\underline{y})$, dan volgt uit de productstelling van determinanten dat

$$\frac{\partial(z_1,\ldots,z_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{\partial(z_1,\ldots,z_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} .$$

c) Zij $\underline{f}$: $R_1 \to R_n$; en zij $t = t(s)$ een $R_1 \to R_1$ functie, dan is $\frac{d\underline{f}}{ds} = \frac{d\underline{f}}{dt}\frac{dt}{ds}$.
(De raaklijnrichting van een kromme is onafhankelijk van de parameterkeuze).

Opgaven.

1) Zij F een functie van 2 variabelen en $\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}, \frac{\partial F}{\partial u_2}\right) \neq (0,0)$. Als voor functies $u_1(x,y)$ en $u_2(x,y)$ geldt $F(u_1,u_2) = 0$ voor alle x en y, dan is

$$\frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(x,y)} = 0 .$$

Bewijs dit.

2) Gegeven: vectorfuncties $\underline{y} = \underline{y}(\underline{x})$ en $\underline{v} = \underline{v}(\underline{u})$ resp. van R_2 in R_3 en van R_3 in R_2:

$$\begin{cases} y_1 = x_1x_2 \\ y_2 = 2x_1 \\ y_3 = -x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = u_1 - u_2 \\ v_2 = u_2u_3 \end{cases}$$

Bewijs dat deze functies differentieerbaar zijn en dat de samengestelde functies $\underline{y}(\underline{v}(\underline{u}))$ en $\underline{v}(\underline{y}(\underline{x}))$ beide bestaan.
Bereken de functionaalmatrices van de samengestelde functies.

§ 4. Richtingsafgeleide, gradiënt

We beschouwen de $R_n \to R_1$ functie $f(x_1,\dots,x_n)$.
Zij $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{v}$ de voorstelling van een rechte door $\underline{a}$. We kiezen $\underline{v}$ zó dat $|\underline{v}| = 1$. De functie $g(t) = f(\underline{a} + t\underline{v})$ is de restrictie van f tot bovengenoemde rechte.
Als g(t) een afgeleide heeft voor t = 0, m.a.w. als

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{a} + t\underline{v}) - f(\underline{a})}{t}$$

bestaat, dan noemen we g'(0) de richtingsafgeleide van f in $\underline{a}$ in de richting van $\underline{v}$.
Zij nu f differentieerbaar. De functionaalmatrix is dan een rijvector, namelijk

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) .$$

We hebben dit vroeger (voor n = 3) de gradiënt van f genoemd.
Notatie: grad f of ∇f.

Volgens de kettingregel geldt dan voor de richtingsafgeleide:

$$g'(0) = \left(\frac{dg}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{\underline{x}=\underline{a}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} = ((\text{grad } f)_{\underline{x}=\underline{a}}, \underline{v}) .$$

We beschouwen nu richtingsafgeleiden nog wat nader in het speciale geval van een $R_3 \to R_1$ functie f waarvoor bovendien grad f $\neq \underline{0}$ is.
Nu stelt $f(x,y,z)$ = const. een oppervlak in R_3 voor. De oppervlakken die voor verschillende waarden van de constante ontstaan, heten <u>niveauvlakken</u> van de functie. In ieder punt (a,b,c) dat op zo'n oppervlak ligt, is er een raakvlak. De vergelijking van dit raakvlak is (zie wiskunde 20):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\underline{x}=\underline{a}} (x - a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\underline{x}=\underline{a}} (y - b) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\underline{x}=\underline{a}} (z - c) = 0 ,$$

of

$$((\text{grad } f)_{\underline{x}=\underline{a}}, \underline{x} - \underline{a}) = 0 .$$

In ieder punt staat de vector $(\text{grad } f)_{\underline{x}=\underline{a}}$ dus loodrecht op het niveauvlak van f door dat punt. Grof gezegd: Bij beweging loodrecht op $(\text{grad } f)_{\underline{x}=\underline{a}}$ blijft de waarde van f in eerste benadering constant. De richtingsafgeleide is $(\text{grad } f, \underline{v}) = |\text{grad } f| \cos \varphi$; φ is de hoek tussen de lijn $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{v}$ en de lijn $\underline{x} = \underline{a} + t(\text{grad } f)_{\underline{x}=\underline{a}}$. De richtingsafgeleide is dus maximaal als $\varphi = 0$. De vector $(\text{grad } f)_{\underline{x}=\underline{a}}$ geeft dus aan in welke richting f het sterkst verandert. Niveauvlakken snijden elkaar nooit; krommen die alle niveauvlakken loodrecht snijden heten <u>orthogonale trajectoriën</u>. In ieder punt op een orthogonale trajectorie bestaat er een raaklijn. Deze heeft als richtingsvector $(\text{grad } f)_{\underline{x}=\underline{a}}$.

<u>Opgaven</u>.

1) Schets niveauvlakken en orthogonale trajectoriën van de volgende functies:

$$f(x,y,z) = xy$$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 .$$

2) Bereken de afgeleiden van de volgende functies in het punt P en in de richting $\underline{v}$:

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy$; $P = (1,0)$; $\underline{v} = (1,-1)$

b) $f(x,y,z) = xy^2 + yz$; $P = (1,1,2)$; $\underline{v} = (2,-1,2)$.

Verklaar het antwoord van b) meetkundig.

3) Gegeven:

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{voor } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \,. \end{cases}$$

a) Bewijs dat $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ overal bestaan.

b) Heeft f(x,y), behalve $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$, nog andere richtingsafgeleiden in (0,0)?

c) Is f(x,y) continu in (0,0)?

§ 5. De formule van Taylor

Om een uitdrukking voor f(a + h, b + k) te vinden beschouwen we g(t) = = f(a + th, b + tk), dat is een functie van één variabele t, en passen de stelling van Taylor toe. Het resultaat is:

$$\begin{aligned} f(a+h,\, b+k) = f(a,b) &+ \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \\ &+ \tfrac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \\ &+ \frac{1}{3!}\left(h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right) + \\ &+ \text{Restterm.} \end{aligned}$$

Hierin zijn alle afgeleiden te nemen in het punt (a,b). We kunnen net zo ver ontwikkelen als we willen mits de afgeleiden bestaan.

Verkorte notatie: we definiëren formeel

$$(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^p f = \Sigma_{j=0}^{p} \binom{p}{j} h^{p-j} k^j \frac{\partial^p f}{\partial x^{p-j}\partial y^j} .$$

We nemen aan dat de restterm in de formule van Taylor voor $g(t)$ tot nul nadert voor $n \to \infty$, dus dat $g(t)$ een Taylorreeks heeft en vinden dan voor f de Taylorreeks in formele notatie:

$$f(a + h, b + k) = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^m f \right\}_{(x,y) = (a,b)}$$

De uitbreiding naar functies van meer dan 2 variabelen ligt voor de hand.

Voorbeeld 1.

$$\sin(xe^y) = x + xy - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}xy^2 + \ldots$$

waarin de ontbrekende termen van de vierde en hogere graad zijn.

Voorbeeld 2.

De reeks voor e^{x+y} vinden we door in de reeksontwikkeling van e^t te substitueren $t = x + y$.

$$e^{x+y} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (x + y)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^{m-j} y^j .$$

Opgave.

Ontwikkel de volgende functies in een Taylorreeks in de gegeven punten

a) $f(x,y) = ye^{x-y}$; $\underline{a} = (0,0)$.

b) $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 - 3x$; $\underline{a} = (2,3)$.

c) $f(x,y) = \sinh(\cos x + \sin y)$; $\underline{a} = (0,0)$.

§ 6. Extrema

Enige definities. Een deelverzameling V van R_n heet open indien V omgeving van elk punt $p \in V$ is.

Het complement van een verzameling W t.o.v. R_n is de verzameling van alle punten die niet tot W behoren.

Een verzameling in R_n heet gesloten indien zijn complement open is.

Een verzameling U heet begrensd indien er een $r > 0$ bestaat zodat U deelverzameling is van de verzameling van alle punten met $|\underline{x}| \leq r$.

$\underline{a}$ heet inwendig punt van een verzameling $\mathcal{O}$ indien er een omgeving van $\underline{a}$ binnen $\mathcal{O}$ ligt.

Een verzameling V is derhalve open indien ieder punt van V inwendig punt van V is.

N.B. De begrippen open en gesloten zijn geen tegengestelden; zo is de hele R_n zowel open, als gesloten, en uiteraard onbegrensd.

Voorbeelden.

In R_3 is de verzameling der punten (x,y,z) waarvoor geldt:

$x^2 + y^2 + z^2 < 1$	open,	niet gesloten,	begrensd;
$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$	niet open,	gesloten,	begrensd;
$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 < 2$	niet open,	niet gesloten,	begrensd;
$x + y + z > 0$	open,	niet gesloten,	niet begrensd;
$x + y + z \geq 1$	niet open,	gesloten,	niet begrensd.

Stelling (Weierstrass).

Zij V een gesloten begrensde deelverzameling van R_n, zij $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ continu op V, dan neemt f op V een globaal (absoluut) maximum en minimum aan.

Deze stelling bewijzen we niet!

Een nodige voorwaarde voor een locaal extreem in een inwendig punt van het definitiegebied van een differentieerbare functie is uitgedrukt in de volgende stelling.

Stelling.

Als de differentieerbare functie f voor $\underline{x} = \underline{a}$ een locaal maximum of minimum heeft en er een omgeving van $\underline{a}$ is, die geheel uit geoorloofde punten bestaat, dan is grad f = $\underline{0}$ voor $\underline{x} = \underline{a}$.

De voorwaarde grad f = $\underline{0}$ is niet voldoende zoals blijkt uit de functie $f(x,y) = xy$ waarvoor in (0,0) grad f = $\underline{0}$ is, zonder dat daar een locaal extremum ligt. ((0,0) is een zadelpunt van de functie.)

Punten waarvoor grad f = $\underline{0}$, heten stationaire punten.

Voorbeelden.

a) Voor $x^2 + y^2 \leq 1$ is z als functie van x en y gedefinieerd door $z = 1 - (x^2 + y^2)$. Omdat het definitiegebied gesloten en begrensd is, is er zeker een maximum en minimum. We zien ogenblikkelijk dat $z \geq 0$, $z = 0$ op de rand; in ieder randpunt is dus een minimum. In (0,0) ligt een maximum. Als we dit niet zouden zien, en we gingen differentiëren dan vonden we dat het enige stationaire punt (0,0) is. Als men de randminima al gevonden heeft volgt uit de eerste stelling zonder meer dat er in (0,0) een maximum is.

b) Gevraagd de extrema van $f(x,y) = (x - y)(x^2 + y^2 - 1)$. Stationaire punten zijn $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$; $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$; $(\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{6}\sqrt{6})$;$(-\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6})$. Op een hoogtekaart zijn $x = y$ en $x^2 + y^2 = 1$ de nullijnen. Deze verdelen het vlak in gebieden waar (de continue) f tekenvast is. Uit het plaatje blijkt dat $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ zadelpunten zijn.
Op de verzameling waarvoor $y \geq x$ en $x^2 + y^2 \leq 1$ neemt f een maximum en minimum aan. Op deze verzameling is $f(x,y) \geq 0$. Het minimum 0 wordt op de rand aangenomen. Het is geen extreem als we de functie ook buiten de verzameling beschouwen. We vinden nu wel meteen dat er in $(-\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6})$ een maximum is.

Opgave.

Zoek de extrema van $x + y^2$ op de verzameling der punten waarvoor $x^2 + y^2 \leq 1$ is.

Leiden beschouwingen als in de bovenstaande voorbeelden niet tot resultaat dan kan men de volgende stelling gebruiken.

Stelling.

Stel dat $f(x,y)$ tweemaal differentieerbaar is voor alle (x,y) in een zekere omgeving van (a,b) en dat de partiële afgeleiden van de tweede orde continu zijn, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ in (a,b). Als

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0$$

in (a,b) dan heeft f géén locaal extremum in (a,b). Als

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

in (a,b) dan heeft f in (a,b) een locaal extremum en wel een maximum als $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ en een minimum als $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ in (a,b).

Opgave.

Bereken de extrema van de volgende functies:

a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3ax - 3by$.

b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$ voor $x > 0$, $y > 0$.

c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$.

d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ voor $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $a > 3$.

e) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(ax^2 + by^2)$; $a > 0$, $b > 0$.

f) $f(x,y) = \cos x \cos 2 + \sin x \sin 2 \cos(y - 3)$.

§ 7. Extrema onder bijvoorwaarden

We bespreken drie problemen.

I. Zoek de extrema van $z = f(x,y)$ waarbij alleen die punten beschouwd worden die voldoen aan: $\varphi(x,y) = 0$ (f en φ zijn differentieerbare functies met continue afgeleiden; $\nabla\varphi \neq \underline{0}$).
$\varphi(x,y) = 0$ is een kromme, K, in het (x,y)-vlak. Heeft f in een punt P van K een extreem dan is $(\nabla f)_P$ loodrecht op de raaklijn in P aan K. $(\nabla\varphi)_P$ is dit ook. Dus $\nabla f + \lambda\nabla\varphi = \underline{0}$. We vinden dus:

Een nodige voorwaarde voor een extremum in P van f(x,y) onder de bijvoorwaarde $\varphi(x,y) = 0$, is dat er een getal λ bestaat zó dat $\nabla f + \lambda\nabla\varphi = \underline{0}$ in het punt P.

Men gebruikt deze voorwaarde aldus. Men lost op de drie vergelijkingen

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = 0 \ , \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \ , \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \ . \end{cases}$$

in de onbekenden x, y en λ. Extrema kunnen slechts optreden in punten waarvan de coördinaten in een oplossing voorkomen; (Als f of φ niet overal continu differentieerbaar is, of als voor sommige punten $\nabla\varphi = \underline{0}$ is dan is daar de methode niet toepasbaar; zulke punten komen dus ook voor extrema in aanmerking).
Deze methode heet: multiplicatorenmethode van Lagrange, (λ heet de multiplicator).

II. Zoek de extrema van $u = f(x,y,z)$ onder de bijvoorwaarde $\varphi(x,y,z) = 0$. Neem aan dat $\nabla\varphi \neq \underline{0}$ is. $\varphi(x,y,z) = 0$ stelt een oppervlak Φ voor. Beschouw dit oppervlak als een "kromme hoogtekaart". Als op dit oppervlak f een extremum in P heeft, dan is daar de richtingsafgeleide van f in de richting van iedere raaklijn aan Φ nul. Dus ∇f staat loodrecht op het raakvlak aan Φ. (We veronderstellen steeds dat f en φ differentieerbaar zijn.)
Dit leidt tot:

Een nodige voorwaarde voor een extremum van $f(x,y,z)$ onder de bijvoorwaarde $\varphi(x,y,z) = 0$ is dat er een getal λ bestaat zó dat $\nabla f + \lambda \nabla \varphi = \underline{0}$.

Om punten te vinden waar een extremum mogelijk is lost men op de vergelijkingen in x, y, z en λ:

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \ . \end{cases}$$

Punten waar niet aan de voorwaarden voldaan is (bijv. omdat $\nabla \varphi = \underline{0}$) moeten eveneens onderzocht worden.

III. Zoek de extrema van $f(x,y,z)$ onder de bijvoorwaarden $\varphi_1(x,y,z) = 0$, $\varphi_2(x,y,z) = 0$; f, φ_1, φ_2 zijn differentieerbaar. Stel dat er zo'n extremum optreedt in een punt $P(p,q,r)$ met $\varphi_1(p,q,r) = \varphi_2(p,q,r) = 0$. Neem aan dat $\nabla \varphi_1$ en $\nabla \varphi_2$ onafhankelijk zijn. De raakvlakken in P aan Φ_1 ($\varphi_1(x,y,z) = 0$) en Φ_2 zijn dan verschillend. De oppervlakken Φ_1, Φ_2 snijden elkaar dus volgens een kromme door P. ∇f staat loodrecht op de raaklijn in P aan deze kromme. Dus ∇f, $\nabla \varphi_1$, $\nabla \varphi_2$ liggen in één vlak.
We vinden zo:

Een nodige voorwaarde voor een extremum van $f(x,y,z)$ onder de bijvoorwaarden $\varphi_1(x,y,z) = 0$, $\varphi_2(x,y,z) = 0$, is dat er getallen λ_1 en λ_2 bestaan met $\nabla f + \lambda_1 \nabla \varphi_1 + \lambda_2 \nabla \varphi_2 = \underline{0}$.

Men losse dus op de vergelijkingen in x, y, z, λ_1, λ_2:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = 0 \\ \varphi_2(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 . \end{cases}$$

Punten waar niet aan alle voorwaarden voldaan is (bijv. omdat $\nabla\varphi_1$ en $\nabla\varphi_2$ er niet onafhankelijk zijn) moeten eveneens onderzocht worden.

Opgaven.

1) Bepaal het minimum van $(x + 1)^2 + y^2$ onder de bijvoorwaarde $x^3 = y^2$.

2) Bepaal de extrema van xyz als $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3) Gegeven: α en β zijn positieve constanten waarvoor geldt $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.
Bewijs: $\frac{1}{\alpha} x^\alpha + \frac{1}{\beta} y^\beta \geq 1$ voor alle positieve x en y waarvoor $xy = 1$ is.

4) Gegeven: de ellips $x^2 + 4y^2 = 4$ en de rechte $x + y - 4 = 0$.
Bereken de grootste en de kleinste afstand van een punt van de ellips tot de rechte.

De multiplicatorenmethode kan uitgebreid worden voor meer veranderlijken en meer nevenvoorwaarden.

Hoofdstuk II. Vector-differentiaalrekening

We nemen van nu af aan dat alle functies zo vaak differentieerbaar zijn dat alle opgeschreven uitdrukkingen zin hebben.

§ 1. Vector- en scalarvelden, vectoralgebra

Een vectorfunctie $\underline{f}$ van R_3 in R_3 wordt vaak geïnterpreteerd als een vectorveld, d.w.z. aan ieder punt $\underline{x}$ hechten we de vector $\underline{f}(\underline{x})$. (We denken dus de vector $\underline{f}(\underline{x})$ niet als een pijl vanuit $\underline{0}$ maar vanuit het punt $\underline{x}$.)
Voorbeelden zijn: elektrisch veld, magnetisch veld, gravitatieveld, stromingsveld in een stromende vloeistof.
Een functie f: $R_3 \to R_1$ *noemt men wel* scalarveld *(aan iedere* $\underline{x}$ *is nu het getal* $f(\underline{x})$ toegevoegd). Fysische voorbeelden: temperatuur, dichtheid van lading.

Opgave.

Schets de volgende vectorvelden:

$$\underline{v}(\underline{x}) = (x^2 - y^2)\underline{e}_1 + 2xy\,\underline{e}_2$$

$$\underline{v}(\underline{x}) = (x - y)\underline{e}_1 + (x + y)\underline{e}_2$$

$$\underline{v}(\underline{x}) = -y\,\underline{e}_1 + x\,\underline{e}_2 + \underline{e}_3$$

We werken voorlopig met een vast rechts coördinatenstelsel in R_3:

$$\underline{e}_1 = (1,0,0); \quad \underline{e}_2 = (0,1,0); \quad \underline{e}_3 = (0,0,1)\ .$$

Is $\underline{a} = a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2 + a_3\underline{e}_3$, $\underline{b} = b_1\underline{e}_1 + b_2\underline{e}_2 + b_3\underline{e}_3$ dan is het scalair (inwendig) product: $(\underline{a},\underline{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\underline{a}|\ |\underline{b}| \cos\varphi$, waarbij φ de georiënteerde hoek tussen $\underline{a}$ en $\underline{b}$ is.

Het vector-(uitwendig) product $\underline{a} \times \underline{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\underline{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\underline{e}_2 +$

$$+ (a_1b_2 - a_2b_1)\underline{e}_3 = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Nu geldt: $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}$; $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$ en $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a} \times \underline{b}$ vormen een rechtse schroef. $|\underline{a} \times \underline{b}|$ is de oppervlakte van het parallellogram dat door $\underline{a}$ en $\underline{b}$ opgespannen wordt. $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$.
Vectorvermenigvuldiging is niet associatief:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a},\underline{c})\underline{b} - (\underline{b},\underline{c})\underline{a}$$

terwijl

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a},\underline{c})\underline{b} - (\underline{a},\underline{b})\underline{c} \ .$$

$(\underline{a},\underline{b} \times \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \pm$ inhoud van het door $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ opgespannen parallellepipedum. Dus $(\underline{a},\underline{b} \times \underline{c}) = 0$ dan en slechts dan als $\underline{a}$, $\underline{b}$ en $\underline{c}$ in één vlak liggen. $(\underline{a},\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b},\underline{c}) = (\underline{c} \times \underline{a},\underline{b}) = (\underline{c},\underline{a} \times \underline{b}) = (\underline{b},\underline{c} \times \underline{a}) = (\underline{b} \times \underline{c},\underline{a})$.

§ 2. Gradiënt, ∇, potentiaal

Zij $f(\underline{x})$ een scalarveld; dan is grad $f = \nabla f$ een vectorveld. (Zie I §4.) Vaak vat men ∇ op als de symbolische vector $\underline{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. De notatie ∇f moet men dan lezen als een scalair (nl. f) veelvoud van de vector ∇.

Zij $\underline{v}(\underline{x})$ een vectorveld (met componentfuncties $v_1(x,y,z)$, $v_2(x,y,z)$, $v_3(x,y,z)$); dan noemt men de getransponeerde van de functionaalmatrix van de $R_3 \to R_3$ functie $\underline{v}$ ook grad $\underline{v}$. Grad $\underline{v}$ is dus voor iedere $\underline{x}$ een lineaire afbeelding (tensor).

$$\text{grad } \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial y} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} & \frac{\partial v_2}{\partial z} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot (v_1,v_2,v_3) \ .$$

Definitie.

Als het vectorveld $\underline{v}$ te schrijven is in de vorm $\underline{v}$ = grad φ, waarbij φ een scalarveld is, dan heet φ een potentiaal van $\underline{v}$ (in de fysica wordt vaak $-\varphi$ een potentiaal van $\underline{v}$ genoemd). Niet ieder vectorveld heeft een potentiaal. (Zie hoofdstuk IV.)

Als φ een potentiaal van $\underline{v}$ is, is φ + const. het ook.
Is $\underline{v}$ = grad φ dan heten de niveauvlakken van de functie φ de equipotentiaalvlakken van het vectorveld. De orthogonale trajectoriën noemt men dan soms krachtlijnen of stroomlijnen.

Voorbeelden.

a) Een constant veld $\underline{b}$ heeft een potentiaal, nl. de functie $(\underline{b},\underline{x})$, want $\underline{b}$ = grad $(\underline{b},\underline{x})$.

b) Het elektrisch veld van een puntlading in de oorsprong is $\underline{E} = \dfrac{\alpha}{|\underline{x}|^3} \cdot \underline{x}$.

Dit veld heeft een potentiaal nl. $\varphi = -\dfrac{\alpha}{|\underline{x}|}$. Potentiaal en veldsterkte zijn niet gedefinieerd in $\mathcal{O}$.

c) Het vectorveld $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{x}$ heeft als potentiaal $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

Opgaven.

1) Zij $f: R_3 \to R_1$; $g: R_3 \to R_1$. Bewijs dat grad $fg = f$ grad $g + g$ grad f.
Zij φ een $R_1 \to R_1$ functie dan is $\varphi \circ f$ een $R_3 \to R_1$ functie en grad $\varphi \circ f =$
$= (\varphi' \circ f)$ grad f.
(φ' is de afgeleide van φ).

2) Laat $\underline{a}$ en $\underline{b}$ vaste vectoren zijn, en $f(\underline{x}) = (\underline{x} \times \underline{a}, \underline{x} \times \underline{b})$.
Bewijs dat grad $f = \underline{b} \times (\underline{x} \times \underline{a}) + \underline{a} \times (\underline{x} \times \underline{b})$.

3) Zij F een $R_1 \to R_1$ functie; $f(\underline{x}) = F(|\underline{x}|)$. Laat zien dat er een scalarveld $\lambda(\underline{x})$ bestaat met

$$\nabla f(\underline{x}) = \lambda(\underline{x})\underline{x} \qquad (\underline{x} \neq \underline{0}) .$$

(Zie ook III §1, opgave 8).

§ 3. Rotatie, vectorpotentiaal, divergentie, samengestelde operaties

Zij $\underline{v}(\underline{x}) = (v_1(x,y,z),\ v_2(x,y,z),\ v_3(x,y,z))$ een vectorveld dan is

$$\text{rot } \underline{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\ ,\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \nabla \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

De operatie rot voegt aan een vectorveld $\underline{v}$ een vectorveld rot $\underline{v}$ toe. Bestaat er bij een veld $\underline{a}(\underline{x})$ een veld $\underline{b}(\underline{x})$ met $\underline{a}$ = rot $\underline{b}$ dan heet $\underline{b}(\underline{x})$ een vectorpotentiaal van $\underline{a}(\underline{x})$ (zie hoofdstuk IV). Ieder constant veld heeft een vectorpotentiaal; is $\underline{c}$ een constant veld dan is rot $\frac{1}{2}$ $(\underline{c} \times \underline{x}) = \underline{c}$.
Velden $\underline{a}(\underline{x})$ waarvoor rot $\underline{a}(\underline{x}) \equiv \underline{0}$ heten rotatievrij.

Stelling.

Zijn $\underline{a}(\underline{x})$, $\underline{b}(\underline{x})$ vectorvelden en is $\varphi(\underline{x})$ een scalarveld, dan is:

1) rot $(\underline{a} + \underline{b})$ = rot $\underline{a}$ + rot $\underline{b}$

2) rot $\varphi\underline{a} = \varphi$ rot $\underline{a}$ + (grad φ) $\times\ \underline{a}$

3) rot grad $\varphi = \underline{0}$, mits φ continue tweede afgeleiden heeft.

Dat de waarde van rot $\underline{a}$ onafhankelijk is van het coördinatenstelsel bewijzen we in III §4. Tevens zal dan de fysische betekenis duidelijker worden.

Zij $\underline{v}(\underline{x})$ een vectorveld dan is

$$\text{div } \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = (\nabla,\underline{v})\ .$$

Velden $\underline{a}$ waarvoor div $\underline{a} \equiv 0$ heten divergentievrij.
Ook de waarde van div $\underline{a}$ is onafhankelijk van de keuze van het coördinatenstelsel (zie III §3).

Stelling.

Zijn $\underline{a}(\underline{x})$ en $\underline{b}(\underline{x})$ vectorvelden en is $\varphi(\underline{x})$ een scalarveld dan is:

1) $\mathrm{div}(\underline{a} + \underline{b}) = \mathrm{div}\ \underline{a} + \mathrm{div}\ \underline{b}$

2) $\mathrm{div}\ \varphi\underline{a} = \varphi\ \mathrm{div}\ \underline{a} + (\mathrm{grad}\ \varphi, \underline{a})$

3) $\mathrm{div}\ (\underline{a} \times \underline{b}) = (\underline{b}, \mathrm{rot}\ \underline{a}) - (\underline{a}, \mathrm{rot}\ \underline{b})$

4) $\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\ \underline{a} = 0$ mits de tweede partiële afgeleiden van de componentfuncties van $\underline{a}$ continu zijn.

4') Een veld dat een vectorpotentiaal heeft met componentfuncties die continue tweede partiële afgeleiden hebben, is divergentievrij.

Is $\varphi(\underline{x})$ een scalarveld dan definieert men de operator van Laplace Δ door:

$$\Delta\varphi = \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ \varphi = (\nabla,\nabla\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} .$$

Evenzo voor een vectorveld:

$$\Delta\underline{v} = (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3) .$$

Stelling.

Zij $\underline{a}(\underline{x})$ een vectorveld, $\varphi(\underline{x})$ een scalarveld dan is

1) $\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \underline{a} = \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \underline{a} + \Delta\underline{a}$

2) $\mathrm{grad}\ \Delta\varphi = \Delta\ \mathrm{grad}\ \varphi$

3) $\mathrm{rot}\ \Delta\underline{a} = \Delta\ \mathrm{rot}\ \underline{a}$

4) $\mathrm{div}\ \Delta\underline{a} = \Delta\ \mathrm{div}\ \underline{a}$

Opgaven.

1) Bewijs de volgende identiteit:

$$\mathrm{div}[\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})] = (\underline{a},\underline{c})\mathrm{div}\ \underline{b} - (\underline{a},\underline{b})\mathrm{div}\ \underline{c} + (\mathrm{grad}(\underline{a},\underline{c}),\underline{b}) - (\mathrm{grad}(\underline{a},\underline{b}),\underline{c}) .$$

2) Zij F een differentieerbare $R_1 \to R_1$ functie; zij $\underline{v}(\underline{x}) = (2xyz,\ x^2z,\ x^2y)$; zij $\underline{a}$ een vaste vector $\neq \underline{0}$; zij $\underline{w}(\underline{x}) = F((\underline{x},\underline{a}))\underline{v}(\underline{x})$. Bewijs dat rot $\underline{w} \perp \underline{a}$ en rot $\underline{w} \perp \underline{v}$.

3) Bewijs dat div(grad φ × grad ψ) = 0 voor alle φ en ψ.

4) Zij $\underline{f}(\underline{x})$ een vectorveld waarvoor alle tweede partiële afgeleiden continu zijn.
Zij $\underline{g}$ = rot $\underline{f}$, φ = div $\underline{f}$. Bewijs dat

$$\Delta f_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial g_3}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial z}\ .$$

Vindt analoge formules voor Δf_2, Δf_3 .

5) Als φ, ψ, χ $R_1 \to R_1$ functies zijn en $g(\underline{x}) = \varphi(x)\ \psi(y)\ \chi(z)$ dan is

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi''(y)}{\psi(y)} + \frac{\chi''(z)}{\chi(z)}\ .$$

Hoofdstuk III. Vector-integraalrekening

§ 1. Lijnintegralen

Zij $\underline{x} = \underline{x}(t)$ met $a \leq t \leq b$ de parametervoorstelling van een kromme K in R_3. We nemen bovendien aan dat $\underline{x}(t) \neq \underline{x}(t')$ als $t \neq t'$, tenzij $t = a$, $t' = b$ en de kromme gesloten is, en dat $\frac{d\underline{x}}{dt}$ continu en $\neq \underline{0}$ is. We noemen krommen die aan deze laatste eis voldoen glad.

Zij $\varphi(\underline{x})$ een functie waarvan het definitiegebied K bevat.

We verdelen de kromme in stukjes door eerst het interval $a \leq t \leq b$ te verdelen met deelpunten: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$. Op ieder deelinterval (t_{i-1}, t_i) nemen we een punt τ_i.

We beschouwen nu:

$$\Sigma_{i=1}^{n} \varphi(\underline{x}(\tau_i)) \, |\underline{x}(t_i) - \underline{x}(t_{i-1})| \, . \tag{1}$$

We nemen bovendien aan dat $\underline{x}(t)$ continue afgeleiden heeft; dan is:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(\tau) + (t - \tau) \left(\frac{d\underline{x}}{dt}\right)_{t=\tau} + \ldots$$

We hebben dus

$$\underline{x}(t_i) - \underline{x}(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1}) \left(\frac{d\underline{x}}{dt}\right)_{t=t_{i-1}} + \ldots \tag{2}$$

We nemen zonder bewijs aan dat de sommen (1) tot een "limiet" naderen als de verdeling steeds fijner wordt en dat de bijdragen van ... uit (2) bij het limietproces naar nul naderen. Deze limiet heet <u>lijnintegraal</u> van φ over de kromme K. We hebben nu ook dat deze lijnintegraal gelijk is aan:

$$\int_a^b \varphi(\underline{x}(t)) \left|\frac{d\underline{x}}{dt}\right| dt = \int_a^b \varphi(\underline{x}(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \, .$$

De lijnintegraal van φ over K is onafhankelijk van de parameterkeuze van K. Dit ziet men ook door van t op een parameter $u = u(t)$ over te gaan:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{d\underline{x}}{du}\,\frac{du}{dt}\ ;$$

dus

$$\int_a^b \varphi(\underline{x}(t)) \left|\frac{d\underline{x}}{dt}\right| dt = \int_a^b \varphi(\underline{x}(t)) \left|\frac{d\underline{x}}{du}\right| \frac{du}{dt}\, dt =$$

$$= \int_c^d \varphi(\underline{x}(u)) \left|\frac{d\underline{x}}{du}\right| du; \qquad (u([a,b]) = [c,d])\ .$$

De booglengte van K wordt benaderd door

$$\Sigma_{i=1}^{n}\ |\underline{x}(t_i) - \underline{x}(t_{i-1})|\ .$$

De lengte is dus:

$$\ell = \int_a^b \left|\frac{d\underline{x}}{dt}\right| dt\ .$$

(Niet iedere kromme heeft een lengte, wel de krommen die continu differentieerbare parametervoorstellingen $\underline{x}(t)$ hebben).

$\underline{x}(a)$ heet het beginpunt; $\underline{x}(b)$ het eindpunt. De lengte van de boog tussen $\underline{x}(a)$ en $\underline{x}(t)$ is:

$$s(t) = \int_a^t \left|\frac{d\underline{x}(\tau)}{d\tau}\right| d\tau\ .$$

Neemt men s als parameter voor de kromme dan ($ds = \left|\frac{d\underline{x}}{dt}\right| dt$) vinden we dat de lijnintegraal van φ over K gelijk is aan

$$\int_0^\ell \varphi(\underline{x}(s))ds; \qquad \text{notatie} \qquad \int_K \varphi(\underline{x})ds\ .$$

Eenheidsraakvector aan K:

$$\underline{t} = \frac{1}{\left|\frac{d\underline{x}}{dt}\right|} \cdot \frac{d\underline{x}}{dt} \qquad (\text{dus } |\underline{t}| = 1) \ .$$

Blijkbaar geldt: $\underline{t} = \frac{d\underline{x}}{ds}$.

Notatie.

Als $\underline{u}(\underline{x}) = (u(x,y,z),\ v(x,y,z),\ w(z,y,z))$ dan betekent:

$$\int_K u(x,y,z)dx + v(x,y,z)dy + w(x,y,z)dz = \int_K (\underline{u},\underline{t})ds = \int_K (\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{dt})dt \ .$$

Is $\underline{u}$ een krachtveld, K een kromme dan is $\int_K udx + vdy + wdz$ de arbeid van het veld bij het transport van een eenheidsmassa langs K.
Als een kromme slechts stuksgewijze glad is, dan moet men de lijnintegraal definiëren als de som van de lijnintegralen over de gladde stukken.

Stelling 1.

Zij K een gladde kromme, $\varphi(\underline{x})$ gedefinieerd op K, dan is

$$\int_K (\text{grad } \varphi,\ \underline{t})ds = \varphi(\text{eindpunt}) - \varphi(\text{beginpunt}) \ .$$

Stelling 2.

Zij K een gesloten kromme (in de notatie brengen we dit vaak tot uitdrukking door $\oint_K$ te schrijven), $\varphi(\underline{x})$ als in de vorige stelling dan is

$$\int_K (\text{grad } \varphi,\ \underline{t})ds = 0 \ .$$

Is $\underline{u}$ = grad φ een krachtveld dan betekent stelling 1 dat de arbeid verricht door een veld dat een potentiaal heeft bij het transport van een eenheidsmassa van A naar B onafhankelijk is van de gekozen weg.

Vectorvelden $\underline{u}$ waarvoor voor ieder puntenpaar A, B geldt dat $\int (\underline{u},\underline{t})ds$ langs een kromme van A naar B onafhankelijk is van de gekozen weg, zijn fysisch van groot belang. Ze heten <u>conservatieve velden</u>. Uit stelling 1 volgt nu:

<u>Stelling 3.</u>

Velden die een potentiaal hebben zijn conservatief.

<u>Stelling 4.</u>

Het veld $\underline{u}$ is dan en slechts dan conservatief indien

$$\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds = 0 ,$$

voor iedere gesloten kromme K die in het definitiegebied van $\underline{u}$ ligt.

De volgende stelling is de uiterst belangrijke omkering van stelling 3.

<u>Stelling 5.</u>

Als het veld $\underline{u}$ conservatief is dan bestaat er een functie φ met $\underline{u} = \text{grad}\ \varphi$.

<u>"Bewijs".</u>

Kies in ieder samenhangend stuk van het definitiegebied van $\underline{u}$ een vast punt. Definieer:

$$\varphi(x,y,z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} (\underline{u},\underline{t})ds .$$

Omdat de lijnintegraal onafhankelijk is van de gekozen weg is φ inderdaad een functie van (x,y,z).
Men moet het bewijs voltooien door te laten zien dat

$$\text{grad}\ \varphi = \underline{u} .$$

In hoofdstuk IV komen we op conservatieve velden terug.

Opgaven.

1) Laat zien dat de volgende integralen onafhankelijk zijn van de gekozen kromme en integreer:

a) $$\int_{(0,0,0)}^{(a,b,0)} \sin y\, dx + x \cos y\, dy \; ;$$

b) $$\int_{(1,1,0)}^{(a,b,0)} 2xy\, dx + (x^2 - y^2)dy \; .$$

2) Bereken:

a) $$\int_{(1,0,0)}^{(1,0,2\pi)} zdx + xdy + ydz$$

langs de kromme K met parametervoorstelling $\underline{x}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

b) $$\int_{(1,0,1)}^{(2,3,2)} x^2dx - xzdy + y^2dz$$

langs een rechte die begin- en eindpunt verbindt.

c) $$\int_{(1,1,0)}^{(0,0,\sqrt{2})} x^2yz\, ds$$

langs een kromme met parametervoorstelling $\underline{x}(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2} \sin t)$, $(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$.

d) $$\int_K (\underline{u},\underline{t})ds \quad \text{als} \quad \underline{u} = (2xy^2, 2x^2yz, x^2y^2)$$

en K de cirkel $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$ is in positieve zin doorlopen.

3) Gegeven is de kromme:

$$\begin{cases} x = \cosh t \cos t \\ y = \cosh t \sin t \\ z = t \end{cases}$$

Bereken de lengte van de kromme tussen de punten corresponderend met $t = 0$ en $t = 1$.

4) Gegeven is de kromme:

$$\begin{cases} y = \arcsin x \\ z = \frac{1}{4} \log \frac{1 + x}{1 - x} \end{cases}$$

Bereken de booglengte $s(x)$ met $\underline{0}$ als beginpunt.
Bepaal de raakvector aan de kromme in $\underline{0}$.

5) Bewijs dat een conservatief veld rotatievrij is.

6) Laat K een gesloten kromme zijn; φ, ψ zijn scalaire functies.
Bewijs dat

$$\oint_K (\varphi \operatorname{grad} \psi, \underline{t})ds = - \oint_K (\psi \operatorname{grad} \varphi, \underline{t})ds .$$

7) Zij $\underline{u}$ het veld: $\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z\right)$. Zij D het inwendige van de torus die ontstaat door wenteling van de cirkel $(x - 2)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ om de z-as. Laat zien dat $\operatorname{rot} \underline{u} = \underline{0}$ in D.
Bereken $\int_K (\underline{u},\underline{t})ds$ als K de cirkel: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ is.
(In hoofdstuk IV §4 komen we op deze opgave terug.)

8) (Vergelijk hoofdstuk II §2 opgave 3.)
Zij gegeven $R_3 \to R_1$ functies f en λ zódanig dat

$$\nabla f(\underline{x}) = \lambda(\underline{x})\underline{x} .$$

Laat zien dat er een $R_1 \to R_1$ functie F bestaat zodat

$$f(\underline{x}) = F(|\underline{x}|) .$$

§ 2. Oppervlakte-integralen

Zij S een stuk oppervlak in R_3 en φ een functie gedefinieerd in R_3. Net als bij de kromme in §1 kunnen we het oppervlak in stukjes verdelen en in ieder stukje een punt kiezen. We vermenigvuldigen de oppervlakte van zo'n stukje met de waarde van φ in het gekozen punt en sommeren over alle stukjes. Heeft deze som een "limiet" voor steeds fijner wordende verdeling dan heet deze limiet de <u>oppervlakte-integraal</u> van φ over S. We kunnen bewijzen dat als

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

of in vectornotatie $\underline{x} = \underline{x}(\underline{u})$, de parametervoorstelling van S is, dan de oppervlakte-integraal van φ over S gelijk is aan

$$\iint_G \varphi(\underline{x}(\underline{u})) \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| dudv \;,$$

waarin G het bij het oppervlak S behorende gebied in het parametervlak is.

<u>Opmerkingen.</u>

1) Uit de wijze waarop de oppervlakte-integraal ingevoerd is blijkt dat de uitkomst onafhankelijk is van de keuze van de parametervoorstelling van S. (Vgl. ook hoofdstuk V §2.)
2) Wil de limiet bestaan dan moeten we bijv. eisen dat $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$ continu en $\neq \underline{0}$ is. Heeft het oppervlak een parametervoorstelling waarvoor dit geldt dan noemen we het <u>glad</u>. Voor oppervlakken die slechts stuksgewijs glad zijn, definiëren we de oppervlakte-integraal als de som van de oppervlakte-integralen over de gladde stukken.
   Gladde oppervlakken hebben in ieder punt een raakvlak.

<u>Voorbeelden.</u>

a) Heeft het oppervlak S de vergelijking $z = f(x,y)$, $(x,y) \in G$ dan is de oppervlakte-integraal:

$$\iint_G \varphi(\underline{x}) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \;.$$

b) Is het oppervlak gegeven in cylindercoördinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z(r,\varphi)$ dan is:

$$\left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial r} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}\right| = r\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\ .$$

c) De éénheidsbol S heeft een parametervoorstelling

$$\left.\begin{aligned} x &= \sin\theta\cos\varphi \\ y &= \sin\theta\sin\varphi \\ z &= \cos\theta \end{aligned}\right\} \text{ met } G \text{ gedefinieerd door } \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Dan is $\left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}\right| = \sin\theta$. Willen we nu de functie $f(\underline{x}) = z$ over S integreren dan moeten we

$$\iint_G \cos\theta\sin\theta\, d\theta d\varphi$$

bepalen. (antw.: 0.)

d) Wordt het oppervlak S bepaald door $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ $(u,v) \in G$; dan is de <u>oppervlakte</u> van S (zo deze bestaat!):

$$\text{opp } S = \iint_G \left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}\right| dudv\ .$$

<u>Definitie</u>.

Onder de <u>normaal</u> $\underline{n}$ op een oppervlak in een punt $\underline{x}$ van dat oppervlak verstaan we een vector met lengte 1 die loodrecht staat op het raakvlak in dat punt. (Er zijn twee zulke vectoren!)

Bij bovengenoemde parametervoorstelling van S is

$$\underline{n} = \frac{\pm 1}{\left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}\right|}\left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}\right)\ .$$

(Bij het spreken over $\underline{n}$ steeds vastleggen welke bedoeld wordt!)

We voeren een symbolisch oppervlakte-element $d\sigma$ in door te schrijven

$$d\sigma = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| dudv$$

en we schrijven de oppervlakte-integraal van φ over S ook als

$$\iint_S \varphi(\underline{x})d\sigma .$$

Opmerking.

Zij S een gebied in het XY-vlak; zij $\varphi(\underline{x}) = f(x,y)$ dan is

$$\iint_S \varphi(\underline{x})d\sigma = \iint_S f(x,y)dxdy .$$

De vlakke dubbelintegralen die we in wiskunde 20 leerden kennen zijn dus ook oppervlakte -integralen.

Een belangrijke rol spelen integralen van de vorm:

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma = \iint_G (\underline{u}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v})dudv ,$$

waarbij $\underline{u}(\underline{x})$ een vectorveld is, S een glad oppervlak en $\underline{n}$ een normaal. Deze integralen zijn niet voor alle oppervlakken zinvol. Wil de integrand $(\underline{u},\underline{n})$ een continue functie zijn dan moet behalve $\underline{u}$ ook $\underline{n}$ continu zijn. Opdat $\underline{n}$ continu gedefinieerd kan worden, is nodig maar niet voldoende dat S glad is. We beperken ons nu tot oppervlakken waarvoor uit de twee mogelijke normaalrichtingen er een continue keuze mogelijk is. Dergelijke oppervlakken heten oriënteerbaar. Bol, torus, vlak, zijn voorbeelden van oriënteerbare oppervlakken; het lint van Möbius is een niet oriënteerbaar oppervlak. Alle gladde oppervlakken voorgesteld door $z = f(x,y)$ zijn oriënteerbaar: men kan bijv. steeds $(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, +1)$ als normaal kiezen.

Geeft men in één punt van een oriënteerbaar oppervlak de normaal, en laat men hem continu veranderen dan ligt de normaal-keuze overal vast.

Bij integralen

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma \qquad \text{(S oriënteerbaar)}$$

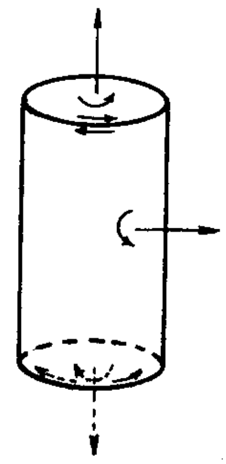
moet men dus aangeven welke van de beide normaal-keuzen men doet.

Men gebruikt vaak de notatie:

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma = \iint_S u_1 dydz + u_2 dxdz + u_3 dxdy \ ,$$

indien $u_1(x,y,z)$, $u_2(x,y,z)$, $u_3(x,y,z)$ de componentfuncties van $\underline{u}(\underline{x})$ zijn.

Er ontstaat nog een moeilijkheid indien we $\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma$ willen definiëren voor een S die slechts stuksgewijze glad is. Neem als voorbeeld een stuk cylinder met grond- en bovenvlak. S is de vereniging van drie oriënteerbare stukken. We moeten nog omschrijven wanneer een dergelijk oppervlak oriënteerbaar is. Als we op ieder glad oriënteerbaar stuk een normaal-keuze doen, dan ligt daarmee voor iedere gesloten kromme die geheel op een glad stuk ligt, de bijpassende omloopszin vast (zie figuur). Kan men op elk glad oriënteerbaar stuk de normaal zo kiezen dat op de randkrommen de omloopszin horend bij de normalen van de beide aangrenzende vlakken tegengesteld is, dan heet S oriënteerbaar. Ook voor stuksgewijs gladde oriënteerbare oppervlakken kan men dus een normaal vastleggen, door in één punt een keuze te doen.



Opgaven.

1) Bereken:

a) $$\iint_S x \ dydz + y \ dxdz + z \ dxdy \ .$$

S is de driehoek met hoekpunten (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1); de normaal wijst van $\mathcal{O}$ af.

b) $$\iint_S (\underline{a},\underline{n})d\sigma \ ;$$

$\underline{a}$ is het veld (1,1,1); S is de halve bol $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$; $\underline{n}$ is in (0,0,1) naar boven gericht.

c) $\displaystyle\iint_S (\underline{x},\underline{n})\,d\sigma$;

S als in opgave b).

d) $\displaystyle\iint_S x^2 z\; d\sigma$;

S is het cylindervlak $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

2) Een oppervlak is bepaald door

$$\begin{cases} x = \cos u + v \sin u \\ y = \sin u - v \cos u \;; \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \;; \quad 0 \leq v \leq 1 \,. \\ z = v + 1 \end{cases}$$

Bereken de oppervlakte.

3) Een oppervlak is gegeven door

$$\begin{cases} x = (2 - \cos v)\cos u \\ y = (2 - \cos v)\sin u \;; \; -\pi \leq u \leq \pi; \; -\pi \leq v \leq \pi \,. \\ z = \sin v \end{cases}$$

Bereken de oppervlakte.

4) Bewijs:

$$\left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}\right| = \sqrt{EG - F^2} \,,$$

met

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \,.$$

Volume-integralen.

Integralen als $\iiint\limits_R F(x,y,z)dxdydz$ hebben we in wiskunde 20 al leren kennen.

Vaak geeft men de "volumebrok" aan met $d\tau$ i.p.v. dxdydz.

Is $\underline{u}(\underline{x}) = (u_1(\underline{x}), u_2(\underline{x}), u_3(\underline{x}))$ een vectorveld dan gebruikt men vaak de notaties

$$\iiint\limits_R \underline{u}\ d\tau = \left(\iiint\limits_R u_1\ d\tau\ ,\ \iiint\limits_R u_2\ d\tau\ ,\ \iiint\limits_R u_3\ d\tau\right) ;$$

$$\iint\limits_S \underline{u}\ d\sigma = \left(\iint\limits_S u_1\ d\sigma\ ,\ \iint\limits_S u_2\ d\sigma\ ,\ \iint\limits_S u_3\ d\sigma\right) ;$$

en

$$\int\limits_K \underline{u}\ ds = \left(\int\limits_K u_1\ ds\ ,\ \int\limits_K u_2\ ds\ ,\ \int\limits_K u_3\ ds\right) .$$

§ 3. Integraalstellingen

In deze § is R een begrensd gesloten gebied in de R_3. We veronderstellen verder dat de rand S van R stuksgewijs glad en oriënteerbaar is; $\underline{n} = (n_1,n_2,n_3)$ is de naar buiten gerichte normaal van S.

Stelling 1.

Hebben de functies $u_1(x,y,z)$, $u_2(x,y,z)$, $u_3(x,y,z)$ continue afgeleiden in een gebied waarvan R tot het inwendige behoort dan is

a) $$\iint\limits_S u_1n_1d\sigma = \iint\limits_S u_1dydz = \iiint\limits_R \frac{\partial u_1}{\partial x}\ d\tau$$

b) $$\iint\limits_S u_2n_2d\sigma = \iiint\limits_R \frac{\partial u_2}{\partial y}\ d\tau$$

c) $$\iint\limits_S u_3n_3d\sigma = \iiint\limits_R \frac{\partial u_3}{\partial z}\ d\tau\ .$$

Bewijs.

De drie stellingen zijn volkomen analoog. We schetsen alleen het bewijs van c). Neem eerst aan dat R voorgesteld kan worden als

$$f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y); \; (x,y) \in G \; ;$$

terwijl K de rand van G is.
S bestaat dan uit drie stukken:

$$S_1 \; : z = f_1(x,y) \; , \; (x,y) \in G \; ;$$

$$S_2 \; : z = f_2(x,y) \; , \; (x,y) \in G \; ;$$

$$S_3 \; : f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y) \; , \; (x,y) \in K \; .$$

Voor S_3 geldt: $n_3 = 0$.
Op S_1 is echter:

$$\underline{n} = \frac{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2}} \; .$$

Dus:

$$\iint\limits_{S_1} u_3 n_3 d\sigma = - \iint\limits_{G} u_3(x,y,f_1(x,y))dxdy \; .$$

Analoog berekent men de integraal over S_2. We vinden dus:

$$\iint\limits_{S} u_3 n_3 d\sigma = \iint\limits_{G} [u_3(x,y,f_2(x,y)) - u_3(x,y,f_1(x,y))]dxdy =$$

$$= \iint\limits_{G} dxdy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial u_3}{\partial z} dz = \iiint\limits_{R} \frac{\partial u_3}{\partial z} dxdydz \; .$$

Voor gebieden die niet deze speciale vorm hebben, maar die door hulpvlakken gesplitst kunnen worden in eindig veel stukken die wel deze vorm hebben, telt men de resultaten voor de deelgebieden op. Integralen over de hulpvlakken komen dan eenmaal met elk van beide normalen voor; bij optelling vallen de bijdragen dus tegen elkaar weg. Voor willekeurige gebieden is een limietprocedure nodig die we hier niet uitvoeren.

Stelling 2.

Heeft φ om R continue afgeleiden, dan is:

$$\iiint_R \operatorname{grad} \varphi \, d\tau = \iint_S \varphi \underline{n} \, d\sigma .$$

Bewijs.

Pas stelling 1 toe op elk der componenten links en rechts.

Stelling 3.

(Gauss).

$$\iiint_R \operatorname{div} \underline{u} \, d\tau = \iint_S (\underline{u},\underline{n}) d\sigma .$$

Stelling 4.

(Ostrogradsky).

$$\iiint_R \operatorname{rot} \underline{u} \, d\tau = \iint_S (\underline{n} \times \underline{u}) d\sigma .$$

De formules van de stellingen 2, 3 en 4 zien er het overzichtelijkst uit met de ∇ notatie:

$$\iiint_R \nabla\varphi \, d\tau = \iint_S \underline{n}\varphi \, d\sigma$$

$$\iiint_R (\nabla,\underline{u}) d\tau = \iint_S (\underline{n},\underline{u}) d\sigma$$

$$\iiint_R (\nabla \times \underline{u}) d\tau = \iint_S (\underline{n} \times \underline{u}) d\sigma .$$

Als toepassing van de stelling van Gauss geven we een nieuwe interpretatie van het begrip divergentie. Is R een gebiedje met volume V, en is $(x,y,z) \in R$ dan is

$$\iiint_R \operatorname{div} \underline{v}\, d\tau \approx \operatorname{div} \underline{v}(x,y,z) \,.\, V \,.$$

Laat men nu V en dus R op een "nette" manier tot nul naderen dan vindt men:

$$\operatorname{div} \underline{v}(\underline{x}) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iiint_R \operatorname{div} \underline{v}\, d\tau \,.$$

Met de stelling van Gauss (S is de rand van R) wordt dit:

$$\operatorname{div} \underline{v}(\underline{x}) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iint_S (\underline{v},\underline{n})d\sigma \,.$$

Is $\underline{v}$ het snelheidsveld van een stroming dan is $\iint_S (\underline{v},\underline{n})d\sigma$ de totale flux door S. Divergentie is dus zoiets als flux per volume.
Uit de bovenstaande beschouwing blijkt ook dat de waarde van div. onafhankelijk is van de keuze van een coördinatenstelsel.

Definitie.

Is voor ieder gesloten oppervlak $\iint_S (\underline{v},\underline{n})d\sigma = 0$ dan heet het veld $\underline{v}$ bronvrij.

Stelling 5.

Heeft het veld $\underline{v}$ continue afgeleiden, en is $\underline{v}$ bronvrij dan is $\operatorname{div} \underline{v} = 0$.

Voor divergentie gebruikt men soms de term brondichtheid.

Wees steeds bedacht op velden met "gaten". Is het veld gedefinieerd voor $x^2 + y^2 + z^2 > 1$ dan mag men voor S: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ de stelling van Gauss niet toepassen.

Opgaven.

1) Verifieer de stelling van Gauss in de volgende gevallen:

a) R: kubus: $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$; $0 \le z \le 1$. $\underline{u} = (x^2, y^2 z, yz)$.

b) R: gebied van de torus die ontstaat als $(x-2)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ om de z-as wentelt; $\underline{u} = (-xy, x^2, 0)$.

c) R: $x^2 + y^2 \le (1-z)^2$; $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 1$. $\underline{u} = (x^2 + y^2)\underline{a}$, $\underline{a}$ constant veld.

d) R: $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$; $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{x}$.

2) Bewijs dat het volume van R gelijk is aan

$$\iint_S x \, dydz = \iint_S y \, dxdz = \iint_S z \, dxdy \, .$$

3) Bereken $\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma$ als $\underline{u} = (x^2,y^2,z^2)$, S de rand is van de kubus $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$, $\underline{n}$ naar buiten.

4) Zij $\underline{u}$ gedefinieerd in een gebied R, S de rand van R, $\underline{n}$ naar buiten. Bewijs:

$$\iint_S (\text{rot } \underline{u},\underline{n})d\sigma = 0 \, .$$

5) Bewijs:

$$\iint_S (\underline{x},\underline{x})(\underline{x},\underline{n})d\sigma = 5 \iiint_R (\underline{x},\underline{x})d\tau \, .$$

6) Bewijs dat als φ en ψ functies zijn gedefinieerd op een gebied W, en S een gesloten oppervlak in W is:

$$\iint_S (\text{grad } \varphi \times \text{grad } \psi, \underline{n})d\sigma = 0 \, .$$

7) Laat $\underline{u}$ en $\underline{v}$ binnen R gedefinieerd zijn. Bewijs

$$\iiint_R (\underline{u}, \text{rot } \underline{v})d\tau = \iiint_R (\underline{v}, \text{rot } \underline{u})d\tau - \iint_S (\underline{u} \times \underline{v}, \underline{n})d\sigma .$$

8) Zij φ een scalarveld en $\underline{u}(\underline{x})$ een vectorveld zó dat $\underline{u}$ in ieder punt raakt aan het door dat punt gaande niveauvlak van φ; bewijs dan dat

$$\iiint_R \varphi \text{ div } \underline{u}\, d\tau = \iint_S (\varphi\underline{u},\underline{n})d\sigma .$$

9) Zij S een gesloten oppervlak. Bereken

$$\iint_S (\text{grad } |\underline{x}|^2, \underline{n})d\sigma .$$

§ 4. Integraalstellingen (vervolg)

Een stelling in twee dimensies

Stelling 1. (Green)

Zij G een begrensd gesloten gebied in het xy-vlak; zij de rand van G een stuksgewijs gladde enkelvoudige gesloten kromme K. Laat de functies u(x,y), v(x,y) continue partiële afgeleiden hebben in een gebied D waarvan G in het inwendige ligt, dan is

$$\oint_K u\, dx + v\, dy = \iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy , \tag{1}$$

indien de kromme K in positieve zin doorlopen wordt.

Bewijs.

Breidt het xy-vlak uit met een z-as. Beschouw in de xyz-ruimte de cylinder met grondvlak G en hoogte 1. Pas de stelling van Gauss toe voor deze cylinder en het veld $\underline{v}(x,y,z) = (v(x,y), -u(x,y), 0)$.

Opmerking.

Kiest men op G de naar boven wijzende normaal ($= \underline{e}_3$) dan passen omloopszin van K en normaal op G bij elkaar; is $\underline{u}$ het veld $\underline{u}(x,y,z) = (u(x,y), v(x,y), 0)$ dan kan men (1) ook schrijven als:

$$\iint_G (\text{rot } \underline{u}, \underline{n}) d\sigma = \oint_K (\underline{u}, \underline{t}) ds .$$

Opgave.

1) Zij $\underline{n}$ de naar buiten wijzende eenheidsnormaal op K; bewijs dan

$$\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = \oint_K (u(\underline{n}, \underline{e}_1) + v(\underline{n}, \underline{e}_2)) ds .$$

(Stelling van Gauss in twee dimensies).

De stelling van Stokes.

In de rest van deze § is S een stuksgewijs glad, georiënteerd oppervlak in R_3 met als rand een stuksgewijs gladde enkelvoudige gesloten kromme K. Op K is de omloopszin gekozen in overeenstemming met de oriëntatie van S. Alle beschouwde functies hebben continue afgeleiden in een gebied waarvan S en K tot het inwendige behoren. De eenheidsnormaal op S zij $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$, de bijpassende eenheidsraakvector aan K: $\underline{t} = (t_1, t_2, t_3)$.

Stelling 2.

a) $$\oint_K u_1 dx = \iint_S \frac{\partial u_1}{\partial z} dxdz - \frac{\partial u_1}{\partial y} dxdy$$

of anders geformuleerd:

$$\oint_K u_1 t_1 ds = \iint_S \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} n_2 - \frac{\partial u_1}{\partial y} n_3\right) d\sigma .$$

b) $$\oint_K u_2 dy = \iint_S \frac{\partial u_2}{\partial x}\,dxdy - \frac{\partial u_2}{\partial z}\,dydz\ .$$

c) $$\oint_K u_3 dz = \iint_S -\frac{\partial u_3}{\partial x}\,dxdz + \frac{\partial u_3}{\partial y}\,dydz\ .$$

Net als bij het bewijs van §3 stelling 1 maken we eerst een beperkende veronderstelling over S nl. dat het voorgesteld kan worden als $z = f(x,y)$, $(x,y) \in G$. Voor willekeurige oppervlakken moet men het bewijs dan geven door ze te verknippen en limietprocessen toe te passen. Als $z = f(x,y),(x,y) \in G$ een voorstelling van S is dan volgen a) en b) direct en c) met enige moeite uit de stelling van Green toegepast op G.

Stelling 3.

$$\oint_K u\,\underline{t}\,ds = \iint_S (\underline{n} \times \operatorname{grad} u)d\sigma\ .$$

Stelling 4. (Stokes)

Zij $\underline{u}(x,y,z) = (u_1(x,y,z),\ u_2(x,y,z),\ u_3(x,y,z))$ een vectorveld; dan is:

$$\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds = \iint_S (\operatorname{rot}\,\underline{u},\underline{n})d\sigma\ .$$

Stelling 5.

$$\oint_K (\underline{u} \times \underline{t})ds = \iint_S (\underline{n}\,\operatorname{div}\,\underline{u} - (\operatorname{grad}\,\underline{u})\underline{n})d\sigma\ .$$

((grad $\underline{u}$)$\underline{n}$: de lineaire afbeelding grad $\underline{u}$ toegepast op $\underline{n}$; zie blz. 19).

Zoals de stelling van Gauss ons een nieuwe interpretatie van het begrip divergentie gaf, zo zullen we de stelling van Stokes kunnen gebruiken voor een coördinatenvrije karakterisering van de rotatie.
Zij S een vlak cirkeltje met omtrek K, oppervlakte A, middelpunt (x,y,z) gelegen in het vlak $(\underline{n},\underline{x}) = 0$.

Nu is

$$(\text{rot } \underline{u}(x,y,z),\ \underline{n}) = \lim_{A\to 0} \frac{1}{A} \oint_K (\underline{u},\underline{t})ds \ .$$

Hieruit volgt dat de waarde van rot $\underline{u}$ onafhankelijk is van het gekozen coördinatenstelsel. In het geval van een snelheidsveld heet $\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds$ de circulatie rond K; de rotatie in een bepaalde richting is dus zoiets als: circulatie per oppervlak. Men hoeft zich bij deze beschouwing niet te beperken tot cirkelvormige vlakjes.

Stelling 6.

Zij S een gesloten oppervlak; dan is:

$$\iint_S (\text{rot } \underline{u},\underline{n})d\sigma = 0 \ .$$

Stelling 7.

Indien een veld een vectorpotentiaal heeft dan is het bronvrij.

Stelling 8.

Een bronvrij veld heeft een vectorpotentiaal.

Deze laatste stelling zullen we niet bewijzen.

Opgaven.

2) Verifieer de stelling van Stokes in de volgende gevallen:

a) S: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{x} \times \underline{e}_3$.

b) S vlakke driehoek met hoekpunten (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1). $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{x}$.

c) S het deel van de cylinder $x^2 + y^2 = 1$ waarvoor geldt $z^2 \leq 2y$, $x \geq 0$, $z \geq 0$. $\underline{u}(\underline{x}) = (x + y + z)\underline{x}$.

d) S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $z \geq 0$. $\underline{u}(\underline{x}) = (\underline{x},\underline{x})\underline{x}$.

3) In R_3 zij gegeven een enkelvoudige, gesloten, vlakke kromme K gelegen in $(\underline{n},\underline{x}) = 0$, $\underline{n} = (n_1,n_2,n_3)$; $|\underline{n}| = 1$. Indien de omloopszin op K klopt met de richting van $\underline{n}$ dan is de door K omsloten oppervlakte gelijk aan:

$$\frac{1}{2} \oint_K (n_2 z - n_3 y)dx + (n_3 x - n_1 z)dy + (n_1 y - n_2 x)dz \ .$$

Bewijs dit.

Hoofdstuk IV. Potentiaaltheorie

§ 1. De identiteiten van Green

In deze § is steeds S het stuksgewijze gladde georiënteerde randoppervlak van een gebied R in de R_3. De normaal $\underline{n}$ wijst naar buiten. Alle beschouwde functies worden verondersteld continue partiële afgeleiden te hebben in een gebied waarvan R en S in het inwendige liggen.

Definitie.

Zij φ in R_3 gedefinieerd en S een oppervlak. Dan heet (grad $\varphi,\underline{n}$) de normale afgeleide van φ op S. We schrijven hiervoor in het vervolg $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$.

Uit de stelling van Gauss (III §3 stelling 3) volgt:

$$\iint\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma = \iiint\limits_R \Delta\varphi\, d\tau \tag{1}$$

Uit de stelling van Gauss volgt door $\underline{u} = \varphi$ grad ψ te kiezen:

$$\iiint\limits_R \{\varphi\Delta\psi + (\text{grad }\varphi,\ \text{grad }\psi)\}d\tau = \iint\limits_S \varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\sigma \tag{2}$$

en dus

$$\iiint\limits_R \{\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi\}d\tau = \iint\limits_S \{\varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\}d\sigma\ . \tag{3}$$

De formules (2) resp. (3) heten de eerste resp. tweede identiteit van Green.

Zij R een gebied met rand S. Laat r de afstand van $\underline{x}$ tot een vast punt $\underline{p} = (p_1,p_2,p_3)$ voorstellen, d.i.

$$r = \sqrt{(x - p_1)^2 + (y - p_2)^2 + (z - p_3)^2}\ .$$

Als $\underline{p}$ buiten R ligt kunnen we in (3) kiezen $\psi = \frac{1}{r}$. Deze functie voldoet aan $\Delta\psi = 0$ buiten het punt $\underline{p}$. We vinden nu:

$$\iiint\limits_R \frac{\Delta\varphi}{r}\,d\tau = \iint\limits_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)d\sigma \tag{4}$$

($\underline{p}$ buiten R). Als $\underline{p}$ binnen R ligt kunnen we eerst uit R een bolletje om $\underline{p}$ weglaten, (4) toepassen en dan de straal van het weggelaten bolletje tot nul laten naderen. We vinden:

$$\varphi(\underline{p}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_R \frac{\Delta\varphi}{r}\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)d\sigma \tag{5}$$

($\underline{p}$ binnen R). Formule (5) heet de <u>derde identiteit van Green</u>.

Men noemt het punt $\underline{p}$ in (5) het veldpunt; $\underline{x}$ heet het integratiepunt.

<u>Opgaven</u>.

1) Als R de bol $B(\rho)$ met straal ρ en middelpunt in $\underline{p}$ is en $S(\rho)$ de rand van $B(\rho)$ dan is:

$$\varphi(\underline{p}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B(\rho)} \frac{\Delta\varphi}{r}\,d\tau + \frac{1}{4\pi\rho}\iint\limits_{S(\rho)} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma + \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{S(\rho)} \varphi\,d\sigma\ .$$

2) Zij $\underline{p}$ een punt binnen R; zij χ tweemaal differentieerbaar, dan is (met $\psi = \frac{1}{r} + \chi$)

$$\varphi(\underline{p}) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_R (\varphi\Delta\chi - \psi\Delta\varphi)d\tau + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)d\sigma\ .$$

3) Bewijs de volgende identiteiten:

a) $$\iiint\limits_R ((\text{rot}\,\underline{u},\ \text{rot}\,\underline{v}) - (\underline{u},\ \text{rot rot}\,\underline{v}))d\tau = \iint\limits_S (\underline{u}\times\text{rot}\,\underline{v},\underline{n})d\sigma\ .$$

b) $$\iiint\limits_R ((\underline{u},\ \text{rot rot}\,\underline{v}) - (\underline{v},\ \text{rot rot}\,\underline{u}))d\tau = \iint\limits_S (\underline{v}\times\text{rot}\,\underline{u} - \underline{u}\times\text{rot}\,\underline{v},\underline{n})d\sigma\ .$$

(Aanwijzing: pas de stelling van Gauss toe voor het veld $\underline{u}\times\text{rot}\,\underline{v}$).

§ 2. De differentiaalvergelijking van Laplace, harmonische functies

In zeer veel gevallen treden in de wiskundige beschrijving van fysische processen oplossingen op van de differentiaalvergelijking van Laplace:

$$\Delta\varphi = 0 \ .$$

De differentiaalvergelijking $\Delta\varphi = 0$ heet ook de potentiaalvergelijking. Oplossingen van deze vergelijking heten harmonische functies.
Potentiaaltheorie is de bestudering van deze oplossingen. Voor een gesloten oppervlak S en een harmonische functie φ volgt uit §1 formule (1)

$$\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma = 0 \ ;$$

en uit §1 formule (2)

$$\iiint_R |\mathrm{grad}\ \varphi|^2 d\tau = \iint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma \ .$$

Hieruit volgt:

Stelling.

Een harmonische functie die nul is op de rand van een gebied is nul binnen dit gebied. Een harmonische functie waarvan de normale afgeleide nul is op de rand van een gebied is constant binnen het gebied.

Als van een harmonische functie φ de waarden van φ op de rand S van een gebied G óf de waarden van $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ op S gegeven zijn is de functie in G éénduidig, resp. op een constante na, bepaald.

We zijn nu in staat enige der hoofdproblemen van de potentiaaltheorie te formuleren. We hebben steeds een gebied R met bijpassend georiënteerde rand S.

I. Zij gegeven een functie f op S. Bepaal een harmonische functie φ in R waarvoor geldt $\varphi = f$ op S. Als het probleem oplosbaar is, (wat niet steeds het geval is,) is de oplossing eenduidig bepaald.

II. Zij gegeven een functie g op S. Bepaal een harmonische functie φ in R waarvoor geldt $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = g$ op S. Zo dit probleem oplosbaar is, is de oplossing tot op een constante na bepaald.

Opgaven.

1) Als f en g harmonisch zijn in R en

$$\frac{\partial f}{\partial n} + f = \frac{\partial g}{\partial n} + g$$

op S, dan is $f \equiv g$ in R.

2) Zij h(x,y,z) een functie die in R gedefinieerd is. Als $\Delta f = hf$, $\Delta g = hg$ dan is

$$\iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}\right) d\sigma = 0 \ .$$

3) Als φ harmonisch is en $\underline{p}$ ligt binnen R dan is

$$\varphi(\underline{p}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right) d\sigma \ .$$

4) Zij φ harmonisch in $B(\rho)$, een bol met straal ρ, rand $S(\rho)$ en middelpunt $\underline{p}$, dan is

$$\varphi(\underline{p}) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{S(\rho)} \varphi \, d\sigma \ .$$

Stelling.

Zij φ harmonisch in R met een maximum of minimum in een inwendig punt van R, dan is φ constant.

Zij $\underline{p}$ een inwendig punt van R. Zoek een harmonische functie ψ in R die op S gelijk is aan $-\frac{1}{r}$. ψ hangt dus van het veldpunt en van het integratiepunt af. Dan is

$$\iint_S \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma = -\iint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, d\sigma$$

voor elke harmonische functie φ.

Uit de derde formule van Green volgt nu:

$$\varphi(\underline{p}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \varphi \cdot \frac{\partial(\psi + \frac{1}{r})}{\partial n} \, d\sigma \; .$$

Als men dus bij R de functie $\psi + \frac{1}{r}$ gevonden heeft (deze functie heet de <u>functie van Green</u> van R) dan is voor iedere harmonische functie φ de waarde van φ in het veldpunt $\underline{p}$ uitgedrukt in de waarden van φ op de rand.
Kent men de functie van Green voor alle veldpunten, dan is probleem I opgelost. Het vinden van de functie van Green is een speciaal geval van I.

§ 3. De vergelijking van Poisson

Men kan bewijzen dat bij continu verdeelde lading in de ruimte (met ladingsdichtheid ρ) voor het veld $\underline{E}$ geldt div $\underline{E} = 4\pi\rho$ en dat $\underline{E}$ een potentiaal heeft: $\underline{E} = -$ grad φ. Dan is φ een oplossing van de vergelijking

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \tag{1}$$

die <u>vergelijking van Poisson</u> heet.

<u>Opmerkingen</u>.

1) Zijn φ_1 en φ_2 in een gebied R beide oplossingen van dezelfde Poissonvergelijking (d.w.z. in de vergelijkingen waaraan φ_1 en φ_2 voldoen staat in het rechterlid dezelfde scalaire functie) dan is $\varphi_1 - \varphi_2$ een harmonische functie. Omgekeerd als φ een oplossing is van een Poissonvergelijking en χ harmonisch is in R dan is $\varphi + \chi$ ook een oplossing van de Poissonvergelijking.

2) Voldoen φ_1 en φ_2 in R aan dezelfde Poissonvergelijking en geldt $\varphi_1 = \varphi_2$ op de rand, S, van R, dan is $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ in R. Als $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$ op S, dan verschillen φ_1 en φ_2 een constante.

3) Naast de gewone Poissonvergelijking beschouwt men ook de vectorvergelijking:

$$\Delta\underline{u} = \underline{w} \; .$$

In onze cartesische coördinaten (zie hoofdstuk V §1) betekent dit niets anders dan:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = w_1 \\ \Delta u_2 = w_2 \\ \Delta u_3 = w_3 \,. \end{cases}$$

Wij zullen niet bewijzen dat (1) voor nette functies ρ (bijv. continu differentieerbaar) een oplossing heeft.
De derde identiteit van Green:

$$\psi(\underline{p}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_R \frac{\Delta\psi}{r}\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right]d\sigma \qquad (\underline{p} \text{ binnen } R)$$

geeft echter bij een oplossing ψ de formule:

$$\psi(\underline{p}) = \iiint\limits_R \frac{\rho}{r}\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left[\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right]d\sigma \qquad (\underline{p} \text{ binnen } R)$$

Gebruikend dat $\frac{1}{r}$ een harmonische functie van het veldpunt is, kan men bewijzen dat de oppervlakte-integraal een harmonische functie is. Aannemend dat (1) een oplossing heeft, vinden we dus dat ook

$$\varphi(\underline{p}) = \iiint\limits_R \frac{\rho}{r}\,d\tau$$

een oplossing is. De algemene oplossing krijgt men dan door bij φ willekeurige harmonische functies op te tellen.

Opmerking.

Het is gebruikelijk om het veldpunt $\underline{x} = (x,y,z)$, het integratiepunt $\underline{\xi} = (\xi,\eta,\zeta)$ te noemen. De formules zien er dan aldus uit:
Een oplossing van

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho(x,y,z)$$

is

$$\varphi(x,y,z) = \iiint_R \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}\, d\xi d\eta d\zeta \ .$$

§ 4. Rotatievrije velden, conservatieve velden

In hoofdstuk III §1 bewezen we de gelijkwaardigheid van de volgende drie uitspraken:

1) $\underline{u}$ is conservatief;
2) voor iedere gesloten kromme K in het definitiegebied van $\underline{u}$ geldt:

$$\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds = 0;$$

3) er is een (tot op een constante na bepaalde) functie F zodat $\underline{u}$ = grad F.

Daarnaast hebben we velden waarvoor geldt:

$$\text{rot } \underline{u} = \underline{0}\ .$$

Conservatieve velden zijn rotatievrij, en uit de formule van Stokes:

$$\iint_S (\text{rot } \underline{u},\underline{n})d\sigma = \oint_K (\underline{u},\underline{t})ds$$

volgt dat voor een rotatievrij veld geldt:

$$\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds = 0$$

voor iedere gesloten kromme die rand is van een geheel in het definitiegebied van $\underline{u}$ liggend oppervlak S.
Het is echter niet zo dat rotatievrije velden conservatief zijn. Een voorbeeld is het veld uit hoofdstuk III §1 opgave 7. In de voorbeelden die men kan bedenken is het uiteraard steeds zo dat

$$\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds \neq 0$$

is voor een kromme die niet de rand is van een oppervlak in het definitiegebied van $\underline{u}$. We bespreken nog een

Voorbeeld.

$\underline{H}$ is het magneetveld van een constante stroom door een oneindig lange stroomgeleider langs de z-as.

$$\underline{H} = \left(\frac{-cy}{x^2 + y^2}, \frac{cx}{x^2 + y^2}, 0\right) .$$

Nu is rot $\underline{H} = \underline{0}$ en $\displaystyle\oint_{\substack{x^2+y^2=1 \\ z=0}} (\underline{H},\underline{t})ds = 2\pi c$.

Definitie.

Een samenhangend gebied R in R_3 heet enkelvoudig samenhangend, als iedere gesloten kromme binnen R rand is van een oppervlak binnen R. Men kan ook zeggen: indien iedere gesloten kromme binnen R continu tot een punt kan samenkrimpen.

Een bol, een kubus, het gebied tussen twee concentrische bollen, de hele R_3 minus één punt, zijn voorbeelden van enkelvoudig samenhangende gebieden. Een torus, het binnengebied tussen twee oneindig lange concentrische cylinders, de hele R_3 minus een rechte, zijn voorbeelden van niet enkelvoudig samenhangende (we zeggen: "meervoudig samenhangende") gebieden.
We hebben nu

Stelling.

Zij $\underline{u}$ gedefinieerd in een enkelvoudig samenhangend gebied; en zij rot $\underline{u} = \underline{0}$, dan is $\underline{u}$ conservatief.

Opmerking.

Bij ieder inwendig punt van R is er een enkelvoudig samenhangende (bijv. bolvormige) omgeving binnen R. Is rot $\underline{u} = \underline{0}$ dan is er dus bij ieder punt een omgeving en een functie F zó dat $\underline{u}$ = grad F in die omgeving. Is het gebied niet enkelvoudig samenhangend, dan zal het in het algemeen niet lukken één F te vinden die overal als potentiaal optreedt.

Probleem.

Zij R een enkelvoudig samenhangend gebied; $f(x,y,z)$ een functie in R. Bepaal een vectorveld $\underline{v}$ in R ző dat:

$$\begin{cases} \text{div } \underline{v} = f; \\ \text{rot } \underline{v} = \underline{0} \ . \end{cases}$$

Oplossing.

Omdat R enkelvoudig samenhangend is weten we dat uit rot $\underline{v} = \underline{0}$ volgt $\underline{v}$ = grad φ. We moeten dus φ zo bepalen dat div $\underline{v}$ = div grad $\varphi = f$. De functie φ moet dus een oplossing zijn van de Poissonvergelijking:

$$\Delta\varphi = f \ .$$

Omgekeerd voldoet voor iedere oplossing φ van $\Delta\varphi = f$, $\underline{v}$ = grad φ aan rot $\underline{v} = \underline{0}$ en div $\underline{v} = f$.

Opgaven.

1) Laat zien dat $\underline{u} = (2xyz,\ x^2z,\ x^2y)$ rotatievrij is en bepaal een functie φ ző dat $\nabla\varphi = \underline{u}$.

2) Gegeven: $\underline{a} = (x,y,z)$;
K is een willekeurige kromme van (1,1,1) naar (1,3,3).
Bereken

$$\int_K (\underline{a},\underline{t})ds \ .$$

3) Gegeven:

a) $\underline{a} = (x + 2y + \alpha z,\ \beta x - 3y - z,\ 4x + \gamma y + 2z)$.
b) $\underline{a}$ is rotatievrij.

Bereken:

a) α, β en γ.
b) De potentiaal van $\underline{a}$, die nul is voor $\underline{x} = \underline{0}$.

4) Bepaal $\varphi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \varphi(r)$ zo, dat $\nabla\varphi = (\frac{x}{r^5}, \frac{y}{r^5}, \frac{z}{r^5})$ en $\varphi(1) = 0$.

§ 5. Divergentievrije velden, bronvrije velden

We weten reeds dat de volgende uitspraken gelijkwaardig zijn:

1) $\underline{u}$ is bronvrij, d.w.z.: voor ieder gesloten oppervlak in het definitiegebied van $\underline{u}$ is

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma = 0 \ ;$$

2) $\underline{u}$ heeft een vectorpotentiaal, d.w.z. er is een $\underline{v}$ met

$$\underline{u} = \text{rot } \underline{v} \ .$$

Bovendien bewezen we reeds dat een bronvrij veld ook divergentievrij is. De omkering van deze laatste stelling is weer niet juist.

Voorbeeld.

Het electrostatische veld van een puntlading in de oorsprong is:

$$\underline{E} = \left(\frac{cx}{r^3}, \frac{cy}{r^3}, \frac{cz}{r^3}\right) \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}) \ .$$

Nu is div $\underline{E} = 0$, en als S de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($\underline{n}$ naar buiten) is geldt:

$$\iint_S (\underline{E},\underline{n})d\sigma = 4\pi c \ .$$

We zullen nu eerst voor een veld dat binnen een bol is gedefinieerd en daar divergentievrij is, aantonen dat het een vectorpotentiaal heeft door deze expliciet te bepalen. We hebben dus een veld $\underline{u}$ met div $\underline{u} = 0$ en zoeken een veld $\underline{v}$ met rot $\underline{v} = \underline{u}$. We eisen nog: $v_3 = 0$. Zij $\underline{p} = (p_1,p_2,p_3)$ middelpunt van de bol. Dan is

$$\begin{cases} v_1 = -\displaystyle\int_{p_2}^{y} u_3(x,\eta,p_3)d\eta + \int_{p_3}^{z} u_2(x,y,\zeta)d\zeta \\ v_2 = -\displaystyle\int_{p_3}^{z} u_1(x,y,\zeta)d\zeta \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

een oplossing van ons probleem zoals men direct kan verifiëren.
Door de voorwaarde rot $\underline{v} = \underline{u}$ is $\underline{v}$ niet eenduidig bepaald: als $\underline{v}$ een oplossing is, is ook $\underline{v}$ + grad φ een oplossing.

Definitie.

Een gebied R in R_3 heet sterv<u>ormig</u> indien er een punt $\underline{p}$ in R ligt zodat voor ieder punt $\underline{q}$ uit R het segment $[\underline{p},\underline{q}]$ geheel binnen R ligt. De verzameling van alle punten $\underline{p}$ met deze eigenschap heet de kern van R.

Voor stervormige gebieden volgt uit div $\underline{u} = 0$ dat $\underline{u}$ een vectorpotentiaal heeft.

Opgaven.

1) Als R stervormig is, 0 tot de kern van R behoort, en $\underline{u}$ een in R gedefinieerd divergentievrij veld is dan is een oplossing $\underline{v}$ van rot $\underline{v} = \underline{u}$:

$$v_1(x,y,z) = \int_0^1 [u_2(xt,yt,zt)zt - u_3(xt,yt,zt)yt]dt ,$$

$$v_2(x,y,z) = \int_0^1 [u_3(xt,yt,zt)xt - u_1(xt,yt,zt)zt]dt ,$$

$$v_3(x,y,z) = \int_0^1 [u_1(xt,yt,zt)yt - u_2(xt,yt,zt)xt]dt .$$

Ga dit na!

2) Ga na dat het stelsel uit opgave 1 geschreven kan worden als:

$$\underline{v} = \int_0^1 t[\underline{u}(\underline{x}t) \times \underline{x}]dt \ .$$

3) Zij R een stervormig gebied; zij div $\underline{u} = 0$ in R, bewijs dat $\underline{u}$ in R een vectorpotentiaal heeft.

4) Is in R rot $\underline{v} = \underline{u}$, en is φ een in R gedefinieerde functie dan is

$$\text{rot}(\underline{v} + \text{grad}\ \varphi) = \underline{u}$$

Bewijs dat voor stervormige gebieden uit rot $\underline{v}_1$ = rot $\underline{v}_2$ volgt dat $\underline{v}_1 - \underline{v}_2$ conservatief is.

Opmerkingen.

1) Is het veld $\underline{u}$ divergentievrij dan is er voor ieder inwendig punt een omgeving waarin $\underline{u}$ een vectorpotentiaal heeft. Voor niet-stervormige gebieden hoeft er echter geen veld $\underline{v}$ te zijn zó dat overal in R rot $\underline{v} = \underline{u}$ is.

2) Voor stervormige gebieden hebben we nu tevens een bewijs van hoofdstuk III §4 stelling 8. (Ga na!)

Probleem.

Zij R een stervormig gebied; $\underline{w}$ een divergentievrij veld in R.
Bepaal een veld $\underline{v}$ zó dat:

$$\begin{cases} \text{div}\ \underline{v} = 0 \\ \text{rot}\ \underline{v} = \underline{w}\ . \end{cases}$$

Oplossing.

Omdat $\underline{w}$ divergentievrij is, heeft $\underline{w}$ een vectorpotentiaal: $\underline{w}$ = rot $\underline{a}$. We proberen nu een $\underline{b}$ te vinden zodanig dat rot $\underline{b} = \underline{0}$, div $\underline{b}$ = - div $\underline{a}$ (§ 4). Nu is $\underline{b}$ = grad φ voor zekere φ die voldoet aan $\Delta\varphi$ = - div $\underline{a}$.
$\underline{v} = \underline{a} + \underline{b}$ voldoet nu aan rot $\underline{v}$ = rot $\underline{a}$ + rot $\underline{b} = \underline{w}$; div $\underline{v} = 0$.
Het bovenstaande toont de oplosbaarheid van het probleem aan. We zullen nu nog een expliciete oplossing aangeven. Daartoe maken we de extra veronderstellingen dat R begrensd is en dat $(\underline{w},\underline{n}) = 0$ op de rand S van R. (Als $\underline{w} = \underline{0}$ is buiten een begrensd inwendig deel van R is dit bijvoorbeeld het geval.)

Uit div $\underline{v} = 0$ volgt nu dat $\underline{v} = \text{rot } \underline{u}$. We moeten nu proberen $\underline{u}$ zo te bepalen dat rot $\underline{v}$ = rot rot $\underline{u} = \underline{w}$. Nu is rot rot $\underline{u}$ = grad div $\underline{u} - \Delta\underline{u}$. We moeten dus oplossen: grad div $\underline{u} - \Delta\underline{u} = \underline{w}$. Neem aan dat het lukt een divergentievrije oplossing van $\Delta\underline{u} = -\underline{w}$ te vinden dan voldoet die ook aan rot rot $\underline{u} = \underline{w}$. Onder de gemaakte veronderstellingen kan men echter aantonen dat de oplossing van $\Delta\underline{u} = -\underline{w}$:

$$\underline{u} = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_R \frac{\underline{w}}{r}\, d\tau$$

inderdaad divergentievrij is. Als oplossing vindt men

$$\underline{v}(\underline{x}) = \text{rot } \underline{u}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_R \frac{\underline{w}(\underline{\xi}) \times (\underline{x} - \underline{\xi})}{|\underline{x} - \underline{\xi}|^3}\, d\tau .$$

Heb ik twee oplossingen $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ van het gestelde probleem dan is $\underline{v}_1 - \underline{v}_2$ de gradiënt van een harmonische functie. Omgekeerd: is $\underline{v}$ een oplossing van het gestelde probleem en φ een harmonische functie, dan is ook $\underline{v}$ + grad φ een oplossing.

Opgaven.

5) Laat zien dat $\underline{u} = (z - y,\ x - z,\ y - x)$ divergentievrij is en bepaal een veld $\underline{v}$ zodat $\underline{u} = \text{rot } \underline{v}$.

6) Bepaal alle vectoren $\underline{v}$ zodat

$$\text{rot } \underline{v} = (2xyz^2 + xy^3,\ x^2y^2 - y^2z^2,\ -y^3z - 2x^2yz) .$$

7) Gegeven:

$$\underline{a} = (3y^4z^2,\ 4x^3z^2,\ -3x^2y^2) .$$

Bereken een vectorpotentiaal $\underline{b}$ van $\underline{a}$, waarvoor $\underline{b}(\underline{0}) = \underline{0}$.

8) Bestaat er een veld $\underline{a}$ zodanig dat

a) rot $\underline{a} = (x,y,z)$?

b) rot $\underline{a} = (2,1,3)$?

§ 6. Het bepalen van een veld uit zijn rotatie en divergentie

In deze § is R een stervormig gebied.

Opgaven.

1) Zij $\underline{w} = \underline{u} + \underline{v}$; rot $\underline{u} = \underline{0}$, div $\underline{v} = 0$ in R, dan bestaat er een vectorveld $\underline{q}$ en een functie φ zodat $\underline{v} = \text{rot } \underline{q}$, $\underline{u} = \text{grad } \varphi$, terwijl

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \text{div } \underline{w} \\ \text{grad div } \underline{q} - \Delta \underline{q} = \text{rot } \underline{w} \,. \end{cases}$$

2) Laat R begrensd zijn door een oppervlak S.
Bewijs dat bij gegeven $\underline{f}$, g en h er in R hoogstens één oplossing $\underline{v}$ is van

$$\begin{cases} \text{rot } \underline{v} = \underline{f} & \text{in R ,} \\ \text{div } \underline{v} = g & \text{in R ,} \\ (\underline{v},\underline{n}) = h & \text{op S .} \end{cases}$$

Probleem.

Gegeven zij een functie f(x,y,z) en een divergentievrij veld $\underline{w}$. Bepaal een veld $\underline{v}$ zodanig dat

$$\begin{cases} \text{div } \underline{v} = f \\ \text{rot } \underline{v} = \underline{w} \,. \end{cases}$$

Oplossing.

Bepaal $\underline{v}_1$ met div $\underline{v}_1 = f$, rot $\underline{v}_1 = \underline{0}$ (§ 4)
Bepaal $\underline{v}_2$ met div $\underline{v}_2 = 0$, rot $\underline{v}_2 = \underline{w}$ (§ 5) .

$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ is een oplossing.
Zijn $\underline{v}$ en $\underline{v}'$ beide oplossingen van het gestelde probleem, dan is $\underline{v} - \underline{v}'$ de gradiënt van een harmonische functie. Omgekeerd: is $\underline{v}$ een oplossing en φ harmonisch, dan is ook $\underline{v}$ + grad φ een oplossing.

Stelling. (Helmholtz)

Zij $\underline{v}(\underline{x})$ een vectorveld in R dan is er een functie $\varphi(\underline{x})$ en een veld $\underline{u}(\underline{x})$ zō dat

$$\underline{v}(\underline{x}) = \text{grad } \varphi + \text{rot } \underline{u}; \ \text{div } \underline{u} = 0 \,.$$

Bewijs.

Bepaal een oplossing van $\Delta\varphi = \operatorname{div} \underline{v}$. Zij $\underline{w} = \underline{v} - \operatorname{grad} \varphi$. Nu is $\operatorname{rot} \underline{w} = \operatorname{rot} \underline{v}$; $\operatorname{div} \underline{w} = 0$. Neem voor $\underline{u}$ een oplossing van:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \underline{u} = \underline{w} \\ \operatorname{div} \underline{u} = 0 \end{cases} \quad (\S\ 5)\ .$$

Opgave.

3) Bepaal een vectorveld $\underline{u}$ zodat $\operatorname{div} \underline{u} = 2x + y + 1$, $\operatorname{rot} \underline{u} = \underline{e}_3$.

Hoofdstuk V. Coördinatentransformaties

§ 1. De vectoroperaties in kromlijnige orthogonale coördinaten

De vectoroperaties grad, rot en div zijn zo belangrijk, dat we hiervoor ook formules willen hebben als we niet met gewone rechtlijnige rechthoekige coördinaten werken, maar met andere coördinatenstelsels zoals bolcoördinaten of cylindercoördinaten.
We beschouwen dus een coördinatentransformatie

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

of $\underline{x} = \underline{x}(\underline{u})$, die we tweemaal differentieerbaar met continue partiële afgeleiden van de tweede orde veronderstellen. We maken echter nog een veronderstelling, nl. dat de coördinaten u, v, w <u>rechts orthogonaal</u> zijn. We kunnen dit zo uitdrukken, dat in ieder punt de drie vectoren

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$$

twee aan twee loodrecht zijn en in de hier gegeven volgorde een rechts stelsel vormen. Iets meetkundiger kunnen we dit als volgt uitdrukken. De vector $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$ geeft de richting van de raaklijn aan de kromme, die ontstaat door v en w constant te nemen. Zulke krommen heten <u>parameterkrommen</u> van het coördinatenstelsel. In elk punt zijn er drie: v en w constant, w en u constant, u en v constant. Geëist wordt nu, dat in ieder punt deze drie parameterkrommen loodrecht op elkaar staan. Bij bolcoördinaten klopt dit inderdaad, want θ en φ constant zijn halve lijnen uit de oorsprong, φ en r constant zijn halve cirkels met middelpunt in de oorsprong en middellijn langs de z-as, r en θ constant zijn cirkels evenwijdig met het (x,y)-vlak en met middelpunt op de z-as. In elk punt staan deze drie krommen loodrecht op elkaar. Men kan het ook formeel narekenen:

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Deze vectoren zijn inderdaad twee aan twee loodrecht. Verder vormen ze in de volgorde $\frac{\partial \underline{x}}{\partial r}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}$ een rechts stelsel, hetgeen men b.v. verifiëren kan door na te gaan dat $\frac{\partial \underline{x}}{\partial r} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta}$ een positief veelvoud van $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}$ is (het is trouwens ook meetkundig in te zien). Ook bij cylindercoördinaten klopt het; het stelsel is rechts als we de volgorde r, φ, z nemen.

De vectoren $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$ zijn nu onderling loodrecht, maar het behoeven geen eenheidsvectoren te zijn. De lengtes van deze vectoren heten <u>schaalfactoren</u>:

$$h_1 = \left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}\right| , \quad h_2 = \left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}\right| , \quad h_3 = \left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial w}\right| .$$

Voor de bolcoördinaten zijn deze schaalfactoren

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \theta ;$$

voor de cylindercoördinaten luiden ze

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1 .$$

We trekken nog enige conclusies uit de orthogonaliteit. Hieruit volgt dat $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$ dezelfde richting heeft als $\frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$, dus $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} = \lambda \frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$. Omdat het stelsel rechts is, is $\lambda > 0$. Neemt men nu hiervan de lengte, dan is $h_1 h_2 = \lambda h_3$. Hieruit volgt de derde van de volgende drie gelijkheden (de andere gaan analoog):

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} = \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} , \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} = \frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} , \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} = \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} .$$

Tenslotte de determinant van de drie vectoren:

$$D\left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} , \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} , \frac{\partial \underline{x}}{\partial w}\right) .$$

Omdat het stelsel rechts is, is deze positief en verder gelijk aan de inhoud van het door de drie vectoren opgespannen parallellepipedum. Omdat de vectoren echter loodrecht zijn wordt dit eenvoudig: $h_1 h_2 h_3$.

De Jacobiaan van $\underline{x}(\underline{u})$ is dus:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = h_1h_2h_3 \quad .$$

Als er nu een vectorveld $\underline{a}$ gegeven is, dan gaan we dit in een bepaald punt niet ontbinden in zijn gewone rechthoekige componenten a_1,a_2,a_3 maar nu op een wijze die aangepast is aan de nieuwe coördinaten: we nemen de projecties op de vectoren $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$. Gebruikmakend van de schaalfactoren h_1,h_2,h_3 komen we dan tot de definities:

$$a_u = \frac{1}{h_1}\left(\underline{a}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u}\right) , \quad a_v = \frac{1}{h_2}\left(\underline{a}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}\right) , \quad a_w = \frac{1}{h_3}\left(\underline{a}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial w}\right) .$$

Dit komt als volgt inderdaad op een ontbinding neer. Als $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3$ eenheidsvectoren zijn in de richtingen resp. van $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$, dan is

$$\underline{a} = a_u\underline{e}_1 + a_v\underline{e}_2 + a_w\underline{e}_3 \; .$$

Men moet echter niet uit het oog verliezen dat i.h.a. $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3$ van punt tot punt verschillen.

We kunnen grad α nu direct in de nieuwe componenten ontbinden:

$$(\text{grad } \alpha)_u = \frac{1}{h_1}\left(\text{grad } \alpha, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u}\right) = \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\alpha}{\partial u}$$

en analoog voor v en w. Dus:

$$(\text{grad } \alpha)_u = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\alpha}{\partial u} , \quad (\text{grad } \alpha)_v = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\alpha}{\partial v} , \quad (\text{grad } \alpha)_w = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\alpha}{\partial w} \quad .$$

Voor de rotatie kunnen we op deze wijze aantonen:

$$(\text{rot } \underline{a})_u = \frac{1}{h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial v}(h_3a_w) - \frac{\partial}{\partial w}(h_2a_v)\right\} ,$$

$$(\text{rot } \underline{a})_v = \frac{1}{h_3h_1}\left\{\frac{\partial}{\partial w}(h_1a_u) - \frac{\partial}{\partial u}(h_3a_w)\right\} ,$$

$$(\text{rot } \underline{a})_w = \frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(h_2a_v) - \frac{\partial}{\partial v}(h_1a_u)\right\} .$$

Past men dit toe op bolcoördinaten, dan vindt men

$$(\mathrm{rot}\ \underline{a})_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\ a_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\ a_\theta)\right\} =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} + \frac{\cot\theta}{r}a_\varphi\ ,$$

$$(\mathrm{rot}\ \underline{a})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\ a_\varphi)\right\} =$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}a_\varphi\ ,$$

$$(\mathrm{rot}\ \underline{a})_\varphi = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r\ a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right\} = \frac{\partial a_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta} + \frac{1}{r}a_\theta\ .$$

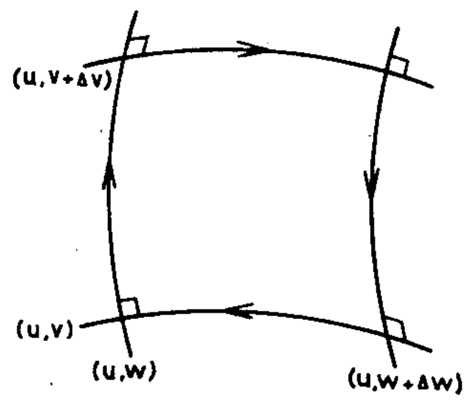
De formules voor cylindercoördinaten kunnen met behulp van de algemene formule ook direct opgeschreven worden.

Een andere manier om deze formules af te leiden gaat uit van de uitdrukking:

$$(\mathrm{rot}\ \underline{a},\underline{n}) = \lim_{A\to 0}\frac{1}{A}\oint_K(\underline{a},\underline{t})ds\ .$$

(Zie hoofdstuk III §4.)

Voor de berekening van $(\mathrm{rot}\ \underline{a})_u$ nemen we een oppervlakje loodrecht op $\frac{\partial\underline{x}}{\partial u}$ en wel een georiënteerd kromlijnig "rechthoekje" begrensd door parameterkrommen: u en w constant, en u en v constant (zie fig.). De oppervlakte is $h_2h_3\Delta v\Delta w$.



Op de lijnen met w is constant is $(\underline{a},\underline{t}) = a_v$. De lijnintegraal over zo'n zijde is dus op het teken na $a_v h_2 \Delta v$. Er zijn twee zulke rechthoekszijden. De bijdrage van beide samen wordt: $-\frac{\partial}{\partial w}(a_v h_2)\Delta v \Delta w$. De beide andere zijden leveren: $\frac{\partial}{\partial v}(a_w h_3)\Delta v \Delta w$ en dus:

$$(\text{rot } \underline{a})_u = \frac{1}{h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial v}(a_w h_3) - \frac{\partial}{\partial w}(a_v h_2)\right\} .$$

Om een uitdrukking te vinden voor div $\underline{a}$ in kromlijnige coördinaten gaan we uit van

$$\text{div } \underline{a} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint_S (\underline{a},\underline{n})d\sigma .$$

(Zie hoofdstuk III §3).
Voor V nemen we een kromlijnig kubusje met ribben langs parameterkrommen, en een lichaamsdiagonaal gaande van (u,v,w) naar $(u + \Delta u,\ v + \Delta v,\ w + \Delta w)$. De inhoud van het kubusje wordt dan $\approx h_1 h_2 h_3 \Delta u \Delta v \Delta w$. Op de vlakken u = constant is de normale component van $\underline{a}$: a_u. De bijdrage van deze beide vlakken wordt dan

$$\frac{\partial(h_2 h_3 a_u)}{\partial u}\Delta u \Delta v \Delta w .$$

Men vindt zo:

$$\text{div } \underline{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(h_2 h_3 a_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_3 h_1 a_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_1 h_2 a_w)\right\} .$$

In bolcoördinaten krijgen we

$$\text{div } \underline{a} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta\ a_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r \sin\theta\ a_\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\ a_\varphi)\right\} =$$

$$= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{2}{r}a_r + \frac{\cot\theta}{r}a_\theta ;$$

in cylindercoördinaten

$$\operatorname{div} \underline{a} = \frac{1}{r} \left\{\frac{\partial}{\partial r} (r\, a_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} (r\, a_z)\right\} =$$

$$= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\, a_r \,.$$

Door samenstelling van de formules voor gradiënt en divergentie krijgen we een formule voor Δ:

$$\Delta\alpha = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \alpha}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \alpha}{\partial w}\right)\right\} .$$

In bol- en cylindercoördinaten geeft dit al van vroeger bekende formules.
Bolcoördinaten:

$$\Delta\alpha = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left\{\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin\theta \frac{\partial \alpha}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}\right)\right\} =$$

$$= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \,;$$

cylindercoördinaten:

$$\Delta\alpha = \frac{1}{r} \left\{\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)\right\} =$$

$$= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \quad .$$

We merken tenslotte nog op dat de regel dat men $\Delta\underline{a}$ voor een vectorveld $\underline{a}$ kan verkrijgen door Δ op de afzonderlijke componenten van $\underline{a}$ toe te passen, in kromlijnige orthogonale coördinaten <u>niet</u> meer opgaat. Men kan echter $\Delta\underline{a}$ uit de vorenstaande formules wel afleiden door gebruik te maken van de formule

$$\Delta\underline{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{a} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{a} \,.$$

<u>Opgaven</u>.

1) Geef het vectorveld $\underline{a} = (z,-2x,y)$ in cylindercoördinaten.

2) Gegeven de coördinatentransformatie

$$\begin{cases} x = uv\cos\varphi \\ y = uv\sin\varphi \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases} ; \quad u \geq 0,\ v \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\ .$$

Bewijs dat de coördinaten u, v en φ rechts orthogonaal zijn en schrijf grad α, rot $\underline{a}$, div $\underline{a}$ en $\Delta\alpha$ in deze coördinaten.

3) Als 2) voor de coördinaten (ξ,η,φ) gedefinieerd door

$$\begin{cases} x = \sinh\xi\,\sin\eta\,\cos\varphi \\ y = \sinh\xi\,\sin\eta\,\sin\varphi \\ z = \cosh\xi\,\cos\eta \end{cases} ; \quad \xi \geq 0,\ 0 \leq \eta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\ .$$

4) Gegeven: $\underline{x} = (x(t), y(t), z(t))$.

Druk $\dfrac{d\underline{x}}{dt}$ en $\dfrac{d^2\underline{x}}{dt^2}$ uit in cylindercoördinaten (r,φ,z).

5) Bewijs dat in ieder rechts orthogonaal coördinatenstelsel geldt:

$$\text{div rot } \underline{a} = 0 \quad \text{en} \quad \text{rot grad } \varphi = \underline{0}\ .$$

6) Gegeven de coördinatentransformatie

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ y = uv \\ z = z \end{cases} ; \quad -\infty < u < \infty,\ v \geq 0,\ -\infty < z < \infty\ .$$

Schrijf de vergelijking $\Delta\alpha + \{3 - \varphi(x,y,z)\}\alpha = 0$ in de coördinaten (u,v,z).

§ 2. Transformatie van meervoudige integralen

Gemakshalve beperken we ons tot 2- en 3-voudige integralen; voor n-voudige integralen gaat alles echter net zo.

Zij R een gedeelte van R_3. We willen de meervoudige integraal

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz$$

bepalen en wensen andere coördinaten te gebruiken.

Laat

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

een differentieerbare afbeelding $\underline{x} = \underline{x}(\underline{u})$ van een R_3 in een R_3 zijn. We zoeken in de $\underline{u}$-ruimte een gebied R' zó dat bij iedere $\underline{x}$ uit R één $\underline{u}$ uit R' behoort en omgekeerd. Dan geldt:

Stelling 1.

$$\iiint\limits_R f(\underline{x})dxdydz = \iiint\limits_{R'} f(\underline{x}(\underline{u}))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw .$$

Definitie.

Een deelverzameling R van R_3 (R_2) heet dun indien er bij iedere $\varepsilon > 0$ een verzameling kubusjes (rechthoekjes) gevonden kan worden met een gezamenlijke inhoud (oppervlakte) die kleiner is dan ε en die R geheel overdekken.

Voorbeelden.

In R_2 zijn eindig veel punten, een lijnstuk, een stuk cirkelboog, dun. In R_3 zijn lijnstukken, stukken vlak, dun.

Stelling 2.

Zij A een dunne verzameling in R_3; dan is

$$\iiint\limits_A dxdydz = 0 .$$

Stelling 3.

Zij $f(\underline{x})$ een begrensde functie en zij A dun; dan is

$$\iiint\limits_A f(\underline{x})dxdydz = 0 .$$

Zij $\underline{x} = \underline{x}(\underline{u})$ een differentieerbare vectorfunctie van R_3 in R_3 die R uit de $\underline{x}$-ruimte één-eenduidig op R' uit de $\underline{u}$-ruimte afbeeldt. Zij $f(\underline{x})$ een begrensde functie.

I.p.v. stelling 1 heeft men nu

Stelling 4.

$$\iiint_G f(\underline{x})\,dxdydz = \iiint_{G'} f(\underline{x}(\underline{u}))\ \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\ dudvdw\ .$$

indien G en R resp. G' en R' slechts dunne verzamelingen verschillen.

Bekende voorbeelden zijn de transformatie op poolcoördinaten en bolcoördinaten. De hierbij behorende functionaaldeterminanten kennen we reeds (hoofdstuk I §2).

Opmerking.

Past men de stelling toe voor gebieden in R_1 dan komt er

$$\int_G f(x)dx = \int_{G'} f(x(u))\ \left|\frac{dx}{du}\right| du\ .$$

In wiskunde 10 hadden we de formule

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(x(u))\ \frac{dx}{du}\ du \qquad \text{met } x(c) = a,\ x(d) = b\ .$$

Ga na dat de beide formules gelijkwaardig zijn; bedenk daarbij dat als $\frac{dx}{du}$ van teken wisselt de formule uit wiskunde 10 niet geldig is en evenmin stelling 4.

Opgaven.

1) Bereken $\iint (x^4 - y^4)dxdy$ over het in het eerste kwadrant gelegen gebied, ingesloten door de krommen: $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 16$.
Aanwijzing: substitueer $x^2 - y^2 = u$ en $x^2 + y^2 = v$.

2) Bereken $\iint_G xy\,dx\,dy$ als G het parallellogram is begrensd door

$$y = \tfrac{1}{2}x,\ y = \tfrac{1}{2}x + 2,\ y = 3x,\ y = 3x - 4\ .$$

3) Bereken de oppervlakte van het deel van het platte vlak gegeven door de betrekkingen:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 \leq \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\ ;\ y \geq 0;\ (a > 0,\ b > 0)\ .$$

Aanwijzing: substitueer: $x = ar\cos^2\varphi$; $y = br\sin^2\varphi$.

4) Bereken $\iint_G dx\,dy$ als G het gebied is begrensd door de krommen:

a) $xy = 1$; $xy = 4$; $x = y$; $x = 2y$; $(x > 0,\ y > 0)$.
b) $xy = 1$; $xy = 2$; $y^2 = x$; $y^2 = 2x$.
c) $y^2 = 1 - 2x$; $y^2 = 4 - 4x$; $y^2 = 1 + 2x$; $y^2 = 9 + 6x$; $(y > 0)$.