TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

en

Antwoorden

bij

het college WISKUNDE 40

Voorjaarssemester 1975

Jag

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken en antwoorden bij het college

Wiskunde 40

Dictaatnr. 2.254   Prijs *f* 4,50

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Onderafdeling der Wiskunde

VRAAGSTUKKEN EN ANTWOORDEN

bij het college WISKUNDE 40

Voorjaarssemester 1975

INHOUD

Aanvullende Inhoudsbeschrijving
Tentamenopgaven bij het college WISKUNDE 40
1975

JdG, 10 Juli 2005

DIFFERENTIAALREKENING VAN FUNCTIES VAN MEER VERANDERLIJKEN

1. Een vectorfunctie van R_2 in R_2 is gedefinieerd door de betrekkingen :

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy. \end{cases}$$

Schets in het (u,v)-vlak de beelden van

a) het halfvlak $x \geq 0$

b) het halfvlak $y \geq 0$

c) het eerste kwadrant van het (x,y)-vlak $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

d) de cirkel $x^2 + y^2 = 1$

Correspondeert met elk verkregen punt (u,v) één punt (x,y)?

2. Een vectorfunctie van R_2 in R_3 is gegeven door de betrekkingen:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \\ w = x^2. \end{cases}$$

Schets de beelden van

a) het (x,y)-vlak

b) het halfvlak $x \geq 0$

c) het halfvlak $y \geq 0$

d) het derde kwadrant van het (x,y)-vlak $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

Bewijs dat bij elk verkregen punt (u,v,w) slechts één punt (x,y) hoort.

3. Zijn de volgende vectorfuncties continu in $\underline{x} = \underline{0}$?

a) $$f(\underline{x}) = f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad (\underline{x} \neq \underline{0}); \; f(\underline{0}) = 0$$

b) $$f(\underline{x}) = f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \quad (\underline{x} \neq \underline{0}); \; f(\underline{0}) = 0$$

c) $$f(\underline{x}) = f(x,y) = xy \log(x^2 + y^2) \quad (\underline{x} \neq \underline{0}); \; f(\underline{0}) = 0$$

d) $$f(\underline{x}) = f(x,y) = y \sin \frac{1}{x^2+y^2} \quad (\underline{x} \neq \underline{0}); \; f(\underline{0}) = 0$$

e) $\underline{u}(\underline{x}) = (u_1(x,y),\ u_2(x,y)) = \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ,\ \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}\right)\ (\underline{x} \neq \underline{0});\ \underline{u}(\underline{0}) = \underline{0}.$

4. Een vectorfunctie $\underline{f}$ van R_2 in R_3 is gedefinieerd door de betrekkingen:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x + y^2 \\ f_2(x,y) = xy \\ f_3(x,y) = x^2 + y \end{cases}$$

Schrijf $\underline{f}(\underline{a} + \underline{h})$ in de vorm

$$\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) = \underline{f}(\underline{a}) + A\underline{h} + |\underline{h}|\ \underline{e}(\underline{h}) \text{ voor } \underline{a} = (1,2) \text{ en } \underline{h} = (h,k) \neq (0,0)$$

en bewijs dat

$$\lim_{|\underline{h}|\to 0} |\underline{e}(\underline{h})| = 0,$$

m.a.w. dat $\underline{f}$ differentieerbaar is in (1,2).

5. Zijn de vectorfuncties uit vraagstuk 3 differentieerbaar in $\underline{x} = \underline{0}$?

6. Bereken de functionaalmatrices van de volgende vectorfuncties in het gegeven punt $\underline{a}$

a) $f(x,y) = 3x^2y - xy^3 + 2$ $\qquad \underline{a} = (1,2)$

b) $f(x,y,z) = x^2yz + 3xz^2$ $\qquad \underline{a} = (1,2,-1)$

c) $\begin{cases} f_1(x,y,z) = x^2 + y - z \\ f_2(x,y,z) = xyz^2 \\ f_3(x,y,z) = 2xy - y^2z \end{cases}$ $\qquad \underline{a} = (1,1,1)$

d) $\begin{cases} f_1(x,y,z) = xyz^2 - 4y^2 \\ f_2(x,y,z) = 3xy^2 - y^2z \end{cases}$ $\qquad \underline{a} = (1,-2,3)$

e) $\begin{cases} f_1(x,y) = x + 6y \\ f_2(x,y) = 3xy \\ f_3(x,y) = x^2 - 3y^2 \end{cases}$ $\qquad \underline{a} = (1,1)$

7. Een vectorfunctie is gegeven door de betrekkingen:

$$\begin{cases} u = x(1 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \\ v = y(1 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \\ w = z(1 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \text{met } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 < 1.$$

Bereken:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}.$$

8. Een complexe functie $w = f(z)$ van een complexe veranderlijke kan men opvatten als een vectorfunctie $(u(x,y), v(x,y))$ van R_2 in R_2 door te stellen $w = u + iv$ en $z = x + iy$.
Beschouw de functie $w = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x-iy}$. Schrijf u en v als functies van x en y. Bewijs dat de Jacobiaan van deze functie gelijk is aan $-|z|^{-4}$ en druk x en y uit in u en v.

9. Een kromme in R_3 is gegeven door de parametervoorstelling:

$$\underline{x}(t) = (\tfrac{1}{4}t^4, \tfrac{1}{3}t^3, t).$$

Bereken de punten van de kromme waarin de raaklijn evenwijdig is aan het vlak $x + 3y - 4z = 0$.

10. Bewijs dat alle raaklijnen aan de kromme met parametervoorstelling $\underline{x}(t) = (\sin t + \cos t, \sin t - \cos t, e^{-t})$ het (x,y)-vlak op de cirkel $x^2 + y^2 = 4$ snijden.

11. Een deeltje in R_3 bevindt zich op het tijdstip t in het punt P. De vector $\overrightarrow{OP}$, van de oorsprong 0 naar P (de positievector), hangt dan van t af: $\overrightarrow{OP} = \underline{x}(t)$. Zij $\underline{x}(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

a) Schets de baan van het deeltje.
b) Bereken de snelheidsvector $\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt}$ en schets die voor $t = 0$ en $t = \frac{\pi}{2}$.
c) Bereken de versnellingsvector $\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}$ en schets die voor $t = 0$ en $t = \frac{\pi}{2}$.

12. Op een massapunt P in R_3 (massa m, positievector $\underline{x}(t)$) werkt de kracht $\underline{K} = (0, 0, -mg)$. Volgens Newton geldt dan $\underline{K} = m\underline{a} = m\frac{d^2\underline{x}}{dt^2}$. Als op het tijdstip $t = 0$ de plaats van P en de snelheidsvector zijn $(0,0,0)$ en $(1,1,1)$, bereken dan $\underline{x}(t)$.

Bewijs dat de som van potentiële energie (mgz) en kinetische energie ($\frac{1}{2}m|\underline{v}|^2$) constant is en dat de baan van P een parabool is.

13. Een kromme in R_3 is gegeven door de vergelijkingen:

$$\begin{cases} xy + xz = 2 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Bewijs dat deze kromme in het punt (1,1,1) raakt aan het oppervlak met vergelijking $xyz - x^2 - 6y = -6$.

14. Bewijs dat elke vector $\underline{v}$ in R_3 met lengte 1 geschreven kan worden in de vorm $\underline{v} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$.
Wat is de meetkundige betekenis van α_1, α_2, α_3?
Zij $f(\underline{x})$ een vectorfunctie van R_3 in R_1 die in het punt $\underline{x}_0 = (x_0,y_0,z_0)$ differentieerbaar is.
Bewijs dat de richtingsafgeleide van f in het punt $\underline{x}_0$ in de richting van $\underline{v}$ is:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\underline{x}=\underline{x}_0} \cos\alpha_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\underline{x}=\underline{x}_0} \cos\alpha_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\underline{x}=\underline{x}_0} \cos\alpha_3 .$$

15. Onderzoek of de vectorfuncties a) t/m d) uit vraagstuk 3 in het punt $\underline{x} = \underline{0}$ een richtingsafgeleide in een willekeurige richting $\underline{v}$ hebben en zo ja bereken deze.

16. Bereken de richtingsafgeleiden van de volgende functies in het punt $\underline{a}$ in de richting van $\underline{v}$:

a) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$; $\underline{a} = (1,2,3)$; $\underline{v} = (1,-1,1)$

b) $f(x,y,z) = x^3y + y^3z + z^3x$; $\underline{a} = (1,1,1)$; $\underline{v} = (1,2,3)$.

In welke richtingen zijn de richtingsafgeleiden maximaal?

17. Bepaal een parametervoorstelling voor de kromme, door het punt (1,1,1), die in elk van zijn punten loodrecht staat op het door dat punt gaande niveauvlak van de functie $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.
Schets de kromme.

18. Ontwikkel met behulp van de formule van Taylor de volgende functies naar machten van $(x - 1)$ en $(y - 2)$:

a) $f(x,y) = x^3 + xy^2 + y^3$

b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$.

19. Ontwikkel tot termen van de derde graad in $(x - 1)$ en $(y - 1)$:

$$\frac{1}{1 + x - y}.$$

20. Bereken de extrema van de volgende functies:

a) $f(x,y) = -x - y$ voor $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$

b) $f(x,y) = 2x^2 + 2x + y^2$ voor $x^2 + y^2 \leq 1$.

c) $f(x,y) = 5x^4 - 4x^5 + 5y^4$

d) $f(x,y) = (y^2 + x^4)^2(9 - 8x)$

e) $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$

f) $f(x,y) = (x - 1)^4 + (x - y)^4$

g) $f(x,y) = 2x^4 - x^2 - 2y^2 + y^4$

21. Bereken de extrema van de volgende functies onder de gegeven bijvoorwaarden:

a) $f(x,y) = x^3y + xy^3 - 2xy - x^2 - y^2 + 2;\ x^2 + y^2 = 1$

b) $f(x,y) = xy$; $x^2 + y^2 = 1$

c) $f(x,y,z) = xy + yz$; $x^2 + y^2 = 2,\ yz = 2$

d) $f(x,y,z) = |x+y+z|$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

e) $f(x,y,z) = (xyz)^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

f) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$; $x + y + z = 1$

22. Bepaal de extrema, hun aard en hun waarde, van de volgende functies op de gegeven verzamelingen:

a) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin (x+y); \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; x + y \leq \frac{\pi}{2}$

b) $f(x,y) = x(x^2 + y^2 - 2x) \qquad ; \; x^2 + y^2 \leq 4$

c) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - x^2y \qquad ; \; x^2 + y^2 \leq 1$

d) $f(x,y) = 4(x - 1)^2 - y^2 \qquad ; \; x^2 + y^2 \leq 4$

e) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2} \qquad ; \; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

f) $f(x,y) = x^2y - 2y^3 \qquad ; \; x^2 + y^2 \leq 1$

23. Bepaal het punt op de kromme

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

met de kleinste afstand tot de oorsprong.

24. Bepaal de punten op de ellips

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

met maximale en minimale afstand tot de oorsprong.

25. Bereken de kleinste afstand van het punt $(0,a)$ tot een willekeurig punt op de parabool $4y = x^2$.

26. Laat zien dat de afstand van een vast punt (a,b,c) tot een willekeurig punt in het vlak $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ minimaal is als de verbindingslijn van die punten loodrecht op het vlak staat. Bereken die minimale afstand (de afstand van het punt tot het vlak).

27. Gegeven zijn 5 getallen e_1, e_2, e_3, e_4 en e_5.
Bepaal een kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ zodanig dat
$\{f(-2) - e_1\}^2 + \{f(-1) - e_2\}^2 + \{f(0) - e_3\}^2 + \{f(1) - e_4\}^2 + \{f(2) - e_5\}^2$
minimaal is. (Methode der kleinste kwadraten)

VECTOR-DIFFERENTIAALREKENING

1. Bewijs:

a) $|\underline{a} \times \underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2 |\underline{b}|^2 - ((\underline{a},\underline{b}))^2$

b) $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}|\ |\underline{b}| \sin \varphi$, waarbij φ de hoek tussen $\underline{a}$ en $\underline{b}$ is

c) $\underline{a} \times (\underline{b}+\underline{c}) = \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}$

d) $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{d})\underline{c} - (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})\underline{d}$

e) $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{a} \times \underline{c}) = (\underline{a}, \underline{b} \times \underline{c})\underline{a}$

2. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3) \neq (0,0,0)$ en $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$ en het reële getal α.
Bestaat er een vector $\underline{v} = (v_1,v_2,v_3)$ zodat geldt

$$\underline{a} \times \underline{v} = \underline{b} \quad \text{en} \quad (\underline{a},\underline{v}) = \alpha?$$

3. Gegeven: $\underline{x}(t)$ en $\underline{y}(t)$ zijn differentieerbare vectorfuncties van R_1 in R_3.
Bewijs:

a) $\frac{d}{dt}(\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x}, \frac{d\underline{y}}{dt}) + (\underline{y}, \frac{d\underline{x}}{dt})$

b) $\frac{d}{dt}(\underline{x} \times \underline{y}) = \underline{x} \times \frac{d\underline{y}}{dt} + \frac{d\underline{x}}{dt} \times \underline{y}$.

4. Zij $\underline{x}(t)$ een differentieerbare vectorfunctie van R_1 in R_3 met $|\underline{x}(t)| = c$ (c constant) voor alle t.
Bewijs:

$$(\underline{x}, \frac{d\underline{x}}{dt}) = 0 \text{ voor alle } t.$$

Wat is de meetkundige betekenis van dit resultaat?

5. Een deeltje P roteert om een vaste as $\lambda\underline{a}$ ($\underline{a} \neq \underline{0}$, λ reëel) in R_3. De plaatsvector (= $\overrightarrow{OP}$) van P ten tijde t zij $\underline{x}(t)$. Bewijs dat een vector $\underline{\omega}(t)$ bestaat, zodat

$$\underline{v}(t) \equiv \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\omega}(t) \times \underline{x}(t)$$

(De vector $\underline{\omega}(t)$ heet hoeksnelheidsvector en $\omega(t) = |\underline{\omega}(t)|$ is de hoeksnelheid).

6. Een lichaam voert een starre beweging uit als voor elk tweetal deeltjes P en Q van dat lichaam met bijbehorende positievectoren $\underline{x}_P(t)$ en $\underline{x}_Q(t)$ geldt: $|\underline{x}_P(t) - \underline{x}_Q(t)|$ is constant.
Bewijs dat voor een starre beweging, waarbij ieder punt P van het lichaam roteert om dezelfde as $\lambda\underline{a}$, geldt

$$\underline{v}_P = \underline{\omega}(t) \times \underline{x}_P(t) \text{ met een van P onafhankelijke } \underline{\omega}(t).$$

7. Ten tijde t is de plaatsvector van een bewegend deeltje in R_3:

$$\underline{x} = \underline{a} \cos \omega t + \underline{b} \sin \omega t$$

waarbij $\underline{a}$ en $\underline{b}$ vaste vectoren zijn en ω een constante is.

a) Bereken de snelheidsvector $\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt}$ en bewijs dat $\underline{x} \times \underline{v}$ onafhankelijk van t is.

b) Bewijs dat de versnellingsvector $\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}$ naar de oorsprong is gericht en dat $|\underline{a}|$ evenredig is aan de afstand van het deeltje tot de oorsprong.

8. Ten tijde t is de positievector van een bewegend deeltje in R_3, met massa m en onderworpen aan een kracht $\underline{K}(t)$: $\underline{x}(t)$.
Bewijs dat

$$\frac{d}{dt}(\underline{x} \times m\underline{v}) = \underline{x} \times \underline{K}.$$

9. Bewijs:

$$\text{grad}|\underline{x}|^\alpha = \alpha|\underline{x}|^{\alpha-2}\underline{x} \quad (\alpha \text{ reëel getal}).$$

10. Bereken een potentiaal van de volgende vectorvelden:

a) $\underline{v} = (\sin y - y \sin x + x, \cos x + x \cos y + y)$

b) $\underline{v} = (2xe^y + y, x^2e^y + x - 2y)$

c) $\underline{v} = (x + z, -y - z, x - y)$

d) $\underline{v} = (2xyz^3, x^2z^3 - 2y, 3x^2yz^2)$

e) $\underline{v} = (2xy, x^2 + 2yz, 1 + y^2)$

11. Het vectorproduct $\underline{a} \times \underline{b}$ staat loodrecht op $\underline{a}$ en $\underline{b}$.
Staat rot $\underline{v} = \nabla \times \underline{v}$ loodrecht op $\underline{v}$?

12. Zij φ en ψ één - resp. tweemaal continu differentieerbare $R_3 \to R_1$ functies en $\underline{v} = \varphi$ grad ψ.
Bewijs rot $\underline{v} \perp \underline{v}$.

13. Bereken

$$\mathrm{rot}(r \text{ grad } \tfrac{1}{r}) \text{ en } \mathrm{div}(r \text{ grad } \tfrac{1}{r}) \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0).$$

14. a) Bewijs

$$\mathrm{rot}(|\underline{x}|^{\alpha}\, \underline{x}) = \underline{0}.$$

b) Bereken α uit:

$$\mathrm{div}(|\underline{x}|^{\alpha}\, \underline{x}) = 0 \text{ voor alle } \underline{x} \neq \underline{0}.$$

15. Bewijs:

$$(\underline{a}, \mathrm{rot}\, \varphi\underline{a}) = \varphi(\underline{a}, \mathrm{rot}\, \underline{a}).$$

16. Gegeven: het tweemaal continu differentieerbare vectorveld $\underline{u}$ in R_3 waarvoor geldt div $\underline{u} = 0$ en rot $\underline{u} = \underline{0}$.
Bewijs:

$$\Delta(\underline{u}, \underline{x}) = 0.$$

17. Zij φ en ψ tweemaal continu differentieerbare $R_3 \to R_1$ functies.
Bewijs:

$$\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2\,(\mathrm{grad}\, \varphi, \mathrm{grad}\, \psi).$$

18. Zij F een tweemaal differentieerbare $R_1 \to R_1$ functie. Zij $f(\underline{x}) = F(|\underline{x}|)$ een $R_3 \to R_1$ functie.
Bewijs:

$$\Delta f(\underline{x}) = F''(|\underline{x}|) + \frac{2F'(|\underline{x}|)}{|\underline{x}|} \qquad (\underline{x} \neq \underline{0}).$$

Bereken f als $\Delta f \equiv 0$ is.

VECTOR-INTEGRAALREKENING

1. Bereken $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} ydx + (y^2 - x)dy$ langs de kromme met parametervoorstelling:

   a) $\underline{x}(t) = (t,t)$

   b) $\underline{x}(t) = (t^2,t^3)$

   c) $\underline{x}(t) = (t,t^\alpha)$ $(\alpha > 0)$

   d) $\underline{x}(t) = (t, \sin \frac{\pi t}{2})$.

2. Bereken $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} ydx + xdy$ langs de krommen uit vraagstuk 1.

3. Bereken:

   a) $\displaystyle\int_{(1,0,0)}^{(-1,0,0)} (\underline{u},\underline{t})ds$

   langs de halve cirkel $y = \sqrt{1 - x^2}$, $z = 0$, als $\underline{u} = (0, x^3 - y^3, 0)$.

   b) $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(-1,1,0)} (\underline{u},\underline{t})ds$

   langs de parabool $y = x^2$, $z = 0$, als $\underline{u} = (xy^2, x^2y, 0)$.

4. Bereken langs een rechte die begin- en eindpunt verbindt:

   a) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(2,2)} y^2dx$

   b) $\displaystyle\int_{(2,1)}^{(1,2)} ydx$

   c) $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(2,1)} xdy$

5. Bereken:

a) $\oint_K (x^2 - y^2)ds$ als K de cirkel $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ is in positieve zin doorlopen.

b) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}$ xds langs de rechte $y = x$

c) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}$ ds langs de parabool $y = x^2$.

6. Bereken $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (\underline{u},\underline{t})ds$ langs de kromme gegeven door de vergelijkingen $y = x^2$ en $z = x^3$ als:

a) $\underline{u} = (2xyz^3, -x^2z^3 - 2y, 3x^2yz^2)$

b) $\underline{u} = (2xy, x^2 + 2yz, 1 + y^2)$.

7. Bereken $\int_K (\underline{u},\underline{t})ds$ als K de cirkel $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ is, met $\underline{t} = (-1,0,0)$ in het punt $(0,1,1)$ en $\underline{u}$ als in vraagstuk 6.

8. Gegeven is de kromme met parametervoorstelling

$$\underline{x}(t) = (\cos t, \sin t, t^{3/2}).$$

Bereken de lengte van het stuk tussen de punten corresponderend met $t = 0$ en $t = 4$.

9. Bereken de lengte van één boog van de cycloïde:

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

10. Bereken: $\iint_S xdydz + ydxdy$ als S is:

a) het oppervlak gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 - v^2 \\ z = uv \end{cases}, \quad 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1$$

en de z-component van $\underline{n}$ niet negatief.

b) het deel van het cilindervlak $x^2 + y^2 = 1$ met $0 \le z \le 1$ en de normaal van de z-as afwijzend.

11. Bereken:

$$\iint_S xzdydz + yzdxdz + x^2dxdy$$

S is het oppervlak gegeven door de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos u \end{cases}; \quad \frac{\pi}{2} \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 2\pi;$$

$\underline{n}$ is in (0,0,-1) naar boven gericht.

12. Bereken: $\iint_S (\underline{x},\underline{n})d\sigma$ als S is

a) het oppervlak gegeven door $z = xy + 1$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$; $\underline{n}$ in (0,0,1) naar boven gericht.

b) het oppervlak gegeven door $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$; $\underline{n}$ in (0,0,0) naar beneden gericht.

13. Een oppervlak is gegeven door de parametervoorstelling:

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u \end{cases} \qquad 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi.$$

Wat stelt dit oppervlak meetkundig voor?

Bereken de oppervlakte.

14. Gegeven: de paraboloïde $z = x^2 + y^2$ en de cilinder $4x^2 + 4y^2 = 1$.
Bereken de oppervlakte van het deel van de paraboloïde dat binnen de cilinder ligt.

15. Gegeven: de kromme C, gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x}(t) = (t, t^2, 2t^3)$ en het oppervlak V, gegeven door de vergelijking $z = x^2 + 3y^2 - 2xy$.
Bereken de (scherpe) hoek tussen C en de normaal op V in de snijpunten van C en V.

16. Bereken $\displaystyle\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma$ voor:

a) $\underline{u} = (x,y,z)$; S is het gesloten oppervlak van de kubus begrensd door de vlakken $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ en $z = \pm 1$; $\underline{n}$ wijst naar buiten.

b) $\underline{u} = (xyz^2,\ x^2z^2,\ x^2yz)$; S is het gesloten oppervlak begrensd door $z = x^2 + y^2$ en $z = 1$; $\underline{n}$ naar buiten gericht.

c) $\underline{u} = (xz,\ yz,\ x^2)$; S is het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $\underline{n}$ naar buiten gericht.

d) $\underline{u} = (x,y,0)$; S is de halve bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$; $\underline{n}$ in $(0,0,1)$ naar boven gericht.

e) $\underline{u} = \text{rot } \underline{a}$ met $\underline{a} = (0,\ 0,\ x^2 + xy - z^2)$; S is de halve bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leq 0$; $\underline{n}$ in $(0,0,-1)$ naar beneden gericht.

17. Gegeven: S is een oppervlak begrensd door de gesloten kromme K.
Bewijs:

a) $$\iint_S ((\text{grad } \varphi) \times \underline{u} + \varphi \text{ rot } \underline{u},\ \underline{n})\, d\sigma = \oint_K (\varphi\underline{u},\underline{t})ds$$

als de omloopszin van K en de normaal op S bij elkaar passen

b) $$\oint_K (\varphi \text{ grad } \psi,\ \underline{t})ds = -\oint_K (\psi \text{ grad } \varphi,\ \underline{t})ds.$$

N.B. Een gesloten kromme K in het vlak $z = c$ wordt in positieve zin doorlopen als de omloopszin van K in overeenstemming is met de normaalkeuze $\underline{n} = (0,0,1)$ (zie vraagstukken 18 en 19).

18. Bereken:

a) $\oint_K y^2dx + xydy$ als K is een vierkant in het xy-vlak zò doorlopen dat opvolgende hoekpunten zijn (1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1).

b) $\oint_K ydx - xdy$ als K de cirkel $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ is in positieve zin doorlopen.

c) $\oint_K x^2y^2dx - xy^3dy$ als K de driehoek is met hoekpunten (0,0,0), (1,0,0) en (1,1,0) in positieve zin doorlopen.

d) $\oint_K (2x^3 + y)dx + (x + 3y^2)dy$ als K de gesloten kromme is, gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x} = (t^2 - 1, t^3 - t, 0)$ $(-1 \leq t \leq 1)$.

e) $\oint_K (2x^3 - y^3)dx + (x^3 + y^3)dy$ als K de in positieve zin doorlopen cirkel $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ is.

19. Bereken:

a) $\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds$ als $\underline{u} = (-3y, 3x, 1)$ en K de in positieve zin doorlopen cirkel $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4$ is.

b) $\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$ als S de bol $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$ is; $\underline{n}$ wijst naar buiten.

c) $\oint_K 2xy^2zdx + 2x^2yzdy + (x^2y^2 - 2z)dz$ als K de gesloten kromme is, gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x} = (\cos t, \sin t, \sin t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$

20. Zij R een gebied in R_3. In R zijn de tweemaal continu differentieerbare tijdafhankelijke vectorvelden $\underline{E}(\underline{x},t)$ en $\underline{H}(\underline{x},t)$ gegeven.
Voor elk oppervlak S in R, met gesloten randkromme K, gelden de volgende relaties:

$$\oint_K (\underline{E},\underline{t})ds = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S (\underline{H},\underline{n})d\sigma$$

$$\oint_K (\underline{H},\underline{t})ds = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S (\underline{E},\underline{n})d\sigma,$$

waarbij de omloopszin van K en de normaal op S bij elkaar passen. (t in $\frac{\partial}{\partial t}$ is de tijd en $\underline{t}$ is de eenheidsraakvector aan de kromme). In R geldt dan, aangenomen dat differentiatie en integratie verwisseld mogen worden,

$$\text{rot } \underline{E} = -\frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \quad \text{en} \quad \text{rot } \underline{H} = \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}.$$

Bewijs dit.
(Dit zijn de vergelijkingen van Maxwell voor de elektrische- en magnetische veldsterkte $\underline{E}$ en $\underline{H}$)

21. Als voor de vectorvelden $\underline{E}$ en $\underline{H}$ uit vraagstuk 20 de volgende betrekkingen gelden:

$$\text{rot } \underline{E} = -\frac{\partial \underline{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \underline{H} = \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

$$\text{div } \underline{E} = 0, \quad \text{div } \underline{H} = 0$$

bewijs dan, dat $\underline{E}$ en $\underline{H}$ beide voldoen aan de vector golfvergelijking
$\Delta \underline{v} = \frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial t^2}$.

POTENTIAALTHEORIE

1. Gegeven: het scalaire veld

$$\psi = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}},$$

en het boloppervlak

$$S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 9/4.$$

Bereken:

$$\iint_S \frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\sigma \quad (\underline{n} \text{ wijst naar buiten}).$$

2. Zij $u(x,y,z)$ en $v(x,y,z)$ harmonische functies in een gebied R, met grad $u \neq \underline{0}$ in R en zij $v = f(u)$, waarbij f een tweemaal differentieerbare $R_1 \to R_1$ functie is. Bewijs dat f lineair is.

3. Verifieer de tweede identiteit van Green in het geval: R is het gebied begrensd door de vlakken $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$; $\varphi = x^2y$; $\psi = z^3$.

4. Zij φ harmonisch in een gebied R in R_3. Bewijs dat het veld $\underline{v} = \text{grad}\ \varphi$ zowel divergentievrij als rotatievrij is in R.

5. Bewijs dat het vectorveld $\underline{u} = \underline{c} \times \underline{x}$ ($\underline{c}$ constante vector) divergentievrij is. Bepaal een veld $\underline{v}$ zó dat $\underline{u} = \text{rot}\ \underline{v}$.

6. Gegeven:

a) $\underline{u} = (x + 3y,\ y - 2z,\ x + \alpha z)$

b) $\text{div}\ \underline{u} = 0$

Bereken:

a) α

b) een vectorpotentiaal van $\underline{u}$.

7. Bewijs:

$$\text{rot}\ \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^2} = \underline{0} \qquad (\underline{x} \neq \underline{0}).$$

Bepaal een scalaire functie φ zō, dat $\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^2}$ = grad φ met $\varphi(1,0,0) = 0$.

8. Gegeven:

$$\underline{u} = (\alpha xy - z^3, (\alpha - 2)x^2, (1 - \alpha)xz^2) \text{ en rot } \underline{u} = \underline{0}.$$

Bereken:

a) α

b) φ met $\underline{u}$ = grad φ en $\varphi(\underline{0}) = 0$.

9. Bewijs: rot(φ grad φ) = $\underline{0}$ als φ continue tweede afgeleiden heeft.
Bepaal een potentiaal van φ grad φ.

10. Bewijs: div(grad φ × grad ψ) = 0 als φ en ψ continue tweede afgeleiden hebben.
Bepaal een vectorpotentiaal van grad φ × grad ψ.

11. Bepaal $\varphi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \varphi(r)$ zō, dat div($\varphi\underline{x}$) = 0 en $\varphi(1) = 1$ $(\underline{x} \neq \underline{0})$.
Bereken daarna een vectorpotentiaal $\underline{u}$ van $\varphi\underline{x}$ met $\underline{u}((1,1,1)) = \underline{0}$.

12. Bepaal een vectorveld in R_3 zo dat

$$\begin{cases} \text{rot } \underline{v} = \underline{0} \\ \text{div } \underline{v} = 1. \end{cases}$$

13. Bepaal een vectorveld in R_3 zo dat

$$\begin{cases} \text{rot } \underline{v} = (1,1,1) \\ \text{div } \underline{v} = 0. \end{cases}$$

14. Bepaal een vectorveld in R_3 zo dat

$$\begin{cases} \text{rot } \underline{v} = (z - y, x - z, y - x) \\ \text{div } \underline{v} = 0. \end{cases}$$

15. In R_3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{v} = (xy + z^2, yz + x^2, xz + y^2).$$

Bepaal een functie $\varphi(\underline{x})$ en een veld $\underline{u}(\underline{x})$ zo dat

$$\begin{cases} \underline{v} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \underline{u} \\ \text{div } \underline{u} = 0. \end{cases}$$

COÖRDINATENTRANSFORMATIES

1. Bereken $\iint_G xy\,dxdy$ als G het gebied is begrensd door de parabolen $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y^2 = 2x$ en $y^2 = 3x$.

2. Schets het gebied waarover geïntegreerd wordt in de volgende integraal

$$I = \int_0^1 dx \int_{3x}^{4-x} \frac{x+y}{(3x-y+8)^2}\,dy.$$

Bewijs dat door de substitutie $x = u + v$, $y = 3v - u$ de integraal overgaat in

$$I = \int_0^1 vdv \int_{-v}^{0} \frac{du}{(u+2)^2}\,.$$

Bereken I.

3. Bereken met behulp van de substitutie $u = x - y$, $v = x + 2y$ de integraal

$$\iint_G (x+y)^2 dxdy$$

als G gegeven is door

$$0 \le x-y \le 1 \text{ en } 0 \le x+2y \le 2.$$

4. Bereken:

$$\iint_G e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$$

als G de driehoek met hoekpunten (0,0), (0,1) en (1,0) is.

5. Bereken

$$\iint_G (x - y)^2 \sin^2(x + y)dxdy$$

als G het vierkant met hoekpunten $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$ en $(0,\pi)$ is.

ANTWOORDEN DIFFERENTIAALREKENING VAN FUNCTIES VAN MEER VERANDERLIJKEN

1. a) en b) het hele (u,v)-vlak. De lijn x = c(onstant) heeft als beeld de parabool $4c^2u = 4c^4 - v^2$. De lijn y = c heeft als beeld de parabool $4c^2u = v^2 - 4c^4$.
   c) het halfvlak $v \geq 0$.
   d) tweemaal de cirkel $u^2 + v^2 = 1$.
   Neen, want (x,y) en (-x,-y) hebben hetzelfde beeld.

2. a) de parabolische cilinder met vergelijking $(u + v)^2 = 4w$.
   b) deel van de cilinder met $u + v \geq 0$.
   c) deel van de cilinder met $u \geq v$.
   d) deel van de cilinder in het "kwadrant" $\begin{cases} u \leq -v \\ u \leq v \end{cases}$

   Bij gegeven (u_0,v_0,w_0) met $(u_0 + v_0)^2 = 4w_0$ vinden wij $x_0 = \frac{1}{2}(u_0 + v_0)$ en $y_0 = \frac{1}{2}(u_0 - v_0)$. Maar dan is ook $x_0^2 = \frac{1}{4}(u_0 + v_0)^2 = w_0$.

3. a) Neen, want op de parabool $x = y^2$ $(y \neq 0)$ is $f = \frac{1}{2}$.
   b) Ja, want voor $\underline{x} \neq \underline{0}$ is $\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^4} - 0\right| \leq y^2 < \varepsilon$ voor $|y| < \sqrt{\varepsilon}$.
   c) Ja, want voor $\underline{x} = \delta(\cos\varphi, \sin\varphi)$ $(\delta > 0)$ is $|xy \log(x^2 + y^2) - 0| =$
   $= \delta^2|\sin\varphi \cos\varphi \log \delta^2| = \delta^2|(\sin 2\varphi)\log\delta| \leq \delta^2|\log\delta| \to 0$ $(\delta \to 0)$.
   d) Ja, want voor $\underline{x} = \delta(\cos\varphi, \sin\varphi)$ $(\delta > 0)$ is $\left|y \sin\frac{1}{x^2+y^2} - 0\right| =$
   $= \delta\left|\sin\varphi \sin\frac{1}{\delta^2}\right| \leq \delta < \varepsilon$ voor $\delta = \sqrt{x^2 + y^2} = |\underline{x} - \underline{0}| < \varepsilon$.
   e) Neen, want $\underline{u}((\lambda,0)) = (1,1)$ $(\lambda \neq 0)$.

4. $$\underline{f}(\underline{a}+\underline{h}) = \begin{pmatrix} 1+h + (2+k)^2 \\ (1+h)(2+k) \\ (1+h)^2+2+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h + 4k + k^2 \\ 2h + k + hk \\ 2h + k + h^2 \end{pmatrix} = \underline{f}(\underline{a}) + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} k^2 \\ hk \\ h^2 \end{pmatrix} = \underline{f}(\underline{a}) + A\underline{h} + \frac{\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}\begin{pmatrix} k^2 \\ hk \\ h^2 \end{pmatrix} = \underline{f}(\underline{a}) + A\underline{h} + |\underline{h}|\ \underline{e}(\underline{h}) \text{ met}$$

$$\underline{e}(\underline{h}) = \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\begin{pmatrix} k^2 \\ hk \\ h^2 \end{pmatrix}. \text{ Dus } \lim_{|\underline{h}|\to 0} |\underline{e}(\underline{h})| = \lim_{|\underline{h}|\to 0} \frac{\sqrt{k^4+h^2k^2+h^4}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

want

$$0 \le \frac{\sqrt{h^4+h^2k^2+k^4}}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{\sqrt{h^4+2h^2k^2+k^4}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2} = |\underline{h}| \to 0.$$

5. a) Neen, want niet continu in $\underline{x} = \underline{0}$.

   b) Ja, want $\dfrac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$ voor $\sqrt{h^2+k^2} \to 0$ $((h,k) \neq (0,0))$.

   c) Ja

   d) Neen, want $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ bestaat niet in $\underline{x} = \underline{0}$.

   e) Neen, want niet continu in $\underline{x} = \underline{0}$.

6. a) $(4 \quad -9)$

   b) $(-1 \quad -1 \quad -4)$

   c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} -18 & 25 & -12 \\ 12 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

7. $(1 - r^2)^{-\frac{5}{2}}$

8. $\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y = \dfrac{v}{u^2+v^2} \end{cases}$

9. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1)$ en $(4, -\frac{8}{3}, -2)$.

11. a) Schroeflijn op de cilinder $x^2 + y^2 = 1$.

    b) $\underline{v} = (-\sin t, \cos t, 1)$; $(0,1,1)$ en $(-1,0,1)$.

    c) $\underline{a} = (-\cos t, -\sin t, 0)$; $(-1,0,0)$ en $(0,-1,0)$.

12. $\underline{x}(t) = (t, t, t - \frac{1}{2} gt^2)$
    $\underline{v}(t) = (1, 1, 1 - gt)$
    $mgz + \frac{1}{2}m|\underline{v}|^2 = mgt - \frac{1}{2}mg^2t^2 + \frac{1}{2} m \{2 + (1 - gt)^2\} = \frac{3m}{2}$
    Baan: $x=t$, $y=t$, $z=t - \frac{1}{2}gt^2$: doorsnede van vlak $x=y$ en de parabolische cilinder $z = x - \frac{1}{2}gx^2$.

13. De raaklijn aan de kromme: $\underline{x} = (1,1,1) + \lambda(2,-1,-3)$ ligt in het raakvlak aan het oppervlak: $x + 5y - z = 5$ öf: $(\text{grad } f)_{(1,1,1)} = (-1,-5,1) \perp (2,-1,-3)$, waarbij $f(x,y,z) = xyz - x^2 - 6y$ is.

14. α_1 is de hoek tussen $\underline{v}$ en de x-as, enz.

$$f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\underline{x}=\underline{x}_0} \begin{pmatrix} t\cos\alpha_1 \\ t\cos\alpha_2 \\ t\cos\alpha_3 \end{pmatrix} + |t\underline{v}|\; e(t\underline{v}) \text{ met}$$

$\lim\limits_{t\to 0} |e(t\underline{v})| = 0$ op grond van de differentieerbaarheid van f.

$$\text{Dus } \lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\underline{x}=\underline{x}_0} \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \\ \cos\alpha_3 \end{pmatrix}.$$

15. a) In alle richtingen $\underline{v} = (v_1,v_2)$ een richtingsafgeleide, nml.

$\frac{v_2^2}{v_1}$ $(v_1 \neq 0)$ en $0(v_1 = 0)$.

b) en c) In alle richtingen een richtingsafgeleide gelijk aan nul.

d) Alleen in de richtingen van $\underline{v} = \pm\ (1,0)$: $\pm\ (\frac{\partial f}{\partial x})_{\underline{x}=\underline{0}} = 0$.

16. a) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ b) $\frac{12}{7}\sqrt{14}$

a) $\underline{v} = (5,4,3)$ b) $\underline{v} = (1,1,1)$.

17. $\underline{x}(t) = (t,\ t^2,\ t^3)$, $-\infty < t < \infty$.
Doorsnijding van de cilinders met vergelijkingen $y = x^2$ en $z = x^3$.

18. a) $f(x,y) = 13 + 7(x-1) + 16(y-2) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2) +$
$+ 7(y-2)^2 + (x-1)^3 + (x-1)(y-2)^2 + (y-2)^3$.

b) $f(x,y) = 7 + 4(x-1) + 5(y-2) + (x-1)^2 + (x-1)(y-2) + (y-2)^2$

19. $\frac{1}{1 + x - y} = 1 - (x-1) + (y-1) + (x-1)^2 - 2(x-1)(y-1) + (y-1)^2 + \ldots$

20. a) globaal maximum 0 in (0,0)

   globaal minimum -2 in (1,1)

 b) globaal maximum 4 in (1,0)

   globaal minimum $-\frac{1}{2}$ in $(-\frac{1}{2},0)$

 c) locaal minimum 0 in (0,0)

 d) locaal minimum 0 in (0,0)

 e) geen extrema

 f) globaal minimum 0 in (1,1)

 g) locaal maximum 0 in (0,0)

   globale minima $-\frac{9}{8}$ in $\pm(\frac{1}{2},1)$ en $\pm(\frac{1}{2},-1)$

21. a) globale maxima $\frac{3}{2}$ in $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1,-1)$

   globale minima $\frac{1}{2}$ in $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1,1)$

 b) globale maxima $\frac{1}{2}$ in $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1,1)$

   globale minima $-\frac{1}{2}$ in $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1,-1)$

 c) globale maxima 3 in $\pm(1,1,2)$

   globale minima 1 in $\pm(1,-1,-2)$

 d) globale maxima $\sqrt{3}$ in $\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}\,(1,1,1)$

   globale minima 0 op de cirkel $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$

 e) globale maxima 1 in $\pm(1,1,1)$, $\pm(1,1,-1)$, $\pm(1,-1,1)$ en $\pm(-1,1,1)$

   globale minima 0 op de cirkels $\begin{cases} y^2+z^2=3 \\ x = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x^2+z^2=3 \\ y = 0 \end{cases}$ en $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z = 0 \end{cases}$

 f) locaal minimum $\frac{1}{9}$ in $\frac{1}{3}\,(1,1,1)$

22. a) globaal minimum 0 in (0,0)

   globaal maximum $1+\sqrt{2}$ in $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

 b) locaal minimum $-\frac{32}{27}$ in $(\frac{4}{3}, 0)$

   globale maxima 2 in $(1, \pm\sqrt{3})$

   globaal minimum -16 in (-2,0)

c) locale maxima 0 in $(0,y)$ met $0 < y \le 1$

locale minima 0 in $(0,y)$ met $-1 \le y < 0$

locaal minimum $-\frac{1}{6}\sqrt{2}$ in $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$

locaal maximum $\frac{1}{6}\sqrt{2}$ in $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$

globaal minimum $-\frac{4}{15}\sqrt{5}$ in $(-\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5})$

globaal maximum $\frac{4}{15}\sqrt{5}$ in $(\frac{2}{5}\sqrt{5}, -\frac{1}{5}\sqrt{5})$

d) locaal maximum 4 in $(2,0)$

globaal maximum 36 in $(-2,0)$

globale minima $-\frac{16}{5}$ in $(\frac{4}{5}, \pm\frac{1}{5}\sqrt{84})$

e) globaal maximum $\sqrt{2}$ in $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$

globaal minimum $-\sqrt{2}$ in $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$

f) locale minima $-\frac{2}{9}$ in $(\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}, -\frac{1}{3})$

locale maxima $\frac{2}{9}$ in $(\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}, \frac{1}{3})$

globaal minimum -2 in $(0,1)$

globaal maximum 2 in $(0,-1)$

23. Er zijn 4 punten met minimale afstand tot de oorsprong: $\pm(1,0,0)$ en $\pm(0,1,0)$

24. maximale afstand 1 in $(1,0,0)$

minimale afstand $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ in $\frac{1}{3}(1,2,0)$

25. $|a|$ als $a \le 2$

$2\sqrt{a-1}$ als $a > 2$

26. $\dfrac{|\alpha a + \beta b + \gamma c - \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$

27. $a = \frac{1}{14}(2e_1 - e_2 - 2e_3 - e_4 + 2e_5)$

$b = \frac{1}{10}(-2e_1 - e_2 + e_4 + 2e_5)$

$c = \frac{1}{35}(-3e_1 + 12e_2 + 17e_3 + 12e_4 - 3e_5)$.

ANTWOORDEN VECTOR-DIFFERENTIAALREKENING

2. De onbekenden v_1, v_2 en v_3 moeten voldoen aan de volgende vergelijkingen:

$$\begin{cases} \quad\quad - a_3v_2 + a_2v_3 - b_1 = 0 \\ a_3v_1 \quad\quad - a_1v_3 - b_2 = 0 \\ -a_2v_1 + a_1v_2 \quad\quad - b_3 = 0 \\ a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 - \alpha = 0 \end{cases}$$

Dit stelsel is alleen oplosbaar als de volgende determinant gelijk is aan nul:

$$\begin{vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 & -b_1 \\ a_3 & 0 & -a_1 & -b_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 & -b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & -\alpha \end{vmatrix} = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3) = |\underline{a}|^2(\underline{a},\underline{b}).$$

Nu is $|\underline{a}|^2 \neq 0$, dus voor $(\underline{a},\underline{b}) = 0$ is het stelsel oplosbaar.
We kunnen $\underline{v}$ ook expliciet uitdrukken in $\underline{a}$, $\underline{b}$ en α; nml. uit $\underline{a} \times \underline{v} = \underline{b}$ en $(\underline{a},\underline{v}) = \alpha$ volgt

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{a} \times (\underline{a} \times \underline{v}) = (\underline{a},\underline{v})\underline{a} - (\underline{a},\underline{a})\underline{v} = \alpha\underline{a} - |\underline{a}|^2\underline{v}$$

Dus

$$\underline{v} = |\underline{a}|^{-2}(\alpha\underline{a} - \underline{a} \times \underline{b}).$$

4. Differentieer $(\underline{x},\underline{x}) = c^2$.
De raakvector aan een kromme op een bol staat loodrecht op de bijbehorende voerstraal.

5. De lengte van $\underline{x}(t)$ is constant. Dus (vraagstuk 4) $(\underline{x}, \frac{d\underline{x}}{dt}) = (\underline{x},\underline{v}) = 0$. De hoek tussen $\underline{a}$ en $\underline{x}$ is ook constant, dus $(\underline{a},\underline{x})$ constant. Differentiatie geeft $(\underline{a},\underline{v}) = 0$. Uit $\underline{v} \perp \underline{x}$ en $\underline{v} \perp \underline{a}$ volgt $\underline{v} = \mu\underline{a} \times \underline{x}$ op elk tijdstip t (μ is een getal). Dus $\underline{v}(t) = \mu(t)\, \underline{a} \times \underline{x}(t)$. Stel $\mu(t)\, \underline{a} = \underline{\omega}(t)$.

6. De lengte van $(\underline{x}_P(t) - \underline{x}_Q(t))$ is constant. Dus $(\underline{x}_P - \underline{x}_Q, \underline{v}_P - \underline{v}_Q) = 0$.
Stel $\underline{v}_P = \mu_1(t)\, \underline{a} \times \underline{x}_P$ en $\underline{v}_Q = \mu_2(t)\, \underline{a} \times \underline{x}_Q$ met $\underline{a},\underline{x}_P$ en $\underline{x}_Q$ niet in één vlak.
Dan is $0 = (\underline{x}_P - \underline{x}_Q, \underline{v}_P - \underline{v}_Q) = -(\underline{x}_P,\underline{v}_Q) - (\underline{x}_Q,\underline{v}_P)$ want $(\underline{x}_P,\underline{v}_P) = (\underline{x}_Q,\underline{v}_Q) = 0$.

Dus $0 = -(\underline{x}_P, \mu_2\underline{a} \times \underline{x}_Q) - (\underline{x}_Q, \mu_1\underline{a} \times \underline{x}_P) = -\mu_2(\underline{x}_Q, \underline{x}_P \times \underline{a}) + \mu_1(\underline{x}_Q, \underline{x}_P \times \underline{a}) =$
$= (\mu_1 - \mu_2)(\underline{x}_Q, \underline{x}_P \times \underline{a})$.
Uit $(\underline{x}_Q, \underline{x}_P \times \underline{a}) \neq 0$ volgt $\mu_1 = \mu_2$.

7. a) $\underline{v} = -\omega\underline{a} \sin \omega t + \omega\underline{b} \cos \omega t$.

$$\underline{x} \times \underline{v} = \omega(\underline{a} \cos \omega t + \underline{b} \sin \omega t) \times (-\underline{a} \sin \omega t + \underline{b} \cos \omega t) =$$
$$= -\omega(\underline{a} \cos \omega t + \underline{b} \sin \omega t) \times \underline{a} \sin \omega t +$$
$$+ \omega(\underline{a} \cos \omega t + \underline{b} \sin \omega t) \times \underline{b} \cos \omega t =$$
$$= -\omega \sin^2 \omega t \ (\underline{b} \times \underline{a}) + \omega \cos^2 \omega t \ (\underline{a} \times \underline{b}) \text{ want } \underline{a} \times \underline{a} = \underline{b} \times \underline{b} = \underline{0}.$$

Dus $\underline{x} \times \underline{v} = \omega(\underline{a} \times \underline{b})$ is constant.

b) $\underline{a} = -\omega^2\underline{a} \cos \omega t - \omega^2\underline{b} \sin \omega t = -\omega^2\underline{x}$; $|\underline{a}| = \omega^2|\underline{x}|$.

8. De bewegingsvergelijking luidt $\underline{K} = m\underline{a} = m \dfrac{d\underline{v}}{dt}$.

$$\frac{d}{dt}(\underline{x} \times m\underline{v}) = m\frac{d\underline{x}}{dt} \times \underline{v} + m\underline{x} \times \frac{d\underline{v}}{dt} = m\underline{v} \times \underline{v} + \underline{x} \times \underline{K} = \underline{x} \times \underline{K}$$

10. a) $\varphi = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x \sin y + y \cos x$.

b) $\varphi = x^2e^y + xy - y^2$.

c) $\varphi = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xz - yz$.

d) $\varphi = x^2yz^3 - y^2$.

e) $\varphi = x^2y + y^2z + z$.

11. Neen, bijvoorbeeld voor $\underline{v} = (z,x,y)$ is rot $\underline{v} = (1,1,1)$. In het punt $(1,0,0)$ is $(\underline{v}, \text{rot } \underline{v}) = (0 \ \ 1 \ \ 0)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1$.

12. rot $\varphi\underline{a} = \varphi$ rot $\underline{a}$ + (grad φ) $\times$ $\underline{a}$, dus rot $\underline{v} = \varphi$ rot grad ψ +
+ (grad φ) $\times$ (grad ψ) = $\underline{0}$ + (grad φ) $\times$ (grad ψ).
$(\underline{v}, \text{rot } \underline{v}) = \varphi(\text{grad } \psi, (\text{grad } \varphi) \times (\text{grad } \psi)) = 0$.

13. $$\text{rot}(r \text{ grad } \tfrac{1}{r}) = r \text{ rot grad } \frac{1}{r} + (\text{grad } r) \times (\text{grad } \frac{1}{r}) =$$
$$= \underline{0} + \frac{1}{r}\underline{x} \times -\frac{1}{r^3}\underline{x} = -\frac{1}{r^4}\underline{x} \times \underline{x} = \underline{0}.$$

$$\operatorname{div}(r \operatorname{grad} \frac{1}{r}) = r \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{r} + (\operatorname{grad} r, \operatorname{grad} \frac{1}{r}) =$$
$$= \Delta \frac{1}{r} + (\frac{\underline{x}}{r}, -\frac{\underline{x}}{r^3}) = 0 - \frac{1}{r^4}(\underline{x},\underline{x}) = -\frac{1}{r^2}.$$

14. a) $\operatorname{rot}(|\underline{x}|^\alpha \underline{x}) = |\underline{x}|^\alpha \operatorname{rot} \underline{x} + (\operatorname{grad}|\underline{x}|^\alpha) \times \underline{x} =$
$$= \underline{0} + \alpha|\underline{x}|^{\alpha-2}\underline{x} \times \underline{x} = \underline{0}.$$

b) $0 = \operatorname{div}(|\underline{x}|^\alpha \underline{x}) = |\underline{x}|^\alpha \operatorname{div} \underline{x} + (\operatorname{grad}|\underline{x}|^\alpha, \underline{x}) =$
$$= 3|\underline{x}|^\alpha + \alpha|\underline{x}|^{\alpha-2}(\underline{x},\underline{x}) = (3+\alpha)|\underline{x}|^\alpha \Rightarrow \alpha = -3$$

15. $(\underline{a}, \operatorname{rot} \varphi\underline{a}) = (\underline{a}, \varphi \operatorname{rot} \underline{a} + (\operatorname{grad} \varphi) \times \underline{a}) = (\underline{a}, \varphi \operatorname{rot} \underline{a}) +$
$$+ (\underline{a}, (\operatorname{grad} \varphi) \times \underline{a}) = \varphi(\underline{a}, \operatorname{rot} \underline{a}) + 0 = \varphi(\underline{a}, \operatorname{rot} \underline{a}).$$

16. $\Delta(\underline{u},\underline{x}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} (u_1x + u_2y + u_3z) =$
$$= \operatorname{div}(u_1 + x\frac{\partial u_1}{\partial x} + y\frac{\partial u_2}{\partial x} + z\frac{\partial u_3}{\partial x}, u_2 + x\frac{\partial u_1}{\partial y} + y\frac{\partial u_2}{\partial y} + z\frac{\partial u_3}{\partial y},$$
$$u_3 + x\frac{\partial u_1}{\partial z} + y\frac{\partial u_2}{\partial z} + z\frac{\partial u_3}{\partial z}) =$$
$$= \ldots = 2 \operatorname{div} \underline{u} + (\underline{x}, \Delta\underline{u}) = (\underline{x}, \Delta\underline{u}).$$

Maar $\Delta\underline{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{u} - \operatorname{rotrot} \underline{u} = \underline{0}$.

18. $f(\underline{x}) = C_1|\underline{x}|^{-1} + C_2$ met C_1, C_2 constant.

ANTWOORDEN VECTOR-INTEGRAALREKENING

1. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{15}$ c) $\frac{2(2-\alpha)}{3(1+\alpha)}$ d) $\frac{4}{\pi} - \frac{2}{3}$.

2. 1; want $\underline{u} = (y,x) = \text{grad}(xy)$.

3. a) $\frac{3\pi}{8}$ b) $\frac{1}{2}$

4. a) $\frac{8}{3}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) 0

5. a) 0 b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})$.

6. a) $-\frac{4}{13}$ b) 3; $\underline{u} = \text{grad}(x^2y + y^2z + z)$.

7. a) 0 b) 0

8. $\frac{8}{27}\{10\sqrt{10} - 1\}$.

9. 8.

10. a) $-\frac{5}{3}$ b) π

11. $\frac{3\pi}{4}$.

12. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{\pi}{2}$.

13. Een stuk van de omwentelingskegel $z^2 = x^2 + y^2$; $\pi\sqrt{2}$.

14. $\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2} - 1)$.

15. Er zijn drie snijpunten: (0,0,0), (1,1,2) en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{27})$.
De hoeken: $\frac{\pi}{2}$, arccos $\frac{2}{\sqrt{697}}$, arccos $\frac{6}{\sqrt{1649}}$.

16. a) 24 b) 0 c) 0 d) $\frac{4\pi}{3}$ e) 0.

18. a) 0 b) -2π c) $-\frac{1}{4}$ d) 0 e) $\frac{3\pi}{2}$.

19. a) 6π b) 4π c) 0.

20. Uit de stelling van Stokes volgt: $\iint_S (\text{rot } \underline{E} + \frac{\partial \underline{H}}{\partial t}, \underline{n})d\sigma = 0$. Wij bewijzen: als $\underline{u}$ continu is in een gebied R en $\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma = 0$ voor alle oppervlakken S in R, dan is $\underline{u} \equiv \underline{0}$ in R.

Uit ongerijmde. Stel $\underline{u}_0 = \underline{u}(\underline{x}_0) \neq \underline{0}$ ($\underline{x}_0$ in R). Dan is er een vlak cirkeltje S met middelpunt $\underline{x}_0$, gelegen in het vlak $(\underline{x} - \underline{x}_0, \underline{u}_0) = 0$ met $(\underline{u},\underline{n}) = \frac{1}{|\underline{u}_0|}(\underline{u},\underline{u}_0) \approx \frac{1}{|\underline{u}_0|}(\underline{u}_0,\underline{u}_0) = |\underline{u}_0| > 0$ voor alle $\underline{x}$ in S. Maar dan $\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma > 0$. Tegenspraak.

Dus $\text{rot } \underline{E} + \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} = \underline{0}$. Analoog $\text{rot } \underline{H} = \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$.

21. $\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \underline{H} = \text{rot } \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} = -\text{rotrot } \underline{E} = -\text{grad div } \underline{E} + \Delta\underline{E} = \Delta\underline{E}$. Analoog voor $\underline{H}$.

ANTWOORDEN POTENTIAALTHEORIE

1. $\Delta\frac{1}{r_1} = 0$ ($\underline{x} \neq (0,0,1)$) en $\Delta\frac{1}{r_2} = 0$ ($\underline{x} \neq (0,0,2)$).

$$\iint\limits_S \frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\sigma = \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)d\sigma + \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_2}\right)d\sigma$$

$\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_2}\right)d\sigma = 0$ want $\frac{1}{r_2}$ is harmonisch binnen de bol.

In de derde identiteit van Green:

$$\varphi(\underline{p}) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_R \frac{\Delta\varphi}{r}\, d\tau + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)d\sigma$$

nemen we

$$\underline{p} = (0,0,1),\ \varphi \equiv 1,\ r = r_1.$$

Dan komt er

$$1 = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)d\sigma\ .$$

Dus $\iint\limits_S \frac{\partial\psi}{\partial n}\, d\sigma = -4\pi$.

We kunnen $\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)d\sigma$ ook nog anders berekenen:

We weten dat div grad $\frac{1}{r_1} = 0$ ($\underline{x} \neq (0,0,1)$).

Pas de stelling van Gauss toe op het gebied R begrensd door de bollen S: $x^2 + y^2 + z^2 = 9/4$ en T: $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \alpha^2$ ($0 < \alpha < \frac{1}{2}$):

$$\iint\limits_S \left(\text{grad}\,\frac{1}{r_1}\ ,\ \underline{n}\right)d\sigma - \iint\limits_T \left(\text{grad}\,\frac{1}{r_1}\ ,\ \underline{n}\right)d\sigma = \iiint\limits_R \text{div grad}\,\frac{1}{r_1}\, d\tau = 0.$$

(hierin wijst $\underline{n}$ zowel bij S als bij T naar buiten).

Dus

$$\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)d\sigma = \iint\limits_T \left(\text{grad}\,\frac{1}{r_1}\ ,\ \underline{n}\right)d\sigma\ .$$

Nu is $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}$, dus grad $\frac{1}{r_1} = -\frac{1}{r_1^3}(x,y,z-1)$. Op T is dus

grad $\frac{1}{r_1} = -\frac{1}{\alpha^3}(x,y,z-1)$.

Bovendien is op T: $\underline{n} = \frac{1}{\alpha}(x,y,z-1)$, dus

$$(\text{grad}\,\frac{1}{r_1}, \underline{n}) = -\frac{1}{\alpha^2} \Rightarrow \iint_T (\text{grad}\,\frac{1}{r_1}, \underline{n})d\sigma = -\frac{1}{\alpha^2} * \text{oppervlakte bol } T = -4\pi.$$

2. $v = f(u)$ met $u = u(x,y,z)$ geeft grad $v = f'(u)$ grad u.
   Dan $0 = \Delta v = \text{div grad } v = \text{div}(f'(u) \text{ grad } u) =$
   $= f'(u) \text{ div grad } u + (\text{grad } f'(u), \text{grad } u) = f'(u)\Delta u +$
   $+ f''(u) (\text{grad } u, \text{grad } u) = 0 + f''(u)\, |\text{grad } u|^2$. Dus $f''(u) = 0$.

5. $\text{div}(\underline{c} \times \underline{x}) = (\underline{x}, \text{rot } \underline{c}) - (\underline{c}, \text{rot } \underline{x}) = (\underline{x},\underline{0}) - (\underline{c},\underline{0}) = 0$.
   Als $\underline{c} = (c_1,c_2,c_3)$ dan voldoet bijvoorbeeld
   $\underline{v} = (-\frac{1}{2}c_1y^2 - \frac{1}{2}c_1z^2 + c_2xy + c_3xz, -\frac{1}{2}c_2z^2 + c_3yz, 0)$.

6. a) div $\underline{u} = 1 + 1 + \alpha = 2 + \alpha = 0$ als $\alpha = -2$.
   b) $(-xy + yz - z^2, -xz - 3yz, 0)$.

7. $\text{rot } \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^2} = \frac{1}{|\underline{x}|^2} \text{rot } \underline{x} + (\text{grad } \frac{1}{|\underline{x}|^2}) \times \underline{x} = \underline{0} - \frac{2}{|\underline{x}|^4}\, \underline{x} \times \underline{x} = \underline{0}$.
   $\varphi = \log|\underline{x}|$.

8. a) $\alpha = 4$
   b) $\varphi = 2x^2y - xz^3$

9. $\text{rot}(\varphi \text{ grad } \varphi) = \varphi \text{ rot grad } \varphi + \text{grad } \varphi \times \text{grad } \varphi = \underline{0}$.
   $\frac{1}{2}\varphi^2$.

10. $\text{div}(\text{grad } \varphi \times \text{grad } \psi) = (\text{grad } \psi, \text{rot grad } \varphi) - (\text{grad } \varphi, \text{rot grad } \psi) = 0$.
    φ grad ψ.

11. $\text{div}(\varphi\underline{x}) = \varphi \text{ div } \underline{x} + (\text{grad } \varphi, \underline{x}) = 3\varphi + \varphi'(r)(\frac{1}{r}\underline{x}, \underline{x}) =$
    $= 3\varphi + r\varphi'(r) = 0 \Rightarrow \varphi = Cr^{-3}$, maar $\varphi(1) = 1$, dus $\varphi = \frac{1}{r^3}$.
    Bijv.: $\underline{u} = (u_1,u_2,u_3)$ met

$$u_1 = \frac{yz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+1}} - \frac{y}{(x^2+1)\sqrt{x^2+y^2+1}} + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$$

$$u_2 = -\frac{xz}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

$$u_3 = 0.$$

12. Bijv. $\underline{v} = (x + yz + z,\ xz + z,\ x + xy + y + 1)$

    of $\underline{v} = \frac{1}{3}\underline{x}$.

13. Bijv. $\underline{v} = \frac{1}{2}(1,1,1) \times (x,y,z) = \frac{1}{2}(z-y,\ x-z,\ y-x)$.

14. Bijv. $\underline{v} = (xy + xz - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2,\ -\frac{1}{2}y^2 + yz - \frac{1}{2}z^2,\ -z^2)$.

15. Bijv. $\varphi = \frac{1}{6}(x^3 + y^3 + z^3)$ en

    $\underline{u} = (\frac{1}{2}x^2z - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}yz^2 - \frac{1}{2}y^2z,\ \frac{1}{2}x^2z - xyz - \frac{1}{3}z^3,\ -\frac{1}{6}x^3)$.

ANTWOORDEN COÖRDINATENTRANSFORMATIES

1. $\frac{5}{16}$.

2. Driehoek begrensd door de rechten $x = 0$, $y = 3x$ en $y = 4 - x$.

   $2 \log 2 - \frac{5}{4}$.

3. $\frac{46}{81}$.

4. $\frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)$.

5. $\frac{1}{3}\pi^4$.

TENTAMENOPGAVEN EN HERKANSINGEN MET ANTWOORDEN EN OPLOSSINGEN

TENTAMENOPGAVEN

13 juni 1966

1. a) Schets enige niveaulijnen van de functie f gedefinieerd door:

$$f(x,y) = x^2 + y.$$

b) We beschouwen f nu alleen op de cirkel met middelpunt (0,1) en straal 1. Bepaal de extrema van f op deze cirkel.

2. Voor de punten van R_3 die niet op de z-as liggen is een functie f gedefinieerd door:

$$f(x,y,z) = \log(x^2 + y^2).$$

C is het gedeelte van het cylindervlak met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ dat gelegen is tussen de vlakken V_1 en V_2 met vergelijkingen $z = 1$ resp. $z = -1$.

B is het gedeelte van de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ dat gelegen is tussen de vlakken V_1 en V_2.

De normalen op C en B wijzen van de z-as af.

a) Bereken

$$\iint_C \frac{\partial f}{\partial n}\, d\sigma.$$

b) Bewijs dat

$$\iint_B \frac{\partial f}{\partial n}\, d\sigma = \iint_C \frac{\partial f}{\partial n}\, d\sigma.$$

Antwoorden:

1. b) globale maxima $\frac{9}{4}$ in $(\pm \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2})$
globaal minimum 0 in (0,0)
locaal minimum 2 in (0,2).

2. a) 8π .

16 januari 1967

1. Op de verzameling G gevormd door de punten (x,y) die voldoen aan

$$0 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq y \leq x$$

is een functie gedefinieerd door $f(x,y) = x^2 + y^2 - y$.
Bepaal de extrema van f op G.

2. In R_3 is de vectorfunctie $\underline{u}$ gedefinieerd door

$$\underline{u}(x,y,z) = (y,-x,y-x).$$

K is de doorsnijdingskromme van het vlak met vergelijking $x + y + z = 0$, en de cylinder met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$; $\underline{t}$ is een continu verlopende eenheidsraakvector aan K.

Bereken: a) rot $\underline{u}$

b) $\int_K (\underline{u},\underline{t})ds.$

Antwoorden:

1. globale maxima 1 in (1,0) en (1,1)
   globaal minimum $-\frac{1}{8}$ in $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

2. a) (1,1,-2)
   b) 0.

5 juni 1967

1. Onderzoek in welke punten van het gebied aangewezen door $x^2 + y^2 \leq 1$ de functie $4x^3 + 4xy^2 + x^2$ extrema heeft.
   Van welke aard is elk van deze extrema?

2. Van het vectorveld $\underline{u}(\underline{x})$ in R_3 is gegeven, dat in elk punt $\underline{x}$ geldt: rot $\underline{u} = \underline{0}$ en $(\underline{u},\underline{x}) = 0$; $\underline{p}$ is een punt van een door de oorsprong gaande kromme k.

   a) Formuleer de stelling volgens welke het veld $\underline{u}(\underline{x})$ conservatief is.
   b) Bereken de lijnintegraal van $\underline{0}$ naar $\underline{p}$ van $\underline{u}$ langs k.
   c) Bewijs dat $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{0}$ voor elke $\underline{x}$.

Antwoorden:

1. globaal maximum 5 in (1,0)
   globaal minimum -3 in (-1,0)
   locaal maximum $\frac{1}{108}$ in $(-\frac{1}{6}, 0)$.

15 januari 1968

1. Gegeven het vectorveld $\underline{a} = (\frac{x}{r^3} - y, \frac{y}{r^3} + x, \frac{z}{r^3} + z)$ waarin

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

en de oppervlakken $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$S_2: x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4.$$

Bereken de beide integralen $\iint_{S_1} (\underline{a},\underline{n})d\sigma$ en $\iint_{S_2} (\underline{a},\underline{n})d\sigma$, waarbij $\underline{n}$ de naar buiten wijzende normaalvector is.

2. Bepaal de extrema en hun aard, die $f(x,y) = x^2(1 - y^2)$ aanneemt op de verzameling $x^2 - 1 \leq y$.

Antwoorden:

1. $\frac{16\pi}{3}$; $\frac{44\pi}{3}$.

2. globale maxima $\frac{32}{27}$ in $(\pm \frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3})$
locale maxima 0 in $(0,y)$ met $y > 1$
locale minima 0 in $(0,y)$ met $-1 \leq y < 1$.

5 juni 1968

1. Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de functie

$$(x + y)(x^2 + y^2 - 2)$$

in het gebied

$$x^2 + y^2 - 3x - 3y - 8 \le 0.$$

2. Gegeven het veld

$$\underline{a} = \left(\frac{xz}{(x^2+y^2)^2}, \frac{yz}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-1}{2(x^2+y^2)}\right).$$

a) Toon aan dat dit veld rotatievrij is.
Volgt hieruit dat het binnen de bol B : $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$ conservatief is? Motiveer Uw antwoord.

b) Bereken

$$\int_{(1,-1,-\frac{\pi}{4})}^{(1,1,\frac{\pi}{4})} (\underline{a},\underline{t})ds$$

waarin $\underline{t}$ de eenheidsraakvector is aan een van $(1,-1,-\frac{\pi}{4})$ naar $(1,1,\frac{\pi}{4})$ binnen B verlopende kromme (eventueel een gebroken lijn; n.b. een verbinding naar eigen keuze aangeven en daarlangs integreren).

c) Geef een potentiaal van $\underline{a}$.

Antwoorden:

1. globaal maximum 240 in (4,4)
globale minima -3 in (1,-2) en (-2,1)
locaal maximum $\frac{8}{9}\sqrt{3}$ in $(-\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3})$
locaal minimum $-\frac{8}{9}\sqrt{3}$ in $(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$.

2. b) $-\frac{\pi}{8}$

c) $\varphi = -\dfrac{z}{2(x^2 + y^2)}$.

14 januari 1969

1. Gegeven: $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y$.

   Bepaal alle extrema, hun aard en hun waarde op het gebied $x^2 + y^2 \leq 4$.

2. Gegeven het vectorveld

$$\underline{a} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 1\right).$$

   a) Bereken $\iint_S (\underline{a},\underline{n})d\sigma$, als S de cilindermantel voorstelt, gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$ en $\underline{n}$ de naar buiten gerichte normaal.

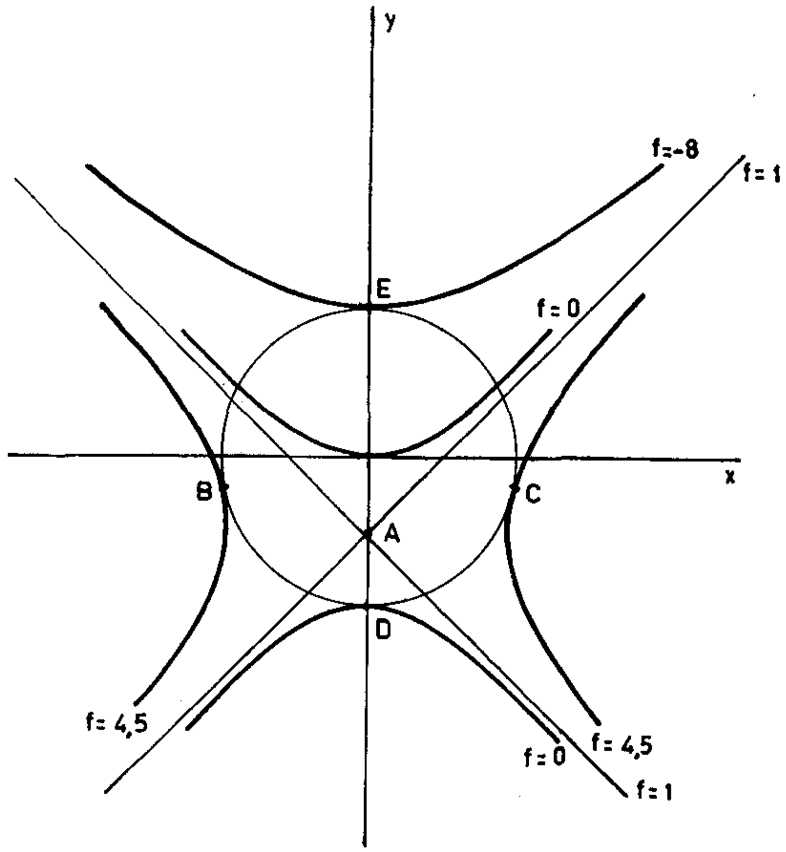
   b) Bepaal $\int_K (\underline{a},\underline{t})ds$, waarbij K de kromme voorstelt, beginnend in (1,0,0) en eindigend in (0,1,1), gelegen in het eerste octant en verder gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + 2y - z = 1, \end{cases}$$

   terwijl $\underline{t}$ de eenheidsraakvector is.

Oplossingen:

1.



$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y - 2.$

Er is dus één stationair punt $x = 0$, $y = -1$. (A)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$, dus het punt $(0,-1)$ kan geen locaal extremum zijn.

Dit blijkt ook uit de in de figuur getekende hoogtekaart.

$f(x,y) = x^2 - (y+1)^2 + 1.$

De hoogtelijnen zijn hyperbolen met asymptoten $x = y + 1$ en $x = -(y+1)$. Het punt $(0,-1)$ is het snijpunt van de asymptoten en dus een zadelpunt.

Om de functie op de rand van het gebied $x^2 + y^2 \leq 4$ te onderzoeken substitueren we in $f(x,y)$ voor x^2: $4 - y^2$. Dit levert op:

$$f = -2y^2 - 2y + 4. \qquad (-2 \leq y \leq 2)$$

Dit is een quadratische functie met een maximum in $y = -\frac{1}{2}$. Omdat de continue functie $f(x,y)$ op de gesloten begrensde verzameling $x^2 + y^2 \leq 4$ minstens één globaal maximum aan moet nemen moet dit in de punten B en C het geval zijn.

B: $(-\frac{1}{2}\sqrt{15}, -\frac{1}{2})$, $f = 4\frac{1}{2}$, globaal maximum

C: $(+\frac{1}{2}\sqrt{15}, -\frac{1}{2})$, $f = 4\frac{1}{2}$, globaal maximum.

Verder moeten nog de punten D $(y = -2)$ en E $(y = +2)$ worden onderzocht. E is het randminimum en op grond van de boven aangehaalde stelling neemt $f(x,y)$ hier een globaal minimum voor het hele gebied aan.

E: $(0, +2)$, $f = -8$, globaal minimum.

Tenslotte het punt D. Uit de figuur blijkt dat dit een locaal minimum is. Ook zonder hoogtelijnen te tekenen is dit in te zien. Bij vaste y is $f(x,y)$ nl. minimaal voor $x = 0$. Verder neemt $f(x,y)$ toe langs de y-as als, vanuit $y = -2$, y toeneemt. Er liggen dus in een omgeving van D binnen de cirkel $x^2 + y^2 = 4$ alleen waarden > 0.

D: $(0, -2)$, $f = 0$, locaal minimum.

2. a) De cilindermantel heeft als parametervoorstelling

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\varphi \\ y &= \sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ &0 \leq z \leq 1 \end{aligned}$$

De normaal is $\underline{n} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0)$, omdat $\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial z} \right| = 1$.

$\underline{a} = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 1)$, dus

$$(\underline{a},\underline{n}) = 0.$$

De gevraagde oppervlakte-integraal is dus eveneens 0.

<u>Opmerking</u>: gebruikmaken van de stelling van Gauss is in dit geval niet de aangewezen weg omdat $\underline{a}$ op de z-as niet gedefinieerd is.

b) De kromme K kan worden voorgesteld door:

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \\ z = \cos\varphi + 2\sin\varphi - 1, \end{cases}$$

waarbij φ loopt van 0 tot $\frac{\pi}{2}$.

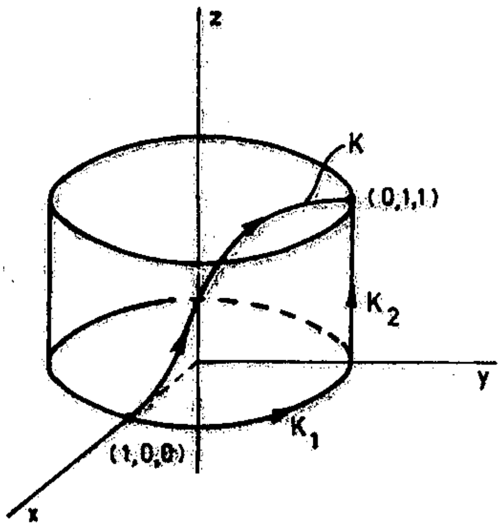
$$\frac{d\underline{x}}{d\varphi} = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ -\sin\varphi + 2\cos\varphi)$$

$\underline{a} = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 1)$, dus de gevraagde integraal is:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\underline{a}, \frac{d\underline{x}}{d\varphi})d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\varphi + 2\cos\varphi)d\varphi =$$

$$= (\varphi + \cos\varphi + 2\sin\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 + 2 = \frac{\pi}{2} + 1.$$

<u>Opmerking</u>: Omdat overal buiten de z-as geldt rot $\underline{a} = \underline{0}$, kan gebruik worden gemaakt van de stelling van Stokes en kan i.p.v. K een andere integratieweg worden gekozen, b.v. K_1 en K_2 (zie figuur).



Langs K_1 is $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $z = 0$, $\frac{d\underline{x}}{d\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$.

De integraal is $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\underline{a}, \frac{d\underline{x}}{d\varphi}) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Langs K_2 is $\underline{t} = (0,0,1)$ en de integraal is:

$$\int_0^1 dz = 1.$$

Opgeteld dus weer $\frac{\pi}{2} + 1$.

10 juni 1969

1. Gegeven $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$.

   Bepaal alle extrema, hun aard en waarde op het gebied $x^2 + y^2 \leq 8$.

2. Gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = \left(- \frac{y}{x^2+y^2}\ ,\ \frac{x}{x^2+y^2} + y,\ 2z\right).$$

   a) Bereken rot $\underline{u}$.

   b) Toon aan dat het veld $\underline{u}$ conservatief is in de halfruimte $x > 1$.

   c) Bereken $\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds$, waarbij de kromme K bepaald is door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

   en waarin de eenheidsraakvector $\underline{t}$ in het punt (1,0,0) gelijk is aan (0,1,0).

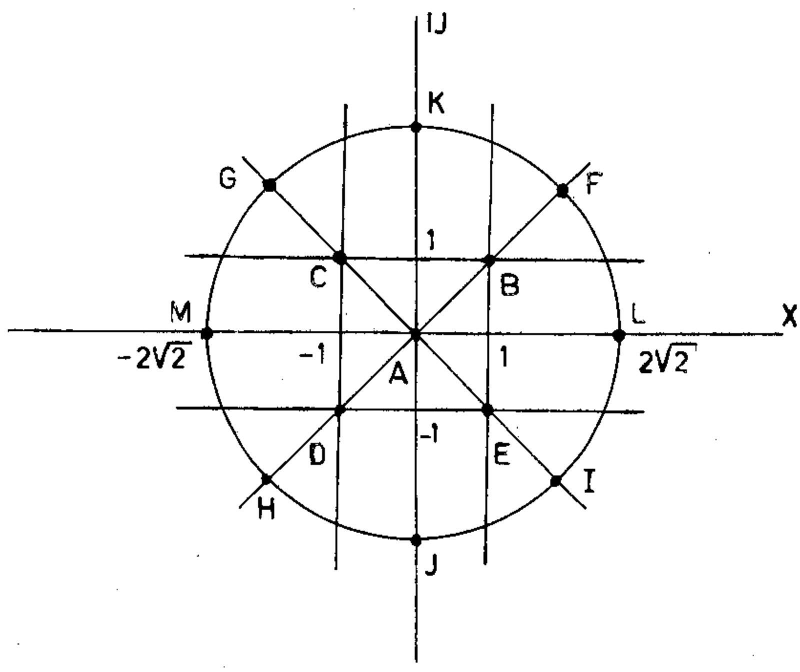
   d) Bereken $\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds$, waarbij de kromme K bepaald is door

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

   en $\underline{t}$ in (2,0,2) gelijk is aan (0,1,0).

Oplossingen:

1.



$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y^2 - 1)$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x^2 - 1)$.

De stationaire punten zijn:

$$A(0,0) \quad , \ f = 0 \ ; \ B(1,1) \ , \ f = -1; \ C(-1,1), \ f = -1;$$

$$D(-1,-1), \ f = -1; \ E(1,-1), \ f = -1.$$

In B geldt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = -\,16 < 0,$$

d.w.z. in B heeft f geen extreem. Op grond van symmetrie volgt dat f in C, D en E ook geen extrema heeft.
Men kan dit ook inzien door de niveaulijnen voor $f = -1$ te tekenen.
Uit $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 = (1 - x^2)(1 - y^2) - 1$ volgt dat de niveaulijnen voor $f = -1$ zijn $x = \pm 1$ en $y = \pm 1$. Hieruit volgt gemakkelijk dat B, C, D en E zadelpunten zijn.
In A geldt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 4 > 0 \text{ en } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 < 0,$$

d.w.z. in A heeft f een locaal maximum.
Dit volgt ook uit $f(x,y) = (1 - x^2)(1 - y^2) - 1 < 0$ voor $|x| < 1$, $|y| < 1$ en $(x,y) \neq (0,0)$.

Om de functie op de rand van het gebied te onderzoeken substitueren we $y^2 = 8 - x^2$ in $f(x,y)$.
Dit geeft

$$f = -x^4 + 8x^2 - 8 \quad (-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}).$$

Deze functie heeft maxima voor $x = \pm 2 (f = 8)$ en minima voor $x = 0 (f = -8)$ en $x = \pm 2\sqrt{2}$ (randminima, $f = -8$).
Hiermee corresponderen de volgende randpunten:

$$F(2,2) \quad , \ G(-2,2) \quad , \ H(-2,-2) \ , \ I(2,-2) \text{ en}$$

$$J(0,-2\sqrt{2}) \ , \ K(0,2\sqrt{2}) \ , \ L(2\sqrt{2},0) \ , \ M(-2\sqrt{2},0).$$

De *continue functie* $f(x,y)$ *moet op de gesloten en begrensde verzameling* $x^2 + y^2 \leq 8$ ten minste éénmaal een globaal maximum aannemen. Dit kan alleen in de punten F, G, H en I het geval zijn. Evenzo moet een globaal minimum worden aangenomen, wat alleen kan in de punten J, K, L en M.

Samenvattend:

$(0,0)$, $f = 0$ locaal maximum

$(\pm 2, \pm 2)$, $f = 8$ globale maxima

$(\pm 2\sqrt{2},0)$ en $(0, \pm 2\sqrt{2})$, $f = -8$ globale minima.

2. a) rot $\underline{u} = \underline{0}$ in elk punt waar het veld gedefinieerd is.

b) De halfruimte $x > 1$ is enkelvoudig samenhangend; voorts is $\underline{u}$ gedefinieerd in de halfruimte en is rot $\underline{u} = \underline{0}$. Hieruit volgt dat $\underline{u}$ conservatief is in de halfruimte.

c) Men heeft voor K de volgende parametervoorstelling:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi)$$

en

$$\frac{d\underline{x}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In $(1,0,0)$, d.w.z. $\varphi = 0$ geldt $\frac{d\underline{x}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, in overeenstemming met het gegeven.

Op K geldt:

$$\underline{u} = (-\sin\varphi, \cos\varphi + \sin\varphi, 0),$$

$$(\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{d\varphi}) = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \cos\varphi\sin\varphi = 1 + \sin\varphi\cos\varphi$$

en

$$\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds = \int_0^{2\pi} (\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{d\varphi})d\varphi = \int_0^{2\pi} (1 + \sin\varphi\cos\varphi)d\varphi = 2\pi.$$

d) Oplossing 1:

Men kan voor K de volgende parametervoorstelling geven:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 3\sin\varphi \\ 4 - 2\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi).$$

en

$$\frac{d\underline{x}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -2 \sin \varphi \\ 3 \cos \varphi \\ 2 \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

In (2,0,2), d.w.z. $\varphi = 0$, geldt $\frac{d\underline{x}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ in overeenstemming met het gegeven.

Op K geldt:

$$\underline{u} = \left(\frac{-3 \sin \varphi}{4\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi}, \frac{2 \cos \varphi}{4\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi} + 3 \sin \varphi, 8 - 4 \cos \varphi\right)$$

$$(\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{d\varphi}) = \frac{6}{4\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi} + \sin \varphi \cos \varphi + 16 \sin \varphi$$

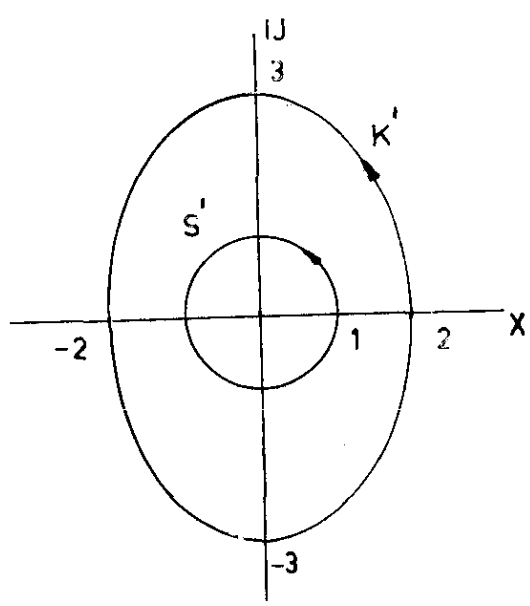
en

$$\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds = 6 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi} + \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi +$$

$$+ 16 \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi = 6 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi(4 + 9 \tan^2\varphi)} =$$

$$= 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \tan \varphi}{4 + 9 \tan^2\varphi} = 4 \arctan \left(\frac{3}{2} \tan \varphi\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.$$

<u>Oplossing 2</u>:



Men kan de oplossing met veel minder rekenwerk als volgt vinden.

De kromme K is de doorsnijding van de elliptische cilinder $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ en het vlak $x + z = 4$.

Hoewel het veld op de z-as niet is gedefinieerd, kan men de stelling van Stokes zonder bezwaar toepassen op het stuk cilindermantel S boven het XOY-vlak en begrensd door de kromme K. Dit stuk cilindermantel heeft als randkrommen K en de projectie K' van K op het XOY-vlak.

K' is de ellips $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

Wegens rot $\underline{u} = \underline{0}$ vindt men

$$0 = \iint\limits_S (\text{rot } \underline{u}, \underline{n})d\sigma = \oint\limits_K (\underline{u}, \underline{t})ds - \oint\limits_{K'} (\underline{u}, \underline{t})ds,$$

waarbij K' zo wordt doorlopen dat $\underline{t} = (0,1,0)$ in $(2,0,0)$.

We mogen nogmaals Stokes toepassen op het deel S' van het XOY-vlak begrensd door K' en de cirkel $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

Dit levert

$$0 = \iint\limits_{S'} (\text{rot } \underline{u}, \underline{n})d\sigma = \oint\limits_{K'} (\underline{u}, \underline{t})ds - \oint\limits_{\text{cirkel}} (\underline{u}, \underline{t})ds.$$

Het resultaat van deel c) geeft nu

$$\oint\limits_K (\underline{u}, \underline{t})ds = 2\pi.$$

6 januari 1970

1. Gegeven $f(x,y) = (x + y - 2)(x - y)$.

   Bepaal de extrema, hun aard en waarde op het gebied $|x| + |y| \leq 3$.

2. Gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = (x + z - y, x - z, y - x).$$

   a) Is het veld $\underline{u}$ conservatief?
   Motiveer Uw antwoord.

   b) Bereken:

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma$$ als S de cilindermantel voorstelt gegeven door

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$0 \leq z \leq 1.$$

   De normaal $\underline{n}$ wijst van de oorsprong af.

   c) Bereken

$$\int_K (\underline{u},\underline{t})ds,$$ waarbij de kromme K bepaald is door

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x + y + z = 0.$$

   De eenheidsraakvector $\underline{t}$ in het punt $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ is gelijk aan $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$.

Oplossingen:

1. Nullijnen zijn: $y = x$ en $x + y = 2$. Het tekenverloop van f is in de figuur aangegeven. Het te beschouwen gebied is het vierkant ABCD en zijn binnengebied.

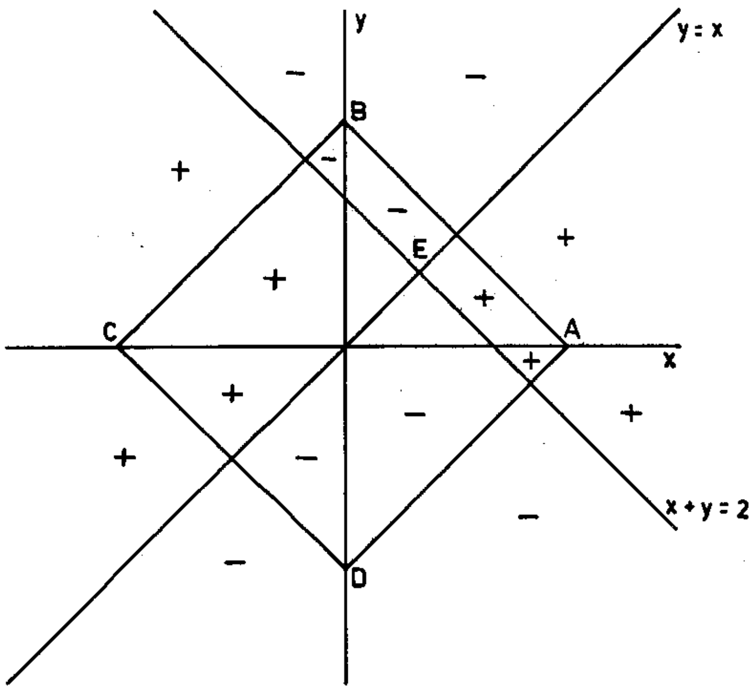
   Stationaire punten in het binnengebied worden gevonden uit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x - y) + (x + y - 2) = 2x - 2 = 0$$

   en

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x - y) - (x + y - 2) = 2 - 2y = 0.$$

   Dus $E = (1,1)$.



Wij zien in de figuur dat E een zadelpunt is. Extrema kunnen dus alleen op de rand van het vierkant voorkomen. Op AB is $x + y = 3$, dus $f = 2x - 3$ met $0 \leq x \leq 3$.

Dit bereikt een maximum voor $x = 3$, d.w.z. in het punt A en een minimum voor $x = 0$, d.w.z. in het punt B.

Volkomen analoog kan men de andere zijden van het vierkant onderzoeken. Men vindt dan op de rand de volgende vier extrema:

$A = (3, 0)$, $f = 3$, maximum

$B = (0, 3)$, $f = -3$, minimum

$C = (-3, 0)$, $f = 15$, maximum

$D = (0, -3)$, $f = -15$, minimum.

Zijn dit nu ook extrema t.o.v. het gehele vierkant?

In het inwendige zijn geen extrema; f is continu op het gesloten vierkant, dus er moet een globaal maximum en een globaal minimum op de rand zijn.

Hieruit volgt: C is een globaal maximum en D is een globaal minimum.

Men kan dezelfde redenering toepassen op de rechthoeken waarin ABCD door de lijnen $y = x$ en $x + y = 2$ verdeeld wordt. Dit levert: A is een locaal maximum en B een locaal minimum.

2. a) rot $\underline{u} = (\frac{\partial}{\partial y}(y-x) - \frac{\partial}{\partial z}(x-z), \frac{\partial}{\partial z}(x+z-y) - \frac{\partial}{\partial x}(y-x), \frac{\partial}{\partial x}(x-z) - \frac{\partial}{\partial y}(x+z-y)) = (2,2,2)$.

Daar conservatieve velden rotatievrij zijn, is het veld $\underline{u}$ niet conservatief.

b) Oplossing 1.

De cilindermantel heeft als parametervoorstelling

$$\underline{x} = (x,y,z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z), \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 1.$$

Dan is

$$\underline{n} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

omdat

$$\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial z} \right| = 1 \text{ is.}$$

Bovendien wijst $\underline{n}$ nu van de oorsprong af.

$$\underline{u} = (\cos\varphi - \sin\varphi + z, \cos\varphi - z, \sin\varphi - \cos\varphi).$$

Dus

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})\,d\sigma =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\cos^2\varphi - \cos\varphi\sin\varphi + z\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi - z\sin\varphi)dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\cos^2\varphi + z(\cos\varphi - \sin\varphi))dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \tfrac{1}{2}\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\sin\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \pi.$$

Oplossing 2.

Pas de stelling van Gauss toe op het gebied R begrensd door de cilindermantel en de vlakken $z = 0$ en $z = 1$. Het gedeelte van het vlak $z = 0$ met $x^2 + y^2 \le 1$ noemen wij V_1. Analoog V_2.

Dan

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma + \iint_{V_1} (\underline{u},\underline{n})d\sigma + \iint_{V_2} (\underline{u},\underline{n})d\sigma = \iiint_R \text{div}\,\underline{u}\;d\tau\ .$$

Op V_1: $\underline{u} = (x-y,\ x,\ y-x)$; $\underline{n} = (0,0,-1)$ (t.o.v. R naar buiten gericht); $(\underline{u},\underline{n}) = x-y$.

Dus

$$\iint_{V_1} (\underline{u},\underline{n})d\sigma = \iint_{V_1} (x-y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\cos\varphi - \sin\varphi)r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (\cos\varphi - \sin\varphi)d\varphi = 0$$

waarbij overgang op poolcoördinaten is toegepast.

Op V_2: $\underline{u} = (x+1-y,\ x-1,\ y-x)$; $\underline{n} = (0,0,1)$; $(\underline{u},\underline{n}) = y-x$.

Dus analoog

$$\iint_{V_2} (\underline{u},\underline{n})d\sigma = 0$$

$$\text{div}\,\underline{u} = \frac{\partial}{\partial x}(x + z - y) + \frac{\partial}{\partial y}(x - z) + \frac{\partial}{\partial z}(y - x) = 1.$$

Dus

$$\iiint_R \text{div}\,\underline{u}\;d\tau = \iiint_R d\tau = \text{inhoud van } R = \pi.$$

Samenvattend

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma = \pi.$$

c) Oplossing 1.

Een parametervoorstelling van K is

$$\underline{x} = (\cos\varphi,\ -\sin\varphi,\ -\cos\varphi + \sin\varphi), \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Dan is

$$\frac{d\underline{x}}{d\varphi} = (-\sin\varphi,\ -\cos\varphi,\ \sin\varphi + \cos\varphi).$$

Voor $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ is $\underline{x} = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ en

$$\frac{d\underline{x}}{d\varphi} = (\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0),$$

in overeenstemming met de opgave.

Op K is

$$\underline{u} = (2 \sin \varphi, 2 \cos \varphi - \sin \varphi, -\sin \varphi - \cos \varphi).$$

Dus

$$\int_K (\underline{u},\underline{t})ds = \int_0^{2\pi} (\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{d\varphi})d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2 \sin^2\varphi - 2 \cos^2\varphi + \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi - \cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-3 - \sin \varphi \cos \varphi)d\varphi = -6\pi.$$

Oplossing 2.

Pas de stelling van Stokes toe:

$$\int_K (\underline{u},\underline{t})ds = \iint_S (\text{rot } \underline{u},\underline{n})d\sigma.$$

Hierin is S het gedeelte van het vlak $x + y + z = 0$ dat wordt uitgesneden door de cilinder $x^2 + y^2 = 1$. De normaal $\underline{n}$ op dit vlak moet gekozen worden in overeenstemming met de raakvector $\underline{t}$, dus blijkbaar $\underline{n} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

In a) hebben wij al gevonden: rot $\underline{u} = (2,2,2)$.

Dus (rot $\underline{u},\underline{n}) = -2\sqrt{3}$.

Dit geeft $\int_K (\underline{u},\underline{t})ds = (-2\sqrt{3})$ opp. S.

S is een ellips met halve lange as $= \sqrt{3}$ en halve korte as $= 1$ (dit volgt uit doorsnijding van de ellips met de vlakken $y = x$ en $y = -x$).

Dus opp. $S = \pi.\sqrt{3}.1 = \pi\sqrt{3}$.

Dit geeft $\int_K (\underline{u},\underline{t})ds = (-2\sqrt{3})(\pi\sqrt{3}) = -6\pi$.

9 juni 1970

1. Gegeven: $f(x,y) = \frac{x^2 + 9y^2}{1 + y^2}$.

   Bepaal de extrema, hun aard en waarde op het vierkant

$$\begin{cases} -3 \le x \le 3 \\ -3 \le y \le 3. \end{cases}$$

2. Gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = \left(\frac{1}{x + y}, \frac{1}{x + y} + \frac{1}{y}, \frac{1}{z + 2}\right).$$

   a) Is het veld $\underline{u}$ conservatief op het gebied

$$\begin{cases} x + y > 0 \\ z > -2 \qquad ? \\ y > 0 \end{cases}$$

   Motiveer Uw antwoord.

   b) Bereken $\int_{(1,1,0)}^{(0,2,0)} (\underline{u},\underline{t})ds$ langs de kromme K, gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 2 \\ z \ge 0. \end{cases}$$

3. Gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right), \text{ met } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

   Bereken $\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma$, waarin S de halve bol is, gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1 \\ y \ge 1. \end{cases}$$

   De normaal $\underline{n}$ wijst van de oorsprong af.

Oplossingen:

1. Stationaire punten van f binnen het vierkant vinden we uit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{1 + y^2} = 0$$

en

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{18y(1 + y^2) - 2y(x^2 + 9y^2)}{(1 + y^2)^2} = \frac{2y(9 - x^2)}{(1 + y^2)^2} = 0.$$

Dit geeft alleen het punt (0,0) met $f(0,0) = 0$. Daar $f(x,y) > 0$ voor $(x,y) \neq (0,0)$ is dit een globaal minimum.

Op de randen $x = \pm 3$, $-3 \le y \le 3$ is $f(x,y) = \dfrac{9 + 9y^2}{1 + y^2} = 9$

Op de randen $y = \pm 3$, $-3 \le x \le 3$ is $f(x,y) = \dfrac{x^2 + 81}{1 + 9} = \dfrac{x^2}{10} + \dfrac{81}{10}$

De functie $f = \dfrac{x^2}{10} + \dfrac{81}{10}$ is op het interval $-3 \le x \le 3$ minimaal voor $x = 0$ en maximaal voor $x = \pm 3$ met $f(0) = \dfrac{81}{10}$ en $f(\pm 3) = 9$.

Maar

$$f(0,y) = \frac{9y^2}{1+y^2} = 9 - \frac{9}{1+y^2}$$

heeft op het interval $-3 \le y \le 3$ maxima in de punten $y = \pm 3$. Dus in de punten $(0,\pm 3)$ wel extrema t.o.v. de rand, maar niet t.o.v. het vierkant. Aangezien f op het beschouwde gesloten vierkant een globaal maximum en minimum heeft is onze conclusie:

in (0,0) , $f = 0$, globaal minimum

in $(\pm 3,y)$ met $-3 \le y \le 3$, $f = 9$, globale maxima.

Opmerking.

Men kan in dit geval gemakkelijk een hoogtekaart tekenen.

De niveaulijnen zijn gegeven door $\dfrac{x^2 + 9y^2}{1 + y^2} = c$ met $c \ge 0$.

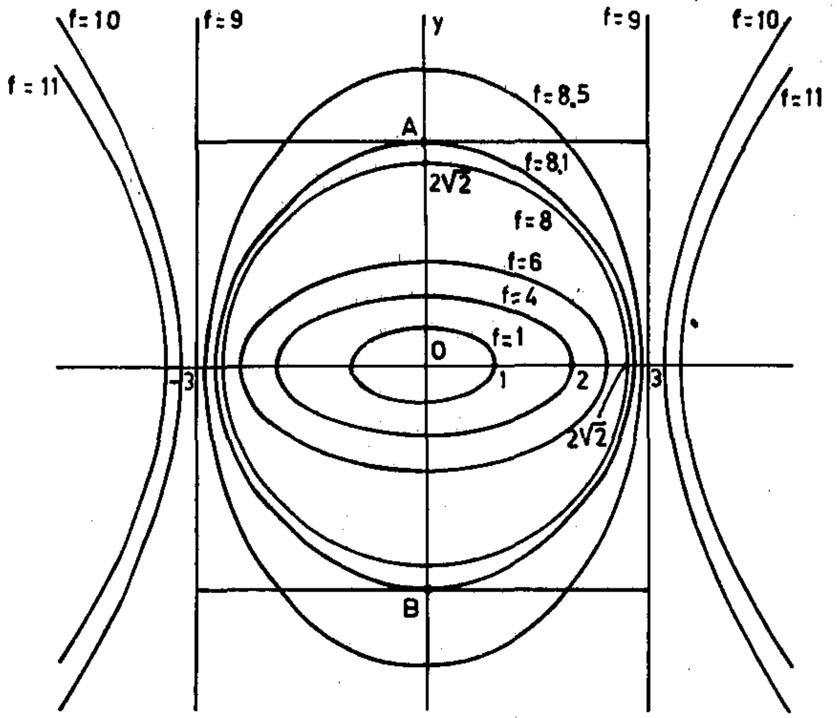
Men vindt voor:

$c = 0$: het punt (0,0)

$0 < c < 9$: het stelsel ellipsen $\dfrac{x^2}{c} + \dfrac{y^2}{\frac{c}{9 - c}} = 1$

$c = 9$: de rechten $x = \pm 3$

$c > 9$: het stelsel hyperbolen $\dfrac{x^2}{c} - \dfrac{y^2}{\frac{c}{c - 9}} = 1.$



Uit de hoogtekaart leest men onmiddellijk af dat f in $\mathcal{O}$ een globaal minimum heeft en op de rechten $x = \pm 3$ met $-3 \leq y \leq 3$ globale maxima, terwijl in de punten A en B geen extrema optreden.

2\. a) $$\text{rot}\ \underline{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(0, 0, -\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+y)^2}\right) = \underline{0}.$$

Het beschouwde gebied is enkelvoudig samenhangend en rot $\underline{u} = \underline{0}$ in dat gebied. Dan is het veld $\underline{u}$ conservatief in het gebied.

b) Oplossing 1.

De kromme K ligt helemaal in het beschouwde gebied. Daar het veld $\underline{u}$ conservatief is is de integraal onafhankelijk van de gekozen weg, als deze

maar in het gebied blijft. Kies daarom in plaats van de kromme K het lijnstuk van (1,1,0) naar (0,2,0): $x + y = 2$, $z = 0$.
Een parametervoorstelling is

$$\underline{x} = (1,1,0) + t(-1,1,0) = (1-t,\ 1+t,\ 0)$$

met $0 \le t \le 1$. Dan is $\frac{d\underline{x}}{dt} = (-1,1,0)$ en $\underline{u} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{1+t}, \frac{1}{2})$.
Dus

$$\int_{(1,1,0)}^{(0,2,0)} (\underline{u},\underline{t})ds = \int_{(1,1,0)}^{(0,2,0)} (\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{dt})dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} =$$

$$= \log(1+t)\Big|_0^1 = \log 2.$$

Oplossing 2.
Aangezien het veld $\underline{u}$ conservatief is, bestaat er een potentiaal $\varphi(\underline{x})$ met $\underline{u} = \text{grad}\ \varphi$.
Zo'n potentiaal is bijvoorbeeld $\varphi = \log(x+y) + \log y + \log(z+2)$.
Dan

$$\int_K (\underline{u},\underline{t})ds = \int_K (\text{grad}\ \varphi,\underline{t})ds = \varphi(\text{eindpunt}) - \varphi(\text{beginpunt}) =$$

$$= \log(x+y) + \log y + \log(z+2)\Big|_{(1,1,0)}^{(0,2,0)} = \log 2.$$

3. Pas de stelling van Gauss toe op het gebied R begrensd door S en het vlak $y = 1$. Noem het deel van het vlak $y = 1$ met $x^2 + z^2 \le 1$: V.
Dan geldt

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma + \iint_V (\underline{u},\underline{n})d\sigma = \iiint_R \text{div}\ \underline{u}\ d\tau.$$

In V: $\underline{u} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2 + 1}^3}(x,1,z)$; $\underline{n} = (0,-1,0)$ (ten opzichte van R naar buiten gericht).
Dan is

$$\iint_V (\underline{u},\underline{n})d\sigma = -\iint_V \frac{dxdz}{\sqrt{x^2 + z^2 + 1}^3} = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{r^2 + 1}^3} =$$

$$= -2\pi.\tfrac{1}{2}\int_0^1 (r^2+1)^{-3/2} d(r^2+1) = 2\pi(r^2+1)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 2\pi(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1),$$

waarbij overgang op poolcoördinaten ($x = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$) is toegepast. Verder is

$$\text{div } \underline{u} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{r^3}) =$$

$$= \frac{3}{r^3} - \frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{3y}{r^4}\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{3z}{r^4}\frac{\partial r}{\partial z} =$$

$$= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0 \text{ voor } \underline{x} \neq \underline{0}.$$

Dus

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma = -\iint_V (\underline{u},\underline{n})d\sigma = 2\pi(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

12 januari 1971

1. Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de functie

$$f(x,y) = \frac{4x^2}{4y - 5}$$

op het deel van het xy-vlak bepaald door $x^2 + y^2 \le 1$.

2. Gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 - 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 - 1}, 2z\right).$$

a) Bewijs: rot $\underline{u} = \underline{0}$ voor $x^2 + y^2 \neq 1$.

b) Is het veld conservatief binnen de cilinder met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$?

c) Bereken

$$\int_K (\underline{u},\underline{t})ds ,$$

waarbij K de kromme is, met beginpunt (0,0,0) en eindpunt $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, gegeven door

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = x \end{cases},$$

terwijl $\underline{t}$ de eenheidsraakvector aan K is.

Oplossingen:

1. Op en binnen de eenheidscirkel is $f \le 0$, omdat daar $4y - 5 < 0$ is. Voor $x = 0$ is $f = 0$, zodat f in de punten $(0,y)$ met $-1 \le y \le 1$ globale maxima heeft. Deze punten zijn ook de enige stationaire punten van f, zoals blijkt uit:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{8x}{4y - 5} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-16x^2}{(4y - 5)^2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 0 .$$

De functie f is continu op het gesloten begrensde gebied $x^2 + y^2 \leq 1$ en neemt dus een globaal minimum aan op dat gebied. De stationaire punten in het inwendige geven, zoals we gezien hebben, globale maxima. Dus moet het globale minimum op de rand worden aangenomen. Substitutie van $x^2 = 1 - y^2$ in f(x,y) geeft de functie

$$g(y) = \frac{4 - 4y^2}{4y - 5} = -y - \frac{5}{4} - \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{4y - 5} \,.$$

We beschouwen deze functie op het interval $-1 \leq y \leq 1$. Uit

$$g'(y) = -1 + \frac{9}{(4y - 5)^2} = 0$$

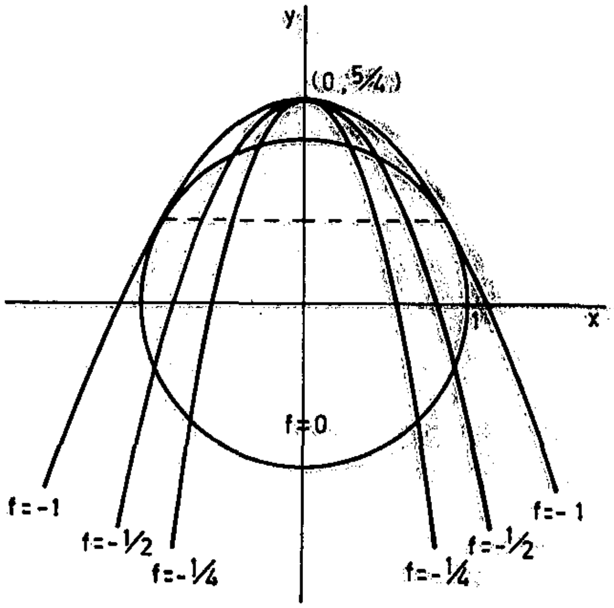
volgt $y = \frac{1}{2}$ of $y = 2$. Het laatste punt ligt buiten het beschouwde interval. Verder geldt: $g'(y) < 0$ voor $-1 \leq y < \frac{1}{2}$ en $g'(y) > 0$ voor $\frac{1}{2} < y \leq 1$. Dus is er voor $y = \frac{1}{2}$ een minimum en zijn er voor $y = \pm 1$ maxima t.o.v. de rand. Met $y = \pm 1$ corresponderen de punten (0,1) en (0,−1) die we reeds hebben besproken. Met $y = \frac{1}{2}$ corresponderen de punten $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$. Op grond van de genoemde stelling volgt nu dat in $(\pm \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ het globale minimum t.o.v. het hele gebied wordt aangenomen.

Samenvattend:

globale maxima, $f = 0$, in de punten $(0,y)$ met $-1 \leq y \leq 1$
globale minima, $f = -1$, in de punten $(\pm \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$.

Opmerking:

Men kan dit vraagstuk ook oplossen met behulp van een hoogtekaart. De niveaulijnen zijn gegeven door $4x^2 = c(4y - 5)$ met $c \leq 0$. Voor $c = 0$ vinden we $x = 0$ en voor $c < 0$ parabolen met top in het punt $(0, \frac{5}{4})$ en opening naar beneden. In de figuur zijn de niveaulijnen getekend voor $c = 0$, $c = -\frac{1}{4}$, $c = -\frac{1}{2}$, $c = -1$.



We lezen meteen af dat de globale maxima liggen op de y-as. De globale minima worden blijkbaar aangenomen op de eenheidscirkel en wel in die punten waar een exemplaar van het stelsel parabolen raakt aan de cirkel. De bijbehorende waarde van c is dan de waarde van het globale minimum.

Het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4x^2 = c(4y - 5) \end{cases}$$

heeft in geval van raken een dubbele wortel voor y (en natuurlijk ook voor x, maar hier is eliminatie van x het eenvoudigst).
De vergelijking voor y wordt

$$4y^2 + 4cy - 5c - 4 = 0 \ .$$

Discriminant gelijk aan nul stellen geeft

$$16c^2 + 16(5c + 4) = 16(c^2 + 5c + 4) = 16(c + 1)(c + 4) = 0 \ ,$$

dus $c = -1$ of $c = -4$. De vergelijking voor y wordt dan

$$4y^2 - 4y + 1 = 4(y - \tfrac{1}{2})^2 = 0 \quad \text{of} \quad 4y^2 - 16y + 16 = 4(y - 2)^2 = 0 \ .$$

Dus $y = \frac{1}{2}$ of $y = 2$. Blijkbaar voldoet alleen $y = \frac{1}{2}$. Dan volgt $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en de globale minima hebben de waarde -1.

2. a) $\text{rot}\ \underline{u} = (\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}) =$

$$= (0,\ 0,\ -\frac{2xy}{(x^2+y^2-1)^2} + \frac{2yx}{(x^2+y^2-1)^2}) = \underline{0} \text{ voor } x^2 + y^2 - 1 \neq 0.$$

b) Ja, want het gebied binnen de cilinder is enkelvoudig samenhangend en in het gebied geldt: rot $\underline{u} = \underline{0}$.

c) Oplossing 1.

Een parametervoorstelling van K is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2t^2 \end{pmatrix} \quad \text{met } 0 \le t \le \tfrac{1}{2}\ .$$

Dan is

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4t \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad \underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{t}{2t^2-1} \\ \frac{t}{2t^2-1} \\ 4t^2 \end{pmatrix} .$$

Dus

$$\int_K (\underline{u},\underline{t})ds = \int_K (\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{dt})dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{2t}{2t^2-1} + 16t^3)dt =$$

$$= [\tfrac{1}{2} \log|2t^2 - 1| + 4t^4]_0^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \log \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} \log 2\ .$$

Oplossing 2.

Daar het veld $\underline{u}$ conservatief is binnen de cilinder met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$, bestaat er een potentiaal $\varphi(x,y,z)$ met $\underline{u} = \text{grad}\ \varphi$. Zo'n potentiaal is bijvoorbeeld $\varphi = \frac{1}{2}\log(1 - x^2 - y^2) + z^2$.
De kromme K ligt in het beschreven gebied, dus

$$\int_K (\underline{u},\underline{t})ds = \int_K (\text{grad}\ \varphi, \underline{t})ds = \varphi(\text{eindpunt}) - \varphi(\text{beginpunt}) =$$

$$= \varphi(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) - \varphi(0,0,0) = \tfrac{1}{2} \log \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} \log 2\ .$$

8 juni 1971

1. Gegeven de functie

$$f(x,y) = (x + y - 1)(x - y)^2 ,$$

gedefinieerd in

$$G : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} .$$

Bepaal plaats, aard en waarde der extrema van $f(x,y)$ in G.

2. In R_3 is gegeven het veld $\underline{u} = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, -2 \log z)$.
Bereken:

a) div $\underline{u}$.

b) $\iint\limits_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma$ als S de kegelmantel is gegeven door

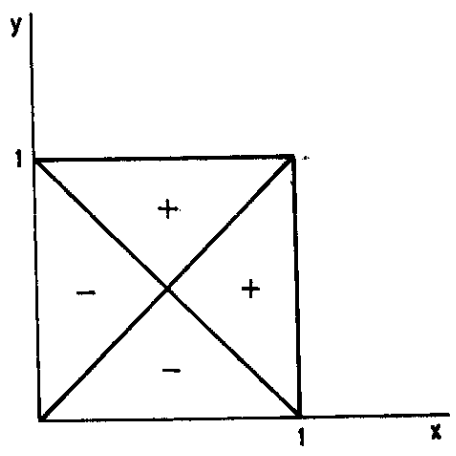
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ 1 \le z \le 2 \end{cases}$$

en $\underline{n}$ de van de z-as af gerichte eenheidsnormaal.

c) $\int\limits_K (\underline{u},\underline{t})ds$ als K de kromme, gelegen in het eerste octant, voorstelt gegeven door $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = z \end{cases}$ met beginpunt $(1,0,1)$ en eindpunt $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

Oplossingen:

1. Nullijnen van f zijn $x + y = 1$ en $x = y$. In de figuur is het tekenverloop van f aangegeven.



Stationaire punten vinden wij uit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x - y)^2 + 2(x + y - 1)(x - y) =$$
$$= (x - y)(3x + y - 2) = 0$$

en

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x - y)^2 - 2(x + y - 1)(x - y) = (x - y)(-x - 3y + 2) = 0 \ .$$

Dit geeft de lijn $y = x$.
Uit de figuur volgt onmiddellijk:

in $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ geen extreem (zadelpunt)
in (x,x) met $0 \leq x < \frac{1}{2}$ locale maxima met waarde 0
in (x,x) met $\frac{1}{2} < x \leq 1$ locale minima met waarde 0.

Op het begrensde gesloten gebied G neemt f een globaal minimum en een globaal maximum aan. Aangezien we in het inwendige van G alleen locale extrema hebben gevonden worden de globale extrema op de rand van G aangenomen. Omdat f symmetrisch is t.o.v. de lijn $y = x$ bekijken we alleen de stukken van de rand met $y = 0$ en $x = 1$.
Op $y = 0$ is $f = (x - 1)x^2 = x^3 - x^2 = g(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$. Dan is $g'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2) = 0$ voor $x = 0$ en $x = \frac{2}{3}$. Het punt $x = 0$ hebben we al bekeken. Verder is $g'(x) < 0$ voor $0 < x < \frac{2}{3}$ en $g'(x) > 0$ voor $\frac{2}{3} < x \leq 1$. Dus in $x = \frac{2}{3}$ een minimum en in $x = 1$ een maximum t.o.v. de rand.
Op de lijn $x = 1$ is $f = y(1 - y)^2 = h(y)$ $(0 \leq y \leq 1)$. Dan is $h'(y) = (1 - y)^2 - 2y(1 - y) = (1 - y)(1 - 3y) = 0$ voor $y = 1$ en $y = \frac{1}{3}$. Het punt $y = 1$ hebben we al bekeken. Verder is $h'(y) > 0$ voor $0 \leq y < \frac{1}{3}$ en $h'(y) < 0$ voor $\frac{1}{3} < y < 1$. Dus in $y = 0$ een minimum en in $y = \frac{1}{3}$ een maximum t.o.v. de rand. Het punt $(1,0)$ dat we beide keren hebben gevonden is geen extreem (op $y = 0$ een maximum en op $x = 1$ een minimum; uit de figuur: in de omgeving zowel positieve als negatieve functiewaarden, terwijl $f(1,0) = 0$). Uit het voorgaande volgt dat f in $(\frac{2}{3},0)$ een globaal minimum en in $(1, \frac{1}{3})$ een globaal maximum aanneemt. Op grond van de symmetrie komen we resumerend tot de conclusie:

in $(1,\frac{1}{3})$ en $(\frac{1}{3},1)$ globale maxima, $f = (1 + \frac{1}{3} - 1)(1 - \frac{1}{3})^2 = \frac{4}{27}$
in $(\frac{2}{3},0)$ en $(0,\frac{2}{3})$ globale minima, $f = (\frac{2}{3} - 1)(\frac{2}{3})^2 = -\frac{4}{27}$
op $y = x$ met $0 \leq x < \frac{1}{2}$ locale maxima, $f = 0$
op $y = x$ met $\frac{1}{2} < x \leq 1$ locale minima, $f = 0$.

2. a) div $\underline{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z} - \frac{2}{z} = 0$ voor $z > 0$.

b) Oplossing 1.

Een parametervoorstelling van S is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \quad \text{met } 0 \le \varphi < 2\pi \quad \text{en} \quad 1 \le r \le 2.$$

Dan is

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

Een van de z-as af gerichte normaalrichting is

$$-\frac{\partial \underline{x}}{\partial r} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ -r \end{pmatrix}.$$

Op S is $\underline{u} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -2\log r \end{pmatrix}$.

Dus

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^2 (\underline{u}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial r})drd\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 (r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi + 2r\log r)dr =$$

$$= 2\pi\int_1^2 (r + 2r\log r)dr = 2\pi[r^2 \log r]_1^2 = 8\pi \log 2 .$$

Oplossing 2.

Pas de stelling van Gauss toe op het gebied R begrensd door S en de vlakken $z = 1$ en $z = 2$.
Zij V_1 het deel van het vlak $z = 1$ met $x^2 + y^2 \leq 1$ en V_2 het deel van het vlak $z = 2$ met $x^2 + y^2 \leq 4$.
Dan geldt

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma + \iint_{V_1} (\underline{u},\underline{n})d\sigma + \iint_{V_2} (\underline{u},\underline{n})d\sigma = \iiint_R \operatorname{div} \underline{u}\, d\tau = 0$$

volgens a).
In V_1 is $\underline{u} = (x,y,0)$ en $\underline{n} = (0,0,-1)$ (t.o.v. R naar buiten gericht), zodat $(\underline{u},\underline{n}) = 0$ en $\iint_{V_1} (\underline{u},\underline{n})d\sigma = 0$.
In V_2 is $\underline{u} = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, -2 \log 2)$ en $\underline{n} = (0,0,1)$, zodat $(\underline{u},\underline{n}) = -2 \log 2$ en $\iint_{V_2} (\underline{u},\underline{n})d\sigma = -2 \log 2$.oppervlakte van $V_2 = -8\pi \log 2$.
Dus

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma = - \iint_{V_2} (\underline{u},\underline{n})d\sigma = 8\pi \log 2 .$$

c) Een parametervoorstelling van K is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} .$$

Dan is

$$\frac{d\underline{x}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tan\varphi \\ -2 \log\cos\varphi \end{pmatrix} .$$

Dus

$$\int (\underline{u},\underline{t})ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{d\varphi})d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\sin\varphi + \sin\varphi + 2 \sin\varphi \log\cos\varphi)d\varphi =$$

$$= -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \cos \varphi \, d \cos \varphi = \left[-2 \cos \varphi \log \cos \varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} +$$

$$+ 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \frac{-\sin \varphi}{\cos \varphi} \, d\varphi = -\sqrt{2} \log(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) + \left[2 \cos \varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \log 2 + \sqrt{2} - 2 \, .$$

11 januari 1972

1. De functie

$$f(x,y) = x^2 - x + 4y^2 + \tfrac{1}{4}$$

is gedefinieerd in het gebied G gegeven door:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ (x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 \ge \tfrac{1}{4} \; . \end{cases}$$

Bepaal plaats, aard en waarde der extrema van $f(x,y)$ in G.

2. In R_3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z\right) .$$

a) K is de kromme met beginpunt $(-1,1,2)$ en eindpunt $(1,1,2)$ bepaald door:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = 1 \; . \end{cases}$$

Bereken $\int_K (\underline{u},\underline{t})ds$, waarin $\underline{t}$ de eenheidsraakvector aan de kromme is.

b) Bereken $\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds$ langs de gesloten kromme K gegeven door

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + z = 1 \; . \end{cases}$$

In het punt $(0,1,1)$ is de eenheidsraakvector $\underline{t}$ gelijk aan $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

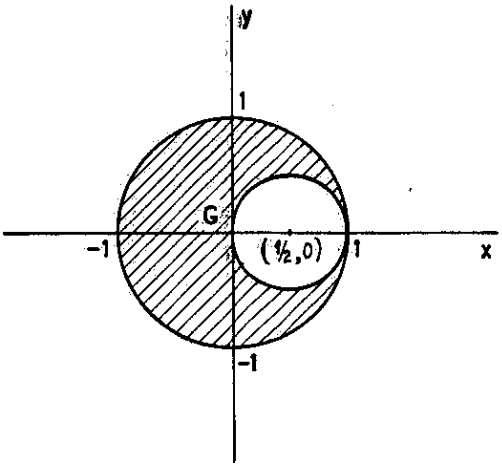
c) Bereken $\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma$ als het oppervlak S wordt gegeven door

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 1 \le z \le 2 \; . \end{cases}$$

De eenheidsnormaal $\underline{n}$ wijst van de z-as af.

Oplossingen:

1. De functie f heeft in het inwendige van G geen stationaire punten (en dus ook geen extrema), want grad $f = (2x - 1, 8y) = \underline{0}$ geeft $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ en het punt $(\frac{1}{2},0)$ ligt niet in G (zie figuur).



Het gebied G is gesloten en begrensd, f is continu. Volgens de stelling van Weierstrass heeft f dus een globaal maximum en een globaal minimum op de rand van G.
De rand van G bestaat uit de cirkels $x^2 + y^2 = 1$ en $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.
Op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ is

$$f = x^2 - x + 4(1 - x^2) + \frac{1}{4} = -3x^2 - x + \frac{17}{4} =$$

$$= -3(x + \frac{1}{6})^2 + \frac{13}{3} \qquad (-1 \leq x \leq 1) .$$

Deze functie is maximaal voor $x = -\frac{1}{6}$ $(f = \frac{13}{3})$ en minimaal voor $x = -1$ $(f = \frac{9}{4})$ en voor $x = 1$ $(f = \frac{1}{4})$.
Op de cirkel $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ is

$$f = (x - \tfrac{1}{2})^2 + 4y^2 = \tfrac{1}{4} - y^2 + 4y^2 = 3y^2 + \tfrac{1}{4} \qquad (-\tfrac{1}{2} \leq y \leq \tfrac{1}{2}) .$$

Deze functie is minimaal voor $y = 0$ $(f = \frac{1}{4})$ en maximaal voor $y = \pm \frac{1}{2}$ $(f = 1)$.
Extrema t.o.v. G kunnen dus optreden in de punten

$$(-\frac{1}{6}, \pm \frac{1}{6}\sqrt{35}) , \quad (-1,0) , \quad (1,0) , \quad (0,0) , \quad (\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}) .$$

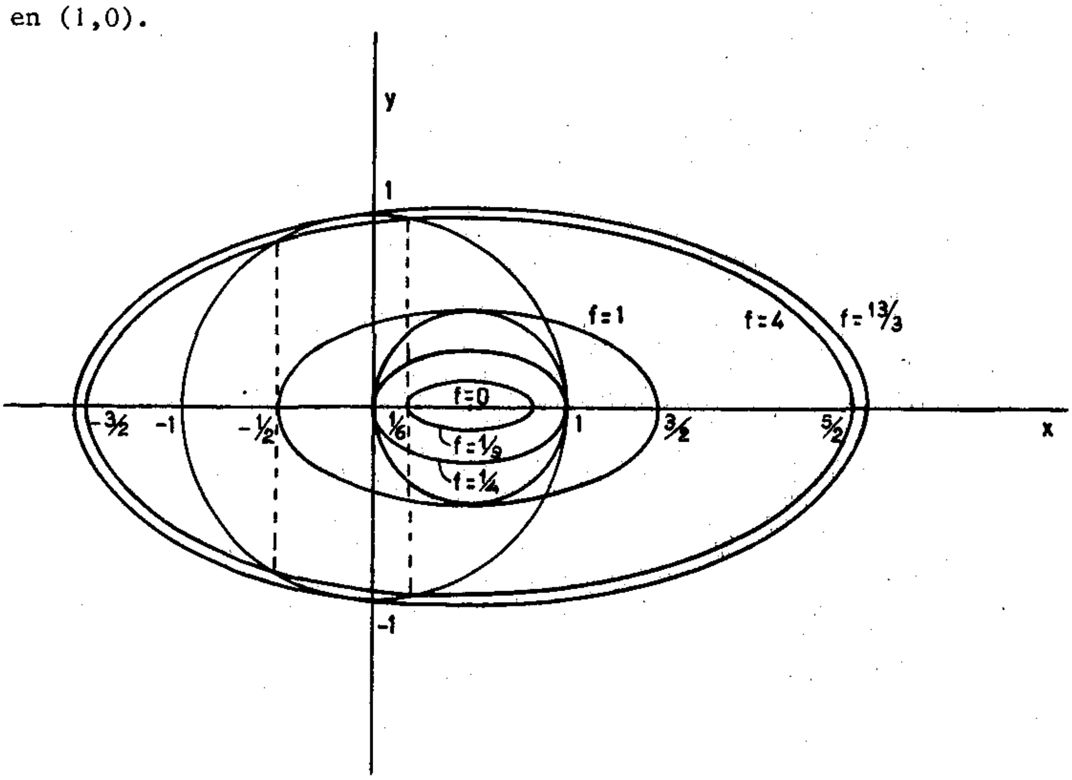
In $(-1,0)$ heeft f geen extreem, want op de x-as $(y = 0)$ is $f = (x - \frac{1}{2})^2$ en deze functie is op het interval $-1 \leq x \leq 1$ maximaal voor $x = -1$, terwijl in $(-1,0)$ een minimum t.o.v. de rand van G optreedt.
In de punten $(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$ heeft f maxima t.o.v. de rand van G, maar op de rechten $y = \pm \frac{1}{2}$ is $f = (x - \frac{1}{2})^2 + 1$, dus minimaal voor $x = \frac{1}{2}$. Dus ook in de punten $(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$ geen extrema.

Dit is ook in te zien door de functie te beschouwen op de rechte $x = \frac{1}{2}$ met $-\frac{1}{2}\sqrt{3} \le y \le -\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (alleen deze stukken behoren tot G!): $f = 4y^2$ is minimaal voor $y = \pm \frac{1}{2}$.
Blijven over de punten $(-\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{6}\sqrt{35})$, $(1,0)$ en $(0,0)$ met functiewaarden $\frac{13}{3}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{4}$. Onze conclusie is (en deze conclusie hadden we ook eerder kunnen trekken door de functiewaarden in alle besproken punten te vergelijken) dat f in G de volgende extrema heeft:

globale maxima $\frac{13}{3}$ in $(-\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{6}\sqrt{35})$

globale minima $\frac{1}{4}$ in $(0,0)$ en $(1,0)$.

Opmerking.
Men kan dit vraagstuk ook oplossen met behulp van een hoogtekaart. Niveaulijnen van f zijn $(x - \frac{1}{2})^2 + 4y^2 = c$ met $c \ge 0$.
Voor $c = 0$ vinden we het punt $(\frac{1}{2},0)$ dat niet in G ligt, voor $c > 0$ vinden we ellipsen $\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{c} + \frac{y^2}{c/4} = 1$ met middelpunt $(\frac{1}{2},0)$, halve lange as $\sqrt{c}$ en halve korte as $\frac{1}{2}\sqrt{c}$.
Als $\sqrt{c} < \frac{1}{2}$ is liggen de ellipsen in het inwendige van de cirkel $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ en hebben dus geen punten met G gemeen.
Het globale minimum van f op G is de kleinste waarde van c zodanig dat de bijbehorende ellips en genoemde cirkel elkaar raken. Dus $c = \frac{1}{4}$. Ellips $(x - \frac{1}{2})^2 + 4y^2 = \frac{1}{4}$ en cirkel $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ raken elkaar in de punten $(0,0)$ en $(1,0)$.



Het globale maximum van f op G is de grootste waarde van c zodanig dat de bijbehorende ellips $(x - \frac{1}{2})^2 + 4y^2 = c$ en de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ elkaar raken. We substitueren $y^2 = 1 - x^2$ in de vergelijking van de ellips:

$$(x - \frac{1}{2})^2 + 4(1 - x^2) = c .$$

Hieruit volgen de x-coördinaten van de snijpunten van ellips en cirkel, die in het geval van raken moeten samenvallen. We moeten c dus zo kiezen dat de vergelijking $(x - \frac{1}{2})^2 + 4(1 - x^2) = c$ een dubbele wortel heeft. Herleiden geeft

$$-3x^2 - x + \frac{17}{4} = c , \quad -3(x + \frac{1}{6})^2 = c - \frac{13}{3} .$$

De laatste vergelijking heeft een dubbele wortel $x = -\frac{1}{6}$ voor $c = \frac{13}{3}$. Het globale maximum is dus $\frac{13}{3}$ en treedt op in de punten van de eenheidscirkel $x = -\frac{1}{6}$, $y = \pm \frac{1}{6}\sqrt{35}$.
We merken tenslotte nog op dat de punten $(-1,0)$ en $(\frac{1}{2} , \pm \frac{1}{2})$, waarvan we in de vorige oplossing moesten aantonen dat er geen extrema optreden, nu niet als bijzondere punten te voorschijn komen.

2. a) Oplossing 1.

Een parametervoorstelling van de kromme K is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t^2 + 1 \end{pmatrix} \qquad \text{met } -1 \le t \le 1 .$$

Dan is

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} .$$

Op K geldt

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{t^2 + 1} \\ \frac{t}{t^2 + 1} \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

en dus

$$\int_K (\underline{u},\underline{t})ds = \int_{-1}^{1} (\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{dt})dt = \int_{-1}^{1} (-\frac{1}{t^2+1} + 2t(t^2+1))dt =$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2+1} + 0 = -[\arctan t]_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{2},$$

waarbij gebruikt is

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = 0$$

als f een oneven functie van t is.

Oplossing 2.

Het veld $\underline{u}$ is rotatievrij:

$$\text{rot } \underline{u} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & z \end{vmatrix} =$$

$$= (0, 0, \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}) = (0,0,0)$$

voor $(x,y) \neq (0,0)$.

Op de z-as is het veld niet gedefinieerd.

De halfruimte $y > 0$ is enkelvoudig samenhangend, in deze halfruimte is rot $\underline{u} = \underline{0}$.

Het veld $\underline{u}$ is dus conservatief en heeft een potentiaal: $\underline{u} = \text{grad } \varphi$. Uit

$$(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z)$$

volgt bijv. $\varphi = -\arctan \frac{x}{y} + \frac{1}{2} z^2$.

N.B. Niet $\varphi = + \arctan \frac{y}{x} + \frac{1}{2} z^2$, want deze φ is niet gedefinieerd voor $x = 0$ (het (y,z)-vlak).

Dus

$$\int_K (\underline{u},\underline{t})ds = \int_K (\text{grad } \varphi, \underline{t})ds = \varphi(\text{eindpunt}) - \varphi(\text{beginpunt}) =$$

$$= [-\arctan \frac{x}{y} + \frac{1}{2} z^2]_{(-1,1,2)}^{(1,1,2)} = -\arctan 1 + \arctan (-1) =$$

$$= -\frac{\pi}{2} .$$

b) <u>Oplossing 1.</u>

Elk oppervlak met rand K snijdt de z-as, waarop het veld $\underline{u}$ niet is gedefinieerd. Dus kunnen we de stelling van Stokes niet toepassen op zo'n oppervlak.

Een geschikte parametervoorstelling van K vinden we door de projectie K' van K op het (x,y)-vlak te bekijken.

Daartoe elimineren we z uit de vergelijkingen $z = x^2 + y^2$ en $x + z = 1$: $1 - x = x^2 + y^2$ of $(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{5}{4}$.

K' is dus een cirkel met middelpunt $(-\frac{1}{2}, 0)$ en straal $\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Een parametervoorstelling van K is dus

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\sqrt{5}\sin\varphi \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi .$$

Dan is

$$\frac{d\underline{x}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{5}\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\sqrt{5}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\sqrt{5}\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Het punt (0,1,1) correspondeert met $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, voor welke waarden geldt

$$\frac{d\underline{x}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

in overeenstemming met de gegeven omloopszin.

Op K geldt

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{-\frac{1}{2}\sqrt{5}\sin\varphi}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\cos\varphi} \\[2ex] \dfrac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\cos\varphi}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\cos\varphi} \\[2ex] \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\cos\varphi \end{pmatrix} .$$

Dus

$$\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds = \int_0^{2\pi} (\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{d\varphi})d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}\cos\varphi}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\cos\varphi} + \frac{3}{4}\sqrt{5}\sin\varphi - \frac{5}{4}\sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 - \sqrt{5}\cos\varphi}\right)d\varphi - [\tfrac{3}{4}\sqrt{5}\cos\varphi]_0^{2\pi} - [\tfrac{5}{8}\sin^2\varphi]_0^{2\pi} =$$

$$= \pi + \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3 - \sqrt{5}\cos\varphi} = \pi + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{3 - \sqrt{5}\cos\varphi}$$

want de integrand van deze laatste integraal is periodiek met periode 2π. Substitutie van $\tan\frac{1}{2}\varphi = t$, $d\varphi = \frac{2}{1+t^2}dt$ en $\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ in de integraal geeft

$$\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds = \pi + 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{3 - \sqrt{5} + (3 + \sqrt{5})t^2} =$$

$$= \pi + \frac{4}{3 - \sqrt{5}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + \frac{1}{4}(3 + \sqrt{5})^2 t^2} =$$

$$= \pi + 2[\arctan \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{5})t]_0^{\infty} = \pi + \pi = 2\pi .$$

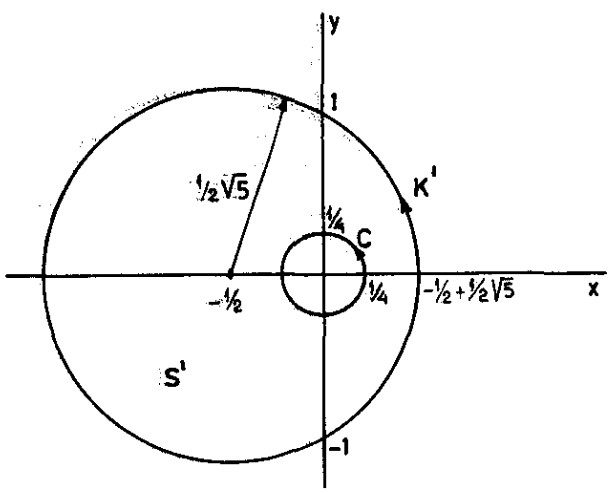
Het zal duidelijk zijn dat er een eenvoudiger manier moet zijn om de kringintegraal te berekenen.

Oplossing 2.

Pas de stelling van Stokes toe op het deel S van de cilindermantel met vergelijking $(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{5}{4}$ begrensd door de krommen K en K' (K' is de projectie van K op het (x,y)-vlak). Op de cilindermantel is rot $\underline{u} = \underline{0}$ omdat er geen punten van de z-as op liggen. Dus

$$0 = \iint_S (\text{rot } \underline{u},\underline{n})d\sigma = \oint_K (\underline{u},\underline{t})ds - \oint_{K'} (\underline{u},\underline{t})ds ,$$

waarbij K' zo wordt doorlopen dat $\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)$ in (0,1,0).



Pas nogmaals de stelling van Stokes toe op het deel S' van het (x,y)-vlak begrensd door K' en de cirkel

$$C \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{16} \\ z = 0 \end{cases} .$$

Dit levert

$$0 = \iint_{S'} (\text{rot } \underline{u},\underline{n})d\sigma = \oint_{K'} (\underline{u},\underline{t})ds - \oint_C (\underline{u},\underline{t})ds ,$$

waarbij C zo wordt doorlopen dat $\underline{t} = (-1,0,0)$ in $(0,\frac{1}{4},0)$, zodat we tenslotte hebben gevonden:

$$\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds = \oint_C (\underline{u},\underline{t})ds \; .$$

Een parametervoorstelling van C is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\cos\varphi \\ \frac{1}{4}\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{met } 0 \le \varphi \le 2\pi \; .$$

Dan is

$$\frac{d\underline{x}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\sin\varphi \\ \frac{1}{4}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \; .$$

In het punt $(0,\frac{1}{4},0)$ is $\varphi = \frac{\pi}{2}$ en

$$\frac{d\underline{x}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

in overeenstemming met het gegeven.
Op C is

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} -4\sin\varphi \\ 4\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

zodat

$$\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds = \oint_C (\underline{u},\underline{t})ds = \int_0^{2\pi} (\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{d\varphi})d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \; .$$

c) Een parametervoorstelling van S is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r^2 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 1 \le r \le \sqrt{2}\ .$$

Dan is

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2r \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

en

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial r} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 2r \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2r^2\cos\varphi \\ -2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} .$$

Een van de z-as af wijzende normaalrichting is

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} 2r^2\cos\varphi \\ 2r^2\sin\varphi \\ -r \end{pmatrix} .$$

Op S is

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r}\sin\varphi \\ \frac{1}{r}\cos\varphi \\ r^2 \end{pmatrix} .$$

Dus

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} (\underline{u}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial r})\,dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} (-r^3)\,dr = -\frac{2\pi}{4}\,[r^4]_1^{\sqrt{2}} = -\frac{3\pi}{2}\ .$$

N.B. Men mag de stelling van Gauss niet toepassen op het gebied begrensd door S en de vlakken $z = 1$ en $z = 2$, omdat $\underline{u}$ op de z-as niet gedefinieerd is, maar wel op het gebied R begrensd door S, de cilindermantel $x^2 + y^2 = 1$ en het vlak $z = 2$.

Zij C het deel van de cilindermantel met $1 \le z \le 2$ en V het deel van het vlak $z = 2$ met $1 \le x^2 + y^2 \le 2$.

Dan geldt

$$\iiint_R \text{div } \underline{u} \, d\tau = \iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma + \iint_C (\underline{u},\underline{n})d\sigma + \iint_V (\underline{u},\underline{n})d\sigma \ .$$

In R geldt

$$\text{div } \underline{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + 1 = 1 \ ,$$

dus

$$\iiint_R \text{div } \underline{u} \, d\tau = \iiint_R d\tau = \int_1^2 (\pi z - \pi)dz = [\tfrac{\pi}{2}(z-1)^2]_1^2 = \frac{\pi}{2} \ .$$

Op C is $\underline{n} = (-x,-y,0)$ (ten opzichte van R naar buiten gericht), $\underline{u} = (-y,x,z)$, dus

$$\iint_C (\underline{u},\underline{n})d\sigma = \iint_C (xy - xy + 0)d\sigma = 0 \ .$$

In V is $\underline{n} = (0,0,1)$, $\underline{u} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 2)$, dus

$$\iint_V (\underline{u},\underline{n})d\sigma = 2\iint_V d\sigma = 2 \ . \ \text{opp. } V = 2(2\pi - \pi) = 2\pi \ .$$

Uit

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma = \iiint_R \text{div } \underline{u} \, d\tau - \iint_C (\underline{u},\underline{n})d\sigma - \iint_V (\underline{u},\underline{n})d\sigma$$

volgt dan

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma = \frac{\pi}{2} - 0 - 2\pi = -\frac{3}{2}\pi .$$

6 juni 1972

1. Gegeven de functie

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - 3x^2 .$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van f in het gebied, bepaald door

$$x^2 + y^2 \leq 9 .$$

2. In R_3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = (xz, yz, -z^2) .$$

a) Bereken $\iint\limits_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma$, waarbij het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} z = xy \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 . \end{cases}$$

In (0,0,0) is de normaal $\underline{n} = (0,0,1)$.

b) Bereken $\int\limits_K (\underline{u},\underline{t})ds$, als K de kromme is in het eerste octant gegeven door

$$\begin{cases} z = xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

met beginpunt (1,0,0) en eindpunt $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2})$.

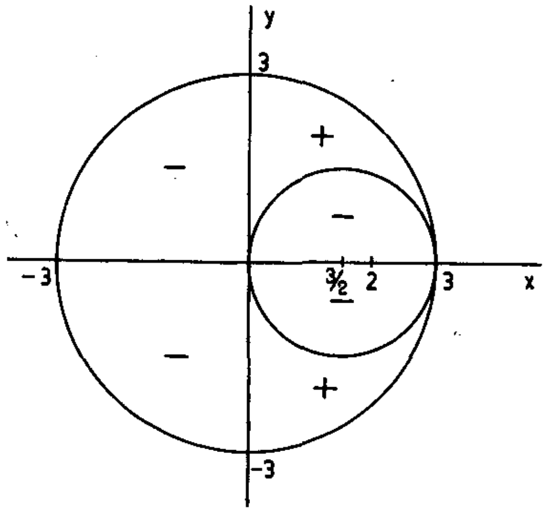
c) Bepaal een vectorpotentiaal van het veld $\underline{u}$.

Oplossingen.

1. Stationaire punten van f in het inwendige van de cirkel $x^2 + y^2 = 9$ vinden we uit grad $f = (3x^2 + y^2 - 6x, 2xy) = \underline{0}$.
Dit geeft de punten (0,0) en (2,0).
Het tekenverloop van f volgt uit

$$f(x,y) = x(x^2 + y^2 - 3x) = x((x - \tfrac{3}{2})^2 + y^2 - \tfrac{9}{4})$$

en is in de figuur aangegeven.



Nullijnen zijn $x = 0$ en $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{9}{4}$. In (0,0) is $f = 0$, maar in iedere omgeving van (0,0) komen zowel positieve als negatieve functiewaarden voor, dus heeft f in (0,0) geen extreem ((0,0) is een zadelpunt van f).

In het punt (2,0) heeft f een minimum, want volgens de stelling van Weierstrass heeft de continue functie f op de gesloten en begrensde verzameling $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 \le \frac{9}{4}$ een globaal maximum en een globaal minimum. Blijkbaar is het globale maximum 0 (op de rand van de cirkel is $f = 0$, in het binnengebied is $f < 0$). Het globale minimum moet dus in het inwendige $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 < \frac{9}{4}$ liggen, dus in het stationaire punt (2,0).

In het punt (2,0) hebben we dus een <u>globaal</u> minimum t.o.v. de cirkelschijf $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 \le \frac{9}{4}$, dus zeker een <u>locaal</u> minimum ($f = -4$) t.o.v. het gebied $x^2 + y^2 \le 9$.

Tot zover de stationaire punten in $x^2 + y^2 < 9$.

Op de rand $x^2 + y^2 = 9$ is $f = x(9 - 3x) = 3x(3 - x)(-3 \le x \le 3)$. Deze functie heeft een maximum voor $x = \frac{3}{2}$ ($f = \frac{27}{4}$) en minima voor $x = -3$ ($f = -54$) en $x = 3$ ($f = 0$). In het met $x = 3$ corresponderende punt (3,0) heeft f geen extreem (zie figuur).

Met de stelling van Weierstrass vinden we:

globale maxima $\frac{27}{4}$ in de punten $(\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\sqrt{3})$

globaal minimum -54 in het punt $(-3,0)$.

In het punt (2,0) heeft f een locaal minimum -4.

2. a) <u>Oplossing 1</u>.

Een parametervoorstelling van S is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \end{pmatrix}, \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 .$$

Dan is

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \text{ en } \frac{\partial \underline{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In het punt (0,0,0) is

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

in overeenstemming met het gegeven.

Op S is

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} x^2y \\ xy^2 \\ -x^2y^2 \end{pmatrix} .$$

Dus

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^1 (\underline{u}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial y})dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 (-x^2y^2 - x^2y^2 - x^2y^2)dy =$$

$$= - \int_0^1 x^2dx \int_0^1 3y^2dy = - \int_0^1 x^2dx = - \frac{1}{3} .$$

Oplossing 2.

Pas de stelling van Gauss toe op het gebied R begrensd door S, het vlak $z = 0$, het vlak $x = 1$ en het vlak $y = 1$. Zij V_1 het vierkant $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ in het vlak $z = 0$, V_2 de driehoek $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le y$ in het vlak $x = 1$ en V_3 de driehoek $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le x$ in het vlak $y = 1$. Dan geldt, wegens $\operatorname{div} \underline{u} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-z^2) = 0$,

$$0 = \iiint_R \operatorname{div} \underline{u}\, d\tau = \iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma + \iint_{V_1} (\underline{u},\underline{n})d\sigma + \iint_{V_2} (\underline{u},\underline{n})d\sigma + \iint_{V_3} (\underline{u},\underline{n})d\sigma.$$

Op V_1 is $\underline{n} = (0,0,-1)$ (t.o.v. R naar buiten gericht),

$$\underline{u} = \underline{0}\ , \quad \text{dus } (\underline{u},\underline{n}) = 0 \quad \text{en} \quad \iint_{V_1} (\underline{u},\underline{n})d\sigma = 0\ .$$

Op V_2 is $\underline{n} = (1,0,0)$, $\underline{u} = (z,yz,-z^2)$, dus

$$\iint_{V_2} (\underline{u},\underline{n})d\sigma = \int_0^1 dy \int_0^y z\, dz = \frac{1}{2}\int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{6}\ .$$

Analoog

$$\iint_{V_3} (\underline{u},\underline{n})d\sigma = \frac{1}{6}\ .$$

Dus

$$0 = \iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma + 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ ,$$

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma = -\frac{1}{3}\ .$$

b) Oplossing 1.

Een parametervoorstelling van K is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \frac{1}{2}\sin 2\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{met } 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\ .$$

Dan is

$$\frac{d\underline{x}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ \cos 2\varphi \end{pmatrix} .$$

Op K is

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi\,\sin 2\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi\,\sin 2\varphi \\ -\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi \end{pmatrix} .$$

Dus

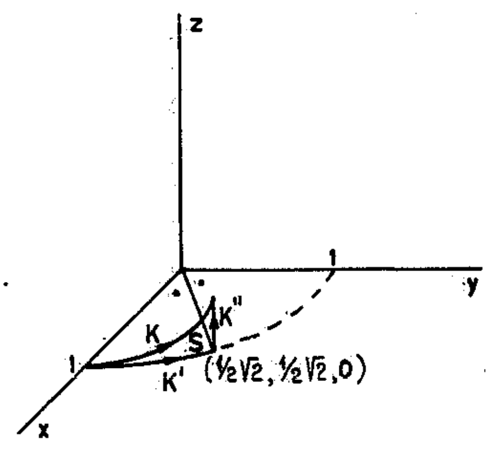
$$\int_K (\underline{u},\underline{t})ds = \int_0^{\pi/4} (\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{d\varphi})d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/4} (-\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\sin 2\varphi - \tfrac{1}{4}\sin^2 2\varphi\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{8}\int_0^{\pi/4} \sin^2 2\varphi\, d\sin 2\varphi = -\frac{1}{24}[\sin^3 2\varphi]_0^{\pi/4} = -\frac{1}{24} .$$

Oplossing 2.

Pas de stelling van Stokes toe op het deel S van de cilindermantel $x^2 + y^2 = 1$ begrensd door de kromme K, de kromme K' : $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $y \le x$ en het lijnstuk K" : $x = y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $0 \le z \le \frac{1}{2}$.



Dan geldt

$$\int_{K'} (\underline{u},\underline{t})ds + \int_{K''} (\underline{u},\underline{t})ds - \int_{K} (\underline{u},\underline{t})ds = \iint_{S} (\text{rot } \underline{u},\underline{n})d\sigma ,$$

waarbij de krommen worden doorlopen in de richting zoals aangegeven in de figuur en waarbij de normaal op S van de z-as af gericht is.
Op K' is z = 0, dus $\underline{u} = \underline{0}$, bijgevolg is

$$\int_{K'} (\underline{u},\underline{t})ds = 0 .$$

Een parametervoorstelling van K" is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{met } 0 \le t \le \tfrac{1}{2} .$$

Op K" is

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}t\sqrt{2} \\ -t^2 \end{pmatrix} .$$

Met

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

geeft dit

$$\int_{K''} (\underline{u},\underline{t})ds = \int_0^{\frac{1}{2}} (\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{dt})dt = -\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt = -\frac{1}{24} .$$

Op S is

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Daar

$$\operatorname{rot} \underline{u} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & yz & -z^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

is, geldt op S $(\operatorname{rot} \underline{u}, \underline{n}) = 0$ en dus is

$$\iint_S (\operatorname{rot} \underline{u}, \underline{n}) d\sigma = 0 .$$

Substitutie van de resultaten in de formule van Stokes geeft

$$\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds = -\frac{1}{24} .$$

c) Het veld $\underline{u}$ is divergentievrij (zie a) oplossing 2), R_3 is stervormig, dus heeft $\underline{u}$ een vectorpotentiaal, gedefinieerd in de hele ruimte.
We proberen een vectorpotentiaal te vinden van de vorm $\underline{v} = (v_1, v_2, 0)$.
Uit

$$\operatorname{rot} \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = (xz, yz, -z^2)$$

volgen de vergelijkingen

$$\frac{\partial v_2}{\partial z} = -xz , \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} = yz , \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = -z^2 ,$$

zodat een vectorpotentiaal van het veld $\underline{u}$ is

$$\underline{v} = (\tfrac{1}{2}yz^2, -\tfrac{1}{2}xz^2, 0) .$$

9 januari 1973

1. Gegeven de functie

$$f(x,y) = y(x^2+y^2) - 2y^2 .$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van f in het gebied bepaald door

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1 , \\ 0 \le y \le 2 . \end{cases}$$

2. In R_3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = \left(\frac{x}{x^2+y^2-1}, \frac{y}{x^2+y^2-1}, \frac{2z}{(x^2+y^2-1)^2}\right) .$$

a) Bereken $\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma$, waarbij S de kegelmantel voorstelt gegeven door

$$\begin{cases} x^2+y^2 = z^2 , \\ 0 \le z \le \frac{1}{2} , \end{cases}$$

en de normaal $\underline{n}$ van de z-as afwijst.

b) Toon aan dat in elk punt van het oppervlak $x^2+y^2 = a^2$ $(a^2 \neq 1)$ de vector rot $\underline{u}$ raakt aan dit oppervlak.

c) Bereken $\int_K (\underline{u},\underline{t})ds$, als K de kromme is in het eerste octant gegeven door

$$\begin{cases} x^2+y^2 = \frac{1}{4} , \\ 2x+4y-z = 1 , \end{cases}$$

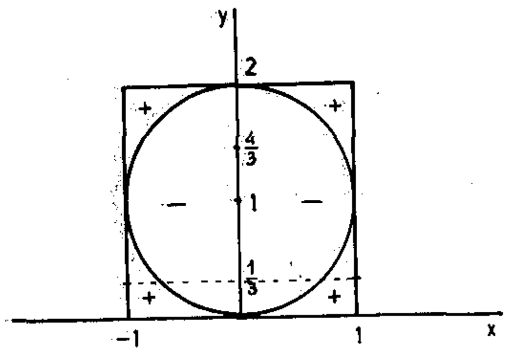
met beginpunt $(\frac{1}{2},0,0)$ en eindpunt $(0,\frac{1}{2},1)$.

Oplossingen

1. Het tekenverloop van f volgt uit de ontbinding

$$f(x,y) = y(x^2+y^2-2y) = y(x^2+(y-1)^2-1)$$

en is in de figuur aangegeven. Nullijnen zijn $y = 0$ en $x^2+(y-1)^2 = 1$.



Stationaire punten in het binnengebied van het vierkant vinden we uit grad f = $= (2xy, x^2 + 3y^2 - 4y) = \underline{0}$. Dit geeft de punten $(0,0)$ (op de rand) en $(0,\frac{4}{3})$. In het punt $(0,\frac{4}{3})$ heeft f een globaal minimum t.o.v. het vierkant met $f = -\frac{32}{27}$. Volgens de stelling van Weierstrass heeft de continue functie f op het gesloten en begrensde vierkant namelijk een globaal minimum. Uit het tekenverloop van f volgt dat dit minimum ligt in het gebied $x^2 + (y-1)^2 < 1$, dus in het stationaire punt $(0,\frac{4}{3})$.

Nu onderzoeken we de rand van het vierkant.

Op $y = 0$, $-1 \le x \le 1$ is $f = 0$. Uit de figuur: in de punten $(x,0)$ met $-1 \le x < 0$ of $0 < x \le 1$: lokale minima, in het punt $(0,0)$ geen extreem.

Op $x = \pm 1$, $0 \le y \le 2$: $f(\pm 1,y) = y(1 + y^2 - 2y) = y(1-y)^2 =: g(y)$;

$g'(y) = (1-y)^2 - 2y(1-y) = (1-y)(1-3y) > 0$ voor $0 \le y < \frac{1}{3}$, $g'(\frac{1}{3}) = 0$, $g'(y) < 0$ voor $\frac{1}{3} < y < 1$, $g'(1) = 0$, $g'(y) > 0$ voor $1 < y \le 2$.

Dus t.o.v. de randen $x = \pm 1$:

minima in $(\pm 1,0)$ (al onderzocht in het voorgaande);

maxima in $(\pm 1,\frac{1}{3})$, $f = \frac{4}{27}$ (lokale maxima t.o.v. het vierkant volgens de stelling van Weierstrass toegepast op de begrensde gesloten verzamelingen $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $x^2 + (y-1)^2 \ge 1$, resp. $-1 \le x \le 0$, $0 \le y \le 1$, $x^2 + (y-1)^2 \ge 1$);

minima in $(\pm 1,1)$ (geen extrema t.o.v. vierkant, zie figuur);

maxima in $(\pm 1,2)$, $f = 2$.

Op de rand $y = 2$, $-1 \le x \le 1$: $f(x,2) = 2x^2$. Deze functie is minimaal voor $x = 0$ en maximaal voor $x = \pm 1$.

In het punt $(0,2)$ is geen extreem (zie figuur), in de punten $(\pm 1,2)$ is $f = 2$. Dit is de grootste waarde die we hebben gevonden bij ons onderzoek, dus volgens de stelling van Weierstrass is 2 het globale maximum.

Resumerend:

globale maxima 2 in de punten $(\pm 1,2)$,

globaal minimum $-\frac{32}{27}$ in het punt $(0,\frac{4}{3})$,

lokale maxima $\frac{4}{27}$ in de punten $(\pm 1,\frac{1}{3})$,

lokale minima 0 in de punten $(x,0)$ met $-1 \le x < 0$ of $0 < x \le 1$.

2. a) <u>Oplossing 1.</u>

Een parametervoorstelling van S is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le \tfrac{1}{2}.$$

Dan is

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

Een van de z-as afwijzende normaalrichting is

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ -r \end{pmatrix}.$$

Op S geldt

$$\underline{u} = \left(\frac{r\cos\varphi}{r^2-1}, \frac{r\sin\varphi}{r^2-1}, \frac{2r}{(r^2-1)^2}\right).$$

Dus

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\underline{u}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial r}\right) dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r^2\cos^2\varphi}{r^2-1} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{r^2-1} - \frac{2r^2}{(r^2-1)^2}\right) dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r^2}{r^2-1} - \frac{2r^2}{(r^2-1)^2}\right) dr =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^2}{r^2-1}\,dr + 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} r\, d\frac{1}{r^2-1} =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^2}{r^2-1}\,dr + 2\pi \left[\frac{r}{r^2-1}\right]_0^{\frac{1}{2}} - 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r^2-1}\,dr =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} dr - \frac{4\pi}{3} = \pi - \frac{4\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

Oplossing 2.

Pas de stelling van Gauss toe op het gebied R begrensd door S en het vlak $z = \frac{1}{2}$. Zij V het deel van het vlak $z = \frac{1}{2}$ met $x^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$. Dan geldt

$$\iiint_R \operatorname{div} \underline{u}\, d\tau = \iint_S (\underline{u},\underline{n})\,d\sigma + \iint_V (\underline{u},\underline{n})\,d\sigma .$$

Het veld $\underline{u}$ is divergentievrij:

$$\operatorname{div} \underline{u} = \frac{x^2+y^2-1-2x^2}{(x^2+y^2-1)^2} + \frac{x^2+y^2-1-2y^2}{(x^2+y^2-1)^2} + \frac{2}{(x^2+y^2-1)^2} = 0$$

voor $x^2+y^2 \neq 1$.

Het gebied R ligt binnen de cilinder met vergelijking $x^2+y^2 = 1$, dus

$$\iiint_R \operatorname{div} \underline{u}\, d\tau = 0 \quad \text{en} \quad \iint_S (\underline{u},\underline{n})\,d\sigma = - \iint_V (\underline{u},\underline{n})\,d\sigma .$$

Op V is $\underline{n} = (0,0,1)$ (t.o.v. R naar buiten gericht),

$$\underline{u} = \left(\frac{x}{x^2+y^2-1}, \frac{y}{x^2+y^2-1}, \frac{1}{(x^2+y^2-1)^2}\right) .$$

Overgang op poolcoördinaten geeft

$$\iint_V (\underline{u},\underline{n})\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r}{(r^2-1)^2}\,dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2(r^2-1)}\right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} .$$

$$\iint_S (\underline{u},\underline{n})\,d\sigma = -\frac{\pi}{3} .$$

b)

$$\operatorname{rot} \underline{u} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{x}{x^2+y^2-1} & \dfrac{y}{x^2+y^2-1} & \dfrac{2z}{(x^2+y^2-1)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{-8yz}{(x^2+y^2-1)^3}, \frac{8xz}{(x^2+y^2-1)^3}, -\frac{2xy}{(x^2+y^2-1)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2-1)^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{-8yz}{(x^2+y^2-1)^3}, \frac{8xz}{(x^2+y^2-1)^3}, 0\right) \quad \text{voor } x^2+y^2 \neq 1 .$$

Op het oppervlak $x^2 + y^2 = a^2$ $(0 < a^2 \neq 1)$ geldt

$$\operatorname{rot} \underline{u} = \left(\frac{-8yz}{(a^2-1)^3}, \frac{8xz}{(a^2-1)^3}, 0\right) \quad \text{en} \quad \underline{n} = \frac{1}{a}(x,y,0) ,$$

dus

$$(\operatorname{rot} \underline{u}, \underline{n}) = 0 .$$

De vector rot $\underline{u}$ raakt in elk punt van het oppervlak aan het oppervlak.

c) Oplossing 1.

Een parametervoorstelling van K is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi \\ \cos\varphi + 2\sin\varphi - 1 \end{pmatrix} , \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} .$$

Op K geldt

$$\underline{u} = \left(-\frac{2}{3}\cos\varphi , -\frac{2}{3}\sin\varphi , \frac{32}{9}(\cos\varphi + 2\sin\varphi - 1)\right) .$$

Uit

$$\frac{d\underline{x}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\cos\varphi \\ 2\cos\varphi - \sin\varphi \end{pmatrix}$$

volgt

$$\int_K (\underline{u},\underline{t})ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{d\varphi})d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tfrac{1}{3}\cos\varphi\sin\varphi - \tfrac{1}{3}\cos\varphi\sin\varphi +$$

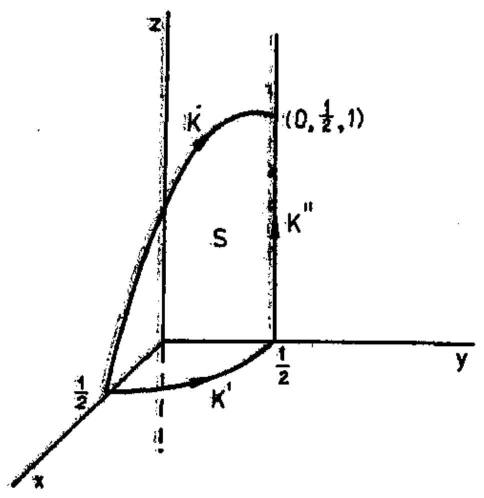
$$+ \frac{32}{9}(\cos\varphi + 2\sin\varphi - 1)(2\cos\varphi - \sin\varphi))d\varphi =$$

$$= \frac{32}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + 2\sin\varphi - 1)d(\cos\varphi + 2\sin\varphi - 1) =$$

$$= \frac{16}{9}\Big[(\cos\varphi + 2\sin\varphi - 1)^2\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{9} .$$

<u>Oplossing 2.</u>

Pas de stelling van Stokes toe op het deel S van de cilindermantel $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ begrensd door de kromme K, de kromme K': $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, $z = 0$ met beginpunt $(\frac{1}{2},0,0)$ en eindpunt $(0,\frac{1}{2},0)$ en het lijnstuk K": $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$, $0 \le z \le 1$.



Uit b) weten we dat op S geldt $(\text{rot}\ \underline{u}, \underline{n}) = 0$ en dus

$$\iint_S (\text{rot}\ \underline{u}, \underline{n})d\sigma = 0 .$$

Dus

$$\int_K (\underline{u},\underline{t})ds - \int_{K''} (\underline{u},\underline{t})ds - \int_{K'} (\underline{u},\underline{t})ds = 0 .$$

Een parametervoorstelling van K' is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{met } 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} .$$

Op K' geldt

$$\underline{u} = (-\tfrac{2}{3}\cos\varphi, -\tfrac{2}{3}\sin\varphi, 0) .$$

Uit

$$\frac{d\underline{x}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

volgt

$$(\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{d\varphi}) = 0 \text{ , dus } \int_{K'} (\underline{u},\underline{t})ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{d\varphi})d\varphi = 0 \text{ .}$$

Een parametervoorstelling van K" is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ t \end{pmatrix} \quad \text{met } 0 \leq t \leq 1 \text{ .}$$

Op K" geldt

$$\underline{u} = (0 , -\frac{2}{3}, \frac{32}{9} t) \text{ .}$$

Met

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

volgt

$$\int_{K''} (\underline{u},\underline{t})ds = \int_0^1 (\underline{u}, \frac{d\underline{x}}{dt})dt = \frac{32}{9} \int_0^1 t\, dt = \frac{16}{9} \text{ ,}$$

dus

$$\int_K (\underline{u},\underline{t})ds = \frac{16}{9} + 0 = \frac{16}{9} \text{ .}$$

5 juni 1973

1. Gegeven de functie

$$f(x,y) = (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - 2x) .$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van f in het gebied bepaald door $y^2 \le x$.

2. In R_3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u}(x,y,z) = (x^3 + 2y + z , y^3 + 2x + z , \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 + x + y) .$$

K is de doorsnijdingskromme van het vlak

$$V:\ x + y - z = 1$$

en het oppervlak

$$S: \begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2 , \\ z \ge 0 . \end{cases}$$

Bereken met behulp van de stelling van Stokes

$$\int_K (\underline{u},\underline{t})ds ,$$

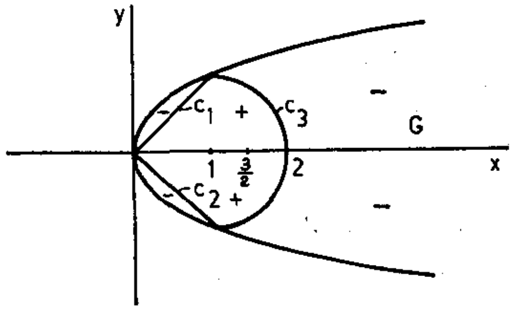
waarbij K doorlopen wordt van (1,0,0) naar (0,1,0).

3. Zij $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{r}$, waarbij r de afstand is van (x,y,z) tot het punt (0,0,1). S is het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
Bereken

$$\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma ,$$

waarbij de normaal $\underline{n}$ naar buiten gericht is.

Oplossingen

1. 

In de figuur is het gebied G: $y^2 \leq x$ en het tekenverloop van f aangegeven. Nullijnen zijn $y = x$, $y = -x$ en $(x-1)^2 + y^2 = 1$: c_1, c_2 en c_3. Stationaire punten van f in het inwendige van G vinden we uit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x(x^2+y^2-2x) + (y^2-x^2)(2x-2) = -4x^3 + 6x^2 - 2y^2 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y(x^2+y^2-2x) + 2y(y^2-x^2) = 2y(2y^2-2x) = 0\ . \end{cases}$$

Van deze vergelijkingen geeft alleen de oplossing $(x,y) = (\frac{3}{2}, 0)$ een punt in het inwendige van G. In dit punt heeft f een globaal maximum, want in het gesloten gebied begrensd door c_1, c_2 en c_3 heeft f een globaal maximum volgens de stelling van Weierstrass. Op de rand van dit gebied is $f = 0$, dus het maximum ligt in het inwendige, dus in het stationaire punt $(\frac{3}{2}, 0)$. Het maximum is ook globaal t.o.v. G want buiten het gesloten gebied begrensd door c_1, c_2 en c_3 is $f(x,y) < 0$. Op de rand van G geldt $y^2 = x$ en

$$f(x, \pm\sqrt{x}) = (x-x^2)(x^2-x) = -(x^2-x)^2 =: g(x) \qquad \text{met } 0 \leq x < \infty\ .$$

De functie g heeft maxima in $x = 0$ (punt $(0,0)$: geen extreem, zie figuur) en in $x = 1$ (punten $(1,\pm 1)$: geen extrema, zie figuur) en een minimum in $x = \frac{1}{2}$ (punten $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{2})$). Dit volgt uit het tekenverloop van

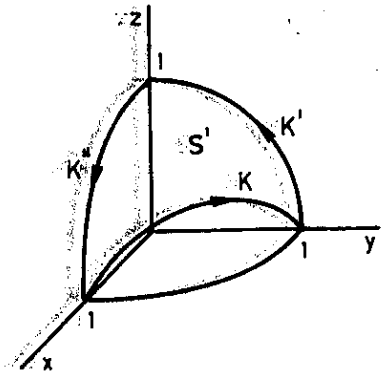
$$g'(x) = -2(x^2-x)(2x-1) = -2x(x-1)(2x-1) \quad \text{op } [0,\infty)\ .$$

In de punten $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{2})$ heeft f lokale minima. Beschouwen we namelijk de gesloten verzamelingen begrensd door c_1 en de parabool $y^2 = x$ resp. c_2 en $y^2 = x$, dan heeft f op deze verzamelingen een globaal minimum en een globaal maximum volgens de stelling van Weierstrass. Het globale maximum is blijkbaar 0 (op c_1 resp. c_2 is $f = 0$); het globale minimum kan niet in het inwendige van de verzamelingen liggen (geen stationaire punten), dus ligt het op de parabool $y^2 = x$ en blijkbaar in de punten $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{2})$. T.o.v. G heeft f in deze punten lokale minima, want f is op G niet naar onder begrensd (bijv.

$\lim_{x\to\infty} f(x, \pm\sqrt{x}) = -\infty$).

Samenvattend:

in het punt $(\frac{3}{2}, 0)$ globaal maximum, $f = \frac{27}{16}$,
in de punten $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{2})$ lokale minima, $f = -\frac{1}{16}$.

2. 

Zij S' het deel van het oppervlak S begrensd door de krommen K,
K': $x = 0$, $z = 1 - y^2$, $0 \le y \le 1$ en
K'': $y = 0$, $z = 1 - x^2$, $0 \le x \le 1$.
Zij $\underline{n}$ de van de oorsprong afwijzende normaal op S', dan geldt

$$\int_K (\underline{u},\underline{t})ds + \int_{K'} (\underline{u},\underline{t})ds + \int_{K''} (\underline{u},\underline{t})ds = \iint_{S'} (\text{rot } \underline{u}, \underline{n})d\sigma ,$$

waarbij K, K' en K" doorlopen worden zoals in de figuur aangegeven.
Op S' is

$$\underline{n} = \frac{(2x,2y,1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

en

$$\text{rot } \underline{u} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3+2y+z & y^3+2x+z & \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+x+y \end{vmatrix} = (y,-x,0) ,$$

$$(\text{rot } \underline{u}, \underline{n}) = 0 .$$

Dus

$$\iint_{S'} (\text{rot } \underline{u}, \underline{n})d\sigma = 0 .$$

Een parametervoorstelling van K' is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 - t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1 .$$

Op K' geldt

$$\underline{u} = (2t + 1 - t^2 , t^3 + 1 - t^2 , \tfrac{1}{2}t^2 + t) .$$

Met

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2t \end{pmatrix}$$

volgt, wegens het omkeren van de richting waarin K' doorlopen wordt bij deze parametervoorstelling,

$$\int_{K'} (\underline{u},\underline{t})ds = - \int_0^1 (\underline{u} , \frac{d\underline{x}}{dt})dt = - \int_0^1 (t^3 + 1 - t^2 - t^3 - 2t^2)dt =$$

$$= - \int_0^1 (1 - 3t^2)dt = 0 .$$

Een parametervoorstelling van K" is

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 - t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1 .$$

Op K" geldt

$$\underline{u} = (t^3 + 1 - t^2 , 2t + 1 - t^2 , \tfrac{1}{2}t^2 + t) .$$

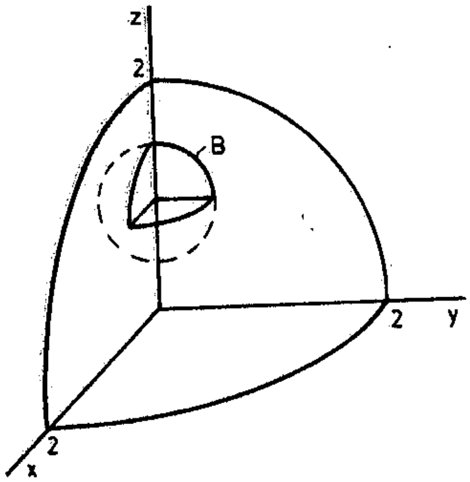
Dus ook

$$\int_{K''} (\underline{u},\underline{t})ds = 0$$

en bijgevolg

$$\int_{K} (\underline{u},\underline{t})ds = 0 .$$

3. Oplossing 1.



Pas de stelling van Gauss toe op het gebied R begrensd door S en het bolopppervlak B: $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \rho^2$ met $0 < \rho < 1$:

$$\iint_S (\text{grad } \varphi , \underline{n}) d\sigma + \iint_B (\text{grad } \varphi , \underline{n}) d\sigma =$$

$$= \iiint_R \text{div grad } \varphi \, d\tau = \iiint_R \Delta(\tfrac{1}{r}) d\tau = 0 ,$$

want $\frac{1}{r}$ is een harmonische functie voor $(x,y,z) \neq (0,0,1)$. Dus

$$\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma = - \iint_B (\text{grad } \varphi , \underline{n}) d\sigma .$$

Op B is $\underline{n} = -\frac{1}{\rho}(x,y,z-1)$ (t.o.v. R naar buiten gericht) en grad $\varphi =$ $= -\frac{1}{\rho^3}(x,y,z-1)$, dus

$$(\text{grad } \varphi , \underline{n}) = \frac{1}{\rho^4}(x^2 + y^2 + (z-1)^2) = \frac{1}{\rho^2} .$$

Hieruit volgt

$$\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma = - \iint_B \frac{1}{\rho^2} d\sigma = - \frac{1}{\rho^2} \times \text{opp.B} = - 4\pi .$$

Oplossing 2.

Gevraagd wordt $\iint_S \frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r}) d\sigma$, waarbij $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$.

Zij R het gebied begrensd door S en pas de derde identiteit van Green toe met $\varphi \equiv 1$:

$$1 = - \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial}{\partial n}(\tfrac{1}{r}) d\sigma , \quad \iint_S \frac{\partial}{\partial n}(\tfrac{1}{r}) d\sigma = - 4\pi .$$

HERKANSINGEN

Van de herkansingstentamens t/m juni 1969 zijn alleen de opgaven die betrekking hebben op wiskunde 40 in deze collectie opgenomen.

22 juni 1966

Op de cilinder $x^2 + y^2 = 1$ is K de schroeflijn $(\cos\varphi, \sin\varphi, \varphi)$, $-\pi \le \varphi \le \pi$, met beginpunt $P(-1, 0, -\pi)$ en eindpunt $Q(-1, 0, \pi)$; L is de rechte van P naar Q.

$\underline{a}$ is het vectorveld (y, z, x).

a) Bereken

$$\int_K (\underline{a},\underline{t})ds.$$

b) Bereken

$$\int_L (\underline{a},\underline{t})ds$$

c) Is het veld $\underline{a}$ conservatief?

Antwoorden:

a) $-\pi$ b) -2π c) nee .

21 januari 1967

1. Bepaal de extrema van de functie f gedefinieerd door $f(x,y) = xy^2$.

2. In R_3 is het volgende vectorveld gegeven:

$$\underline{a}(\underline{x}) = (\cos x, -z, y).$$

Bepaal

$$\iint_S (\text{rot } \underline{a}, \underline{n}) d\sigma$$

waarin S het oppervlak voorstelt gedefinieerd door:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x \geq 0, \end{cases}$$

en $\underline{n}$ de naar (1,0,0) gerichte normaal op S.

Antwoorden:

1. locale maxima 0 in (x,0) met $x < 0$
   locale minima 0 in (x,0) met $x > 0$.

2. -6π .

21 juni 1967

Het veld $\underline{u} = (e^y, e^z, e^x)$, gedefinieerd in R_3, is een vectorpotentiaal van een veld $\underline{v}$; het veld $\underline{v}$ is zelf weer een vectorpotentiaal van een veld $\underline{w}$.

a) Bepaal het veld $\underline{w}$.

b) Het veld $\underline{u}$ heeft zelf ook een vectorpotentiaal. Waarom?

c) Bepaal een mogelijke vectorpotentiaal van $\underline{u}$.

Antwoorden:

a) $\underline{w} = (-e^y, -e^z, -e^x) = -\underline{u}$ c) $-\underline{v} = -(e^z, e^x, e^y)$.

<u>22 januari 1968</u>

Bepaal de extrema van $f(x,y) = xy(x^2 + y^2)$ in het gebied $x^2 + y^2 \leq 1$.

<u>Antwoord:</u>

globale maxima $\frac{1}{2}$ in $\pm\ (\frac{1}{2}\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{2})$
globale minima $-\frac{1}{2}$ in $\pm\ (\frac{1}{2}\sqrt{2},\ -\frac{1}{2}\sqrt{2})$.

17 juni 1968

Gegeven het veld

$$\underline{a} = \left(\frac{4}{3}x^3 + y^2,\ 2xy - \frac{4}{3}y^3 + z^2,\ 2yz\right).$$

a) Toon aan dat dit veld rotatievrij is.

b) Bepaal een potentiaal van $\underline{a}$.

c) Bepaal de punten waar div $\underline{a}$ extreem is binnen het vierkant

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \le x \le 0 \\ 0 \le y \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

en geef aan van welke aard en hoe groot deze extrema zijn.

Antwoorden:

b) $\varphi = \frac{1}{3}x^4 + xy^2 - \frac{1}{3}y^4 + yz^2$

c) div $\underline{a} = 4x^2 - 4y^2 + 2x + 2y$;

globale maxima $\frac{1}{4}$ in $(0,\frac{1}{4})$ en $(-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

globale minima $-\frac{1}{4}$ in $(-\frac{1}{4},0)$ en $(-\frac{1}{4},\frac{1}{2})$.

20 januari 1969

1. Gegeven het vectorveld

$$\underline{a} = (z^2x^2,\ 2x^4 - 2xyz^2,\ z - 1).$$

a) Bepaal div $\underline{a}$.

b) Het oppervlak S in R_3 is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0. \end{cases}$$

Bereken $\iint\limits_S (\underline{a},\underline{n})d\sigma$.

De normaal $\underline{n}$ wijst van de oorsprong af.

2. Bepaal de extrema van $f(x,y) = (1 - x^2)(1 + y^2)$ in het gebied $x^2 + y^2 \leq 1$.

Antwoorden:

1. a) 1 b) $-\frac{\pi}{3}$.

2. globale maxima 2 in (0,1) en (0,-1)
globale minima 0 in (1,0) en (-1,0).

16 juni 1969

1. Bepaal aard en plaats van de extrema van $f(x,y) = xy$ in het gebied $x^2 + y^2 \leq 1$.

2. Gegeven het veld $\underline{a} = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r})$ waarbij $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

   a) Laat zien dat $\underline{a}$ conservatief is.

   b) Bereken $\iint_S (\underline{a},\underline{n})d\sigma$ als S gegeven is door

   $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

   en de normaal in (0,0,1) door $\underline{n} = (0,0,1)$.

   c) Bepaal $\int_K (\underline{a},\underline{t})ds$ als K de kromme in het eerste octant is, die is vastgelegd door

   $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

   beginnend bij (1,0,0) en eindigend bij (0,1,1).

Antwoorden:

1. globale maxima $\frac{1}{2}$ in $\pm\ (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$
   globale minima $-\frac{1}{2}$ in $\pm\ (\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$.

2. b) 2π c) $\sqrt{2} - 1$.

19 januari 1970

1. Gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = (z^2, x^2, y^2).$$

a) Bereken div $\underline{u}$.

b) Het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0. \end{cases}$$

Bereken $\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma$.

De normaal $\underline{n}$ wijst van de oorsprong af.

c) Bereken $\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds$ langs de cirkel K bepaald door

$$\begin{cases} y = 1 \\ x^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

In het punt (1,1,0) is de eenheidsraakvector $\underline{t}$ gelijk aan (0,0,-1).

2. Gegeven $f(x,y) = y^2 - (x^2 - 1)^2$.

Bepaal de extrema, hun aard en waarde op het gebied $x^2 + y^2 \leq 4$.

Antwoorden:

1. a) 0 b) $\frac{\pi}{64}$ c) 0 .

2. globale maxima $\frac{13}{4}$ in $\pm$ ($\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{14}$) en $\pm$ ($\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{14}$)
   globale minima −9 in ($\pm$ 2, 0)
   locaal minimum −1 in (0,0) .

17 juni 1970

1. Gegeven is in R_2 het gebied G, bepaald door $y^2 \leq x \leq 4$.
Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de functie $f(x,y) = y^2-x^2y^2$ op G.

2. In R_3 is gedefinieerd het vectorveld $\underline{u} = (4x,2y,-4z)$.
   a) Laat het oppervlak S in R_3 bepaald zijn door:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Bereken $\iint\limits_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma$. S wordt zo georiënteerd dat de normaal $\underline{n}$ in (0,0,0) gelijk is aan (0,0,-1).

   b) Laat de kromme K met beginpunt (0,0,0) en eindpunt $(\frac{1}{4}\sqrt{2},\frac{1}{4}\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$ bepaald zijn door

$$\begin{cases} x = \cos^2\varphi \sin\varphi \\ y = \cos\varphi \sin^2\varphi \\ z = \varphi. \end{cases} \qquad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4})$$

Bereken $\int\limits_K (\underline{u},\underline{t})ds$ waarin $\underline{t}$ de eenheidsraakvector aan de kromme K voorstelt.

Antwoorden:

1. globale maxima $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ in $(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \pm 3^{-\frac{1}{4}})$
globale minima -60 in $(4, \pm 2)$
locale maxima 0 in $(x,0)$ met $1 < x \leq 4$
locale minima 0 in $(x,0)$ met $0 \leq x < 1$.

2. a) 5π b) $\frac{1}{8}(3 - \pi^2)$.

26 januari 1971

1. Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de functie

$$f(x,y) = 2x^2 + 5xy + 2y^2$$

op het gedeelte van het xy-vlak, gegeven door $x^2 + y^2 \leq 4$.

2. Gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = (yz + y,\ xz - x,\ x^2y^2)\ .$$

Bereken: $\iint\limits_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma$, waarbij S gegeven is door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0\ . \end{cases}$$

De normaal $\underline{n}$ is (0,0,1) in het punt (0,0,1) en is verder continu over het oppervlak S.

3. Gegeven:

$$f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\ .$$

Bereken $\iint\limits_B \frac{\partial f}{\partial n}\, d\sigma$, waarbij B gegeven is door de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

De normaal op de bol B is naar buiten gericht.

Antwoorden:

1. globale maxima 18 in $\pm\ (\sqrt{2},\ \sqrt{2})$
   globale minima -2 in $\pm\ (\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$.

2. $\frac{\pi}{24}$.

3. -4π .

<u>17 juni 1971</u>

1. Gegeven is de functie

$$f(x,y) = (1 + y^2)e^{-x} ,$$

gedefinieerd in

$$G : x^2 + y^2 \leq 2 .$$

Bepaal plaats, aard en waarde der extrema van $f(x,y)$ in G.

2. In R_3 is gegeven het veld

$$\underline{u} = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} , \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} , \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}\right) .$$

Bereken:

a) Een potentiaal φ van $\underline{u}$.

b) $\iint\limits_S z(\underline{u},\underline{n})d\sigma$ als S de cilindermantel voorstelt gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

en $\underline{n}$ de van de z-as af gerichte eenheidsnormaal.

c) $\int\limits_K (\underline{u},\underline{t})ds$ als K de kromme, in het eerste octant gelegen, voorstelt gegeven door $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ met beginpunt $(1,0,1)$ en eindpunt $(0,1,1)$.

<u>Antwoorden</u>:

1. globale maxima $2e$ in $(-1, \pm 1)$
globaal minimum $e^{-\sqrt{2}}$ in $(\sqrt{2}, 0)$.

2. a) $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

b) $2\pi(\sqrt{2} - 1)$

c) 0 .

24 januari 1972

1. Gegeven de functie

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad ,$$

gedefinieerd in

$$G : \tfrac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le 1 \ .$$

Bepaal plaats, aard en waarde der extrema van $f(x,y)$ in G.

2. In R_3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = (z + x,\ y,\ z - x) \ .$$

a) Is het veld $\underline{u}$ conservatief? Motiveer Uw antwoord.

b) Bereken $\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma$ als S de cilindermantel voorstelt, gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 0 \le z \le 1 \ . \end{cases}$$

De normaal $\underline{n}$ wijst van de z-as af.

c) Bereken $\oint_K (\underline{u},\underline{t})ds$ als K gegeven wordt door

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y + z = 0 \ . \end{cases}$$

De eenheidsraakvector $\underline{t}$ in het punt (0,1,-1) is gelijk aan (-1,0,0).

Antwoorden:

1. globale maxima 4 in $(\pm \tfrac{1}{2}, 0)$
globale minima -4 in $(0, \pm \tfrac{1}{2})$

2. a) nee, want rot $\underline{u}$ = (0,2,0)
b) 2π
c) 2π .

15 juni 1972

1. Gegeven de functie

$$f(x,y) = 3x^2y^2 + 3x^4 + 2y .$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van f in het gebied, bepaald door

$$x^2 + y^2 \leq 1 .$$

2. In R_3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2\right) .$$

a) Bereken $\iint\limits_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma$, waarbij het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

en $\underline{n}$ de normaal is die van de z-as afwijst.

b) Bereken $\int\limits_K (\underline{u},\underline{t})ds$ als K de kromme is in het eerste octant gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

met beginpunt (1,0,1) en eindpunt (0,2,2).

Antwoorden:

1. globale maxima $\frac{10}{3}$ in $(\pm \frac{2}{3}\sqrt{2}, \frac{1}{3})$
globaal minimum -2 in $(0,-1)$

2. a) -3π
b) 3 .

22 januari 1973

1. Gegeven de functie

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)} .$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van f in het gebied bepaald door $x^2 + y^2 \le 4$.

2. In R_3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = (x,y,z) .$$

Bereken $\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma$, waarbij het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z , \\ 1 \le z \le 4 , \end{cases}$$

en de normaal $\underline{n}$ van de z-as afwijst.

3. In R_2 is gegeven het vectorveld met componenten

$$u(x,y) = 6x^2y + 3xy^2 + 2y^3 ,$$

$$v(x,y) = 2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 .$$

Bereken $\int_K u\,dx + v\,dy$, waarbij K de rechte is van (0,0) naar (2,1).

Antwoorden:

1. Globale maxima e^{-1} in $(\pm 1,0)$;
   globale minima $-e^{-1}$ in $(0,\pm 1)$.

2. $\frac{15}{2}\pi$.

3. 26.

<u>14 juni 1973</u>

1. Gegeven de functie

$$f(x,y) = (x^2 - 2x + y^2)(x^2 - 4x + y^2) .$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van f in het gebied bepaald door

$$\begin{cases} x \le 2 , \\ x^2 - 10x + y^2 \le 0 . \end{cases}$$

2. In R_3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = \left(\frac{y(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + (z+1)^2} , \frac{x(z+1)^2}{x^2 + y^2 + (z+1)^2} , x^2 + y^2 + z \right) .$$

a) Bepaal div $\underline{u}$.

b) Bereken $\iint_S (\underline{u},\underline{n})d\sigma$ als S het oppervlak is bepaald door $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z \ge 0 , \end{cases}$

en $\underline{n}$ in (0,0,2) gelijk is aan (0,0,1).

3. Bepaal in R_3 een vectorveld $\underline{v}$ zodanig dat

$$\begin{cases} \text{div } \underline{v} = 0 \\ \text{rot } \underline{v} = (yz, xz, -2xy) . \end{cases}$$

<u>Antwoorden:</u>

1. Globale maxima 192 in $(2,\pm 4)$;
   globale minima -4 in $(2,\pm\sqrt{2})$;
   lokaal maximum $\frac{51\sqrt{17} - 107}{32}$ in $\left(\frac{9 - \sqrt{17}}{4} , 0\right)$.

2. a) 1.
   b) $\frac{40}{3}\pi$.

3. Bijvoorbeeld $\underline{v} = \left(\frac{1}{2} xz^2 + \frac{1}{3} x^3 , -x^2 y - \frac{1}{2} yz^2 , 0\right)$.