

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 40

Prof. Dr. J. Boersma

bestemd voor

WSK-IV, N-IV, W-IV, E-IV en T-IV

Voorjaarssemester 1978



Technische Hogeschool Eindhoven

Jap

Onderafdeling der Wiskunde

Wiskunde 40

bestemd voor WSK-IV, N-IV, W-IV, E-IV en T-IV

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 40

bestemd voor

WSK-IV, N-IV, W-IV, E-IV en T-IV

Voorjaarssemester 1978

INHOUDSOPGAVE

blz.

Hoofdstuk 1.	Vector-analyse	1
1.1.	Scalar- en vectorvelden, vectoralgebra	1
1.2.	Gradiënt, divergentie, rotatie, Laplace operator	4
1.3.	Lijnintegralen, oppervlakte-integralen, volume-integralen	8
1.4.	Stelling van Gauss	18
1.5.	Stelling van Stokes	24
1.6.	Scalaire potentiaal, conservatieve velden, rotatievrije velden	31
1.7.	Vectorpotentiaal, bronvrije velden, divergentievrije velden	38
1.8.	Bepaling van een veld uit zijn rotatie en divergentie, stelling van Helmholtz	44
1.9.	Vectoroperaties in kromlijnige orthogonale coördinaten	48
Hoofdstuk 2.	Partiële differentiaalvergelijkingen	57
2.1.	Inleiding	57
2.2.	Methode van separatie van variabelen	66
2.3.	Golfvergelijking, diffusievergelijking	89
2.4.	Potentiaaltheorie	102
2.5.	Eenduidigheidsstellingen voor de golfvergelijking en de diffusievergelijking	112

Aanvulling

- De stelling(en) van NEWTON-LEIBNIZ-GAUSS-GREEN-OSTROGRADSKII-STOKES-POINCARE
- Formulelijst Wiskunde 40

Hoofdstuk 1. Vector-analyse

1.1. Scalar- en vectorvelden, vectoralgebra

In \mathbb{R}^3 kiezen we een rechthoekig of cartesisch assenstelsel. Elk punt wordt dan vastgelegd door drie cartesische coördinaten die we ook kunnen opvatten als de elementen van een vector: $\underline{x} = (x, y, z)$ of ook wel $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. De notatie \underline{x} zal worden gebruikt zowel voor een punt in \mathbb{R}^3 als voor de verbindingspijl van de oorsprong naar dat punt. De coördinaten x, y, z van het punt \underline{x} zijn tevens de componenten van de vector \underline{x} t.o.v. de standaardbasis van \mathbb{R}^3 :

$$\underline{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \underline{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \underline{e}_3 = (0, 0, 1) .$$

Deze basisvectoren zijn gericht langs de assen van het cartesisch coördinaatstelsel.

N.B. De voorgaande notatie voor vectoren in \mathbb{R}^3 wijkt enigszins af van die uit de lineaire algebra. Ook zullen we hier dezelfde notatie gebruiken voor rij- en kolomvectoren.

Een functie $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ noemt men wel een scalarveld; aan elk punt $\underline{x} = (x, y, z)$ is een getal $\varphi(\underline{x}) = \varphi(x, y, z)$ toegevoegd.

Fysische voorbeelden: temperatuur, ladingsdichtheid, massadichtheid, elektrische potentiaal.

Bij een scalarveld behoren equiscalaire oppervlakken, dat zijn de oppervlakken $\varphi(x, y, z) = \text{constant}$. Indien φ een potentiaal is, spreekt men van equipotentiaal oppervlakken.

Een vectorfunctie $\underline{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wordt vaak geïnterpreteerd als een vectorveld; aan elk punt $\underline{x} = (x, y, z)$ is een vector

$$\underline{v}(\underline{x}) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$$

toegevoegd. Deze vector $\underline{v}(\underline{x})$ denken we ons als een pijl niet vanuit de oorsprong maar vanuit het punt \underline{x} . De functies v_1, v_2, v_3 heten de componentfuncties van \underline{v} .

Fysische voorbeelden: elektrisch veld, magnetisch veld, stromingsveld in een stromende vloeistof.

Een goed inzicht in het verloop van een vectorveld bieden de zgn. veldlijnen. (In geval van een krachtveld of een stromingsveld spreekt men ook van resp. krachtlijnen of stroomlijnen.) Een veldlijn is een kromme die in elk van zijn punten raakt aan de vector \underline{v} ter plaatse. Zij nu

$$\underline{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

de (nog onbekende) parameterrepresentatie van een veldlijn, met t als parameter. Dan dient te gelden

$$\frac{dx}{dt} = \lambda v_1(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = \lambda v_2(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = \lambda v_3(x, y, z),$$

waarin λ een willekeurige evenredigheidsfactor voorstelt. Door oplossing van bovenstaand stelsel van drie differentiaalvergelijkingen zijn de veldlijnen te bepalen.

Voorbeeld 1. De elektrische veldsterkte \underline{E} tengevolge van een lading q in de oorsprong wordt gegeven door

$$\underline{E} = (E_x, E_y, E_z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

hierbij zijn E_x, E_y, E_z resp. de x -, y -, z -component van \underline{E} en ϵ_0 is de permittiviteit van vacuum.

Voor de veldlijnen vinden we dan het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \frac{x}{r^3}, \quad \frac{dy}{dt} = \lambda \frac{y}{r^3}, \quad \frac{dz}{dt} = \lambda \frac{z}{r^3},$$

of, na eliminatie van t ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}.$$

De algemene oplossing van het laatste stelsel luidt: $y = C_1 x, z = C_2 x$, waarin C_1, C_2 willekeurige constanten zijn. De veldlijnen zijn dus rechten door de oorsprong.

N.B. In de rest van dit hoofdstuk zullen we aannemen dat alle operaties van differentiëren uitgevoerd op scalar- en vectorvelden betekenis hebben, m.a.w. de betreffende velden zullen voldoende vaak differentieerbaar zijn.

In het college Wiskunde 20, 1.2, is ingevoerd het scalair product of inwendig product van twee vectoren. Zij $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, dan wordt het scalair product $(\underline{a}, \underline{b})$ gegeven door

$$(\underline{a}, \underline{b}) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

In het bijzonder is

$$(\underline{a}, \underline{a}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 =: |\underline{a}|^2 ,$$

waarbij $|\underline{a}|$ de lengte van \underline{a} voorstelt.

Zij θ de hoek tussen de vectoren \underline{a} en \underline{b} , dan volgt met de cosinusregel:

$$(\underline{a}, \underline{b}) = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \theta .$$

Indien $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$ dan is $\underline{a} \perp \underline{b}$ (\underline{a} loodrecht op \underline{b}), en omgekeerd.

Voor de basisvectoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ geldt

$$(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = 0 \text{ als } i \neq j \text{ en } = 1 \text{ als } i = j ,$$

i.e. de basis is orthonormaal.

In het college Wiskunde 20, 1.2.8, is ingevoerd het vectorproduct of uitwendig product van twee vectoren in \mathbb{R}^3 . Zij $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, dan wordt het vectorproduct $\underline{a} \times \underline{b}$ gegeven door

$$\underline{a} \times \underline{b} := \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) .$$

Bij deze definitie wordt verondersteld dat de basisvectoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ een rechtse schroef vormen, d.w.z. indien we een rechtse schroef draaien van \underline{e}_1 naar \underline{e}_2 over de kleinste hoek, valt de bewegingsrichting van de schroef samen met de richting van \underline{e}_3 . We spreken dan van een rechts (cartesisch) coördinatenstelsel.

Zonder bewijs vermelden we nog de volgende eigenschappen van het vectorproduct.

Eigenschappen. 1) $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}$; $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$; $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}$ vormen een rechtse schroef.
2) Zij θ de hoek tussen de vectoren \underline{a} en \underline{b} , met $0 \leq \theta \leq \pi$, dan is

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \theta ,$$

i.e. $|\underline{a} \times \underline{b}|$ is de oppervlakte van het parallellogram dat door \underline{a} en \underline{b} opgespannen wordt.

3) $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$, zodat het vectorproduct niet commutatief is.
4) $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a}, \underline{c})\underline{b} - (\underline{b}, \underline{c})\underline{a}$,
 $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a}, \underline{c})\underline{b} - (\underline{a}, \underline{b})\underline{c}$, } zodat het vectorproduct niet associatief is.

5) $(\underline{a}, \underline{b} \times \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \pm$ inhoud van het parallellepipedum dat door \underline{a} , \underline{b} en \underline{c} opgespannen wordt.

6) $(\underline{a}, \underline{b} \times \underline{c}) = 0$ dan en slechts dan als \underline{a} , \underline{b} en \underline{c} in één vlak liggen, oftewel, als \underline{a} , \underline{b} en \underline{c} lineair afhankelijk zijn.

7) $(\underline{a}, \underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{b}, \underline{c} \times \underline{a}) = (\underline{c}, \underline{a} \times \underline{b})$.

Voor de basisvectoren $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ geldt

$$\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3, \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1, \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2 .$$

1.2. Gradiënt, divergentie, rotatie, Laplace operator

1.2.1. Definitie. Zij $\varphi(\underline{x})$ een scalarveld, dan is grad φ (gradiënt van φ) het vectorveld gegeven door

$$\text{grad } \varphi := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) .$$

In plaats van grad φ gebruikt men ook de notatie $\nabla \varphi$ (nabla φ). Hierbij is ∇ op te vatten als een symbolische vector: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

Zoals reeds aangegeven in het college Wiskunde 20, 2.5, laat grad φ de volgende interpretaties toe:

(i) Zij \underline{a} een punt in \mathbb{R}^3 en \underline{v} een vector met $|\underline{v}| = 1$. De richtingsafgeleide van φ in \underline{a} in de richting van \underline{v} wordt gegeven door

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\underline{a} + t\underline{v}) - \varphi(\underline{a})}{t} = (\text{grad } \varphi(\underline{a}), \underline{v}) = |\text{grad } \varphi(\underline{a})| \cos \theta ,$$

waarin θ de hoek is tussen grad $\varphi(\underline{a})$ en \underline{v} . Indien $|\text{grad } \varphi(\underline{a})| \neq 0$, is de richtingsafgeleide maximaal als $\theta = 0$, d.w.z. in de richting van grad $\varphi(\underline{a})$. De vector grad $\varphi(\underline{a})$ wijst dus in de richting waarin φ het sterkst toeneemt, en $|\text{grad } \varphi(\underline{a})|$ is gelijk aan de richtingsafgeleide in genoemde richting.

(ii) Door het punt $\underline{a} = (a, b, c)$ gaat het equiscalair oppervlak met vergelijking

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(a, b, c) .$$

De vergelijking van het raakvlak aan dit oppervlak in het punt \underline{a} luidt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\underline{a})(x - a) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\underline{a})(y - b) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\underline{a})(z - c) = 0 ,$$

oftewel $(\text{grad } \varphi(\underline{a}), \underline{x} - \underline{a}) = 0$. Hieruit volgt dat de vector $\text{grad } \varphi(\underline{a})$ loodrecht staat op het raakvlak en daarmee op het equiscalair oppervlak in \underline{a} . De veldlijnen van het vectorveld $\text{grad } \varphi$ zijn dan krommen loodrecht op alle equiscalaire oppervlakken $\varphi = \text{constant}$, of anders gezegd, de veldlijnen zijn de orthogonale trajectoriën van de equiscalaire oppervlakken.

Voorbeeld 1. De elektrische veldsterkte \underline{E} tengevolge van een lading q in de oorsprong, als gegeven in 1.1, voorbeeld 1, is af te leiden uit een elektrische potentiaal φ :

$$\underline{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

De equipotentiaal oppervlakken zijn nu bollen met de oorsprong als middelpunt. Orthogonale trajectoriën van deze bollen zijn alle rechten door de oorsprong. Deze rechten vormen de veldlijnen van het elektrisch veld.

1.2.2. Definitie. Zij $\underline{v}(\underline{x}) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$ een vectorveld, dan is $\text{div } \underline{v}$ (divergentie van \underline{v}) het scalarveld gegeven door

$$\text{div } \underline{v} := \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} .$$

In plaats van $\text{div } \underline{v}$ gebruikt men ook de notatie (∇, \underline{v}) ; bij uitwerking van het scalair product (∇, \underline{v}) ontstaat er

$$(\nabla, \underline{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \text{div } \underline{v} .$$

1.2.3. Definitie. Zij $\underline{v}(\underline{x}) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$ een vectorveld, dan is $\text{rot } \underline{v}$ (rotatie van \underline{v}) het vectorveld gegeven door

$$\text{rot } \underline{v} := \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) .$$

In plaats van $\text{rot } \underline{v}$ gebruikt men ook de notaties $\nabla \times \underline{v}$ en $\text{curl } \underline{v}$ (in de Engelse literatuur). Bij uitwerking van het vectorproduct $\nabla \times \underline{v}$ ontstaat er

$$\nabla \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \text{rot } \underline{v} .$$

1.2.4. Definitie. Zij $\varphi(\underline{x})$ een scalarveld, dan wordt de Laplace operator Δ gedefinieerd door

$$\Delta \varphi := \text{div grad } \varphi = (\nabla, \nabla \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} .$$

In geval van een vectorveld $\underline{v}(\underline{x}) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$ definiëren we evenzo

$$\Delta \underline{v} := (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3) .$$

1.2.5. Opmerking. Met nadruk wordt er op gewezen dat de voorgaande definities van grad, div, rot, Δ alleen geldig zijn in een rechts cartesisch coördinatenstelsel. Alle coördinaten en componenten van vectoren zijn betrokken op een vast, rechts, cartesisch x, y, z -assenstelsel. De voorgaande definities zijn duidelijk coördinaat-afhankelijk. In 1.4 en 1.5 zullen voor $\text{div } \underline{v}$ en $\text{rot } \underline{v}$ "coördinaatvrije" definities worden gegeven, onafhankelijk van de keuze van het coördinatenstelsel. (Een coördinaat-vrije definitie van $\text{grad } \varphi$ zit in feite opgesloten in de boven gegeven interpretatie (i) van de gradiënt.) Tevens wordt daarbij ingegaan op de fysische betekenis van $\text{div } \underline{v}$ en $\text{rot } \underline{v}$. In 1.9 zullen formules worden afgeleid voor de vectoroperaties grad, div en rot in kromlijnige orthogonale coördinaten, met name in cylindercoördinaten en in bolcoördinaten.

1.2.6. Rekenregels. Laat $\underline{u}(\underline{x})$ en $\underline{v}(\underline{x})$ vectorvelden zijn en zij $\varphi(\underline{x})$ een scalarveld, dan is:

- 1) $\text{div}(\varphi \underline{v}) = \varphi \text{div } \underline{v} + (\text{grad } \varphi, \underline{v}) ,$
- 2) $\text{rot}(\varphi \underline{v}) = \varphi \text{rot } \underline{v} + (\text{grad } \varphi) \times \underline{v} ,$
- 3) $\text{div}(\underline{u} \times \underline{v}) = (\underline{v}, \text{rot } \underline{u}) - (\underline{u}, \text{rot } \underline{v}) ,$

4) $\text{rot rot } \underline{v} = \text{grad div } \underline{v} - \Delta \underline{v} ,$

5) $\text{rot grad } \varphi = \underline{0} ,$

6) $\text{div rot } \underline{v} = 0 .$

Bewijs. We geven slechts de afleiding van de regels 1), 4), 5) en 6).

1)
$$\begin{aligned} \text{div}(\varphi \underline{v}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi v_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi v_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi v_3) = \\ &= \varphi \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} v_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} v_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} v_3 = \\ &= \varphi \text{ div } \underline{v} + (\text{grad } \varphi, \underline{v}) . \end{aligned}$$

4) Beschouw de x-component:

$$\begin{aligned} (\text{rot rot } \underline{v})_x &= \frac{\partial}{\partial y}(\text{rot } \underline{v})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\text{rot } \underline{v})_y = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right) = \\ &= (\text{grad div } \underline{v})_x - \Delta v_1 ; \end{aligned}$$

analoog voor de y- en z-component.

5) Voor de x-component geldt

$$(\text{rot grad } \varphi)_x = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0 ;$$

analoog voor de y- en z-component.

6) $\text{div rot } \underline{v} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0 .$ □

Voorbeelden. 2) Voor het vectorveld $\underline{x} = (x, y, z)$ geldt

$$\text{div } \underline{x} = 3, \text{ rot } \underline{x} = \underline{0}, \text{ grad } |\underline{x}| = \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}, \Delta |\underline{x}| = \frac{2}{|\underline{x}|} .$$

- 3) De elektrische veldsterkte \underline{E} tengevolge van een lading q in de oorsprong wordt gegeven door (zie 1.1, voorbeeld 1)

$$\underline{E} = (E_x, E_y, E_z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Door berekening is te verifiëren dat $\text{div } \underline{E} = 0$ en $\text{rot } \underline{E} = \underline{0}$.

Blijkens voorbeeld 1 is het veld \underline{E} ook af te leiden uit een elektrische potentiaal φ :

$$\underline{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Met behulp van 1.2.6, regel 5) volgt dan nog eens zonder rekenwerk

$$\text{rot } \underline{E} = -\text{rot grad } \varphi = \underline{0}.$$

De uitkomst $\text{div } \underline{E} = 0$ impliceert voor φ :

$$\text{div grad } \varphi = \Delta\varphi = 0, \quad \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \text{ voor } r \neq 0.$$

- 4) De rotatie van een star lichaam om een vaste as door de oorsprong wordt beschreven door de hoeksnelheidsvector $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$; $\underline{\omega}$ is gericht langs de rotatie-as en $|\underline{\omega}|$ is de hoeksnelheid. De snelheid \underline{v} van een punt \underline{x} van het lichaam wordt dan gegeven door

$$\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{x} = (\omega_2 z - \omega_3 y, \omega_3 x - \omega_1 z, \omega_1 y - \omega_2 x).$$

Berekening van de rotatie levert

$$\text{rot } \underline{v} = (2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3) = 2\underline{\omega}.$$

1.3. Lijnintegralen, oppervlakte-integralen, volume-integralen

Lijnintegralen. Zij K een kromme in \mathbb{R}^3 gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$. We nemen aan dat de afgeleide $\dot{\underline{x}}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$ continu en $\neq \underline{0}$ is; K heet dan een gladde kromme.

Zij $f(\underline{x})$ een functie gedefinieerd op K .

In het college Wiskunde 20, 4.2, is de lijnintegraal van f over K als volgt gedefinieerd. Verdeel K in infinitesimale elementen E_i met maat $\mu(E_i)$. Kies punten $\xi_i \in E_i$ en vorm de som $\sum_1^n f(\xi_i) \mu(E_i)$. Laat nu het aantal elementen tot oneindig naderen en de afmetingen der elementen tot 0 naderen. Indien dan de limiet van de voorgaande som bestaat, noemt men deze limiet de lijnintegraal van f over K .

Neem nu als infinitesimale elementen van K lijnelementen van het type

$$E := \{\underline{x}(t) \mid t_1 \leq t \leq t_2\}$$

waarbij $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ en $\Delta t := t_2 - t_1$ klein is. Als maat van E nemen we de booglengte Δs :

$$\mu(E) = \Delta s \approx |\underline{x}(t_2) - \underline{x}(t_1)| \approx |\dot{\underline{x}}(t_1)| \Delta t .$$

De lijnintegraal van f over K wordt nu genoteerd als $\int_K f(\underline{x}) ds$. Op grond van de hierboven gegeven benadering voor Δs geldt

$$1.3.1. \quad \int_K f(\underline{x}) ds = \int_a^b f(\underline{x}(t)) |\dot{\underline{x}}(t)| dt = \int_a^b f(\underline{x}(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt .$$

Als een kromme slechts stuksgewijs glad is, definieert men de lijnintegraal als de som van de lijnintegralen over de gladde stukken.

Door $f = 1$ te stellen in 1.3.1, volgt dat de booglengte van K wordt gegeven door

$$\int_K ds = \int_a^b |\dot{\underline{x}}(t)| dt .$$

De lengte van de boog van K tussen het beginpunt $\underline{x}(a)$ en een punt $\underline{x}(t)$ wordt gegeven door

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\underline{x}}(\tau)| d\tau .$$

In plaats van t is nu ook de booglengte s als parameter voor K te gebruiken en er geldt

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\underline{x}}(t)| .$$

In het college Wiskunde 20, 2.1.3, is afgeleid dat de vector $\dot{\underline{x}}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ raakt aan de kromme K in het punt $\underline{x}(t)$. We voeren nu in de eenheidsraakvector aan K:

$$\underline{t} := \frac{\dot{\underline{x}}(t)}{|\dot{\underline{x}}(t)|} \quad (\text{dus } |\underline{t}| = 1) .$$

Bij gebruik van de booglengte s als parameter voor K is ook

$$\underline{t} = \frac{d\underline{x}}{dt} / \frac{ds}{dt} = \frac{d\underline{x}}{ds} .$$

Zij nu $\underline{v}(\underline{x}) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$ een vectorveld gedefinieerd op K . Een veel voorkomend type lijnintegraal is dan

$$1.3.2. \quad \int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds = \int_a^b (\underline{v}(\underline{x}(t)), \dot{\underline{x}}(t)) dt .$$

In plaats van de laatste notatie schrijft men ook wel

$$\begin{aligned} \int_a^b (\underline{v}(\underline{x}(t)), \dot{\underline{x}}(t)) dt &= \int_a^b (v_1 \frac{dx}{dt} + v_2 \frac{dy}{dt} + v_3 \frac{dz}{dt}) dt = \\ &=: \int_K v_1(x,y,z) dx + v_2(x,y,z) dy + v_3(x,y,z) dz . \end{aligned}$$

Laat \underline{v} een krachtveld zijn werkend op een deeltje met bijv. eenheidsmassa of eenheidslading. De lijnintegraal $\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds$ is dan te interpreteren als de arbeid door het veld verricht bij de beweging van het deeltje langs K . In het geval dat $\underline{v} = \text{grad } \varphi$, is 1.3.2 te herleiden tot een eenvoudige vorm.

1.3.3. Stelling. Zij $\varphi(\underline{x})$ een scalarveld. Voor elke kromme K met beginpunt \underline{p} en eindpunt \underline{q} , gelegen in de definitieverzameling van φ , geldt

$$\int_K (\text{grad } \varphi, \underline{t}) ds = \varphi(\underline{q}) - \varphi(\underline{p}) .$$

Bewijs. Zij K beschreven door de parametervoorstelling $\underline{x}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ met de booglengte s langs K als parameter. Dan is

$$(\text{grad } \varphi, \underline{t}) = (\text{grad } \varphi, \frac{d\underline{x}}{ds}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} ,$$

$$\int_K (\text{grad } \varphi, \underline{t}) ds = \int_K \frac{d\varphi}{ds} ds = \varphi(\underline{q}) - \varphi(\underline{p}) . \quad \square$$

Opmerking. Voor een vectorveld $\underline{v} = \text{grad } \varphi$ is de lijnintegraal $\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds$ langs een kromme van \underline{p} naar \underline{q} , onafhankelijk van de gekozen weg. Velden met deze eigenschap heten conservatieve velden; we komen hierop terug in 1.6.

Voorbeeld 1. Zij gegeven het vectorveld $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{x} = (x, y, z)$. We berekenen $\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds$ langs een drietal krommen K , alle met beginpunt $(0, 0, 0)$ en eindpunt $(1, 1, 1)$.

- (i) K is de verbindingsrechte van $(0, 0, 0)$ en $(1, 1, 1)$, te beschrijven door de parameteraanpak $\underline{x}(t) = (t, t, t)$, $0 \leq t \leq 1$. Dan is

$$\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds = \int_0^1 (\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) dt = \int_0^1 3t dt = \frac{3}{2}.$$

- (ii) K bestaat uit de rechte lijnstukken K_1 van $(0, 0, 0)$ naar $(1, 0, 0)$, K_2 van $(1, 0, 0)$ naar $(1, 1, 0)$ en K_3 van $(1, 1, 0)$ naar $(1, 1, 1)$. Dan is

$$\begin{aligned} \int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds &= \int_{K_1} (\underline{v}, \underline{t}) ds + \int_{K_2} (\underline{v}, \underline{t}) ds + \int_{K_3} (\underline{v}, \underline{t}) ds = \\ &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 y dy + \int_0^1 z dz = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

- (iii) K is de kromme met parameteraanpak $\underline{x}(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$. Dan is

$$\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds = \int_0^1 (\underline{v}(\underline{x}(t)), \dot{\underline{x}}(t)) dt = \int_0^1 (t + 2t^3 + 3t^5) dt = \frac{3}{2}.$$

De gelijke uitkomst in de drie gevallen doet vermoeden dat \underline{v} te schrijven is als $\underline{v} = \text{grad } \varphi$. Inderdaad blijkt eenvoudig dat $\varphi(\underline{x}) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ voldoet. Voor elke kromme K met beginpunt $(0, 0, 0)$ en eindpunt $(1, 1, 1)$ is dan

$$\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds = \int_K (\text{grad } \varphi, \underline{t}) ds = \varphi(1, 1, 1) - \varphi(0, 0, 0) = \frac{3}{2}.$$

Oppervlakte-integralen. Een oppervlak in \mathbb{R}^3 is op verschillende manieren analytisch te beschrijven, namelijk door een

- (i) impliciete voorstelling $F(x, y, z) = 0$;
(ii) expliciete voorstelling $z = g(x, y)$, $(x, y) \in G$, waarbij G een zeker gebied in het (x, y) -vlak is;

(iii) parametervoorstelling $\underline{x} = \underline{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in G$, waarbij G een zeker gebied in het (u,v) -vlak is. (N.B. De parameters u, v moeten niet verward worden met eventuele vectorfuncties $\underline{u}(\underline{x}), \underline{v}(\underline{x})$.)

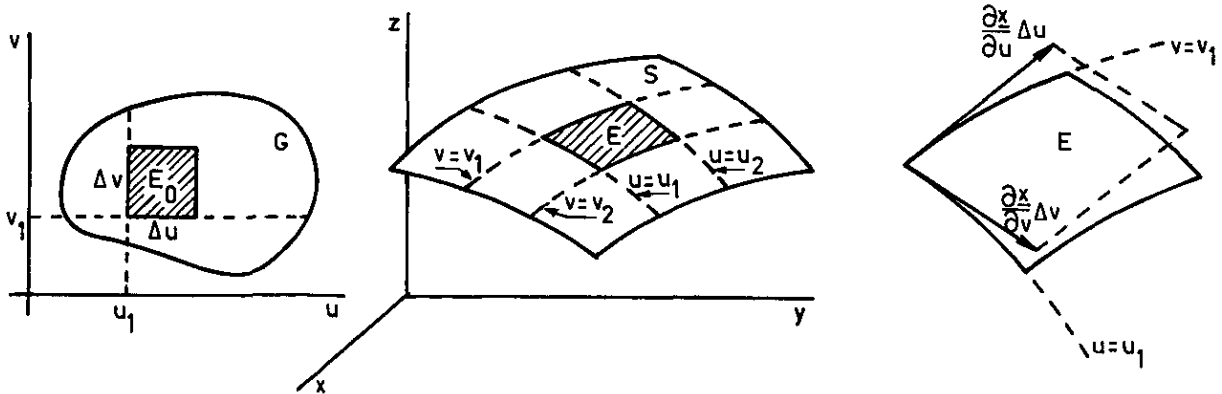
Beschouw nu een oppervlak S in \mathbb{R}^3 gegeven door de parametervoorstelling als boven. We nemen aan dat $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$ continu en $\neq \underline{0}$ is; S heet dan een glad oppervlak. Zij $f(\underline{x})$ een functie gedefinieerd op S .

We wensen dan te definiëren de oppervlakte-integraal van f over S . We gaan daarbij op de bekende manier te werk. Verdeel S in infinitesimale elementen E_i met maat $\mu(E_i)$, kies punten $\underline{\xi}_i \in E_i$ en vorm de som $\sum_i f(\underline{\xi}_i) \mu(E_i)$. Laat vervolgens het aantal elementen tot oneindig naderen en de afmetingen der elementen tot 0 naderen. Indien dan de voorgaande som een limiet bezit, noemt men deze limiet de oppervlakte-integraal van f over S .

Als infinitesimale elementen van S nemen we oppervlakte-elementen van de vorm

$$E := \{ \underline{x}(u,v) \mid (u,v) \in E_0 \}, \quad E_0 := \{ (u,v) \mid u_1 \leq u \leq u_2, v_1 \leq v \leq v_2 \}$$

waarbij $E_0 \subset G$ en $\Delta u := u_2 - u_1$, $\Delta v := v_2 - v_1$ klein zijn; zie onderstaande figuur.



Het element E wordt begrensd door de zgn. parameterkrommen $u = u_1$, $u = u_2$, $v = v_1$, $v = v_2$ op S . Als maat van E nemen we de oppervlakte $\Delta \sigma$ die als volgt wordt benaderd. Het element E is bij benadering een parallellogram opgespannen door de vectoren $\underline{x}(u_2, v_1) - \underline{x}(u_1, v_1)$ en $\underline{x}(u_1, v_2) - \underline{x}(u_1, v_1)$. Deze vectoren zijn op hun beurt te benaderen door

$$\underline{x}(u_2, v_1) - \underline{x}(u_1, v_1) \approx \frac{\partial \underline{x}}{\partial u}(u_1, v_1) \Delta u, \quad \underline{x}(u_1, v_2) - \underline{x}(u_1, v_1) \approx \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}(u_1, v_1) \Delta v.$$

Merk op dat $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \Delta u$ en $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \Delta v$ raakvectoren zijn aan de krommen $v = v_1$ en $u = u_1$ in het punt $\underline{x}(u_1, v_1)$; zie het rechter gedeelte van de figuur op blz. 12. Het parallelogram opgespannen door $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \Delta u$ en $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \Delta v$ heeft een oppervlakte gelijk aan $\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v$. Daarmee vinden we voor de maat $\mu(E)$:

$$\mu(E) = \Delta \sigma \approx \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v .$$

De oppervlakte-integraal van f over S wordt nu genoteerd als $\iint_S f(\underline{x}) d\sigma$. Op grond van de hierboven gegeven benadering voor $\Delta \sigma$ geldt

$$1.3.4. \quad \iint_S f(\underline{x}) d\sigma = \iint_G f(\underline{x}(u,v)) \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| du dv .$$

Als een oppervlak slechts stuksgewijs glad is, definieert men de oppervlakte-integraal als de som van de oppervlakte-integralen over de gladde stukken. Door $f = 1$ te stellen in 1.3.4, volgt dat de oppervlakte van S wordt gegeven door

$$\iint_S d\sigma = \iint_G \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| du dv .$$

Voorbeelden. 2) Zij het oppervlak S gegeven door de expliciete voorstelling $z = z(x,y)$, $(x,y) \in G$. Deze is aan te vullen tot de parametervoorstelling $\underline{x} = (x,y,z(x,y))$, $(x,y) \in G$, waarin x en y als parameters fungeren. Dan is

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial x} = (1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}), \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial y} = (0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}), \quad \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial y} \right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} .$$

De oppervlakte-integraal van een functie f over S wordt nu

$$\iint_S f(\underline{x}) d\sigma = \iint_G f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

in overeenstemming met college Wiskunde 20, 4.4.3.

3) Zij het oppervlak S gegeven door $z = z(r,\varphi)$, waarin r,φ,z cylindercoördinaten zijn. Hiermee correspondeert de parametervoorstelling

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z(r,\varphi)$$

voor S , met r en φ als parameters. Via een eenvoudige berekening blijkt

$$\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \right| = r \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} .$$

4) De eenheidsbol S is te beschrijven door een parametervoorstelling in bolcoördinaten:

$$x = \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \cos \theta, \quad (\theta, \varphi) \in G,$$

waarbij G het gebied is bepaald door $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Dan is $\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \right| = \sin \theta$. De oppervlakte van de eenheidsbol wordt nu gegeven door

$$\iint_S d\sigma = \iint_G \sin \theta \, d\theta d\varphi = \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi.$$

Definitie. De normaal \underline{n} op een oppervlak S in een punt \underline{x} van S is een vector met lengte 1 die loodrecht staat op het raakvlak aan S in \underline{x} . (Er zijn twee zulke vectoren!)

Laat nu het oppervlak S gegeven zijn door de parametervoorstelling $\underline{x} = \underline{x}(u, v)$, $(u, v) \in G$, en neem aan dat $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$ continu en $\neq \underline{0}$ is; S is dan een glad oppervlak. In een punt \underline{x} van S raken de vectoren $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$ en $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$ aan de parameterkrommen $v = \text{constant}$ en $u = \text{constant}$ op S ; zie de figuur op blz. 12. Deze vectoren liggen dus in het raakvlak aan S in \underline{x} . De normaal \underline{n} wordt nu verkregen uit het vectorproduct van $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$ en $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$:

1.3.5.
$$\underline{n} = \frac{\pm 1}{\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right|} \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right).$$

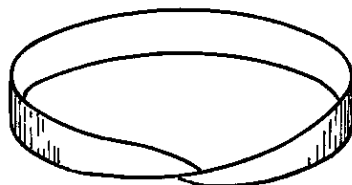
Merk op dat $\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| \neq 0$ voor een glad oppervlak. Een glad oppervlak heeft dus in elk punt een raakvlak en twee normalen.

In geval het oppervlak S gegeven is door een expliciete voorstelling $z = z(x, y)$, $(x, y) \in G$, volgt met behulp van voorbeeld 2 voor de normaal:

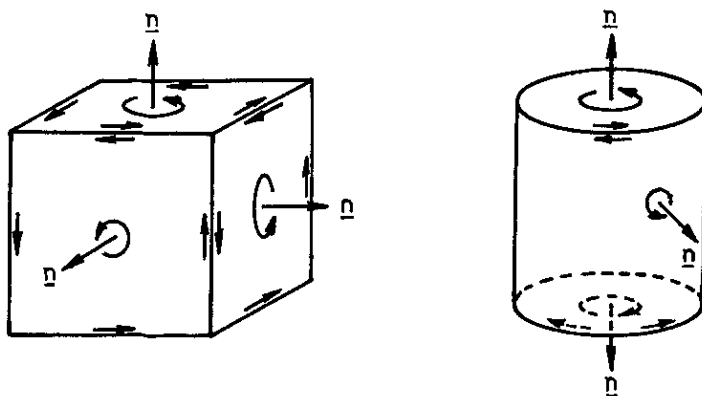
$$\underline{n} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right).$$

We zullen nu een keuze maken uit de twee mogelijke normaalrichtingen en wel zodanig dat \underline{n} continu is op S . Oppervlakken waarvoor een dergelijke keuze mogelijk is, heten oriënteerbaar. Meetkundig is duidelijk dat bijv. bol, torus en plat vlak oriënteerbare oppervlakken zijn; voor een bol kiezen we de normaal òf steeds naar binnen òf steeds naar buiten gericht langs de voerstraal vanuit het middelpunt. Alle gladde oppervlakken voorgesteld door $z = z(x, y)$, $(x, y) \in G$, zijn oriënteerbaar; de normaal wordt gegeven als boven met bijv. steeds het plus-teken gekozen. Voor een oriënteerbaar oppervlak

ligt de normaalkeuze overal vast, zodra men in één punt van het oppervlak de normaal voorschrijft en deze vervolgens continu laat veranderen bij beweging langs het oppervlak. Voorbeeld van een niet-oriënteerbaar oppervlak is de band van Möbius, zie onderstaande figuur.



We willen nu het begrip oriënteerbaar ook definiëren voor een stuksgewijs glad oppervlak S . Laat S de vereniging zijn van een aantal gladde oriënteerbare oppervlakken S_i die twee aan twee een randkromme gemeen kunnen hebben. De normaalrichting op S_i legt voor elke gesloten kromme op S_i een bijpassende omloopszin vast; met "bijpassend" wordt bedoeld dat omloopszin en normaalrichting bij elkaar horen als de draairichting en de bewegingsrichting van een rechtse schroef. Indien men nu op elk oppervlak S_i de normaal zo kan kiezen dat op de randkrommen $S_i \cap S_j$ de omloopszin horend bij de normalen van S_i en S_j tegengesteld is, dan heet S oriënteerbaar. De definitie is nog toegelicht voor het oppervlak van een kubus en van een cylinder in onderstaande figuur.



Ook voor een stuksgewijs glad, oriënteerbaar oppervlak kan men dus de normaal vastleggen door in één punt een keuze te doen. Het is intuïtief duidelijk dat voor een gesloten oriënteerbaar oppervlak de normaal òf overal naar binnen òf overal naar buiten is gericht.

Zij nu $\underline{v}(\underline{x}) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$ een vectorveld gedefinieerd op het oriënteerbaar oppervlak S . Laat S gegeven zijn door de parametervoorstelling

$$\underline{x} = \underline{x}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in G.$$

Kies de normaal \underline{n} op S volgens 1.3.5 met daarin het plus-teken. Een veel voorkomend type oppervlakte-integraal is dan

$$\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma = \iint_G (\underline{v}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}) du dv.$$

N.B. Bij oppervlakte-integralen $\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma$ over een oriënteerbaar oppervlak S dient steeds te worden aangegeven welke van de beide normaalkeuzen men doet.

Zij $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$, dan schrijft men ook wel

$$\begin{aligned} \iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma &= \iint_S (v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3) d\sigma = \\ &=: \iint_S v_1 dydz + v_2 dx dz + v_3 dx dy. \end{aligned}$$

De achtergrond van de laatste notatie is de volgende. Laat de normaal \underline{n} hoeken α, β, γ vormen met resp. de positieve x -as, y -as, z -as, dan is $n_1 = \cos \alpha$, $n_2 = \cos \beta$, $n_3 = \cos \gamma$. Projecteer nu het oppervlak S op het (x,y) -vlak en noem de projectie S_0 . Kies in S_0 een oppervlakte-element

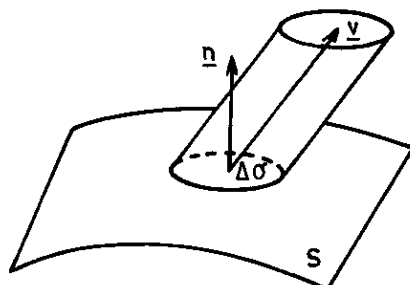
$$E_0 := \{(x,y) \mid x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta x, y_1 \leq y \leq y_1 + \Delta y\}$$

met maat $\mu(E_0) = \Delta x \Delta y$. E_0 is de projectie van een corresponderend oppervlakte-element E op S . In het college Wiskunde 20, blz. 190 is nu afgeleid

$$\mu(E) = \Delta \sigma \approx \frac{\mu(E_0)}{\cos \gamma} = \frac{\Delta x \Delta y}{n_3}.$$

Na overgang op de integraal volgt hieruit de formele relatie $n_3 d\sigma = dx dy$, en evenzo $n_1 d\sigma = dy dz$, $n_2 d\sigma = dx dz$.

Laat \underline{v} de snelheid van een vloeistofstroming zijn, dan is $\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma$ te interpreteren als de flux door S , d.i. de hoeveelheid vloeistof die per tijdseenheid door S stroomt. Immers, de hoeveelheid vloeistof die per tijdseenheid



door een oppervlakte-element $\Delta\sigma$ van S stroomt, is bij benadering gelijk aan de inhoud van de scheve cylinder met grondvlak $\Delta\sigma$ en as \underline{v} , zie figuur. Deze inhoud is gelijk aan $(\underline{v}, \underline{n})\Delta\sigma$. Door "optelling" van de bijdragen der oppervlakte-elementen vinden we voor de totale flux: $\iint_S (\underline{v}, \underline{n})d\sigma$.

Voorbeeld 5. Gegeven is het constante vectorveld $\underline{v} = (1, 1, 1)$. S is de halve bol $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$, met normaal \underline{n} die in het punt $(0, 0, 1)$ naar boven gericht is. We berekenen $\iint_S (\underline{v}, \underline{n})d\sigma$ op twee manieren.

i) Uitgaande van de expliciete voorstelling $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ voor S volgt

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \quad ,$$

$$(\underline{v}, \underline{n}) = x + y + \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad ,$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad .$$

zodat

$$\iint_S (\underline{v}, \underline{n})d\sigma = \iint_G \frac{x + y + \sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy \quad ,$$

waarin G het gebied is bepaald door $x^2 + y^2 \leq 1$.

Op grond van symmetrie is de integraal over G te vereenvoudigen tot

$$\iint_G dx dy = \pi \quad .$$

(ii) Beschrijf S door een parametervoorstelling in bolcoördinaten θ, φ , als in voorbeeld 4. Dan is

$$\begin{aligned}\underline{n} &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \\ (\underline{v}, \underline{n}) &= \sin \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta, \\ \iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma &= \iint_{G^*} (\sin \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta) \sin \theta \, d\theta d\varphi,\end{aligned}$$

waarin G^* het gebied is bepaald door $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

De integraal over G^* is te schrijven als een herhaalde integraal

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi + \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi.$$

Volume-integralen. De volume-integraal $\iiint_R f(x,y,z) dx dy dz$ over een gebied R in \mathbb{R}^3 is reeds besproken in het college Wiskunde 20, 4.5. Vaak gebruikt men de korte notatie $d\tau$ voor het volume-element in plaats van $dx dy dz$.

Integralen van vectorfuncties. Zij $\underline{v}(\underline{x}) = (v_1(\underline{x}), v_2(\underline{x}), v_3(\underline{x}))$ een vectorveld, dan spreken we af dat

$$\int_K \underline{v}(\underline{x}) ds = \left(\int_K v_1(\underline{x}) ds, \int_K v_2(\underline{x}) ds, \int_K v_3(\underline{x}) ds \right)$$

en analoog voor $\iint_S \underline{v}(\underline{x}) d\sigma$ en $\iiint_R \underline{v}(\underline{x}) d\tau$.

1.4. Stelling van Gauss

In deze paragraaf is R een begrensd gesloten gebied in \mathbb{R}^3 met rand S. We nemen aan dat S stuksgewijs glad en oriënteerbaar is; $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ is steeds de naar buiten gerichte normaal op S. In de navolgende stellingen is $\underline{v}(\underline{x}) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$ een vectorveld en $\varphi(\underline{x})$ een scalarveld. We veronderstellen dat $\underline{v}(\underline{x})$ en $\varphi(\underline{x})$ continu differentieerbaar zijn in een gebied dat R bevat.

1.4.1. Stelling.

$$a) \quad \iiint_R \frac{\partial v_1}{\partial x} d\tau = \iint_S v_1 n_1 d\sigma ,$$

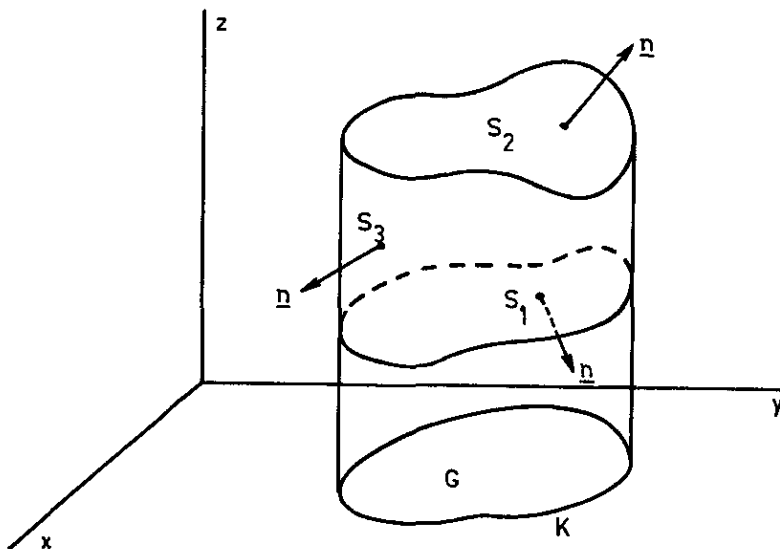
$$b) \quad \iiint_R \frac{\partial v_2}{\partial y} d\tau = \iint_S v_2 n_2 d\sigma ,$$

$$c) \quad \iiint_R \frac{\partial v_3}{\partial z} d\tau = \iint_S v_3 n_3 d\sigma .$$

Bewijs. We geven alleen het bewijs van c). We beschouwen eerst een gebied R van de vorm

$$R = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in G, f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\} ,$$

waarin G een begrens'd gesloten gebied in het (x,y)-vlak is met randkromme K; zie onderstaande figuur.



De volume-integraal over R is dan te herleiden tot een herhaalde integraal:

$$\begin{aligned} \iiint_R \frac{\partial v_3}{\partial z} d\tau &= \iint_G dx dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial v_3}{\partial z} dz = \\ &= \iint_G [v_3(x,y,f_2(x,y)) - v_3(x,y,f_1(x,y))] dx dy . \end{aligned}$$

De rand S van R bestaat nu uit drie stukken:

$$S_1 := \{(x,y,z) \mid (x,y) \in G, z = f_1(x,y)\},$$

$$S_2 := \{(x,y,z) \mid (x,y) \in G, z = f_2(x,y)\},$$

$$S_3 := \{(x,y,z) \mid (x,y) \in K, f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\}.$$

Voor S_3 geldt $n_3 = 0$, zodat $\iint_{S_3} v_3 n_3 d\sigma = 0$.

Voor S_1 worden normaal \underline{n} en oppervlakte-element $d\sigma$ gegeven door

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2}} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1 \right), \quad d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

terwijl voor S_2 geldt

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2}} \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}, -\frac{\partial f_2}{\partial y}, 1 \right), \quad d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Merk op dat de normaal \underline{n} op S_2, S_1 een positieve, resp. negatieve z -component heeft. De totale oppervlakte-integraal over S wordt nu

$$\iint_{S_1} v_3 n_3 d\sigma + \iint_{S_2} v_3 n_3 d\sigma = \iint_G [v_3(x,y,f_2(x,y)) - v_3(x,y,f_1(x,y))] dx dy,$$

d.i. gelijk aan de eerder herleide volume-integraal.

Zij vervolgens R een gebied dat door "hulpvlakken" te splitsen is in eindig veel deelgebieden van de vorm als boven. Pas dan de stelling toe op elk van deze deelgebieden en tel de resultaten op. Hierbij zullen de oppervlakte-integralen over de hulpvlakken twee aan twee tegen elkaar wegvallen, waarna weer de stelling volgt. Voor een willekeurig gebied R is de stelling te bewijzen door een limietprocedure die we hier echter niet uitvoeren. \square

1.4.2. Stelling (stelling van Gauss voor een scalarveld).

$$\iiint_R \text{grad } \varphi \, d\tau = \iint_S \varphi \underline{n} \, d\sigma.$$

Bewijs. Pas 1.4.1 toe op elk der componenten links en rechts. \square

1.4.3. Stelling (divergentiestelling of stelling van Gauss voor een vectorveld).

$$\iiint_R \operatorname{div} \underline{v} \, d\tau = \iint_S (\underline{v}, \underline{n}) \, d\sigma .$$

Bewijs. Vorm de som van de resultaten uit 1.4.1a), b) en c). □

1.4.4. Stelling (stelling van Ostrogradsky).

$$\iiint_R \operatorname{rot} \underline{v} \, d\tau = \iint_S (\underline{n} \times \underline{v}) \, d\sigma .$$

Het bewijs volgt eenvoudig uit 1.4.1.

De voorgaande stellingen nemen een overzichtelijke vorm aan bij gebruik van de ∇ -notatie:

$$\iiint_R \nabla \varphi \, d\tau = \iint_S \underline{n} \varphi \, d\sigma ,$$

$$\iiint_R (\nabla, \underline{v}) \, d\tau = \iint_S (\underline{n}, \underline{v}) \, d\sigma ,$$

$$\iiint_R (\nabla \times \underline{v}) \, d\tau = \iint_S (\underline{n} \times \underline{v}) \, d\sigma .$$

Met behulp van de divergentiestelling (1.4.3) geven we nu een nieuwe en coördinaat-vrije definitie van het begrip divergentie. Laat R een klein gebiedje zijn met volume V en diameter $\delta(R)$. (De diameter $\delta(R)$ van R is de maximale afstand tussen twee punten van R .) Zij $\underline{x} \in R$, dan is

$$\iiint_R \operatorname{div} \underline{v} \, d\tau \approx \operatorname{div} \underline{v}(\underline{x}) \cdot V.$$

Neem nu $\delta(R) \rightarrow 0$ zodanig dat R samenkrimpt tot het punt \underline{x} , dan volgt

$$\operatorname{div} \underline{v}(\underline{x}) = \lim_{\delta(R) \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_R \operatorname{div} \underline{v} \, d\tau .$$

Met de divergentiestelling is de integraal over R te herleiden tot een oppervlakte-integraal over de rand S van R, zodat

$$1.4.5. \quad \operatorname{div} \underline{v}(\underline{x}) = \lim_{\delta(R) \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma .$$

De aldus gevonden betrekking is te gebruiken als coördinaat-vrije definitie van de divergentie.

Indien bijv. \underline{v} de snelheid van een vloeistofstroming is, dan stelt $\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma$ voor de flux door S. Blijkens 1.4.5 is $\operatorname{div} \underline{v}(\underline{x})$ dan te interpreteren als de flux per volume-eenheid.

Voorbeelden. 1) Beschouw het vectorveld $\underline{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, i.e. \underline{r} is de plaatsvector vanuit het punt $P(x_0, y_0, z_0)$; we noteren $|\underline{r}| =: r$. Laat S een gesloten oppervlak zijn met naar buiten gerichte normaal \underline{n} . We tonen nu aan:

$$\iint_S \frac{(\underline{n}, \underline{r})}{r^3} d\sigma = \iint_S \frac{\cos \alpha}{r^2} d\sigma = \begin{cases} 0 & \text{als } P \text{ buiten } S \text{ ligt,} \\ 4\pi & \text{als } P \text{ binnen } S \text{ ligt.} \end{cases}$$

Hierbij is α de hoek tussen \underline{n} en \underline{r} .

De afleiding berust op de divergentiestelling en de relatie

$$\operatorname{div} \left(\frac{\underline{r}}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x - x_0}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y - y_0}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z - z_0}{r^3} \right) = 0, \quad r \neq 0,$$

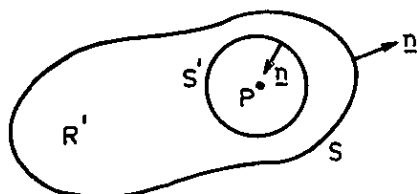
welke door een eenvoudige berekening is te verifiëren.

(i) Zij P buiten S, dan is

$$\iint_S \frac{(\underline{n}, \underline{r})}{r^3} d\sigma = \iiint_R \operatorname{div} \left(\frac{\underline{r}}{r^3} \right) d\tau = 0,$$

waarbij R het gebied binnen S is.

(ii) Als P binnen S ligt is de voorgaande afleiding niet meer geldig omdat $\operatorname{div}(\underline{r}/r^3)$ niet gedefinieerd is in P. Voer nu in een boloppervlak S' met middelpunt P en straal δ , geheel binnen S gelegen; zie figuur.



Pas de divergentiestelling toe in het gebied R' tussen S en S' , dan volgt

$$\iint_S \frac{(\underline{n}, \underline{r})}{r^3} d\sigma + \iint_{S'} \frac{(\underline{n}, \underline{r})}{r^3} d\sigma = \iiint_{R'} \operatorname{div} \left(\frac{\underline{r}}{r^3} \right) d\tau = 0 .$$

Hierbij is de normaal \underline{n} op S' naar binnengericht (vanuit R' naar buiten). Meetkundig is eenvoudig in te zien dat $\frac{(\underline{n}, \underline{r})}{r^3} = -\frac{1}{\delta^2}$ op S' . We vinden dan

$$\iint_S \frac{(\underline{n}, \underline{r})}{r^3} d\sigma = -\iint_{S'} \frac{(\underline{n}, \underline{r})}{r^3} d\sigma = \iint_{S'} \frac{1}{\delta^2} d\sigma = \frac{4\pi\delta^2}{\delta^2} = 4\pi .$$

- 2) Een vloeistof met massadichtheid $\rho(\underline{x}, t)$ stroomt met snelheid $\underline{v}(\underline{x}, t)$; de variabele t geeft de tijd aan. Laat R een begrensd gesloten gebied in \mathbb{R}^3 zijn met rand S , en zij \underline{n} de naar buiten gerichte normaal op S . Gedurende een tijdsinterval Δt stroomt door S naar buiten een vloeistofmassa

$$\iint_S (\rho \underline{v}, \underline{n}) d\sigma \cdot \Delta t .$$

Deze uitgestroomde massa moet gelijk zijn aan het tegengestelde van de verandering van de in R bevatte massa

$$\iiint_R \rho(\underline{x}, t + \Delta t) d\tau - \iiint_R \rho(\underline{x}, t) d\tau \approx \iiint_R \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \cdot \Delta t .$$

Na een limietovergang $\Delta t \rightarrow 0$ volgt dan

$$\iiint_R \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -\iint_S (\rho \underline{v}, \underline{n}) d\sigma .$$

Pas de divergentiestelling (1.4.3) toe op het rechterlid, dan is

$$\iiint_R \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) \right] d\tau = 0 .$$

Aangezien deze betrekking moet gelden voor elk gebied R , vinden we

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0 ,$$

d.i. de zgn. continuïteitsvergelijking. Deze vergelijking drukt "behoud van massa" uit. Voor een incompressibele stroming is ρ constant en de continuïteitsvergelijking gaat over in $\operatorname{div} \underline{v} = 0$.

3) De vroegere definitie 1.2.2 van divergentie in een cartesisch coördinatenstelsel is af te leiden uit de coördinaat-vrije definitie 1.4.5. Neem voor R een infinitesimaal volume-element

$$R := \{(x,y,z) \mid x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta x, y_1 \leq y \leq y_1 + \Delta y, z_1 \leq z \leq z_1 + \Delta z\}$$

met volume $V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Voor het vectorveld

$\underline{v}(\underline{x}) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$ berekenen we nu $\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma$; hierin is S de rand van R en \underline{n} de naar buiten gerichte normaal op S . S bestaat uit zes vlakjes. De bijdrage van de vlakken $x = x_1$ en $x = x_1 + \Delta x$ tot de oppervlakte-integraal is bij benadering gelijk aan

$$v_1(x_1 + \Delta x, y_1, z_1) \Delta y \Delta z - v_1(x_1, y_1, z_1) \Delta y \Delta z \approx \frac{\partial v_1}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Evenzo geven de vlakken $y = y_1$ en $y = y_1 + \Delta y$ een bijdrage $\frac{\partial v_2}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$, en de vlakken $z = z_1$ en $z = z_1 + \Delta z$ een bijdrage $\frac{\partial v_3}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$. Voor de totale oppervlakte-integraal vinden we dan

$$\frac{1}{V} \iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma \approx \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Na limietovergang $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$, volgt hieruit

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

in overeenstemming met 1.2.2.

1.5. Stelling van Stokes

Zij K een kromme in \mathbb{R}^3 gegeven door de parametervoorstelling

$\underline{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$. K heet een enkelvoudige gesloten kromme of Jordankromme indien $\underline{x}(t_1) \neq \underline{x}(t_2)$ voor $t_1 \neq t_2$ behalve dat $\underline{x}(a) = \underline{x}(b)$, i.e. K heeft geen dubbelpunten en begin- en eindpunt van K vallen samen.

Voor een lijnintegraal over een enkelvoudige gesloten kromme K gebruikt men ook wel de notatie \oint_K .

K

1.5.1. Stelling (stelling van Green). Zij G een begrensd gesloten gebied in het (x,y) -vlak; zij de rand van G een stuksgewijs gladde, enkelvoudige, gesloten kromme K . Laat de functies $u(x,y)$ en $v(x,y)$ continu differentieerbaar zijn in een gebied dat G bevat. Dan is

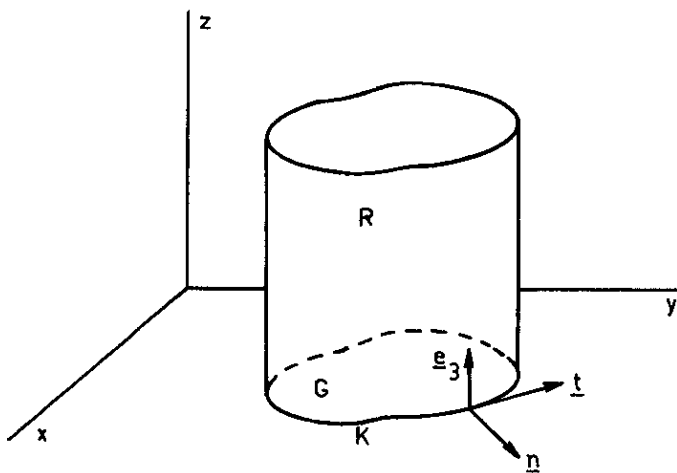
$$\iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \int_K u dx + v dy ,$$

indien K in positieve zin (d.i. in een richting tegen de wijzers van de klok in) doorlopen wordt.

Bewijs. Breid het (x,y) -vlak uit met een z -as en beschouw in de (x,y,z) -ruimte het cilindervormig gebied

$$R := \{ (x,y,z) \mid (x,y) \in G, 0 \leq z \leq 1 \} ,$$

zie onderstaande figuur.



Pas de divergentiestelling (1.4.3) toe op het vectorveld $\underline{v}(x,y,z) := (v(x,y), -u(x,y), 0)$ in R :

$$\iiint_R \operatorname{div} \underline{v} \, d\tau = \iint_S (\underline{v}, \underline{n}) \, d\sigma ;$$

hierin is S de rand van R en \underline{n} de naar buiten gerichte normaal op S .

De volume-integraal over R is te herleiden tot

$$\begin{aligned} \iiint_R \operatorname{div} \underline{v} \, d\tau &= \iiint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy dz = \\ &= \iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \int_0^1 dz = \iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy . \end{aligned} \quad (1)$$

De rand S bestaat uit bovenvlak, ondervlak en mantel van de cylinder. Op het bovenvlak is $\underline{n} = (0, 0, 1)$, $(\underline{v}, \underline{n}) = 0$; evenzo is op het ondervlak $\underline{n} = (0, 0, -1)$, $(\underline{v}, \underline{n}) = 0$. Op de mantel M is \underline{n} voor te stellen door $\underline{n} = (n_1, n_2, 0)$. De oppervlakte-integraal over S is dan te herleiden tot

$$\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma = \iint_M (vn_1 - un_2) d\sigma = \int_K (vn_1 - un_2) ds \int_0^1 dz = \int_K (vn_1 - un_2) ds.$$

Voer nu in de eenheidsraakvector $\underline{t} = (t_1, t_2, 0)$ aan K in de positieve richting, dan is langs K (zie figuur): $\underline{n} = \underline{t} \times \underline{e}_3$, dus $n_1 = t_2$, $n_2 = -t_1$. Daaruit volgt

$$\int_K (vn_1 - un_2) ds = \int_K (ut_1 + vt_2) ds = \int_K u dx + v dy . \quad (2)$$

Door gelijkstelling van de eindresultaten in (1) en (2) volgt de te bewijzen stelling. \square

Opmerkingen. 1) Kies op G de normaal volgens $\underline{n} = \underline{e}_3$, dan passen omloopszin van K en normaalrichting op G bij elkaar als de draairichting en de bewegingsrichting van een rechtse schroef. Voer nu in het vectorveld $\underline{u}(x, y, z) = (u(x, y), v(x, y), 0)$, dan is de stelling van Green ook als volgt te formuleren:

$$\iint_G (\operatorname{rot} \underline{u}, \underline{n}) d\sigma = \int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds .$$

Deze uitkomst is een bijzonder geval van de straks te behandelen stelling van Stokes (1.5.4).

2) Op analoge wijze als in 1.5.1 is te bewijzen de divergentiestelling in twee dimensies:

$$\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \int_K (u n_1 + v n_2) ds ;$$

hierin is $\underline{n} = (n_1, n_2, 0)$ de naar buiten gerichte normaal op K.

In de rest van deze paragraaf is S een stuksgewijs glad, oriënteerbaar oppervlak in \mathbb{R}^3 met als rand een stuksgewijs gladde, enkelvoudige, gesloten kromme K. De normaal $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ op S en de eenheidsraakvector $\underline{t} = (t_1, t_2, t_3)$ aan K worden bij elkaar passend gekozen, d.w.z. de door \underline{t} vastgelegde omloopszin van K en de normaalrichting op S horen bij elkaar als de draairichting en de bewegingsrichting van een rechtse schroef. In de navolgende stellingen is $\underline{v}(\underline{x}) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$ een vectorveld en $\varphi(\underline{x})$ een scalarveld. We veronderstellen dat $\underline{v}(\underline{x})$ en $\varphi(\underline{x})$ continu differentieerbaar zijn in een gebied dat S en K bevat.

1.5.2. Stelling.

$$a) \quad \iint_S \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} n_2 - \frac{\partial v_1}{\partial y} n_3 \right) d\sigma = \int_K v_1 t_1 ds ,$$

$$b) \quad \iint_S \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} n_3 - \frac{\partial v_2}{\partial z} n_1 \right) d\sigma = \int_K v_2 t_2 ds ,$$

$$c) \quad \iint_S \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} n_1 - \frac{\partial v_3}{\partial x} n_2 \right) d\sigma = \int_K v_3 t_3 ds .$$

Bewijs. We geven alleen het bewijs van a). We beschouwen eerst een oppervlak S gegeven door de expliciete voorstelling $z = f(x, y)$, $(x, y) \in G$. Hierin is G een begrensde gesloten gebied in het (x, y) -vlak met rand K'. K' is tevens de projectie van K op het (x, y) -vlak.

Kies op S de normaal met positieve z-component. Deze wordt gegeven door

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) .$$

De bijbehorende omloopszin van K is dan zodanig dat K' in positieve zin doorlopen wordt.

De oppervlakte-integraal over S is nu te herleiden tot

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} n_2 - \frac{\partial v_1}{\partial y} n_3 \right) d\sigma &= \iint_G \left[- \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] dx dy = \\ &= - \iint_G \frac{\partial}{\partial y} v_1(x, y, f(x, y)) dx dy . \end{aligned}$$

Pas op de laatste integraal de stelling van Green (1.5.1) toe (met $u := v_1(x, y, f(x, y))$, $v := 0$ gesteld), dan volgt

$$\begin{aligned} - \iint_G \frac{\partial}{\partial y} v_1(x, y, f(x, y)) dx dy &= \int_{K'} v_1(x, y, f(x, y)) dx = \\ &= \int_K v_1(x, y, z) dx = \int_K v_1 \underline{t}_1 ds . \end{aligned}$$

Zij vervolgens S een oppervlak dat door "hulplijnen" te verdelen is in eindig veel deeloppervlakken van de vorm als boven. Pas dan de stelling toe op elk van deze deeloppervlakken en tel de resultaten op. Hierbij zullen de lijnintegralen over de hulplijnen twee aan twee tegen elkaar wegvallen, waarna weer de stelling volgt. Voor een willekeurig oppervlak S is de stelling te bewijzen door een limietprocedure waarop we hier echter niet ingaan. \square

1.5.3. Stelling (stelling van Stokes voor een scalarveld).

$$\iint_S (\underline{n} \times \text{grad } \varphi) d\sigma = \int_K \varphi \underline{t} ds .$$

Bewijs. Pas 1.5.2 toe op elk der componenten links en rechts. \square

1.5.4. Stelling (stelling van Stokes voor een vectorveld).

$$\iint_S (\text{rot } \underline{v}, \underline{n}) d\sigma = \int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds .$$

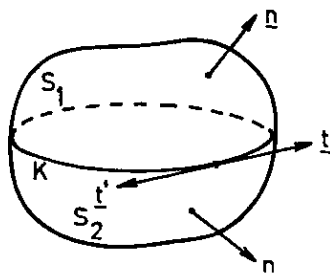
Bewijs. Vorm de som van de resultaten uit 1.5.2a), b) en c). \square

Als toepassing van 1.5.4 geven we nog de volgende integraalstelling voor een gesloten oppervlak.

1.5.5. Stelling. Zij S_0 een gesloten oppervlak met naar buiten gerichte normaal \underline{n} , dan is

$$\iint_{S_0} (\text{rot } \underline{v}, \underline{n}) d\sigma = 0 .$$

Bewijs. Verdeel S_0 in twee deeloppervlakken S_1 en S_2 door middel van een gesloten kromme K op S_0 . K is dan gemeenschappelijke rand van S_1 en S_2 . Laat bij de normaal \underline{n} op S_1 de eenheidsraakvector \underline{t} aan K behoren. Dan behoort bij de normaal \underline{n} op S_2 de eenheidsraakvector $\underline{t}' = -\underline{t}$ aan K ; zie figuur.



Pas nu de stelling van Stokes (1.5.4) toe op elk van de deeloppervlakken S_1 en S_2 , dan volgt

$$\iint_{S_0} (\text{rot } \underline{v}, \underline{n}) d\sigma = \int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds + \int_K (\underline{v}, \underline{t}') ds = 0 . \quad \square$$

Opmerking. Indien \underline{v} tevens gedefinieerd is in het gebied R binnen S_0 , kan men ook gebruik maken van de divergentiestelling (1.4.3):

$$\iint_{S_0} (\text{rot } \underline{v}, \underline{n}) d\sigma = \iiint_R \text{div rot } \underline{v} d\tau = 0 .$$

Met behulp van de stelling van Stokes (1.5.4) geven we nu een nieuwe en coördinaat-vrije definitie van het begrip rotatie. Laat S een klein oppervlakje zijn met oppervlakte A en diameter $\delta(S)$. Zij $\underline{x} \in S$, dan is

$$\iint_S (\text{rot } \underline{v}, \underline{n}) d\sigma \approx (\text{rot } \underline{v}(\underline{x}), \underline{n}) \cdot A .$$

Neem nu $\delta(S) \rightarrow 0$ zodanig dat S samenkrimpt tot het punt \underline{x} en de normaal op S in \underline{x} vast blijft. Dan volgt

$$(\text{rot } \underline{v}(\underline{x}), \underline{n}) = \lim_{\delta(S) \rightarrow 0} \frac{1}{A} \iint_S (\text{rot } \underline{v}, \underline{n}) d\sigma .$$

Met de stelling van Stokes is de integraal over S te herleiden tot een lijn-integraal over de rand K van S , zodat

1.5.6.
$$(\text{rot } \underline{v}(\underline{x}), \underline{n}) = \lim_{\delta(S) \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds .$$

De aldus gevonden betrekking is te gebruiken als coördinaat-vrije definitie van de rotatie, of liever: van de component van $\text{rot } \underline{v}$ in de richting van \underline{n} . Neem nu voor \underline{n} achtereenvolgens eenheidsvectoren in drie onderling loodrechte richtingen, dan is daarmee $\text{rot } \underline{v}$ volledig bepaald.

Indien bijv. \underline{v} de snelheid van een vloeistofstroming is, dan heet $\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds$ de circulatie rond K . Blijkens 1.5.6 is $\text{rot } \underline{v}(\underline{x})$ dan te interpreteren als de circulatie per oppervlakte-eenheid.

Voorbeelden. 1) De belangrijke rekenregels (1.2.6, 5) en 6))

$$\text{rot grad } \varphi = \underline{0}, \text{ div rot } \underline{v} = 0 ,$$

zijn ook af te leiden uit de coördinaat-vrije definities 1.5.6 en 1.4.5 van rotatie en divergentie.

(i) Uitgaande van 1.5.6 is

$$(\text{rot grad } \varphi, \underline{n}) = \lim_{\delta(S) \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int_K (\text{grad } \varphi, \underline{t}) ds = 0 .$$

Voor een gesloten kromme K is namelijk $\int_K (\text{grad } \varphi, \underline{t}) ds = 0$ op grond van 1.3.3.

(ii) Uitgaande van 1.4.5 is

$$\text{div rot } \underline{v} = \lim_{\delta(R) \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_S (\text{rot } \underline{v}, \underline{n}) d\sigma = 0 .$$

Voor een gesloten oppervlak S is namelijk $\iiint_S (\text{rot } \underline{v}, \underline{n}) d\sigma = 0$ op grond van 1.5.5.

- 2) Zij gegeven een electromagnetisch veld met elektrische veldsterkte $\underline{E}(\underline{x}, t)$ en magnetische inductie $\underline{B}(\underline{x}, t)$; de variabele t stelt de tijd voor. In een gebied R zonder ladingen en stromen, voldoen \underline{E} en \underline{B} aan de Maxwell vergelijkingen in integraalvorm:

$$\int_K (\underline{E}, \underline{t}) ds = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S (\underline{B}, \underline{n}) d\sigma, \quad (\text{wet van Faraday})$$

$$\int_K (\underline{B}, \underline{t}) ds = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S (\underline{E}, \underline{n}) d\sigma, \quad (\text{wet van Maxwell})$$

(ϵ_0, μ_0 zijn resp. de permittiviteit en permeabiliteit van vacuum) geldig voor elk oppervlak S in R , met gesloten randkromme K . De normaal \underline{n} op S en de eenheidsraakvector \underline{t} aan K passen bij elkaar op de bekende wijze. Met behulp van de stelling van Stokes (1.5.4) zijn de voorgaande vergelijkingen te herleiden tot

$$\iint_S (\text{rot } \underline{E} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}, \underline{n}) d\sigma = 0, \quad \iint_S (\text{rot } \underline{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}, \underline{n}) d\sigma = 0 .$$

Aangezien deze vergelijkingen gelden voor elk oppervlak S in R , vinden we

$$\text{rot } \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \underline{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t},$$

d.i. de Maxwell vergelijkingen in differentiaalvorm.

1.6. Scalaire potentiaal, conservatieve velden, rotatievrije velden

- 1.6.1. Definitie. Als het vectorveld \underline{v} te schrijven is in de vorm $\underline{v} = \text{grad } \varphi$ waarbij φ een scalarveld is, dan heet φ een (scalaire) potentiaal van \underline{v} .

N.B. In de fysica schrijft men vaak $\underline{v} = -\text{grad } \varphi$ en noemt dan φ een potentiaal van \underline{v} .

De potentiaal van een vectorveld is eenduidig op een constante na: als φ een potentiaal van \underline{v} is, dan is ook $\varphi + C$ een potentiaal van \underline{v} waarbij C een willekeurige constante is.

In 1.2 is reeds opgemerkt dat de veldlijnen van het vectorveld $\underline{v} = \text{grad } \varphi$ loodrecht staan op de equipotentiaal oppervlakken $\varphi = \text{constant}$.

Voorbeeld 1. Een constant vectorveld \underline{a} heeft een potentiaal $(\underline{a}, \underline{x})$; immers $\text{grad } (\underline{a}, \underline{x}) = \underline{a}$.

De elektrische veldsterkte \underline{E} tengevolge van een lading q in de oorsprong wordt gegeven door $\underline{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^3}$, zie 1.1, voorbeeld 1. \underline{E} is af te leiden uit een elektrische potentiaal φ volgens $\underline{E} = -\text{grad } \varphi$ met $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\underline{x}|}$.

Het vectorveld $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{x}$ heeft als potentiaal $\varphi(\underline{x}) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

1.6.2. Definitie. Een vectorveld \underline{v} heet conservatief in een gebied R in \mathbb{R}^3 indien voor elk puntenpaar \underline{p} en \underline{q} in R geldt dat $\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds$ dezelfde waarde heeft voor alle krommen K in R met beginpunt \underline{p} en eindpunt \underline{q} .

Of: Een vectorveld \underline{v} heet conservatief in een gebied R in \mathbb{R}^3 indien

$$\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds = 0 \text{ voor elke gesloten kromme } K \text{ in } R.$$

Laat \underline{v} een krachtveld zijn dan is $\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds$ gelijk aan de arbeid door het veld verricht bij de beweging van een deeltje langs K . Voor een conservatief krachtveld is deze arbeid slechts afhankelijk van begin- en eindpunt van K en niet van het verdere verloop van K . Langs een gesloten kromme is de verrichte arbeid gelijk aan 0.

We zullen nog verifiëren dat de twee definities in 1.6.2 gelijkwaardig zijn:

(i) Laat K een gesloten kromme in R zijn. Kies op K twee punten \underline{p} en \underline{q} , waardoor K verdeeld wordt in een kromme K_1 van \underline{p} naar \underline{q} en een kromme K_2' van \underline{q} naar \underline{p} . Zij K_2 de kromme K_2' doorlopen in tegengestelde richting dus van \underline{p} naar \underline{q} . Uitgaande van de eerste definitie is nu

$$\int_{K_1} (\underline{v}, \underline{t}) ds = \int_{K_2} (\underline{v}, \underline{t}) ds$$

en daaruit volgt

$$\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds = \int_{K_1} (\underline{v}, \underline{t}) ds + \int_{K_2'} (\underline{v}, \underline{t}) ds = \int_{K_1} (\underline{v}, \underline{t}) ds - \int_{K_2} (\underline{v}, \underline{t}) ds = 0 .$$

- (ii) Laat K_1 en K_2 twee krommen in R zijn beide met beginpunt \underline{p} en eindpunt \underline{q} . Vorm dan de gesloten kromme K bestaande uit K_1 en de in tegengestelde richting doorlopen kromme K_2 . Uitgaande van de tweede definitie is nu

$$0 = \int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds = \int_{K_1} (\underline{v}, \underline{t}) ds - \int_{K_2} (\underline{v}, \underline{t}) ds ,$$

waaruit volgt $\int_{K_1} (\underline{v}, \underline{t}) ds = \int_{K_2} (\underline{v}, \underline{t}) ds$.

- 1.6.3. Definitie. Een vectorveld \underline{v} heet rotatievrij indien $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$.

We onderzoeken nu de samenhang tussen de in 1.6.1, 1.6.2, 1.6.3 ingevoerde begrippen.

- 1.6.4. Stelling. Een vectorveld \underline{v} is conservatief dan en slechts dan als \underline{v} een potentiaal heeft.

Bewijs. (i) Zij $\underline{v} = \text{grad } \varphi$ in een gebied R in \mathbb{R}^3 . Volgens 1.3.3 is dan

$$\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds = \int_K (\text{grad } \varphi, \underline{t}) ds = \varphi(\underline{q}) - \varphi(\underline{p})$$

voor elke kromme K in R met beginpunt \underline{p} en eindpunt \underline{q} . Het vectorveld \underline{v} is dus conservatief in R .

- (ii) Zij \underline{v} conservatief in een gebied R in \mathbb{R}^3 . Kies in R een vast punt \underline{p} en definieer

$$\varphi(\underline{x}) := \int_{\underline{p}}^{\underline{x}} (\underline{v}, \underline{t}) ds, \quad \underline{x} \in R ,$$

waarbij de integraal te nemen is over een kromme in R van \underline{p} naar \underline{x} . Omdat de lijn-integraal onafhankelijk is van de gekozen weg, is $\varphi(\underline{x})$ door deze definitie ondubbelzinnig vastgelegd.

We tonen nu aan dat $\text{grad } \varphi = \underline{v}$, i.e. φ is een potentiaal van \underline{v} . Bereken daartoe de partiële afgeleide $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ uit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h, y, z) - \varphi(x, y, z)}{h} .$$

In de definitie van $\varphi(x+h, y, z)$ kiezen we als integratieweg: een kromme van \underline{p} naar \underline{x} plus het rechte lijnstuk van (x, y, z) naar $(x+h, y, z)$. Dan is

$$\frac{\varphi(x+h, y, z) - \varphi(x, y, z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{(x, y, z)}^{(x+h, y, z)} (\underline{v}, \underline{t}) ds = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} v_1(\xi, y, z) d\xi,$$

waarin v_1 de x -component van \underline{v} is. Neem de limiet voor $h \rightarrow 0$, dan is

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_1(x, y, z)$ (zie college Wiskunde 10, 3.4.11). Analoog is te bewijzen:

$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_2(x, y, z)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_3(x, y, z)$, waarbij v_2 , v_3 de y -, resp. z -component van \underline{v} is. □

Indien een vectorveld \underline{v} een potentiaal heeft, kan men deze bepalen door middel van de lijnintegraal

$$\varphi(\underline{x}) = \int_{\underline{p}}^{\underline{x}} (\underline{v}, \underline{t}) ds$$

als in het bewijs van 1.6.4. In concrete voorbeelden is het vaak eenvoudiger om de potentiaal te bepalen door oplossing van de vergelijking $\text{grad } \varphi = \underline{v}$.

Voorbeeld 2. Zij gegeven het vectorveld $\underline{v} = (2xy, x^2 + 2yz, 1 + y^2)$. Indien \underline{v} een potentiaal φ heeft, dient te gelden $\underline{v} = \text{grad } \varphi$ oftewel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + 2yz, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 1 + y^2.$$

Integratie van de eerste vergelijking levert

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + f(y, z),$$

waarin $f(y, z)$ een willekeurige functie van y en z is. Na substitutie van deze φ in de tweede vergelijking volgt

$$x^2 + \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yz, \quad f(y, z) = y^2 z + g(z),$$

waarin $g(z)$ een willekeurige functie van z is. Substitueer tenslotte

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + g(z)$$

in de derde vergelijking, dan ontstaat er

$$y^2 + \frac{dg}{dz} = 1 + y^2, \quad \frac{dg}{dz} = 1, \quad g(z) = z + C,$$

waarin C een willekeurige constante is. De gezochte potentiaal wordt dus gegeven door $\varphi(x,y,z) = x^2 y + y^2 z + z + C$.

Voorbeeld 3. Een deeltje met massa m beweegt onder invloed van een conservatief krachtveld \underline{F} langs een kromme K gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x}(t)$ met de tijd t als parameter. K heeft beginpunt A en eindpunt B corresponderend met $t = t_A$ resp. $t = t_B$. De snelheid van het deeltje is $\underline{v}(t) = \frac{d\underline{x}(t)}{dt}$. Het krachtveld \underline{F} heeft op grond van 1.6.4 een potentiaal φ , zodanig dat $\underline{F} = -\text{grad } \varphi$. De bewegingsvergelijking van het deeltje luidt dan

$$m \frac{d\underline{v}}{dt} = -\text{grad } \varphi.$$

Vermenigvuldig scalair met de eenheidsraakvector \underline{t} aan K , en neem de lijnintegraal over K , dan ontstaat er

$$\int_K \left(m \frac{d\underline{v}}{dt}, \underline{t} \right) ds = - \int_K (\text{grad } \varphi, \underline{t}) ds.$$

Het rechterlid van deze betrekking is op grond van 1.3.3 gelijk aan $\varphi(A) - \varphi(B)$. Het linkerlid is te herleiden tot

$$\begin{aligned} \int_K \left(m \frac{d\underline{v}}{dt}, \underline{t} \right) ds &= \int_{t_A}^{t_B} \left(m \frac{d\underline{v}}{dt}, \frac{d\underline{x}}{dt} \right) dt = \int_{t_A}^{t_B} \left(m \frac{d\underline{v}}{dt}, \underline{v} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} m \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} (\underline{v}, \underline{v}) dt = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2, \end{aligned}$$

waarin v_A en v_B de grootte van de snelheid in A en B voorstellen. Als eindresultaat vinden we

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \varphi(A) - \varphi(B),$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + \varphi(A) = \frac{1}{2} m v_B^2 + \varphi(B).$$

De term $\frac{1}{2} m v^2$ stelt voor de kinetische energie van het deeltje, terwijl de potentiaal φ ook te interpreteren is als potentiële energie. De totale energie, d.i. de som van kinetische en potentiële energie, blijkt dan constant te zijn.

1.6.5. Stelling. Een conservatief vectorveld is rotatievrij.

Bewijs. Zij het vectorveld \underline{v} conservatief dan bestaat er volgens 1.6.4 een potentiaal φ zodat $\underline{v} = \text{grad } \varphi$. Met de bekende rekenregel 1.2.6, 5) volgt dan $\text{rot } \underline{v} = \text{rot grad } \varphi = \underline{0}$, i.e. \underline{v} is rotatievrij. \square

Het omgekeerde van 1.6.5 is in het algemeen niet waar, m.a.w. een rotatievrij vectorveld hoeft niet conservatief te zijn zoals blijkt uit het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 4. De magnetische inductie \underline{B} tengevolge van een stroom met sterkte I door een oneindig lange draad langs de z -as wordt gegeven door

$$\underline{B} = (B_x, B_y, B_z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right);$$

hierin is μ_0 de permeabiliteit van vacuum.

Men kan eenvoudig narekenen dat $\text{rot } \underline{B} = \underline{0}$.

Beschouw nu de gesloten kromme K gegeven door $x^2 + y^2 = 1, z = 0$, of, in parametervoorstelling, $\underline{x} = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Dan is

$$\int_K (\underline{B}, \underline{t}) ds = \int_0^{2\pi} (\underline{B}, \frac{d\underline{x}}{dt}) dt = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \mu_0 I.$$

Het veld is dus niet conservatief in het gebied R gevormd door \mathbb{R}^3 minus de z -as.

De omkering van 1.6.5 is wel geldig voor een vectorveld in een enkelvoudig samenhangend gebied.

1.6.6. Definitie. Een gebied R in \mathbb{R}^3 heet enkelvoudig samenhangend of 1-samentrekbaar, indien elke gesloten kromme binnen R rand is van een oppervlak binnen R , of ook, indien men elke gesloten kromme binnen R continu kan samentrekken tot een punt.

Voorbeelden van enkelvoudig samenhangende gebieden zijn: bol, kubus, het gebied tussen twee concentrische boloppervlakken, \mathbb{R}^3 minus eindig veel punten. Voorbeelden van niet enkelvoudig samenhangende gebieden zijn: het binnengebied van een torus, het gebied tussen twee oneindige concentrische cilindervlakken, \mathbb{R}^3 minus een rechte.

1.6.7. Stelling. Een vectorveld dat rotatievrij is in een enkelvoudig samenhangend gebied R , is conservatief in R .

Bewijs. Laat K een willekeurige gesloten kromme in R zijn. K is dan rand van een oppervlak S binnen R . Zij nu $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$ in R , dan volgt met de stelling van Stokes (1.5.4):

$$\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds = \iint_S (\text{rot } \underline{v}, \underline{n}) d\sigma = 0 ;$$

dus \underline{v} is conservatief in R . □

Opmerking. Bij ieder punt van een gebied R in \mathbb{R}^3 is er een enkelvoudig samenhangende (bijv. bolvormige) omgeving binnen R . Zij $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$, dan is er dus bij ieder punt van R een omgeving en een potentiaal φ zodat $\underline{v} = \text{grad } \varphi$ in die omgeving. Is nu R niet enkelvoudig samenhangend, dan zal het in het algemeen niet lukken één φ te vinden die overal als potentiaal optreedt.

Voorbeelden. 5) Beschouw nogmaals het veld \underline{B} uit voorbeeld 4, nu in het gebied R' gevormd door \mathbb{R}^3 minus het halfvlak $x \geq 0, y = 0$. R' is enkelvoudig samenhangend zodat op grond van 1.6.7 het veld \underline{B} conservatief in R' is en daar een potentiaal φ heeft. Met de methode uit voorbeeld 2 is af te leiden: $\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \arctan(y/x)$ voor $x > 0, y > 0$, en algemeen $\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \theta$ in R' waarbij θ de poolhoek is bepaald door $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, 0 < \theta < 2\pi$. Merk op dat deze potentiaal niet voldoet in het oorspronkelijke gebied R gevormd door \mathbb{R}^3 minus de z -as; θ is namelijk discontinu over het halfvlak $x \geq 0, y = 0$.

6) Zij gegeven het vectorveld

$$\underline{v} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

in het gebied R gevormd door \mathbb{R}^3 minus de z -as.

Men kan eenvoudig narekenen dat $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$. Evenwel, 1.6.7 is niet van toepassing omdat R niet enkelvoudig samenhangend is.

Beschouw nu de gesloten kromme K gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x} = (\cos t, \sin t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi$. Dan is

$$\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds = \int_0^{2\pi} (\underline{v}, \frac{d\underline{x}}{dt}) dt = \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t) dt = 0.$$

Dit resultaat (vergelijk met voorbeeld 4) doet vermoeden dat het veld \underline{v} mogelijk toch conservatief is. Met de methode uit voorbeeld 2 bepalen we een potentiaal φ van \underline{v} ; we vinden $\varphi = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$. Het veld \underline{v} is dus inderdaad conservatief in R . Uit dit voorbeeld blijkt: De voorwaarde "R is enkelvoudig samenhangend" in 1.6.7 is niet een nodige maar slechts een voldoende voorwaarde opdat een rotatievrij veld in R tevens conservatief in R is.

1.7. Vectorpotentiaal, bronvrije velden, divergentievrije velden

1.7.1. Definitie. Als het vectorveld \underline{v} te schrijven is in de vorm $\underline{v} = \text{rot } \underline{w}$ waarbij \underline{w} een vectorveld is, dan heet \underline{w} een vectorpotentiaal van \underline{v} .

De vectorpotentiaal van een vectorveld is eenduidig op de gradiënt van een scalarveld na: als \underline{w} een vectorpotentiaal van \underline{v} is, dan is ook $\underline{w} + \text{grad } \varphi$ een vectorpotentiaal van \underline{v} waarbij φ een willekeurig scalarveld is.

Voorbeeld 1. Een constant vectorveld \underline{a} heeft een vectorpotentiaal $\frac{1}{2}(\underline{a} \times \underline{x})$; immers $\text{rot } \frac{1}{2}(\underline{a} \times \underline{x}) = \underline{a}$, zie 1.2, voorbeeld 4.

1.7.2. Definitie. Een vectorveld \underline{v} heet bronvrij in een gebied R in R^3 indien $\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma = 0$ voor elk gesloten oppervlak S in R .

1.7.3. Definitie. Een vectorveld \underline{v} heet divergentievrij of solenoidaal indien $\text{div } \underline{v} = 0$.

We onderzoeken nu de samenhang tussen de in 1.7.1, 1.7.2, 1.7.3 ingevoerde begrippen.

1.7.4. Stelling. Een vectorveld \underline{v} is bronvrij dan en slechts dan als \underline{v} een vectorpotentiaal heeft.

Bewijs. (i) Zij $\underline{v} = \text{rot } \underline{w}$ in een gebied R in \mathbb{R}^3 . Voor elk gesloten oppervlak S in R geldt dan op grond van 1.5.5:

$$\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma = \iint_S (\text{rot } \underline{w}, \underline{n}) d\sigma = 0 .$$

Het vectorveld \underline{v} is dus bronvrij in R .

(ii) Zij \underline{v} bronvrij in een gebied R in \mathbb{R}^3 , dan heeft \underline{v} een vectorpotentiaal in R . Dit gedeelte van de stelling bewijzen we niet. \square

1.7.5. Stelling. Een bronvrij vectorveld is divergentievrij.

Bewijs. Zij het vectorveld \underline{v} bronvrij in een gebied R in \mathbb{R}^3 . Bij ieder punt $\underline{x} \in R$ is er een omgeving R' geheel binnen R , met volume V en randoppervlak S . Met behulp van de coördinaat-vrije definitie van divergentie (1.4.5) volgt nu

$$\text{div } \underline{v}(\underline{x}) = \lim_{\delta(R') \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma = 0 . \quad \square$$

Opmerking. Gebruikmakend van het niet bewezen gedeelte van 1.7.4 kan men ook als volgt redeneren. Het bronvrije vectorveld \underline{v} heeft een vectorpotentiaal \underline{w} zodat $\underline{v} = \text{rot } \underline{w}$. Met de bekende rekenregel 1.2.6, 6) volgt dan $\text{div } \underline{v} = \text{div rot } \underline{w} = 0$, i.e. \underline{v} is divergentievrij.

Het omgekeerde van 1.7.5 is in het algemeen niet waar, m.a.w. een divergentievrij vectorveld hoeft niet bronvrij te zijn zoals blijkt uit het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 2. De elektrische veldsterkte \underline{E} tengevolge van een lading q in de oorsprong wordt gegeven door (zie 1.1, voorbeeld 1)

$$\underline{E} = (E_x, E_y, E_z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Men kan eenvoudig narekenen dat $\text{div } \underline{E} = 0$.

Laat nu S de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ zijn met naar buiten gerichte normaal \underline{n} , dan is

$$\iint_S (\underline{E}, \underline{n}) d\sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_S d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0} .$$

Het veld is dus niet bronvrij in het gebied gevormd door \mathbb{R}^3 minus de oorsprong.

De omkering van 1.7.5 is wel geldig voor een vectorveld in een 2-samentrekbaar gebied.

1.7.6. Definitie. Een gebied R in \mathbb{R}^3 heet 2-samentrekbaar, indien voor elk gesloten oppervlak S in R ook het binnengebied van S in R ligt, of ook, indien men elk gesloten oppervlak binnen R continu kan samentrekken tot een punt of tot een kromme.

Voorbeelden van 2-samentrekbare gebieden zijn: bol, kubus, het binnengebied van een torus, \mathbb{R}^3 minus een rechte.

Voorbeelden van niet 2-samentrekbare gebieden zijn: het gebied tussen twee concentrische boloppervlakken, \mathbb{R}^3 minus eindig veel punten.

1.7.7. Stelling. Een vectorveld dat divergentievrij is in een 2-samentrekbaar gebied R , is bronvrij in R .

Bewijs. Laat S een willekeurig gesloten oppervlak in R zijn. Het binnengebied R' van S ligt dan eveneens in R . Zij nu $\text{div } \underline{v} = 0$ in R , dan volgt met de divergentiestelling (1.4.3):

$$\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma = \iiint_{R'} \text{div } \underline{v} \, d\tau = 0 ,$$

dus \underline{v} is bronvrij in R . □

We beschouwen nu een vectorveld $\underline{v}(\underline{x}) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$ dat divergentievrij is in een bolvormig gebied B met middelpunt $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$. Volgens 1.7.7 en 1.7.4 is \underline{v} dan bronvrij in B en \underline{v} heeft een vectorpotentiaal in B . Noem deze vectorpotentiaal $\underline{w}(\underline{x}) = (w_1(x,y,z), w_2(x,y,z), w_3(x,y,z))$, dan zullen we \underline{w} expliciet bepalen door oplossing van de vergelijking $\text{rot } \underline{w} = \underline{v}$. Omdat de vectorpotentiaal eenduidig is op de gradiënt van een scalarveld na, zoeken we een oplossing \underline{w} waarvan één der componenten nul is, bijv. $w_3 = 0$.

Door uitschrijven van $\text{rot } \underline{w} = \underline{v}$ volgt dat de overige componenten w_1, w_2 van \underline{w} dan moeten voldoen aan

$$-\frac{\partial w_2}{\partial z} = v_1, \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} = v_2, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = v_3 .$$

Integreer de eerste twee vergelijkingen, dan vinden we

$$w_1(x,y,z) = \int_{P_3}^z v_2(x,y,\zeta) d\zeta + f(x,y),$$

$$w_2(x,y,z) = - \int_{P_3}^z v_1(x,y,\zeta) d\zeta + g(x,y) ,$$

waarin $f(x,y), g(x,y)$ willekeurige functies van x en y zijn. Substitueer de uitkomsten voor w_1 en w_2 in de derde vergelijking, dan ontstaat er

$$- \int_{P_3}^z \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y,\zeta) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y,\zeta) \right] d\zeta + \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = v_3(x,y,z) .$$

Wegens $\text{div } \underline{v} = 0$ is

$$\begin{aligned} - \int_{P_3}^z \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y,\zeta) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y,\zeta) \right] d\zeta &= \int_{P_3}^z \frac{\partial v_3}{\partial \zeta}(x,y,\zeta) d\zeta = \\ &= v_3(x,y,z) - v_3(x,y,P_3) , \end{aligned}$$

waarna volgt

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = v_3(x,y,P_3) .$$

Aan de laatste vergelijking wordt voldaan door bijv.

$$f(x,y) = - \int_{P_2}^y v_3(x,\eta,P_3) d\eta, \quad g(x,y) = 0 .$$

Als eindresultaat voor de vectorpotentiaal \underline{w} vinden we dan

$$w_1(x,y,z) = \int_{p_3}^z v_2(x,y,\zeta) d\zeta - \int_{p_2}^y v_3(x,\eta,p_3) d\eta ,$$

1.7.8.

$$w_2(x,y,z) = - \int_{p_3}^z v_1(x,y,\zeta) d\zeta, \quad w_3(x,y,z) = 0 ,$$

geldig voor $\underline{x} \in B$.

Opmerkingen. 1) De bolvormigheid van het gebied B speelt in de afleiding van 1.7.8 slechts een ondergeschikte rol. Dankzij dit gegeven is het zeker dat de integratiewegen van (x,y,p_3) naar (x,y,z) , en van (x,p_2,p_3) naar (x,y,p_3) , geheel binnen B verlopen voor elk punt $\underline{x} \in B$.

2) Voor bolvormige gebieden is hiermee tevens het tweede gedeelte van 1.7.4 bewezen.

3) Bij ieder punt van een gebied R in \mathbb{R}^3 is er een bolvormige omgeving binnen R. Zij $\text{div } \underline{v} = 0$, dan is er bij ieder punt een omgeving en een vectorpotentiaal \underline{w} , gegeven door bijv. 1.7.8, zodat $\underline{v} = \text{rot } \underline{w}$ in die omgeving. Is nu R niet 2-samentrekbaar, dan zal het in het algemeen niet lukken één \underline{w} te vinden die overal als vectorpotentiaal optreedt.

In 1.7.8 is een expliciete formule gegeven voor de vectorpotentiaal \underline{w} van een divergentievrij vectorveld \underline{v} . Deze formule is niet bedoeld als een recept voor de berekening van een vectorpotentiaal. In concrete voorbeelden is het vaak eenvoudiger om de vectorpotentiaal te bepalen met de methode waarmee 1.7.8 is afgeleid, dus door oplossing van de vergelijking $\text{rot } \underline{w} = \underline{v}$.

Voorbeeld 3. Zij gegeven het divergentievrije vectorveld $\underline{v} = (2xz, 2yz, 6y - 2z^2)$. We bepalen een vectorpotentiaal $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$ met $w_3 = 0$. Uit $\text{rot } \underline{w} = \underline{v}$ volgt dat w_1, w_2 moeten voldoen aan

$$-\frac{\partial w_2}{\partial z} = 2xz, \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} = 2yz, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = 6y - 2z^2 .$$

Integreer de eerste twee vergelijkingen, dan vinden we

$$w_1 = yz^2 + f(x,y), \quad w_2 = -xz^2 + g(x,y) ,$$

waarin $f(x,y)$, $g(x,y)$ willekeurige functies van x en y zijn. Substitueer w_1 , w_2 in de derde vergelijking, dan ontstaat er

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = -z^2 + \frac{\partial g}{\partial x} - z^2 - \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 2z^2,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 6y.$$

Aan de laatste vergelijking wordt voldaan door bijv.

$$f(x,y) = 0, \quad g(x,y) = 6xy.$$

De gezochte vectorpotentiaal wordt dan

$$\underline{w} = (yz^2, -xz^2 + 6xy, 0).$$

Voorbeeld 4. De elektrische veldsterkte \underline{E} tengevolge van een dipool in de oorsprong met dipoolmoment p gericht langs de z -as wordt gegeven door

$$\underline{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3xz}{r^5}, \frac{3yz}{r^5}, \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^5}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

(ϵ_0 is de permittiviteit van vacuum) geldig in het gebied R gevormd door R^3 minus de oorsprong.

Men kan eenvoudig narekenen dat $\text{div } \underline{E} = 0$. Evenwel, 1.7.7 is niet van toepassing omdat R niet 2-samentrekbaar is.

Laat S de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ zijn met naar buiten gerichte normaal \underline{n} , dan is

$$\iint_S (\underline{E}, \underline{n}) d\sigma = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \iint_S [3x^2z + 3y^2z + (2z^2 - x^2 - y^2)z] d\sigma = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \iint_S 2z d\sigma = 0.$$

Dit resultaat (vergelijk met voorbeeld 2) doet vermoeden dat het veld mogelijk toch bronvrij is. Met de methode uit voorbeeld 3 bepalen we een vectorpotentiaal \underline{w} van \underline{E} ; we vinden $\underline{w} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{y}{r^3}, \frac{x}{r^3}, 0\right)$ oftewel $\underline{w} = \frac{-p}{4\pi\epsilon_0} \underline{e}_3 \times \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$. Het veld \underline{E} is dus inderdaad bronvrij in R . Uit dit voorbeeld blijkt: De voorwaarde " R is 2-samentrekbaar" in 1.7.7 is niet een nodige maar slechts een voldoende voorwaarde opdat een divergentievrij veld in R tevens bronvrij in R is.

1.8. Bepaling van een veld uit zijn rotatie en divergentie, stelling van Helmholtz

In deze paragraaf is R een gebied in \mathbb{R}^3 dat zowel enkelvoudig samenhangend als 2-samentrekbaar is.

We stellen het volgende probleem:

In R zijn gegeven een functie $f(\underline{x})$ en een vectorveld $\underline{a}(\underline{x})$ met $\text{div } \underline{a} = 0$. Bepaal een vectorveld $\underline{v}(\underline{x})$ zodanig dat

$$\begin{cases} \text{div } \underline{v} = f , \\ \text{rot } \underline{v} = \underline{a} . \end{cases}$$

N.B. De voorwaarde $\text{div } \underline{a} = 0$ is nodig voor de oplosbaarheid van het probleem.

Oplissing. Uit $\text{div } \underline{a} = 0$ in R volgt op grond van 1.7.7 en 1.7.4 dat \underline{a} een vectorpotentiaal heeft: $\underline{a} = \text{rot } \underline{w}$. Substitutie in de vergelijking $\text{rot } \underline{v} = \underline{a}$ doet deze overgaan in $\text{rot}(\underline{v} - \underline{w}) = \underline{0}$. Omdat R tevens enkelvoudig samenhangend is, volgt op grond van 1.6.7 en 1.6.4: $\underline{v} - \underline{w} = \text{grad } \varphi$, $\underline{v} = \underline{w} + \text{grad } \varphi$ waarin φ een willekeurig scalarveld is. Substitueer de aldus gevonden \underline{v} in de vergelijking $\text{div } \underline{v} = f$, dan ontstaat er

$$\Delta\varphi = f - \text{div } \underline{w} ,$$

d.i. de vergelijking van Poisson. Indien het rechterlid een eenvoudige vorm heeft, kan men door "proberen" een oplossing van de vergelijking bepalen. Een algemene oplossingsmethode voor de Poisson vergelijking zal worden besproken in 2.4.11.

Het gevraagde vectorveld \underline{v} wordt nu gegeven door $\underline{v} = \underline{w} + \text{grad } \varphi$, waarbij φ een oplossing is van de bovenstaande Poisson vergelijking.

We onderzoeken nog de eenduidigheid van de oplossing \underline{v} . Laat het gestelde probleem oplossingen \underline{v} en \underline{v}' bezitten. Voor het verschil $\underline{v} - \underline{v}'$ geldt dan $\text{div}(\underline{v} - \underline{v}') = 0$, $\text{rot}(\underline{v} - \underline{v}') = \underline{0}$. Uit deze vergelijkingen volgt $\underline{v} - \underline{v}' = \text{grad } \varphi_0$, waarbij φ_0 moet voldoen aan $\text{div}(\underline{v} - \underline{v}') = \Delta\varphi_0 = 0$. Omgekeerd: Als \underline{v} een oplossing is en φ_0 voldoet aan $\Delta\varphi_0 = 0$, dan is ook $\underline{v} + \text{grad } \varphi_0$ een oplossing van het gestelde probleem.

Voorbeeld 1. We bepalen een vectorveld \underline{v} zodanig dat

$$\text{div } \underline{v} = 6yz, \text{ rot } \underline{v} = \underline{a} = (2xz, 2yz, 6y - 2z^2) .$$

In 1.7, voorbeeld 3 is afgeleid dat \underline{a} een vectorpotential $\underline{w} = (yz^2, -xz^2 + 6xy, 0)$ heeft. Uit $\text{rot } \underline{v} = \underline{a}$ volgt dan $\underline{v} = \underline{w} + \text{grad } \varphi$. Na substitutie in $\text{div } \underline{v} = 6yz$ ontstaat er $\Delta\varphi = 6yz - \text{div } \underline{w} = 6yz - 6x$; door "proberen" vinden we als oplossing bijv. $\varphi = y^3 z - x^3$.

Het gevraagde vectorveld \underline{v} wordt dan gegeven door

$$\underline{v} = \underline{w} + \text{grad } \varphi = (yz^2 - 3x^2, -xz^2 + 6xy + 3y^2 z, y^3) .$$

Voorbeeld 2. De Maxwell vergelijkingen voor het electromagnetische veld in vacuüm luiden:

$$\begin{cases} \text{rot } \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} , & \text{div } \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} , \\ \text{rot } \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} , & \text{div } \underline{B} = 0 . \end{cases}$$

Hierin zijn ϵ_0, μ_0 resp. de permittiviteit en permeabiliteit van vacuüm, ρ en \underline{j} zijn resp. de gegeven ladingsdichtheid en stroomdichtheid, terwijl de elektrische veldsterkte \underline{E} en de magnetische inductie \underline{B} bepaald moeten worden. De analyse van de Maxwell vergelijkingen laat zich vereenvoudigen door de invoering van geschikte potentialen. Beschouw eerst de vergelijking $\text{div } \underline{B} = 0$; deze is voortgekomen uit de (algemenere) vergelijking in integraalvorm:

$$\iint_S (\underline{B}, \underline{n}) d\sigma = 0$$

voor elk gesloten oppervlak S . Het veld \underline{B} is dus bronvrij; fysisch betekent deze eigenschap dat er geen magnetische ladingen bestaan. Op grond van 1.7.4 heeft \underline{B} dan een vectorpotential \underline{A} zodanig dat

$$\underline{B} = \text{rot } \underline{A} .$$

Beschouw vervolgens de vergelijking $\text{rot } \underline{E} = -\partial \underline{B} / \partial t$; deze is voortgekomen uit de (algemenere) vergelijking in integraalvorm (vergelijk 1.5, voorbeeld 2):

$$\int_K (\underline{E}, \underline{t}) ds = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S (\underline{B}, \underline{n}) d\sigma$$

voor elk oppervlak S met gesloten randkromme K . Substitueer hierin $\underline{B} = \text{rot } \underline{A}$ en pas de stelling van Stokes (1.5.4) toe, dan ontstaat er

$$\int_K (\underline{E} + \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}, \underline{t}) ds = 0$$

geldig voor elke gesloten kromme K . Het veld $\underline{E} + \partial \underline{A} / \partial t$ is dus conservatief. Op grond van 1.6.4 bestaat er dan een potentiaal φ zodanig dat

$$\underline{E} = - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi .$$

Substitueer nu de gevonden uitdrukkingen voor \underline{B} en \underline{E} in de resterende twee Maxwell vergelijkingen, dan ontstaat er

$$\begin{cases} \text{rot rot } \underline{A} = \mu_0 \underline{j} - \epsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} + \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) , \\ -\text{div } \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \Delta \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0} , \end{cases}$$

of, met behulp van 1.2.6, regel 4),

$$\begin{cases} \Delta \underline{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} - \text{grad}(\text{div } \underline{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}) = -\mu_0 \underline{j} , \\ \Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \underline{A} = - \frac{\rho}{\epsilon_0} . \end{cases}$$

We denken ons nu \underline{A} en φ zo gekozen dat voldaan is aan de zgn. Lorentz ijkvoorwaarde

$$\text{div } \underline{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 .$$

De voorgaande vergelijkingen gaan dan over in

$$\begin{aligned} \Delta \underline{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \underline{j} , \\ \Delta \varphi - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= - \frac{\rho}{\epsilon_0} . \end{aligned}$$

De vectorpotentiaal \underline{A} en de scalaire potentiaal φ moeten dus voldoen aan een zelfde type differentiaalvergelijking. We merken nog op dat $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ waarbij c de lichtsnelheid in vacuüm voorstelt. De differentiaalvergelijking voor \underline{A} , φ is dan de zgn. golfvergelijking. Voor deze vergelijking bestaan verschillende oplossingsmethoden die we hier echter niet nader bespreken.

We komen nog terug op de Lorentz ijkvoorwaarde. Laat \underline{A}_0 een vectorpotentialiaal en φ_0 een scalaire potentialiaal zijn zodanig dat

$$\underline{B} = \text{rot } \underline{A}_0, \underline{E} = - \frac{\partial \underline{A}_0}{\partial t} - \text{grad } \varphi_0 .$$

Nu zijn \underline{A}_0 en φ_0 zeker niet eenduidig bepaald door \underline{B} en \underline{E} . In plaats van door \underline{A}_0 en φ_0 wordt hetzelfde electromagnetische veld \underline{E} , \underline{B} ook beschreven door de potentialen

$$\underline{A} = \underline{A}_0 - \text{grad } \psi, \varphi = \varphi_0 + \frac{\partial \psi}{\partial t} ,$$

waarin ψ een willekeurig scalarveld is. Substitueer deze \underline{A} en φ in de Lorentz ijkvoorwaarde dan volgt de vergelijking

$$\Delta \psi - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \text{div } \underline{A}_0 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} ,$$

waaraan ψ dient te voldoen.

Voorbeeld 3. In de electrostatica voldoet de elektrische veldsterkte \underline{E} aan de Maxwell vergelijkingen

$$\text{rot } \underline{E} = \underline{0}, \text{div } \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} .$$

Hierin is ρ de gegeven ladingsdichtheid en ϵ_0 is de permittiviteit van vacuüm. De vergelijking $\text{rot } \underline{E} = \underline{0}$ is voortgekomen uit de (algemenere) vergelijking in integraalvorm:

$$\int_K (\underline{E}, \underline{t}) ds = 0$$

voor elke gesloten kromme K . Het veld \underline{E} is dus conservatief. Op grond van 1.6.4 bestaat er dan een elektrische potentialiaal φ zodanig dat $\underline{E} = -\text{grad } \varphi$. Door substitutie in de vergelijking $\text{div } \underline{E} = \rho/\epsilon_0$ volgt dat de potentialiaal φ moet voldoen aan de Poisson vergelijking

$$\Delta \varphi = - \frac{\rho}{\epsilon_0} .$$

1.8.1. Stelling (stelling van Helmholtz). Zij \underline{v} een vectorveld in R , dan is er een scalarveld φ en een vectorveld \underline{w} zodanig dat

$$\underline{v} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \underline{w}, \text{ div } \underline{w} = 0 .$$

Bewijs. Bepaal φ door oplossing van de Poisson vergelijking $\Delta\varphi = \text{div } \underline{v}$. Zij $\underline{a} := \underline{v} - \text{grad } \varphi$, dan dient \underline{w} te voldoen aan

$$\text{div } \underline{w} = 0, \text{ rot } \underline{w} = \underline{a} .$$

De oplossing van dit probleem is reeds in het begin van deze paragraaf aangegeven. □

1.9. Vectoroperaties in kromlijnige orthogonale coördinaten

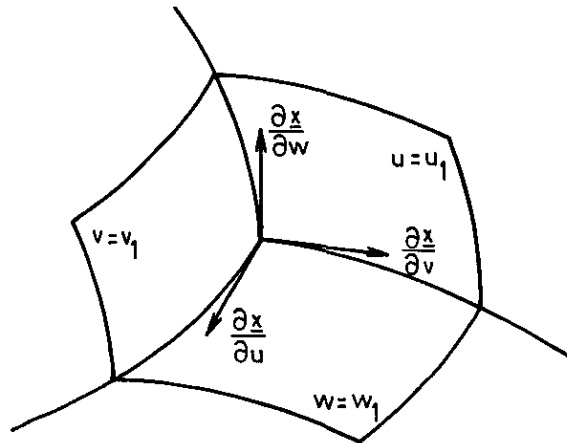
De vectoroperaties grad, div en rot zijn tot dusver alleen gedefinieerd in een rechts cartesisch coördinatenstelsel. In deze paragraaf zullen we formules afleiden voor de vectoroperaties in een algemeen kromlijnig orthogonaal coördinatenstelsel. De gevonden resultaten zullen worden gespecialiseerd voor de praktisch belangrijke gevallen van cylindercoördinaten en bolcoördinaten.

In R^3 voeren we in coördinaten u, v, w , die als volgt met de cartesische coördinaten x, y, z samenhangen:

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) , \\ y = y(u, v, w) , \\ z = z(u, v, w) , \end{cases} \quad \text{of } \underline{x} = \underline{x}(u, v, w) .$$

(N.B. De coördinaten u, v, w moeten niet verward worden met eventuele vectorfuncties $\underline{u}(\underline{x}), \underline{v}(\underline{x}), \underline{w}(\underline{x})$.)

Een goed inzicht in het (u, v, w) -coördinatenstelsel bieden de coördinaat-opervlakken $u = u_1 = \text{constant}$, $v = v_1 = \text{constant}$, $w = w_1 = \text{constant}$, en de coördinaatkrommen $\underline{x} = \underline{x}(u, v_1, w_1)$, $\underline{x} = \underline{x}(u_1, v, w_1)$, $\underline{x} = \underline{x}(u_1, v_1, w)$, waarbij telkens twee van de drie coördinaten constant worden gehouden. Deze coördinaatkrommen hebben als raakvectoren resp. $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$, zie de figuur op blz. 49. We spreken nu van een rechts orthogonaal coördinatenstelsel, als in elk punt de drie vectoren $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$ twee aan twee loodrecht zijn en in de hier gegeven volgorde een rechtse schroef vormen.



De vectoren $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$ zijn in het algemeen geen eenheidsvectoren. De lengtes van deze vectoren heten schaalfactoren:

$$h_1 = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \right|, \quad h_2 = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right|, \quad h_3 = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} \right|.$$

Het rechts orthogonaal zijn van het coördinatenstelsel kan dan worden uitgedrukt door de drie gelijkheden

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} = \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial w}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} = \frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} = \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}.$$

De determinant met als kolommen de vectoren $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial w}$, is gelijk aan de inhoud van het parallellepipedum opgespannen door deze vectoren (zie college Wiskunde 20, 3.6.2). Omdat de vectoren twee aan twee loodrecht zijn, is deze inhoud gelijk aan $h_1 h_2 h_3$. Genoemde determinant is tevens gelijk aan de Jacobiaan van $\underline{x}(u, v, w)$, zodat we vinden

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = h_1 h_2 h_3.$$

We voeren nu een nieuwe basis in gevormd door de eenheidsvectoren

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u}, \quad \underline{e}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}, \quad \underline{e}_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \underline{x}}{\partial w}.$$

Merk op dat deze basis in het algemeen van punt tot punt verschilt.

Zij \underline{a} een vectorveld, dan betrekken we \underline{a} op deze nieuwe basis. De vector \underline{a} wordt dan ontbonden volgens

$$\underline{a} = a_u \underline{e}_1 + a_v \underline{e}_2 + a_w \underline{e}_3 ,$$

waarbij de componenten a_u, a_v, a_w worden gegeven door

$$a_u = (\underline{a}, \underline{e}_1) = \frac{1}{h_1} (\underline{a}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u}), \quad a_v = \frac{1}{h_2} (\underline{a}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}), \quad a_w = \frac{1}{h_3} (\underline{a}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial w}) .$$

Gradiënt. Laat α een scalarveld zijn. De nieuwe componenten van grad α zijn direct te bepalen:

$$(\text{grad } \alpha)_u = \frac{1}{h_1} (\text{grad } \alpha, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u}) = \frac{1}{h_1} (\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u}$$

en analoog voor de v- en w-component. We vinden dus

1.9.1.
$$\text{grad } \alpha = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial \alpha}{\partial w} \right)$$

in het (u,v,w)-coördinatenstelsel.

Laat \underline{a} een vectorveld zijn. We zullen formules afleiden voor div \underline{a} en rot \underline{a} in het (u,v,w)-coördinatenstelsel. Daarbij maken we gebruik van de coördinaat-vrije definities van divergentie en rotatie als gegeven in 1.4.5 en 1.5.6.

Divergentie. We gaan uit van de definitie 1.4.5:

$$\text{div } \underline{a} = \lim_{\delta(R) \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S (\underline{a}, \underline{n}) d\sigma .$$

Hierin is S de rand van een gebiedje R met volume V dat samenkrimpt tot een punt; \underline{n} is de naar buiten gerichte normaal op S.

Neem nu voor R een infinitesimaal volume-element

$$R := \{ \underline{x}(u,v,w) \mid u_1 \leq u \leq u_1 + \Delta u, v_1 \leq v \leq v_1 + \Delta v, w_1 \leq w \leq w_1 + \Delta w \} ,$$

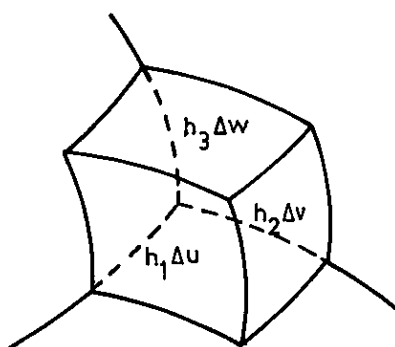
waarin $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ klein zijn; zie de figuur op blz. 51. R is bij benadering een blokje met afmetingen

$$|\underline{x}(u_1 + \Delta u, v_1, w_1) - \underline{x}(u_1, v_1, w_1)| \approx \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \right| \Delta u = h_1 \Delta u ,$$

$$|\underline{x}(u_1, v_1 + \Delta v, w_1) - \underline{x}(u_1, v_1, w_1)| \approx \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| \Delta v = h_2 \Delta v ,$$

$$|\underline{x}(u_1, v_1, w_1 + \Delta w) - \underline{x}(u_1, v_1, w_1)| \approx \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} \right| \Delta w = h_3 \Delta w .$$

Voor het volume V van R geldt dan $V \approx h_1 h_2 h_3 \Delta u \Delta v \Delta w$.



Zij $\underline{a} = (a_u, a_v, a_w)$ in (u, v, w) -coördinaten. We berekenen nu $\iint_S (\underline{a}, \underline{n}) d\sigma$ over de rand S van R . S bestaat uit zes "vlakjes". Op de vlakjes $u = u_1 + \Delta u$ en $u = u_1$ is resp. $(\underline{a}, \underline{n}) = a_u$ en $(\underline{a}, \underline{n}) = -a_u$. De bijdrage van deze vlakjes tot de oppervlakte-integraal is bij benadering gelijk aan

$$a_u(u_1 + \Delta u, v_1, w_1) h_2 h_3 \Delta v \Delta w - a_u(u_1, v_1, w_1) h_2 h_3 \Delta v \Delta w \approx \frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 a_u) \Delta u \Delta v \Delta w .$$

Evenzo geven de vlakjes $v = v_1 + \Delta v$, $v = v_1$ en $w = w_1 + \Delta w$, $w = w_1$ bijdragen gelijk aan resp.

$$\frac{\partial}{\partial v} (h_3 h_1 a_v) \Delta u \Delta v \Delta w, \quad \frac{\partial}{\partial w} (h_1 h_2 a_w) \Delta u \Delta v \Delta w .$$

Voor de totale oppervlakte-integraal vinden we dan

$$\frac{1}{V} \iint_S (\underline{a}, \underline{n}) d\sigma \approx \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 a_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_3 h_1 a_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_1 h_2 a_w) \right] .$$

Na limietovergang voor $\Delta u \rightarrow 0$, $\Delta v \rightarrow 0$, $\Delta w \rightarrow 0$, volgt hieruit

1.9.2.
$$\operatorname{div} \underline{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 a_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_3 h_1 a_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_1 h_2 a_w) \right]$$

als uitdrukking voor de divergentie in (u, v, w) -coördinaten.

Rotatie. We gaan uit van de definitie 1.5.6:

$$(\text{rot } \underline{a}, \underline{n}) = \lim_{\delta(S) \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int_K (\underline{a}, \underline{t}) ds .$$

Hierin is K de rand van een oppervlakje S met oppervlakte A dat samenkrimpt tot een punt; \underline{n} is de normaal op S en \underline{t} is de bijpassende eenheidsraakvector aan K . Neem nu voor S een infinitesimaal oppervlakte-element in het coördinaatoppervlak $u = u_1$:

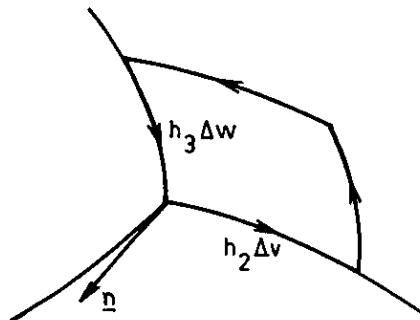
$$S := \{ \underline{x}(u, v, w) \mid u = u_1, v_1 \leq v \leq v_1 + \Delta v, w_1 \leq w \leq w_1 + \Delta w \} ,$$

waarin $\Delta v, \Delta w$ klein zijn; zie onderstaande figuur. S is bij benadering een rechthoekig vlakje met afmetingen

$$| \underline{x}(u_1, v_1 + \Delta v, w_1) - \underline{x}(u_1, v_1, w_1) | \approx \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| \Delta v = h_2 \Delta v ,$$

$$| \underline{x}(u_1, v_1, w_1 + \Delta w) - \underline{x}(u_1, v_1, w_1) | \approx \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} \right| \Delta w = h_3 \Delta w .$$

Voor de oppervlakte A van S geldt dan $A \approx h_2 h_3 \Delta v \Delta w$.



Kies de normaal \underline{n} op S in de richting van $\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$, dan dient de rand K van S in de pijlrichting te worden doorlopen.

Zij $\underline{a} = (a_u, a_v, a_w)$ in (u, v, w) -coördinaten. We berekenen nu $\int_K (\underline{a}, \underline{t}) ds$, waarbij K bestaat uit de vier "zijden" van de "rechthoek" S . Langs de zijden $v = v_1 + \Delta v$ en $v = v_1$ is resp. $(\underline{a}, \underline{t}) = a_w$ en $(\underline{a}, \underline{t}) = -a_w$. De bijdrage van deze zijden tot de lijnintegraal is bij benadering gelijk aan

$$a_w(u_1, v_1 + \Delta v, w_1) h_3 \Delta w - a_w(u_1, v_1, w_1) h_3 \Delta w \approx \frac{\partial}{\partial v} (h_3 a_w) \Delta v \Delta w .$$

Evenzo geven de zijden $w = w_1 + \Delta w$, $w = w_1$ een bijdrage $-\frac{\partial}{\partial w}(h_2 a_v) \Delta v \Delta w$. Voor de totale lijnintegraal vinden we dan

$$\frac{1}{A} \int_K (\underline{a}, \underline{t}) ds \approx \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial v}(h_3 a_w) - \frac{\partial}{\partial w}(h_2 a_v) \right].$$

Na limietovergang voor $\Delta v \rightarrow 0$, $\Delta w \rightarrow 0$, volgt hieruit

$$(\text{rot } \underline{a}, \underline{n}) = (\text{rot } \underline{a})_u = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial v}(h_3 a_w) - \frac{\partial}{\partial w}(h_2 a_v) \right].$$

Op analoge wijze zijn de v- en w-component van $\text{rot } \underline{a}$ te bepalen.

Als eindresultaat vinden we voor $\text{rot } \underline{a}$ in (u,v,w)-coördinaten:

$$(\text{rot } \underline{a})_u = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial v}(h_3 a_w) - \frac{\partial}{\partial w}(h_2 a_v) \right],$$

$$1.9.3. \quad (\text{rot } \underline{a})_v = \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial w}(h_1 a_u) - \frac{\partial}{\partial u}(h_3 a_w) \right],$$

$$(\text{rot } \underline{a})_w = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u}(h_2 a_v) - \frac{\partial}{\partial v}(h_1 a_u) \right].$$

Laplace operator. Door samenstelling van de formules 1.9.1, 1.9.2 voor gradiënt en divergentie krijgen we een formule voor de Laplace operator Δ in (u,v,w)-coördinaten:

$$1.9.4. \quad \Delta \alpha = \text{div grad } \alpha = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \alpha}{\partial w} \right) \right].$$

De vroegere regel dat $\Delta \underline{a}$ voor een vectorveld \underline{a} wordt verkregen door toepassing van Δ op de afzonderlijke componenten van \underline{a} , geldt niet in kromlijnige orthogonale coördinaten. In plaats daarvan wordt $\Delta \underline{a}$ nu gegeven door

$$\Delta \underline{a} = \text{grad div } \underline{a} - \text{rot rot } \underline{a}$$

in overeenstemming met de rekenregel 1.2.6, 4).

We specialiseren nu de voorgaande resultaten voor het geval van cylindercoördinaten en van bolcoördinaten.

Cylindercoördinaten. De cylindercoördinaten (r, φ, z) hangen samen met de cartesische coördinaten (x, y, z) volgens

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi , \\ y = r \sin \varphi , \\ z = z . \end{cases}$$

Daaruit volgt

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial r} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0), \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

en men kan gemakkelijk verifiëren dat het cylindercoördinatenstelsel rechts orthogonaal is. De schaalfactoren zijn

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1 .$$

De formules 1.9.1, 1.9.2, 1.9.3, 1.9.4 gaan dan over in:

$$\text{grad } \alpha = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}, \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) ,$$

$$\text{div } \underline{a} = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} ,$$

$$(\text{rot } \underline{a})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} ,$$

$$(\text{rot } \underline{a})_\varphi = \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} ,$$

$$(\text{rot } \underline{a})_z = \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} ,$$

$$\Delta \alpha = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} .$$

Bolcoördinaten. De bolcoördinaten (ρ, θ, φ) hangen samen met de cartesische coördinaten (x, y, z) volgens

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi , \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi , \\ z = \rho \cos \theta . \end{cases}$$

Daaruit volgt

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \rho} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) ,$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \theta} = (\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \cos \theta \sin \varphi, -\rho \sin \theta) ,$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = (-\rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \cos \varphi, 0) .$$

Men kan weer gemakkelijk verifiëren dat het bolcoördinatenstelsel rechts orthogonaal is. De schaalfactoren zijn

$$h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = \rho \sin \theta .$$

De formules 1.9.1, 1.9.2, 1.9.3, 1.9.4 gaan dan over in:

$$\text{grad } \alpha = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}, \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \right) ,$$

$$\text{div } \underline{a} = \frac{\partial a_\rho}{\partial \rho} + \frac{2a_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{\rho} a_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} ,$$

$$(\text{rot } \underline{a})_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{\rho} a_\varphi - \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} ,$$

$$(\text{rot } \underline{a})_\theta = \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial \rho} - \frac{a_\varphi}{\rho} ,$$

$$(\text{rot } \underline{a})_\varphi = \frac{\partial a_\theta}{\partial \rho} + \frac{a_\theta}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \theta} ,$$

$$\Delta \alpha = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{\rho^2} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} .$$

1.9.6.

Voorbeelden. 1) De magnetische inductie \underline{B} tengevolge van een stroom met sterkte I door een oneindig lange draad langs de z -as wordt in cylindercoördinaten gegeven door

$$\underline{B} = (B_r, B_\varphi, B_z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(0, \frac{1}{r}, 0 \right) ;$$

vergelijk met 1.6, voorbeeld 4. Met behulp van de formules voor divergentie en rotatie in cylindercoördinaten kan men vrijwel zonder rekenen vaststellen dat $\text{div } \underline{B} = 0$, $\text{rot } \underline{B} = \underline{0}$. Voorts is $\underline{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \text{grad } \varphi$; $\frac{\mu_0 I}{2\pi} \varphi$ voldoet echter niet als potentiaal omdat φ discontinu is over het halfvlak $x \geq 0$, $y = 0$ (vergelijk met 1.6, voorbeeld 5).

- 2) De elektrische veldsterkte \underline{E} tengevolge van een lading q in de oorsprong wordt in bolcoördinaten gegeven door

$$\underline{E} = (E_\rho, E_\theta, E_\varphi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\rho^2}, 0, 0 \right);$$

vergelijk met 1.7, voorbeeld 2. Met behulp van de formules voor rotatie en divergentie in bolcoördinaten kan men vrijwel zonder rekenen vaststellen dat $\text{div } \underline{E} = 0$, $\text{rot } \underline{E} = \underline{0}$.

Hoofdstuk 2. Partiële differentiaalvergelijkingen

2.1. Inleiding

Een partiële differentiaalvergelijking (PDV) is een relatie tussen een onbekende functie van twee of meer onafhankelijke variabelen en haar partiële afgeleiden.

Onder de orde van een PDV verstaan we de orde van de hoogste afgeleide die in de PDV voorkomt.

Laat $u = u(x,y)$ een functie van twee variabelen zijn; voorbeelden van een PDV zijn dan

$$u u_x - x u_y = u + y \quad (\text{orde } 1) ,$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (\text{orde } 2) .$$

Hierin is voor de partiële afgeleiden van u de notatie

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} , \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} , \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \quad \text{enz.}$$

gebruikt.

Zij gegeven een PDV van orde m in de n onafhankelijke variabelen x_1, x_2, \dots, x_n .

Een functie $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ heet een oplossing van de PDV in een gebied $G \subset \mathbb{R}^n$, indien

- (i) de functie $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in G continue partiële afgeleiden t/m orde m bezit,
- (ii) substitutie van $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en van de partiële afgeleiden van deze functie in de PDV deze doet overgaan in een identiteit.

We beperken ons in dit hoofdstuk tot de behandeling van een drietal belangrijke PDV's van tweede orde die voortkomen uit de mathematische fysica:

I. Golfvergelijking

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(\underline{x}, t) ,$$

of uitgeschreven in $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$,

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(x,t) ,$$

$$u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(x,y,t) ,$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(x,y,z,t) .$$

De variabele t stelt de tijd voor. De constante c heeft de dimensie van een snelheid en is te interpreteren als de "voortplantingssnelheid" van het golfverschijnsel dat door de vergelijking wordt beschreven. In het vervolg stellen we veelal $c = 1$ wat door passende schaling van de variabelen steeds te realiseren is. De zgn. bronterm $-f(x,t)$ in het rechterlid is een gegeven functie en te interpreteren als een "uitwendige werking" op het golfverschijnsel.

Voorbeelden. De transversale trilling van een snaar wordt beschreven door de één-dimensionale golfvergelijking

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -\frac{q(x,t)}{T} , \quad c = \sqrt{T/\rho} .$$

Hierin is $u(x,t)$ de uitwijking van de snaar ter plaatse x en ten tijde t , T is de spanning in de snaar, ρ is de massa per lengte-eenheid, en $q(x,t)$ is de uitwendige kracht per lengte-eenheid werkend op de snaar.

De transversale trilling van een membraan wordt beschreven door het tweedimensionale analogon van de voorgaande vergelijking. De betekenis van de notatie is dezelfde: $u(x,y,t)$ is de uitwijking van het membraan ter plaatse (x,y) en ten tijde t , $q(x,y,t)$ is de uitwendige kracht per oppervlakte-eenheid werkend op het membraan.

De drie-dimensionale golfvergelijking treedt op bij de beschrijving van de voortplanting van geluidsgolven en van electromagnetische golven (zie 1.8, voorbeeld 2).

II. Diffusievergelijking of warmtegeleidingsvergelijking

$$\Delta u - \frac{1}{\kappa} u_t = -f(\underline{x},t) ,$$

welke is uit te schrijven in \mathbb{R}^1 , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , analoog als onder I.

De variabele t stelt weer de tijd voor. Voor de constante κ nemen we in het vervolg veelal $\kappa = 1$. De functie $-f(\underline{x},t)$ is weer een gegeven bronterm.

Voorbeelden. De warmtegeleiding in een homogeen lichaam in \mathbb{R}^3 wordt beschreven door de warmtegeleidingsvergelijking

$$\Delta T - \frac{c\rho}{k} T_t = - \frac{Q(\underline{x},t)}{k} .$$

Hierin is $T(\underline{x},t)$ de temperatuur ter plaatse \underline{x} en ten tijde t , k is de warmtegeleidingscoëfficiënt, ρ is de massadichtheid, c is de soortelijke warmte, en $Q(\underline{x},t)$ is de dichtheid van de warmtebronnen in het lichaam.

In een dunne staaf waar de temperatuur over elke doorsnee als constant mag worden beschouwd, geldt de één-dimensionale warmtegeleidingsvergelijking

$$T_{xx} - \frac{c\rho}{k} T_t = - \frac{Q(x,t)}{k} .$$

Bij de diffusie van een gas voldoet de concentratie $C(\underline{x},t)$ aan de diffusievergelijking

$$\Delta C - \frac{1}{D} C_t = 0 ,$$

waarin D de diffusiecoëfficiënt is.

Bij verwaarlozing van de verplaatsingsstroom voldoet de stroomdichtheid \underline{j} in een goede geleider aan de vergelijkingen

$$\Delta \underline{j} - \mu\sigma \frac{\partial \underline{j}}{\partial t} = \underline{Q}, \operatorname{div} \underline{j} = 0 ;$$

hierin is μ de permeabiliteit en σ het elektrisch geleidingsvermogen van de geleider.

III. Poisson vergelijking in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$,

$$\Delta u = -f(\underline{x}) ,$$

waarin $f(\underline{x})$ een gegeven functie is, en

Laplace vergelijking of potentiaalvergelijking in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$,

$$\Delta u = 0 .$$

Voorbeelden. De statische doorbuiging van een membraan onder invloed van een uitwendige belasting wordt beschreven door de Poisson vergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} = - \frac{q(x,y)}{T} .$$

Hierin is $u(x,y)$ de uitwijking van het membraan ter plaatse (x,y) , T is de

spanning in het membraan, en $q(x,y)$ is de uitwendige kracht per oppervlakte-eenheid werkend op het membraan.

De stationaire temperatuurverdeling $T(\underline{x})$ in een homogeen lichaam in \mathbb{R}^3 voldoet aan de Poisson vergelijking

$$\Delta T = - \frac{Q(\underline{x})}{k} .$$

Hierin is k de warmtegeleidingscoëfficiënt, en $Q(\underline{x})$ is de dichtheid van de (tijdonafhankelijke) warmtebronnen in het lichaam.

Voor een electrostatisch veld met veldsterkte \underline{E} gelden de Maxwell vergelijkingen

$$\text{rot } \underline{E} = \underline{0}, \text{ div } \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} ,$$

waarin ρ de gegeven ladingsdichtheid en ϵ_0 de permittiviteit van vacuum is. De veldsterkte \underline{E} is af te leiden uit een elektrische potentiaal φ volgens $\underline{E} = -\text{grad } \varphi$ (zie 1.8, voorbeeld 3). Deze potentiaal moet dan voldoen aan de Poisson vergelijking

$$\Delta \varphi = - \frac{\rho}{\epsilon_0} .$$

Bij afwezigheid van ladingen volgt voor φ de Laplace vergelijking $\Delta \varphi = 0$. De stroming van een ideale, incompressibele vloeistof heet een potentiaalstroming indien de snelheid \underline{v} is af te leiden uit een snelheidspotentiaal φ volgens $\underline{v} = -\text{grad } \varphi$. Op grond van de continuïteitsvergelijking is $\text{div } \underline{v} = 0$ (zie 1.4, voorbeeld 2), waarna voor φ volgt de Laplace vergelijking $\Delta \varphi = 0$.

De voorgaande PDV's zijn alle lineair.

Indien $f(\underline{x},t) = 0$ resp. $f(\underline{x}) = 0$, dan heet de betreffende PDV homogeen, anders inhomogeen. Voor een homogene lineaire PDV geldt het superpositieprincipe: Als u_1 en u_2 oplossingen zijn van de PDV, dan is ook elke lineaire combinatie $Au_1 + Bu_2$ oplossing van de PDV. De oplossing van een inhomogene lineaire PDV is terug te brengen tot die van de bijbehorende homogene lineaire PDV. Beschouw bijv. de Poisson vergelijking $\Delta u = -f(\underline{x})$ en laat $u_p(\underline{x})$ een particuliere oplossing zijn. Door aftrekken van u_p volgt $\Delta(u - u_p) = 0$, i.e. $u - u_p$ is oplossing van de (homogene) Laplace vergelijking.

De PDV's uit de mathematische fysica worden meestal vergezeld door zekere additionele voorwaarden waaraan de oplossing moet voldoen. Deze voorwaarden kunnen van tweeërlei soort zijn:

1. Beginvoorwaarden, dat zijn voorwaarden geldig op een zeker begintijdstip, meestal $t = 0$. Voor de golfvergelijking treden twee beginvoorwaarden op, namelijk

$$u(\underline{x}, 0) = \varphi(\underline{x}), \quad u_t(\underline{x}, 0) = \psi(\underline{x}),$$

waarin $\varphi(\underline{x})$ en $\psi(\underline{x})$ gegeven functies zijn. De diffusievergelijking wordt vergezeld door één beginvoorwaarde

$$u(\underline{x}, 0) = \varphi(\underline{x}).$$

Het verschillende aantal beginvoorwaarden voor de twee PDV's hangt samen met het feit dat de golfvergelijking van de tweede orde in t is terwijl de diffusievergelijking van de eerste orde in t is.

Voorbeelden. Voor de trillende snaar en het trillend membraan drukken de beginvoorwaarden uit dat de beginuitwijking u en de beginsnelheid u_t van snaar of membraan zijn voorgeschreven.

Bij problemen van warmtegeleiding wordt alleen de begintemperatuur voorgeschreven.

2. Randvoorwaarden, dat zijn voorwaarden geldig op de rand van het gebied $G \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2$ of 3) waar de PDV gedefinieerd is.

Voorbeelden. De trilling van een snaar met lengte ℓ wordt beschreven door de één-dimensionale golfvergelijking op het interval $0 \leq x \leq \ell$. Als de uiteinden $x = 0$ en $x = \ell$ van de snaar vast zijn, dient de uitwijking $u(x, t)$ te voldoen aan de randvoorwaarden

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0.$$

Andere mogelijke randvoorwaarden zijn

$u_x(0, t) = 0$ corresponderend met een zgn. vrij uiteinde, of $u(0, t) = g(t)$ waarbij het uiteinde beweegt op een voorgeschreven wijze, en evenzo in $x = \ell$.

Bij de trilling van een membraan met vaste rand K in het (x, y) -vlak treedt als randvoorwaarde op

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in K.$$

Eventueel kan een gedeelte K_1 van de rand "vrij" zijn; dit wordt uitgedrukt door de randvoorwaarde

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y,t) = 0, \quad (x,y) \in K_1.$$

Hierin is $\frac{\partial u}{\partial n}$ de zgn. normaalafgeleide van u , gedefinieerd door

$$\frac{\partial u}{\partial n} = (\text{grad } u, \underline{n}),$$

waarbij \underline{n} de naar buiten gerichte normaal op K_1 is.

Een andere mogelijke randvoorwaarde is

$$u(x,y,t) = g(x,y), \quad (x,y) \in K;$$

deze beschrijft het geval waarin de rand van het membraan niet samenvalt met K maar met een gegeven kromme in \mathbb{R}^3 .

Analoge randvoorwaarden treden op bij de statische doorbuiging van een membraan beschreven door de twee-dimensionale Poisson vergelijking.

De warmtegeleiding in een dunne staaf met lengte ℓ wordt beschreven door de één-dimensionale warmtegeleidingsvergelijking op het interval $0 \leq x \leq \ell$. De randvoorwaarde voor de temperatuur $T(x,t)$ in het uiteinde $x = 0$ kan nu één van de volgende vormen aannemen:

$T(0,t) = g(t)$, d.w.z. de temperatuur is voorgeschreven;

$T_x(0,t) = h(t)$, d.w.z. de warmtestroom is voorgeschreven;

$T_x(0,t) = 0$ corresponderend met een geïsoleerd uiteinde;

$T_x(0,t) = h[T(0,t) - T_0]$, d.i. de zgn. stralingsrandvoorwaarde waarin h een positieve constante is. De laatste voorwaarde drukt uit dat de warmtestroom die bij $x = 0$ naar buiten treedt, evenredig is met het verschil van $T(0,t)$ en de temperatuur T_0 van het omringende medium. Een analoge randvoorwaarde geldt in het uiteinde $x = \ell$, waarbij de randvoorwaarden in $x = 0$ en in $x = \ell$ niet van dezelfde vorm hoeven te zijn.

Bij de warmtegeleiding in een drie-dimensionaal lichaam R met uitwendig oppervlak S kan men als randvoorwaarde voorschrijven

$$T(\underline{x},t) = g(\underline{x},t) \text{ of } \frac{\partial T}{\partial n}(\underline{x},t) = h(\underline{x},t) \text{ of } \frac{\partial T}{\partial n}(\underline{x},t) = -h[T(\underline{x},t) - T_0]$$

voor $\underline{x} \in S$,

waarbij \underline{n} de naar buiten gerichte normaal op S is.

In de stationaire toestand voldoet de temperatuurverdeling $T(\underline{x})$ in het lichaam R aan de drie-dimensionale Poisson vergelijking. Als randvoorwaarde kan dan optreden

$$T(\underline{x}) = g(\underline{x}) \text{ of } \frac{\partial T}{\partial n}(\underline{x}) = h(\underline{x}) \text{ of } \frac{\partial T}{\partial n}(\underline{x}) = -h[T(\underline{x}) - T_0] \text{ voor } \underline{x} \in S .$$

Eventueel kan ook bijv. T gegeven zijn op een gedeelte van S terwijl op de rest van S $\frac{\partial T}{\partial n}$ is voorgeschreven.

In de electrostatica voldoet de elektrische potentiaal φ aan de Poisson vergelijking $\Delta\varphi = -\rho/\epsilon_0$. Deze vergelijking wordt veelal vergezeld door een randvoorwaarde van de vorm

$$\varphi(\underline{x}) = g(\underline{x}), \quad \underline{x} \in S ,$$

d.w.z. de potentiaal is voorgeschreven op een oppervlak S .

De potentiaalstroming van een vloeistof omeen lichaam R met uitwendig oppervlak S wordt beschreven door een snelheidspotentiaal φ welke voldoet aan de Laplace vergelijking $\Delta\varphi = 0$. Als randvoorwaarde treedt op

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ op } S ,$$

waarbij \underline{n} de naar buiten gerichte normaal op S is. Deze voorwaarde drukt uit dat op S de normaalcomponent van de snelheid van de vloeistofstroming nul is.

Uit de voorgaande voorbeelden blijkt dat de golfvergelijking en de diffusievergelijking worden vergezeld door beginvoorwaarden of door begin- en randvoorwaarden, terwijl bij de Poisson vergelijking en de Laplace vergelijking enkel randvoorwaarden optreden. Het geheel van PDV plus beginvoorwaarden resp. randvoorwaarden heet een beginwaardeprobleem resp. randwaardeprobleem. Problemen waarbij de oplossing van een PDV zowel aan beginvoorwaarden als aan randvoorwaarden moet voldoen, heten gemengde problemen. De randwaardeproblemen voor de Poisson vergelijking hebben een speciale naam:

$$\underline{\text{Dirichlet probleem}} \quad \Delta u = -f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in R; \quad u(\underline{x}) = g(\underline{x}), \quad \underline{x} \in S .$$

$$\underline{\text{Neumann probleem}} \quad \Delta u = -f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in R; \quad \frac{\partial u}{\partial n}(\underline{x}) = h(\underline{x}), \quad \underline{x} \in S .$$

Hierbij is R een gebied in \mathbb{R}^2 of \mathbb{R}^3 met rand S , \underline{n} is de naar buiten gerichte normaal op S , en de normaalafgeleide $\frac{\partial u}{\partial n}$ wordt gegeven door $\frac{\partial u}{\partial n} = (\text{grad } u, \underline{n})$.

Naast de voorgaande voorbeelden zijn tal van andere fysische en technische problemen mathematisch te formuleren als een beginwaardeprobleem, randwaardeprobleem of gemengd probleem voor een PDV. Bij de formulering dient men erop bedacht te zijn dat het juiste aantal begin- en randvoorwaarden in aanmerking wordt genomen. Dit aantal moet enerzijds niet te groot zijn zodat het probleem overbepaald is en mogelijk geen oplossing heeft, anderzijds niet te klein zijn zodat het probleem onderbepaald is en mogelijk meer dan één oplossing heeft. Een mathematisch probleem dat een fysisch verschijnsel beschrijft, dient aan de volgende eisen te voldoen:

- (i) De oplossing van het probleem bestaat.
- (ii) De oplossing is éénduidig.
- (iii) De oplossing hangt continu af van begin- en randvoorwaarden, d.w.z. een "kleine" verandering in deze voorwaarden heeft slechts een "kleine" verandering van de oplossing tot gevolg.

De betekenis van de eisen (i) en (ii) is hierboven reeds aangegeven. De eis (iii) is ingegeven door het feit dat de begin- en randwaarden voor een fysisch probleem meestal verkregen zijn uit metingen. Deze metingen zijn altijd behept met fouten. Het mathematisch model is nu alleen realistisch indien deze (kleine) fouten slechts een kleine verandering in de oplossing tot gevolg hebben. Een mathematisch probleem dat voldoet aan de eisen (i)-(iii) heet een correct gesteld probleem.

Delta-functie van Dirac. Voor later gebruik voeren we nog in de delta-functie van Dirac. Deze wordt gedefinieerd door de volgende eigenschappen:

$$\delta(x) = 0 \text{ als } x \neq 0, \delta(0) = \infty, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 .$$

Strikt genomen zijn deze eigenschappen strijdig. Als een functie overal nul is behalve in één punt, dan is de integraal van de functie noodzakelijk gelijk aan nul. De delta-functie is dan ook geen functie in de gewone zin. Niettemin kan men toch formeel opereren met $\delta(x)$ alsof het een functie is. Intuïtief is de delta-functie op te vatten als de limiet van een "piek-functie":

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(\epsilon, x) ,$$

waarin $p(\epsilon, x)$ gegeven wordt door

$$p(\epsilon, x) = \begin{cases} 0 & \text{als } |x| > \epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} & \text{als } |x| \leq \epsilon \end{cases}, \quad \epsilon > 0,$$

met de eigenschap

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\epsilon, x) dx = 1.$$

Laat nu $\varphi(x)$ een continue functie zijn, dan is

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) p(\epsilon, x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi(x) dx = \varphi(0),$$

op grond van college Wiskunde 10, 3.4.11. Na een formele verwisseling van limiet en integraalteken volgt dan de "zeefeigenschap"

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(x) dx = \varphi(0).$$

Op dezelfde formele wijze is af te leiden de eigenschap

$$\int_a^b \varphi(x) \delta(x - \xi) dx = \varphi(\xi) \quad \text{voor } a < \xi < b.$$

Bij het werken met de delta-functie zou men eigenlijk steeds $\delta(x)$ moeten vervangen door $p(\epsilon, x)$ en dan pas in de einduitkomst de limietovergang $\epsilon \rightarrow 0$ uitvoeren. Het is echter gemakkelijker de limiet direct te nemen en formeel te opereren met $\delta(x)$ onder toepassing van de bovengenoemde eigenschappen. Een dergelijke procedure is weliswaar mathematisch niet streng, maar voert meestal toch tot de correcte uitkomst. Een wèl strenge behandeling van de delta-functie is te geven in het kader van de theorie der distributies afkomstig van Schwartz (1950).

In $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ wordt de delta-functie gegeven door

$$\delta(\underline{x}) = 0 \text{ als } \underline{x} \neq \underline{0}, \quad \delta(\underline{0}) = \infty, \quad \iint_{\mathbb{R}^2} \delta(\underline{x}) dx dy = 1 \text{ resp. } \iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\underline{x}) dx dy dz = 1;$$

hierin is $\underline{x} = (x,y)$ resp. $\underline{x} = (x,y,z)$. Ook hier geldt weer de zeefeigenschap: Zij R een gebied in \mathbb{R}^3 , dan is

$$\iiint_R \varphi(\underline{x}) \delta(\underline{x} - \underline{\xi}) dx dy dz = \varphi(\underline{\xi}) \quad \text{voor } \underline{\xi} \in R,$$

en analoog in \mathbb{R}^2 .

De delta-functie is tevens van belang voor de beschrijving van begrippen als puntlading, puntmassa, puntbelasting enz., begrippen die in wezen idealisaties zijn en in de mathematische fysica vaak worden gebruikt. Zo is bijv. de eenheidslading in de oorsprong te beschrijven door de ladingsdichtheid $\rho = \delta(\underline{x})$. Voor de bronterm $f(x,t)$ in de één-dimensionale golfvergelijking zullen we in een later voorbeeld nemen

$$f(x,t) = \delta(x - \xi_0) \delta(t).$$

Een dergelijke bronterm correspondeert met een "puntbron" in het punt $x = \xi_0$ welke alleen op het tijdstip $t = 0$ "actief" is.

2.2. Methode van separatie van variabelen

De methode van separatie van variabelen, afkomstig van Fourier, is een elementaire methode voor de oplossing van randwaardeproblemen en gemengde problemen als geformuleerd in 2.1. We bespreken hier de methode aan de hand van een aantal voorbeelden. Als voorbereiding definiëren we eerst de functies $\cos z$ en $\sin z$ voor complexe z , en we bepalen de nulpunten van deze functies.

Definitie. $\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ voor $z \in \mathbb{C}$.

Voor $z = x \in \mathbb{R}$ stemmen deze definities overeen met college Wiskunde 10, 5.4.15, eigenschap 4), zodat $\cos z$ en $\sin z$ dan samenvallen met de bekende cosinus- en sinus-functie van reëel argument.

Substitueer voor e^{iz} en e^{-iz} hun machtreeksen (zie college Wiskunde 10, 5.4.11), dan volgt

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ook deze machtreeksen, die convergent zijn voor alle $z \in \mathbb{C}$, kan men als definitie van $\cos z$ en $\sin z$ gebruiken (zie college Wiskunde 10, 5.4.20).

Voor later gebruik bepalen we nog de nulpunten $z = x + iy$ van $\cos z$ en van $\sin z$:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 0 ,$$

$$e^{2iz} = e^{2ix-2y} = -1 ,$$

$$e^{-2y}(\cos 2x + i \sin 2x) = \cos \pi + i \sin \pi ,$$

$$y = 0, 2x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) ,$$

$$z = (k + \frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z} .$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = 0 ,$$

$$e^{2iz} = e^{2ix-2y} = 1 ,$$

$$e^{-2y}(\cos 2x + i \sin 2x) = \cos 0 + i \sin 0 ,$$

$$y = 0, 2x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) ,$$

$$z = k\pi, k \in \mathbb{Z} .$$

De functies $\cos z$ en $\sin z$ hebben dus nulpunten resp. $z = (k + \frac{1}{2})\pi$ en $z = k\pi$ met k geheel; deze nulpunten zijn alle reëel.

Voorbeeld 1. We beschouwen de transversale trilling van een snaar met lengte ℓ . De uitwijking van de snaar ter plaatse x ($0 \leq x \leq \ell$) en ten tijde t wordt aangegeven door $u(x,t)$. De uiteinden $x = 0$ en $x = \ell$ van de snaar zullen vast zijn. Voorts zijn de beginuitwijking en de beginsnelheid van de snaar op het tijdstip $t = 0$ gegeven. Voor de functie $u(x,t)$ laat zich dan het volgende gemengde probleem formuleren:

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & 0 < x < \ell, t > 0 , \\ u(0,t) = 0, u(\ell,t) = 0, & t \geq 0, \text{ (randvoorwaarden)} \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \ell, \text{ (beginvoorwaarden)} . \end{cases}$$

De snelheid c wordt gegeven door $c = \sqrt{T/\rho}$, waarbij T de spanning in de snaar en ρ de massa per lengte-eenheid is.

We merken op dat de PDV en de randvoorwaarden homogeen lineair zijn, d.w.z. als de functies $u_1(x,t)$ en $u_2(x,t)$ voldoen aan de PDV en de randvoorwaarden dan voldoet ook elke lineaire combinatie $Au_1(x,t) + Bu_2(x,t)$ daaraan. De beginvoorwaarden bezitten deze eigenschap niet; deze voorwaarden zijn inhomogeen lineair. Bij de verdere oplossing spelen de homogene en de inhomogene voorwaarden een essentieel verschillende rol.

We construeren nu een voorraad functies die voldoen aan de golfvergelijking en aan de homogene lineaire randvoorwaarden. De inhomogene beginvoorwaarden worden voorlopig buiten beschouwing gelaten. Bij de constructie van de voorraad maken we gebruik van de methode van separatie van variabelen. De methode van separatie bestaat hierin dat we oplossingen zoeken van de vorm

$$u(x,t) = X(x)T(t) .$$

Substitutie van deze functie in de golfvergelijking leidt tot

$$X''(x)T(t) - \frac{1}{c^2} X(x)T''(t) = 0 ,$$

of, na deling door XT,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} .$$

We hebben hiermee de differentiaalvergelijking (DV) gesepareerd: het linkerlid is een functie van x en onafhankelijk van t , het rechterlid is een functie van t en onafhankelijk van x . Gelijkheid kan alleen optreden als beide leden onafhankelijk van x en van t , en dus gelijk aan een constante zijn. Noem deze zgn. separatieconstante λ (λ is in het algemeen complex), dan volgt

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) - \lambda c^2 T(t) = 0 .$$

Substitutie van $u(x,t) = X(x)T(t)$ in de randvoorwaarden leidt tot

$$\begin{cases} u(0,t) = X(0)T(t) = 0, & X(0) = 0 , \\ u(\ell,t) = X(\ell)T(t) = 0, & X(\ell) = 0 . \end{cases}$$

Strikt genomen voldoet ook $T(t) = 0$, maar dit voert tot de triviale oplossing $u(x,t) = 0$ die niet interessant is.

We komen op deze wijze tot het volgende probleem voor $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & 0 < x < \ell , \\ X(0) = 0, & X(\ell) = 0 . \end{cases}$$

Uiteraard heeft dit probleem de triviale oplossing $X(x) = 0$, die verder niet interessant is. We zullen in het volgende afleiden dat het probleem voor bepaalde waarden van λ een oplossing $X(x) \neq 0$ heeft. Deze waarden van λ worden eigenwaarden genoemd en de bijbehorende oplossingen $X(x)$ heten eigenfuncties. Het probleem voor $X(x)$ is dus een eigenwaardeprobleem. We zullen nu de eigenwaarden en eigenfuncties bepalen. Onderscheid daartoe twee gevallen:

(i) $\lambda = 0$. De oplossing van de DV voor $X(x)$ luidt dan

$$X(x) = Ax + B .$$

Uit de voorwaarden $X(0) = X(\ell) = 0$ volgt $A = B = 0$, zodat $X(x) = 0$ is; $\lambda = 0$ is dus geen eigenwaarde.

(ii) $\lambda \neq 0$, λ complex. Stel dan $\lambda = -\mu^2$ ($\mu \neq 0$) waarna de oplossing van de DV voor $X(x)$ luidt

$$X(x) = A \sin \mu x + B \cos \mu x .$$

Uit de voorwaarden $X(0) = X(\ell) = 0$ volgt

$$B = 0, A \sin \mu \ell = 0 .$$

We vinden nu een niet-triviale oplossing indien

$$\sin \mu \ell = 0, \mu \ell = n\pi, \mu = \frac{n\pi}{\ell} \quad \text{met } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots ;$$

zie het begin van deze paragraaf voor de nulpunten van de sinus-functie.

De gezochte eigenwaarden en eigenfuncties zijn dus

$$\lambda = -\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}, X(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Voor $\lambda = -n^2 \pi^2 / \ell^2$ bezit de DV voor $T(t)$ de algemene oplossing

$$T(t) = C \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + D \sin \frac{n\pi ct}{\ell} .$$

De eerder genoemde voorraad wordt dan gevormd door de functies

$$u(x,t) = \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi ct}{\ell}, \quad u(x,t) = \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi ct}{\ell}, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Deze functies voldoen aan de golfvergelijking en aan de randvoorwaarden

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0.$$

We keren nu terug tot het oorspronkelijke gemengde probleem. De gezochte oplossing $u(x,t)$ wordt voorgesteld door een lineaire combinatie van functies uit de voorraad:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left[C_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + D_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right], \quad (1)$$

waarin C_n, D_n nog te bepalen coëfficiënten zijn die van n mogen afhangen.

Onderstel dat de reeks (1) convergent is en termsgewijs gedifferentieerd mag worden naar x en naar t , dan voldoet $u(x,t)$ aan de golfvergelijking en aan de randvoorwaarden.

De coëfficiënten C_n en D_n worden nu zodanig bepaald dat $u(x,t)$ ook voldoet aan de (inhomogene) beginvoorwaarden, i.e.

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{\ell} D_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Hieruit volgt dat C_n en $(n\pi c/\ell)D_n$ gelijk zijn aan de coëfficiënten in de Fourier-sinusreeks van resp. $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ op het interval $[0,\ell]$. Dergelijke Fourier-sinusreeksen zijn behandeld in het college Wiskunde 30, 3.3. Met de daar afgeleide formules voor de Fouriercoëfficiënten vinden we

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx,$$

(2)

$$D_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx.$$

De oplossing $u(x,t)$ van het trillingsprobleem wordt nu gegeven door de reeks (1) met coëfficiënten C_n, D_n gegeven door (2). Deze oplossing is in eerste instantie een formele oplossing. Er moet vervolgens nog geverifieerd worden dat

- (i) de reeks (1) inderdaad convergent is en tweemaal termsgewijs gedifferentieerd mag worden naar x en naar t ,
- (ii) de Fourier-sinusreeksen van $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ op $[0,\ell]$ convergent zijn met som resp. $\varphi(x)$ en $\psi(x)$.

Voorwaarde (ii) is zeker vervuld indien $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ continu zijn op $[0,\ell]$ met $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$, $\psi(0) = \psi(\ell) = 0$, en voldoen aan de Dirichlet-condities op $(0,\ell)$ (zie college Wiskunde 30, 3.3). Voorwaarde (i) is vervuld indien $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ voldoen aan bepaalde verdere differentieerbaarheidseisen; we gaan hier niet nader op in.

De n -de term van de reeks (1) kan als volgt worden herschreven:

$$\begin{aligned} & \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left[C_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + D_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right] = \\ & = \sqrt{C_n^2 + D_n^2} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left[\cos \varphi_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} - \sin \varphi_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right] = \\ & = \sqrt{C_n^2 + D_n^2} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \left(\frac{n\pi ct}{\ell} + \varphi_n \right), \end{aligned}$$

waarin voor de hoek φ_n geldt $\tan \varphi_n = -D_n/C_n$. Deze term beschrijft een zgn. staande trilling of eigentrilling van de snaar. De bijbehorende eigenfrequentie $\omega_n := n\pi c/\ell$ is een geheel veelvoud van de grondfrequentie $\omega_1 = \pi c/\ell$ van de snaar. De reeks-oplossing (1) is dan te interpreteren als een superpositie van eigentrillingen.

Vervang in (2) de integratievariabele x door ξ en substitueer de aldus voorgestelde coëfficiënten C_n en D_n in de n -de term van de reeks (1), dan is

$$\begin{aligned} & \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left[C_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + D_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right] = \\ & = \frac{2}{\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{n} \int_0^\ell \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{\ell} d\xi \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right] + \\ & + \frac{2}{\pi c} \frac{1}{n} \int_0^\ell \psi(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{\ell} d\xi \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi ct}{\ell}. \end{aligned}$$

Sommeer deze termen gevolgd door een (formele) verwisseling van som- en integraalteken. De reeks-oplossing (1) is dan kort te schrijven als

$$u(x,t) = \int_0^\ell G_t(x,\xi,t) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^\ell G(x,\xi,t) \psi(\xi) d\xi,$$

met

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi \xi}{\ell} \sin \frac{n\pi ct}{\ell}.$$

De functie $G(x,\xi,t)$ heet de Greense functie van het probleem. Dezelfde Greense functie komt opnieuw voor in voorbeeld 7.

Voorbeeld 2. We beschouwen het volgende gemengde probleem voor de warmtegeleidingsvergelijking:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0, & t \geq 0, \text{ (randvoorwaarden)} \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq 1, \text{ (beginvoorwaarde)}. \end{cases}$$

Hierbij is de functie $u(x,t)$ te interpreteren als de temperatuurverdeling in een dunne staaf langs het interval $0 \leq x \leq 1$. Het uiteinde $x = 0$ van de staaf wordt op de temperatuur 0 gehouden, terwijl het uiteinde $x = 1$ geïsoleerd is. Voorts is de begintemperatuur van de staaf op het tijdstip $t = 0$ gegeven.

We merken op dat de PDV en de randvoorwaarden homogeen lineair zijn, terwijl de beginvoorwaarde inhomogeen lineair is. We construeren nu weer een voorraad functies van de vorm

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

die voldoen aan de PDV en aan de randvoorwaarden. De (inhomogene) beginvoorwaarde wordt voorlopig buiten beschouwing gelaten.

Substitutie van $u(x,t)$ als boven in de warmtegeleidingsvergelijking leidt na separatie tot

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda,$$

waarin λ weer de separatieconstante is.

Substitutie van $u(x,t)$ in de randvoorwaarden leidt tot

$$X(0) = 0, X'(1) = 0.$$

We komen nu tot het volgende eigenwaardeprobleem voor $X(x)$:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ X(0) = 0, X'(1) = 0. \end{cases}$$

Als mogelijke eigenwaarden onderzoeken we:

(i) $\lambda = 0$. De DV voor $X(x)$ heeft dan tot oplossing

$$X(x) = Ax + B.$$

Uit de voorwaarden $X(0) = X'(1) = 0$ volgt dat $A = B = 0$ moet zijn, zodat $X(x) = 0$ is; $\lambda = 0$ is dus geen eigenwaarde.

(ii) $\lambda \neq 0$, λ complex. Stel $\lambda = -\mu^2$ ($\mu \neq 0$), dan heeft de DV voor $X(x)$ als oplossing

$$X(x) = A \sin \mu x + B \cos \mu x .$$

Uit de voorwaarden $X(0) = X'(1) = 0$ volgt

$$B = 0, \mu A \cos \mu = 0 .$$

We vinden een oplossing $X(x) \neq 0$ indien

$$\cos \mu = 0, \mu = (n + \frac{1}{2})\pi \quad \text{met } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ;$$

zie het begin van deze paragraaf voor de nulpunten van de cosinus-functie.

De gezochte eigenwaarden en eigenfuncties zijn dus

$$\lambda = -(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2, X(x) = \sin(n + \frac{1}{2})\pi x, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Voor $\lambda = -(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2$ luidt de DV voor $T(t)$:

$$T'(t) + (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 T(t) = 0$$

met algemene oplossing

$$T(t) = C \exp[-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 t] .$$

De gezochte voorraad wordt dan gevormd door de functies

$$u(x,t) = \sin(n + \frac{1}{2})\pi x \exp[-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 t], \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

De oplossing $u(x,t)$ van het oorspronkelijke gemengde probleem wordt nu voorgesteld door een lineaire combinatie van functies uit de voorraad:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(n + \frac{1}{2})\pi x \exp[-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 t] , \quad (1)$$

met nader te bepalen coëfficiënten C_n . De reeks (1) voldoet dan formeel aan de warmtegeleidingsvergelijking en aan de randvoorwaarden. De coëfficiënten C_n worden nu zodanig bepaald dat $u(x,t)$ ook voldoet aan de (inhomogene) beginvoorwaarde, i.e.

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(n + \frac{1}{2})\pi x = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 . \quad (2)$$

De coëfficiënten C_n komen dus voort uit de reeksontwikkeling van $\varphi(x)$ naar het stelsel functies $\sin(n + \frac{1}{2})\pi x$. Deze reeks is nauw verwant met de Fourierreeks (zie college Wiskunde 30, 3.1). Men kan gemakkelijk narekenen dat

$$\int_0^1 \sin(m + \frac{1}{2})\pi x \sin(n + \frac{1}{2})\pi x dx = \begin{cases} 0 & \text{als } m \neq n, \\ \frac{1}{2} & \text{als } m = n, \end{cases}$$

zodat de functies $\sin(n + \frac{1}{2})\pi x$, $n = 0, 1, 2, \dots$, na normering een orthonormaal stelsel op $[0, 1]$ vormen. Ter bepaling van C_n vermenigvuldigen we de betrekking (2) met $\sin(m + \frac{1}{2})\pi x$ en integreren termsgewijs over het interval $[0, 1]$, dan volgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^1 \sin(m + \frac{1}{2})\pi x \sin(n + \frac{1}{2})\pi x dx = \frac{1}{2} C_m = \int_0^1 \varphi(x) \sin(m + \frac{1}{2})\pi x dx$$

en dus

$$C_n = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin(n + \frac{1}{2})\pi x dx. \quad (3)$$

De oplossing $u(x, t)$ van het warmtegeleidingsprobleem wordt nu gegeven door de reeks (1) met coëfficiënten C_n gegeven door (3). Deze oplossing is een formele oplossing en er moet nog geverifieerd worden dat $u(x, t)$ inderdaad voldoet aan de PDV en aan de rand- en beginvoorwaarden.

We zullen hier alleen aantonen dat $u(x, t)$ voldoet aan de PDV voor $0 < x < 1$, $t > 0$. Onderstel daartoe dat $\varphi(x)$ begrensd is, i.e. $|\varphi(x)| \leq M$ voor $0 \leq x \leq 1$, dan volgt uit (3) $|C_n| \leq 2M$. Beschouw nu de reeks (1) op het gebied $0 < x < 1$, $t > \delta$ met $\delta > 0$. Voor de n -de term geldt dan de ongelijkheid

$$|C_n \sin(n + \frac{1}{2})\pi x \exp[-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 t]| \leq 2M \exp[-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \delta].$$

Met bijv. het kenmerk van d'Alembert (zie college Wiskunde 10, 4.4.20) is aan te tonen dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \exp[-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \delta]$ convergent is. Op grond van het kenmerk van Weierstrass (zie college Wiskunde 30, 3.6.7) is dan de reeks (1) uniform convergent op het gebied $0 < x < 1$, $t > \delta$.

Beschouw vervolgens de reeks

$$-\sum_{n=0}^{\infty} (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 C_n \sin(n + \frac{1}{2})\pi x \exp[-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 t] ,$$

verkregen uit (1) door termsgewijze differentiatie naar t . Ook deze reeks is uniform convergent op het gebied $0 < x < 1, t > \delta$; immers

$$\begin{aligned} & |(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 C_n \sin(n + \frac{1}{2})\pi x \exp[-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 t]| \leq \\ & \leq 2M(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \exp[-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \delta] \end{aligned}$$

voor $0 < x < 1, t > \delta$, en de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} (n + \frac{1}{2})^2 \exp[-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \delta]$ is convergent. Dit betekent dat de oorspronkelijke reeks (1) inderdaad termsgewijs gedifferentieerd mag worden naar t als $0 < x < 1, t > \delta$, en de gedifferentieerde reeks heeft de som $u_t(x,t)$ (zie de stelling in het college Wiskunde 30, 3.6.6).

Evenzo kan men aantonen dat u_{xx} wordt verkregen door tweemaal termsgewijs differentiëren naar x van de reeks (1):

$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{n=0}^{\infty} (n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 C_n \sin(n + \frac{1}{2})\pi x \exp[-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 t],$$

$0 < x < 1, t > \delta .$

Het is nu duidelijk dat $u_{xx} = u_t$ voor $0 < x < 1, t > \delta$. Aangezien δ willekeurig positief is, voldoet $u(x,t)$ aan de PDV $u_{xx} - u_t = 0$ voor $0 < x < 1, t > 0$.

Voorbeeld 3. We beschouwen het Dirichlet probleem voor de Laplace vergelijking in een cirkelvormig gebied met straal 1. Na invoering van poolcoördinaten r, φ , is het probleem als volgt te formuleren:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 \leq r < 1, -\pi \leq \varphi \leq \pi, \\ u(1, \varphi) = g(\varphi), & -\pi \leq \varphi \leq \pi, \text{ (randvoorwaarde)} \end{cases}$$

waarin $g(\varphi)$ een gegeven functie is.

Met de methode van separatie van variabelen bepalen we een voorraad functies van de vorm

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) ,$$

die voldoen aan de Laplace vergelijking. Substitutie van $u(r, \varphi)$ in de PDV leidt tot

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r} R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2} R(r)\Phi''(\varphi) = 0 .$$

Na separatie volgt

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = - \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda ,$$

waarin λ de separatieconstante is. Voor $R(r)$ en $\Phi(\varphi)$ vinden we dan de gewone DV's

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - \lambda R(r) = 0, \quad \Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0 .$$

Bij de invoering van poolcoördinaten r, φ met $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, is te bedenken dat de voerstralen $\varphi = -\pi$ en $\varphi = \pi$ samenvallen. De functie $u(r, \varphi)$ en haar afgeleiden $u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi(r, \varphi)$ moeten continu zijn over deze voerstraal. Dit betekent dat de waarden van $\Phi(\varphi)$ en $\Phi'(\varphi)$ voor $\varphi = \pi$ continu moeten aansluiten bij de waarden voor $\varphi = -\pi$. We komen op deze wijze tot het volgende eigenwaardeprobleem voor $\Phi(\varphi)$:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0, & -\pi < \varphi < \pi, \\ \Phi(-\pi) = \Phi(\pi), \quad \Phi'(-\pi) = \Phi'(\pi). \end{cases}$$

We onderzoeken als mogelijke eigenwaarden:

(i) $\lambda = 0$. De oplossing van de DV voor $\Phi(\varphi)$ luidt dan

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi .$$

Uit de aansluitvoorwaarden volgt $B = 0$, terwijl A willekeurig mag zijn. We vinden dus de volgende eigenwaarde en eigenfunctie:

$$\lambda = 0, \quad \Phi(\varphi) = 1 .$$

(ii) $\lambda \neq 0$, λ complex. Stel dan $\lambda = \mu^2$ ($\mu \neq 0$), waarna de oplossing van de DV voor $\Phi(\varphi)$ luidt

$$\Phi(\varphi) = A \cos \mu\varphi + B \sin \mu\varphi .$$

Substitutie van deze oplossing in de aansluitvoorwaarden leidt tot

$$B \sin \mu\pi = 0, \quad \mu A \sin \mu\pi = 0 .$$

We vinden een oplossing $\Phi(\varphi) \neq 0$ indien

$$\sin \mu\pi = 0, \quad \mu = n \quad \text{met } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots .$$

De constanten A en B zijn dan willekeurig te kiezen.

Samengevat komen we tot de volgende eigenwaarden en eigenfuncties:

$$\lambda = n^2, \quad \phi(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ \sin n\varphi, & n = 1, 2, 3, \dots. \end{cases}$$

Voor $\lambda = n^2$ gaat de DV voor $R(r)$ over in

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0.$$

Deze DV is van het type Euler (zie college Wiskunde 30, 4.3, voorbeeld 1) en de algemene oplossing luidt

$$\begin{aligned} R(r) &= C + D \log r & \text{als } n = 0, \\ R(r) &= Cr^n + Dr^{-n} & \text{als } n = 1, 2, 3, \dots. \end{aligned}$$

Hierin zijn de oplossingen $\log r$ en r^{-n} niet acceptabel omdat $R(0)$ eindig moet zijn; we stellen daarom $D = 0$.

De gezochte voorraad wordt dan gevormd door de functies

$$u(r, \varphi) = r^n \cos n\varphi, \quad u(r, \varphi) = r^n \sin n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

De oplossing $u(r, \varphi)$ van het Dirichlet probleem wordt nu voorgesteld door een lineaire combinatie van functies uit deze voorraad:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad (1)$$

met nader te bepalen coëfficiënten a_n en b_n . Indien de reeks (1) convergent is en termsgewijs gedifferentieerd mag worden naar r en naar φ , dan voldoet $u(r, \varphi)$ aan de Laplace vergelijking.

We bepalen nu de coëfficiënten a_n en b_n zodanig dat $u(r, \varphi)$ tevens voldoet aan de randvoorwaarde op de cirkel $r = 1$, i.e.

$$u(1, \varphi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) = g(\varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

De coëfficiënten a_n en b_n zijn dus de Fouriercoëfficiënten van $g(\varphi)$ en met de bekende formules volgt (zie college Wiskunde 30, 3.1.6),

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \sin n\theta \, d\theta. \quad (2)$$

Voorts geldt: de Fourierreeks van $g(\varphi)$ is convergent op $[-\pi, \pi]$ met som $g(\varphi)$, indien $g(\varphi)$ continu is op $[-\pi, \pi]$ met $g(-\pi) = g(\pi)$, en daar voldoet aan de Dirichlet-condities (zie college Wiskunde 30, 3.1.9).

De oplossing $u(r, \varphi)$ van het Dirichlet probleem wordt nu gegeven door de reeks (1) met coëfficiënten a_n, b_n gegeven door (2). Men kan bewijzen dat de reeks (1) en ook de reeksen verkregen door termsgewijze differentiatie van (1) naar r of naar φ , uniform convergent zijn op het gebied $0 \leq r < 1 - \delta$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ met $\delta > 0$. Dit betekent dat de reeks (1) inderdaad termsgewijs gedifferentieerd mag worden en dat $u(r, \varphi)$ voldoet aan de Laplace vergelijking in het cirkelgebied $0 \leq r < 1$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

De reeks-oplossing (1) kan nog herleid worden tot een integraalvoorstelling. Substitueer daartoe in (1) de coëfficiënten a_n en b_n als gegeven door (2), dan ontstaat er

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) [\cos n\varphi \cos n\theta + \sin n\varphi \sin n\theta] d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\varphi - \theta) \right] d\theta, \end{aligned}$$

waarbij som- en integraalteken werden verwisseld. De laatste reeks is expliciet te sommeren. Stel namelijk $\varphi - \theta = \alpha$, dan is

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\alpha &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\alpha} = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \frac{re^{i\alpha}}{1 - re^{i\alpha}} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{1 + re^{i\alpha}}{1 - re^{i\alpha}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{1 + r \cos \alpha + ir \sin \alpha}{1 - r \cos \alpha - ir \sin \alpha} = \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r \cos \alpha + r^2)}, \end{aligned}$$

geldig voor $0 \leq r < 1$ en elke α . Met dit hulresultaat volgt

$$u(r, \varphi) = \frac{1 - r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(\theta)}{1 - 2r \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\theta,$$

d.i. de integraalformule van Poisson.

Voorbeeld 4. We bepalen de eigentrillingen van een rechthoekig membraan $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, met vaste rand. De uitwijking $u(x,y,t)$ van het membraan is dan oplossing van het volgende randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0, & 0 \leq x \leq a, t \geq 0, \\ u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0, & 0 \leq y \leq b, t \geq 0. \end{cases} \quad (\text{randvoorwaarden})$$

We zoeken nu oplossingen van de vorm

$$u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t).$$

Substitutie van deze functie in de golfvergelijking leidt na separatie tot

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda,$$

waarin λ de separatieconstante is. De DV met Y en T is opnieuw te separeren:

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} - \lambda = \mu,$$

waarin μ een tweede separatieconstante is. Voor $X(x)$, $Y(y)$ en $T(t)$ vinden we op deze wijze de gewone DV's

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad Y''(y) - \mu Y(y) = 0, \quad T''(t) - (\lambda + \mu)c^2 T(t) = 0.$$

Substitutie van $u(x,y,t)$ als boven in de randvoorwaarden leidt tot

$$X(0) = X(a) = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0.$$

We komen dan tot de volgende eigenwaardeproblemen voor $X(x)$ en $Y(y)$:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & 0 < x < a, \\ X(0) = 0, X(a) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} Y''(y) - \mu Y(y) = 0, & 0 < y < b, \\ Y(0) = 0, Y(b) = 0. \end{cases}$$

Dit type eigenwaardeprobleem werd reeds opgelost in voorbeeld 1. We vinden nu de volgende eigenwaarden en eigenfuncties:

$$\lambda = -\frac{m^2 \pi^2}{a^2}, \quad X(x) = \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots;$$

$$\mu = -\frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \quad Y(y) = \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Voor $\lambda = -m^2\pi^2/a^2$ en $\mu = -n^2\pi^2/b^2$ gaat de DV voor $T(t)$ over in

$$T''(t) + \omega_{mn}^2 T(t) = 0 \quad \text{met } \omega_{mn} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

De algemene oplossing van deze DV luidt

$$T(t) = A \cos \omega_{mn} t + B \sin \omega_{mn} t.$$

De gezochte oplossingen $u(x,y,t)$ worden nu gegeven door

$$u(x,y,t) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} (A \cos \omega_{mn} t + B \sin \omega_{mn} t), \quad m,n=1,2,3,\dots$$

Elk van deze oplossingen beschrijft een eigentrilling van het membraan; de bijbehorende eigenfrequentie is ω_{mn} .

Laat nu tevens de beginuitwijking en beginsnelheid van het membraan op het tijdstip $t = 0$ gegeven zijn:

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \\ \text{(beginvoorwaarden).}$$

De oplossing $u(x,y,t)$ van het trillingsprobleem is dan voor te stellen door een superpositie van eigentrillingen:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} [A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t],$$

waarin de coëfficiënten A_{mn} en B_{mn} worden bepaald door de beginvoorwaarden:

$$u(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \varphi(x,y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b,$$

$$u_t(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \psi(x,y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

De coëfficiënten A_{mn} en B_{mn} komen dus voort uit de reeksontwikkeling van resp. $\varphi(x,y)$ en $\psi(x,y)$ naar het stelsel functies $\sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$. Na normering vormen deze functies een orthonormaal stelsel op de rechthoek $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. Analogoos als in de theorie der Fourierreeksen worden nu A_{mn} en B_{mn} gegeven door

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b \varphi(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dy ,$$

$$B_{mn} = \frac{4}{ab\omega_{mn}} \int_0^a dx \int_0^b \psi(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dy .$$

Samenvatting. Bij de methode van separatie van variabelen construeren we een voorraad functies die producten zijn van functies van één variabele, en die voldoen aan de homogene lineaire PDV en aan de homogene lineaire voorwaarden. De gezochte oplossing van het probleem wordt dan voorgesteld door een lineaire combinatie (reeks) van functies uit de voorraad. De coëfficiënten in de reeks worden zodanig bepaald dat tevens voldaan is aan de overige, inhomogene voorwaarden.

Essentieel voor de toepassing van de methode van separatie van variabelen is dat de PDV homogeen lineair is, en dat een voldoende aantal homogene lineaire voorwaarden voorhanden is. Indien de PDV of de (rand)voorwaarden inhomogeen zijn, kan de methode van separatie niet direct worden gebruikt. Het inhomogene probleem moet dan eerst herleid worden tot een homogeen probleem, bijv. door aftrekken van een geschikte particuliere oplossing. We lichten dit toe aan de hand van een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 5. Als variant op voorbeeld 2 beschouwen we het warmtegeleidingsprobleem

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u_x(1,t) = 1, & t \geq 0, \text{ (randvoorwaarden)} \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \text{ (beginvoorwaarde)}. \end{cases}$$

Hierbij is de randvoorwaarde $u_x(1,t) = 1$ inhomogeen zodat de in voorbeeld 2 toegepaste methode van separatie niet te gebruiken is.

We zoeken nu een particuliere oplossing $v(x,t)$ die voldoet aan

$$\begin{cases} v_{xx} - v_t = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ v(0,t) = 0, v_x(1,t) = 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Probeer $v = v(x)$, d.i. een functie van x alleen, dan volgt

$$v''(x) = 0, 0 < x < 1; v(0) = 0, v'(1) = 1,$$

met als oplossing

$$v(x) = x.$$

Stel nu

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t) = x + w(x,t),$$

dan is $w(x,t)$ oplossing van het probleem

$$\begin{cases} w_{xx} - w_t = 0, 0 < x < 1, t > 0, \\ w(0,t) = 0, w_x(1,t) = 0, t \geq 0, \text{ (randvoorwaarden)} \\ w(x,0) = -x, 0 \leq x \leq 1, \text{ (beginvoorwaarde)} \end{cases}$$

met homogene lineaire randvoorwaarden. Het probleem voor $w(x,t)$ is op te lossen met de methode van separatie, zie voorbeeld 2. In de oplossing van voorbeeld 2 stellen we $\phi(x) = -x$, waarna volgt

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(n + \frac{1}{2})\pi x \exp[-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 t]$$

met

$$C_n = -2 \int_0^1 x \sin(n + \frac{1}{2})\pi x \, dx = -\frac{2}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})^2}.$$

De gezochte oplossing $u(x,t)$ wordt dan gegeven door

$$u(x,t) = x - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})^2} \sin(n + \frac{1}{2})\pi x \exp[-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 t].$$

We merken nog op dat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x,t) = x = v(x).$$

Deze limiet beschrijft de stationaire temperatuurverdeling in de staaf $0 \leq x \leq 1$, zoals deze zich instelt na "oneindig" lange tijd. De particuliere oplossing $v(x)$ valt dus samen met de stationaire temperatuurverdeling.

Voorbeeld 6. We onderzoeken de torsie van een cilindrische staaf met vierkante doorsnede $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$. In het college Toegepaste Mechanica wordt afgeleid dat de zgn. torsiefunctie $F(x,y)$ dan voldoet aan

$$\begin{cases} F_{xx} + F_{yy} = -2, & 0 < x < a, & 0 < y < a, \\ F(x,0) = F(x,a) = 0, & 0 \leq x \leq a, \\ F(0,y) = F(a,y) = 0, & 0 \leq y \leq a, \end{cases} \quad \text{(randvoorwaarden)}$$

d.i. een Dirichlet probleem voor de Poisson vergelijking. Aangezien de PDV inhomogeen is, kan de methode van separatie niet direct worden toegepast. We zoeken nu een particuliere oplossing $u(x,y)$ die voldoet aan

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -2, & 0 < x < a, & 0 < y < a, \\ u(x,0) = u(x,a) = 0, & 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Probeer $u = u(y)$, d.i. een functie van y alleen, dan volgt

$$u''(y) = -2, \quad 0 < y < a; \quad u(0) = u(a) = 0,$$

met als oplossing

$$u(y) = y(a - y).$$

Stel nu

$$F(x,y) = u(y) + v(x,y) = y(a - y) + v(x,y),$$

dan is $v(x,y)$ oplossing van het probleem

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < a, \\ v(x,0) = v(x,a) = 0, & 0 \leq x \leq a, \\ v(0,y) = v(a,y) = -y(a - y), & 0 \leq y \leq a. \end{cases} \quad \text{(randvoorwaarden)}$$

De PDV is nu homogeen terwijl de randvoorwaarden deels homogeen en deels inhomogeen zijn. Het aantal homogene lineaire randvoorwaarden zal evenwel voldoende blijken te zijn om het probleem met de methode van separatie op te lossen. We construeren weer een voorraad functies van de vorm

$$v(x,y) = X(x)Y(y),$$

die voldoen aan de PDV (Laplace vergelijking) en aan de twee homogene lineaire randvoorwaarden. De twee inhomogene randvoorwaarden worden voorlopig buiten beschouwing gelaten.

Substitutie van $v(x,y)$ als boven in de Laplace vergelijking leidt na separatie tot

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda ,$$

waarin λ de separatieconstante is.

Substitutie van $v(x,y)$ in de homogene lineaire randvoorwaarden leidt tot

$$\begin{cases} v(x,0) = X(x)Y(0) = 0, & Y(0) = 0 , \\ v(x,a) = X(x)Y(a) = 0, & Y(a) = 0 . \end{cases}$$

We gaan nu eerst verder met de functie $Y(y)$. Voor deze functie doet zich het volgende eigenwaardeprobleem voor:

$$\begin{cases} Y''(y) - \lambda Y(y) = 0, & 0 < y < a, \\ Y(0) = 0, & Y(a) = 0 . \end{cases}$$

Dit eigenwaardeprobleem werd reeds opgelost in voorbeeld 1, met als uitkomst

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad Y(y) = \sin \frac{n\pi y}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Voor $\lambda = -n^2\pi^2/a^2$ bezit de DV voor $X(x)$ de algemene oplossing

$$X(x) = Ae^{n\pi x/a} + Be^{-n\pi x/a} .$$

De genoemde voorraad wordt dan gevormd door de functies

$$v(x,y) = e^{n\pi x/a} \sin \frac{n\pi y}{a}, \quad v(x,y) = e^{-n\pi x/a} \sin \frac{n\pi y}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Vervolgens wordt de gezochte oplossing $v(x,y)$ voorgesteld door een lineaire combinatie van functies uit de voorraad:

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n e^{n\pi x/a} + B_n e^{-n\pi x/a}] \sin \frac{n\pi y}{a} . \quad (1)$$

Deze functie $v(x,y)$ voldoet dan formeel aan de Laplace vergelijking en aan de homogene lineaire randvoorwaarden op de zijden $y = 0$ en $y = a$ van het vierkant. We bepalen de coëfficiënten A_n en B_n zodanig dat $v(x,y)$ tevens voldoet aan de inhomogene randvoorwaarden op de zijden $x = 0$ en $x = a$, i.e.

$$v(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \sin \frac{n\pi y}{a} = -y(a-y), \quad 0 \leq y \leq a,$$

$$v(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi}) \sin \frac{n\pi y}{a} = -y(a-y), \quad 0 \leq y \leq a.$$

Ontwikkel nu de functie $-y(a-y)$ op $[0,a]$ in een Fourier-sinusreeks (zie college Wiskunde 30, 3.3)

$$-y(a-y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi y}{a},$$

dan worden de Fouriercoëfficiënten b_n gegeven door

$$b_n = -\frac{2}{a} \int_0^a y(a-y) \sin \frac{n\pi y}{a} dy = -\frac{4a^2}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0 & \text{voor } n \text{ even,} \\ -\frac{8a^2}{n^3 \pi^3} & \text{voor } n \text{ oneven.} \end{cases} \quad (2)$$

Voor de coëfficiënten A_n en B_n moet dan gelden

$$\begin{cases} A_n + B_n = b_n, \\ A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi} = b_n. \end{cases}$$

Los dit stelsel vergelijkingen op, dan vinden we

$$A_n = b_n \frac{1 - e^{-n\pi}}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}} = b_n \frac{e^{-\frac{1}{2}n\pi}}{e^{\frac{1}{2}n\pi} + e^{-\frac{1}{2}n\pi}} = b_n \frac{e^{-\frac{1}{2}n\pi}}{2 \cosh \frac{1}{2}n\pi},$$

$$B_n = b_n \frac{e^{n\pi} - 1}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}} = b_n \frac{e^{\frac{1}{2}n\pi}}{e^{\frac{1}{2}n\pi} + e^{-\frac{1}{2}n\pi}} = b_n \frac{e^{\frac{1}{2}n\pi}}{2 \cosh \frac{1}{2}n\pi}.$$

Met de aldus bepaalde coëfficiënten A_n en B_n is de n -de term van de reeks (1) te herleiden tot

$$\begin{aligned} A_n e^{n\pi x/a} + B_n e^{-n\pi x/a} &= \frac{b_n}{2 \cosh \frac{1}{2}n\pi} \left\{ \exp\left[\frac{n\pi x}{a} - \frac{1}{2}n\pi\right] + \exp\left[-\frac{n\pi x}{a} + \frac{1}{2}n\pi\right] \right\} = \\ &= b_n \frac{\cosh \frac{n\pi(x - \frac{1}{2}a)}{a}}{\cosh \frac{1}{2}n\pi}. \end{aligned}$$

Substitueer hierin de coëfficiënt b_n als gegeven door (2), dan is daarmee de reeks-oplossing (1) volledig bepaald.

De oorspronkelijke torsiefunctie $F(x,y)$ wordt dan gegeven door

$$F(x,y) = y(a - y) + v(x,y) =$$

$$= y(a - y) - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \frac{\cosh[(2n+1)\pi(x - \frac{1}{2}a)/a]}{\cosh(n + \frac{1}{2})\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{a} .$$

Van praktisch belang is verder nog de zgn. torsiestijfheid D gegeven door

$$D = 2G \int_0^a dx \int_0^a F(x,y) dy ,$$

waarin G de afschuivingsmodulus is. Na uitwerking van de integraal door termgewijze integratie vinden we

$$D = Ga^4 \left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(n + \frac{1}{2})\pi}{(2n+1)^5} \right] .$$

De laatste reeks convergeert zeer snel; na numerieke sommatie volgt

$$D = 0.140577Ga^4 .$$

Voorbeeld 7. Als vervolg op voorbeeld 1 beschouwen we de trilling van een snaar met lengte ℓ , onder invloed van een uitwendige kracht. De uiteinden van de snaar zullen vast zijn. Voorts zal de snaar op het tijdstip $t = 0$ in rust zijn. Voor de uitwijking $u(x,t)$ laat zich dan het volgende gemengde probleem formuleren:

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(x,t), & 0 < x < \ell, t > 0 , \\ u(0,t) = 0, u(\ell,t) = 0, & t \geq 0, \text{ (randvoorwaarden)} \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \ell, \text{ (beginvoorwaarden)} \end{cases}$$

waarin $f(x,t)$ een gegeven functie is, corresponderend met een uitwendige kracht. De PDV (golfvergelijking) is nu inhomogeen. Indien $f(x,t)$ van een eenvoudige vorm is, kan men door "proberen" een geschikte particuliere oplossing bepalen en vervolgens het inhomogene probleem herleiden tot een homogeen probleem. We zullen hier een andere methode volgen die te gebruiken is voor algemene $f(x,t)$.

We stellen de gezochte oplossing $u(x,t)$ voor door een reeks naar de eigenfuncties $\sin(n\pi x/\ell)$ van het homogene probleem (zie voorbeeld 1):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{n\pi x}{\ell} ,$$

waarbij de coëfficiënten $a_n(t)$ te bepalen zijn. Merk op dat de reeks voor $u(x,t)$ voldoet aan de randvoorwaarden $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$.

Evenzo ontwikkelen we $f(x,t)$ in een reeks naar dezelfde eigenfuncties:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{\ell} .$$

De Fouriercoëfficiënten $f_n(t)$ worden dan gegeven door

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi,t) \sin \frac{n\pi \xi}{\ell} d\xi .$$

Substitueer de reeksen voor $u(x,t)$ en $f(x,t)$ in de golfvergelijking en differentieer termsgewijs, dan ontstaat er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} a_n(t) - \frac{1}{c^2} a_n''(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell} = - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{\ell} .$$

Daaruit volgt

$$a_n''(t) + \omega_n^2 a_n(t) = c^2 f_n(t) \quad \text{met } \omega_n = n\pi c/\ell ,$$

d.i. een gewone DV voor $a_n(t)$.

Substitutie van de reeks voor $u(x,t)$ in de beginvoorwaarden leidt tot

$$a_n(0) = 0, \quad a_n'(0) = 0 .$$

We lossen nu de DV voor $a_n(t)$ op met de methode van Laplace transformatie (zie college Wiskunde 30, 4.2, voorbeeld 4). Voer in de Laplace-getransformeerde

$$A_n(p) = \mathcal{L}\{a_n(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} a_n(t) dt .$$

Wegens $a_n(0) = a_n'(0) = 0$ is

$$\mathcal{L}\{a_n''(t)\} = p^2 A_n(p) .$$

De DV voor $a_n(t)$ gaat dan door Laplace transformatie over in

$$(p^2 + \omega_n^2)A_n(p) = c^2 \mathcal{L}\{f_n(t)\}$$

met oplossing

$$A_n(p) = \frac{c^2}{p^2 + \omega_n^2} \mathcal{L}\{f_n(t)\} .$$

Bedenk dat

$$\frac{\omega_n}{p^2 + \omega_n^2} = \mathcal{L}\{\sin \omega_n t\} ,$$

dan is de inverse Laplace transformatie van $A_n(p)$ uit te voeren met behulp van de convolutiestelling (college Wiskunde 30, 4.2.5). De uitkomst luidt

$$a_n(t) = \frac{c^2}{\omega_n} f_n(t) * \sin \omega_n t = \frac{c^2}{\omega_n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau .$$

Stel hierin $\omega_n = n\pi c/l$, dan wordt de oplossing $u(x,t)$ van het trillingsprobleem gegeven door

$$u(x,t) = \frac{c^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n\pi c(t - \tau)}{l} d\tau \sin \frac{n\pi x}{l} .$$

Na substitutie van f_n als boven en (formele) verwisseling van som- en integraalteken is deze oplossing als volgt te schrijven:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{2c}{\pi} \int_0^t d\tau \int_0^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l} \sin \frac{n\pi c(t - \tau)}{l} \right] f(\xi, \tau) d\xi = \\ &= c^2 \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi \end{aligned}$$

waarin

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l} \sin \frac{n\pi c(t - \tau)}{l}$$

de Greense functie is als ingevoerd in voorbeeld 1.

We beschouwen nog het speciale geval

$$f(x,t) = c^{-2} \delta(x - \xi_0) \delta(t) ,$$

corresponderend met een uitwendige kracht die geconcentreerd is in het punt $x = \xi_0$ en werkt op het tijdstip $t = 0$. De resulterende uitwijking $u(x,t)$ van de snaar is

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x,\xi,t-\tau) \delta(\xi - \xi_0) \delta(\tau) d\xi = G(x,\xi_0,t)$$

op grond van de zeefeigenschap van de delta-functie. De Greense functie $G(x,\xi,t)$ is dus te interpreteren als de uitwijking ter plaatse x en ten tijde t tengevolge van een geconcentreerde kracht in het punt ξ werkend op het tijdstip 0 .

2.3. Golfvergelijking, diffusievergelijking

In deze paragraaf bespreken we een aantal problemen voor de één-dimensionale homogene golfvergelijking en diffusievergelijking, beschouwd op het oneindige interval $-\infty < x < \infty$ resp. op het half-oneindige interval $0 < x < \infty$.

2.3.1. Golfvergelijking op $(-\infty, \infty)$. We beschouwen het volgende beginwaardeprobleem voor de homogene golfvergelijking:

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty, \text{ (beginvoorwaarden) } . \end{cases}$$

Het probleem beschrijft de trilling van een "oneindig" lange snaar waarbij de beginuitwijking en de beginsnelheid op het tijdstip $t = 0$ zijn voorgescreven. We lossen het beginwaardeprobleem op met de methode van d'Alembert. Voer in de nieuwe variabelen

$$\xi = x - ct, \eta = x + ct ,$$

dan volgt voor de partiële afgeleiden van u :

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi + u_\eta, & u_{xx} &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} , \\ u_t &= c(-u_\xi + u_\eta), & u_{tt} &= c^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) . \end{aligned}$$

De golfvergelijking gaat nu over in

$$u_{\xi\eta} = 0 .$$

De laatste vergelijking is eenvoudig op te lossen:

$$u_{\xi} = w(\xi), \quad u = \int w(\xi) d\xi + w_2(\eta) = w_1(\xi) + w_2(\eta) ,$$

waarin w , w_1 en w_2 willekeurige differentieerbare functies zijn.

Uitgedrukt in de oorspronkelijke variabelen x en t wordt de oplossing gegeven door

$$u(x,t) = w_1(x - ct) + w_2(x + ct) ,$$

d.i. de algemene oplossing van de homogene golfvergelijking. Hierin beschrijft $w_1(x - ct)$ een lopende golf met snelheid c in de positieve x -richting; evenzo is $w_2(x + ct)$ te interpreteren als een lopende golf met snelheid c in de negatieve x -richting.

Voor het beginwaardeprobleem als boven worden de functies w_1 en w_2 bepaald door de beginvoorwaarden

$$\begin{cases} u(x,0) = w_1(x) + w_2(x) = \varphi(x) , \\ u_t(x,0) = -cw_1'(x) + cw_2'(x) = \psi(x) . \end{cases}$$

Integratie van de tweede vergelijking geeft

$$w_1(x) - w_2(x) = -\frac{1}{c} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + A$$

met willekeurige integratieconstante A , waarna w_1 en w_2 zijn op te lossen:

$$w_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2}A ,$$

$$w_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(\xi) d\xi - \frac{1}{2}A .$$

Substitueer de aldus bepaalde functies w_1 en w_2 in de algemene oplossing als boven, dan volgt

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \psi(\xi) d\xi ,$$

oftewel

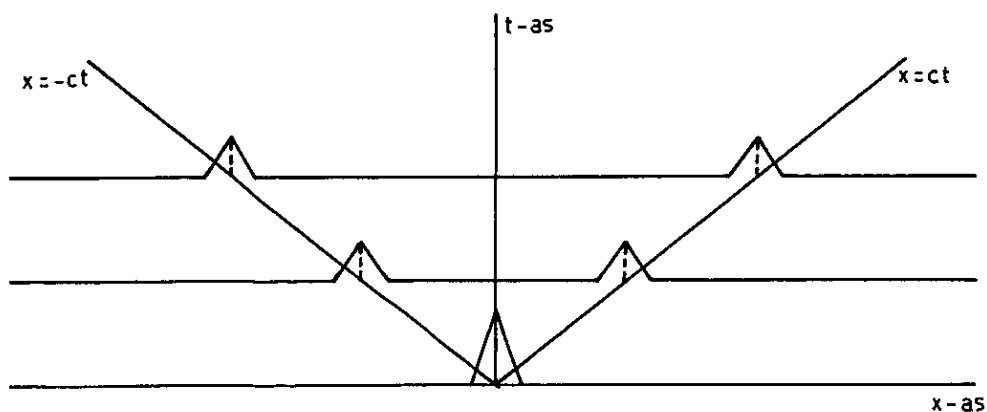
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-ct) + \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi .$$

Deze oplossing van het beginwaardeprobleem heet de d'Alembert oplossing.

In geval $\psi(x) = 0$ gaat de oplossing over in

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-ct) + \frac{1}{2}\varphi(x+ct) .$$

We geven nog een fysische interpretatie van deze oplossing. Laat de beginuitwijking $\varphi(x)$ de vorm hebben van een "driehoekige puls" ter plaatse $x = 0$, als weergegeven in onderstaande figuur. Deze puls splitst zich dan in twee helften, die zich met snelheid c voortplanten naar rechts resp. naar links. De positie van de twee pulsen op een bepaald tijdstip $t > 0$ is af te lezen uit het onderstaande (x,t) -diagram.



2.3.2. Golfvergelijking op $(0, \infty)$. We beschouwen het volgende gemengde probleem voor de homogene golfvergelijking:

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0, \text{ (randvoorwaarde)} \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \geq 0, \text{ (beginvoorwaarden)}. \end{cases}$$

Het probleem beschrijft de trilling van een half-oneindige snaar met vast uiteinde $x = 0$, waarbij de beginuitwijking en de beginsnelheid op het tijdstip $t = 0$ weer zijn voorgeschreven.

We lossen het gemengde probleem op met de methode van spiegeling. Daartoe zetten we de functies $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ voort als oneven functies van x door middel van de definities:

$$\varphi(x) := -\varphi(-x), \quad \psi(x) := -\psi(-x) \quad \text{als } x < 0.$$

Beschouw vervolgens het beginwaardeprobleem op het interval $-\infty < x < \infty$,

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty, \text{ (beginvoorwaarden)}. \end{cases}$$

Zoals eerder afgeleid wordt de oplossing van dit probleem gegeven door

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\varphi(x - ct) + \frac{1}{2}\varphi(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi.$$

Voor $x = 0$ geldt

$$u(0, t) = \frac{1}{2}\varphi(-ct) + \frac{1}{2}\varphi(ct) + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} \psi(\xi) d\xi = 0,$$

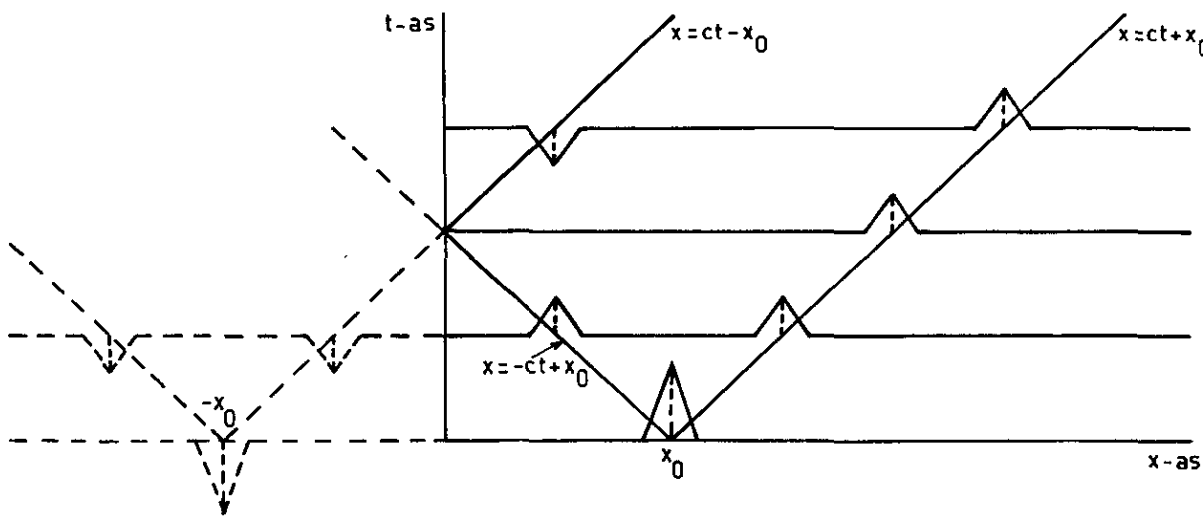
daar φ en ψ oneven zijn; $u(x, t)$ voldoet dus aan de randvoorwaarde $u(0, t) = 0$.

De functie $u(x, t)$ als boven is dan voor $x > 0, t > 0$ tevens oplossing van het trillingsprobleem voor de half-oneindige snaar met vast uiteinde. Deze oplossing kan worden beschreven als

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(x-ct) + \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi & \text{voor } x > ct > 0, \\ -\frac{1}{2}\varphi(ct-x) + \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi & \text{voor } ct > x > 0, \end{cases}$$

waarbij gebruik gemaakt is van de oneven symmetrie van φ en ψ .

Ter interpretatie van de oplossing nemen we: $\psi(x) = 0$, $\varphi(x)$ heeft de vorm van een driehoekige puls ter plaatse $x = x_0 > 0$. Na oneven voortzetting vertoont $\varphi(x)$ een tegengestelde pulsform ter plaatse $x = -x_0$. Voor de oneindige snaar hebben we dan een beginuitwijking in de vorm van twee pulsen. Elk van deze pulsen splitst zich in twee helften, die zich met snelheid c voortplanten naar rechts resp. naar links; zie het navolgende (x,t) -diagram.



De trilling van de half-oneindige snaar is nu af te lezen uit het gedeelte $x > 0$ van het diagram. De beginuitwijking splitst zich in twee gelijke pulsen, die zich met snelheid c voortplanten naar rechts resp. naar links. De naar links lopende puls bereikt het vaste uiteinde $x = 0$ op het tijdstip $t = x_0/c$. Er treedt dan reflectie op waarbij de puls van teken omkeert en vervolgens naar rechts beweegt. De gereflecteerde puls volgt de andere naar rechts lopende puls op een afstand $2x_0$.

Opmerking. De methode van spiegeling kan alleen worden toegepast in de gevallen van een homogene randvoorwaarde $u(0,t) = 0$, resp. $u_x(0,t) = 0$. In het laatste geval dienen $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ te worden voortgezet als even functies van x door middel van de definities:

$$\varphi(x) := \varphi(-x), \quad \psi(x) := \psi(-x) \quad \text{als } x < 0 .$$

2.3.3. Golfvergelijking op $(0, \ell)$. We beschouwen nogmaals de trilling van een eindige snaar met vaste uiteinden $x = 0$ en $x = \ell$, zoals eerder behandeld in 2.2, voorbeeld 1. Voor de uitwijking $u(x,t)$ geldt het gemengde probleem

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & 0 < x < \ell, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(\ell,t) = 0, & t \geq 0, \text{ (randvoorwaarden)} \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \ell, \text{ (beginvoorwaarden)}. \end{cases}$$

Dit probleem is ook op te lossen met de methode van spiegeling. Daartoe zetten we $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ voort als functies van x die oneven zijn t.o.v. $x = 0$ en t.o.v. $x = \ell$. Voor de voortgezette functie $\varphi(x)$ moet dan gelden

$$\varphi(x) = -\varphi(-x), \quad \varphi(x) = -\varphi(2\ell - x),$$

en evenzo voor $\psi(x)$. Daaruit volgt $\varphi(-x) = \varphi(2\ell - x)$, zodat φ periodiek is met periode 2ℓ . De voortzetting van de op $[0, \ell]$ gegeven functies $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ is nu als volgt te realiseren:

Definieer

$$\varphi(x) := -\varphi(-x), \quad \psi(x) := -\psi(-x) \quad \text{als } -\ell < x < 0,$$

waarna $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ periodiek worden voortgezet met periode 2ℓ .

Beschouw vervolgens het beginwaardeprobleem op het interval $-\infty < x < \infty$,

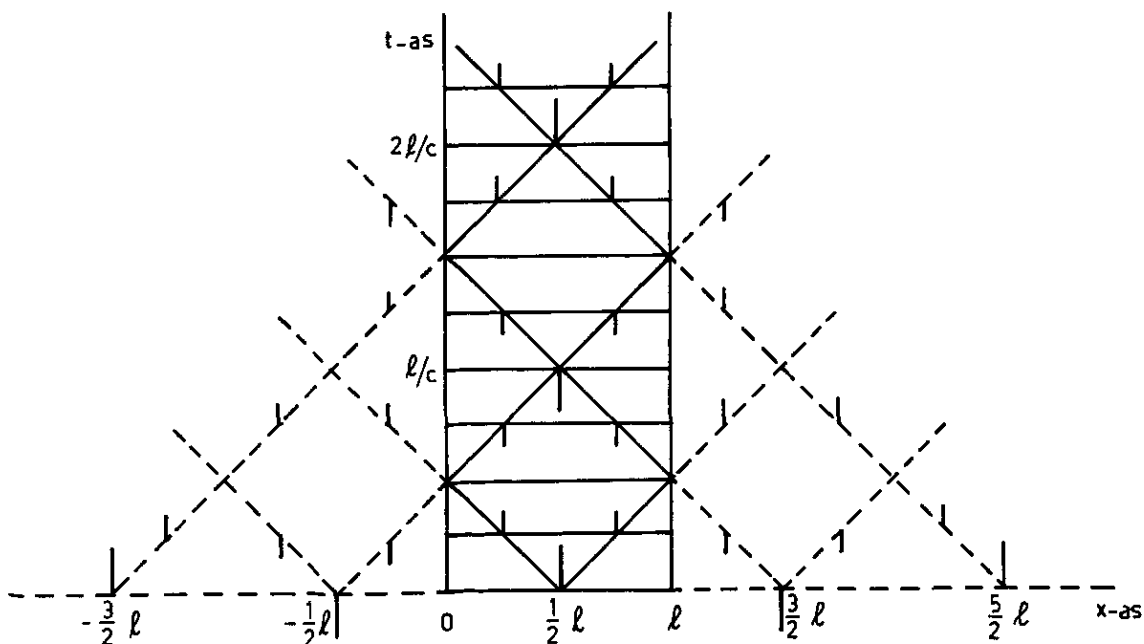
$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty, \text{ (beginvoorwaarden)} \end{cases}$$

waarin $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ de voortgezette functies voorstellen.

De oplossing van dit probleem luidt

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-ct) + \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi .$$

Men kan gemakkelijk nagaan dat $u(x,t)$ voldoet aan de randvoorwaarden $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, op grond van de oneven symmetrie van φ en ψ t.o.v. $x = 0$ en $x = l$. De functie $u(x,t)$ als boven is dan voor $0 < x < l$, $t > 0$ tevens oplossing van het trillingsprobleem voor de eindige snaar met vaste uiteinden $x = 0$ en $x = l$. Ter interpretatie van de oplossing nemen we: $\psi(x) = 0$, $\varphi(x)$ heeft de vorm van een driehoekige puls ter plaatse $x = \frac{1}{2}l$. Na spiegeling komen we tot een trillingsprobleem voor de oneindige snaar met beginuitwijking gelijk aan de voortgezette functie $\varphi(x)$; zie het onderstaande (x,t) -diagram. De trilling van de eindige snaar is nu af te lezen uit het gedeelte $0 < x < l$ van het diagram. De beginuitwijking splitst zich in twee gelijke pulsen, die zich in eerste instantie voortplanten naar rechts resp. naar links met snelheid c . Deze pulsen ondergaan daarna successieve reflecties aan de vaste uiteinden $x = 0$ en $x = l$. Bij elke reflectie keert het teken van de puls om. Merk op dat de uitwijking op het tijdstip $t = 2l/c$ gelijk is aan de beginuitwijking. Het trillingsverschijnsel is dus periodiek in t met periode $2l/c$. In onderstaand diagram is de pulsvormige uitwijking schematisch voorgesteld door een verticaal streepje.



In geval $\psi(x) = 0$ wordt de oplossing van het trillingsprobleem voor de eindige snaar gegeven door

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x - ct) + \frac{1}{2}\varphi(x + ct) ,$$

waarin φ de voortgezette beginuitwijking voorstelt.

Vergelijk deze oplossing met die uit 2.2, voorbeeld 1, verkregen met de methode van separatie van variabelen:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi ct}{\ell} ,$$

waarin de coëfficiënten C_n bepaald worden door

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell .$$

Na voortzetting van $\varphi(x)$ als voren zal de laatste betrekking gelden voor elke x ; immers, de termen van de Fourier-sinusreeks zijn oneven en periodiek met periode 2ℓ . De reeks-oplossing voor $u(x,t)$ is dan te herleiden tot

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\sin \frac{n\pi(x-ct)}{\ell} + \sin \frac{n\pi(x+ct)}{\ell} \right] = \\ &= \frac{1}{2}\varphi(x - ct) + \frac{1}{2}\varphi(x + ct) , \end{aligned}$$

d.i. dezelfde uitkomst als verkregen met de methode van spiegeling.

2.3.4. Diffusievergelijking op $(-\infty, \infty)$. We beschouwen het volgende beginwaardeprobleem voor de homogene diffusievergelijking:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0 , \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty, \text{ (beginvoorwaarde) } . \end{cases}$$

Het probleem beschrijft bijv. de warmtegeleiding in een "oneindig" lange staaf waarbij de begintemperatuur op het tijdstip $t = 0$ is voorgeschreven. We lossen het beginwaardeprobleem op met de methode van separatie van variabelen. Construeer een voorraad functies van de vorm

$$u(x,t) = X(x)T(t) ,$$

die voldoen aan de diffusievergelijking en begrensd zijn voor $-\infty < x < \infty$, $t > 0$.

Substitutie van $u(x,t)$ in de diffusievergelijking leidt na separatie tot

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\mu^2 ,$$

waarbij de separatieconstante gemakshalve is voorgesteld door $-\mu^2$.

Voor $X(x)$ en $T(t)$ ontstaan dan de gewone DV's

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad T'(t) + \mu^2 T(t) = 0 ,$$

met algemene oplossing (voor $\mu \neq 0$)

$$X(x) = Ae^{i\mu x} + Be^{-i\mu x}, \quad T(t) = Ce^{-\mu^2 t} .$$

Deze oplossingen zijn begrensd voor $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, mits μ reëel is.

De gezochte voorraad bestaat nu uit de functies

$$u(x,t) = e^{i\mu x} e^{-\mu^2 t}, \quad -\infty < \mu < \infty .$$

Merk op dat ook de oplossingen $e^{-i\mu x} e^{-\mu^2 t}$ bevat zijn in deze voorraad.

Vervolgens wordt de oplossing $u(x,t)$ van het beginwaardeprobleem voorgesteld door een lineaire combinatie van functies uit de voorraad. Omdat μ elke reële waarde mag aannemen, is de lineaire combinatie hier een integraal over $-\infty < \mu < \infty$:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\mu) e^{i\mu x} e^{-\mu^2 t} d\mu , \quad (1)$$

waarin de coëfficiënt $a(\mu)$ nog-onbepaald is. Onderstel dat de integraal (1) convergent is en dat de differentiatie van $u(x,t)$ naar x en naar t mag worden uitgevoerd onder het integraalteken. Dan voldoet $u(x,t)$ aan de diffusievergelijking.

De functie $a(\mu)$ wordt nu zodanig bepaald dat $u(x,t)$ ook voldoet aan de beginvoorwaarde, i.e.

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\mu) e^{i\mu x} d\mu = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty .$$

De laatste betrekking drukt uit dat $\varphi(x)$ de Fourier-getransformeerde is van $a(\mu)$ (zie college Wiskunde 30, 3.4.4). Onderstel dat $a(\mu)$ continu is en voor elke μ voldoet aan de Dirichlet-condities. Door inverse Fourier transformatie (zie college Wiskunde 30, 3.4.5) volgt dan

$$a(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\mu\xi} d\xi . \quad (2)$$

Substitueer deze uitkomst in (1), dan vinden we onder (formele) verwisseling van de integratievolgorde:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} e^{-\mu^2 t} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i\mu\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu(x-\xi)} e^{-\mu^2 t} d\mu . \end{aligned} \quad (3)$$

Hierin is de binnenste integraal expliciet te bepalen. Beschouw daartoe de integraal

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu\alpha} e^{-\mu^2\beta} d\mu, \quad \beta > 0 ,$$

die afhangt van de beide parameters α en β . Neem β vast en differentieer $I = I(\alpha)$ naar α onder het integraalteken:

$$\frac{dI}{d\alpha} = i \int_{-\infty}^{\infty} \mu e^{i\mu\alpha} e^{-\mu^2\beta} d\mu .$$

Door partiële integratie volgt

$$\frac{dI}{d\alpha} = -\frac{i}{2\beta} e^{i\mu\alpha} e^{-\mu^2\beta} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{\alpha}{2\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu\alpha} e^{-\mu^2\beta} d\mu = -\frac{\alpha}{2\beta} I(\alpha) .$$

Voor $I(\alpha)$ vinden we op deze wijze de gewone DV

$$\frac{I'}{I} = -\frac{\alpha}{2\beta} ,$$

met als oplossing

$$I(\alpha) = C \exp\left[-\frac{\alpha^2}{4\beta}\right].$$

De integratieconstante C wordt bepaald door $\alpha = 0$ te stellen, dan is

$$C = I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2 \beta} d\mu = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}.$$

Daarmee volgt voor de integraal I:

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu\alpha} e^{-\mu^2 \beta} d\mu = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left[-\frac{\alpha^2}{4\beta}\right].$$

Substitueer dit resultaat in (3), dan vinden we

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] d\xi$$

als oplossing van het beginwaardeprobleem voor de diffusievergelijking op $(-\infty, \infty)$. Deze oplossing is in eerste instantie een formele oplossing die nog nadere verificatie behoeft. Men kan bewijzen dat $u(x,t)$ inderdaad voldoet aan de diffusievergelijking en aan de beginvoorwaarde, indien $\varphi(x)$ continu en begrensd is voor $-\infty < x < \infty$.

De voorgaande oplossing $u(x,t)$ is kort te schrijven als

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, t) \varphi(\xi) d\xi$$

met

$$G(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right].$$

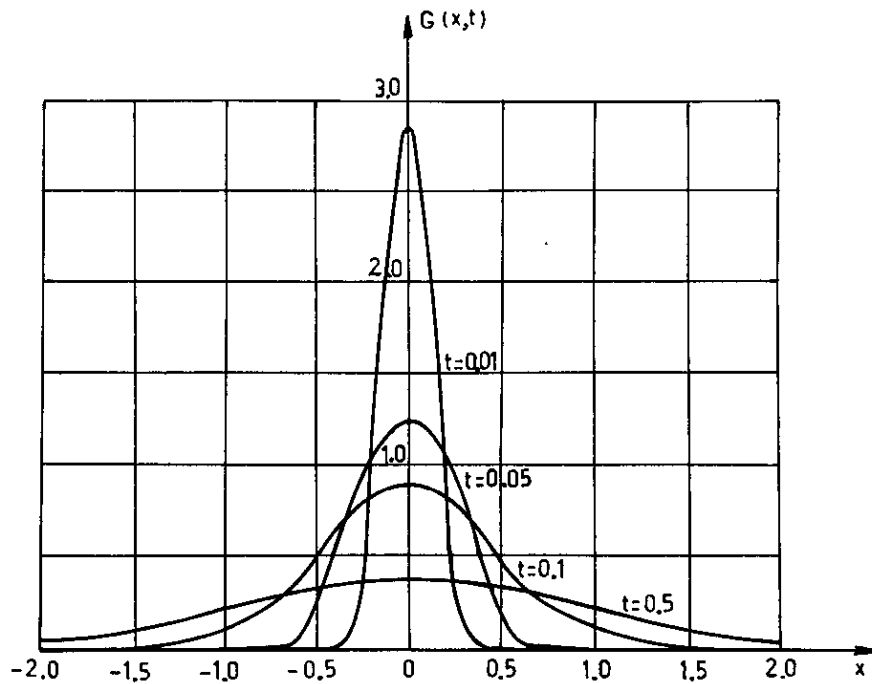
De functie $G(x,t)$ heet de Greense functie van het probleem, of ook wel fundamentele oplossing van de diffusievergelijking. Nemen we als beginvoorwaarde

$$u(x,0) = \varphi(x) = \delta(x),$$

dan is

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, t) \delta(\xi) d\xi = G(x,t)$$

op grond van de zeefeigenschap van de delta-functie. De Greense functie $G(x,t)$ is dan te interpreteren als de temperatuurverdeling in een oneindig lange staaf waarin ten tijde $t = 0$ en ter plaatse $x = 0$ een "éénheid van warmte" vrijkomt. Het verloop van $G(x,t)$ als functie van x op verschillende tijdstippen t is weergegeven in onderstaande figuur.



We vermelden nog de volgende eigenschappen van $G(x,t)$:

(i) $G_{xx} - G_t = 0, -\infty < x < \infty, t > 0,$

i.e. $G(x,t)$ voldoet aan de homogene diffusievergelijking.

(ii)
$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right] dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = 1,$$

i.e. de totale "warmte-inhoud" van de staaf is constant en gelijk aan 1.

(iii)
$$\lim_{t \rightarrow 0} G(x,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right] = \begin{cases} 0 & \text{als } x \neq 0, \\ \infty & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

Op grond van de eigenschappen (ii) en (iii) kunnen we formeel schrijven

$$\lim_{t \rightarrow 0} G(x,t) = \delta(x).$$

Voorbeeld. Neem als beginvoorwaarde

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{als } |x| > 1, \end{cases}$$

dan wordt de bijbehorende oplossing gegeven door

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^1 \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] d\xi.$$

Door middel van de substitutie $x - \xi = 2s\sqrt{t}$ volgt

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-1}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x+1}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right),$$

waarmee $u(x,t)$ is uitgedrukt in de error-functie

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds.$$

2.3.5. Diffusievergelijking op $(0, \infty)$. We beschouwen het volgende gemengde probleem voor de homogene diffusievergelijking:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \text{ (randvoorwaarde)} \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0, \text{ (beginvoorwaarde)}. \end{cases}$$

Het probleem beschrijft bijv. de warmtegeleiding in een half-oneindige staaf waarbij het uiteinde $x = 0$ op de temperatuur 0 wordt gehouden en de begintemperatuur op het tijdstip $t = 0$ is voorgeschreven.

We lossen het gemengde probleem op met de methode van spiegeling. Daartoe zetten we de functie $\varphi(x)$ voort als een oneven functie van x door middel van de definitie:

$$\varphi(x) := -\varphi(-x) \quad \text{als } x < 0.$$

Beschouw vervolgens het beginwaardeprobleem op het interval $-\infty < x < \infty$,

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty, \text{ (beginvoorwaarde)}. \end{cases}$$

De oplossing van dit probleem luidt

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] d\xi .$$

Op grond van de oneven symmetrie van φ , is deze oplossing te herleiden tot

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 \varphi(-\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] d\xi = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right] d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] d\xi , \\ u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right] \right\} d\xi . \end{aligned}$$

Deze functie $u(x,t)$ is nu tevens oplossing van het gemengde probleem voor de diffusievergelijking op $(0, \infty)$; voor $x = 0$ geldt namelijk $u(0,t) = 0$, zodat voldaan is aan de randvoorwaarde.

Ook het probleem met randvoorwaarde $u_x(0,t) = 0$ is op te lossen met de methode van spiegeling. De functie $\varphi(x)$ dient dan te worden voortgezet als een even functie van x door middel van de definitie: $\varphi(x) := \varphi(-x)$ als $x < 0$.

2.4. Potentiaaltheorie

Onderwerp van de potentiaaltheorie vormen de Poisson vergelijking

$$\Delta u = -f(\underline{x}) ,$$

waarin $f(\underline{x})$ een gegeven functie is, en de

Laplace vergelijking of potentiaalvergelijking

$$\Delta u = 0 .$$

De oplossing u van deze vergelijkingen is vaak te interpreteren als een potentiaal, bijv. de elektrische potentiaal van een ladingsverdeling.

De oplossingen van de Laplace vergelijking worden harmonische functies genoemd.

We beschouwen nu eerst de Poisson vergelijking en de Laplace vergelijking in \mathbb{R}^3 . We gebruiken daarbij de korte notaties

$$\underline{x} = (x,y,z), \quad |\underline{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \underline{\xi} = (\xi,\eta,\zeta), \quad f(\underline{x}) = f(x,y,z) .$$

Voorts zal steeds R een begrensde gebied in \mathbb{R}^3 zijn met randoppervlak S . We nemen aan dat S stuksgewijs glad en oriënteerbaar is; \underline{n} is de naar buiten gerichte normaal op S . De normaalafgeleide van een functie u op S wordt genoteerd als $\frac{\partial u}{\partial n} = (\text{grad } u, \underline{n})$. Alle te beschouwen functies worden verondersteld voldoende vaak continu differentieerbaar te zijn in een gebied dat R bevat.

We beginnen met de afleiding van enige hulpresultaten.

Uit de divergentiestelling (1.4.3) toegepast op het vectorveld $\text{grad } u$ volgt

$$\iiint_R \text{div grad } u \, d\tau = \iint_S (\text{grad } u, \underline{n}) \, d\sigma ,$$

oftewel

$$2.4.1. \quad \iiint_R \Delta u \, d\tau = \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma .$$

Vervolgens introduceren we de identiteiten van Green:

2.4.2. Eerste identiteit van Green

$$\iiint_R [u\Delta v + (\text{grad } u, \text{grad } v)] \, d\tau = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma .$$

2.4.3. Tweede identiteit van Green

$$\iiint_R (u\Delta v - v\Delta u) \, d\tau = \iint_S (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) \, d\sigma .$$

Bewijs. (i) Pas de divergentiestelling (1.4.3) toe op het vectorveld $\underline{w} = u \text{ grad } v$. Met de rekenregel 1.2.6, 1) volgt

$$\text{div } \underline{w} = u\Delta v + (\text{grad } u, \text{grad } v) ,$$

waarna we vinden

$$\iiint_R [u\Delta v + (\text{grad } u, \text{grad } v)] \, d\tau = \iint_S u(\text{grad } v, \underline{n}) \, d\sigma = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma .$$

(ii) Verwissel u en v in de eerste identiteit van Green, dan ontstaat er

$$\iiint_R [v\Delta u + (\text{grad } v, \text{grad } u)] d\tau = \iint_S v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma .$$

Trek deze betrekking af van de eerste identiteit van Green. \square

Tenslotte, voor een harmonische functie $u(\underline{x})$ gelden de integraalbetrekkingen

4.4. a) $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$, b) $\iiint_R |\text{grad } u|^2 d\tau = \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$.

De eerste betrekking volgt uit 2.4.1, de tweede betrekking volgt uit de eerste identiteit van Green met $v = u$ gesteld.

4.5. Stelling. Een harmonische functie die nul is op de rand van een gebied, is nul binnen dat gebied. Een harmonische functie waarvan de normaalafgeleide nul is op de rand van een gebied, is constant binnen dat gebied.

Bewijs. Laat de functie $u(\underline{x})$ harmonisch zijn met $u = 0$ resp. $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ op de rand S van een gebied R . In beide gevallen volgt uit 2.4.4b,

$$\iiint_R |\text{grad } u|^2 d\tau = \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0 .$$

Wegens $|\text{grad } u|^2 \geq 0$ kan de integraal over R alleen nul zijn, indien $\text{grad } u = 0$ in R . Daaruit volgt: u is constant in R . In het geval dat $u = 0$ op S , is deze constante gelijk aan nul zodat dan $u(\underline{x}) = 0$ in R . \square

Met de Poisson vergelijking en de Laplace vergelijking zijn de volgende randwaardeproblemen geassocieerd:

Dirichlet probleem $\Delta u = -f(\underline{x})$, $\underline{x} \in R$; $u(\underline{x}) = g(\underline{x})$, $\underline{x} \in S$.

Neumann probleem $\Delta u = -f(\underline{x})$, $\underline{x} \in R$; $\frac{\partial u}{\partial n}(\underline{x}) = h(\underline{x})$, $\underline{x} \in S$.

4.6. Stelling. De oplossing van het Dirichlet probleem is eenduidig. De oplossing van het Neumann probleem is eenduidig op een constante na.

Bewijs. Neem aan dat het Dirichlet probleem resp. Neumann probleem twee oplossingen $u_1(\underline{x})$ en $u_2(\underline{x})$ zou bezitten. Vorm het verschil $v(\underline{x}) := u_1(\underline{x}) - u_2(\underline{x})$, dan is v oplossing van het randwaardeprobleem

$$\Delta v = 0, \underline{x} \in R; v(\underline{x}) = 0 \text{ resp. } \frac{\partial v}{\partial n}(\underline{x}) = 0, \underline{x} \in S .$$

Met 2.4.5 volgt dan $v(\underline{x}) = 0$ in R resp. $v(\underline{x})$ is constant in R . Dit betekent dat $u_1(\underline{x}) = u_2(\underline{x})$ in geval van het Dirichlet probleem, en $u_1(\underline{x}) = u_2(\underline{x}) + \text{const.}$ in geval van het Neumann probleem. \square

Opmerking. In 2.4.6 wordt alleen een uitspraak gedaan over de eenduidigheid van de oplossing en niet over de existentie van de oplossing. De stelling drukt uit: Als de oplossing van het Dirichlet resp. Neumann probleem bestaat, dan is de oplossing eenduidig resp. eenduidig op een constante na. Uit 2.4.1 volgt nog dat bij het Neumann probleem voor de functies $f(\underline{x})$ en $h(\underline{x})$ moet gelden

$$- \iiint_R f(\underline{x}) d\tau = \iint_S h(\underline{x}) d\sigma .$$

Deze betrekking vormt een nodige voorwaarde voor het bestaan van de oplossing van het Neumann probleem. In het geval van de Laplace vergelijking wordt deze nodige voorwaarde

$$\iint_S h(\underline{x}) d\sigma = 0 .$$

2.4.7. Fundamentele oplossing. Een functie $u(\underline{x})$ die voldoet aan de PDV

$$\Delta u = -\delta(\underline{x})$$

heet een fundamentele oplossing van de Laplace vergelijking. We zullen deze definitie nader uitwerken en daarbij formeel opereren met de delta-functie.

Uit $\delta(\underline{x}) = 0$ voor $\underline{x} \neq \underline{0}$ volgt

$$\Delta u = 0 \quad \text{als } \underline{x} \neq \underline{0} ,$$

d.w.z. $u(\underline{x})$ voldoet buiten de oorsprong aan de Laplace vergelijking. Laat R_ϵ het gebied zijn binnen het boloppervlak B_ϵ gegeven door $|\underline{x}| = \epsilon$, $\epsilon > 0$. Met behulp van 2.4.1 volgt dan

$$\iint_{B_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iiint_{R_\epsilon} \Delta u d\tau = - \iiint_{R_\epsilon} \delta(\underline{x}) d\tau = -1$$

op grond van de zeefeigenschap van de delta-functie.

Samengevat vinden we dat een fundamentele oplossing $u(\underline{x})$ de volgende eigenschappen bezit:

(i) $\Delta u = 0$ als $\underline{x} \neq \underline{0}$;

(ii) $\iint_{B_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = -1$ voor elk boloppervlak B_ϵ gegeven door $|\underline{x}| = \epsilon$.

Omgekeerd kan men een fundamentele oplossing ook door deze eigenschappen definiëren, dus zonder gebruik te maken van de delta-functie.

De Laplace vergelijking heeft meer dan één fundamentele oplossing: indien $u(\underline{x})$ een fundamentele oplossing is, dan is ook $u(\underline{x}) + v(\underline{x})$ een fundamentele oplossing waarbij $v(\underline{x})$ een willekeurige harmonische functie is. We bepalen nu een speciale fundamentele oplossing $u(\underline{x})$ die alleen afhangt van de afstand $r = |\underline{x}|$ tot de oorsprong. Schrijf de Laplace operator in bolcoördinaten (zie 1.9.6), dan volgt uit eigenschap (i):

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0, \quad r > 0 .$$

Deze DV is van het type Euler (zie college Wiskunde 30, 4.3) en de algemene oplossing luidt

$$u(\underline{x}) = \frac{A}{r} + B .$$

We stellen $B = 0$ terwijl A bepaald wordt met behulp van eigenschap (ii):

$$\iint_{B_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iint_{B_\epsilon} \frac{du}{dr} d\sigma = - \iint_{B_\epsilon} \frac{A}{r^2} d\sigma = - \frac{A}{\epsilon^2} \iint_{B_\epsilon} d\sigma = -4\pi A = -1 ,$$

zodat $A = \frac{1}{4\pi}$. De aldus gevonden oplossing

$$u(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi |\underline{x}|}$$

noemen we de fundamentele oplossing van de Laplace vergelijking.

Evenzo voldoet

$$u(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi |\underline{x} - \underline{\xi}|}$$

aan de PDV $\Delta u = -\delta(\underline{x} - \underline{\xi})$.

In 1.2, voorbeeld 1 is afgeleid dat de elektrische potentiaal φ van een eenheidslading in de oorsprong gegeven wordt door

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r};$$

hierin is ϵ_0 de permittiviteit van vacuum. Indien we afzien van de factor ϵ_0 , is de boven afgeleide fundamentele oplossing dus te interpreteren als de potentiaal van een eenheidslading in de oorsprong.

Algemeen is afgeleid in 1.8, voorbeeld 3 dat de potentiaal φ van een ladingsverdeling met dichtheid $\rho(\underline{x})$ voldoet aan de Poisson vergelijking

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

In het geval van een eenheidslading in de oorsprong is $\rho = \delta(\underline{x})$ en de potentiaal $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$ "voldoet" dus aan de PDV $\Delta\varphi = -\frac{\delta(\underline{x})}{\epsilon_0}$.

Voor later gebruik bepalen we nog de potentiaal van een elektrische dipool. Beschouw daartoe een configuratie die bestaat uit een lading $-q$ in de oorsprong en een lading $+q$ in het punt $h\underline{\ell}$ waarbij $h > 0$, $|\underline{\ell}| = 1$. De bijbehorende potentiaal in een punt \underline{x} is dan

$$\varphi(\underline{x}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\underline{x}|} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\underline{x} - h\underline{\ell}|} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\underline{x} - h\underline{\ell}|^{-1} - |\underline{x}|^{-1}}{-h},$$

waarin $qh = p$ gesteld is. Als $h \rightarrow 0$ gaat het laatste quotiënt over in de richtingsafgeleide van $1/|\underline{x}|$ in de richting van $\underline{\ell}$, gelijk aan $(\text{grad } \frac{1}{|\underline{x}|}, \underline{\ell})$ (zie college Wiskunde 20, 2.5.1). Tegelijk met $h \rightarrow 0$ nemen we $q \rightarrow \infty$ zodanig dat het product $p = qh$ constant blijft. De limiet van de boven beschouwde configuratie van ladingen heet nu een dipool met dipoolmoment p en richting $\underline{\ell}$. Voor de potentiaal van deze dipool vinden we

$$\varphi(\underline{x}) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} (\text{grad } \frac{1}{|\underline{x}|}, \underline{\ell}).$$

2.4.8. Derde identiteit van Green. Laat $\underline{\xi}$ een vast punt in \mathbb{R}^3 zijn en laat r de afstand van \underline{x} tot $\underline{\xi}$ voorstellen: $r = |\underline{x} - \underline{\xi}|$. De functie

$$v(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi |\underline{x} - \underline{\xi}|}$$

voldoet dan aan de PDV $\Delta v = -\delta(\underline{x} - \underline{\xi})$. Substitueer deze functie v in de tweede identiteit van Green (2.4.3), dan ontstaat er

$$\iiint_R [-u(\underline{x})\delta(\underline{x} - \underline{\xi}) - \frac{\Delta u}{4\pi r}] d\tau = \frac{1}{4\pi} \iint_S [u \frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r}) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}] d\sigma .$$

Op grond van de zeefeigenschap van de delta-functie is

$$\iiint_R u(\underline{x})\delta(\underline{x} - \underline{\xi}) d\tau = u(\underline{\xi}) \quad \text{als } \underline{\xi} \in R ,$$

waarna volgt

$$2.4.9. \quad u(\underline{\xi}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_R \frac{\Delta u}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi} \iint_S [\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r})] d\sigma, \quad \underline{\xi} \in R .$$

Deze betrekking heet de derde identiteit van Green. Het rechterlid van 2.4.9 is nog als volgt te interpreteren. De integraal over R is de potentiaal van een ruimtelading in R met dichtheid $-\Delta u$. De eerste term van de integraal over S stelt voor de potentiaal van een oppervlaktelading op S met dichtheid $\frac{\partial u}{\partial n}$. De integrand

$$\frac{u}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r}) = \frac{u}{4\pi} (\text{grad } \frac{1}{|\underline{x} - \underline{\xi}|}, \underline{n})$$

beschrijft de potentiaal in $\underline{\xi}$ van een dipool in het punt $\underline{x} \in S$ met dipoolmoment $u(\underline{x})$ en richting \underline{n} . De bijbehorende integraal is dan te interpreteren als de potentiaal van een dipoolbelegging op S met dipoolmomentdichtheid u en richting \underline{n} .

In het speciale geval van een harmonische functie $u(\underline{x})$ gaat 2.4.9 over in

$$2.4.10. \quad u(\underline{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S [\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r})] d\sigma, \quad \underline{\xi} \in R .$$

Door deze betrekking wordt $u(\underline{\xi})$, $\underline{\xi} \in R$, uitgedrukt in de waarden van u en $\frac{\partial u}{\partial n}$ op de rand S van R .

We geven nog een tweetal toepassingen van de derde identiteit van Green.

2.4.11. Oplossing van de Poisson vergelijking. Beschouw de Poisson vergelijking

$$\Delta u = -f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in R ,$$

en neem aan dat deze vergelijking een oplossing $u(\underline{x})$ heeft. Met 2.4.9 volgt voor u de voorstelling

$$u(\underline{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_R \frac{f(\underline{x})}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\sigma, \quad \underline{\xi} \in R.$$

Bedenk nu dat $\frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi |\underline{x} - \underline{\xi}|}$ voldoet aan de Laplace vergelijking als $\underline{x} \neq \underline{\xi}$. Men kan dan bewijzen dat de oppervlakte-integraal over S een harmonische functie is als $\underline{\xi} \in R$. Aangezien u een oplossing is van de Poisson vergelijking, volgt dan dat ook

$$v(\underline{\xi}) := \frac{1}{4\pi} \iiint_R \frac{f(\underline{x})}{r} d\tau = \frac{1}{4\pi} \iiint_R \frac{f(\underline{x})}{|\underline{x} - \underline{\xi}|} d\tau, \quad \underline{\xi} \in R,$$

voldoet aan de Poisson vergelijking als boven. Hiermee is een expliciete oplossing van de Poisson vergelijking bepaald. Deze oplossing is te interpreteren als de potentiaal van een ruimtelading in R met dichtheid $f(\underline{x})$. Met verwisseling van \underline{x} en $\underline{\xi}$ is v te schrijven als

$$v(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_R \frac{f(\underline{\xi})}{|\underline{x} - \underline{\xi}|} d\tau = \frac{1}{4\pi} \iiint_R \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta, \quad \underline{x} \in R.$$

De algemene oplossing van de Poisson vergelijking wordt gegeven door $v(\underline{x})$ plus een willekeurige harmonische functie.

2.4.12. Stelling (middelwaarde-eigenschap van harmonische functies). Zij $u(\underline{x})$ harmonisch binnen het boloppervlak B met middelpunt $\underline{\xi}$ en straal ρ , dan geldt

$$u(\underline{\xi}) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_B u d\sigma,$$

d.w.z. $u(\underline{\xi})$ is gelijk aan de gemiddelde waarde van u over B.

Bewijs. Ga uit van de derde identiteit van Green (2.4.10) en neem voor S het boloppervlak B, dan is

$$u(\underline{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \iint_B \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\sigma.$$

Op B geldt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{\rho^2},$$

waarna volgt

$$u(\underline{\xi}) = \frac{1}{4\pi\rho} \iint_B \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_B u d\sigma .$$

Op grond van 2.4.4a is $\iint_B \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$, zodat

$$u(\underline{\xi}) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_B u d\sigma .$$

□

4.13. Functie van Green. Zij $\underline{\xi}$ een vast punt in een begrensd gebied R in \mathbb{R}^3 met rand S . We definiëren dan de Greense functie $G(\underline{x}, \underline{\xi})$ door de volgende eigenschappen:

(i) $\Delta G = -\delta(\underline{x} - \underline{\xi})$, $\underline{x} \in R$, i.e. G is een fundamentele oplossing van de Laplace vergelijking;

(ii) $G(\underline{x}, \underline{\xi}) = 0$, $\underline{x} \in S$.

Vergelijk $G(\underline{x}, \underline{\xi})$ met de eerdere fundamentele oplossing $\frac{1}{4\pi|\underline{x} - \underline{\xi}|}$ door te schrijven

$$G(\underline{x}, \underline{\xi}) = \frac{1}{4\pi|\underline{x} - \underline{\xi}|} + g(\underline{x}, \underline{\xi}) .$$

Dan volgt uit de eigenschappen (i) en (ii) dat $g(\underline{x}, \underline{\xi})$ oplossing is van het Dirichlet probleem

$$\Delta g = 0, \quad \underline{x} \in R; \quad g(\underline{x}, \underline{\xi}) = -\frac{1}{4\pi|\underline{x} - \underline{\xi}|}, \quad \underline{x} \in S .$$

De oplossing van dit probleem is volgens 2.4.6 eenduidig, zodat $G(\underline{x}, \underline{\xi})$ door de eigenschappen (i) en (ii) eenduidig wordt vastgelegd.

De Greense functie $G(\underline{x}, \underline{\xi})$ is te interpreteren als de potentiaal in \underline{x} van een eenheidslading in $\underline{\xi}$ indien het geheel zich bevindt binnen een geaard geleidend oppervlak S . De term $\frac{1}{4\pi|\underline{x} - \underline{\xi}|}$ is de potentiaal van de eenheidslading in de vrije ruimte, terwijl $g(\underline{x}, \underline{\xi})$ de potentiaal voorstelt van de op S geïnduceerde lading.

De Greense functie vindt toepassing bij de oplossing van het Dirichlet probleem voor de Poisson vergelijking

$$\Delta u = -f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in R; \quad u(\underline{x}) = g(\underline{x}), \quad \underline{x} \in S .$$

Neem aan dat het Dirichlet probleem de oplossing $u(\underline{x})$ heeft. In de tweede identiteit van Green (2.4.3)

$$\iiint_R (u\Delta v - v\Delta u) d\tau = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

vervangen we u door de oplossing $u(\underline{x})$ en we stellen $v = G(\underline{x}, \underline{\xi})$, dan ontstaat er

$$\iiint_R [-u(\underline{x})\delta(\underline{x} - \underline{\xi}) + G(\underline{x}, \underline{\xi})f(\underline{x})] d\tau = \iint_S g(\underline{x}) \frac{\partial}{\partial n} G(\underline{x}, \underline{\xi}) d\sigma .$$

Hierbij is te bedenken dat $G(\underline{x}, \underline{\xi}) = 0$ voor $\underline{x} \in S$.

Op grond van de zeefeigenschap van de delta-functie is

$$\iiint_R u(\underline{x})\delta(\underline{x} - \underline{\xi}) d\tau = u(\underline{\xi}) \quad \text{als } \underline{\xi} \in R .$$

We vinden dan

$$u(\underline{\xi}) = \iiint_R G(\underline{x}, \underline{\xi}) f(\underline{x}) d\tau - \iint_S g(\underline{x}) \frac{\partial}{\partial n} G(\underline{x}, \underline{\xi}) d\sigma , \quad \underline{\xi} \in R ,$$

als expliciete voorstelling voor de oplossing van het Dirichlet probleem. Deze voorstelling is alleen praktisch bruikbaar als de Greense functie bekend is. Men kan inderdaad voor een aantal eenvoudige gebieden zoals bijv. een bolgebied, de Greense functie bepalen. We gaan hier niet verder op in.

2.4.14. Potentiaaltheorie in \mathbb{R}^2 . De behandeling van de Poisson vergelijking en de Laplace vergelijking in \mathbb{R}^2 is geheel analoog aan die van de vergelijkingen in \mathbb{R}^3 . Men kan gemakkelijk nagaan dat 2.4.5 en 2.4.6 geldig blijven.

Een functie $u(\underline{x}) = u(x, y)$ die voldoet aan de PDV $\Delta u = -\delta(\underline{x})$, heet weer een fundamentele oplossing van de Laplace vergelijking. Zo'n fundamentele oplossing bezit nu de volgende eigenschappen:

(i) $\Delta u = 0$ als $\underline{x} \neq \underline{0}$;

(ii) $\int_{C_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} ds = -1$ voor elke cirkel C_ε gegeven door $|\underline{x}| = \varepsilon$.

We kunnen weer een speciale fundamentele oplossing bepalen die alleen afhangt van de afstand $r = |\underline{x}|$ tot de oorsprong. Schrijf de Laplace operator in poolcoördinaten, dan volgt uit eigenschap (i):

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = 0, \quad r > 0 .$$

Deze DV is van het type Euler (zie college Wiskunde 30, 4.3) en de algemene oplossing luidt

$$u(\underline{x}) = A \log r + B .$$

We stellen $B = 0$ terwijl A bepaald wordt met behulp van eigenschap (ii):

$$\int_{C_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{C_\epsilon} \frac{du}{dr} ds = \int_{C_\epsilon} \frac{A}{r} ds = \frac{A}{\epsilon} \int_{C_\epsilon} ds = 2\pi A = -1 ,$$

zodat $A = -\frac{1}{2\pi}$. We vinden aldus de fundamentele oplossing

$$u(\underline{x}) = -\frac{1}{2\pi} \log r = -\frac{1}{2\pi} \log |\underline{x}| .$$

Men kan deze fundamentele oplossing interpreteren als de potentiaal van een lijnlading langs de z -as met dichtheid 1.

Uitgaande van deze fundamentele oplossing kan men een twee-dimensionaal analogon van de derde identiteit van Green (2.4.9) opstellen. Ook voor een begrensde gebied R in \mathbb{R}^2 kan men een Greense functie invoeren die te gebruiken is voor de oplossing van het Dirichlet probleem voor de Poisson vergelijking.

2.5. Eenduidigheidsstellingen voor de golfvergelijking en de diffusievergelijking

In deze paragraaf bespreken we een tweetal eenduidigheidsstellingen voor resp. de golfvergelijking en de diffusievergelijking onder zekere begin- en randvoorwaarden. Deze stellingen drukken uit dat de oplossing van het betreffende gemengde probleem voor de golfvergelijking resp. diffusievergelijking eenduidig is, aangenomen dat de oplossing bestaat. De stellingen zijn tevens bedoeld als voorbeeld: De gevolgde bewijsmethoden zijn dimensie-onafhankelijk en ook te gebruiken bij eenduidigheidsstellingen voor problemen met andere randvoorwaarden.

2.5.1. Stelling. De oplossing van het gemengde probleem voor de één-dimensionale golfvergelijking:

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = g(t), u(l,t) = h(t), & t \geq 0, \text{ (randvoorwaarden)} \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \text{ (beginvoorwaarden)} \end{cases}$$

is eenduidig.

Bewijs. Het gemengde probleem beschrijft de transversale trilling van een snaar met lengte ℓ . Neem aan dat het probleem twee oplossingen $u_1(x,t)$ en $u_2(x,t)$ zou bezitten. De verschilfunctie $v(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t)$ is dan oplossing van het homogene gemengde probleem

$$\begin{cases} v_{xx} - \frac{1}{c^2} v_{tt} = 0, & 0 < x < \ell, t > 0, \\ v(0,t) = 0, v(\ell,t) = 0, & t \geq 0, \text{ (randvoorwaarden)} \\ v(x,0) = 0, v_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \ell, \text{ (beginvoorwaarden)}. \end{cases}$$

Voer nu in de zgn. energie-integraal

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\frac{1}{c^2} v_t^2(x,t) + v_x^2(x,t) \right] dx.$$

Voor de trillende snaar is $E(t)$ te interpreteren als de totale energie van de snaar ten tijde t . De twee termen van $E(t)$ corresponderen met resp. de kinetische energie en de potentiële energie.

Differentieer $E(t)$ naar t , dan is

$$E'(t) = \int_0^\ell \left[\frac{1}{c^2} v_t v_{tt} + v_x v_{xt} \right] dx.$$

Herleid de tweede term door partiële integratie:

$$\int_0^\ell v_x v_{xt} dx = v_x v_t \Big|_0^\ell - \int_0^\ell v_t v_{xx} dx$$

en merk op dat de stokterm wegvalt omdat $v_t(0,t) = v_t(\ell,t) = 0$ op grond van de randvoorwaarden. We vinden dan

$$E'(t) = \int_0^\ell v_t \left[\frac{1}{c^2} v_{tt} - v_{xx} \right] dx = 0,$$

dus $E(t)$ is constant. Uit de beginvoorwaarden volgt $E(0) = 0$, zodat

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\frac{1}{c^2} v_t^2(x,t) + v_x^2(x,t) \right] dx = 0, \quad t \geq 0.$$

Daar de integrand niet negatief is, kan de integraal alleen nul zijn indien $v_t = v_x = 0$. Daaruit volgt: $v(x,t)$ is constant voor $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$. Wegens $v(x,0) = 0$ is deze constante gelijk aan nul, zodat $v(x,t) = 0$ voor $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$. Dit betekent dat de twee oplossingen $u_1(x,t)$ en $u_2(x,t)$ samenvallen. \square

2.5.2. Stelling. Zij R een begrensde gebied in \mathbb{R}^3 met rand S . De oplossing van het gemengde probleem voor de diffusievergelijking

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = -f(\underline{x},t), & \underline{x} \in R, t > 0, \\ u(\underline{x},t) = g(\underline{x},t), & \underline{x} \in S, t \geq 0, \text{ (randvoorwaarde)} \\ u(\underline{x},0) = \varphi(\underline{x}), & \underline{x} \in R, \text{ (beginvoorwaarde)} \end{cases}$$

is eenduidig.

Bewijs. Neem aan dat het gemengde probleem twee oplossingen $u_1(\underline{x},t)$ en $u_2(\underline{x},t)$ zou bezitten. De verschilfunctie $v(\underline{x},t) := u_1(\underline{x},t) - u_2(\underline{x},t)$ is dan oplossing van het homogene gemengde probleem

$$\begin{cases} \Delta v - v_t = 0, & \underline{x} \in R, t > 0, \\ v(\underline{x},t) = 0, & \underline{x} \in S, t \geq 0, \text{ (randvoorwaarde)} \\ v(\underline{x},0) = 0, & \underline{x} \in R, \text{ (beginvoorwaarde)}. \end{cases}$$

Voer nu in de integraal

$$I(t) = \frac{1}{2} \iiint_R v^2(\underline{x},t) d\tau.$$

Differentieer $I(t)$ naar t , dan is

$$I'(t) = \iiint_R v v_t d\tau = \iiint_R v \Delta v d\tau.$$

Met behulp van de eersteidentiteit van Green (2.4.2) is de laatste integraal te herleiden tot

$$\iiint_R v \Delta v d\tau = - \iiint_R |\text{grad } v|^2 d\tau + \iint_S v \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma,$$

waarin \underline{n} de naar buiten gerichte normaal op S is. De integraal over S is hier gelijk aan nul op grond van de randvoorwaarde $v(\underline{x},t) = 0$, $\underline{x} \in S$, $t \geq 0$. We vinden dan

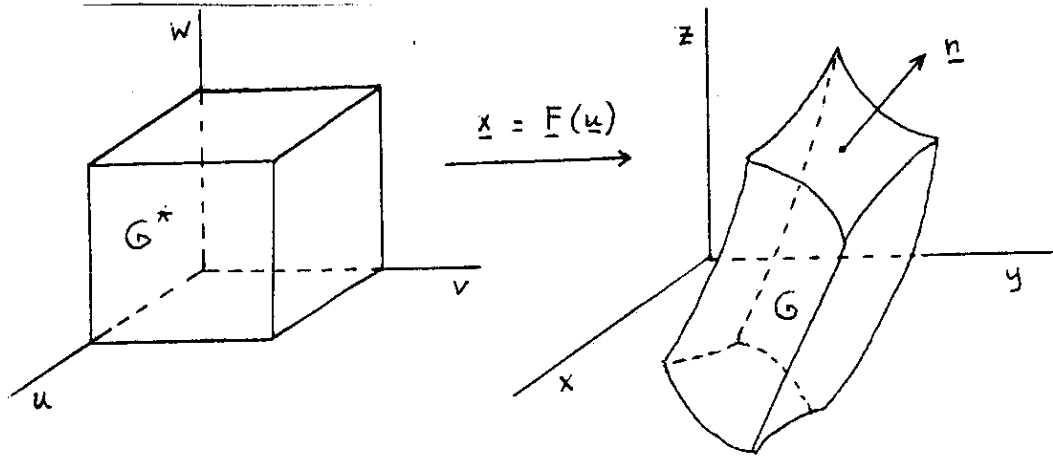
$$I'(t) = - \iiint_R |\text{grad } v|^2 dt \leq 0 ,$$

zodat $I(t)$ een monotoon niet stijgende functie van t is. Uitgaande van $I(0) = 0$, zoals volgt uit de beginvoorwaarde, is dan $I(t) \leq 0$ voor $t \geq 0$. Anderzijds volgt uit de definitie van $I(t)$ dat $I(t) \geq 0$ is voor $t \geq 0$. We concluderen dat

$$I(t) = \frac{1}{2} \iiint_R v^2(\underline{x}, t) dt = 0, \quad t \geq 0 .$$

Wegens $v^2(\underline{x}, t) \geq 0$ kan de integraal alleen nul zijn, indien $v(\underline{x}, t) = 0$ voor $\underline{x} \in R$, $t \geq 0$. Dit betekent dat $u_1(\underline{x}, t) = u_2(\underline{x}, t)$ voor $\underline{x} \in R$, $t \geq 0$, en de oplossing van het gemengde probleem is eenduidig. \square

§A. De stelling van Gauss voor een gedeforbeerde kubus.



Beschouw een bijectieve continu differentieerbare afbeelding $\underline{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Hier is $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω open, Ω bevat de gesloten eenheidskubus G^* . Zie figuur. Zij nu G het gebied in \mathbb{R}^3 dat de beeldverzameling is van G^* onder de afbeelding \underline{F} . Noem de rand van het gebied ∂G . We noemen G een gedeforbeerde kubus. Zij \underline{n} de naar buiten wijzende normaalvector op ∂G . Zij $\underline{v}(\underline{x})$ een vectorveld gedefinieerd op G .

Stelling. Er geldt

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial v_1}{\partial x} d\tau &= \iint_{\partial G} v_1 n_1 d\sigma \\ \iiint_G \frac{\partial v_2}{\partial y} d\tau &= \iint_{\partial G} v_2 n_2 d\sigma \\ \iiint_G \frac{\partial v_3}{\partial z} d\tau &= \iint_{\partial G} v_3 n_3 d\sigma. \end{aligned}$$

Bewijs: Dit berust op uitschrijven van de integralen. We doen dit alleen voor het eerste geval. Stel $v_1(\underline{x}) = f(\underline{x})$. Stel $\underline{F}(\underline{u}) = \underline{x}(\underline{u})$.

Enerzijds

$$\begin{aligned}
 \iint_{\partial G} f_{n_1} d\sigma &= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ f(\underline{x}(1, v, w)) (\underline{e}_1, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial w})_{u=1} - f(\underline{x}(0, v, w)) (\underline{e}_1, \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial w})_{u=0} \right\} dv dw \\
 &+ \int_0^1 \int_0^1 \left\{ f(\underline{x}(u, 1, w)) (\underline{e}_1, \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial u})_{v=1} - f(\underline{x}(u, 0, w)) (\underline{e}_1, \frac{\partial \underline{x}}{\partial w} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial u})_{v=0} \right\} du dw \\
 &+ \int_0^1 \int_0^1 \left\{ f(\underline{x}(u, v, 1)) (\underline{e}_1, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v})_{w=1} - f(\underline{x}(u, v, 0)) (\underline{e}_1, \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v})_{w=0} \right\} du dv \\
 &= \iiint_{G^*} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ f(\underline{x}(u)) (\underline{e}_1, \underline{x}_v \times \underline{x}_w) \right\} + \frac{\partial}{\partial v} \left\{ f(\underline{x}(u)) (\underline{e}_1, \underline{x}_w \times \underline{x}_u) \right\} + \right. \\
 &\left. + \frac{\partial}{\partial w} \left\{ f(\underline{x}(u)) (\underline{e}_1, \underline{x}_u \times \underline{x}_v) \right\} \right] du dv dw
 \end{aligned}$$

Hierin gebruikt: $\frac{\partial}{\partial u} (\underline{e}_1, \underline{x}_v \times \underline{x}_w) + \frac{\partial}{\partial v} (\underline{e}_1, \underline{x}_w \times \underline{x}_u) + \frac{\partial}{\partial w} (\underline{e}_1, \underline{x}_u \times \underline{x}_v) = 0$

$$\begin{aligned}
 &= \iiint_{G^*} \left[\frac{\partial f}{\partial u} \cdot (\underline{e}_1, \underline{x}_v \times \underline{x}_w) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot (\underline{e}_1, \underline{x}_w \times \underline{x}_u) + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot (\underline{e}_1, \underline{x}_u \times \underline{x}_v) \right] du dv dw \\
 &= \iiint_{G^*} \left[\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \det(\underline{e}_1, \underline{x}_v, \underline{x}_w) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \det(\underline{x}_u, \underline{e}_1, \underline{x}_w) + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \det(\underline{x}_u, \underline{x}_v, \underline{e}_1) \right] du dv dw.
 \end{aligned}$$

Anderzijds

$$\iiint_G \frac{\partial f}{\partial x} d\tau = \iiint_{G^*} \frac{\partial f}{\partial x} (\underline{x}(u)) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du dv dw =$$

$$\iiint_{G^*} \left\{ \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right\} du dv dw.$$

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} & = \begin{matrix} x_u & x_v & x_w \\ 4_u & 4_v & 4_w \\ 2_u & 2_v & 2_w \\ & & -3 \end{matrix}
 \end{array}$$

$\left. \begin{matrix} 1/2a \\ 2/10a \\ 2/4a \end{matrix} \right\}$

Dit is gelijk aan de voorlaatste uitdrukking op grond van de inverse-functie-stelling en de regel van Cramer. *§ Verstrek ook een of twee voorbeelden*

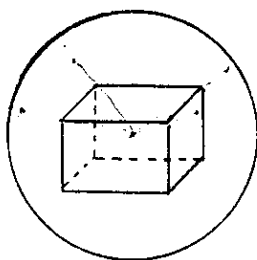
5B. De stelling van Gauss voor een fraai gebied in \mathbb{R}^3

Onder een fraai gebied in \mathbb{R}^3 zullen we verstaan, een gebied dat opgebouwd kan worden uit een EINDIG aantal gedeformeerde kubussen. Daarbij mogen alleen de randen (of delen daarvan) van de samenstellende kubussen elkaar overlappen.

Voorbeeld 1:

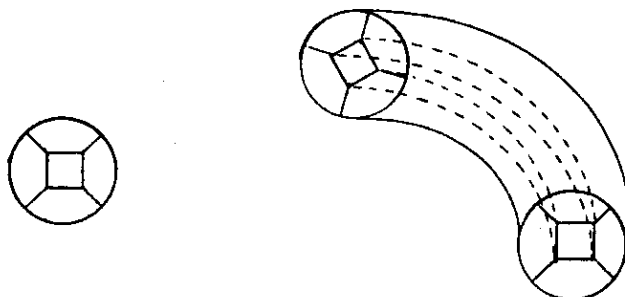
De bol. Zet een kubusje midden in de bol. Laat vanuit o een rechte langs alle ribben lopen dan worden nog 6 gedeformeerde kubussen uitgesneden. Zie figuur.

*lijnen
in bol*



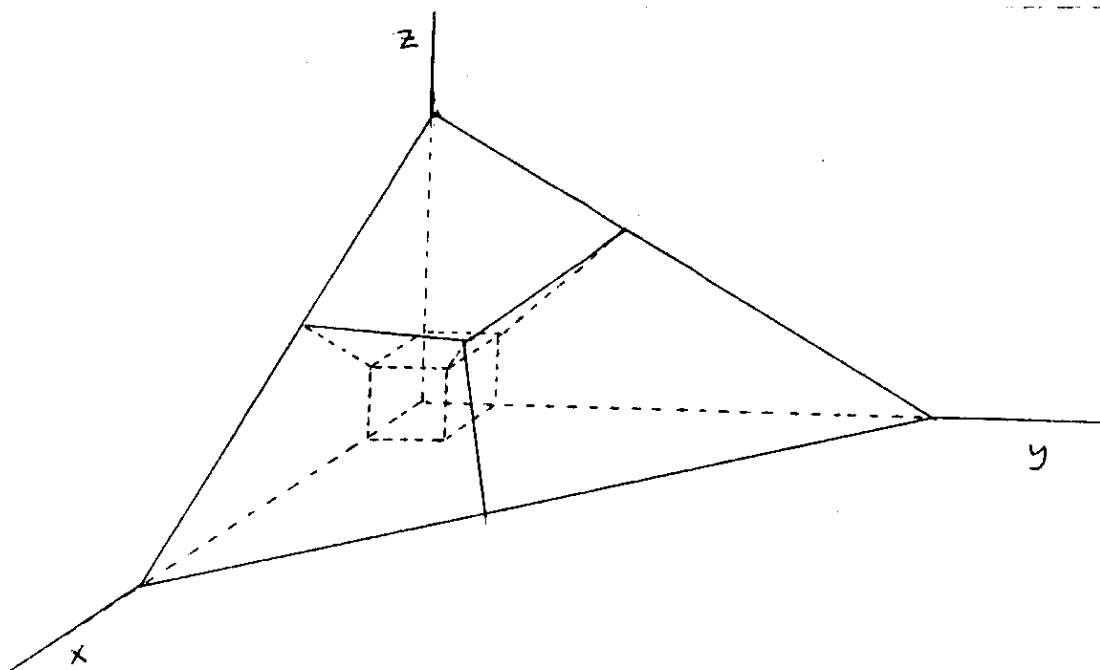
Voorbeeld 2: De Torus. Verdeel de torus in tweeën. Verdeel het meridiaanvlak, een cirkelschijf, in 5 "gedeformeerde vierkanten". Zie figuur.

Wentel deze vierkanten over een hoek π .



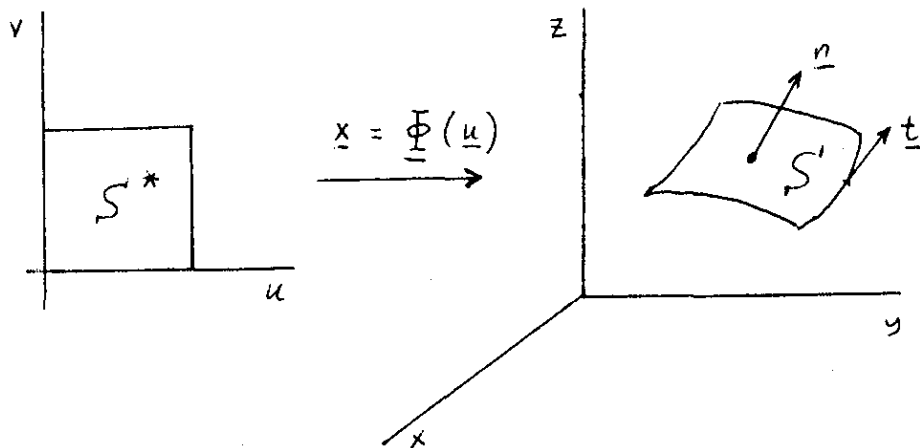
De torus wordt zodoende opgebouwd uit 10 gedeformeerde kubussen.

Voorbeeld 4: Het viervlak. Zet bij de oorsprong een kubusje neer. Zie figuur. Laat vanuit de oorsprong een rechte langs alle ribben van dit kubusje lopen. Dan worden nog eens 3 gedeformeerde kubussen uitgesneden. Het viervlak kan men zich dus opgebouwd denken uit 4 gedeformeerde kubussen. Een gedeformeerde bol, torus of viervlak is wederom een fraai gebied. Het is duidelijk dat de stelling van Gauss uit §A ook geldt voor een fraai gebied omdat de integralen over tegen elkaar aanliggende randen tegen elkaar wegvallen.



Opgave: Ga na dat een bol of een torus met een "holte" wederom een fraai gebied is.

5C. De stelling van Stokes voor een gedefformeerd vierkant



X Zij $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ een open verzameling. Neem aan dat Ω het gesloten eenheidsvierkant $\{0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$ bevat. Beschouw een bijectieve continue differentieerbare afbeelding $\underline{\Phi}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Zij nu \$S\$ het oppervlak in \$\mathbb{R}^3\$ dat de beeldverzameling is van \$S^*\$ onder de afbeelding \$\underline{\Phi}\$. Noem de rand van het oppervlak \$\partial S\$. We noemen \$S\$ een gedefformeerd vierkant. Kies een normaalvector \$\underline{n}\$ op \$S\$ en de daarbij behorende raakvector \$\underline{t}\$ van de randkromme \$\partial S\$. Zij \$\underline{v}(\underline{x})\$ een vectorveld op \$S\$.

Stelling. Er geldt

X

$$\iint_S \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial z} n_2 - \frac{\partial v_2}{\partial y} n_3 \right\} d\sigma = \int_{\partial S} v_1 t_1 ds$$

$$\iint_S \left\{ \frac{\partial v_2}{\partial x} n_3 - \frac{\partial v_3}{\partial z} n_1 \right\} d\sigma = \int_{\partial S} v_2 t_2 ds$$

$$\iint_S \left\{ \frac{\partial v_3}{\partial y} n_1 - \frac{\partial v_1}{\partial x} n_2 \right\} d\sigma = \int_{\partial S} v_3 t_3 ds .$$

Bewijs.

Dit berust op uitschrijven van de integralen. Stel $v_1 = f$. Stel $\underline{\phi} = \underline{x}(\underline{u})$.

Eenzijds

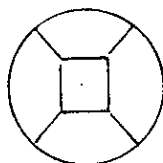
$$\begin{aligned}
 & \iint_{S^*} \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} n_2 - \frac{\partial f}{\partial y} n_3 \right\} d\sigma = \\
 & = \iint_{S^*} \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} (\underline{x}(\underline{u})) \cdot (z_u x_v - x_u z_v) - \frac{\partial f}{\partial y} (\underline{x}(\underline{u})) (x_u y_v - y_u x_v) \right\} dudv = \\
 & = \iint_{S^*} \left\{ (f_z z_u + f_y y_u + f_x x_u) x_v - (f_z z_v + f_y y_v + f_x x_v) x_u \right\} dudv \\
 & = \iint_{S^*_1} \left\{ \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right\} dudv = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (fx_v) - \frac{\partial}{\partial v} (fx_u) \right\} dudv \\
 & = \int_0^1 \left\{ (fx_v)(1,v) - (fx_v)(0,v) \right\} dv - \int_0^1 \left\{ (fx_u)(u,1) - (fx_u)(u,0) \right\} du .
 \end{aligned}$$

Anderzijds volgt door uitschrijven dat deze laatste uitdrukking precies gelijk is aan $\int_{\partial S} f t_1 ds$.

§D. De stelling van Stokes voor een fraai oppervlak in \mathbb{R}^3 .

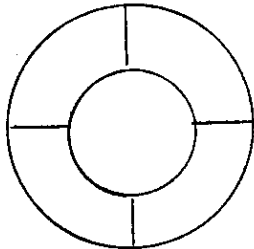
Onder een fraai oppervlak in \mathbb{R}^3 zullen we verstaan, een oppervlak dat opgebouwd kan worden uit een EINDIG aantal gedeformeerde vierkanten. Daarbij mogen alleen de randen (of delen daarvan) van de samengestelde vierkanten elkaar overlappen.

Voorbeeld 1: De cirkelschijf. Deze kan opgebouwd worden uit 5 gedeformeerde vierkanten. Zie figuur.

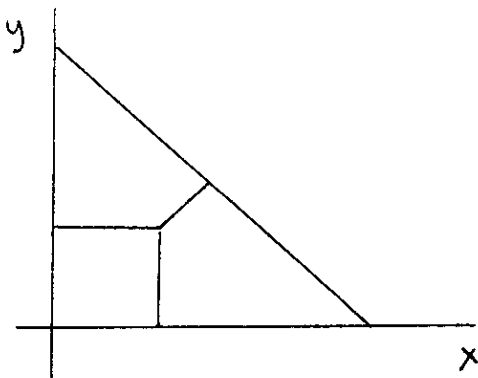


Voorbeeld 2: De Ring. Kan worden opgebouwd uit 4 gedeformeerde vierkanten.

Zie figuur.



Voorbeeld 3: De Driehoek. Kan worden opgebouwd uit 3 gedeformeerde vierkanten. Zie figuur.



Voor verformf/aaide cirkelschijven, ringen en driehoeken geldt hetzelfde. Dat zijn dus ook fraaie oppervlakken.

Het is direct duidelijk dat de stelling van Stokes uit 5C ook geldt voor fraaie oppervlakken omdat de integralen over tegen elkaar liggende randen tegen elkaar wegvallen.

Formulelijst Wiskunde 40

1. $\text{div}(\varphi \underline{v}) = \varphi \text{div } \underline{v} + (\text{grad } \varphi, \underline{v})$.
2. $\text{rot}(\varphi \underline{v}) = \varphi \text{rot } \underline{v} + (\text{grad } \varphi) \times \underline{v}$.
3. $\text{div}(\underline{u} \times \underline{v}) = (\underline{v}, \text{rot } \underline{u}) - (\underline{u}, \text{rot } \underline{v})$.
4. $\text{rot rot } \underline{v} = \text{grad div } \underline{v} - \Delta \underline{v}$.
5. $\iiint_R \text{grad } \varphi \, d\tau = \iint_S \varphi \underline{n} \, d\sigma$.
6. $\iiint_R \text{div } \underline{v} \, d\tau = \iint_S (\underline{v}, \underline{n}) \, d\sigma$.
7. $\iiint_R \text{rot } \underline{v} \, d\tau = \iint_S (\underline{n} \times \underline{v}) \, d\sigma$.
8. $\iint_S (\underline{n} \times \text{grad } \varphi) \, d\sigma = \int_K \varphi \underline{t} \, ds$.
9. $\iint_S (\text{rot } \underline{v}, \underline{n}) \, d\sigma = \int_K (\underline{v}, \underline{t}) \, ds$.
10. $\text{grad } \alpha = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial \alpha}{\partial w} \right)$.
11. $\text{div } \underline{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 a_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_3 h_1 a_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_1 h_2 a_w) \right]$.
12. $(\text{rot } \underline{a})_u = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial v} (h_3 a_w) - \frac{\partial}{\partial w} (h_2 a_v) \right]$,
 $(\text{rot } \underline{a})_v = \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial w} (h_1 a_u) - \frac{\partial}{\partial u} (h_3 a_w) \right]$,
 $(\text{rot } \underline{a})_w = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_2 a_v) - \frac{\partial}{\partial v} (h_1 a_u) \right]$.
13. $\iiint_R [\underline{u} \Delta \underline{v} + (\text{grad } u, \text{grad } v)] \, d\tau = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma$.
14. $\iiint_R [\underline{u} \Delta \underline{v} - \underline{v} \Delta u] \, d\tau = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, d\sigma$.
15. $u(\underline{\xi}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_R \frac{\Delta u}{r} \, d\tau + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} \, d\sigma, \quad \underline{\xi} \in R$.