

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

bij het college

WISKUNDE 40

met antwoorden

Voorjaar 1980



Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.254

Prijs f. 6,50

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Jap

Vraagstukken en antwoorden bij het college

Wiskunde 40

40

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het college

WISKUNDE 40

met antwoorden

Voorjaar 1980

INHOUDSOPGAVE

blz.

Vraagstukken

Hoofdstuk 1. Vector-analyse

1

Hoofdstuk 2. Partiële differentiaalvergelijkingen

21

Antwoorden

Hoofdstuk 1. Vector-analyse

39

Hoofdstuk 2. Partiële differentiaalvergelijkingen

55

Tentamenopgaven

72

Antwoorden tentamenopgaven

110

Aanvullende Inhoudsbeschrijving: Tentamenopgaven bij het college WISKUNDE 40 1980

Oude Tentamenopgaven over Vectoranalyse	72-85
Antwoorden	110-111
Oude Tentamenopgaven over Partiële Differentiaalvergelijkingen	85-94
Antwoorden	112-113

Tentamens/Examens, Herkansingen 1976-1979

	juni 1976	95	Her	januari 1978	103
				mei 1978	104
Her	juni 1976	96	Her	juni 1978	105
	januari 1977	97		januari 1979	106
Her	Januari 1977	98	Her	januari 1979	107
	juni 1977	100		mei 1979	107
Her	juni 1977	101	Her	juni 1979	109
	januari 1978	102			
				ANTWOORDEN	114-119

Vraagstukken

Hoofdstuk 1. Vector-analyse

1.1.1. Bepaal de veldlijnen van het vectorveld $\underline{v}(\underline{x}) = (y, x, 0)$.

1.1.2. Bepaal de veldlijnen van het vectorveld $\underline{v}(\underline{x}) = (y - z, z - x, x - y)$.

1.1.3. De magnetische inductie \underline{B} tengevolge van een stroom met sterkte I door een oneindig lange draad langs de z -as wordt gegeven door

$$\underline{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right);$$

hierin is μ_0 de permeabiliteit van vacuum.

Bepaal de magnetische veldlijnen.

1.1.4. De elektrische veldsterkte \underline{E} tengevolge van een dipool in de oorsprong met dipoolmoment p gericht langs de z -as wordt gegeven door

$$\underline{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^5} \left(\frac{3xz}{r}, \frac{3yz}{r}, \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r} \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

hierin is ϵ_0 de permittiviteit van vacuum.

Bepaal de elektrische veldlijnen.

Aanwijzing: Ga over op bolcoördinaten (r, θ, φ) en beschrijf de veldlijnen door een parametervoorstelling $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.

1.1.5. Bewijs:

- 1) $|\underline{a} \times \underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2 |\underline{b}|^2 - (\underline{a}, \underline{b})^2$,
- 2) $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \theta$ waarbij θ de hoek tussen \underline{a} en \underline{b} is,
- 3) $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a}, \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a}, \underline{b}) \underline{c}$,
- 4) $(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a}, \underline{c})(\underline{b}, \underline{d}) - (\underline{a}, \underline{d})(\underline{b}, \underline{c})$,
- 5) $(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{d}) \underline{c} - (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}) \underline{d}$.

1.1.6. Gegeven zijn de vectoren $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ en $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en het reële getal α .

Bestaat er een vector $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ zodat geldt

$$\underline{a} \times \underline{v} = \underline{b} \quad \text{en} \quad (\underline{a}, \underline{v}) = \alpha ?$$

1.1.7. Zij $\underline{x}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ een differentieerbare vectorfunctie met $|\underline{x}(t)| = c$ (c constant) voor alle t .

Bewijs dat $(\underline{x}, \frac{d\underline{x}}{dt}) = 0$ voor alle t .

Wat is de meetkundige betekenis van dit resultaat?

1.1.8. Een star lichaam roteert om een vaste as $\lambda \underline{a}$ ($\underline{a} \neq \underline{0}$, λ reëel) in \mathbb{R}^3 . De plaatsvector ($= \overrightarrow{OP}$) van een punt P van het lichaam ten tijde t zij $\underline{x}(t)$.

(i) Bewijs dat er een vector $\underline{\omega}(t)$ bestaat, zodat

$$\underline{v}(t) := \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{\omega}(t) \times \underline{x}(t) .$$

(ii) Bewijs dat $\underline{\omega}(t)$ onafhankelijk is van P .

(De vector $\underline{\omega}(t)$ heet hoeksnelheidsvector en $\omega(t) = |\underline{\omega}(t)|$ is de hoeksnelheid.)

1.1.9. Ten tijde t is de plaatsvector van een bewegend deeltje in \mathbb{R}^3 :

$$\underline{x} = \underline{p} \cos \omega t + \underline{q} \sin \omega t ,$$

waarbij \underline{p} en \underline{q} vaste vectoren zijn en ω een constante is.

(i) Bereken de snelheidsvector $\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt}$ en bewijs dat $\underline{x} \times \underline{v}$ onafhankelijk van t is.

(ii) Bewijs dat de versnellingsvector $\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}$ naar de oorsprong is gericht en dat $|\underline{a}|$ evenredig is met de afstand van het deeltje tot de oorsprong.

1.1.10. Een deeltje met massa m en plaatsvector $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ beweegt onder invloed van een kracht $\underline{K}(t)$. Bewijs de momentenstelling

$$\frac{d}{dt}(\underline{x} \times m\underline{v}) = \underline{x} \times \underline{K} .$$

1.2.1. Bereken de gradiënt van de volgende scalarvelden:

a) $\varphi(\underline{x}) = 2x^2 - 3xy + y^2 - 4xz + 6z^2 ,$

b) $\varphi(\underline{x}) = \log(x^2 + y^2) + z ,$

c) $\varphi(\underline{x}) = \frac{z}{r} , r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$

1.2.2. Bepaal de richtingsafgeleide van $\varphi(\underline{x}) = x^2yz + 2xz^2$ in het punt $(1, -2, 1)$ in de richting van de vector $\underline{v} = \frac{1}{3}(2, -1, -2)$.

1.2.3. Bepaal de vector \underline{a} waarvan richting en grootte gelijk zijn aan die van de sterkste afname van $\varphi(\underline{x}) = x^2 + 4y^2 - z^2$ in het punt $(1,1,2)$.

1.2.4. Bepaal het raakvlak aan het oppervlak $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ in het punt $(1,-1,2)$.

1.2.5. Bepaal de hoek tussen de raakvlakken aan de oppervlakken $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ en $x^2 + y^2 - 2y - 2z = 0$ in het punt $(1,1,0)$.

1.2.6. Zij $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $f(\underline{x}) = F(|\underline{x}|)$; laat zien dat er een scalarveld $\lambda(\underline{x})$ bestaat zodat $\text{grad } f(\underline{x}) = \lambda(\underline{x})\underline{x}$ ($\underline{x} \neq \underline{0}$).

1.2.7. Bepaal de divergentie en de rotatie van de volgende vectorvelden:

a) $\underline{v}(\underline{x}) = (2x + z, -y - z, x - 2y)$,

b) $\underline{v}(\underline{x}) = (xz^2 + x^3, -2x^2y + 2yz^2, -z^3)$,

c) $\underline{v}(\underline{x}) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right)$.

1.2.8. Bereken

$$\text{grad } |\underline{x}|^\alpha, \text{div}(|\underline{x}|^\alpha \underline{x}), \text{rot}(|\underline{x}|^\alpha \underline{x}), \Delta |\underline{x}|^\alpha.$$

1.2.9. Bewijs:

a) $\text{rot}(\varphi \underline{v}) = \varphi \text{rot } \underline{v} + (\text{grad } \varphi) \times \underline{v}$,

b) $\text{div}(\underline{u} \times \underline{v}) = (\underline{v}, \text{rot } \underline{u}) - (\underline{u}, \text{rot } \underline{v})$,

c) $\text{div}(\text{grad } \varphi \times \text{grad } \psi) = 0$,

d) $\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2(\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)$.

1.2.10. Het vectorproduct $\underline{a} \times \underline{b}$ staat loodrecht op \underline{a} en \underline{b} . Staat $\text{rot } \underline{v} = \nabla \times \underline{v}$ loodrecht op \underline{v} ?

1.2.11. Bepaal de divergentie en de rotatie van $\underline{v} = \varphi \text{grad } \psi$.

Toon aan $\text{rot } \underline{v} \perp \underline{v}$.

1.2.12. Bereken $\text{div}(\underline{r} \text{ grad } \frac{1}{r})$ en $\text{rot}(\underline{r} \text{ grad } \frac{1}{r})$, waarbij $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.2.13. Zij \underline{v} een vectorveld waarvoor geldt $\text{div } \underline{v} = 0$ en $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$.
Bewijs dat $\Delta(\underline{v}, \underline{x}) = 0$.

1.2.14. Zij $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $f(\underline{x}) = F(|\underline{x}|)$; bewijs dat

$$\Delta f(\underline{x}) = F''(|\underline{x}|) + \frac{2F'(|\underline{x}|)}{|\underline{x}|}, \quad \underline{x} \neq \underline{0}.$$

Bereken f als $\Delta f = 0$ is.

1.2.15. Zij $\underline{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ een vectorfunctie; merk op dat $\text{div } \underline{v}$ gelijk is aan het spoor van de functionaalmatrix van \underline{v} . Toon aan dat $\text{div } \underline{v}$ invariant is bij overgang op een andere orthonormale basis.

1.2.16. Een vloeistof stroomt met snelheid $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{x}$. Beschrijf de beweging van de vloeistof en bepaal $\text{div } \underline{v}$.

Beschouw het gedeelte van de vloeistof dat op het tijdstip $t = 0$ bevat is in de bol $|\underline{x}| \leq 1$. Op het tijdstip t zal dit gedeelte bevat zijn in de bol $|\underline{x}| \leq r(t)$ met volume $V(t)$. Bepaal $r(t)$, $V(t)$, en laat zien dat $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \text{div } \underline{v}$.

1.3.1. Zij K een kromme in \mathbb{R}^3 gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x} = \underline{x}(t)$, $a \leq t \leq b$. Toon aan dat de lijnintegraal

$$\int_K f(\underline{x}) ds = \int_a^b f(\underline{x}(t)) |\dot{\underline{x}}(t)| dt$$

onafhankelijk is van de parameterkeuze van K .

1.3.2. Bereken de volgende lijnintegralen over een kromme K :

a) $\int_K xy \, ds$ over K : $y = \frac{1}{2}x^2$, $z = 0$, $0 \leq x \leq 1$;

b) $\int_K (x^2 - y^2) ds$ over K : $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$;

c) $\int_K x^2 yz \, ds$ over K : $\underline{x}(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2} \sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

1.3.3. Gegeven is de kromme K met parametervoorstelling $\underline{x}(t) = (\cos t, \sin t, t^{3/2})$.
Bereken de lengte van de boog van K tussen de punten corresponderend met $t = 0$
en $t = 4$.

1.3.4. De kromme K is gegeven door de vergelijkingen

$$\begin{cases} y = \arcsin x, \\ z = \frac{1}{4} \log \frac{1+x}{1-x}. \end{cases}$$

Bereken de booglengte $s(x)$ vanaf het beginpunt $\underline{0}$.

Bepaal de eenheidsraakvector \underline{t} aan K in het punt $\underline{0}$.

1.3.5. Bereken $\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds$ in de volgende gevallen:

- $\underline{v} = (xy^2, x^2y, 0)$; K is de parabool $y = x^2, z = 0$, met beginpunt $(0,0,0)$ en eindpunt $(-1,1,0)$;
- $\underline{v} = (2xyz^3, -x^2z^3 - 2y, 3x^2yz^2)$; K wordt gegeven door de vergelijkingen $y = x^2, z = x^3$, met beginpunt $(0,0,0)$ en eindpunt $(1,1,1)$;
- $\underline{v} = (2xy, x^2 + 2yz, 1 + y^2)$; K is de cirkel $x^2 + y^2 = 1, z = 1$, met $\underline{t} = (-1,0,0)$ in het punt $(0,1,1)$.

1.3.6. De magnetische inductie \underline{B} tengevolge van een stroom met sterkte I door een oneindig lange draad langs de z-as wordt gegeven door

$$\underline{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right);$$

hierin is μ_0 de permeabiliteit van vacuum.

Bereken $\int_K (\underline{B}, \underline{t}) ds$ over de volgende krommen K:

- K is de cirkel $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$, in positieve zin doorlopen;
- K is een vierkant zodanig doorlopen dat opvolgende hoekpunten zijn $(1,1,0)$, $(-1,1,0)$, $(-1,-1,0)$, $(1,-1,0)$.

1.3.7. Bereken:

a) $\int_{(1,0,0)}^{(1,0,2\pi)} z dx + x dy + y dz$ langs de kromme met parametervoorstelling

$\underline{x}(t) = (\cos t, \sin t, t), 0 \leq t \leq 2\pi;$

b) $\int_{(1,0,1)}^{(2,3,2)} x^2 dx - xz dy + y^2 dz$ langs de rechte die begin- en eindpunt verbindt;

c) $\int_{(0,1,0)}^{(1,0,2)} \frac{z}{y} dx + (x^2 + y^2 + z^2) dz$ langs de kromme in het eerste octant gegeven door $x^2 + y^2 = 1, z = 2x;$

d) $\int_{(2,0,0)}^{(0,0,2)} y dx - y(x-1) dy + y^2 z dz$ langs de kromme in het eerste octant gegeven door $x^2 + y^2 + z^2 = 4, (x-1)^2 + y^2 = 1.$

1.3.8. Bereken

$$\int_K (x^3 - y^3) ds, \int_K (x^3 - y^3) dx, \int_K (x^3 - y^3) dy,$$

als K de halve cirkel $y = \sqrt{1 - x^2}, z = 0$ is, met beginpunt $(1,0,0)$ en eindpunt $(-1,0,0)$.

1.3.9. Bereken $\int_{(0,0)}^{(1,1)} y dx + (y^2 - x) dy$ langs de kromme met parametervoorstelling:

- a) $\underline{x}(t) = (t, t),$
- b) $\underline{x}(t) = (t^2, t^3),$
- c) $\underline{x}(t) = (t, t^\alpha)$ met $\alpha > 0,$
- d) $\underline{x}(t) = (t, \sin \frac{\pi t}{2}).$

1.3.10. Bereken $\int_{(0,0)}^{(1,1)} y dx + x dy$ langs de krommen uit 1.3.9. Verklaar waarom

de uitkomst dezelfde is voor alle krommen.

1.3.11. Toon aan dat de volgende integralen onafhankelijk zijn van de gekozen integratieweg en bereken deze integralen:

a)
$$\int_{(0,0,0)}^{(a,b,0)} \sin y \, dx + x \cos y \, dy ,$$

b)
$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (y+z) \, dx + (z+x) \, dy + (x+y) \, dz .$$

1.3.12. Laat K een gesloten kromme zijn. Bewijs dat

$$\int_K (\varphi \operatorname{grad} \psi, \underline{t}) \, ds = - \int_K (\psi \operatorname{grad} \varphi, \underline{t}) \, ds .$$

1.3.13. Een deeltje beweegt in het (x,y) -vlak langs een kromme gegeven door de parametervoorstelling $x = 2t$, $y = 4t - t^2$, met de tijd t als parameter. Op het deeltje werkt een kracht $\underline{F} = -\underline{v}$, waarbij \underline{v} de snelheid van het deeltje is. Bereken de arbeid door \underline{F} verricht gedurende het tijdsinterval van $t = 0$ tot $t = 4$.

1.3.14. Bereken de volgende oppervlakte-integralen over een oppervlak S :

a)
$$\iint_S x^2 z \, d\sigma \text{ over } S: x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1;$$

b)
$$\iint_S (x^2 + y^2) z \, d\sigma \text{ over } S: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 1;$$

c)
$$\iint_S \frac{d\sigma}{\sqrt{z - y + 1}} \text{ over } S: z = \frac{1}{2}x^2 + y, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

1.3.15. Bereken het traagheidsmoment I_x t.o.v. de x -as van de half-bolvormige schaal $S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, met totale massa M .

1.3.16. Zij het oppervlak S gegeven door de impliciete voorstelling $F(x,y,z) = 0$, $(x,y) \in G$, met $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$. Bewijs dat de oppervlakte van S gegeven wordt door

$$\iint_G \frac{|\operatorname{grad} F|}{|\partial F / \partial z|} \, dx dy .$$

1.3.17. Bepaal de oppervlakte van de torus $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$, waarbij $0 < b < a$.

1.3.18. Het oppervlak S is gegeven door de parametervoorstelling

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = u, 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Wat stelt dit oppervlak meetkundig voor?

Bereken de oppervlakte van S .

1.3.19. Bereken de oppervlakte van het deel van de paraboloid $z = x^2 + y^2$ dat ligt binnen de cylinder $4x^2 + 4y^2 = 1$.

1.3.20. Het oppervlak S is gegeven door de parametervoorstelling

$$x = \cos u + v \sin u, y = \sin u - v \cos u, z = v + 1,$$

met $0 \leq u \leq \pi/2, 0 \leq v \leq 1$. Bereken de oppervlakte van S .

1.3.21. De kromme K is gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x}(t) = (t, t^2, 2t^3)$, en het oppervlak S is gegeven door de vergelijking $z = x^2 + 3y^2 - 2xy$. Bereken de (scherpe) hoek tussen K en de normaal op S in de snijpunten van K en S .

1.3.22. Bereken $\iint_S (\underline{x}, \underline{n}) d\sigma$ over de volgende oppervlakken S :

a) $S: z = xy + 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$; \underline{n} is in $(0,0,1)$ naar boven gericht;

b) $S: z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1$; \underline{n} is in $(0,0,0)$ naar beneden gericht;

c) S is het (gesloten) oppervlak van de kubus begrensd door de vlakken $x = \pm 1, y = \pm 1$ en $z = \pm 1$; \underline{n} is naar buiten gericht.

1.3.23. Bereken $\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma$ in de volgende gevallen:

a) $\underline{v} = (xyz^2, x^2z^2, x^2y^2z)$; S is het (gesloten) randoppervlak van het gebied begrensd door de paraboloid $z = x^2 + y^2$ en het vlak $z = 1$; \underline{n} is naar buiten gericht;

b) $\underline{v} = (xz, yz, x^2)$; S is het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; \underline{n} is naar buiten gericht;

c) $\underline{v} = \text{rot } \underline{w}$ met $\underline{w} = (0, 0, x^2 + xy - z^2)$; S is de halve bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0$; \underline{n} is in $(0,0,-1)$ naar beneden gericht;

d) $\underline{v} = (6z, 2x+y, -x)$; S is het (gesloten) randoppervlak van het gebied begrensd door de cylinder $x^2 + z^2 = 9$ en de vlakken $x = 0, y = 0, z = 0$ en $y = 8$; \underline{n} is naar buiten gericht.

1.3.24. De elektrische veldsterkte \underline{E} tengevolge van een lading q in de oorsprong wordt gegeven door

$$\underline{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

hierin is ϵ_0 de permittiviteit van vacuum.

Bereken $\iint_S (\underline{E}, \underline{n}) d\sigma$ over de volgende oppervlakken S :

- a) S is het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; \underline{n} is naar buiten gericht;
- b) S is de ellipsoïde $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$; \underline{n} is naar buiten gericht.

1.3.25. Bereken:

- a) $\iiint_S x \, dydz + y \, dx dz + z \, dx dy$ over de driehoek S met hoekpunten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$; \underline{n} wijst van de oorsprong af;
- b) $\iiint_S x \, dydz + y \, dx dy$ over S : $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$; \underline{n} wijst van de z -as af;
- c) $\iiint_S x \, dydz + y \, dx dy$ over het oppervlak S met parametervoorstelling
 $x = u + v$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$;

de z -component van \underline{n} is niet negatief.

1.4.1. Verifieer de divergentiestelling

$$\iiint_R \operatorname{div} \underline{v} \, d\tau = \iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma$$

in de volgende gevallen:

- a) $\underline{v} = (x^2, y^2, z^2)$; R is de kubus $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$;
- b) $\underline{v} = (x^2 + y^2) \underline{a}$ met $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ constant; R is het gebied gegeven door $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$;
- c) $\underline{v} = \underline{x}$; R is het bolvormig gebied $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

1.4.2. Zij R een begrensd gebied in \mathbb{R}^3 met rand S ; \underline{n} is de naar buiten gerichte normaal op S . Bewijs:

a)
$$\iiint_R \operatorname{rot} \underline{v} \, d\tau = \underline{0}$$

als op S \underline{v} loodrecht staat op S ;

b)
$$\iiint_R \varphi \operatorname{div} \underline{v} \, d\tau = \iint_S (\varphi \underline{v}, \underline{n}) \, d\sigma$$

als \underline{v} in elk punt van R raakt aan het equiscaleaire oppervlak $\varphi = \text{constant}$ door dat punt.

1.4.3. Zij R een begrensd gebied in \mathbb{R}^3 met rand S ; \underline{n} is de naar buiten gerichte normaal op S . Bewijs dat het volume van R gelijk is aan

$$\iint_S x \, dydz = \iint_S y \, dx dz = \iint_S z \, dx dy .$$

1.4.4. Bereken $\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) \, d\sigma$ met behulp van de divergentiestelling in de volgende gevallen:

- a) $\underline{v} = (x^2, y^2, yz)$; S is de rand van de kubus $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$; \underline{n} is naar buiten gericht;
- b) $\underline{v} = (xy, -y^2, yz + z^2)$; S is de rand van het gebied begrensd door de cilinder $x^2 + y^2 = 1$ en de vlakken $z = 1$ en $z = 3$; \underline{n} is naar buiten gericht;
- c) $\underline{v} = (x^2 z^2, 2x^4 - 2xyz^2, z - 1)$; S is de halve bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$; \underline{n} wijst van de oorsprong af.

1.4.5. Bereken de oppervlakte-integralen uit 1.3.22b), c), en 1.3.23a), b), d) met behulp van de divergentiestelling.

1.4.6. Zij R een begrensd gebied in \mathbb{R}^3 met rand S ; \underline{n} is de naar buiten gerichte normaal op S . Bewijs:

a)
$$\iint_S \underline{n} \, d\sigma = \underline{0}, \quad \text{b) } \iint_S (\underline{x}, \underline{n}) \, d\sigma = 3V \text{ met } V = \text{volume van } R ,$$

c)
$$\iint_S |\underline{x}|^2 (\underline{x}, \underline{n}) \, d\sigma = 5 \iiint_R |\underline{x}|^2 \, d\tau .$$

1.4.7. Zij $A(\underline{x}) = [a_{ij}(\underline{x})]: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{(3 \times 3)}$ een (3×3) -matrixfunctie (tensorveld), dan is $\text{div } A$ het vectorveld gegeven door

$$\text{div } A := \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + \frac{\partial a_{21}}{\partial y} + \frac{\partial a_{31}}{\partial z}, \frac{\partial a_{12}}{\partial x} + \frac{\partial a_{22}}{\partial y} + \frac{\partial a_{32}}{\partial z}, \frac{\partial a_{13}}{\partial x} + \frac{\partial a_{23}}{\partial y} + \frac{\partial a_{33}}{\partial z} \right).$$

Zij R een begrensde gebied in \mathbb{R}^3 met rand S ; \underline{n} is de naar buiten gerichte normaal op S . Bewijs de divergentiestelling voor een tensorveld:

$$\iiint_R \text{div } A \, d\tau = \iint_S \underline{n} \cdot A \, d\sigma.$$

1.4.8. Leid af de continuïteitsvergelijking uit de electriciteitsleer:

$$\text{div } \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

waarin ρ de ladingsdichtheid en \underline{j} de stroomdichtheid is.

1.4.9. Een vloeistof stroomt met snelheid $\underline{v}(\underline{x}, t)$, waarbij de variabele t de tijd voorstelt. Laat R een begrensde gebied zijn dat meebeweegt met de vloeistof. De positie van R ten tijde t wordt aangegeven door $R(t)$, en het volume van $R(t)$ zal $V(t)$ zijn.

a) Bewijs dat

$$\frac{dV}{dt} = \iiint_{R(t)} \text{div } \underline{v} \, d\tau.$$

b) Zij $\varphi(\underline{x}, t)$ een scalarveld; bewijs dat

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R(t)} \varphi(\underline{x}, t) \, d\tau = \iiint_{R(t)} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div}(\varphi \underline{v}) \right] d\tau.$$

c) Leid de continuïteitsvergelijking uit de stromingsleer af met behulp van b)

1.5.1. Verifieer de stelling van Green voor de volgende lijnintegralen over een gesloten kromme K in het (x, y) -vlak, in positieve zin doorlopen:

a) $\int_K y^2 dx + xy dy$, K is het vierkant met hoekpunten $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$;

b) $\int_K (y - \sin x) dx + \cos x dy$, K is de driehoek met hoekpunten $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$;

- c) $\int_K (xy + y^2) dx + x^2 dy$, K is de rand van het gebied begrensd door de parabool $y = x^2$ en de rechte $y = x$.

1.5.2. Zij G een begrensd gebied in het (x,y) -vlak met rand K . Toon aan dat de oppervlakte van G gelijk is aan

$$\int_K x dy = - \int_K y dx ,$$

waarbij K in positieve zin doorlopen wordt.

Bereken met één van deze formules de oppervlakte van het gebied begrensd door de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1.5.3. Bereken met behulp van de stelling van Green de volgende lijnintegralen over een gesloten kromme K in het (x,y) -vlak:

- a) $\int_K (2x^3 + y) dx + (x + 3y^2) dy$, K is gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x} = (t^2 - 1, t^3 - t)$, $-1 \leq t \leq 1$;
- b) $\int_K (2x - y^3) dx - xy dy$, K bestaat uit de cirkel $x^2 + y^2 = 9$ in positieve zin doorlopen, en de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ in negatieve zin doorlopen;
- c) $\int_K e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$, K is een willekeurige gesloten kromme.

1.5.4. Verifieer de stelling van Stokes

$$\iint_S (\text{rot } \underline{v}, \underline{n}) d\sigma = \int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds$$

in de volgende gevallen:

- a) $\underline{v} = \underline{x} \times \underline{e}_3$; S is het in het eerste octant gelegen deel van het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;
- b) $\underline{v} = \underline{x}$; S is de vlakke driehoek met hoekpunten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$;
- c) $\underline{v} = (x + y + z)\underline{x}$; S is het deel van de cylinder $x^2 + y^2 = 1$ waarvoor geldt $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq \sqrt{2y}$.

1.5.5. Zij K een enkelvoudige gesloten kromme gelegen in het vlak $(\underline{n}, \underline{x}) = 0$ met $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$, $|\underline{n}| = 1$. De omloopszin van K zal passen bij de richting van \underline{n} . Toon aan dat de door K omsloten oppervlakte gelijk is aan

$$\frac{1}{2} \int_K (n_2 z - n_3 y) dx + (n_3 x - n_1 z) dy + (n_1 y - n_2 x) dz .$$

1.5.6. Bereken de volgende integralen met behulp van de stelling van Stokes:

a) $\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds$ met $\underline{v} = (-3y, 3x, 1)$; K is de cirkel $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4$, met

$\underline{t} = (0, 1, 0)$ in het punt $(1, 0, 4)$;

b) $\int_K y dx + z dy + x dz$; K is de snijkromme van de cylinder $x^2 + y^2 = 1$ en

de hyperbolische paraboloid $z = xy$, die van boven gezien in positieve zin doorlopen wordt;

c) $\int_K 2xy^2z dx + (x + 2x^2yz) dy + (x^2y^2 - 2z) dz$; K is gegeven door de parametrisering

$\underline{x} = (\cos t, \sin t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, doorlopen in de richting van toenemende t ;

d) de oppervlakte-integraal uit 1.3.23c).

1.5.7. Zij S het deel van het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ dat ligt in het eerste octant en binnen de cylinder $x^2 + y^2 = 2ax$; de normaal \underline{n} op S wijst van de oorsprong af. Bereken met behulp van de stelling van Stokes

a) $\int_K y dz - z dy$, b) $\int_K z dx - x dz$, c) $\int_K x dy - y dx$,

over de rand K van S , doorlopen in de richting passend bij \underline{n} .

1.5.8. In een rechts cartesisch coördinatenstelsel is

$$\text{rot } \underline{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right),$$

waarbij $\underline{v}(\underline{x}) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$.

Leid dit af uit de coördinaat-vrije definitie van de rotatie.

1.5.9. Zij S een oppervlak in \mathbb{R}^3 met rand K . De normaal $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ op S en de eenheidsraakvector $\underline{t} = (t_1, t_2, t_3)$ aan K worden bij elkaar passend gekozen.

Zij $\underline{v}(\underline{x}) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$ een vectorveld.

Bewijs dat

$$\int_K (\underline{v} \times \underline{t}) ds = \iiint_S [\underline{n} \operatorname{div} \underline{v} - (\underline{n} \times \operatorname{rot} \underline{v}) - (\underline{n}, \operatorname{grad}) \underline{v}] d\sigma,$$

waarin

$$\begin{aligned} (\underline{n}, \operatorname{grad}) \underline{v} &= \\ &= \left((n_1 \frac{\partial}{\partial x} + n_2 \frac{\partial}{\partial y} + n_3 \frac{\partial}{\partial z}) v_1, (n_1 \frac{\partial}{\partial x} + n_2 \frac{\partial}{\partial y} + n_3 \frac{\partial}{\partial z}) v_2, (n_1 \frac{\partial}{\partial x} + n_2 \frac{\partial}{\partial y} + n_3 \frac{\partial}{\partial z}) v_3 \right). \end{aligned}$$

1.5.10. Een vloeistof stroomt met snelheid $\underline{v}(\underline{x}, t) = (v_1(\underline{x}, t), v_2(\underline{x}, t), v_3(\underline{x}, t))$, waarbij de variabele t de tijd voorstelt. Laat K een enkelvoudige gesloten kromme zijn die meebeweegt met de vloeistof. De positie van K ten tijde t wordt aangegeven door $K(t)$. De circulatie rond $K(t)$ wordt gegeven door

$$\Gamma(t) = \int_{K(t)} (\underline{v}, \underline{t}) ds,$$

waarin \underline{t} de eenheidsraakvector aan $K(t)$ is.

a) Als \underline{v} niet van de tijd afhangt (stationaire stroming), bewijs dan dat

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{K(t)} (\operatorname{rot} \underline{v} \times \underline{v}, \underline{t}) ds = \int_{K(t)} ((\underline{v}, \operatorname{grad}) \underline{v}, \underline{t}) ds,$$

waarin

$$\begin{aligned} (\underline{v}, \operatorname{grad}) \underline{v} &= \\ &= \left((v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial z}) v_1, (v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial z}) v_2, (v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial z}) v_3 \right). \end{aligned}$$

b) Als \underline{v} wel van de tijd afhangt, bewijs dan dat

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{K(t)} \left(\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v}, \operatorname{grad}) \underline{v} \right), \underline{t} \right) ds = \int_{K(t)} \left(\frac{d\underline{v}}{dt}, \underline{t} \right) ds,$$

waarin $\frac{d\underline{v}}{dt}$ de totale of materiële versnelling is.

1.6.1. Bereken een potentiaal van de volgende vectorvelden:

a) $\underline{v} = (\sin y - y \sin x + x, \cos x + x \cos y + y),$

b) $\underline{v} = (2xe^y + y, x^2e^y + x - 2y),$

c) $\underline{v} = (x + z, -y - z, x - y).$

1.6.2. De elektrische veldsterkte \underline{E} tengevolge van een lading q in de oorsprong is gegeven in 1.3.24. Bereken met behulp hiervan de elektrische veldsterkte tengevolge van een lijnlading langs de z -as met dichtheid λ (= lading per lengte-eenheid). Bepaal tevens de elektrische potentiaal tengevolge van de lijnlading.

1.6.3. Toon aan dat de volgende vectorvelden niet conservatief zijn:

a) $\underline{v} = (-x^2y, xy^2, 0),$ b) $\underline{v} = (2xz, x^2 - y, 2z - x^2).$

1.6.4. Toon aan dat de volgende vectorvelden conservatief zijn en bereken een potentiaal van deze vectorvelden:

a) $\underline{v} = (2xyz^3, x^2z^3 - 2y, 3x^2yz^2),$

b) $\underline{v} = (y^2z^3 \cos x - 4x^3z, 2yz^3 \sin x, 3y^2z^2 \sin x - x^4),$

c) $\underline{v} = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, 2z \right).$

1.6.5. Zij $\underline{v} = (x + 2y + \alpha z, \beta x - 3y - z, 4x + \gamma y + 2z).$

Bepaal α, β en γ zodanig dat $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}.$

Bepaal vervolgens een potentiaal φ van \underline{v} zodanig dat $\varphi(\underline{0}) = 1.$

1.6.6. Zij $\underline{v} = \left(\frac{1}{x+y}, \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y}, \frac{1}{z+2} \right).$

a) Is het vectorveld \underline{v} conservatief in het gebied R gegeven door $x + y > 0,$
 $y > 0, z > -2?$

b) Bereken $\int_{(1,1,0)}^{(0,2,0)} (\underline{v}, \underline{t}) ds$ langs de kromme gegeven door $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1,$
 $x + y = 2, z \geq 0.$

1.6.7. Toon aan dat de volgende integralen onafhankelijk zijn van de gekozen integratieweg en bereken deze integralen:

a)
$$\int_{(1,1)}^{(x,y)} 2xy \, dx + (x^2 - y^2) \, dy,$$

b)
$$\int_{(1,2,3)}^{(4,5,6)} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz,$$

c)
$$\int_{(1,1,1)}^{(x,y,z)} \frac{2x}{z} \, dx + \frac{2y}{z} \, dy + \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{z^2}\right) dz$$
 langs een kromme in de halfruimte te $z > 0$.

1.6.8. Zij gegeven het krachtveld $\underline{F} = (2xy^2z, 2x^2yz + 3y^2, x^2y^2 + 2z)$.

Toon aan dat \underline{F} conservatief is, bepaal een potentiaal van \underline{F} en bereken de arbeid door \underline{F} verricht bij de beweging van een deeltje van $(1, -2, 1)$ naar $(3, 1, 4)$.

1.6.9. Zij $\text{grad } f(\underline{x}) = \lambda(\underline{x})\underline{x}$; laat zien dat er een functie $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bestaat zodat $f(\underline{x}) = F(|\underline{x}|)$. (Vergelijk met 1.2.6.)

1.6.10. Bewijs dat $\text{rot}(\varphi \text{ grad } \varphi) = \underline{0}$ en bepaal een potentiaal van $\varphi \text{ grad } \varphi$.

1.6.11. De magnetische inductie \underline{B} tengevolge van een stroom met sterkte I door een oneindig lange draad langs de z -as is gegeven in 1.3.6. Bewijs dat

$$\int_K (\underline{B}, \underline{t}) \, ds = \mu_0 I$$

voor elke enkelvoudige gesloten kromme K om de z -as die van boven gezien in positieve zin doorlopen wordt.

1.6.12. Bereken:

a)
$$\int_K \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} \, dx - \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy$$
 als K de ellips $x^2 + 3y^2 = 1$ is, in positieve zin doorlopen;

b)
$$\int_{(1,0)}^{(5,3)} \frac{x}{x^2 - y^2} \, dx + \frac{y}{y^2 - x^2} \, dy$$
 langs een kromme in het gebied $x > 0$, $|y| < x$.

1.6.13. Bepaal alle waarden van de lijnintegraal

$$\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

over een kromme die niet door de oorsprong gaat.

1.7.1. Toon aan dat de volgende vectorvelden niet bronvrij zijn:

a) $\underline{v} = (x, y, z)$, b) $\underline{v} = (xy^2, y^3, y^2z)$.

1.7.2. Toon aan dat de volgende vectorvelden bronvrij zijn en bereken een vectorpotentiaal van deze vectorvelden:

a) $\underline{v} = (z - y, x - z, y - x)$,

b) $\underline{v} = (2xyz^2 + xy^3, x^2y^2 - y^2z^2, -y^3z - 2x^2yz)$,

c) $\underline{v} = (3y^4z^2, 4x^3z^2, -3x^2y^2)$.

1.7.3. Zij $\underline{v} = (x + 3y, y - 2z, x + \alpha z)$.

Bepaal α zodanig dat $\text{div } \underline{v} = 0$.

Bepaal vervolgens een vectorpotentiaal $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$ van \underline{v} , zodanig dat $w_1 = 0$.

1.7.4. Bewijs dat het vectorveld $\underline{v} = \underline{c} \times \underline{x}$ met \underline{c} constant, divergentievrij is.

Bepaal een vectorpotentiaal \underline{w} van \underline{v} , van de gedaante $\underline{w} = \lambda(\underline{x})\underline{x}$.

1.7.5. Bewijs dat $\text{div}(\text{grad } \varphi \times \text{grad } \psi) = 0$ en bepaal een vectorpotentiaal van $\text{grad } \varphi \times \text{grad } \psi$.

1.7.6. Zij R een gebied in \mathbb{R}^3 met de eigenschap dat voor elk punt $\underline{p} \in R$ het lijnsegment $[\underline{0}, \underline{p}]$ geheel binnen R ligt; een dergelijk gebied heet stervormig.

Zij het vectorveld $\underline{v}(\underline{x})$ divergentievrij in R .

Bewijs dat

$$\underline{w}(\underline{x}) := \int_0^1 t[\underline{v}(t\underline{x}) \times \underline{x}] dt, \quad \underline{x} \in R$$

een vectorpotentiaal van \underline{v} is.

Merk op dat de integraal betekenis heeft: het punt $t\underline{x}$ doorloopt het lijnsegment $[\underline{0}, \underline{x}]$ en dit ligt geheel binnen R .

1.7.7. De magnetische inductie \underline{B} tengevolge van een stroom met sterkte I door een oneindig lange draad langs de z -as is gegeven in 1.3.6. Bepaal een vectorpotentialiaal van \underline{B} .

1.7.8. De elektrische veldsterkte \underline{E} tengevolge van een lading q in de oorsprong is gegeven in 1.3.24. Bewijs dat

$$\iint_S (\underline{E}, \underline{n}) d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$$

voor elk gesloten oppervlak S om de oorsprong, met naar buiten gerichte normaal \underline{n} .

1.7.9. De elektrische veldsterkte \underline{E} tengevolge van een dipool in de oorsprong met dipoolmoment p gericht langs de z -as is gegeven in 1.1.4. Bepaal een vectorpotentialiaal van \underline{E} .

1.7.10. De elektrische veldsterkte \underline{E} tengevolge van een lading q in de oorsprong is gegeven in 1.3.24. Bepaal een vectorpotentialiaal van \underline{E} in het gebied gevormd door \mathbb{R}^3 minus de positieve z -as (dit gebied is 2-samentrekbaar).

1.7.11. Zij S een oppervlak in \mathbb{R}^3 met rand K . De normaal \underline{n} op S en de eenheidsraakvector \underline{t} aan K worden bij elkaar passend gekozen. Herleid de oppervlakte-integralen

$$\iint_S \underline{n} d\sigma \text{ en } \iint_S (\underline{x} \times \underline{n}) d\sigma$$

tot lijnintegralen langs K .

1.8.1. Bepaal een vectorveld \underline{v} in \mathbb{R}^3 uit zijn rotatie en divergentie in de volgende gevallen:

a) $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}, \text{div } \underline{v} = 1 ;$

b) $\text{rot } \underline{v} = (1, 1, 1), \text{div } \underline{v} = 0 ;$

c) $\text{rot } \underline{v} = (y - z, z - x, x - y), \text{div } \underline{v} = z ;$

d) $\text{rot } \underline{v} = (x^2z - 2xyz, xy^2 - 2xyz, yz^2 - 2xyz), \text{div } \underline{v} = x^2y + y^2z + xz^2 .$

1.8.2. Zij $\underline{v} = (xy + z^2, yz + x^2, xz + y^2)$.

Bepaal een scalarveld ϕ en een vectorveld \underline{w} zodanig dat

$$\underline{v} = \text{grad } \phi + \text{rot } \underline{w}, \text{div } \underline{w} = 0 .$$

1.9.1. Voer in coördinaten (u,v) in \mathbb{R}^2 die met de cartesische coördinaten (x,y) samenhangen volgens

$$\begin{cases} x = \cosh u \cos v, \\ y = \sinh u \sin v, \end{cases} \quad u \geq 0, 0 \leq v < 2\pi.$$

De coördinaten (u,v) heten elliptische coördinaten. (Aangevuld met de cartesische coördinaat z heten (u,v,z) elliptische-cylindercoördinaten in \mathbb{R}^3 .) Onderzoek de coördinaatkrommen $u = \text{constant}$, $v = \text{constant}$. Toon aan dat het coördinatenstelsel orthogonaal is en bepaal de schaalfactoren. Druk de Laplace operator uit in elliptische coördinaten.

1.9.2. Voer in coördinaten (u,v,z) in \mathbb{R}^3 die met de cartesische coördinaten (x,y,z) samenhangen volgens

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \\ y = uv, \\ z = z, \end{cases} \quad -\infty < u < \infty, v \geq 0, -\infty < z < \infty.$$

De coördinaten (u,v,z) heten parabolische-cylindercoördinaten. Onderzoek de coördinaatoppervlakken $u = \text{constant}$, $v = \text{constant}$. Toon aan dat het coördinatenstelsel rechts orthogonaal is en bepaal de schaalfactoren. Druk de vectoroperaties grad, div en rot, en de Laplace operator uit in parabolische-cylindercoördinaten.

1.9.3. Voer in coördinaten (ξ,η,φ) in \mathbb{R}^3 die met de cartesische coördinaten (x,y,z) samenhangen volgens

$$\begin{cases} x = \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, \\ y = \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi, \\ z = \xi\eta, \end{cases} \quad \xi \geq 0, -1 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

De coördinaten (ξ,η,φ) heten oblate sferoïdale coördinaten. Onderzoek de coördinaatoppervlakken $\xi = \text{constant}$, $\eta = \text{constant}$, $\varphi = \text{constant}$. Toon aan dat het coördinatenstelsel orthogonaal is en bepaal de schaalfactoren. Druk de vectoroperaties grad, div en rot, en de Laplace operator uit in oblate sferoïdale coördinaten.

- 1.9.4. De geleidende cirkelvormige schijf $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$ is geladen en op de (electrische) potentiaal $V = 1$ gebracht. De potentiaal $V(x,y,z)$ dient verder te voldoen aan

$$\Delta V = 0 \text{ buiten de schijf ,}$$

$$V(x,y,z) \rightarrow 0 \text{ als } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty .$$

Formuleer het probleem voor V in oblate sferoïdale coördinaten (ξ, η, φ) (zie 1.9.3). Bepaal de potentiaal V en de ladingsdichtheid $\sigma = -2\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial z}(x,y,0^+)$ op de schijf (ϵ_0 is de permittiviteit van vacuum).

Aanwijzing: Zoek een oplossing V die alleen van ξ afhangt.

- 1.9.5. Zij gegeven het vectorveld $\underline{v} = (z, -2x, y)$ uitgedrukt in cartesische coördinaten. Druk \underline{v} uit in a) cylindercoördinaten (r, φ, z) , b) bolcoördinaten (ρ, θ, φ) .
- 1.9.6. De baan van een deeltje wordt in cylindercoördinaten gegeven door de parametervoorstelling $\underline{x}(t) = (r(t), \varphi(t), z(t))$ met de tijd t als parameter. Bepaal de snelheid \underline{v} en de versnelling \underline{a} van het deeltje in cylindercoördinaten.
- 1.9.7. Bepaal de in 1.7.7 gevraagde vectorpotentiaal van \underline{B} door een berekening in cylindercoördinaten.
- 1.9.8. Bepaal de in 1.7.10 gevraagde vectorpotentiaal van \underline{E} door een berekening in bolcoördinaten.

Hoofdstuk 2. Partiële differentiaalvergelijkingen

- 2.1.1. De transversale trilling van een homogene snaar wordt beschreven door de één-dimensionale golfvergelijking

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = - \frac{q(x,t)}{T}, \quad c = \sqrt{T/\rho}.$$

Hierin is $u(x,t)$ de transversale uitwijking van de snaar ter plaatse x en ten tijde t , T is de spanning in de snaar, ρ is de massa per lengte-eenheid, en $q(x,t)$ is de uitwendige kracht per lengte-eenheid werkend op de snaar. Leid deze vergelijking af.

- 2.1.2. Een buigzame homogene ketting met lengte ℓ is opgehangen in één der uiteinden en voert kleine slingeringen uit om zijn verticale evenwichtsstand. Laat deze evenwichtsstand samenvallen met het segment $[0, \ell]$ van de x -as, waarbij het ophangpunt correspondeert met $x = \ell$. De horizontale uitwijking van de ketting ter plaatse x en ten tijde t wordt aangegeven door $u(x,t)$. Leid af de partiële differentiaalvergelijking voor de slingerbeweging

$$xu_{xx} + u_x - \frac{1}{g} u_{tt} = 0,$$

waarin g de versnelling van de zwaartekracht is. Geef ook begin- en randvoorwaarden voor $u(x,t)$.

- 2.1.3. De longitudinale trilling van een homogene elastische staaf wordt beschreven door de één-dimensionale golfvergelijking

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, \quad c = \sqrt{E/\rho}.$$

Hierin is $u(x,t)$ de longitudinale verplaatsing van de staaf ter plaatse x en ten tijde t , E is de elasticiteitsmodulus, en ρ is de massa per lengte-eenheid. Leid deze vergelijking af.

- 2.1.4. De warmtegeleiding in een homogeen lichaam in \mathbb{R}^3 wordt beschreven door de warmtegeleidingsvergelijking

$$\Delta T - \frac{c\rho}{k} T_t = - \frac{Q(\underline{x}, t)}{k}.$$

Hierin is $T(\underline{x}, t)$ de temperatuur ter plaatse \underline{x} en ten tijde t , k is de warmtegeleidingscoëfficiënt, ρ is de massadichtheid, c is de soortelijke warmte, en

$Q(\underline{x},t)$ is de dichtheid van de warmtebronnen in het lichaam.

Leid deze vergelijking af.

2.1.5. De warmtegeleiding in een drie-dimensionaal medium dat beweegt met constante snelheid \underline{v} , wordt beschreven door de vergelijking

$$\Delta T - \frac{c\rho}{k} (\underline{v}, \text{grad } T) = \frac{c\rho}{k} T_t .$$

De betekenis van $T(\underline{x},t)$, k , ρ en c is dezelfde als in 2.1.4.

Leid deze vergelijking af.

2.1.6. De statische doorbuiging van een membraan onder invloed van een uitwendige belasting wordt beschreven door de Poisson vergelijking

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = - \frac{q(x,y)}{T} .$$

Hierin is $u(x,y)$ de uitwijking van het membraan ter plaatse (x,y) , T is de spanning in het membraan (= kracht per lengte-eenheid), en $q(x,y)$ is de uitwendige kracht per oppervlakte-eenheid werkend op het membraan.

Leid deze vergelijking af.

2.2.1. De transversale trilling van een snaar wordt beschreven door

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} \frac{hx}{a} & \text{voor } 0 \leq x \leq a, \\ \frac{h(l-x)}{l-a} & \text{voor } a \leq x \leq l, \end{cases} \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \end{array} \right.$$

Bepaal $u(x,t)$ met de methode van separatie van variabelen.

2.2.2. De trilling van een tussen $x = 0$ en $x = l$ gespannen snaar wordt beschreven door de golfvergelijking

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 .$$

Het uiteinde $x = 0$ van de snaar is vast, terwijl het uiteinde $x = l$ vrij zal zijn:

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0 .$$

Op het tijdstip $t = 0$ worden de uitwijking en de snelheid van de snaar gegeven door

$$u(x,0) = 1 - \cos \frac{\pi x}{l}, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Bepaal $u(x,t)$ met de methode van separatie van variabelen.

Bepaal ook de tijdstippen T_j , $j = 1, 2, 3, \dots$, waarop $u(x, T_j) = 0$ langs de hele snaar.

2.2.3. Bepaal de oplossing $u(x,t)$ van het trillingsprobleem

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0, & -1 < x < 1, t > 0, \\ u(-1,t) = 0, u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \delta(x), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

De beginvoorwaarde $u_t(x,0) = \delta(x)$ correspondeert met een impuls 1 ter plaats $x = 0$. Vervang eventueel deze beginvoorwaarde door

$$u_t(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{voor } |x| \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{voor } \varepsilon < |x| \leq 1, \end{cases}$$

en neem in de bijbehorende oplossing $u(x,t)$ de limiet voor $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.2.4. De transversale trilling van een rechthoekig membraan wordt beschreven door

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0, & 0 \leq x \leq a, t \geq 0, \\ u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0, & 0 \leq y \leq b, t \geq 0, \\ u(x,y,0) = xy(a-x)(b-y), & u_t(x,y,0) = 0, 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b. \end{cases}$$

Bepaal $u(x,y,t)$ met de methode van separatie van variabelen.

2.2.5. Bepaal de oplossing $u(x,t)$ van het trillingsprobleem

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(1,t) = \sin \omega t, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

waarbij $\omega > 0$, $\omega \neq m\pi$, $m = 1, 2, 3, \dots$.

Met welk fysisch verschijnsel corresponderen de waarden $\omega = m\pi$, $m = 1, 2, 3, \dots$?
Bepaal $u(x, t)$ in geval $\omega = m\pi$ door een limietovergang $\omega \rightarrow m\pi$ in de voorgaande oplossing.

- 2.2.6. De transversale trilling van een snaar onder invloed van een constante belasting q wordt beschreven door

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -\frac{q}{T}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Bepaal $u(x, t)$ door (i) aftrekking van een geschikte particuliere oplossing zodat het probleem homogeen wordt, (ii) ontwikkeling naar de eigenfuncties van het homogene probleem.

- 2.2.7. Een snaar met vaste uiteinden $x = 0$ en $x = \pi$ trilt onder invloed van een geconcentreerde kracht $A \sin \omega t$, $\omega > 0$, aangrijpend in $x = a$ met $0 < a < \pi$. Op het tijdstip $t = 0$ is de snaar in rust. De uitwijking $u(x, t)$ van de snaar voldoet dan aan

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = -A\delta(x - a)\sin \omega t, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

waarin de voortplantingssnelheid $c = 1$ gesteld is.

Bepaal $u(x, t)$ door ontwikkeling naar de eigenfuncties van het homogene probleem.

- 2.2.8. De temperatuurverdeling $T(x, t)$ in een staaf langs de x -as voldoet aan de warmtegeleidingsvergelijking

$$T_{xx} = \frac{1}{\kappa} T_t.$$

De uiteinden $x = 0$ en $x = l$ van de staaf worden op de temperatuur 0 gehouden:

$$T(0, t) = 0, T(l, t) = 0, t \geq 0,$$

terwijl de begintemperatuur van de staaf gegeven is:

$$T(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell .$$

- a) Bepaal $T(x,t)$ met de methode van separatie van variabelen.
Schrijf $T(x,t)$ in de vorm

$$T(x,t) = \int_0^{\ell} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$$

en bepaal de Greense functie $G(x,\xi,t)$.

- b) Bepaal $T(x,t)$ in geval $\varphi(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{\ell}$.

- 2.2.9. Geef de oplossing van 2.2.8b), indien de uiteinden $x = 0$ en $x = \ell$ van de staaf geïsoleerd zijn:

$$T_x(0,t) = 0, \quad T_x(\ell,t) = 0, \quad t \geq 0 .$$

Bepaal de stationaire temperatuurverdeling, d.i. $\lim_{t \rightarrow \infty} T(x,t)$.

Bepaal deze limiet ook rechtstreeks, dus zonder oplossing van het warmtegeleidingsprobleem.

- 2.2.10. Bepaal de oplossing $u(x,t)$ van het warmtegeleidingsprobleem

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0, & -1 < x < 1, t > 0, \\ u(-1,t) = 0, u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 1, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- 2.2.11. Een massieve bol met straal a bevindt zich op de constante begintemperatuur T_0 . Vanaf het tijdstip $t = 0$ wordt het uitwendig oppervlak van de bol gekoeld op de temperatuur 0. Op symmetriegronden zal de temperatuur T in de bol slechts afhangen van de afstand r tot het middelpunt en van de tijd t : $T = T(r,t)$. De functie $T(r,t)$ voldoet dan aan

$$\begin{cases} \Delta T = T_{rr} + \frac{2}{r} T_r = \frac{1}{\kappa} T_t, & 0 \leq r < a, t > 0, \\ T(a,t) = 0, & t > 0, \\ T(r,0) = T_0, & 0 \leq r \leq a. \end{cases}$$

Bepaal $T(r,t)$ en in het bijzonder $T(0,t)$.

Aanwijzing: Voer in $u(r,t) := rT(r,t)$ en laat zien dat $u(r,t)$ voldoet aan de één-dimensionale warmtegeleidingsvergelijking. Bepaal dan $u(r,t)$ met de methode van separatie van variabelen.

2.2.12. a) Bepaal de oplossing $u(x,t)$ van het warmtegeleidingsprobleem

$$\begin{cases} u_{xx} + \alpha u = u_t, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Hierbij is de term αu ($\alpha > 0$) in de warmtegeleidingsvergelijking te interpreteren als een warmteproductie tengevolge van een chemische reactie die bij hogere temperatuur sneller verloopt.

b) Het voorgaande warmtegeleidingsproces heet stabiel als voor iedere continue beginfunctie $\varphi(x)$ de bijbehorende oplossing $u(x,t)$ begrensd blijft, anders labiel. Bewijs dat het proces stabiel is voor $\alpha \leq \pi^2$ en labiel voor $\alpha > \pi^2$.

2.2.13. Een staaf met lengte l wordt verwarmd door een constante warmtestroom q in het uiteinde $x = 0$, terwijl het uiteinde $x = l$ op de temperatuur 0 wordt gehouden. Op het tijdstip $t = 0$ heeft de staaf de begintemperatuur 0 . Bepaal de temperatuur $T(x,t)$ in de staaf door oplossing van het probleem

$$\begin{cases} T_{xx} - \frac{1}{k} T_t = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ T_x(0,t) = -q/k, T(l,t) = 0, & t > 0, \\ T(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Bepaal tevens de stationaire temperatuurverdeling.

2.2.14. De temperatuurverdeling $T(x,t)$ in een staaf met lengte l voldoet aan de warmtegeleidingsvergelijking

$$T_{xx} = T_t + \mu T, \quad 0 < x < l, t > 0,$$

waarin μ een positieve constante is. De term μT in de vergelijking is te interpreteren als een warmteverlies tengevolge van uitstraling door het zijoppervlak van de staaf.

De rand- en beginvoorwaarden worden gegeven door

$$\begin{aligned} T(0,t) = 0, T(l,t) = 1, & t > 0, \\ T(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Bepaal eerst de stationaire temperatuurverdeling $T_1(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} T(x,t)$ en vervolgens $T(x,t)$.

2.2.15. De warmtegeleiding in een staaf wordt beschreven door

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = -Q, & -1 < x < 1, t > 0, \\ u(-1,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

De term Q in de warmtegeleidingsvergelijking correspondeert met een (constante) warmte-ontwikkeling in de staaf, veroorzaakt door bijv. een elektrische stroom.

Bepaal $u(x,t)$ door (i) aftrekking van een geschikte particuliere oplossing zodat het probleem homogeen wordt, (ii) ontwikkeling naar de eigenfuncties van het homogene probleem.

2.2.16. De stationaire temperatuurverdeling $T(x,y)$ in een dunne rechthoekige plaat voldoet aan

$$\begin{cases} \Delta T = T_{xx} + T_{yy} = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 2, \\ T(x,0) = \sin \pi x, T(x,2) = x(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ T(0,y) = 0, T(1,y) = 0, & 0 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

Bepaal $T(x,y)$ met de methode van separatie van variabelen.

2.2.17. Een rechthoekige plaat, gegeven door $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, wordt langs de zijde $x = a$, $0 \leq y \leq b$ verwarmd door een constante warmtestroom q . De tegenoverliggende zijde $x = 0$, $0 \leq y \leq b$ is geïsoleerd, terwijl de overige twee zijden op de temperatuur 0 worden gehouden. De stationaire temperatuurverdeling $T(x,y)$ in de plaat voldoet dan aan

$$\begin{cases} \Delta T = T_{xx} + T_{yy} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b, \\ T(x,0) = 0, T(x,b) = 0, & 0 \leq x \leq a, \\ T_x(0,y) = 0, T_x(a,y) = q/k, & 0 \leq y \leq b. \end{cases}$$

Bepaal $T(x,y)$ met de methode van separatie van variabelen.

2.2.18. Geef de oplossing van 2.2.17 met de randvoorwaarden vervangen door

$$\begin{cases} T_y(x,0) = 0, T_y(x,b) = 0, & 0 \leq x \leq a, \\ T(0,y) = 0, T_x(a,y) = q/k, & 0 \leq y \leq b. \end{cases}$$

2.2.19. Door een geleidende vierkante plaat, gegeven door $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, vloeit een elektrische stroom met sterkte J . De stroom wordt toegevoerd via een electrode in het punt $x = -1$, $y = 0$, en afgevoerd via een electrode in het punt $x = 1$, $y = 0$. Voor de stroomdichtheid $\underline{j} = (j_x, j_y)$ in de plaat geldt $\underline{j} = -\sigma \text{ grad } \varphi$, waarin σ het elektrisch geleidingsvermogen en φ de elektrische potentiaal is. De potentiaal φ voldoet dan aan

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, & -1 < x < 1, -1 < y < 1, \\ \varphi_y(x, -1) = 0, \varphi_y(x, 1) = 0, & -1 \leq x \leq 1, \\ \varphi_x(-1, y) = -\frac{J}{\sigma} \delta(y), \varphi_x(1, y) = -\frac{J}{\sigma} \delta(y), & -1 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Bepaal $\varphi(x, y)$ en $\underline{j} = (j_x, j_y)$.

Vervang eventueel de randvoorwaarden $\varphi_x(\pm 1, y) = -(J/\sigma)\delta(y)$ door

$$\varphi_x(\pm 1, y) = \begin{cases} -\frac{J}{2\sigma\epsilon} & \text{voor } |y| \leq \epsilon, \\ 0 & \text{voor } \epsilon < |y| \leq 1, \end{cases}$$

en neem in de bijbehorende oplossing $\varphi(x, y)$ de limiet voor $\epsilon \rightarrow 0$.

2.2.20. Van het vierkante gebied $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$, wordt de rand rechts van de y -as op de elektrische potentiaal V gebracht en links van de y -as op de potentiaal $-V$. Bepaal de potentiaal $u(x, y)$ in het gebied door oplossing van het probleem

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, & -1 < x < 1, -1 < y < 1, \\ u(x, -1) = u(x, 1) = \begin{cases} -V & \text{voor } -1 \leq x < 0, \\ V & \text{voor } 0 < x \leq 1, \end{cases} \\ u(-1, y) = -V, u(1, y) = V, & -1 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

2.2.21. Bepaal de oplossing $u(x, y)$ van het potentiaalprobleem

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, y > 0, \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, y) = 0, u(\pi, y) = 0, & y \geq 0, \\ u(x, y) \text{ is begrensd voor } & 0 \leq x \leq \pi, y \geq 0. \end{cases}$$

Laat door een tegenvoorbeeld zien dat de begrensdevoorwaarde nodig is voor de eenduidigheid van de oplossing.

2.2.22. De stationaire temperatuurverdeling $T(r, \varphi)$ in een cirkelvormige plaat, in poolcoördinaten gegeven door $0 \leq r \leq 1$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, voldoet aan de Laplace vergelijking

$$\Delta T = T_{rr} + \frac{1}{r} T_r + \frac{1}{r^2} T_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

en aan de randvoorwaarde

$$T(1, \varphi) = \begin{cases} 0 & \text{voor } -\pi < \varphi < 0, \\ 1 & \text{voor } 0 < \varphi < \pi. \end{cases}$$

Bepaal $T(r, \varphi)$ met de methode van separatie van variabelen.

2.2.23. Bepaal de oplossing $u(r, \varphi)$ van het Neumann probleem voor de Laplace vergelijking in een cirkelvormig gebied:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(1, \varphi) = u_r(1, \varphi) = h(\varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \end{cases}$$

waarin $h(\varphi)$ een gegeven functie is met $\int_{-\pi}^{\pi} h(\varphi) d\varphi = 0$.

Herleid de oplossing tot een integraalvoorstelling voor $u(r, \varphi)$.

2.2.24. Een diëlectrische cylinder gegeven door $x^2 + y^2 \leq a^2$, is geplaatst in een homogeen elektrisch veld met veldsterkte E_0 evenwijdig aan de x -as. De elektrische veldsterkte in aanwezigheid van de cylinder is voor te stellen door $\underline{E} = -\text{grad } V$, waarin V de elektrische potentiaal is. Stel $V = V_1(x, y)$ binnen de cylinder, en $V = -E_0 x + V_2(x, y)$ buiten de cylinder ($-E_0 x$ is de potentiaal van het homogene elektrische veld). De potentialen V_1 en V_2 voldoen dan aan

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0 \text{ binnen de cylinder,} \\ \Delta V_2 &= 0 \text{ buiten de cylinder,} \\ V_2 &\text{ is begrensd buiten de cylinder.} \end{aligned}$$

Op het cylinderoppervlak $x^2 + y^2 = a^2$ gelden de aansluitvoorwaarden

$$V_1 = -E_0 x + V_2, \quad \epsilon \frac{\partial V_1}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} [-E_0 x + V_2],$$

waarin ϵ de diëlectrische constante van de cylinder is en \underline{n} de normaal op het cylinderoppervlak.

Formuleer het probleem in poolcoördinaten r, φ , en bepaal V_1 en V_2 . Laat zien dat het elektrisch veld binnen de cylinder homogeen is.

2.2.25. Een cirkelvormige schijf wordt langs de rand $r = 1$ op de temperatuur 1 gehouden. Langs de voerstraal $\varphi = 0$ is de schijf gekoeld op de temperatuur 0. Bepaal de stationaire temperatuurverdeling $T(r, \varphi)$ in de schijf door oplossing van het probleem

$$\begin{cases} \Delta T = T_{rr} + \frac{1}{r} T_r + \frac{1}{r^2} T_{\varphi\varphi} = 0, & 0 < r < 1, 0 < \varphi < 2\pi, \\ T(r, 0) = T(r, 2\pi) = 0, & 0 \leq r < 1, \\ T(1, \varphi) = 1, & 0 < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

2.2.26. Bepaal de oplossing $u(r, \varphi)$ van het potentiaalprobleem

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, & 1 < r < 2, -\pi \leq \varphi \leq \pi, \\ u(1, \varphi) = |\varphi|, u(2, \varphi) = 0, & -\pi \leq \varphi \leq \pi. \end{cases}$$

2.2.27. Bepaal de oplossing $T(r, \varphi)$ van het volgende warmtegeleidingsprobleem voor een half-cirkelvormige schijf:

$$\begin{cases} \Delta T = T_{rr} + \frac{1}{r} T_r + \frac{1}{r^2} T_{\varphi\varphi} = 0, & 0 < r < 1, 0 < \varphi < \pi, \\ T(r, 0) = T(r, \pi) = 0, & 0 \leq r \leq 1, \\ T(1, \varphi) = \varphi(\pi - \varphi), & 0 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases}$$

2.2.28. Een half-cirkelvormige schijf, in poolcoördinaten gegeven door $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, wordt langs de rand $r = 1$ op de temperatuur 0 gehouden. Langs het rechte gedeelte van de rand ($\varphi = 0$ en $\varphi = \pi$) wordt de schijf verwarmd door een constante warmtestroom q . De stationaire temperatuurverdeling $T(r, \varphi)$ in de schijf voldoet dan aan

$$\begin{cases} \Delta T = T_{rr} + \frac{1}{r} T_r + \frac{1}{r^2} T_{\varphi\varphi} = 0, & 0 < r < 1, 0 < \varphi < \pi, \\ T(1, \varphi) = 0, & 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ \frac{\partial T}{\partial n}(r, 0) = \frac{\partial T}{\partial n}(r, \pi) = \frac{q}{k}, & 0 \leq r \leq 1, \end{cases}$$

waarin \underline{n} de naar buiten gerichte normaal op het rechte randgedeelte is. Bepaal $T(r, \varphi)$. Sommer de gevonden reeks in de gevallen $\varphi = 0$ en $\varphi = \pi$, en bepaal $T(r, 0)$, $T(r, \pi)$.

Aanwijzing: Trek eerst een geschikte particuliere oplossing af, zodat de randvoorwaarden langs $\varphi = 0$ en $\varphi = \pi$ homogeen worden.

2.2.29. De statische doorbuiging van een half-cirkelvormig membraan met vaste rand onder invloed van een constante belasting q wordt beschreven door

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = -\frac{\bar{q}}{T}, & 0 < r < a, 0 < \varphi < \pi, \\ u(r,0) = u(r,\pi) = 0, & 0 \leq r \leq a, \\ u(a,\varphi) = 0, & 0 \leq \varphi \leq \pi, \end{cases}$$

waarin T de spanning in het membraan is.

Bepaal de uitwijking $u(r,\varphi)$.

2.2.30. Bepaal de eigentrillingen en de eigenfrequenties van een rechthoekig membraan $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, waarvan de rand langs drie zijden vast en langs één zijde vrij is. De uitwijking $u(x,y,t)$ voldoet aan de twee-dimensionale golfvergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, \quad 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0,$$

en aan de randvoorwaarden

$$\begin{cases} u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0, & 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0, \\ u(0,y,t) = 0, u_x(a,y,t) = 0, & 0 \leq y \leq b, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

2.2.31. De geluidstrilling in een kubusvormige trilholtte $0 < x < a$, $0 < y < a$, $0 < z < a$, wordt beschreven door een functie $u(x,y,z,t)$ die voldoet aan de drie-dimensionale golfvergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0,$$

en aan de randvoorwaarde

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

op het oppervlak van de trilholtte, waarbij \underline{n} de normaal op het oppervlak is. Bepaal de eigentrillingen en de eigenfrequenties van de trilholtte.

2.3.1. Bepaal de oplossing $u(x,t)$ van de golfvergelijking

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

onder de volgende beginvoorwaarden:

a)
$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{voor } |x| < a, \\ 0 & \text{voor } |x| > a, \end{cases} \quad u_t(x,0) = 0, \quad -\infty < x < \infty;$$

b)
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 2c\delta(x), \quad -\infty < x < \infty;$$

c)
$$u(x,0) = \begin{cases} \cos x & \text{voor } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{voor } |x| > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad u_t(x,0) = \begin{cases} c \sin x & \text{voor } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{voor } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Geef een grafische voorstelling van de oplossingen.

2.3.2. Bepaal de oplossing $u(x,t)$ van het volgende gemengde probleem voor de golfvergelijking op $(0, \infty)$:

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Het probleem beschrijft de trilling van een half-oneindige snaar met vrij uiteinde $x = 0$, waarbij de beginuitwijking en de beginsnelheid op het tijdstip $t = 0$ zijn voorgeschreven.

2.3.3. Bepaal de oplossing $u(x,t)$ van de golfvergelijking

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

onder de randvoorwaarde

$$u(0,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

en de volgende beginvoorwaarden:

a)
$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{voor } 1 < x < 3, \\ 0 & \text{voor } 0 \leq x < 1 \text{ en voor } x > 3, \end{cases} \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \geq 0;$$

b)
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \delta(x - 1), \quad x \geq 0.$$

Geef een grafische voorstelling van de oplossingen.

2.3.4. De trilling van een half-oneindige snaar wordt beschreven door

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & x \geq 0, u_t(x,0) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{voor } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{voor } x > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Bepaal $u(0,t)$.

2.3.5. Bepaal de oplossing $u(r,t)$ van het beginwaardeprobleem voor de bolsymmetrische golfvergelijking:

$$\begin{cases} \Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & r \geq 0, t > 0, \\ u(r,0) = \varphi(r), & u_t(r,0) = \psi(r), & r \geq 0; \end{cases}$$

hierin is r de afstand tot de oorsprong.

Bepaal in het bijzonder $u(0,t)$.

Aanwijzing: Voer in $w(r,t) := ru(r,t)$ en laat zien dat $w(r,t)$ voldoet aan de één-dimensionale golfvergelijking op het interval $0 < r < \infty$.

2.3.6. De trilling van een half-oneindige snaar wordt beschreven door de golfvergelijking

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, \quad x > 0, t > 0.$$

Het uiteinde $x = 0$ van de snaar wordt op en neer bewogen volgens

$$u(0,t) = \sin \omega t, \quad t \geq 0.$$

Op het tijdstip $t = 0$ zal de snaar in rust zijn:

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \geq 0.$$

Bepaal de uitwijking $u(x,t)$ en interpreteer de uitkomst.

Aanwijzing: Trek eerst een geschikte particuliere oplossing af, zodat de randvoorwaarde in $x = 0$ homogeen wordt.

2.3.7. De temperatuurverdeling $T(x,t)$ in een oneindige staaf voldoet aan de warmtegeleidingsvergelijking

$$T_{xx} = \frac{1}{\kappa} T_t, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

en aan de beginvoorwaarde

$$T(x,0) = e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Bepaal $T(x,t)$ in de vorm van een Fourier integraal.

2.3.8. Bepaal de oplossing $T(x,t)$ van de warmtegeleidingsvergelijking

$$T_{xx} = T_t, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

onder de volgende beginvoorwaarden:

a) $T(x,0) = e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty;$

b) $T(x,0) = \begin{cases} T_1 & \text{voor } x < 0, \\ T_2 & \text{voor } x > 0. \end{cases}$

Bepaal in geval b) tevens de warmtestroom $T_x(0,t)$.

2.3.9. Bepaal de oplossing $u(x,t)$ van het volgende gemengde probleem voor de diffusievergelijking op $(0,\infty)$:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0. \end{cases}$$

Het probleem beschrijft bijv. de warmtegeleiding in een half-oneindige staaf waarbij het uiteinde $x = 0$ geïsoleerd is en de begintemperatuur op het tijdstip $t = 0$ is voorgeschreven.

2.3.10. Bepaal de oplossing $T(x,t)$ van de warmtegeleidingsvergelijking

$$T_{xx} - T_t = 0, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

onder de beginvoorwaarde

$$T(x,0) = \begin{cases} T_0 & \text{voor } 0 < x < a, \\ 0 & \text{voor } x > a, \end{cases}$$

en de volgende randvoorwaarden:

$$\text{a) } T(0,t) = 0, t \geq 0; \quad \text{b) } T_x(0,t) = 0, t \geq 0 .$$

2.3.11. Op het tijdstip $t = 0$ bevindt zich binnen een bolvolume B met straal a een hoeveelheid gas met constante concentratie C_0 . Bij de daaropvolgende diffusie van het gas in de gehele ruimte zal de concentratie C slechts afhangen van de afstand r tot het middelpunt van B en van de tijd t : $C = C(r,t)$. De concentratie $C(r,t)$ voldoet dan aan de bolsymmetrische diffusievergelijking

$$\Delta C = C_{rr} + \frac{2}{r} C_r = C_t, \quad r \geq 0, \quad t > 0 ,$$

en aan de beginvoorwaarde

$$C(r,0) = \begin{cases} C_0 & \text{voor } 0 \leq r < a , \\ 0 & \text{voor } r > a . \end{cases}$$

Bepaal $C(r,t)$ en in het bijzonder $C(0,t)$.

Aanwijzing: Voer in $u(r,t) := rC(r,t)$ en laat zien dat $u(r,t)$ voldoet aan de één-dimensionale diffusievergelijking op het interval $0 < r < \infty$.

2.3.12. De temperatuurverdeling $T(x,t)$ in een half-oneindige staaf voldoet aan de warmtegeleidingsvergelijking

$$T_{xx} - T_t = 0, \quad x > 0, \quad t > 0 ,$$

en aan de beginvoorwaarde

$$T(x,0) = 0, \quad x \geq 0 .$$

Vanaf het tijdstip $t = 0$ wordt het uiteinde $x = 0$ van de staaf op de temperatuur T_0 gebracht, resp. wordt in het uiteinde $x = 0$ een constante warmtestroom q toegevoerd:

$$\text{a) } T(0,t) = T_0, \quad t > 0; \quad \text{b) } T_x(0,t) = -q, \quad t > 0 .$$

Bepaal $T(x,t)$ in de twee gevallen.

Aanwijzing: Trek eerst een geschikte particuliere oplossing af, zodat de randvoorwaarde in $x = 0$ homogeen wordt.

2.4.1. Laat $u(x)$ en $v(x)$ harmonische functies zijn met $u(x)$ niet constant, en zij $v = F(u)$. Bewijs dat F een lineaire functie is.

2.4.2. Formuleer en bewijs de eerste en tweede identiteit van Green voor een begrensde gebied G in \mathbb{R}^2 met randkromme K .

2.4.3. Laat R een begrensde gebied in \mathbb{R}^3 zijn met randoppervlak S ; \underline{n} is de naar buiten gerichte normaal op S .

a) Zij de functie $u(\underline{x})$ harmonisch in R en zij $\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0$ op S waarbij $h > 0$.
Bewijs dan dat $u(\underline{x}) = 0$ in R .

b) Bewijs dat de oplossing $u(\underline{x})$ van het randwaardeprobleem

$$\Delta u = -f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in R, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(\underline{x}) + hu(\underline{x}) = g(\underline{x}), \quad \underline{x} \in S,$$

met $h > 0$, eenduidig is.

2.4.4. Laat R een begrensde en enkelvoudig samenhangend gebied in \mathbb{R}^3 zijn met randoppervlak S ; \underline{n} is de naar buiten gerichte normaal op S . In R zijn gegeven een functie $f(\underline{x})$ en een vectorveld $\underline{a}(\underline{x})$ met $\text{div } \underline{a} = 0$; op S is gegeven een functie $g(\underline{x})$.

Bewijs dat de oplossing $\underline{v}(\underline{x})$ van het probleem

$$\begin{cases} \text{div } \underline{v} = f \text{ in } R, \\ \text{rot } \underline{v} = \underline{a} \text{ in } R, \\ (\underline{v}, \underline{n}) = g \text{ op } S, \end{cases}$$

eenduidig is.

2.4.5. Zij gegeven het scalarveld

$$\psi = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}.$$

Bereken $\iint_S \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma$ over het boloppervlak $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9/4$, waarvan de normaal \underline{n} naar buiten gericht is.

2.4.6. Laat \underline{p} en \underline{q} twee vaste punten in \mathbb{R}^3 zijn en laat r_1 en r_2 de afstand voorstellen resp. van \underline{x} tot \underline{p} en van \underline{x} tot \underline{q} : $r_1 = |\underline{x} - \underline{p}|$, $r_2 = |\underline{x} - \underline{q}|$. Zij S een gesloten oppervlak met naar buiten gerichte normaal \underline{n} .

Bereken

$$\iint_S \left[\frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_2} \right) - \frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] d\sigma,$$

indien

- a) p en q beide buiten S liggen,
- b) p en q beide binnen S liggen,
- c) p binnen en q buiten S ligt.

2.4.7. Bereken de elektrische potentiaal van een oppervlaktelading met dichtheid 1 op het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2.4.8. In het bolvormige gebied $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ bevindt zich een ruimtelading met dichtheid 1. Bepaal de elektrische potentiaal V van deze ruimtelading door (i) berekening van de integraal voor V , (ii) oplossing van de Poisson vergelijking voor V .

- 2.4.9. a) Op de cirkelvormige schijf $S: x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0$, bevindt zich een oppervlaktelading met dichtheid 1. Bereken de potentiaal V op de z -as en onderzoek de continuïteit van V en $\partial V/\partial z$ in de oorsprong.
- b) Op de cirkelvormige schijf $S: x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0$, bevindt zich een dipoolbelegging met dipoolmomentdichtheid 1 gericht evenwijdig aan de positieve z -as. Bereken de potentiaal W op de z -as en onderzoek de continuïteit van W en $\partial W/\partial z$ in de oorsprong.

2.4.10. Bewijs de tweede middelwaarde-eigenschap van harmonische functies:

Zij $u(\underline{x})$ harmonisch in het bolvormige gebied R met middelpunt $\underline{\xi}$ en straal r , dan geldt

$$u(\underline{\xi}) = \frac{3}{4\pi r^3} \iiint_R u \, d\tau,$$

d.w.z. $u(\underline{\xi})$ is gelijk aan de gemiddelde waarde van u over R .

2.4.11. Formuleer en bewijs de derde identiteit van Green voor een begrensd gebied G in \mathbb{R}^2 met randkromme K .

2.4.12. Bewijs de middelwaarde-eigenschap voor harmonische functies van twee variabelen:

Zij $u(\underline{x}) = u(x,y)$ harmonisch binnen de cirkel C met middelpunt $\underline{\xi} = (\xi, \eta)$ en straal ρ , dan geldt

$$u(\underline{\xi}) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_C u \, ds ,$$

d.w.z. $u(\underline{\xi})$ is gelijk aan de gemiddelde waarde van u over C .

2.4.13. Definieer de Greense functie voor de Laplace vergelijking in een begrensd gebied G in \mathbb{R}^2 met randkromme K .

Bepaal met behulp van deze Greense functie de oplossing van het Dirichlet probleem

$$\Delta u = -f(\underline{x}), \underline{x} \in G; u(\underline{x}) = g(\underline{x}), \underline{x} \in K .$$

2.5.1. Zij G een begrensd gebied in \mathbb{R}^2 met randkromme K . Bewijs dat de oplossing $u(\underline{x}, t)$ van het gemengde probleem voor de twee-dimensionale golfvergelijking:

$$\begin{cases} \Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(\underline{x}, t), \underline{x} \in G, t > 0 , \\ u(\underline{x}, t) = g(\underline{x}, t), \underline{x} \in K, t \geq 0 , \\ u(\underline{x}, 0) = \varphi(\underline{x}), u_t(\underline{x}, 0) = \psi(\underline{x}), \underline{x} \in G , \end{cases}$$

eenduidig is.

2.5.2. Bewijs dat de oplossing $u(x, t)$ van het gemengde probleem voor de één-dimensionale warmtegeleidingsvergelijking:

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{\kappa} u_t = -f(x, t), 0 < x < \ell, t > 0 , \\ u(0, t) = g(t), u_x(\ell, t) = h(t), t \geq 0 , \\ u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq \ell , \end{cases}$$

eenduidig is.

2.5.3. Zij R een begrensd gebied in \mathbb{R}^3 met rand S ; \underline{n} is de naar buiten gerichte normaal op S . Bewijs dat het homogene gemengde probleem voor de warmtegeleidingsvergelijking:

$$\begin{cases} \Delta u - \frac{1}{\kappa} u_t = 0, \underline{x} \in R, t > 0 , \\ \frac{\partial u}{\partial \underline{n}}(\underline{x}, t) + hu(\underline{x}, t) = 0, \underline{x} \in S, t \geq 0 , \\ u(\underline{x}, 0) = 0, \underline{x} \in R , \end{cases}$$

waarin $h > 0$, enkel de oplossing $u(\underline{x}, t) = 0$ heeft.

Antwoorden

Hoofdstuk 1. Vector-analyse

1.1.1. $y^2 - x^2 = C_1$, $z = C_2$; hyperbolen in vlakken $z = \text{constant}$.

1.1.2. $x^2 + y^2 + z^2 = C_1$, $x + y + z = C_2$; cirkels met middelpunt op de rechte $x = y = z$, gelegen in vlakken loodrecht op deze rechte.

1.1.3. $x^2 + y^2 = C_1$, $z = C_2$; cirkels met middelpunt op de z-as, gelegen in vlakken loodrecht op de z-as.

1.1.4. In bolcoördinaten (r, θ, φ) heeft de veldsterkte \underline{E} componenten

$$\underline{E} = (E_r, E_\theta, E_\varphi) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3}, \frac{\sin \theta}{r^3}, 0 \right).$$

De raakvector aan een kromme $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ wordt gegeven door $\left(\frac{dr}{dt}, r \frac{d\theta}{dt}, r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \right)$, eveneens in bolcoördinaten.

Voor de veldlijnen volgt dan het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2\lambda \cos \theta}{r^3}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\lambda \sin \theta}{r^4}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

met oplossing: $r = C_1 \sin^2 \theta$, $\varphi = C_2$; zie figuur 1.30 van M. Alonso & E.J. Finn, Fundamentele Natuurkunde, deel 2, Elektromagnetisme.

1.1.6. Uit $\underline{a} \times \underline{v} = \underline{b}$ en $(\underline{a}, \underline{v}) = \alpha$ volgt

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{a} \times (\underline{a} \times \underline{v}) = (\underline{a}, \underline{v}) \underline{a} - (\underline{a}, \underline{a}) \underline{v} = \alpha \underline{a} - |\underline{a}|^2 \underline{v},$$

dus $\underline{v} = |\underline{a}|^{-2} (\alpha \underline{a} - \underline{a} \times \underline{b})$.

Deze oplossing voldoet inderdaad aan de vergelijkingen

$$(\underline{a}, \underline{v}) = |\underline{a}|^{-2} [\alpha (\underline{a}, \underline{a}) - (\underline{a}, \underline{a} \times \underline{b})] = \alpha - |\underline{a}|^{-2} (\underline{b}, \underline{a} \times \underline{a}) = \alpha,$$

$$\underline{a} \times \underline{v} = |\underline{a}|^{-2} [\alpha (\underline{a} \times \underline{a}) - \underline{a} \times (\underline{a} \times \underline{b})] = |\underline{a}|^{-2} [-(\underline{a}, \underline{b}) \underline{a} + (\underline{a}, \underline{a}) \underline{b}] = \underline{b}$$

mits $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$.

1.1.7. Differentieer $(\underline{x}, \underline{x}) = c^2$ naar t.

De raakvector aan een kromme op een bol staat loodrecht op de bijbehorende voerstraal.

- 1.1.8. (i) De lengte van $\underline{x}(t)$ is constant zodat uit 1.1.7 volgt $(\underline{x}, \frac{d\underline{x}}{dt}) = (\underline{x}, \underline{v}) = 0$. Ook de hoek tussen \underline{a} en \underline{x} is constant, dus $(\underline{a}, \underline{x})$ is constant, en na differentiëatie volgt $(\underline{a}, \underline{v}) = 0$. Uit $\underline{v} \perp \underline{x}$ en $\underline{v} \perp \underline{a}$ volgt $\underline{v} = \mu \underline{a} \times \underline{x}$ op elk tijdstip t (μ is een getal). Stel nu $\underline{\omega}(t) := \mu(t)\underline{a}$, dan is $\underline{v}(t) = \underline{\omega}(t) \times \underline{x}(t)$.
- (ii) Kies een tweede punt Q met plaatsvector $\underline{x}^*(t)$, dan is

$$\underline{v}^*(t) = \frac{d\underline{x}^*}{dt} = \underline{\omega}^*(t) \times \underline{x}^*(t), \quad \underline{\omega}^*(t) = \mu^*(t)\underline{a}.$$

De lengtes $|\underline{x}|$, $|\underline{x}^*|$ en de hoek tussen \underline{x} en \underline{x}^* zijn constant, dus $(\underline{x}, \underline{x}^*)$ is constant. Differentiatie naar t geeft $(\underline{v}, \underline{x}^*) + (\underline{x}, \underline{v}^*) = 0$ oftewel

$$0 = (\underline{\omega} \times \underline{x}, \underline{x}^*) + (\underline{x}, \underline{\omega}^* \times \underline{x}^*) = (\underline{\omega}, \underline{x} \times \underline{x}^*) + (\underline{\omega}^*, \underline{x}^* \times \underline{x}) = (\mu - \mu^*)(\underline{a}, \underline{x} \times \underline{x}^*).$$

Indien \underline{a} , \underline{x} en \underline{x}^* niet in één vlak liggen, is $(\underline{a}, \underline{x} \times \underline{x}^*) \neq 0$, en er volgt $\mu = \mu^*$, $\underline{\omega}(t) = \underline{\omega}^*(t)$. Indien \underline{a} , \underline{x} en \underline{x}^* wel in één vlak liggen, blijft dit zo tijdens de rotatie. Schrijf dan $\underline{x}^* = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{x}$, waarna door differentiëatie volgt

$$\underline{v}^* = \lambda_2 \underline{v} = \lambda_2 \underline{\omega} \times \underline{x} = \underline{\omega} \times (\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{x}) = \underline{\omega} \times \underline{x}^*.$$

- 1.1.9. (i) $\underline{v} = -\omega \underline{p} \sin \omega t + \omega \underline{q} \cos \omega t$.
 $\underline{x} \times \underline{v} = \omega \cos^2 \omega t (\underline{p} \times \underline{q}) - \omega \sin^2 \omega t (\underline{q} \times \underline{p}) = \omega (\underline{p} \times \underline{q})$ is constant;
 hierbij is te bedenken dat $\underline{p} \times \underline{p} = \underline{q} \times \underline{q} = \underline{0}$.
- (ii) $\underline{a} = -\omega^2 \underline{p} \cos \omega t - \omega^2 \underline{q} \sin \omega t = -\omega^2 \underline{x}$; $|\underline{a}| = \omega^2 |\underline{x}|$.

1.1.10. Met behulp van de bewegingsvergelijking $\underline{K} = m \underline{a} = m \frac{d\underline{v}}{dt}$ volgt

$$\frac{d}{dt}(\underline{x} \times m \underline{v}) = m \frac{d\underline{x}}{dt} \times \underline{v} + m \underline{x} \times \frac{d\underline{v}}{dt} = m \underline{v} \times \underline{v} + \underline{x} \times \underline{K} = \underline{x} \times \underline{K}.$$

1.2.1. a) $\text{grad } \varphi = (4x - 3y - 4z, -3x + 2y, -4x + 12z),$

b) $\text{grad } \varphi = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}, 1 \right),$

c) $\text{grad } \varphi = \left(-\frac{3xz}{r^5}, -\frac{3yz}{r^5}, \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{r^5} \right).$

1.2.2. -3.

1.2.3. $\underline{a} = (-2, -8, 4)$.

1.2.4. $7x - 3y + 8z = 26$.

1.2.5. $\frac{\pi}{3}$.

1.2.6. $\lambda(\underline{x}) = F'(|\underline{x}|)/|\underline{x}|$.

1.2.7. a) $\text{div } \underline{v} = 1, \text{rot } \underline{v} = (-1, 0, 0)$;

b) $\text{div } \underline{v} = x^2, \text{rot } \underline{v} = (-4yz, 2xz, -4xy)$;

c) $\text{div } \underline{v} = 0, \text{rot } \underline{v} = \underline{0}$.

1.2.8. $\text{grad } |\underline{x}|^\alpha = \alpha |\underline{x}|^{\alpha-2} \underline{x}, \text{div}(|\underline{x}|^\alpha \underline{x}) = (\alpha + 3) |\underline{x}|^\alpha,$
 $\text{rot}(|\underline{x}|^\alpha \underline{x}) = \underline{0}, \Delta |\underline{x}|^\alpha = \alpha(\alpha + 1) |\underline{x}|^{\alpha-2}.$

1.2.10. Neen; bijv. voor $\underline{v} = (z, x, y)$ is $\text{rot } \underline{v} = (1, 1, 1)$, en in het punt $(1, 0, 0)$ is dan $(\underline{v}, \text{rot } \underline{v}) = 1$.

1.2.11. $\text{div } \underline{v} = \text{div}(\varphi \text{ grad } \psi) = \varphi \text{ div grad } \psi + (\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi) = \varphi \Delta \psi + (\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi),$
 $\text{rot } \underline{v} = \text{rot}(\varphi \text{ grad } \psi) = \varphi \text{ rot grad } \psi + (\text{grad } \varphi) \times (\text{grad } \psi) = (\text{grad } \varphi) \times (\text{grad } \psi);$
 $(\underline{v}, \text{rot } \underline{v}) = \varphi (\text{grad } \psi, (\text{grad } \varphi) \times (\text{grad } \psi)) = 0.$

1.2.12. $\text{div}(r \text{ grad } \frac{1}{r}) = r \text{ div grad } \frac{1}{r} + (\text{grad } r, \text{grad } \frac{1}{r}) =$
 $= r \Delta(\frac{1}{r}) + (\frac{\underline{x}}{r}, -\frac{\underline{x}}{r^3}) = 0 - \frac{1}{r^4}(\underline{x}, \underline{x}) = -\frac{1}{r^2},$

$\text{rot}(r \text{ grad } \frac{1}{r}) = r \text{ rot grad } \frac{1}{r} + (\text{grad } r) \times (\text{grad } \frac{1}{r}) =$
 $= \underline{0} + \frac{\underline{x}}{r} \times (-\frac{\underline{x}}{r^3}) = -\frac{1}{r^4} \underline{x} \times \underline{x} = \underline{0}.$

1.2.13. $\Delta(\underline{v}, \underline{x}) = \text{div grad}(v_1 x + v_2 y + v_3 z) =$
 $= \text{div}(v_1 + x \frac{\partial v_1}{\partial x} + y \frac{\partial v_2}{\partial x} + z \frac{\partial v_3}{\partial x}, v_2 + x \frac{\partial v_1}{\partial y} + y \frac{\partial v_2}{\partial y} + z \frac{\partial v_3}{\partial y},$
 $v_3 + x \frac{\partial v_1}{\partial z} + y \frac{\partial v_2}{\partial z} + z \frac{\partial v_3}{\partial z}) =$
 $= \dots = 2 \text{div } \underline{v} + (\underline{x}, \Delta \underline{v}) = (\underline{x}, \Delta \underline{v}).$

Maar $\Delta \underline{v} = \text{grad div } \underline{v} - \text{rot rot } \underline{v} = \underline{0}.$

1.2.14. $f(\underline{x}) = C_1 |\underline{x}|^{-1} + C_2$ met C_1, C_2 constant.

1.2.15. Zie het vraagstukendictaat Wiskunde 30, opgave 1.3.14.

1.2.16. Een vloeistofdeeltje ter plaatse \underline{x} heeft een snelheid $\underline{v} = \underline{x}$; deze snelheid is gericht langs de voerstraal vanuit de oorsprong naar \underline{x} en de grootte van de snelheid is gelijk aan de afstand van \underline{x} tot de oorsprong; $\text{div } \underline{v} = \text{div } \underline{x} = 3$. Voor $r(t)$ geldt $\frac{dr}{dt} = r$, $r(0) = 1$, zodat $r(t) = e^t$, $V(t) = \frac{4\pi}{3} r^3(t) = \frac{4\pi}{3} e^{3t}$. Uit het laatste volgt $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 3 = \text{div } \underline{v}$.

1.3.1. Beschrijf K door een tweede parametervoorstelling $\underline{x} = \underline{x}(u)$, $\alpha \leq u \leq \beta$, en zij $u = u(t)$. Dan is

$$\int_a^b f(\underline{x}(t)) \left| \frac{d\underline{x}}{dt} \right| dt = \int_a^b f(\underline{x}(t)) \left| \frac{d\underline{x}}{du} \frac{du}{dt} \right| dt = \int_\alpha^\beta f(\underline{x}(u)) \left| \frac{d\underline{x}}{du} \right| du .$$

1.3.2. a) $\frac{1}{15}(\sqrt{2} + 1)$; b) 0; c) $\frac{1}{2}$.

1.3.3. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$.

1.3.4. $s(x) = x + \frac{1}{4} \log \frac{1+x}{1-x}$, $\underline{t} = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$.

1.3.5. a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{4}{13}$; c) 0, merk op dat $\underline{v} = \text{grad}(x^2y + y^2z + z)$.

1.3.6. a) $\mu_0 I$; b) $\mu_0 I$.

1.3.7. a) 3π ; b) $-\frac{5}{3}$; c) $\frac{20}{3}$; d) $\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}$.

1.3.8. $-\frac{4}{3}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$.

1.3.9. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{15}$; c) $\frac{1}{3} - \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$; d) $\frac{4}{\pi} - \frac{2}{3}$.

1.3.10. 1; $\underline{v} = (y, x) = \text{grad}(xy)$.

1.3.11. a) $a \sin b$, want $(\sin y, x \cos y) = \text{grad}(x \sin y)$;
b) 3, want $(y+z, z+x, x+y) = \text{grad}(xy + yz + xz)$.

$$1.3.12. 0 = \int_K (\text{grad}(\varphi\psi), \underline{t}) ds = \int_K (\varphi \text{ grad } \psi, \underline{t}) ds + \int_K (\psi \text{ grad } \varphi, \underline{t}) ds.$$

$$1.3.13. - \int_0^4 \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] dt = - \frac{112}{3}.$$

$$1.3.14. a) \frac{\pi}{2}; \quad b) 9\pi; \quad c) \sqrt{2}.$$

$$1.3.15. \text{ De massadichtheid van de schaal is } m = \frac{M}{2\pi a^2}.$$

$$I_x = \iint_S m(y^2 + z^2) d\sigma = ma^4 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) d\varphi = \frac{4\pi}{3} ma^4 = \frac{2}{3} Ma^2.$$

1.3.16. Uit de impliciete-functie-stelling (zie college Wiskunde 30, 2.3.3 en 2.3, voorbeeld 4) volgt dat er een functie $z = g(x,y)$ bestaat zodat $F(x,y,g(x,y)) = 0$. De partiële afgeleiden $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ zijn te berekenen met behulp van de kettingregel:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = - \frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z}.$$

De oppervlakte van S wordt dan

$$\iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_G \frac{|\text{grad } F|}{|\partial F / \partial z|} dx dy.$$

1.3.17. Beschrijf de torus door de parametervoorstelling

$$x = (a+b \cos u)\cos v, \quad y = (a+b \cos u)\sin v, \quad z = b \sin u,$$

met $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$. De oppervlakte van de torus is $4\pi^2 ab$.

$$1.3.18. \text{ Een gedeelte van de kegel } z^2 = x^2 + y^2; \quad \pi\sqrt{2}.$$

$$1.3.19. \frac{\pi}{6}(2\sqrt{2} - 1).$$

$$1.3.20. \frac{\pi}{8}[2\sqrt{3} + \sqrt{2} \log(\sqrt{2} + \sqrt{3})].$$

1.3.21. Er zijn drie snijpunten: $(0,0,0)$, $(1,1,2)$ en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{27})$.

De hoeken zijn resp. $\frac{\pi}{2}$, $\arccos \frac{2}{\sqrt{697}}$ en $\arccos \frac{6}{\sqrt{1649}}$.

1.3.22. a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) 24.

1.3.23. a) $\frac{\pi}{96}$; b) 0; c) 0; d) 18π .

1.3.24. a) $\frac{q}{\epsilon_0}$; b) $\frac{q}{\epsilon_0}$.

1.3.25. a) $\frac{1}{2}$; b) π ; c) $-\frac{5}{3}$.

1.4.1. Uitkomst van de integralen: a) 3; b) $\frac{1}{6}(a_1 + a_2)$; c) 4π .

1.4.2. a) Gebruik de stelling van Ostrogradsky en bedenk dat $\underline{n} \times \underline{v} = \underline{0}$ op S.

b) Pas de divergentiestelling toe op het vectorveld $\phi \underline{v}$;

$$\operatorname{div}(\phi \underline{v}) = \phi \operatorname{div} \underline{v} \text{ wegens } (\operatorname{grad} \phi, \underline{v}) = 0 .$$

1.4.3. Pas de divergentiestelling toe op de vectorvelden $\underline{v} = (x,0,0)$, $\underline{v} = (0,y,0)$,
 $\underline{v} = (0,0,z)$.

1.4.4. a) 2; b) 8π ; c) $-\frac{\pi}{3}$.

1.4.6. a) Gebruik de stelling van Gauss voor een scalarveld $\phi = 1$.

b) Pas de divergentiestelling toe op het vectorveld $\underline{v} = \underline{x}$; $\operatorname{div} \underline{x} = 3$.

c) Pas de divergentiestelling toe op het vectorveld $\underline{v} = |\underline{x}|^2 \underline{x}$; $\operatorname{div}(|\underline{x}|^2 \underline{x}) = 5|\underline{x}|^2$.

1.4.7. Pas de divergentiestelling toe op de kolomvectoren van A.

1.4.8. Voor elk gebied R met rand S is de uitgaande lading door S gelijk aan het te-
gengestelde van de verandering van de in R bevatte lading. De afleiding is
verder analoog aan die in het college Wiskunde 40, 1.4, voorbeeld 2. De con-
tinuïteitsvergelijking drukt "behoud van lading" uit.

1.4.9. a) Laat $S(t)$ de rand van $R(t)$ zijn, met naar buiten gerichte normaal \underline{n} . Gedurende een tijdsinterval Δt verplaatst een oppervlakte-element $\Delta\sigma$ van $S(t)$ zich over een afstand $|\underline{v}|\Delta t$ in de richting van \underline{v} . De inhoud van de daarbij beschreven scheve cylinder is gelijk aan $(\underline{v}, \underline{n})\Delta\sigma\Delta t$. De totale volume-verandering van $R(t)$ is dan

$$\Delta V = \iint_{S(t)} (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma \cdot \Delta t.$$

Na een limietovergang $\Delta t \rightarrow 0$ volgt

$$\frac{dV}{dt} = \iint_{S(t)} (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma = \iiint_{R(t)} \operatorname{div} \underline{v} d\tau.$$

b) De integraal

$$I := \iiint_{R(t)} \varphi(\underline{x}, t) d\tau$$

verandert gedurende een tijdsinterval Δt met een bedrag

$$\Delta I = \iiint_{R(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\tau \cdot \Delta t + \iint_{S(t)} (\varphi \underline{v}, \underline{n}) d\sigma \cdot \Delta t.$$

Na een limietovergang $\Delta t \rightarrow 0$ volgt

$$\frac{dI}{dt} = \iiint_{R(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\tau + \iint_{S(t)} (\varphi \underline{v}, \underline{n}) d\sigma = \iiint_{R(t)} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \underline{v}) \right] d\tau.$$

c) Zij $\rho(\underline{x}, t)$ de massadichtheid van de vloeistof. De massa bevat in $R(t)$ is constant in de tijd, zodat

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R(t)} \rho(\underline{x}, t) d\tau = \iiint_{R(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) \right] d\tau = 0.$$

Daaruit volgt $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0$.

1.5.1. Uitkomst van de integralen: a) 0; b) $-\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}$; c) $-\frac{1}{20}$.

1.5.2. Gebruik de stelling van Green met resp. $u = 0$, $v = x$ en $u = -y$, $v = 0$.

πab .

1.5.3. a) 0; b) 60π ; c) 0.

1.5.4. Uitkomst van de integralen: a) $-\frac{1}{2}\pi R^2$; b) 0; c) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

1.5.5. Pas de stelling van Stokes toe op het vectorveld $\underline{v} = \frac{1}{2}\underline{n} \times \underline{x}$; $\text{rot}(\frac{1}{2}\underline{n} \times \underline{x}) = \underline{n}$.

1.5.6. a) 6π ; b) $-\pi$; c) π ; d) 0.

1.5.7. a) $\frac{8}{3}a^2$; b) $(2\pi - \frac{16}{3})a^2$; c) πa^2 .

1.5.8. Pas de coördinaat-vrije definitie toe voor een infinitesimaal oppervlakte-element

$$S := \{(x,y,z) \mid x = x_1, y_1 \leq y \leq y_1 + \Delta y, z_1 \leq z \leq z_1 + \Delta z\}$$

met oppervlakte $A = \Delta y \Delta z$ en normaal $\underline{n} = (1,0,0)$. Laat K de rand van S zijn, dan is bij benadering

$$\begin{aligned} \int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds &\approx \\ &\approx v_2(x_1, y_1, z_1) \Delta y + v_3(x_1, y_1 + \Delta y, z_1) \Delta z - v_2(x_1, y_1, z_1 + \Delta z) \Delta y - v_3(x_1, y_1, z_1) \Delta z \\ &\approx \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z. \end{aligned}$$

Na een limietovergang $\Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$ volgt nu

$$(\text{rot } \underline{v}, \underline{n}) = (\text{rot } \underline{v})_x = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{1}{A} \int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds = \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}.$$

Op analoge wijze zijn de y - en z -component van $\text{rot } \underline{v}$ te bepalen.

1.5.9. Schrijf de te bewijzen betrekking uit in componenten. Pas de stelling van Stokes toe op de vectorvelden $(0, -v_3, v_2)$, $(v_3, 0, -v_1)$, $(-v_2, v_1, 0)$.

1.5.10. a) Gedurende een tijdsinterval Δt verplaatst een lijnelement Δs van $K(t)$ zich over een afstand $|\underline{v}| \Delta t$ in de richting van \underline{v} . De oppervlakte van het daarbij beschreven parallellogram is gelijk aan $\Delta \sigma = |\underline{v} \times \underline{t}| \Delta s \Delta t$. De hele kromme $K(t)$ beschrijft gedurende het tijdsinterval Δt een oppervlak, S te noemen, met rand bestaande uit $K(t)$ en $K(t + \Delta t)$. Op grond van de stelling van Stokes is dan

$$\Delta \Gamma := \Gamma(t + \Delta t) - \Gamma(t) = \iint_S (\text{rot } \underline{v}, \underline{n}) d\sigma,$$

met bijpassende normaal $\underline{n} = \frac{\underline{v} \times \underline{t}}{|\underline{v} \times \underline{t}|}$.

Substitueer de hierboven gevonden waarde van $\Delta \sigma$, dan is

$$\Delta \Gamma = \int_{K(t)} (\text{rot } \underline{v}, \underline{v} \times \underline{t}) ds \cdot \Delta t.$$

Na een limietovergang $\Delta t \rightarrow 0$ volgt

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{K(t)} (\text{rot } \underline{v}, \underline{v} \times \underline{t}) ds = \int_{K(t)} (\text{rot } \underline{v} \times \underline{v}, \underline{t}) ds.$$

Door uitschrijven in componenten is eenvoudig te verifiëren dat

$$\text{rot } \underline{v} \times \underline{v} = (\underline{v}, \text{grad}) \underline{v} - \frac{1}{2} \text{grad } |\underline{v}|^2.$$

Bedenk vervolgens dat

$$\int_{K(t)} (\text{grad } |\underline{v}|^2, \underline{t}) ds = 0.$$

b) Aan de verandering $\Delta \Gamma$ volgens a) dient te worden toegevoegd de term

$$\int_{K(t)} \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}, \underline{t} \right) ds \cdot \Delta t.$$

Voor de afgeleide $\frac{d\Gamma}{dt}$ volgt dan

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{K(t)} \left(\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v}, \text{grad}) \underline{v} \right), \underline{t} \right) ds.$$

De som

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v}, \text{grad}) \underline{v} =: \frac{d\underline{v}}{dt}$$

is de totale afgeleide van \underline{v} naar t bij meebewegen met de vloeistof; $\frac{d\underline{v}}{dt}$ heet de totale of materiële versnelling.

1.6.1. a) $\varphi = x \sin y + y \cos x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$,

b) $\varphi = x^2 e^y + xy - y^2$,

c) $\varphi = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xz - yz$.

1.6.2. $E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2}$,

$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{x^2 + y^2}$,

$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 0$, $\underline{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, 0 \right)$;

$\underline{E} = -\text{grad } \varphi$ met $\varphi = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log(x^2 + y^2) + C$.

1.6.3. a) Zij K de cirkel $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, in positieve zin doorlopen, dan is

$$\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds = \frac{1}{2}\pi \neq 0; \text{ of ook: } \text{rot } \underline{v} = (0, 0, x^2 + y^2) \neq \underline{0}.$$

b) Laat K_1 en K_2 twee krommen zijn, beide met beginpunt $(0,0,0)$ en eindpunt $(1,1,1)$ en gegeven door de parametervoorstelling resp. $\underline{x}(t) = (t, t, t)$ en $\underline{x}(t) = (t, t^2, t)$. Dan is

$$\int_{K_1} (\underline{v}, \underline{t}) ds = \frac{7}{6}, \quad \int_{K_2} (\underline{v}, \underline{t}) ds = \frac{4}{3},$$

d.i. een verschillende uitkomst.

Of ook: $\text{rot } \underline{v} = (0, 4x, 2x) \neq \underline{0}$.

1.6.4. a) $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$ in \mathbb{R}^3 , $\varphi = x^2 y z^3 - y^2$;

b) $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$ in \mathbb{R}^3 , $\varphi = y^2 z^3 \sin x - x^4 z$;

c) $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$ in \mathbb{R}^3 minus de z -as (dit gebied is niet enkelvoudig samenhangend!);
evenwel, $\underline{v} = \text{grad} \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z^2 \right)$ zodat \underline{v} conservatief is.

1.6.5. $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$; $\varphi = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 + z^2 + 2xy + 4xz - yz + 1$.

- 1.6.6. a) Ja, want $\text{rot } \underline{y} = \underline{0}$ in \mathbb{R} en \mathbb{R} is enkelvoudig samenhangend. Het veld \underline{y} heeft een potentiaal $\varphi = \log(x+y) + \log y + \log(z+2)$ in \mathbb{R} .
b) $\varphi(0,2,0) - \varphi(1,1,0) = \log 2$; de integraal is onafhankelijk van de gekozen weg mits deze in \mathbb{R} ligt.

1.6.7. Alle integralen zijn van de gedaante $\int_K (\underline{y}, \underline{t}) ds$ met \underline{y} conservatief in een gebied dat K bevat, dus $\underline{y} = \text{grad } \varphi$.

a) $x^2 y - \frac{1}{3} y^3 - \frac{2}{3}$; b) 114; c) $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} - 3$.

1.6.8. $\text{rot } \underline{F} = \underline{0}$ in \mathbb{R}^3 ; $\varphi = x^2 y^2 z + y^3 + z^2$; 56.

1.6.9. $f(\underline{x}) = \int_{\underline{0}}^{\underline{x}} (\text{grad } f, \underline{t}) ds + C = \int_{\underline{0}}^{\underline{x}} \lambda(\underline{x})(\underline{x}, \underline{t}) ds + C$,

waarbij de integraal te nemen is over een (willekeurige) kromme van $\underline{0}$ naar \underline{x} en C een willekeurige constante is. Voor twee punten \underline{p} en \underline{q} op de bol $|\underline{x}| = a$ is

$$f(\underline{q}) - f(\underline{p}) = \int_{\underline{p}}^{\underline{q}} \lambda(\underline{x})(\underline{x}, \underline{t}) ds = 0,$$

waarbij geïntegreerd is over een kromme op de bol $|\underline{x}| = a$.

De functie $f(\underline{x})$ is dus constant op de bol $|\underline{x}| = a$ en men kan schrijven $f(\underline{x}) = F(|\underline{x}|)$.

1.6.10. $\text{rot}(\varphi \text{ grad } \varphi) = \varphi \text{ rot grad } \varphi + (\text{grad } \varphi) \times (\text{grad } \varphi) = \underline{0}$; $\frac{1}{2}\varphi^2$.

1.6.11. $\text{rot } \underline{B} = \underline{0}$ buiten de z -as; pas de stelling van Stokes toe voor een oppervlak met rand bestaande uit K en de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ met a voldoende groot; maak gebruik van de uitkomst van 1.3.6a).

1.6.12. a) $-\pi$ (vervang de ellips door bijv. de cirkel $x^2 + y^2 = 1$);
b) $\log 4$.

1.6.13. $\frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

1.7.1. a) Zij S de rand van de kubus begrensd door de vlakken $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ en $z = \pm 1$, en zij de normaal \underline{n} op S naar buiten gericht; dan is

$$\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma = 24 \neq 0 .$$

Of ook: $\operatorname{div} \underline{v} = 3 \neq 0$.

b) Zij S het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ met naar buiten gerichte normaal \underline{n} ; dan is

$$\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma = \iint_S y^2 d\sigma = \frac{4\pi}{3} \neq 0 .$$

Of ook: $\operatorname{div} \underline{v} = 5y^2 \neq 0$.

1.7.2. a) $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ in \mathbb{R}^3 , $\underline{w} = (xy + xz - \frac{1}{2} z^2, xy + yz - \frac{1}{2} z^2, 0)$;

b) $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ in \mathbb{R}^3 , $\underline{w} = (x^2 y^2 z - \frac{1}{3} y^2 z^3, -xy^3 z - \frac{2}{3} xyz^3, 0)$;

c) $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ in \mathbb{R}^3 , $\underline{w} = (x^2 y^3 + \frac{4}{3} x^3 z^3, -y^4 z^3, 0)$.

1.7.3. $\alpha = -2$; $\underline{w} = (0, \frac{1}{2} x^2 - 2xz - 3yz, -xy + 2xz)$.

1.7.4. $\operatorname{div}(\underline{c} \times \underline{x}) = (\underline{x}, \operatorname{rot} \underline{c}) - (\underline{c}, \operatorname{rot} \underline{x}) = (\underline{x}, 0) - (\underline{c}, 0) = 0$.

$\operatorname{rot} \underline{w} = \operatorname{rot}(\lambda \underline{x}) = \lambda \operatorname{rot} \underline{x} + (\operatorname{grad} \lambda) \times \underline{x} = (\operatorname{grad} \lambda) \times \underline{x} = \underline{c} \times \underline{x}$,
als $\operatorname{grad} \lambda = \underline{c}$, dus $\lambda(\underline{x}) = (\underline{c}, \underline{x})$; $\underline{w} = (\underline{c}, \underline{x}) \underline{x}$.

1.7.5. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \psi) = (\operatorname{grad} \psi, \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi) - (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi) = 0$;
 $\varphi \operatorname{grad} \psi$ of $-\psi \operatorname{grad} \varphi$.

1.7.6. Zij $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dan is

$$t[\underline{v}(t\underline{x}) \times \underline{x}] = (t(v_2 z - v_3 y), t(v_3 x - v_1 z), t(v_1 y - v_2 x)) .$$

Bepaal de x -component van $\operatorname{rot} \underline{w}$ en bereken daartoe

$$\begin{aligned}
 (\text{rot } t[\underline{v}(\underline{tx}) \times \underline{x}])_x &= \frac{\partial}{\partial y}[t(v_1 y - v_2 x)] - \frac{\partial}{\partial z}[t(v_3 x - v_1 z)] = \\
 &= tv_1 + t^2(y \frac{\partial v_1}{\partial y} - x \frac{\partial v_2}{\partial y}) + tv_1 - t^2(x \frac{\partial v_3}{\partial z} - z \frac{\partial v_1}{\partial z}) = \\
 &= 2tv_1 + t^2(x \frac{\partial v_1}{\partial x} + y \frac{\partial v_1}{\partial y} + z \frac{\partial v_1}{\partial z}) = \\
 &= 2tv_1 + t^2 \frac{dv_1(\underline{tx})}{dt} = \frac{d}{dt}[t^2 v_1(\underline{tx})],
 \end{aligned}$$

waarbij gebruik gemaakt is van het gegeven $\text{div } \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0$.

Voor de x-component van $\text{rot } \underline{w}$ volgt dan

$$(\text{rot } \underline{w}(\underline{x}))_x = \int_0^1 \frac{d}{dt}[t^2 v_1(\underline{tx})] dt = v_1(\underline{x}).$$

Analoog is te bewijzen $(\text{rot } \underline{w})_y = v_2$, $(\text{rot } \underline{w})_z = v_3$.

1.7.7. $\underline{B} = \text{rot } \underline{A}$ met $\underline{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (0, 0, -\log(x^2 + y^2))$ of ook $\underline{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\frac{xz}{x^2 + y^2}, \frac{yz}{x^2 + y^2}, 0)$.

1.7.8. $\text{div } \underline{E} = 0$ voor $r \neq 0$; pas de divergentiestelling toe in het gebied tussen S en het boloppervlak $|\underline{x}| = a$ met a voldoende groot; maak gebruik van de uitkomst van 1.3.24a).

1.7.9. $\underline{w} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} (-\frac{y}{r^3}, \frac{x}{r^3}, 0) = -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \underline{e}_3 \times \text{grad}(\frac{1}{r})$.

1.7.10. In eerste instantie voldoet als vectorpotentiaal

$$\underline{w} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (\frac{y}{x^2 + y^2} \frac{z}{r} + f(x,y), -\frac{x}{x^2 + y^2} \frac{z}{r} + g(x,y), 0),$$

waarbij f en g moeten voldoen aan $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Deze vectorpotentiaal is eindig buiten de z-as. De vectorpotentiaal is tevens eindig op de negatieve z-as, indien we nemen

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad g(x,y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

De vectorpotentiaal \underline{w} wordt dan

$$\underline{w} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \left(\frac{z}{r} + 1 \right), -\frac{x}{x^2 + y^2} \left(\frac{z}{r} + 1 \right), 0 \right).$$

1.7.11. Schrijf elke component van de oppervlakte-integralen in de vorm $\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma$, zoek een geschikte vectorpotentiaal van \underline{v} en pas de stelling van Stokes toe.

- 1.8.1. a) $\underline{v} = (x, 0, 0)$ of $\underline{v} = (0, y, 0)$ of $\underline{v} = (0, 0, z)$ of $\underline{v} = \frac{1}{3} \underline{x}$;
 b) $\underline{v} = (z, x-z, 0)$ of $\underline{v} = (z-y, 0, y)$ of $\underline{v} = (0, x, y-x)$ of $\underline{v} = \frac{1}{2}(z-y, x-z, y-x)$;
 c) $\underline{v} = \left(\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} z^2 - xz, \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} z^2 - yz, \frac{3}{2} z^2 \right)$ of
 $\underline{v} = \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} z^2 - xy - xz, \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} z^2 - xy - yz, \frac{3}{2} z^2 \right)$;
 d) $\underline{v} = \left(xy^2z - xyz^2 + \frac{1}{3} x^3y, -\frac{1}{2} x^2z^2 + xyz^2 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{12} z^4, \frac{1}{3} yz^3 \right)$ of
 $\underline{v} = (xy^2z, xyz^2, x^2yz)$.

1.8.2. $\varphi = \frac{1}{6}(x^3 + y^3 + z^3)$,
 $\underline{w} = \left(\frac{1}{2} x^2z - \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{2} y^2z + \frac{1}{2} yz^2, \frac{1}{2} x^2z - xyz - \frac{1}{3} z^3, -\frac{1}{6} x^3 \right)$.

1.9.1. $u = \text{constant}$: $\frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{y^2}{\sinh^2 u} = 1$, ellips;

$v = \text{constant}$: $\frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = 1$, $\frac{x}{\cos v} \geq 1$, $\frac{y}{\sin v} \geq 0$, kwart hyperbool;

$u = 0$: lijnsegment $-1 \leq x \leq 1$, $y = 0$;

$v = 0$: lijnsegment $x \geq 1$, $y = 0$;

$v = \frac{\pi}{2}$: lijnsegment $x = 0$, $y \geq 0$;

$v = \pi$: lijnsegment $x \leq -1$, $y = 0$;

$v = \frac{3\pi}{2}$: lijnsegment $x = 0$, $y \leq 0$.

$\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} = (\sinh u \cos v, \cosh u \sin v)$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v} = (-\cosh u \sin v, \sinh u \cos v)$;

$\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \perp \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$, dus het coördinatenstelsel is orthogonaal;

$h_1 = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \right| = \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}$, $h_2 = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| = \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}$.

$\Delta \alpha = \frac{1}{\sinh^2 u + \sin^2 v} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} \right)$.

1.9.2. $u = \text{constant}$: $x = \frac{1}{2}(u^2 - \frac{y^2}{u})$, $\frac{y}{u} \geq 0$, halve parabolische cylinder // z-as;

$v = \text{constant}$: $x = \frac{1}{2}(\frac{y^2}{v} - v^2)$, parabolische cylinder // z-as;

$u = 0$: halfvlak $x \leq 0$, $y = 0$;

$v = 0$: halfvlak $x \geq 0$, $y = 0$.

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} = (u, v, 0), \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} = (-v, u, 0), \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial z} = (0, 0, 1);$$

$\frac{\partial \underline{x}}{\partial u}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial v}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial z}$ zijn twee aan twee loodrecht en vormen in deze volgorde een rechtse schroef, dus het coördinatenstelsel is rechts orthogonaal;

$$h_1 = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \right| = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_2 = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} \right| = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_3 = 1.$$

Voor de vectoroperaties grad, div en rot in (u, v, z) -coördinaten, zie college Wiskunde 40, 1.9.1, 1.9.2, 1.9.3;

$$\Delta \alpha = \frac{1}{u^2 + v^2} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}.$$

1.9.3. $\xi = \text{constant}$: $\frac{x^2}{\xi^2 + 1} + \frac{y^2}{\xi^2 + 1} + \frac{z^2}{\xi^2} = 1$, omwentelingsellipsoïde om de z-as;

$\eta = \text{constant}$: $\frac{x^2}{1 - \eta^2} + \frac{y^2}{1 - \eta^2} - \frac{z^2}{\eta^2} = 1$, $\frac{z}{\eta} \geq 0$, halve éénbladige omwentelingshyperboloïde om de z-as;

$\varphi = \text{constant}$: halfvlak met de z-as als rand en onder een hoek φ met de positieve x-as;

$\xi = 0$: cirkelschijf $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$;

$\eta = 0$: complement in (x, y) -vlak van cirkelschijf $x^2 + y^2 < 1$, $z = 0$;

$\eta = 1$: positieve z-as;

$\eta = -1$: negatieve z-as.

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi} = \left(\xi \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + 1}} \cos \varphi, \xi \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\xi^2 + 1}} \sin \varphi, \eta \right),$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \eta} = \left(-\eta \sqrt{\frac{\xi^2 + 1}{1 - \eta^2}} \cos \varphi, -\eta \sqrt{\frac{\xi^2 + 1}{1 - \eta^2}} \sin \varphi, \xi \right),$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} = \left(-\sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi, \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, 0 \right);$$

$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi}$ zijn twee aan twee loodrecht, dus het coördinatenstelsel is orthogonaal; N.B. het coördinatenstelsel is rechts orthogonaal mits de coördinaten in de volgorde (η, ξ, φ) worden genomen;

$$h_1 = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi} \right| = \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 + 1}}, \quad h_2 = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \eta} \right| = \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{1 - \eta^2}}, \quad h_3 = \left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \right| = \sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)}.$$

Voor de vectoroperaties grad, div en rot in (ξ, η, φ) -coördinaten, zie college Wiskunde 40, 1.9.1, 1.9.2, 1.9.3; bij de bepaling van rot \underline{a} dienen de coördinaten in de volgorde (η, ξ, φ) te worden genomen.

$$\Delta \alpha = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} ((\xi^2 + 1) \frac{\partial \alpha}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} ((1 - \eta^2) \frac{\partial \alpha}{\partial \eta}) + \frac{\xi^2 + \eta^2}{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} \right].$$

1.9.4. In oblate sferoïdale coördinaten (ξ, η, φ) dient de potentiaal $V = V(\xi)$ te voldoen aan

$$\begin{cases} \Delta V = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \frac{d}{d\xi} ((\xi^2 + 1) \frac{dV}{d\xi}) = 0, \\ V(0) = 1, \\ V(\xi) \rightarrow 0 \text{ als } \xi \rightarrow \infty. \end{cases}$$

De oplossing van dit probleem luidt

$$V = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \xi.$$

De equipotentiaal oppervlakken zijn de oppervlakken $\xi = \text{constant}$, dat zijn omwentelingsellipsoïden om de z-as (zie 1.9.3).

De ladingsdichtheid op de schijf is

$$\sigma = -2\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, 0+) = -\frac{2\epsilon_0}{|\eta|} \frac{dV}{d\xi}(0) = \frac{4\epsilon_0}{\pi|\eta|} = \frac{4\epsilon_0}{\pi\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

1.9.5. a) $v_r = z \cos \varphi - 2r \sin \varphi \cos \varphi$, $v_\varphi = -z \sin \varphi - 2r \cos^2 \varphi$, $v_z = r \sin \varphi$.
 b) $v_\rho = \rho \sin \theta \cos \theta \cos \varphi - 2\rho \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi + \rho \sin \theta \cos \theta \sin \varphi$,
 $v_\theta = \rho \cos^2 \theta \cos \varphi - 2\rho \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi - \rho \sin^2 \theta \sin \varphi$,
 $v_\varphi = -\rho \cos \theta \sin \varphi - 2\rho \sin \theta \cos^2 \varphi$.

1.9.6. $\underline{v} = (\dot{r}, r\dot{\varphi}, \dot{z})$, $\underline{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}, \ddot{z})$.

1.9.7. $\underline{B} = \text{rot } \underline{A}$ met $\underline{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (0, 0, -\log r)$ of ook $\underline{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\frac{z}{r}, 0, 0)$.

1.9.8. $\underline{w} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (0, 0, -\frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta})$ in bolcoördinaten (r, θ, φ) .

Hoofdstuk 2. Partiële differentiaalvergelijkingen

2.1.1. Zie M. Alonso & E.J. Finn, Fundamentele Natuurkunde, deel 3, Golven, § 1.7.

2.1.2. De afleiding is analoog aan die van de snaarvergelijking uit 2.1.1. Bedenk dat de spanning in de ketting gegeven wordt door $T(x) = \rho gx$, waarin ρ de massa per lengte-eenheid is.

Beginvoorwaarden $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, waarbij $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ gegeven functies zijn; randvoorwaarden $u_x(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$.

2.1.3. Zie M. Alonso & E.J. Finn, Fundamentele Natuurkunde, deel 3, Golven, § 1.5.

2.1.4. Stel de warmtebalans op voor een willekeurig gebied R in \mathbb{R}^3 met randoppervlak S ; \underline{n} is de naar buiten gerichte normaal op S .

Tengevolge van de warmtestroom $\underline{q} := -k \text{ grad } T$ stroomt gedurende een tijdsinterval Δt door S naar buiten de hoeveelheid warmte

$$-\iint_S k(\text{grad } T, \underline{n}) d\sigma \cdot \Delta t = - \iiint_R k \Delta T d\tau \cdot \Delta t .$$

In hetzelfde tijdsinterval produceren de warmtebronnen een hoeveelheid warmte

$$\iiint_R Q(\underline{x}, t) d\tau \cdot \Delta t .$$

De verandering van de "warmte-inhoud" van R gedurende het tijdsinterval Δt is gelijk aan

$$\iiint_R c\rho [T(\underline{x}, t + \Delta t) - T(\underline{x}, t)] d\tau \approx \iiint_R c\rho T_t(\underline{x}, t) d\tau \cdot \Delta t .$$

Voor elk gebied R geldt nu

$$\iiint_R [k\Delta T + Q(\underline{x}, t) - c\rho T_t] d\tau = 0 ,$$

en daaruit volgt

$$\Delta T - \frac{c\rho}{k} T_t = - \frac{Q(\underline{x}, t)}{k} .$$

2.1.5. De afleiding is analoog aan die in 2.1.4. Aan de warmtebalans moet nog worden toegevoegd de term

$$\iint_S cpT(\underline{v}, \underline{n}) d\sigma \cdot \Delta t = \iiint_R cp(\underline{v}, \text{grad } T) d\tau \cdot \Delta t ,$$

d.i. de warmtestroom door S tengevolge van de beweging van het medium.

2.1.6. De afleiding is analoog aan die van de vergelijking voor een trillend membraan; zie voor de laatste M. Alonso & E.J. Finn, Fundamentele Natuurkunde, deel 3, Golven, voorbeeld 1.10.

$$2.2.1. \quad u(x,t) = \frac{2h}{\pi} \frac{\ell^2}{a(\ell - a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi a/\ell)}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi ct}{\ell} .$$

$$2.2.2. \quad u(x,t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n - \frac{1}{2})(n + \frac{1}{2})(n + \frac{3}{2})} \sin \frac{(n + \frac{1}{2})\pi x}{\ell} \cos \frac{(n + \frac{1}{2})\pi ct}{\ell} ;$$

$$T_j = (2j - 1)\ell/c, \quad j = 1, 2, 3, \dots .$$

$$2.2.3. \quad u(x,t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \cos(n + \frac{1}{2})\pi x \sin(n + \frac{1}{2})\pi t .$$

$$2.2.4. \quad u(x,y,t) = \frac{64a^2b^2}{\pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3(2n+1)^3} \sin \frac{(2m+1)\pi x}{a} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{b} \cdot \cos \left(\pi ct \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2}{b^2}} \right) .$$

$$2.2.5. \quad u(x,t) = \frac{\sin \omega x \sin \omega t}{\sin \omega} - 2\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega^2 - n^2\pi^2} \sin n\pi x \sin n\pi t$$

als $\omega \neq m\pi$, $m = 1, 2, 3, \dots$;

$\omega = m\pi$, $m = 1, 2, 3, \dots$ correspondeert met resonantie;

$$u(x,t) = (-1)^m \left[x \cos m\pi x \sin m\pi t + \sin m\pi x (t \cos m\pi t - \frac{\sin m\pi t}{2m\pi}) \right] +$$

$$- \frac{2m}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m^2 - n^2} \sin n\pi x \sin n\pi t \quad \text{als } \omega = m\pi .$$

$$2.2.6. \text{ (i) } u(x,t) = \frac{q}{T} \left[\frac{1}{2} x(\ell - x) - \frac{4\ell^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{\ell} \cos \frac{(2n+1)\pi ct}{\ell} \right];$$

$$\text{(ii) } u(x,t) = \frac{4q\ell^2}{T\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{\ell} \left[1 - \cos \frac{(2n+1)\pi ct}{\ell} \right].$$

$$2.2.7. u(x,t) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n(\omega^2 - n^2)} \sin nx [\omega \sin nt - n \sin \omega t]$$

als $\omega \neq m$, $m = 1, 2, 3, \dots$;

$$u(x,t) = \frac{A}{\pi m^2} \sin ma \sin mx [\sin mt - mt \cos mt] + \\ + \frac{2A}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{\sin na}{n(m^2 - n^2)} \sin nx [m \sin nt - n \sin mt]$$

als $\omega = m$ (resonantie!).

$$2.2.8. \text{ a) } T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \exp\left[-\frac{n^2 \pi^2 \kappa t}{\ell^2}\right] \text{ met}$$

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{\ell} d\xi ;$$

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi \xi}{\ell} \exp\left[-\frac{n^2 \pi^2 \kappa t}{\ell^2}\right].$$

$$\text{b) } T(x,t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{\ell} \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \kappa t}{\ell^2}\right].$$

$$2.2.9. T(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi x}{\ell} \exp\left[-\frac{4\pi^2 \kappa t}{\ell^2}\right];$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(x,t) = \frac{1}{2};$$

de "warmte-inhoud" van de staaf is constant, dus

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(x,t) = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} T(x,0) dx = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \sin^2 \frac{\pi x}{\ell} dx = \frac{1}{2}.$$

$$2.2.10. u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \frac{1}{2}} \cos(n + \frac{1}{2})\pi x \exp[-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 t] .$$

$$2.2.11. T(r,t) = \frac{2aT_0}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{n\pi r}{a} \exp[-\frac{n^2 \pi^2 kt}{a^2}] ,$$

$$T(0,t) = 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \exp[-\frac{n^2 \pi^2 kt}{a^2}] .$$

$$2.2.12. a) u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x \exp[(\alpha - n^2 \pi^2)t] \text{ met}$$

$$C_n = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin n\pi x \, dx .$$

b) Voor $\alpha \leq \pi^2$ zijn de exponentiële functies $\exp[(\alpha - n^2 \pi^2)t]$ alle begrensd voor $t \geq 0$; voor $\alpha > \pi^2$ neemt $\exp[(\alpha - \pi^2)t]$ onbegrensd toe met de tijd.

$$2.2.13. T(x,t) = \frac{q}{k}(\ell - x) - \frac{2q\ell}{k\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2} \cos \frac{(n + \frac{1}{2})\pi x}{\ell} \exp[-\frac{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 kt}{\ell^2}] ,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(x,t) = \frac{q}{k}(\ell - x) .$$

$$2.2.14. T_1(x) = \frac{\sinh \sqrt{\mu} x}{\sinh \sqrt{\mu}} ,$$

$$T(x,t) = \frac{\sinh \sqrt{\mu} x}{\sinh \sqrt{\mu}} + 2\pi e^{-\mu t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n^2 + \mu} \sin n\pi x \exp[-n^2 \pi^2 t] .$$

$$2.2.15. (i) u(x,t) = \frac{1}{2}Q(1 - x^2) - \frac{2Q}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})^3} \cos(n + \frac{1}{2})\pi x \exp[-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 t] ;$$

$$(ii) u(x,t) = \frac{2Q}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})^3} \cos(n + \frac{1}{2})\pi x \{1 - \exp[-(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 t]\} .$$

$$2.2.16. T(x,y) = \frac{\sin \pi x \sinh \pi(2 - y)}{\sinh 2\pi} + \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x \sinh(2n+1)\pi y}{(2n+1)^3 \sinh(4n+2)\pi} .$$

$$2.2.17. T(x,y) = \frac{4qb}{k\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh((2n+1)\pi x/b) \sin((2n+1)\pi y/b)}{(2n+1)^2 \sinh((2n+1)\pi a/b)} .$$

$$2.2.18. T(x,y) = \frac{qx}{k} .$$

$$2.2.19. \varphi(x,y) = C - \frac{J}{\sigma} \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n\pi x \cos n\pi y}{n \cosh n\pi} \right] ,$$

waarbij C een willekeurige constante is;

$$j_x = \frac{1}{2}J + J \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh n\pi x \cos n\pi y}{\cosh n\pi} , \quad j_y = -J \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n\pi x \sin n\pi y}{\cosh n\pi} .$$

$$2.2.20. u(x,y) = V \left[x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x \cosh n\pi y}{n \cosh n\pi} \right] .$$

$$2.2.21. u(x,y) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin(2n+1)x \exp[-(2n+1)y] ;$$

zonder de begrensdeheidsvoorwaarde voldoet ook als oplossing bijv.

$u(x,y) + C_m \sin mx \sinh my$ met constante C_m en m geheel.

$$2.2.22. T(r,\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} r^{2n+1} \sin(2n+1)\varphi .$$

$$2.2.23. u(r,\varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) ,$$

waarin C een willekeurige constante is en

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \cos n\theta \, d\theta , \quad b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \sin n\theta \, d\theta ;$$

$$u(r,\varphi) = C - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \log(1 - 2r \cos(\varphi - \theta) + r^2) d\theta .$$

$$2.2.24. \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_1}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial \varphi^2} = 0, \quad r > a, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

$V_2(r, \varphi)$ is begrensd voor $r \geq a$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$,

$$V_1(a, \varphi) = -E_0 a \cos \varphi + V_2(a, \varphi), \quad \varepsilon \frac{\partial V_1}{\partial r}(a, \varphi) = -E_0 \cos \varphi + \frac{\partial V_2}{\partial r}(a, \varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi;$$

$$V_1 = C - \frac{2E_0}{\varepsilon + 1} r \cos \varphi = C - \frac{2E_0 x}{\varepsilon + 1} \text{ binnen de cylinder,}$$

$$V_2 = C + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} E_0 \frac{a^2}{r} \cos \varphi \text{ buiten de cylinder,}$$

waarin C een willekeurige constante is;

uit $\underline{E} = -\text{grad } V_1$ volgt dat het veld binnen de cylinder homogeen is met veldsterkte $2E_0/(\varepsilon + 1)$ evenwijdig aan de x-as.

$$2.2.25. T(r, \varphi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} r^{n+\frac{1}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})\varphi.$$

$$2.2.26. u(r, \varphi) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\log r}{\log 2}\right) + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 (4^{2n+1} - 1)} \left[r^{2n+1} - \left(\frac{4}{r}\right)^{2n+1} \right] \cos(2n+1)\varphi.$$

$$2.2.27. T(r, \varphi) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} r^{2n+1} \sin(2n+1)\varphi.$$

$$2.2.28. T(r, \varphi) = \frac{q}{k} \left[\frac{2}{\pi} - r \sin \varphi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} r^{2n} \cos 2n\varphi \right];$$

$$T(r, 0) = T(r, \pi) = \frac{q}{k} \frac{1 - r^2}{\pi r} \log \frac{1+r}{1-r}, \quad T(0, \varphi) = \frac{2q}{k\pi}.$$

$$2.2.29. u(r, \varphi) = \frac{q}{2T} \left[-r^2 \sin^2 \varphi - \frac{8a^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} \sin(2n+1)\varphi \right].$$

$$2.2.30. u(x, y, t) = \sin \frac{(m - \frac{1}{2})\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} (A \cos \omega_{mn} t + B \sin \omega_{mn} t), \quad m, n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\omega_{mn} = \pi c \sqrt{\frac{(m - \frac{1}{2})^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

2.2.31. $u(x,y,z,t) = \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{p\pi z}{a} (A \cos \omega_{mnp} t + B \sin \omega_{mnp} t),$

$\omega_{mnp} = \frac{\pi c}{a} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}, m,n,p = 0,1,2,\dots, (m,n,p) \neq (0,0,0).$

2.3.1. a) Voor $0 \leq t \leq \frac{a}{c}$ is

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < -a - ct, \\ \frac{1}{2} & \text{voor } -a - ct < x < -a + ct, \\ 1 & \text{voor } -a + ct < x < a - ct, \\ \frac{1}{2} & \text{voor } a - ct < x < a + ct, \\ 0 & \text{voor } x > a + ct; \end{cases}$$

voor $t \geq \frac{a}{c}$ is

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < -a - ct, \\ \frac{1}{2} & \text{voor } -a - ct < x < a - ct, \\ 0 & \text{voor } a - ct < x < -a + ct, \\ \frac{1}{2} & \text{voor } -a + ct < x < a + ct, \\ 0 & \text{voor } x > a + ct. \end{cases}$$

b) $u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < -ct, \\ 1 & \text{voor } -ct < x < ct, \\ 0 & \text{voor } x > ct. \end{cases}$

c) $u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } |x - ct| > \frac{\pi}{2}, \\ \cos(x - ct) & \text{voor } |x - ct| \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

2.3.2.

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(x-ct) + \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi & \text{voor } x > ct > 0, \\ \frac{1}{2}\varphi(ct-x) + \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{c} \int_0^{ct-x} \psi(\xi) d\xi & \text{voor } ct > x > 0. \end{cases}$$

2.3.3. a) Voor $0 \leq t \leq 1$ is

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 \leq x < 1-t, \\ \frac{1}{2} & \text{voor } 1-t < x < 1+t, \\ 1 & \text{voor } 1+t < x < 3-t, \\ \frac{1}{2} & \text{voor } 3-t < x < 3+t, \\ 0 & \text{voor } x > 3+t; \end{cases}$$

voor $1 \leq t \leq 2$ is

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 \leq x < -1+t, \\ \frac{1}{2} & \text{voor } -1+t < x < 3-t, \\ 0 & \text{voor } 3-t < x < 1+t, \\ \frac{1}{2} & \text{voor } 1+t < x < 3+t, \\ 0 & \text{voor } x > 3+t; \end{cases}$$

voor $2 \leq t \leq 3$ is

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 \leq x < 3-t, \\ -\frac{1}{2} & \text{voor } 3-t < x < -1+t, \\ 0 & \text{voor } -1+t < x < 1+t, \\ \frac{1}{2} & \text{voor } 1+t < x < 3+t, \\ 0 & \text{voor } x > 3+t; \end{cases}$$

voor $t \geq 3$ is

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 \leq x < -3+t, \\ -\frac{1}{2} & \text{voor } -3+t < x < -1+t, \\ 0 & \text{voor } -1+t < x < 1+t, \\ \frac{1}{2} & \text{voor } 1+t < x < 3+t, \\ 0 & \text{voor } x > 3+t. \end{cases}$$

b) Voor $0 \leq t \leq 1$ is

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 \leq x < 1-t, \\ \frac{1}{2} & \text{voor } 1-t < x < 1+t, \\ 0 & \text{voor } x > 1+t; \end{cases}$$

voor $t \geq 1$ is

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } 0 \leq x < -1+t, \\ \frac{1}{2} & \text{voor } -1+t < x < 1+t, \\ 0 & \text{voor } x > 1+t. \end{cases}$$

$$2.3.4. \quad u(0,t) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \pi t}{\pi} & \text{voor } 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{2}{\pi} & \text{voor } t \geq 1. \end{cases}$$

$$2.3.5. \quad u(r,t) = \begin{cases} \frac{r-ct}{2r} \varphi(r-ct) + \frac{r+ct}{2r} \varphi(r+ct) + \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} \rho \psi(\rho) d\rho & \text{voor } r > ct > 0, \\ -\frac{ct-r}{2r} \varphi(ct-r) + \frac{r+ct}{2r} \varphi(r+ct) + \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{r+ct} \rho \psi(\rho) d\rho & \text{voor } ct > r > 0; \end{cases}$$

$$u(0,t) = \varphi(ct) + ct\varphi'(ct) + t\psi(ct).$$

$$2.3.6. \quad u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x > ct > 0, \\ \sin \omega(t - \frac{x}{c}) & \text{voor } ct > x > 0. \end{cases}$$

$$2.3.7. \quad T(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu x} e^{-\mu^2 kt}}{1 + \mu^2} d\mu = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \mu x e^{-\mu^2 kt}}{1 + \mu^2} d\mu.$$

$$2.3.8. \quad a) \quad T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \exp\left[-\frac{x^2}{1+4t}\right];$$

$$b) \quad T(x,t) = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) + \frac{1}{2}(T_2 - T_1) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right),$$

$$T_x(0,t) = \frac{T_2 - T_1}{2\sqrt{\pi t}}.$$

$$2.3.9. \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right] \right\} d\xi .$$

$$2.3.10. \quad a) \quad T(x, t) = T_0 \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{2\sqrt{t}}\right) \right];$$

$$b) \quad T(x, t) = \frac{1}{2} T_0 \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{2\sqrt{t}}\right) \right].$$

$$2.3.11. \quad C(r, t) = \frac{1}{2} C_0 \left[\operatorname{erf}\left(\frac{r+a}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{r-a}{2\sqrt{t}}\right) \right] - \frac{C_0 \sqrt{t}}{r\sqrt{\pi}} \left\{ \exp\left[-\frac{(r-a)^2}{4t}\right] - \exp\left[-\frac{(r+a)^2}{4t}\right] \right\},$$

$$C(0, t) = C_0 \left[\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{a}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right) \right].$$

$$2.3.12. \quad a) \quad T(x, t) = T_0 \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right];$$

$$b) \quad T(x, t) = q \left[\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) - x \left\{ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right\} \right].$$

2.4.1. Bereken Δv :

$$\operatorname{grad} v = F'(u) \operatorname{grad} u,$$

$$\Delta v = \operatorname{div} \operatorname{grad} v = \operatorname{div}(F'(u) \operatorname{grad} u) = F'(u) \operatorname{div} \operatorname{grad} u + (\operatorname{grad} F'(u), \operatorname{grad} u) = F'(u) \Delta u + F''(u) (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u) = F''(u) |\operatorname{grad} u|^2 \text{ wegens } \Delta u = 0.$$

Uit $\Delta v = 0$ volgt dan $F''(u) = 0$, dus $F(u) = Au + B$ met willekeurige constanten A en B .

2.4.2. Eerste identiteit van Green

$$\iint_G [u \Delta v + (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)] dx dy = \int_K u \frac{\partial v}{\partial n} ds;$$

tweede identiteit van Green

$$\iint_G (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_K \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds;$$

hierin is \underline{n} de naar buiten gerichte normaal op K .

De eerste identiteit volgt door toepassing van de divergentiestelling in \mathbb{R}^2 op het vectorveld $u \text{ grad } v$. De tweede identiteit volgt uit de eerste door daarvan af te trekken de eerste identiteit met u en v verwisseld.

2.4.3. a) Met behulp van de eerste identiteit van Green volgt

$$\iiint_R |\text{grad } u|^2 d\tau = \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = -h \iint_S u^2 d\sigma .$$

Zowel de eerste als de laatste integraal moeten dan nul zijn. Daaruit volgt $\text{grad } u = \underline{0}$ in R , $u = 0$ op S , en dus $u(\underline{x}) = 0$ in R .

b) Neem aan dat het randwaardeprobleem twee oplossingen $u_1(\underline{x})$ en $u_2(\underline{x})$ zou bezitten. Het verschil $v(\underline{x}) := u_1(\underline{x}) - u_2(\underline{x})$ voldoet dan aan

$$\Delta v = 0 \text{ in } R, \frac{\partial v}{\partial n} + hv = 0 \text{ op } S .$$

Op grond van a) is dan $v(\underline{x}) = 0$ in R , dus $u_1(\underline{x}) = u_2(\underline{x})$ in R .

2.4.4. Neem aan dat het probleem twee oplossingen $\underline{v}(\underline{x})$ en $\underline{v}'(\underline{x})$ zou bezitten. Het verschil $\underline{w}(\underline{x}) := \underline{v}(\underline{x}) - \underline{v}'(\underline{x})$ voldoet dan aan

$$\text{div } \underline{w} = 0 \text{ in } R, \text{rot } \underline{w} = \underline{0} \text{ in } R, (\underline{w}, \underline{n}) = 0 \text{ op } S .$$

Uit $\text{rot } \underline{w} = \underline{0}$ in R volgt $\underline{w} = \text{grad } \varphi$. Na substitutie in de overige twee vergelijkingen ontstaat er

$$\Delta \varphi = 0 \text{ in } R, (\text{grad } \varphi, \underline{n}) = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ op } S .$$

Hieruit volgt: φ is constant in R , en dus $\underline{w}(\underline{x}) = \underline{0}$, $\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}'(\underline{x})$ in R .

2.4.5. Eerste oplossing: Voer in de punten $\underline{a} = (0,0,1)$, $\underline{b} = (0,0,2)$, dan is $\Delta\left(\frac{1}{r_1}\right) = -4\pi\delta(\underline{x} - \underline{a})$ en $\Delta\left(\frac{1}{r_2}\right) = -4\pi\delta(\underline{x} - \underline{b})$. Laat R het gebied binnen S zijn.

Met behulp van de divergentiestelling volgt nu

$$\iint_S \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma = \iiint_R \Delta \psi d\tau = -4\pi \iiint_R [\delta(\underline{x} - \underline{a}) + \delta(\underline{x} - \underline{b})] d\tau = -4\pi ,$$

omdat \underline{a} binnen S en \underline{b} buiten S ligt.

Tweede oplossing: De functie $\frac{1}{r_2}$ is harmonisch binnen en op S, dus $\iint_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_2} \right) d\sigma = 0$.

Wegens $\Delta \left(\frac{1}{r_1} \right) = 0$ voor $\underline{x} \neq (0,0,1)$, mag in de resterende integraal S worden

vervangen door S': $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \delta^2$ met $0 < \delta < \frac{1}{2}$, waarna volgt

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) d\sigma = \iint_{S'} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) d\sigma = \iint_{S'} \frac{d}{dr_1} \left(\frac{1}{r_1} \right) d\sigma = - \iint_{S'} \frac{1}{\delta^2} d\sigma = -4\pi.$$

$$2.4.6. \iint_S \left[\frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_2} \right) - \frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] d\sigma = -4\pi \iiint_R \left[\frac{\delta(\underline{x} - \underline{q})}{|\underline{x} - \underline{p}|} - \frac{\delta(\underline{x} - \underline{p})}{|\underline{x} - \underline{q}|} \right] d\tau;$$

uitkomsten: a) 0; b) 0; c) $4\pi/|\underline{p} - \underline{q}|$.

2.4.7. De potentiaal V hangt slechts af van de afstand r tot de oorsprong: $V = V(r)$.

Na invoering van bolcoördinaten (θ, φ) volgt

$$V(r) = \frac{a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{ar} [r + a - |r - a|] = \begin{cases} \frac{a}{\epsilon_0} & \text{voor } 0 \leq r \leq a, \\ \frac{a^2}{\epsilon_0 r} & \text{voor } r \geq a; \end{cases}$$

hierbij is ϵ_0 de permittiviteit van vacuum.

Binnen de bol $r = a$ is V constant, dus het elektrische veld is daar nul.

Buiten de bol $r = a$ is de potentiaal dezelfde als die van een lading $4\pi a^2$ in de oorsprong.

2.4.8. De potentiaal V hangt slechts af van de afstand r tot de oorsprong: $V = V(r)$.

(i) Na invoering van bolcoördinaten (ρ, θ, φ) volgt

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a d\rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \sin \theta}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta}} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho}{r} [r + \rho - |r - \rho|] d\rho = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon_0} (a^2 - \frac{1}{3} r^2) & \text{voor } 0 \leq r \leq a, \\ \frac{a^3}{3\epsilon_0 r} & \text{voor } r \geq a; \end{cases}$$

hierbij is ϵ_0 de permittiviteit van vacuum.

(ii) $V(r)$ voldoet aan de Poisson vergelijking

$$\Delta V = V_{rr} + \frac{2}{r} V_r = \begin{cases} -1/\epsilon_0 & \text{voor } 0 \leq r < a, \\ 0 & \text{voor } r > a. \end{cases}$$

De algemene oplossing van deze gewone DV luidt

$$V = V_1(r) = A + \frac{B}{r} - \frac{r^2}{6\epsilon_0} \quad \text{voor } 0 \leq r \leq a,$$

$$V = V_2(r) = C + \frac{D}{r} \quad \text{voor } r \geq a,$$

waarin A, B, C en D willekeurige constanten zijn.

Opdat V eindig is in $r = 0$, moet $B = 0$ zijn. Stel voorts $C = 0$, overeenkomend met een potentiaal 0 op oneindig.

Op het boloppervlak $r = a$ gelden de aansluitvoorwaarden

$$V_1 = V_2, \quad \frac{dV_1}{dr} = \frac{dV_2}{dr},$$

waaruit volgt: $A = \frac{a^2}{2\epsilon_0}$, $D = \frac{a^3}{3\epsilon_0}$.

N.B. In het buitengebied $r > a$ is de potentiaal dezelfde als die van een lading $(4\pi/3)a^3$ in de oorsprong.

2.4.9. a) $V(0,0,z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + z^2} - |z|);$

$V(0,0,z)$ is continu in $z = 0$;

$V_z(0,0,z)$ is discontinu in $z = 0$: $V_z(0,0,0+) = -\frac{1}{2}$, $V_z(0,0,0-) = \frac{1}{2}$.

b) $W(0,0,z) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) dxdy = \frac{1}{2}z \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right];$

$W(0,0,z)$ is discontinu in $z = 0$: $W(0,0,0+) = \frac{1}{2}$, $W(0,0,0-) = -\frac{1}{2}$;

$W_z(0,0,z)$ is continu in $z = 0$.

De factor ϵ_0 (= permittiviteit van vacuum) is gemakshalve weggelaten.

2.4.10. Voor elk boloppervlak $B(\rho)$ met middelpunt $\underline{\xi}$ en straal ρ , $0 < \rho \leq r$, geldt op grond van de (eerste) middelwaarde-eigenschap

$$u(\underline{\xi}) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{B(\rho)} u \, d\sigma, \quad 4\pi\rho^2 u(\underline{\xi}) = \iint_{B(\rho)} u \, d\sigma.$$

Integreer de laatste betrekking naar ρ van 0 tot r , dan volgt

$$\frac{4\pi}{3} r^3 u(\underline{\xi}) = \int_0^r d\rho \iint_{B(\rho)} u \, d\sigma = \iiint_R u \, d\tau, \quad u(\underline{\xi}) = \frac{3}{4\pi r^3} \iiint_R u \, d\tau.$$

2.4.11. Laat $\underline{\xi} = (\xi, \eta)$ een vast punt in G zijn en laat r de afstand van $\underline{x} = (x, y)$ tot $\underline{\xi}$ voorstellen: $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$. Substitueer in de tweede identiteit van Green (zie 2.4.2) voor v de functie

$$v(\underline{x}) = -\frac{1}{2\pi} \log r.$$

Dan volgt de derde identiteit van Green:

$$u(\underline{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \iint_G \Delta u \log r \, dx dy - \frac{1}{2\pi} \int_K [\log r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n}(\log r)] ds, \quad \underline{\xi} \in G;$$

hierin is \underline{n} de naar buiten gerichte normaal op K .

2.4.12. Ga uit van de derde identiteit van Green (zie 2.4.11) en neem voor K de cirkel C , dan is

$$\begin{aligned} u(\underline{\xi}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_C [\log r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n}(\log r)] ds = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \log \rho \int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds + \frac{1}{2\pi\rho} \int_C u ds = \frac{1}{2\pi\rho} \int_C u ds, \end{aligned}$$

wegens $\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ voor een harmonische functie.

2.4.13. Zij $\underline{\xi} = (\xi, \eta)$ een vast punt in G , dan wordt de Greense functie $G(\underline{x}, \underline{\xi})$ gedefinieerd door de volgende eigenschappen:

(i) $\Delta G = -\delta(\underline{x} - \underline{\xi}), \underline{x} = (x, y) \in G;$

(ii) $G(\underline{x}, \underline{\xi}) = 0, \underline{x} \in K.$

Vervang in de tweede identiteit van Green (zie 2.4.2) u door de oplossing $u(\underline{x})$ van het Dirichlet probleem en stel $v = G(\underline{x}, \underline{\xi})$, dan volgt

$$u(\underline{\xi}) = \iint_G G(\underline{x}, \underline{\xi}) f(\underline{x}) dx dy - \int_K g(\underline{x}) \frac{\partial}{\partial n} G(\underline{x}, \underline{\xi}) ds, \underline{\xi} \in G;$$

hierbij is \underline{n} de naar buiten gerichte normaal op K .

2.5.1. Het gemengde probleem beschrijft de transversale trilling van een membraan. Neem aan dat het probleem twee oplossingen $u_1(\underline{x}, t)$ en $u_2(\underline{x}, t)$ zou bezitten. Het verschil $v(\underline{x}, t) := u_1(\underline{x}, t) - u_2(\underline{x}, t)$ is dan oplossing van het bijbehorende homogene probleem. Voer in de energie-integraal

$$E(t) = \frac{1}{2} \iint_G \left[\frac{1}{c^2} v_t^2(\underline{x}, t) + |\text{grad } v(\underline{x}, t)|^2 \right] dx dy,$$

dan is

$$E'(t) = \iint_G \left[\frac{1}{c^2} v_t v_{tt} + (\text{grad } v_t, \text{grad } v) \right] dx dy.$$

De tweede term van de integraal is te herleiden met de eerste identiteit van Green waarna volgt

$$E'(t) = \iint_G \left[\frac{1}{c^2} v_t v_{tt} - v_t \Delta v \right] dx dy + \int_K v_t \frac{\partial v}{\partial n} ds = 0,$$

wegens $\Delta v - \frac{1}{c^2} v_{tt} = 0$ in G en $v_t = 0$ op K .

Op grond van de (homogene) beginvoorwaarden is $E(0) = 0$, dus $E(t) = 0$ voor $t \geq 0$. Uit de definitie van $E(t)$ volgt dan: $v_t = 0$, $\text{grad } v = \underline{0}$; $v(\underline{x}, t)$ is constant; $v(\underline{x}, t) = 0$ voor $\underline{x} \in G$, $t \geq 0$. Dit betekent dat de twee oplossingen $u_1(\underline{x}, t)$ en $u_2(\underline{x}, t)$ samenvallen.

2.5.2. Het gemengde probleem beschrijft de warmtegeleiding in een staaf met lengte ℓ , waarbij in het uiteinde $x = 0$ de temperatuur en in het uiteinde $x = \ell$ de warmtestroom is voorgeschreven.

Neem aan dat het probleem twee oplossingen $u_1(x,t)$ en $u_2(x,t)$ zou bezitten. Het verschil $v(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t)$ is dan oplossing van het bijbehorende homogene probleem. Voer in de integraal

$$I(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} v^2(x,t) dx ,$$

dan is

$$I'(t) = \int_0^{\ell} v v_t dx = \kappa \int_0^{\ell} v v_{xx} dx .$$

Herleid de laatste integraal door partiële integratie:

$$I'(t) = \kappa v v_x \Big|_0^{\ell} - \kappa \int_0^{\ell} v_x^2 dx = -\kappa \int_0^{\ell} v_x^2 dx \leq 0 ,$$

waarbij de stokterm wegvalt wegens $v(0,t) = v_x(\ell,t) = 0$.

Uit $I'(t) \leq 0$ en $I(0) = 0$, $I(t) \geq 0$ volgt $I(t) = 0$ voor $t \geq 0$. Op grond van de definitie van $I(t)$ is dan $v(x,t) = 0$ voor $0 \leq x \leq \ell$, $t \geq 0$. Dit betekent dat de twee oplossingen $u_1(x,t)$ en $u_2(x,t)$ samenvallen.

2.5.3. Het probleem beschrijft de warmtegeleiding in een drie-dimensionaal lichaam waarbij op het uitwendig oppervlak de stralingsrandvoorwaarde geldt.

Voer in de integraal

$$I(t) = \frac{1}{2} \iiint_R u^2(\underline{x},t) d\tau ,$$

dan is

$$I'(t) = \iiint_R u u_t d\tau = \kappa \iiint_R u \Delta u d\tau .$$

Herleid de laatste integraal met de eerste identiteit van Green:

$$\begin{aligned} I'(t) &= -\kappa \iiint_R |\text{grad } u|^2 d\tau + \kappa \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \\ &= -\kappa \iiint_R |\text{grad } u|^2 d\tau - \kappa h \iint_S u^2 d\sigma \leq 0 . \end{aligned}$$

Wegens $I(0) = 0$, $I(t) \geq 0$ volgt dan $I(t) = 0$ voor $t \geq 0$. Op grond van de definitie van $I(t)$ is vervolgens $u(\underline{x}, t) = 0$ voor $\underline{x} \in R$, $t \geq 0$.

Tentamenopgaven

1.1. Gegeven het veld

$$\underline{a} = \left(\frac{4}{3} x^3 + y^2, 2xy - \frac{4}{3} y^3 + z^2, 2yz \right).$$

- a) Toon aan dat dit veld rotatievrij is.
- b) Bepaal een potentiaal van \underline{a} .

1.2. Het veld $\underline{u} = (e^y, e^z, e^x)$, gedefinieerd in \mathbb{R}^3 , is een vectorpotentiaal van een veld \underline{v} ; het veld \underline{v} is zelf weer een vectorpotentiaal van een veld \underline{w} .

- a) Bepaal het veld \underline{w} .
- b) Het veld \underline{u} heeft zelf ook een vectorpotentiaal. Waarom?
- c) Bepaal een mogelijke vectorpotentiaal van \underline{u} .

1.3. Op de cylinder $x^2 + y^2 = 1$ is K de schroeflijn $(\cos \varphi, \sin \varphi, \varphi)$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, met beginpunt P(-1,0,- π) en eindpunt Q(-1,0, π); L is de rechte van P naar Q. \underline{a} is het vectorveld (y, z, x) .

a) Bereken $\int_K (\underline{a}, \underline{t}) ds$.

b) Bereken $\int_L (\underline{a}, \underline{t}) ds$.

- c) Is het veld \underline{a} conservatief?

1.4. Gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 - 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 - 1}, 2z \right).$$

- a) Bewijs: $\text{rot } \underline{u} = \underline{0}$ voor $x^2 + y^2 \neq 1$.
- b) Is het veld conservatief binnen de cylinder met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$?
- c) Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$, waarbij K de kromme is, met beginpunt (0,0,0) en eindpunt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, gegeven door

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ y = x, \end{cases}$$

terwijl \underline{t} de eenheidsraakvector aan K is.

1.5. Gegeven het veld

$$\underline{a} = \left(\frac{xz}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{yz}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-1}{2(x^2 + y^2)} \right).$$

a) Toon aan dat dit veld rotatievrij is.

Volgt hieruit dat het veld binnen de bol B: $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$ conservatief is? Motiveer Uw antwoord.

b) Bereken

$$\int_{(1,-1,-\pi/4)}^{(1,1,\pi/4)} (\underline{a}, \underline{t}) ds,$$

waarin \underline{t} de eenheidsraakvector is aan een van $(1,-1,-\pi/4)$ naar $(1,1,\pi/4)$ binnen B verlopende kromme (eventueel een gebroken lijn; N.B. een verbinding naar eigen keuze aangeven en daarlangs integreren).

c) Geef een potentiaal van \underline{a} .

1.6. Van het vectorveld $\underline{u}(\underline{x})$ in \mathbb{R}^3 is gegeven, dat in elk punt \underline{x} geldt: $\text{rot } \underline{u} = \underline{0}$ en $(\underline{u}, \underline{x}) = 0$; K is een kromme met beginpunt $\underline{0}$ en eindpunt \underline{p} .

a) Formuleer de stelling volgens welke het veld $\underline{u}(\underline{x})$ conservatief is.

b) Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$.

c) Bewijs dat $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{0}$ voor elke \underline{x} .

1.7. In \mathbb{R}^3 is de vectorfunctie \underline{u} gedefinieerd door

$$\underline{u}(x,y,z) = (y, -x, y-x).$$

K is de doorsnijdingskromme van het vlak met vergelijking $x + y + z = 0$, en de cylinder met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$; \underline{t} is een continu verlopende eenheidsraakvector aan K.

Bereken: a) $\text{rot } \underline{u}$; b) $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$.

1.8. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = (x, y, z) .$$

Bereken $\iint_S (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$, waarbij het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z , \\ 1 \leq z \leq 4 , \end{cases}$$

en de normaal \underline{n} van de z -as af wijst.

1.9. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} , \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} , 2 \right) .$$

a) Bereken $\iint_S (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$, waarbij het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 , \\ 1 \leq z \leq 2 , \end{cases}$$

en \underline{n} de normaal is die van de z -as af wijst.

b) Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$ als K de kromme is in het eerste octant, gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 , \\ x + z = 2 , \end{cases}$$

met beginpunt $(1, 0, 1)$ en eindpunt $(0, 2, 2)$.

1.10. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = (z + x, y, z - x) .$$

a) Is het veld \underline{u} conservatief? Motiveer Uw antwoord.

b) Bereken $\iint_S (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$ als S de cylindermantel voorstelt, gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 , \\ 0 \leq z \leq 1 . \end{cases}$$

De normaal \underline{n} wijst van de z -as af.

c) Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$ als K gegeven wordt door

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

De eenheidsraakvector \underline{t} in het punt $(0, 1, -1)$ is gelijk aan $(-1, 0, 0)$.

1.11. In \mathbb{R}^3 is gegeven het veld

$$\underline{u} = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Bereken:

a) Een potentiaal ϕ van \underline{u} .

b) $\iint_S z(\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$ als S de cylindermantel voorstelt, gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 \leq z \leq 1, \end{cases}$$

en \underline{n} de van de z-as af gerichte normaal.

c) $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$ als K de in het eerste octant gelegen kromme voorstelt, gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y - z = 0, \end{cases}$$

met beginpunt $(1, 0, 1)$ en eindpunt $(0, 1, 1)$.

1.12. Gegeven het vectorveld

$$\underline{a} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 1 \right).$$

a) Bereken $\iint_S (\underline{a}, \underline{n}) d\sigma$, als S de cylindermantel voorstelt, gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 \leq z \leq 1, \end{cases}$$

en \underline{n} de naar buiten gerichte normaal.

- b) Bepaal $\int_K (\underline{a}, \underline{t}) ds$, waarbij K de kromme voorstelt, beginnend in (1,0,0) en eindigend in (0,1,1), gelegen in het eerste octant en verder gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + 2y - z = 1, \end{cases}$$

terwijl \underline{t} de eenheidsraakvector is.

1.13. Gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} + y, 2z \right).$$

- a) Bereken rot \underline{u} .
b) Toon aan dat het veld \underline{u} conservatief is in de halfruimte $x > 1$.
c) Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$, waarbij de kromme K bepaald is door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

en waarin de eenheidsraakvector \underline{t} in het punt (1,0,0) gelijk is aan (0,1,0).

- d) Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$, waarbij de kromme K bepaald is door

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ x + z = 4, \end{cases}$$

en \underline{t} in (2,0,2) gelijk is aan (0,1,0).

1.14. Gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = (x + z - y, x - z, y - x).$$

- a) Is het veld \underline{u} conservatief? Motiveer Uw antwoord.
b) Bereken $\iint_S (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$ als S de cylindermantel voorstelt, gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

De normaal \underline{n} wijst van de oorsprong af.

c) Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$, waarbij de kromme K bepaald is door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

De eenheidsraakvector \underline{t} in het punt $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ is gelijk aan $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$.

1.15. Gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right), \text{ met } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bereken $\iiint_S (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$, waarin S de halve bol is, gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1, \\ y \geq 1. \end{cases}$$

De normaal \underline{n} wijst van de oorsprong af.

1.16. In \mathbb{R}^3 is gegeven het veld

$$\underline{u} = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, -2 \log z \right).$$

Bereken:

a) $\text{div } \underline{u}$.

b) $\iiint_S (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$ als S de kegelmantel is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ 1 \leq z \leq 2, \end{cases}$$

en \underline{n} de van de z-as af gerichte normaal.

c) $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$ als K de in het eerste octant gelegen kromme voorstelt, gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x = z, \end{cases}$$

met beginpunt $(1, 0, 1)$ en eindpunt $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

1.17. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z \right) .$$

a) K is de kromme met beginpunt $(-1,1,2)$ en eindpunt $(1,1,2)$ bepaald door

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$, waarin \underline{t} de eenheidsraakvector aan de kromme is.

b) Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$ langs de gesloten kromme K gegeven door

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x + z = 1. \end{cases}$$

In het punt $(0,1,1)$ is de eenheidsraakvector \underline{t} gelijk aan $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

c) Bereken $\iint_S (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$ als het oppervlak S wordt gegeven door

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ 1 \leq z \leq 2. \end{cases}$$

De normaal \underline{n} wijst van de z-as af.

1.18. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = (xz, yz, -z^2) .$$

a) Bereken $\iint_S (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$, waarbij het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} z = xy, \\ 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

In $(0,0,0)$ is de normaal $\underline{n} = (0,0,1)$.

b) Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$, als K de kromme is in het eerste octant gegeven door

$$\begin{cases} z = xy, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

met beginpunt $(1,0,0)$ en eindpunt $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2})$.

c) Bepaal een vectorpotentiaal van het veld \underline{u} .

1.19. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 - 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 - 1}, \frac{2z}{(x^2 + y^2 - 1)^2} \right).$$

a) Bereken $\iint_S (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$, waarbij S de kegelmantel voorstelt gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ 0 \leq z \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

en de normaal \underline{n} van de z -as af wijst.

b) Toon aan dat in elk punt van het oppervlak $x^2 + y^2 = a^2$ ($a^2 \neq 1$) de vector rot \underline{u} raakt aan dit oppervlak.

c) Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$, als K de kromme is in het eerste octant gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \\ 2x + 4y - z = 1, \end{cases}$$

met beginpunt $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ en eindpunt $(0, \frac{1}{2}, 1)$.

1.20. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u}(x,y,z) = (x^3 + 2y + z, y^3 + 2x + z, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x + y).$$

K is de doorsnijdingskromme van het vlak

$$V: x + y - z = 1$$

en het oppervlak

$$S: \begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

Bereken met behulp van de stelling van Stokes $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$, waarbij K doorlopen wordt van $(1,0,0)$ naar $(0,1,0)$.

1.21. In \mathbb{R}^3 is het volgende vectorveld gegeven:

$$\underline{a}(\underline{x}) = (\cos x, -z, y) .$$

Bepaal $\iint_S (\text{rot } \underline{a}, \underline{n}) d\sigma$, waarin S het oppervlak voorstelt, gedefinieerd door

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4 , \\ x \geq 0 , \end{cases}$$

en \underline{n} de naar $(1,0,0)$ gerichte normaal op S .

1.22. Gegeven het vectorveld

$$\underline{a} = (z^2 x^2, 2x^4 - 2xyz^2, z - 1) .$$

a) Bepaal $\text{div } \underline{a}$.

b) Het oppervlak S in \mathbb{R}^3 is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 , \\ z \geq 0 . \end{cases}$$

Bereken $\iint_S (\underline{a}, \underline{n}) d\sigma$. De normaal \underline{n} wijst van de oorsprong af.

1.23. Gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = (z^2, x^2, y^2) .$$

a) Bereken $\text{div } \underline{u}$.

b) Het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1 , \\ z \geq 0 . \end{cases}$$

Bereken $\iint_S (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$. De normaal \underline{n} wijst van de oorsprong af.

c) Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$ langs de cirkel K bepaald door

$$\begin{cases} y = 1 , \\ x^2 + z^2 = 1 . \end{cases}$$

In het punt $(1,1,0)$ is de eenheidsraakvector \underline{t} gelijk aan $(0,0,-1)$.

1.24. In \mathbb{R}^3 is gedefinieerd het vectorveld $\underline{u} = (4x, 2y, -4z)$.

a) Laat het oppervlak S in \mathbb{R}^3 bepaald zijn door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0, \\ 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Bereken $\iint_S (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$. S wordt zo georiënteerd dat de normaal \underline{n} in $(0, 0, 0)$ gelijk is aan $(0, 0, -1)$.

b) Laat de kromme K met beginpunt $(0, 0, 0)$ en eindpunt $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ bepaald zijn door

$$\begin{cases} x = \cos^2 \varphi \sin \varphi, \\ y = \cos \varphi \sin^2 \varphi, \\ z = \varphi. \end{cases} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4})$$

Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$, waarin \underline{t} de eenheidsraakvector aan de kromme K voorstelt.

1.25. Men beschouwt gladde krommen K met beginpunt $(-2, 0, 0)$ en eindpunt $(2, 0, 0)$ gelegen op de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Bewijs dat voor het vectorveld

$$\underline{u} = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$$

de integraal $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$ onafhankelijk is van de keuze van K , en bereken deze integraal.

1.26. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = (x^2 + 2xy - x, -y^2 - 2xy + 1, z).$$

a) Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$, als K de kromme is in het eerste octant gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 - z = 0, \\ x + y - 1 = 0, \end{cases}$$

met beginpunt $(1, 0, 1)$ en eindpunt $(0, 1, 3)$.

b) Bereken een vectorpotentiaal van \underline{u} .

1.27. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = (x^2y, -xy^2, 1) .$$

De kromme Γ wordt gegeven door

$$\underline{x} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi .$$

Zij S een willekeurig gekozen oriënteerbaar oppervlak in \mathbb{R}^3 met rand Γ . Laat \underline{n} de normaal op S zijn die correspondeert met de omloopszin van Γ volgens toenemende φ .

Bewijs dat $\iint_S (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$ onafhankelijk is van de keuze van S en bereken deze integraal.

1.28. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = (x^2 - z^2 - 2xy^2, 2y^2 - 2x^2 - 2z^2, 2z^2 - 2y^2z - 2xz) .$$

Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$, als K de kromme is in het eerste octant gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 , \\ x = z , \end{cases}$$

met beginpunt $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ en eindpunt $(0, 1, 0)$.

1.29. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u} = (\frac{1}{2}x^2y - xyz, xz + xz^2, \frac{1}{2}yz^2 - xyz) .$$

Bereken $\iint_S (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$, waarbij het oppervlak S gegeven is door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 , \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 1 , \end{cases}$$

en de normaal \underline{n} van de oorsprong af wijst.

1.30. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u}(x,y,z) = (y + z^2, y^2, xz + y) .$$

Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$, waarbij K de kromme is gegeven door

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 , \\ x + z = 1 , \\ x \geq 0 , \end{cases}$$

met beginpunt $(0,-1,1)$ en eindpunt $(0,1,1)$.

Aanwijzing: Maak gebruik van de stelling van Stokes.

1.31. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u}(x,y,z) = (\cos z, y - z, 1 - z) .$$

a) Bepaal een vectorpotentiaal van \underline{u} .

b) Bereken $\iint_S (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$, waarbij het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 , \\ z \geq 0 , \end{cases}$$

en de normaal \underline{n} van de oorsprong af wijst.

1.32. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u}(\underline{x}) = (x^2 y^2, z^2, -2xy^2 z + z + 1) .$$

Bereken $\iint_S (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$, waarbij het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 , \\ z \geq 0 , \end{cases}$$

en de normaal \underline{n} van de oorsprong af wijst.

1.33. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{u}(\underline{x}) = (xz - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy, -\frac{1}{2}y^2 + yz - \frac{1}{2}z^2, -z^2) .$$

a) Toon aan dat in elk punt van het oppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ de vector rot \underline{u} raakt aan dit oppervlak.

b) Bereken $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds$, als K de kromme is in het eerste octant gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 , \\ x + y = 4 , \end{cases}$$

met beginpunt $(0,4,0)$ en eindpunt $(4,0,0)$.

1.34. Voor de punten van \mathbb{R}^3 die niet op de z-as liggen is de functie f gedefinieerd door

$$f(x,y,z) = \log(x^2 + y^2) .$$

C is het gedeelte van de cylinder met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ dat gelegen is tussen de vlakken V_1 en V_2 met vergelijkingen $z = 1$ resp. $z = -1$.

B is het gedeelte van de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ dat gelegen is tussen de vlakken V_1 en V_2 .

De normalen op C en B wijzen van de z-as af.

a) Bereken $\iint_C (\text{grad } f, \underline{n}) d\sigma$.

b) Bewijs dat

$$\iint_B (\text{grad } f, \underline{n}) d\sigma = \iint_C (\text{grad } f, \underline{n}) d\sigma .$$

1.35. Gegeven is het vectorveld

$$\underline{a} = \left(\frac{x}{r^3} - y, \frac{y}{r^3} + x, \frac{z}{r^3} + z \right)$$

waarin $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, en de oppervlakken

$$S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad S_2: x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4 .$$

Bereken de beide integralen $\iint_{S_1} (\underline{a}, \underline{n}) d\sigma$ en $\iint_{S_2} (\underline{a}, \underline{n}) d\sigma$, waarbij \underline{n} de naar buiten wijzende normaalvector is.

1.36. Bepaal in \mathbb{R}^3 een vectorveld \underline{v} zodanig dat

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{v} = 0 , \\ \operatorname{rot} \underline{v} = (yz, xz, -2xy) . \end{cases}$$

1.37. Bepaal in \mathbb{R}^3 een vectorveld \underline{v} dat voldoet aan

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{v} = x + 2y + z , \\ \operatorname{rot} \underline{v} = (x, -2y, z) . \end{cases}$$

1.38. Bepaal in \mathbb{R}^3 een vectorveld \underline{v} dat voldoet aan

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{v} = 2xy + 2yz + 2xz , \\ \operatorname{rot} \underline{v} = (y^2, z^2, x^2) . \end{cases}$$

2.1. De temperatuurverdeling $T(x,t)$ in een geïsoleerde staaf voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$(i) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} , \quad 0 < x < \pi, t > 0 ,$$

aan de beginvoorwaarde

$$(ii) \quad T(x,0) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi ,$$

en aan de randvoorwaarden

$$(iii) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\pi} = 0, \quad t > 0 .$$

a) Bewijs dat de functies

$$\cos kx e^{-k^2 t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots ,$$

voldoen aan de differentiaalvergelijking (i) en aan de randvoorwaarden (iii).

b) Bepaal de functie $T(x,t)$ die voldoet aan (i), (ii) en (iii).

2.2. Op de rand van een cirkelvormige schijf met straal 2 is de temperatuurverdeling $T(2,\varphi) = \cos \frac{1}{2}\varphi$ met $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ gegeven. De temperatuurverdeling $T(r,\varphi)$ in de schijf voldoet aan de Laplace vergelijking in poolcoördinaten

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leq r < 2, -\pi \leq \varphi \leq \pi .$$

a) Bepaal de functie $T(r,\varphi)$ die voldoet aan de differentiaalvergelijking en aan de randvoorwaarde.

b) Bereken $T(\frac{1}{2}, 0)$ in twee decimalen nauwkeurig.

2.3. Een dunne homogene snaar trilt in het (x, u) -vlak om zijn evenwichtsstand $u = 0$. De uitwijking $u(x, t)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

De beginvoorwaarden zijn

$$(2) \quad u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x & \text{voor } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi, \\ \pi - x & \text{voor } \frac{1}{2}\pi \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

De randvoorwaarden zijn

$$(4) \quad u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

a) Leid af, met behulp van de methode van separatie, dat de functies

$$B_n \sin nx \cos nt, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

voldoen aan (1), (3) en (4).

b) Bepaal met behulp van de functies onder a) de oplossing $u(x, t)$ die bovendien aan (2) voldoet.

2.4. Een snaar is gespannen tussen de vaste punten $A = (0, 0)$ en $B = (\pi, 0)$. Op het tijdstip $t = 0$ is de snelheid van de snaar nul en de uitwijking

$$u(x, 0) = \sin 3x + \sin 17x.$$

De snaarvergelijking luidt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Bepaal met behulp van de methode van separatie van variabelen de uitwijking $u(x, t)$ voor $0 \leq x \leq \pi$, $t > 0$.

2.5. We beschouwen de stationaire temperatuurverdeling in een cirkelvormige schijf met straal 1.

Deze temperatuurverdeling voldoet aan de Laplace vergelijking in poolcoördinaten

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 < r < 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

en aan de voorwaarden

$$T(r, \varphi) \text{ is begrensd,}$$

$$T(1, \varphi) = 1 + \sin \varphi + \cos \varphi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Gevraagd wordt de temperatuurverdeling $T(r, \varphi)$ in de schijf.

2.6. We beschouwen de stationaire temperatuurverdeling $T(r, \varphi)$ in een vlakke oneindig grote plaat met een cirkelvormig gat met straal 1.

$T(r, \varphi)$ voldoet aan

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, \quad r > 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \\ T(r, \varphi) \text{ is begrensd voor } r \geq 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \\ T(1, \varphi) = 2 \sin \varphi + \sin 2\varphi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \end{array} \right.$$

Bepaal met behulp van de methode van separatie van variabelen $T(r, \varphi)$ voor $r \geq 1, -\pi \leq \varphi \leq \pi$.

2.7. De temperatuurverdeling $T(r, \varphi)$ in een halve cirkelschijf, in poolcoördinaten gegeven door $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi$, voldoet aan de Laplace vergelijking

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \varphi < \pi,$$

en aan de voorwaarden

$$T(r, 0) = T(r, \pi) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

$$T(1, \varphi) = \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

$$T(r, \varphi) \text{ is begrensd op de halve cirkelschijf.}$$

Bepaal met de methode van separatie van variabelen de temperatuurverdeling $T(r, \varphi)$ in de halve cirkelschijf.

2.8. De temperatuur $T(x,t)$ in een dunne homogene staaf langs de x -as tussen de punten $x = 0$ en $x = \frac{\pi}{2}$ voldoet aan

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0, \\ T(0,t) = 0, \frac{\partial T}{\partial x}(\frac{\pi}{2}, t) = 0, & t \geq 0, \\ T(x,0) = \sin 13x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Bepaal met de methode van separatie van variabelen $T(x,t)$ voor $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, t > 0$.

2.9. De temperatuurverdeling $W(x,t)$ in een dunne staaf, gelegen langs de x -as tussen $x = 0$ en $x = \pi$, voldoet aan

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ W(0,t) = W(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ W(x,0) = e^x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Bepaal met de methode van separatie van variabelen $W(x,t)$ voor $0 \leq x \leq \pi, t > 0$.

2.10. De stationaire temperatuurverdeling $T(x,y)$ in het vierkant $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ voldoet aan

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ T(0,y) = T(1,y) = 0, & 0 \leq y \leq 1, \\ T(x,0) = 0, T(x,1) = \sin 2\pi x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Bepaal $T(x,y)$ voor $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ met de methode van separatie van variabelen.

2.11. De tijdafhankelijke warmtegeleidingsvergelijking voor een dunne homogene staaf langs de x -as heeft de gedaante

$$(1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

waarin T de temperatuur en t de tijd is.

Beschouw een staaf ter lengte π .

Gevraagd wordt een functie $T(x,t)$ te bepalen, die aan (1) voldoet (voor $0 < x < \pi$, $t > 0$) en aan de voorwaarden

$$T(0,t) = 0, \quad T(\pi,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$T(x,0) = 2, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

2.12. Een dunne vlakke ringvormige schijf, begrensd door cirkels met straal 1 resp. 2, wordt langs de binnencirkel op temperatuur 1 gehouden en langs de buiten-cirkel op temperatuur 2.

De temperatuurverdeling in de schijf voldoet aan de Laplace vergelijking

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

(in poolcoördinaten: $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0$).

Bepaal de temperatuurverdeling.

2.13. De stationaire temperatuurverdeling $T(x,y)$ in de halfoneindige strook $0 \leq x \leq 1$, $y \geq 0$ voldoet aan

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y > 0, \\ T(x,y) \text{ is begrensd voor } 0 \leq x \leq 1, \quad y \geq 0, \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial T}{\partial x}(1,y) = 0, \quad y > 0, \\ T(x,0) = \cos 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{array} \right.$$

Bepaal met de methode van separatie van variabelen $T(x,y)$ voor $0 \leq x \leq 1$, $y > 0$

2.14. Een dunne homogene snaar, gespannen langs de x-as tussen de punten $x = 0$ en $x = 2$, trilt om zijn evenwichtsstand. De uitwijking $u(x,t)$ op de plaats x ten tijde t voldoet aan

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 2. \end{array} \right.$$

Bepaal met de methode van separatie van variabelen $u(x,t)$ voor $0 \leq x \leq 2$, $t > 0$.

- 2.15. De stationaire temperatuurverdeling in een kwart cirkelschijf met straal 2, in poolcoördinaten gegeven door $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, voldoet aan

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, & 0 < r < 2, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ T(r, 0) = T(r, \frac{\pi}{2}) = 0, & 0 \leq r \leq 2, \\ T(2, \varphi) = 3 \sin 4\varphi + 5 \sin 6\varphi, & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ T(r, \varphi) \text{ is begrensd op de kwart cirkelschijf.} \end{cases}$$

Bepaal $T(r, \varphi)$ voor $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ met de methode van separatie van variabelen.

- 2.16. De temperatuurverdeling $W(x, t)$ in een dunne homogene staaf, gelegen langs de x -as tussen de punten $x = 0$ en $x = l$, voldoet aan

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, & 0 < x < l, t > 0, \\ \frac{\partial W}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial W}{\partial x}(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ W(x, 0) = 1 + \cos \frac{\pi x}{l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Bepaal $W(x, t)$ voor $0 \leq x \leq l$, $t > 0$ met de methode van separatie van variabelen.

- 2.17. De tijdafhankelijke warmtegeleiding in een dunne homogene staaf langs de x -as voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial W}{\partial t} = k \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

($W(x, t)$ is de temperatuur ter plaatse x en ten tijde t ; k is de warmtegeleidingscoëfficiënt).

Beschouw een dergelijke staaf tussen $x = 0$ en $x = 2\pi$ die aan beide uiteinden geïsoleerd is, d.w.z.

$$\frac{\partial W}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial W}{\partial x}(2\pi, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

De begintemperatuur is

$$W(x, 0) = 2 + \cos \frac{1}{2}x + \cos \frac{3}{2}x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Bepaal met behulp van de methode van separatie van variabelen $W(x,t)$ voor $0 \leq x \leq 2\pi$, $t \geq 0$.

Wat wordt de stationaire temperatuurverdeling in de staaf?

2.18. De temperatuurverdeling $T(r,\varphi)$ in het gebied G , in poolcoördinaten gegeven door $r \geq 2$, $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$, voldoet aan de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0$$

en aan de voorwaarden

$$T(r, \frac{\pi}{6}) = T(r, \frac{\pi}{3}) = 0, \quad r \geq 2,$$

$$T(2, \varphi) = \sin 6\varphi, \quad \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3},$$

$T(r,\varphi)$ is begrensd op G .

Bepaal met de methode van separatie van variabelen de temperatuurverdeling $T(r,\varphi)$ in G .

2.19. De stationaire temperatuurverdeling $T(x,y)$ in het vierkant $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, voldoet aan de Laplace vergelijking

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi,$$

en aan de randvoorwaarden

$$T(x,0) = T(x,\pi) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$T(0,y) = 0, \quad T(\pi,y) = 1 - \cos 2y, \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Bepaal met behulp van de methode van separatie van variabelen $T(x,y)$ voor $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$.

2.20. a) Bereken

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \cos \mu x \, dx, \quad \mu \text{ reëel.}$$

b) De tijdafhankelijke warmtegeleidingsvergelijking voor een dunne homogene staaf langs de x -as heeft de gedaante

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

waarin T de temperatuur en t de tijd is.

Beschouw een oneindig lange staaf.

Bepaal $T(x,t)$ in de vorm van een Fourier integraal als gegeven is

$$T(x,0) = e^{-|x|} \cos x, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$T(x,t) \text{ is begrensd voor } -\infty < x < \infty, t \geq 0.$$

2.21. De temperatuurverdeling $W(x,t)$ in een dunne homogene staaf, gelegen langs de x -as tussen $x = 0$ en $x = 1$, voldoet aan

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ W(0,t) = W(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ W(x,0) = 4 \sin 2\pi x \cos \pi x + 13 \sin 3\pi x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Bepaal $W(x,t)$ voor $0 \leq x \leq 1, t > 0$ met behulp van de methode van separatie van variabelen.

2.22. Een homogene snaar trilt in het (x,u) -vlak en is vastgemaakt in $(0,0)$ en $(1,0)$.

De trillingsvergelijking van de snaar luidt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0.$$

Voor de uitwijking u en de snelheid $\frac{\partial u}{\partial t}$ op het tijdstip $t = 0$ geldt

$$u(x,0) = 2 \sin 6\pi x \cos 4\pi x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2 \sin 4\pi x \cos 6\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Bepaal met behulp van de methode van separatie van variabelen de uitwijking $u(x,t)$ voor $0 \leq x \leq 1, t > 0$.

- 2.23. Zij $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{r}$, waarbij r de afstand is van (x,y,z) tot het punt $(0,0,1)$.
 S is het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Bereken $\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma$, waarbij de normaal \underline{n} naar buiten gericht is.

- 2.24. Laat R een begrensd gebied in \mathbb{R}^3 zijn met randoppervlak S ; \underline{n} is de naar buiten gerichte normaal op S . Zij φ een harmonische functie met de eigenschap dat

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\varphi \text{ op } S .$$

Toon aan dat $\varphi(\underline{x}) = 0$ voor elke $\underline{x} \in R$.

- 2.25. Laat R een begrensd gebied in \mathbb{R}^3 zijn met randoppervlak S .
 Van de functies φ en ψ is gegeven: φ en ψ bezitten continue partiële afgeleiden van de tweede orde in R ; $\Delta \varphi = 0$ in R ; $\psi = 0$ op S .

Bewijs:

a)
$$\iiint_R (\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi) d\tau = 0 ,$$

b)
$$\iiint_R |\text{grad}(\varphi + \psi)|^2 d\tau \geq \iiint_R |\text{grad } \varphi|^2 d\tau .$$

- 2.26. In \mathbb{R}^3 is gegeven een begrensd gebied R met oriënteerbare rand S , zodanig dat de oorsprong \mathcal{O} buiten R ligt.

Zij $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ en \underline{n} de naar buiten gerichte normaal op S .

Toon aan dat

$$\iint_S (f \text{ grad } f, \underline{n}) d\sigma = \iiint_R |\text{grad } f|^2 d\tau .$$

- 2.27. Laat R een begrensd gebied in \mathbb{R}^3 zijn met randoppervlak S en zij \underline{p} een vast punt buiten R .

De afstand van \underline{p} tot een punt \underline{x} wordt aangegeven door r . Bewijs dat

$$\iint_S \frac{\partial r}{\partial n} d\sigma = 2 \iiint_R \frac{1}{r} d\tau ,$$

waarbij \underline{n} de naar buiten gerichte normaal op S is.

2.28. In \mathbb{R}^3 is het gebied R gegeven door $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

S is de rand van R .

Zij \underline{p} een vast punt binnen R . De afstand van \underline{p} tot een punt \underline{x} wordt aangegeven door r .

a) Toon aan dat voor $\underline{x} \in S$ geldt

$$\frac{\cos \alpha}{r^2} = -(\text{grad } \frac{1}{r}, \underline{n}) ;$$

hierbij is \underline{n} de naar buiten gerichte normaal op S en α de hoek tussen \underline{n} en $\underline{x} - \underline{p}$.

b) Toon vervolgens aan dat

$$\iint_S \frac{\cos \alpha}{r^2} d\sigma = 4\pi ,$$

waarbij α dezelfde hoek voorstelt als onder a).

Examen/tentamen juni 1976

1. In het gebied, gevormd door \mathbb{R}^3 minus de z-as, is het veld \underline{v} gegeven door

$$\underline{v}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0 \right).$$

Het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ -1 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

De normaal \underline{n} op S wijst van de oorsprong af.

a) Bereken $\text{div } \underline{v}$.

b) Bereken

$$\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma$$

met behulp van de stelling van Gauss.

c) Bepaal een vectorpotentiaal $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$ van \underline{v} zodanig dat $w_3 = 0$.

d) Bereken

$$\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma$$

met behulp van de stelling van Stokes.

2. a) Bepaal de oplossing $u(x,t)$ van het warmtegeleidingsprobleem

$$\begin{cases} u_{xx} + \alpha u = u_t & , \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin^2 \pi x & , \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Hierbij is de term αu ($\alpha > 0$) in de warmtegeleidingsvergelijking te interpreteren als een warmteproductie ten gevolge van een chemische reactie, die bij hogere temperatuur sneller verloopt.

b) Het bovenstaande proces heet stabiel als de oplossing $u(x,t)$ begrensd is, en anders labiel.

Bepaal de waarden van α waarvoor het proces stabiel respectievelijk labiel is.

3. Zij R een begrensd gebied in \mathbb{R}^3 met randoppervlak S .

a) De functie $u(\underline{x})$ voldoet in R aan $\Delta u - \alpha u = 0$, waarbij α een constante is en $\alpha \geq 0$. Bovendien geldt: $u(\underline{x}) = 0$ op S .

Toon aan dat $u(\underline{x}) = 0$ in R .

b) Toon aan dat de oplossing van het Dirichlet probleem:

$$\begin{cases} \Delta u - \alpha u = 0 & (\underline{x} \in R), \\ u(\underline{x}) = g(\underline{x}) & (\underline{x} \in S), \end{cases}$$

eenduidig is (α is constant en $\alpha \geq 0$).

Herkansingsexamen/tentamen juni 1976

1. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{v}(x,y,z) = (-y^2 + \alpha z^2, -2xy, y + 2\alpha xz),$$

waarin α een constante is.

a) Kan men α zodanig kiezen dat \underline{v} conservatief is?

Zo ja, bepaal bij die waarde(n) van α een scalaire potentiaal van \underline{v} .

b) Kan men α zodanig kiezen dat \underline{v} bronvrij is?

Zo ja, bepaal bij die waarde(n) van α een vectorpotentiaal van \underline{v} .

c) K is de snijkromme van de cylinder $y^2 + z^2 = 1$ en het vlak $x = z$.

Bereken

$$\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds,$$

waarbij $\underline{t} = (0, -1, 0)$ in het punt $(1, 0, 1)$.

2. Bepaal de oplossing $u(x,t)$ van het trillingsprobleem

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & -1 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(-1,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 1 - x^2, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

3. De temperatuurverdeling $T(x,t)$ in een halfoneindige staaf voldoet aan de warmtegeleidingsvergelijking:

$$T_{xx} - T_t = 0, \quad x > 0, \quad t > 0$$

en de beginvoorwaarde: $T(x,0) = \delta(x-1), \quad x \geq 0.$

In het uiteinde $x = 0$ van de staaf geldt één der randvoorwaarden:

a) $T(0,t) = 0, \quad t \geq 0,$

respectievelijk

b) $T_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0.$

Bepaal in beide gevallen $T(x,t)$ en verifieer in beide gevallen dat $T(x,t)$ voldoet aan de betreffende randvoorwaarde.

Aanwijzing: De Greense functie voor de warmtegeleidingsvergelijking op het interval $(-\infty, \infty)$ is gegeven door

$$G(x - \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4t}\right].$$

Examen/tentamen januari 1977

1. In het gebied R , gevormd door \mathbb{R}^3 minus de x -as, is het veld \underline{v} gegeven door

$$\underline{v}(x,y,z) = \left(-\frac{1}{y^2 + z^2}, \frac{2xy}{(y^2 + z^2)^2}, \frac{2xz}{(y^2 + z^2)^2}\right).$$

- a) Bereken $\text{rot } \underline{v}$.
- b) Toon aan dat het veld \underline{v} conservatief is in R .
- c) Bereken

$$\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds$$

als K de kromme is in het eerste octant, gegeven door

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

met beginpunt $(1,1,0)$ en eindpunt $(0,0,1)$.

2. De temperatuurverdeling $T(x,t)$ in een staaf langs de x -as voldoet aan de warmtegeleidingsvergelijking

$$T_{xx} = T_t .$$

De uiteinden $x = 0$ en $x = 1$ van de staaf zijn geïsoleerd:

$$T_x(0,t) = 0, \quad T_x(1,t) = 0, \quad t \geq 0 ,$$

terwijl de begintemperatuur van de staaf gegeven wordt door

$$T(x,0) = x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

- a) Bepaal $T(x,t)$ met de methode van separatie van variabelen.
b) Bepaal tevens de stationaire temperatuurverdeling.
3. Een vectorfunctie $\underline{y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is te interpreteren als een twee-dimensionaal vectorveld.

- a) Formuleer de divergentiestelling voor een twee-dimensionaal vectorveld.
b) Zij $\underline{y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Geef een coördinaat-vrije definitie van $\text{div } \underline{y}$.
c) Laat het twee-dimensionale vectorveld \underline{y} in poolcoördinaten (r,φ) gegeven zijn door $\underline{y} = (v_r, v_\varphi)$.
Bepaal $\text{div } \underline{y}$ met behulp van de coördinaat-vrije definitie van divergentie.

Herkansingsexamen/tentamen januari 1977

1. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{y}(x,y,z) = (-x, 0, z) .$$

Bereken

$$\iint_S (\underline{y}, \underline{n}) d\sigma$$

waarbij het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x \geq \frac{1}{2} . \end{cases}$$

De normaal \underline{n} wijst van de oorsprong af.

2. De functie $u(r, \varphi)$ is oplossing van het volgende Neumann probleem voor de Laplace vergelijking in een cirkelvormig gebied:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(1, \varphi) = u_r(1, \varphi) = \begin{cases} -1 & \text{voor } -\pi < \varphi < 0, \\ 1 & \text{voor } 0 < \varphi < \pi. \end{cases}$$

- a) Bepaal $u(r, \varphi)$ met de methode van separatie van variabelen. Merk op dat de oplossing niet eenduidig is.
- b) De onder a) gevonden oplossing wordt nu nader vastgelegd door de voorwaarde

$$\int_0^1 r dr \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \varphi) d\varphi = \pi.$$

Bepaal $u(r, \varphi)$.

3. Bepaal de oplossing van het volgende gemengde probleem voor de golfvergelijking op $(0, \infty)$:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \sin x, & u_t(x, 0) = \cos x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Het probleem beschrijft de trilling van een half-oneindige snaar met vrij uiteinde $x = 0$, waarbij de uitwijking en de snelheid op het tijdstip $t = 0$ zijn voorgeschreven.

Examen/tentamen juni 1977

1. In het gebied $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ is het veld \underline{u} gegeven door

$$\underline{u}(x,y,z) = \left(y + \frac{x}{r^3}, -x - z + \frac{y}{r^3}, y + \frac{z}{r^3} \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

- a) Bereken $\text{div } \underline{u}$.
- b) Bereken

$$\iint_S (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma$$

waarbij het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

en de normaal \underline{n} in $(0,0,3)$ gelijk is aan $(0,0,1)$.

c) Ga na of \underline{u} een vectorpotentiaal heeft in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

2. Een vierkante plaat, gegeven door $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, wordt langs de zijde $x = 1, 0 \leq y \leq 1$, verwarmd door een constante warmtestroom ter grootte 1. De tegenoverliggende zijde $x = 0, 0 \leq y \leq 1$ is geïsoleerd, terwijl de overige twee zijden op de temperatuur 0 worden gehouden. De stationaire temperatuurverdeling $u(x,y)$ in de plaat voldoet dan aan

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & , \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0 & , \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u_x(0,y) = 0, \quad u_x(1,y) = 1 & , \quad 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Bepaal $u(x,y)$ met de methode van separatie van variabelen.

3. Bepaal de oplossing $u(r,t)$ van het beginwaardeprobleem voor de bolsymmetrische golfvergelijking:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{2}{r} u_r - u_{tt} = 0, & r \geq 0, t > 0, \\ u(r,0) = 1, \quad u_t(r,0) = e^{-r^2}, & r \geq 0; \end{cases}$$

hierin is r de afstand tot de oorsprong.

Aanwijzing: Voer in: $w(r,t) := ru(r,t)$.

Herkansingsexamen/tentamen juni 1977

1. In \mathbb{R}^3 is het oppervlak S gegeven door

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 .$$

a) Bereken, zonder gebruik te maken van de divergentiestelling,

$$\iint_S (y^2 + z) d\sigma .$$

b) Zij \underline{n} de t.o.v. S naar buiten gerichte normaalvector van S .

Bepaal een vectorveld $\underline{a}(\underline{x})$ in \mathbb{R}^3 zó dat op S geldt

$$(\underline{a}, \underline{n}) = y^2 + z .$$

c) Bereken

$$\iint_S (y^2 + z) d\sigma$$

nu met behulp van de stelling van Gauss.

d) Bezit het veld $\underline{a}(\underline{x})$ een vectorpotentiaal? Motiveer Uw antwoord.

2. a) Bepaal in \mathbb{R}^3 een vectorveld \underline{v} dat voldoet aan

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{v} = xy + \sin z , \\ \operatorname{rot} \underline{v} = (xy - 2yz, x + z^2, -yz) . \end{cases}$$

b) Welke eisen moeten aan een functie f gesteld worden opdat

$$\underline{v} + \operatorname{grad} f$$

ook een oplossing is die aan de vergelijkingen van vraag a) voldoet?

3. De transversale trilling van een snaar onder invloed van een constante belasting ter grootte 1 wordt beschreven door

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = -1 & , & 0 < x < 1 , \quad t > 0 , \\ u(0,t) = 0 , \quad u_x(1,t) = 0 & , & t \geq 0 , \\ u(x,0) = 0 , \quad u_t(x,0) = 0 & , & 0 \leq x \leq 1 , \end{cases}$$

Bepaal $u(x,t)$ door aftrekking van een geschikte particuliere oplossing, zodat het probleem homogeen wordt.

Examen/tentamen januari 1978

1. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld

$$\underline{v}(x,y,z) = (ye^{yz}, -\sin(x+z) + y, x^2 - z) .$$

Het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 , \\ z \geq 0 . \end{cases}$$

De normaal \underline{n} op S wijst van de oorsprong af.

- Bereken $\text{div } \underline{v}$.
- Bepaal een vectorpotentiaal van \underline{v} .
- Bereken

$$\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma .$$

2. Een rechthoekig membraan, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, kan geheel vrij trillen. De uitwijking $u(x,y,t)$ is een oplossing van het volgende randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{c^2} u_{tt}, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, t > 0 , \\ u_x(0,y,t) = u_x(1,y,t) = 0, & 0 \leq y \leq 1, t \geq 0 , \\ u_y(x,0,t) = u_y(x,1,t) = 0, & 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 . \end{cases}$$

Bepaal de eigentrillingen en eigenfrequenties.

3. De trilling van een half-oneindige snaar wordt beschreven door:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt}, & x > 0, t > 0 , \\ u_x(0,t) = 0, & t \geq 0 , \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \psi(x), & x \geq 0 . \end{cases}$$

a) Bepaal met de methode van d'Alembert de snelheid $u_t(x,t)$ voor $x > 0$, $t > 0$.

Zij

$$\psi(x) = \begin{cases} x & \text{voor } 0 \leq x \leq 1 , \\ 2-x & \text{voor } 1 \leq x \leq 2 , \\ 0 & \text{voor } 2 \leq x . \end{cases}$$

- Schets een grafische voorstelling van $u_t(x,0)$, $u_t(x,1)$, $u_t(x,2)$ en $u_t(x,3)$.
- Bepaal $u(0,t)$ voor $t > 0$.

Herkansingsexamen/tentamen januari 1978

1. In \mathbb{R}^3 is het vectorveld \underline{v} gegeven door

$$\underline{v}(x,y,z) = (-2xz, -x^2 - y^2, y^2 + z^2) .$$

Het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0 , \\ x \geq 0 , \\ 1 \leq z \leq 3 . \end{cases}$$

S is dan een deel van een kegeloppervlak met top $(0,0,1)$.

De normaal \underline{n} op S is zo gericht dat de z -component ≤ 0 is.

Bereken

$$\iint_S (\text{rot } \underline{v}, \underline{n}) d\sigma ,$$

a) rechtstreeks,

b) door gebruik te maken van de stelling van Gauss of die van Stokes.

2. Het ringvormig gebied G is in poolcoördinaten gegeven door $1 \leq r \leq 2$; \underline{n} is de normaal op de rand en wijst naar buiten.

De functie $u(r,\varphi)$ is de oplossing van het volgende Neumann probleem voor de Laplacevergelijking op dit gebied G :

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0 , \\ \frac{\partial u}{\partial n}(2,\varphi) = u_r(2,\varphi) = \sin 3\varphi , \\ -\frac{\partial u}{\partial n}(1,\varphi) = u_r(1,\varphi) = \sin \varphi . \end{cases}$$

Bepaal $u(r,\varphi)$.

3. Op de cylindermantel S , gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 , \\ -1 \leq z \leq 1 , \end{cases}$$

bevindt zich een oppervlaktelading met dichtheid 1.

Bereken de potentiaal op de z -as.

Examen/tentamen mei 1978

1. Het vectorveld \underline{a} heeft in bolcoördinaten (ρ, θ, φ) als componenten:

$$\begin{cases} a_\rho = f(\rho) , \\ a_\theta = 0 , \\ a_\varphi = 0 , \end{cases}$$

waarin f een differentieerbare functie is.

a) Bewijs $\text{rot } \underline{a} = \underline{0}$.

b) Laat zien dat \underline{a} de gradiënt is van een functie die alleen van ρ afhangt.

2. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld:

$$\underline{v}(x, y, z) = (-x^2 + 3z^2, 2xy + 2zy, 3x^2 - z^2) .$$

Het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 , \\ z \geq 0 , \end{cases}$$

waarbij a een positief getal is.

De normaal \underline{n} op S wijst van de oorsprong af.

a) Bereken $\text{div } \underline{v}$.

b) Bepaal een vectorpotentialiaal van \underline{v} .

c) Bereken

$$\iiint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma .$$

3. Een stationaire temperatuurverdeling $T(r, \varphi)$ in een halve ring, in poolcoördinaten gegeven door $a \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, voldoet aan de Laplacevergelijking:

$$T_{rr} + \frac{1}{r} T_r + \frac{1}{r^2} T_{\varphi\varphi} = 0 , \quad a < r < 1 , \quad 0 < \varphi < \pi ,$$

en de randvoorwaarden

$$\begin{cases} T(r, 0) = 0 , & T(r, \pi) = 0 , & a \leq r < 1 , \\ T(a, \varphi) = 0 , & T(1, \varphi) = 1 , & 0 \leq \varphi \leq \pi . \end{cases}$$

Hierbij is a een getal tussen nul en een.

Bepaal met de methode van separatie van variabelen de temperatuurverdeling in de halve ring.

Herkansingsexamen/tentamen juni 1978

1. Gegeven is het vectorveld \underline{v} gedefinieerd in \mathbb{R}^3 buiten de y -as ende z -as

$$\underline{v} = \left(\frac{-yz}{x^2 + y^2 z^2}, \frac{xz}{x^2 + y^2 z^2}, \frac{xy}{x^2 + y^2 z^2} \right)$$

a) Bereken rot \underline{v} .

b) Bereken

$$\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds$$

waarin K de kromme is met parametervoorstelling

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi, \quad z = 1 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

met beginpunt $(1,0,1)$ en eindpunt $(-1,0,1)$.

c) Bereken

$$\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds$$

waarin K de kromme is met parametervoorstelling

$$x = \cos \varphi, \quad y = -\sin \varphi, \quad z = 1 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

met beginpunt $(1,0,1)$ en eindpunt $(-1,0,1)$.

2. Bepaal een vectorveld \underline{v} dat voldoet aan

$$\begin{cases} \text{rot } \underline{v} = (yz, zx, xy) \\ \text{div } \underline{v} = 0 \end{cases}$$

3. De statische doorbuiging van een rechthoekig membraan, met vaste rand onder invloed van een constante belasting wordt beschreven door

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = -\alpha, & 0 < x < 1, \quad -1 < y < 1, \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & -1 \leq y \leq 1, \\ u(x,-1) = u(x,1) = 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Hierbij is α een constante.

Bepaal de oplossing $u(x,y)$.

Examen/tentamen januari 1979

1. Het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2x. \end{cases}$$

Het vectorveld \underline{v} is gegeven door $\underline{v}(x,y,z) = (5y+3z, -5x-6z, 3x-6y)$.

K is de rand van S en is zo georiënteerd dat de raakvector in $(1,1,\sqrt{2})$ wijst in de richting $(-\sqrt{2/3}, 0, \sqrt{1/3})$.

Bereken

$$\int_K (\underline{v}, \underline{t}) ds.$$

2. In het gebied $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ is het vectorveld \underline{v} gegeven door

$$\underline{v}(x,y,z) = \left(1 + \frac{x}{r^2}, 2 + \frac{y}{r^2}, 3 + \frac{z}{r^2}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

a) Bewijs dat $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$.

b) Bereken

$$\iiint_S (\underline{n} \times \underline{v}) d\sigma$$

waarbij het oppervlak S gegeven is door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

De normaal \underline{n} wijst van $\underline{0}$ af.

3. Een rechthoekig membraan $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ met vaste rand voert een trilling uit die wordt beschreven door het randwaardeprobleem

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0, \\ u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0, & 0 \leq x \leq a, t \geq 0, \\ u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0, & 0 \leq y \leq b, t \geq 0. \end{cases}$$

Op het tijdstip $t = 0$ worden de uitwijking en de snelheid gegeven door

$$u(x,y,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{3\pi y}{b}\right), \quad u_t(x,y,0) = 0.$$

Bepaal $u(x,y,t)$ voor $t > 0$ met de methode van separatie van variabelen.

Herkansingsexamen/tentamen januari 1979

1. In \mathbb{R}^3 is gegeven het vectorveld $\underline{v} = (2x^2 - y^2, 2xy, x^2 + 3z^2)$.

a) Bepaal een functie f en een vectorveld \underline{w} zodat

$$\underline{v} = \text{grad } f + \text{rot } \underline{w} .$$

b) Bepaal \underline{w} zo, dat ook geldt $\text{div } \underline{w} = 0$.

2. Geef de schaalfactoren $\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial r} \right|$, $\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \varphi} \right|$ en $\left| \frac{\partial \underline{x}}{\partial z} \right|$ voor cylindercoördinaten r, φ, z en bewijs dat $\text{rot}(z \text{ grad } \varphi) = -\text{grad}(\ln r)$.

3. Voor geluidsgolven die bolsymmetrisch rond de oorsprong zijn voldoet de snelheidspotentiaal ψ aan de vergelijking

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} .$$

Gegeven is nog dat ψ begrensd is rond $r = 0$.

a) Bewijs dat $r\psi$ te schrijven is als

$$r\psi(r, t) = f(r - ct) - f(-r - ct) .$$

b) Bereken $\psi(r, t)$ voor $r > 0$ en $t > 0$ als $\psi(r, 0) = 0$ en $\frac{\partial \psi}{\partial t}(r, 0) = 4ce^{-r^2}$.

Aanwijzing: beschouw de functie $u = r\psi$.

Examen/tentamen mei 1979

1. Het oppervlak S is gegeven door

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x .$$

De normaal \underline{n} op S wijst naar buiten.

Bereken

$$\iint_S (x + y + z) \underline{n} \, d\sigma .$$

2. In het gebied $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ is gegeven het vectorveld $\underline{v}(x, y, z) = (x, -z \arctan \frac{y}{z}, y \arctan \frac{y}{z})$.

Het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 1 \\ y \geq -z . \end{cases}$$

De normaal \underline{n} op S wijst van $(0, -2, 2)$ af.

- Bereken $\text{div } \underline{v}$.
- Bepaal een vectorpotentiaal van \underline{v} .
- Bereken

$$\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma .$$

3. In een ladingsvrij gebied G in poolcoördinaten gegeven door $r \geq 2$ voldoet de potentiaal $V(r, \varphi)$ aan de Laplacevergelijking

$$V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\varphi\varphi} = 0, \quad r > 2 .$$

Er is bovendien gegeven

$$V(2, \varphi) = \pi - |\varphi|, \quad -\pi < \varphi \leq \pi ,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r, \varphi) \text{ bestaat voor elke } \varphi .$$

Bepaal de potentiaal $V(r, \varphi)$ in G met de methode van separatie van variabelen.

Herkansingsexamen/tentamen juni 1979

1. In $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ is het vectorveld \underline{v} in bolcoördinaten (ρ, θ, φ) gegeven door

$$\underline{v} = (v_\rho, v_\theta, v_\varphi) = (0, 0, -\frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho}) .$$

Bewijs dat \underline{v} bronvrij is.

2. In \mathbb{R}^3 minus de z-as is het vectorveld \underline{v} gegeven door

$$\underline{v}(x, y, z) = \left(\frac{yz}{x^2 + y^2}, -\frac{xz}{x^2 + y^2}, -1 \right) .$$

Het oppervlak S is gegeven door

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 + 1 \\ 0 \leq z \leq 1 . \end{cases}$$

De normaal \underline{n} op S wijst van de z-as af.

Bereken

$$\iint_S (\underline{v}, \underline{n}) d\sigma .$$

3. Een dunne homogene snaar trilt in het (x, u) -vlak om zijn evenwichtstoestand $u = 0$. De uitwijking $u(x, t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$ voldoet aan de differentiaalvergelijking met rand- en beginvoorwaarden:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = -\sin \omega x, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi . \end{cases}$$

ω is een constante en $0 < \omega < 1$.

Bepaal $u(x, t)$.

Antwoorden tentamenopgaven

1.1. b) $\frac{1}{3} x^4 + xy^2 - \frac{1}{3} y^4 + yz^2$.

1.2. a) $\underline{w} = -(e^y, e^z, e^x)$; b) $\underline{w} = -\underline{u}$; c) $-\underline{v} = (e^z, e^x, e^y)$.

1.3. a) $-\pi$; b) -2π ; c) neen.

1.4. b) Ja, want $R = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ is een enkelvoudig samenhangend gebied en $\text{rot } \underline{u} = \underline{0}$ in R ;

c) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log 2$.

1.5. a) Ja, want het gebied $R = \{(x,y,z) \mid (x-2)^2 + y^2 + z^2 < 4\}$ is enkelvoudig samenhangend;

b) $-\frac{\pi}{8}$; c) $-\frac{z}{2(x^2 + y^2)}$.

1.6. a) \mathbb{R}^3 is enkelvoudig samenhangend; $\text{rot } \underline{u} = \underline{0}$ in \mathbb{R}^3 , dus \underline{u} is conservatief.

b) $\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds = \int_L (\underline{u}, \underline{t}) ds$ met $L: \underline{x} = t\underline{p}, 0 \leq t \leq 1$, dus

$$\int_K (\underline{u}, \underline{t}) ds = \int_0^1 (\underline{u}, \underline{p}) dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

1.7. a) $(1, 1, -2)$; b) 0.

1.8. $\frac{15\pi}{2}$.

1.9. a) -3π ; b) 3.

1.10. a) Neen, want $\text{rot } \underline{u} = (0, 2, 0) \neq \underline{0}$; b) 2π ; c) 2π .

1.11. a) $\varphi = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$; b) $2\pi(\sqrt{2} - 1)$; c) 0.

1.12. a) 0; b) $1 + \frac{\pi}{2}$.

1.13. a) $\underline{0}$; c) 2π ; d) 2π .

1.14. a) Neen, want $\text{rot } \underline{u} = (2, 2, 2) \neq \underline{0}$; b) π ; c) -6π .

1.15. $\pi(2 - \sqrt{2})$.

1.16. a) 0; b) $8\pi \log 2$; c) $\frac{1}{2}\sqrt{2} \log 2 + \sqrt{2} - 2$.

1.17. a) $-\frac{\pi}{2}$; b) 2π ; c) $-\frac{3\pi}{2}$.

1.18. a) $-\frac{1}{3}$; b) $-\frac{1}{24}$; c) $(\frac{1}{2}yz^2, -\frac{1}{2}xz^2, 0)$.

1.19. a) $-\frac{\pi}{3}$; c) $\frac{16}{9}$.

1.20. 0.

1.21. -6π .

1.22. a) 1; b) $-\frac{\pi}{3}$.

1.23. a) 0; b) $\frac{\pi}{64}$; c) 0.

1.24. a) 5π ; b) $\frac{1}{8}(3 - \pi^2)$.

1.25. $\frac{32}{3}$.

1.26. a) $\frac{25}{6}$; b) $(z - 2xyz - y^2z, xz - 2xyz - x^2z, 0)$.

1.27. π .

1.28. $-\frac{1}{6}$.

1.29. $\frac{1}{15}(4\sqrt{2} - 1)$.

1.30. $\frac{2}{3}$.

1.31. a) $(yz - \frac{1}{2}z^2, x - \sin z, 0)$; b) π .

1.32. $\frac{28\pi}{3}$.

1.33. b) $\frac{32}{3}$.

1.34. a) 8π .

1.35. $\frac{16\pi}{3}$; $\frac{44\pi}{3}$.

1.36. $\underline{v} = (xy^2 + \frac{1}{2}xz^2, -\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}yz^2, 0)$.

1.37. $\underline{v} = (\frac{1}{2}x^2 - 2yz, y^2 - xz, \frac{1}{2}z^2)$.

1.38. $\underline{v} = (x^2y + \frac{2}{3}z^3, \frac{2}{3}x^3 + y^2z, \frac{2}{3}y^3 + xz^2)$.

2.1. b) $T(x,t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x e^{-(2n+1)^2 t}$.

2.2. a) $T(r,\varphi) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(4n^2-1)} r^n \cos n\varphi$;

b) 0.74.

2.3. b) $u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)x \cos(2n+1)t$.

2.4. $u(x,t) = \sin 3x \cos 3t + \sin 17x \cos 17t$.

2.5. $T(r,\varphi) = 1 + r \cos \varphi + r \sin \varphi$.

2.6. $T(r,\varphi) = 2r^{-1} \sin \varphi + r^{-2} \sin 2\varphi$.

2.7. $T(r,\varphi) = r^2 \sin 2\varphi$.

2.8. $T(x,t) = \sin 13x e^{-169t}$.

2.9. $W(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^{n+1} e^{\pi})n}{n^2 + 1} \sin nx e^{-n^2 t}$.

2.10. $T(x,y) = \frac{\sin 2\pi x \sinh 2\pi y}{\sinh 2\pi}$.

$$2.11. T(x,t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x e^{-(2n+1)^2 t}.$$

$$2.12. T(r,\varphi) = 1 + \frac{\log r}{\log 2}.$$

$$2.13. T(x,y) = \cos 2\pi x e^{-2\pi y}.$$

$$2.14. u(x,t) = \frac{1}{\pi} \sin \pi x \sin \pi t.$$

$$2.15. T(r,\varphi) = 3\left(\frac{r}{2}\right)^4 \sin 4\varphi + 5\left(\frac{r}{2}\right)^6 \sin 6\varphi.$$

$$2.16. W(x,t) = 1 + \cos \frac{\pi x}{\ell} \exp\left[-\frac{\pi^2 t}{\ell^2}\right].$$

$$2.17. W(x,t) = 2 + \cos \frac{1}{2}x e^{-kt/4} + \cos \frac{3}{2}x e^{-9kt/4}; \quad 2.$$

$$2.18. T(r,\varphi) = \left(\frac{2}{r}\right)^6 \sin 6\varphi.$$

$$2.19. T(x,y) = -\frac{16}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh(2n+1)x \sin(2n+1)y}{(4n^2-1)(2n+3)\sinh(2n+1)\pi}.$$

$$2.20. a) \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+(\mu+1)^2} + \frac{1}{1+(\mu-1)^2} \right] = \frac{\mu^2+2}{\mu^4+4};$$

$$b) T(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\mu^2+2}{\mu^4+4} \cos \mu x e^{-\mu^2 t} d\mu.$$

$$2.21. W(x,t) = 2 \sin \pi x e^{-\pi^2 t} + 15 \sin 3\pi x e^{-9\pi^2 t}.$$

$$2.22. u(x,t) = \sin 2\pi x (\cos 2\pi t - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t) + \sin 10\pi x (\cos 10\pi t + \frac{1}{10\pi} \sin 10\pi t).$$

$$2.23. -4\pi.$$

Tentamen juni 1976

1. a) 0 ; b) 4π ; c) $\underline{w} = \left(\frac{yz}{x^2 + y^2}, \frac{-xz}{x^2 + y^2}, 0 \right)$; d) 4π .

2. a) $u(x,t) = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \exp[(\alpha - (2n+1)^2\pi^2)t]$.

b) Stabiel voor $\alpha \leq \pi^2$; labiel voor $\alpha > \pi^2$.

Herkansingstentamen juni 1976

1. a) Nee, want $\text{rot } \underline{v} = (1,0,0) \neq \underline{0}$.

b) Ja : $\alpha = 1$; $\underline{w} = (-2xyz, xy + y^2z - \frac{1}{3}z^3, 0)$.

c) π .

2. $u(x,t) = \frac{64}{c\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^4} \cos(n + \frac{1}{2})\pi x \sin(n + \frac{1}{2})\pi ct$.

3. a) $T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-1)^2}{4t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+1)^2}{4t}\right] \right\}$.

b) $T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-1)^2}{4t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+1)^2}{4t}\right] \right\}$.

Tentamen januari 1977

1. a) $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$.

b) $\underline{v} = \text{grad } \varphi$ met $\varphi(x,y,z) = \frac{-x}{y^2 + z^2}$.

c) 1 .

2. a) $T(x,t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos 2n\pi x \exp[-4n^2\pi^2 t]$.

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} T(x,t) = \frac{1}{6}$.

3. a) Zie collegesyllabus, 1.5, opmerking 2.

$$c) \operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} .$$

Herkansingstentamen januari 1977

1. $-\frac{3\pi}{8}$.

2. a) $u(r, \phi) = C + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} r^{2n+1} \sin(2n+1)\phi$.

b) $C = 1$.

3.
$$u(x, t) = \begin{cases} 2 \cos x \sin t , & 0 \leq x \leq t , \\ \sin(x + t) , & 0 \leq t \leq x . \end{cases}$$

Tentamen juni 1977

1. a) 0 .

b) 2π .

c) \underline{u} heeft geen vectorpotentiaal in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, want $\iiint_B (\underline{u}, \underline{n}) d\sigma = 4\pi \neq 0$;
hierin is B de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en \underline{n} de naar buiten gerichte normaal op B.

2. $u(x, y) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh(2n+1)\pi x \sin(2n+1)\pi y}{(2n+1)^2 \sinh(2n+1)\pi}$

3. $u(r, t) = 1 + \frac{1}{2r} \sinh(2rt) \exp[-(r^2 + t^2)]$.

Herkansingstentamen juni 1977

1. a) $\iiint_S (y^2 + z) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi (\sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{3}$.

b) $\underline{a}(\underline{x}) = (0, y, 1)$.

$$c) \iint_S (y^2 + z) d\sigma = \iint_S (\underline{a}, \underline{n}) d\sigma = \iiint_R \operatorname{div} \underline{a} d\tau = \frac{4\pi}{3};$$

hierin is R het gebied gegeven door $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

d) Nee, want het veld \underline{a} is niet bronvrij (zie c)).

$$2. a) \underline{v} = \left(\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}x^2z + \frac{1}{3}z^3 + xz, \frac{1}{6}x^3 - xyz + yz^2, \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2 - \cos z \right)$$

$$b) \Delta f = 0.$$

$$3. u(x,t) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^3} \sin(n+\frac{1}{2})\pi x \cos(n+\frac{1}{2})\pi t.$$

Tentamen januari 1978

$$1. a) 0.$$

$$b) \underline{w} = (\cos(x+z) + yz, \frac{1}{3}x^3 - e^{yz}, 0).$$

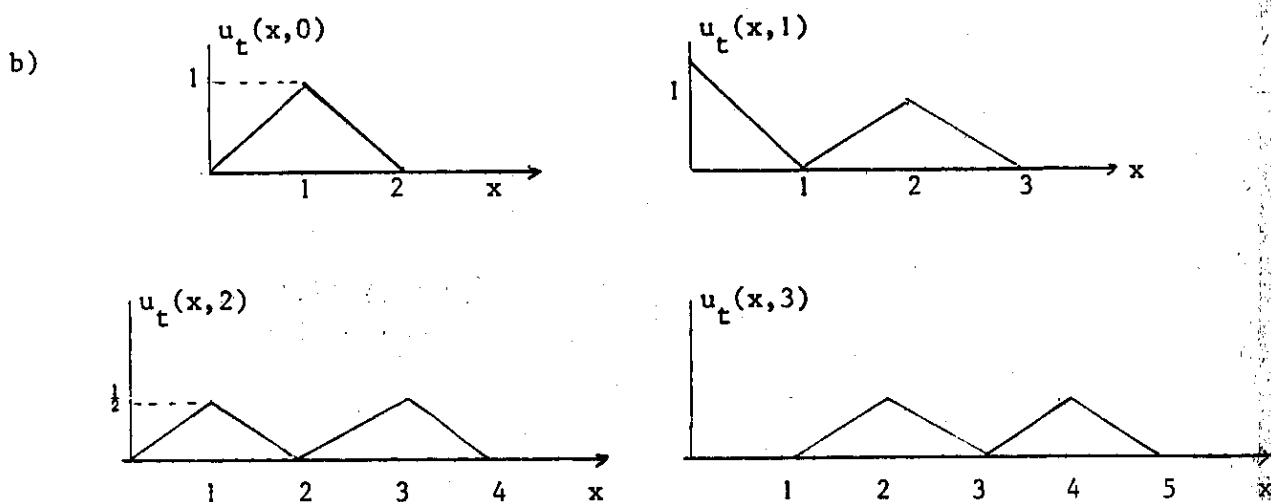
$$c) \frac{\pi}{4}.$$

$$2. u(x,y,t) = \cos m\pi x \cos n\pi y (A \cos \omega_{mn} t + B \sin \omega_{mn} t),$$

$$\omega_{mn} = \pi c \sqrt{m^2 + n^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (m, n) \neq (0, 0).$$

$$3. a)$$

$$u_t(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\psi(x-t) + \frac{1}{2}\psi(x+t) & \text{voor } 0 < t \leq x, \\ \frac{1}{2}\psi(t-x) + \frac{1}{2}\psi(x+t) & \text{voor } 0 < x < t. \end{cases}$$



c)

$$u(0,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{voor } 0 < t \leq 1, \\ -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1 & \text{voor } 1 \leq t \leq 2, \\ 1 & \text{voor } 2 \leq t. \end{cases}$$

Herkansingstentamen januari 1978

1. $\frac{32}{3}$.
2. $u(r, \varphi) = C - \frac{1}{3}(r + 4r^{-1})\sin \varphi + \frac{16}{189}(r^3 + r^{-3})\sin 3\varphi$, waarin C een willekeurige constante is.
3. $\frac{1}{2} \ln[(1+z+\sqrt{z^2+2z+2})(1-z+\sqrt{z^2-2z+2})]$.

Tentamen mei 1978

2. a) 0.
 b) $\underline{w} = (2xyz + yz^2, x^3 + x^2z - z^3, 0)$.
 c) $\frac{3\pi}{4} a^4$.
3. $T(r, \varphi) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(1-a^{4n+2})} (r^{2n+1} - a^{4n+2} r^{-2n-1}) \sin(2n+1)\varphi$.

Herkansingtentamen juni 1978

1. a) 0 ; b) π ; c) $-\pi$.

2. $\underline{v} = (\frac{1}{2}xz^2 - \frac{1}{6}x^3, \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}yz^2, 0)$.

3. $u(x,y) = \frac{1}{2}\alpha x(1-x) - \frac{4\alpha}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x \cosh(2n+1)\pi y}{(2n+1)^3 \cosh(2n+1)\pi}$.

Tentamen januari 1979

1. -5π .

2. $(-2\pi, \pi, 0)$.

3. $u(x,y,t) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} \cos(\pi c t \sqrt{a^{-2} + 9b^{-2}})$.

Herkansingtentamen januari 1979

1. a) $f(x,y,z) = x^3 + z^3$, $\underline{w} = (2xyz, \frac{1}{3}x^3 + x^2z + y^2z, 0)$.

b) $\underline{w} = (2xyz, \frac{1}{3}x^3 + x^2z - y^2z, -\frac{2}{3}y^3)$.

3. b) $\psi(r,t) = \frac{2}{r} e^{-(r^2 + c^2 t^2)} \sinh(2crt)$.

Tentamen mei 1979

1. $\frac{4\pi}{3} (1,1,1)$.

2 a) 0 .

b) $\underline{w} = (0, xy \arctan \frac{y}{z}, xz \arctan \frac{y}{z})$.

c) $\frac{1}{2}\pi^2 \sqrt{2}$.

3. $V(r,\varphi) = \frac{1}{2}\pi + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left(\frac{2}{r}\right)^{2n+1} \cos(2n+1)\varphi$.

Herkansingstentamen juni 1979

2. π .

$$3. u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sin \omega \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n^2 - \omega^2)} \sin nx \sin^2 \frac{1}{2} nt ,$$

of

$$u(x,t) = \frac{\sin \omega x}{\omega^2} - x \frac{\sin \omega \pi}{\omega^2 \pi} + \frac{2}{\pi} \sin \omega \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n^2 - \omega^2)} \sin nx \cos nt.$$

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Formulelijst Wiskunde 40

1. $\text{div}(\varphi \underline{v}) = \varphi \text{div } \underline{v} + (\text{grad } \varphi, \underline{v})$.
2. $\text{rot}(\varphi \underline{v}) = \varphi \text{rot } \underline{v} + (\text{grad } \varphi) \times \underline{v}$.
3. $\text{div}(\underline{u} \times \underline{v}) = (\underline{v}, \text{rot } \underline{u}) - (\underline{u}, \text{rot } \underline{v})$.
4. $\text{rot rot } \underline{v} = \text{grad div } \underline{v} - \Delta \underline{v}$.
5. $\iiint_R \text{grad } \varphi \, d\tau = \iint_S \varphi \underline{n} \, d\sigma$.
6. $\iiint_R \text{div } \underline{v} \, d\tau = \iint_S (\underline{v}, \underline{n}) \, d\sigma$.
7. $\iiint_R \text{rot } \underline{v} \, d\tau = \iint_S (\underline{n} \times \underline{v}) \, d\sigma$.
8. $\iint_S (\underline{n} \times \text{grad } \varphi) \, d\sigma = \int_K \varphi \underline{t} \, ds$.
9. $\iint_S (\text{rot } \underline{v}, \underline{n}) \, d\sigma = \int_K (\underline{v}, \underline{t}) \, ds$.
10. $\text{grad } \alpha = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial \alpha}{\partial w} \right)$.
11. $\text{div } \underline{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 a_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_3 h_1 a_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_1 h_2 a_w) \right]$.
12. $(\text{rot } \underline{a})_u = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial v} (h_3 a_w) - \frac{\partial}{\partial w} (h_2 a_v) \right]$,
 $(\text{rot } \underline{a})_v = \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial w} (h_1 a_u) - \frac{\partial}{\partial u} (h_3 a_w) \right]$,
 $(\text{rot } \underline{a})_w = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_2 a_v) - \frac{\partial}{\partial v} (h_1 a_u) \right]$.
13. $\Delta \alpha = \text{div grad } \alpha = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \alpha}{\partial w} \right) \right]$.
14. $\iiint_R [u \Delta v + (\text{grad } u, \text{grad } v)] \, d\tau = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma$.
15. $\iiint_R [u \Delta v - v \Delta u] \, d\tau = \iint_S (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) \, d\sigma$.
16. $u(\underline{\xi}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_R \frac{\Delta u}{r} \, d\tau + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \, d\sigma, \quad \underline{\xi} \in R$.