TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 50

bestemd voor

N-V, W-VII, E-V en T-VII

WISKUNDE 52

bestemd voor

WSK-V

Complexe-functietheorie

Najaarssemester 1979

Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.261
Prijs f. 5,00

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

J d8

Wiskunde 50

bestemd voor N-V, W-VII, E-V en T-VII

Wiskunde 52

bestemd voor WSK-V

Complexe-functietheorie

50 | 52

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 50

bestemd voor N-V, W-VII, E-V, T-VII

WISKUNDE 52

bestemd voor WSK-V

COMPLEXE FUNCTIETHEORIE

Najaarssemester 1979

I N H O U D

Literatuur: zie blz. 72.

HOOFDSTUK I. Grondbegrippen

§ 1. Complexe getallen

De definitie en eigenschappen van de complexe getallen zoals in het college Wiskunde 10 ingevoerd worden bekend verondersteld. We herhalen de belangrijkste punten.

Door in de 2-dimensionale vectorruimte R_2 een operatie "vermenigvuldiging" in te voeren door: $(a,b) \times (c,d) = (ac - bd,\ ad + bc)$ kregen we een systeem van dingen waarmee gerekend kan worden precies als met de reële getallen. Deze dingen zijn toen complexe getallen genoemd. Het bleek zinvol de complexe getallen $(a,0)$ te identificeren met de reële getallen (door a te schrijven i.p.v. $(a,0)$). Voor het getal $(0,1)$ werd de afkorting i ingevoerd. Daardoor kunnen we ieder complex getal z eenduidig schrijven als $x + iy$ waarin x en y reële getallen zijn, genaamd <u>reële deel</u> en <u>imaginaire deel</u> van z.

Notatie: $x = \mathrm{Re}\ z$, $y = \mathrm{Im}\ z$. De complexe getallen z met $\mathrm{Re}\ z = 0$ liggen op de <u>imaginaire as</u>, die met $\mathrm{Im}\ z = 0$ op de <u>reële as</u> van het <u>complexe vlak</u>. Het getal $x - iy$ werd <u>complex-geconjugeerde</u> van z genoemd.
Notatie: $\bar{z} = x - iy$.

Men kan complexe getallen ook representeren door <u>argument</u> en <u>modulus</u> (absolute waarde), waartoe men wordt geleid als men in het complexe vlak poolcoördinaten invoert: r = afstand tot de oorsprong, φ = hoek van de voerstraal met de positieve x-as. De richting van toenemende φ is die tegen de beweging van de wijzers van een klok. De hoek φ is door (x,y) op gehele veelvouden van 2π na bepaald, en wel geldt

$$x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi\ .$$

Onder <u>modulus</u> of <u>absolute</u> waarde van z wordt verstaan het niet-negatieve getal

$$r = |z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0\ .$$

De hoek φ noemt men het <u>argument</u> van z:

$$\varphi = \arg z\ .$$

Een complex getal kunnen we dus schrijven als

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}\ .$$

Met behulp hiervan heeft men in het eerstejaarscollege de eenvoudigste eigenschappen van complexe getallen leren verwerken.

Een nieuw begrip voor U is dat van HOOFDWAARDE van arg z. Zoals reeds opgemerkt, is het argument van z pas op een geheel veelvoud van 2π na eenduidig bepaald. Men spreekt nu van hoofdwaarde van arg z als men zich beperkt tot het interval (links open, rechts gesloten)

$$-\pi < \arg z \leq \pi \; .$$

Onder arg z zonder meer zullen we in dit college steeds deze hoofdwaarde verstaan. Het belang daarvan zal later ter sprake komen.

§ 2. Verzamelingen van complexe getallen

De totaliteit van alle complexe getallen wordt vaak aangeduid als de verzameling $\mathbb{C}$. Deelverzamelingen van $\mathbb{C}$ kunnen we vaak beschrijven door een voorschrift of door een eigenschap te noemen die de elementen z van zo'n verzameling A bepaalt. Een veel gebruikte notatie is $A := \{z \mid \ldots\ldots\}$ waarbij op de plaats van de stippen een voorschrift staat waar z aan moet voldoen. Zo is $\{z \mid |z| < 1\}$ het inwendige van de éénheidscirkel in $\mathbb{C}$. **De imaginaire as is $\{z \mid z = iy,\ y \text{ reëel}\}$. In het vervolg maken we geen onderscheid tussen de drie uitdrukkingen: "z is een complex getal", "z is een element van de verzameling $\mathbb{C}$" en "z is een punt in het complexe vlak".**

Zij V een of andere verzameling van complexe getallen. Om uit te drukken dat een bepaald complex getal a tot V behoort, gebruiken we de notatie $a \in V$; we zeggen ook: a is element van V. Willen we uitdrukken dat a niet tot V behoort, dan schrijven we $a \notin V$.

Eindige verzameling: een verzameling met eindig veel elementen.

Oneindige verzameling: een verzameling met oneindig veel elementen.

Begrensde verzameling: een verzameling V heet begrensd als we een constante M kunnen vinden zodanig dat $|z| < M$ voor alle $z \in V$. Zo'n begrensde verzameling kunnen we overdekken met een cirkel om de oorsprong en eindige straal; ook door een vierkant van eindige afmetingen.

Deelverzameling: A is deelverzameling van B als ieder element van A element van B is. De notatie hiervoor is $A \subset B$ (A is bevat in B) of $B \supset A$ (B omvat A). De mogelijkheid dat A = B is, is niet uitgesloten in deze notatie $A \subset B$. Is $A \neq B$, dan is A een echte deelverzameling van B.

<u>Doorsnede</u> van A en B is de verzameling waarvan de elementen zowel tot A als tot B behoren. De notatie hiervoor is $A \cap B$, of A.B, of AB. Als $AB = \emptyset$ ($\emptyset$ = lege verzameling), dan heten A en B disjunct.

<u>Vereniging</u> van A en B, notatie $A \cup B$ of $A + B$, is de verzameling van complexe getallen die tot A, tot B, of tot beide behoren.

De begrippen doorsnede en vereniging kunnen op een willekeurige collectie van verzamelingen worden toegepast.

<u>Complement</u> van A: verzameling van complexe getallen die niet tot A behoren. Notatie voor complement van A is A' (ook wel $\mathbb{C} \setminus A$).

<u>Omgeving</u>

Zij a een complex getal, en p positief. De getallen z met de eigenschap $|z-a| < p$ zijn gelegen binnen de cirkel met middelpunt a en straal p. Als p klein is, zegt men in het spraakgebruik: deze z liggen in de omgeving van a. Daarom definiëren we:
<u>Omgeving</u> van a is de verzameling van getallen z die voldoen aan $|z-a| < p$.
De omgeving hangt van a en p af.
Daarom: <u>p-omgeving van a</u>. Het punt a behoort tot ieder van zijn omgevingen.
Men spreekt van <u>gereduceerde</u> omgeving als a uitdrukkelijk wordt uitgesloten.
Dus: gereduceerde p-omgeving van a is verzameling van getallen z met $0 < |z-a| < p$.

<u>Verdichtingspunt</u>

Het getal a noemt men verdichtingspunt van de verzameling V als in iedere omgeving van a oneindig veel elementen van V liggen.

<u>Opgave</u>: a is verdichtingspunt van V als in iedere gereduceerde omgeving van a tenminste één punt van V ligt.

<u>Opmerking</u>: een verdichtingspunt van V is niet noodzakelijk punt van V.

<u>Gesloten verzameling</u>

Een verzameling V heet gesloten als ieder verdichtingspunt van V tevens punt van V is. Een gesloten verzameling bevat dus al haar verdichtingspunten.

<u>Inwendig punt</u>

Het getal a is inwendig punt van V als er een omgeving van a te vinden is die geheel tot V behoort. Een inwendig punt van V behoort tot V.

Open verzameling

Een verzameling die louter uit inwendige punten bestaat, heet een open verzameling.

Opgave: maakt U zich vertrouwd met deze begrippen door het tekenen van plaatjes.

Samenhangende verzameling

Een verzameling V heet samenhangend als ieder paar punten P, Q van V door een kromme, welke binnen V ligt, kan worden verbonden (definitie kromme zie blz. 6).

Gebied

Dit is voor ons een zeer belangrijk begrip. Een gebied G in het complexe vlak is een verzameling van complexe getallen die

(1) niet leeg is,
(2) open is,
(3) samenhangend is.

Elk punt van G is een inwendig punt van G, omdat een gebied per definitie open is. Twee willekeurige punten van G kunnen door een polygoontrek worden verbonden die geheel in G ligt, omdat G samenhangend is. Een verdichtingspunt van G behoort tot G of behoort niet tot G. In het eerste geval is het verdichtingspunt een punt van G, en dus inwendig punt van G. In het tweede geval is het verdichtingspunt een zogenaamd randpunt van G. De verzameling van verdichtingspunten van G die zelf niet tot G behoren vormen tezamen de rand van G. (De rand van een verzameling V wordt gedefinieerd als de verzameling punten waarvoor in iedere omgeving een punt van V en een punt van V' ligt.) De vereniging van G met zijn rand is een gesloten verzameling, welke we aanduiden met $\overline{G}$. Men noemt $\overline{G}$ wel een gesloten gebied. Wij zullen daarvoor het woord domein kiezen. Dus domein = gebied + rand.

Twee belangrijke stellingen:

A. Overdekkingsstelling van Heine en Borel

Deze zeer belangrijke stelling luidt:

> Indien een begrensde gesloten verzameling A van complexe getallen is bevat in de vereniging van een collectie van open verzamelingen, dan is A reeds bevat in (kan worden overdekt door) een eindig aantal van die open verzamelingen.

Bewijs. Als de collectie zelf eindig is, is er niets te bewijzen. Verder uit het ongerijmde. A is begrensd, A kan dus worden overdekt door een vierkant V_0 (rand inbegrepen) geheel in het eindige z-vlak gelegen. Stel dat de stelling onjuist was. Verdeel V_0 in vier gelijke vierkanten. Dan is onder deze vierkanten tenminste één (zeg V_1, rand inbegrepen) met de eigenschap: het deel van A gelegen in V_1 kan niet worden overdekt door een eindig aantal uit de collectie van open verzamelingen waarvan sprake is.

Herhaal: V_1 wordt verdeeld in vier gelijke vierkanten. Tenminste één daarvan (V_2, rand inbegrepen) heeft de eigenschap dat AV_2 (doorsnede van A en V_2) niet kan worden overdekt door een eindig aantal van de bewuste open verzamelingen. Enzovoort.

We krijgen zo een rij vierkanten: $V_0, V_1, V_2, \ldots$, met $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots$, welke inkrimpt tot één gemeenschappelijk punt P. Dit punt behoort tot elke V_n, en is verdichtingspunt van A (waarom?). Omdat A gesloten is, behoort P tot A.

In de gegeven collectie van open verzamelingen is er tenminste één die P bevat, en dus inwendig bevat. Dan is er ook een p-omgeving van P (als we p klein genoeg nemen) met de eigenschap dat haar doorsnede met A geheel wordt overdekt door deze éne open verzameling.

Dit nu leidt tot een tegenspraak. Op den duur (n voldoende groot) liggen alle V_n binnen die p-omgeving. Enerzijds zou V_n niet kunnen worden overdekt door een eindig aantal, anderzijds wordt ze (van zeker rangnummer n af) overdekt door één der open verzamelingen. Uit de tegenspraak volgt dat de stelling wèl juist is.

Opgave. Zij G een gebied, D een gesloten deelverzameling van G, dan is er een positief getal δ zó dat vóor iedere $z_1 \in D$ en $z_2 \in G'$ geldt $|z_1 - z_2| > \delta$; anders gezegd: de rand van D komt niet willekeurig dicht bij de rand van G. (Wenk: overdek D met de collectie der cirkels $|z - m| < r$, waarbij $m \in D$ en $r = \frac{1}{2} \cdot$ afstand van m tot rand G.)

B. De stelling van Bolzano en Weierstrass

Een begrensde oneindige verzameling heeft tenminste één verdichtingspunt.

Bewijs. Geef dit bewijs zelf door de in A gebruikte vierkanten-methode nog eens te gebruiken.

Definitie. Een rij van getallen z_n ($n = 1,2,3,\ldots$; er mogen gelijke onder voorkomen) heeft de limiet a (convergeert naar a) indien bij willekeurig voorgeschreven $\varepsilon > 0$ een rangnummer N kan worden gevonden zodanig dat $|z_n - a| < \varepsilon$ voor $n \geq N$.

Een convergentiekenmerk, waarin de limiet a niet voorkomt, luidt:
Een rij $\{z_n\}$ heeft een limiet als bij elke $\varepsilon > 0$ een N bestaat zó dat voor alle $n > N$ en alle $m > N$ geldt $|z_n - z_m| < \varepsilon$ (Cauchy).
Bewijs. Er is een M zo dat voor alle $m > M$: $|z_m - z_{M+1}| < 1$. Zij a verdichtingspunt der z_m (B.W!). Dan $|z_n - a| \leq |z_n - z_m| + |z_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ te maken.

Definitie. Is $\{a_n\}$ een rij reële getallen dan definiëren we:

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \begin{cases} L & \text{als voor elke } \varepsilon > 0 \text{ slechts eindig veel elementen van de} \\ & \text{rij} > L + \varepsilon \text{ zijn, terwijl oneindig veel elementen} > L-\varepsilon \\ & \text{zijn,} \\ \infty & \text{als de rij niet naar boven begrensd is,} \\ -\infty & \text{als } a_n \to -\infty \text{ voor } n \to \infty. \end{cases}$$

Opmerking: Als de rij $\{a_n\}$ een limiet L heeft is $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n = L$.

Stelling. Iedere reële rij $\{a_n\}$ heeft een lim sup.

Opgave: Bewijs dit. (Wenk: als lim sup $\neq \pm\infty$ dan alle $a_n < C$ en ∞ vele $> D$; halveer $[D,C]\ldots$)

§ 3. Boog, kromme, weg in complexe vlak

Onder een gladde boog zullen we in dit college verstaan: het continu differentieerbare beeld in R_2 van een lijnsegment. Hiermee bedoelen we het volgende: als voor $a \leqslant t \leqslant b$ de funkties $x(t)$ en $y(t)$ continue afgeleiden hebben dan noemen we de verzameling punten $z = f(t) = x(t) + iy(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ een gladde boog. Het punt $z_1 = f(a)$ heet beginpunt van de boog, $z_2 = f(b)$ eindpunt. De variabele t heet parameter en $z = x(t) + iy(t)$ een parametervoorstelling van de boog. Eenzelfde boog kan vele verschillende parametervoorstellingen hebben.
(Meestal eisen we nog dat $\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 > 0$.)
Als we i.h.v. boog schrijven bedoelen we steeds: gladde boog.

Een kromme is een aaneensluiting van een eindig aantal bogen; heeft dus een begin- en een eindpunt. Een enkelvoudige kromme is een kromme zonder dubbelpunten. Als beginpunt en eindpunt samenvallen spreken we van een <u>gesloten kromme</u>.

Een <u>Jordankromme</u> is een enkelvoudige gesloten kromme.

<u>Eigenschappen</u>: een Jordankromme verdeelt het complexe vlak in twee disjuncte **delen, het binnengebied en het buitengebied. Beide delen zijn gebieden, die de** kromme tot rand hebben. De Jordankromme heet <u>positief georienteerd</u> (met pijl aan te geven) als we in de pijlrichting bewegend het **binnengebied aan onze linkerhand hebben (tegen de wijzers van de klok).**

<u>Weg</u>

Later hebben we het begrip van <u>weg</u> in het complexe vlak nodig. Een weg is een aaneensluiting van een rij bogen in een niet-noodzakelijk-eindig aantal. Een weg kan "naar het oneindige" lopen, of daar vandaan komen (bv. uit zekere richting), etc.

We herinneren aan een stelling uit het college **Wiskunde 20.**

<u>Stelling</u>

Zij K een boog met parametervoorstelling $z = x(t) + iy(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$. Dan is de lengte van K gelijk aan

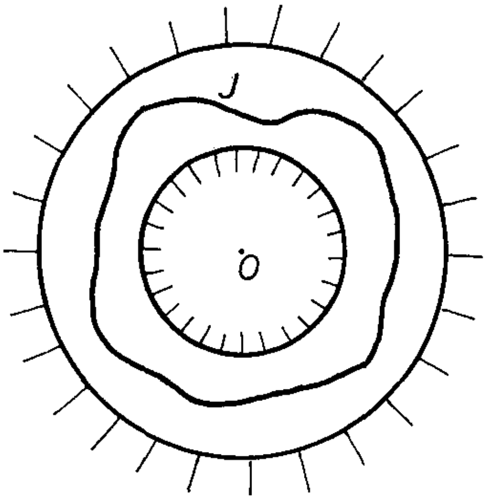
$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b \left|\frac{dz}{dt}\right| dt .}$$

<u>Gebied van enkelvoudige samenhang</u>

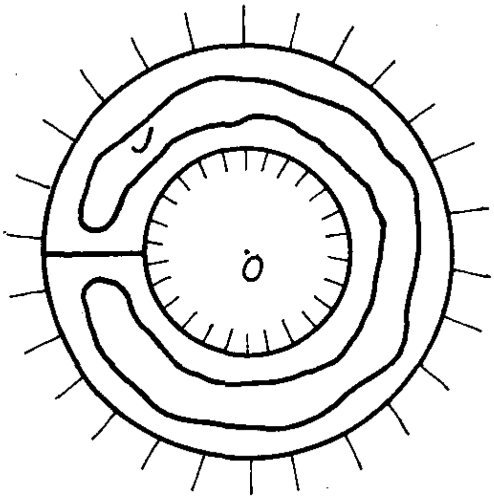
Een gebied G heet <u>enkelvoudig samenhangend</u>, als met iedere Jordankromme J die tot G behoort ook het **binnengebied van J tot G behoort.**
Als G samenhangend is maar niet enkelvoudig samenhangend, dan noemen we G <u>meervoudig samenhangend</u>.

<u>Voorbeelden</u>

(1) $\{z \mid |z| < 1\}$ is enkelvoudig samenhangend.
(2) $\{z \mid |z| > 1\}$ is meervoudig samenhangend.
(3) $\{z \mid 1 < |z| < 2\}$ is meervoudig samenhangend.
(4) Laat uit het in (3) beschreven gebied het lijnstuk $\{z \mid \text{Re } z < 0$ en $\text{Im } z = 0\}$ weg, dan ontstaat een enkelvoudig samenhangend gebied.

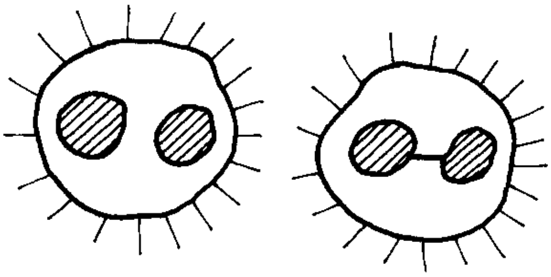


(3)

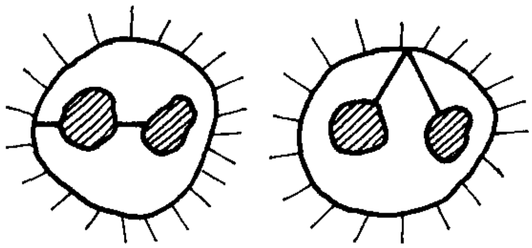


(4)

Hieronder volgen nog enige voorbeelden met bijbehorende tekening.



meervoudig samenhangend



enkelvoudig samenhangend

De niet tot G behorende "eilanden" kunnen punten zijn: evenals (3) is bijv. $\{z \mid 0 < |z| < 1\}$ meervoudig samenhangend.

HOOFDSTUK II. Het funktiebegrip

§ 1. Funkties van een complexe variabele

Zij gegeven:

(1) een verzameling A van complexe getallen,

(2) een voorschrift, waarmee we aan elke $z \in A$ een bepaald complex getal w toevoegen.

We schrijven $w = f(z)$, en geven de situatie weer met: f (soms schrijft men $f(z)$) is als (eenwaardige) complexe funktie van z gedefinieerd op A. Het noemen van de verzameling waarop de funktie is gedefinieerd, is essentieel. Vgl. de vroegere term van "geoorloofde" waarden van de onafhankelijke variabele.

Als we stellen $z = x + iy$, $w = u + iv$, kunnen we $f(z)$ splitsen in reëel en imaginair deel: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. De funkties u en v zijn reële funkties van twee reële variabelen, gedefinieerd voor $(x,y) \in A$. Een complexe funktie is dus niet anders dan een geordend paar van twee reële funkties van twee reële veranderlijken. Het is duidelijk dat we het funktiebegrip dienen te vernauwen, als we nog iets interessants willen krijgen; anders zouden we reële-funktietheorie bedrijven.

Limietbegrip

De definitie van limiet is formeel dezelfde als die in de reële analyse. Een functie f gedefinieerd op A heeft de limiet L voor $z \to a$ als bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat voor $0 < |z-a| < \delta$ en $z \in A$ geldt $|f(z) - L| < \varepsilon$.
We schrijven:

$$\lim_{z \to a} f(z) = L, \text{ of ook } f(z) \to L \quad (z \to a) .$$

Andere definitie (ga de gelijkwaardigheid na): f heeft limiet L voor z naar a als $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = L$ voor elke rij $\{z_k\}$ met $z_k \in A$ en $z_k \to a$ $(k \to \infty)$.

Stellingen aangaande som, verschil, product, en quotient van limieten net als in reële analyse.

Continuiteitsbegrip

De funktie f heet continu in het punt $a \in A$ als $f(a) = \lim_{z \to a} f(z)$.

Equivalente definitie: f is continu in $a \in A$ als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een δ is zodat $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ voor $|z-a| < \delta$ en $z \in A$.

f heet continu op (of in) A als $f(z)$ continu is in ieder punt van A. In de meeste gevallen is A een gebied, een domein, of een kromme.

Uit de reële analyse kennen we de begrippen links- en rechts-continuiteit: $\lim_{x \uparrow a} f(x) = f(a)$ resp. $\lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a)$. In het complexe vlak zijn er veel meer mogelijkheden om tot een punt a te naderen. Zij f gedefinieerd op A en B een deelverzameling van A. Dan heet f continu in het punt a ten aanzien van $B \subset A$ als

(1) $a \in B$,

(2) bij iedere $\varepsilon > 0$ is een $\delta > 0$ zo dat $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ als $|z-a| < \delta$ en $z \in B$.

Voorbeeld: *door* $f(z) = z^{-1} - \bar{z}^{-1}$ $(z \neq 0)$, $f(0) = 0$ **is f gedefinieerd op A = hele complexe vlak; f is discontinu in 0, maar continu in 0 ten aanzien van B = reële as.**

Opmerking: Als er sprake is van "continu in a" zonder meer, dan wordt ondersteld dat de functie in een volle omgeving van a gedefinieerd is.

Opmerking: Som, verschil, product en quotient van continue funkties zijn continue funkties (met de bekende uitzondering: niet delen door nul), net als in de reële-funktietheorie.

Is $f(z)$ een continue funktie van z, dan zijn de reële funkties $u(x,y)$ en $v(x,y)$, gedefinieerd door $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, continue funkties van x en y. Het omgekeerde geldt ook (ga dit na). Om werkelijk interessante complexe-funktietheorie te krijgen, moeten we meer eisen dan continuiteit alleen.

Opgave. Is f continu, dan zijn ook $Re(f)$, $Im(f)$, en $|f|$ continue funkties van z. De hoofdwaarde arg z is niet continu in de omgeving van de negatief-reële as; wel continu op die as ten aanzien van die as (daar is arg z gelijk aan π).

Stelling

Is f gedefinieerd en continu op een gesloten begrensde verzameling A, dan is f op A begrensd, en $|f(z)|$ **heeft zowel een maximum als een minimum op A.**

Bewijs: Analoog aan 1 § 2 A en B.

§ 2. Differentieerbare funkties

We hebben reeds opgemerkt dat we met continue funkties niet ver komen. We zullen daarom differentieerbaarheid eisen. A priori is het niet duidelijk dat er dan wel iets interessants komt, omdat we toch in de reële analyse ook wel funkties van twee veranderlijken x en y naar deze veranderlijken kunnen differentiëren.

We zullen de afgeleide f' van f definiëren op een manier geheel analoog aan die in de reële analyse van funkties van één reële veranderlijke. De resultaten blijken zeer verrassend te zijn. Het blijkt namelijk dat een funktie die éénmaal differentieerbaar is, automatisch willekeurig vaak differentieerbaar is.

We zullen de afgeleide alleen definiëren in een inwendig punt van de definitieverzameling A van de funktie. De verzameling van alle inwendige punten van A is een open verzameling. Men kan bewijzen dat een open verzameling de vereniging is van een collectie van disjuncte gebieden. Daarom is het voldoende, differentieerbaarheid te definiëren voor een funktie die in een gebied (open + samenhangend) is gedefinieerd.

Definitie. Een funktie f, gedefinieerd in een gebied G, heet differentieerbaar in het punt a van G als het differentiequotient

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (h \neq 0)$$

een limiet L(a) heeft voor $h \to 0$.

Voor $|h|$ klein genoeg ligt $a+h$ ook in G. Bovenbedoelde limiet L(a) duiden we ook aan met f'(a), en men noemt f'(a) de afgeleide van f(z) in het punt a. Dit is geheel analoog aan het geval van de reële analyse. (Bedenk echter dat h hier complex is!)

Gelijkwaardige definities

(1) f(z) gedefinieerd in G heeft afgeleide L(a) in punt $a \in G$ als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een δ is zodat $\left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a} - L(a)\right| < \varepsilon$ voor elke z met $0 < |z-a| < \delta$.

(2) Als in de omgeving van a geldt

$$f(z) = f(a) + (z-a)L(a) + (z-a)\eta(z,a) \;,$$

met $\eta(z,a) \to 0$ voor $z \to a$, dan kunnen we L(a) definiëren als de afgeleide van $f(z)$ in het punt a.

Opgave. Bewijs de gelijkwaardigheid van de definities (1) en (2).

Stelling

Is f differentieerbaar in het punt a, dan is f continu in a.

Bewijs. f differentieerbaar in a, dus f gedefinieerd in volle omgeving van a. We kunnen dan getallen $L = f'(a)$ en δ_1 vinden zodanig dat (neem $\varepsilon = 1$)

$$\left|\frac{f(z) - f(a)}{z - a} - L\right| < 1 \quad \text{voor alle } z \text{ met } 0 < |z-a| < \delta_1 .$$

Dus ook

$$|f(z) - f(a) - (z-a)L| \leqslant |z-a| \quad \text{voor } 0 \leqslant |z-a| < \delta_1 .$$

Dan is onder deze omstandigheden

$$\begin{aligned} |f(z) - f(a)| &= |f(z) - f(a) - L(z-a) + L(z-a)| \\ &\leqslant |f(z) - f(a) - L(z-a)| + |L|\ |z-a| \\ &\leqslant (1 + |L|)\ |z-a| < (1 + |L|)\delta_1 . \end{aligned}$$

Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Kies $\delta = \min(\delta_1, \frac{\varepsilon}{(1 + |L|)\delta_1})$. Dan geldt

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon \text{ mits } |z-a| < \delta. \text{ Dus f continu in a. QED.}$$

We hebben het bewijs hier in alle nauwkeurigheid opgeschreven. Het inzicht dat de stelling juist is krijgen we sneller: als $z \to a$ heeft $\frac{f(z) - f(a)}{z - a}$ een eindige limiet. Daar de noemer tot 0 nadert moet ook de teller tot 0 naderen.

Opmerking: natuurlijk geldt niet de omkering der bovengenoemde stelling.

Voorbeeld. $Re(z)$ is een continue funktie van z, maar ze heeft in geen enkel punt een afgeleide. Verifieer dat $f(z) = \bar{z} = x - iy$ geen differentieerbare funktie is.

Opmerking: de bekende regels voor het differentiëren van som, verschil, product en quotiënt (noemer niet nul) van funkties gaan gewoon door.

Opgave. Bewijs de kettingregel. Is $\varphi(z)$ differentieerbaar in z_0, $f(\varphi)$ differentieerbaar in $\varphi_0 = \varphi(z_0)$, dan is $F(z) = f(\varphi(z))$ differentieerbaar in z_0 en

$$F'(z_0) = f'(\varphi_0)\varphi'(z_0) .$$

Aanwijzing: gebruik definitie (2) van differentieerbaarheid (waarom?).

Definitie. Is f gedefinieerd in een gebied G, en is f in elk punt van G differentieerbaar, dan heet f differentieerbaar in G. Dan noemt men f een (eenwaardige) analytische funktie, of ook wel holomorfe funktie, in G. Ook de naam reguliere funktie wordt vaak gebruikt in plaats van holomorf.

Analytisch in een punt, op een kromme

Analytisch in een punt = differentieerbaar in het punt èn differentieerbaar in een volle omgeving van dat punt.

Analytisch op een kromme = analytisch in ieder punt van die kromme.

Ergo: bij analytisch in een punt of op een kromme moeten we dat punt of die kromme inbedden in een gebied, en eisen dat de funktie differentieerbaar is in dat gebied.

Opgave. Beschouw $f(z) = x^2y + ixy^2$. Bewijs: $f(z)$ is differentieerbaar in $z = 0$, maar $f(z)$ is niet analytisch in $z = 0$.

De reële funktie gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = 0 , \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{als } x \neq 0 \end{cases}$$

is voor alle x differentieerbaar, maar f' is in $x = 0$ niet continu, dus ook niet differentieerbaar. Zoiets is in de complexe funktietheorie niet mogelijk. Dit blijkt uit de volgende

Fundamentele eigenschap ("eigenschap*").

Is $f(z)$ holomorf in G, dan is ook $f'(z)$ holomorf in G.

Het bewijs wordt uitgesteld. We verwijzen naar dit resultaat door het eigenschap* te noemen. Gevolg van eigenschap*: is $f(z)$ holomorf in G, dan bestaan al haar afgeleiden $f'(z)$, $f''(z)$,..., in G en deze zijn alle holomorf in G. Hoewel we voorlopig geen gebruik van deze eigenschap maken is het goed nu reeds in te zien dat differentieerbaarheid van een funktie een zó zware eis is, dat de funktie nog meer mooie eigenschappen heeft.

Voorbeelden van analytische funkties

$$f(z) = \text{constant}\ , \qquad f'(z) = 0\ .$$

$$f(z) = z\ , \qquad f'(z) = 1\ .$$

$$f(z) = z^n\ , \qquad f'(z) = n\,z^{n-1} \quad (n \text{ geheel getal})\ .$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n\ , \qquad f'(z) = \sum_{n=1}^{N} n\,a_n z^{n-1} \quad (\text{polynoom})\ .$$

Een polynoom is een analytische funktie in G = hele z-vlak.

Opgave. Waar zijn de funkties z^{-2}, $(1+z)^{-1}$, holomorf?
Idem voor quotiënt van twee polynomen in z.
Ga na dat $|z|$ nergens analytisch is.

§ 3. Funkties gedefinieerd door machtreeksen

Machtreeksen zijn uitermate belangrijk voor de complexe-funktietheorie.

Machtreeks om het punt z_0 is van de vorm $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Machtreeks om de oorsprong is $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Stelling

De machtreeks $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n z^n$ is absoluut en uniform convergent voor $|z| \leq \rho$ als $0 < \rho < R$ en divergent voor $|z| > R$. Hierbij is R een getal dat bepaald is door de rij $\{a_n\}$, en wel geldt volgens Cauchy-Hadamard:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}\ .$$

(Daarbij is $R = 0$ als $\lim\sup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ en $R = \infty$ als deze lim sup 0 is.)

Bewijs.

Eerst het triviale geval dat $R = 0$ is

Voor $z = 0$ is de machtreeks altijd convergent, met som a_0. Dat is dan in het geval $R = 0$ ook het enige punt van convergentie, omdat onder deze omstandigheden de algemene term der reeks niet eens naar nul gaat (hetgeen nodig is voor convergentie). Immers: $(z \neq 0)$

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \text{oneindig.}$$

Dus $a_n z^n$ nadert niet tot nul als $n \to \infty$.

<u>Tweede geval, $R > 0$</u>

Neem $0 < \rho < R$ en $\rho < r < R$. Dan is $\frac{1}{R} = \limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r}$. Rechts van $\frac{1}{r}$ ligt dus slechts een eindig aantal getallen $\sqrt[n]{|a_n|}$. Anders gezegd: er is een N zó dat $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r}$ voor $n > N$. Dus is voor $n > N$ en voor alle z met $|z| \leqslant \rho$

$$|a_n z^n| \leqslant \left(\frac{\rho}{r}\right)^n .$$

Daar $\left(\frac{\rho}{r}\right)^n$ niet van z afhangt en $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n$ convergeert is $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absoluut en uniform convergent voor $|z| \leqslant \rho$.

Is $|z| > R$, dan is $\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \frac{|z|}{R} > 1$, zodat dan de algemene term der reeks niet naar nul gaat voor $n \to \infty$. Dit betekent dat de reeks divergent is. Hiermede is de stelling volledig bewezen.

<u>Opmerking</u>: De grootheid R noemt men <u>convergentiestraal</u>; de punten z met $|z| = R$ vormen de <u>convergentiecirkel</u>.

<u>Opgave</u>: een machtreeks convergeert uniform op iedere begrensde gesloten verzameling gelegen binnen de convergentiecirkel.

<u>Voorbeelden</u>:

$R = 0$: $\quad \sum\limits_{0}^{\infty} (-1)^n \, n! \, z^n$

$R = \infty$: $\quad \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$R = 1$: $\quad \sum\limits_{0}^{\infty} z^n \,, \; \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \,, \; \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n} .$

Het gedrag van de machtreeks <u>op</u> de convergentiecirkel kan van alles zijn.

Zo is $\sum_{0}^{\infty} z^n$ divergent voor $|z| = R = 1$.

$\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ is absoluut en uniform convergent voor $|z| = R = 1$.

$\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ is convergent voor $z = -1$, divergent voor $z = 1$.

Stelling

De funktie $f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ is binnen de convergentiecirkel $|z| < R$ een holomorfe funktie van z, en haar afgeleide wordt gevonden door termsgewijze differentiatie: $f'(z) = \sum_{0}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}$. Deze laatste reeks heeft dezelfde convergentiestraal als de eerste reeks.

Bewijs: $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ omdat $\sqrt[n]{n} \to 1$ voor $n \to \infty$. De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n z^n$ heeft dus dezelfde convergentiestraal als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dus heeft ook $\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}$ deze convergentiestraal.

Is de zo verkregen funktie $g(z) = \sum_{0}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}$ werkelijk de afgeleide van de funktie $f(z)$?

Neem z binnen convergentiecirkel van de twee reeksen. Kies $\rho > 0$ zò dat alle punten ζ van de cirkel $|\zeta - z| \leq \rho$ binnen de convergentiecirkel liggen. Stel $\zeta = z + h$, met dus $|h| \leq \rho$, en $h \neq 0$, dan heeft het volgende zin:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n\, z^{n-1} \right\} .$$

Nu is

$$\left|\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\right| = |h| \, |\tbinom{n}{2}z^{n-2} + \tbinom{n}{3}hz^{n-3} + \ldots + \tbinom{n}{n}h^{n-2}|$$

$$\leq |h|\{\tbinom{n}{2}|z|^{n-2} + \tbinom{n}{3}\rho|z|^{n-3} + \ldots + \tbinom{n}{n}\rho^{n-2}\}$$

$$\leq \frac{|h|}{\rho^2}\{\tbinom{n}{2}\rho^2|z|^{n-2} + \tbinom{n}{3}\rho^3|z|^{n-3} + \ldots + \tbinom{n}{n}\rho^n\}$$

$$\leq \frac{|h|}{\rho^2}\{|z|^n + \tbinom{n}{1}\rho|z|^{n-1} + \tbinom{n}{2}\rho^2|z|^{n-2} + \ldots + \tbinom{n}{n}\rho^n\} =$$

$$= \frac{|h|}{\rho^2}(|z| + \rho)^n .$$

Derhalve

$$\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z)\right| \leq \frac{|h|}{\rho^2}\sum_0^\infty |a_n|(|z| + \rho)^n .$$

De reeks in het rechterlid convergeert omdat $|z| + \rho < R$ is. De reeks is onafhankelijk van h. Het rechterlid gaat dus naar nul voor $h \to 0$. Dus limiet van $h^{-1}(f(z+h) - f(z))$ bestaat en is gelijk aan $g(z)$. Dus f is differentieerbaar en heeft $g(z)$ tot afgeleide. Hiermee bewijs klaar.

Opmerking: Dit bewijs en vele die nog volgen hebben allemaal de volgende vorm. Van een funktie f vermoeden we dat $f' = g$. Neem een punt z. Schrijf dan

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = h \cdot \varphi(z,h) .$$

Toon dan aan dat $|\varphi(z,h)|$ begrensd is voor $|h|$ voldoende klein, d.w.z. dat het rechterlid $\to 0$ als $|h| \to 0$. Dan is met de definitie van afgeleide bewezen dat $f'(z) = g(z)$. Daar z willekeurig was is het bewijs klaar.

Opmerkingen

Een machtreeks definieert dus een funktie die holomorf is in het cirkelvormige gebied der convergentie. Voor deze bijzondere holomorfe funktie is het bestaan van alle afgeleiden van hogere orde duidelijk. Deze afgeleiden worden verkregen door termsgewijze differentiatie; al deze reeksen hebben een en dezelfde convergentiestraal. Voor machtreeksen is hiermee eigenschap* bewezen. We zullen later zien dat een funktie, die holomorf is in een omgeving van z_0 de som is van een machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ welke in een cirkel om z_0 convergeert.

Exponentiële funktie

Definitie

$$\exp z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} .$$

De convergentiestraal is oneindig groot. Dus exp z is holomorf in het hele eindige z-vlak.

Eigenschappen:

(1) $(\exp z)' = \exp z$.

(2) additietheorema: $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2$ (volgt uit (1)).

(3) exp z heeft geen nulpunten (volgt uit (2)).

De gebruikelijke notatie is e^z i.p.v. exp z.

Stelling. $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (\frac{z}{n})^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$.

Bewijs. Bij k vast, n stijgend: $\binom{n}{k}(\frac{1}{n})^k \uparrow \frac{1}{k!}$. Neem $|z| < R$ (willekeurig). Dan K te bepalen zó dat $|\sum\limits_{k=K}^{\infty} \{\binom{n}{k}(\frac{z}{n})^k - \frac{z^k}{k!}\}| < 2 \sum\limits_{k=K}^{\infty} \frac{R^k}{k!} < \varepsilon$. Vervolgens $\sum\limits_{k=0}^{K-1} \binom{n}{k}(\frac{z}{n})^k \to \sum\limits_{k=0}^{K-1} \frac{z^k}{k!}$ als $n \to \infty$.

De trigonometrische funkties worden gedefinieerd door

$$\sin z = \sum_0^\infty (-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)!$$

$$\cos z = \sum_0^\infty (-1)^n z^{2n}/(2n)!$$

Ze zijn overal analytisch. Er gelden de formules:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) , \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) ,$$

$$(\sin z)' = \cos z , \qquad (\cos z)' = - \sin z ,$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \qquad (\text{n.b. } |e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z} \neq 1 \text{ tenzij } z \text{ reëel}),$$

overal in het eindige z-vlak. Dit sluit geheel aan bij de elementaire theorie. We zeggen: de exponentiële en trigonometrische funkties van een reële veranderlijke hebben we analytisch voortgezet in het complexe vlak. (Zie hoofdstuk VI.)

Verband met de hyperbolische functies.

Voor alle z: cos iz = cosh z, sin iz = i sinh z, $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, enz.

Zie Wiskunde 10.

<u>Opgave</u>: Los op cosh z = 0; sinh z = 0.

Heeft cosh z = sinh z een oplossing?

<u>LET OP</u>: Voor vele waarden van z geldt $|\cos z| > 1$ en $|\sin z| > 1$!

Al dadelijk is $\cos i = \frac{1}{2}(e^{-1} + e^{1}) > 1$ omdat $e > 2$.

Uit

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy =$$

$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

volgt

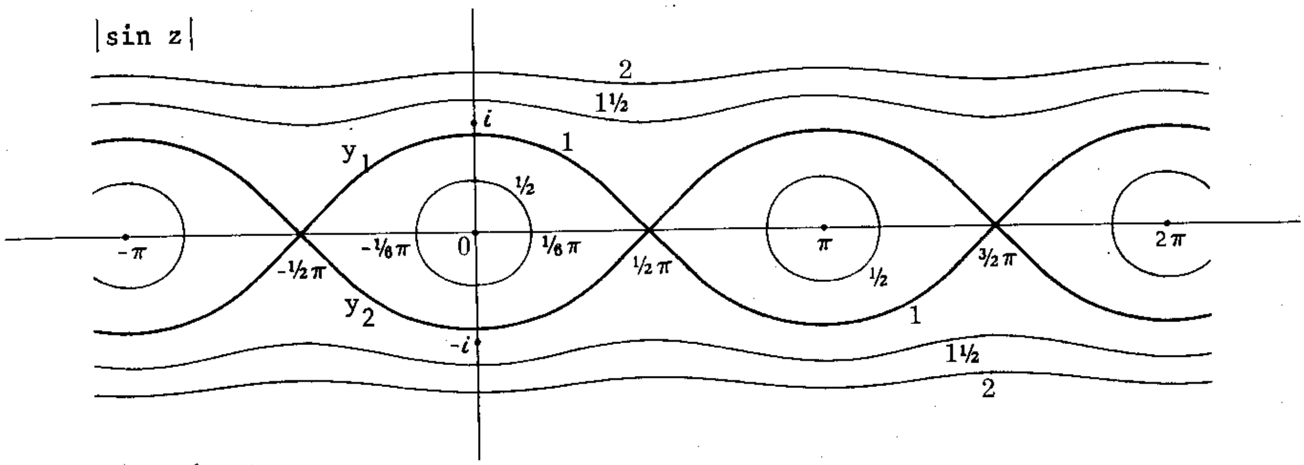
$$|\sin z| = \{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y\}^{\frac{1}{2}} = \{\sin^2 x + \sinh^2 y\}^{\frac{1}{2}} .$$

Dus $|\sin z| = 1$ als $\sinh y = \cos x$ of $\sinh y = -\cos x$.

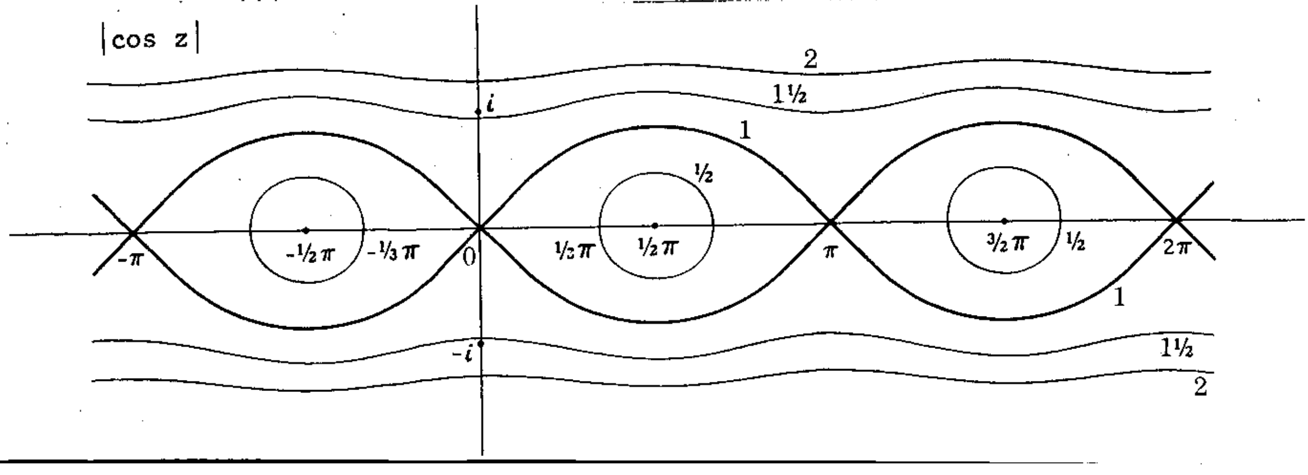
Dit leidt tot twee krommen in het z-vlak

$$y_1 = \log(\sqrt{1+\cos^2 x} + \cos x) \quad \text{en} \quad y_2 = \log(\sqrt{1+\cos^2 x} - \cos x) = -y_1 .$$

Daarop is $|\sin z| = 1$; daartussen $|\sin z| < 1$ en overal elders $|\sin z| > 1$:



Analoog voor $|\cos z|$ (krommen over $\frac{\pi}{2}$ verplaatsen):



HOOFDSTUK III. Integreren in het complexe vlak

§ 1. Complexe integratie

We gaan uit van de definitie van bepaalde integraal van een reële funktie die we bekend veronderstellen uit het college Wiskunde 10 evenals de (toen niet bewezen) stelling:

Is $g(x)$ continu voor $a \leqslant x \leqslant b$ dan bestaat $\int_a^b g(x)dx$.

Zij nu K een gladde boog met parametervoorstelling $z = \varphi(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$. We herinneren er aan dat in § I.3 is geëist dat $\varphi'(t)$ continu is. Laat verder $f(z)$ een continue funktie van z zijn op de boog K. Dan definiëren we

$$\boxed{\int_K f(z)dz = \int_a^b f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)dt \ .}$$

(*Merk op: de integrand is een complexe functie van de reële variabele t.*)

Op grond van bovengenoemde stelling uit Wiskunde 10 bestaat de integraal in het rechterlid (U ziet dat het reden had te eisen dat bogen steeds continu differentieerbaar zijn).
We definiëren de integraal van $f(z)$ over een <u>kromme</u> K als de som van de integralen over de bogen waaruit K is opgebouwd. (Ga na dat bovenstaande definitie onafhankelijk is van de keuze van de parametervoorstelling.)

<u>Enkele voorbeelden</u>

a) $f(z) = 1$, K gegeven door $\varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ met beginpunt $A = \varphi(a)$, eindpunt $B = \varphi(b)$.

$$\int_K f(z)dz = \int_a^b 1 \, . \, \varphi'(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a) = B - A \ .$$

b) $f(z) = z$, K als in a).

$$\int_K f(z)dz = \int_a^b \varphi(t) \cdot \varphi'(t)dt = \left[\tfrac{1}{2}\varphi^2(t)\right]_{t=a}^{t=b} = \frac{B^2 - A^2}{2} \ .$$

In a) en b) is de waarde van de integraal afhankelijk van begin- en eindpunt van K maar niet van de gekozen weg van A naar B. Dit is niet altijd het geval (en dat zal één van de hoofdpunten van dit college worden).

Ga dit na aan de hand van de voorbeelden c) en d).

c) $f(z) = |z|$ is nergens analytisch. Zij K de kromme bestaande uit het lijnstuk $[0,1]$ en de cirkelboog van de eenheidscirkel van 1 naar i. Zij K' het lijnstuk van 0 naar i. Ga na dat

$$\int_K |z|dz = \tfrac{1}{2} + (i-1) \qquad \text{en} \qquad \int_{K'} |z|dz = \tfrac{1}{2}i \ .$$

d) Kies $f(z) = \frac{1}{z}$, $A = 1$, $B = -1$ en als krommen K resp. K' nemen we

$$|z| = 1, \ \mathrm{Im}\, z \geqslant 0 \quad \text{resp.} \quad |z| = 1, \ \mathrm{Im}\, z \leqslant 0 \ .$$

Toon nu aan dat de integralen over deze krommen verschillend zijn.

Het volgende resultaat is van groot belang (uit het hoofd leren!):

Zij K een cirkel met middelpunt z_0 en straal a. Voor K kunnen we dus $z = z_0 + ae^{it}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ kiezen als parametervoorstelling. Zij m geheel. Dan is

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K (z-z_0)^m\, dz = \begin{cases} 0 \text{ als } m \neq -1 \\ 1 \text{ als } m = -1 \ . \end{cases}$$

Bewijs: Pas de definitie toe.

Opmerking: De waarde van de integraal hangt niet van de straal a van de cirkel af.

De bekende stellingen over integralen van reële funkties zijn direkt over te brengen op complexe integralen. We noemen slechts één voorbeeld

$$\int_K \{\lambda f(z) + \mu g(z)\}dz = \lambda\int_K f(z)dz + \mu\int_K g(z)dz \ .$$

Het zal in het vervolg veel voorkomen dat een grove schatting nodig is voor de waarde van een integraal. Daarvoor gebruiken we de

Stelling

Als $|f(z)| \leqslant M$ voor $z \in K$ en als L de lengte van de kromme K is dan geldt (aangenomen dat de integraal bestaat)

$$\boxed{\left|\int_K f(z)dz\right| \leqslant M.L \ .}$$

Bewijs: Zij $z = \varphi(t)$, $(a \leq t \leq b)$ een parametervoorstelling van K. Dan is

$$\left|\int_K f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)dt\right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)|\,dt \leq M\int_a^b |\varphi'(t)|\,dt = M.L$$

(vgl. § I.3).

Opmerking: In dit bewijs gebruiken we de ongelijkheid

$$\left|\int_a^b z(t)dt\right| \leq \int_a^b |z(t)|\,dt$$

waarin $z(t)$ een complexe funktie van de reële variabele t is (en $a \leq b$). Dit is eenvoudig te bewijzen met de definitie van integraal (Wiskunde 10) en de ongelijkheid $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

Een analogon van wat bij de integraalrekening van reële funkties de hoofdstelling heette kan ook voor complexe funkties geformuleerd worden en wel

Stelling

Zij G een gebied en f continu binnen G. Laat F een funktie zijn, gedefinieerd in G, waarvoor geldt $F' = f$. Als de kromme K (beginpunt A, eindpunt B) binnen G ligt geldt

$$\boxed{\int_K f(z)dz = F(B) - F(A)\ .}$$

Bewijs. $$\int_K f(z)dz = \int_a^b f\{\varphi(t)\}\varphi'(t)dt = \int_a^b F'\{\varphi(t)\}\varphi'(t)dt =$$

$$= F\{\varphi(b)\} - F\{\varphi(a)\} = F(B) - F(A)\ .$$

(We gebruiken dus de kettingregel voor integralen van een complexe funktie van een reële variabele).

Voorbeelden

1) $f(z) = z^2$, $F(z) = \frac{1}{3}z^3$ en $\int_K z^2dz = \frac{B^3 - A^3}{3}$ als A en B beginpunt resp. eindpunt van K zijn.

2) $f(z) = z^m$, m geheel, $m \neq -1$. Dan is $F(z) = \frac{z^{m+1}}{m+1}$. De funkties $f(z)$ en $F(z)$ zijn voor alle z gedefinieerd voor niet-negatieve exponenten, anders alleen voor $z \neq 0$. Voor een gesloten kromme (ev. niet door 0) is dan $\int_K f(z)dz = 0$, zoals we boven al met behulp van de definitie aantoonden.
Dat dit voor $f(z) = \frac{1}{z}$ niet opgaat wordt later een belangrijke zaak!

Bij de laatste stelling hangt $F(B) - F(A)$ niet af van de kromme K. Elke integratieweg in G van A naar B geeft dus dezelfde uitkomst. Eis is dat er een F met $F' = f$ bestaat. G mag meervoudig samenhangend zijn (bijv. $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $F(z) = -\frac{1}{z}$).

Stelling

Zij f continu in G en p een vast punt in G. Als voor iedere $z \in G$ en iedere weg in G van p naar z de integraal

$$\int_p^z f(\zeta)d\zeta$$

alleen afhangt van z (maar niet van de gekozen weg) dan is $F(z) := \int_p^z f(\zeta)d\zeta$ in G een holomorfe functie en $F'(z) = f(z)$.

Bewijs: F is eenduidig gedefinieerd. Zij $a \in G$. Omdat f continu is, is er voor iedere $\varepsilon > 0$ een omgeving van a waarbinnen geldt: $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$. Beschouw een weg in G van p naar a, verlengd met het lijnstuk van a naar z. Dan geldt:

$$F(z) - F(a) = \int_a^z f(\zeta)d\zeta = (z-a)f(a) + \int_a^z \{f(\zeta) - f(a)\}d\zeta \, .$$

Hierin is de laatste term in absolute waarde $< \varepsilon|z-a|$ als z dicht genoeg bij a ligt. Dit betekent dat F in a differentieerbaar is met afgeleide $f(a)$. Dit geldt voor iedere $a \in G$ waarmee het gestelde bewezen is.

Opgave: Zij $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ een machtreeks met convergentiegebied $G : |z| < R$. Toon aan dat

$$\int_0^{z_0} f(\zeta)d\zeta \qquad |z_0| < R$$

bij twee verschillende integratiewegen (binnen G) dezelfde uitkomst geeft nl. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^{n+1}/(n+1) = F(z_0)$. (Wenk: gebruik stelling van blz. 22).

§ 2. Hoofdstelling der complexe integratie

We hebben in vele gevallen gezien dat de keuze der integratieweg geen invloed heeft op de waarde der integraal, zolang de eindpunten der integratieweg vast blijven. Dit geldt voor een grote klasse van integreerbare funkties en wel met name voor holomorfe funkties.

Stelling

Zij $f(z)$ holomorf in gebied G; α en β begin- en eindpunt van een kromme K die geheel in G ligt. Zij K' een kromme met hetzelfde begin- en eindpunt, ook geheel binnen G liggend, en continu te vervormen tot K zonder dat daarbij enig niet tot G behorend punt wordt gepasseerd. Dan geldt

$$\int_K f(z)dz = \int_{K'} f(z)dz \; .$$

De integraal is dus niet afhankelijk van de keuze van de verbindende kromme, maar alleen van de eindpunten α en β.

Stelling

Zij $f(z)$ holomorf in gebied G. Zij K een Jordankromme die, met haar **binnengebied, geheel in** G ligt. Dan bestaat $\int_K f(z)dz$ en is gelijk aan nul.

Bovenstaande twee stellingen zijn equivalente formuleringen van de hoofdstelling der complexe integratie. (Niet te verwarren met wat bij de reële integratie hoofdstelling werd genoemd.)
Alvorens we deze stellingen bewijzen eerst een opmerking in de vorm van een

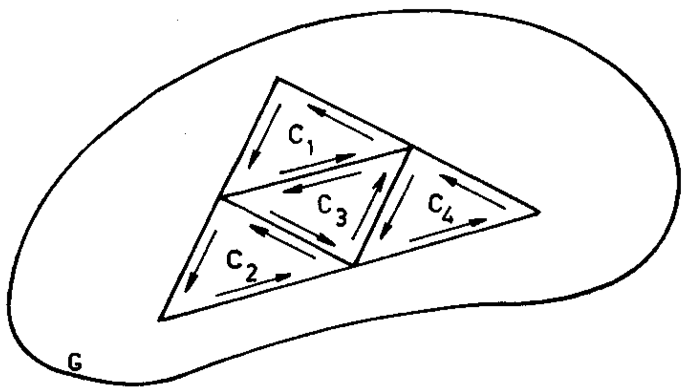
Opgave: Ga na dat de stelling voor machtreeksen eenvoudig te bewijzen is in de trant van de laatste opgave van de vorige paragraaf. (De opmerkingen na de tweede stelling van § II.3 maken deze opgave nog interessanter!)

We geven nu het bewijs van de stelling in de tweede formulering en wel in drie stappen:

1) K is de rand van een driehoek,
2) K is de rand van een veelhoek,
3) K is willekeurig.

Bewijs, eerste stap

Beschouw in G een driehoek D met rand K en omtrek L. We verbinden de middens van de zijden. Zo ontstaan 4 (congruente) driehoeken waarvan we de randen C_1 t/m C_4 noemen.



Als we over de vier driehoeken in positieve zin integreren worden de **stukken in het binnengebied tweemaal, en wel in tegengestelde zin doorlopen. Dus is**

$$I := \int_K f(z)dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_i} f(z)dz \; .$$

Daar dan

$$|I| \leqslant \sum_{i=1}^{4} \left| \int_{C_i} f(z)dz \right|$$

geeft tenminste één van de integratiewegen $C_1,\ldots,C_4$

$$\left| \int_{C_i} f(z)dz \right| \geqslant \tfrac{1}{4}|I| \; .$$

Deze driehoek noemen we D_1 (rand $= K_1$). Zijn omtrek is $L_1 = \frac{1}{2}L$. Nu wordt D_1 gevierendeeld, enz. enz. Na n stappen hebben we een driehoek D_n met rand K_n, omtrek $L_n = 2^{-n}L$, waarvoor geldt

$$\left| \int_{K_n} f(z)dz \right| \geqslant 4^{-n}|I| \; .$$

Er is precies één punt $a \in G$ dat binnen of op alle driehoeken D_i ligt. Zij $g(z) := f(z) - f(a) - (z-a)f'(a)$. Daar f differentieerbaar is, is er voor iedere $\varepsilon > 0$ een omgeving van a waarin geldt:

$$|g(z)| < \varepsilon|z-a| \; .$$

Als n voldoende groot is ligt de rand K_n van driehoek D_n helemaal binnen deze omgeving van a. Verder geldt

$$\int_{K_n} f(z)dz = \int_{K_n} g(z)dz .$$

Op K_n geldt:

$$\max|z-a| \leqslant \tfrac{1}{2} L_n .$$

Als we de gevonden ongelijkheden combineren vinden we

$$|I| \leqslant 4^n \left| \int_{K_n} f(z)dz \right| = 4^n \left| \int_{K_n} g(z)dz \right| \leqslant 4^n \cdot \tfrac{1}{2}\varepsilon \cdot L_n^2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon L^2 .$$

Daar dit geldt voor iedere $\varepsilon > 0$ is $I = 0$.

Tweede stap

Zij nu K de rand van een veelhoek zonder dubbelpunten, die met zijn **binnengebied geheel in G ligt. Het binnengebied van K kunnen we uit een eindig aantal** driehoeken zonder overlapping opbouwen. De randen kunnen we allemaal positief oriënteren (als die van K). Zij K_ν de georiënteerde rand van enige driehoek D_ν. Dan geldt

$$\int_{K} f(z)dz = \sum_{\nu} \int_{K_\nu} f(z)dz ,$$

omdat de gemeenschappelijke zijde van twee aangrenzende driehoeken tweemaal maar in tegengestelde zin wordt doorlopen, en in het rechterlid dus alleen de bijdragen van de rand K overblijven. Ieder van de integralen in het rechterlid is nul, op grond van de eerste stap. Dus het linkerlid is nul, waarmee de tweede stap is bewezen.

Derde stap

Een willekeurige kromme kunnen we willekeurig goed benaderen door een polygoontrek. Ligt die kromme K en haar binnengebied in een gebied G, dan kunnen we het zo maken dat de polygoontrek T en zijn binnengebied ook geheel in G ligt. En bovendien kunnen we het zo inrichten dat

$$\left| \int_{K} f(z)dz - \int_{T} f(z)dz \right|$$

willekeurig klein wordt. Aan het echte bewijs van deze beweringen gaan we voorbij, maar het resultaat is alleszins plausibel. Volgens stap 2 is, als K gesloten is, en dus ook T gesloten is, de integraal langs T gelijk aan nul.

Dus de integraal langs K is willekeurig klein. Dan moet $\int_K f(z)dz = 0$ zijn.
Hiermee is de hoofdstelling der integratie bewezen.

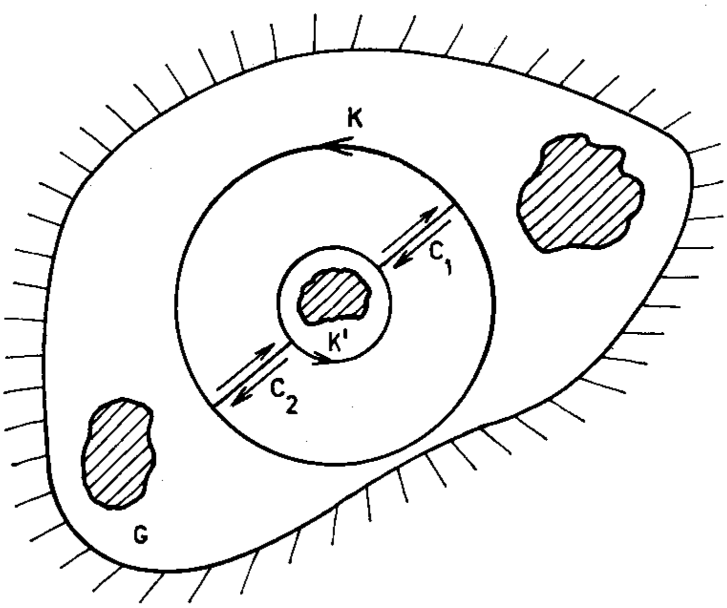
Een gevolg van de hoofdstelling is de

Stelling

Zij $f(z)$ holomorf in gebied G. Zijn K en K' gesloten krommen die geheel in G liggen en die door continue vervorming in elkaar kunnen worden overgevoerd zonder dat bij die vervorming punten buiten G worden gepasseerd, dan is, mits K en K' in dezelfde zin worden doorlopen,

$$\int_K f(z)dz = \int_{K'} f(z)dz .$$

Bewijs: We gebruiken een hulpmiddel dat soms "kanaalmethode" genoemd wordt.



K en K' worden verbonden door lijnstukken C_1 en C_2 waardoor het door K en K' gevormde ringvormige gebied in 2 stukken uiteenvalt. Volgens de hoofdstelling is de integraal van f over beide stukken 0. Als we de twee integralen optellen vallen de integralen over de kanalen C_1 en C_2 weg omdat deze tweemaal, en wel in tegengestelde zin, als deel van de integratieweg voorkomen. In deze som komt de integratieweg K' in negatieve zin voor. Hieruit volgt het gestelde.

Een toepassing hebben we gezien in het resultaat op blz. 21.

De hoofdstelling wordt vaak in de volgende vorm gebruikt

Zij K een enkelvoudige gesloten kromme (Jordankromme), $f(z)$ holomorf op en binnen K, dan geldt $\int_K f(z)dz = 0$.

Opmerking: Holomorf op K betekent: holomorf in een volle omgeving van K. We kunnen dus K inbedden in een gebied G bestaande uit het binnengebied van K, K zelf, en een strook in het buitengebied van K. In G is f(z) dan holomorf.

§ 3. Residu; integraalformule van Cauchy

Stel f(z) is in gereduceerde omgeving van punt a holomorf. Dan is er een cirkel C_a (straal ρ_a, middelpunt a) zodat f(z) differentieerbaar is voor ieder punt $z \neq a$ binnen C_a. De verzameling $0 < |z-a| < \rho_a$ is een gebied G van tweevoudige samenhang.
Beschouw twee Jordankrommen, K_1 en K_2, die het punt a in hun binnengebied hebben en verder geheel binnen C_a liggen. Deze krommen kunnen door continue vervorming in elkaar worden overgevoerd zonder dat ze G verlaten. Laat beide krommen positief zijn georiënteerd. Dan weten we

$$\int_{K_1} f(z)dz = \int_{K_2} f(z)dz \ .$$

We beschouwen nu de uitdrukking

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K f(z)dz \ ,$$

waarbij K een willekeurige Jordankromme is die het punt a in positieve zin omsluit en geheel binnen C_a ligt. Dan is duidelijk dat deze uitdrukking door a en f eenduidig is bepaald, en niet van K afhangt. We noemen deze uitdrukking het <u>residu</u> van f in het punt a. Is f(z) ook in a zelf holomorf, dan is het residu blijkbaar nul.

<u>Definitie</u>: Een punt waar f(z) analytisch is, heet <u>regulier punt</u> van f(z). Anders heet z een <u>singulier punt</u>. Er geldt dus de

<u>Stelling</u>

Is f(z) in een gereduceerde omgeving van a holomorf, dan heeft f(z) een residu in a. Dit residu is nul als a een regulier punt van f is (o.a.!).

<u>Residustelling van Cauchy</u>

Is f(z) op en binnen een Jordankromme K holomorf, met uitzondering van een eindig aantal singuliere punten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die binnen K liggen, dan geldt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K f(z)dz = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \{\text{Res. } f(z)\}_{z=a_\nu} \ .$$

<u>Bewijs</u>: Met de "kanaalmethode".

Met behulp van de residustelling kunnen we dus integralen berekenen als we een andere manier hebben om deze residuen te bepalen. Hoe doen we dat?

Stel f(z) is holomorf in een gereduceerde omgeving van a, en aldaar geldt $f(z) = g(z) + h(z)$, waarbij h(z) holomorf is in het punt a. Dan is duidelijk dat het residu van f in a gelijk is aan het residu van g in a, omdat het residu van h in a nul is.

In § 1 werd gevonden dat $\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{dz}{(z-a)^m} = 0$ is voor m geheel $\geqslant 2$, met K = cirkel om z = a. We weten nu dat dit resultaat geldt voor willekeurige K die a omsluit. De funktie $f(z) = (z-a)^{-m}$, $m \geqslant 2$, is overal analytisch behalve in z = a, waar f niet is gedefinieerd. Het punt a is dus singulier punt van f. In a heeft f een residu. Maar het residu is nul. Dus niet geldt: als het residu nul is hebben we een regulier punt.

De funktie $f(z) = (z-a)^{-1}$ heeft blijkbaar in a een residu gelijk aan 1. Om deze normering te krijgen werd juist de factor $1/2\pi i$ ingevoerd. Beschouw nu

$$f(z) = \sum_{m=1}^{k} \frac{A_m}{(z-a)^m} + h(z) ,$$

met k een positief geheel getal, A_m onafhankelijk van z, en h(z) holomorf in a; f(z) is niet gedefinieerd voor z = a. Wel is f(z) in een gereduceerde omgeving van a holomorf. Het residu van f in a is de som van de residuen der afzonderlijke termen. Dus

$$\{\text{Res. } f(z)\}_{z=a} = A_1 ,$$

de coëfficiënt van $(z-a)^{-1}$.

Definitie (zie ook IV.4): Is f(z) regulier in een gereduceerde omgeving van a en $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)$ eindig en $\neq 0$, dan zeggen we dat f(z) in z = a een pool van de orde k heeft (k geheel, > 0).

Een voorbeeld is de hierboven genoemde funktie f(z) als $A_k \neq 0$.

We kunnen nu van een funktie het residu in een pool berekenen indien we er in slagen de funktie in bovengenoemde vorm voor te stellen. Het residu is dan A_1. Zie verder IV.4 en IV.5.

Voorbeelden

a) Te bepalen $I = \int_{|z|=2} f(z)dz$ als $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2(z+1)}$.

Breuksplitsing geeft $f(z) = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z+1}$.

We zien dat f in -1 een pool van de eerste orde heeft. In de notatie van boven is

$$f(z) = \frac{2}{z+1} + h(z)$$

met $h(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$, een funktie die in een omgeving van -1 holomorf is. Het residu van f in -1 is 2. Op dezelfde manier zien we dat het residu van f in 0 gelijk is aan -1. In 0 heeft f een pool van de orde 2.

b) Als in a) maar met $f(z) = \frac{z^2+1}{z^3(z+1)}$.

c) Bepaal $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^4}\, dz$. We doen dit als volgt:

sin z is gedefinieerd als $z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$, welke reeks een in het hele vlak holomorfe funktie voorstelt. We mogen ook schrijven

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + z^4 \left(\frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \ldots\right).$$

Als we de holomorfe funktie tussen haakjes h noemen hebben we

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + h(z)$$

waarin h(z) in het hele vlak holomorf is. We zien dat het residu van $\frac{\sin z}{z^4}$ in z = 0 gelijk is aan $\frac{-1}{6}$. De gevraagde integraal is $-\frac{1}{3}\pi i$.

Opmerking: Als $f(z) = \frac{A}{z-a} + h(z)$ $(A \neq 0)$ waarin h analytisch is in een omgeving van a, dan heeft f in a een pool van de eerste orde met

$$\{\text{Res. } f(z)\}_{z=a} = A = \lim_{z \to a} (z-a)f(z).$$

Deze methode om een residu te bepalen, dic alleen mogelijk is bij polen van de eerste orde, ligt besloten in de volgende algemene

Stelling

Is $\varphi(z)$ analytisch in $z = a$, dan geldt

$$\boxed{\left\{\text{Res. } \frac{\varphi(z)}{z-a}\right\}_{z=a} = \varphi(a).}$$

Bewijs: Definieer f door

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z-a} \quad .$$

Zij K een cirkel om a met voldoende kleine straal ρ (later te bepalen). De funktie $f(z)$ is holomorf in de omgeving van a, met eventuele uitzondering van a zelf. Dus heeft f een residu in a:

$$\{\text{Res. } f(z)\}_{z=a} = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(z)}{z-a}\, dz \ .$$

Hiervoor is te schrijven

$$\{\text{Res. } f(z)\}_{z=a} = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(a)}{z-a}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(z)-\varphi(a)}{z-a}\, dz =$$

$$= \varphi(a) + \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(z)-\varphi(a)}{z-a}\, dz \ .$$

Nu is $\varphi(z)$ holomorf, dus continu in a. Bij $\varepsilon > 0$ is dus een $\delta > 0$ te vinden, met $|\varphi(z)-\varphi(a)| < \varepsilon$ voor alle z uit $|z-a| < \delta$. Kies $\rho < \delta$, dan is

$$0 \leqslant \left|\{\text{Res. } f(z)\}_{z=a} - \varphi(a)\right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_K \frac{\varphi(z)-\varphi(a)}{z-a}\, dz \right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\, \frac{\varepsilon}{\rho}\, 2\pi\rho = \varepsilon \ .$$

Daar dit voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt is

$$\left|\{\text{Res. } f(z)\}_{z=a} - \varphi(a)\right| = 0 \ , \quad \text{d.w.z.} \quad \{\text{Res. } f(z)\}_{z=a} = \varphi(a) \ .$$

Opmerking: In plaats van $\{\text{Res. } f(z)\}_{z=a}$ schrijven we vaak $\text{Res}_a\, f(z)$.

Integraalformule van Cauchy

Is $\varphi(z)$ op en binnen de Jordankromme J holomorf, dan geldt

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{\varphi(z)}{z-a}\, dz = \begin{cases} \varphi(a), & \text{a binnen J} \\ 0 \quad , & \text{a buiten J} \end{cases}}$$

Bewijs: Volgens de residustelling is de integraal gelijk aan de som der residuen in de singuliere punten binnen J. Ligt a buiten J, dan is er geen singulier punt binnen J, en dan is de integraal nul. Ligt a binnen J, dan is het residu in a gelijk aan $\varphi(a)$. Q.E.D.

Opmerking: We mogen niet door een singulier punt van de integrand integreren. De integraal heeft geen betekenis als a punt van J is.

Opmerking: Bovenstaande formule is "merkwaardig". De analytische funktie $\varphi(z)$ is binnen J reeds volledig bepaald door haar waarden op J.

Stelling

Zij K een willekeurige kromme; $\varphi(z)$ continu op K, a niet op K. Dan is

$$f(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(z)}{z-a} dz$$

een holomorfe funktie van a. (N.B. K hoeft niet gesloten te zijn.)

Bewijs: Zij

$$g(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(z)}{(z-a)^2} dz .$$

Deze integraal bestaat voor a **niet** op K; we verwachten dat $g(a) = f'(a)$ is, omdat de tweede integraal uit de eerste wordt verkregen door formele differentiatie onder het integraalteken.

Omdat a niet op K ligt, kunnen we een cirkel C met middelpunt a aangeven zodanig dat K en C elkaar niet snijden. Noem ρ de straal van die cirkel. Zij $|h| < \rho$. Dan ligt $a+h$ binnen C. Voor $h \neq 0$ geldt

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - g(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \varphi(z) \left\{ \frac{1}{h}\left[\frac{1}{z-a-h} - \frac{1}{z-a}\right] - \frac{1}{(z-a)^2} \right\} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_K \varphi(z) \left\{ \frac{h}{(z-a)^2(z-a-h)} \right\} dz .$$

Derhalve geldt:

Absolute waarde linkerlid $\leqslant \frac{|h|}{2\pi} \max_{z \in K} \left|\frac{\varphi(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}\right| \cdot$ lengte van K.

Nu heeft C een positieve afstand d tot K. Dus $|z-a| > d$, $|z-a-h| > d$. $\varphi(z)$ is continu, dus begrensd op K: $|\varphi(z)| \leqslant p$, met p constante. Derhalve is

$$\max_{z \in K} \left|\frac{\varphi(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}\right| < \frac{p}{d^3} = \text{constante onafhankelijk van h.}$$

De absolute waarde van het "linkerlid" is dus kleiner dan een geschikte constante maal $|h|$, waarbij de constante niet van h afhangt. Derhalve: $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ bestaat en is gelijk aan $g(a)$. Dit betekent: $f(a)$ is differentieerbaar in a, en bovendien geldt

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(z)}{(z-a)^2}\, dz \ .$$

Het bewijs geldt voor willekeurige a niet op K gelegen. Dus f(a) is een holomorfe functie van a in elk gebied dat met K geen punt gemeen heeft.

Opmerking: Als K een kromme is zonder zelfoversnijding, dan is het gebied: het hele z-vlak verminderd met K. Is K een Jordankromme, dan is in elk der twee gebieden door K bepaald (binnen- en buitengebied) f(a) een holomorfe funktie.

De vorige stelling is een speciaal geval van een algemenere stelling over het differentiëren onder het integraalteken.

Stelling

Zij K een kromme, G een gebied. Laat $\varphi(z,a)$, $z \in K$, $a \in G$, begrensd zijn ($|\varphi(z,a)| \leq M$), voorts holomorf in G (als functie van a bij vaste z), en - evenals $\frac{\partial\varphi(z,a)}{\partial a}$ - continu op K (als functie van z bij vaste a). Dan geldt

$$f(a) := \int_K \varphi(z,a)dz \quad \text{is holomorf in } G,$$

met afgeleide

$$f'(a) = \int_K \frac{\partial\varphi(z,a)}{\partial a}\, dz \ .$$

Bewijs: Neem een $z \in K$. Omdat φ een holomorfe funktie van a is in G geldt (volgens de integraalformule van Cauchy en de vorige stelling):

$$\varphi(z,a) = \frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{\varphi(z,\alpha)}{\alpha - a}\, d\alpha \quad \text{en} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial a} = \frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{\varphi(z,\alpha)}{(\alpha-a)^2}\, d\alpha \ ,$$

waarbij J een cirkel om a is, gelegen in G. Als h zó klein is dat $a+h$ ook binnen J ligt geldt:

$$\frac{\varphi(z,a+h) - \varphi(z,a)}{h} - \frac{\partial\varphi}{\partial a} = \frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{h\varphi(z,\alpha)}{(\alpha-a)^2(\alpha-a-h)}\, d\alpha \ .$$

Met $|\varphi(z,a)| \leq M$ voor $z \in K$, $a \in G$, ρ de straal van J en $|h| < \frac{1}{2}\rho$, vindt men

$$\left| \int_J \frac{h\,\varphi(z,\alpha)}{(\alpha-a)^2(\alpha-a-h)}\, d\alpha \right| \leq \frac{|h|M}{\rho^2 \cdot \frac{1}{2}\rho}\, 2\pi\rho = |h|\, \frac{4\pi M}{\rho^2} \ .$$

Dit geldt voor alle $z \in K$. Bij integratie over de kromme K, met lengte L, vinden we

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \int_K \frac{\partial\varphi}{\partial a}\, dz\right| \leq |h|\, \frac{2ML}{\rho^2}$$

Als we hierin $h \to 0$ laten gaan, dan volgt het gestelde via de definitie van afgeleide.

Toepassingen

1) $\varphi(z,a) = e^{az}$ is begrensd als we voor K het lijnstuk van $-i$ naar $+i$ nemen en voor G de cirkel $|a| < R$. Dit geeft

$$f(a) := \int_{-i}^{i} e^{az}\, dz \quad \text{is holomorf voor } |a| < R.$$

Daar R willekeurig was is f overal holomorf! Dit wisten we al. Immers $f(a) = 2i\, \frac{\sin a}{a}$.

2) Met behulp van integralen kan men nieuwe funkties definiëren. Voorbeeld:

$$f(a) := \int_0^1 \cos(a \sin \pi z) dz ,$$

een Bessel-funktie (nl. $J_0(a)$, zie Whittaker and Watson, Ch. XVII).

3) Als φ continu is op de kromme K en G een gebied zó dat alle $a \in G$ een afstand $> \delta > 0$ tot K hebben dan is $\varphi(z,a) = \frac{\varphi(z)}{z-a}$ begrensd. Toepassing van de stelling op dit geval geeft de stelling van blz. 32. We kunnen nu echter doorgaan met differentiëren:

$$\boxed{f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz}$$

als

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(z)}{z-a}\, dz .$$

In het bijzonder volgt hieruit de eerder genoemde:

Stelling (eigenschap* , blz. 13).

Als f holomorf is in G dan ook f'.

Bewijs: Zij z een punt van G en J een Jordankromme (positief georiënteerd) om z, die met zijn binnengebied geheel in G ligt. Dan geeft de integraalformule van Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \ .$$

We hebben net gezien dat het rechterlid willekeurig vaak gedifferentieerd kan worden:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_J \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \ .$$

I.h.b. heeft f' een afgeleide in z. Dit geldt voor elke $z \in G$, d.w.z.: f' is holomorf in G.

Een andere plezierig gevolg van onze stellingen is de volgende

Stelling

Zij φ holomorf in een gereduceerde omgeving van a en laat $\lim\limits_{z\to a} \varphi(z) = \ell$.
Als we $\varphi(a) = \ell$ definiëren dan is φ ook in a analytisch.

Bewijs: Zij K de cirkel $\{\zeta \mid |\zeta - a| = \rho\}$, ρ zō klein dat $|\varphi(\zeta) - \ell| < 1$. Binnen K is $\int_K \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta =: \varphi^*(z)$ holomorf. Voor $z \neq a$ geldt (kanaalmethode, integraalformule) $\varphi^*(z) = \varphi(z) + \operatorname{Res}_a \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}$. Dit residu is 0, want er geldt $|\operatorname{Res}_a| < \frac{\sigma(1 + |\ell|)}{|z - a| - \sigma}$ als $\sigma < |z - a|$. Dus $\varphi(z) = \varphi^*(z)$ voor alle $z \neq a$ en (laat $z \to a$) $\ell = \varphi^*(a)$. Met $\varphi(a) = \ell$ wordt φ dus analytisch in a.

Min of meer een omkering van de hoofdstelling is

Stelling van Morera

Is f in een gebied G continu en is voor iedere gesloten weg in G de integraal van f over deze weg nul, dan is f holomorf.

Bewijs: Zij p een vast punt in G. Definieer

$$F(z) := \int_p^z f(\zeta)d\zeta$$

waarbij de weg door G loopt. De definitie is éénduidig daar de integraal niet van de weg afhangt. Op blz. 23 is bewezen dat F holomorf is en $F'(z) = f(z)$. Dan is f ook holomorf.

We zullen deze stelling bij de reeksen op fraaie wijze toepassen.

Opgave: Ongelijkheid van Cauchy: Zij f op en binnen de cirkel $C := \{z \mid |z-a| = r\}$ analytisch en $|f(z)| \leqslant M$ voor z op C. Dan geldt

$$\boxed{|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{M.n!}{r^n} \quad .}$$

Opgave: Zij $\varphi(z)$ holomorf in een omgeving van een kromme K en

$$f(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\varphi(z)}{z-a}\, dz \,, \qquad \text{a niet op K.}$$

Neem b (geen eindpunt) op K, b_1 en b_2 dichtbij b te weerszijden (links resp. rechts) van K; dan geldt ("sprong van f bij b"):

$$\lim_{b_1 \to b} f(b_1) - \lim_{b_2 \to b} f(b_2) = \varphi(b) \,.$$

(Trek cirkeltje C om b, met boog C_1 om b_1, boog C_2 om b_2; ga na dat

$$f(b_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2} \frac{\varphi(z)}{z-b_1}\, dz \,, \qquad f(b_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{\varphi(z)}{z-b_2}\, dz \,,$$

waarin K_2 en K_1 omleggingen van K via C_2 en C_1 voorstellen; laat nu b_1 en $b_2 \to b$ gaan.)

Controleer het resultaat voor het geval K = Jordankromme!

§ 4. Constructie van analytische funkties door reeksen

Het begrip uniforme convergentie is bekend uit het college Wiskunde 30. We geven hier de analoge definitie voor complexe funkties. Een reeks van funkties $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, alle gedefinieerd op een gebied G noemen we convergent met som F(z) als bij iedere $\varepsilon > 0$ een N_0 gevonden kan worden zodat

$$\left|F(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z)\right| < \varepsilon \quad \text{als } N > N_0 \,.$$

Dit moet voor iedere $z \in G$ mogelijk zijn. In het algemeen zal N_0 niet alleen van ε afhangen, maar ook van z. Als we echter bij iedere $\varepsilon > 0$ een N_0 kunnen vinden zodat voor alle $z \in G$ en $N > N_0$ aan bovenstaande ongelijkheid is voldaan, heet de reeks uniform convergent op G. (Dat betekent dus dat N_0 dan alleen van ε afhangt.)

N.B. Uniform convergent betekent veel meer dan alleen maar "convergent voor iedere z". Voorbeeld: binnen de eenheidscirkel is $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ convergent voor iedere z, maar niet uniform convergent. De reeks is wèl uniform convergent op $\{z \mid |z| < \rho < 1\}$, al ligt ρ nog zo dichtbij 1.

Kenmerk van Weierstrass (vgl. Wiskunde 30, hoofdstuk 3).

Als voor alle z van gebied G geldt $|f_n(z)| < a_n$ en de majorante $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ uniform convergent op G.

Stelling (bewijs als in Wiskunde 30).

De som van een uniform convergente reeks van continue functies is een continue functie.

Stelling

Een uniform convergente reeks van continue funkties mag termsgewijs worden geïntegreerd over elke kromme liggende in het gebied van uniforme convergentie, d.w.z.

$$\int_K \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right\} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_K f_n(z)\,dz \right\} .$$

Bewijs: Laat F(z) de som van de reeks zijn en L de lengte van de kromme K. Bij iedere $\varepsilon > 0$ is een N_0 zodat voor $N > N_0$ en alle z op K geldt

$$|F(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z)| < \varepsilon .$$

Dan is volgens de bekende schatting voor integralen:

$$\left| \int_K F(z)\,dz - \sum_{n=1}^{N} \left\{ \int_K f_n(z)\,dz \right\} \right| = \left| \int_K \left\{ F(z) - \sum_{n=1}^{N} f_n(z) \right\} dz \right| \leq \varepsilon \cdot L .$$

Hiermee is het gestelde reeds bewezen.

Als de functies $f_n(z)$ holomorf zijn kunnen we nog meer bewijzen.

Stelling van Weierstrass

De som van een in een gebied uniform convergente reeks holomorfe funkties is holomorf.

Bewijs: Laat G het gebied van uniforme convergentie zijn, G' een willekeurig enkelvoudig samenhangend deelgebied van G en K een willekeurige gesloten kromme in G'. Dan is volgens de hoofdstelling $\int_K f_n(z)dz = 0$ voor iedere n, dus volgens de vorige stelling $\int_K F(z)dz = 0$. We hebben reeds bewezen dat F(z) continu is en kunnen nu besluiten dat F(z) holomorf is op grond van de stelling van Morera.

Een bijzonder geval van de stelling van Weierstrass: een machtreeks in een gesloten begrensde verzameling binnen de convergentiecirkel.

Opmerking: Ga aan het voorbeeld $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ na dat uit uniforme convergentie voor $|z| \leqslant 1$ (géén gebied!) niet volgt dat de som ook voor $|z| \leqslant 1$ een analytische funktie is. (In $z = 1$ is de somfunktie niet differentieerbaar, dus zeker niet analytisch!)

Bij de behandeling van reële funkties is gewaarschuwd niet de bekende fout te maken: een uniform convergente reeks term voor term te differentiëren. We zien het trouwens aan het vorige voorbeeld: de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ is voor $-1 \leqslant x \leqslant 1$ uniform convergent maar de som is in $x = 1$ niet eens differentieerbaar. Voor complexe reeksen, uniform convergent op een gebied, is termsgewijs differentiëren echter wèl geoorloofd:

Stelling

Is op het gebied G de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ uniform convergent met som F(z) en zijn alle $f_n(z)$ holomorf, dan is

$$F^{(p)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(z) \qquad (p = 1,2,\ldots) .$$

Bewijs: In de vorige stelling is aangetoond dat F(z) holomorf is en dus bestaat de afgeleide $F^{(p)}(z)$. We kunnen er voor schrijven:

$$\frac{p!}{2\pi i} \int_C \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta = \frac{p!}{2\pi i} \int_C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta ,$$

waarin C een cirkel in G voorstelt: $C = \{\zeta \mid |\zeta - z| = \rho\}$. De reeks die geïntegreerd wordt is evenals $\Sigma f_n(\zeta)$ uniform convergent op C, omdat op C de noemer een constante absolute waarde heeft. We mogen dus termsgewijs integreren waarmee het gestelde is bewezen.

Opgave: $$\int_0^1 \cos(a \sin \pi z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n}}{((2n)!!)^2} \quad \text{(Besselfunktie).}$$

Opgave: Toon aan (vgl. III, § 3 waar K eindig is) dat

$$f(a) = \int_0^{\infty} \varphi(x,a)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \varphi(\nu,a)d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$$

een holomorfe funktie van a in gebied G is, als voor elke $a \in G$ $\varphi(\nu,a)$ en $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ continu zijn op $n-1 \leqslant \nu \leqslant n$ en

$$|\varphi(\nu,a)| \leqslant u_n = \text{term van convergente reeks.}$$

Opgave: Ga op grond van voorgaande opgave na dat

1) $$\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx = a^{-1} (\text{Re } a > 0) \quad \text{geeft} \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-ax}\,dx = n!\; a^{-n-1} .$$

2) Ga na dat voor $a \in \mathbb{C}\backslash\{z \mid z = \text{Re } z \leq 0\}$

$$f(a) := \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a)^2} - af'(a) .$$

Leid hieruit af: $\frac{1}{2}f(a) = -af'(a)$.

3) Toon aan dat voor alle a met Re a > 0 geldt

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{a} \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2} .$$

(Differentieer; laat $a \to \infty$; de betrekking blijft geldig voor $a = 0$, zie hoofdstuk V.)

HOOFDSTUK IV. Holomorfe funkties; reeksen

§ 1. Stelling van Taylor

De in het college **Wiskunde 10** voor reële funkties bewezen stelling van Taylor kunnen we nu ook voor complexe funkties formuleren:

Stelling

Is $f(z)$ holomorf in het gebied G en a een willekeurig punt van G, dan heeft de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad \text{met} \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

een convergentiestraal die tenminste even groot is als de afstand van a tot de rand van G en de som is $f(z)$ voor alle $z \in G$ binnen de convergentiecirkel.

Bewijs: Zij r de afstand van a tot de rand van G; kies twee getallen ρ en ρ_1 met $0 < \rho_1 < \rho < r$. Dan ligt de cirkel C met straal ρ en middelpunt a met zijn binnengebied geheel binnen G. Laat z voldoen aan $|z-a| \leq \rho_1$. Dan geldt volgens de integraalformule van Cauchy (III, § 3)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z}\, dw .$$

Nu is
$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{1}{w-a} \, \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}} .$$

Verder
$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \frac{1}{\rho}\,|z-a| \leqslant \frac{\rho_1}{\rho} < 1 ,$$

en dus
$$\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n .$$

Deze reeks convergeert uniform in w op C omdat ze de van w onafhankelijke majorante $\sum_{n=0}^{\infty} (\rho_1/\rho)^n$ heeft. Omdat $f(w)$ op C begrensd is, convergeert de reeks $\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}$ uniform in w op C. Deze reeks kan dus termsgewijs worden geïntegreerd, en we vinden

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n , \quad \text{met} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw .$$

Van vroeger weten we dat $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ is. Hiermee is het bewijs af.

Opgave: Als $f(z)$ en $g(z)$ convergente machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ hebben in $|z| < C$, dan $h(z) = f(z) \cdot g(z)$ insgelijks: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ met $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
(Wenk: $\int_J \frac{h(z)}{z^{n+1}} dz = \int_J \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{g(z)}{z^{n-k+1}} dz = \Sigma \int$; de som breekt af na $k = n$; men kan ook de regel van Leibniz voor $(f.g)^{(n)}$ gebruiken.)

§ 2. Gedrag in de buurt van een regulier punt

Laat f holomorf zijn in een omgeving van a, dus volgens Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ in een omgeving van a. Als de getallen $c_1, c_2, \ldots$ alle 0 zijn, is f constant. Zo niet, laat c_k de eerste zijn die niet 0 is. We kunnen dan f in een omgeving van a schrijven als

$$f(z) = c_0 + c_k(z-a)^k\{1 + d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + \ldots\} ,$$

waarbij de machtreeks tussen accoladen een holomorfe funktie voorstelt die in $z = a$ de waarde 1 heeft en dus in een omgeving van a niet nul is. We onderscheiden twee gevallen:

1) $c_0 = f(a) = 0$. We noemen a dan een <u>k-voudig nulpunt</u> van f of ook wel een <u>nulpunt met multipliciteit k</u>.

2) $c_0 \neq 0$. Schrijf nu c_k in de vorm $c_k = c_0 \cdot r \cdot e^{i\varphi}$ (r en φ reëel met $r > 0$). Dan is

$$f(z) = c_0[1 + re^{i\varphi}(z-a)^k\{1 + d_1(z-a) + \ldots\}] .$$

Als $z = a + \rho e^{-i\varphi/k}$ en ρ (reëel) voldoende klein dan is

$$1 + re^{i\varphi}(z-a)^k\{1 + d_1(z-a) + \ldots\} = 1 + r\rho^k\{1 + \delta\}$$

waarbij $|\delta|$ klein is. Als δ zo klein is dat $\mathrm{Re}(1+\delta) > 0$, dan is $|1 + r\rho^k(1+\delta)| > 1$, d.w.z. $|f(z)| > |c_0| = |f(a)|$. Met andere woorden: in iedere omgeving van a liggen punten waar $|f(z)| > |f(a)|$, d.w.z. $|f|$ neemt in a <u>niet</u> een maximum aan!

In beide gevallen (1) en 2)) zien we dat er een omgeving is van a waarin $f(z) \neq 0$ eventueel met uitzondering van a zelf (geval 1)). We hebben hiermee twee stellingen bewezen.

Stelling

Is f holomorf in een omgeving van a dan is a niet een verdichtingspunt van nulpunten van f, tenzij f identiek 0 is.

Stelling

Is f holomorf in een omgeving van a dan neemt $|f|$ in het punt a niet een maximum aan, tenzij f constant is.

We gaan eerst op de laatste stelling in:

Zij D een begrensd domein (gebied + rand) gelegen binnen het gebied G waar f holomorf is. De funktie $|f|$ is op D continu en neemt dus op D een maximum aan. Op grond van bovenstaande stelling kunnen we nu concluderen dat dit maximum op de rand van D moet worden aangenomen. Analoge beschouwingen gelden voor een minimum van $|f|$. Is f in een omgeving van a holomorf en niet constant dan is $|f|$ minimaal in a als $f(a) = 0$ (triviaal) en anders niet. Immers als $f(a) \neq 0$ dan is er een omgeving van a waar $f(z) \neq 0$ is en in die omgeving is $1/f$ holomorf en $|1/f|$ neemt in a niet een maximum aan.

Opgave: De funkties $\mathrm{Re}(f)$ en $\mathrm{Im}(f)$ kunnen maximale waarden niet anders aannemen dan op de rand van domein D. Dit komt te pas in de potentiaaltheorie.

We komen nu aan een zeer belangrijk gevolg van de eerste stelling.

Identiteitsstelling

Stel f en g zijn gedefinieerd en holomorf in gebied G. Laat z_0 een punt van G zijn. Als in iedere gereduceerde omgeving van z_0 een punt ligt waar $f(z) = g(z)$ dan is $f(z) = g(z)$ overal in G.

Bewijs: Eerste stap. De funktie $f - g$ is holomorf in z_0 en uit het gegeven volgt dat z_0 een verdichtingspunt van nulpunten van deze funktie is. Dan moet $f - g = 0$ zijn in een omgeving van z_0.
Tweede stap. Als er punten in G waren waar $f(z) - g(z) \neq 0$ dan zou er ook een punt $p \in G$ zijn zó dat in iedere gereduceerde omgeving van p punten liggen met $f(z) - g(z) = 0$ en ook punten met $f(z) - g(z) \neq 0$. We hebben al gezien dat dit niet kan, d.w.z. overal in G is $f(z) = g(z)$.

Gehele funkties

Definitie: Een funktie $f(z)$ heet geheel als $f(z)$ voor iedere z holomorf is.

Stelling

Is $f(z)$ geheel, a willekeurig, dan is $f(z)$ te ontwikkelen in een machtreeks om $z = a$ met convergentiestraal ∞.

Bewijs: Zie boven. Merk op dat we de eigenschap van deze stelling ook als definitie van geheel kunnen nemen.

Definitie: Een funktie waarvan de machtreeks afbreekt heet gehele rationale funktie (veelterm). Is dit niet het geval dan noemen we de funktie transcendent.

Voorbeelden van gehele (transcendente) funkties zijn de exponentiële en trigonometrische funkties (II.3).

Stelling van Liouville

Een begrensde gehele funktie is noodzakelijk constant.

Bewijs: Zij $f(z)$ een gehele funktie. Dan bezit $f(z)$ een machtreeksontwikkeling om de oorsprong, waarvan de convergentiestraal oneindig groot is

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \,, \quad \text{met} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, dw \,.$$

Hierbij is C een willekeurige positief georiënteerde Jordankromme om de oorsprong. We kunnen voor C een cirkel nemen met straal R. Uit de integraalvoorstelling volgt (zie ook ongelijkheid van Cauchy)

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{R^n} \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

als M het maximum van $|f(z)|$ is voor z op C. Is $f(z)$ begrensd, dus $|f(z)| \leqslant M'$ (alle z) dan is $M \leqslant M'$ en dus $|a_n| \leqslant M'/R^n$, waarbij M' niet meer van R afhangt. De coëfficiënten a_n zijn onafhankelijk van R. Hun bovengrens M'/R^n gaat naar nul voor $R \to \infty$, tenzij $n = 0$ is. Dus $a_n = 0$ behalve voor $n = 0$. Dan is $f(z)$ inderdaad constant. Q.E.D.

We kunnen een algemenere stelling van dit type formuleren:

Stelling

Een gehele funktie f waarvoor geldt

$$|f(z)| \leqslant p + q|z|^k$$

voor alle z is een veelterm met graad $\leqslant k$.

Bewijs: Volgens de ongelijkheid van Cauchy geldt bij elke $r > 0$

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{(p+qr^k)n!}{r^n} .$$

Voor $n > k$ nadert het rechterlid tot 0 als $r \to \infty$. Dus is $f^{(n)}(0) = 0$ voor $n > k$.

Opmerking: Bij elke veelterm $f(z) = \sum_{i=0}^{k} a_i z^i$ kan men constanten p en q vinden zodat voor elke z

$$|f(z)| \leqslant p + q|z|^k .$$

Neem $q > |a_k|$, dan geldt

$$|f(z)| - q|z|^k \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} |a_i||z|^i - (q - |a_k|)|z|^k .$$

Neem nu voor p het maximum van het rechterlid.

Hoofdstelling der algebra

|| Een n-degraads vergelijking heeft tenminste één wortel **als $n \geq 1$.**

Bewijs: Beschouw de vergelijking

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0 , \qquad a_n \neq 0,\ n \geqslant 1 .$$

Noem het polynoom in het linkerlid $f(z)$. Stel dat $f(z)$ geen nulpunt heeft, dan zou $1/f(z)$ een gehele funktie (en wel een gehele transcendente funktie) zijn. Maar

$$f(z) = a_n z^n(1 + d_1/z + \ldots + d_n/z^n) , \quad \text{met} \quad d_k = a_{n-k}/a_n .$$

Voor grote waarden van $|z|$ nadert de uitdrukking tussen haakjes tot één. Dus **$|1/f(z)|$ nadert tot nul voor $|z| \to \infty$. Dan is $1/f(z)$ in de omgeving van $z = \infty$ (zie blz.49) begrensd. Dus $1/f(z)$ is overal begrensd. Met Liouville volgt dan dat $1/f(z)$ constant is en dit is onmogelijk. Dus $f(z)$ heeft wèl een nulpunt.** Q.E.D.

Opmerking: Een gehele transcendente funktie behoeft geen nulpunten te hebben; voorbeeld: e^z.

§ 3. Laurentreeksen

We weten dat $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ voor alle z, dus $e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$. Analoog:
$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1}$ voor $|z| > 1$ en verder

$$\frac{\sin z}{z^6} = z^{-5} - \frac{1}{3!} z^{-3} + \frac{1}{5!} z^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k+5)!} .$$

Dit zijn drie voorbeelden van reeksen die op machtreeksen lijken maar ook negatieve machten van z bevatten. Het zijn generalisaties van machtreeksen die we Laurentreeksen zullen noemen. We bewijzen een ontwikkelingsstelling die een uitbreiding is van de stelling van Taylor.

Zij G het gebied tussen twee concentrische cirkels c en C (het ringgebied G is tweevoudig samenhangend) met stralen r en R. Zij f(z) gedefinieerd en holomorf in G. Construeer twee andere concentrische cirkels γ en Γ binnen G, en neem z in de ring tussen γ en Γ. De stralen van γ en Γ zijn ρ en P.
Het gemeenschappelijke middelpunt van alle cirkels zij a. Dan geldt volgens afspraak:

$$0 < r < \rho < |z-a| < P < R .$$

De integralen

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{en} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

hebben beide betekenis. Alle cirkels zijn positief georiënteerd. Met een hulpkanaal en de integraalformule van Cauchy vinden we

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw .$$

Nu is

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{1}{w-a} \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = -\frac{1}{z-a} \frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}}$$

Ligt w op γ dan geldt $\left|\frac{w-a}{z-a}\right| < 1$; ligt w op Γ dan geldt $\left|\frac{z-a}{w-a}\right| < 1$. Dus als:

w op γ, dan $\frac{1}{w-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$,

en deze reeks is uniform convergent in w op γ.

w op Γ, dan $\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$,

en deze reeks is uniform convergent in w op Γ.

De funktie $f(w)$ is begrensd op γ en ook op Γ, dus $|f(w)| \leqslant M$. Dus

w op γ: $\frac{f(w)}{w-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^{-n-1} f(w)(w-a)^n$,

en deze reeks convergeert uniform in w op γ,

w op Γ: $\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n f(w)(w-a)^{-n-1}$,

en deze reeks convergeert uniform in w op Γ.

Uniform convergente reeksen mogen termsgewijs worden geïntegreerd. Derhalve

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)(w-a)^n dw .$$

Hiermee is $f(z)$ geschreven als som van twee reeksen; de ene is een machtreeks in $z-a$, de andere een machtreeks in $1/(z-a)$. Ze convergeren respectievelijk binnen Γ en buiten γ.

In plaats van Γ of γ in de integralen mogen we een willekeurige Jordankromme J nemen die geheel in het binnengebied tussen c en C verloopt en in positieve zin is georiënteerd, want we kunnen Γ en γ tot J deformeren zonder dat singulariteiten van de respectieve integranden worden gepasseerd. Dus kunnen we schrijven

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n , \quad \text{met} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad (n \gtreqless 0) .$$

De coëfficiënten c_n zijn onafhankelijk van z en door f eenduidig bepaald. We kunnen $f(z)$ splitsen als $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, met

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n , \quad \text{een machtreeks in } z-a,$$

$$f_2(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n} , \quad \text{een machtreeks in } \frac{1}{z-a} .$$

De reeks voor $f_1(z)$ convergeert voor $|z-a| < R$, ook daar waar $f(z)$ niet is gedefinieerd (binnen c); die voor $f_2(z)$ convergeert voor $|z-a| > r$, ook daar waar $f(z)$ niet is gedefinieerd (buiten C). In de cirkelring tussen c en C convergeren beide reeksen, en hun som stelt $f(z)$ voor.

Deze reeksontwikkeling heet Laurent-ontwikkeling van $f(z)$. Deze Laurent-ontwikkeling is uniform convergent in z op elk domein gelegen binnen G.

Opmerking: Een bijzonder geval doet zich voor als $f(z)$ holomorf is binnen C. Dan blijft alleen de Taylorreeks over: $c_n = 0$ voor $n = -1,-2,\ldots$.

Definitie: De reeks voor $f_1(z)$ noemen we het positieve deel der Laurent-ontwikkeling. De reeks voor $f_2(z)$ noemen we het negatieve deel ofwel het hoofddeel der Laurent-ontwikkeling.

Een ander speciaal geval doet zich voor als de cirkel c zich tot een punt a samentrekt. Dan geldt blijkbaar de

Stelling

Is $f(z)$ holomorf in de omgeving van a, het punt a zelf uitgesloten, dan is in die gereduceerde omgeving van a de funktie $f(z)$ ontwikkelbaar in een Laurent-reeks. Het positieve deel van de Laurent-ontwikkeling convergeert in een volle omgeving van a (dus a zelf inbegrepen); het negatieve deel convergeert voor alle $z \neq a$.

Opgave: Als $f(z)$ en $g(z)$ convergente Laurentreeksen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$ hebben in $C_1 < |z| < C_2$, dan $h(z) = f(z)g(z)$ insgelijks: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ met $c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$. (Zie analoge opgave machtreeksen.)

§ 4. Singuliere punten

We zullen nu de verschillende gevallen van zgn. geïsoleerde singuliere punten beschouwen. We bekijken hier dus funkties $f(z)$ die in een gereduceerde omgeving van een punt $z = a$ regulier zijn en gaan na wat er in $z = a$ aan de hand kan zijn.

Opmerking: In hoofdstuk VI zullen we een ander soort singuliere punten ontmoeten, nl. vertakkingspunten.

Bij de Laurent-ontwikkeling van een funktie die in een gereduceerde omgeving van a regulier is kunnen we drie gevallen onderscheiden:

Eerste geval

Het hoofddeel ontbreekt. Dan geldt in een gereduceerde omgeving van a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \ .$$

In dit geval spreken we van een ophefbare singulariteit. Definiëren we nl. $f(a) = c_0$ dan is $f(z)$ ook in $z = a$ regulier.

Tweede geval

In de Laurentreeks zijn slechts eindig veel termen met negatieve exponent:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$$

met $k \geq 1$ en $c_{-k} \neq 0$. In dit geval is $\lim_{z \to a} (z-a)^k f(z) = c_{-k} \neq 0$. Volgens de definitie op blz. 29 heeft $f(z)$ in $z = a$ een <u>pool van de orde k</u>, ook wel genoemd <u>k-voudige pool</u>. De funktie $(z-a)^k f(z)$ is holomorf en $\neq 0$ in een omgeving van a.

Derde geval

Het hoofddeel bevat oneindig veel termen. Het hoofddeel is dan een gehele transcendente funktie van $1/(z-a)$. Het punt $z = a$ is natuurlijk singulier, veel "sterker" singulier dan de pool in het tweede geval. Daarom noemt men $z = a$ een <u>essentieel-singulier punt</u>.

Over het gedrag van de funktie $f(z)$ in de buurt van het punt a kunnen we het volgende opmerken.

1) Is a regulier punt, dan is $f(z)$ in de omgeving van a begrensd, en omgekeerd. (Ga na!)
2) Is a een pool, dan is $|f(z)|$ voor alle z groot in de omgeving van a. Duidelijker: is G een willekeurig groot getal, dan kan men $\delta > 0$ vinden, zodanig dat $|f(z)| > G$ voor $0 < |z-a| < \delta$.
3) In de omgeving van een essentieel-singulier punt wordt elk getal α willekeurig dicht benaderd door $f(z)$. Dat wil zeggen: bij willekeurige $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, α, kan men tenminste één punt z vinden waarvoor geldt: $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$ en $0 < |z-a| < \delta$.

De bewijzen van 1) en 2) zijn triviaal. Het bewijs van 3) is lastig. We laten het achterwege.

<u>Opmerking</u>: Uit 1), 2) en 3) volgt dat alleen in het tweede geval een geheel getal $k \geq 1$ bestaat zodanig dat $\lim_{z \to a} (z-a)^k f(z)$ eindig en $\neq 0$ is.

Toevoeging van het punt $z = \infty$

Om het spreken te vereenvoudigen voeren we formeel "het punt ∞" in. Wat we bedoelen blijkt uit het volgende.
In bovenstaande discussie, en ook vroeger, werd a eindig ondersteld. Nu zullen we de begrippen holomorf, pool, etc. definiëren voor het ene oneigenlijke punt, $z = \infty$. De algemene regel is: het gedrag van een funktie $f(z)$ in $z = \infty$ wordt gedefinieerd aan de hand van het gedrag van de funktie $g(z) = f(1/z)$ in het punt $z = 0$.

Een model van het zo uitgebreide complexe vlak kunnen we krijgen door een bol te beschouwen die in de oorsprong aan het complexe vlak raakt, en het complexe vlak dan op deze bol te projecteren vanuit het hoogste punt (de "noordpool" N). Het punt N beschouwen we dan als beeld van ∞. Aan dit model (stereografische projectie) zien we dat het zinvol is om bijv. het buitengebied van een Jordankromme een "omgeving van ∞" te noemen. Immers de projectie op de bol is een omgeving van N. We gaan hier verder niet op in.
Overeenkomstig de algemene regel (met $g(z) = f(\frac{1}{z})$) kunnen we dus ook voor $z = \infty$ bovenstaande drie gevallen onderscheiden:

1) $f(z)$ is holomorf in $z = \infty$, als $g(z)$ holomorf is in $z = 0$.
2) $f(z)$ heeft in $z = \infty$ een pool van de orde k als $g(z)$ in $z = 0$ een pool van de orde k heeft.
3) $f(z)$ heeft in $z = \infty$ een essentieel-singulier punt als $g(z)$ een essentieel-singulier punt heeft in $z = 0$.

Voorbeelden

Een gehele niet constante rationale funktie heeft een pool in het oneindige; een gehele transcendente funktie heeft een essentieel-singulier punt in het oneindige. Zo heeft $f(z) = z^2$ een tweevoudige pool in $z = \infty$; $f(z) = 1/z$ heeft een enkelvoudig nulpunt in $z = \infty$; $f(z) = z^{-3} + z^{-2}$ heeft een tweevoudig nulpunt in $z = \infty$. En sin z heeft een essentieel-singulier punt in $z = \infty$, $\sin(1/z)$ is er regulier enz.

Opgave: Heeft $f(z)$ slechts reguliere punten en een eindig aantal polen ($z = \infty$ meegerekend), dan is $f(z)$ rationaal. Een rationale funktie kan in partiële breuken worden gesplitst.
Wenk: als a pool is beschouw dan $h(z) = f(z)$ - hoofddeel; enz.

§ 5. Nadere bijzonderheden over residuen

Residu in $z = \infty$

We definiëren niet: het residu van $f(z)$ in ∞ is het residu van $f(\frac{1}{z})$ in $z = 0$. We kunnen dit begrip op de gewone manier invoeren. Is $f(z)$ regulier op en buiten de Jordankromme K dan definiëren we

$$\mathrm{Res}_{\infty}\, f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_K f(z)dz\ .$$

Het minteken wordt verklaard door het feit dat als we K als rand van het buitengebied beschouwen, de omloopszin t.o.v. dit gebied negatief is.
Dus: de funktie $1/z$ is regulier in $z = \infty$, maar heeft in ∞ als residu -1; evenzo $\sin(1/z)$ [N.B. regulier en toch residu $\neq 0$].
Een gevolg van de gegeven definitie is, dat steeds geldt

$$\Sigma \text{ alle residuen (inclusief bij } z = \infty) = 0$$

voor funkties met een eindig aantal singulariteiten.

Er geldt $\mathrm{Res}_{\infty}\, f(z) = -\mathrm{Res}_0 \dfrac{f(1/z)}{z^2}$.
Bewijs. Zij R zo groot dat $|z| < R$ alle singulariteiten bevat; $\rho = R^{-1}$.

$$\mathrm{Res}_{\infty}\, f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})dRe^{i\varphi} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(1/\rho e^{-i\varphi})\frac{d\rho e^{-i\varphi}}{\rho^2 e^{-2i\varphi}} = -\mathrm{Res}_0 \frac{f(1/z)}{z^2}\ ,$$

want bij de tweede integraal wordt $|z| = \rho$ in negatieve zin doorlopen,

Residuen in essentieel-singuliere punten

In III, § 3 hebben we de residustelling van Cauchy besproken, en geïllustreerd aan funkties die als singulariteiten polen hebben. De residustelling geldt voor willekeurige geïsoleerde singuliere punten. We kunnen dus ook essentiële singulariteiten toelaten. Heeft $f(z)$ een essentieel-singulier punt in $z = a$, dus

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \text{(in omgeving van a)}$$

dan is $\{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=a} = c_{-1}$ volgens de bij het bewijs van de Laurentontwikkeling gegeven formule voor c_n.
Ook bij een essentieel-singulier punt is dus het residu gelijk aan de coëfficiënt van $1/(z-a)$ in de Laurent-ontwikkeling.

Opgave: Zij J een Jordankromme om 0, dan geldt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_J e^{1/z}\, z^{n-1}\, dz = \frac{1}{n!} \quad ; \quad \text{ook voor } n = 0\,?$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_J e^{1/z}\, \frac{dz}{z - az^2} = e^a \quad ; \quad a^{-1} \text{ binnen of buiten } J\ ?$$

Residuen van $f'(z)/f(z)$; aantal nulpunten binnen een kromme

Zij $f(z)$ holomorf op en binnen de Jordankromme J, en $f \neq 0$ op J. Dan is het aantal nulpunten van f binnen J, wanneer we een k-voudig nulpunt ook k maal tellen:

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_J \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz\ .$$

Bewijs: Definieer de funktie g door $g(z) = f'(z)/f(z)$. Deze funktie is continu op J, en dus bestaat de integraal. Binnen J ligt slechts een eindig aantal nulpunten van f. Zij a zo'n nulpunt, en laat het een k-voudig nulpunt zijn. Dan geldt in een omgeving van a:

$$f(z) = a_k(z-a)^k(1 + \dots) \qquad (a_k \neq 0)\ ,$$

$$f'(z) = ka_k(z-a)^{k-1}(1 + \dots)\ ,$$

en dus

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a}\left\{1 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots\right\}\ .$$

Het residu van $g(z)$ in een nulpunt van $f(z)$ is dus gelijk aan de multipliciteit van dat nulpunt. Pas de residustelling toe, en het gewenste resultaat is verkregen.

Toepassing: Een polynoom van de graad n heeft precies n nulpunten.

Bewijs: Zij $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ($n \geq 1$, $a_n \neq 0$). Voor $|z|$ voldoende groot is $|f(z)| > 1$. De eventuele nulpunten liggen dus alle binnen een zekere cirkel J met middelpunt in de oorsprong. Dit aantal is

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_J g(z)dz\,, \quad \text{met } g(z) = f'(z)/f(z) =$$

$$= \frac{n a_n z^{n-1} + \dots}{a_n z^n + \dots} = \frac{n}{z}\,(1 + b_1/z + b_2/z^2 + \dots)\ .$$

Deze reeks is de Laurent-ontwikkeling van $g(z)$ in de omgeving van het punt $z = \infty$, en men kan J zo kiezen dat ze op en buiten J uniform convergeert. De reeks mag termsgewijs worden geïntegreerd, en de uitkomst is n, de coëfficient van $1/z$.

Opmerking: *g(z) heeft in $z = \infty$ een enkelvoudig nulpunt.*

Opgave: Zij $f(z)$ op en binnen J holomorf met uitzondering van een (eindig, waarom?) aantal polen, niet op J liggende, en $f \neq 0$ op J, dan geldt

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{f'(z)}{f(z)} dz .$$

Hierbij is N het aantal nulpunten van f binnen J, P het aantal polen van f binnen J (meervoudige ook meervoudig geteld). Een pool van de orde k is in zekere zin een nulpunt van de orde $-k$, en omgekeerd.

Opgave: Zij $\varphi(z)$ op en binnen J holomorf, $f(z)$ op en binnen J holomorf, en $f \neq 0$ op J. Zij verder z_k nulpunt van f binnen J met multipliciteit m_k. Dan geldt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_J \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_k \varphi(z_k) m_k .$$

HOOFDSTUK V. Toepassing der residuen in de integraalrekening

§ 1. Bepaalde integralen

In dit hoofdstuk gaan we complexe funktietheorie toepassen op de berekening van bepaalde integralen. In de elementaire analyse kunnen we eigenlijk alleen een bepaalde integraal uitrekenen als we de onbepaalde integraal kennen, als we dus de primitieve funktie kennen. In die zin is dan integreren ook het omgekeerde van differentiëren. De complexe funktietheorie is veel machtiger. Daar kunnen we bepaalde integralen uitrekenen met de theorie der residuen.

A. Integralen van de vorm: $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$,

waarbij R een rationale funktie in elk van de argumenten is.
Vroeger hebben we geleerd hoe we door de substitutie $t = \tan\frac{1}{2}\theta$ en partiële breukensplitsing de uitkomst kunnen vinden. We gaan nu anders te werk: we stellen $z = e^{i\theta}$, $dz = i\,z\,d\theta$, en dan wordt de integraal

$$\int_C R\left\{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right\}\frac{dz}{iz} = \int_C R_1(z)dz$$

waarbij C de eenheidscirkel is en R_1 een andere rationale funktie, nu van z. We zoeken nu de singuliere punten van R_1 binnen C en passen de residustelling toe.

Voorbeeld: $I(a) \overset{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos\theta} \qquad (0 < a < 1)$.

Stel $z = e^{i\theta}$; z loopt dan langs de eenheidscirkel C in positieve zin; $dz = i\,e^{i\theta}d\theta = i\,z\,d\theta$, dus $d\theta = -(i/z)dz$. Verder

$$1 + a\cos\theta = 1 + \tfrac{1}{2}a(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = 1+\tfrac{1}{2}a(z+1/z) \ .$$

Daarmee vinden we

$$\frac{d\theta}{1+a\cos\theta} = -\frac{2i}{a}\,\frac{dz}{z^2+\frac{2}{a}z+1} = -\frac{2i}{a}\,\frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} \ ,$$

waarbij z_1 en z_2 de wortels zijn van $z^2 + (2/a)z + 1 = 0$:

$$z_1 = -\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} = \frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a} ,$$

$$z_2 = -\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} = \frac{-\sqrt{1-a^2} - 1}{a} \qquad (< -\frac{1}{a}) .$$

Het getal z_1 ligt binnen C, het getal $z_2 = 1/z_1$ ligt buiten C.

We hebben alleen te maken met het singuliere punt binnen C, dus met z_1. Het residu van de integrand daar is

$$-\frac{2i}{a}\frac{1}{z_1 - z_2} = -\frac{2i}{a}\frac{a}{2\sqrt{1-a^2}} .$$

Vermenigvuldig dit met $2\pi i$, en we krijgen de gevraagde uitkomst

$$I(a) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} .$$

Deze formule geldt ook voor $-1 < a < 1$.
(Na lezing van hoofdstuk VI is dit nog uit te breiden tot complexe a. Ga na!)

<u>Opgave</u>: $I(a) \overset{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} (1 - 2a\cos t + a^2)^{-1}\, dt \quad (a \text{ complex}, |a| \neq 1)$.

Dan geldt:

$$I(a) = 2\pi/(1-a^2) \qquad \text{voor } |a| < 1 ,$$
$$= 2\pi/(a^2-1) \qquad \text{voor } |a| > 1 .$$

(Integraal is divergent voor $|a| = 1$.)

<u>Opgave</u>: $\int_0^{2\pi} \frac{\cos mt}{1 + a\cos t}\, dt = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \left(\frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^m$

met m geheel $\geqslant 0$, $0 < a < 1$.

<u>Opgave</u>: $\int_0^{2\pi} \frac{\cos mt}{1 - 2a\cos t + a^2}\, dt = 2\pi\, a^m (1-a^2)^{-1} \qquad \text{voor } |a| < 1,$

$$= 2\pi\, a^{-m}(a^2-1)^{-1} \qquad \text{voor } |a| > 1 .$$

(Integraal divergeert voor $|a| = 1$.)

Opgaven: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b \sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, $0 \le b < a$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + ib \cos t} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + ib \sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad 0 < a .$$

B. Integralen van de vorm: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Onderstel van de funktie $f(z)$:

(1) $f(z)$ is holomorf op en boven de reële as, met eventuele uitzondering van een eindig aantal polen, waarvan niet één op de reële as ligt;

(2) Als $M(\rho)$ het maximum is van $|f(z)|$ op de halve cirkel $\{z \mid |z| = \rho,\ \mathrm{Im}\ z \geqslant 0\}$, dan geldt

$$\rho M(\rho) \to 0 \quad \text{als } \rho \to \infty .$$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ bestaat.

Opmerkingen: Voorwaarde (2) garandeert nog niet het bestaan van de integraal. Neem maar een funktie $f(x)$ waarvoor $f(x) \sim 1/(x \log x)$ $(x \to \infty)$. Eis (3) houdt in dat $\int^{\infty}$ en $\int_{-\infty}$ beide bestaan. Uit (1) volgt dat voor eindige a en b de integraal $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ bestaat. (3) eist dus dat de laatste integraal een limiet heeft voor $a \to -\infty$ en $b \to \infty$, onafhankelijk van elkaar.

Berekening: Teken halve cirkel Γ met middelpunt in oorsprong en straal ρ. Neem ρ zo groot dat buiten Γ geen singulariteiten van $f(z)$ liggen. Dan:

$$\int_{-\rho}^{\rho} f(x)dx + \int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i\ \Sigma\ \text{Res. } f(z) \text{ in bovenvlak.}$$

Geen van beide leden hangt van ρ af. Laat $\rho \to \infty$. De limiet van de eerste integraal bestaat en is gelijk aan de gevraagde. De tweede integraal moet voor $\rho \to \infty$ dus ook een limiet hebben. Dat die limiet nul is volgt uit

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq \pi\rho M(\rho) \to 0 \qquad (\rho \to \infty) .$$

We vinden aldus

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \; \Sigma \; \text{Res. } f(z) \qquad (\text{Im } z > 0),$$

waarbij de som zich uitstrekt over alle polen van $f(z)$ in het bovenvlak.

Voorbeelden:

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$; alle voorwaarden zijn vervuld.

$f(z) = 1/(1+z^2)$ heeft een enkelvoudige pool in het bovenhalfvlak voor $z = i$. Het residu is daar $\lim\limits_{z \to i} (z-i)/(1+z^2) = 1/(2i)$. De integraal is dus gelijk aan π.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-3}\,dx$; $f(z) = (1+z^2)^{-3}$ heeft in $z = i$ een drievoudige pool.

De Laurent-ontwikkeling om het punt $z = i$ is:

$$\frac{1}{(z+i)^3}\,\frac{1}{(z-i)^3} \overset{(z-i=u)}{=} \frac{1}{(u+2i)^3}\,\frac{1}{u^3} = \frac{1}{8i^3}\,\frac{1}{u^3}\,\frac{1}{(1+\frac{u}{2i})^3}$$

$$= \frac{i}{8}\,u^{-3}(1-\tfrac{1}{2}iu)^{-3} = \frac{i}{8}\,u^{-3}(1+\frac{3}{2}\,iu - \frac{3}{2}\,u^2 + \ldots)$$

$$= \ldots - \frac{3}{16}\,i\,\frac{1}{u} + \ldots \,.$$

Het residu in deze pool is dus $-(3/16)i$. Vermenigvuldig dit met $2\pi i$, en we krijgen de waarde der integraal gelijk aan $3\pi/8$.

Opgave: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{(1+x^2)^4}\,dx = \frac{\pi}{16}$.

C. Integralen van de vorm: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx$.

Voor $\alpha = 0$ reeds behandeld. Stel $\alpha > 0$ (geen essentiële beperking, zolang we reële α bekijken). Neem aan:

(1) $f(z)$ op en boven de reële as holomorf, behalve eventueel in een eindig aantal singuliere punten, waarvan geen op de reële as;

(2) Als $M(\rho)$ het maximum is van $|f(z)|$ op de halve cirkel $\{z \mid |z| = \rho,\ \mathrm{Im}\ z \geqslant 0\}$, dan geldt

$$M(\rho) \to 0 \quad \text{als } \rho \to \infty\ .$$

(3) De integraal bestaat.

Neem Γ net als in het geval $\alpha = 0$. Dan

$$\int_{-\rho}^{\rho} f(x)e^{i\alpha x}\,dx + \int_{\Gamma} f(z)e^{i\alpha z}\,dz = 2\pi i\ \Sigma\ \mathrm{Res.}\{f(z)e^{i\alpha z}\}\ ,$$

waarbij de som wordt uitgestrekt over de singuliere punten van $f(z)$ in het bovenvlak. We gaan de integraal langs Γ schatten:

$$J \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{\Gamma} f(z)e^{i\alpha z}\,dz = \int_0^{\pi} f(\rho e^{it})e^{i\alpha\rho e^{it}}\, i\rho e^{it}\,dt\ ;$$

$$|J| = \left|\int_0^{\pi} f(\rho e^{it})e^{i\alpha\rho(\cos t + i\sin t)}\rho e^{it}\,dt\right| \leq$$

$$\leq \rho\int_0^{\pi} |f(\rho e^{it})|\,e^{-\alpha\rho\sin t}\,dt \leq \rho M(\rho)\int_0^{\pi} e^{-\alpha\rho\sin t}\,dt =$$

$$= 2\rho M(\rho)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\alpha\rho\sin t}\,dt < 2\rho M(\rho)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\alpha\rho(2/\pi)t}\,dt <$$

$$< 2\rho M(\rho)\int_0^{\infty} e^{-2\alpha\rho t/\pi}\,dt = 2\rho M(\rho)(\pi/2\alpha\rho) = \frac{\pi M(\rho)}{\alpha}\ .$$

Dus $\lim\limits_{\rho\to\infty} \int_\Gamma f(z)e^{i\alpha z}\, dz = 0$. Dan volgt gemakkelijk

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\, dx = 2\pi i\ \Sigma\ \text{Res.}\{f(z)e^{i\alpha z}\} \quad \text{in bovenvlak.}$$

Voorbeeld (1):

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{a^2+x^2}\, dx \qquad (a > 0)\ .$$

De integrand is een even funktie van x, dus $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2}\, dx$.

Dezelfde integraal met sin x in plaats van cos x is nul, omdat de integrand dan oneven is. Dus eveneens geldt

$$I = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{a^2+x^2}\, dx\ .$$

Deze kunststukjes moeten we goed onthouden!

We passen het algemene geval toe voor $f(z) = \frac{1}{2}(a^2+z^2)^{-1}$. Er is aan alle voorwaarden voldaan, en de enige pool van $f(z)$ in het bovenvlak ligt bij $z = ia$ $(a > 0)$. Verder is

$$\{\text{Res. } f(z)e^{iz}\}_{z=ia} = \lim_{z\to ia} e^{iz}\, \tfrac{1}{2}\, \frac{z-ia}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{e^{-a}}{4ia}\ .$$

Dus

$$I = 2\pi i\, \frac{e^{-a}}{4ia} = (\pi/2a)e^{-a}\ .$$

Opgave: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2+k^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-ak} \qquad (a > 0,\ k > 0)$.

(Wat is de uitkomst als $a < 0$?)

Voorbeeld (2)

$$J = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx\ .$$

De funktie $\dfrac{\sin x}{x^2}$ is wel oneven, maar niet integreerbaar in de buurt van

$x = 0$. Daarom komt een nieuw kunststukje. We nemen nu een integratieweg als volgt: van $-\rho$ naar $-\varepsilon$, van $-\varepsilon$ naar ε langs een cirkelboogje met straal ε, om de oorsprong te vermijden, dan van ε naar ρ, en verder met Γ terug naar $-\rho$. Deze weg noemen we W. En we integreren langs W de funktie $f = (1 - e^{iz})/z^2$. Als we het boogje om de oorsprong in het bovenvlak nemen, heeft de integrand binnen W geen singulier punt, en $\int_W f(z)dz$ is dus nul. De bijdrage van Γ gaat naar nul als $\rho \to \infty$. Dan geldt

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_{-C_\varepsilon} f(z)dz + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x)dx = 0 ,$$

waarbij de middelste integraal over het kleine boogje is (in negatieve zin om de oorsprong). In de limiet $\varepsilon \to 0$ nadert deze integraal tot $2\pi i$ maal min het halve residu van $f(z)$ in $z = 0$, dus tot $(2\pi i)(-\frac{1}{2})(-i) = -\pi$. De twee overblijvende integralen kunnen we samentrekken tot

$$2\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx ,$$

en we vinden voor $\varepsilon \to 0$ dan $J = \frac{1}{2}\pi$.

In bovenstaande opgave is een principe gebruikt dat we nog vaker kunnen benutten. We formuleren het als

<u>Stelling</u>

Is a een <u>enkelvoudige</u> pool van de funktie $f(z)$ en C_ε de halve cirkel: $|z - a| = \varepsilon$, $0 \leqslant \arg(z - a) \leqslant \pi$, dan is

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} f(z)dz = \tfrac{1}{2}\, \mathrm{Res}_a\{f(z)\} .$$

(Denk aan oriëntatie van de halve cirkel.)

<u>Opgave</u>: Bewijs deze stelling.

HOOFDSTUK VI. Analytische voortzetting

§ 1. Analytische voortzetting

Laten G_1 en G_2 gebieden zijn waarvan de doorsnede D ook een gebied is (bijv. twee cirkels). Stel in G_1 is een holomorfe funktie f_1 gedefinieerd en in G_2 een holomorfe funktie f_2. Als a een punt van D is zó dat in iedere gereduceerde omgeving van a punten liggen waar $f_1(z) = f_2(z)$ dan is volgens de identiteitsstelling (IV, § 2) $f_1(z) = f_2(z)$ overal in D. We definiëren nu een funktie f op $G_1 \cup G_2$ door

$$f(z) := \begin{cases} f_1(z) & \text{als } z \in G_1 , \\ f_2(z) & \text{als } z \in G_2 . \end{cases}$$

Dit mag nu omdat $f_1 = f_2$ op $G_1 \cap G_2$. We zien dat <u>f een holomorfe funktie is, gedefinieerd op een gebied $G = G_1 \cup G_2$, dat G_1 omvat zó dat $f(z) = f_1(z)$ op G_1</u>. We noemen f een <u>analytische voortzetting van f_1</u>. Op grond van de identiteitsstelling weten we dat er voor het gebied $G_1 \cup G_2$ geen andere analytische voortzetting mogelijk is. Natuurlijk is f evengoed de analytische voortzetting van f_2. Ook heten f_1 en f_2 elkaars analytische voortzetting (in G_1 resp. G_2). Een andere mogelijkheid vindt men aan het slot van deze paragraaf. We geven een voorbeeld:

<u>Voorbeeld</u>:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \qquad \text{in } G_1 : |z| < 1$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} (z-i)^n \qquad \text{in } G_2 : |z-i| < 2^{\frac{1}{2}}$$

$f(z) = 1/(1+z)$, niet alleen in $G_1 \cup G_2$, maar overal (behalve $z = -1$).

We hebben zo f_1 voortgezet, eerst m.b.v. f tot het gebied $G_1 \cup G_2$ en toen met $f(z) = (1+z)^{-1}$ tot het gebied $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

We hebben zó een eerste methode leren kennen om tot analytische voortzetting te komen, te weten:

> f is gedefinieerd in gebied G. Kies een punt $a \in G$. Op grond van de stelling van Taylor is er een cirkel om a waarbinnen f(z) de som is van een machtreeks. Als de convergentiecirkel C van deze machtreeks buiten G komt kunnen we f voortzetten tot $G \cup C$, mits $G \cap C$ een gebied is.

In de volgende paragraaf zullen we, eerst aan een speciaal geval, een vluggere methode leren kennen.

§ 2. De logarithme

We laten uit $\mathbb{C}$ de negatief-reële getallen en 0 weg. Men zegt ook wel: we brengen een snede aan langs de negatieve reële as. We houden een gebied G over. Daarin willen we een holomorfe funktie f definiëren zó dat $f(x) = \log x$ als x positief reëel is. Als dit kan dan op één manier (wederom: de identiteitsstelling!).

Als we in genoemd gebied G twee wegen van 1 naar z beschouwen dan is de waarde van $\int_1^z \frac{dt}{t}$ over deze wegen gelijk (hoofdstelling, blz. 24). Daar $\frac{1}{t}$ continu is in G, is op grond van de stelling op blz. 23: $\int_1^z \frac{dt}{t}$ een holomorfe funktie van z in G, met afgeleide $\frac{1}{z}$. Als z positief reëel is, is de waarde van de integraal log z. Dit moet dus de gezochte analytische voortzetting zijn. We definiëren

$$\log z := \int_1^z \frac{dt}{t} \ ,$$

waarbij we eisen dat de integratieweg de negatieve reële as niet snijdt.
In G is f(z) onafhankelijk van het verloop van de integratieweg. Om f(z) te berekenen kiezen we onze weg rechtlijnig van 1 naar $|z|$, en dan van $|z|$ naar z langs een cirkelboog met middelpunt in de oorsprong. Stel $z = |z|e^{i\varphi}$, waarin $-\pi < \varphi < \pi$. Dan is

$$f(z) = \int_1^{|z|} \frac{dt}{t} + \int_{|z|}^{|z|e^{i\varphi}} \frac{du}{u} \ .$$

De eerste integraal is eenvoudig $\log|z|$ (de gewone logarithme uit de reële analyse). In de tweede integraal substitueren we $u = |z|e^{i\theta}$, $du = i|z|e^{i\theta}\,d\theta = i\,u\,d\theta$, zodat de tweede integraal gelijk aan $i\varphi$ is. Derhalve $f(z) = \log|z| + i\varphi$, ofwel

$$\log z = \log|z| + i \arg z \qquad -\pi < \arg z < \pi \ .$$

We definiëren nu log z ook nog voor negatieve reële z:

Hoofdwaarde van de logarithme

Deze wordt gedefinieerd door $\log z = \log|z| + i \arg z$, waarbij arg z de hoofdwaarde van argument van z is $(-\pi < \arg z \leqslant \pi)$. Nu is de log van een negatief getal wel gedefinieerd.

Opgave: Voor x negatief-reëel geldt

$$\log x \overset{\text{def}}{=} \log(x+i0) = \log(-x) + i\pi \quad \text{en} \quad \log(x-i0) = \log(-x) - i\pi \ ,$$

zodat log z aan de snede een sprong van $2\pi i$ heeft.

Opgave: Toon aan dat voor $|z| < 1$ geldt

$$z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \ldots = \log(1+z) \ \left(\overset{\text{def}}{=} \int_1^{1+z} \frac{dt}{t}\right).$$

Behalve als we uitdrukkelijk anders vermelden, zullen we voortaan onder log z de hoofdwaarde der logarithme verstaan, die dus gebonden is aan de hoofdwaarde van arg z.

Men kan zich op een ruimer standpunt stellen, en alle mogelijke analytische voortzettingen van log x beschouwen. Dit leidt dan tot een funktie log z die oneindig-veelwaardig is; de diverse takken der funktie verschillen dan een geheel veelvoud van $2\pi i$. Het punt $z = 0$ is een singulier punt van de funktie. Men noemt dit een logarithmisch vertakkingspunt. Voor toepassingen is het echter beter dat men deze oneindig-veelwaardige funktie eenwaardig maakt door het aanbrengen van een snede (ook wel coupure genoemd) en in het aldus opengesneden z-vlak de hoofdtak van de funktie beschouwt. Als het nodig is kunnen we deze hoofdtak gemakkelijk analytisch voortzetten över de snede. Los hiervan kan de snede ook een willekeurige kromme zijn die $z = 0$ met $z = \infty$ verbindt. En log x, oorspronkelijk gedefinieerd op een klein interval van de positief-reële as, kan dan altijd tot de kanten der snede analytisch worden voortgezet. Langs een voorgeschreven weg is de voortzetting altijd ondubbelzinnig. Dit is duidelijk omdat hetzelfde geldt voor arg z, die we altijd continu kunnen voortzetten.

Met behulp van de logarithme kunnen we nu ook willekeurige machten definiëren.

Zij α een complex getal, dan is per definitie, voor $z \neq 0$,

$$z^\alpha \overset{\text{def}}{=} e^{\alpha \log z} \ .$$

Men krijgt de hoofdwaarde van z^α als men de hoofdwaarde van log z kiest. Dan is dus

$$z^\alpha = e^{\alpha \log|z| + i\alpha \arg z} = |z|^\alpha \, e^{i\alpha \arg z}$$

met $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. Is α geheel dan zijn we op bekend terrein: z^m, m geheel, is eenwaardig. Is α rationaal: $\alpha = p/q$, dan is z^α q-waardig.

Opgave: Wat is de hoofdwaarde van $\sqrt{i} = (i)^{\frac{1}{2}}$, van i^i, van $(-i)^i$?

<u>Opgave</u>: $\frac{d}{dz} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}$,

$z^\alpha \cdot z^\beta = z^{\alpha+\beta}$,

$z^{-\alpha} = 1/z^\alpha$.

Bij sommige bewerkingen moeten we <u>oppassen</u>:

$$\begin{aligned} z_1^\alpha\, z_2^\alpha &= e^{\alpha(\log z_1 + \log z_2)} \\ &= e^{\alpha(\log|z_1| + \log|z_2| + i \arg z_1 + i \arg z_2)} \\ &= |z_1 z_2|^\alpha\, e^{i\alpha(\arg z_1 + \arg z_2)} . \end{aligned}$$

Als $\arg z_1 + \arg z_2 = \arg(z_1 z_2)$, dan geldt ook $z_1^\alpha\, z_2^\alpha = (z_1 z_2)^\alpha$ (allemaal in de zin van hoofdwaarden). Maar in het algemeen is $\arg z_1 + \arg z_2 =$ $= \arg(z_1 z_2) + 2k\pi$, waarbij k de waarden -1, 0 en 1 kan aannemen.

Bijvoorbeeld:

$$(-1)^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}} = ii = -1 ; \quad [(-1)(-1)]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{(hoofdwaarden).}$$

<u>Opgave</u>: $f(z) = (1+z)^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}$, voor $-1 < z < 1$ als de gewone algebraïsche waarde gedefinieerd. Bespreek de analytische voortzetting van $f(z)$ in het complexe vlak opengesneden langs de rest van de reële as.
Bereken de grenswaarden van $f(z)$ aan beide kanten van de snede.
Ga na dat $(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ dezelfde analytische voortzetting heeft.

<u>Opgave</u>: Bij de volgende funkties, die voor $z > 1$ overeenstemmen, behoren verschillende sneden:

$$g(z) = (z+1)^{\frac{1}{2}}(z-1)^{\frac{1}{2}} , \quad \text{snede } -1 \leqslant z \leqslant 1 ,$$

$$h(z) = (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \text{snede } -1 \leqslant z \leqslant 1 \text{ èn de imaginaire as.}$$

Ga na dat $g(z)$ een <u>oneven</u> funktie is; $h(z)$ is natuurlijk even. ($g(z)$ en $-g(z)$ kunnen door een tweebladige voorstelling worden verenigd; $h(z)$ en $-h(z)$ ook.)

We geven nog een voorbeeld van analytische voortzetting. Uit de reële analyse kennen we de funktie arctan x, gedefinieerd voor alle reële x. Dat we deze funktie niet tot het hele z-vlak kunnen voortzetten is direct duidelijk! Immers $(\arctan x)' = (1+x^2)^{-1}$ en deze afgeleide heeft in het complexe vlak singuliere punten. Wel is deze afgeleide een eenvoudige funktie: $(1+t^2)^{-1}$ heeft twee eerste-orde polen (in $t = i$ en $t = -i$). Als we nu in het complexe vlak sneden aanbrengen van i naar i∞ (positieve imaginaire as) en van -i naar -i∞ (negatieve imaginaire as) dan houden we een gebied G over. Voor wegen binnen dit gebied hangt $\int_0^z (1+t^2)^{-1}\,dt$ niet van de weg af. Als z reëel is weten we dat de waarde van de integraal arctan z is. Bovendien weten we (stelling op blz. 23) dat de integraal in G een holomorfe funktie voorstelt. Dit moet de gezochte analytische voortzetting zijn:

$$\arctan z := \int_0^z (1+t^2)^{-1}\,dt \qquad \text{voor } z \in G .$$

Opgave: Zij $f(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n^2}$, $|z| \leq 1$.

Toon aan: 1) $f(1) + f(-1) = \frac{1}{2} f(-1)$; 2) $f'(z) = \frac{\log(1+z)}{z}$; hiermee $f(z)$ analytisch voortzetten (neem een geschikte snede); 3) $f(z) + f(1/z) = 2f(1) + \frac{1}{2}\log^2 z$; 4) $f(1) = \frac{\pi^2}{12}$ (gebruik 1)); 5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos n\varphi}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\varphi^2}{4}$ (vgl. Fourierreeksen, Wiskunde 30; gebruik 3)).

HOOFDSTUK VII. Diversen

§ 1. Differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann

B. Riemann (1826 - 1865), A.L. Cauchy (1789 - 1857)

Stel $f(z)$ holomorf in gebied G; $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ met $z = x + iy$.
Hoe wordt $f'(z)$ uitgedrukt in partiële afgeleiden van u en v naar x en y?

Beschouw speciaal twee gevallen van limietovergang in het differentiequotiënt:
(1) $z' \to z$ in horizontale richting, (2) $z' \to z$ in verticale richting.

Het differentiequotiënt

$$\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}$$

is in het eerste geval

$$\frac{u(x',y) - u(x,y)}{x' - x} + i\,\frac{v(x',y) - v(x,y)}{x' - x} \qquad (x' \neq x)\,.$$

Deze uitdrukking moet een limiet hebben voor $x' \to x$. Daarvoor is dus nodig dat $\partial u/\partial x$ en $\partial v/\partial x$ bestaan in het punt (x,y). De waarde van die limiet moet precies $f'(z)$ zijn:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\ .$$

In het tweede geval is het differentiequotiënt

$$\frac{u(x,y') - u(x,y)}{i(y' - y)} + i\,\frac{v(x,y') - v(x,y)}{i(y' - y)} \qquad (y' \neq y)\,.$$

Noodzakelijkerwijze bestaan dus ook $\partial u/\partial y$ en $\partial v/\partial y$ en geldt

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}\ .$$

Uit de twee gelijkheden volgen dan de identiteiten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\,\frac{\partial u}{\partial y}\ . \qquad \text{(CR)}$$

Daarmee is bewezen de

Stelling

Is $f(z) = u + iv$ holomorf in G, dan bestaan in G de partiële afgeleiden der eerste orde van u en v naar x en y, en er gelden de partiële differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann (CR).

Een soort omkering van deze stelling is:

Stelling

Zijn in een gebied G de reële funkties $u(x,y)$ en $v(x,y)$ continu differentieerbaar naar x en y tezamen, en voldoen ze in G aan de vergelijkingen van Cauchy-Riemann, dan is $f(z) = u + iv$ een holomorfe funktie van z in G.

Opmerking: Continu-differentieerbaar wil zeggen: de vier partiële afgeleiden van de eerste orde van u en v naar x en y bestaan en zijn continue funkties van x en y.

Opgave: Bewijs de laatste stelling.

Uit eerdere resultaten weten we dat een holomorfe funktie willekeurig vaak differentieerbaar is. Dan zijn de componenten u en v van een holomorfe funktie ook willekeurig vaak differentieerbaar, en alle afgeleiden van alle ordes zijn ook continue funkties van x en y.
In het bijzonder gelden de formules

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} ,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} .$$

Stelling

Is $f(z)$ holomorf in G, dan voldoen $u = \text{Re}(f)$ en $v = \text{Im}(f)$ als funkties van x en y in G aan de potentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 .$$

Men zegt: u en v zijn harmonische funkties (d.i. oplossingen van de tweedimensionale potentiaalvergelijking) in G.

Conclusie: Theorie van complexe funkties van één complexe variabele is equivalent met de potentiaaltheorie in twee dimensies. Vandaar het belang van complexe-funktietheorie voor fysica en techniek.

Stelling

Een holomorfe funktie is op een constante na éénduidig bepaald door haar reëel (of haar imaginair) deel.

Bewijs: Stel $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, en $u(x,y)$ bekend in een zekere omgeving van (x_0,y_0). Dan geldt voor die omgeving het volgende. Wegens $v_y = u_x$, is ook $v_y(x,y)$ bekend. Dan kunnen we integreren naar y:

$$\int_{y_0}^{y} u_x(x,\eta)d\eta = v(x,y) - v(x,y_0).$$

Dus

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x,\eta)d\eta + F(x) \ , \quad \text{met} \quad F(x) = v(x,y_0) \ .$$

We zijn klaar als we $F(x)$ kunnen aangeven. $F(x)$ is zeker differentieerbaar naar x, en wel geldt

$$F'(x) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} u_x(x,\eta)d\eta = v_x - \int_{y_0}^{y} u_{xx}(x,\eta)d\eta =$$

$$= - u_y - \int_{y_0}^{y} u_{xx}(x,\eta)d\eta = \text{bekend} .$$

Is deze bekende funktie alleen van x afhankelijk? Ja, want

$$- \frac{\partial}{\partial y} F'(x) = \frac{\partial}{\partial y}\left[u_y + \int_{y_0}^{y} u_{xx}(x,\eta)d\eta\right] = u_{yy} + u_{xx} = 0 \ .$$

Dus $F'(x)$ is een bekende funktie van x. Door integratie vinden we $F(x)$, eenduidig bepaald op een constante na. Dus $v(x,y)$ is bekend op een additieve constante na.

Opgave: Bepaal $f(z)$ als $u(x,y) = x/(x^2+y^2)$.

Opgave: Bewijs dat de krommen u = constant en v = constant door een punt s met $f'(s) \neq 0$ elkaar daar loodrecht snijden.

§ 2. Conforme afbeelding

Zij $w = f(z)$ holomorf in gebied G van het z-vlak. Bij ieder punt van G behoort een punt van het w-vlak. Het funktionele verband $w = f(z)$ geeft dus een afbeelding van een deel van het z-vlak op een deel van het w-vlak. Zij G' het beeld van G. Men kan bewijzen dat G' een gebied is, als $f \neq$ constant.

Zij $f(z) = u + iv$; $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Zoals bekend is, speelt de funktionaaldeterminant van de transformatie een rol. Deze is

$$D = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = (u_x)^2 + (v_x)^2 \\ \begin{vmatrix} v_y & u_y \\ -u_y & v_y \end{vmatrix} = (u_y)^2 + (v_y)^2 \end{array} \right\} = |f'(z)|^2 \ .$$

Stel $f'(z) \neq 0$ voor $z = z_0$. Noem $w_0 = f(z_0)$ het beeldpunt van z_0. Uit $D \neq 0$ volgt (geen bewijs hier) dat de transformatie $(x,y) \rightarrow (u,v)$ éénéénduidig en in beide richtingen continu-differentieerbaar is, in de respectieve omgevingen van de punten z_0 en w_0. In deze omgevingen stellen we

$$z = z_0 + \Delta z \ , \quad w = w_0 + \Delta w \ .$$

Dan is $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon\Delta z$, met $\varepsilon \rightarrow 0$ voor $\Delta z \rightarrow 0$. Voor $|\Delta z|$ voldoende klein geldt bij benadering $\Delta w = f'(z_0)\Delta z$, omdat $f'(z_0)$ van nul verschilt. Stellen we vervolgens $\Delta z = \xi + i\eta$, $\Delta w = \sigma + i\tau$, dan zijn (ξ,η) en (σ,τ) locale cartesiaanse coördinaten, en we hebben

$$\sigma + i\tau = f'(z_0)(\xi + i\eta) \ .$$

We schrijven nu $f'(z_0)$ uit in modulus en argument: $f'(z_0) = \rho e^{i\varphi}$. Dan vinden we

$$\sigma = \rho(\xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi) \ ,$$

$$\tau = \rho(\xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi) \ ,$$

waarbij ρ en φ onafhankelijk van de (ξ,η) en (σ,τ) zijn.

Bovenstaande transformatie $(\xi,\eta) \rightarrow (\sigma,\tau)$ is een eenvoudige lineaire transformatie met funktionaaldeterminant ρ^2. Het is een combinatie van een draaiing over de hoek φ en een vermenigvuldiging van de oorsprong uit met de factor ρ.

Stel we hebben in het z-vlak twee georiënteerde krommen die elkaar in z_0 onder een hoek α snijden (raaklijnvectoren $\underline{s}_1$ en $\underline{s}_2$; als we $\underline{s}_1$ over een hoek α in positieve zin draaien krijgen we $\underline{s}_2$). Als beeld in het w-vlak krijgen we weer twee krommen, door w_0, wier raaklijnvectoren $\underline{t}_1$ en $\underline{t}_2$ ten opzichte van $\underline{s}_1$ en $\underline{s}_2$ beide over de hoek φ zijn gedraaid. De hoek waaronder zij elkaar snijden is dus weer α. De hoek φ kan positief of negatief zijn, maar de volgorde $(\underline{t}_1,\underline{t}_2)$ is dezelfde als $(\underline{s}_1,\underline{s}_2)$ wat de draaizin betreft.

Conclusie: de afbeelding is <u>hoektrouw</u> en wel <u>rechtstreeks</u> hoektrouw.

Verder worden lengtes getransformeerd met de factor $\rho = |f'(z_0)|$. Een klein driehoekje (met hoekpunt in z_0, zijden 1 en 2 die een hoek α insluiten) wordt getransformeerd in een gelijkvormig driehoekje (met hoekpunt in w_0, zijden 1' en 2' die ρ maal zo lang zijn als zijden 1 en 2, terwijl de hoek tussen zijden 1' en 2' weer α is). De afbeelding is dus <u>conform</u>. Daarmee is bewezen de

<u>Stelling</u>

Is $f(z)$ holomorf in het punt z_0, en $f'(z_0) \neq 0$, dan is de afbeelding $w = f(z)$ in de buurt van z_0 conform en rechtstreeks hoektrouw.

<u>Stelling</u>

Er zijn geen andere (continu-differentieerbare) rechtstreeks hoektrouwe afbeeldingen dan die door holomorfe funkties.

<u>Stelling</u>

Er zijn in twee dimensies geen andere conforme afbeeldingen dan die door holomorfe funkties van z of van $\bar{z}$.

Op het bewijs van deze twee stellingen gaan we niet in.

<u>Enkele eenvoudige afbeeldingen</u>

De lineaire transformatie: $w = az + b \quad (a \neq 0)$.
De inversie: $w = 1/z$.

Dit zijn 1-1-afbeeldingen van het uitgebreide complexe z-vlak op het uitgebreide complexe w-vlak. Bij de lineaire afbeelding blijft het punt ∞ op zijn plaats. Bij de inversie zijn 0 en ∞ elkaars beeld.

<u>Transformatie van Möbius</u> (A.F. Möbius, 1790 - 1868)

Deze is de algemene gebroken lineaire transformatie: $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, met a, b, c, en d complexe constanten. De afgeleide is

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} .$$

Onderstel daarom

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

dan is dw/dz nergens nul (met uitzondering van $z = \infty$). De omkering is

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a} \ , \quad \text{met determinant} \quad \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{ad - bc}{(cw - a)^2} \qquad \text{(nergens nul, uitgezonderd } w = \infty) \, .$$

Bij deze Möbiustransformatie wordt dus het uitgebreide complexe z-vlak één-éénduidig afgebeeld op het uitgebreide complexe w-vlak. Het beeldpunt van $z = \infty$ is $w = a/c$; dat van $z = -d/c$ is $w = \infty$. Ook hier zien we het voordeel van de invoering van één oneigenlijk complex getal ∞.

De Möbiustransformatie kan men opvatten als een "product" van elementaire transformaties. Als $c = 0$, dan is ze lineair; als $c \neq 0$ dan

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2} \, \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \, .$$

De Möbiustransformaties vormen een zg. <u>groep</u>. Als

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \ , \quad u = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} \ ,$$

dan geldt $u = \dfrac{Az + B}{Cz + D}$ met

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

(Bewijs?)

<u>Stelling</u>

Bij een Möbiustransformatie worden cirkels in cirkels overgevoerd (een rechte wordt opgevat als een ontaarde cirkel).

<u>Bewijs</u>: Met bovenstaande product-splitsing. Voor elk der afzonderlijke factoren geldt de stelling. De enige niet-triviale verificatie is voor de inversie $w = 1/z$.

<u>Opgave</u>: De algemene vergelijking van de cirkel is

$$pz\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + q = 0 \ , \quad p \text{ en } q \text{ reëel.}$$

Bewijs de voorafgaande stelling door aan te tonen dat deze vergelijking bij elke Möbiustransformatie in een overeenkomstige vergelijking in w overgaat.

Van de vier parameters die voorkomen in de algemene Möbiustransformatie zijn er drie onafhankelijk (het komt slechts op de verhouding der parameters aan). Dan is duidelijk de

Stelling

Er is één en slechts één Möbiustransformatie waarbij drie gegeven punten A, B, C in het z-vlak worden afgebeeld, respectievelijk op drie gegeven punten P, Q, R in het w-vlak. Expliciet kan men deze transformatie schrijven als

$$\frac{w-P}{w-R} : \frac{Q-P}{Q-R} = \frac{z-A}{z-C} : \frac{B-A}{B-C} \qquad (= t).$$

Voor de verificatie neemt men het t-vlak als tussenstap, waarbij t gelijk is aan de gemeenschappelijke waarde van linker- en rechterlid:

$$w = P \leftrightarrow t = 0 \leftrightarrow z = A$$
$$w = Q \leftrightarrow t = 1 \leftrightarrow z = B$$
$$w = R \leftrightarrow t = \infty \leftrightarrow z = C .$$

Dubbelverhouding van vier punten

Neem vier punten in het complexe vlak: z, A, B, C. De dubbelverhouding (z,A,B,C) van dit geordend viertal punten is per definitie het getal dat het beeld van z is onder de Möbiustransformatie die A, B, C overvoert in respectievelijk 0, 1, ∞.

Opgave: $(z,A,B,C) = \frac{z-A}{z-C} : \frac{B-A}{B-C}$.

Stelling

De dubbelverhouding van vier punten is invariant voor elke Möbiustransformatie.

Bewijs: Noem de vier punten in het z-vlak: z, A, B, en C. Laten hun beelden zijn, in deze volgorde: w, P, Q, en R. Dan is

$$(w,P,Q,R) = \frac{w-P}{w-R} : \frac{Q-P}{Q-R} \quad \text{en} \quad (z,A,B,C) = \frac{z-A}{z-C} : \frac{B-A}{B-C} .$$

De rechterleden zijn gelijk (zie expliciete formule voor de Möbiustransformatie). Dus ook de linkerleden.

Men kan met behulp van Möbiustransformaties, waarbij cirkels in cirkels overgaan, allerlei meetkundige eigenschappen van systemen van cirkels bewijzen. Als voorbeeld moge men zijn krachten beproeven op het

Sluitingsprobleem van Steiner

Gegeven: twee cirkels, waarvan de kleinste binnen de grootste ligt.

Begin ergens een cirkel te tekenen, die de kleinste cirkel uitwendig en de grootste cirkel inwendig raakt.
Construeer een tweede cirkel die raakt aan alle drie.
Vul zo de tussenruimte tussen de twee oorspronkelijke cirkels op met rakende cirkels.
Er zijn nu twee mogelijkheden:
(1) de ketting sluit (de laatste raakt precies aan de eerste),
(2) de ketting sluit niet.
Men zou kunnen denken dat dat afhankelijk is van de keuze van de eerste cirkel uit de ketting. Dat is echter niet zo. Het is altijd (1) of altijd (2), onafhankelijk van de begincirkel.
Het bewijs is zeer doorzichtig. Voor een stel concentrische cirkels is de stelling triviaal. En men kan de twee gegeven cirkels gemakkelijk transformeren in twee concentrische. Bij die transformatie (een Möbiustransformatie) gaan cirkels over in cirkels, en rakende cirkels in rakende cirkels, omdat de afbeelding conform is.

LITERATUUR

Ackermans, S.T.M. en Van Lint, J.H., Algebra en Analyse, Wolters-Noordhoff, 1970.

Knopp, Funktionentheorie I, II, Sammlung Göschen Nrs. 668, 703.
Aufgabensammlung zur Funktionentheorie I, II. Sammlung Göschen Nrs. 877, 878.

Spiegel, M.R., Theory and Problems of Complex Variables, Schaum Publishing Co., 1964.

Whittaker-Watson, A course of modern analysis.

Polya, G. en Latta, G., Complex Variables, J. Wiley & Sons, 1974.