TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

en

Tentamenopgaven

WISKUNDE 50 en 52

met antwoorden en oplossingen

Najaar 1979

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken en Tentamenopgaven

Wiskunde 50 en 52

met antwoorden en oplossingen

Dictaatnr. 2.263 Prijs f 10,50

Inhoudsbeschrijving
Vraagstukken en Tentamenopgaven
Wiskunde 50 en 52
met antwoorden en oplossingen

Vervolg Zie Ommezijde

Wiskunde 50	blz	Antw
januari 1973	71	97
maart 1973	72	98
mei 1973	74	99
januari 1974	75	100
maart 1974	76	102
mei 1974	77	103
januari 1975	79	104
maart 1975	80	105
mei 1975	81	106
januari 1976	82	107
maart 1976	83	108
juni 1976	85	109
januari 1977	86	111
maart 1977	87	112
juni 1977	88	112
januari 1978	89	113
maart 1978	91	114
mei 1978	92	115
januari 1979	93	116
maart 1979	94	117
mei 1979	95	118

Wiskunde 52	blz	Opl
januari 1973	120	150
maart 1973	122	151
mei 1973	122	153
januari 1974	124	155
maart 1974	125	156
mei 1974	127	157
januari 1975	128	159
maart 1975	130	162
mei 1975	131	165
januari 1976	132	168
maart 1976	133	170
juni 1976	135	173
januari 1977	136	177
maart 1977	138	179
juni 1977	139	182
januari 1978	141	185
maart 1978	142	188
mei 1978	144	191
januari 1979	145	194
maart 1979	146	197
mei 1979	148	199

JdG, 11 Juli 2005

Vraagstukken en tentamenopgaven Wiskunde 50 en 52.

Dit opgavenboek beoogt te voorzien in de behoefte aan oefenstof voor het tentamen Functietheorie. Bij de antwoorden en oplossingen is getracht verraderlijkheden, die dit terrein onveilig maken, onder de aandacht te brengen. De stof is als volgt ingedeeld:

Wenken bij de antwoorden zijn tussen [ ] geplaatst.

Vraagstukken.

1. Bepaal Re, Im, modulus, argument van

$$\frac{1-i}{1+i}\,, \quad \left(\frac{2+i}{3-i}\right)^2\,, \quad \frac{3-i}{2+i}+\frac{3+i}{2-i}\,.$$

2. a) Bepaal $(z^3-2z+3)/(z-1)$ voor $z = 1+i$ en $z = 1-i$.

   b) Evenzo $(z^3+2z-3i)/(z-i)$.

3. Toon aan dat $\bar{z}_1\bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$ en dat $(\bar{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$.

   Leid hieruit af dat $(\bar{z})^n = \overline{z^n}$ (ook voor gehele $n < 0$).

4. Voor een rationale functie met reële coëfficiënten $a_0,\dots,a_n$, $b_0,\dots,b_p$

$$f(z) = (a_0z^n + \dots + a_n)(b_0z^p + \dots + b_p)^{-1}$$

   geldt $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

5. a) $|z_1-z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z_1\bar{z}_2$.

   b) De vectoren z_1 en z_2 zijn onderling loodrecht als $\mathrm{Re}\, z_1\bar{z}_2 = 0$.

6. Als $(z_1-z_2)i = \lambda(z_1+z_2)$, λ reëel, dan heeft het parallellogram 0, z_1, z_2, z_1+z_2 vier even lange zijden; reken dit na.

7. Leid uit $|z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$ af: $|z_1 \pm z_2| \ge |z_1| - |z_2|$, en gebruik dit in:

   1e $\quad |z^2+2z+3i| \ge R^2-2R-3 > 0$

   2e $\quad \left|\dfrac{z-4}{z^2+2iz+3}\right| \le \dfrac{R+4}{R^2-2R-3}$

   als $|z| = R > 3$.

8. Het punt r is randpunt bij een verzameling V als in iedere omgeving van r punten van V en punten van V' liggen. Toon aan dat de verzameling R der randpunten bij een verzameling V een gesloten verzameling is.

9. De rij $x_n = \cos(\pi n + \frac{1}{n})$ heeft 2 verdichtingspunten; $z_n = \frac{i}{n} + i^n$ heeft er 4. Bepaal lim sup x_n en lim sup Im z_n.

10. Hoeveel verdichtingspunten heeft $z_n = \sqrt[n]{2} + (\frac{1 - i\sqrt{3}}{2})^n$? Idem voor y_n = Im z_n. Wat is lim sup y_n?

11. Teken de getallen $s_n = \frac{1+i}{2} + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ voor $n = 1,2,3,4$. Toon aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = i$ (bepaal $N(\varepsilon)$ zó dat $|s_n - i| < \varepsilon$ voor alle $n > N(\varepsilon)$).

12. Teken de getallen $z_n = (1 + \frac{i}{n})^n$ voor $n = 1,2,3,4$. Toon aan dat $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \cos 1 + i \sin 1$.

13. Ga na dat $\cos t + 2i \sin t$, $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}t^2 + i\sqrt{4 - t^4}$, $0 \le t \le \sqrt{2}$, een gladde boog voorstellen. Dezelfde? Hetzelfde begin- en eindpunt? Welke kromme? $\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 > 0$?

14. Bepaal $\lim\limits_{z\to 1} \frac{z^2 - 1}{z - 1}$ en $\lim\limits_{z\to 1} \frac{z^2 - 1}{|z - 1|}$ als $z \in \{1 + \frac{1}{n}\}$; idem als $z \in \{1 + \frac{i}{n}\}$; idem als $z \in \{1 + \frac{i^n}{n}\}$.

15. Toon aan dat $\frac{1}{z}$ continu is in $z = i$ ($z \in$ omgeving van i). Toon aan met de derde definitie dat $\frac{1}{z}$ differentieerbaar is in $z = i$.

16. Toon aan dat $z\bar{z}$, hoewel differentieerbaar in 0 (waarom?), aldaar niet analytisch is.

17. De functie $f(z) = \frac{1}{z^2 + z} + \frac{1}{z + 1}$ is behalve in 0 en -1 overal gedefinieerd en analytisch.
Kan $f(z)$ worden gecompleteerd tot een functie die analytisch is in 0; in -1? Hoe?

18. Bepaal met $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ de convergentiestraal van

$$1 - 2z + 3^2z^2 + z^3 - 2^4z^4 + 3^5z^5 + z^6 - 2^7z^7 + 3^8z^8 + z^9 - \ldots$$

19. a) Toon aan dat als $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergeert, ook $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is.

b) Ga na dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ niet behoeft te convergeren als $|s_n|$ convergeert; neem bijv. $a_0 = 1$, $a_n = i^n + i^{n+1}$.

20. Toon aan dat, als $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergent is, $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

21. Gegeven twee absoluut convergente reeksen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = S$, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^* = S^*$. Dan is een reeks $\sum_{i,j} a_i a_j^*$ waarin elke combinatie $i \ge 0$, $j \ge 0$ aan de orde komt ook absoluut convergent, met SS^* als som.

22. Gegeven: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^* z^j$ hebben convergentiestralen ≥ 1.

Dan is $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_j^* z^j = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n^* + a_1 a_{n-1}^* + \ldots + a_n a_0^*) z^n$ met convergentiestraal $R \ge 1$.

Als in het onderstelde $\ge \rho$ komt i.p.v. ≥ 1, dan is $R \ge \rho$.

23. Bewijs: $\exp z_1 \cdot \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$.

24. Is er een z_0 die voldoet aan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^n}{n!} = 0$? idem aan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^{2n}}{(2n)!} = 0$?

Zo neen, toon dat dan aan; zo ja, geeft een z_0 die voldoet.

25. Teken de hoogtekaart van $|e^z|$; idem van $|e^{iz}|$.

26. Toon aan dat $|\cos z|$ en $|\sin z|$ niet begrensd zijn in het bovenhalfvlak; en in het benedenhalfvlak?

27. Als $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 - z + 1}$, toon dan aan dat

1e. $|f(z)| \le \dfrac{1}{R^2 - R - 1}$ voor $|z| = R > 2$ en $\mathrm{Im}\, z \ge 0$;

2e. $\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{\substack{|z|=R \\ \mathrm{Im}\, z\ge 0}} f(z)dz = 0$.

28. Bereken $\displaystyle\int_K \frac{dz}{z}$ als K is: 1e. de $\frac{1}{4}$ cirkelboog om 0 van 1 naar i;
2e. de rechte lijn van 1 naar i.

29. Gegeven de reeks $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$ met convergentiestraal R. Toon aan zonder de hoofdstelling te gebruiken dat voor iedere Jordankromme K in een gebied $|z| < \rho < R$ geldt:

$$\int_K f(z)dz = 0 .$$

30. Leid $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx$ af uit $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ door e^{-z^2} te integreren over de rechthoek $-N, N, N+ib, -N+ib$.

31. Bepaal de residuën in de singuliere punten van de functie $\dfrac{z^2+1}{(z^2-1)(z+1)^2}$.

32. Idem voor de functies $\dfrac{e^{iz}}{z^2+4}$, $\dfrac{\cos \pi z}{z(z-1)(6z-1)}$.

33. Idem voor de functie $\dfrac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}$.

34. Laat zonder residuberekening zien dat $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{zdz}{z^3 + z^2 - 2} = 0.$
Algemeen:

$$I_c = \int_{|z|=c>\max|a_i|} \frac{p_0 z^{n-2} + p_1 z^{n-1} + \dots\ p_{n-2}}{(z+a_1)(z+a_2)\dots(z+a_n)}\, dz = 0 .$$

35. Bereken $\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{dz}{(z^2+1)^8(z+3)}$:

a) als $R > 3$,

b) als $1 < R < 3$,

c) als $0 < R < 1$.

36. Bereken de residuen in de singuliere punten van de functie $\dfrac{z}{\sin z}$. (Het punt $z = \infty$, een niet geïsoleerd singulier punt, buiten beschouwing laten.)

37. Idem voor de functie $\dfrac{1}{z(e^{3z}-1)}$.

38. Geef een schatting voor $|f^n(0)|$ als $f(z) = \dfrac{1}{z^2-3z+2}$ (met de ongelijkheid van Cauchy; $r < 1$).

39. De reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1-e^{-z})^n$ is uniform convergent in de omgeving U van $z = 0$ bepaald door $|1-e^{-z}| < \frac{1}{2}$. De som van de reeks is z; toon dit aan.

40. Voor elke begrensd domein D (= gebied G + rand) in het z-vlak is de functie

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \cos(z \cos t)dt \ , \quad t \text{ reëel}$$

holomorf in G. Toon dit aan en tevens dat in G

$$F'(z) = -z \int_0^{2\pi} \cos(z \cos t) \sin^2 t \, dt$$

en

$$zF(z) + F'(z) + zF''(z) = 0 \ .$$

Geef de machtreeks in z^n voor $F(z)$. Wat is de convergentiestraal?

41. Bepaal de machtreeks in $(z - \frac{\pi i}{2})^n$ voor $\cosh z$.

42. Welke van de volgende functies is geheel?

$$\frac{1}{e^z}\ ,\quad e^{\frac{1}{z}}\ ,\quad \frac{\sin z}{z}\ ,\quad \frac{\sqrt{3}\cos z}{z^4} - \frac{\sin(z\sqrt{3})}{z^5}\ .$$

43. Toon aan dat de functie

$$\frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z-\pi} - \frac{1}{z+\pi}$$

in 0, π en $-\pi$ ophefbare singulariteiten heeft, en ontwikkeld kan worden in een machtreeks om $z = 0$ met convergentiestraal 2π. Welke breuken dienen te worden afgetrokken om een convergentiestraal $n\pi$ te krijgen?

44. Hoeveel Laurentreeksen "om" $z = 0$ heeft $\dfrac{6}{z(z-1)(z-2)(z-3)}$?
Bepaal van de reeks die voor $z = 1\frac{1}{2}$ convergeert de coëfficiënten c_{-1}, c_0 en c_1.

45. Bepaal de Laurentreeks voor $\dfrac{1}{1+z^2}$ om $1+i$ die convergeert voor $z = 0$.

46. Van een Laurentreeks $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ die in minstens één punt convergeert is gegeven dat $c_n = c_{-n} = c^{-n}$ $(n \geq 0)$. Aan welke eis moet c (complex) voldoen?
Wat is het convergentiegebied en wat is daar de som?

47. Toon aan dat $|e^{z^2+2iz}| \leq e^{\frac{3}{2}}$ voor $|z| \leq 1$. Voor welke z wordt het maximum bereikt?

48. Toon aan dat Re f(z) + Im f(z) maximaal wordt op de rand van een domein D in een gebied waar f(z) holomorf is; aanwijzing: beschouw $e^{(1-i)f(z)}$.
Voorbeeld: D is $|z| \leq 1$, $f(z) = (1+i)z^2 - 2(1-i)z$ (zie 47).

49. f is een gehele functie van z waarvoor gegeven is dat

$$|f(z)| \leq M|z|^n\ , \qquad \text{M zekere constante} > 0\ .$$

Toon aan dat $f(z) = az^n$ waarin a een complex getal voorstelt met $|a| \leq M$.

50. Toon aan dat $\lim\limits_{z\to 0} z \cos \frac{1}{z}$ niet bestaat.

51. Er zijn binnen elke ε-omgeving van $z = 0$ oneindig veel punten waar $e^{1/z}$ een gegeven waarde $c = a + bi$ ($\neq 0$) aanneemt. Ga dit na (d.w.z. bepaal deze punten) als $c = -e^{\pi}$ en $\varepsilon = 1/10\pi$.

52. Onderzoek de aard van de singulariteit van $f(z) = \{(z-\pi)\sin z\}^{-1}$ bij $z = \pi$. Wat is het residu?

53. Bepaal de constanten A, B, C zó dat

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{A}{z} - \frac{B}{z-\pi} - \frac{C}{z+\pi}$$

slechts ophefbare singulariteiten heeft bij $z = 0$, π en $-\pi$.
Noem de overige singulariteiten.

54. Bepaal de residuën in $z = 0$ van $\frac{1}{\sin z}$ en van $\sin \frac{1}{z}$.
Is $\frac{1}{\sin z} - \sin \frac{1}{z}$ regulier in $z = 0$?
Noem de singuliere punten van deze functie.

55. Bepaal het residu van $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}} - z(z+1)$ in $z = \infty$.
Waar is $f(z)$ niet regulier?

56. Als $f(z)$ holomorf en $\neq 0$ is in een gereduceerde p-omgeving van a en als $f(z) = (z-a)^k g(z)$ (k geheel, > 0 of < 0), dan geldt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=\rho} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}\right) dz = k \;, \qquad 0 < \rho < p \;.$$

57. Bereken $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1 + 2\cos x}{5 + 4\cos x}\, dx$; $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x}\, dx$; $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{5 - 4\cos x}\, dx$.

58. Bereken $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos mt}{1 + i\sqrt{3}\cos t}\, dt$, m geheel ≥ 0 .

59. Bereken voor gehele $n \geq 0$

$$\int_0^\pi \cos^n\varphi \cos n\varphi \, d\varphi \; ; \qquad \int_0^\pi \cos^{2n}\varphi \, d\varphi \; .$$

60. Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+4}\,dx \; ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4+4)^2} \; ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^3+3x-2i)}$.

61. Bereken $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}\,dx\,, \; a \geq 0 \; ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}-1}{x(1+a^2x^2)}\,dx\,, \; a > 0 \; ;$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx \; .$$

62. Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{(x-i)(x+2i)} \; ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\,dx}{(x-i)(x-2i)^3}$.

63. De functie $\cos\sqrt{x}$, $x \geq 0$, kan analytisch worden voortgezet tot een functie $f(z)$ door middel van een machtreeks; bepaal deze en de convergentiestraal ervan. Ga na dat $f(2i\pi^2)$ reëel is en < -10. Druk $f(x)$, $x \leq 0$, uit in reële machten van e. Schets $f(x)$ voor $-\infty < x < \infty$.

64. Zij $K_1 = \{z \mid |z| = 1, \operatorname{Re} z \leq 0\}$. In $\mathbb{C} \setminus K_1$ ($\mathbb{C}$ minus snede K_1) is

$$f_1(z) = \int_0^z \frac{dt}{1+t^2} \qquad \text{(integratieweg willekeurig)}$$

een analytische functie. Toon dit aan.
In welk gebied geldt $f_1(z) = \arctan z$? Waar is er verschil, en hoeveel?

65. Zij $f_2(z)$ evenzo gedefinieerd, met $K_2 :=$ *rechter*helft van de eenheidscirkel. Ga na dat zowel $\arctan z$, als $f_1(z)$ als $f_2(z)$ een analytische voortzetting is van

$$g(z) = z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \dots\,, \qquad |z| < 1 \; .$$

66. Toon aan dat $\sqrt[3]{x}$, x reëel, niet analytisch voortgezet kan worden; wel daarentegen $\sqrt[3]{x}$, $x > 0$.

67. In welke gebieden bepaalt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z^2 - 1)^n$ een analytische functie? Welk verband bestaat er met log z ? (Elk gebied afzonderlijk beschouwen.)

68. Toon aan dat voor $z \neq 0$ en niet negatief reëel $\int_0^{\infty} (\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+z})dt = \log z$ (hoofdwaarde).

69. Bereken $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx$, $a > 0$ (contour: $\rho \to R \to$ bovenboog $\to -R \to -\rho \to$ bovenboogje $\to \rho$).

70. Stel $f(z) = \log(z + \frac{1}{z})$; hoofdwaarde van de logarithme.

a) Voor welke z is f(z) niet gedefinieerd?

b) Voor welke z is f(z) niet holomorf?

71. Gegeven $f(x) = \sqrt{-x}$ voor $x < 0$.
Hoe wordt deze functie analytisch voortgezet in het complexe vlak met snede langs de positieve reële as? Bepaal de sprong aan de snede.

72. Van een analytische functie $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ is gegeven dat $u(x,y) = x^2 + 4x - y^2 + 2y$. Bepaal v(x,y) en f(z).

73. a) Welke Moebiustransformatie beeldt $z = 1, -1, \infty$ af op $w = 1+i, 1-i, 1$? Welk punt z heeft $w = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} i$ tot beeld? Bepaal het beeld van $|z| = 1$. Tekenen.

b) Welke Moebiustransformatie beeldt $1, -i, 2$ af op $0, 2, -i$? Bepaal het beeld van $-2i$. Welke krommen worden afgebeeld op de reële en imaginaire as?

74. Bepaal de Moebiustransformatie die $z = 0, 1$ en $|z| = 1$ afbeeldt op $w = -1, 0$ en $|w-1| = 1$. (Wenk: gebruik dat cirkels of rechten die elkaar loodrecht snijden, dat ook na de transformatie doen.)
Op welk gebied wordt $|z| < 1$, $\mathrm{Im} > 0$ afgebeeld?

75. Bepaal bij de Moebiustransformatie die $z = 1, i, -1$ afbeeldt op $w = i, 0, -i$ de beelden van

a) $|z| < 1$,

b) $|z| \leq \rho < 1$.

Antwoorden.

1. (Re, Im, mod, arg): $(0,-1,1,-\frac{1}{2}\pi)$, $(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\pi)$, $(2,0,2,0)$.

2. a) i resp. $-i$;
   b) i resp. $\frac{7}{5}(2-i)$ (waarom niet toegevoegd complex?).

3. $(x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2)$ uitwerken.
   $\bar{z}\;\overline{z^{-1}} = \overline{zz^{-1}} = 1$, dus $\overline{z^{-1}}$ is de inverse van $\bar{z}$.
   Als $(\bar{z})^n = \overline{z^n}$, dan $(\bar{z})^{n+1} = \bar{z}(\bar{z})^n = \bar{z}\overline{z^n} = \overline{zz^n} = \overline{z^{n+1}}$.
   Als $n = -m$ ($m > 0$, geheel), dan $(\bar{z})^n = (\bar{z}^m)^{-1} = (\overline{z^m})^{-1} = \overline{(z^m)^{-1}} = \overline{z^n}$.

4. $f(\bar{z}) = (a_0\bar{z}^n + \ldots + a_n)(b_0\bar{z}^p + \ldots + b_p)^{-1} = \overline{(a_0z^n + \ldots + a_n)}\;\overline{(b_0z^p + \ldots + b_p)}^{-1}$.

5. a) $(z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2$;
   b) Pythagoras.

6. $z_1(i - \lambda) = z_2(i + \lambda) \rightarrow |z_1| = |z_2|$.

7. 1e. Algemeen: $|z^2 + 2z + 3i| \geq |z|^2 - |2z + 3i|$ (rechterlid kan < 0 zijn, bijv. als $z = 2\frac{1}{4}$; a fortiori $|z^2 + 2z + 3i| \geq |z|^2 - 2|z| - 3$. Als $|z| = R > 3$ dan is dit > 0.
   2e. $|z - 4| \leq |z| + |-4| = R + 4$; $|z^2 + 2iz + 3| \geq R^2 - 2R - 3 > 0$, als in 1e.

8. Zij p een verdichtingspunt van R; dan bevat elke omgeving van p oneindig veel randpunten van V. Zij M een omgeving van p; neem daarin zo'n randpunt r, en neem een omgeving O van r die geheel in M ligt. In O liggen punten van V en V'; dus ook in M. Dit geldt voor elke omgeving M van p. Dus is p randpunt bij V; dus $p \in R$. Dus elk verdichtingspunt van R is element van R, m.a.w. R is een gesloten verzameling.

9. 1 en -1; 1, i, -1 en $-i$; lim sup $x_n = 1$, lim sup Im $z_n = 1$.

10. 6 nl. 0,2, $\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $1\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$; Im z_n heeft er 3 nl. 0 en $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$;
    lim sup $y_n = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

11. $s_n = \dfrac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)\{1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^n\}}{1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)} = i\{1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^n\}$; $|s_n - i| = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n < \varepsilon$ als
    $n > \log(1/\varepsilon)\cdot 2/\log 2$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$, want $1 > \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}n} < \sqrt[2n]{e}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n = 1$, want $n \arctan \frac{1}{n} \to 1$.

13. Dezelfde ellipsboog; van 1 naar 2i resp. omgekeerd.
De tweede parametervoorstelling heeft bezwaren: $(\sqrt{4-t^4})'$ is niet continu bij $t = \sqrt{2}$, en $\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 = 0$ bij $t = 0$.

14. 2, 2; 2, 2i; 2, geen limiet.

15. $|\frac{1}{z} - \frac{1}{i}| = \frac{|z-i|}{|z|}$; beperk z tot $|z-i| < \frac{1}{2}$, dan is $|z| > \frac{1}{2}$, dus $|\frac{1}{z} - \frac{1}{i}| < 2|z-i|$ en dit is kleiner te maken dan iedere gegeven $\varepsilon > 0$ door $|z-i| < \frac{1}{2}\varepsilon$ te nemen. Dus $\frac{1}{z}$ is continu in i. Differentieerbaar:
$\frac{1}{z} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2}(z-i) + (z-i)\eta(z)$; toon aan dat $\eta(z) \to 0$ als $z \to i$.

16. $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{z\bar{z} - z_0\bar{z}_0}{z - z_0}$ bestaat niet (tenzij $z_0 = 0$); neem bijv. $z = z_0 t$ (t reëel $\to 1$) en $z = z_0 e^{i\varphi}$ (φ reëel $\to 0$).

17. $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ bestaat niet; $\lim\limits_{z\to -1} f(z) = -1$, definieer $f(-1) = -1$.

18. $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 3$, want voor oneindig vele n is $\sqrt[n]{|a_n|} > 3 - \delta$, maar slechts in eindig veel gevallen (nl. 0) is $\sqrt[n]{|a_n|} > 3 + \delta$.

19. a) Wiskunde 20. Anders: $|a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| \le |a_m| + \ldots + |a_n| < \varepsilon$, zie convergentiekenmerk van Cauchy.

b) $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = i^n$ (4 verdichtingspp.); $|s_n| = 1$ (limiet).

20. De ongelijkheid geldt voor elke eindige som; dan kan het tegendeel (>) niet voor de limiet gelden.

21. $\sum\limits_{i=0}^{n} |a_i| = T_n \to T$; $\sum\limits_{j=0}^{n} |a_j^*| = T_n^* \to T^*$ (zie gegeven).

Zij $\sum\limits_{i,j}^{N} a_i a_j^*$ een som waarin alle produkten met i,j beide $\le N$ reeds voorkomen. Dan is (ga na)

$$|SS^* - \sum_{i,j}^{N} a_i a_j^*| \le (T - T_N)T^* + T(T^* - T_N^*) .$$

Bij elke $\varepsilon > 0$ kan N zō groot worden genomen dat het rechterlid $< \varepsilon$ wordt. Hieruit volgt het gestelde.

22. De reeksen zijn voor elke z met $|z| < 1$ absoluut convergent. De produktreeks is dat (volgens 21) ook. Dus heeft de produktreeks een convergentiestraal van tenminste 1.

23. Eerste manier: pas 22 toe. Tweede manier: toon aan dat $\exp(z_1 + z) \cdot \exp(z_2 - z)$ niet afhangt van z (differentieer).

24. $e^{z_0} = 0$ is onmogelijk; dan zou voor elke z: $e^z = e^{z-z_0} \cdot e^{z_0} = e^{z-z_0} \cdot 0 = 0$.
De tweede som is $\frac{1}{2}(e^{z_0} + e^{-z_0}) = \cosh z_0$; $\cosh \frac{i\pi}{2} = 0$.

25. $|e^z| = e^x$ naar links afhellend; $|e^{iz}| = e^{-y}$ naar boven afhellend.

26. $|\cos z| = \frac{1}{2}|e^{iz} + e^{-iz}| = \frac{1}{2}|(e^y + e^{-y})\cos x - i(e^y - e^{-y})\sin x|$.
Neem $x = 0$: $\cos iy = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$, niet begrensd als $|y| \to \infty$.

27. 1e. Als $\operatorname{Im} z \geq 0$, dan $|e^{iz}| \leq 1$, $|z^2 - z + 1| \geq |z|^2 - |z - 1| \geq$
$\geq |z|^2 - |z| - 1 > 0$ als $|z| = R > 2$.

2e. $\left|\int\right| \leq \dfrac{\pi R}{R^2 - R - 1} \to 0$ als $R \to \infty$.

28. Substitueer resp. $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ en $z = 1 - t + it$, $0 \leq t \leq 1$.

Het laatste leidt tot $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t - 1 + i}{2(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}}\, dt = 0 + i\,\frac{\pi}{2}$.

29. In $|z| < \rho < R$ is de reeks uniform convergent, d.w.z. bij iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een N zō dat $\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n\right| < \varepsilon$ voor alle $n_0 > N$. Neem zo'n n_0, dan is $\left|\int_K \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n\, dz\right| < \varepsilon L$ (L: lengte K). Alle machten z^n met $n < n_0$ geven stuk voor stuk 0 bij integratie over K. Dus $\left|\int_K f(z)dz\right| < \varepsilon L$. Hierin is ε willekeurig. De integraal is dus 0.

30. Langs twee wegen van $-N$ naar $N+ib$

$$\int_{-N}^{N} e^{-x^2}dx + \int_0^b e^{-(N+iy)^2} i\,dy = \int_0^b e^{-(-N+iy)^2} i\,dy + \int_{-N}^{N} e^{-(x+ib)^2}dx$$

$$\int_{-N}^{N} e^{-x^2}dx + 2e^{-N^2}\int_0^b e^{y^2}\sin 2N\,y\,dy = e^{b^2}\int_{-N}^{N} e^{-x^2}\cos 2b\,x\,dx\,.$$

$N \to \infty$ geeft voor de gevraagde integraal: $\sqrt{\pi}\,e^{-b^2}$.

31. $\mathrm{Res}_1 = \frac{1}{4}$; $\mathrm{Res}_{-1} = \frac{1}{2!}\{(z^2+1)/(z-1)\}''_{z=-1} = -\frac{1}{4}$.

32. $\mathrm{Res}_{2i} = -\frac{i}{4}e^{-2}$, $\mathrm{Res}_{-2i} = \frac{i}{4}e^{2}$; $\mathrm{Res}_0 = 1$, $\mathrm{Res}_1 = -\frac{1}{5}$, $\mathrm{Res}_{1/6} = -\frac{3\sqrt{3}}{5}$.

33. $\mathrm{Res}_2 = \frac{1}{9}e^2$, $\mathrm{Res}_{-1} = \mathrm{Res}_0[-\frac{e^{-1}}{3}\frac{e^w}{w^2(1-w/3)}] = -\frac{e^{-1}}{3}\mathrm{Res}_0[\frac{1}{w^2}+\frac{4/3}{w}+\ldots] = -\frac{4}{9}e^{-1}$.

34. $I_c = I_R$ voor elke $R > c$ (want in $c < |z| < R$ geen polen). Verder:

$$0 \le |I_R| \le 2\pi R\,\frac{|p_0|R^{n-2}+\ldots+|p_{n-2}|}{(R-|a_1|)(R-|a_2|)\ldots(R-|a_n|)} \to 0 \text{ als } R\to\infty\,.$$

Dus I_R (onafh. van R) $= 0$, $I_c = 0$.

35. a) 0.
b) $-2\pi i\cdot 10^{-8}$.
c) 0.

36. $\mathrm{Res}_{k\pi}\,\frac{z}{\sin z} = (-1)^k k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$; geldt ook bij $k = 0$ (ophefbare singulariteit).

37. $\mathrm{Res}_{\frac{2}{3}k\pi i} = \frac{1}{2\pi k i}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$; $\mathrm{Res}_0 = \mathrm{Res}_0[\frac{1}{z^2}\,\frac{1}{3+4\frac{1}{2}z+\ldots}] =$
$\frac{1}{3}\mathrm{Res}_0(\frac{1}{z^2} - \frac{1\frac{1}{2}}{z}+\ldots) = -\frac{1}{2}$. Anders $\mathrm{Res}_0 = \frac{1}{1!}(\frac{z}{e^{3z}-1})'_{z=0} = (\frac{1}{3+4\frac{1}{2}z+\ldots})'_{z=0} = -\frac{1}{2}$.

38. $\frac{n!}{(1-r)(2-r)r^n}$ (vergelijk met $f^{(n)}(z) = n!\{(1-z)^{-n-1} - (2-z)^{-n-1}\}$).

39. Bepaal de afgeleide reeks; ga na waarom deze uniform convergent is in U; integreer term voor term.

40. Stelling! $F'(z) = -\int_0^{2\pi} \sin(z \cos t)\,d \sin t$ partieel integreren.

$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2\pi z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ (waarom is termsgewijs integreren geoorloofd? Betreft de uniforme convergentie z of t ?).

41. $\frac{1}{2}\left(e^{z-\frac{\pi i}{2}+\frac{\pi i}{2}} + e^{-z+\frac{\pi i}{2}-\frac{\pi i}{2}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{(2n+1)!}\left(z - \frac{\pi i}{2}\right)^{2n+1}$.

42. $e^{\frac{1}{z}}$ is geen gehele functie.

43. De limiet voor $z \to 0$ bestaat, want $\frac{\cos z}{\sin z} - \frac{1}{z} = \frac{(z \cos z - \sin z)/z^2}{\sin z/z}$ heeft in 0 geen singulariteit (alleen ophefbaar) in teller en noemer ($\neq 0$). Evenzo bij π en $-\pi$ ($\frac{\cos z}{\sin z}$ heeft de periode π).
$\frac{1}{z-k\pi}$, $\frac{1}{z+k\pi}$ met $k = 2,3,\ldots,n-1$.

44. Convergent voor $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$, $2 < |z| < 3$, $3 < |z|$.
Splits in partieelbreuken; ontwikkel naar z en z^{-1}; $c_{-1} = 2$, $c_0 = \frac{7}{6}$, $c_1 = \frac{23}{36}$.

45. $\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{w}\right)^n + \frac{2+i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-w}{1+2i}\right)^n$ waarin $w = z - 1 - i$.

46. $\sum_{n=0}^{\infty} c^{-n}z^n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} c^{-n}z^{-n}$ convergeren voor $|z| < |c|$ resp. $> |c^{-1}|$; dus moet $|c^{-1}| < |c|$; $|c| > 1$; ring $|c^{-1}| < |z| < |c|$; som $\frac{c}{c-z} + \frac{1}{cz-1}$.

47. Het maximum wordt bereikt als $\mathrm{Re}(e^{2i\varphi} + 2ie^{i\varphi})$ maximaal is, d.i. als $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$ dus als $z = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2}$.

48. $e^{(1-i)f(z)}$ is holomorf in hetzelfde gebied; dus wordt $|e^{(1-i)f(z)}| = \exp\{\mathrm{Re}\, f(z) + \mathrm{Im}\, f(z)\}$ maximaal op de rand van D.

49. Stel $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ ($R = \infty$). Noem de eerste a_i die $\neq 0$ is a_k. Dan is $f(z) = z^k h(z)$ met $h(z)$ holomorf in 0 (en overal) en $h(0) = a_k$. In $|z^k||h(z)| \leq M|z|^n$ is $n > k$ onmogelijk want dan zou $\lim_{z\to 0} h(z) = 0 \neq a_k$. Dus $n \leq k$, dus $f(z)/z^n$ geheel en begrensd; Liouville.

50. Nader 0 bijvoorbeeld langs de imaginaire as.

51. $e^{1/z} = -e^{\pi} \to z = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+(2k+1)i}$, k geheel; $\frac{1}{\sqrt{1+(2k+1)^2}} < \frac{1}{10}$ voor alle $k \geq 5$ of ≤ -6.

52. $\lim\limits_{z\to\pi} (z-\pi)^2 f(z)$ bestaat en is $\neq 0$; pool van 2e orde.

$$\mathrm{Res}_{\pi}\, f(z) = \frac{1}{1!}\left(\frac{z-\pi}{\sin z}\right)'_{z=\pi} = -\left(\frac{w}{\sin w}\right)'_{w=0} = -\left(\frac{1}{h(w)}\right)'_{w=0} = \left(\frac{h'(w)}{h^2(w)}\right)_{w=0} .$$

Dit geeft 0 want $h(w) = 1 - \frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} - \ldots$.

53. $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ moet bestaan, d.w.z. $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z - A\sin z}{z \sin z}$, dus $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z - A\sin z}{z^2}$ moet bestaan: $\to A = 1$. Analoog $B = -1$, $C = -1$.

Bij $z = k\pi$ $(k = \pm 2, \pm 3, \ldots)$ zijn enkelvoudige polen.

54. $\mathrm{Res}_0(1/\sin z) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\sin z} = 1$; $\mathrm{Res}_0 \sin(\frac{1}{z}) = 1$ volgt uit de Laurentreeks (N.B. $\lim\limits_{z\to 0} z \sin(1/z)$ bestaat niet).

$1/\sin z - \sin(1/z)$ kan niet regulier zijn in $z = 0$ want de limiet voor $z \to 0$ bestaat niet (dat het residu 0 is doet niet terzake). Singuliere punten: 0 (essentieel), $k\pi$ met $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ (polen van de eerste orde); $z = \infty$ is een niet geïsoleerd singulier punt (in élke omgeving oneindig veel polen).

55. In het eindige is alleen 0 singulier, met residu $\frac{1}{3!}$; het residu in $z = \infty$ is dus $-\frac{1}{3!}$. In $z = \infty$ is $f(z)$ holomorf want $f(\frac{1}{w}) = \frac{e^w}{w^2} - \frac{1}{w}(\frac{1}{w} + 1) = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}w + \ldots$ is holomorf in 0 $(f(\frac{1}{w})$ heeft daar een ophefbare singulariteit).

56. Ga na dat de integrand $= \frac{k}{z-a}$.

57. $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} = 0$; $2\pi(2-\sqrt{3})$; $\frac{\pi}{12}$.

58. $\pi(-i/\sqrt{3})^m$.

59. $\frac{\pi}{2^n}$; $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi$, gebruik het binomium.

60. $\frac{\pi}{4}$; $\text{Res}_{z_1=1+i} = \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)\}^{-2}_{z=z_1} = \frac{3}{256}(-1-i)$; analoog bij

$z_2 = -1+i$, uitkomst $\frac{3\pi}{64}$; $\frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{1}{(z+i)(z+2i)}\right]''_{z=i} = \pi i\left[\frac{i}{z+2i} - \frac{i}{z+i}\right]''_{z=i} =$

$= 2\pi i(\frac{1}{8} - \frac{1}{27})$.

61. $\frac{\pi i}{1!}\left\{\frac{e^{iaz}}{(z+i)^2}\right\}'_{z=i} = \frac{(a+1)\pi}{4}e^{-a}$, $\pi i(1-e^{-1/a})$; $\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}-1}{x(x^2+1)}dx -$

$-\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}-1}{x(x^2+1)}dx = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}-1}{x(x^2+1)}dx = \pi(1-e^{-1})$.

62. $\frac{\pi i}{3}(e^{-2}-e^{-1})$. $[\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}\,dx}{(x-i)(x+2i)} - \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it}\,dt}{(-t-i)(-t+2i)}]$.

$2\pi i\cdot\frac{e^{-1}}{(-i)^3} + 2\pi i\cdot\frac{1}{2!}\left(\frac{e^{iz}}{z-i}\right)''_{z=2i} = 2\pi e^{-1} - 5\pi e^{-2}$.

63. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{2n!}$; $f(2i\pi^2) = f((\pi+i\pi)^2) = \cos(\pi+i\pi) = -\cos(i\pi) =$

$= -\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi}) < -10$. Voor $x \le 0$: $f(x) = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{-x}} + e^{-\sqrt{-x}})$.

64. Rechts van de snede: $K_1 \cup$ imaginaire as boven i resp. beneden $-i$ geldt $f_1(z) = \arctan z$ (*dezelfde* integraal).
Links van de snede geldt
$f_1(z) = \arctan z + 2\pi i\,\text{Res}_i\,\frac{1}{1+z^2} = \arctan z - 2\pi i\,\text{Res}_{-i} = \arctan z + \pi$.

65. Voor $|z| < 1$ geldt $g(z) = \arctan z = f_1(z) = f_2(z)$, want alle hebben dezelfde integraalvoorstelling. Deze integraal bepaalt buiten $|z| < 1$, hoe $g(z)$ daar analytisch wordt voortgezet. De verschillende sneden ($z = iy$, $|y| \ge 1$; K_1, K_2) beslissen over de integratieweg en leggen zodoende de voortzetting geheel vast.

66. Stel er was een analytische functie $f(z)$ in een gebied G dat de reële as omvat en zó dat $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Dan zou ook $f'(z)$ analytisch zijn in G. In het bijzonder zou $\lim_{x\downarrow 0} f'(x)$ moeten bestaan; dat is niet zo. Wel wordt $\sqrt[3]{x}$, $x > 0$ analytisch voortgezet door $g(z) = e^{1/3\,\log z}$ (hoofdw. log); want $g(z)$ is

analytisch in het complexe vlak met snede langs $x \le 0$ en stemt voor $z = x > 0$ met $\sqrt[3]{x}$ overeen.

67. De reeks is convergent als $|z^2 - 1| < 1$, d.i. binnen de lussen van $r = \sqrt{2 \cos 2\varphi}$; uniform convergent voor alle z met $|z^2 - 1| < 1 - \delta$ (δ willekeurig klein). Voor $0 < x < \sqrt{2}$ stelt de reeks $2 \log x$ voor. In de rechterlus bepaalt de reeks dus een analytische functie $f(z)$ ($2 \log z$) die $2 \log x$ voortzet. In de linkerlus geeft de (even!) reeks: $f(-z)$; daar wordt de functie $2 \log(-x)$ voortgezet (door $2 \log(-z)$).

68. $$\int_0^R \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+z}\right)dt = \int_1^{R+1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{R+z}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_K \frac{d\zeta}{\zeta} - \int_{R+1}^{R+z} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Hierin stelt K de gebroken rechte $1 \to R+1 \to R+z \to z$ voor. De integraal langs K is blijkbaar $\log z$; de tweede integraal is in absolute waarde $< \dfrac{|z-1|}{R+1-|z-1|}$; laat $R \to \infty$.

69. $$\int_\rho^R \frac{\log x \, dx}{x^2 + a^2} + \int_0^\pi \frac{\log R + i\varphi}{R^2 e^{2i\varphi} + a^2} Rie^{i\varphi} \, d\varphi + \int_{-R}^{-\rho} \frac{\log|x| + i\pi}{x^2 + a^2} dx +$$
$$+ \int_\pi^0 \frac{\log \rho + i\varphi}{\rho^2 e^{2i\varphi} + a^2} \rho i e^{i\varphi} \, d\varphi = 2\pi i \operatorname{Res}_{ia}\left(\frac{\log z}{z^2 + a^2}\right) = \frac{\pi}{a}(\log a + \tfrac{1}{2}\pi i).$$

De tweede en vierde integraal $\to 0$ (bewijzen!). Uitkomst: $\dfrac{\pi}{2} \dfrac{\log a}{a}$.

70. a) $z = 0$, $z + \frac{1}{z} = 0 \to i$ en $-i$.

b) $z + \frac{1}{z} = -p$ (p positief) 1° $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z < 0$ als $p \le 2$,
2° $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Re} z < 0$ als $p \ge 2$.

71. $g(z) = e^{\frac{1}{2}\log(-z)}$ (hoofdwaarde log) is analytisch in het complexe vlak met snede langs de positieve reële as; voor $x < 0$ is $g(x) = f(x)$.

Sprong bij $a > 0$: $$\lim_{h \downarrow 0} \{g(a+ih) - g(a-ih)\} = e^{\frac{1}{2}\log a - \frac{1}{2}\pi i} - e^{\frac{1}{2}\log a + \frac{1}{2}\pi i} = -2i\sqrt{a}.$$

72. $v(x,y) = 2xy + 4y - 2x + c$ (reëel); $f(z) = z^2 + 4z - 2iz + ci$.

73. a) $w = \frac{z+i}{z}$; $\frac{4}{5} - \frac{3}{5} i$; gebruik bijv. het feit dat 2 beeld is van i.

b) $w = \frac{z-1}{\frac{1}{2}(1+i)z-1}$; $2-i$; gebruik bijv. het feit dat ∞ het beeld is van $1-i$.

74. $w = \frac{z-1}{2z+1}$ (de reële z-as ($\perp$ $|z| = 1$) gaat over in de reële w-as ($\perp$ $|w-1| = 1$), dus $z = -1$ in $w = 2$); $|w-1| > 1$, $\text{Im } w > 0$.

75. $w = \frac{i-z}{i+z}$; a) $\text{Re}(w) > 0$; b) $\left|w - \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\right| \leq \frac{2\rho}{1-\rho^2}$ (= inwendige en rand van de cirkel om $\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}$ met straal $\frac{2\rho}{1-\rho^2}$).

Gemengde vraagstukken

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^3 + i)(x^2 + 1)} \; .$$

2. Toon aan dat $f(z) = 2 \arctan z + i \log(1 + iz)$ regulier is in de omgeving van i.
Bepaal de convergentiestraal van de Taylorreeks rond $z = i$.

3. $$\int_C \frac{12z - 7}{(z - 1)^2(2z + 3)} \, dz \; , \qquad \begin{array}{l} 1^e \text{ als } C\colon |z| = 2 \\ 2^e \text{ als } C\colon |z + i| = \sqrt{3} \; . \end{array}$$

4. Bepaal de Laurentreeks van $\dfrac{1}{z^2 + 2z + 2}$ rond $-1 + i$, die voor $z = 0$ convergeert.

5. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} \, dx \; .$$

6. Kan $f(z) = \dfrac{e^{i\pi z} - 1 + 2z^2}{z(z^2 - 1)}$, $|z| > 1$, worden voortgezet tot een gehele functie?
Zo ja, hoe?

7. $$\int_{|z|=11} \cot iz \, dz \; .$$

8. Bereken $\left|\sin(\frac{\pi}{3} + i \log 2)\right|$.

9. $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1\frac{1}{4} + \sin 2x} \; .$$

10. Bepaal $\lim\limits_{z\to 1} (z - 1)f(z)$ als $f(z) = \dfrac{i + e^{\pi i(z + \frac{1}{2})}}{\sin \pi z}$.

Is 1 een pool van $f(z)$? Zo ja, van welke orde?

11. $\displaystyle\int_{-1}^{-1} z^{\frac{1}{2}}dz$ met als integratieweg: $|z| = 1$, positief doorlopen.

12. Bereken $\arctan(e^{i\pi/6})$.

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\,dx$.

14. Gegeven: $f(z) = \dfrac{1}{\cos z} + \dfrac{A}{4z^2 - \pi^2}$ heeft een Taylorreeks $\Sigma c_n z^n$ met convergentiestraal $R > 2$.

Bepaal A en R.

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)}$.

16. Toon aan dat $f(z) = \cos |z|$ differentieerbaar is in 0, maar niet analytisch (beschouw het maximum van $|f(z)|$ in de buurt van 0).

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + x + 1}\,dx$.

18. a) Bepaal de residuen in de singulariteiten van $\dfrac{\sin 2z}{(z + 1)^3}$.

b) Idem van $z^3 \cos \dfrac{1}{z - 2}$.

19. $\displaystyle\int_{|z|=1\frac{1}{2}} \frac{\log(z+2)}{e^{2\pi z}-1}\,dz$.

20. Bepaal de nulpunten van sinh $\frac{1}{2}z^2$.

21. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\sin x \cos x}$.

22. Bepaal het residu in $z = 0$ van $\dfrac{\cot z \coth z}{z^3}$.

23. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2\cos\varphi}\,d\varphi$.

24. Bepaal de Laurentreeks om $z = 0$ van $\dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$, die convergeert voor $z = 1 + i$.

25. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+8\cos^2\varphi}$.

26. Ontwikkel $\dfrac{\sin z}{1+z}$ in een Laurentreeks om het punt $z = -1$.
Wat is het convergentiegebied van de reeks?

27. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z \cosh \pi z}$.

28. $f(z)$ is overal analytisch (ook in $z = \infty$) behalve in $z = 0$ en $z = 2$:

$z = 0$ is een pool van de eerste orde;

$z = 2$ is een pool van de tweede orde, met residu 11.

$z = 1$ is een tweevoudig nulpunt;

$z = -1$ is een enkelvoudig nulpunt.

Bepaal $f(z)$.

29. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)(x^2 + 9)} .$$

30. Bepaal het residu van $e^{e^{1/z}}$ in $z = 0$.

31. $$\int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin \varphi}{5 + 4 \sin \varphi}\, d\varphi .$$

32. Zij $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ de Laurentreeks van $\dfrac{1}{e^z - 1}$ rond $z = 0$ die convergeert in $z = 3\pi$.

Bepaal c_{-1}, c_0 en c_1.

33. $$\int_{|z|=2} \frac{\bar{z}^2 + \bar{z} + 1}{z^2 + z + 1}\, dz .$$

34. Bepaal de convergentiestraal van de Taylorreeks rond $z = 0$ van

$$\frac{\cosh \pi - \cos \pi z}{e^{\pi(z+2)} + 1} .$$

35. $$\int_{|z|=1} \frac{e^{1/z^2}}{z + 2}\, dz .$$

36. Een functie $f(z)$ is overal holomorf met uitzondering van

a) een pool van de eerste orde in 1,

b) een pool van de tweede orde in 0, met residu 0.

Bepaal $f(z)$ als verder is gegeven:

c) $\lim_{z\to\infty} f(z) = -3$

d) $f(-1) = 0$

e) $\int_{|z|=2} zf(z)dz = 0$.

37. $\int_C \frac{e^z}{1 - z^2}\, dz$, met C: de van onder naar boven doorlopen y-as.

38. In welk gebied G convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} \{1 + (-1)^n 3^{n-1}\} z^{-n}$?

Zij $f(z)$ de som. Zet f voort buiten G. Bepaal de Laurentreeks van f om $z = 0$ die convergeert voor $z = 2$.

39. $\int_{|z|=\frac{3\pi}{2}} \frac{dz}{z^2 \sin z}$.

40. De functie f is geheel en heeft in $z = \infty$ een pool van orde 2. Toon aan dat f een polynoom van de tweede graad is.

41. $\int_0^z \frac{dw}{\cos w}$, langs willekeurige integratieweg in $\{z \mid 0 < \mathrm{Re}\, z < 2\pi\}$ met snede $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$, stelt in dat gebied een analytische functie voor. Toon dit aan.

42. Bepaal bij $f(z) := \frac{\pi z}{\sin \pi z} + \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$.

a) de singuliere punten en hun aard ($z = \infty$ blijft buiten beschouwing)

b) de convergentiestraal van de Taylorreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ voor $f(z)$.

43. $\displaystyle\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{3iz}}{z^2}\,dz$, voor 1) $a > 0$, 2) $a < 0$.

44. Bepaal de Laurentreeks van $\dfrac{1}{1-z^2}$, die convergeert in een ringgebied rond $1 + i$, waarin $z = 0$ ligt.

45. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-ix}}{(x^2+1)^2}\,dx$.

46. Bereken $\lim\limits_{z\to -1} e^{\sqrt{z}}$, waarbij $\sqrt{z}$ de hoofdwaarde voorstelt,

a) als z tot -1 nadert langs $|z| = 1$ in het bovenhalfvlak;

b) als z tot -1 nadert langs $|z| = 1$ in het benedenhalfvlak.

47. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{2\,\mathrm{Re}\,z}{2z+1}\,dz$.

48. $f_1(z) := \log 2 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$, $f_2(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n$.

a) In welk gebied is $f_1(z)$ resp. $f_2(z)$ hierdoor gedefinieerd?

b) Toon aan dat f_1 en f_2 elkaars analytische voortzettingen zijn.

49. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\cos x}{x^2 - 2i}\,dx$.

50. Ontwikkel $\dfrac{1}{z^2+3z+2}$ in een Laurentreeks naar machten van z, die convergeert in $z = \frac{3}{2}\,i$.

Wat is het convergentiegebied van deze reeks?

51. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ als $f(z) := \dfrac{\sin \frac{1}{2}z}{(z-1)^2}$.

52. Bepaal het residu van $\frac{5 + \cos z}{1 - \sin z}$ in $z = \frac{\pi}{2}$.

53. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x + i)(x - 2i)}\, dx \ .$$

54. Zij $f(z) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots$ voor $|z| < 1$.
De functie wordt analytisch voortgezet in $\{z \mid -1 < \text{Re } z < 1\}$.
Bepaal $f(i\sqrt{3})$.

55. $$\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\frac{3}{2} + \sin x + \cos x} \ .$$

56. De functie f is overal holomorf met uitzondering van

a) een tweede orde pool in $z = 1$, met residu 1;

b) een eerste orde pool in $z = 2$, met residu 2.

Bepaal f als verder nog gegeven is

c) $f(0) = 3$;

d) $\lim_{z\to\infty} f(z) = 6$.

57. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\cos x}{x^4 + 4}\, dx \ .$$

58. Van $f(z)$ is gegeven:

1) $\text{Re } f(z) = e^x(x \cos y - y \sin y), (z = x + iy)$;

2) $f(\pi i) = 0$.

Bepaal $f(x + iy)$.

59. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\log \cos z}{z^5}\, dz$. (Bewijs eerst dat $\cos z$ voor $|z| \le 1$ geen waarden op de negatieve reële as aanneemt; toon bijv. aan dat $|\cos z - 1| < \frac{2}{3}$ als $|z| \le 1$.)

60. Bepaal Re en Im van $\log(\sqrt[3]{i^3} + 2i)$ (hoofdwaarden!).

61. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{(\bar{z})^3}{z - a}\, dz$.

62. Toon aan dat bij de Moebius transformatie $w = \frac{z - a}{1 - z\bar{a}}$, $0 < |a| < 1$, cirkel $|z| = 1$ overgaat in cirkel $|w| = 1$; rechte $z = \lambda a$ overgaat in rechte $w = \mu a$, λ, μ reëel; punten $z = \frac{a}{|a|}$, $-\frac{a}{|a|}$ overgaan in $w = \frac{a}{|a|}$, $-\frac{a}{|a|}$.

63. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z + 1}{z(e^z - 1)}\, dz$.

64. Gegeven $f(z) = C \arctan \frac{x}{y} + i \log(x^2 + y^2)$, $z = x + iy$, $y > 0$.
Bestaat er een reële constante C zó dat f(z) analytisch is in $z = i$? Zo ja, bepaal dan f(z).

65. $\displaystyle\int_{|z|=1} z^{-\frac{1}{2}} \log z\, dz$, waarbij $|z| = 1$ vanaf -1 positief wordt doorlopen.

66. De functie f is holomorf met uitzondering van

a) een tweede orde pool in $z = 0$, met residu 1;

b) een eerste orde pool in $z = 1$.

Bepaal f als verder gegeven is:

c) $f(2) = 0$;

d) $\lim_{z\to\infty} f(z) = 3$;

e) $\text{Res}_\infty f(z) = 1$.

67. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\varphi}{3 - \cos \varphi}\, d\varphi$.

68. Bepaal de Moebius transformatie die 0,1,-i afbeeldt op 0,2i,-2. Ga na dat de beelden van 1^e en 2^e kwadrant liggen binnen $|w - i| = 1$, van 2^e en 3^e kwadrant binnen $|w + 1| = 1$. (Schets deze cirkels en de daarop gelegen beelden van $\frac{1}{2}$,-1 resp. van $-\frac{1}{2}i$ en i.)

69. $\displaystyle\int_K \frac{dz}{(z - 1)^2}$, waarbij de integratieweg K loopt van -i naar 2 + i.

70. Ontwikkel $\dfrac{1}{(z + 4)^2} + \dfrac{1}{(z - 7)^3}$ in een Laurentreeks om z = -8 die convergeert voor z = 0.

71. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{\sin^3 z}$.

72. Twee reeksen definiëren, elk in zijn convergentiegebied, f_1 resp. f_2:

$$f_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-2-2k}, \quad f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z - i)^{k-1}}{(2i)^{k+1}} .$$

a) Bepaal het definitiegebied G_1 van f_1 resp. G_2 van f_2.
b) Toon aan dat f_1 en f_2 elkaars analytische voortzetting zijn.
c) Ga na in hoeverre f_1 resp. f_2 een analytische voortzetting is van (arctan z)'.

73. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5 - 3 \sin \varphi)^2}$.

74. Bepaal reële a en b zó dat (met hoofdwaarde gerekend) $\log[(-1)^{4/3}(-8)^{4/3} - 16] = a + bi$.

75. $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z\, dz}{\log^3(z + 1)}$.

76. Ontwikkel de functie $f(z) = \dfrac{2z-3}{z^2-3z-4}$ in een Laurentreeks om $z = -2$ die convergeert in $z = i$.

77. Bepaal $\displaystyle\int_K \frac{dz}{1+z^2}$ waarbij K voorstelt de halve cirkel van $-\sqrt{3}$ over $i\sqrt{3}$ naar $\sqrt{3}$.

78. Geef een voorbeeld van een functie f die aan de volgende eisen voldoet:

a) f heeft in $z = 0$ een essentiële singulariteit,
b) f heeft een pool van de tweede orde in $z = 2$,
c) f heeft een pool van de eerste orde in $z = 1$;
d) f is in de overige punten van het z-vlak holomorf,
e) f heeft in $z = \infty$ een drievoudig nulpunt.

79. Zij C de cirkel met middelpunt 0 en straal $\frac{1}{2}$. Bepaal

$$\int_C \frac{e^{-1/z}}{(z-1)(z^2-1)}\, dz .$$

80. Bepaal het maximum van $\operatorname{Re} z^2$ op $|z-i| \le 1$.
Geef ook aan in welke punten het maximum wordt bereikt.

81. Bepaal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2+2x+2}\, dx .$$

82. Ontwikkel $\dfrac{\pi^2}{z^2-\pi z} + \sin z$ in een Laurentreeks rond $\frac{\pi}{2}$, die voor $\operatorname{Re} z < 0$ convergeert.

83. Bereken

$$\int_{-i}^{-1+i} \frac{dz}{z}$$

waarbij de integratieweg recht wordt genomen.

84. Geef het positieve deel en de eerste drie termen van het negatieve deel van de Laurentreeks van $e^{1/z}$ rond $z = 1$, die convergeert voor $\operatorname{Re} z < 0$.

85. Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2} .$$

86. a) Toon aan dat in een omgeving van 0 geldt

$$\frac{i}{2}\log(1+2z) = \arctan\frac{iz}{z+1} \quad . \qquad (*)$$

b) In welk gebied is $\frac{i}{2}\log(1+2z)$ analytisch? Geef de definitie.
In welk gebied is $\arctan\frac{iz}{z+1}$ gedefinieerd? Geef de definitie.
In welk gebied geldt (*)?

87. Bereken

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z+1}\sin\frac{z}{z+1}\,dz \ .$$

88. Bepaal de functie f met de volgende eigenschappen:

a) f is regulier in ∞;

b) f heeft twee singulariteiten, nl.

1) een pool van de orde 2 in $z = 0$, met residu 0,

2) een singulariteit in $z = 1$, zodanig dat

$$\lim_{z\to 1} f(z)\sin \pi z = 8\pi \ ;$$

c) f heeft in $z = -1$ een nulpunt met multipliciteit 2.

89. Bereken

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^3\cos z} \ .$$

90. Bepaal het residu in $z = \pi$ van

$$\frac{\log z}{\sin^2 z + (z-\pi)^3} \ .$$

91. Bereken

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+1}\,dz \ .$$

92. Bepaal de convergentiestraal van de Taylorontwikkeling rond 0 van

$$\frac{1}{\cosh(z+\pi)} \ .$$

93. Bereken

$$\int_0^\infty \frac{x\sin 2x}{1+x^2}\,dx \ .$$

94. Bereken

$$\log[(-i)^3 + (i)^{1/3}] \ .$$

95. Bereken

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(2z-\pi)\cos z} \ .$$

96. Bepaal de functie f met de volgende eigenschappen:

a) $\lim_{z\to\infty} f(z) = 5$;

b) f heeft 2 singulariteiten, nl.:

1) een pool van de orde 2 in $z = 1$;

2) een pool van de orde 1 in $z = -1$, met residu -2;

c) f heeft in $z = 0$ een nulpunt met multipliciteit 2.

97. Bereken $\int_C \frac{\log^2 z}{z} dz$, waarbij C de eenheidscirkel voorstelt, positief doorlopen van -1 naar -1.

98. Ontwikkel de functie $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$ in een Laurentreeks rond $z = 1$, die convergeert voor $z = -\frac{1}{2}$.

99. Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + i \sin x} \ .$$

100. Bepaal de functie $f(z)$ met de volgende eigenschappen:

a) de enige singulariteit is een pool van de orde 3 in $z = 0$ met residu 0;

b) $f(z)$ heeft nulpunten in 1 en ∞;

c) $\int_{-i}^{i} f(z)dz = 2\pi i$.

Antwoorden

1. $2\pi i[\frac{-3i}{(-3)^2 2i} - \frac{1}{(-3)(-4)}] = -\frac{1}{2}\pi i$.

2. Differentieer en beschouw $f'(z)$ in de omgeving van i.
   $R = 2$.

3. 1^e 0; 2^e $4\pi i$.

4. $\frac{-i/2}{z+1-i} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\{\frac{i}{2}(z+1-i)\}^n$.

5. $\frac{5\pi}{12}$.

6. Ja, nl. door dezelfde formule voor $|z| \leq 1$, aangevuld met $f(0) = -i\pi$,
   $f(\pm 1) = \pm 2 - \frac{i\pi}{2}$.

7. 14π .

8. $\frac{1}{4}\sqrt{21}$.

9. $\frac{8}{3}\pi$ ($= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\frac{dy}{1\frac{1}{4} + \sin y} = \int_0^{2\pi}\frac{dy}{1\frac{1}{4} + \sin y}$, veel makkelijker).

10. 0. Géén pool, maar ophefbare singulariteit: $f(1) = -1$.

11. $-\frac{4}{3}i$.

12. $\frac{\pi}{4} + \frac{i}{4}\log 3$ ($=$ arctan $1 + \frac{i}{2}\int_0^{\pi/6}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$) .

13. $\pi\sqrt{2}$.

14. 4π, $\frac{3}{2}\pi$.

15. $7\pi/50$.

16. $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\cos|z| - 1}{z}$ bestaat (= 0). Max $\cos|z|$ op domein D rond 0 wordt bereikt in 0, niet op rand van D.

17. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} \cos \frac{1}{2}$.

18. a) In $z = -1$ resp. ∞: $2 \sin 2$, $-2 \sin 2$; b) In $z = 2$ resp. ∞: $-\frac{143}{24}$, $\frac{143}{24}$.

19. $2\pi i\left(\frac{\log 2}{2\pi} + \frac{\log\sqrt{5} + i \arctan\frac{1}{2}}{2\pi} + \frac{\log\sqrt{5} - i\arctan\frac{1}{2}}{2\pi}\right) = i \log 10$.

20. 0, $\sqrt{k\pi}(1 \pm i)$, $-\sqrt{k\pi}(1 \pm i)$, $k = 1,2,\ldots$.

21. $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$.

22. $-7/45$.

23. $2\pi \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2}$.

24. $\frac{-1}{3} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n+1}} - \frac{1}{12} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^n}$.

25. $\frac{2\pi}{3}$ (makkelijker met $\tan\varphi = t$).

26. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+1)^{2n}}{(2n+1)!} \cos 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+1)^{2n-1}}{(2n)!} \sin 1$.

Het hoofddeel is $-\frac{\sin 1}{z+1}$. De reeks der positieve machten convergeert overal.

27. $2\pi i - 8i$.

28. $f(z) = \frac{4(z+1)(z-1)^2}{z(z-2)^2} = 4 + \frac{1}{z} + \frac{11}{z-2} + \frac{6}{(z-2)^2}$.

29. $\frac{\pi}{120}$.

30. e .

31. $\frac{\pi}{3}$.

32. $c_{-1} = 3$; $c_0 = -\frac{1}{2}$; $c_1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}$. (Integreren in ring.)

33. 0.

34. $\sqrt{13}$.

35. $2\pi i(1 - e^{1/4})$.

36. $\frac{-2}{z-1} + \frac{2}{z^2} - 3$.

37. $\pi i e^{-1}$.

38. $G = \{z \mid |z| > 3\}$; $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+3}$ met Laurentreeks $\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{-1}{3})^{n+1} z^n$,

convergeert voor $z = 2$.

39. $\frac{\pi i}{3} - \frac{4i}{\pi}$.

40. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $R = \infty$; $g(z) = f(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$; $a_n = 0$ voor $n \geq 3$.

41. $\operatorname{Res}_{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos w} = -\operatorname{Res}_{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\cos w}$. Integratie langs elke gesloten contour in het aangegeven gebied (dus niet door snede) geeft 0. De integrand is er overal continu. Stelling: functie analytisch.

42. 0, 1 en −1 zijn ophefbare singulariteiten.
$\pm 2, \pm 3, \ldots$ zijn polen van de eerste orde.
R = 2.

43. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix-3a}}{(x+ia)^2}\, dx = 0$ voor $a > 0$, $= -6\pi$ voor $a < 0$.

44. $-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2+i}{5}\right)^{n+1} (z-1-i)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} (z-1-i)^{-n}$.

45. $-\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{it}}{(t^2+1)^2}\, dt = -2\pi i \left\{\frac{te^{it}}{(t+i)^2}\right\}'_{t=i} = -\frac{\pi i}{2e}$.

46. cos 1 + i sin 1 resp. cos 1 − i sin 1.

47. $-\frac{1}{2}\pi i.\left[\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z+\bar{z}}{2z+1}\, dz = \int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z(2z+1)}\, dz.\right]$

48. $f_1(z)$ is gedefinieerd in $|z| < 1$; $f_1(x) = \log 2 - \log(1+x)$.
$f_2(z)$ is gedefinieerd als $\left|\frac{1-z}{1+z}\right| < 1$, d.i. in het rechterhalfvlak; voor $x > 0$ vinden we: $f_2(x) = \log\left(1 + \frac{1-x}{1+x}\right) = \log 2 - \log(1+x)$. In beide definitiegebieden ligt bijv. $z_0 = \frac{1}{2}$; dus - identiteitsstelling: $f_1(z) = f_2(z)$ in doorsneegebied; dus elkaars analytische voortzetting.

49. $\frac{\pi}{4}(1+i)(e^{-2+2i}+1)$. [$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ix}}{x^2-2i}\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-2i}\,dx$.]

50. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z}{2})^n$.

51. $-2\pi i$. [$N-P=1-2$.]

52. -2. [$\mathrm{Res}_0\,\frac{5-\sin\varphi}{1-\cos\varphi}=\mathrm{Res}_0\,\frac{5-\varphi+\ldots}{\frac{1}{2}\varphi^2-\frac{1}{24}\varphi^4+\ldots}$.]

53. $\frac{\pi}{3}(e^{-2}+e^{-1})$.

54. $\frac{\pi i}{3}$. [$\int_0^{i\sqrt{3}}\frac{dt}{1-t^2}=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{i\,du}{1+u^2}$.]

55. 4π. [$2\pi i\,\mathrm{Res}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}\,\frac{2}{(1+i)(z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)(z+1+i)}$.]

56. $-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{z-1}+\frac{2}{z-2}+6$.

57. $\frac{\pi}{4}e^{-4}+\frac{\pi}{4}$. [$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+4}\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}$.]

58. $e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(x\sin y+y\cos y)+\pi i(=ze^z+\pi i)$.

59. $-\frac{1}{6}\pi i$. [$\log(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\ldots)=-\frac{1}{2}z^2+(\frac{1}{24}-\frac{1}{8})z^4+\ldots$.]

60. $\frac{1}{2}\log 3,\ \frac{\pi}{3}$.

61. 0 als $|a| < 2$; $-\frac{128}{a^3}\pi i$ als $|a| > 2$.

62. $\left|\frac{e^{i\varphi} - a}{1-e^{i\varphi}.\bar{a}}\right| = \left|\frac{e^{i\varphi} - a}{e^{-i\varphi} - \bar{a}}\right|$; $\frac{\lambda a - a}{1 - \lambda a\bar{a}} = \frac{\lambda - 1}{1 - \lambda|a|^2}$ a; op cirkel èn rechte.

63. πi. $[\frac{z + 1}{z(e^z - 1)} = \frac{1}{z^2}(1 + z)(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \ldots)^{-1} = \frac{1}{z^2}(1 + \frac{1}{2}z + \ldots).]$

64. $C = 2$; $2 \arctan \frac{x}{y} + i \log(x^2 + y^2) = 2i \log z + \pi$.

65. $-8i$. $[-\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{1}{2}\varphi i}\varphi d\varphi.]$

66. $-\frac{6}{z^2} + \frac{1}{z} - \frac{2}{z - 1} + 3$.

67. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}(3 - 2\sqrt{2})^3$. $[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi}{3 - \cos \varphi} d\varphi.]$

68. $w = \frac{(-1 + i)z}{z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$; $|w - i|^2 = \frac{(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2}{(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2} \leq 1$ als $y \geq 0$.

69. $-1 + i$. $[-\frac{1}{z - 1}\Big|_{-i}^{2i+1}.]$

70. $4^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-2}{n} (\frac{4}{z + 2})^{n+2} - 15^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-3}{n} (\frac{z + 8}{15})^n =$

$4^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)(\frac{4}{z + 2})^{n+2} - 15^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} (\frac{z + 8}{15})^n$.

71. πi. $[2\pi i \frac{1}{2!} \{(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} \ldots)^{-3}\}''_{z=0}.]$

72. $G_1 = \{z \mid |z| > 1\}$, $G_2 = \{z \mid |z-i| < 2\}$, $G_1 \cap G_2$ bevat bijv. $1+i$.
In $G_1 \cap G_2$ geldt $f_1(z) = f_2(z)$ (beide nl. $= \frac{1}{1+z^2}$); dus elkaars analytische voortzetting.
arctan z is niet gedefinieerd langs de imaginaire as buiten $|z| = 1$;
(arctan z)' dus ook niet; daar is $f_1(z)$ dus een analytische voortzetting van (arctan z)'; $f_2(z)$ is dat alleen tussen i en 3i.

73. $\frac{5\pi}{32}$. $[\int_{|z|=1} \frac{4iz\,dz}{9(z-3i)^2(z-\frac{1}{3}i)^2} = \frac{-8\pi}{9} \cdot \frac{1}{1!} \{\frac{z}{(z-3i)^2}\}'_{z=\frac{1}{3}i}.]$

74. $\log(16\sqrt{3}) + \frac{5}{6}\pi i$.

75. $3\pi i$. $[\mathrm{Res}_0 = \frac{1}{1!}\{(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \ldots)^{-3}\}'_{z=0}.]$

76. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+2)^{n+1}} - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z+2}{6})^n$.

77. $-\frac{\pi}{3}$. $[-2\pi i\ \mathrm{Res}_i \frac{1}{1+z^2} + \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}]$.

78. $e^{1/z} + \frac{\frac{1}{2}}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-1} - 1$; $\frac{\cos(1/z)}{(z-2)^2(z-1)}$.

79. $-\frac{1}{2}\pi i(e^{-1} + e)$. $[\mathrm{Res}_1 = \frac{1}{1!}(\frac{e^{-1/z}}{z+1})'_{z=1} = \frac{e^{-1}}{4}$, $\mathrm{Res}_{-1} = \frac{e}{4}]$.

80. $\frac{1}{2}$, in de punten $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$.

81. $\frac{\pi}{e}(\cos 1 - \sin 1)$ [Im + Re van $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x+1)^2+1}\,dx]$.

82. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+2}}{2^{2n}(z-\frac{1}{2}\pi)^{2n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(z-\frac{1}{2}\pi)^{2n}}{(2n)!}$.

83. $\frac{1}{2}\log 2 - \frac{3}{4}\pi i$. $[-2\pi i + \log(-1+i) - \log(-i)]$.

84. $1 + \frac{1}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2} + \frac{1/6}{(z-1)^3}$. $[e^{\frac{1}{1+w}} = e^{w^{-1}}.e^{w^{-2}}.e^{w^{-3}}\ldots$ of $= 1 + (\frac{1/w}{1+1/w}) + \frac{1}{2!}(\ )^2 +]$.

85. $\frac{5\pi}{144}$. $\quad[\mathrm{Res}_i = \frac{-i}{18}$, $\mathrm{Res}_{2i} = \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z+2i)^2}\right)'_{z=2i} = \frac{11i}{288}]$.

86. a) Linker- en rechterlid hebben dezelfde afgeleide en zijn gelijk bij $z = 0$.
b) $\frac{i}{2}\log(1 + 2z)$ is overal analytisch behalve op de snede $-\infty < x \leq -\frac{1}{2}$, $y = 0$, $\arctan\frac{iz}{z+1}$ dito; (*) geldt dus overal behalve op die snede.

87. $2\pi i \sin 1$. $\quad[\sin\frac{z}{z+1} = \sin 1 \cos\frac{1}{z+1} - \cos 1 \sin\frac{1}{z+1}]$.

88. $-\frac{1}{z^2} - \frac{8}{z-1} - 3 = \frac{(1-3z)(z+1)^2}{z^2(z-1)}$. $\quad[\lim\limits_{z\to 1} f(z)\sin\pi z =$

$= \lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z)\frac{\sin(\pi-\pi z)}{z-1} = -\pi\,\mathrm{Res}_1 f(z)]$.

89. $\pi i - \frac{32i}{\pi^2}$. $\quad[2\pi i\{\mathrm{Res}_0 z^{-3}(1+\frac{1}{2}z^2+\ldots) + \mathrm{Res}_{\frac{1}{2}\pi} + \mathrm{Res}_{-\frac{1}{2}\pi}\}]$.

90. $\frac{1}{\pi} - \log\pi$. $\quad[\frac{\log(\pi+w)}{\sin^2 w + w^3} = \frac{1}{w^2}\,\frac{\log\pi + \pi^{-1}(w-\ldots)}{(1-\frac{w^2}{6}+\ldots)^2 + w}]$.

91. $\pi i(e - e^{-1})$.

92. $\frac{\pi}{2}\sqrt{5}$. [afstand tot dichtsbijzijnde singulariteit].

93. $\frac{1}{2}\pi e^{-2}$. $\quad[= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{2ix}}{1+x^2}\,dx]$.

94. $\frac{1}{2}\log 3 + \frac{\pi}{3}i$.

95. $-i$. $\quad[\mathrm{Res}_{\frac{1}{2}\pi} = 0$, $\mathrm{Res}_{-\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{-2\pi}\cdot\frac{1}{-\sin(-\frac{1}{2}\pi)}]$.

96. $\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{4}{z-1} - \frac{2}{z+1} + 5 = \frac{5z^3 - 3z^2}{(z-1)^2(z+1)}$.

97. $-\frac{2}{3}i\pi^3$. $\quad[\int_{-\pi}^{\pi}(i\varphi)^2 e^{-i\varphi}.ie^{i\varphi}d\varphi]$.

98. $\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(z-1)^{-n} - \frac{1}{6}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n(z-1)^n$.

99. $\pi\sqrt{2}$.

100. $-\frac{\pi}{z^3} + \frac{\pi}{z^2}$.

Uitgewerkte opgaven

A. Beschouw $\int_K e^{-z^2}\,dz$. Hierin is K de in positieve zin doorlopen gesloten kromme in het z-vlak, bestaande uit de volgende delen:

a) $z = x \qquad 0 \le x \le R$

b) $z = Re^{i\varphi} \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

c) $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,x \qquad R \ge x \ge 0$.

Bewijs nu

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{\pi}{2}} .$$

Bewijs: K is de omtrek van een cirkelsector met openingshoek $\frac{\pi}{4}$. e^{-z^2} is overal holomorf, dus de integraal over K is nul (hoofdstelling). Wat gebeurt er nu als $R \to \infty$?

a) $$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad \text{(zie Wiskunde 20)} .$$

c) $$\int_{x=R}^{0} e^{-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}x\right)^2} \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,dx = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-ix^2} dx =$$

$$= -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R (\cos x^2 - i \sin x^2) dx .$$

De limiet wordt

$$-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^\infty (\cos x^2 - i \sin x^2) dx .$$

b) We hopen dat de integraal over de cirkelboog naar nul gaat. Dit is niet zonder meer met de schattingsstelling te argumenteren: Integratielengte = $\frac{\pi R}{4}$, $\text{Max}\{|e^{-z^2}|\} = \text{Max}\{e^{-R^2\cos 2\varphi}\} = 1$ (wordt bereikt op de bissectrice van het eerste quadrant) dus op de cirkelboog geldt $\text{Max}|f(z)| \cdot \frac{\pi R}{4} = \frac{\pi R}{4} \not\to 0$ $(R \to \infty)$. We doen daarom voorzichtiger en passen parametrisering in φ toe: Dit geeft (ga na!)

$$\left| \int_{\varphi=0}^{\pi/4} e^{-R^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i \sin\varphi \cos\varphi)} Rie^{i\varphi} d\varphi \right| \le$$

$$\le R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\varphi} d\varphi = (2\varphi = \theta) =$$

$$= \tfrac{1}{2}R \int_0^{\pi/2} e^{-R^2\cos\theta} d\theta = \tfrac{1}{2}R \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \sin\theta} d\theta \le$$

$$\le \tfrac{1}{2}R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}R^2\theta} d\theta = -\frac{\pi}{4R} e^{-\frac{2}{\pi}R^2\theta}\Big|_0^{\pi/2} \le \frac{\pi}{4R} \to 0 \quad \text{als } R \to \infty .$$

Dus de integraal langs de cirkelboog nadert inderdaad tot nul als $R \to \infty$. Samenvattend vinden we door de limietovergang

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{1+i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty (\cos x^2 - i \sin x^2) dx = 0 .$$

Neem nu reëel en imaginair gedeelte. Hieruit volgt

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} .$$

B. Bereken $A = \int_0^{2\pi} (\sin t)^{2n} dt$ met contourintegratie.

Oplossing: Stel $z = e^{it} \rightarrow |z| = 1$ positief doorlopen;
gevolg:

$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$$

$$dz = ie^{it}dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}.$$

$$A = \int_{|z|=1} \left(\frac{1}{2i}\right)^{2n}(z - z^{-1})^{2n}\frac{dz}{iz} = (\text{Binomium}) =$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \int_{|z|=1} \sum_{k=0}^{2n} z^{2n-k}\binom{2n}{k}(-1)^k(z^{-1})^k \frac{dz}{iz} =$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{i} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}(-1)^k \int_{|z|=1} z^{2n-2k-1}dz.$$

Alleen $\frac{1}{z}$ levert bij integratie over $|z| = 1$ een bijdrage $\neq 0$ nl. $2\pi i$. Dit correspondeert met $k = n$, dus

$$A = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{i}\binom{2n}{n}(-1)^n 2\pi i = \frac{2\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} 2\pi.$$

C. Bereken $\int_{|z|=2} \frac{z^{11}dz}{z^8 + z^4 + 1}$.

Oplossing: De integrand is te schrijven als

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{z^{12}}{z^8 + z^4 + 1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^{12} - 1}{z^8 + z^4 + 1} + \frac{1}{z(z^8 + z^4 + 1)} =$$

$$= \frac{1}{z} \cdot (z^4 - 1) + \frac{1}{z(z^8 + z^4 + 1)} =$$

$$= z^3 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z(z^8 + z^4 + 1)}.$$

De integraal bestaat uit drie termen, verkregen door integratie van de laatste uitdrukking: twee zijn er direct te zien:

$$\int_{|z|=2} z^3 dz = 0 \,, \qquad \int_{|z|=2} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \,.$$

Omdat $\dfrac{1}{z(z^8 + z^4 + 1)}$ alleen singulariteiten heeft voor $|z| \le 1$ geldt

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z(z^8 + z^4 + 1)} = \int_{|z|=R\ge 2} \frac{dz}{z(z^8 + z^4 + 1)} \quad \text{(kanaalmethode).}$$

Met schatting:

$$\left| \int_{|z|=R\ge 2} \frac{dz}{z(z^8 + z^4 + 1)} \right| \le 2\pi R \frac{1}{R(R^8 - R^4 - 1)} \to 0$$

als $R \to \infty$. De derde integraal is dus nul en het antwoord van de opgave luidt: $-2\pi i$.

D. Beschouw de functie f, gedefinieerd door

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left(e^{iz} - 1 - iz + \tfrac{1}{2}z^2\right) \,.$$

a) Bepaal plaats en aard der singulariteiten van f.
Laat zien dat

$$\int_K f(z) dz = 0 \,,$$

waarbij K de contour is bestaande uit het stuk reële as van $-R$ tot $+R$ en de halve cirkel in het bovenvlak met middelpunt 0 en straal R.

b) Leid met behulp van het resultaat uit a) af dat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3}(\sin x - x) dx = -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Oplossing:

a) Ophefbare singulariteit in 0 (Taylor-ontwikkeling).

Hoofdstelling.

b) $\frac{1}{x^3}$ (sin x - x) is een continue functie, en = $\mathcal{O}(\frac{1}{x^2})$ als $x \to \pm\infty$, dus de integraal bestaat.

$$0 = \int_K f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\substack{|z|=R \\ \mathrm{Im}\, z\geq 0}} f(z)dz =$$

$$= i\int_{-R}^{R} \frac{\sin x - x}{x^3} dx + \int_{\substack{|z|=R \\ \mathrm{Im}\, z\geq 0}} \frac{1}{2z} dz + \int_{\substack{|z|=R \\ \mathrm{Im}\, z\geq 0}} \frac{e^{iz} - 1 - iz}{z^3} dz .$$

De eerste integraal nadert tot:

$$i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x - x}{x^3} dx .$$

De tweede integraal heeft de waarde $\frac{1}{2}\pi i$. De laatste (in absolute waarde gemajoreerd door $\frac{2 + R}{R^3} . \pi R) \to 0$ $(R \to \infty)$. Dus na limietovergang vinden we

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x - x}{x^3} dx + \frac{1}{2}\pi = 0 .$$

E. a) Laat zien dat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{2 + e^{ix}} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2e + 1} .$$

b) Bereken met behulp van het in a) gegeven resultaat de integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\cos x + 1}{5 + 4\cos x} \frac{dx}{x^2 + 1} .$$

Oplossing:

a) De functie $\dfrac{e^{iz}}{(2+e^{iz})(z^2+1)}$ heeft op en boven de reële as slechts een enkelvoudige pool in $z = i$ met residu $\dfrac{e^{-1}}{(2+e^{-1})2i} = \dfrac{1}{2i(2e+1)}$, en is verder analytisch op $\{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Ga dit na!

Voor $|z| = R > 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ is

$$\left|\frac{e^{iz}}{2+e^{iz}} \cdot \frac{1}{z^2+1}\right| \leq \frac{1}{(2-1)(R^2-1)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad (R \to \infty) .$$

Dus bestaat de gevraagde integraal, en is

$$\left|\int_{\substack{|z|=R>1 \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} \frac{e^{iz}dz}{(2+e^{iz})(z^2+1)}\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0 .$$

Volgens de residustelling is nu na limietovergang

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{2+e^{ix}} \frac{dx}{x^2+1} = 2\pi i \frac{1}{2i(2e+1)} .$$

b) Zelfde antwoord:

$$\left[\frac{e^{ix}}{2+e^{ix}} = \frac{e^{ix}(2+e^{-ix})}{(2+e^{ix})(2+e^{-ix})} = \frac{2e^{ix}+1}{5+4\cos x} = \right.$$

$$\left. = \frac{2\cos x + 1}{5+4\cos x} + 2i \frac{\sin x}{5+4\cos x}\right] .$$

F. Zij C_R de cirkel met middelpunt 0 en straal R.
Zij

$$I(R) = \int_{C_R} \frac{\sin\frac{\pi}{z}}{(1+z)^2} dz .$$

a) Bereken $I(R)$ voor $R > 1$.

b) Bepaal hieruit $I(R)$ voor $R < 1$.

Oplossing:

a) De integrand heeft als singulariteiten $z = 0$ (essentieel) en $z = -1$ (pool). Dus (kanaalmethode) $I(R)$ is constant voor $R > 1$. Mogelijk kunnen we $\lim_{R\to\infty} I(R)$ uitrekenen, waarmee tevens het antwoord op a) is verkregen.
We proberen een indruk van de orde van grootte van de integrand te krijgen als $|z| = R \to \infty$. $\sin w = w - \frac{w^3}{3!} + \ldots$ lijkt op w als $w \to 0$. Dus $\sin \frac{\pi}{z}$ lijkt op $\frac{\pi}{z}$ als $|z| \to \infty$. Dus de orde van grootte van de integrand is $\frac{1}{R^3}$ $(R \to \infty)$. De integratieweg heeft lengte $2\pi R$ dus we verwachten $\lim_{R\to\infty} I(R) = 0$.
Nu exact. Omdat $\sin \frac{\pi}{z} / \frac{\pi}{z} \to 1$ als $|z| \to \infty$ bestaat er een R_0 zó dat

$$\left|\sin \frac{\pi}{z}\right| \le 2\left|\frac{\pi}{z}\right| = \frac{2\pi}{R} \quad \text{als } |z| = R > R_0 .$$

$$|z + 1|^2 \ge \{|z| - 1\}^2 = (R - 1)^2 \quad \text{als } |z| = R > 1 ,$$

dus

$$|I(R)| \le 2\pi R \frac{2\pi/R}{(R - 1)^2} \to 0 \quad \text{als } R \to \infty .$$

Conclusie: $I(R) = 0$ voor alle $R > 1$.

b) $$-I(R)_{0<R<1} + I(R)_{R>1} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{\sin \frac{\pi}{z}}{(z + 1)^2}$$

volgens de residustelling met de kanaalmethode.
Dus met a):

$$I(R)_{0<R<1} = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{\sin \frac{\pi}{z}}{(z + 1)^2} .$$

Op het eerste gezicht lijkt de pool in $z = -1$ tweevoudig. Maar de teller $\sin \frac{\pi}{z}$ heeft een enkelvoudig nulpunt, dus de pool is in feite enkelvoudig!

Ergo:

$$\text{Residu} = \lim_{z \to -1} \frac{\sin \frac{\pi}{z}}{(z + 1)^2} (z + 1) =$$

$$= \lim_{z \to -1} \frac{\sin \frac{\pi}{z}}{z + 1} = \lim_{z \to -1} \frac{\sin \frac{\pi}{z} - \sin \frac{\pi}{-1}}{z - (-1)} =$$

$$= (\sin \tfrac{\pi}{z})'_{z=-1} = [\cos \tfrac{\pi}{z}(- \tfrac{\pi}{z^2})]_{z=-1} = \pi .$$

$$\therefore I(R)_{0<R<1} = -2\pi^2 i .$$

Opmerking: We kunnen ook op $I(R)$ de transformatie $z = \frac{1}{w}$ toepassen. Let op: Als $|z| = R > 1$ positief doorlopen wordt geldt: $|w| = \frac{1}{R} < 1$ negatief doorlopen, dus

$$\int_{|z|=R(pos)} \frac{\sin \frac{\pi}{z}}{(z + 1)^2} dz = \int_{|w|=\frac{1}{R}(neg)} \frac{\sin \pi w}{(\frac{1}{w} + 1)^2} \cdot - \frac{dw}{w^2} =$$

$$= \int_{|w|=\frac{1}{R}(pos)} \frac{\sin \pi w}{(1 + w)^2} dw \begin{cases} = 0 \text{ volgens hoofdstelling als } R > 1 \\ = 2\pi i \operatorname{Res}_{w=-1} \dfrac{\sin \pi w}{(1+w)^2} \text{ als } R < 1 . \end{cases}$$

G. De enige begrensde gehele functies zijn de constanten. (Stelling van Liouville, zie dictaat bij reeksen.)

Bewijs: Voor een gehele functie $f(z)$ vindt men voor willekeurige a en b

$$2\pi i(f(a) - f(b)) = \int_K \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - a} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - b}\right) d\zeta = \int_K \frac{(a - b)f(\zeta)}{(\zeta - a)(\zeta - b)} d\zeta ,$$

waarin K bijv. een cirkel om $\frac{1}{2}(a + b)$ is met straal $R > \frac{1}{2}|a - b|$. Als $f(z)$ begrensd is, $|f(z)| < M$, dan volgt

$$|f(a) - f(b)| \le R \frac{|a-b|M}{(R - \frac{1}{2}|a-b|)^2} \to 0 \quad \text{als } R \to \infty .$$

Dus $f(a) = f(b)$, d.w.z. $f(z)$ is constant.

H. Gegeven: $f(z)$ is een gehele functie van z; $|f(z)| \le |z|$ voor alle z.
Te bewijzen: $f(z) = az$ met $|a| \le 1$.

Bewijs: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ convergent voor alle z ($R = \infty$).

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = c_0 \\ |f(0)| \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_0 = 0 ,$$

derhalve $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ convergent voor alle z ($R = \infty$).
Definieer nu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} z^n = g(z) \quad (= \frac{f(z)}{z} \text{ voor } z \ne 0) \quad (R = \infty) .$$

$g(z)$ is ook een gehele functie, en begrensd voor alle z (voor $z \ne 0$ geldt $|g(z)| = |\frac{f(z)}{z}| \le 1$, voor $z = 0$ geldt $|g(0)| = |c_1|$, dus voor alle z is $|g(z)| \le \text{Max}\{1, |c_1|\}$). Volgens Liouville is derhalve $g(z) = a =$ constant dus $f(z) = az$. Het gegeven impliceert $|a| \le 1$.

I. Bewijs, voor $z \ne 0$

$$\exp(z^2 + \frac{1}{z^2}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

waarbij

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2 \cos 2\varphi} \cos n\varphi \, d\varphi .$$

<u>Oplossing</u>: $\exp(z^2 + \frac{1}{z^2})$ heeft singulariteiten in $z = 0$, $z = \infty$. Voor de Laurentcoëfficiënten geldt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\exp(z^2 + \frac{1}{z^2})}{z^{n+1}} dz \qquad (n = \ldots,-1,0,1,\ldots)$$

waarbij K de singulariteit $z = 0$ positief omsluit. Neem voor K de eenheidscirkel: $z = e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ en werk de integraal om:

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi} = 2\cos 2\varphi$$

$$dz = ie^{i\varphi}d\varphi$$

$$z^{-n-1} = e^{(-n-1)i\varphi} = e^{-i\varphi}(\cos n\varphi - i \sin n\varphi) ,$$

derhalve

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(2\cos 2\varphi) . (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) d\varphi .$$

Dit is de gevraagde vorm met als extra term:

$$-i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\cos 2\varphi} \sin n\varphi \, d\varphi = \text{(door periodiciteit } (2\pi))$$

$$= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{2\cos 2\varphi} \sin n\varphi \, d\varphi = 0 ,$$

omdat de integrand als oneven functie van φ over een t.o.v. $\varphi = 0$ symmetrisch interval wordt geïntegreerd.

J. Toon aan, door gebruik te maken van de formule

$$(*) \qquad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\, dt ,$$

waarin C een in positieve zin doorlopen enkelvoudige gesloten kromme rond $t = a$ is en f op en binnen C holomorf is, dat

$$\text{(a)} \qquad \left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{z^n e^{zt}}{n!\, t^{n+1}}\, dt$$

waarin K een in positieve zin doorlopen enkelvoudige gesloten kromme rond $t = 0$ is;

$$\text{(b)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2z\cos\varphi}\, d\varphi .$$

<u>Bewijs:</u>

(a) Gezien de integratie over t in (a) moet z een constante voorstellen. Stel daarom $a = 0$, $f(t) = e^{zt}$, dus $f^{(n)}(t) = z^n e^{zt}$, in het bijzonder dus $f^{(n)}(0) = z^n$. Invullen in (*) geeft

$$z^n = \frac{n!}{2\pi i} \int_K \frac{e^{zt}}{t^{n+1}}\, dt$$

waaruit (a) onmiddellijk volgt.

(b) Volgens (a) geldt

$$(**) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_K \frac{z^n e^{zt}}{n!\, t^{n+1}}\, dt .$$

Kies voor K de eenheidscirkel: $t = e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, dan is

$$(***) \qquad \int_K \frac{z^n e^{zt}}{n!\, t^{n+1}}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{z^n}{n!} \exp(ze^{i\varphi})\, i e^{-in\varphi}\, d\varphi .$$

Vooruitlopend op een verwisseling van integratie en sommatie in het substitutieresultaat van (***) in (**), nl.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{z^n}{n!} \exp(ze^{i\varphi})e^{-in\varphi}d\varphi$$

vinden we

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ze^{i\varphi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ze^{-i\varphi})^n}{n!} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ze^{i\varphi})\exp(ze^{-i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(2z \cos \varphi)d\varphi .$$

Het gevraagde is dus bewezen als de integratie-sommatieverwisseling geoorloofd is, dus als we kunnen aantonen dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \exp(ze^{i\varphi})e^{-in\varphi}$$

voor $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ uniform in φ convergeert (z constant!). Schatting geeft voor de n-de term

$$\left|\frac{z^n}{n!} \exp(ze^{i\varphi})e^{-in\varphi}\right| \leq \frac{|z|^n}{n!} \exp|z| \quad \text{(ga dit na!)}$$

waarbij $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \exp|z| = \exp 2|z|$ convergeert, en elke term uit de laatste reeks onafhankelijk van φ is. Derhalve uniforme convergentie volgens Weierstrass.

K. Gegeven: $f(z)$ kan voor $|z| > 1$ worden ontwikkeld in een Laurentreeks van de vorm

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n} .$$

$f(z)$ heeft nulpunten voor $z = 2,3,4,\ldots$.
Bepaal $f(z)$.

Oplossing: Noem $z = \frac{1}{w}$. Dus $|z| > 1 \Leftrightarrow 0 < |w| < 1$ en

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n \underset{def}{\equiv} g(w) .$$

$g(w)$ is dus voor $0 < |w| < 1$ ontwikkelbaar in een Laurentreeks, die een Taylorreeks blijkt te zijn. Ergo is $g(w)$ analytisch voor $0 < |w| < 1$ met een ophefbare singulariteit in $w = 0$.
$g(w)$ heeft nulpunten in $w = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, een puntrij die zich verdicht in $w = 0$ (een inwendig punt van het holomorfiegebied van g).
De functie $h(w) = 0$ (identiek) heeft dezelfde eigenschappen.
Conclusie: $g(w) \equiv 0$ voor $0 \leq |w| < 1$ volgens de identiteitsstelling. (Ga na!)
of: $f(z) = 0$ voor alle z ($|z| > 1$).

L. Zij $F(z) = \dfrac{2}{z(1 + z^2)}$.

a) Ontwikkel $F(z)$ in een Laurentreeks voor $|z| > 1$. We brengen een snede aan, rechtlijnig van i tot $-i$ en definiëren

$$G(z) = \int_1^z F(w)\,dw$$

onder vermijding van de snede met de integratieweg.

b) Toon aan dat $G(z)$ eenduidig is gedefinieerd en dat $G'(z) = F(z)$ (z niet op snede).

Oplossing:

a) $$F(z) = \frac{2}{z^3}\left(\frac{1}{\frac{1}{z^2} + 1}\right) = \quad \text{(meetkundige reeks)}$$

$$= \frac{2}{z^3}\left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} - \ldots\right) \quad \left(\frac{1}{|z|} < 1\right)$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-2k-3} \qquad (|z| > 1) .$$

b) $G(z)$ is eenduidig gedefinieerd, als de definiërende integraal voor $G(z)$ niet afhangt van de weg waarlangs we van 1 naar z integreren. Neem 2 wegen I en II:

$$\int_{1(I)}^{z} F(w)\,dw - \int_{1(II)}^{z} F(w)\,dw = \int_{W} F(w)\,dw ,$$

waarbij W de weg is via I heen, via II terug, d.w.z. een weg die een aantal keren de snede omsluit, waarop de singulariteiten $z_1 = 0$, $z_{2,3} = \pm i$ liggen. De som der residuen in deze punten is nul (ga na!) dus

$$\int_{W} F(w)\,dw = 0 \Rightarrow \int_{(I)} = \int_{(II)} .$$

Opmerking. We kunnen ook de weg W "opblazen" tot een cirkel om 0 met voldoende grote straal, enige malen doorlopen (kanaalmethode), en de integraal schatten. Doe dit zelf.
Volgens een stelling uit het dictaat is bij continue $f(w)$ de integraal

$$\int_{1}^{z} f(w)\,dw ,$$

mits onafhankelijk van de weg van integratie van 1 naar z een holomorfe functie $g(z)$ zo dat $g'(z) = f(z)$. Dus hier $G'(z) = F(z)$.

M. Beschouw $F(z) = \int_{\pi/2}^{z} \frac{d\zeta}{\sin \zeta}$, waarbij $0 < \mathrm{Re}\, z < \pi$, terwijl de integratieweg eveneens tussen de verticalen $x = 0$ en $x = \pi$ blijft (de sinusfunctie heeft uitsluitend reële nulpunten). Toon aan dat

1) $F(z)$ door deze definitie ondubbelzinnig bepaald is.
2) $F(z)$ de analytische voortzetting is van de op $0 < x < \pi$ bepaalde functie $\log \tan \frac{x}{2}$.
3) $F(\frac{\pi}{2} + iy) = 2i \arctan e^{y} - \frac{\pi i}{2}$ (y reëel) .

Oplossing:

1) De integrand is tussen de verticalen $x = 0$ en $x = \pi$ analytisch (de noemer is dat en wordt niet 0). Dus is de integraal onafhankelijk van de weg van $\frac{\pi}{2}$ naar z (hoofdstelling der complexe integratie). De definitie is dus ondubbelzinnig.

2) Op $0 < x < \pi$ geldt

$$\int_{\pi/2}^{x} \frac{d\zeta}{\sin\zeta} = \left[\log\tan\frac{\zeta}{2}\right]_{\zeta=\pi/2}^{\zeta=x} = \log\tan\frac{x}{2}\,.$$

Op $0 < x < \pi$ geldt dus $F(x) = \log\tan\frac{x}{2}$.
Er kan geen andere analytische functie $F^*(z)$ bestaan waarvoor $F^*(x) = \log\tan\frac{x}{2}$. Dan zouden immers $F^*(z)$ en $F(z)$ beide analytisch zijn in een gebied G dat $0 < x < \pi$ bevat en gelijk in tenminste één punt (zelfs alle reële punten) van elke omgeving (in G) van $\frac{\pi}{2}$ (of een ander punt van $0 < x < \pi$); volgens de identiteitsstelling kunnen $F^*(z)$ en $F(z)$ dus niet verschillen in G.

3) $F(\frac{\pi}{2} + iy)$ heeft tot afgeleide naar y (kettingregel)

$$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} + iy)}\, i = \frac{i}{\cos(iy)} = \frac{2i}{e^{y} + e^{-y}}\,.$$

Eveneens vinden we:

$$(2i\arctan e^{y})' = 2i\,\frac{e^{y}}{1 + e^{2y}} = \frac{2i}{e^{y} + e^{-y}}\,.$$

Verder geeft $y = 0$: $F(\frac{\pi}{2}) = 0$ resp. $2i\arctan 1 - \frac{\pi i}{2} = 0$. Het constante verschil tussen de functies is dus 0.

N. Bereken $A = \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z \log z}$, waarbij de integratieweg in positieve zin wordt doorlopen.

<u>Oplossing</u>: De integratieweg plus zijn inwendige ligt geheel binnen het gebied waar log z holomorf is. log z heeft een enkelvoudig nulpunt in $z = 1$ (Taylor-ontwikkeling om $z = 1$!), dus $\frac{1}{z \log z}$ heeft voor $z = 1$ een enkelvoudige pool, en verdere singulariteiten zijn er niet voor $|z - 1| \leq \frac{1}{2}$.

Conclusie: $A = 2\pi i \operatorname{Res}_1 \frac{1}{z \log z} =$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z \log z} = 2\pi i \lim_{w\to 0} \frac{w}{(w+1)\log(1+w)} = 2\pi i.$$

O. Zij $f(z) = \log \log z$, waarbij met log de hoofdwaarde wordt bedoeld. Bepaal de snede van $f(z)$ en bereken de sprong aan de snede in het punt $z = -2$.

<u>Oplossing</u>: log z heeft zijn snede, waar z reëel ≤ 0 is. log(log z) heeft zijn snede, waar log z een snede heeft èn bovendien voor die z, waar log z reëel is en $\log z \leq 0$. Nu is $\log z = \log|z| + i \arg z$ $(-\pi < \arg z \leq \pi)$, dus $\log z \leq 0$ als $\arg z = 0$ èn $\log|z| \leq 0$, m.a.w. als z reëel, $0 < z \leq 1$. De totale snede wordt dus $-\infty < z \leq 0$ aangevuld met $0 < z \leq 1$. Samen: $-\infty < z \leq 1$. Beschouw nu het punt $z = -2$

$$\log(-2 + io) = \log|-2| + i\pi = \log 2 + i\pi .$$

Hiervan nemen we weer de logarithme

$$\log(\log 2 + i\pi) = \log|\log 2 + i\pi| + i \arg(\log 2 + i\pi) =$$

$$= \log|\log 2 + i\pi| + i \arctan \frac{\pi}{\log 2} .$$

$$\log(-2 - io) = \log|-2| - i\pi = \log 2 - i\pi ,$$

dus

$$\log(\log(-2 - io)) = \log|\log 2 - i\pi| + i \arg(\log 2 - i\pi) =$$

$$= \log|\log 2 - i\pi| - i \arctan \frac{\pi}{\log 2} .$$

Omdat

$$|\log 2 + i\pi| = |\log 2 - i\pi| = \sqrt{\log^2 2 + \pi^2}$$

vinden we

$$f(-2 + io) - f(-2 - io) = 2i \arctan \frac{\pi}{\log 2} \,.$$

P. Stel $f(x) = (x - 1)^x$ voor $x > 1$.
Zet deze functie analytisch voort in het complexe z-vlak opengesneden volgens $\{z = x + iy \mid -\infty < x \leq 1,\ y = 0\}$ en bereken de sprong in een willekeurig punt van de snede.

Oplossing: Voor $x > 1$ geldt $f(x) = e^{x \log(x-1)}$ met de gewone reële logarithme. Nu is $\log(z - 1)$ een analytische functie van z buiten de gegeven snede, en stemt voor $z - 1 > 0$ (dus $z = x > 1$) met de gewone logarithme overeen. $f(z) = e^{z \log(z-1)}$ is derhalve de analytische voortzetting van de gegeven functie (identiteitsstelling).
De definitie van $\log(z - 1)$ luidt

$$\log(z - 1) = \log|z - 1| + i \arg(z - 1) \qquad (-\pi < \arg(z - 1) \leq \pi) \,.$$

Dus voor $x < 1$ moeten we kiezen:

$$\arg(x + io - 1) = \pi, \ \arg(x - io - 1) = -\pi \,,$$

m.a.w.

$$f(x + io) = \exp[x(\log|x - 1| + i\pi)] =$$

$$= (1 - x)^x \exp i\pi x$$

$$f(x - io) = \exp[x(\log|x - 1| - i\pi)] =$$

$$= (1 - x)^x \exp(-i\pi x) \,.$$

Conclusie:

$$f(x + io) - f(x - io) = (1 - x)^x(\exp(i\pi x) - \exp(-i\pi x)) =$$

$$= 2i(1 - x)^x \sin \pi x \qquad (x < 1) \,.$$

Q. Bepaal het aantal oplossingen van de vergelijking

$$z^{\log z} = 1 .$$

Berekening: De vergelijking dient te worden geïnterpreteerd als

$$e^{(\log z)^2} = 1 ,$$

d.w.z.

$$(\log z)^2 = 2ik\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) ,$$

waaruit volgt

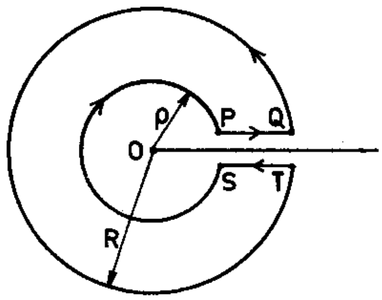
a) $\log z = 0$ (één oplossing) of

b) $\log z = (\pm 1 \pm i)\sqrt{n\pi}$ $(n \in \mathbb{N})$ (bij iedere n vier oplossingen).

Daar $\log z := \log|z| + i \arg z$ $(-\pi < \arg z \le \pi)$ moet dus tevens $\sqrt{n\pi} \le \pi$, m.a.w. $n \le 3$. Het gevraagde aantal oplossingen (voor log z, en dus (door exponentiëring) voor z eveneens) bedraagt derhalve $1 + 3.4 = 13$.

R. Zij α reëel, $0 < \alpha < 1$. In het langs de positieve reële as opengesneden complexe vlak beschouwen we de holomorfe functie $f(z)$ die aan de "bovenkant" van de snede de reële waarden $f(x) = x^{\alpha-1}$ aanneemt.

a) Welke waarden neemt $f(z)$ aan op de "onderkant" van de snede?
Neem nu voor C de volgende contour:
2 cirkels met middelpunt in 0 en straal $OP = \rho$, resp. $OQ = R$, verbonden door stukken PQ resp. TS langs de "bovenkant" van de reële as resp. de "onderkant" van de reële as.



b) Bepaal $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{1+z}\,dz$.

c) Druk $\int_T^S \frac{f(z)}{1+z}\,dz$ uit in $\int_P^Q \frac{f(z)}{1+z}\,dz$.

d) Bewijs nu: $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

Oplossing:

a) Voor $z = x + io$ $(x > 0)$ geldt

$$f(z) = x^{\alpha-1} = \exp((\alpha - 1)\log x)$$

met de gewone logarithme. Zet men de gewone logarithme voort met snede langs de positieve reële as, dan moeten we kiezen $\log z = \log |z| + i \arg z$, $0 < \arg z < 2\pi$ en met deze definitie krijgen we

$$f(z) = \exp((\alpha - 1)\log|z| + i(\alpha - 1)\arg z) =$$

$$= |z|^{\alpha-1}\exp(i(\alpha - 1)\arg z) \qquad 0 < \arg z < 2\pi .$$

In het bijzonder

$$f(x - i0) = |x|^{\alpha-1}\exp(i(\alpha - 1)2\pi) =$$

$$= e^{2\pi i(\alpha-1)}x^{\alpha-1} =$$

$$= e^{2\pi i\alpha}x^{\alpha-1} \qquad (x > 0) .$$

b) $$\int_C \frac{f(z)}{z+1}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{-1} \frac{f(z)}{z+1} \qquad \text{mits } \rho < 1 < R .$$

$z = -1$ is een enkelvoudige pool, dus residu $= f(-1)$.
Volgens a) is

$$f(-1) = |-1|^{\alpha-1}\exp(i(\alpha - 1)\arg(-1)) = e^{\pi i(\alpha-1)} =$$

$$= -e^{\pi i\alpha} .$$

Dus

$$\int_C \frac{f(z)}{z+1}\,dz = -2\pi i\, e^{\pi i\alpha} .$$

c) Volgens a) is

$$\int_T^S \frac{f(z)}{z+1}\,dz = -\int_S^T \frac{f(z)}{z+1}\,dz =$$

$$= -\int_\rho^R \frac{f(x-io)}{x+1}\,dx = -e^{2\pi i\alpha}\int_\rho^R \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx =$$

$$= -e^{2\pi i\alpha}\int_P^Q \frac{f(z)}{z+1}\,dz .$$

d) De gevraagde integraal is $\lim\limits_{\substack{P\to 0\\ Q\to\infty}} \int_P^Q \frac{f(z)}{z+1}\,dz$. Hiertoe berekenen we

$$\lim_{\substack{\rho\downarrow 0\\ R\to\infty}} \int_C \frac{f(z)}{z+1}\,dz .$$

(*) Enerzijds is volgens b) deze laatste limiet gelijk aan $-2\pi i e^{\pi i\alpha}$. Anderzijds splitsen we $\int_C$ in vier stukken

$$(**)\qquad \int_C = \int_P^Q + \int_Q^T + \int_T^S + \int_S^P .$$

Nu is volgens c)

$$(1)\qquad \int_P^Q + \int_T^S = (1 - e^{2\pi i\alpha})\int_\rho^R \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx .$$

We maken een schatting van $\int_Q^T$ en van $\int_S^P$ d.m.v. a)

(2) $$\left|\int_Q^T \frac{f(z)}{z+1}\,dz\right| \le 2\pi R\,\frac{R^{\alpha-1}}{R-1} = \frac{2\pi R^{\alpha}}{R-1} \to 0$$

als $R \to \infty$ omdat $\alpha < 1$. (Ga de ongelijkheid in deze afleiding na!)

(3) $$\left|\int_S^P \frac{f(z)}{z+1}\,dz\right| \le 2\pi\rho\,\frac{\rho^{\alpha-1}}{1-\rho} = \frac{2\pi\rho^{\alpha}}{1-\rho} \to 0$$

als $\rho \downarrow 0$ omdat $\alpha > 0$. (Ga de ongelijkheid na!)
Combinatie van (*), (**), (1), (2) en (3) geeft

$$(1 - e^{2\pi i\alpha}) \lim_{\substack{R\to\infty \\ \rho\downarrow 0}} \int_\rho^R \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx = -2\pi i\; e^{\pi i\alpha}$$

$$\frac{e^{-\pi i\alpha} - e^{\pi i\alpha}}{2i} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx = -\pi$$

$$-\sin \pi\alpha \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx = -\pi\ .$$

S. Bereken met behulp van het vorige vraagstuk op analoge wijze de integraal

$$A = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log x}{x+1}\,dx \qquad (0 < \alpha < 1,\ \text{reële log})\ .$$

<u>Oplossing</u>: Laat $g(z)$ de analytische functie zijn met snede langs de positieve reële as zo dat

$$g(x + io) = x^{\alpha-1}\log x\ .$$

Ga na dat in dit geval

$$g(z) = |z|^{\alpha-1}\exp\{i(\alpha - 1)\arg z\}\ .\ \{\log|z| + i \arg z\}\ ,$$

waarbij $0 < \arg z < 2\pi$.
In het bijzonder vinden we

$$g(-1) = \exp[\pi i(\alpha - 1)].\, i\pi = -\pi i e^{\pi i \alpha}$$

$$(*) \qquad g(x - io) = x^{\alpha-1}\exp[2\pi i(\alpha - 1)].\,\{\log x + 2\pi i\} =$$

$$= e^{2\pi i\alpha}x^{\alpha-1}\{\log x + 2\pi i\} \quad (x > 0)\ .$$

We berekenen voor dezelfde contour C als in het vorige vraagstuk

$$\int_C \frac{g(z)}{z+1}\,dz = 2\pi i\ g(-1) = 2\pi^2 e^{\pi i\alpha} \quad (\rho < 1 < R)\ .$$

Voor de stukken waaruit C is samengesteld

$$\lim_{R\to\infty} \int_Q^T \frac{g(z)}{z+1}\,dz = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{\rho\downarrow 0} \int_S^P \frac{g(z)}{z+1}\,dz = 0$$

door integraalschattingen:

(1) Op QT is $\left|\frac{g(z)}{z+1}\right| \le \frac{R^{\alpha-1}\sqrt{\log^2 R + 4\pi^2}}{R-1} \le \frac{2R^{\alpha-1}\log R}{R-1}$ (R groot genoeg)

dus $\left|\int_Q^T \frac{g(z)}{z+1}\,dz\right| \le \frac{4\pi R^{\alpha}\log R}{R-1} \to 0$ als $R \to \infty$ (Wiskunde 10!) omdat $\alpha < 1$

(2) Op SP is $\left|\frac{g(z)}{z+1}\right| \le \frac{\rho^{\alpha-1}\sqrt{\log^2\rho + 4\pi^2}}{1-\rho} \le \frac{2\rho^{\alpha-1}|\log\rho|}{1-\rho}$ (ρ klein genoeg)

dus $\left|\int_S^P \frac{g(z)}{z+1}\,dz\right| \le \frac{4\pi\rho^{\alpha}|\log\rho|}{1-\rho} \to 0$ als $\rho \downarrow 0$ (Wiskunde 10!) omdat $\alpha > 0$.

Analoog als in de vorige opgave vinden we nu door limietovergang ($R \to \infty$, $\rho \downarrow 0$)

$$2\pi^2 e^{\pi i\alpha} = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \rho\downarrow 0}} \int_C \frac{g(z)}{z+1}\,dz =$$

$$= \lim_{\substack{R\to\infty\\ \rho\downarrow 0}} \left\{\int_P^Q \frac{g(z)}{z+1}\,dz + \int_T^S \frac{g(z)}{z+1}\,dz\right\}\ ,$$

waarbij

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \rho\downarrow 0}} \int_P^Q \frac{g(z)}{z+1}\,dz = \int_0^\infty \frac{g(x+io)}{x+1}\,dx = A\,,$$

en

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \rho\downarrow 0}} \int_T^S \frac{g(z)}{z+1}\,dz = \int_\infty^0 \frac{g(x-io)}{x+1}\,dx = -\int_0^\infty \frac{g(x-io)}{x+1}\,dx =$$

$$= \text{(volgens (*))} = -e^{2\pi i\alpha}\Big[\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\log x}{x+1}\,dx + 2\pi i \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx\Big] =$$

$$= \text{(volgens de uitkomst van de vorige opgave)} =$$

$$= -e^{2\pi i\alpha}A - 2\pi i\, e^{2\pi i\alpha}\,\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\,.$$

Samengevat:

$$2\pi^2 e^{\pi i\alpha} = A(1 - e^{2\pi i\alpha}) - 2\pi i\, e^{2\pi i\alpha}\,\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\,.$$

Uit deze vergelijking moet het (reële!) getal A worden opgelost: Deel links en rechts door $e^{\pi i\alpha}$ (breng één term naar links)

$$2\pi^2 + 2\pi^2 i\,\frac{e^{\pi i\alpha}}{\sin\pi\alpha} = A(e^{-\pi i\alpha} - e^{\pi i\alpha})$$

$$2\pi^2\Big(1 + i\,\frac{\cos\pi\alpha + i\sin\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}\Big) = -2i\,A\sin\pi\alpha$$

$$2i\pi^2\,\frac{\cos\pi\alpha}{\sin\pi\alpha} = -2i\,A\sin\pi\alpha$$

dus

$$A = -\pi^2\,\frac{\cos\pi\alpha}{\sin^2\pi\alpha}\,.$$

Nabeschouwing: Merk op dat de uitkomst van A ook uit de vorige opgave kan worden verkregen door differentiatie naar α (ook achter het integraalteken). De verklaring hiervan wordt niet geheel gedekt door de stellingen van Wiskunde 50/52, maar het principe is wel juist. Voor het vlot berekenen van integralen in de practijk is het handig.

T. Gegeven is

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1} \quad \text{voor } x > 1 .$$

We zetten f analytisch voort in het complexe z-vlak langs de cirkel met vergelijking $|z - 2| = 2$, in positieve richting, te beginnen in $z = 4$. Gevraagd de waarde van f in $z = 0$ na de voortzetting.

<u>Oplossing</u>: De functie $z^3 + 1$ heeft nulpunten in $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Deze punten zijn singuliere punten van $e^{\frac{1}{3}\log(z^3+1)}$. De halve cirkel $z = 2 + 2e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, gaat tussen -1 en $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ door. In het vraagstuk is sprake van analytische voortzetting langs die halve cirkel. We beschouwen daarom een volle omgeving G ervan, zō smal dat de punten -1 en $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ er buiten liggen.

In G ligt $z = 4$ en een reële omgeving daarvan. Daar is $f(x)$ bepaald en gelijk aan $e^{\frac{1}{3}\log(x^3+1)}$. Deze functie gaan we in G analytisch voortzetten.

Voorop staat dan de vraag: als z de halve cirkel doorloopt, vanaf $z = 4$ $(\varphi = 0)$, wat is dan de baan van $z^3 + 1$?

Duidelijk is dat z^3 een spiraal beschrijft, die bij 64 begint en de negatieve reële as bereikt als $\arg z = \frac{\pi}{3}$ d.i. als $z = 2 + 2\cos\frac{2\pi}{3} + 2i\sin\frac{2\pi}{3} = 1 + i\sqrt{3}$; dan is $z^3 = -8$; daarna komt z^3 in het derde kwadraat om, als z tot 0 nadert, d.w.z. $\arg z$ tot $\frac{\pi}{2}$, naar 0 te gaan, terwijl $\arg z^3$ nadert tot $\frac{3\pi}{2}$.

De baan van $z^3 + 1$ is dezelfde spiraal, één eenheid naar rechts verschoven, beginnend in 65, via -7 eindigend in 1.

De bij $z^3 + 1$ behorende hoofdwaarde $\log(z^3 + 1)$ is een analytische functie van z, zolang $0 \leq \arg(z^3 + 1) \leq \pi$, d.i. $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$ (tekening!); dan overschrijdt $z^3 + 1$ de negatieve reële as; zet men nu $\log(z^3 + 1)$ analytisch voort (met: hoofdwaarde $\log(z^3 + 1) + 2\pi i$), dan bereikt deze $\log(z^3 + 1)$ de eindwaarde $\log 1 = 2\pi i$.

Aldus is een analytische functie $f(z) = e^{\frac{1}{3}\log(z^3+1)}$ bepaald, die in de reële omgeving van 4 met $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$ overeenstemt (dus deze analytisch voortzet) en die bij $z = 0$ de waarde $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ oplevert. Dit is de gevraagde waarde van f.

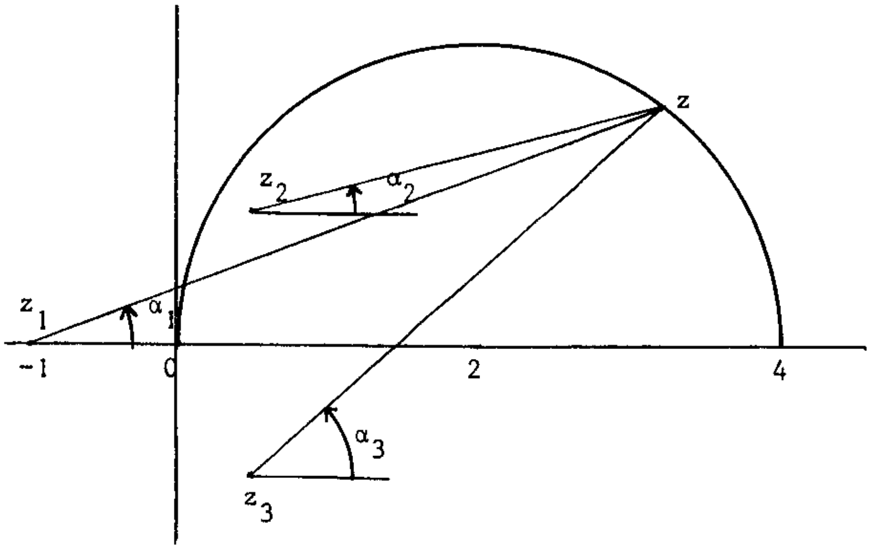
Alternatieve oplossing: Het gaat om een "doelmatige" definitie van de functie (* duidt aan dat niet a priori de hoofdwaarde moet worden gebruikt).

$$\exp(\tfrac{1}{3}\log^*(z^3+1)) =$$

$$\exp \tfrac{1}{3}(\log|z^3+1| + i\arg^*(z^3+1)) =$$

$$\exp \tfrac{1}{3}(\log|z^3+1| + i(\arg^*(z-z_1) + \arg^*(z-z_2) + \arg^*(z-z_3))).$$

"Doelmatig" betekent hier, dat $\arg^*$ langs de halve cirkel continu moet varieren. Uit de figuur (let op de ligging van z_1, z_2 en z_3) blijkt dat $\alpha_1 := \arg^*(z-z_1)$ continu toe en afneemt van 0 tot 0 en dat $\alpha_2 := \arg^*(z-z_2)$ en $\alpha_3 := \arg^*(z-z_3)$ samen continu toenemen van 0 tot 2π.



Dus is de gevraagde waarde:

$$\exp \tfrac{1}{3}(\log|0^3+1| + 2\pi i) = e^{\frac{2}{3}\pi i}\ .$$

U. Gegeven $f(z) = (\mathrm{Re}\ z)^3$.
Waar is $f(z)$ differentieerbaar? Waar holomorf?
Bereken de afgeleide in de punten waar ze bestaat.

Oplossing: $z = x + iy$, x reëel, y reëel; $f(z) = u + iv$, u reëel, v reëel, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$.
In ons geval $f(z) = x^3$, dus $u = x^3$, $v = 0$. Wil $f(z)$ differentieerbaar zijn, dan moet (Cauchy-Riemann)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} .$$

Hier:

$$3x^2 = 0 \quad \text{en} \quad 0 = 0 .$$

Als mogelijke punten voor differentieerbaarheid komen dus alleen in aanmerking de punten op de imaginaire as. Deze punten hebben geen van alle een volle omgeving (bijv. cirkel-omgeving) die uit zuiver imaginaire getallen bestaat dus holomorf is $f(z)$ in geen enkel punt.

Wil $f(z)$ differentieerbaar zijn in $z = iy$ dan is Cauchy-Riemann geen voldoende voorwaarde en zijn we op de differentieerbaarheidsdefinitie aangewezen: Stel h en k reëel:

$$\frac{f(iy + h + ik) - f(iy)}{h + ik} = \frac{h^3 - 0}{h + ik} .$$

De absolute waarde van deze uitdrukking is hoogstens $\left|\frac{h^3}{h}\right| = h^2 < \varepsilon$ als $0 < |h| < \sqrt{\varepsilon}$. (Voor $h = 0$ is de uitdrukking reeds nul.) Dus populair gezegd: $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{f(iy + h + ik) - f(iy)}{h + ik} = 0$ onafhankelijk van de wijze waarop h en k (onafhankelijk van elkaar) naar nul gaan.

Conclusie: Voor $z = iy$ is $f(z)$ differentieerbaar, $f'(iy) = 0$.

V. Een functie $f(z)$ is analytisch vòor $0 < |z| \leq 1$ en daar begrensd. (In $z = 0$ is $f(z)$ niet gedefinieerd.) Laat C_ρ de cirkel met straal ρ, middelpunt 0 voorstellen $(0 < \rho \leq 1)$.

a) Bewijs dat $\int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$ als z buiten C_ρ ligt.

b) Bepaal $\int\limits_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ voor $0 < |z| < 1$.

c) Toon aan dat $f(z)$ in $z = 0$ een ophefbare singulariteit heeft.

Oplossing:

a) Een beroep op de hoofdstelling is uitgesloten omdat f(z) binnen C_ρ niet overal is gedefinieerd, laat staan holomorf is. Wel geldt bij gegeven z voor alle $\rho < |z|$ dat

$$(*) \qquad \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \text{constant} \qquad \text{(kanaalmethode!)} .$$

Uit het gegeven volgt $|f(\zeta)| \leq M$ voor alle ζ met $0 < |\zeta| \leq 1$. Voor ζ op C_ρ met $\rho < |z|$ is voorts $|\zeta - z| \geq |z| - \rho > 0$ dus op C_ρ geldt de ongelijkheid

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| \leq \frac{M}{|z| - \rho}$$

dus met de schattingsstelling

$$\left| \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq \frac{2\pi\rho M}{|z| - \rho} \to 0 \qquad \text{als } \rho \to 0 .$$

Dit laatste resultaat, samen met (*) geeft de gevraagde identiteit.

b) Volgens de residustelling is voor $\rho < |z| < 1$ (kanaalmethode)

$$\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{-C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i \ \mathrm{Res}_z \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = 2\pi i f(z) .$$

De tweede integraal in deze formule is 0 (zie a)). Derhalve

$$\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i \ f(z) \qquad (0 < |z| < 1) .$$

c) De integraal $\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ stelt, daar $f(\zeta)$ op C_1 een continue functie is, binnen en buiten C_1 een analytische functie g(z) voor (stelling!), dus ook in $z = 0$. Voor $0 < |z| < 1$ is de waarde van g(z) gelijk aan $2\pi i\ f(z)$. De waarde $\frac{1}{2\pi i}\, g(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta$ is dus de waarde die men aan f(z) in $z = 0$ moet toekennen om de singulariteit aldaar op te heffen.

Opmerking: Men kan de opgave ook oplossen door een beroep op een in het diktaat wel genoemde, maar niet bewezen stelling (Casorati-Weierstrass) als volgt: $f(z)$ is volgens het gegeven Laurent-ontwikkelbaar in het gebied $0 < |z| < 1$: $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n$. Er zijn drie mogelijkheden:

(i) Het hoofddeel $\sum_{-\infty}^{-1} c_n z^n$ bevat ∞ veel termen (essentiële singulariteit) $\Rightarrow$ in de buurt van $z = 0$ benadert $f(z)$ elk getal willekeurig dicht, is dus niet begrensd (Casorati-Weierstrass).

(ii) Het hoofddeel bevat minstens één term $\neq 0$, maar het totale aantal is eindig(pool): $|f(z)| \to \infty$ als $|z| \to 0$ dus $f(z)$ niet begrensd.

Resteert de derde mogelijkheid:

(iii) Het hoofddeel is identiek $0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (Taylorreeks) en heeft een ophefbare singulariteit in $z = 0$ (def. $f(0) = c_0$). Hiermee is c) bewezen. a) en b) volgen nu uit hoofdstelling en residustelling.

W. We beschouwen de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - z^2}$.

De punten $z = \pm n$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ worden uitgesloten.

a) Bewijs dat de reeks in het gebied G bepaald door $|z| < R$ en $z \neq \pm 1, \pm 2, \ldots$ een holomorfe functie f voorstelt.

b) Zijn de punten $z = \pm n$ singulariteiten van f? Zo ja, van welke soort? Zo neen, waarom niet?

Oplossing: a) $f_n(z) = \frac{1}{n^2 - z^2} = \frac{1}{(n+z)(n-z)}$ heeft als enkelvoudige polen de punten $z = \pm n$ en is verder regulier $(n = 1,2,3,\ldots)$. $f_n(z)$ is dus holomorf in G als $n > R$. Beperken we ons daarom voorlopig tot

$$\sum_{n>R} \frac{1}{n^2 - z^2},$$

een reeks van in G holomorfe functies. Omdat in G geldt $|z| < R$ mogen we schrijven

$$\left|\frac{1}{n^2 - z^2}\right| \leq \frac{1}{n^2 - R^2} = \frac{2}{n^2 + (n^2 - 2R^2)} \leq \frac{2}{n^2} \quad \text{als } n \geq R\sqrt{2}\,.$$

Daar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ een in G uniform convergente reeks is (waarom?) is dus volgens Weierstrass $\sum_{n\geq R\sqrt{2}} \frac{1}{n^2 - z^2}$ uniform convergent in G en heeft een holomorfe som. Om de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - z^2}$ te krijgen moeten nog eindig veel termen, alle holomorf in G, worden toegevoegd. De som van eindig veel holomorfe functies is weer holomorf, dus $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - z^2}$ is holomorf in G.

Opmerking: Het bovenstaande geldt voor elke R, dus f(z) is overal holomorf behoudens in $z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

b) In een punt $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ zijn alle $f_n(z)$ holomorf, behalve $f_m(z)$ die aldaar een enkelvoudige pool heeft $\Rightarrow$ f(z) heeft een enkelvoudige pool.

c) Expliciet kunnen we over deze functie veel meer zeggen, zie X t/m Z.

X. Geef een bovengrens voor de waarden van $|\cot \pi z|$ op de zijden van het vierkant S_N met hoekpunten $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ $(N \in \mathbb{N})$.

Oplossing: Daar $\cot \pi z$ een oneven functie van z is kunnen we ons beperken tot het onderzoek van de rechter- en de bovenribbe:

a) $x = N + \frac{1}{2}$, $|y| \leq N + \frac{1}{2}$, $z = x + iy$. Dus

$$|\cot \pi z| = \left|\frac{\cos \pi(x + iy)}{\sin \pi(x + iy)}\right| =$$

$$= \left|\frac{2i}{2} \cdot \frac{e^{\pi i(N+\frac{1}{2}) - \pi y} + e^{-\pi i(N+\frac{1}{2}) + \pi y}}{e^{\pi i(N+\frac{1}{2}) - \pi y} - e^{-\pi i(N+\frac{1}{2}) + \pi y}}\right| =$$

$$= \left|\frac{(-1)^N i\ (e^{-\pi y} - e^{\pi y})}{(-1)^N i\ (e^{-\pi y} + e^{\pi y})}\right| = \frac{|e^{\pi y} - e^{-\pi y}|}{e^{\pi y} + e^{-\pi y}} \leq 1 .$$

b) $y = N + \frac{1}{2}$, $|x| \leq N + \frac{1}{2}$, $z = x + iy$. Dan is

$$|\cot \pi z| = \left|\frac{\cos \pi(x + iy)}{\sin \pi(x + iy)}\right| =$$

$$= \left|\frac{2i}{2} \cdot \frac{e^{\pi i x - \pi(N+\frac{1}{2})} + e^{-\pi i x + \pi(N+\frac{1}{2})}}{e^{\pi i x - \pi(N+\frac{1}{2})} - e^{-\pi i x + \pi(N+\frac{1}{2})}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{e^{\pi(N+\frac{1}{2})} + e^{-\pi(N+\frac{1}{2})}}{e^{\pi(N+\frac{1}{2})} - e^{-\pi(N+\frac{1}{2})}} \leq \frac{e^{\frac{1}{2}\pi} + e^{-\frac{1}{2}\pi}}{e^{\frac{1}{2}\pi} - e^{-\frac{1}{2}\pi}} < 2 .$$

Op de gehele omtrek van het vierkant S_N geldt dus $|\cot \pi z| < 2$. Bedenk daarbij dat $\cot \pi z$ enkelvoudige polen bezit in alle $z = n \in \mathbb{Z}$, dus dat S_N blijkbaar zeer economisch tussen de singulariteiten van $\cot \pi z$ doorloopt.

Y. Stel $a \notin \mathbb{Z}$. Bereken

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S_N} \frac{1}{z^2 - a^2} \cot \pi z \, dz ,$$

waarbij S_N het vierkant is uit opgave X ($N > |a|$).

Oplossing: De functie $\frac{1}{z^2 - a^2} \cot \pi z$ heeft enkelvoudige polen in $z = \pm a$ en $z = n \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Res}_a = \mathrm{Res}_{-a} = \frac{\cot \pi a}{2a} ;$$

$$\mathrm{Res}_n = \lim_{z \to n} \frac{1}{z^2 - a^2} \cos \pi z \, \frac{z - n}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 - a^2} .$$

De gevraagde integraal bedraagt dus:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S_N} \frac{1}{z^2 - a^2} \cot \pi z \, dz = \frac{\cot \pi a}{a} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=-N}^{+N} \frac{1}{n^2 - a^2} .$$

Z. Stel $a \notin \mathbb{Z}$. Geef een schatting voor

$$\int_{S_N} \frac{1}{z^2 - a^2} \cot \pi z \, dz ,$$

waarbij S_N het vierkant is uit opgave X en bereken hiermee $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$.

<u>Oplossing</u>: Volgens opgave X geldt op S_N de ongelijkheid $|\cot \pi z| < 2$; De lengte van S_N bedraagt $4(2N + 1)$, dus

$$\left|\int_{S_N} \frac{1}{z^2 - a^2} \cot \pi z \, dz\right| \le \frac{1}{N^2 - |a|^2} \cdot 2 \cdot (8N + 4) \to 0 \text{ als } N \to \infty \quad (N \in \mathbb{N}) .$$

Gecombineerd met opgave Y leidt dit tot:

$$\frac{\cot \pi a}{a} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = 0$$

en derhalve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{\pi \cot \pi a}{a}\right) . \quad (a \notin \mathbb{Z}) .$$

<u>Opmerking</u>: Leid hieruit af dat $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Voor analoge beschouwingen zie men Complex Variables, Schaum Publishing Company, p. 175.

Tentamens Wiskunde 50

Voor -----: de vraagstukken waarbij toelichting van de oplossing vereist is. Men dient gebruikte stellingen te vermelden en na te gaan of aan hun voorwaarden is voldaan.

Na -----: de vraagstukken waarbij alleen het antwoord wordt gevraagd. Toelichting met enkele tussenfasen (residuen, parametrisering, schetstekening,..) wordt aanbevolen. Toelichting in woorden kan alleen ongunstig werken: fouten daarin worden - ook bij goed antwoord - aangerekend.

Tentamen januari 1973

1. a) (5 punten). Toon aan dat door de integraal

$$\int_1^z \frac{dt}{1+t^2} \, .$$

waarbij de weg van 1 naar z vrij mag worden gekozen mits niet door de rechte snede van i naar -i, een analytische functie f(z) wordt gedefinieerd.

b) (3 punten). Bepaal f(-1).

c) (2 punten). Voor welke waarden van z geldt

$$f(z) = \arctan z - \frac{\pi}{4} \; ?$$

---

2. (5 punten). Ontwikkel de functie $\dfrac{7z+2}{z^3+3z^2-4}$ in een Laurentreeks om z = 2, die convergeert in z = 1 + i.

3. (5 punten). Bepaal van $(z+\frac{1}{z})^3 \cos\frac{\sqrt{6}}{z^2}$ het residu in 0 en de aard van de singulariteit aldaar.

4. (5 punten). Bereken $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(z^2 + a^2)(z - 2)}$ waarin $|a| < 1$.

5. (5 punten). Bepaal van $(z^2 - z)\cot \pi z$ de convergentiestraal van de Taylorreeks om $z = \frac{1}{2} + 2i$.

6. (5 punten). Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(1 + x^2)^2}\, dx$.

7. (5 punten). Bepaal de functie $f(z)$ met de volgende eigenschappen:

a) $f(z)$ is begrensd voor $|z| \geq 3$;

b) $f(z)$ heeft twee singulariteiten: een pool van de eerste orde in $z = -1$ met residu 1 en een pool van de tweede orde in $z = 2$ met residu -2;

c) $f(0) = \frac{7}{4}$ en $f(1) = \frac{5}{2}$.

Tentamen maart 1973

1. (15 punten). Bepaal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x + x^3}\, dx .$$

---

2. (5 punten). Zij K het lijnstuk met beginpunt -1 en eindpunt i. Bepaal

$$\int_K \frac{dz}{z \log z} .$$

3. (5 punten). Zij C de eenheidscirkel in positieve zin doorlopen. Bepaal

$$\int_C \frac{e^z dz}{2z^2 + 3z - 2} .$$

4. (5 punten). Zij C het vierkant met hoekpunten $\pm 3 \pm 3i$, in positieve zin doorlopen. Bepaal

$$\int_C \frac{z^2 + 1}{(z - 1)^3}\, dz \; .$$

5. (5 punten). Bepaal alle complexe functies f die holomorf zijn in $\mathbb{C}$ met uitzondering van een eerste orde pool in $z = -1$ en een tweede orde pool in $z = 0$ met residu 1, waarvoor bovendien geldt $f(1) = 1$ en $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

6. (5 punten). Bepaal de Laurentreeks van $\frac{z}{(1 + z)^3}$ naar machten van z die convergeert in $z = 2$.

7. (5 punten). Bepaal

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 - \sin x} \; .$$

8. (5 punten). Bepaal $|(1 + i)^i|$.

9. (5 punten). Van een gehele functie f is gegeven dat $\mathrm{Re}\, f(z) = x^2y^2$ ($z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$). Kan dat? Zo ja, geef dan tenminste één voorbeeld van zo'n functie f. Zo neen, geef aan waarom niet.

10. (5 punten). Beschrijf de singulariteiten van

$$\frac{z e^{\frac{1}{z}} \cos z}{\{(z - 2)(z + \pi)\}^2}$$

(waar? welke soort?).

Tentamen mei 1973

1. (10 punten). Gegeven is een functie f, die analytisch is in een enkelvoudig samenhangend gebied G. De functie f heeft in G één nulpunt; dit is van de multipliciteit 3 en ligt binnen de Jordankromme J in G.
Leid uit de residustelling af dat

$$\frac{1}{2\pi i}\int_J \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 3 .$$

---

2. (10 punten). Bepaal de functie f met de volgende eigenschappen:

a) f is holomorf in het complexe vlak met uitzondering van enkelvoudige polen in $z = 2$ en $z = 4$;

b) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$;

c) $\displaystyle\int_{|z|=6} f(z)dz = 0$;

d) $\max\limits_{|z|\leq 1} |f(z)| = 2$;

e) $f(3 + i) > 0$.

3. (5 punten). Ontwikkel $\dfrac{4}{z^2(z+2)}$ in een Laurentreeks naar machten van $z - 1$, die convergeert in $z = 5$.

4. (5 punten). Bepaal $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\,dz$.

5. (5 punten). Bepaal $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{e^2 - 2e\cos z + 1}{z - i}$.

6. (5 punten). Bepaal $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^4\sqrt{1+z}}$.

7. (5 punten). Bepaal de waarden van z waarvoor geldt

$$\log z^4 = 4 \log z \, .$$

8. (5 punten). Bepaal de aard der singulariteiten en de waarden der bijbehorende residuen van

$$\frac{\sin \frac{\pi}{z}}{(z+1)(z-2)} \, .$$

9. (5 punten). Bepaal $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1 + \frac{1}{2}\cos\varphi}$.

10. (5 punten). Bestaat er een gehele functie f(z) (z = x + iy) zodanig dat Re f(z) = xy? Zo neen, waarom niet; zo ja, geef een voorbeeld.

Tentamen januari 1974

1. (10 punten). Bereken

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z^2 - \frac{2}{3})^5 (z-2)^2} \, .$$

2. (8 punten). Van een gehele functie $g(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x + iy$, u en v reëel) is gegeven dat $g(0) = 0$, $g(1) = 1$.
Toon aan dat $f(z) = v(x,y) + iu(x,y)$ nergens analytisch is.

---

3. (7 punten). Bepaal de Laurentreeks van $\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z-4}$ rond z = 1, die convergeert voor z = -1.

4. (7 punten). Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} \, dx \, .$$

5. (7 punten). Bepaal het minimum en het maximum van $|\sin z|$ op

$$\{z \mid |z - \tfrac{\pi}{2}| \leq \log 9\} .$$

6. (7 punten). Bereken

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{4 \cos \varphi - 3i} .$$

7. (7 punten). Bereken

$$\int_B \frac{\log(1 + z)}{1 + z}\, dz$$

over de cirkelboog B met middelpunt 0 van $-2 - i$ over $\sqrt{5}$ naar $+2 + i$.

8. (7 punten). Bepaal de functie(s) $f(z)$ met de volgende eigenschappen:

a) $f(z)$ is overal holomorf behalve in 0, -1 en 1: 0 en -1 zijn polen van de eerste orde met tegengestelde residuen; 1 is een pool van de tweede orde;

b) $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$;

c) $f(2) = f(3) = \frac{1}{6}$.

<u>Tentamen maart 1974</u>

1. (9 punten). Bereken

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos \frac{\pi}{z}}{z^2 - 2z - 3}\, dz .$$

2. (7 punten). Bepaal de gehele functie $f(z)$ $(z = x + iy)$ met de volgende eigenschappen:

a) het reële deel is $e^y \cos x$;

b) $f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Uit Uw afleiding moet blijken dat er slechts één dergelijke functie is.

3. (5 punten). Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{3}\pi i x\sqrt{3}}}{x^3 + 8i}\, dx .$$

4. (5 punten). Bepaal de Laurentontwikkeling rond -1 van

$$\frac{1}{(1 - z^2)^3},$$

die convergeert voor $z = 1 + i$.

5. (5 punten). Zij $c = a + bi$ een complex getal met $b > 0$.
Bepaal $\lim_{x\to\infty} \tan cx$ (x reëel).

6. (5 punten). Bereken $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 5\varphi}{1\frac{1}{2} + \sqrt{2}\cos\varphi}\, d\varphi$.

7. (5 punten). Bepaal $\left\{\operatorname{Res} \frac{1}{z^2 \arctan z}\right\}_{z=0}$.

Tentamen mei 1974

1. (9 punten). Beschouw het gebied G dat ontstaat door uit $\mathbb{C}$ het lijnstuk $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1\}$ weg te laten.

   a) Bewijs dat door

$$f(z) := \int_i^z \frac{dt}{t^2 - 1} .$$

   een analytische functie op G wordt gedefinieerd.

   b) Beschouw nu het gebied $G^* := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 1\}$ (d.w.z. G^* ontstaat door in $\mathbb{C}$ een snede aan te brengen langs de reële as links van 1).
   Zij $g(z) := \log(z - 1) - 2f(z)$.

Bewijs dat er een analytische functie $h(z)$ is, gedefinieerd op $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ (n.b. snede vanaf -1), die op G^* gelijk is aan $g(z)$ (d.w.z. dat g analytisch is voort te zetten op $-1 < x \leq 1$).

c) Bepaal $h(1)$.

2. (6 punten). K is de halve cirkel van $-i$ over 1 naar i.
De functie f is gedefinieerd door

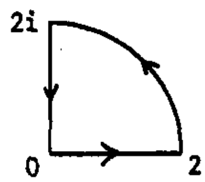
$$f(a) := \int_K \frac{e^{az}}{z}\, dz \; .$$

a) Toon aan dat deze functie overal analytisch is.

b) Bepaal $f'(\frac{\pi}{2})$.

---

3. (5 punten). Bereken $\displaystyle\int_K \frac{dz}{e^{\frac{1}{2}\pi z^2} + 1}$, waarin K de geschetste contour voorstelt:



4. (5 punten). Bereken de residuen van $\dfrac{z^5}{(z^2 - c^2)^3}$, waarbij $c \neq 0$.

5. (5 punten). Bereken $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{15 + 8i \cos \varphi}$.

6. (5 punten). Bepaal een gehele functie $f(z)$ waarvoor geldt

$$\mathrm{Re}(f(z)) = (x + y)(x - y + 2) \qquad (z = x + iy) \; .$$

7. (5 punten). Bepaal de functie f die voldoet aan:

a) f heeft een pool van orde 1 in $z = 0$;

b) f heeft een pool van orde 1 in $z = \infty$;

c) f is in alle overige z analytisch;

d) $\mathrm{Res}_\infty\, f(z) = 1$;

e) $f(1) = f'(1) = 6$.

Tentamen januari 1975

1. (10 punten) Bewijs dat de som van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \log(z + n)$$

binnen de eenheidscirkel $\{z \mid |z| < 1\}$ een analytische functie is.

---

2. (5 punten) Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 3ix - 2}\, dx .$$

3. (5 punten) Bepaal alle functies f met de volgende eigenschappen:

a) f is een gehele functie;

b) $|f''(z)| \leq |z|$ voor alle z;

c) $f(0) = f(1) = 0$.

4. (5 punten) Bereken

$$\int_{|z|=2} \frac{z^5}{z^6 - 1}\, dz .$$

5. (5 punten) Bereken het maximum van $|\sin z|$ op het domein

$$\{z \mid |\mathrm{Re}\, z| \leq \pi/4,\ |\mathrm{Im}\, z| \leq \log 2\} ,$$

d.w.z. het binnengebied en de rand van de rechthoek met hoekpunten $\pm\frac{1}{4}\pi \pm i \log 2$.

6. (5 punten) Bepaal de Laurentreeks van

$$\frac{1}{(z - 1)^2(z + 2)}$$

om $z = 0$, die convergeert in $z = 3/2$.

7. (5 punten) Bepaal de Möbiustransformatie

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

die $z = 0$ op $w = -1$ en $z = 1$ op $w = \infty$ afbeeldt en die de cirkel $\{z \mid |z| = 1\}$ op de imaginaire as van het w-vlak afbeeldt.

Tentamen maart 1975

1. (10 punten) Het gebied G ontstaat door in het complexe vlak sneden aan te brengen langs de imaginaire as van i naar $i\infty$ en van $-i$ naar $-i\infty$, d.w.z.

$$G := \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0,\ |\operatorname{Im} z| \geq 1\}.$$

a) Laat K_z het lijnstuk in G zijn met beginpunt 0 en eindpunt z. We definiëren nu

$$f(z) := \int_{K_z} \frac{t}{1 + t^2}\, dt .$$

Bewijs dat f een analytische functie in G is.

b) Bereken $f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})$ (geef het antwoord in de vorm $a + bi$).

c) Bewijs dat in een omgeving van $z = 0$ geldt:

$$f(z) = \frac{\pi}{2} i + \log(z - i) - i \arctan z .$$

---

2. (5 punten) Bereken $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 + 4\cos t}\, dt.$

3. (5 punten) Bereken $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z - 1)(z + 3)}\, dz .$

4. (5 punten) Bepaal de gehele functie f waarvoor geldt:

a) $\operatorname{Re}(f(z)) = x(x^2 - 3y^2 - 6y - 4)$.

b) $f(0) = i$.

5. (5 punten) Bepaal van de Laurentreeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ van cot z, die convergeert in $z = \frac{3}{2}\pi$, de coëfficiënt c_{-3}.

6. (5 punten) Bepaal alle functies f met de volgende eigenschappen:

   a) f is in het complexe vlak holomorf behalve in $z = 1$;
      $z = 1$ is een pool van de eerste orde met residu 1.

   b) $\lim_{z \to 0} f(\frac{1}{z})$ bestaat.

   c) Voor alle z met $|z| = 1$ en $z \neq 1$ geldt $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$.

7. (5 punten) Bereken $\displaystyle\int_{|z-4i|=3} \frac{dz}{z(1 - \cosh(z))}$.

<u>Tentamen mei 1975</u>

1. (10 punten) Bepaal de functie f met de volgende eigenschappen:

   a) f is in het complexe vlak holomorf behalve in $z = \frac{5}{4}$;
      $z = \frac{5}{4}$ is een pool van de eerste orde.

   b) $\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z} f(z) = 1$.

   c) In de Laurentreeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z + 1)^n$ van f, die convergeert in $z = 2$, is $c_0 = 1$.

   d) $\displaystyle\int_{|z|=2} zf(z)dz = 5\pi$.

---

2. (5 punten) Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 3ix - 2}\, dx$.

3. (5 punten) Bereken $\log((1 - (-1)^{1/3})^4)$.
   (Geef het antwoord in de vorm a + bi.)

4. (5 punten) Bepaal het maximum van $|\cosh z|$ op de rechthoek

$$\{z \mid |\mathrm{Im}\, z| \le \frac{\pi}{2}\ ,\ -2 \le \mathrm{Re}\, z \le 1\}\ ,$$

d.w.z. de rechthoek met hoekpunten: $z = 1 \pm \frac{\pi}{2}i$, $z = -2 \pm \frac{\pi}{2}i$.

5. (5 punten) Bereken $\int_K \frac{dz}{1+4z^2}$, waarbij K de halve eenheidscirkel is, gelegen in het boven-halfvlak, met beginpunt -1 en eindpunt 1.

6. (5 punten) Bepaal het negatieve deel van de Laurentreeks van

$$(z+\frac{1}{z})^3 \frac{1}{\sqrt{4+z}}$$

om z = 0, die convergeert in z = 1.

7. (5 punten) Bereken het residu in z = 0 van

$$\frac{\cos \frac{1}{z}}{(z+1)^2} .$$

Tentamen januari 1976

1. (10 punten) Gegeven de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} z^n(z-\frac{3}{2})^{n+1}$.
   a) Toon aan dat deze reeks in $\{z \mid |z| < \frac{1}{2}\}$ een analytische functie voorstelt.
   b) Bepaal de Taylorontwikkeling rond $z = \frac{2}{5}$.
   c) Bepaal de convergentiestraal hiervan.

---

2. (5 punten) Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{\sin \varphi + ia \cos \varphi}, \quad \text{waarbij } a > 0 .$$

3. (5 punten) Een Möbiustransformatie $z \to w$ wordt gegeven door
   1) $1+i \to \infty$; $-1+i \to 0$;
   2) de cirkel om $1+i$ met straal 2 gaat over in de cirkel om $1+i$ met straal $\sqrt{2}$.

   a) Bepaal het beeld van de lijn $z = x + i$ ($x \in \mathbb{R}$).
   b) Bepaal de Möbiustransformatie.

4. (5 punten) Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^2 + (1+i)x + \frac{1}{2}i}\, dx \; .$$

5. (5 punten) Bepaal van

$$\frac{\cosh \frac{1}{z}}{z(z^2 + \frac{1}{2})}$$

twee termen ($\neq 0$) van de Laurentontwikkeling rond 0, die convergeert voor $z = i$.

6. (5 punten) Bereken

$$\int_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}} \frac{dz}{z(z+2)} \; ,$$

waarbij de integratieweg recht wordt genomen.

7. (5 punten) Bereken

$$\int_K \frac{e^z}{z^2 \sin z}\, dz \; ,$$

waarbij K de cirkel om $4i$ met straal 5 voorstelt, positief doorlopen.

Tentamen maart 1976

1. (10 punten) Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^4 + 4}\, dx$.

---

2. (5 punten) Van een analytische functie $f(z)$ is gegeven dat

$$\operatorname{Re} f(z) = e^{ax} \cos 2\pi y \quad (z = x + iy,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}) \; ,$$

$f(1) - 2\pi i$ is reëel en < 1 .

Bepaal a en de functie $f(z)$.

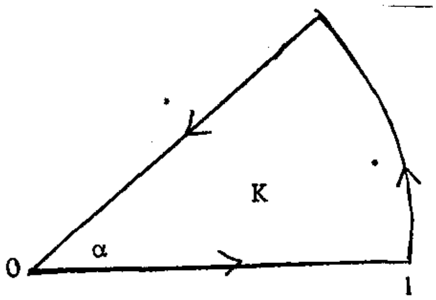
3. (5 punten) Zij

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

de Laurentreeks van $f(z) = \tan z$, die convergeert voor $z = \pi$.
Bepaal de coëfficiënt c_{-1}.

4. (5 punten) Bereken

$$\int_K \bar{z}\, dz ,$$



waarbij K de contour is om een eenheidscirkelsector met tophoek α, beginnend bij 1.

5. (5 punten) Herleid $\{1 - (-4)^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{2}+i}$ tot de vorm $a + bi$; $a,b \in \mathbb{R}$.

6. (5 punten) Bereken

$$\int_K \frac{dz}{z \sin z \sinh z} ,$$

waarin K voorstelt de positief doorlopen cirkel om $i\sqrt{2}$ met straal 2.

7. (5 punten)

a) Bepaal de grootste waarde van ρ zó dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n (2 - z)^n$$

convergeert op $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$.
Noem de som $\varphi(z)$.

b) f is analytisch in $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ en $f(z) = \varphi(z)$ in een omgeving van 0.
Wat voor soort singulariteit heeft $f(z)$ in $z = 1$?

Tentamen juni 1976

1. (10 punten) Gegeven de functie $f(z) = \text{Re}\, z \cdot \text{Im}\, z$.

   Toon aan:

   1) $f(z)$ is differentieerbaar in $z = 0$;
   2) $f(z)$ is niet differentieerbaar in $z = a + bi \neq 0$;
   3) $f(z)$ is niet analytisch in $z = 0$.

---

2. (5 punten) Bereken voor elke positieve waarde van a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)(x^2 + 1)} .$$

3. (5 punten) De functie $\frac{1}{z - 1}\, e^{z/(z-2)^2}$ heeft een Laurentontwikkeling rond $z = 2$, die convergeert voor $z = 4$.

   Bepaal drie termen ($\neq 0$) van deze ontwikkeling.

4. (5 punten) Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2 \cos \varphi + 2 \sin \varphi - i} .$$

5. (5 punten) Een Möbiustransformatie van het z-vlak naar het w-vlak, waarbij $z = x + iy$, $w = u + iv$ $(x,y,u,v \in \mathbb{R})$ heeft de eigenschappen

   a) het beeld van de x-as is de cirkel $\{w \mid |w - 1| = 1\}$;
   b) het beeld van de y-as is de u-as;
   c) het beeld van de cirkel $\{z \mid |z - i| = 1\}$ is de v-as.

   Bepaal het beeld van $z = 1 + i$.

6. (5 punten) Gegeven de functie $f(z) = 2 \arctan z + i \log(1 + iz)$.

   Bepaal, door gebruik te maken van de afgeleide, de convergentiestraal van de Taylorontwikkeling rond $z = 2 + i$.

7. (5 punten) Bepaal alle functies $f(z)$ met

1) een pool van de 2e orde in 2 en elders geen singulariteit;
2) een nulpunt van de multipliciteit 2 in -2;
3) een maximum 2 van $|f(z)|$ op $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 6\}$.

Tentamen januari 1977

1. (10 punten) Bereken

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^4 + 2ix^2 + 8}\, dx \; .$$

---

2. (5 punten) Ontwikkel $\frac{z^3 + 3z}{(z^2 - 1)^3}$ in een Laurentreeks rond $z = 1$, die in $z = i$ convergeert.

3. (5 punten) Bereken

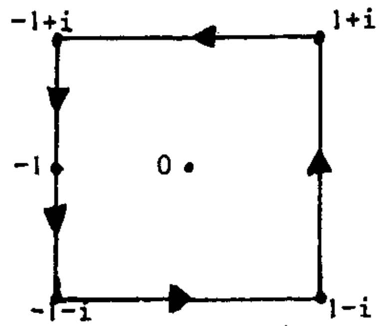
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{2 \cos \varphi + \sin \varphi + 3}\, d\varphi \; .$$

4. (5 punten) Bepaal een functie f die aan de volgende voorwaarden voldoet:
f is overal holomorf, behalve in $z = 2$, waar f een pool van orde 2 heeft met residu 1.
f heeft een nulpunt van multipliciteit 1 in $z = 0$.
f heeft een essentiële singulariteit in $z = \infty$.
$f(1) = 2$.

5. (5 punten) Bereken

$$\int_K \frac{\log z}{z^2}\, dz \; ,$$

waarbij K de getekende contour voorstelt.
(K is dus het vierkant met hoekpunten $\pm 1 \pm i$, in positieve richting doorlopen van -1 naar -1)



6. (5 punten) Bereken $\mathrm{Res}_0 f(z)$, waarbij

$$f(z) = \frac{\cos(\pi \frac{z+1}{z})}{(z^2+1)(z-3)} .$$

7. (5 punten) Bepaal de waarden van z waarvoor de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{2^n}$$

convergeert.

Tentamen maart 1977

1. (10 punten) Zij

$$f(z) = \frac{1}{1+\sin z} .$$

a) Bepaal de verzameling S der singuliere punten van f(z).

b) Bepaal $\mathrm{Res}_s f(z)$ als $s \in S$.

c) Toon aan dat

$$\int_0^z f(t)dt ,$$

waarbij de integratieweg in $\mathbb{C}\backslash S$ wordt genomen, op dat gebied een analytische functie is.

d) Toon aan dat op $\mathbb{C}\backslash S$

$$\int_0^z f(t)dt = 1 - \cot(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4}) .$$

---

2. (5 punten) Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos\varphi}{1+i\sin\varphi}\, d\varphi .$$

3. (5 punten) Bepaal de reële getallen a en b waarvoor geldt

$$\int_K \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{iz} dz = a + bi ,$$

waarin K voorstelt de imaginaire as van -i tot i.

4. (5 punten) Bij een Möbiustransformatie $z \to w = u + iv$ worden afgebeeld:

   de reële as op $\{u + iv \in \mathbb{C} \mid u = v\}$;

   cirkel $|z - i| = \sqrt{2}$ op de imaginaire as ;

   de raaklijn in -1 op $\{u + iv \in \mathbb{C} \mid u = 1\}$.

   Bepaal deze transformatie.

5. (5 punten) Bereken

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 \sin 4z} .$$

6. (5 punten) De functie $(e^z - 1)^{-3}$ heeft een voor $0 < |z| < 2\pi$ convergente Laurentontwikkeling. Bepaal het hoofddeel.

7. (5 punten) $f(z) = |z|^2 + 3z - i\bar{z}$ is in $z = i$ differentieerbaar. Bepaal $f'(i)$.

<u>Tentamen juni 1977.</u>

1. (10 punten) Het gebied G is het complexe vlak, waaruit de intervallen $[1,\infty)$ en $(-\infty,-1]$ zijn weggelaten.

   a) Geef de definitie van arctan iz en van $\log(1-z)$.
      Ga na dat

$$f(z) = 2i \arctan iz - \log(1 - z)$$

      analytisch is op G.

   b) Bepaal de Taylorreeks van $f(z)$ rond 0.

   c) Leid uit het resultaat van b), of op andere wijze, een eenvoudiger uitdrukking voor $f(z)$ af.

   d) Bepaal de Taylorreeks van $f(z)$ rond $\frac{1}{2}$ en de convergentiestraal daarvan.

---

2. (5 punten) Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx .$$

3. (5 punten) Bereken

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z - \frac{1}{4}\bar{z}} .$$

4. (5 punten) Bepaal alle functies $f(z)$ die voldoen aan

   i) f is voor alle $z \in \mathbb{C}$ holomorf, behalve in $z = 1$ waar f een pool van de orde 1 heeft en in $z = -1$ waar f een pool van de orde 2 heeft;

   ii) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} f(z)dz = 0$;

   iii) $zf(z)$ is begrensd voor $|z| \geq 2$;

   iv) $f(0) = 0$.

5. (5 punten) Bepaal de analytische functie $f(z)$ met

   i) $\text{Re } f(z) = e^{-y}(x \cos x - y \sin x)$.

   ii) $f(0) = 0$.

6. (5 punten) Bepaal plaats en waarde van het maximum en het minimum van $\text{Re } e^{\frac{1}{4}\pi z^2}$ op het driehoekig domein met de hoekpunten 0, $1+i$, $1-i$.

7. (5 punten) Bereken $\text{Res}_{z=1}\left\{\dfrac{\sin \frac{1}{z-1}}{(z^2-z)^2}\right\}$.

<u>Tentamen januari 1978.</u>

1. (10 punten) Het gebied G ontstaat door in het complexe vlak een snede aan te brengen langs de imaginaire as van $-i$ naar i, d.w.z.

$$G = \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z = 0, |\text{Im } z| \leq 1\} .$$

   a) Toon aan dat de functies $\log \frac{z-i}{z}$, $\log \frac{z+i}{z}$ en $\log \frac{z-i}{z+i}$ in G holomorf zijn.

   N.B. Met log wordt de hoofdwaarde van de logarithme bedoeld.

   b) Toon aan dat in G geldt:

$$\log \frac{z-i}{z+i} = \log(1 - \frac{i}{z}) - \log(1 + \frac{i}{z}) .$$

   c) Bepaal de Laurentreeks van $\log \frac{z-i}{z+i}$ rond $z = 0$, die convergeert in $z = 2$.

d) Bereken

$$\int_{|z|=2} \log \frac{z - i}{z + i}\, dz\ .$$

---

2. (5 punten) Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10}\, dx\ .$$

3. (5 punten) Bepaal de Möbiustransformatie van het z-vlak naar het w-vlak met de volgende eigenschappen

a) het beeld van de cirkel $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ is de cirkel $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$;

b) het beeld van $z = \infty$ is $w = -\frac{1}{2}i$;

c) het beeld van $z = i$ is $w = -i$.

4. (5 punten) Bepaal de aard der singulariteiten en de waarden der bijbehorende residuen van de functie

$$\frac{z^2 e^{\frac{1}{z}}}{1 + z^2}\ .$$

5. (5 punten) Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi}{4 + 3i \sin \varphi}\, d\varphi\ .$$

6. (5 punten) Gegeven de functie $f(z) = \dfrac{e^{z^2} - 1}{z}$. Bereken

$$\int_{|z|=3} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz\ .$$

7. (5 punten) Bepaal de functie f waarvoor geldt:

a) f is voor alle $z \in \mathbb{C}$ holomorf, behalve in de punten $z = 0$, $z = 1$ en $z = -1$. In $z = 0$ heeft f een essentiële singulariteit en in $z = 1$ en $z = -1$ polen van de orde 1.

b) de functie $e^{-\frac{1}{z}} f(z)$ heeft in $z = 0$ een ophefbare singulariteit.

c) $\underset{z=1}{\text{res}}\, f(z) = e$ en $\underset{z=-1}{\text{res}}\, f(z) = e^{-1}$.

d) $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$.

Tentamen maart 1978.

1. (10 punten) De reeks

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{z\sqrt{3}-1}{z+\sqrt{3}}\right)^{2n+1}$$

convergeert in een cirkelgebied rond $z = \sqrt{3}$.

a) Bepaal de straal van de betreffende cirkel.

b) De in (1) gegeven reeks bepaalt rond $z = \sqrt{3}$ een analytische functie $f(z)$. Bepaal van de Taylor-ontwikkeling $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-\sqrt{3})^n$ de coëfficiënten c_0, c_1 en c_2, alsmede de convergentiestraal.

c) De functie $f(z)$ kan analytisch worden voortgezet door een functie $g(z)$ die gedefinieerd is op de hele reële as. Bepaal $g(-\sqrt{3})$.

---

2. (5 punten) Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+4)}\, dx \, .$$

3. (5 punten) Gegeven de cirkels $|z - 1 - i| = 1$ en $|z + 1 - i| = 1$. Bepaal de twee Möbiustransformaties die

1°. de reële z-as afbeelden op $|w| = 1$ en

2°. de cirkels afbeelden op rechten evenwijdig aan de reële as.

4. (5 punten) Bereken

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos \pi/z}{(z-2)^3}\, dz \, .$$

5. (5 punten) Bepaal voor

$$\frac{1}{z^4 + z^2}$$

de Laurentontwikkeling rond i die convergeert in $z = 1$.

6. (5 punten) Geef door een tekening in het w-vlak aan welke waarden $w = i^{\log z}$ kan aannemen en welke waarden niet (met log z is de hoofdwaarde bedoeld).

7. (5 punten) Bereken

$$\int_K (\bar{z} + i)e^{\frac{1}{2}\pi z}dz$$

als K voorstelt de positief doorlopen cirkel $|z - i| = 3$.

Tentamen mei 1978

1. (10 punten) Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^3}\, dx \ .$$

---

2. (5 punten) Bij een rationale functie f(z) hebben teller en noemer ongelijke nulpunten en een graad ≤ 3. Singulariteiten zijn er bij 0 en 2; met $\mathrm{Res}_2 f(z) = 0$. Van de Taylor-ontwikkeling rond 1 zijn gegeven de coëfficiënten $c_0 = 2$, $c_1 = 3$ en $c_2 = 7$. Bepaal f(z).

3. (5 punten) Bereken

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 6\varphi\ d\varphi}{3 + 2\sqrt{2}\cos\varphi} \ .$$

4. (5 punten) Gegeven

$$f(z) = i^{\frac{\log z}{2\pi i}} \qquad \text{(log: hoofdwaarde)} \ .$$

Bepaal de sprong $\lim_{h\downarrow 0}[f(z + ih) - f(z - ih)]$ bij $z = -e^{-\pi}$.

5. (5 punten) Bereken

$$\int_K \frac{dt}{1 + t^2}$$

waarin K voorstelt de weg in $\mathbb{C}$ die rechtlijnig van -1 naar 2i voert en vandaar horizontaal naar rechts doorloopt naar ∞.

6. (5 punten) Zij

$$f(z) = \frac{1}{\cos z} + \frac{c}{z^2 - \frac{1}{4}\pi^2} .$$

Bepaal:

1 de constante c zodanig dat f(z) geen polen heeft in $\frac{1}{2}\pi$ en $-\frac{1}{2}\pi$, maar ophefbare singulariteiten;

2 de aan $f(\frac{\pi}{2})$ en $f(-\frac{\pi}{2})$ toe te kennen waarde waardoor de singulariteiten worden opgeheven.

7. (5 punten) Gegeven

$$f(a) = \int_1^i \frac{ae^{az}}{z}\, dz \qquad \text{(rechtlijnige integratieweg)} .$$

Bepaal f'(0).

<u>Tentamen januari 1979</u>

1. (10 punten) Gegeven de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{2z}{1-z^2}\right)^{2n+1}$ en het gebied $G = \{z \mid |z| < \frac{1}{3}\}$.

a) Toon aan dat de reeks uniform convergeert op G.

b) Stel de som van de reeks f(z). Formuleer de stelling, waaruit blijkt dat f(z) analytisch is op G.

c) Bepaal de reeks voor f'(z) en de som daarvan.

d) Toon aan dat f(z) buiten G analytisch wordt voortgezet door 2 arctan z. Geef het gebied aan waar deze functie is gedefinieerd.

---

2. (5 punten) Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{1-ix} - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx .$$

3. (5 punten) Gegeven $f(z) = \frac{\sin(z^3)}{\sin z}$.

Bepaal

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz .$$

4. (5 punten) Bereken $\int_K \log z\, dz$ (log z: hoofdwaarde) als K voorstelt de gelijkzijdige driehoek met hoekpunten 1, $e^{2\pi i/3}$, $e^{4\pi i/3}$ positief doorlopen.

5. (5 punten) Bereken

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{1/(z+\frac{1}{2})}}{z(z-2)^2}\, dz .$$

6. (5 punten) Gegeven de Möbiusafbeelding $w = \frac{z+1}{z-1}$.
Schets in het z-vlak (bijv. door arcering) de figuur die als w-beeld oplevert: het vierkante domein met de hoekpunten $2+i$, i, $-i$, $2-i$.

7. (5 punten) De functie $\frac{1}{z^2 \sin z}$ heeft een Laurentontwikkeling $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ die convergeert voor $\pi < |z| < 2\pi$.
Bepaal c_{-5}.

Tentamen maart 1979

1. (10 punten) Gegeven een polynoom

$$p(z) = p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \ldots + p_1 z + p_0, \text{ met } n \geq 2 \text{ en } p_n \neq 0 ,$$

waarvan de nulpunten alle binnen de eenheidscirkel liggen.
We beschouwen integralen

$$I_m = \int_{|z|=1} \frac{z^m}{p(z)}\, dz, \qquad m = 0,1,2,\ldots .$$

Toon aan
1) $I_m = 0$ voor $m \leq n-2$;
2) $I_m = \frac{2\pi i}{p_n}$ voor $m = n-1$.

---

2. (5 punten) Bepaal $\max|\cos z|$ op het domein rond π met $\{z \mid |\sin z| = 1\}$ als rand.

3. (5 punten) De functie $\frac{1}{z^3+1}$ kan ontwikkeld worden in een Laurentreeks $\sum_{n=k}^{\infty} c_{-n}(z+1)^{-n}$, die convergeert voor $z = 2$. Bepaal k en c_{-k} (= de eerste coëfficiënt $\neq 0$).

4. (5 punten)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi}{(8 + 6i \sin \varphi)^3}\, d\varphi .$$

5. (5 punten) De functie $f(z) = \cos(\pi\sqrt[3]{z})$ vertoont bij -1 een sprong

$$s = \lim_{h \downarrow 0} [f(-1 + ih) - f(-1 - ih)] .$$

Bepaal Re s en Im s.

6. (5 punten) In $f(z) = g(z)\cos \frac{1}{z}$ is gegeven dat $g(z)$ geheel is.
Bepaal $f(z)$ als verder gegeven is

1) $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^3} = 0$;
2) $\mathrm{Res}_0 f(z) = 0$;
3) het nulpunt $\frac{2}{\pi}$ is meervoudig;
4) $f(\frac{1}{\pi}) = 3$.

7. (5 punten) Bepaal de holomorfe functie $f(z)$ als gegeven is

$$\mathrm{Re}\, f(z) = e^{-y}\cos x - e^{y}\cos x, \qquad x + iy = z;$$

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = 0 .$$

<u>Tentamen mei 1979</u>

1. (10 punten) Gegeven

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2^n(2n+1)} .$$

a) Bepaal de convergentiestraal R van deze reeks.
b) Toon aan dat voor $|z| < R$ geldt

$$(*) \qquad \log \frac{\sqrt{2} + z}{\sqrt{2} - z} = \sqrt{2}\, f(z) \qquad \text{(hoofdwaarde log)} .$$

c) Bepaal het gebied waarover $f(z)$ op grond van $(*)$ analytisch kan worden voortgezet.
d) Bepaal de waarde van $f(i\sqrt{6})$ bij genoemde analytische voortzetting.

---

2. (5 punten) Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5\cos\varphi + 4 + 3i\sin\varphi}\ .$$

3. (5 punten) Bepaal alle Möbiustransformaties $z \to w$ die $\{z \mid |z - 1| = 1\}$ afbeelden op de eenheidscirkel en rechten door 1 op rechten door 0.

4. (5 punten) Bepaal

$$\lim_{t\to\infty} \arctan(e^{\frac{i\pi}{3}}t) \qquad (t \text{ reëel})\ .$$

5. (5 punten) Gegeven

$$f(a) = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{\sin ax}{x(e^{ix}+1)}\,dx\ .$$

Bepaal de waarde van de afgeleide van f in $a = \frac{1}{2}$.

6. (5 punten) Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x-\pi)}\,dx\ .$$

7. (5 punten) De functie $\frac{1+z}{z(1-\cos 2z)}$ heeft een Laurentreeks in machten van z die convergent is in $z = 1$.
Bepaal hoofddeel en convergentiegebied van deze reeks.

Antwoorden tentamens Wiskunde 50

Antwoorden tentamen januari 1973

1. a) $\frac{1}{z^2+1}$ is overal analytisch (dus continu) behalve in i en -i, met
$\mathrm{Res}_i = \frac{1}{2i}$ en $\mathrm{Res}_{-i} = -\frac{1}{2i}$ (tegengesteld, even functie). Wanneer men integratiewegen dőőr de snede van i naar -i verbiedt, dan geldt algemeen
$\int_K \frac{dt}{t^2+1} = 0$ voor elke gesloten kromme K. (Hoofdstelling en Residustelling). Dit betekent, dat de gegeven integraal alléén van z (dus niet van de weg) afhangt d.w.z. een functie van z is. Deze is analytisch (stelling met als voorwaarden: integrand continu, integraal onafhankelijk van weg).

b) $f(-1) + \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i\, \mathrm{Res}_i \frac{1}{1+z^2} = \pi$, dus $f(-1) = \frac{1}{2}\pi$.

c) Voor $\{z \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$ geldt: $\arctan z := \int_0^z \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} + f(z)$.

Voor $\{z \mid \mathrm{Re}\, z = 0\}$ is arctan z of f(z) niet gedefinieerd.
Voor $\{z \mid \mathrm{Re}\, z < 0\}$ geldt

$$f(z) + \int_z^0 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = f(z) - \arctan z + \frac{\pi}{4} = \pi\ .$$

2. $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^{-n-1} + \tfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{z-2}{4}\right)^n + \tfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)\left(\frac{z-2}{4}\right)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^{-n-1} + \tfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n\left(\frac{z-2}{4}\right)^n\ .$$

3. $\mathrm{Res}_0 = 0.$ $\quad [(z^3 + 3z + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^3})(1 - \frac{1}{2!}\frac{6}{z^4} + \ldots) = \ldots + \frac{1}{z}(3 - \frac{6}{2!}) + \ldots)]$

Essentiële singulariteit.

4. $-\dfrac{4\pi i}{4+a^2}$.

5. $2\frac{1}{2}$.

6. $\frac{1}{2}\pi e^{-1}$.

7. $\dfrac{1}{z+1} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(z-2)^2} - \dfrac{2}{z-2} - \dfrac{1}{3}$.

Antwoorden tentamen maart 1973

1. De moeilijkheid dat $\dfrac{e^{iz}}{z+z^3}$ een pool heeft in 0 (dus op de reële as) verdwijnt als men de teller door $e^{iz}-1$ vervangt:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x+x^3}\,dx = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}-1}{x+x^3}\,dx = \mathrm{Im}\ 2\pi i\ \mathrm{Res}_i\ \frac{e^{iz}-1}{z+z^3} = \pi(1-e^{-1}).$$

Aan de vereisten voor de Residustelling is voldaan:

1) $f(z) := \dfrac{e^{iz}-1}{z+z^3}$ is op en boven de reële as holomorf (na aanvulling met $f(0) = i$);

2) het maximum $M(\rho)$ van $|f(z)|$ op $\{z \mid |z| = \rho,\ \mathrm{Im}\ z \geq 0\}$ voldoet aan $\rho M(\rho) \to 0$ als $\rho \to \infty$ want $M(\rho) \leq \dfrac{1+1}{\rho^3-\rho}$ $(\rho > 1)$;

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ bestaat want $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R$ en $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0}$ bestaan.

Andere manier: gebruik de ananascontour langs de halve cirkels $|z| = \rho$, $|z| = R$, $\rho \to 0$, $R \to \infty$; de teller niet met 1 verminderen.

2. $-\log 2$. [Integreer langs kwart cirkel; men kan ook met log log z werken (afgeleide $\dfrac{1}{z \log z}$ is hier regulier)].

3. $\frac{-2}{5}\pi i e^{\frac{1}{2}}$.

4. $2\pi i$.

5. $\frac{A}{z+1} - \frac{A}{2z^2} + \frac{1}{z}$ met $A \neq 0$.

6. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+2)(k+1)}{2} \frac{1}{z^{k+2}}$. $[\frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{k} z^{-k}]$.

7. $\frac{2}{3}\pi\sqrt{3}$.

8. $e^{-\pi/4}$.

9. Kan niet want $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ is niet identiek 0.

10. $z = 0$ essentiële singulariteit;
$z = 2$ en $z = -\pi$ polen van de tweede orde.

<u>Antwoorden tentamen mei 1973</u>

1. Zij a het nulpunt binnen J. Dan is $f(z) = (z - a)^3 h(z)$ met $h(z)$ holomorf en $\neq 0$ in G. Dit geeft voor de integrand: $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{3}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}$, een in G analytische functie met één enkelvoudige pool in a. Het residu is 3. Volgens de residustelling is de gevraagde integraal dus inderdaad 3.

2. $\frac{-6}{(z-2)(z-4)}$. $[\max_{|z|\leq 1} |f(z)| = |f(1)|]$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (3^{n+2} - 2n - 5)(z - 1)^{-n-3}$.

4. $4\pi e^2 i$.

5. $i(e^2 - 1)$. $[2e \sin i = -2e(\cos z)'_{z=i}]$.

6. $-\frac{5}{8}\pi i$.

7. $\{z \mid -\frac{\pi}{4} < \arg z \le \frac{\pi}{4}\}$.

8. $z = 2$ pool van de orde 1; $\mathrm{Res}_2 = \frac{1}{3}$;
   $z = -1$ ophefbare singulariteit (dus $\mathrm{Res}_{-1} = 0$);
   $z = 0$ essentieel singulier punt: $\mathrm{Res}_0 = -\frac{1}{3}$.

   [gebruik $\left| \int_{|z|=R>2} \frac{\sin\frac{\pi}{z}}{(z+1)(z-2)} dz \right| \le 2\pi R \frac{\frac{\pi}{R} + \frac{\pi^3}{6R^3} + \dots}{(R-1)(R-2)}$] .

9. $\frac{4\pi}{3}\sqrt{3}$.

10. $-\frac{1}{2}iz^2$.

Antwoorden tentamen januari 1974

1. Uit $\left| \int_{|z|=R>2} \frac{dz}{(z^2 - \frac{2}{3})^5 (z-2)^2} \right| \le \frac{2\pi R}{(R^2 - \frac{2}{3})^5 (R-2)^2}$ volgt dat voor elke $R > 2$ de integraal 0 is (want: 1^e onafhankelijk van R; 2^e in absolute waarde kleiner dan iets dat $\downarrow 0$ als $R \to \infty$). De gevraagde integraal + $2\pi i\, \mathrm{Res}_2$ is dus 0 (Residustelling, kanalenmethode). Uitkomst: $-2\pi i\, \mathrm{Res}_2 = -2\pi i \cdot \frac{1}{1!}\{(z^2 - \frac{2}{3})^{-5}\}'_{z=2} =$
$= 10\pi i \cdot (\frac{3}{10})^6 . 4 = \frac{729\pi i}{25000}$. (Gebruikt is $\frac{n!}{2\pi i} \int_J \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = f^{(n)}(a)$,
f(z) holomorf op en binnen Jordankromme J om a.)

2. Volgens de vergelijkingen van Cauchy-Riemann geldt voor de componenten van g(z)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} .$$

Stel nu dat ook $v(x,y) + iu(x,y)$ analytisch is, bijv. in (de omgeving van) $z_0 = x_0 + iy_0$. Dan geldt daar

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\,,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}\,.$$

Dit geeft i.v.m. het voorgaande: $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ alle 0; d.w.z. $g(z)$ is in de omgeving van z_0 constant. Als gehele functie is $g(z)$ dan overal constant (analytische voortzetting over het hele complexe vlak), d.w.z. $g(0) = g(1)$, in strijd met het gegeven.
De onderstelling dat $v(x,y) + iu(x,y)$ ergens (in z_0) analytisch zou zijn, leidt dus tot een tegenspraak.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{-4}{n}(z-1)^{-n-4} - \frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{3}\right)^n$.

4. $\frac{7}{8}\frac{\pi}{e}$. $[\mathrm{Res}_i = \frac{1}{2!}\{\frac{e^{iz}}{(z+i)^3}\}''_{z=i}]$.

5. Minimum 0 in $z = 0$ en π;
Maximum $\frac{41}{9}$ in $z = \frac{1}{2}\pi \pm i \log 9$.

6. $\frac{2}{5}\pi i$.

7. $\frac{3}{4}\pi i \log 2$. $[\frac{1}{2}\{\log(1+z)\}^2$ is primitieve functie].

8. $\frac{3}{z} - \frac{3}{z+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{(z-1)^2}$.

Antwoorden tentamen maart 1974

1. $\left| \int\limits_{|z|=R>3} \frac{\cos\frac{\pi}{z}}{(z+1)(z-3)}\,dz \right| \le 2\pi R\,\frac{1+\frac{1}{2}\pi^2/R^2+\ldots}{(R-1)(R-3)}$ d.w.z. de integraal is 0,

want onafhankelijk van R (> 3) en absoluut kleiner dan een uitdrukking die $\downarrow 0$ als $R \to \infty$. De gevraagde integraal I is dus $-2\pi i\ \mathrm{Res}_3 = -\frac{1}{4}\pi i$. (Residustelling en kanalenmethode).

Anders: $$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}e^{-i\varphi})}{(2e^{i\varphi}+1)(2e^{i\varphi}-3)}\,2ie^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}e^{-i\varphi})}{(1+\frac{1}{2}e^{-i\varphi})(1-\frac{3}{2}e^{-i\varphi})}\,\tfrac{1}{2}ie^{-i\varphi}d\varphi\ .$$

Stel nu $w = \frac{1}{2}e^{-i\varphi}$, $dw = -\frac{1}{2}ie^{-i\varphi}d\varphi$. Als φ toeneemt van 0 naar 2π, dan doorloopt w de cirkel $|w| = \frac{1}{2}$ in negatieve zin. Neem de omloopszin positief, dan verdwijnt het minteken bij dw:

$$I = \int\limits_{|w|=\frac{1}{2}} \frac{\cos \pi w}{(1+w)(1-3w)}\,dw = -\frac{1}{3}\cdot 2\pi i\ \mathrm{Res}_{\frac{1}{3}} = -\tfrac{1}{4}\pi i\ .$$

2. Volgens de vergelijkingen van Cauchy-Riemann geldt: $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -e^y \sin x$, dus $v = -e^y\sin x + C(x)$. Voor C(x) geldt: $\frac{\partial v}{\partial x} = -e^y\cos x + C'(x) = -e^y\cos x$, dus $C'(x) = 0$, C(x) constant. We hebben nu:

$$f(x+iy) = e^y\cos x - ie^y\sin x + ic \quad (c \text{ reëel})$$

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = 0 - i + ic = 0, \text{ dus } c = 1$$

$$f(x+iy) = e^y\cos x - ie^y\sin x + i\ .$$

(We kunnen hiervoor schrijven: $e^{y-ix} + i = e^{-iz} + i$.)

3. $\frac{\pi i}{6}\,e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{3}}$. $\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{3}\pi i t\sqrt{3}}}{-t^3+8i}\,dt = 2\pi i(\mathrm{Res}_{i+\sqrt{3}} + \mathrm{Res}_{i-\sqrt{3}}) \right]$.

4. $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\frac{2^n}{(z+1)^{n+6}}$. $\qquad [-\frac{1}{(z+1)^6}(1-\frac{2}{z+1})^{-3}]$.

5. i. $\qquad [\tan cx = \frac{1}{i}\frac{e^{-2bx+2iax}-1}{e^{-2bx+2iax}+1}]$.

6. $-\frac{1}{2}\pi\sqrt{2}$.

7. $\frac{1}{3}$. $\qquad [\frac{1}{z^3-\frac{1}{3}z^5+\ldots} = \frac{1}{z^3}(1+(\frac{1}{3}z^2-\ldots)+\ldots)]$.

Antwoorden tentamen mei 1974

1. a) Voor $\frac{1}{z^2-1}$ is $\mathrm{Res}_1 + \mathrm{Res}_{-1} = 0$; d.w.z., als men integratiewegen over de snede $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ uitsluit,

$$\int_K \frac{dt}{t^2-1} = 0$$

langs elke gesloten kromme K in G (Hoofdstelling, Residustelling). Dus: $\int_i^z \frac{dt}{t^2-1}$ is alléén afhankelijk van z, niet van de weg; verder is de integrand overal continu (± 1 zijn uitgesneden). Dus (stelling waarvan de twee voorwaarden vervuld zijn), $f(z) = \int_i^z \frac{dt}{t^2-1}$ is analytisch op G (met $f'(z) = \frac{1}{z^2-1}$).

b) $g(z) = \log(z-1) - 2f(z)$ heeft als afgeleide $\frac{1}{z-1} - \frac{2}{z^2-1} = \frac{1}{z+1}$, dezelfde als $\log(z+1)$, welke functie analytisch is op $\mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$. Blijkbaar is op G^* het verschil $g(z) - \log(z+1) = C$. Neem $z = i$, dan volgt $C = g(i) - \log(i+1) = \log(i-1) - 0 - \log(i+1) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{3}{4}\pi i - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{4}\pi i = \frac{1}{2}\pi i$. Dus is $g(z)$ op G^* gelijk aan $h(z) = \log(z+1) + \frac{1}{2}\pi i$, welke functie analytisch is op $\mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ (dus een analytische voortzetting van $g(z)$ op $-1 < x \leq 1$).

c) $h(1) = \log 2 + \frac{1}{2}\pi i$ (n.b. $g(1)$ is niet gedefinieerd).

2. a) $f(a) = \int_K \varphi(a,z)dz$ is analytisch voor alle $a \in G$ (gebied) als $\varphi(a,z)$ begrensd is voor $a \in G$ en $z \in K$, holomorf in G (als functie van a) en - evenals $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ - continu op K (als functie van z).
Neem een positieve R; zij G: $|a| < R$. Dan is op K: $|\frac{e^{az}}{z}| = |e^{az}| = e^{\mathrm{Re}\ az} \le e^{|az|} < e^R$, dus begrensd. Kennelijk is $\frac{e^{az}}{z}$ holomorf (als functie van a) in G en - evenals e^{az} - continu in z op K.
De gegeven functie f(a) is dus analytisch voor $|a| < R$. Hierin is R geheel willekeurig. Dus is f(a) overal analytisch.

b) $f'(a) = \int_K e^{az}dz$, speciaal $f'(\frac{\pi}{2}) = \int_K e^{\frac{\pi}{2}z}dz = [\frac{2}{\pi} e^{\frac{\pi}{2}z}]_{-i}^{i} = \frac{2}{\pi}(i - (-i)) = \frac{4i}{\pi}$.

3. $-1 - i$. $\quad [2\pi i\ \mathrm{Res}_{1+i} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\pi z^2} + 1} = \frac{2\pi i}{(\pi z e^{\frac{1}{2}\pi z^2})_{z=1+i}}]$.

4. $\mathrm{Res}_c = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Res}_{-c} = \frac{1}{2}$. $\quad$ [oneven functie, $\mathrm{Res}_\infty = -1$] .

5. $\frac{2\pi}{17}$.

6. $x^2 - y^2 + 2x + 2y + i(2xy + 2y - 2x)$ (waarvoor we kunnen schrijven: $z^2 + 2z - 2iz$).

7. $-\frac{1}{z} + 5z + 2$.

<u>Antwoorden tentamen januari 1975</u>

1. Neem <u>binnen</u> de eenheidscirkel $G = \{z \mid |z| \le \rho < 1\}$. In G is elk der functies $f_n(z) = z^n \log(z + n)$ analytisch, want bij $\log(z + n)$ loopt de snede vanaf $-n$ naar $-\infty$, dus buiten G.
Verder geldt in G: $|f_n(z)| = |z|^n |\log(z + n)| =$
$= |z|^n |\log|z + n| + i \arg(z + n)| \le |z|^n(\log|z + n| + |\arg(z + n)|) \le$
$\le |z|^n(\log|z + n| + \pi) \le |z|^n(\log(|z| + n) + \pi) \le$
$\le \rho^n(\log(\rho + n) + \pi) \le \rho^n(\log(1 + n) + \pi) \le \rho^n(n + \pi)$.
Nu is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n(n + \pi)$ convergent (som: $\frac{\rho}{(1 - \rho)^2} + \frac{\rho\pi}{1 - \rho}$), d.w.z. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ heeft op G een convergente majorant. Dus is $\Sigma_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ op G uniform convergent.

Stelling van Weierstrass: de som van een in een gebied uniform convergente reeks holomorfe functies is holomorf.

Blijkbaar voldoet $\sum_{n=1}^{\infty} z^n \log(z+n)$ in G aan beide voorwaarden.

Neem nu een willekeurig punt z_0 binnen de eenheidscirkel. Men kan ρ altijd zó dicht bij 1 nemen dat z_0 in G ligt. Dus is $\sum_{n=1}^{\infty} z^n \log(z+n)$ analytisch in z_0 d.w.z. in elk punt binnen de eenheidscirkel.

2. $\pi(e^{-2} - e^{-1})$.

3. $\frac{c}{6}(z^3 - z)$ met $|c| \le 1$ [f"(z) is geheel, = cz]

4. $2\pi i$.

5. $\frac{1}{4}\sqrt{17}$ [$|\sin(\frac{1}{4}\pi + iy)|$ en $|\sin(x + i \log 2)|$ nagaan]

6. $\frac{1}{18} \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n-1}{3} - \frac{1}{9}) z^{-n}$.

7. $\frac{z+1}{z-1}$ [uit de figuren blijkt $z = -1 \to w = 0$].

Antwoorden tentamen maart 1975

1. a) In G is $\frac{z}{1+z^2}$ continu en hangt $\int_0^z \frac{tdt}{1+t^2}$ niet van de integratieweg af.

[Dit laatste volgt uit de hoofdstelling: als de integrand in het betreffende gebied (hier G) analytisch is, dan is de integraal alleen afhankelijk van begin- en eindpunt van de integratieweg.] Er is dus voldaan aan de twee voorwaarden van een stelling (dictaat p. 23) die in dit geval leidt tot de conclusie:

$f(z) = \int_0^z \frac{t\,dt}{1+t^2}$ is analytisch in G; $f'(z) = \frac{z}{1+z^2}$.

b) De functie $g(z) = \frac{1}{2}\log(1+z^2)$ is overal analytisch behalve daar waar $1 + z^2$ negatief of 0 wordt, d.w.z. is juist in G analytisch.

Verder is $g'(z) = \frac{z}{1+z^2} = f'(z)$, terwijl $g(0) = 0 = f(0)$.

Dus $f(z) = \frac{1}{2}\log(1+z^2)$ in G. Dus

$$f(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}) = \tfrac{1}{2}\log(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}) = \tfrac{1}{2}\log e^{\pi i/3} =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\log|e^{\pi i/3}| + \frac{1}{3}\pi i) = \frac{1}{6}\pi i.$$

c) $\frac{\pi}{2} i + \log(z - i) - i \arctan z$ is in een omgeving van $z = 0$ analytisch en heeft daar de afgeleide

$$\frac{1}{z-i} - \frac{i}{z^2+1} = \frac{z+i}{z^2+1} - \frac{i}{z^2+1} = \frac{z}{1+z^2} = f'(z) .$$

Verder is $\frac{\pi}{2} i + \log(0 - i) - i \arctan 0 = 0 = f(0)$.
Dus in een omgeving van $z = 0$ geldt de gestelde betrekking (niet in het hele gebied G; let op de sneden).

2. $\frac{\pi}{4}$. $\qquad$ $[\tfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2t - i \sin 2t}{5 + 4\cos t}\, dt]$

3. $\tfrac{1}{2}\pi i e^{-1/3}$ $\qquad$ $[-2\pi i \,\mathrm{Res}_{-3}]$

4. $z^3 + 3iz^2 - 4z + i$.

5. $2\pi^2$. $\qquad$ $[2\,\mathrm{Res}_{\pi}]$

6. $\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} + ir,\ r \in \mathbb{R}$.

7. $-\frac{i}{\pi}$. $\qquad$ $[2\pi i\,\mathrm{Res}_{2\pi i}]$

Antwoorden tentamen mei 1975

1. Volgens a) is $f(z) = \frac{A}{z - 5/4} + h(z)$ met $h(z)$ een gehele functie: $h(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \ldots$ overal convergent. Dan geldt hetzelfde voor $h_1 + h_2 z + \ldots$. Voor $z \to \infty$ gaat dit volgens b) naar 1. De functie is dus geheel en begrensd, dus volgens Liouville constant: $h_1 = 1$. We hebben nu: $f(z) = \frac{A}{z - 5/4} + h_0 + z$. Dus $\mathrm{Res}_{\frac{5}{4}} zf(z) = \frac{5}{4} A$ wat i.v.m. d) leidt tot $2\pi i \frac{5}{4} A = 5\pi$ of $A = -2i$.

Met het oog op c) gaan we over op $z+1$ en ontwikkelen $\frac{-2i}{w-9/4} + h_0 - 1 + w$ in gedachten in een Laurentreeks die voor $w = 3$ convergeert. Dat geeft voor de breuk een reeks voor $-2iw^{-1}(1 - \frac{9}{4}w^{-1})^{-1}$, dus alleen negatieve machten.
Dus is $h_0 - 1 = 1$ volgens c).
Conclusie: $f(z) = \frac{-2i}{z - 5/4} + 2 + z$.

2. $\pi i(e^{-2} - e^{-1})$.

3. $\frac{2}{3}\pi i$.

4. cosh 2.

5. $\arctan 2 - \frac{1}{2}\pi = -\arctan\frac{1}{2}$. [reële integraal $- 2\pi i\ \mathrm{Res}_{\frac{1}{2}i}$]

6. $\frac{1}{2}z^{-3} - \frac{1}{16}z^{-2} + (\frac{3}{2} + \frac{3}{256})z^{-1}$.

7. sin 1. [$-\mathrm{Res}_{-1}$]

Antwoorden tentamen januari 1976

1. a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n(z-\frac{3}{2})^{n+1} = (z-\frac{3}{2})\sum_{n=0}^{\infty} w^n$ met $w = z(z-\frac{3}{2})$.
Nu is $\sum_{n=0}^{\infty} w^n = (1-w)^{-1}$ voor $|w| < 1$.
Inderdaad is $|z(z-\frac{3}{2})| \le |z|(|z| + \frac{3}{2}) < \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ op $\{z \mid |z| < \frac{1}{2}\}$.
De reeks is daar dus de analytische functie

$$f(z) = \frac{z-\frac{3}{2}}{1 - z(z-\frac{3}{2})} = \frac{z - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}z - z^2}.$$

Anders (maar omslachtiger): op $G = \{z \mid |z| < \frac{1}{2} - \delta\}$ is

$$|z^n(z-\frac{3}{2})^{n+1}| \le |z|^n(|z| + \frac{3}{2})^{n+1} \le (\tfrac{1}{2}-\delta)^n(2-\delta)^{n+1} \le (1-2\delta)^n(1-\tfrac{1}{2}\delta)^n.2.$$

Dit is de algemene term van een convergente reeks. Dus heeft $\sum_{n=0}^{\infty} z^n(z-\frac{3}{2})^{n+1}$ op G een convergente majorantreeks en is daar dus uniform convergent. De functies $z^n(z-\frac{3}{2})^{n+1}$ zijn natuurlijk analytisch in G. Volgens de stelling van Weierstrass is de som dan een analytische functie in G. Verder kan men δ altijd zó klein nemen dat elk willekeurig punt

$z_0 \in \{z \mid |z| < \frac{1}{2}\}$ binnen G ligt. Dus is de reeks in elk punt van $\{z \mid |z| < \frac{1}{2}\}$ een analytische functie; en wel f(z) (zie boven).

b) $f(z) = \dfrac{-\frac{1}{5}}{z-2} + \dfrac{-\frac{4}{5}}{z+\frac{1}{2}} = \dfrac{-\frac{1}{5}}{w-\frac{8}{5}} + \dfrac{-\frac{4}{5}}{w+\frac{9}{10}} = \dfrac{\frac{1}{8}}{1-\frac{5}{8}w} - \dfrac{\frac{8}{9}}{1+\frac{10}{9}w}$ met $z - \frac{2}{5} = w$.

De Taylorontwikkeling hiervan is $\sum\limits_{n=0}^{\infty} [\frac{1}{8}(\frac{5}{8})^n - \frac{8}{9}(\frac{10}{9})^n(-1)^n]w^n$.

c) De convergentiestraal is de afstand van $\frac{2}{5}$ tot de dichtstbijzijnde singulariteit, dat is de pool $-\frac{1}{2}$; dus $\frac{9}{10}$.

2. $\dfrac{-2\pi i}{1+a}$ (ook voor a = 1).

3. a) $w = (1+i)t,\ t \in \mathbb{R}$,

b) $w = \dfrac{(1+i)z+2}{z-1-i}$.

4. $-i\pi^2 e^{-\frac{1}{2}\pi}$.

5. $z^{-3} + \frac{1}{24} z^{-7}$.

6. $-\frac{\pi}{2} i$. $\qquad [\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}} (\frac{\frac{1}{2}}{z} - \frac{\frac{1}{2}}{z+2})dz = -\frac{\pi i}{3} - \frac{\pi i}{6}]$

7. $\frac{4}{3}\pi i$. $\qquad [z^{-3}(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \ldots)(1 - \frac{1}{6}z^2 + \ldots)^{-1}]$

<u>Antwoorden tentamen maart 1976</u>

1. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^4+4} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x^4+4} dx$, want $\sin \pi x$ is oneven.

1) $f(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{z^4+4}$ is op en boven de reële as holomorf behalve in de polen $1+i$ en $-1+i$.

2) Als $K = \{z \mid |z| = R > 2,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$, dan geldt

$$\max_K |f(z)| \leq \frac{1}{R^4-4} \to 0 \quad \text{als } R \to \infty .$$

3) De integraal bestaat (want $\left|\frac{\cos \pi x}{x^4 + 4}\right| < \frac{1}{x^2+1}$ en $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ bestaat).

Omdat is voldaan aan 1), 2) en 3) geldt

$$I = 2\pi i[\mathrm{Res}_{1+i} f(z) + \mathrm{Res}_{-1+i} f(z)] .$$

$$\mathrm{Res}_{1+i} = \lim_{z\to 1+i} (z-1-i)\frac{e^{i\pi z}}{(z-1-i)(z+1+i)(z^2+2i)} = \frac{e^{i\pi-\pi}}{(2+2i)(4i)} .$$

$$\mathrm{Res}_{-1+i} = \lim_{z\to -1+i} (z+1-i)\frac{e^{i\pi z}}{(z+1-i)(z-1+i)(z^2-2i)} = \frac{e^{-i\pi-\pi}}{(-2+2i)(-4i)} .$$

$$I = \frac{\pi}{2}\left[\frac{-e^{-\pi}}{2+2i} + \frac{e^{-\pi}}{-2+2i}\right] = \frac{4\pi e^{-\pi}}{2(-8)} = -\tfrac{1}{4}\pi e^{-\pi} .$$

2. $f(z) = e^{-2\pi z} + 2\pi i.$

3. $-2.$ $\qquad\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\pi} \tan z\, dz = 2\,\mathrm{Res}_{\frac{\pi}{2}} \tan z\right]$

4. $\alpha i.$

5. $e^{\frac{1}{2}\pi}(\sqrt{\tfrac{1}{2}} - i\sqrt{\tfrac{1}{2}}).$

6. $\frac{2i}{\sinh \pi}$. $\qquad\left[2\pi i(\mathrm{Res}_0 + \mathrm{Res}_{\pi i}) = 0 + 2\pi i \frac{1}{\pi \sinh \pi}\right]$

7. a) $\rho = \sqrt{2} - 1,$ $\qquad[|z|\cdot|2-z| < \rho(2+\rho) = 1]$.
   b) pool van 4^{e} orde.

Antwoorden tentamen juni 1976

1. 1) $f(z)$ is differentieerbaar in 0 als $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0}$ bestaat. Hier gaat het dus om de vraag

$$\text{bestaat } \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Re}\, z\ \mathrm{Im}\, z}{z} \ ?$$

Nu geldt voor $z \neq 0$

$$0 \le \left|\frac{\mathrm{Re}\, z\ \mathrm{Im}\, z}{z} - 0\right| \le \frac{|z|.|z|}{|z|} = |z| \downarrow 0 \quad \text{als } z \to 0 .$$

Volgens de insluitstelling is de limiet dus 0; de waarde doet er overigens niet toe: de limiet bestaat.

2) We gaan na of

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x+ib) - f(a+ib)}{x + ib - (a + ib)} \text{ verschilt van } \lim_{y\to b} \frac{f(a+iy) - f(a+ib)}{a + iy - (a + ib)} .$$

Deze limieten zijn resp.

$$\lim_{x\to a} \frac{x.b - a.b}{x - a} = b, \ \lim_{y\to b} \frac{a.y - a.b}{iy - ib} = \frac{a}{i} = -ia .$$

Nu zijn a en b reëel; dus $b \neq -ia$ ($a = b = 0$ is hier uitgesloten). Dus is $f(z)$ in $z = a + ib$ niet differentieerbaar. Men kan hier (niet bij 1)) ook met Cauchy-Riemann werken. Bij $f(z) = \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z$ geldt $u = xy$, $v = 0$ dus

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \ \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \ \frac{\partial u}{\partial y} = x, \ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 .$$

In $z = a + bi \neq 0$ geldt dus niet: zowel $b = 0$ als $-a = 0$. Dus is niet aan de d.v. van Cauchy-Riemann voldaan; d.w.z. $f(z)$ is niet differentieerbaar in $a + bi \neq 0$.

3) $f(z)$ is niet analytisch in $z = 0$, want $f(z)$ is niet in een volle omgeving van $z = 0$ differentieerbaar.

2. $\dfrac{\pi}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}$. [het antwoord $\dfrac{\pi}{\sqrt{a}(1 - a)} + \dfrac{\pi}{a - 1}$ is onvoldoende: het geval $a = 1$ ontbreekt]

3. $w^{-1} + \frac{5}{2} w^{-3} - \frac{1}{3} w^{-4} + \ldots$, waarin $w = z - 2$.

4. $\dfrac{2\pi i}{3}$.

5. $2i$. [uit figuren blijkt: $0 \to 0$, $2i \to \infty$, $\infty \to 2$]

6. $2\sqrt{2}$. [$f'(z) = \dfrac{1}{1 - iz} = \dfrac{i}{z + i}$]

7. $c(\frac{z + 2}{z - 2})^2$ met $|c| = \frac{1}{2}$.

Antwoorden tentamen januari 1977

1. $I = \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^4 + 2ix^2 + 8}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-ixe^{ix}}{x^4 + 2ix^2 + 8}\,dx.$ (niet $I_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}xe^{ix}}{x^4 + 2ix^2 + 8}\,dx$)

Voldaan is aan:

1) $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^4 + 2iz^2 + 8}$ is op en boven de reële as holomorf, behalve in een eindig aantal singuliere punten niet op de as;

2) voor $M(R) = \max|f(z)|$ op halve cirkel $\{z \mid |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ geldt $M(R) \to 0$ als $R \to \infty$; want $M(R) < \frac{R}{R^4 - 2R^2 - 8}$.

3) I bestaat (want voor $|x| \to \infty$ is integrand van orde $|x|^{-3}$).

Dus

$$I = \pi(\operatorname{Res} f_{1+i} + \operatorname{Res} f_{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}) = \pi\left(-\frac{i}{12}e^{i-1} + \frac{i}{12}e^{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{12}(e^{-1}\sin 1 + e^{-\sqrt{2}}\sin\sqrt{2} + i(-e^{-1}\cos 1 + e^{-\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}))\ .$$

2. Met $w = z - 1$: $w^{-3}\left[1 - \frac{3}{w+2} + \frac{6}{(w+2)^2} - \frac{4}{(w+2)^3}\right] = \frac{1}{2}w^{-3} +$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{3}{2}(-1)^k + \frac{3}{2}(-1)^k(k+1) - \frac{1}{2}(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]\left(\frac{w}{2}\right)^{k-3} =$$

$$= \frac{1}{2}w^{-3} + \frac{1}{16}\sum_0^\infty \frac{(k+1)(k+2)}{2}\left(\frac{-w}{2}\right)^k\ .$$

[Achteraf veel vlugger via $\frac{1}{2}\frac{(z+1)^3 + (z-1)^3}{(z+1)^3(z-1)^3} = \frac{1}{2}w^{-3} + \frac{1}{2}(2+w)^{-3}$.]

3. $-\frac{2\pi}{5}$ $[= 2\pi i(\operatorname{Res}_0 + \operatorname{Res}_{-(2+i)/5})]$.

4. Bijv. $\frac{14 - 4e}{3(z-2)^2} + \frac{1}{z-2} + e^z - \frac{5}{3} + \frac{1}{3}e$ of $\frac{z}{(z-2)^2} + \sin\frac{\pi}{2}z$.

(nagaan dat $f'(0) \neq 0$).

5. $2\pi i$ $\left[= -\int_{-\pi}^{\pi} \varphi e^{-i\varphi}\,d\varphi\right]$.

6. $\frac{-2\cosh\pi + 1}{20}$ $[= -\operatorname{Res}_i - \operatorname{Res}_{-i} - \operatorname{Res}_3]$.

7. $\{z \mid -\ln 2 < \operatorname{Im} z < \ln 2\}$ $[\frac{1}{2}\sum_{1} (\frac{e^{niz}}{2^n} + \frac{e^{-niz}}{2^n})$ moet convergeren].

Antwoorden tentamen maart 1977

1. a) $1 + \sin z = 0$ voor $z = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; deze punten zijn polen van $f(z)$ en wel van de tweede orde $((1 + \sin z)' = \cos z$ wordt er ook 0).

   b) $\operatorname{Res}_{-\frac{1}{2}\pi} f(z) = \operatorname{Res}_0 \frac{1}{1-\cos w} = \operatorname{Res}_0 \frac{\frac{1}{2}}{w^2}(1 - \frac{1}{12}w^2 + \ldots)^{-1} =$
   $= \frac{1}{1!}\frac{d}{dw}[\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{12}w^2 + \ldots)^{-1}]_{w=0} = 0.$
   Omdat $\sin z$ de periode 2π heeft zijn alle residuen = 0.

   c) $f(t)$ is in $\mathbb{C}\backslash S$ continu; verder is $\int_0^z f(t)dt$ onafhankelijk van de weg, want elke contour geeft een integraal = 0 (hoofdstelling, alle omsloten residuen zijn 0). Op grond van deze voorwaarden is de integraal een analytische functie: $F(z)$.

   d) $[1 - \cot(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4})]' = \frac{\frac{1}{2}}{\sin^2(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{1 - \cos(z + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{1 + \sin z} = F'(z).$

   In 0 geldt: $1 - \cot(0 + \frac{\pi}{4}) = 0 = F(0)$. Rond 0 zijn de functies dus identiek (dezelfde Taylorreeks) dus, op grond van de identiteitsstelling, op $\mathbb{C}\backslash S$.

2. $\pi\sqrt{2}$.

3. $a = 0$, $b = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$.

4. $w = (1+i)\frac{z-1}{z+1}$ [snijpunten cirkel en reële as 1 en $-1 \to 0$ resp. ∞; $\infty \to 1+i$].

5. $2\pi i[\frac{2}{3} - \frac{8}{\pi^2}]$.

6. $\frac{1}{z^3} - \frac{3}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$ $[\frac{1}{z^3}(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \ldots)^{-3} = \frac{1}{z^3}[1 - 3(\ ) + \frac{-3.-4}{1.2}(\ )^2 \ldots]$.

7. $-i+3$ $[\frac{f(z) - f(i)}{z - i} = \frac{z\bar{z} - i\bar{z}}{z - i} + 3 = \bar{z} + 3]$.

Antwoorden tentamen juni 1977

1. a) $\arctan iz = \int_0^{iz} \frac{dt}{1+t^2}$, waarbij de weg niet mag gaan over de sneden $z = iy$ en $z = -iy$ met $y \in [1,\infty)$.

   $\log(1 - z) = \int_0^{1-z} \frac{dt}{t}$, idem met snede $z = x$ met $x \in (-\infty,0]$.

   Op hun definitiegebied zijn beide analytisch, d.w.z. $\arctan iz$ (iz buiten de sneden) op G en $\log(1 - z)$ overal behalve op $z = x$ met $x \in [1,\infty)$.
   Dus $f(z)$ op G.

b) $f(z) = 2i[iz - \frac{(iz)^3}{3} + \frac{(iz)^5}{5} \ldots] + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \ldots = -z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \ldots$.

c) $f(z) = -\log(1 + z)$, wat ook volgt uit de afgeleiden:
$f'(z) = \frac{-2}{1 - z^2} + \frac{1}{1 - z} = \frac{-1}{1 + z}$ en het feit dat $f(0) = 0 = -\log(1 + 0)$.

d) $-\log(1 + z) = -\log(\frac{3}{2} + z - \frac{1}{2}) = -\log\frac{3}{2} - \log[1 + \frac{2}{3}(z - \frac{1}{2})] =$
$-\log\frac{3}{2} - \frac{2}{3}(z - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^2(z - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^3(z - \frac{1}{2})^3 + \ldots$.

2. $\frac{\pi}{3}(e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2})$.

3. $2\pi i$ $\quad [\frac{1}{z - \frac{1}{4}\bar{z}}$ is op de eenheidscirkel $\frac{1}{z - \frac{1}{4}z^{-1}}]$.

4. $\frac{A}{z - 1} + \frac{2A}{(z + 1)^2} - \frac{A}{z + 1} = \frac{4Az}{(z - 1)(z + 1)^2}$.

5. $\mathrm{Im}\, f(z) = e^{-y}(x \sin x + y \cos x)$, zodat $f(z) = e^{-y}xe^{ix} + e^{-y}iye^{ix} = ze^{iz}$.

6. maximum $e^{\pi/4}$ in 1; minima 0 in $1 \pm i$.

7. $\cos 1 + 2 \sin 1$ $\quad [\mathrm{Res}_0 \frac{\sin w^{-1}}{w^2(1 + w)^2} = -\frac{1}{1!}(\frac{\sin w^{-1}}{w^2})'_{w=-1}]$.

Antwoorden tentamen januari 1978

1. a) $\log\frac{z - i}{z} = \log(1 - \frac{i}{z})$ is overal holomorf behalve daar waar $1 - \frac{i}{z} = -x$ met $x \in [0,\infty)$; dan is $z = \frac{i}{1 + x}$, dus $z = iy$ met $y \in [0,1]$. Evenzo $\log\frac{z + i}{z}$ overal holomorf behalve in de tussen $-i$ en 0 gelegen punten ($z + i$ en $z - 0$ tegengesteld) en $\log\frac{z - i}{z + i}$ overal holomorf behalve in de tussen i en $-i$ gelegen punten.
Dus alle drie holomorf in G.

b) Differentiëren geeft aan beide zijden $\frac{2i}{z^2 + 1}$. Voor $z = 2i$ komt er $\log\frac{1}{3} = \log\frac{1}{2} - \log\frac{3}{2}$ wat juist is. Daarmee is de gelijkheid bewezen.
Anders: voor $z = iy$, $y \in (1,\infty)$ is er gelijkheid. Op grond van analytische voortzetting (identiteitsstelling) is er dus gelijkheid overal in G.

c) Volgens b): $-\frac{i}{z} - \frac{1}{2}(\frac{i}{z})^2 - \frac{1}{3}(\frac{i}{z})^3 \ldots - [\frac{i}{z} - \frac{1}{2}(\frac{i}{z})^2 + \frac{1}{2}(\frac{i}{z})^3 - \ldots] =$
$= -\frac{2i}{z} - \frac{2}{3}(\frac{i}{z})^3 \ldots = -2i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n + 1}\frac{1}{z^{2n+1}}$.

d) De reeks volgens c) heeft voor $|z| \geq \frac{3}{2}$ de convergente majorante
$\frac{2}{1\frac{1}{2}} + \frac{2}{(1\frac{1}{2})^2} + \frac{2}{(1\frac{1}{2})^3} + \ldots$.

De reeks is dus voor $|z| \geq \frac{3}{2}$ uniform convergent. Termsgewijs integreren geeft

$$\int_{|z|=2} \log \frac{z-i}{z+i}\, dz = 2\pi i(-2i) = 4\pi .$$

2. $\frac{\pi}{3} e^{-3}(\cos 1 - 3 \sin 1)$.

3. $w = \dfrac{-\frac{1}{2}iz + 1}{z + \frac{1}{2}i}$ [beeld v. imag. as moet imag. as zijn] .

4. i pool van 1^e orde, residu $\frac{1}{2} \sin 1 + \frac{1}{2}i \cos 1$,
$-i$ pool van 1^e orde, residu $\frac{1}{2} \sin 1 - \frac{1}{2}i \cos 1$,
0 essentieel singulier punt, residu $= -\mathrm{res}_\infty - \sin 1 = 1 - \sin 1$,
∞ regulier punt want $\dfrac{z^{-2}e^z}{1 + z^{-2}} = \dfrac{e^z}{z^2 + 1}$ is in 0 regulier.
Toch $\mathrm{res}_\infty \neq 0$ maar -1 $\left(= -\mathrm{res}_0 \dfrac{e^z}{z^2(1 + z^2)}\right)$.

5. $2\pi/45$.

6. $2\pi i.5$ [0 is enkelvoudig nulpunt; pool en nulpunt tegelijk kan niet].

7. $\left(\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z+1} + 1\right)e^{1/z}$ [$e^{-1/z}f(z) = h(z)$ is holomorf rond 0].

Antwoorden tentamen maart 1978

1. a) De reeks convergeert als $\left|\dfrac{z\sqrt{3} - 1}{z + \sqrt{3}}\right| < 1$, d.w.z. $|z\sqrt{3} - 1| < |z + \sqrt{3}|$ ofwel $(x\sqrt{3} - 1)^2 + 3y^2 < (x + \sqrt{3})^2 + y^2$.
Het cirkelgebied is $(x - \sqrt{3})^2 + y^2 < 4$, met straal 2.

b) De Taylorontwikkeling heeft $c_0 = f(\sqrt{3})$, $c_1 = f'(\sqrt{3})$, $c_2 = \frac{1}{2!} f''(\sqrt{3})$.
Dus
$$c_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right)^{2n+1} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} .$$
Omdat
$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z\sqrt{3}-1}{z+\sqrt{3}}\right)^{2n} \left(\frac{z\sqrt{3}-1}{z+\sqrt{3}}\right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{z\sqrt{3}-1}{z+\sqrt{3}}\right)^2} \frac{4}{(z+\sqrt{3})^2} = \frac{1}{z^2+1}$$
wordt $c_1 = \frac{1}{4}$.
$f''(z) = \dfrac{-2z}{(z^2+1)^2}$, dus $c_2 = \dfrac{1}{2!} \cdot \dfrac{-2\sqrt{3}}{16} = \dfrac{-\sqrt{3}}{16}$.

c) Rond $z = \sqrt{3}$ geldt $f(z) = \arctan z + C$, speciaal $f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + C$ dus $C = -\frac{\pi}{6}$.
De functie $g(z) = \arctan z - \frac{\pi}{6}$ is de analytische voortzetting van $f(z)$ in $\mathbb{C}\backslash S$, waarin S de sneden $\{z \mid z = iy, |y| \geq 1\}$ zijn.
Men vindt dus $g(-\sqrt{3}) = \arctan(-\sqrt{3}) - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$.

2. $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-2})$.

3. $w = \pm \frac{z+i}{z-i}$ [uit prent: bijv. $1 \to i$, $-1 \to -i$].

4. $\frac{\pi^2 i}{4}$ $\quad [-2\pi i \operatorname{Res}_2 = -2\pi i \frac{1}{2!}(\cos\frac{\pi}{2})''_{z=2}]$.

5. $\frac{\frac{1}{2}i}{w} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)(\frac{i}{w})^{k+2} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{iw}{2})^n$ met $w = z - i$.

6. Ring om 0: $e^{-\frac{1}{2}\pi^2} \leq |w| < e^{\frac{1}{2}\pi^2}$.

7. -18π $\quad [\int_{|w|=3} \bar{w}e^{\frac{1}{2}\pi(w+i)}dw = \int_{|w|=3} \frac{9}{w} ie^{\frac{1}{2}\pi w}dw]$.

Antwoorden tentamen mei 1978

1. $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^3}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i\sin x}{(x^2+1)^3}dx$ (toevoeging oneven functie).
Beschouw $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^3}$.
1) $f(z)$ is op en boven de reële as holomorf behalve in een eindig aantal (hier maar één) singuliere punten, niet op de as.
2) Voor $M(R) = \max|f(z)|$ op halve cirkel $\{z \mid |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ geldt $M(R) < \frac{1}{(R^2-1)^3}$, dus $M(R) \to 0$ als $R \to \infty$.
3) I bestaat (voor $|x| \to \infty$ is integrand van orde $|x|^{-3}$).
Er geldt dus

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}_i f(z) = \frac{2\pi i}{2!}[\frac{e^{iz}}{(z+i)^3}]''_{z=i} = \pi i[\frac{-e^{iz}}{(z+i)^3} - \frac{6ie^{iz}}{(z+i)^4} + \frac{12e^{iz}}{(z+i)^5}]_{z=i} =$$

$$\pi i e^{-1}[-\frac{1}{(2i)^3} - \frac{6i}{(2i)^4} + \frac{12}{(2i)^5}] = \pi i e^{-1}[\frac{-i}{8} - \frac{6i}{16} - \frac{12i}{32}] = \frac{7\pi}{8e}.$$

2. $\dfrac{-z^3+5z^2-6z+4}{z(z-2)^2}$. $\quad [\dfrac{A}{z} + \dfrac{B}{(z-2)^2} + C = \dfrac{A}{1+w} + \dfrac{B}{(1-w)^2} + C]$.

3. $\frac{\pi}{4}$. $\quad [\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi}{3 + 2\sqrt{2}\cos\varphi}\, d\varphi]$.

4. $i\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$. $\quad [e^{\frac{1}{4}(-\pi+i\pi)} - e^{\frac{1}{4}(-\pi-i\pi)}]$.

5. $-\frac{\pi}{4}$. $\quad [\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} - 2\pi i \,\mathrm{Res}_i]$.

6. $C = \pi;\ -\frac{1}{\pi}$. $\quad [f(\frac{\pi}{2}) = \displaystyle\lim_{w\to 0} (\frac{-1}{\sin w} + \frac{\pi}{w(w+\pi)}) = \lim_{w\to 0} \frac{1}{w}(\frac{-1}{1-\frac{w^2}{6}} + \frac{1}{1+\frac{w}{\pi}})]$.

7. $\frac{1}{2}i\pi$.

Antwoorden tentamen januari 1979

1. a) Als $|z| < \frac{1}{3}$ dan $|\dfrac{2z}{1-z^2}| \le \dfrac{2|z|}{1-|z|^2} < \dfrac{2/3}{8/9} = \dfrac{3}{4}$. Voor $f_n(z) = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}(\dfrac{2z}{1-z^2})^{2n+1}$ geldt dus $|f_n(z)| < (\frac{3}{4})^{2n+1}$. De gegeven reeks $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ heeft op G dus een convergente majorante nl. $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^{2n+1}$. Volgens het kenmerk van Weierstrass is $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ uniform convergent op G.

b) Als $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ uniform convergent is op G en als alle $f_n(z)$ daar holomorf zijn, dan is ook $f(z)$ holomorf op G.

c) Vanwege de uniforme convergentie mag men termsgewijs differentiëren:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{2z}{1-z^2})^{2n} (\frac{2z}{1-z^2})' = \frac{1}{1+(\frac{2z}{1-z^2})^{2n}} \frac{2+2z^2}{(1-z^2)^2} = \frac{2}{1+z^2} .$$

d) In G geldt: $f'(z) = \dfrac{2}{1+z^2} = (2 \arctan z)'$ en $f(0) = 2 \arctan 0$, dus $f(z) = 2 \arctan z$. Blijkbaar wordt $f(z)$ door $2 \arctan z$ buiten G voortgezet en wel in $\mathbb{C}\backslash S$ waarin S de beide sneden $\{z \mid z = iy,\ |y| \in [1,\infty)\}$ voorstelt.

2. $\frac{\pi}{6}(1 - e^{-1})$ $\quad [2\pi i \,\mathrm{Res}_{2i} \dfrac{e^{1+iz}}{z^4+5z^2+4}]$.

3. 8 [6 enkelvoudige nulpunten; 0 is tweevoudig nulpunt; n.b. pool en nulpunt tegelijk is onzin].

4. $-i\pi$ $\left[\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \log z \, dz\right]$.

5. $\pi i \frac{33}{50} e^{2/5}$ $\left[-2\pi i \left(\frac{e^{1/(z+\frac{1}{2})}}{z}\right)'_{z=2}\right]$.

6. Het buitengebied van: hetzelfde vierkant met op de 4 zijden uitgezette halve cirkels.

7. $-2\pi^2$ $\left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2}{\sin z} dz\right]$.

Antwoorden tentamen maart 1979

1. Alle singulariteiten van $\frac{z^m}{p(z)}$ liggen binnen de eenheidscirkel. Dus geldt

$$I_m = \int\limits_{|z|=R} \frac{z^m}{p(z)} dz \quad \text{met } R > 1 \ .$$

Dit geeft

$$|I_m| \le 2\pi R \max_R \left|\frac{z^m}{p(z)}\right| \le 2\pi R \frac{R^m}{|p_n|R^n - |p_{n-1}|R^{n-1} - \ldots - |p_0|} ,$$

met R voldoend groot dat $|p_n|R^n > |p_{n-1}|R^{n-1} + \ldots + |p_0|$.

1) Als $m \le n-2$ dan gaat het rechterlid ofwel

$$2\pi \frac{R^{m-(n-1)}}{|p_n| - |p_{n-1}|/R - \ldots - |p_0|/R^n} \text{ naar 0 als } R \to \infty \ .$$

Omdat I_m niet van R afhangt moet dus $I_m = 0$ zijn.

2) Bekijk

$$\int\limits_{|z|=1} \left(\frac{z^{n-1}}{p(z)} - \frac{1}{p_n z}\right) dz = \int\limits_{|z|=1} \frac{-p_{n-1}z^{n-1} - \ldots - p_0}{p(z)p_n z} dz \ .$$

De noemer van de integrand is van de graad $n+1$; in de teller staan alleen machten $\le (n+1)-2$. Volgens 1) is de integraal rechts dus 0. Dus

$$I_{n-1} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{p_n z} = \frac{2\pi i}{p_n} .$$

Anders: 1) en 2) kan men samen beantwoorden met

$$I_m = -2\pi i \ \mathrm{Res}_\infty = 2\pi i \ \mathrm{Res}_0 \frac{1}{z^2} \frac{z^{n-m}}{p_n + p_{n-1}z + p_0 z^n} .$$

Voor $n-2 \geq m$ is dit residu 0; voor $m = n-1$ is het $\frac{1}{p_n}$.

2. $\sqrt{2}$ $\quad [\text{in } \pi \pm i \log(\sqrt{2}+1);\ |\cos z|^2 = |\sin z|^2 + 1 - 2\sin^2 x]$.

3. $k = 3,\ c_{-3} = 1$ $\quad [\frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{z+1} \frac{1}{z^2-z+1} = \frac{1}{w} \frac{1/w^2}{1-3/w+3/w^2}]$.

4. $\frac{108\pi}{100000}$.

5. $0,\ -2\sinh \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

6. $(\pi^2 z^2 - 4)\cos \frac{1}{z}$.

7. $e^{-y}\cos z - e^{y}\cos z + i(e^{-y}\sin z + e^{y}\sin z - 2)$ (dat is $2i \sin z - 2i$).

<u>Antwoorden tentamen mei 1979</u>

1. a) $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{1/2^n(2n+1)} = 2^{-\frac{1}{2}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{2/(2n+1)} = 2^{-\frac{1}{2}}$, dus $R = \sqrt{2}$.

b) $\log \frac{\sqrt{2}+z}{\sqrt{2}-z}$ is overal analytisch behalve in punten waarvoor geldt $\frac{\sqrt{2}+z}{\sqrt{2}-z} = -p$ met $p \in [0,\infty)$. Dit geeft $z = \sqrt{2}\,\frac{p+1}{p-1}$ d.w.z. voor $p > 1$ resp. $0 \leq p < 1$ de sneden $[\sqrt{2},\infty)$ en $(-\infty,-\sqrt{2}]$. Het gebied $|z| < \sqrt{2}$ ligt daartussen. Daar hebben beide leden van (*) dezelfde afgeleide nl. $2\sqrt{2}/(2-z^2)$ en gelijke waarde (0) voor $z = 0$. Dus geldt daar (*).

c) In b) bleek $\log \frac{\sqrt{2}+z}{\sqrt{2}-z}$ analytisch in het gebied $G := \mathbb{C}\backslash\{z \mid \mathrm{Im}\, z = 0, |\mathrm{Re}\, z| \geq \sqrt{2}\}$. Voor $|z| < \sqrt{2}$ geldt

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}+z}{\sqrt{2}-z} .$$

Door deze uitdrukking kan $f(z)$ in G analytisch worden voortgezet.

d) De gevraagde waarde is

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{\sqrt{2} - i\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{-4 + 2i\sqrt{12}}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log e^{\frac{2}{3}\pi i} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{3} .$$

2\. 0 $\quad [\mathrm{Res}_{-\frac{1}{2}} \dfrac{1}{(z + \frac{1}{2})^2} = 0]$.

3\. $w = (z - 1)e^{i\alpha}$ en $w = \dfrac{e^{i\alpha}}{z - 1}$, α reële constante.

4\. $\frac{\pi}{2}$ $\quad [\lim\limits_{t\to\infty} \displaystyle\int_t^{te^{i\pi/3}} \frac{dz}{1 + z^2} = 0]$.

5\. 1 $\quad [\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{1}{2}ix} + e^{-\frac{1}{2}ix}}{e^{ix} + 1}]$.

6\. -2 $\quad$ [integreer $e^{iz}/z(z - \pi)$ langs $|z| = R$ in bovenhalfvlak en langs reële as met boogjes boven 0 en π].

7\. $2z^{-3} + 2z^{-2} + \frac{1}{6} z^{-1}$ $\quad [z^{-3}(1 + z)2(1 - z^2/12 + \ldots)^{-1}]$.
$0 < |z| < \pi$.

Tentamens Wiskunde 52

De oplossingen moeten volledig uitgewerkt worden; in het bijzonder dient men gebruikte stellingen te vermelden en na ta gaan of aan de voorwaarden is voldaan.

Uitzondering: enkele opgaven (steeds achteraan) waarbij alleen het antwoord wordt gevraagd.

Tentamen januari 1973

1. Theorievraag.
Bewijs de stelling:
"Als J een gladde boog in $\mathbb{C}$ is en φ is continu op J, dan is door

$$F(z) := \int_J \frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw$$

een analytische functie F op $\mathbb{C} \setminus J$ gegeven".

2. Zij C_n de cirkel met middelpunt 0 en straal n $(n \in \mathbb{N})$. Definieer

$$f_n(z) := \int_{C_n} \frac{\log w}{w^2(w-z)}\,dw \qquad (z \notin C_n).$$

Bewijs dat door $F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ een holomorfe functie is gedefinieerd op $\{z \mid |z| < 1\}$.

3. Zij $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ op $\{z \mid |z| < 1\}$. Bepaal de Taylorreeks van f rond $z = \frac{3}{4}i$.

N.B. Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt alléén het antwoord gevraagd.

4. Ontwikkel $\frac{7z+2}{z^3+3z^2-4}$ in een Laurentreeks naar machten van $z-2$, die convergeert in $1+i$.

5. Zij $|a| < 1$. Bepaal

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2\,dz}{(z^2+a)(z-2)}.$$

6. Bereken

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos 2x}{(x^2+1)^2}\, dx \; .$$

Tentamen maart 1973

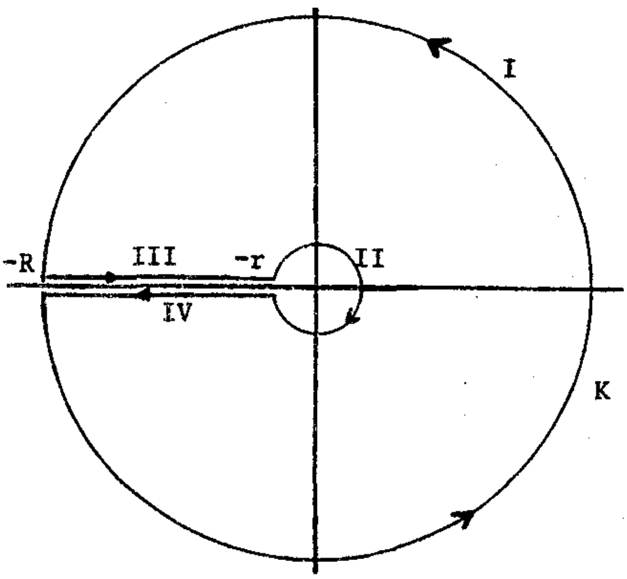
1. (10 punten). Zij g holomorf in $\{z \mid |z| < 1\}$, $g(0) = 0$ en $g'(0) = 1$.
Bewijs dat door

$$F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, g\left(\frac{z}{n}\right)$$

een holomorfe functie F is gedefinieerd in $\{z \mid |z| < 1\}$, en bereken $F'(0)$.

2. (10 punten). De functie f is holomorf in $\mathbb{C}$ met uitzondering van een tweede orde pool in $z = 0$ met residu 1. f heeft geen andere nulpunten dan $z = 1$. Verder bestaat $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ en deze limiet is niet nul. Bereken f.

3. (10 punten). De contour K (zie figuur) bestaat uit de cirkel I met straal $R > 1$ om 0, in positieve zin doorlopen van $-R$ tot $-R$, de cirkel II met straal $r < 1$ om 0, in negatieve zin doorlopen van $-r$ tot $-r$, en de beide lijnstukken III en IV van $-R$ tot $-r$, resp. van $-r$ tot $-R$.



a) Bereken

$$\lim_{R\to\infty} \int_{I} \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{1-z}\, dz \; .$$

b) Bereken

$$\lim_{r\to 0} \int_{II} \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{1-z}\, dz \; .$$

c) Bereken nu $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{1+x}\, dx$ met behulp van $\displaystyle\int_K \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{1-z}\, dz$.

N.B. Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt alléén het antwoord gevraagd.

4. (7 punten). f is holomorf in een gebied dat 0 en 1+i bevat.
De Taylorreeks van f om z = 0 is

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} z^n .$$

Bereken f(1+i).

5. (7 punten). Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{(\sin x)^2 + (\frac{1}{2} - \cos x)^2}\, dx \qquad (n \in \mathbb{N}) .$$

6. (7 punten). f is holomorf in $\{z \mid \text{Im } z > 0\}$, $f(i) = 0$. Als $z = x + iy$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y > 0)$ dan is

$$\text{Re } f(z) = \arctan \frac{x}{y} .$$

Bereken f.

Tentamen mei 1973

1. (10 punten). f is een gehele functie met een pool in ∞.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2 \qquad \text{voor alle } R > 3.$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{1}{f(z)}\, dz = 1 \qquad \text{voor alle } 0 < r < \frac{1}{4} .$$

$$f(1) = 3 .$$

Bereken f.

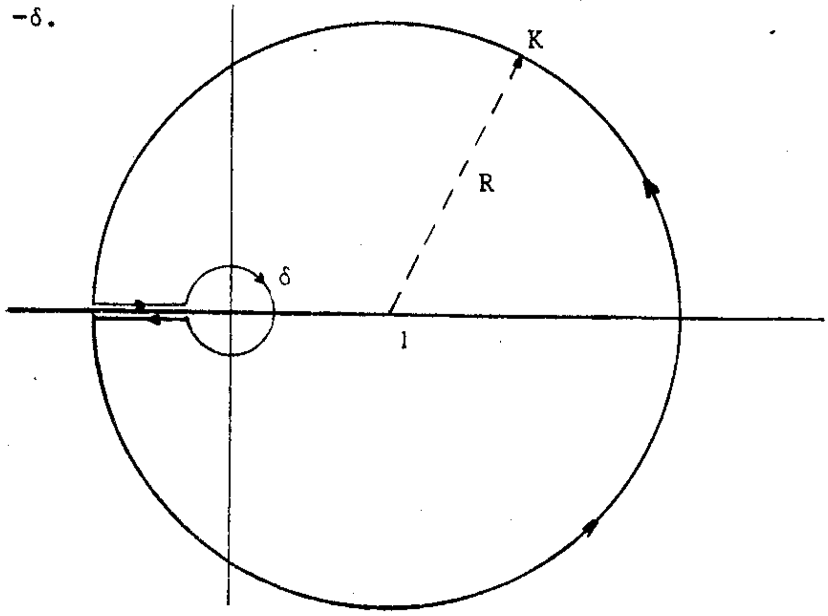
2. (10 punten). Bereken

$$\int_{|z-1|=R} \frac{\log z}{z-1}\,dz$$

voor $R > 1$ met behulp van de contourintegraal

$$\int_K \frac{\log z}{z-1}\,dz\,, \qquad \text{(zie figuur)}$$

waarbij K bestaat uit de cirkel om 1 met straal R, de cirkel om 0 met straal δ, en twee stukken rechte lijn langs de negatieve reële as tussen $1-R$ en $-\delta$.



3. (10 punten). Door

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{|z|=n} \frac{\sin(|z+1|)}{(z-a)^3}\,dz$$

is op $\{a \mid |a| < 1\}$ een holomorfe functie gedefinieerd.
Bewijs dit.

Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt alleen het antwoord gevraagd.

4. (7 punten). Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}\sin 3x}{x^2+1}\,dx$.

5. (7 punten). Bereken $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+z}}{z^4}\,dz$.

6. (7 punten). f is holomorf in $\mathbb{C}$ behoudens enkelvoudige polen in $z = 2$ en $z = 4$.

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0 .$$

$$\int_{|z|=6} f(z)dz = 0 .$$

$$\max\{|f(z)| \mid |z| \le 1\} = 2 .$$

$f(3+i)$ is reëel en positief.

Bereken f.

Tentamen januari 1974

1. (10 punten). Bereken

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi x) - 1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx .$$

2. (10 punten). In het gebied $G := \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$ is de functie f als volgt gedefinieerd

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-n} \sin\frac{z}{n} .$$

a) Bewijs dat f analytisch is in G.

b) Bepaal plaats en aard van de singulariteiten van f en motiveer Uw antwoord.

c) Bereken $f'(0)$.

3. (10 punten). Van een in $\{z \mid \operatorname{Re} z > -1\}$ analytische functie f luidt de Taylorreeks om $z = 0$:

$$f(z) = \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{3.4} - \frac{z^5}{4.5} + \dots .$$

Bereken $\operatorname{Re} f(i\sqrt{3})$.

N.B. Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt alleen het antwoord gevraagd.

4. (7 punten). Bereken

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{1}{(z-a)^2(z+2a)}\,dz$$

als functie van a ($|a| \neq 1$, $|a| \neq 2$).

5. (7 punten). Bereken van de functie f, gedefinieerd door

$$f(z) := |z^2 - 2iz - \tfrac{3}{4}| \qquad (|z| \leq 1)$$

het maximum en het minimum.

6. (7 punten). Bepaal alle functies f met de volgende eigenschappen:

a) f(z) is overal holomorf behalve in 0, -1 en +1:
   0 en -1 zijn polen van de eerste orde met tegengestelde residuen;
   +1 is een pool van de tweede orde.

b) $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$.

c) $f(2) = f(3) = \frac{1}{6}$.

Tentamen maart 1974

1. (10 punten). Theorievraag. Bewijs de volgende stelling.
Als K een gladde boog is in $\mathbb{C}$ en φ is continu op K, dan is door

$$F(z) := \int_K \frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw$$

een analytische functie F op $\mathbb{C} \setminus K$ gegeven.

2. Op het gebied $\{z \mid |z| < 1\}$ is de functie f gedefinieerd door

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{4k+1}}{4k+1} .$$

a) (2 punten). Motiveer dat f analytisch is en geef een formule voor f'.

b) (5 punten). Toon aan dat f analytisch kan worden voortgezet in het gebied G, bepaald door

$$G := \mathbb{C} \setminus \{z \mid (|z| = 1) \wedge (|\arg z| \le \tfrac{3}{4}\pi)\}$$

en geef een formule voor deze analytische voortzetting.

c) (3 punten). Noem deze analytische voortzetting g en bereken

$$\lim_{h \downarrow 0} (g(1+h) - g(1-h)) .$$

3. (10 punten). Bereken

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} \sin x}{x(x^2+1)}\, dx$$

en hiermee

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x(x^2+1)}\, dx .$$

N.B. Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt <u>alleen het antwoord</u> gevraagd.

4. (7 punten). Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 5\varphi}{\frac{3}{2} + \sqrt{2} \cos \varphi}\, d\varphi .$$

5. (7 punten). Bereken

$$\int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{\cos \frac{1}{z}} .$$

6. (7 punten). Bereken

$$\int_{-i}^{+i} z e^{z^2} \log z \, dz$$

(integratie langs het rechte lijnstuk op de imaginaire as).

Tentamen mei 1974

1. (10 punten). Geef een bewijs van de ongelijkheid van Cauchy, d.w.z.: "Zij f op en binnen de cirkel $C := \{z \mid |z| = r\}$ analytisch, en zij $|f(z)| \le M$ voor alle $z \in C$. Dan geldt

$$|f^{(n)}(0)| \le \frac{Mn!}{r^n} \qquad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}."$$

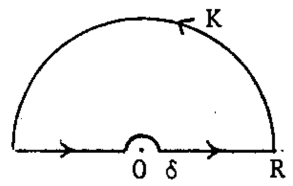
2. a) (7 punten). Bewijs dat door

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i z} - 1}{n(z-n)}$$

een analytische functie op $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ gedefinieerd is.

b) (3 punten). Bepaal de convergentiestraal van de Taylorreeks van f (zie onder a)) om het punt 0, en motiveer Uw antwoord.

3. a) (4 punten). Bereken $\displaystyle\int_K \frac{\log z}{(z^2+1)^2} \, dz$,



waarbij K de geschetste contour is (twee lijnstukken op de reële as, twee halve cirkels om 0, $0 < \delta < 1 < R$).

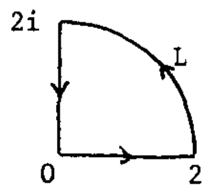
b) (6 punten). Bepaal met het onder a) gevonden resultaat

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2+1)^2} \, dx \, .$$

N.B. Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt alléén het antwoord gevraagd.

4. (7 punten). Bereken

$$\int_L \frac{dz}{e^{\frac{1}{2}\pi z^2}+1},$$



waarbij L de geschetste contour is (kwartcirkel om 0, twee rechte lijnstukken).

5. (7 punten). Bereken

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-1|=r} \frac{\bar{z}}{z}\,dz$$

als functie van r.

6. (7 punten). Bepaal de functie f die voldoet aan

a) f heeft een pool van orde 1 in $z = 0$;

b) f heeft een pool van orde 1 in $z = \infty$;

c) f is in alle overige z analytisch;

d) $\mathrm{Res}_\infty f(z) = 1$;

e) $f(1) = f'(1) = 6$.

Tentamen januari 1975

1. (10 punten) Gegeven:

$$G := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\},$$

φ is analytisch in G ,

$$\forall_{z\in G}\, [|\varphi(z)| < 1].$$

Bewijs dat

$$\int_{|z|=2} \frac{\varphi'(z)}{1-\varphi(z)}\,dz = 0 .$$

2. (10 punten) Gegeven is de functie f door

$$f(z) := \frac{\log z}{z^2 - 1} \qquad (\mathrm{Re}\ z > 0) .$$

a) Localiseer en beschrijf de eventuele singulariteiten van f.

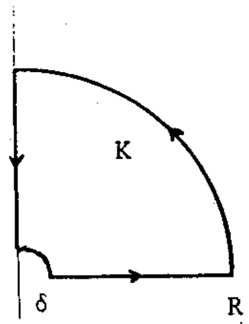
b) Bereken met behulp van de integraal

$$\int_K f(z)dz$$

(zie figuur, twee kwartcirkels, twee lijnstukken)

de waarde van

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1}\, dx .$$



3. (10 punten) Voor $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ z > 0\}$ is gegeven de functie f door

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-nz}}{n} .$$

a) Bewijs dat f analytisch is en bepaal $f'(z)$.

b) Laat zien dat f analytisch kan worden voortgezet in het gebied G, gedefinieerd door

$$G := \mathbb{C}\backslash\{z = x + iy \mid x = 0 \wedge |y| \geq \pi\} .$$

c) Noem deze analytische voortzetting g en bereken $g(-1)$.

Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt alleen het antwoord gevraagd.

4. (7 punten) Bereken

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 3ix - 2}\, dx .$$

5. (7 punten) Bepaal alle functies f met de volgende eigenschappen:

a) f is een gehele fucntie.

b) $|f''(z)| \leq |z|$ voor alle z.

c) $f(0) = f(1) = 0$.

6. (7 punten) Bereken

$$\int_{|z|=1} \frac{z^3 + 1}{(z^2 - a)(z + 2)z}\, dz$$

als functie van a.

<u>Tentamen maart 1975</u>

1. (10 punten) Door $F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n\left(1 - \cos \frac{2z}{n\sqrt{n}}\right)$ is een gehele functie F gedefinieerd. Bewijs dit, en bereken F"(0).

2. (10 punten) Voor reële positieve x is gedefinieerd de functie f door

$$f(x) := (1 + x)^{\frac{1}{x}} .$$

   a) f kan analytisch worden voortgezet in $\mathbb{C}$ met inachtneming van een snede langs de reële as van -1 naar $-\infty$. Bewijs dit.
   b) Noem deze analytische voortzetting g.
   Bereken g'(0).

3. (10 punten) Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2(x^2 + 1)}\, dx.$

Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt <u>alleen het antwoord</u> gevraagd.

4. (7 punten) Bepaal $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, zo dat

$$a + bi = \log((\sqrt[3]{i})^3 + \sqrt[3]{i^3}) .$$

5. (7 punten) Bereken $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z - 1)(z + 3)^2}\, dz.$

6. (7 punten) Bepaal alle functies f met de volgende eigenschappen:

   a) f is in $\mathbb{C}$ holomorf behoudens een pool van de eerste orde in $z = 1$ met residu 1;

   b) $\lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z})$ bestaat;

   c) op $\{z \mid |z| = 1 \wedge z \neq 1\}$ geldt $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$.

Tentamen mei 1975

1. (10 punten) Zij f analytisch op $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Verder is gegeven

   i) f heeft in 0 een pool van de orde 2 met residu 1.

   ii) f heeft in 1 een nulpunt van multipliciteit 3.

   iii) $\left|\frac{f(z)}{z \log z}\right|$ is begrensd op $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 2\}$.

   Bereken $f(z)$.

2. (10 punten) Op het gebied $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| < \log 2\}$ is de functie f gegeven door

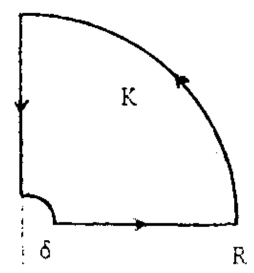
$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos nz \ .$$

   a) Bewijs dat f in het aangegeven gebied analytisch is.

   b) Motiveer dat f analytisch kan worden voortgezet in $\mathbb{C}$ behoudens een aftelbaar aantal polen, alle gelegen op $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| = \log 2\}$.

3. (10 punten) Zij K de nevenstaande geschetste kromme, bestaande uit twee kwartcirkels om 0 en twee lijnstukken langs de assen

$$(0 < \delta < \sqrt{2} < R) \ .$$



   a) Bereken $\int_K \frac{\log z}{z^4 + 4}\, dz$.

   b) Bereken met behulp van het resultaat van a) de integraal

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^4 + 4}\, dx \ .$$

N.B. Van opgave 4 wordt alleen het antwoord gevraagd.

4. a) (5 punten) Bereken het negatieve deel van de Laurentreeks van

$$(z + \frac{1}{z})^3 \frac{1}{\sqrt{4 + z}}$$

om $z = 0$, die convergeert in $z = 1$.

b) (5 punten) Bereken

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z \cos \frac{1}{z}}{(z+1)^2} \, dz \, .$$

Tentamen januari 1976

1. (10 punten)

a) Laat zien dat door

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(z \log n)}{2^n}$$

een gehele functie f is gedefinieerd.

b) Toon aan dat voor deze functie f geldt

$$f(z) = 1 + \mathcal{O}(z^2) \qquad (z \to 0) \, .$$

2. (10 punten) Bereken

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2(x - \pi)} \, dx \, .$$

3. (10 punten) f is analytisch en begrensd op

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 2\} \, .$$

Verder is gegeven dat $f(2) = 2$ en

$$f(n^2) = \frac{f(n)}{1 + \frac{1}{n}} \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}, \; n \geq 2 \, .$$

Bepaal f.

N.B. Van de opgaven 4, 5 en 6 worden uitsluitend de antwoorden gevraagd.

4. (7 punten) Zij $|a| < 1$ en C_1 de positief doorlopen cirkel met middelpunt 0 en straal 1 (begin- en eindpunt -1). Bereken

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\log z}{(z-a)^2}\, dz \ .$$

5. (7 punten) Zij $a > 0$. Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{\sin\varphi + ia\cos\varphi} \ .$$

6. (7 punten) Zij f analytisch in het halfvlak $G := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$. Zij $f(x) := \arctan x$ als $x \in G \cap \mathbb{R}$. Geef de Taylorreeks van f rond het punt -1 en de convergentiestraal van deze reeks.

<u>Tentamen maart 1976</u>

1. (10 punten)

a) Laat zien, dat door

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{(n-1)!}$$

een gehele functie f is gedefinieerd.

b) Bereken van de in a) gedefinieerde functie f de waarde van $f'(0)$.

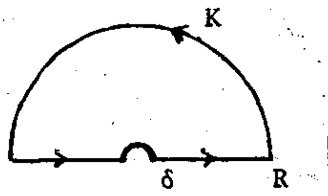
2. (10 punten) Bereken

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{2}\pi x}{1-x^2}\, dx \ .$$

3. (10 punten) Zij K de onderstaand geschetste integratieweg (twee halve cirkels om 0, twee stukken langs de reële as, $R > 1 > \delta > 0$).

a) Bereken

$$\int_K \frac{z^2 \log z}{(z^2+1)^2}\, dz .$$



b) Bereken met behulp van a) de waarde van

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \log x}{(x^2+1)^2}\, dx .$$

N.B. Van de opgaven 4, 5 en 6 worden alleen de antwoorden gevraagd.

4. (7 punten) Van een analytische functie f is gegeven dat $\mathrm{Re}\, f(z) = e^{ax}\cos 2\pi y$ ($z = x + iy$; $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$).
Verder is $f(1) - 2\pi i - 1$ een negatief, reëel getal.
Bereken a en $f(z)$.

5. (7 punten) Herleid $\{1 - (-4)^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{2}+i}$ tot de vorm $a + bi$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$).

6. (7 punten)

a) Bepaal de grootste waarde van ρ met de eigenschap dat de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n (2-z)^n$$

convergeert op $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$.
Noem de som van de reeks $\varphi(z)$.

b) f is analytisch in $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ en $f(z) = \varphi(z)$ in een omgeving van 0. Wat voor soort singulariteit heeft f in $z = 1$?

Tentamen juni 1976

1. (10 punten) Theorievraag.

Bewijs de volgende stelling:

Zij f analytisch op en binnen de positief georiënteerde Jordankromme J, behoudens eindig veel polen, die alle binnen J liggen. Laat verder f geen nulpunten op J hebben.

Dan geldt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_J \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P ,$$

waarbij N het aantal nulpunten, P het aantal polen van f binnen J voorstelt, geteld met de vereiste multipliciteit.

2. (10 punten)

a) Bewijs dat door

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{z} \frac{dw}{w^2 - 1} \quad \text{(rechtlijnig geïntegreerd)}$$

een analytische functie van z is gedefinieerd in het bovenhalfvlak V ($V := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$).

b) Noem deze functie F en bereken

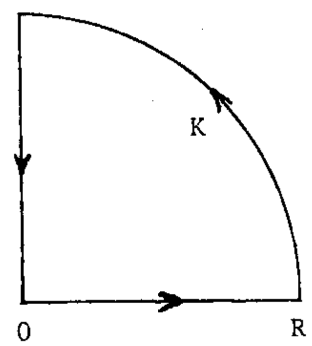
$$\lim_{y\to\infty} F(iy) .$$

c) Toon aan, dat F analytisch kan worden voortgezet in het buitengebied G van de eenheidscirkel ($G := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$) en bereken de Laurentreeks naar machten van z, die in $V \cap G$ convergeert naar F(z).

3. (10 punten) De integratieweg K (zie figuur) bestaat uit twee rechte stukken langs de assen en een kwart cirkel om 0 (R > 2).

a) Bereken

$$\int_K \frac{e^{(-1+i)z}}{z^4 + 4}\,dz .$$



b) Bereken met behulp van a) de integraal

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}(\cos x - \sin x)}{x^4 + 4}\, dx .$$

N.B. Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt uitsluitend het antwoord gevraagd.

4. (7 punten) Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\cos\varphi + 2\sin\varphi - i} .$$

5. (7 punten) De Möbiustransformatie van het z-vlak naar het w-vlak, waarbij $z = x + iy$, $w = u + iv$ $(x,y,u,v \in \mathbb{R})$, heeft de eigenschappen

a) Het beeld van de x-as is de cirkel

$$\{w \mid |w - 1| = 1\} .$$

b) Het beeld van de y-as is de u-as.

c) Het beeld van de cirkel $\{z \mid |z - i| = 1\}$ is de v-as.

Bepaal het beeld van $z = 1 + i$.

6. (7 punten) Bereken

$$\lim_{z \to i} (2 \arctan z + i \log(1 + iz)) .$$

Tentamen januari 1977

1. (10 punten) Zij a een reëel getal, $|a| < 1$.
Laat op het gebied $\{z \in \mathbb{C} \mid e^z + e^{-z} \neq 0\}$ de functie f gegeven zijn door

$$f(z) := \frac{e^{az}}{e^z + e^{-z}} .$$

Verder is gegeven de rechthoekige integratieweg K: $R\ (> 0)$, $R + i\pi$, $-R + i\pi$, $-R$, R.

Bereken met behulp van de integraal $\int_K f(z)dz$ de waarde van

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh x}\,dx .$$

2. (10 punten) In het gebied G_1 gedefinieerd door $G_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ is gegeven de functie F door

$$F(z) := \int_0^z \frac{\cos w}{w^2+1}\,dw \qquad \text{(rechtlijnige integratieweg).}$$

a) Laat zien dat F analytisch is in G_1.
b) Laat zien dat F analytisch kan worden voortgezet in het gebied G_2 gedefinieerd door

$$G_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\} .$$

c) Bereken van de Laurentreeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ voor F, die in G_2 convergeert, de coëfficiënt c_1.

3. (10 punten) Zij G het gebied, gedefinieerd door

$$G := \mathbb{C}\backslash\{x + iy \mid y = 0 \wedge x \le -1\} .$$

Beschouw voor $z \in G$ de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(z+n)} .$$

Laat zien dat de som van deze reeks voor alle punten van G op één singulariteit na bestaat, en een analytische functie f is. Bereken plaats en aard van genoemde singulariteit en het residu van f aldaar.

Van opgaven 4, 5 en 6 wordt alleen het antwoord gevraagd.

4. (7 punten) Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{2\cos\varphi + \sin\varphi + 3}\,d\varphi ,$$

5. (7 punten) Bepaal een functie f, die aan de volgende voorwaarden voldoet.
   f is overal holomorf, behalve in $z = 2$, waar f een pool van orde 2 heeft met residu 1;
   f heeft in $z = 0$ een nulpunt van multipliciteit 1;
   f heeft een essentiële singulariteit in $z = \infty$;
   $f(1) = 2$.

6. (7 punten) Bereken $\mathrm{Res}_0 f(z)$, waarbij

$$f(z) = \frac{\cos(\pi \frac{z+1}{z})}{(z+1)^2(z-3)} .$$

Tentamen maart 1977

1. a) (3 punten) Laat zien dat

$$\forall_{w \in C} \, [(|w| \leq 1) \Rightarrow (|e^w - 1 - w| \leq |w|^2) \quad .$$

   (Het is niet raadzaam $w = u + iv$ te stellen.)

   b) 7 punten) Bewijs dat door

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(e^{\frac{z}{n}} - 1)$$

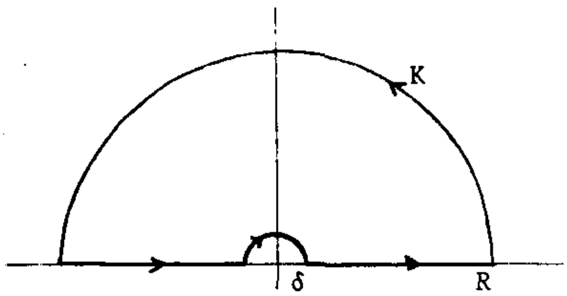
   een gehele functie van z is gedefinieerd.

2. (10 punten) Zij K de integratieweg, geschetst in nevenstaande figuur.
   (2 stukken reële as, 2 halve cirkels om 0,
   $0 < \delta < 1 < R$). Bereken met behulp van

$$\int_K \frac{z^{\frac{1}{2}} \log z}{z^2 + 1} \, dz$$

   de waarde van

$$\int_0^{\infty} \frac{x \log x}{x^2 + 1} \, dx \, .$$



3. (10 punten) Van de functie f is gegeven

   i) f is analytisch in $\mathbb{C}$ behoudens twee polen met residu 1, resp. 0;
   ii) de enige nulpunten van f zijn $z = 0$ (multipliciteit 2) en $z = \infty$ (multipliciteit 1).

Laat zien dat f van de volgende vorm is:

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-2a)^2} \quad (a \neq 0) .$$

Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt alleen het antwoord gevraagd.

4. (7 punten) Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos \varphi}{1 + i \sin \varphi} \, d\varphi .$$

5. (7 punten) Bij een Möbiustransformatie $z \to w = u + iv$ worden afgebeeld:

de reële as op $\{u + iv \in \mathbb{C} \mid u = v\}$;

cirkel $|z - i| = \sqrt{2}$ op de imaginaire as ;

de raaklijn in -1 op $\{u + iv \in \mathbb{C} \mid u = 1\}$.

Bepaal deze transformatie.

6. (7 punten) Bereken

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 \sin 4z} .$$

Tentamen juni 1977

1. (10 punten) Zij $n \in \mathbb{N}$. Met K_n geven we het vierkant aan waarvan de hoekpunten zijn $\pi(n+\frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$.

a) Toon aan dat $|\sin z| \geq 1$ op de kromme K_n.

Zij $f(z) := \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ voor $z \in \mathbb{C} \backslash \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Toon aan dat f in 0 een ophefbare singulariteit heeft.

c) Toon aan dat f in het punt $k\pi (k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\})$ een pool van de eerste orde met residu $(-1)^k$ heeft.

Zij $$I_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{K_n} \frac{f(w)}{w(w-z)} \, dw \quad (z \neq k\pi) .$$

d) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

e) Bewijs nu

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2\pi^2 - z^2} \qquad (z \neq k\ ,\ k \in \mathbb{Z})\ .$$

2. (10 punten) Zij

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (|z| < 1)$$

en

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \qquad (|z| < 1)\ .$$

Definieer

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\ .$$

Bewijs dat

$$f(z)g(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n \qquad (|z| < 1)\ .$$

3. (10 punten) Bepaal alle functies f met de volgende vier eigenschappen.

i) f is holomorf op $\mathbb{C}\backslash\{1,-1\}$; in 1 heeft f een pool van de orde 1 en in -1 heeft f een pool van de orde 2;

ii) $\int_K f(z)dz = 0$, waarin K de cirkel $\{z \mid |z| = 2\}$ is;

iii) $f(z) = \mathcal{O}(|z|)$, $(z \to \infty)$;

iv) f heeft in 0 een nulpunt met de multipliciteit 2.

Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt alleen het antwoord gevraagd.

4. (7 punten) Bereken

$$\operatorname{Res}_{z=1}\left\{\frac{\sin \frac{1}{z-1}}{(z^2 - z)^2}\right\}\ .$$

5. (7 punten) Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx\ .$$

6. (7 punten) Zij K het lijnstuk met beginpunt 1 en eindpunt i.
Bepaal

$$\int_K \frac{\log z}{z^{i+1}}\,dz \; .$$

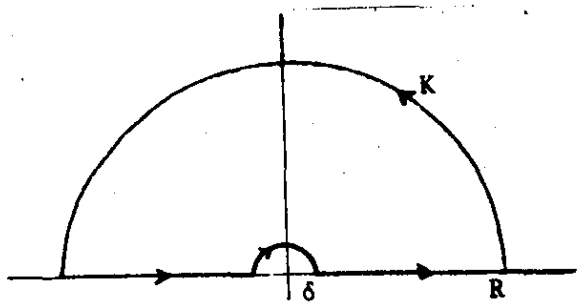
Tentamen januari 1978

1. (10 punten) Zij K de integratieweg, geschetst in nevenstaande figuur (2 stukken reële as, 2 halve cirkels om 0, $0 < \delta < 1 < R$).
Bereken met behulp van

$$\int_K \frac{\log z}{z^{\frac{1}{2}}(z^2+1)}\,dz$$

de waarde van

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx \; .$$



2. (10 punten) Zij α een reëel getal, $0 < \alpha < 2$.
Laat op het gebied $\{z \in \mathbb{C} \mid e^z + 1 \neq 0\}$ de functie f gegeven zijn door

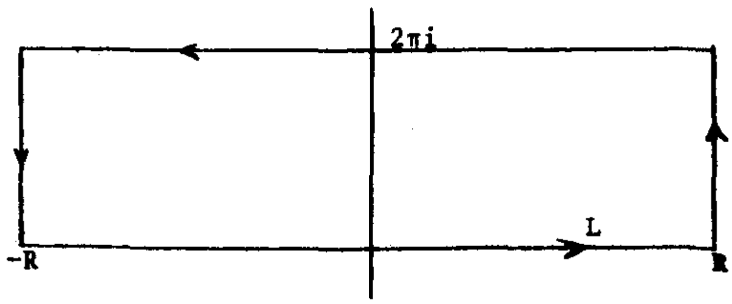
$$f(z) := \frac{e^{\alpha z}}{(e^z+1)^2} \; .$$

Verder is gegeven de rechthoekige integratieweg L (zie figuur).
Bereken met behulp van

$$\int_L f(z)\,dz$$

de waarde van

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(e^x+1)^2}\,dx \; .$$



3. Zij G het gebied gedefinieerd door

$$G := \mathbb{C}\backslash\{x+iy \mid y = 0 \wedge x \leq -1\} \; .$$

a) 7 punten) Bewijs dat door

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(z+n)}{n^2}$$

een op G analytische functie is gedefinieerd.

b) 3 punten) Wat is de aard van de singulariteit in het punt $z = -1$?

Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt alleen het antwoord gevraagd.

4. (7 punten) Bepaal de aard der singulariteiten en de waarden der bijbehorende residuen van de functie

$$\frac{z^2}{z^2+1} e^{\frac{1}{z}} .$$

5. (7 punten) Bepaal de Möbiustransformatie van het z-vlak naar het w-vlak met de volgende eigenschappen:

a) het beeld van de cirkel $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ is de cirkel $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$;

b) het beeld van $z = \infty$ is $w = -\frac{1}{2}i$;

c) het beeld van $z = i$ is $w = -i$.

6. (7 punten) Gegeven de functie

$$f(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{z^3} .$$

Bereken

$$\int_{|z|=3} \frac{f'(z)}{f(z)} dz .$$

Tentamen maart 1978

1. Zij $A := \mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$.

Bewijs dat op A een analytische functie F wordt gedefinieerd door

$$F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{1-(nz)^2} .$$

Zij K de cirkel met middelpunt 0 en straal 2, positief geöriënteerd. Bereken

$$\int_K F(z)dz .$$

2. f is een gehele functie met de volgende eigenschappen

   i) $f(0) = 1$, $f(1) = -1$;

   ii) $\forall_{z\in\mathbb{C}} \, [|f(z)| \le 2 + 3|z|]$.

   Hierdoor is f bepaald.

   Bewijs deze bewering en bereken $f(z)$.

3. Zij $H := \{x + iy \mid y > -1\}$ en K de nevenstaande contour (twee stukken reële as, twee halve cirkels om 0, $0 < \delta < 1 < R$).

   Zij f een analytische functie op $H\backslash\{i\}$ waarvan gegeven is

   a) $\lim\limits_{z\to i} (z - i)f(z) = i$

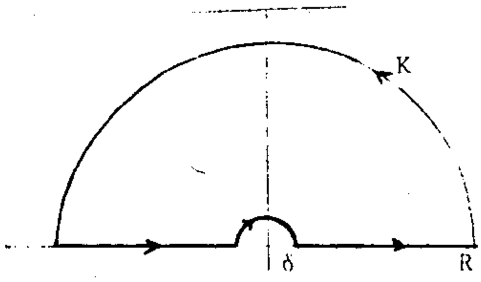
   b) $\forall_{x\in\mathbb{R}} \, [f(x) = f(-x) \in \mathbb{R}]$

   c) $\forall_{z\in H} \, [|z| > 2 \Rightarrow |z|^{3/2}|f(z)| < 10]$.

   Bereken met behulp van

   $$\int_K e^{iz} f(z) \log z \, dz$$

   de integraal $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\cos x \, dx$.



Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt alleen het antwoord gevraagd.

4. Bereken

   $$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{e^{\bar{z}}}{z - a} dz \quad (|a| \neq 2) .$$

5. Bepaal alle functies f van de vorm

   $$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad a,b,c,d \text{ constant, } ad - bc \neq 0$$

   met de eigenschappen

   i) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 1$.

   ii) De functie $|f(z)|$ bereikt op $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$ een minimum in $z = \frac{1}{2}i$ en heeft op deze verzameling als maximale waarde 3.

6. Bereken $\displaystyle\int_0^{4i} \log(e^z) dz$ (rechtlijnige integratie).

Tentamen mei 1978

1. Theorievraag. In het collegedictaat wordt in een stelling door de formule

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

een verband gelegd tussen het aantal nulpunten N van een analytische functie f en een integraal over een Jordankromme J.
Geef een correcte formulering van de bedoelde stelling en bewijs deze.

2. Bewijs dat door de definitie

$$F(z) := \sin \pi z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + \frac{z}{n})}{z - n}$$

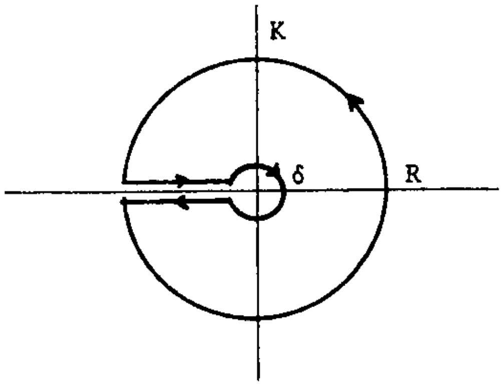
een in het rechterhalfvlak $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ op ophefbare singulariteiten na analytische functie F is gedefinieerd.
Veronderstel dat F in de genoemde ophefbare singulariteiten continu is voortgezet. (We noemen de dan verkregen functie weer F.)
Bereken $F(n)$ $(n \in \mathbb{N})$.

3. Zij G het gebied, ontstaan uit $\mathbb{C}$ door weglaten van de verzameling $\{x + iy \mid (x \le 0) \wedge (y = 0)\}$ en zij K de integratieweg, zoals onderstaand is getekend (twee cirkels om 0; twee stukken negatief reële as, $0 < \delta < 1 < R$). Bereken met behulp van

$$\int_K \frac{z^{1/3}}{(z-1)^2}\, dz$$

de waarde van

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2}\, dx .$$



Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt alleen het antwoord gevraagd.

4. Bereken

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos 6\varphi}{3 + 2\sqrt{2}\cos\varphi}\, d\varphi .$$

5. Van een rationale functie $f(z)$ hebben teller en noemer ongelijke nulpunten en een graad ≤ 3. f heeft singulariteiten in 0 en in 2. $\text{Res}_2 f(z) = 0$. Van de Taylor-ontwikkeling van $f(z)$ rond $z = 1$ zijn gegeven de coëfficiënten $c_0 = 2$, $c_1 = 3$, $c_2 = 7$. Bereken $f(z)$.

6. Gegeven

$$f(a) := \int_1^i \frac{ae^{az}}{z}\, dz \quad \text{(rechtlijnige integratieweg)} .$$

Bereken $f'(0)$.

Tentamen januari 1979

1. (10 punten) Bepaal alle functies f met de volgende eigenschappen:

i) f is analytisch in $\mathbb{C}$ met uitzondering van eindig veel singulariteiten.

ii) $\forall_{R>0}\ \forall_{z\in \text{Dom } f}\ [|z| = R \Rightarrow |f(z)| \leq 40\ \frac{R^{5/2}+1}{R}]$.

iii) f beeldt de reële as af in de reële as.

iv) f heeft een tweevoudig nulpunt.

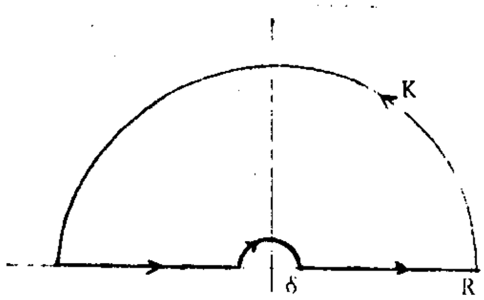
v) $f(i) = 4$.

2. (10 punten) Zij K de geschetste kromme (twee stukken reële as, twee halve cirkels om 0, $0 < \delta < 2 < R$).
Bereken met behulp van

$$\int_K \frac{z^{\frac{1}{2}}\log z}{z^4+4}\, dz$$

de waarde van de integraal

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,\log x}{x^2+4}\, dx .$$



3. (10 punten) Laat de functie F gegeven zijn door de uitdrukking

$$F(z) := -iz + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \frac{e^{2inz}}{n}$$

voor die waarden van z waarvoor de reeks absoluut convergeert.

a) Bepaal het definitiegebied van F.

b) Bepaal $F'(z)$.

c) Laat zien dat F kan worden voortgezet tot een analytische functie G in het gebied

$$\mathbb{C}\backslash\{x + iy \mid y = 0 \wedge |x| \geq \tfrac{1}{2}\pi\} .$$

d) Bewijs dat voor alle z in dit gebied geldt $G(z) = G(-z)$.

Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt alleen het antwoord gevraagd.

4. (7 punten) Bereken

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{1-ix} - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx .$$

5. (7 punten) Bereken

$$\int_{|z|=1} \frac{z e^{\frac{1}{2z+1}}}{(z-2)^2}\, dz .$$

6. (7 punten) Gegeven de Möbius-afbeelding $w = \frac{z+1}{z-1}$. Schets in het z-vlak (bijvoorbeeld door arcering) de figuur die als w-beeld oplevert: het vierkante domein

$$\{w \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, w| \leq 1 \wedge 0 \leq \mathrm{Re}\, w \leq 2\} .$$

Tentamen maart 1979

1. (10 punten) Theorievraag.
Bewijs de volgende stelling, voorkomend in het boek "Algebra en Analyse": "Zij G een open verzameling in $\mathbb{C}$; zij R een assenparallelle rechthoek met rand ∂R, $R \subset G$; zij tenslotte f een in G overal analytische functie. Dan is

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0\text{"} .$$

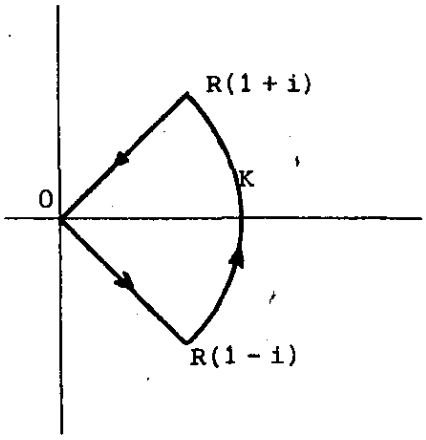
Opmerking. Desgewenst kunt U in het gegeven voor R in plaats van een assenparallelle rechthoek ook een willekeurige driehoek nemen. De corresponderende stelling komt voor in het collegedictaat wiskunde 52.

2. (10 punten) Zij K de integratieweg, geschetst in nevenstaande figuur (twee rechte lijnstukken, kwartcirkel om 0, $R > 1$).
Bereken met behulp van de integraal

$$\int_K \frac{e^{-z}}{z^4 - 1}\, dz$$

de waarde van

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}(\cos x - \sin x)}{4x^4 + 1}\, dx .$$



3. (10 punten)
a) Laat zien dat door

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)!\,(e^{\frac{z}{(n+1)!}} - 1)$$

een gehele functie f is gedefinieerd.
b) Toon aan dat $f(z) = z + \mathcal{O}(|z|^2)$ $(z \to 0)$.

Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt alleen het antwoord gevraagd.

4. (7 punten) Bereken

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{\sin \frac{1}{z}}\, dz .$$

5. (7 punten) Bereken van de functie $\Psi_z\ |\cos z|$ op de verzameling $\{z \in \mathbb{C} \mid |\sin z| \le 2\}$ de maximale en de minimale waarde.

6. (7 punten) Van de functie f, die analytisch is in het halfvlak $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -1\}$ luidt de Taylorontwikkeling om $z = 0$

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} z^{n+1} .$$

Bereken reële a en b zo dat $f(1 + 2i) = a + bi$.

Tentamen mei 1979

1. (10 punten) Zij f een analytische functie, gedefinieerd op $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, waarvoor geldt

$$\forall_{R>0}\ \forall_{z\in\mathbb{C}}\ [(|z| = R) \Rightarrow (|f(z)| \leq R^{\frac{1}{2}} + |\log R|)] .$$

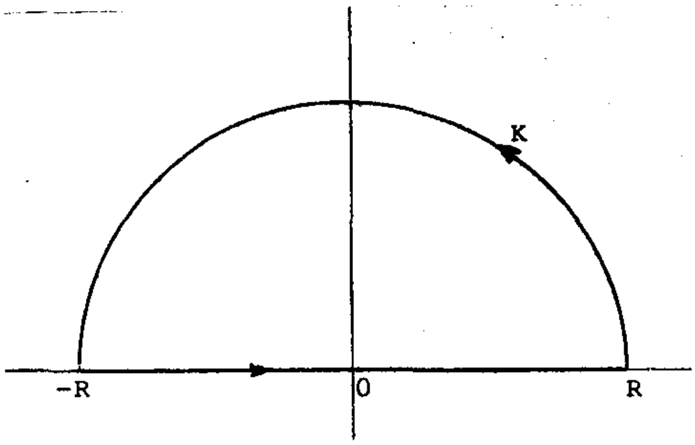
Bewijs dat f(z) constant is.

2. (10 punten) Bereken

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\, dx$$

met behulp van de integraal

$$\int_K \frac{e^{iz} - 1}{z(z^2+1)}\, dz$$



over de geschetste contour K (stuk reële as, halve cirkel om 0 in bovenhalfvlak, $R > 1$).

3. (10 punten) De functie F is gedefinieerd door

$$F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{2}{z-1}\right)^n$$

voor alle z, waarvoor de reeks absoluut convergeert.

a) Bepaal het definitiegebied van F.

b) Bereken F'(z).

c) Laat zien dat F analytisch kan worden voortgezet in

$$\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \wedge \text{Im } z \leq 0\} .$$

d) Noem deze analytische voortzetting G en bereken G(0).

Van de opgaven 4, 5 en 6 wordt <u>alleen het antwoord</u> gevraagd.

4. (7 punten) Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5\cos\varphi + 3i\sin\varphi + 4} .$$

5. (7 punten) Bepaal alle Möbiustransformaties $z \to w$, die $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$ afbeelden op de eenheidscirkel en rechten door 1 op rechten door 0.

6. (7 punten) De functie $\dfrac{1 + z}{z(1 - \cos 2z)}$ heeft een Laurentreeks naar machten van z, die convergeert voor $z = 1$. Bepaal van deze reeks het hoofddeel en het convergentiegebied.

Antwoorden Tentamens Wiskunde 52

Antwoorden tentamen januari 1973

2. log w is op C_n geen continue functie (sprong bij $-n$). Splits evenwel C_n in twee halve cirkels D_n en E_n in onder-, resp. bovenhalfvlak, dan is voor $|z| < 1$ zowel

$$\int_{D_n} \frac{\log w}{w^2(w-z)}\,dw \text{ als } \int_{E_n} \frac{\log w}{w^2(w-z)}\,dw$$

een analytische functie van z (zie opgave 1), dus f_n is analytisch op $\{z \mid |z| < 1\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Als we ons, nu in het z-vlak, beperken tot een willekeurige compacte cirkelschijf $C_\rho = \{z \mid |z| \le \rho < 1\}$ dan is bovendien

$$|f_n(z)| = \left|\int_{C_n} \frac{\log w}{w^2(w-z)}\,dw\right| \le \frac{\log n + \pi}{n^2(n-\rho)}\, 2\pi n = \mathcal{O}(n^{-\frac{3}{2}}) \quad (n \to \infty),$$

uniform in z $(z \in C_\rho)$ dus $\sum_1^\infty f_n(z)$ uniform convergent op C_ρ. Volgens de stelling van Weierstrass is F(z) dus holomorf op C_ρ. Daar C_ρ willekeurig was, is het gevraagde bewezen.

3. $f'(z) = \sum_{n=1}^\infty z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$ $(|z| < 1)$ (termsgewijze differentiatie van een machtreeks binnen zijn convergentiecirkel). Dus $f'(z) = \frac{1}{1-z} =$

$$= \frac{1}{(1-\frac{3}{4}i) - (z-\frac{3}{4}i)} = \sum_0^\infty \frac{(z-\frac{3}{4}i)^n}{(1-\frac{3}{4}i)^{n+1}}$$ rond $z = \frac{3}{4}i$. Uit de integratiestelling voor machtreeksen volgt nu $f(z) - f(\frac{3}{4}i) = \sum_0^\infty \frac{1}{n+1} \frac{(z-\frac{3}{4}i)^{n+1}}{(1-\frac{3}{4}i)^{n+1}}$ (rond $\frac{3}{4}i$).

Tenslotte is $f(\frac{3}{4}i) = -\log(1-\frac{3}{4}i) = -\log\frac{5}{4} + i\arctan\frac{3}{4}$ dus

$$f(z) = -\log\frac{5}{4} + i\arctan\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{z-\frac{3}{4}i}{1-\frac{3}{4}i}\right)^n \quad (\text{rond } \tfrac{3}{4}i).$$

4. Zie antwoorden tentamen wiskunde 50, opgave 2.

5. $\dfrac{z^2}{(z^2+a)(z-2)} = \dfrac{1}{z} + o(\frac{1}{R})$ als $|z| = R \to \infty$. Dus (kanaalmethode en schatting)

$$\int_{|z|=R>2} \frac{z^2}{(z^2+a)(z-2)}\,dz = 2\pi i$$

en

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2dz}{(z^2+a)(z-2)}\,dz = 2\pi i - 2\pi i \cdot \frac{2^2}{2^2+a} = \frac{2\pi i a}{4+a} .$$

6. $-\dfrac{\pi}{2e^2}$.

<u>Antwoorden tentamen maart 1973</u>

1. Noem $f_n(z) := \frac{1}{n} g(\frac{z}{n})$, $(n \in \mathbb{N},\ |z| < 1)$. Alle f_n zijn analytisch, daar $|\frac{z}{n}| < 1$, als samengestelde functie van $\gamma_z(\frac{z}{n})$ en $\frac{1}{n}$ g. Bovendien is

$$\lim_{w\to 0} \frac{g(w) - g(0)}{w} = g'(0) = 1$$

dus $|\frac{g(w)}{w}| \le 2$ in een omgeving van 0. Meer expliciet:

$$\exists_{\delta>0}\ \forall_w (|w| < \delta \Rightarrow |g(w)| \le 2|w|) .$$

Neem nu $n > \frac{1}{\delta}$ dan is, uniform op $\{z \mid |z| < 1\}$,

$$|\tfrac{z}{n}| < \tfrac{1}{n} < \delta \text{ dus } |g(\tfrac{z}{n})| \le 2|\tfrac{z}{n}| < \tfrac{2}{n}$$

en daarmee $|f_n(z)| < \frac{2}{n^2}$, waaruit de uniforme convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ volgt. F is dientengevolge analytisch volgens Weierstrass. Voorts is

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{1}{n} g(\tfrac{z}{n}))' = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} g'(\tfrac{z}{n}) \qquad \text{(kettingregel!)}$$

en dus $F'(0) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. $f(z)$ - hoofddeel$_0$ $f(z)$ is een begrensde overal analytische functie, dus constant volgens Liouville. Conclusie: $f(z) = \frac{A}{z^2} + \frac{1}{z} + C$, $(C \neq 0)$.

$f(z) = \dfrac{Cz^2 + z + A}{z^2}$, $z = 1$ is het enige nulpunt, moet dus orde 2 hebben.

$Cz^2 + z + A = C(z-1)^2$ dus $C = -\frac{1}{2}$, $A = -\frac{1}{2}$, $f(z) = -\frac{1}{2}\,\dfrac{(z-1)^2}{z^2}$.

3. a) $\left|\int_I \dfrac{z^{-\frac{1}{4}}}{1-z}\,dz\right| \leq \dfrac{R^{-\frac{1}{4}}}{R-1}\,2\pi R = \mathcal{O}(R^{-\frac{1}{4}}) \to 0 \quad (R \to \infty)$.

b) $\left|\int_{II} \dfrac{z^{-\frac{1}{4}}}{1-z}\,dz\right| \leq \dfrac{r^{-\frac{1}{4}}}{1-r}\,2\pi r = \mathcal{O}(r^{\frac{3}{4}}) \to 0 \quad (r \downarrow 0)$.

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{1+x}\,dx$ bestaat omdat de integrand continu is en $\mathcal{O}(x^{-\frac{5}{4}})$ als $x \to \infty$, $\mathcal{O}(x^{-\frac{1}{4}})$ als $x \downarrow 0$. Volgens de residustelling is ($z = 1$ is enkelvoudige pool)

$$\int_K \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{1-z}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_1 \frac{z^{-\frac{1}{4}}}{1-z} = -2\pi i \exp(-\tfrac{1}{4}\log 1) = -2\pi i$$

$$\int_{III} \frac{z^{-\frac{1}{4}}dz}{1-z} = \int_R^r \frac{(-x+i0)^{-\frac{1}{4}}}{1+x}\,(-dx) = \int_r^R \frac{x^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{4}\pi i}}{x+1}\,dx =$$

$$= -e^{-\frac{1}{4}\pi i}\int_r^R \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{x+1}\,dx\ .$$

$$\int_{IV} \frac{z^{-\frac{1}{4}}dz}{1-z} = \int_r^R \frac{(-x-i0)^{-\frac{1}{4}}}{1+x}\,(-dx) = -\int_r^R \frac{x^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{4}\pi i}}{x+1}\,dx =$$

$$= -e^{\frac{1}{4}\pi i}\int_r^R \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{x+1}\,dx\ .$$

Samengevat vinden we

$$-2\pi i = \int_I + \int_{II} - 2i\left(\frac{e^{\frac14\pi i} - e^{-\frac14\pi i}}{2i}\right)\int_r^R \frac{x^{-\frac14}}{1+x}\,dx,$$

en dus door limietovergang ($R \to \infty$, $r \downarrow 0$)

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\frac14}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}\ .$$

4. $-i$. $\quad [f(z) = \frac12\left(\frac{z^2}{1-z}\right)'' = \frac12\left(-z - 1 + \frac{1}{1-z}\right)'']$.

5. $\frac{8\pi}{3.2^n}$. $\quad [= \int_0^{2\pi} \frac{e^{inx}}{\frac54 - \cos x}\,dx = -\frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{z^n}{(z-2)(z-\frac12)}\,dz]$.

6. $f(z) = \frac{\pi}{2} + i \log z$ (Cauchy-Riemann).

Antwoorden tentamen mei 1973

1. f is geheel met een pool in ∞, dus f is een veelterm

   (f - hoofddeel$_\infty$ = constant, Liouville).

   Uit de eerste integraal volgt dat f binnen of op $\{z \mid |z| = 3\}$, twee nulpunten heeft, dus f is een kwadratische functie.
   Uit de tweede integraal volgt dat $z = 0$ een singulariteit (dus pool) is voor $\frac{1}{f}$, dus $f(z) = z(Az + B)$, en dat $\frac{1}{B} = 1$. Tenslotte $A + B = 3$, ergo $f(z) = 2z^2 + z$.

2. $\frac{\log z}{z-1}$ is op en binnen K analytisch met ophefbare singulariteit in $z = 1$, dus $\int_K \frac{\log z}{z-1}\,dz = 0$ (hoofdstelling). We splitsen K in vier stukken:

$$\int\limits_{|z-1|=R} \frac{\log z}{z-1}\, dz = J \text{ wordt gevraagd;}$$

$$\int_{R-1}^{\delta} \frac{\log(-x + i0)}{-x-1}\,(-dx) = \int_{R-1}^{\delta} \frac{\log x + i\pi}{x+1}\, dx = \int_{\delta}^{R-1} \frac{-\log x - i\pi}{x+1}\, dx;$$

analoog onder de snede:

$$\int_{\delta}^{R-1} \frac{\log(-x - i0)}{-x-1}\,(-dx) = \int_{\delta}^{R-1} \frac{\log x - i\pi}{x+1}\, dx;$$

$$\left| \int\limits_{|z|=\delta} \frac{\log z}{z-1}\, dz \right| \le \frac{|\log \delta| + \pi}{1-\delta} \cdot 2\pi\delta = \mathcal{O}(1) \text{ als } \delta \downarrow 0 .$$

Samengevat:

$$J + \int_{\delta}^{R-1} \frac{-2\pi i dx}{x+1} + \mathcal{O}(1) = 0 \quad (\delta \downarrow 0)$$

en dus

$$J = 2\pi i \int_{0}^{R-1} \frac{dx}{x+1} = 2\pi i \log R .$$

3. Voor iedere compacte verzameling $D_\rho := \{a \mid |a| \le \rho < 1\}$ en iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt, uniform in $a \in D_\rho$, $|z| = n$:

$$\left|\frac{\sin(|z+1|)}{(z-a)^3}\right| \le \frac{1}{(n-\rho)^3} \qquad (|z+1| \text{ is reëel!}) .$$

Verder is bij constante a de integrand, evenals zijn partiële afgeleide naar a continu op $\{z \mid |z| = n\}$, en is de integrand bij constante z analytisch op $\{a \mid a \in D_\rho\}$. Dus is iedere term uit de oneindige reeks een analytische functie f_n van a ($a \in D_\rho$). Tenslotte is $|f_n(a)| \le \frac{1}{(n-\rho)^3} \cdot 2\pi n = \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$ uniform op D_ρ. Dus stelt (Weierstrass) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ op iedere D_ρ en daardoor op $\{a \mid |a| < 1\}$ een analytische functie voor.

4. $\frac{\pi}{2i}\,(e^{-4} - e^{-2})$.

5. $\frac{\pi i}{8}$. [binomiaalreeks].

6. Zie antwoorden tentamen wiskunde 50, opgave 2.

Antwoorden tentamen januari 1974

1. Noem $f(z) := \dfrac{e^{2\pi iz} - 1}{(z-1)(z^2+1)}$. f is holomorf op en boven de reële as, behoudens enkelvoudige pool in $z = i$ en opheﬂbare singulariteit in $z = 1$. f is continu op de reële as en $\mathcal{O}(|x|^{-3})$ als $x \to \pm\infty$, dus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi ix} - 1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$$

bestaat. Verder is

$$\Bigl|\int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}\,z\geq 0}} f(z)\,dz\Bigr| \leq \frac{2}{(R-1)(R^2-1)}\,.\,\pi R \to 0 \text{ als } R \to \infty.$$

Dus (residustelling) $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i\,\dfrac{e^{-2\pi} - 1}{(i-1)(2i)}$ en daarmee (reële component) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi x - 1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \frac{\pi}{2}\,(1 - e^{-2\pi})$.

2. a) Noem $f_n(z) := \dfrac{1}{z-n}\sin\dfrac{z}{n}$. f_n is analytisch op $\mathbb{C}\backslash\{n\}$ en heeft in het punt n een enkelvoudige pool. Kies nu $R > 0$ willekeurig, vast en $|z| \leq R$, $n \geq 2R$ (dus $|\frac{z}{n}| \leq \frac{1}{2}$, $|n - z| \geq \frac{1}{2}n$). Dan is

$$|\sin\frac{z}{n}| \leq |\frac{z}{n}|\,(1 + \frac{1}{3!}\,\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5!}\,\frac{1}{2^4} + \ldots) < |\frac{z}{n}|\,.\,\frac{4}{3} \leq \frac{4}{3}\,\frac{R}{n}\,,$$

dus

$$|f_n(z)| \leq \frac{2}{n}\,.\,\frac{4}{3}\,\frac{R}{n} = \frac{8}{3}\,R\,.\,n^{-2}\,,$$

waarmee (Weierstrass) de uniforme convergentie en daardoor de analyticiteit van de reeks $\sum_{n\geq 2R} f_n(z)$ op $\{z \mid |z| \leq R\}$ is aangetoond. Het beginstuk $\sum_{n<2R} f_n(z)$ is een som van eindig veel analytische functies, dus f is analytisch op $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$.

b) Enkelvoudige polen in $z = n$ ($n \in \mathbb{N}$) met residu sin 1 (zie a).

c) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{z-n} \sin \frac{z}{n})' = \sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{(z-n)^2} \sin \frac{z}{n} + \frac{\cos \frac{z}{n}}{n(z-n)})$ dus

$f'(0) = \sum_{1}^{\infty} -\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$.

3. Blijkbaar is $f'(z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \mp \ldots = \log(1 + z)$ ($|z| < 1$). De functie $g(z) := (1 + z)\log(1 + z) - z$ heeft de eigenschap $g(0) = 0 = f(0)$ en $g'(z) = \log(1 + z) = f'(z)$ ($|z| < 1$) dus $g(z) = f(z)$ ($|z| < 1$) en daarmee $g \equiv f$; $g(i\sqrt{3}) = (1 + i\sqrt{3})(\log 2 + i\,\frac{\pi}{3}) - i\sqrt{3}$ dus $\mathrm{Re}\, f(i\sqrt{3}) = \log 2 - \frac{\pi}{3}\sqrt{3}$.

4. 0 ($|a| < 1$); $-\frac{1}{9a^2}$ ($1 < |a| < 2$); 0 ($|a| > 2$).

5. $f(z) = |z - \frac{1}{2} i|.|z - \frac{3}{2} i|$; Max $= f(-i) = \frac{15}{4}$; Min $= f(\frac{1}{2}i) = 0$.

6. Zie antwoorden tentamen wiskunde 50, opgave 8.

Antwoorden tentamen maart 1974

2. a) $f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{4k} = \frac{1}{z^4 + 1}$ ($|z| < 1$).

b) $g(z) = \int_0^z \frac{dw}{w^4 + 1}$ ($w \in G$).

c) $-2\pi i\{\mathrm{Res}_{e^{\frac{\pi i}{4}}} (\frac{1}{w^4 + 1}) + \mathrm{Res}_{e^{\frac{3\pi i}{4}}} (\frac{1}{w^4 + 1})\} = -2\pi i(\frac{1}{4e^{\frac{3}{4}\pi i}} + \frac{1}{4e^{\frac{9}{4}\pi i}}) = -\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

(zie tentamen juni 1971, opgave 2).

3. Enerzijds is $e^{iz}\sin z = \frac{1}{2i}(e^{2iz} - 1)$.

Anderzijds $e^{iz}\sin z = (\cos z + i \sin z)\sin z = \frac{1}{2}\sin 2z + i \sin^2 z$.

De functie $f(z) := \frac{e^{iz}\sin z}{z(z^2+1)}$ heeft enkelvoudige polen in $z = \pm i$, een ophefbare singulariteit in 0, terwijl voor $|z| = R > 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ geldt: $|f(z)| \leq \frac{1}{R(R^2-1)}$. Uit het een en het ander (ga na!) volgt dat de gevraagde integralen bestaan, aan elkaar gelijk zijn, en de waarde $2\pi i \,\frac{1}{2i}\,\frac{e^{-2}-1}{i\,.\,2i} =$
$= \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2})$ hebben.

4. Zie antwoorden tentamen wiskunde 50, opgave 6.

5. πi. $\left[\frac{z}{\cos\frac{1}{z}} = z + \frac{1}{2z} + \mathcal{O}(\frac{1}{R})\right.$ als $\left.|z| = R \to \infty\right]$.

6. De integrand is ophefbaar discontinu in 0. Stel $z = iy$, dan $\log z = \log|y| + \frac{\pi i}{2}\operatorname{sgn} y$. Splits in even en oneven gedeelte. Antwoord:

$$-\pi i \int_0^1 y e^{-y^2} dy = -\frac{\pi i}{2}(1 - e^{-1}) .$$

<u>Antwoorden tentamen mei 1974</u>

1. Uit $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad (|z| < r)$ volgt $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$ $(|z| < r)$ en dus met afschatting

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi}\,\frac{M}{r^{n+1}}\,.\,2\pi r = \frac{Mn!}{r^n} .$$

2\. a) Noem $f_n(z) := \frac{e^{2\pi i z} - 1}{n(z-n)}$ $(n \in \mathbb{N})$. f_n is analytisch, behoudens een ophefbare singulariteit in het punt $z = n$, dus f_n is een gehele functie.

Voor R willekeurig, vast, $|z| \leq R$, $n \geq 2R$ is $|e^{2\pi i z} - 1|$ begrensd en $\left|\frac{1}{n(n-z)}\right| \leq \frac{2}{n^2}$ dus is $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ uniform convergent op $\{z \mid |z| < R\}$ en daarmee f analytisch op $\mathbb{C} \backslash \mathbb{N}$.

b) De punten van $\mathbb{N}$ zijn ophefbare singulariteiten dus de convergentiestraal is ∞.

3\. a) $z = i$ is de enige singulariteit (2^e-orde pool) van de integrand op en binnen K, dus (residustelling)

$$\int_K \frac{\log z}{(z^2+1)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{\log z}{(z+i)^2}\right)'_{z=i} = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\pi^2 i .$$

b) Splits de integraal:

$$\left|\int_{\substack{|z|=R \\ \mathrm{Im}\, z\geq 0}} \frac{\log z}{(z^2+1)^2}\,dz\right| \leq \frac{\log R + \pi}{(R^2-1)^2}\,\pi R \to 0 \quad (R \to \infty)$$

$$\left|\int_{\substack{|z|=\delta \\ \mathrm{Im}\, z\geq 0}} \frac{\log z}{(z^2+1)^2}\,dz\right| \leq \frac{|\log \delta| + \pi}{(1-\delta^2)^2}\cdot \pi\delta \to 0 \quad (\delta \downarrow 0)$$

$$\int_\delta^R \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\,dx \to \text{de gevraagde integraal } (R \to \infty,\ \delta \downarrow 0)$$

(integrand continu, $\mathcal{O}(x^{-3})$ als $x \to \infty$, $\mathcal{O}(x^{-\frac{1}{2}})$ als $x \downarrow 0$).

Nu geldt

$$\int_R^\delta \frac{\log(-x + i0)}{(x^2+1)^2}\,(-dx) = \int_\delta^R \frac{\log x + i\pi}{(x^2+1)^2}\,dx ,$$

met als limiet

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\,dx + i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}\;.$$

Na limietovergang vinden we dus

$$2\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\,dx + i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\,i\pi^2$$

en identificeren we de reële componenten. Resultaat: $-\frac{\pi}{4}$.

4. Zie antwoorden tentamen wiskunde 50, opgave 3.

5. r^2 $(r < 1)$; 1 $(r > 1)$. $\quad [(\bar{z} - 1)(z - 1) = r^2]$.

6. Zie antwoorden tentamen wiskunde 50, opgave 7.

<u>Antwoorden tentamen januari 1975</u>

1. $V := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$ is een compacte verzameling. De functies φ en φ' zijn analytisch en dus continu op V. Noem daarom $r := \mathrm{Max}\{|\varphi(z)| \mid z \in V\}$ en $A := \mathrm{Max}\{|\varphi'(z)| \mid z \in V\}$. Uit het gegeven volgt $0 \le r < 1$. Op V geldt

$$\frac{\varphi'(z)}{1-\varphi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi'(z)\varphi^k(z)\;.$$

Omdat $|\varphi'(z)\varphi^k(z)| \le Ar^k$ is de reeks op V uniform convergent. Termsgewijze integratie levert met primitieve functies

$$\int_{|z|=2} \frac{\varphi'(z)}{1-\varphi(z)}\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\,\varphi^{k+1}(z)\Big|_V = 0\;.$$

<u>Vraag</u>. Zou het ook mogelijk zijn een beroep te doen op de hoofdstelling der complexe integratie?

2. a) De enige singulariteit is $z = 1$. Dit is een ophefbare singulariteit voor f, want het is een enkelvoudig nulpunt voor $z^2 - 1$ en een nulpunt voor $\log z$.

b) $\int_K f(z)dz = 0$, omdat f op en binnen K analytisch, dan wel ophefbaar singulier is (hoofdstelling). Bekijken we de stukken nu afzonderlijk:

i) de reële as $z = x$, $\delta \overset{x}{\to} R$.

$$\int_\delta^R f(z)dz = \int_\delta^R \frac{\log x}{x^2-1}\,dx \to \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\,dx \qquad (\delta \downarrow 0;\ R \to \infty)\ .$$

De laatste integraal bestaat, want de integrand is overal continu en

$$\left|\frac{\log x}{x^2-1}\right| = \mathcal{O}(x^{-\frac{1}{2}}) \ (x \downarrow 0) \quad \text{en} \quad \left|\frac{\log x}{x^2-1}\right| = \mathcal{O}(x^{-3/2}) \ (x \to \infty)\ .$$

ii) De imaginaire as $z = iy$, $R \overset{y}{\to} \delta$.

$$\int_{iR}^{i\delta} f(z)dz = \int_R^\delta \frac{\log y + i\frac{\pi}{2}}{-y^2-1}\, i\,dy =$$

$$= i\int_\delta^R \frac{\log y}{y^2+1}\,dy - \frac{\pi}{2}\int_\delta^R \frac{dy}{y^2+1} \to i\int_0^\infty \frac{\log y}{y^2+1}\,dy - \frac{\pi^2}{4}$$

$(\delta \downarrow 0,\ R \to \infty)$. Ook hier bestaan beide integralen.

iii) De grote cirkel.

$$\left|\int_R^{iR} \frac{\log z}{z^2-1}\,dz\right| \le \frac{\pi R}{2}\,\frac{\log R + \frac{\pi}{2}}{R^2-1} = \mathcal{O}\left(\frac{\log R}{R}\right) \to 0 \ (R \to \infty)\ .$$

iv) De kleine cirkel

$$\left|\int_{i\delta}^{\delta} \frac{\log z}{z^2-1}\,dz\right| \le \frac{\pi\delta}{2}\,\frac{|\log \delta| + \frac{\pi}{2}}{1-\delta^2} = \mathcal{O}(\delta|\log \delta|) \to 0 \ (\delta \downarrow 0)\ .$$

Na limietovergang vinden we daarom voor $\int_K f(z)dz$:

$$0 = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1}\,dx - \frac{\pi^2}{4} + i \int_0^\infty \frac{\log y}{y^2 + 1}\,dy + 0 + 0 \,.$$

m.a.w.

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1}\,dx = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{en} \quad \int_0^\infty \frac{\log y}{y^2 + 1}\,dy = 0$$

(als reële en imaginaire stukken van een complex getal).

<u>Vraag</u>. Probeer rechtstreeks uit het bestaan van

$$\int_0^\infty \frac{\log y}{y^2 + 1}\,dy$$

af te leiden dat deze integraal nul is (zonder functietheorie!).

3. a) Zij $\delta > 0$, willekeurig. In het gebied G^*, $G^* := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > \delta\}$ geldt ($z = x + iy$)

$$\left|(-1)^{n+1} \frac{e^{-nz}}{n}\right| = \left|\frac{e^{-nx-iny}}{n}\right| < \frac{1}{n} e^{-n\delta} \le e^{-n\delta}$$

en derhalve is in G^* de reeks voor f uniform convergent. Iedere term is een analytische functie op G^*, dus is f een analytische functie op G^*. Omdat δ willekeurig is gekozen volgt het gevraagde; f' wordt verkregen door termsgewijze differentiatie (Weierstrass). Derhalve

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-nz} = -\frac{1}{e^z + 1} \qquad (\text{Re } z > 0)\,.$$

b) De functie $h(z) := -\frac{1}{e^z + 1}$ is analytisch in $\mathbb{C}$ behoudens polen in de punten $z = (2k+1)\pi i$ ($k \in \mathbb{Z}$). Het gebied G is enkelvoudig samenhangend en bevat geen dezer polen. Dus is een integraal binnen G van de vorm

$$-\int_0^z \frac{1}{e^w + 1}\,dw \qquad (z \in G)$$

onafhankelijk van de gevolgde integratieweg, en stelt een analytische functie voor met afgeleide $-\frac{1}{e^z + 1}$.

Op $\{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ is daarom

$$f(z) = -\int_0^z \frac{dw}{e^w+1} + C$$

met een nader te bepalen constante C.
Uit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ volgt

$$C = \int_0^\infty \frac{dw}{e^w+1} = (w \overset{\text{stel}}{=} \log t) = \int_1^\infty \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \log 2 \ .$$

f heeft dus als analytische voortzetting de functie g, waarbij

$$g(z) := -\int_0^z \frac{dw}{e^w+1} + \log 2 \ .$$

c) $$g(-1) = \log 2 - \int_0^{-1} \frac{dw}{e^w+1} = \log(e+1) \ .$$

4. Zie antwoorden tentamen wiskunde 50, opgave 2.

5. Zie antwoorden tentamen Wiskunde 50, opgave 3.

6. Voor $|a| > 1$: $-\frac{\pi i}{a}$.
Voor $|a| < 1$: $\pi i \, \frac{2a-1}{a-4}$.

Antwoorden tentamen maart 1975

1. We weten $\lim_{w\to 0} \frac{1-\cos w}{w^2} = \frac{1}{2}$. Hieruit volgt

$$\exists_{P>0}\ \forall_{w\in\mathbb{C}}\ [(|w| < P) \Rightarrow (|1-\cos w| < |w|^2)] \ .$$

Fixeer nu $R > 0$ willekeurig.
Voor alle z ($|z| < R$) en alle n ($n > (\frac{R}{P})^{2/3}$) geldt dan

$$\left|\frac{z}{n\sqrt{n}}\right| < \frac{R}{RP^{-1}} = P$$

en dus

$$|n(1 - \cos \frac{z}{n\sqrt{n}})| < n|\frac{z^2}{n^3}| < R^2 \frac{1}{n^2} ,$$

m.a.w. $\Sigma_{n=1}^{\infty} n(1 - \cos \frac{z}{n\sqrt{n}})$ convergeert uniform op $\{z \mid |z| < R\}$.
Alle termen $n(1 - \cos \frac{z}{n\sqrt{n}})$ zijn analytische functies, dus is F analytisch op $\{z \mid |z| < R\}$ (Weierstrass) en daarmee een gehele functie, omdat R willekeurig was gekozen. Afgeleiden worden gevonden door termsgewijze differentiatie. Volgens de betreffende stelling geldt een en ander ook voor F', dus

$$F''(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n^3} = \frac{\pi^2}{6} .$$

2. a) Voor reële $x > 0$ geldt

$$f(x) = \exp(\frac{1}{x} \log(1 + x)) .$$

De functie h, gedefinieerd op het aangegeven gebied door

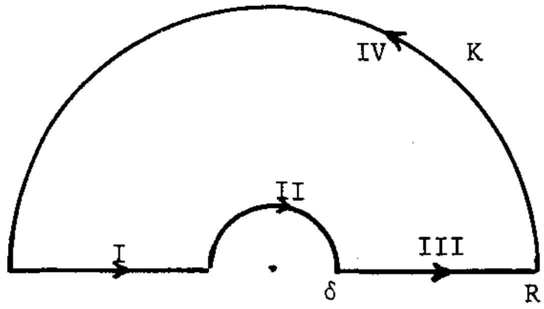
$$h(z) := \frac{1}{z} \log(1 + z) \quad \text{(hoofdwaarde)}$$

is aldaar analytisch, dankzij de ophefbare singulariteit voor $z = 0$, $h(0) = 1$. De functie g, gedefinieerd door $g(z) := \exp h(z)$ is analytisch (samengesteld uit de analytische functie h en de exponentiële functie) en daarmee analytische voortzetting van f, omdat $g(z) = f(z)$ voor z reëel, $z > 0$.

b) $g'(z) = (e^{h(z)})' = e^{h(z)}h'(z)$; $g'(0) = e^{h(0)}h'(0)$. Van h(z) is de Taylorreeks om $z = 0$

$$h(z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \ldots$$

dus $h(0) = 1$, $h'(0) = -\frac{1}{2}$.
$\therefore\ g'(0) = -\frac{1}{2}e$.



3. Beschouw de functie f gedefinieerd door

$$f(z) := \frac{e^{iz} - 1}{z^2(z^2 + 1)} .$$

Merk op dat $\dfrac{\cos x - 1}{x^2(x^2 + 1)}$ het even gedeelte is van f(x). Nemen we nu $0 < \delta < 1 < R$, dan geldt voor bovenstaande integratieweg K (twee stukken reële as, 2 halve cirkels om 0)

$$\int_K f(z)dz = 2\pi i \ \mathrm{Res}_i \frac{e^{iz} - 1}{z^2(z+i)(z-i)} = 2\pi i \ \frac{e^{-1} - 1}{i^2 . 2i} = \frac{\pi(e-1)}{e}$$

(f is analytisch op en binnen K, behoudens een enkelvoudige pool in $z = i$). Beschouwen we nu de afzonderlijke stukken.

$$\int_{I} f(z)dz + \int_{III} f(z)dz = 2\int_\delta^R \frac{\cos x - 1}{x^2(x^2+1)} dx \to 2\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2(x^2+1)} dx ,$$

($\delta \downarrow 0$, $R \to \infty$) (de laatste integraal bestaat, want de integrand is continu (ophefbaar discontinu) op $[0,\infty)$ en $\mathcal{O}(\frac{1}{x^4})$ $(x \to \infty)$).

$$\left| \int_{IV} f(z)dz \right| \le \pi R \frac{1 + 1}{R^2(R^2 - 1)} \to 0 \quad \text{als } R \to \infty .$$

Voor $\int_{II} f(z)dz$ nemen we in aanmerking, dat f in het punt 0 een <u>enkelvoudige</u> pool heeft, $\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{iz} - 1}{z} \frac{1}{z^2 + 1} = i$. Het residu van f in 0 bedraagt i, en daarom (stelling)

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \int_{II} f(z)dz = \lim_{\delta\downarrow 0} \int_{\frown_{0}\delta} f(z)dz = -2\pi i \cdot \tfrac{1}{2} \ \mathrm{Res}_0 f(z) = \pi .$$

Na limietovergang is daarom de totale balans

$$\frac{\pi(e-1)}{e} = 2\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2(x^2+1)} dx + 0 + \pi ,$$

d.w.z.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2(x^2+1)} dx = -\frac{\pi}{e} \qquad \text{(negatief! vreemd?)} .$$

4. $a = 0$, $b = \frac{\pi}{6}$.

5. $\dfrac{5\pi i}{72\sqrt[3]{e}}$.

6. Zie antwoorden tentamen Wiskunde 50, opgave 6.

Antwoorden tentamen mei 1975

1. Beschouw de functie g, gedefinieerd door

$$g(z) := \frac{z^2}{(z-1)^3} f(z) .$$

g is overal analytisch, behoudens ophefbare singulariteiten in $z = 0$ en $z = 1$, dus een gehele functie. Verder is

$$\left|\frac{g(z)}{\log z}\right| = \left|\frac{z^3}{(z-1)^3}\right| \cdot \left|\frac{f(z)}{z \log z}\right|$$

begrensd op $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 2\}$, m.a.w.

$$\exists_A \forall_{R\geq 2} \forall_z [(|z| = R) \Rightarrow |g(z)| \leq A(\log^2 R + \pi^2)^{\frac{1}{2}}] .$$

Berekenen we nu de Taylorcoëfficiënten van g rond $z = 0$. Stel $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(z \in \mathbb{C})$

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz\right| \leq \frac{2\pi R}{2\pi} \frac{A(\log^2 R + \pi^2)^{\frac{1}{2}}}{R^{n+1}} .$$

We zien dat voor $n \geq 1$ het rechterlid naar nul gaat $(R \to \infty)$ dus $a_1 = a_2 = \ldots = 0$. Bijgevolg $g(z) =$ constant. Dus

$$f(z) = \frac{c(z-1)^3}{z^2} .$$

Uit i) volgt dat $C = 1/3$.

2. a) Merk op dat $\cos nz = \frac{1}{2}(e^{inz} + e^{-inz}) = \frac{1}{2}(e^{iz})^n + \frac{1}{2}(e^{-iz})^n$.
Voor $V_p := \{z \mid |\mathrm{Im}\, z| \leq p < \log 2\}$ (p vast) is daarom

$$|2^{-n}\cos nz| \leq \left(\frac{e^p}{2}\right)^n = r^n \text{ met } r \text{ vast, } 0 < r < 1 .$$

Bijgevolg convergeert de reeks uniform op V_p. Iedere term stelt een analytische functie voor, dus is $f(z)$ voor alle z in V_p analytisch (Weierstrass) en daarom ook in het gebied $\{z \mid |\mathrm{Im}\, z| < \log 2\}$.

b) We kunnen heel gemakkelijk f expliciet uitrekenen met meetkundige reeksen:

$$\sum_0^\infty \tfrac{1}{2}\left(\frac{e^{iz}}{2}\right)^n = \frac{1}{2 - e^{iz}} \quad (\mathrm{Im}\, z > -\log 2)$$

$$\sum_0^\infty \tfrac{1}{2}\left(\frac{e^{-iz}}{2}\right)^n = \frac{1}{2 - e^{-iz}} \quad (\mathrm{Im}\, z < \log 2)\ .$$

Dus is de analytische functie g, waarbij

$$g(z) := \frac{1}{2 - e^{iz}} + \frac{1}{2 - e^{-iz}}$$

analytische voortzetting van f in $\mathbb{C}$. De functie g heeft polen in $\{\pm\, i \log 2 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

3. a) De functie $\Psi_z \dfrac{\log z}{z^4 + 4}$ heeft binnen K als enige singulariteit de enkelvoudige pool $1 + i$ met residu

$$\lim_{z\to 1+i} \frac{z - 1 - i}{z^4 + 4} \log z = \frac{\log(1 + i)}{4(1 + i)^3} = -\frac{1}{16}(1 + i)\log(1 + i)\ .$$

Omdat de integrand verder binnen en op K analytisch is, geldt (residustelling)

$$\int_K \frac{\log z}{z^4 + 4}\, dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}_{1+i} \left(\frac{\log z}{z^4 + 4}\right) = \frac{\pi}{8}(1 - i)\log(1 + i)\ .$$

b) We splitsen de integraal van a) in vier stukken:

I: de reële as:

$$\int_\delta^R \frac{\log x}{x^4 + 4}\, dx \to \int_0^\infty \frac{\log x}{x^4 + 4}\, dx$$

(als $\delta \downarrow 0$, $R \to \infty$). De integraal bestaat, want de integrand is continu op $(0,\infty)$ en $\mathcal{O}(|\log x|)$ $(x \downarrow 0)$, $\mathcal{O}(x^{-3})$ $(x \to \infty)$.

II: De imaginaire as: $z = iy$, $R \overset{y}{\downarrow} \delta$.

$$\int_R^\delta \frac{\log iy}{y^4+4}\, i\, dy = -i \int_\delta^R \frac{\log y + \frac{1}{2}\pi i}{y^4+4}\, dy$$

$$\to -i \int_0^\infty \frac{\log y}{y^4+4}\, dy + \tfrac{1}{2}\pi \int_0^\infty \frac{dy}{y^4+4}\,, \quad (\delta \downarrow 0,\ R \to \infty).$$

III: De grote cirkel. Hier is de $|\text{integrand}|$ te majoreren door $\dfrac{\log R + \pi/2}{R^4 - 4}$

dus

$$\left| \int_R^{iR} \frac{\log z}{z^4+4}\, dz \right| \le \frac{\pi R}{2} \, \frac{\log R + \frac{\pi}{2}}{R^4 - 4} \to 0$$

als $R \to \infty$ (schattingsstelling).

IV: De kleine cirkel.

$$|\text{integrand}| \le \frac{|\log \delta| + \frac{\pi}{2}}{4 - \delta^4}\,.$$

dus

$$|\text{integraal}| \le \frac{\pi}{2}\, \delta\, \frac{|\log \delta| + \frac{\pi}{2}}{4 - \delta^4} \to 0 \quad (\delta \downarrow 0)\,.$$

Na limietovergang vinden we derhalve

$$\frac{\pi}{8}(1-i)\log(1+i) = (1-i)\int_0^\infty \frac{\log x}{x^4+4}\, dx + \tfrac{1}{2}\pi \int_0^\infty \frac{dy}{y^4+4}\,,$$

en, door het imaginaire deel te nemen:

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^4+4}\, dx = \frac{\pi}{8}\, \mathrm{Im}((i-1)\log(1+i)) = \frac{\pi}{16}\left(\log 2 - \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

4\. a) Zie antwoorden tentamen Wiskunde 50, opgave 6.

b) $1 - \cos 1 - \sin 1$.

Antwoorden tentamen januari 1976

1. a) Voor alle n is $\frac{\cos(z \log n)}{2^n}$ een analytische functie. Bovendien geldt voor vaste $R > 0$ op het gebied $\{z \mid |z| < R\}$ de ongelijkheid

$$\left|\frac{\cos(z \log n)}{2^n}\right| = \left|\frac{e^{iz \log n} + e^{-iz \log n}}{2^{n+1}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{e^{R \log n} + e^{R \log n}}{2^{n+1}} = \frac{n^R}{2^n} .$$

Nu is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^R}{2^n}$ convergent (criterium van d'Alembert) dus is de gegeven reeks uniform convergent op iedere cirkelschijf met middelpunt 0. Derhalve is f op iedere cirkelschijf om 0 analytisch en bijgevolg een gehele functie.

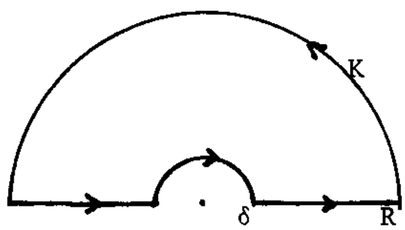
b) f is een even functie, heeft daarom slechts even machten in zijn Taylor-ontwikkeling om 0; $f(0) = 1$; ergo $\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - 1}{z^2}$ bestaat.

2. Omdat $\sin^2 z = \frac{1}{2}(1 - \cos 2z)$ kiezen we als integrand de functie f, gedefinieerd door

$$f(z) := \frac{1}{2}\,\frac{1 - e^{2iz}}{z^2(z - \pi)} .$$

Deze functie is op en boven de reële as analytisch, behoudens een eerste orde pool in $z = 0$ (residu $\frac{i}{\pi}$) en een ophefbare singulariteit in $z = \pi$. Nemen we als integratieweg de "ananas"-contour K uit nevenstaande figuur, dan is

$$\int_K f(z)dz = 0 \text{ (hoofdstelling)} .$$



Merk op, dat langs de grote cirkel

$$\left|\int_R^{-R} f(z)dz\right| \leq \pi R \frac{1 + 1}{R^2(R - \pi)} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

en langs de kleine cirkel

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(z)dz \to -2\pi i \cdot \tfrac{1}{2} \operatorname{Res}_0 f(z) = 1 \quad (\delta \downarrow 0) .$$

Derhalve geldt

$$\int_{\delta}^{R} f(x)dx + \int_{-R}^{-\delta} f(x)dx \to -1 \quad (\delta \downarrow 0,\ R \to \infty) \ .$$

In het bijzonder nadert daarom het reële deel van de som dezer laatste integralen tot -1 $(R \to \infty,\ \delta \downarrow 0)$.

$$\lim_{\substack{\delta\downarrow 0\\ R\to\infty}} \left(\tfrac{1}{2}\int_{\delta}^{R} \frac{1-\cos 2x}{x^2(x-\pi)}\,dx + \tfrac{1}{2}\int_{-R}^{-\delta} \frac{1-\cos 2x}{x^2(x-\pi)}\,dx\right) = -1 \ ,$$

m.a.w.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2(x-\pi)}\,dx = -1 \ .$$

(De integraal bestaat omdat de integrand continu is en $\mathcal{O}(|x|^{-3})$ als $|x| \to \infty$).

Opmerkingen.

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ bestaat niet. Waarom?

b) We kunnen het rekenwerk bekorten en de klippen omzeilen als we bedenken dat door breuksplitsing

$$\frac{1}{x^2(x-\pi)} = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{x-\pi} - \frac{1}{x}\right) \ ,$$

zodat (waarom?)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2(x-\pi)}\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = -1$$

(vgl. dictaat, hoofdstuk V, achteraan).

3. Uit het gegeven volgt

$f(2) = 2,$

$f(4) = \frac{4}{3}\ ,$

$f(16) = \frac{16}{15}\ ,$

met volledige inductie

$$f(2^{(2^k)}) = \frac{2^{(2^k)}}{2^{(2^k)} - 1}, \quad (k \geq 0, \text{ geheel})$$

hetgeen leidt tot het vermoeden, dat

$$f(z) \equiv \frac{z}{z-1} =: f^*(z) .$$

Om dit te bewijzen stellen we $z = \frac{1}{w}$, $f(z) =: g(w)$, $f^*(z) =: g^*(w)$. Blijkbaar is g analytisch en begrensd op

$$\{w \in \mathbb{C} \mid 0 < |w| \leq \tfrac{1}{2}\} ,$$

derhalve ophefbaar singulier in $w = 0$ (vgl. opgave V).
$g^*(w) = \frac{1}{1-w}$ is ook analytisch op

$$\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < \tfrac{1}{2}\}$$

en stemt met $g(w)$ overeen in een rij punten $(2^{-2^k})_{k=0}^{\infty}$ die zich verdicht in 0. Ergo (identiteitsstelling) $g(w) \equiv g^*(w)$, $f(z) \equiv f^*(z)$.

4. $\frac{1}{a+1}$.

5. Zie antwoorden tentamen Wiskunde 50, opgave 2.

6. $-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(1-i)^n} - \frac{1}{(1+i)^n}\right]\frac{(z+1)^n}{n}$

convergentiestraal $= \sqrt{2}$.

Antwoorden tentamen maart 1976

1. a) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \left[\psi_z \frac{\sin nz}{(n-1)!}\right.$ is een gehele functie]. Neem nu R vast, $|z| \leq R$, dan is

$$\left|\frac{\sin nz}{(n-1)!}\right| = \left|\frac{1}{2i} \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{(n-1)!}\right| \leq \frac{e^{nR}}{(n-1)!} .$$

Nu is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nR}}{(n-1)!}$ convergent (som $= e^{R+e^R}$) dus is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{(n-1)!}$ uniform convergent op $\{z \mid |z| \leq R\}$, bijgevolg (Weierstrass) is f analytisch op $\{z \mid |z| < R\}$. Dit geldt voor alle R, dus is f een gehele functie.

b) Door termsgewijs differentiëren (Weierstrass) vinden we

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos nz}{(n-1)!}$$

dus

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = 2e \ .$$

<u>Opmerking</u>.

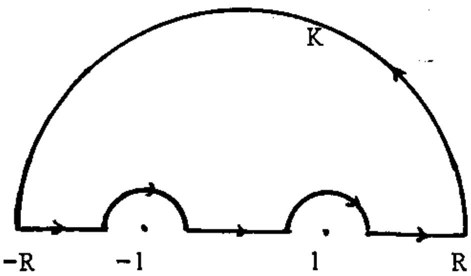
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{2i} \sum_{0}^{\infty} \frac{(e^{iz})^n}{n!} - \frac{e^{-iz}}{2i} \sum_{0}^{\infty} \frac{(e^{-iz})^n}{n!} =$$

$$= \frac{e^{iz}}{2i} \exp(e^{iz}) - \frac{e^{-iz}}{2i} \exp(e^{-iz}) \ .$$

2. Beschouw de functie f gedefinieerd door

$$f(z) := \frac{e^{\frac{1}{2}\pi iz}}{1 - z^2} \ .$$

f is overal analytisch, behoudens polen van de eerste orde in $z = 1$ (residu $-\frac{i}{2}$) en $z = -1$ (residu $-\frac{i}{2}$). Integreren we f over een kromme K als nevengeschetst (kleine halve cirkeltjes met straal δ).
Dan is de uitkomst 0 (hoofdstelling).
Langs de grote cirkel:



$$\left| \int_{R}^{-R} f(z)dz \right| \le \pi R \frac{1}{R^2 - 1} \to 0 \ (R \to \infty).$$

Langs de kleine cirkeltjes geldt voor $\delta \downarrow 0$:

$$\int_{\frown_{-1}} + \int_{\frown_{1}} \to 2\pi i(-\tfrac{1}{2} \operatorname{Res}_{-1} - \tfrac{1}{2} \operatorname{Res}_{1}) = -\pi \ . \ (\text{Stelling})$$

Langs de stukken reële as samen, door symmetrie van de intervallen t.o.v. 0 (oneven integrand geeft bijdrage nul):

$$\int_{-R}^{-1-\delta} f(x)dx + \int_{-1+\delta}^{1-\delta} f(x)dx + \int_{1+\delta}^{R} f(x)dx =$$

$$= \int_{-R}^{-1-\delta} \frac{\cos \frac{1}{2}\pi x}{1-x^2}\,dx + \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{\cos \frac{1}{2}\pi x}{1-x^2}\,dx + \int_{1+\delta}^{R} \frac{\cos \frac{1}{2}\pi x}{1-x^2}\,dx \to$$

$$\to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{1}{2}\pi x}{1-x^2}\,dx$$

(integraal bestaat, want integrand overal (ophefbaar dis)continu en $\mathcal{O}(\frac{1}{x^2})$ $(|x| \to \infty)$.

Na limietovergang vinden we daarom

$$0 = 0 - \pi + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{1}{2}\pi x}{1-x^2}\,dx \text{ , dus } \int_{0}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{2}\pi x}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} .$$

3. a) Noem $f(z) := \frac{z^2 \log z}{(z^2+1)^2}$. Op en binnen K is f analytisch behoudens een 2-de orde pool in $z = i$ met residu $(\frac{z^2 \log z}{(z+i)^2})'_{z=i}$ (Cauchy). Dit residu bedraagt $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\, i$. Dus (residustelling)

$$\int_K f(z)dz = \frac{\pi^2 i}{4} + \frac{1}{2}\pi .$$

b) Splitsen we de integraal in 4 stukken. Grote cirkel:

$$\left| \int_{R}^{-R} f(z)dz \right| \le \pi R \frac{R^2(\log R + \pi)}{(R^2-1)^2} = \mathcal{O}(\frac{\log R}{R}) \to 0 \ (R \to \infty) .$$

Kleine cirkel:

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} f(z)dz \right| \le \pi\delta \frac{\delta^2(|\log \delta| + \pi)}{(1-\delta^2)^2} = \mathcal{O}(\delta^3 |\log \delta|) \to 0 \ (\delta \downarrow 0).$$

Positieve reële as:

$$\int_{\delta}^{R} \frac{x^2 \log x}{(x^2+1)^2}\,dx \to \int_{0}^{\infty} \frac{x^2 \log x}{(x^2+1)^2}\,dx \text{ (absoluut convergente integraal).}$$

Negatieve reële as: $z = -x + i0$. $R \overset{x}{\downarrow} \delta$.

$$\int_R^\delta \frac{x^2(\log x + i\pi)}{(x^2+1)^2}(-dx) = \int_\delta^R \frac{x^2\log x + i\pi x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$\to \int_0^\infty \frac{x^2\log x}{(x^2+1)^2}\,dx + i\pi \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$(R \to \infty,\ \delta \downarrow 0)$.

Na limietovergang vinden we daarom

$$\frac{\pi^2 i}{4} + \tfrac{1}{2}\pi = 0 + 2\int_0^\infty \frac{x^2\log x}{(x^2+1)^2}\,dx + i\pi\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

dus als antwoord resp. nevenresultaat

$$\int_0^\infty \frac{x^2\log x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\,, \quad \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

4. Zie antwoorden tentamen Wiskunde 50, opgave 2.
5. Zie antwoorden tentamen Wiskunde 50, opgave 5.
6. Zie antwoorden tentamen Wiskunde 50, opgave 7.

Antwoorden tentamen juni 1976

1. f heeft slechts eindig veel nulpunten binnen J (waarom?); $\frac{f'(z)}{f(z)}$ is een analytische functie op en binnen J behalve in die punten, waar f een nulpunt of een pool heeft. Volgens de residustelling geldt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_J \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \Sigma\ \mathrm{Res}\ \frac{f'(z)}{f(z)}\,,$$

waarbij de sommatie plaatsvindt over alle nulpunten en polen van f binnen J. In de omgeving van een $\frac{\text{nulpunt}}{\text{pool}}$ a van f geldt $f(z) = (z-a)^k\,\varphi(z)$, waarbij $\varphi(a) \neq 0$ en φ analytisch is in a. Hierbij is k de multipliciteit van het nulpunt, resp. minus de multipliciteit van de pool.

$$f'(z) = k(z-a)^{k-1}\varphi(z) + (z-a)^k\varphi'(z)\,.$$

dus $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ in de omgeving van a. Omdat φ analytisch is in a, $\varphi(a) \neq 0$ en φ' analytisch is in a geldt $\operatorname{Res}_a \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = 0$, dus $\operatorname{Res}_a \frac{f'(z)}{f(z)} = k$. Bijgevolg:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\text{nulpunten}} k_i - \sum_{\text{polen}} k_j = N - P \ .$$

2. a) Beschouw $H := V \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \frac{3}{4}\}$. Iedere Jordankromme in H omsluit geen enkele singulariteit van de analytische functie $\psi_w\ (w^2-1)^{-1}$ dus is

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{z} \frac{dw}{w^2-1}$$

onafhankelijk van de integratieweg (hoofdstelling). Uiteraard is $\psi_w\ (w^2-1)^{-1}$ ook continu in H, dus is F analytisch in H met als afgeleide $F'(z) = \frac{1}{z^2-1}$.

b) $$F(iy) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{0}^{y} \frac{i\,dt}{(it)^2-1} = \text{(zie wiskunde 10)}$$

$$= \tfrac{1}{2} \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{0} - i \arctan y \ .$$

Bijgevolg is $\lim_{y\to\infty} F(iy) = -\frac{1}{2} \log 3 - \frac{\pi i}{2}$.

c) Beschouw het gebied $G^* = G \cup H$.
Iedere Jordankromme in G^* omsluit óf geen enkele singulariteit van $\psi_w\ (w^2-1)^{-1}$ óf beide singulariteiten -1 en $+1$ waarvan de som der residuen 0 is. Dus (residu- of hoofdstelling)

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{z} \frac{dw}{w^2-1}$$

is onafhankelijk van de integratieweg in G^*. Tevens is $\psi_w (w^2-1)^{-1}$ continu in G^*, ergo

$$g(z) := \int_{-\frac{1}{2}}^{z} \frac{dw}{w^2-1} \ ,$$

is analytisch in G^* met afgeleide $\frac{1}{z^2-1}$ en uiteraard is g een analytische voortzetting van F. Merk op dat

$$g'(z) = \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \dots \quad (|z| > 1) .$$

Definiëren we

$$h(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{5z^5} - \dots \quad (|z| > 1) .$$

Dan geldt (Weierstrass) voor vaste ρ, door uniforme convergentie van de laatste reeks op $\{z \mid |z| > \rho > 1\}$

$$h'(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \dots$$

zodat $(g(z) - h(z))' = 0$, en daarmee $g(z) - h(z) = \text{constant} = C$ $(|z| > \rho > 1)$. Bijgevolg $g(z) - h(z) = C$ $(|z| > 1)$ door de identiteitsstelling. Rest ons het bepalen van C

$$\lim_{y\to\infty} g(iy) = -\tfrac{1}{2}\log 3 - \frac{\pi i}{2} \text{ (zie b))}$$

$$\lim_{y\to\infty} h(iy) = 0 .$$

Dus

$$g(z) = -\tfrac{1}{2}\log 3 - \frac{\pi i}{2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{5z^5} - \dots \quad (|z| > 1) .$$

3. a) De integrand is analytisch in $\mathbb{C}$ behoudens de enkelvoudige polen $(\pm 1 \pm i)$ (4 stuks) dus (Residustelling)

$$\int_K \frac{e^{(-1+i)z}}{z^4+4}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{1+i} \frac{e^{(-1+i)z}}{z^4+4} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 1+i} \frac{z-(1+i)}{z^4+4}\, e^{(-1+i)z} =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{(z^4+4)'_{i+1}}\right) e^{-2} = \frac{2\pi i e^{-2}}{4(1+i)^3} = \frac{\pi}{8e^2}(1-i) .$$

b) Splitsen we de integraal over K in drie stukken

I: $$\int_0^R \frac{e^{(-1+i)x}}{x^4+4}\,dx = \int_0^R \frac{e^{-x}}{x^4+4}(\cos x + i \sin x)dx$$

$$\to \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^4+4}(\cos x + i \sin x)dx \qquad (R \to \infty)$$

(de integraal bestaat, want de integrand is continu en $\mathcal{O}(\frac{1}{x^4})$ $(x \to \infty)$)

II: $$\int_{iR}^0 \frac{e^{(-1+i)z}}{z^4+4}\,dz = \int_R^0 \frac{e^{(-1+i)iy}}{(iy)^4+4}\,i\,dy =$$

$$= \int_0^R \frac{-ie^{(-1-i)y}}{y^4+4}\,dy = \int_0^R \frac{e^{-y}(-\sin y - i \cos y)}{y^4+4}\,dy$$

$$\to \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^4+4}(-\sin x - i \cos x)dx \qquad (R \to \infty) \text{ (analoog).}$$

III: $$\left|\int_R^{iR} \frac{e^{(-1+i)z}}{z^4+4}\,dz\right| \le \frac{\pi R}{2}\,\frac{e^{-R}}{R^4-4} \to 0 \qquad (R \to \infty)\ .$$

Immers: $|e^{(-1+i)(x+iy)}| = e^{-x-y} \le e^{-R}$ langs de integratieweg. Samengevat vinden we met a) na limietovergang

$$\frac{\pi}{8e^2}(1-i) = (1-i)\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^4+4}(\cos x - \sin x)dx$$

dus

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}(\cos x - \sin x)}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{8e^2}\ .$$

4. $\frac{2}{3}\pi i$.

5. $2i$.

6. $i \log 2$.

Antwoorden tentamen januari 1977

1. De functie f is overal analytisch behoudens daar, waar $e^z + e^{-z} = 0$, m.a.w. $z = (k + \frac{1}{2})\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$. Van deze punten ligt er géén op K, en alleen $z = \frac{1}{2}\pi i$ binnen K. Omdat dit punt een enkelvoudig nulpunt is van $e^z + e^{-z}$ (hoe ziet U dat in?) en geen nulpunt van e^{az}, is het een enkelvoudige pool van f en geldt (denk aan differentiequotiënt)

$$\mathrm{Res}_{\frac{1}{2}\pi i}(f) = \lim_{z\to\frac{1}{2}\pi i} \frac{z-\frac{1}{2}\pi i}{e^z + e^{-z}} e^{az} = \frac{1}{2i} e^{\frac{1}{2}a\pi i} .$$

Bijgevolg is $\int_K f(z)dz = \pi e^{\frac{1}{2}a\pi i}$ (residustelling). Nu splitsen we de integraal in vier stukken

$$\text{I} \quad \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{e^x + e^{-x}} dx \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + e^{-x}} dx =: A \quad (R \to \infty) .$$

Deze laatste integraal bestaat, omdat de integrand continu is en

$$\frac{e^{ax}}{e^x + e^{-x}} = \mathcal{O}(e^{(|a|-1)|x|}) \quad (x \to \pm\infty) .$$

$$\text{II.} \quad \int_{R+\pi i}^{-R+\pi i} \frac{e^{ax}}{e^z + e^{-z}} dz = e^{a\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{e^{at}}{e^t + e^{-t}} dt \to Ae^{a\pi i} \quad (R \to \infty) .$$

$$\text{III} \quad \left| \int_{R}^{R+\pi i} \frac{e^{az}}{e^z + e^{-z}} dz \right| \le \frac{e^{|a|R}}{e^R - e^{-R}} \pi \to 0 \quad \text{als } R \to \infty .$$

$$\text{IV} \quad \left| \int_{-R+\pi i}^{-R} \frac{e^{az}}{e^z + e^{-z}} dz \right| \le \frac{e^{|a|R}}{e^R - e^{-R}} \pi \to 0 \quad \text{als } R \to \infty .$$

Combinatie van de vier limieten levert

$$(e^{a\pi i} + 1)A = \pi e^{\frac{1}{2}a\pi i} , \quad \text{m.a.w. } A = \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2}\pi a} .$$

Ook geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ax}}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2}\pi a} \quad \text{(vervang a door -a)} .$$

Optellen levert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{x} + e^{-x}}\, dx = \frac{\pi}{\cos \frac{1}{2}\pi a} ,$$

hetgeen tevens de gevraagde uitkomst is.

2. a) In $G := G_1 \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \frac{1}{2}\}$ is de functie $\forall_z \frac{\cos z}{z^2 + 1}$ analytisch, en tevens is G enkelvoudig samenhangend. Bijgevolg is volgens de hoofdstelling $F(z)$ gelijk aan $\int_0^z \frac{\cos w}{w^2+1}\, dw$ (willekeurige weg binnen G) èn de integrand is een continue functie in G. Ergo is F analytisch in G (stelling).

b) In $\mathbb{C}\backslash\{i,-i\}$ is $\forall_z \frac{\cos z}{z^2+1}$ analytisch, en

$$\mathrm{Res}_i \frac{\cos z}{(z+i)(z-i)} = \frac{\cos i}{2i} \;;\; \mathrm{Res}_{-i} \frac{\cos z}{(z+i)(z-i)} = \frac{\cos(-i)}{-2i} = -\frac{\cos i}{2i} ,$$

(de residuen zijn <u>samen</u> nul).

Bijgevolg is $\int_J \frac{\cos z}{z^2+1}\, dz = 0$ voor elke Jordan kromme, die +i en -i geen van beiden omsluit (hoofdstelling) of beide omsluit (residustelling). Wederom is nu binnen het gebied $G^* := G \cup G_2$ aan de voorwaarden der sub a gebruikte stelling voldaan, die garandeert dat de functie H,

$$H(z) := \int_0^z \frac{\cos w}{w^2+1}\, dw$$

binnen G^* analytisch is en binnen G_1 samenvàlt met F.

c) $H(z)$ heeft een Laurentreeks $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n$, convergent binnen G_2, die als termsgewijs te nemen afgeleide de Laurentreeks oplevert voor de functie $\frac{\cos z}{z^2+1}$ (stelling). De gevraagde coëfficiënt c, is derhalve de <u>nulde</u> Laurentcoëfficiënt van $\frac{\cos z}{z^2+1}$ rond 0 binnen G_2:

$$c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z^2+1)z}\, dz = \frac{\cos i}{2i^2} + \frac{\cos(-i)}{-2i(-i)} + \frac{\cos 0}{1} =$$

$$= 1 - \frac{e + e^{-1}}{2} \quad \text{(Residustelling)} .$$

3. Ieder van de functies f_n,

$$f_n := \Psi_z \frac{1}{n^2 \log(z+n)} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

is analytisch in G, behoudens f_1, die een enkelvoudige pool heeft in het (enkelvoudige) nulpunt $z = 0$ van $\Psi_z \log(z+1)$. De polen en sneden van alle f_n liggen verder langs de snede $\{x + iy \mid y = 0 \wedge x \leq -1\}$.
Zij nu $R > e^{2\pi}$, willekeurig. Voor alle z ($|z| \leq R$) en alle n ($n > 2R$), geldt

$$|\log(z+n)| = |\log|z+n| + i \arg(z+n)| \geq$$

$$\geq \log(n - |z|) - \pi > \log R - \pi > \pi .$$

Dus geldt onder deze voorwaarden

$$\left|\frac{1}{n^2 \log(z+n)}\right| \leq \frac{1}{\pi n^2} ,$$

de algemene term van een (uniform) convergente reeks reële getallen. Hiermee is de op $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ uniforme convergentie van $\sum_{n>2R} f_n(z)$ aangetoond, waardoor de som van deze reeks een analytische functie voorstelt (stelling). Toevoeging van $\sum_{n\leq 2R} f_n(z)$ (eindig veel termen!) maakt $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ analytisch op $(G \cap \{z \mid |z| < R\})\backslash\{0\}$ voor willekeurige R, dus op $G\backslash\{0\}$.
Op grond van het eerder betoogde vinden we in $z = 0$ een enkelvoudige pool met residu $\lim_{z\to 0} z \frac{1}{1^2 \log(z+1)} = 1$.

4. $-\frac{2\pi}{5}$.

5. bijv. $f(z) = \frac{1}{2}z(e^z - e + 1 + \frac{1}{(z-2)^2})$.

6. $\frac{3}{32}$ $\quad \left(\int_{|z|=R>3} f(z)dz = 0 \right)$.

<u>Antwoorden tentamen maart 1977</u>

1. a) Voor e^w geldt in het gehele complexe vlak

$$e^w = 1 + w + \frac{1}{2!} w^2 + \frac{1}{3!} w^3 + \ldots ,$$

dus

$$e^w - 1 - w = \frac{1}{2!} w^2 + \frac{1}{3!} w^3 + \ldots = w^2 \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} w + \frac{1}{4!} w^2 + \ldots\right) .$$

Bijgevolg geldt als $|w| \leq 1$

$$|e^w - 1 - w| \leq |w|^2\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\right) = (e-2)\,|w|^2 \leq |w|^2 .$$

b) De partiële sommen van de te onderzoeken reeks voldoen aan

$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1}\left(e^{\frac{z}{n}} - 1\right) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1}\,\frac{z}{n} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1}\left(e^{\frac{z}{n}} - \frac{z}{n} - 1\right) =$$

$$= z \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1}\left(e^{\frac{z}{n}} - 1 - \frac{z}{n}\right) .$$

Als $N \to \infty$, dan nadert het eerste stuk tot de gehele functie $z \log 2$. In het tweede stuk kan bij vaste R, $|z| \leq R$, $n \geq R$ gebruikt worden, dat (zie a)

$$\left|e^{\frac{z}{n}} - 1 - \frac{z}{n}\right| \leq \left|\frac{z}{n}\right|^2 \leq \frac{R^2}{n^2} ,$$

zodat $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(e^{\frac{z}{n}} - 1 - \frac{z}{n}\right)$ aldaar uniform convergent, bijgevolg in $\mathbb{C}$ overal een analytische functie voorstelt.

2. Op en binnen K, behoudens in het punt i is de functie f, gedefinieerd door

$$f(z) := \frac{e^{\frac{1}{2}\log z}\log z}{z^2 + 1} ,$$

met

$$\log z = \log|z| + i \arg z \qquad \left(-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}\right)$$

analytisch èn voortzetting van $\forall_{x>0}\ \dfrac{\sqrt{x}\,\log x}{x^2 + 1}$.

In het punt i vinden we een enkelvoudige pool met residu $\dfrac{e^{\frac{1}{2}\log i}\log i}{2i}$ (Cauchy), omgerekend tot $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}(1 + i)$.

Volgens de residustelling is daarom

$$\int_K \frac{z^{\frac{1}{2}}\log z}{z^2 + 1}\,dz = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}(1 + i)2\pi i = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}(i - 1) .$$

Splitsen we nu de integraal in vier stukken, en laten we vervolgens $\delta \downarrow 0$ en $R \to \infty$ toe.

$$\int_\delta^R \frac{x^{\frac{1}{2}}\log x}{x^2 + 1}\,dx \to \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,\log x}{x^2 + 1}\,dx, \text{ bestaat!}$$

(integrand continu, $\mathcal{O}(|\log x|)$ $(x \to 0)$, $\mathcal{O}(x^{-5/4})$ $(x \to \infty)$).

$$\Big| \int\limits_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} f(z)dz \Big| \leq \frac{R^{\frac{1}{2}}(\log R + \pi)}{R^2 - 1} \pi R \to 0 \quad \text{als } R \to \infty .$$

$$\Big| \int\limits_{\substack{|z|=\delta \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} f(z)dz \Big| \leq \frac{\delta^{\frac{1}{2}}(|\log \delta| + \pi)}{1 - \delta^2} \pi \delta \to 0 \quad \text{als } \delta \downarrow 0 .$$

$$\int_{-R}^{-\delta} f(z)dz = \int_R^{\delta} \frac{i\sqrt{x}(\log x + i\pi)}{x^2 + 1}(-dx) \to$$

$$\to i \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \log x}{x^2 + 1} dx - \pi \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\, dx}{x^2 + 1} \quad (R \to \infty,\ \delta \downarrow 0) .$$

Combinatie van alle limieten levert

$$(1 + i) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \log x}{x^2 + 1} dx - \pi \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\, dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4} i - \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4} ,$$

zodat (imaginaire delen!)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \log x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4} ,$$

met nevenresultaat

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\, dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} .$$

3. Noem de polen van f resp. a (orde k, residu 1) en b (orde ℓ, residu 0). Dan is uiteraard $a \neq 0$, $b \neq 0$, $k \geq 1$, $\ell \geq 2$, en heeft de functie g, gedefinieerd door

$$g(z) := \frac{1}{z^2}(z - a)^k (z - b)^{\ell} f(z)$$

in het eindige z-vlak nergens polen of nulpunten. Uit het poolvrij zijn van g volgt dat g een gehele functie is

$$g(z) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r \quad \text{(alle } z) ,$$

waarbij

$$c_r = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{g(z)}{z^{r+1}}\, dz \; .$$

Merk op dat f in $z = \infty$ een enkelvoudig nulpunt heeft, dus dat $L := \lim_{z\to\infty} zf(z)$ bestaat ($\neq 0$).

$$|c_r| \le \frac{1}{2\pi}\, 2\pi R\, \frac{(R+|a|)^k (R+|b|)^\ell}{R^2}\, \frac{2|L|}{R}\, \frac{1}{R^{r+1}} \quad (R\to\infty)$$

zodat $c_r = 0$ (als $r + 4 > k + \ell + 1$).

Bijgevolg is g een veelterm van graad $\le k + \ell - 3$. De enige nulpuntvrije veeltermen zijn echter constanten C, dus $k + \ell = 3$, $k = 1$, $\ell = 2$

$$f(z) = \frac{Cz^2}{(z-a)(z-b)^2} \qquad C \neq 0 \; .$$

De numerieke waarden van de residuen leveren nu

$$\frac{Ca^2}{(a-b)^2} = 1, \quad \frac{Cb(b-2a)}{(b-a)^2} = 0$$

bijgevolg $b = 2a$, en $C = 1$.

4. $\pi\sqrt{2}$.

5. $w = (1+i)\dfrac{z-1}{z+1}$.

6. $2\pi i(\frac{2}{3} - \frac{8}{\pi^2})$.

Antwoorden tentamen juni 1977

1. a) $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

Als $z = \pm\pi(n+\frac{1}{2}) + it$ (t reëel), dan is

$$e^{iz} - e^{-iz} = e^{\pm i\pi(n+\frac{1}{2})}(e^{-t} + e^{t})$$

dus $|\sin z| = \cosh t \ge 1$.

Als $z = \pm i\pi(n+\frac{1}{2}) + t$ (t reëel), dan is

$$|e^{iz} - e^{-iz}| \ge \big||e^{iz}| - |e^{-iz}|\big| = |e^{\pi(n+\frac{1}{2})} - e^{-\pi(n+\frac{1}{2})}| \ge$$
$$\ge e^{\frac{1}{2}\pi} - e^{-\frac{1}{2}\pi} > 1 \; .$$

b) $\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} = \frac{z - \sin z}{z \sin z}$. De teller heeft een nulpunt van orde 3, de noemer van orde 2 (volgt uit Taylor-ontwikkeling). Dus de breuk heeft een nulpunt van orde 1, m.a.w. een ophefbare singulariteit $f(0) := 0$.

c) $$\lim_{\substack{z \to k\pi \\ k \neq 0}} (z - k\pi)\left(\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}\right) \underset{z-k\pi=w}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{w \to 0} w\left(\frac{(-1)^k}{\sin w} - \frac{1}{w + k\pi}\right) = (-1)^k \neq 0$$

dus is $k\pi$ $(k \neq 0)$ eerste orde pool met residu $(-1)^k$ voor de functie f.

d) $$|f(w)| \leq 1 + \frac{1}{n\pi} < 2 \text{ op } K_n \text{ (zie a))} .$$

$$\left|\frac{1}{w(w - z)}\right| \leq \frac{1}{n\pi(n\pi - |z|)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n \to \infty,\ z \text{ vast}) ,$$

dus $|I_n| \leq \frac{1}{2\pi}\, 8\pi(n + \tfrac{1}{2})\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \to 0 \quad (n \to \infty)$.

e) Volgens de residustelling is I_n gelijk aan

$$I_n = \sum_{a_i \text{ binnen } K_n} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{f(w)}{w(w - z)} .$$

Alle singulariteiten $\neq 0$ van $\frac{f(w)}{w(w - z)}$ zijn enkelvoudige polen, daar f slechts enkelvoudige polen heeft en $w(w - z)$ alleen een enkelvoudig nulpunt heeft in z $(\neq k\pi)$. $w = 0$ is een ophefbare singulariteit, daar teller en noemer een nulpunt van orde 1 hebben.

$$\operatorname{Res}_{w=z}\left(\frac{f(w)}{w(w - z)}\right) = \frac{f(z)}{z} .$$

$$\operatorname{Res}_{\substack{w=k\pi \\ k \neq 0}}\left(\frac{f(w)}{w(w - z)}\right) = \frac{(-1)^k}{k\pi(k\pi - z)} .$$

dus $$\operatorname{Res}_{k\pi} + \operatorname{Res}_{-k\pi} = \frac{2(-1)^k}{k^2\pi^2 - z^2} \qquad (k \neq 0) .$$

Voor $n > \frac{|z|}{\pi}$ ligt z binnen K_n, dus dan is

$$I_n = \frac{f(z)}{z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^k}{k^2\pi^2 - z^2} , \text{ m.a.w. } f(z) = -z \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^k}{k^2\pi^2 - z^2} + zI_n .$$

Voor $n \to \infty$ geldt $I_n \to 0$ en volgt het gevraagde resultaat.

2. Uit het gegeven voor f volgt: f is analytisch binnen de eenheidscirkel, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (n geheel ≥ 0). Voor g geldt een analoge uitspraak. Bijgevolg is fg ook analytisch binnen de eenheidscirkel en heeft als Taylorcoëfficiënten (Leibnitz)

$$\frac{(fg)^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} .$$

3. Beschouw de functie g, gedefinieerd door

$$g(z) := \frac{1}{z^2}(z - 1)(z + 1)^2 f(z) .$$

Blijken de orde gegevens i) en iv) van f in $z = 0$, 1 en -1 heeft g aldaar ophefbare singulariteiten, die geen nulpunten zijn na continue voortzetting, en is g volgens i) een gehele functie. Voor $z \to \infty$ geldt $f(z) = \mathcal{O}(|z|)$ dus $g(z) = \mathcal{O}(|z|^2)$, bijgevolg is g een polynoom van graad ≤ 2. (Geef integraalschatting van Taylorcoëfficiënten). Resumerend vinden we voor f de vorm

$$f(z) = \frac{z^2(Az^2 + Bz + C)}{(z - 1)(z + 1)^2} .$$

Uit ii) volgt dat $\mathrm{Res}_1 + \mathrm{Res}_{-1}$ nul is. Volgens Cauchy is (eerste resp. tweede orde pool)

$$\mathrm{Res}_1 = \frac{1^2(A + B + C)}{2^2} = \tfrac{1}{4}(A + B + C) .$$

$$\mathrm{Res}_{-1} = \left(\frac{z^2(Az^2 + Bz + C)}{z - 1}\right)'_{z=-1} = \tfrac{1}{4}(7A - 5B + 3C)$$

zodat $2A - B + C = 0$, m.a.w.

$$f(z) = \frac{z^2(Az^2 + (2A + C)z + C)}{(z - 1)(z + 1)^2} .$$

De kwadratische vorm in de teller mag geen nulpunten hebben in $z = 0$, 1 en -1. Dit levert als extra voorwaarden $C \neq 0$, $3A + 2C \neq 0$ en $A \neq 0$.

4. $\cos 1 + 2 \sin 1$.

5. $\frac{\pi}{6e^2}(2e - 1)$.

6. $i((\frac{\pi}{2} - 1)e^{\pi/2} + 1)$.

Antwoorden tentamen januari 1978

1. De functie $\forall_z \frac{\log z}{z^{\frac{1}{2}}(z^2+1)}$, waarbij $z^{\frac{1}{2}} := \exp(\frac{1}{2}\log z)$, $\log z := \log|z| + i\arg z$, $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}$ is op en binnen K de analytische voortzetting van
$\forall_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+1)}$.
De enige singulariteit treedt op voor $z = i$ (enkelvoudige pool); volgens Cauchy is hier het residu

$$\operatorname{Res}_i \frac{\log z}{z^{\frac{1}{2}}(z+i)(z-i)} = \frac{\log i}{i^{\frac{1}{2}}2i} = \frac{\pi}{8}\sqrt{2}(1-i)$$

dus (residustelling)

$$\int_K \frac{\log z}{z^{\frac{1}{2}}(z^2+1)}\,dz = 2\pi i\,\frac{\pi\sqrt{2}}{8}(1-i) = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}(1+i)\ .$$

We splitsen de integraal in vier stukken, en nemen vervolgens limieten ($\delta \downarrow 0$, $R \to \infty$)

i) $$\int_\delta^R = \int_\delta^R \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx \to \int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx \quad (\delta \downarrow 0,\ R \to \infty)$$

limiet bestaat, want de integrand is continu,

$$\mathcal{O}(x^{-2})\ (x \to \infty),\ \mathcal{O}(x^{-\frac{3}{4}})\ (x \downarrow 0)\ .$$

ii) Langs de grote cirkel is de |integrand| te majoreren door $\frac{\log R + \pi}{R^{\frac{1}{2}}(R^2-1)}$ en heeft de integratieweg de lengte πR, dus

$$\left|\int_R^{-R}\right| = \mathcal{O}(R^{-3/2}\log R) \to 0 \quad (R \to \infty)\ \text{(schattingsstelling)}.$$

iii) Langs de kleine cirkel is analoog

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}\right| \le \frac{|\log \delta| + \pi}{\delta^{\frac{1}{2}}(1-\delta^2)}\pi\delta = \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}}|\log\delta|) \to 0\ (\delta \downarrow 0)$$

iv) Langs de negatieve reële as is (stel $z = -x$, $R \ge x \ge \delta$)

$$\frac{\log z}{z^{\frac{1}{2}}(z^2+1)} = \frac{\log x + \pi i}{i\sqrt{x}(x^2+1)}\ ,$$

dus

$$\int_{-R}^{-\delta} = \int_{\delta}^{R} \frac{\log x + \pi i}{i\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx \to -i\int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx + \pi\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)}$$

(beide integralen bestaan, ga dit na).
De totale balans levert

$$\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}(1+i) = \int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx(1-i) + \pi\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)}\ .$$

Gelijkstellen der imaginaire delen geeft

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}$$

met als nevenresultaat

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{2}\ .$$

2. De functie f is overal analytisch behalve daar waar $e^z + 1 = 0$, m.a.w. $z = \pi i(2k+1)$ $(k \in \mathbb{Z})$. Deze punten zijn tweede orde polen omdat $\forall_z\ e^{\alpha z}$ geen nulpunten geeft en $\forall_z\ (e^z+1)$ slechts enkelvoudige nulpunten kent.
Volgens de residustelling is, daar πi als enige singulariteit binnen L ligt,

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{\pi i} \frac{e^{\alpha z}}{(e^z+1)^2}\ .$$

Voor de berekening van dit residu stellen we $z = \pi i + h$ en passen we machtreeksontwikkeling rond $h = 0$ toe.

$$f(z) = \frac{e^{\alpha(\pi i+h)}}{(e^{\pi i+h}+1)^2} = e^{\alpha\pi i}\,\frac{e^{\alpha h}}{(e^h-1)^2} =$$

$$= e^{\alpha\pi i}\left(1 + \alpha h + \frac{\alpha^2h^2}{2!} + \ldots\right)h^{-2}\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!}\ \ldots\right)^{-2}\ .$$

De coëfficiënt van h^{-1} bedraagt (ga dit na!) $e^{\alpha\pi i}(\alpha - 1)$ zodat

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i e^{\alpha\pi i}(\alpha - 1)\ .$$

Nu splitsen we de integraal in vier stukken en passen limietovergang toe $(R \to \infty)$.

i) $$\int_{-R}^{+R} f(z)dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{\alpha x}}{(e^x+1)^2}\,dx \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(e^x+1)^2}\,dx .$$

De integraal bestaat, want de integrand is van de orde $e^{(\alpha-2)x}$ als $x \to \infty$ $(\alpha < 2)$ en van de orde $e^{\alpha x}$ als $x \to -\infty$ $(\alpha > 0)$ en de integrand is continu.

ii) $$\left|\int_{R}^{R+2\pi i} f(z)dz\right| \le 2\pi \frac{e^{\alpha R}}{(e^R-1)^2} = \mathcal{O}(e^{(\alpha-2)R}) \to 0 \quad (R \to \infty).$$
(schattingsstelling)

iii) $$\left|\int_{-R+2\pi i}^{-R} f(z)dz\right| \le 2\pi \frac{e^{-\alpha R}}{(1-e^{-R})^2} = \mathcal{O}(e^{-\alpha R}) \to 0 \quad (R \to \infty)$$

iv) $$\int_{R+2\pi i}^{-R+2\pi i} f(z)dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{2\pi i\alpha+\alpha x}}{(e^{2\pi i+x}+1)^2}\,dx =$$

$$= -e^{2\pi i\alpha} \int_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha x}}{(e^x+1)^2}\,dx \to -e^{2\pi i\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(e^x+1)^2}\,dx .$$

Totaalbalans geeft

$$(1-e^{2\pi i\alpha}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(e^x+1)^2}\,dx = 2\pi i e^{\alpha\pi i}(\alpha-1)$$

zodat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(e^x+1)^2}\,dx = \pi(\alpha-1)\frac{2i}{e^{-\pi i\alpha}-e^{+\pi i\alpha}} = \pi\,\frac{(1-\alpha)}{\sin \pi\alpha} .$$

N.B. Voor $\alpha = 1$ is de laatste vorm niet gedefinieerd. Wel is de limiet 1 als $\alpha \to 1$. Rechtstreekse berekening geeft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x}}{(e^x+1)^2}\,dx \underset{t=e^x}{=} \int_{0}^{\infty} \frac{dt}{(t+1)^2} = 1 ,$$

een geruststellende verificatie.

3. a) Voor alle n is op G de functie $\Psi_z \dfrac{\log(z+n)}{n^2}$ analytisch, omdat de logaritme analytisch is behoudens op de snede $\{x + iy \mid y = 0 \wedge x \le -n\}$, die geheel buiten G ligt.

Neem $R > 0$, vast; $|z| \le R$, $n > R+1$ dan is $|z+n| > 1$ en

$$|\log(z+n)| = |\log|z+n| + i \arg(z+n)|$$
$$\le \log|z+n| + \pi \le \log(R+n) + \pi .$$

(N.B. $\log|u|$ is voor $|u| \ge 1$ monotoon stijgend.)

Onder de gegeven voorwaarden geldt dus

$$\left|\frac{\log(z+n)}{n^2}\right| \le \frac{\log(R+n)+\pi}{n^2} = \mathcal{O}(n^{-3/2})$$

dus de reeks $\sum\limits_{n>R+1} \dfrac{\log(z+n)}{n^2}$ convergeert uniform voor $|z| \le R$ en de som stelt een analytische functie voor (Weierstrass). De eindige som $\sum\limits_{n\le R+1} \dfrac{\log(z+n)}{n^2}$ is ook een analytische functie op $G \cap \{z \mid |z| < R\}$, dus is f analytisch op $G \cap \{z \mid |z| < R\}$ voor alle vaste R dus ook op G.

b) $z = -1$ is voor alle $\Psi_z \dfrac{\log(z+n)}{n^2}$ $(n \ge 2)$ een regulier punt.

De singuliere bijdrage komt van $\dfrac{\log(z+1)}{1^2}$: een logaritmisch vertakkingspunt.

4. $z = i$: enkelvoudige pool, residu $\frac{i}{2} e^{-i}$.

$z = -i$: enkelvoudige pool, residu $-\frac{i}{2} e^{i}$.

$z = 0$: essentiële singulariteit, residu $1 - \sin 1$.

5. $w = \dfrac{-iz+2}{2z+i}$.

6. $2\pi i(4-1)$.

<u>Antwoorden tentamen maart 1978</u>

1. De functie f_n, $f_n(z) := \dfrac{z}{1-(nz)^2}$ is analytisch in $\mathbb{C}$ behoudens de punten $z = \pm \frac{1}{n}$ die beide op de gegeven snede liggen ($n \in \mathbb{N}$). Bijgevolg is iedere f analytisch op A. Merk op dat

$$f_n(z) = \frac{1}{z}\,\frac{1}{(\frac{1}{z})^2 - n^2} ,$$

voor $|z| \geq \delta$ ($\delta > 0$ vast gekozen), $n > \frac{2}{\delta}$, geldt

$$|f_n(z)| < \frac{1}{\delta}\frac{1}{n^2 - (\frac{1}{\delta})^2} < \frac{1}{\delta(n^2 - \frac{1}{4}n^2)} = \frac{4}{3\delta n^2}$$

dus $|f_n(z)|$ wordt uniform gemajoreerd door de overeenkomstige term van een convergente reeks. Dus (Weierstrass) is $\sum\limits_{n>2/\delta} \frac{z}{1-(nz)^2}$ analytisch op $\{z \mid |z| \geq \delta\}$. Toevoeging van de eindige som $\sum\limits_{n\leq 2/\delta} \frac{z}{1-(nz)^2}$ maakt derhalve ook

$$F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{1-(nz)^2}$$

analytisch op $A \cap \{z \mid |z| \geq \delta\}$ voor willekeurige δ, dus ($\delta \downarrow 0$) op A. De integraal $\int\limits_{|z|=2} F(z)dz$ wordt dankzij de uniforme convergentie verkregen door termsgewijze integratie. Daar

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z}{1-(nz)^2}\, dz = 2\pi i(-\frac{1}{n^2}) \quad \text{(Hoe ziet U dat snel?)}$$

is $\int\limits_{|z|=2} F(z)dz$ gelijk aan $2\pi i(-\frac{\pi^2}{6}) = -\frac{\pi^3 i}{3}$.

2. Daar f een gehele functie is, convergeert zijn Taylorontwikkeling om 0 voor alle z.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n .$$

De integraalvoorstelling van c_n luidt

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \qquad \text{(R \underline{willekeurig})} .$$

Integraalschatting m.b.v. ii) levert

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi}\, 2\pi R\, \frac{2+3R}{R^{n+1}} \qquad \text{(R willekeurig)} .$$

Laten we $R \to \infty$ dan zien we dat $c_n = 0$ voor $n \geq 2$.
Dus is f een lineaire functie, die door het gegeven i) ondubbelzinnig is vastgelegd als $f(z) = 1 - 2z$.
Opmerking. De coëfficiënten 2 en 3 in gegeven ii) zijn bij de integraalschatting niet wezenlijk gebruikt. Toch moet het uiteindelijke antwoord wel aan ii) voldoen. Dit eist een aparte (triviale) verificatie!

3. Blijkens het gegeven a) heeft f in i een eerste orde pool met residu i. Dus heeft $\Psi_z\, e^{iz}f(z)\log z$ aldaar ook een eerste orde pool met residu

$$\lim_{z\to i}(z-i)f(z)e^{iz}\log z = ie^{-1}\,\frac{\pi i}{2} = -\,\frac{\pi}{2e}\ .$$

De functie $\Psi_z\, e^{iz}f(z)\log z$ is verder op en binnen K analytisch zodat de residustelling leidt tot

$$\int_K e^{iz}f(z)\log z\,dz = 2\pi i\,\frac{-\pi}{2e} = \frac{-\pi^2 i}{e}\ .$$

We splitsen de integraal in vier stukken.

1) De grote halfcirkel. Voor $R > 2$ geldt hier

$$|f(z)| < \frac{10}{R^{3/2}}\ ,\quad |\log z| \le \log R + \pi\ ,$$

en $|e^{iz}| = e^{-\mathrm{Im}\, z} \le 1$, en daarom

$$\Big|\int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{Im}\, z\ge 0}} f(z)e^{iz}\log z\,dz\Big| \le 2\pi R\,\frac{10(\log R+\pi)}{R^{3/2}} \to 0 \qquad (R\to\infty)\ .$$

2) De kleine halfcirkel. Omdat f analytisch is in $z = 0$, geldt $|f(z)| \le B$ voor een of andere B en $|z| \le \frac{1}{2}$. Verder hebben we ook hier $|e^{iz}| \le 1$ en $|\log z| \le |\log\delta| + \pi$, en dus

$$\Big|\int_{\substack{|z|=\delta\\ \mathrm{Im}\, z\ge 0}} f(z)e^{iz}\log z\,dz\Big| \le 2\pi\delta B(|\log\delta| + \pi) \to 0 \qquad (\delta\downarrow 0)\ .$$

3) $$\int_\delta^R f(z)e^{iz}\log z\,dz = \int_\delta^R f(x)e^{ix}\log x\,dx$$

4) $$\int_{-R}^{-\delta} f(z)e^{iz}\log z\,dz = \int_\delta^R f(x)e^{-ix}(\log x+\pi i)dx$$

immers $f(z) = f(-x) = f(x)$.

Beide integralen hebben een limiet ($R\to\infty$, $\delta\downarrow 0$). Dit is een gevolg van de continuïteit van de integranden op $\mathbb{R}^+$ en hun grootte-orde (schatten!). Na limietovergang vinden we de totaalbalans

$$\int_0^\infty f(z)[(e^{ix} + e^{-ix})\log x + \pi i e^{-ix}]dx = -\frac{\pi^2 i}{e} .$$

Bedenk nu dat f(x) reëel is ($x \in \mathbb{R}$) en neem links en rechts het imaginaire deel

$$\pi i \int_0^\infty f(x)\cos x\, dx = -\frac{\pi^2 i}{e}$$

dus

$$\int_0^\infty f(x)\cos x\, dx = -\frac{\pi}{e} .$$

Opmerking. Het gegeven b) stelt ons in staat f analytisch voort te zetten in $\mathbb{C}\backslash\{i,-i\}$: Definieer

$$g_1(z) = f(z) \quad (z \in H\backslash\{i\}) .$$

$$g_2(z) = f(-z) \quad (-z \in H\backslash\{i\}) .$$

g_1 en g_2 zijn beide analytische voortzettingen van f, stemmen voor $\{z \mid |\text{Im } z| < 1\}$ overeen dankzij b), en geven dus samen een analytische voortzetting in $C\backslash\{i,-i\}$. Noem deze functie g. Ga na dat

$$g(z) = \frac{-2}{z^2+1} .$$

4. 1 ($|a| < 2$); $1 - e^{4/a}$ ($|a| > 2$) .

5. $f(z) = A(z - \frac{1}{2}i)$, waarbij $|A| = 2$.

6. $-2\pi^2 + 8\pi - 8$.

Antwoorden tentamen mei 1978

1. Zie dictaat.

2. De functie $\forall_z \frac{\sin \pi z}{z-n}$ ($n \in \mathbb{N}$) heeft in $z = n$ een opheffbare singulariteit ($\lim_{z\to n} \frac{1}{z-n} \sin \pi z = \pi(-1)^n$) en is verder in $\mathbb{C}$ analytisch, met nulpunten in $\mathbb{Z}\backslash\{n\}$. De functie $\forall_z \log(1 + \frac{z}{n})$ is analytisch in $\mathbb{C}\backslash\{x + iy \mid y = 0 \wedge x \le -n\}$ dus zeker in het rechterhalfvlak.
Elk van de termen $\sin \pi z \frac{\log(1 + z/n)}{z-n}$ is derhalve analytisch in het rechterhalfvlak.

Neem nu $R > 0$, vast en bekijk alle z in het rechterhalfvlak, $|z| \le R$.
Merk op dat $\lim\limits_{w\to 0} \frac{\log(1+w)}{w} = 1$ dus

$$\exists_{\delta>0}\ \forall_{w,\,|w|\le\delta}\ [\,|\log(1+w)| \le 2|w|\,] \ .$$

Kies zo'n δ, zeg δ_0 en neem $n \ge \mathrm{Max}(2R, \frac{R}{\delta_0})$. Dan is $|\frac{z}{n}| \le R\,\frac{\delta_0}{R} = \delta_0$, dus

$$\left|\frac{\log(1+\frac{z}{n})}{z-n}\right| \le \frac{2|\frac{z}{n}|}{n-R} \le \frac{2\,\frac{R}{n}}{n-\frac{1}{2}n} = \frac{4R}{n^2} \ .$$

Verder noemen we $A(R) := \max\limits_{|z|\le R} |\sin \pi z|$.
Resumerend vinden we dat voor voldoend grote n

$$\left|\frac{\sin \pi z\ \log(1+\frac{z}{n})}{z-n}\right| \le \frac{4RA(R)}{n^2}$$

op $\{z \mid \mathrm{Re}\, z > 0 \wedge |z| \le R\}$, waardoor uniforme convergentie van de reeks en daarmee analyticiteit van F gegarandeerd is op alle begrensde deelgebieden van het rechterhalfvlak, dus in het gehele halfvlak.
Alle sommanden zijn voor $z = n$ berekend in het voorgaande, en we verifiëren onmiddellijk dat $F(n) = (-1)^n \pi \log 2$ $(n \in \mathbb{N})$.

3. De functie f, gedefinieerd door

$$f(z) := \frac{e^{\frac{1}{3}\log z}}{(z-1)^2}\ , \qquad \log z := \log|z| + i \arg z,\ (-\pi < \arg z < \pi)$$

is analytisch op $(\mathbb{C}\backslash\{1\})\backslash\{x+iy \mid x \le 0 \wedge y = 0\}$ en kan van boven en van onder links van 0 analytisch worden voortgezet over de reële as (met verschillende voortzettingswaarden) zodat met inachtneming van deze voortzettingen binnen K de residustelling kan worden toegepast.

$$\int_K f(z)\,dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}_1 f(z) \ .$$

$z = 1$ is voor f een pool van orde 2 met residu (Cauchy)

$$(e^{\frac{1}{3}\log z})'_{z=1} = (\tfrac{1}{3}\,\tfrac{1}{z}\,e^{\frac{1}{3}\log z})_{z=1} = \tfrac{1}{3}$$

dus

$$\int_K f(z)\,dz = \frac{2}{3}\pi i \ .$$

We splitsen de integraal in vier stukken

i) de grote cirkel

$$|e^{\frac{1}{3}\log z}| = e^{\frac{1}{3}\operatorname{Re}(\log z)} = R^{\frac{1}{3}}$$

dus

$$\Big|\int_{|z|=R} f(z)dz\Big| \le 2\pi R\,\frac{R^{1/3}}{(R-1)^2} = \mathcal{O}(R^{-2/3}) \to 0 \quad (R\to\infty)\ .$$

ii) De kleine cirkel. Analoog is (schattingsstelling)

$$\Big|\int_{|z|=\delta} f(z)dz\Big| \le 2\pi\delta\,\frac{\delta^{1/3}}{(1-\delta)^2} = \mathcal{O}(\delta^{4/3}) \to 0 \quad (\delta\downarrow 0)\ .$$

iii) Het stuk reële as "boven", $z=-x+i0$, $R\ge x\ge\delta$

$$\int_{\text{"boven"}} f(z)dz = \int_\delta^R \frac{e^{\frac{1}{3}(\log x+\pi i)}}{(-x-1)^2}\,dx = e^{\frac{1}{3}\pi i}\int_\delta^R \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2}\,dx$$

met als limiet ($\delta\downarrow 0$, $R\to\infty$) de waarde

$$e^{\frac{1}{3}\pi i}\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2}\,dx$$

(integraal bestaat, ga dit na).

iv) Het stuk reële as "onder", $z=-x-i0$, $\delta\le x\le R$

$$\int_{\text{"onder"}} f(z)dz = -\int_\delta^R \frac{e^{\frac{1}{3}(\log x-\pi i)}}{(-x-1)^2}\,dx$$

$$\to -e^{-\frac{1}{3}\pi i}\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2}\,dx \quad (R\to\infty,\ \delta\downarrow 0)\ .$$

Totaal afrekening wordt ($\delta\downarrow 0$, $R\to\infty$)

$$(e^{\frac{1}{3}\pi i} - e^{-\frac{1}{3}\pi i})\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{3}\,2i\ ,$$

zodat

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{3\sin\frac{1}{3}\pi} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\ .$$

Opmerking. De laatste integraal kan ook door partiële integratie worden verkregen m.b.v. lettervraagstuk R.

4. $\frac{\pi}{24}$.

5. $f(z) = \frac{2}{(z-2)^2} + \frac{1}{z} - 1.$

6. $\frac{1}{4}\pi i.$

Antwoorden tentamen januari 1979

1. Uit i) en ii) volgt dat f(z) overal locaal begrensd is behalve eventueel in $z = 0$. Op grond van het gedrag van een analytische functie in de buurt van een singulariteit mogen we daarom concluderen dat f analytisch is in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, dus om $z = 0$ een Laurent ontwikkeling heeft van de vorm

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad (0 < |z| < \infty) .$$

Voor c_n geldt de integraalvoorstelling

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz ,$$

zodat we $|c_n|$ kunnen schatten m.b.v. ii)

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi} 2\pi R.40 \frac{R^{5/2}+1}{R^{n+2}} = 40 \frac{R^{5/2}+1}{R^{n+1}} .$$

Deze ongelijkheid geldt voor $0 < R < \infty$.
Als $n \le -2$ (laat $R \downarrow 0$) dan is $c_n = 0$; analoog: voor $n \ge 2$ (laat $R \to \infty$) is $c_n = 0$, dus

$$f(z) = \frac{1}{z}(c_{-1} + c_0 z + c_1 z^2) .$$

Uit iii) volgt dat alle c_i reëel zijn, en met iv) dat f(z) te schrijven is als

$$f(z) = \frac{A}{z}(z - B)^2 \quad (A,B \in \mathbb{R}) .$$

v) legt nu nog de waarden van A en B vast. Er zijn twee oplossingen

$$f(z) = \frac{\pm 2(z\pm 1)^2}{z} .$$

2. De functie $\varphi_z \dfrac{z^{\frac{1}{2}}\log z}{z^2+4}$ is behoudens in $z = 2i$ overal op en binnen K analytisch. We passen daarom de residustelling toe, in aanmerking nemend dat $\mathrm{Res}_{z=a} \dfrac{\varphi(z)}{z-a} = \varphi(a)$ voor een in a analytische functie φ.

$$\int_K \frac{z^{\frac{1}{2}}\log z}{z^2+4}\,dz = 2\pi i\left(\frac{z^{\frac{1}{2}}\log z}{z+2i}\right)_{z=2i} =$$

$$= 2\pi i\,\frac{(1+i)(\log 2+\frac{\pi i}{2})}{4i} = \tfrac{1}{2}\pi\{(\log 2 - \tfrac{1}{2}\pi) + i(\log 2 + \tfrac{1}{2}\pi)\}\ .$$

We berekenen de integraal over de afzonderlijke stukken.

a) De grote cirkel. Hier is

$$\left|\frac{z^{\frac{1}{2}}\log z}{z^2+4}\right| \le \frac{R^{\frac{1}{2}}(\log R+\pi)}{R^2-4}$$

dus de integraal $= \mathcal{O}(R^{-\frac{1}{2}}\log R) \to 0\ (R\to\infty)$.

b) De kleine cirkel. Nu vinden we als integraalschatting

$$\left|\int_{\substack{|z|=\delta\\ \mathrm{Im}\,z\ge 0}}\right| \le \pi\delta\,\frac{(|\log\delta|+\pi)\delta^{\frac{1}{2}}}{4-\delta^2} = \mathcal{O}(\delta^{3/2}|\log\delta|) \to 0 \qquad (\delta\downarrow 0)\ .$$

c) Het positief reële stuk

$$\int_\delta^R \frac{\sqrt{x}\,\log x}{x^2+4}\,dx \to \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,\log x}{x^2+4}\,dx$$

(integraal bestaat, waarom?).

d) Het negatief reële stuk

$$\int_{-R}^{-\delta} \frac{z^{\frac{1}{2}}\log z}{z^2+4}\,dz \underset{z=-x}{\overset{\uparrow}{=}} \int_\delta^R \frac{i\sqrt{x}(\log x+\pi i)}{x^2+4}\,dx \to$$

$$\to i\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,\log x}{x^2+4}\,dx - \pi\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+4} \qquad (\delta\downarrow 0,\ R\to\infty)\ .$$

Maken we de balans op voor $\delta \downarrow 0$, $R\to\infty$ dan blijkt

$$(1+i)\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\log x}{x^2+4}\,dx - \pi\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+4}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi(\log 2 - \tfrac{1}{2}\pi) + i\tfrac{1}{2}\pi(\log 2 + \tfrac{1}{2}\pi),$$

zodat na het nemen van de imaginaire delen

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\log x}{x^2+4}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\log 2 + \tfrac{1}{4}\pi^2$$

met als nevenresultaat

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+4}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\ .$$

3. a) De reeks, gegeven in de definitie van F is een machtreeks in e^{2iz} met convergentiestraal 1 (ga dit na), die op de rand niet absoluut convergeert. Derhalve is het definitiegebied van F:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |e^{2iz}| < 1\} = \{z \mid \mathrm{Re}\ z > 0\}\ .$$

b) Op $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ z \geq \delta > 0\}$ (δ vast) geldt voor alle n

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{e^{2inz}}{n}\right| \leqq \frac{1}{n}(e^{-2\delta})^n \leq (e^{-2\delta})^n\ .$$

Het rechterlid is de algemene term van een convergente meetkundige reeks, waarin de individuele waarde van z niet meer voorkomt, m.a.w. die aangeeft dat de reeks met z uniform convergent is in het door δ vastgelegde gebied. Op grond van het Weierstrass kenmerk is de functie F analytisch in het gehele bovenhalfvlak (waarom?) en kan F' gevonden worden door termsgewijze differentiatie van de reeks, m.a.w.

$$F'(z) = -i + \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} 2i\, e^{2inz} = (\text{meetk. reeks}) = -i + 2i\frac{e^{2iz}}{1+e^{2iz}} =$$

$$= i\,\frac{e^{2iz}-1}{1+e^{2iz}} = -\tan z \qquad (\mathrm{Im}\ z > 0)\ .$$

c) In het gegeven enkelvoudig samenhangende gebied is de functie $\Psi_z \tan z$ overal analytisch (de singulariteiten van tan z liggen in de punten $(k+\tfrac{1}{2})\pi$, $k \in \mathbf{Z}$), dus hangt de uitdrukking $-\int_0^z \tan w\, dw$ in dit gebied niet van de integratieweg af. tan w is er bovendien continu, dus is H,

$$H(z) := -\int_0^z \tan w \, dw$$

een analytische functie van z, $H'(z) = -\tan z$, dus $H(z) = F(z) + C$ (C constant) in het bovenhalfvlak. $G(z) := H(z) - C$ is de gevraagde analytische voortzetting.

d) Het definitiegebied van G is puntsymmetrisch t.o.v. 0. Neem naar $-z$ en $+z$ integratiewegen die elkaars spiegelbeeld t.o.v. 0 zijn.

$$G(-z) = \int_0^{-z} (-\tan w)dw + C \overset{w=-v}{=} \int_0^{z} -(-\tan v)(-dv) + C =$$

$$= \int_0^{z} (-\tan v)dv + C = G(z) \; .$$

4. $\frac{\pi}{6} \frac{e-1}{e}$.

5. $-2\pi i(1 + \frac{21}{25} e^{1/5})$.

6. Het gemeenschappelijke buitengebied van de cirkels (allemaal met straal 1) om de punten 0, 2, 1+i en 1-i, rand inbegrepen.

<u>Antwoorden tentamen maart 1979</u>

1. Zie dictaat/boek.

2. De functie $\forall_z \frac{e^{-z}}{z^4 - 1}$ is overal analytisch behalve in de enkelvoudige polen ± 1 en $\pm i$ waarvan er één, nl. $z = 1$ binnen K ligt. Volgens de residustelling geldt daarom

$$\int_K \frac{e^{-z}}{z^4 - 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_1 \frac{e^{-z}}{z^4 - 1} = 2\pi i \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z^4 - 1} e^{-z} = \frac{1}{2} \frac{\pi i}{e} \; .$$

We werken de integraal langs ieder van de drie stukken integratieweg uit: Daarom $R \to \infty$.

a) De cirkel (met straal $R\sqrt{2}$!)

$$|e^{-z}| = e^{-x} \le e^{-R}$$

$$|z^4 - 1| \ge R^4 - 1$$

dus

$$\left| \int_{\text{kwartcirkel}} \right| \le \frac{\pi R\sqrt{2}e^{-R}}{2(R^4-1)} \to 0 \qquad (R \to \infty) \ .$$

b) Het lijnstuk in het eerste kwadrant

$$z = x(1+i), \ R \ge x \ge 0$$

$$e^{-z} = e^{-x}(\cos x - i \sin x), \ z^4 = -4x^4 \ .$$

De integraal wordt

$$(1+i)\int_0^R \frac{e^{-x}(\cos x - i \sin x)}{4x^4+1}\,dx \to$$

$$\to (1+i)\int_0^\infty \frac{e^{-x}(\cos x - i \sin x)}{4x^4+1}\,dx \qquad (R \to \infty)$$

(integrand continu en $\mathcal{O}(e^{-x})$ $(x \to \infty)$ dus integraal bestaat).

c) Het lijnstuk in het vierde kwadrant

$$z = x(1-i), \ 0 \le x \le R$$

$$e^{-z} = e^{-x}(\cos x + i \sin x), \ z^4 = -4x^4 \ .$$

De integraal wordt

$$-(1-i)\int_0^R \frac{e^{-x}(\cos x + i \sin x)}{4x^4+1}\,dx \to$$

$$\to (-1+i)\int_0^\infty \frac{e^{-x}(\cos x + i \sin x)}{4x^4+1}\,dx \qquad (R \to \infty) \ .$$

Samengevoegd is het resultaat als $R \to \infty$

$$2i\int_0^\infty \frac{e^{-x}(\cos x - \sin x)}{4x^4+1}\,dx = \frac{\pi i}{2e} \ .$$

De gevraagde integraal heeft dus de waarde $\frac{\pi}{4e}$.

3. a) Alle termen uit de reeks zijn gehele functies. Rest ons aan te tonen dat voor iedere vaste $R > 0$ in het domein $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le R\}$ de reeks uniform convergeert. Dan is volgens Weierstrass f een gehele functie.

Merk op dat $\lim_{w \to 0} \frac{e^w - 1}{w} = 1$, dus

$$\exists_{\delta>0}\ \forall_{w,\,|w|\le\delta}\ [\,|e^w - 1| \le 2|w|\,]\ .$$

Neem (bij vaste R) n zo groot dat $\frac{R}{(n+1)!} \le \delta$. Dan is

$$(n-1)!\,|e^{\frac{z}{(n+1)!}} - 1| \le \frac{2(n-1)!\,|z|}{(n+1)!} \le \frac{2R}{n(n+1)}\ .$$

Het rechterlid is de algemene term van een convergente reeks waarin z niet voorkomt, hetgeen de uniforme convergentie verzekert.

b) Volgens Weierstrass wordt f'(z) verkregen door termsgewijze differentiatie. Dus

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)!}\, e^0 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots = 1$$

(bekijk partiële sommen; $\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$).
Voor f geldt de Taylorontwikkeling

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\, z + \frac{f''(0)}{2!}\, z^2 + \ldots\ .$$

Dus $f(z) = 0 + 1.z + \mathcal{O}(|z|^2)\ \ (z \to 0)$.

4. $2\pi i(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}) = \frac{4}{3}\,\pi i$.

5. $\sqrt{5}$, 0.

6. $a = \frac{3}{2}\log 2 - \frac{3}{4}$; $b = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$.

Antwoorden tentamen mei 1979

1. We behandelen twee methodes

A. Uit het gegeven volgt dat f een Laurentontwikkeling heeft van de vorm

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \qquad (0 < |z| < \infty)\ .$$

Voor de coëfficiënten c_n geldt

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \qquad (R > 0)\ ,$$

zodat met de schattingsstelling voor integralen

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi}\, 2\pi R\, \frac{R^{\frac{1}{2}} + |\log R|}{R^{n+1}} \qquad (R > 0)$$

m.a.w.

i) $\quad |c_n| = \mathcal{O}(R^{\frac{1}{2}-n}) \quad (R \to \infty)$

ii) $\quad |c_n| = \mathcal{O}(R^{-n}|\log R|) \quad (R \downarrow 0)$.

Uit i) volgt $c_n = 0$ $(n \ge 1)$ en uit ii) concluderen we $c_n = 0$ $(n \le -1)$, dus $f(z) = c_0$.

B. Beschouw voor willekeurige verschillende $a,b \neq 0$ de integraal

$$I := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \left(\frac{f(z)}{z-a} - \frac{f(z)}{z-b}\right) dz ,$$

waarbij $R > \mathrm{Max}(|a|,|b|)$.

Met de schattingsstelling voor integralen vinden we, onafhankelijk van R (kanaalmethode)

$$|I| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z)\, \frac{a-b}{(z-a)(z-b)}\, dz\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\, 2\pi R\, \frac{R^{\frac{1}{2}} + |\log R|}{(R-|a|)(R-|b|)}|a-b| = \mathcal{O}(R^{-\frac{1}{2}}) \quad (R \to \infty), \text{ dus } I = 0 .$$

Anderzijds vinden we als toepassing van de residustelling

$$I = (\mathrm{Res}_a + \mathrm{Res}_b + \mathrm{Res}_0)\left(\frac{f(z)}{z-a} - \frac{f(z)}{z-b}\right) =$$

$$= f(a) - f(b) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\delta} \left(\frac{f(z)}{z-a} - \frac{f(z)}{z-b}\right) dz \quad (\delta < \mathrm{Min}(|a|,|b|)) .$$

De laatste integraal laat zich onafhankelijk van δ in absolute waarde majoreren door

$$\frac{1}{2\pi}\, 2\pi\delta\, \frac{\delta^{\frac{1}{2}} + |\log \delta|}{(|a|-\delta)(|b|-\delta)}|a-b| = \mathcal{O}(\delta|\log \delta|) \quad (\delta \downarrow 0) .$$

Bijgevolg is deze integraal nul en krijgen we als eindresultaat $0 = f(a) - f(b) + 0$, dus $f(z) =$ constant.

2. De functie $\displaystyle \forall_z \; \frac{e^{iz} - 1}{z(z^2+1)}$ is analytisch op en boven de reële as, behoudens een ophefbare singulariteit in $z = 0$ en een pool (orde 1) in $z = i$.

$$\mathrm{Res}_{z=i}\left(\frac{e^{iz}-1}{z(z+i)(z-i)}\right) = \frac{e^{-1}-1}{-2} = \frac{e-1}{2e} .$$

Splitsen we de integraal in twee stukken

i) $$\int_{-R}^{+R} \frac{e^{ix}-1}{x(x^2+1)}\,dx = \int_{-R}^{+R} \frac{\cos x - 1}{x(x^2+1)}\,dx + \int_{-R}^{+R} \frac{i \sin x}{x(x^2+1)}\,dx$$

$$= 0 + i \int_{-R}^{+R} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx \to i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx .$$

Alle integralen bestaan, omdat de integranden continu zijn en $\mathcal{O}(\frac{1}{|x|^3})$ $(x \to \pm\infty)$. Het nul zijn van de cosinusintegraal is het gevolg van het feit dat de integrand een oneven functie is).

ii) $$\left| \int_{\substack{|z|=R \\ \mathrm{Im}\, z \geq 0}} \frac{e^{iz}-1}{z(z^2+1)}\,dz \right| \leq \pi R \frac{1+1}{R(R^2-1)} \to 0 \quad (R \to \infty) .$$

Dus na limietovergang $(R \to \infty)$ krijgen we (residustelling)

$$2\pi i\, \frac{e-1}{2e} = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx + 0$$

dus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx = \frac{\pi(e-1)}{e} .$$

3. a) De reeks der absolute waarden (een machtreeks in $|\frac{2}{z-1}|$) convergeert als $|\frac{2}{z-1}| < 1$ en divergeert als $|\frac{2}{z-1}| \geq 1$ (d'Alembert criterium). Het definitiegebied van F is daarom

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| > 2\} .$$

b) Omdat uniforme convergentie optreedt voor $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \geq 2 + \delta\}$ (δ vast, positief) en alle termen analytische functies zijn, wordt $F'(z)$ in het boven aangegeven gebied verkregen door termsgewijze differentiatie (Weierstrass)

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{z-1}\right)^{n-1} \frac{-2}{(z-1)^2} =$$

$$= -\frac{2}{(z-1)^2} + \frac{4}{(z-1)^3} - \frac{8}{(z-1)^4} + \ldots \text{ (convergente meetkundige reeks)} =$$

$$= \frac{-\dfrac{2}{(z-1)^2}}{1 + \dfrac{2}{z-1}} = -\frac{2}{z^2-1} \qquad (|z-1| > 2) .$$

c) Door

$$G(z) := -\int_a^z \frac{2}{w^2-1}\, dw + F(a)$$

a vast, $|a - 1| > 2$ wordt F analytisch voortgezet in het gegeven gebied. Immers, de integrand is analytisch (dus continu) en een gesloten integratieweg omsluit òf géén singulariteiten van $\frac{1}{w^2-1}$ òf beide (met residusom nul) dus is de integraal onafhankelijk van de weg.

d) Gemakkelijkste oplossing: $F(\infty) = 0$, dus

$$G(0) = -\int_{\infty}^{0} \frac{2}{w^2-1}\, dw \underset{w=it}{\overset{\uparrow}{=}} -\int_{\infty}^{0} \frac{2}{-t^2-1}\, i\,dt = -\pi i .$$

4. 0.

5. $w = \rho(z-1)$ of $w = \sigma \frac{1}{z-1}$; $|\rho| = 1$, $|\sigma| = 1$.

6. $\frac{1}{2z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z}$, $\quad 0 < |z| < \pi$.