TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 31

bestemd voor

BDK-III

WISKUNDE 49

bestemd voor

N-IV, W-IV, E-IV, T-IV, B-IV

Waarschijnlijkheidsrekenening en Statistiek

cursusjaar 1974-1975

2265

Bibl / Mag

Bma

Centrale Bibliotheek
T.H. Eindhoven

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Wiskunde 31

bestemd voor BDK-III

Wiskunde 49

bestemd voor N-IV, W-IV, E-IV, T-IV, B-IV

Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek

Dictaatnr. 2.265 Prijs f 4,--

2.265

Leeszaal
Centrale Bibliotheek
T.H. Eindhoven

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 31
bestemd voor BDK-III

WISKUNDE 49
bestemd voor N-IV, W-IV, E-IV, T-IV, B-IV

WAARSCHIJNLIJKHEIDSREKENING EN STATISTIEK

cursusjaar 1974-1975

8/1 75

INHOUD

Inleiding

Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek worden toegepast op verschijnselen die van het toeval afhankelijk zijn. De studie van de waarschijnlijkheidsrekening of kansrekening is begonnen in de 17e eeuw, geïnspireerd door problemen die zich voordeden bij het spelen met dobbelstenen. Kenmerkend voor de situaties waarin de kansrekening wordt toegepast is dat het kansmechanisme bekend is en dat de kansen op bepaalde uitkomsten kunnen worden berekend. Moderne toepassingen van de kansrekening worden o.a. gevonden in informatietheorie, statistische mechanika, reliabilitytheorie, regeltechniek, voorraadproblemen, wachttijdproblemen. De statistiek, die we weer kunnen opvatten als een toepassing van de waarschijnlijkheidsrekening, is ontstaan uit de theorie van waarnemingsfouten, waaraan vooral in de astronomie behoefte bestond. Belangrijke bijdragen werden vooral geleverd in het begin van de 19e eeuw. De moderne statistiek is sterk gestimuleerd door toepassingen in de landbouw en wordt nu overal gebruikt waar conclusies uit waarnemingen moeten worden getrokken, zoals in de fysische wetenschappen (astronomie, meterologie, geologie, chemie, fysica), de sociale wetenschappen en de biologie. De laatste decennia hebben vooral toepassingen in de industrie, zowel op het gebied van de produktie als op dat van marktonderzoek een grote vlucht genomen.

N.B. 1. Bij de bestudering van dit kollege is het Statistisch Compendium een onmisbaar hulpmiddel. Dit Compendium geeft behalve tabellen een overzicht van de behandelde theorie (en nog veel meer). Bij het tentamen kan men gebruik maken van het Compendium.

N.B. 2. Even onmisbaar is de bij dit kollege behorende vraagstukkenverzameling. Hierin zijn met name veel problemen opgenomen die toepassing van de behandelde theorie op enigszins praktische situaties vergen.

Hoofdstuk 1. Kansen

In dit eerste hoofdstuk wordt een theorie opgebouwd waarmee eksperimenten beschreven kunnen worden, waarvan de uitkomst in zekere mate door het toeval wordt bepaald. Deze opbouw geschiedt op soortgelijke wijze en met eenzelfde soort doel als bij de vlakke of Euclidische meetkunde die een beschrijving geeft voor landmeetkundige problemen of bij de vektoranalyse voor stromingsproblemen en bijvoorbeeld elektrostatische velden. In de theorie zullen we gemakshalve aan de praktijk ontleende termen gebruiken. Dit gebeurt trouwens ook in de vlakke meetkunde en de vektoranalyse, waar de termen punt, lijn en bijvoorbeeld potentiaal gebruikt worden voor strikt wiskundige begrippen. Het risiko van verwarring tussen theorie en praktijk wordt daarbij op de koop toe genomen. Bij de problemen die ons hier interesseren zijn de kernwoorden kans en uitkomst. We komen ze tegen in zinnen als:

> De kans op de uitkomst "dubbelzes" bij het werpen met 2 dobbelstenen is klein.

We zullen beginnen de term "uitkomst" wat nauwkeuriger te omschrijven. Daarna worden precieze afspraken gemaakt over wat verstaan zal worden onder de kans op een uitkomst.

§ 1. Uitkomsten

Bij de eenvoudigste toevalsproblemen, zoals het werpen met een of meer dobbelstenen, het trekken van de "honderdduizend" in de Staatsloterij, een keer spelen bij de roulette zijn er eindig veel mogelijke resultaten, Zo ook bij wat minder frivole problemen zoals een enquête naar politieke voorkeuren onder een zeker aantal Nederlanders, het testen (goed of slecht) van een steekproef uit een partij, het overseinen van een boodschap in bijvoorbeeld een binaire kode.

Voor zulke problemen hoeven we onze theorie dus slechts te baseren op een eindige verzameling. Zo'n verzameling wordt een (eindige) diskrete mogelijkhedenverzameling genoemd.

Definitie: een (eindige) diskrete mogelijkhedenverzameling U is een eindige verzameling met elementen $u_1, u_2, \ldots, u_n$.
Notatie : $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.
De elementen van U worden mogelijkheden of mogelijke resultaten genoemd.

Voorbeelden: tossen heeft u_1 = "kruis", u_2 = "munt", dus $n = 2$.

werpen met een dobbelsteen: u_1 = "1",...,u_6 = "6", dus $n = 6$.

de voetbaltoto met 13 wedstrijden: $n = 3^{13} = 1.594.323$.

Bij een meting geeft men er veelal de voorkeur aan met een kontinue schaal te werken. De verzameling R der reële getallen zou bijvoorbeeld als mogelijkhedenverzameling gebruikt kunnen worden of een gedeelte van R. Elk reëel getal of althans elk getal in zeker interval, is een mogelijk resultaat van de meting. Maar ook zijn er eksperimenten waarbij verschillende grootheden worden gemeten op een kontinue schaal bijv. bij meting van het aardmagnetisch veld: sterkte, deklinatie en inklinatie. Dan zou de R_3 dus als mogelijkhedenverzameling kunnen optreden. Ook kan het voorkomen dat sommige grootheden volgens een diskrete en andere volgens een kontinue schaal worden waargenomen. Er kunnen dus allerlei typen mogelijkhedenverzamelingen optreden. We zullen beginnen onze theorie op te bouwen voor het geval van een diskrete mogelijkhedenverzameling en voor het geval R (of een interval in R) de mogelijkhedenverzameling is. R en intervallen in R worden kontinue mogelijkhedenverzamelingen genoemd. De punten van R of van het interval heten mogelijkheden of mogelijke resultaten. Daarna zullen ook algemenere gevallen beschouwd worden, zoals R_n $(n = 2,3,...)$ in § 7.

Niet alleen de kans op een bepaald mogelijk resultaat is van belang. We willen ook kunnen praten over de kans op een even worp met een dobbelsteen en de kans dat een meetresultaat groter dan 12 gevonden wordt. De theorie moet dus zo opgebouwd worden dat dit kan. Daarom voeren we m.b.v. de mogelijkheden ook nog het begrip uitkomst in:

Definitie: Bij een diskrete mogelijkhedenverzameling U is een uitkomst (Engels: event) een deelverzameling van U.
Bij een kontinue mogelijkhedenverzameling U is een uitkomst een deelinterval of een verzameling bestaande uit een aantal deelintervallen. De uitkomsten die precies uit één mogelijkheid bestaan worden ook wel elementaire uitkomsten genoemd. Alle andere uitkomsten zijn opgebouwd uit elementaire uitkomsten.

Voorbeelden: Bij het werpen met een dobbelsteen geldt:
"even" = $\{2,4,6\}$.

Bij het meten van een verdampingswarmte v zijn uitkomsten:
[30,40) , (het interval $30 \le v < 40$).
[30, ∞) , (het interval $v \ge 30$).
(30,40] of (50,60) of {73}.

Deze definities worden als volgt gebruikt: we zeggen dat de uitkomst A optreedt, als de mogelijkheid die het resultaat is van het eksperiment juist element is van de verzameling A. Zo is er ruimte geschapen voor het beschouwen van een grote verscheidenheid van gebeurtenissen, van de meest eenvoudige (elementaire uitkomsten, dus de mogelijke resultaten zelf) tot zeer samengestelde. Op deze wijze zijn dus de mogelijkheden echt de bouwstenen van de theorie.

Belangrijke konsekwenties van deze afspraken zijn de volgende:

1. *als A een uitkomst is, dan is ook een uitkomst:*
   "A treedt niet op".
   Deze uitkomst bevat precies dië mogelijke resultaten die geen lid zijn van A. Deze uitkomst wordt genoteerd met: A^*. Men zegt wel: A^* is de komplementaire uitkomst van A.

2. als A en B uitkomsten zijn, dan is ook een uitkomst:
   "van A en B treedt er minstens ëën op".
   Deze uitkomst verenigt de mogelijkheden uit A en uit B. Deze nieuwe uitkomst wordt genoteerd met: $A \cup B$ (spreek uit: A of B; A verenigd met B).

3. als A en B uitkomsten zijn, dan is ook een uitkomst:
   "A en B treden beide op".
   Deze uitkomst bevat de gemeenschappelijke mogelijkheden van A en B.
   Notatie: $A \cap B$ (spreek uit: A en B; de doorsnede van A en B).

4. als grensgeval vinden we nog dat de verzameling U zelf ook een uitkomst is. Deze uitkomst treedt met zekerheid op en we spreken dan ook van de zekere uitkomst. Maar dan is dus ook U^* een uitkomst en deze bevat geen enkel mogelijk resultaat. Men spreekt van de lege uitkomst en noteert deze met: $\emptyset$.
   Het lijkt wat wonderlijk om deze twee bijzondere uitkomsten in te voeren, maar in het vervolg zal het gemak er van blijken. Nu zien we reeds, dat alleen zonder meer van $A \cap B$ en $A \cup B$ als uitkomsten mag worden gesproken als $\emptyset$ en U ook uitkomsten zijn.

Voorbeelden:

a) bij een worp met een witte, een zwarte en een rode dobbelsteen: U bestaat uit alle rijtjes (i,j,k) met i,j,k = 1,...,6. $n = 6^3 = 216$.

"wit 6 of rood even",

"minstens één zes", "geen zes",

"zwart of rood 6 en wit oneven".

b) bij een levensduurbepaling van gloeilampen: $U = (0,\infty)$, dus het gedeelte van R bepaald door $t > 0$.

"$t > 1000$" $= (1000,\infty)$.

"$t < 950$ of $t > 1050$" $= (0,950) \cup (1050,\infty)$.

"$t \geq 950$ en $t \leq 1050$" $= [950,1050]$.

§ 2. Symmetrische diskrete kansvelden

Wat zijn kansen eigenlijk? In de gebruikelijke uitspraken over kansen wordt alleen gezegd, dat ze groot zijn of klein of zeer groot of niet zo erg klein. Daar kan men voor een goede theorie natuurlijk weinig mee beginnen. Er is echter wel een goed middel om dergelijke uitspraken te objektiveren: de reële getallen. Geef een kans weer door een getal.

In het algemeen is het systeem van uitkomsten dat gegeven is tamelijk kompleks en dat heeft natuurlijk konsekwenties voor de kansen: als de kans op A groot is, kan de kans op A^* niet ook groot zijn! Dat stelt dus eisen aan het systeem van kansen dat ingevoerd wordt.

Laten we nu eerst proberen voor een eenvoudig voorbeeld een stelsel van kansen te definiëren. Neem het werpen van een dobbelsteen. Daarbij zijn de mogelijkheden duidelijk fysisch gelijkwaardig: geen enkele heeft ook maar in enige mate de voorkeur. Het ligt dus voor de hand de elementaire uitkomsten in dit geval gelijke kansen toe te kennen, zeg p:

de kans op de elementaire uitkomst "1" is p.

Notatie: $P(1) = p$. (P en p vanwege probability, probabilité.)

Maar ook $P(2) = P(3) = \ldots = P(6) = p$.

Hoe nu de kans op "even" te kiezen? "Even" treedt op in de gevallen "2", "4" en "6". In een lange reeks van worpen komt de fraktie keren dat een bepaalde uitkomst gerealiseerd wordt op den duur dicht in de buurt van een vaste waarde, die we nu even de "limietfraktie" van die uitkomst zullen noemen. Dit is uit ervaring bekend. Men spreekt wel van de ervaringswet van de grote aantallen. Dit geldt evenzeer voor de uitkomst "even", als voor de uitkomsten "2", "4" en "6".

Leeszaal Centrale Bibliotheek T.H. Eindhoven

De limietfrakties voor de elementaire uitkomsten zullen uiteraard gelijk zijn. De limietfraktie voor de uitkomst "even" zal dus 3 maal zo groot zijn als die voor "2". Vandaar dat de keuze 3p voor de kans op de uitkomst "even" zinvol lijkt.

Notatie: $P\ (\text{even}) = P(2,4,6) = 3p$.

Zo komen we voor een uitkomst A die uit k mogelijkheden bestaat tot de afspraak:

$$P(A) = kp.$$

In het bijzonder: $P(\emptyset) = 0$, $P(U) = 6p$.

Het kansstelsel kan nu volledig vastgelegd worden door de keuze van P(U), de kans op de zekere uitkomst. Meestal wordt hiervoor het getal 1 gekozen. Dan is p dus $\frac{1}{6}$ en de kans op de uitkomst A is juist de fraktie van het aantal keren dat A naar verwachting zal optreden in een grote serie worpen. Bij de keuze 100 stelt P(A) het percentage van dat aantal keren voor. Wij zullen het getal 1 kiezen, maar in het bijzonder in de opgaven zal wel eens in de taal van de keuze 100 gesproken worden.

In het algemeen kan men op deze wijze voor een diskrete mogelijkhedenverzameling U van mogelijke resultaten die fysisch gelijkwaardig geacht worden, een kansstelsel definiëren, door alle elementaire uitkomsten de kans $\frac{1}{n}$ toe te kennen. Een willekeurige uitkomst krijgt daarbij als kans $\frac{1}{n}$ vermenigvuldigd met het aantal elementen. Merk op dat de vraag of de aanname van gelijkwaardigheid van de mogelijkheden een niet-wiskundige vraag is. De wiskundige levert een model, de vakdeskundige (fysikus, technoloog, socioloog enz.) moet beslissen of het toepasbaar is in zijn konkrete situatie.

<u>Definitie</u>: Een <u>symmetrisch diskreet kansveld</u> bestaat uit een diskrete mogelijkhedenverzameling $U = \{u_1,\dots,u_n\}$ met daarbij voor elke uitkomst A een getal: <u>de kans op de uitkomst A</u>, genoteerd door P(A). En wel zo, dat voor elke uitkomst A die uit k mogelijkheden bestaat, geldt:

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Problemen waar een dergelijk kansveld (Engels voor kansveld: probability space) als beschrijving verstandig lijkt, vindt men in het bijzonder bij loterijen, roulette, steekproeftrekkingen.
De volgende eigenschappen volgen direkt uit de definitie:

<u>Stelling</u>: $0 \leq P(A) \leq 1$.

$P(\emptyset) = 0$, $P(U) = 1$.

$P(A^*) = 1 - P(A)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

i.h.b. als $A \cap B = \emptyset$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^*)$.

Om bij symmetrische diskrete kansvelden kansen uit te rekenen moet men goed kunnen tellen. Hoe groot is bijv. de kans dat bij bridge alle vier spelers een aas krijgen?

§ 3. Intermezzo: de kunst van het tellen

Stel gegeven zijn n verschillende objekten (bijv. kaarten). Deze kunnen op een aantal manieren op een rij gelegd worden. Zo'n rangschikking noemt men een <u>permutatie</u>. Bijv. alle permutaties van de getallen 1, 2 en 3 zijn de volgende: 123, 321, 213, 312, 132, 231. Dit zijn er 6.

<u>Stelling</u>: n objekten laten $n!$ permutaties toe.

Het bewijs hiervan kan geleverd worden met volledige inductie: 1 objekt heeft ook maar 1 permutatie. Stel dat n-1 objekten $(n-1)!$ permutaties hebben, dan kunnen door toevoeging van 1 objekt uit elk van die permutaties n rangschikkingen van n objekten gemaakt worden. Zo krijgt men $n!$ permutaties.

Stel, uit n verschillende objekten kiest men er k en vervolgens rangschikt men die k objekten in een rij. Zo'n rangschikking noemt men een <u>variatie</u> van k objekten uit n. Bijv. alle variaties van 2 uit de 3 getallen 1, 2 en 3 zijn: 12, 21, 13, 31, 23, 32. Dat zijn er 6.

<u>Stelling</u>: er zijn $\frac{n!}{(n-k)!}$ variaties van k objecten uit n.

Het bewijs leveren we met behulp van de vorige stelling: iedere permutatie van de n objekten levert een variatie door de eerste k van de rij te nemen. Echter alle permutaties met op de eerste k plaatsen dezelfde rangschikking leveren zo dezelfde variatie: $(n-k)!$ permutaties leveren dezelfde variatie.

Ook kunnen er uit n verschillende objekten k gekozen worden zonder naar rangschikking te kijken, alleen naar groepsindeling: wordt een objekt wel of niet gekozen. Een dergelijke keuze noemen we een kombinatie van k objekten uit n. Bijv. alle kombinaties van 2 uit de 3 getallen 1, 2 en 3 zijn: 12, 13, 23. Dat zijn er dus 3.

Stelling: er zijn $\binom{n}{k}$ kombinaties van k objekten uit n.

Iedere variatie van k objekten uit n levert een kombinatie, maar er zijn steeds $k!$ variaties die dezelfde kombinatie geven. Er zijn dus volgens de vorige stelling $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ kombinaties van k uit n. Zo is het aantal mogelijke "handen" dat uit een volledig spel kaarten te halen is: $\binom{52}{13}$.

Enige andere telregels vindt men op blz. 6 van het Statistisch Compendium.

In de bij dit kollege behorende opgavenverzameling vindt men legio voorbeelden waarbij de genoemde telregels handig gebruikt kunnen worden. Een type probleem wordt hier nog vermeld: Stel er zijn twee soorten objekten (bijv. rode en zwarte kaarten) en wel k van de ene soort en n-k van de andere. Deze kunnen op $\binom{n}{k}$ manieren op een rij gezet worden: de n objekten leveren $n!$ permutaties, echter de k objekten van de eerste soort kunnen in elke permutaties nog weer gepermuteerd worden zonder dat de rij verandert; idem voor de n-k overige objekten. Bijv. het getal 1 en twee keer het getal 2 leveren de volgende rijtjes: 122, 212, 221. Dat zijn er 3 oftewel $\binom{3}{1}$.

§ 4. Vergroving en diskrete kansvelden

Met een dobbelsteen kan best getost worden! Bij uitkomst "even" wint de ene partij en bij "oneven" de andere. Als er toch alleen maar belangstelling is voor "even" en "oneven", maar niet voor de precieze worp, dan kunnen ook best "even" en "oneven" als mogelijke resultaten gekozen worden. Dus

$$U := \{\text{"even"},\text{"oneven"}\}.$$

In het oude kansveld hadden de uitkomsten "even" en "oneven" ieder de kans $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, dus dat oude kansveld induceert op heel natuurlijke wijze een symmetrisch diskreet kansveld met $n = 2$.

Deze procedure zou vergroving genoemd kunnen worden: er wordt minder detaillistisch gekeken, er wordt met grotere bouwstenen gewerkt. Zo'n vergroving kan een grote vereenvoudiging geven. Bijv. als in een vaas 100 knikkers zitten en er worden er twee na elkaar getrokken, dan zijn er (variaties!) $99.100 = 9900$ mogelijke resultaten. Maar als alleen de kleuren van de getrokken knikkers van belang zijn en er zitten gele en blauwe knikkers in de vaas, dan kan men zich beperken tot de grovere mogelijkhedenverzameling met:

u_1 := "blauw,blauw"
u_2 := "geel,blauw"
u_3 := "blauw,geel"
u_4 := "geel,geel" , dus $n = 4$.

Echter zo'n vergroving hoeft niet altijd een symmetrisch kansveld te induceren. Stel dat in de vaas uit het voorbeeld 40 blauwe en 60 gele knikkers zitten:

$$P(u_1) = \frac{39.40}{9900} \text{ , } P(u_2) = P(u_3) = \frac{60.40}{9900} \text{ , } P(u_4) = \frac{59.60}{9900} \text{ .}$$

Wel blijven alle in de stelling van § 2 genoemde eigenschappen gehandhaafd. Er is dus alle reden om zulke niet-symmetrische diskrete kansvelden ook te accepteren. Dit te meer omdat lang niet bij alle toevalseksperimenten door verfijning makkelijk een symmetrisch kansveld kan worden gevonden. Denk bijvoorbeeld aan het tossen met een knoop of met een onzuiver muntstuk. Het kan wel, maar het is vrij gekunsteld. Dankzij het voorgaande kan nu eenvoudig ingezien worden hoe algemene diskrete kansvelden gedefinieerd kunnen worden: hecht aan elke elementaire uitkomst een niet-negatief getal en definieer de kans op een uitkomst A als de som van de kansen op de elementaire uitkomsten die in A bevat zijn; zorg ervoor dat de kans op U gelijk is aan 1.

Definitie: een diskreet kansveld bestaat uit
een diskrete mogelijkhedenverzameling $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$
en getallen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ($p_i \geq 0$ en $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$).
Daarbij is voor elke uitkomst A een getal gedefinieerd:
de kans op de uitkomst A, genoteerd door P(A). En wel zo dat geldt:

$$P(A) = \sum_{u_i \in A} P(u_i) = \sum_{u_i \in A} p_i \text{ .}$$

De in de stelling van § 2 genoemde eigenschappen van symmetrische diskrete kansvelden gelden ook voor algemene diskrete kansvelden. Dit wordt eenvoudig aangetoond.

Voorbeeld: Bij 10 worpen met een zuiver muntstuk lijkt het redelijk aan alle mogelijke rijtjes van 10 werpresultaten zoals MMK ... MK gelijke kans toe te kennen, dus 2^{-10} voor elk rijtje. Als men zich alleen interesseert voor het aantal keren "munt" dat is opgetreden, krijgt men een grovere mogelijkhedenverzameling $U = \{0,1,\ldots,10\}$, met $p_i = P(i) = \binom{10}{i}2^{-10}$. Er zijn nl. $\binom{10}{i}$ rijtjes met precies i keer "munt".

Opmerking: De definitie staat toe dat sommige elementaire uitkomsten de kans 0 krijgen toebedeeld. Dit lijkt overbodig, want dan zou men die elementaire uitkomsten ook weg kunnen laten. Later blijkt het echter toch handig te zijn, dat deze mogelijkheid door de definitie is opengelaten. Merk op dat hierdoor niet geldt:

$$\text{als } P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ dan } A \cap B = \emptyset,$$

wat voor symmetrische diskrete kansvelden wel juist is.

§ 5. Kontinue kansvelden

Nu het geval van een kontinue mogelijkhedenverzameling: $U = [0,2\pi)$.
Een wijzer draait horizontaal om een asje. De wijzer krijgt een zet, draait vele malen rond en komt langzaam tot stilstand. Maar waar? Er is bij een goede konstruktie geen voorkeur voor een bepaalde plaats. De plaatsen kunnen aangegeven worden door de hoek φ van de wijzer met een vaste lijn, dus $0 \leq \varphi < 2\pi$. De kans om ergens te stoppen wordt natuurlijk weer gelijk aan 1 gesteld:

$$P(U) = P([0,2\pi)) = 1.$$

Uit frekwentieoverwegingen lijkt het ook hier verstandig om de kans dat de wijzer in een bepaald gebied stopt evenredig te nemen met de grootte van het gebied. Het gebied met lengte 2π krijgt kans 1, dus in het algemeen:

$$P(A) = \int_A \frac{1}{2\pi}\, d\varphi.$$

Bij deze afspraak gaat de stelling van § 2 weer op.

Deze afspraak wijst meteen de weg om andere kansvelden te definiëren: bij symmetrische diskrete kansvelden kijkt men naar het aantal elementen en analoog daaraan vonden we voor een kontinue mogelijkhedenverzameling:

integreer een konstante funktie over het gebied. Bij algemene diskrete kansvelden is voor ieder van de elementaire uitkomsten een kans gegeven en de kans op een willekeurige uitkomst vindt men door het optellen van de kansen op elementaire uitkomsten. Zo zouden analoog voor een kontinue mogelijkhedenverzameling kansen gevonden kunnen worden door integratie (= "optelling") van een gegeven funktie op U.

<u>Definitie</u>: een <u>kontinu kansveld</u> bestaat uit een kontinue mogelijkhedenverzameling U en bovendien een integreerbare en niet-negatieve funktie f op U, zodat $\int_U f(x)\,dx = 1$.

Daarbij is voor elke uitkomst A een getal gedefinieerd: <u>de kans op de uitkomst A</u>, genoteerd door P(A). En wel zo, dat geldt:

$$P(A) = \int_A f(x)\,dx.$$

De funktie f wordt de <u>kansdichtheid</u> (Engels: density of density function) van het kansveld genoemd.

Ook voor ieder kontinu kansveld geldt de stelling van § 2. f(x) bij een kontinu kansveld komt overeen met p_i bij een diskreet kansveld, bedenk echter wel dat de kans op de uitkomst x niet gelijk is aan f(x) maar aan 0. f stelt echt een dichtheid voor, zoals blijkt uit het volgende:
Stel Δ is klein, dan geldt:

$$P([a - \Delta, a]) = \int_{a-\Delta}^{a} f(x)\,dx \approx f(a)\,.\,\Delta\,.$$

Dus de kans om in een klein intervalletje bij a terecht te komen is ongeveer gelijk aan f(a) vermenigvuldigd met de lengte van het intervalletje.

Voorbeelden:

1) het uniforme of homogene kansveld:

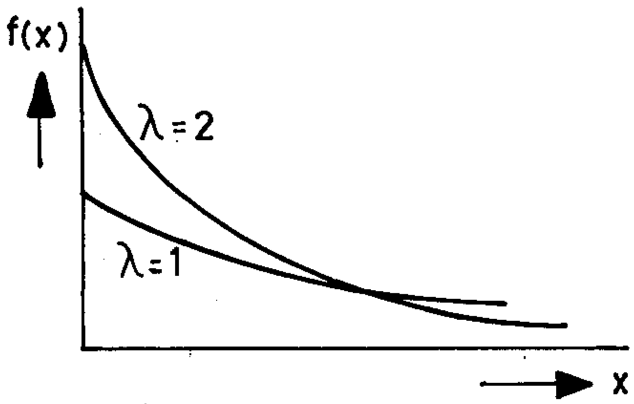
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{voor } a \le x \le b \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

a en b zijn hier gegeven getallen met $b > a$.
De draaiende wijzer uit het begin van deze paragraaf leverde een homogeen kansveld met $a = 0$ en $b = 2\pi$.

2) het eksponentiële kansveld:

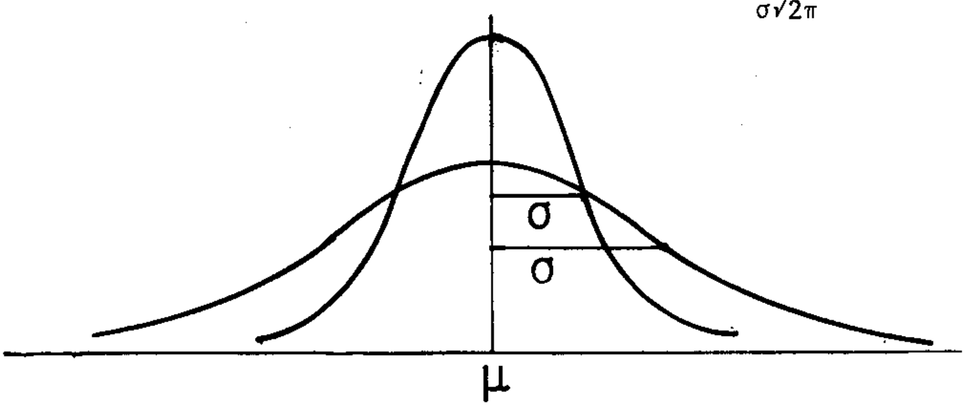
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{voor } x \ge 0 \\ 0 & \text{voor } x < 0. \end{cases}$$

λ is hier een gegeven positief getal.
Dit kansveld kan bijv. gebruikt worden voor de tijdsduur tussen twee binnenkomende gesprekken in een telefooncentrale.



3) het normale kansveld:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Hierin zijn μ en σ gegeven getallen, waarvan σ positief. Dit kansveld wordt bijvoorbeeld veelal gebruikt om metingen die behept zijn met een toevalsfout te beschrijven. In het geval er geen systematische fout gemaakt wordt, en m de te meten waarde is, wordt gesteld dat de waarneming een trekking is uit een normaal kansveld met $\mu = m$. De waarde van σ is dan een maat voor de nauwkeurigheid van de meetmethode. De dichtheid van het normale kansveld staat bekend onder de naam: kromme van Gauss. De funktie f is eentoppig en symmetrisch rond de waarde μ. σ is de afstand van μ tot de buigpunten: $f''(\mu+\sigma) = f''(\mu-\sigma) = 0$.
In tegenstelling tot de vorige voorbeelden kost het hier enige moeite om te bewijzen dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

Een trucje brengt uitkomst. Substitueer eerst: $\frac{x-\mu}{\sigma} = u$, levert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

We rekenen nu uit:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv = \frac{1}{2\pi} \iint_{R_2} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\, du dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\, dr d\varphi = \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\, dr = -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

In het tweede hoofdstuk zal blijken waaraan het normale kansveld zijn naam te danken heeft.
Het normale kansveld met $\mu = 0$ en $\sigma = 1$ wordt standaard normaal genoemd. Dit kansveld speelt een bijzondere rol bij het berekenen van kansen in andere normale kansvelden zoals nog zal blijken in het vervolg van deze paragraaf.

Meestal is men bij kontinue kansvelden geïnteresseerd in kansen op intervallen. Deze kansen moeten door integratie worden uitgerekend. Ook echter kan men eenvoudiger één keer een andere funktie berekenen waaruit de kansen

op alle mogelijke intervallen gemakkelijk volgen:
Reken de kans uit op alle intervallen van het type $(-\infty,a]$:

$$P((-\infty,a]) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx.$$

Noem deze kans $F(a)$.
Uit deze funktie F kunnen allerlei kansen berekend worden: de kans op de uitkomst (a,∞) is gelijk aan

$1-F(a)$. Maar ook op $[a,\infty)$.

de kans op de uitkomst $(b,a]$ is gelijk aan $F(a)-F(b)$.

Maar ook op $[b,a)$ enz.

De funktie F wordt de verdelingsfunktie van het kontinue kansveld genoemd (Engels: distribution function of cumulative distribution function).
F is een monotoon niet-dalende funktie. F is kontinu en $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$,
$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
In punten waar f kontinu is, is F differentieerbaar en

$$F'(x) = f(x) .$$

Voorbeelden:

1) het homogene kansveld heeft:

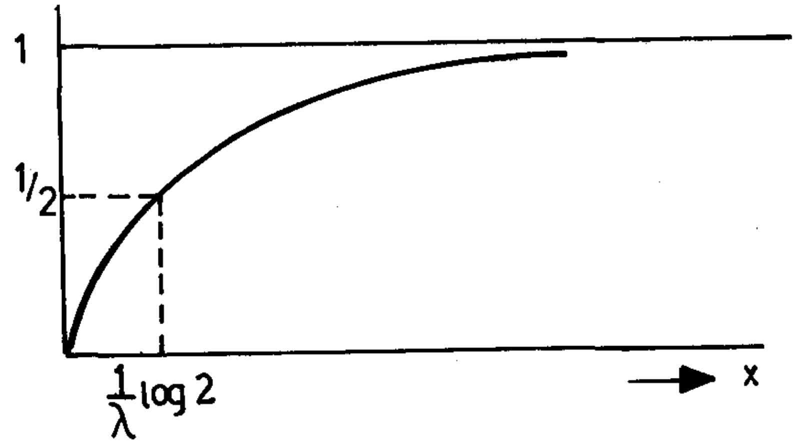
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{voor } a \le x \le b \\ 1 & \text{voor } x > b\ . \end{cases}$$

2) het eksponentiële kansveld heeft:

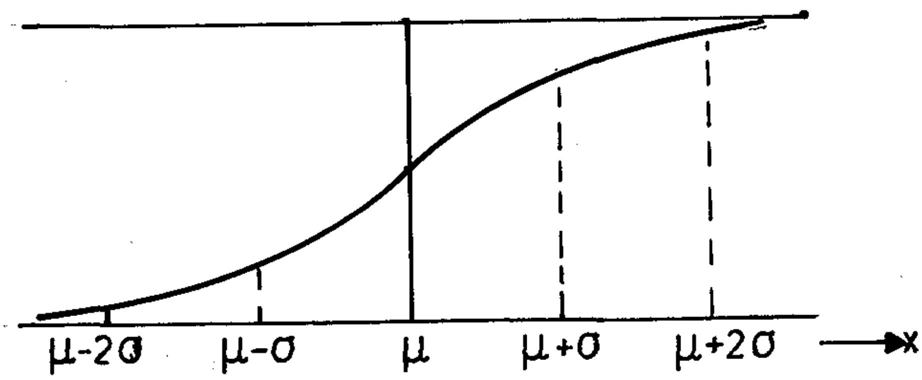
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{voor } x \ge 0\ . \end{cases}$$

Om konkrete waarden van deze verdelingsfunktie te vinden kan gebruik gemaakt worden van tabel 9.5 in het Statistisch Compendium.

3) het normale kansveld heeft: $F(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, d\xi$.



De verdelingsfunktie van een ekponentieel kansveld met parameterwaarde λ. $F(\frac{1}{\lambda} \log 2) = \frac{1}{2}$.



De verdelingsfunktie van een normaal kansveld met parameterwaarden μ en σ.

$F(\mu) = 0,5$

$F(\mu - \sigma) = 0,1587$

$F(\mu - 2\sigma) = 0,0228$

$F(\mu + \sigma) = 0,8413$

$F(\mu + 2\sigma) = 0,9772$

Deze integraal laat zich niet uitdrukken in elementaire funkties. Echter substitutie van $\frac{\xi-\mu}{\sigma} = u$ levert:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du.$$

Door middel van dit verband kunnen de gewenste kansen berekend worden, mits een tabel voor de verdelingsfunktie van het standaardnormale kansveld ter beschikking staat. Een dergelijke tabel is opgenomen in het Statistisch Compendium (tabel 1.1).

§ 6. Voorwaardelijke kansen en onafhankelijke uitkomsten

In de vorige paragrafen zijn twee soorten kansvelden ingevoerd: diskrete (§ 2 en § 4) en kontinue (§ 5). Er kunnen ook nog wel andere soorten worden gedefinieerd; in de volgende paragraaf zal daar iets van blijken. Mede als inleiding daarop zal nu eerst getoond worden hoe een kansveld op een heel natuurlijke wijze andere kansvelden kan voortbrengen. Zo'n natuurlijke voortbrenging is in § 4 al gedemonstreerd, nl. vergroving van de mogelijkhedenverzameling. Hier is echter een andere methode aan de orde.

Stel eens er is een kansveld gegeven (denk bijv. aan het trekken van een kaart uit een volledig spel) en H is een uitkomst (bijv. "harten") met $P(H) > 0$. Nu zou een nieuw kansveld gemaakt kunnen worden waarin alle uitkomsten die niets met H gemeen hebben kans 0 hebben en alle die binnen H liggen dezelfde kans als vroeger. Maar dat kan niet want dan geldt niet meer $P(U) = 1$ doch de nieuwe kans op de zekere uitkomst is gelijk aan de oude $P(H)$. Dit kan gekorrigeerd worden door alle kansen door de oude $P(H)$ te delen. Voor het nieuwe veld met kansen $P_o(A)$ geldt nu:

$$P_o(A) := 0 \qquad \text{als } A \cap H = \emptyset ,$$

$$P_o(A) := \frac{P(A)}{P(H)} \qquad \text{als } A \cap H^* = \emptyset .$$

Dit is nog geen kansveld, want hoe groot is $P_o(A)$ als $A \cap H \neq \emptyset$ en bovendien $A \cap H^* \neq \emptyset$? Er moet natuurlijk gelden:

$$P_o(A) = P_o(A \cap H) + P_o(A \cap H^*) .$$

Dus definieer $P_o(A)$ aldus:

$$P_o(A) := \frac{P(A \cap H)}{P(H)} + 0 = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} .$$

In het voorbeeld geeft het nieuwe kansveld een beschrijving van "trekken uit de hartenkaarten". De overgang van het oorspronkelijke op het nieuwe kansveld geeft aan hoe het kansveld gewijzigd wordt als een stuk van de mogelijkhedenverzameling wordt uitgesloten (hier H^*) maar voor de rest alles bij het oude blijft en het toevalsmechanisme op dezelfde wijze blijft werken. Daarmee vormt het nieuwe kansveld ook een goede beschrijving van het probleem: er is een kaart getrokken en het is een hartenkaart, maar welke zou het zijn?

Bij het nieuwe kansveld weten we dat een elementaire uitkomst uit H optreedt, maar de verhouding tussen de kansen op de elementaire uitkomsten is gelijk gebleven.

Nu een nette definitie:

<u>Definitie</u>: Gegeven een kansveld met een uitkomst H. $P(H) > 0$.
Dan wordt $\frac{P(A \cap H)}{P(H)}$ de <u>(voorwaardelijke) kans op de uitkomst A onder de voorwaarde H genoemd</u>.

<u>Notatie</u>: $\frac{P(A \cap H)}{P(H)} =: P(A \mid H)$.

Voor de kans $P_o(A)$ uit het voorgaande wordt dus in het vervolg geschreven

$$P(A \mid H).$$

Dit gebeurt omdat in één tekst voorwaardelijke kansen bij verschillende voorwaarden kunnen optreden.

<u>Stelling</u>: Gegeven een kansveld met mogelijkhedenverzameling U. Zij H een vaste uitkomst. $P(H) > 0$. Met de kansen $P(A \mid H)$ vormt U weer een kansveld. Een diskreet kansveld levert zo weer een diskreet kansveld en een kontinu kansveld weer een kontinu kansveld.

Bewijs: Bij een diskreet veld vindt men:

$$P(u_i \mid H) = \begin{cases} 0 & \text{als } u_i \notin H \\ \dfrac{p_i}{P(H)} & \text{als } u_i \in H. \end{cases}$$

Bij een kontinu veld vindt men:

$$P(A \mid H) = \frac{\displaystyle\int_{A \cap H} f(x)\,dx}{\displaystyle\int_H f(x)\,dx}.$$

Dus neem als nieuwe kansdichtheid $g(x)$:

$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{als } x \notin H \\ \dfrac{f(x)}{\displaystyle\int_H f(x)\,dx} & \text{als } x \in H. \end{cases}$$

Toepassing: Met behulp hiervan kan eenvoudig worden aangetoond dat het eksponentiële kansveld gebruikt kan worden voor een beschrijving van de levensduur van een apparaat waarin geen slijtage optreedt, maar dat stuk gaat door een incident. Dit houdt in, dat de kans dat het apparaat stuk gaat tussen τ en $\tau+t$ als het op τ nog werkt, slechts van t afhangt:
Voor de kans dat het apparaat nog werkt op tijdstip t geldt:

$$P(t,\infty) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0).$$

Hoe groot is nu bij het gegeven dat het apparaat nog werkt op tijdstip τ, de kans dat het nog werkt op tijdstip $\tau+t$?
Welnu:

$$P((t+\tau,\infty) \mid (\tau,\infty)) = \frac{P((t+\tau,\infty))}{P((\tau,\infty))} = \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda\tau}} = e^{-\lambda t}.$$

Het is wat lastiger om aan te tonen dat eksponentiële kansvelden de enige kontinue kansvelden zijn met deze eigenschap. Een bepaald levensduurprobleem met slijtage wordt bijvoorbeeld beschreven door het kansveld met verdelingsfunktie

$$F_o(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t^2} & \text{voor } t \geq 0 \\ 0 & \text{voor } t < 0 . \end{cases}$$

(Wat is de kansdichtheid?) Nu geldt:

$$P((t+\tau,\infty) \mid (\tau,\infty)) = \frac{P((t+\tau,\infty))}{P((\tau,\infty))} = \frac{e^{-\lambda(t+\tau)^2}}{e^{-\lambda\tau^2}} = e^{-\lambda t^2 - 2\lambda\tau t} .$$

Deze kans is kleiner dan $e^{-\lambda t^2} = P((t,\infty))$.

Voorbeelden:

1) het trekken van een kaart, met H = "harten".

Dan geldt: de kans op het trekken van een "schoppenvrouw" (S_v) was $\frac{1}{52}$, maar $P(S_v \mid H) = 0$;

de kans op het trekken van een "hartenzeven" (H_7) was $\frac{1}{52}$, maar $P(H_7 \mid H) = \frac{1}{13}$;

de kans op het trekken van een "boer" (B) was $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ en ook $P(B \mid H) = \frac{1}{13}$.

2) Het uit laten draaien van een tolletje met een wijzer (§ 5) met H het interval $[0,\pi]$.

Dan geldt: de kans op $A = [\pi,2\pi]$ was gelijk aan $\frac{1}{2}$, maar $P(A \mid H) = 0$;

de kans op $B = [\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi]$ was gelijk aan $\frac{1}{2}$, en ook $P(B \mid H) = \frac{1}{2}$;

de kans op $C = [0,\frac{1}{2}\pi]$ was gelijk aan $\frac{1}{4}$, maar $P(C \mid H) = \frac{1}{2}$.

Konklusie: Door de informatie H wordt de kans op sommige uitkomsten kleiner (S_v en A), op andere groter (H_7 en C). In die gevallen hebben we dus iets aan de informatie. In grensgevallen verandert de kans niet door de voorwaarde (B in beide voorbeelden):

$$P(B \mid H) = P(B) .$$

Het optreden van B wordt niet beïnvloed door de beperking H. Men zou kunnen zeggen: B is onafhankelijk van H.

Hieruit volgt:

$$P(B \cap H) = P(B)\, P(H) .$$

En omdat in de voorbeelden P(B) > 0:

$$\frac{P(B \cap H)}{P(B)} = P(H \mid B) = P(H) .$$

Dus als B onafhankelijk is van H, dan is H ook onafhankelijk van B. Men kan dan zeggen: B en H zijn onafhankelijk van elkaar. Omdat de produktregel symmetrisch is in B en H en de onafhankelijkheid in beide richtingen eruit volgt nemen we de produktregel als definitie. Bovendien zijn in de produktregel linker- en rechterlid altijd gedefinieerd, ook als P(H) of P(B) gelijk is aan 0.

Definitie: In een kansveld heten twee uitkomsten H en B onafhankelijk, als de produktregel geldt:

$$P(H \cap B) = P(H)\, P(B).$$

Stelling: Als H en B onafhankelijke uitkomsten zijn en P(H) > 0, dan geldt:

$$P(B \mid H) = P(B) .$$

§ 7. Deeleksperimenten

Dankzij het concept van de voorwaardelijke kans kan systematisch een kansveld worden opgebouwd voor een eksperiment uit de kansvelden van deeleksperimenten. Stel bijv. er zijn twee vazen M en K. M bevat 6 gele knikkers en 4 blauwe, K bevat 2 gele knikkers en 12 blauwe. Eerst wordt met een muntstuk gegooid, bij "munt" wordt een knikker getrokken uit vaas M en bij "kruis" uit vaas K. Hoe groot is de kans op een gele knikker uit vaas M? Duidelijk moet gelden:

$$P(\text{geel} \mid M) = \frac{6}{10} \text{ , en}$$

$$P(M) = \frac{1}{2} .$$

Dus $P(M \text{ en geel}) = P(M)\, P(\text{geel} \mid M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} = 0{,}3$.

Zo de kans op geel: $P(\text{geel}) = P(M \text{ en geel}) + P(K \text{ en geel}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{14} = \frac{13}{35}$.

Als in beide vazen m knikkers zitten zou men met deze methode een symmetrisch kansveld met 2m elementen vinden.

Voor 2 trekkingen zonder teruglegging uit vaas M krijgt men:

$$P(\text{eerst blauw dan geel}) = P(\text{de eerste blauw})\, P(\text{de tweede geel} \mid \text{eerst blauw})$$

$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{15} .$$

Door een symmetrisch kansveld aan te nemen met n = 90 wordt dezelfde waarde gevonden (vergelijk het voorbeeld in § 4).
Nu met teruglegging. Na de eerste trekking wordt de oude situatie hersteld en wordt onbevooroordeeld opnieuw getrokken. Dan mag de uitkomst van de eerste trekking dus geen invloed hebben op de uitkomst van de tweede en met name:

$$P(\text{de tweede geel} \mid \text{de eerste blauw}) = P(\text{de tweede geel}).$$

Oftewel de uitkomsten: "de eerste trekking is blauw" en
"de tweede trekking is geel "
moeten onafhankelijk zijn:

$$\begin{aligned} P(\text{eerst blauw dan geel}) &= P(\text{de eerste blauw})\ P(\text{de tweede geel}) \\ &= P(\text{blauw})\ P(\text{geel}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = 0{,}24. \end{aligned}$$

Van een goed kansveld voor het gekombineerde eksperiment moet dus geëist worden dat alle mogelijke uitkomsten A en B, waarvan A alleen betrekking heeft op het eerste deeleksperiment en B alleen op het tweede, onafhankelijk zijn.
Zo ook voor drie keer trekken met teruglegging:

$$P(1 \text{ geel } 2 \text{ blauw } 3 \text{ geel}) = P(1 \text{ geel } 2 \text{ blauw})\ P(3 \text{ geel} \mid 1 \text{ geel } 2 \text{ blauw}).$$

Maar de derde trekking trekt zich niets aan van de eerste twee, dus een goed kansveld voldoet aan:

$$P(3 \text{ geel} \mid 1 \text{ geel } 2 \text{ blauw}) = P(3 \text{ geel}).$$

Dus $P(1 \text{ geel } 2 \text{ blauw } 3 \text{ geel}) = P(1 \text{ geel})\ P(2 \text{ blauw})\ P(3 \text{ geel})$.

Nu kan de konsekwentie getrokken worden: als deeleksperimenten elkaar niet beïnvloeden, moet de produktregel gelden voor uitkomsten die op verschillende deeleksperimenten betrekking hebben:

Definitie: Stel een eksperiment bestaat uit m deeleksperimenten. Deze deeleksperimenten worden onafhankelijk genoemd, als de produktregel geldt voor elk stel uitkomsten $A_1,\ldots,A_m$ waarvan A_k alleen betrekking heeft op het k-de deeleksperiment $(k = 1,\ldots,m)$ dus

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_m) = P(A_1)\ P(A_2)\ \ldots\ P(A_m).$$

We gebruiken dit door van deeleksperimenten die we fysisch onafhankelijk achten, te stellen dat ze ook kanstheoretisch onafhankelijk zijn. Dus geldt de produktregel voor het kansveld dat het totale eksperiment beschrijft.

Merk op, dat door deze benaderingswijze voor herhaalde worpen met munt of dobbelsteen en voor herhaalde trekking met teruglegging hetzelfde kansveld wordt verkregen als door gelijkwaardigheid van mogelijkheden te onderstellen.

Als een eksperiment is opgebouwd uit m deeleksperimenten die elk een diskrete mogelijkhedenverzameling hebben, dan heeft ook het grote eksperiment een diskrete mogelijkhedenverzameling (met $n_1 n_2 \dots n_m$ elementen).
Als een eksperiment is opgebouwd uit m deeleksperimenten die elk een kontinue mogelijkhedenverzameling bezitten, dan is de mogelijkhedenverzameling van het grote eksperiment (een gedeelte van) de R_m. Eerlijkheidshalve moet hier bekend worden, dat kansvelden in de R_m nog niet eens gedefinieerd zijn, maar dat is vlug gedaan: net als in R_1 worden als uitkomsten toegestaan alle deelverzamelingen die als integratiegebied van een m-voudige integraal kunnen optreden.

<u>Definitie</u>: een <u>m-dimensionaal kontinu kansveld</u> heeft de R_m als mogelijkhedenverzameling.
Het kansveld wordt verder bepaald door een integreerbare en niet-negatieve funktie f op R_m, die voldoet aan

$$\int_{R_m} f(x_1,\dots,x_m)dx_1 \dots dx_m = 1 .$$

Daarbij is voor elke uitkomst A een getal P(A) gedefinieerd, door:

$$P(A) := \int_A f(x_1,\dots,x_m)dx_1 \dots dx_m .$$

De funktie f wordt de <u>kansdichtheid</u> van het kansveld genoemd.

Ook dit m-dim. kontinue kansveld bezit de eigenschappen van de stelling van § 2. Op soortgelijke wijze kunnen natuurlijk ook allerlei andere soorten kansvelden gemaakt worden, bijv. gemengd diskreet en kontinu.
Analoog aan het 1-dimensionale kontinue kansveld (§ 5) kunnen m-dimensionale kontinue kansvelden vastgelegd worden door een <u>verdelingsfunktie</u>:

$$F(x_1,x_2,\dots,x_m) := P((-\infty,x_1] \cap (-\infty,x_2] \cap \dots (-\infty,x_m]) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_m} f(\xi_1,\dots,\xi_m)\, d\xi_1 \dots d\xi_m \, .$$

In alle punten waar f kontinu is geldt:

$$\frac{\partial^m F(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1 \,\cdots\cdots\, \partial x_m} = f(x_1,\dots,x_m) \, .$$

F is kontinu en bovendien in elke x_k monotoon niet dalend, terwijl

$$\lim_{x_1\to\infty,\dots,x_m\to\infty} F(x_1,x_2,\dots,x_m) = 1 \, ,$$

$$\lim_{x_1\to-\infty,\dots,x_m\to-\infty} F(x_1,x_2,\dots,x_m) = 0 \, .$$

Stelling: Voor m onafhankelijke deeleksperimenten met kontinue kansvelden geldt

$F(x_1,\dots,x_m) = F_1(x_1)F_2(x_2) \dots F_m(x_m)$ en

$f(x_1,\dots,x_m) = f_1(x_1)f_2(x_2) \dots f_m(x_m)$, overal waar alle f's kontinu zijn.

Ook andersom volgt uit elk van beide produkteigenschappen (voor alle $x_1,\dots,x_m$) de onafhankelijkheid van de deeleksperimenten.

Voor F volgt het gestelde meteen uit de definitie van onafhankelijke deeleksperimenten. Voor f uit

$$\frac{\partial^m F(x_1,\dots,x_m)}{\partial x_1 \,\cdots\cdots\, \partial x_m} = f(x_1,\dots,x_m) \, .$$

Voorbeelden:

1) $f(x,y) := \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \exp[-(x^2 - xy\sqrt{2} + y^2)]$.

Deze dichtheid kan niet geschreven worden als produkt f(x)g(y). De deeleksperimenten zijn niet onafhankelijk.

$x^2 - xy\sqrt{2} + y^2 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2})(x + y)^2 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2})(x - y)^2$, dus f(x,y) heeft als niveaulijnen ellipsen met lange as x = y en korte as x = -y.

Centrale Bibliotheek T.H. Eindhoven

Kansvelden van dit type kunnen gebruikt worden als model van bijv. een eksperiment als lengte- en gewichtsmeting van een willekeurig aangewezen Nederlander.

2) $f(x,y) = \frac{1}{\pi} \exp[-(x^2 + y^2)]$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} = f(x)f(y) .$$

Hierin zijn $f(x)$ en $f(y)$ de kansdichtheden van het normale kansveld met $\mu = 0$ en $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
Dit kansveld kan dus gebruikt worden als model voor een eksperiment dat bestaat uit het twee keer uitvoeren van een deeleksperiment, met name een herhaalde fysiche meting. Ook voor het model van het schieten op een schijf kan deze kansdichtheid dienst doen.

§ 8. Het binomiale en het Poisson kansveld; een wet van de grote aantallen

Het eenvoudigste (en meteen erg belangrijk) voorbeeld van onafhankelijke deeleksperimenten is de m-voudige herhaling van een eksperiment met 2 mogelijke resultaten. Gemakshalve krijgt de een de naam Sukses en de ander heet Mislukking. Vb.: het tossen met een muntstuk, het keuren (goed- of afkeuren) van een steekproef uit een grote partij. Stel bij één keer uitvoeren geldt: $P(S) = p$. Veelal zal men zich alleen interesseren voor het aantal suksessen in de m herhalingen: op de mogelijkhedenverzameling die bestaat uit alle mogelijke rijtjes van m letters M en S, bv. MMSM ... SM, kan dus vergroving worden toegepast door de rijtjes met gelijke aantallen suksessen op een hoop te vegen: dan wordt de mogelijkhedenverzameling: $\{0,1,\ldots,m\}$.
Hoe groot is nu de kans op k suksessen $P(k)$?
De kans op een bepaald rijtje SS ... SMM ... M met precies k suksessen is gelijk aan $p^k(1-p)^{m-k}$ vanwege de onafhankelijkheid van de deeleksperimenten. Dan is $P(k)$ gelijk aan $N_k p^k(1-p)^{m-k}$, waarin N_k het aantal rijtjes van m letters M en S is met precies k keer S, want al die rijtjes hebben kans $p^k(1-p)^{m-k}$. N_k is volgens § 3 gelijk aan $\binom{m}{k}$, dus

$$P(k) = \binom{m}{k} p^k(1-p)^{m-k} .$$

Inderdaad weten we uit WSK 10: $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k(1-p)^{m-k} = (p+1-p)^m = 1^m = 1.$

Vanwege dit verband met het binomium van Newton wordt van het binomiale kansveld gesproken.

Het binomiale kansveld met parameterwaarden m en p is het diskrete kansveld met

$$U = \{0,1,\dots,m\} \quad \text{en}$$

$$p_k = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \qquad (k = 0,1,\dots,m) .$$

De toepassingen van dit type kansveld zijn legio zoals met name blijkt uit de opgaven bij dit kollege. Voor het berekenen van kansen kan gebruik worden gemaakt van tabel 5.1 en 5.2 in het Statistisch Compendium. Voor enige voorbeelden ($p = \frac{1}{6}$, m = 5, 10 en 20) zie de figuur aan het einde van deze paragraaf.

Een limietstelling: Stel $\mu > 0$, kies $p = \frac{\mu}{m}$, dan geldt

$$\lim_{m \to \infty} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} , \qquad \text{mits } \mu \text{ en } k \text{ vast zijn .}$$

Deze stelling geeft de mogelijkheid kansen uit een binomiaal kansveld te benaderen en wel door $e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$ met $\mu = mp$, mits m maar groot is en p klein. Deze benadering is voor vele praktische doeleinden bruikbaar zodra $p \leq 0{,}1$. Dit wordt geïllustreerd met een paar voorbeelden voor p = 0,05:

	m = 5		m = 10		m = 20	
k	exact	benaderd	exact	benaderd	exact	benaderd
0	.7738	.7788	.5987	.6065	.3585	.3679
1	.2036	.1947	.3151	.3033	.3774	.3679
2	.0214	.0243	.0746	.0758	.1887	.1839
3	.0011	.0020	.0105	.0126	.0596	.0613
4	.0000	.0001	.0010	.0016	.0133	.0153
5	.0000	.0000	.0001	.0002	.0022	.0031
6			.0000	.0000	.0003	.0005
7					.0000	.0001
8					.0000	.0000

Als een binomiale kans zonder benadering in een tabel opgezocht kan worden, verdient dat natuurlijk de voorkeur! Het voordeel van het benaderen is, dat de 2 parameters m en p vervangen zijn door 1 parameter μ en dat maakt het tabelleren gemakkelijker.

Als we nu de mogelijkhedenverzameling $U = \{0,1,2,\ldots\}$ beschouwen, met als uitkomsten alle deelverzamelingen, dan kunnen we op de volgende wijze een kansveld definiëren:

kies $p_k := e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$ voor $k = 0,1,2,\ldots$;

neem voor de kans op de uitkomst A:

$$P(A) := \sum_{k \in A} p_k .$$

Dit wordt het <u>Poisson kansveld</u> genoemd.

Men verifieert eenvoudig: $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$

Bovendien gelden ook voor dit kansveld de eigenschappen genoemd in de stelling van § 2. Voor tabellen zie het Statistisch Compendium 6.1 en 6.2.
Dit kansveld kan zoals gezien gebruikt worden in plaats van het binomiale als m groot is en p klein (bv. bij kwaliteitskontrole met geringe kans op afkeuren per trekking).
Daarnaast leidt het Poisson kansveld ook een zelfstandig bestaan als model in een situatie waarin "incidenten" optreden in de tijd en waarbij aan de volgende voorwaarden is voldaan:

- voor elk klein intervalletje is de kans dat een incident optreedt evenredig met de lengte van het intervalletje,
- de kans dat in een klein intervalletje twee of meer incidenten optreden is veel kleiner dan de kans op één incident,
- het optreden van een incident is onafhankelijk van voorgaande incidenten.

Voorbeelden: draadbreuken op een spinmachine, binnenkomende klanten in een supermarkt, binnenvallende deeltjes in een G.M.-teller, binnenkomende gesprekken in een telefooncentrale. Dat in dergelijke situaties, waarbij de drie bovengenoemde aannamen redelijk vervuld zijn, het Poisson kansveld als model goed bruikbaar is, is als volgt in te zien:
Beschouw een tijdsinterval met lengte 1. Maak m intervalletjes met lengte $\frac{1}{m}$.
Dan is voor elk intervalletje de kans dat een incident optreedt gelijk aan $\frac{\mu}{m}$ (μ is een evenredigheidskonstante). De situatie is dus alsof onafhankelijk van elkaar voor

alle intervalletjes met kans $\frac{\mu}{m}$ wordt geloot of er een incident plaats vindt. Het aantal incidenten wordt dan beschreven door een binomiaal kansveld met $p = \frac{\mu}{m}$. Hieruit volgt:

$$P(k) = \lim_{m \to \infty} \binom{m}{k} \left(\frac{\mu}{m}\right)^k \left(1 - \frac{\mu}{m}\right)^{m-k} = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} .$$

Uit deze beschouwing volgt ook meteen dat voor een tijdspanne ter lengte t de evenredigheidsfaktor μt bedraagt. Zoals te verwachten en ook door een eenvoudig bewijs wordt aangetoond, geldt dat de tijdsduur t tussen twee opeenvolgende incidenten door een eksponentieel kansveld kan worden beschreven (met $\lambda = \mu$).

Dit bewijs gaat als volgt:

P(tijdsduur groter dan t) =

= P(geen incidenten in tijdspanne ter grootte t) =

$$= e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^0}{0!} = e^{-\mu t}$$

dus P(tijdsduur hoogstens t) = $1 - e^{-\mu t} = F(t)$ en $f(t) = \mu e^{-\mu t}$.

Ter afsluiting van deze paragraaf wordt nog een "wet van de grote aantallen" geformuleerd en bewezen. De "ervaringswet van de grote aantallen" zegt dat bij een lange serie worpen met een zuiver muntstuk de fraktie keren dat "kruis" optreedt vrijwel zeker op den duur dichtbij ½ gaat liggen, en ook dat bijvoorbeeld bij een lange serie worpen met een dobbelsteen vrijwel zeker in ongeveer een zesde van de gevallen "1" geworpen wordt. Het "vrijwel zeker" en het "ongeveer" hieruit kunnen nu gepreciseerd worden:

Wet van de grote aantallen: Van een eksperiment met kans p op een uitkomst A worden m onafhankelijke herhalingen uitgevoerd (p vast). Zij $\varepsilon > 0$. P_m is de kans op de uitkomst "de fraktie van het aantal keren dat A optreedt, wijkt meer dan ε van p af".

Dan geldt:

$$\lim_{m \to \infty} P_m = 0.$$

Bewijs:

$$P_m = \sum_{\left|\frac{k}{m} - p\right| > \varepsilon} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$$

$$\leq \sum_{\left|\frac{k}{m} - p\right| > \varepsilon} \left(\frac{k-mp}{m\varepsilon}\right)^2 \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{k-mp}{m\varepsilon}\right)^2 \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$$

$$= \frac{1}{m^2\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{m} (k^2 - 2mpk + m^2p^2) \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$$

$$= \frac{m}{m^2\varepsilon^2}\, p(1-p) = \frac{p(1-p)}{m\varepsilon^2} .$$

Het voorlaatste gelijkteken wordt gerechtvaardigd door de volgende overwegingen:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{m} k \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{m!}{(k-1)!\,(m-k)!}\, p^k (1-p)^{m-k} =$$

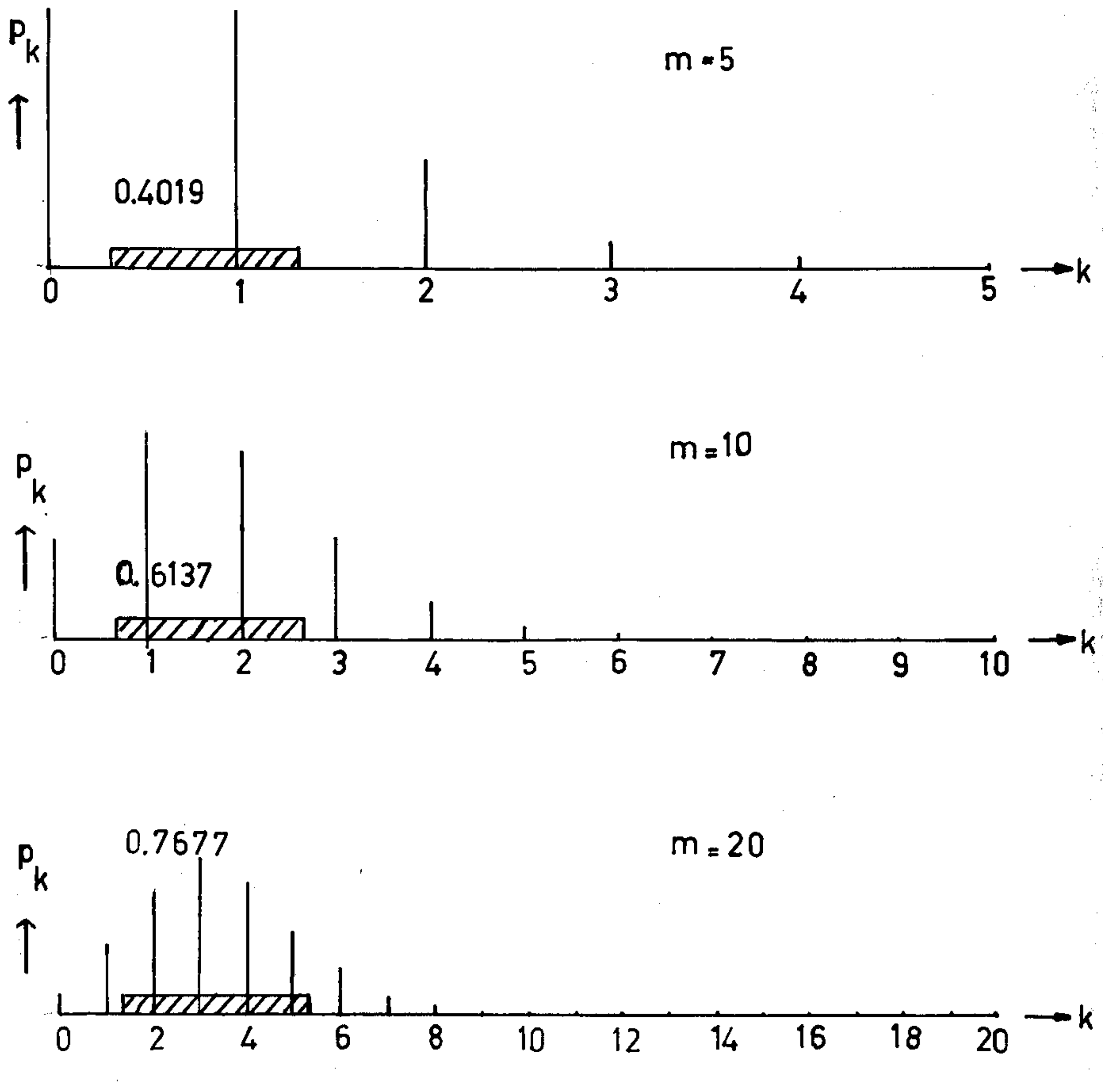
$$= mp \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{m-1}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{m-1-\ell} = mp$$

$$\sum_{k=0}^{m} k^2 \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} k(k-1) \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} k \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} =$$

$$= m(m-1)\, p^2 + mp.$$

Een uitbreiding van deze stelling volgt nog aan het slot van het tweede hoofdstuk.

In onderstaande figuur wordt de wet van de grote aantallen geïllustreerd door voor 5, 10 en 20 worpen met een dobbelsteen de kansen op k zessen uit te zetten (p_k) en daarbij uit te rekenen hoe groot in elk van de gevallen de kans is dat de fraktie zessen minder dan 0,1 van $\frac{1}{6}$ afwijkt.



Hoofdstuk 2. Toevalsgrootheden of stochastische grootheden

In het vorige hoofdstuk is een elementaire inleiding in de kansrekening gegeven. Hierop kan in verschillende richtingen worden voortgebouwd. De voortzetting die in dit hoofdstuk wordt gegeven is in het bijzonder van belang voor de statistiek, dus voor de kunst (of kunde) van het trekken van konklusies uit waarnemingen.
Bij toevalseksperimenten is men meestal geïnteresseerd in allerlei numerieke grootheden die met zekere kansen bepaalde waarden aannemen. Het onderwerp van dit hoofdstuk is het rekenen met zulke door het toeval bepaalde grootheden.

§ 9. Stochastische grootheden (Engels: random variables of stochastic variables
Frans : variables aléatoires)

Stel er is een eksperiment (kansveld) gegeven. Stel aan alle mogelijke resultaten wordt een getalwaarde toegekend; wiskundig gezegd: er is een reëelwaardige funktie gegeven op de verzameling U.

Voorbeelden:

1) bij 10 keer werpen met een muntstuk bestaat de mogelijkhedenverzameling U uit alle mogelijke rijtjes MKKM...KM. Bij elk rijtje kan men het getal beschouwen dat het aantal K's aangeeft.

2) in een tijdsinterval ter lengte T worden bij een G.M.-teller de tijden genoteerd waarop een deeltje invalt. De mogelijkhedenverzameling U bestaat nu uit rijtjes tijden. Bij elk rijtje tijden kan het aantal beschouwd worden, maar ook bijv. het verschil tussen de eerste twee.

3) bij 10 onafhankelijke metingen van zekere fysische konstante, bestaat de mogelijkhedenverzameling U uit (een deel van) de R_{10}. Bij elk punt kan worden gekeken naar bijv. de derde komponent of naar het gemiddelde van de 10 komponenten of naar de som van de kwadraten of enz.

De kansen waarmee bepaalde waarden optreden, kunnen uit het kansveld worden berekend. Dit kan gebeuren door weer het vergrovingsprincipe toe te passen. Veeg mogelijke resultaten met dezelfde funktiewaarde op een hoopje en maak van deze hoopjes de nieuwe mogelijkheden. Elk hoopje kan gekarakteriseerd worden door een getal (de funktiewaarde). Als nieuwe mogelijkhedenverzameling U' kan dus steeds een deelverzameling van R gekozen worden (of R zelf).

We zullen hierbij de volgende situaties beschouwen:

a) de nieuwe mogelijkhedenverzameling U' bestaat uit gehele getallen en is dus diskreet als we daarbij gemakshalve ook aftelbaar oneindige verzamelingen toelaten.

vb. 1 met U' = {0,1,...,10}.

vb. 2 voor het aantal invallende deeltjes met U' = {0,1,2,...}.

b) de nieuwe mogelijkhedenverzameling U' is kontinu.

vb. 2 het tijdsverloop tussen het eerste en het tweede invallende deeltje met U' = [0,T].

vb. 3 als het gebied voor elke waarneming [-10,10] is:

voor de derde komponent	U' = [-10,10]
voor het gemiddelde	U' = [-10,10]
voor de som van de kwadraten	U' = [0,1000].

Een formele definitie zou kunnen luiden:

een toevalsgrootheid of stochastische grootheid bij een kansveld (Grieks: στοχασμοσ = gissing) is een numerieke funktie op de mogelijkhedenverzameling

of een vergroving van het kansveld waarbij de nieuwe mogelijkheden getallen zijn.

Let op het paradoksale karakter: een stochastische grootheid is in de toepassingen een grootheid (aantal, temperatuur, gemiddelde e.d.), maar wiskundig een funktie.

Stochastische grootheden met een diskrete mogelijkhedenverzameling U' (type a) noemen we diskrete stochastische grootheden. Van kontinue stochastische grootheden wordt gesproken bij stochastische grootheden met een kontinue mogelijkhedenverzameling (type b).

Op één kansveld kunnen in het algemeen vele stochastische grootheden gedefinieerd worden (vb. 3).

Bij kansvelden waarop een stochastische grootheid is gedefinieerd is men vaak geïnteresseerd in uitkomsten als:

"de waarde van de grootheid is hoogstens 12".

Het blijkt handig te zijn dit af te korten tot:

$\underline{k} \leq 12$.

Uit de onderstreping blijkt dat het om een stochastische grootheid gaat. Steeds zal zo voor een stochastische grootheid een letter met een streepje eronder gebruikt worden: bv. voor een tijd $\underline{t}$, voor een lengte $\underline{\ell}$, voor aantallen vaak $\underline{k}$. Voor de voorbeelden in het begin van deze paragraaf betekent dit:

vb. 1 $P(\underline{k} = k) = \binom{10}{k}(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{10-k}$, $(k = 0,1,2,\ldots,10)$

dus de vergroving levert een binomiaal kansveld met $m = 10$ en $p = \frac{1}{2}$.

vb. 2 $P(\underline{k} = k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$, $(k = 0,1,2,\ldots)$

$P(\underline{t} > t) = e^{-\mu \frac{t}{T}}$ (mits $e^{-\mu}$ klein).

Merk op dat in dit geval het oorspronkelijke kansveld niet eens precies is uitgewerkt, alleen de vergrovingen komen ter sprake.

vb. 3 Als in een dergelijk geval iets over de kansvelden bekend is, dan is het over de individuele metingen: noem ze $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_{10}$. Hierdoor wordt het grote kansveld vastgelegd, als tenminste onafhankelijkheid van de metingen verondersteld wordt. Het gemiddelde $\frac{1}{10}(\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_{10})$ wordt vaak genoteerd door $\overline{\underline{x}}$. De som van de kwadraten is $\underline{x}_1^2 + \ldots + \underline{x}_{10}^2 = \sum_{i=1}^{10} \underline{x}_i^2$. Het is in het algemeen vrij lastig de nieuwe kansvelden die door deze stochastische grootheden voortgebracht worden te berekenen. In het vervolg zal blijken dat er toch wel iets nuttigs over te zeggen valt.

§ 10. Kansverdelingen

De nieuwe kansvelden, die ontstaan door de introduktie van stochastische grootheden, kunnen volgens het voorgaande worden vastgelegd door

een rij niet negatieve getallen p_k met $\Sigma p_k = 1$ voor een diskrete stochastische grootheid $\underline{k}$, hierbij is $P(\underline{k} = k) = p_k$;

een kansdichtheid f of een verdelingsfunktie F voor een kontinue stochastische grootheid $\underline{x}$, hierbij is $P(\underline{x} \le x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$.

Men zegt dat de getallen p_k resp. de funktie f of de funktie F de <u>kansverdeling</u> van de stochastische grootheid $\underline{k}$ resp. $\underline{x}$ bepalen.
Enige voorbeelden van kansverdelingen zijn de volgende:

<u>diskreet</u>:

1) <u>symmetrische verdeling</u>: n opeenvolgende gehele getallen hebben ieder kans $\frac{1}{n}$, alle andere hebben kans 0.
(vb. dobbelsteen, roulette).

2) <u>binomiale verdeling</u>: $P(\underline{k} = k) := \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$ voor $k = 0,1,\ldots,m$
(m en p gegeven).

3) <u>Poisson verdeling</u>: $P(\underline{k} = k) := e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$ voor $k = 0,1,2,\ldots$ (μ gegeven, > 0).

<u>kontinu</u>:

1) <u>uniforme of homogene verdeling</u>: $f(x) := \frac{1}{b-a}$ voor $a \leq x \leq b$, elders 0
(a en b gegeven, $a < b$)

2) <u>eksponentiële verdeling</u>: $f(t) := \lambda e^{-\lambda t}$ voor $t \geq 0$, elders 0
(λ gegeven, $\lambda > 0$)

3) <u>normale verdeling</u>: $f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2]$ (μ en σ gegeven, $\sigma > 0$).

Voor andere voorbeelden zie het Statistisch Compendium blz. 10, 12, 14.

<u>Opm.</u>: Ook voor diskrete stochastische grootheden is invoering van het begrip <u>verdelingsfunktie</u> zinvol:

$$F(x) := P(\underline{k} \leq x) = \sum_{k \leq x} p_k .$$

F(x) is konstant voor $k \leq x < k + 1$.

Vandaar dat in de tabellen 5.2 en 6.2 van het Statistisch Compendium voor de verdelingsfunkties van binomiaal resp. Poisson verdeelde stochastische grootheden F alleen voor gehele argumenten is opgenomen. Deze tabellen zijn van belang omdat men vaak geïnteresseerd is in uitkomsten in de vorm van intervallen; de kansen op dit soort uitkomsten worden m.b.v. de verdelingsfunktie eenvoudig berekend.

§ 11. <u>Verwachting; momenten, variantie</u>

Een stochastische grootheid wordt gekarakteriseerd door zijn kansverdeling. Er bestaat echter ook behoefte aan een karakterisering door enkele getallen.

Deze geven dan natuurlijk minder informatie maar zijn makkelijker om mee te rekenen en overzichtelijker.

Een nuttig begrip is de verwachting van een stochastische grootheid, deze geeft het zwaartepunt aan van de "kansmassa" zoals die over R verdeeld is:

Definitie: $\mathcal{E}\,\underline{k} := \Sigma\, kP(\underline{k} = k)$ als $\underline{k}$ diskreet,

$$\mathcal{E}\,\underline{x} := \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$ als $\underline{x}$ kontinu ($\mathcal{E}$ vanwege expectation).

Deze som of integraal bestaat niet voor elke stochastische grootheid, Als de reeks resp. integraal konvergeren, konvergeren ze ook absoluut en mag er dus vrijelijk met bijvoorbeeld de sommatievolgorde gemanipuleerd worden.

vb. binomiaal : $\mathcal{E}\,\underline{k} = \sum_{k=0}^{m} k\binom{m}{k} p^k(1-p)^{m-k} = mp$ (vgl. het bewijs van de wet van de grote aantallen in § 8)

Poisson : $\mathcal{E}\,\underline{k} = \sum_{k=0}^{\infty} k\, e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} = \mu.$

eksponentieel : $\mathcal{E}\,\underline{t} = \int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}\,.$

normaal : $\mathcal{E}\,\underline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \mu\,.$

uniform : $\mathcal{E}\,\underline{x} = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{b+a}{2}\,.$

Als $\underline{x}$ een stochastische grootheid is, dan wordt met $\underline{x}^2$ de stochastische grootheid bedoeld die de waarde x^2 aanneemt als $\underline{x}$ de waarde x heeft. Zo kan algemeen een grootheid $\underline{y} = g(\underline{x})$ gedefinieerd worden. Voorbeelden: $2\underline{x} + 1$, $|\underline{x}|$, $e^{-s\underline{x}}$.

Van al deze stochastische grootheden kan ook de verwachting bepaald worden (mits deze bestaat). Er geldt nu de belangrijke stelling:

Stelling: $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn stochastische grootheden en $\underline{y} = g(\underline{x})$, dan geldt

1) $\mathcal{E}\,\underline{y} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ als $\underline{x}$ kontinu verdeeld is met kansdichtheid f en g integreerbaar.

2) $\mathcal{E}\,\underline{y} = \sum_k g(k)P(\underline{x} = k)$ als $\underline{x}$ diskreet verdeeld is.

Zeker van de tweede bewering is het bewijs eenvoudig.
Zo geldt bv. $\mathcal{E}\,a\underline{x} = a\,\mathcal{E}\,\underline{x}$.

De verwachtingen van een bijzonder soort funkties van $\underline{x}$, namelijk machten, dus $\underline{x}^k$ worden momenten van $\underline{x}$ genoemd:

$\mu_k := \mathcal{E}\,\underline{x}^k$ heet het k-de moment van $\underline{x}$.

In het bijzonder: $\mu_o = 1$ (oninteressant) en $\mu_1 = \mathcal{E}\,\underline{x}$. De laatste wordt meestal met μ of $\mu(\underline{x})$ genoteerd.

De verwachting μ van een stochastische grootheid $\underline{x}$ geeft aan waar het zwaartepunt van de kansmassa ligt, maar zegt niets over de "uitgespreidheid" van die kansmassa. Daartoe wordt meestal ingevoerd de verwachting van het kwadraat van de afwijking van $\underline{x}$:

Definitie: $\mathcal{E}(\underline{x} - \mu)^2$ noemt men de variantie van $\underline{x}$.

Notatie: σ^2 of $\sigma^2(\underline{x})$.

σ of $\sigma(\underline{x})$ (≥ 0) heet de standaardafwijking van $\underline{x}$.

We geven nu enige eigenschappen van verwachting, momenten en variantie:

1) $\mathcal{E}\,a\underline{x} = a\,\mathcal{E}\,\underline{x}$,
2) $\mathcal{E}(\underline{x} + b) = \mathcal{E}\,\underline{x} + b$,
3) $\sigma^2(\underline{x} + b) = \sigma^2(\underline{x})$,
4) $\sigma^2(a\underline{x}) = a^2\sigma^2(\underline{x})$,
5) $\sigma(a\underline{x}) = |a|\,\sigma(\underline{x})$,
6) $\sigma^2(\underline{x}) = \mu_2 - \mu^2$,
7) $\mu_2 \geq \mu^2$.

Deze eigenschappen zijn handig bij het berekenen van varianties, verwachtingen en momenten.

Bewijzen: 1), 2) uit vorige stelling.

3) uit 2).

4) uit: $\sigma^2(a\underline{x}) = \mathcal{E}(a\underline{x} - a\mu)^2 = \mathcal{E}a^2(\underline{x} - \mu)^2 = a^2\mathcal{E}(\underline{x} - \mu)^2$.

5) uit 4).

6) uit: $\mathcal{E}(\underline{x} - \mu)^2 = \mathcal{E}(\underline{x}^2 - 2\mu\underline{x} + \mu^2) = \mu_2 - 2\mu^2 + \mu^2$.

7) uit 6).

Voorbeelden:

binomiaal : $\sigma^2(\underline{k}) = \sum_{k=0}^{m} (k-mp)^2 \binom{m}{p} p^k (1-p)^{m-k} = mp(1-p)$

(verg. § 8)

Poisson : $\sigma^2(\underline{k}) = \mu$.

eksponentieel : $\sigma^2(\underline{t}) = \frac{1}{\lambda^2}$.

normaal : $\sigma^2(\underline{x}) = \sigma^2$.

uniform : $\sigma^2(\underline{x}) = \frac{1}{12}(b-a)^2$.

In het bijzonder aan de waarden voor normale en uniforme verdeling kan men goed zien dat μ de globale plaats van de kansmassa bepaalt en σ de massaspreiding.

$\varphi(s) := \mathcal{E} e^{-s\underline{x}}$ is als $\underline{x}$ kontinu verdeeld is, een <u>tweezijdige Laplace getransformeerde van f</u>. Voor diskreet verdeelde $\underline{x}$ is hiermee een soort gegeneraliseerde Laplace transformatie ingevoerd. We nemen als bekend aan dat $\varphi(s)$ omgekeerd de kansverdeling van $\underline{x}$ bepaalt. Als er gevaar voor verwarring bestaat, dan schrijven we de stochastische grootheid waar $\varphi(s)$ betrekking op heeft er bij: $\varphi_{\underline{x}}(s)$.

Voorbeelden:

binomiaal : $\varphi(s) = (1 - p + pe^{-s})^m$.

Poisson : $\varphi(s) = e^{\mu(e^{-s}-1)}$.

normaal : $\varphi(s) = e^{-s\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2}$.

In het algemeen geldt:

$$\varphi_{a\underline{x}+b}(s) = \mathcal{E}\, e^{-s(a\underline{x}+b)} = e^{-sb}\varphi_{\underline{x}}(sa) .$$

Bij de meest voorkomende kansverdelingen bestaat $\varphi(s)$ voor minstens een interval van s-waarden.

Dat de karakterisering van een kansverdeling door eerste moment en variantie ook bezwaren heeft, blijkt uit het volgende voorbeeld.
Stel $\underline{x}$ heeft een normale verdeling met parameters μ en σ. Stel $\underline{y} = e^{\underline{x}}$. De stochastische grootheid $\underline{y}$ heeft dan de zg. <u>lognormale verdeling</u> (log $\underline{y}$ is normaal verdeeld). Deze verdeling wordt o.a. gebruikt voor inkomensverdeling, deeltjesgrootte, aantallen gekochte artikelen per klant in supermarkets.
Nu geldt:

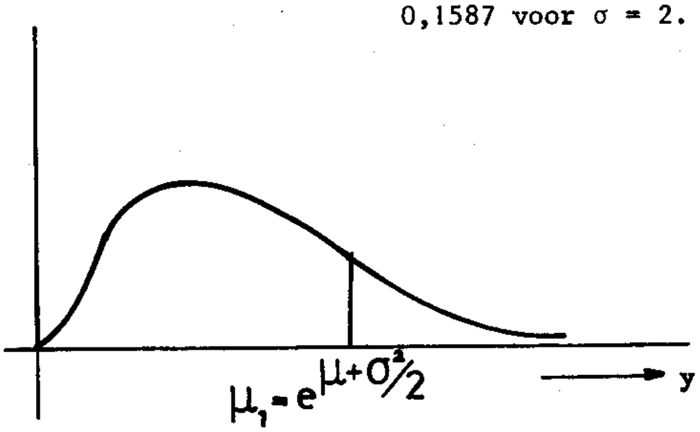
$$\mathcal{E}\, \underline{y}^k = \mathcal{E}\, e^{k\underline{x}} = \varphi_{\underline{x}}(-k) = e^{k\mu+\frac{1}{2}k^2\sigma^2} .$$

Dus $\mathcal{E}\, \underline{y} = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} = \mu_1$.

Hieruit volgt o.a.:

$$P(\underline{y} > \mu_1) = P(\underline{x} > \mu + \tfrac{1}{2}\sigma^2) = P(\underline{u} > \tfrac{1}{2}\sigma) .$$

Deze kans is gelijk aan 0,3085 voor $\sigma = 1$
0,1587 voor $\sigma = 2$.



Bij een dergelijke "scheve" verdeling hoeft de verwachting niet aan te geven waar het grootste gedeelte van de kansmassa ligt. In het voorbeeld ligt de verwachting in de rechter staart. Een bruikbaarder lokalisering van de kansmassa kan in een dergelijk geval geschieden door de <u>mediaan</u> M, gedefinieerd door

$$P(\underline{y} \le M) = P(\underline{y} \ge M) = 0,5 .$$

In het voorbeeld: $M = e^{\mu}$.
Indien ook inzicht moet worden verkregen in de "spreiding" kunnen bijv. de 0,25 en 0,75 - punten opgegeven worden:

$$P(\underline{y} \leq M_1) = 0{,}25 \ , \ P(\underline{y} \leq M_2) = 0{,}75 \ .$$

In het bijzonder bij de beschrijving van populaties waar betrekkelijk weinig items sterk van het gebruikelijke afwijken levert het gebruik van de mediaan en andere zg. kwantielen de mogelijkheid om de algemene situatie goed weer te geven.

§ 12. Relaties tussen stochastische grootheden

In een kansveld kunnen meerdere stochastische grootheden gedefinieerd worden. Het meest voor de hand liggende voorbeeld vormen de afzonderlijke metingen bij een eksperiment bestaande uit een aantal onafhankelijke metingen.
Vaak geeft de waarde die de ene stochastische grootheid aanneemt informatie over de andere (verg. § 7). Als bijv. van een willekeurig gekozen Nederlander schoenmaat en lengte worden bepaald, dan maakt een grote gekonstateerde schoenmaat een grote lengte zeer waarschijnlijk:

$$P(\underline{\ell} > 180 \mid \underline{s} = 48) > P(\underline{\ell} > 180) \ .$$

In een grensgeval geeft de waarde van de ene stochastische grootheid nooit informatie over de andere, dan geldt dus:

$$P(\underline{x} \in A \text{ èn } \underline{y} \in B) = P(\underline{x} \in A)P(\underline{y} \in B) \qquad \text{voor alle } A \text{ en } B.$$

Men zegt dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk stochastische grootheden zijn. Algemeen wordt, analoog als in § 7 voor deeleksperimenten, gedefinieerd:

Definitie: $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_m$ heten onafhankelijke stochastische grootheden, als voor elk m-tal deelverzamelingen $A_1, A_2, \ldots, A_m$ van R de volgende produktregel geldt:

$$P(\underline{x}_1 \in A_1 \text{ en } \underline{x}_2 \in A_2 \text{ en } \ldots \text{ en } \underline{x}_m \in A_m) = P(\underline{x}_1 \in A_1) \ldots P(\underline{x}_m \in A_m).$$

Opm.: Er kan ook volstaan worden met deze eis voor verzamelingen A_i van het type $(-\infty, a_i]$:

$$P(\underline{x}_1 \leq a_1 \text{ en } \ldots \text{ en } \underline{x}_m \leq a_m) = F(a_1, \ldots, a_m) = F_1(a_1)F_2(a_2)\ldots F_m(a_m),$$

waarin F_i de verdelingsfunktie is van $\underline{x}_i$.

Natuurlijk geldt ook weer als alle $\underline{x}_i$ kontinu verdeeld zijn:

$$F(a_1,\ldots,a_m) = \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{a_2} \cdots \int_{-\infty}^{a_m} f(x_1,\ldots,x_m)dx \ldots dx_m$$

met $f(x_1,\ldots,x_m) = f_1(x_1)f_2(x_2) \ldots f_m(x_m)$. (verg. § 7).

Enige eigenschappen van verwachting en variantie bij meerdere stochastische grootheden worden hieronder genoemd:

1) $\mathcal{E}(\underline{x} + \underline{y}) = \mathcal{E}\underline{x} + \mathcal{E}\underline{y}$.

2) $\mathcal{E}\dfrac{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_m}{m} = \mu$, als $\mathcal{E}\underline{x}_k = \mu$ $(k = 1,\ldots,m)$.

3) $\mathcal{E}\underline{x}\,\underline{y} = \mathcal{E}\underline{x}\;\mathcal{E}\underline{y}$, als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk.

4) $\sigma^2(\underline{x} + \underline{y}) = \sigma^2(\underline{x}) + \sigma^2(\underline{y})$, als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk.

5) $\sigma^2\left(\dfrac{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_m}{m}\right) = \dfrac{1}{m}\sigma^2$, als de $\underline{x}_k$ onafhankelijk
en $\mathcal{E}\underline{x}_k = \mu$, $\sigma^2(\underline{x}_k) = \sigma^2$
voor $k = 1,\ldots,m$.

De bewijzen worden uitgeschreven voor diskrete stochastische grootheden, de andere gevallen gaan analoog:

Bewijzen:

1) $\mathcal{E}(\underline{x} + \underline{y}) = \sum_{k,\ell} (k+\ell)P(\underline{x}=k \text{ en } \underline{y}=\ell) = \sum_k k\,P(\underline{x}=k) + \sum_\ell \ell\,P(\underline{y}=\ell)$.

2) $\mathcal{E}\dfrac{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_m}{m} = \dfrac{1}{m}\mathcal{E}(\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_m) = \dfrac{1}{m} m\mu$.

3) $\mathcal{E}\underline{x}\,\underline{y} = \sum_{k,\ell} k\ell\,P(\underline{x}=k \text{ en } \underline{y}=\ell) = \sum_k \sum_\ell k\ell\,P(\underline{x}=k)P(\underline{y}=\ell) =$

$= \sum_k k\,P(\underline{x}=k) \sum_\ell \ell\,P(\underline{y}=\ell)$.

(bij het tweede =- teken is de onafhankelijkheid gebruikt).

4) $\sigma^2(\underline{x}+\underline{y}) = \mathcal{E}(\underline{x}+\underline{y}-\mu_{\underline{x}}-\mu_{\underline{y}})^2 = \mathcal{E}(\underline{x}-\mu_{\underline{x}})^2 + \mathcal{E}(\underline{y}-\mu_{\underline{y}})^2 + 2\,\mathcal{E}(\underline{x}-\mu_{\underline{x}})(\underline{y}-\mu_{\underline{y}}) =$

$$= \sigma^2(\underline{x}) + \sigma^2(\underline{y}) .$$

5) $\sigma^2\left(\frac{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_m}{m}\right) = \frac{1}{m^2}\,\sigma^2(\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_m) = \frac{1}{m^2}\, m\, \sigma^2 .$

$\mathcal{E}(\underline{x} - \mu_{\underline{x}})(\underline{y} - \mu_{\underline{y}}) = 0$ als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk (en ook in sommige andere gevallen). Deze verwachting wordt <u>covariantie</u> genoemd.

Notatie: $\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{y})$. Dit begrip speelt in veel toepassingen een belangrijke rol, evenals de <u>correlatie coëfficiënt</u> die gedefinieerd wordt door:

$$\rho(\underline{x},\underline{y}) := \frac{\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{y})}{\sigma(\underline{x})\sigma(\underline{y})} .$$

<u>Toepassingen</u>:

1) om bijv. μ en σ van een binomiaal verdeelde $\underline{k}$ te vinden is nu geen rekenwerk meer nodig; want $\underline{k} = \underline{k}_1 + \ldots + \underline{k}_m$ waarin de $\underline{k}_i$ onafhankelijk zijn, met kans p de waarde 1 hebben en met kans 1-p de waarde 0:

$$\mathcal{E}\,\underline{k}_i = p\ ,\quad \sigma^2(\underline{k}_i) = p(1-p)\ ;$$

dus $\quad \mathcal{E}\,\underline{k} = mp,\quad \sigma^2(\underline{k}) = mp(1-p).\qquad \mathcal{E}\,\frac{\underline{k}}{m} = p \qquad \sigma^2\left(\frac{\underline{k}}{m}\right) = \frac{1}{m}\,p(1-p)$

2) door middeling van herhaalde meting blijft het verwachte resultaat μ, maar de variantie neemt af. Dit feit vindt met name systematische toepassing in de statistiek. Door het middelen van voldoende vaak herhaalde waarnemingen wordt de invloed van toevallige afwijkingen zover teruggebracht als maar wenselijk is.

3) foutenvoortplanting.
Stel $\underline{y} = \underline{x}_1\,\underline{x}_2$ met $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ onafhankelijk.
Dan geldt:

$$\sigma^2(\underline{y}) = \mathcal{E}\,\underline{x}_1^2\,\underline{x}_2^2 - \mu_1^2\mu_2^2 = (\sigma_1^2 + \mu_1^2)(\sigma_2^2 + \mu_2^2) - \mu_1^2\mu_2^2$$

$$= \sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 \qquad (\mu_i := \mathcal{E}\,\underline{x}_i) .$$

Dus als $\frac{\sigma(\underline{x})}{\mu(\underline{x})} =: V(\underline{x})$ (<u>variatiecoëfficiënt</u>):

$$V^2(\underline{y}) = V^2(\underline{x}_1)V^2(\underline{x}_2) + V^2(\underline{x}_1) + V^2(\underline{x}_2) .$$

Voor metingen van redelijke kwaliteit geldt dat $\frac{\sigma}{\mu}$ klein is, dus

$$V^2(\underline{y}) \approx V^2(\underline{x}_1) + V^2(\underline{x}_2) \;,$$

de bekende rekenregel voor voortplanting van de relatieve fout in produkten.

Algemener, stel $\underline{y} = f(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$. Als de kansen op grote afwijkingen van de μ_i voor de $\underline{x}_i$ klein zijn, geldt:

$$\underline{y} - f \approx (\underline{x}_1 - \mu_1)f_1 + (\underline{x}_2 - \mu_2)f_2 + \ldots + (\underline{x}_n - \mu_n)f_n$$

waarin $\mu_i = \mathcal{E}\,\underline{x}_i$, $f = f(\mu_1,\ldots,\mu_n)$, $f_i := (\frac{\partial f}{\partial x_i})(\mu_1,\ldots,\mu_n)$.

dus $\mathcal{E}\,\underline{y} \approx f$,

en als de $\underline{x}_i$ onafhankelijk zijn:

$$\sigma^2(\underline{y}) \approx \sum_{i=1}^{n} f_i^2\sigma_i^2 \;;$$

als de $\underline{x}_i$ niet onafhankelijk zijn:

$$\sigma^2(\underline{y}) \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_i f_j\, \mathcal{E}(\underline{x}_i - \mu_i)(\underline{x}_j - \mu_j) \;.$$

Vergelijk ook blz. 29 van het Statistisch Compendium.

Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ kontinu verdeelde onafhankelijke stochastische grootheden zijn, dan geldt voor de Laplace getransformeerde van de kansdichtheid van $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$:

$$\varphi_{\underline{z}}(s) = \mathcal{E}\, e^{-s(\underline{x}+\underline{y})} = \iint_{R_2} e^{-s(x+y)} f(x)g(y)dxdy = \varphi_{\underline{x}}(s)\varphi_{\underline{y}}(s) \;.$$

Zo bewijst men algemeen voor m onafhankelijke stochastische grootheden $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_m$ met $\underline{z} = \underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_m$:

$$\varphi_{\underline{z}}(s) = \varphi_{\underline{x}_1}(s) \ldots \varphi_{\underline{x}_m}(s) \;.$$

In het bijzonder kan hiermee bewezen worden:

A_0 <u>Stelling</u>: $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden, beide met een normale verdeling (parameters resp. μ_1, σ_1 en μ_2, σ_2). a en b zijn reële getallen, dan geldt: $a\underline{x} + b\underline{y}$ heeft een normale verdeling met $\mu = a\mu_1 + b\mu_2$, $\sigma^2 = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$.

Leeszaal
Centrale Bibliotheek
T.H. Eindhoven

Bewijs: $\underline{z} = a\underline{x} + b\underline{y}$

$$\varphi_{\underline{z}}(s)=\varphi_{a\underline{x}}(s)\varphi_{b\underline{y}}(s)=\varphi_{\underline{x}}(sa)\varphi_{\underline{y}}(sb)=e^{-sa\mu_1+\frac{1}{2}\sigma_1^2s^2a^2}\cdot e^{-sb\mu_2+\frac{1}{2}\sigma_2^2s^2b^2}$$

$$= e^{-s(a\mu_1+b\mu_2)+\frac{1}{2}s^2(a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)} .$$

Als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ kontinu verdeeld en onafhankelijk zijn, geldt volgens het voorgaande voor $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$:

$$\varphi_{\underline{z}}(s) = \varphi_{\underline{x}}(s)\varphi_{\underline{y}}(s) .$$

Stel $\underline{z},\underline{x},\underline{y}$ hebben kansdichtheden f,g,h.

Dan: $$\varphi_{\underline{z}}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-zs}dz = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-xs}dx \int_{-\infty}^{\infty} h(y)e^{-ys}dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)e^{-(x+y)s}dydx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(z-x)e^{-zs}dzdx$$

(subst. x+y = z)

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(z-x)dx\right]e^{-zs}dz .$$

Konklusie: $f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(z-x)dx$, de kansdichtheid van $\underline{z}$ is het konvolutieprodukt voor $\underline{x}$ en $\underline{y}$ (verg. Wiskunde 30 blz. 28).

Merk op, dat als g en h gelijk aan 0 zijn voor negatieve argumenten, dat dan

$$f(z) = \int_0^z g(x)h(z-x)dx .$$

Voor diskrete $\underline{x}$ en $\underline{y}$ geldt overeenkomstig: $P(\underline{z} = k) = \sum_{\ell} P(\underline{x} = \ell)\, P(\underline{y} = k - \ell)$.

In het bijzonder voor diskrete stochastische grootheden is het resultaat ook eenvoudig direkt in te zien.

§ 13. De wet van de grote aantallen

Eerst wordt een (grove) afschatting gegeven van de kans om in de staarten van een verdeling te komen:

De ongelijkheid van Bienaymé - Cebycev: $P(|\underline{x} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2(\underline{x})}{\varepsilon^2}$ (als $\varepsilon > 0$).

Bewijs: Voor een kontinu verdeelde $\underline{x}$ gaat het bewijs als volgt (voor diskrete $\underline{x}$ analoog):

$$P(|\underline{x} - \mu| \geq \varepsilon) = \int\limits_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)dx \leq \int\limits_{|x-\mu|\geq\varepsilon} \left(\frac{x-\mu}{\varepsilon}\right)^2 f(x)dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\,\sigma^2(\underline{x}) .$$

Gevolg: Stel $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden met dezelfde kansverdeling. We kunnen nu de ongelijkheid van Bienaymé-Cebycev toepassen op hun gemiddelde: $\underline{\bar{x}} := \dfrac{\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_n}{n}$, dan geldt $\mathcal{E}\,\underline{x}_i = \mu$, $\sigma^2(\underline{x}_i) = \sigma^2$:

$$P(|\underline{\bar{x}} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} .$$

Dus $$\lim_{n\to\infty} P(|\underline{\bar{x}} - \mu| \geq \varepsilon) = 0 ,$$

of $$\lim_{n\to\infty} P(|\underline{\bar{x}} - \mu| < \varepsilon) = 1 .$$

De kans dat het gemiddelde van n onafhankelijke waarnemingen minder dan ε van μ afwijkt nadert naar 1.

De stelling uit § 8 is een bijzonder geval hiervan. Namelijk: de fraktie keren dat A optreedt is gelijk aan $\dfrac{\underline{k}}{m} = \dfrac{\underline{k}_1 + \ldots + \underline{k}_m}{m}$ met $\mathcal{E}\,\underline{k}_i = p$ en $\sigma^2(\underline{k}_i) = p(1-p)$ en alle $\underline{k}_i$ onafhankelijk.

Toepassing:

De wet van de grote aantallen geeft een verklaring van de snelheid waarmee een hoeveelheid radio-aktief materiaal vervalt. Volgens fysische theorieën is voor een deeltje de levensduurverdeling vanaf tijdstip τ onafhankelijk van τ. Voor elk deeltje kan het vervaltijdstip dus (zie § 6) beschreven worden door een eksponentieel kansveld:

$$P(\text{het deeltje "leeft" nog op tijdstip } t) = e^{-\lambda t} .$$

Nu bevat de hoeveelheid materie heel veel deeltjes, daarvan zal dus met zeer grote kans op het tijdstip t nog een fraktie $e^{-\lambda t}$ niet uiteengevallen zijn. Evenzo is de fraktie deeltjes die in een tijdsinterval $(t,t+\Delta)$ uiteenvalt ongeveer gelijk aan $\lambda\Delta e^{-\lambda t}$. De radio-aktieve straling neemt dus af volgens een e-macht.

§ 14. De centrale limietstelling

In deze paragraaf zal duidelijker worden, waarom bij toevalseksperimenten de normale kansverdeling zo'n centrale rol speelt. Eerst wordt een formulering en bewijsschets van een eenvoudige vorm van de centrale limietstelling gegeven. Deze zegt dat de som van een groot aantal onafhankelijke gelijkverdeelde stochastische grootheden ongeveer een normale kansverdeling heeft:

Centrale limietstelling: Stel $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden, alle met dezelfde verdeling. $\mathcal{E}\,\underline{x}_i = \mu$, $\sigma(\underline{x}_i) = \sigma$.

Dan geldt voor de kansverdeling van $\underline{\bar{x}} := \dfrac{\underline{x}_1 + \dots + \underline{x}_n}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\underline{\bar{x}}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx .$$

Bewijs: $\underline{z}_n = \dfrac{\underline{\bar{x}}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{E}\,\underline{z}_n = 0$, $\sigma(\underline{z}_n) = 1$. Dus als werkelijk $\underline{z}_n$ voor grote n ongeveer normaal verdeeld moet zijn, dan toch zeker een normale verdeling met parameterwaarden 0 en 1. We pakken dit aan door naar de Laplace getransformeerde van de "dichtheid" te kijken.

$$\underline{z}_n = \frac{\dfrac{\underline{x}_1 + \dots + \underline{x}_n}{n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\dfrac{\underline{x}_1-\mu}{\sigma} + \dots + \dfrac{\underline{x}_n-\mu}{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{\underline{y}_1 + \dots + \underline{y}_n}{\sqrt{n}} ,$$

waarin $\mathcal{E}\,\underline{y}_i = 0$, $\sigma^2(\underline{y}_i) = 1$.

Nu geldt:

$$\varphi_{\underline{z}_n}(s) = \varphi_{\underline{y}_1 + \ldots + \underline{y}_n}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \varphi^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) .$$

Hierin is $\varphi = \varphi_{\underline{y}_1}$.

Met de formule van MacLaurin voor $\varphi(\frac{s}{\sqrt{n}})$:

$$\varphi\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \varphi(0) + \frac{s}{\sqrt{n}}\,\varphi'(0) + \frac{s^2}{2n}\,\varphi''\left(\theta\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \qquad (0 \le \theta \le 1) \quad .$$

$\varphi(0) = 1$.

$$\varphi'(s) = \frac{d}{ds}\,\mathcal{E}\,e^{-s\underline{y}_1} = \mathcal{E} - \underline{y}_1 e^{-s\underline{y}_1} \text{ , dus } \varphi'(0) = -\,\mathcal{E}\,\underline{y}_1 = 0$$

(mits onder de integraal of som mag worden gedifferentieerd).

Dus:

$$\varphi\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{s^2}{2n}\,\varphi''\left(\theta\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right) .$$

Ook: $\varphi''(0) = \mathcal{E}\,\underline{y}_1^2 = \sigma^2(\underline{y}_1) = 1$.

Onder zwakke voorwaarden is φ'' kontinu voor $s = 0$, dus

$$\lim_{n \to \infty} \varphi''\left(\theta\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 \qquad \text{(voor elke s)} .$$

$$\varphi_{\underline{z}_n}(s) = \left[1 + \frac{s^2}{2n}\,\varphi''\left(\theta\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right]^n .$$

Dus $\lim_{n \to \infty} \varphi_{\underline{z}_n}(s) = e^{\frac{s^2}{2}}$, de Laplace getransformeerde van $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Opmerking: Het is eigenlijk handiger om met de Fourier transformatie $\mathcal{E}\,e^{is\underline{x}}$ te werken in plaats van met de Laplace transformatie $\mathcal{E}\,e^{-s\underline{x}}$. De eerste bestaat nl. voor elke stochastische grootheid $\underline{x}$ en is, als $\mathcal{E}\,\underline{x}^2$ bestaat, wel zo netjes, dat de stappen van het bewijs gerechtvaardigd kunnen worden.

Deze stelling wordt als volgt gebruikt:

$\frac{\underline{\bar{x}} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ is volgens de stelling ongeveer N(0,1) verdeeld voor grote n, dan is $\underline{\bar{x}}$ ongeveer normaal verdeeld met als μ-waarde μ en als σ-waarde $\sigma/\sqrt{n}$.

Toepassingen:

1) $\underline{k}$ is binomiaal verdeeld (n,p),
   dus $\underline{k} = \underline{k}_1 + \ldots + \underline{k}_n$ (som van onafhankelijke grootheden),
   dus $\underline{k}$ is voor grote n ongeveer normaal verdeeld met $\mu = np$ en $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$:

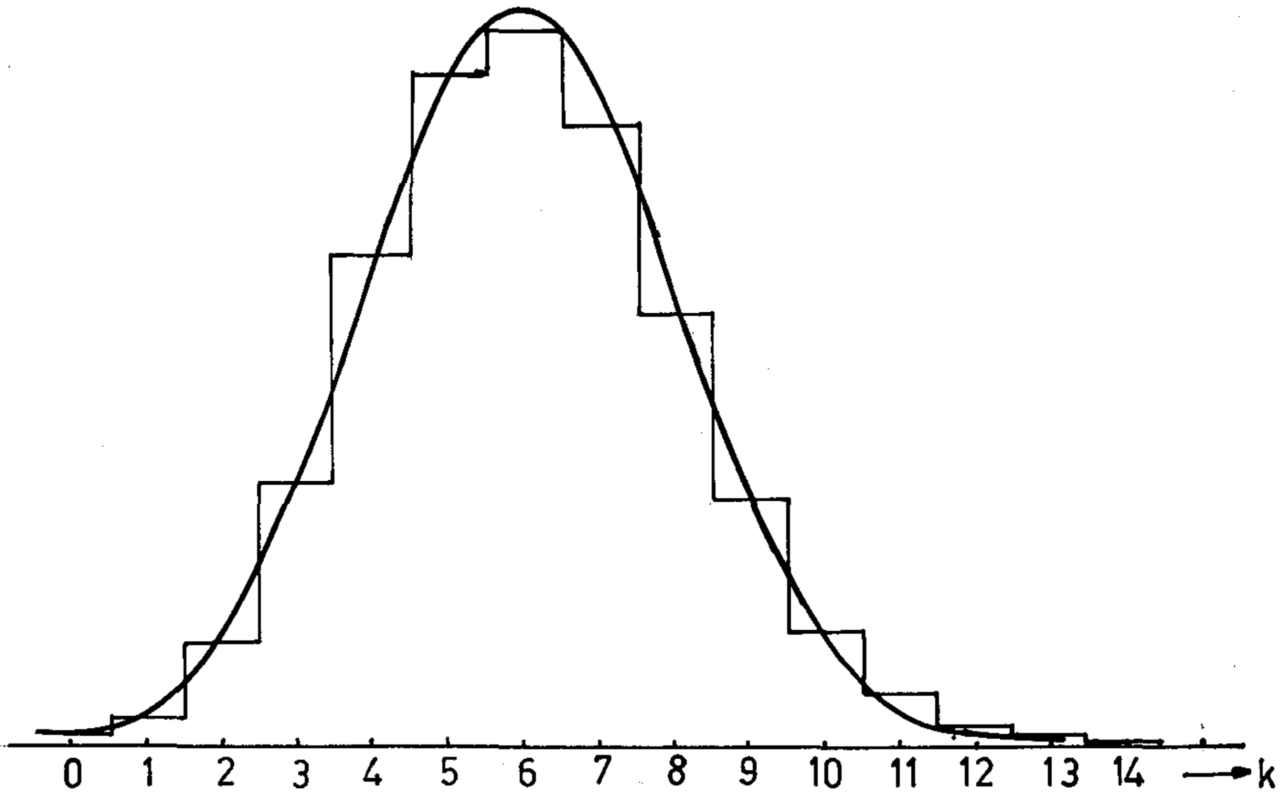
$$P(\underline{k} \leq k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad \text{met} \quad a = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} .$$

   Deze benadering is voor de meeste doeleinden bruikbaar als voldaan is aan $np \geq 5$ en $n(1-p) \geq 5$. Echter indien een eksakte tabel beschikbaar is verdient deze uiteraard de voorkeur, in het bijzonder zolang $np < 10$ of $n(1-p) < 10$.
   De benadering is soms iets beter als genomen wordt $a = \frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ (diskontinuïteitskorrektie).

2) $\underline{k}$ is Poisson verdeeld met parameterwaarde μ (stel voor het gemak μ geheel), dan geldt $\underline{k} = \underline{k}_1 + \ldots + \underline{k}_\mu$ (som van onafhankelijke stochastische grootheden, alle met Poisson verdeling (μ = 1)), dus $\underline{k}$ heeft ongeveer (voor grote μ) een normale verdeling met μ-waarde μ en σ^2-waarde μ:

$$P(\underline{k} \leq k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad \text{met} \quad a = \frac{k - \mu}{\sqrt{\mu}} .$$

   Deze benadering is in het algemeen bruikbaar voor $\mu \geq 10$.
   Een iets betere benadering levert soms: $a = \frac{k + \frac{1}{2} - \mu}{\sqrt{\mu}}$.



Binomiale verdeling met m = 20, p = 0,3, benaderd door een normale verdeling met $\mu = 6$, $\sigma^2 = 4{,}2$.

De geformuleerde versie van de centrale limietstelling kan goed uitgebreid worden door verzwakking van de eisen van gelijkverdeeldheid en onafhankelijkheid. Dan krijgt men zo ongeveer: de som van veel min of meer onafhankelijke stochastische grootheden heeft ongeveer een normale verdeling.

Deze stelling maakt enigszins verklaarbaar waarom men in praktijkproblemen zo vaak normale verdelingen tegenkomt (meetfouten, lichaamslengten bijv.) en dient bovendien als argument voor het werken met normale verdelingen in situaties waar men de verdeling niet kent.

Hoofdstuk 3. Statistiek

In de beide voorgaande hoofdstukken hebben we ons met de kansrekening bezig gehouden, dat wil zeggen dat, uitgaande van een model in de vorm van een gegeven kansverdeling, de kansen op uitkomsten in een experiment werden berekend.

In de statistiek interesseren we ons voor het omgekeerde probleem: welke konklusies kunnen over een kansverdeling worden getrokken als de uitkomsten van een eksperiment gegeven zijn?

§ 15. Steekproeven

De belangrijkste begrippen in de statistiek zijn wel populatie en steekproef. Onder de populatie verstaan we de verzameling van elementen waarop het statistisch onderzoek betrekking heeft. De elementen van een populatie hoeven geen materiële objekten te zijn zoals gloeilampen, maar het kunnen ook gebeurtenissen zijn, zoals draadbreuken in een textielfabriek of denkbeeldige resultaten van wegingen of metingen enz. Wel moet duidelijk omschreven zijn waaruit de populatie bestaat, van elk element moet kunnen worden vastgesteld of het al of niet tot de populatie behoort.

Zeer vaak zal men een kenmerk waarin men geïnteresseerd is niet aan de hele populatie kunnen waarnemen. Een van de redenen kan zijn dat de waarneming destruktief (smaakproef van bliksoep, levensduurbepaling van een gloeilamp). Maar ook als dit niet het geval is zal volledige waarneming vaak te tijdrovend en te kostbaar zijn.

We zullen alleen steekproeven beschouwen die verkregen worden door aselecte trekking uit de populatie, dat wil zeggen dat de keuze van elk element onafhankelijk is van de eigenschappen van het element die voor het onderzoek van belang zijn. Dit kan bij een eindige populatie gerealiseerd worden door loting met gelijke kansen.

Een praktische moeilijkheid die zich vaak voordoet is dat niet de gehele populatie voor trekking beschikbaar is. Wil men bijv. de opbrengsten van twee tarwerassen op Nederlandse kleigrond met elkaar vergelijken dan zal men slechts een beperkt aantal proefboerderijen ter beschikking hebben waarop proefvelden kunnen worden aangelegd. Bovendien zal men de konklusie ook willen betrekken op de opbrengsten in toekomstige jaren. Men mag nu de steekproef van proefvelden alleen als aselect beschouwen als men kan aannemen dat het waargenomen kenmerk (het verschil in opbrengst tussen de twee rassen) dezelfde kansverdeling heeft op alle boerderijen op de Nederlandse klei, terwijl deze verdeling ook van jaar tot jaar gelijk blijft.

Bij een eindige populatie moet verder onderscheid worden gemaakt tussen trekking met teruglegging en trekking zonder teruglegging. In het eerste geval wordt het getrokken element weer aan de verzameling toegevoegd, zodat bij een volgende trekking hetzelfde element opnieuw kan worden aangewezen. Bij trekking zonder teruglegging kan elk element maar één keer worden aangewezen (steekproef van een aantal uit een partij goederen).

Tenzij het tegendeel uitdrukkelijk wordt vermeld zullen wij in het volgende alleen steekproeven beschouwen waarvan de elementen kunnen worden opgevat als aselecte trekkingen met teruglegging uit de populatie. Dit is gelijkwaardig met de volgende definitie:

Definitie: Een aselecte steekproef ter grootte n van de stochastische variabele $\underline{x}$ is een vector $(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ van onafhankelijke stochastische variabelen, die alle dezelfde kansverdeling hebben als $\underline{x}$.

De simultane kansdichtheid van $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ is dus:

$$g(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1)\,.\,f(x_2)\,\ldots\,f(x_n),$$

als $f(x)$ de kansdichtheid van $\underline{x}$ is.

§ 16. Statistische grootheden

Zoals reeds in de inleiding van dit hoofdstuk werd opgemerkt is het doel van de statistiek uit een steekproef konklusies te trekken over de kansverdeling van de populatie. Deze konklusies kunnen ook betrekking hebben op de aard van de verdeling. Zo kan men zich bijv. afvragen of een steekproef afkomstig kan zijn uit een Poissonverdeling. In dit kollege zullen wij alleen gevallen bespreken waarbij de verdeling van de populatie bekend is op één of meer parameters na of waarbij het er om gaat parameters van verschillende verdelingen met elkaar te vergelijken.

De klassieke problemen op dit gebied zijn schattings- en toetsingsproblemen. De eerste groep wordt nog weer verdeeld in het geven van een puntschatting en een intervalschatting voor de parameters van een verdeling.

Bij al deze methoden werken we met functies van de uitkomsten in de steekproef. Zo ligt het voor de hand om het steekproefgemiddelde

$$\bar{\underline{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i$$

te gebruiken ter karakterisering van de verwachting of populatiegemiddelde $\mathcal{E}\,\underline{x}$. Zo'n funktie van $(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ heet een statistische grootheid (Engels: statistic).

§ 17. Puntschattingen

In veel kansverdelingen komen één of meer onbekende parameters voor, waarvoor we uit een steekproef een schatting willen berekenen. De statistische grootheid die we hiervoor gebruiken heet schatter.
De waarde die deze grootheid in een bepaalde steekproef aanneemt is de schatting van de onbekende parameter.
Willen we bijv. het gemiddelde μ van een verdeling schatten, dan is het steekproefgemiddelde $\bar{\underline{x}}$ een schatter en een realisering $\bar{x}$ hiervan een schatting voor μ.
Om de kwaliteiten van verschillende mogelijke schatters te kunnen vergelijken gaan we nu een aantal eigenschappen van schatters definiëren.

Definitie: Een schatter $T(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n)$ voor de populatiegrootheid θ heet zuiver (Engels: unbiased) als geldt:

$$\mathcal{E}\,T(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) = \theta.$$

Definitie: De onnauwkeurigheid van een schatter $\underline{T}$ voor θ wordt gegeven door

$$\sqrt{\mathcal{E}\,(T(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n) - \theta)^2} \ .$$

Opmerking: Voor een zuivere schatter is de onnauwkeurigheid gelijk aan de standaardafwijking.

Definitie: Als er twee schatters $\underline{T}_1$ en $\underline{T}_2$ voor θ zijn dan heet $\underline{T}_1$ nauwkeuriger dan $\underline{T}_2$ als de onnauwkeurigheid van $\underline{T}_1$ kleiner is dan die van $\underline{T}_2$.

Hoe is het nu gesteld met $\bar{\underline{x}}$ als schatter voor μ? In §12 werd reeds de stelling bewezen dat $\mathcal{E}\bar{\underline{x}} = \mu$ en $\sigma^2(\bar{\underline{x}}) = \frac{1}{n}\sigma^2$, als σ^2 de variantie van de kansverdeling is. Dus $\bar{\underline{x}}$ is een zuivere schatter voor μ en de onnauwkeurigheid van $\bar{\underline{x}}$ nadert tot nul voor $n \to \infty$.

Verder kunnen we nog de volgende stelling bewijzen.

Stelling: Het steekproefgemiddelde $\underline{\bar{x}}$ is de nauwkeurigste zuivere schatter voor het populatiegemiddelde van de gedaante

$$\underline{T} = a_1\underline{x}_1 + \ldots + a_n\underline{x}_n \ .$$

Bewijs: Wil $\underline{T}$ zuiver zijn, dan moet gelden

$$\mathcal{E}\,\underline{T} = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu = \mu \ , \text{ dus } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \ .$$

$$\sigma^2(\underline{T}) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \quad \text{(volgens § 11).}$$

Stel $a_i = \frac{1}{n} + \delta_i$ met, vanwege $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$: $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 0$.

$$\sigma^2(\underline{T}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} + \delta_i\right)^2 = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2\right).$$

Dit is minimaal als $\delta_i = 0$, dus $a_i = \frac{1}{n}$ $(i = 1,\ldots,n)$.

Willen we de variantie σ^2 schatten, gedefinieerd door $\mathcal{E}(\underline{x} - \mu)^2$, dan ligt het voor de hand, als μ bekend is, als schatter te nemen

$$\underline{s}_o^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\underline{x}_i - \mu)^2 \ .$$

Dit is een zuivere schatter voor σ^2, want $\mathcal{E}(\underline{x}_i - \mu)^2 = \sigma^2 (i = 1,\ldots,n)$. Meestal moet echter μ ook uit de steekproef worden geschat. Als nu in de formule voor $\underline{s}_0^2$ μ door $\underline{\bar{x}}$ wordt vervangen blijft de schatter niet zuiver. Wel is dit het geval als we als schatter de steekproefvariantie $\underline{s}^2$ nemen:

Definitie: De steekproefvariantie $\underline{s}^2$ wordt gedefinieerd door:

$$\underline{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\underline{x}_i - \underline{\bar{x}})^2 \ .$$

Stelling: $\mathcal{E}\,\underline{s}^2 = \sigma^2$, dus $\underline{s}^2$ is een zuivere schatter voor σ^2.

Bewijs: $\mathcal{E}\sum_{i=1}^{n}(\underline{x}_i - \overline{\underline{x}})^2 = \mathcal{E}\sum_{i=1}^{n}\{(\underline{x}_i - \mu) - (\overline{\underline{x}} - \mu)\}^2 =$

$$\mathcal{E}\sum_{i=1}^{n}(\underline{x}_i - \mu)^2 - 2\mathcal{E}\sum_{i=1}^{n}(\underline{x}_i - \mu)(\overline{\underline{x}} - \mu) + n\,\mathcal{E}(\overline{\underline{x}} - \mu)^2 =$$

$$\mathcal{E}\sum_{i=1}^{n}(\underline{x}_i - \mu)^2 - 2n\,\mathcal{E}(\overline{\underline{x}} - \mu)^2 + n\,\mathcal{E}(\overline{\underline{x}} - \mu)^2 =$$

$$= n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n} = (n-1)\sigma^2 .$$

Dus: $\mathcal{E}\,\underline{s}^2 = \frac{1}{n-1}\,\mathcal{E}\sum_{i=1}^{n}(\underline{x}_i - \overline{\underline{x}})^2 = \sigma^2.$

Opmerkingen:

1. Het is niet zo dat $\underline{s}$ een zuivere schatter is voor σ. Dit is eenvoudig in te zien door $\mathrm{var}(\underline{s})$ te beschouwen. Immers $\mathrm{var}(\underline{s})$ is positief en

   $$\mathrm{var}(\underline{s}) = \mathcal{E}\,\underline{s}^2 - (\mathcal{E}\,\underline{s})^2 = \sigma^2 - (\mathcal{E}\,\underline{s})^2 > 0.$$

   Dus $(\mathcal{E}\,\underline{s})^2 < \sigma^2$ en $\mathcal{E}\,\underline{s} < \sigma$.

2. Wil men uit een kleine steekproef ($n \leq 5$) uit een normale verdeling een schatting hebben van de standaardafwijking σ, dan wordt soms een andere methode gevolgd. Men bepaalt eerst het verschil tussen de grootste waarneming $\underline{x}_{(n)}$ en de kleinste waarneming $\underline{x}_{(1)}$. Dit verschil $\underline{w}$ heet de spreidingsbreedte (Engels: range):

   $$\underline{w} = \underline{x}_{(n)} - \underline{x}_{(1)} .$$

   Een schatter voor σ krijgt men nu door w met een faktor d_n te vermenigvuldigen, dus

   $$\hat{\underline{\sigma}} = d_n\underline{w} ,$$

   waarbij d_n wordt gevonden uit het volgende tabelletje :

steekproefgrootte n	d_n
2	0,886
3	0,591
4	0,486
5	0,430

Deze schatter is zuiver, echter alleen geldig voor de normale verdeling. Voor grotere n wordt de onnauwkeurigheid te groot tengevolge van het feit dat niet alle informatie uit de steekproef wordt gebruikt. Beschikken we over meerdere steekproeven van dezelfde grootte dan wordt $\hat{\sigma}$ berekend door de gemiddelde spreidingsbreedte $\overline{w}$ met d_n te vermenigvuldigen.

§ 18. Het toetsen van een hypothese

Het nemen van een steekproef heeft vaak tot doel om na te gaan of de populatie aan bepaalde eisen voldoet om daarna, afhankelijk van de uitslag van de waarnemingen een beslissing te nemen. Men wil bijvoorbeeld weten of een verandering in het produktieproces van gloeilampen de gemiddelde levensduur verandert, of door het gebruik van een andere pakmachine de spreiding van de gewichten van pakjes margarine wordt verminderd enz.

Wij zullen de in deze situatie gevolgde methode eerst bespreken voor het volgende geval: De stochastische variabele $\underline{x}$ heeft een normale verdeling met onbekend gemiddelde μ en bekende standaardafwijking σ. Op grond van een waargenomen waarde x moet worden beslist of de hypothese $\mu = \mu_o$ juist kan zijn. Het ligt voor de hand dat de hypothese $\mu = \mu_o$ zal worden verworpen als de gevonden waarde x ver van μ_o afwijkt.

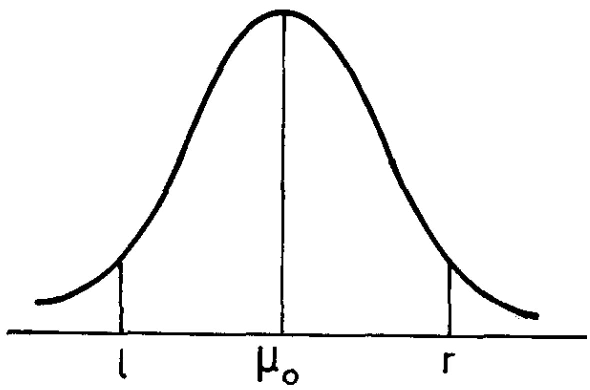


fig. 18.1

Er worden nu 2 grenzen ℓ en r gekozen (zie figuur 18.1). Als $x \leq \ell$ of als $x \geq r$ wordt de hypothese $\mu = \mu_o$ verworpen. In het geval $\ell < x < r$ wordt de hypothese niet verworpen. Dit heet het <u>toetsen van een hypothese</u>. De hypothese $\mu = \mu_o$ heet de <u>nulhypothese</u>, veelal aangeduid met H_o. De getallen ℓ en r heten de <u>kritieke waarden</u>.
De waarden $x \leq \ell$ en $x \geq r$ vormen het <u>kritieke gebied</u> of de <u>kritieke zone</u>. De kans dat H_o verworpen wordt als ze juist is wordt de onbetrouwbaarheid van de toets genoemd:

$$\alpha = P(\underline{x} \leq \ell \text{ of } \underline{x} \geq r \mid \mu = \mu_o).$$

De keuze van α is arbitrair. Gebruikelijke waarden zijn 0,05 of 0,01. Door de keuze van α worden r en ℓ vastgelegd, tenminste als ze symmetrisch t.o.v. μ_o worden gekozen. Uit de keuze α = 0,05 volgt bijv. $\ell = \mu_o - 1{,}96\ \sigma$ en $r = \mu_o + 1{,}96\ \sigma$.

Men kan de kans, dat H_o ten onrechte wordt verworpen, verkleinen door de kritieke waarden verder uit elkaar te nemen. Een eventuele afwijking van de nulhypothese wordt dan echter minder snel vastgesteld. Er kunnen namelijk twee soorten fouten worden gemaakt:

1) De nulhypothese verwerpen als ze juist is. Dit heet het maken van een <u>fout van de eerste soort</u>. De kans hierop is gelijk aan de onbetrouwbaarheid α.
2) De nulhypothese niet verwerpen als ze onjuist is. Dit is een <u>fout van de tweede soort</u>. De kans β hierop hangt af van de waarde van μ:

$$\beta = P(\ell < \underline{x} < r \mid \mu).$$

Het complement van de kans op een fout van de tweede soort, dus de kans $\omega = 1-\beta$ dat H_o wordt verworpen heet het <u>onderscheidingsvermogen van de toets</u>. In figuur 18.2 is het onderscheidingsvermogen van de boven beschreven toets getekend als functie van μ.

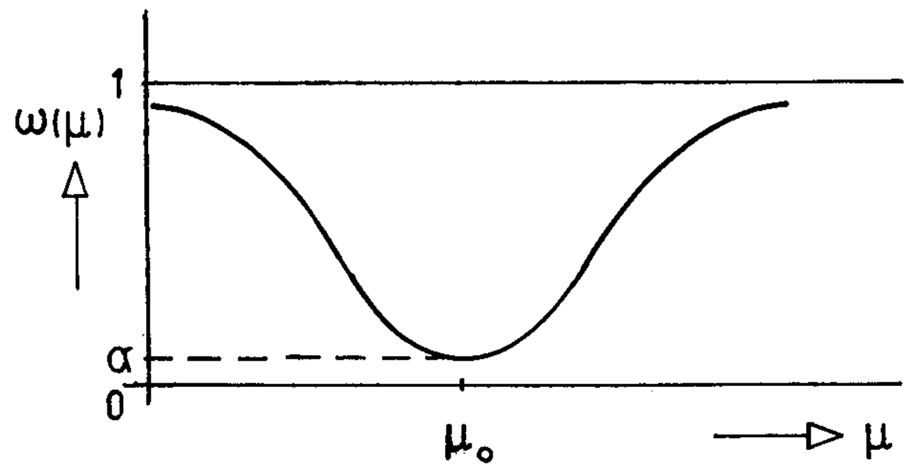


fig. 18.2

Bij gelijkblijvende α kan β worden verkleind, en dus het onderscheidingsvermogen ω worden vergroot, door als <u>toetsingsgrootheid</u> niet één waarneming $\underline{x}$ te nemen, maar het gemiddelde $\underline{\bar{x}}$ van een steekproef van n waarnemingen.

In § 12 werd bewezen dat als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk normaal verdeeld zijn met parameters resp. (μ_1,σ_1) en (μ_2,σ_2), elke lineaire combinatie $a.\underline{x} + b.\underline{y}$

ook normaal verdeeld is met verwachting $a\mu_1 + b\mu_2$ en variantie $a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$. Hieruit volgt door volledige inductie, of direct door toepassing van dezelfde bewijsmethode, onmiddellijk het analogon voor n variabelen $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$. Wij passen dit toe op het gemiddelde $\underline{\bar{x}}$ van een steekproef uit onze verdeling. Dit gemiddelde is dus normaal verdeeld met gemiddelde μ en variantie $\frac{\sigma^2}{n}$.

Bij $\alpha = 0{,}05$ worden de kritieke waarden dan

$$\ell = \mu_o - 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n} \text{ en } r = \mu_o + 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n}\ .$$

In de figuur 18.3 is het onderscheidingsvermogen getekend voor $\sigma = 1$ en enkele waarden van n.

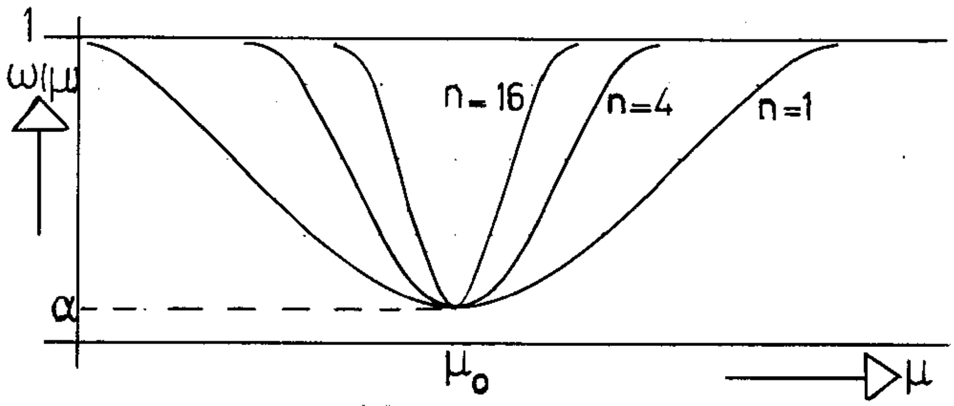


fig. 18.3

De hiervoor beschreven toets is tweezijdig, dat wil zeggen dat zowel afwijkingen van μ naar beneden als naar boven tot verwerping zullen leiden. Anders gezegd: de nulhypothese $\mu = \mu_o$ wordt getoetst tegen de alternatieve hypothese $\mu \neq \mu_o$. Er zijn situaties waarbij alleen afwijkingen naar één kant interessant of zelfs mogelijk zijn. Dit is bijvoorbeeld het geval wanneer moet worden onderzocht of een ander produktieproces de levensduur van het produkt verlengt. Nu wordt de hypothese $\mu = \mu_o$ getoetst tegen het alternatief $\mu > \mu_o$. Wanneer de nulhypothese niet kan worden verworpen wordt het bestaande produktieproces gehandhaafd, waarbij het niet van belang is of $\mu = \mu_o$ dan wel $\mu < \mu_o$. In dit geval is er maar één kritieke waarde. Bij $\alpha = 0{,}05$ is dit, onder de aanname van een normale verdeling,

$$r = \mu_o + 1{,}645\ \sigma/\sqrt{n}.$$

Bij <u>éénzijdige</u> toetsing kan, bij eenzelfde onbetrouwbaarheid, dus eerder tot verwerping van H_o worden besloten dan bij tweezijdige toetsing.

De hier besproken toets voor het gemiddelde van een normale verdeling met bekende σ kan ook worden toegepast voor het vergelijken van de gemiddelden van twee populaties met bekende spreiding. Stel dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ normaal verdeeld zijn met gemiddelden μ_1 en μ_2 en standaardafwijkingen σ_1 en σ_2.
De steekproefgemiddelden $\bar{\underline{x}}$ en $\bar{\underline{y}}$ van steekproeven ter grootte n_1 en n_2 zijn dan normaal verdeeld met verwachtingen μ_1 en μ_2 en standaardafwijkingen $\sigma_1/\sqrt{n_1}$ en $\sigma_2/\sqrt{n_2}$. Het verschil $\bar{\underline{x}} - \bar{\underline{y}}$ is ook normaal verdeeld. De verwachting $\mu_1 - \mu_2$ en de standaardafwijking $\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$.

Dit verschil $\bar{\underline{x}} - \bar{\underline{y}}$ kan dus als toetsingsgrootheid worden gebruikt voor de hypothese $H_o : \mu_1 = \mu_2$, ofwel $\mu_1 - \mu_2 = \mu_o = 0$.

Als de standaardafwijking niet bekend is, maar, evenals de verwachting, moet worden geschat uit de steekproef, wordt de normale toets vervangen door de zogenaamde "Student"-toets die hier echter niet kan worden besproken.

Er is nog een andere benaderingswijze mogelijk dan het alleen maar kijken of de toetsingsgrootheid, in ons geval $\bar{\underline{x}}$, al of niet in het kritieke gebied ligt. Bepaal, onder H_0, bij een realisatie $\bar{\underline{x}} = \bar{x}$, de volgende kansen:

$$P_1 = P[\bar{\underline{x}} \le \bar{x} \mid H_0] \quad \text{en} \quad P_2 = P[\bar{\underline{x}} \ge \bar{x} \mid H_0] \ .$$

Bij een <u>tweezijdige</u> toets is van belang $P = \text{MIN}(P_1, P_2)$: H_0 wordt verworpen als $P \le \frac{\alpha}{2}$.
Bij een <u>linkséénzijdige</u> toets wordt H_0 verworpen als $P_1 \le \alpha$,
bij een <u>rechtséénzijdige</u> toets wordt H_0 verworpen als $P_2 \le \alpha$.

P, resp. P_1 en P_2 worden <u>overschrijdingskansen</u> genoemd.

<u>Voorbeeld</u>

Een fabrikant van slaolie wil controleren of de machine die de flessen vult goed staat afgesteld. Op de flessen staat vermeld dat de netto inhoud 700 g bedraagt. Het is bekend dat de vulmachine werkt met een standaardafwijking van 5 g en er mag worden aangenomen dat de kansverdeling van de netto inhouden normaal is. Wij veronderstellen verder dat de fabrikant om een conflict met de Keuringsdienst voor Waren te vermijden, gemiddeld een overwicht van 5 g wil geven.

Om na te gaan of inderdaad met de gewenste instelling van 705 g wordt gewerkt wordt van 10 flessen de netto inhoud bepaald. Het gemiddelde van de 10 gevonden waarden is 704,3 g.

Bij een tweezijdige toets voor de hypothese $\mu = 705$ met onbetrouwbaarheid 0,05 zijn de kritieke waarden ($n = 10$):

$$\ell = 705 - 1{,}96 \frac{5}{\sqrt{10}} = 705 - 3{,}1 = 701{,}9$$

$$r = 705 + 1{,}96 \frac{5}{\sqrt{10}} = 705 + 3{,}1 = 708{,}1.$$

Bij het gevonden gemiddelde 704,3 kan de nulhypothese dus niet worden verworpen.

Een tweezijdige toetsing is hier op zijn plaats omdat de fabrikant zowel een afwijking naar beneden wil signaleren in verband met mogelijke klachten over ondergewicht als een afwijking naar boven om onnodige overwichten te kunnen corrigeren.

Een ambtenaar van de Keuringsdienst voor Waren daarentegen zal in de eerste plaats willen weten of de flessen niet te weinig bevatten.

Gaat hij van het standpunt uit dat de inhoud van de flessen voldoende is, tenzij het tegendeel is bewezen, dan toetst hij de hypothese: $\mu = 700$ tegen het alternatief $\mu < 700$. Bij een onbetrouwbaarheid van 5 % is de kritieke waarde

$$\ell' = 700 - 1{,}645 \frac{5}{\sqrt{10}} = 700 - 2{,}6 = 697{,}4.$$

Dat de hypothese niet wordt verworpen bij een gevonden gemiddelde van 704,3 was van te voren in te zien zonder ℓ' te berekenen.

Wij kunnen ons nu bijv. afvragen wat de kans is om met de laatstgenoemde toetsingsmethode een afwijking van 1 g van de nominale inhoud vast te kunnen stellen. We nemen dus aan dat $\mu = 699$. Er wordt ingegrepen als het gemiddelde van 10 flessen onder 697,4 ligt. Dit gemiddelde komt uit een verdeling met standaardafwijking $\frac{5}{\sqrt{10}} = 1{,}58$. De kritieke waarde ligt dus

$$\frac{699 - 697{,}4}{1{,}58} = 1{,}01$$

maal de standaardafwijking onder het gemiddelde. De kans dat deze waarde of een lagere wordt gevonden is 16 %. Omdat deze kans wel wat laag is, kunnen we vragen hoe groot de steekproef zou moeten zijn om een kans van 80 % te hebben de afwijking te vinden.
De kritieke waarde is weer te vinden met de formule

$$\ell = 700 - 1{,}645\,\frac{5}{\sqrt{n}}\ .$$

Dit moet gelijk zijn aan

$$699 + 0{,}842\,\frac{5}{\sqrt{n}}\ ,$$

omdat bij een normale verdeling met gemiddelde 0 en standaardafwijking 1 geldt:

$$P[\underline{x} \le 0{,}842] = 0{,}80.$$

Er geldt dus:

$$700 - 1{,}645\,\frac{5}{\sqrt{n}} = 699 + 0{,}842\,\frac{5}{\sqrt{n}}\ ,$$

of

$$1 = 2{,}487\,\frac{5}{\sqrt{n}}\ ,$$

$$\sqrt{n} = 12{,}435\ ,$$

$$n = 154{,}6\ .$$

De steekproefgrootte moet dus minstens 155 zijn om het gevraagde resultaat te bereiken.

§ 19. Betrouwbaarheidsintervallen

Beschouwen we nogmaals de situatie van de vorige paragraaf. Een normaal verdeelde stochastische variabele $\underline{x}$ met parameters μ en σ^2 (μ onbekend, σ^2 bekend), waaruit een aselecte steekproef $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$ wordt genomen.
Het gemiddelde $\underline{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i$ is normaal verdeeld met parameters μ en σ^2/n.

We hebben in paragraaf 18 de nulhypothese $H_o : \mu = \mu_o$ getoetst tegen verschillende alternatieven ($\mu \neq \mu_o$, $\mu > \mu_o$) met $\underline{\bar{x}}$ als toetsingsgrootheid. Beperken we ons nu tot de tweezijdige toetsing $H_o : \mu = \mu_o$ tegen $\mu \neq \mu_o$.

Veronderstel dat de waarde μ_o niet is gespecificeerd. Toch willen we op basis van de realisatie $\underline{\bar{x}} = \bar{x}$ iets zeggen over de werkelijke μ-waarde. De puntschatting $\bar{x}$ voor μ is een weinig bevredigende informatie omdat deze nooit exact gelijk is aan μ. Waarom zouden waarden in een omgeving van $\bar{x}$ ook niet een goede schatting zijn ?
Meer informatie kunnen we verkrijgen door alle μ-waarden ($-\infty < \mu < \infty$) bij deze gegeven realisatie $\underline{\bar{x}} = \bar{x}$ en een onbetrouwbaarheid α te toetsen. Er ontstaat dan een interval van μ-waarden die als nulhypothese bij deze $\underline{\bar{x}} = \bar{x}$ en α niet verworpen kunnen worden, terwijl de overige μ-waarden wel verworpen worden.
Populair gezegd: het interval bevat die μ-waarden, waarbij - naar onze maatstaven - het optreden van $\underline{\bar{x}} = \bar{x}$ ons nog aanvaardbaar voorkomt.

De steekproef is uitgevoerd en $\underline{\bar{x}}$ heeft de waarde $\bar{x}$ gekregen. Veronderstel dat we een $\mu = \mu_o$ hebben, die als nulhypothese door deze $\underline{\bar{x}} = \bar{x}$ niet verworpen wordt bij een onbetrouwbaarheid α. Dat wil zeggen: $\bar{x}$ ligt niet in het kritieke gebied bij $\mu = \mu_o$.

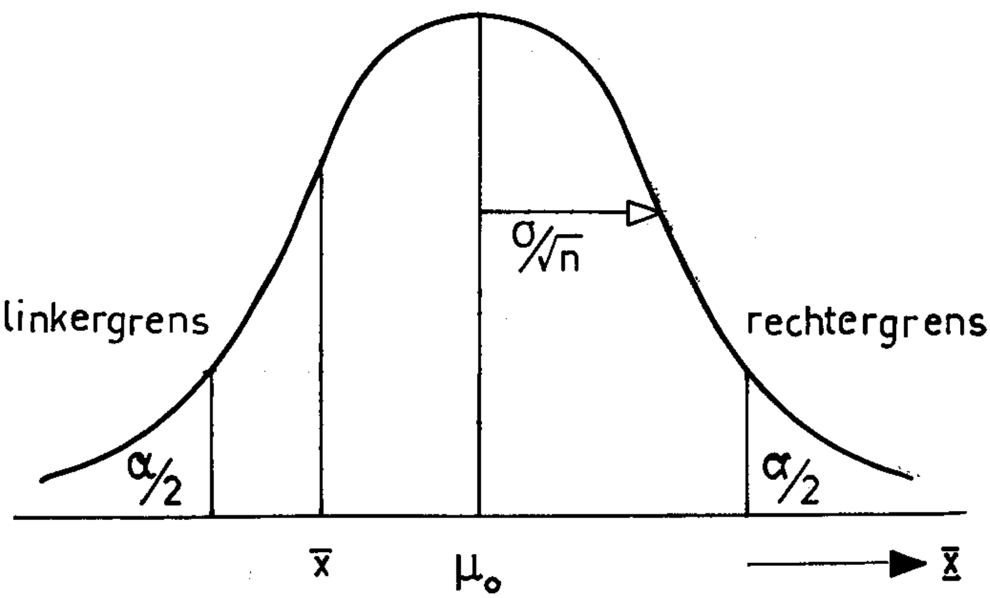


fig. 19.1

Indien we μ ten opzichte van μ_o laten toenemen, terwijl de σ constant blijft, zal de normale verdeling (van $\underline{\bar{x}}$) zich langs de as naar rechts verplaatsen. De "kansmassa", het centrum van de verdeling verplaatst zich, de "vorm" blijft hetzelfde. Ook de linker- en rechterkritieke grens verplaatsen zich evenveel naar rechts als μ omdat ze bij iedere μ (als nulhypothese getoetst) op een constante afstand $\pm$ u(α/2) . $\sigma/\sqrt{n}$ hiervan liggen (α en σ vast). Op een gegeven moment valt $\underline{\bar{x}} = \bar{x}$ samen met de linkerkritieke grens ℓ. Dat wil zeggen: $\bar{x}$ ligt voor het eerst in het kritieke gebied. Die μ-waarde, waarbij dit gebeurt wordt dus als nulhypothese op grond van $\underline{\bar{x}} = \bar{x}$ bij een onbetrouwbaarheid α verworpen. Noemen we deze $\mu = \mu_2$. Voor alle $\mu > \mu_2$ ligt $\underline{\bar{x}} = \bar{x}$ zeker in het kritieke gebied, indien deze μ als nulhypothese worden getoetst, zodat ze dan ook verworpen worden.

Analoog aan het bepalen van de rechtergrens μ_2 van het gezochte interval wordt de linkergrens μ_1 gevonden. Verklein μ ten opzichte van μ_o zover dat $\underline{\bar{x}} = \bar{x}$ samenvalt met de rechterkritieke grens r. Noem de bijbehorende $\mu = \mu_1$. Deze μ-waarde wordt - als nulhypothese - verworpen omdat $\bar{x}$ in het kritieke gebied ligt. Alle μ-waarden kleiner dan μ_1 worden als nulhypothesen eveneens verworpen.

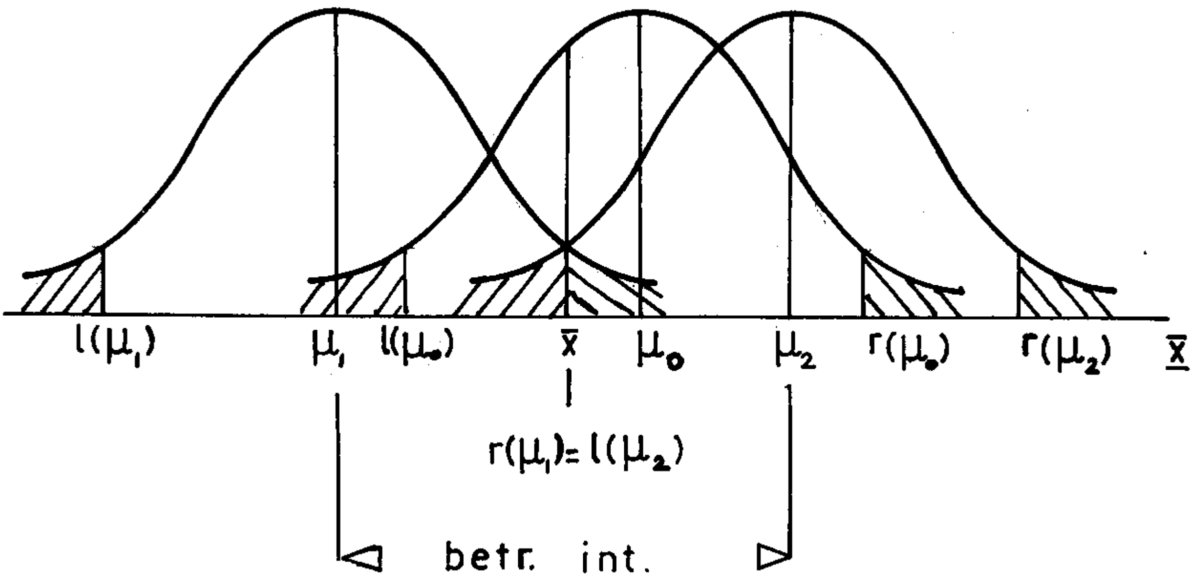


fig. 19.2

Constructie van het betrouwbaarheidsinterval

Het voorgaande luidt in formule:

Bepaal μ_1 zodanig dat

$$P[\underline{\bar{x}} \geq \bar{x} \mid \mu = \mu_1] = \alpha/2, \qquad \bar{x} = \text{rechterkritieke grens.}$$

Bepaal μ_2 zodanig dat

$$P[\underline{\bar{x}} \leq \bar{x} \mid \mu = \mu_2] = \alpha/2, \qquad \bar{x} = \text{linkerkritieke grens.}$$

Bijvoorbeeld bij $\alpha = 0{,}05$:

$$P[\underline{\bar{x}} \geq \bar{x} \mid \mu = \mu_1] = P[\underline{u} \geq \frac{\bar{x}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu = \mu_1] = 0{,}025,$$

waaruit $\bar{x} - \mu_1 = \sigma/\sqrt{n}\ .\ 1{,}96.$ $\boxed{\mu_1 = \bar{x} - 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n}}$

Evenzo wordt μ_2 : $\boxed{\mu_2 = \bar{x} + 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n}}$

Het resultaat is een interval van μ-waarden: $\mu_1 < \mu < \mu_2$.

We noemen dit interval een <u>betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid α</u>.

<u>Opmerkingen</u>

1) Op dezelfde manier als hiervoor een <u>tweezijdig</u> betrouwbaarheidsinterval tot stand komt, wordt een <u>éénzijdig</u> interval opgesteld (één begrenzing voor μ). Indien bijvoorbeeld $\mu = \mu_o$ getoetst wordt tegen $\mu < \mu_o$ met onbetrouwbaarheid α hebben we een linkséénzijdig kritiek gebied. Om nu de $\mu = \mu_2$ te vinden die, als nulhypothese, bij een gegeven $\underline{\bar{x}} = \bar{x}$ als eerste verworpen wordt (alle $\mu > \mu_2$ worden zeker verworpen), verschuiven we de verdeling van $\underline{\bar{x}}$ zo, dat $\bar{x}$ als linkerkritieke grens optreedt. Alle $\mu < \mu_2$, die het betrouwbaarheidsinterval vormen, worden als nulhypothese bij deze $\underline{\bar{x}} = \bar{x}$ met een eenzijdige toets niet verworpen.

2) Niet alleen bij de normale verdeling, maar bij elke verdeling, waarvan een bepaalde parameter θ met een of andere toetsingsgrootheid $\underline{t}$ wordt getoetst, kunnen we bij een realisatie $\underline{t} = t$ een dergelijk interval vinden.
Het is daarom zinvol een formele definitie van een betrouwbaarheidsinterval als volgt te geven:

Definitie: Een betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid α bestaat uit alle parameterwaarden θ die bij een gegeven realisatie t van de toetsingsgrootheid $\underline{t}$ met onbetrouwbaarheid α niet verworpen kunnen worden.

Samenvattend:

Tweezijdige toets van $H_o : \theta = \theta_o \Leftrightarrow$ tweezijdig betrouwbaarheidsinterval

Eenzijdige toets van $H_o : \theta = \theta_o \Leftrightarrow$ eenzijdig betrouwbaarheidsinterval

tegen $: \theta < \theta_o$ met bovengrens μ_2

Eenzijdige toets van $H_o : \theta = \theta_o \Leftrightarrow$ eenzijdig betrouwbaarheidsinterval

tegen $: \theta > \theta_0$ met ondergrens μ_1.

Terecht kan men zich afvragen waarom we in een dergelijk interval geïnteresseerd zijn. Welke informatie levert dit meer op, behalve een verzameling van niet verworpen parameterwaarden.
In § 17 is gesproken over puntschattingen. Zoals reeds opgemerkt, is een vervelende eigenschap van puntschattingen dat ze nooit precies gelijk zijn aan de te schatten parameter. Soms geeft men er daarom de voorkeur aan in plaats van één waarde, twee grenzen aan te geven waartussen - of één grens waarboven resp. waaronder - de parameter "met redelijke zekerheid" ligt. We zullen laten zien dat het hiervóór gevonden betrouwbaarheidsinterval voor dit doel goed kan worden gebruikt, waarbij een meer exacte betekenis aan de uitdrukking "met redelijke zekerheid" zal worden gegeven.

Het steekproefgemiddelde $\underline{\bar{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i$ is een zuivere schatter voor μ.

Bovendien is $\underline{\bar{x}}$ normaal verdeeld met parameters μ en σ^2/n.
We wensen twee grenzen, een tweezijdige intervalschatting voor μ.

Er geldt bij een bepaalde μ(onbekend) en σ(bekend):

$$P[\mu - 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n} < \underline{\bar{x}} < \mu + 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n}] = 0{,}95.$$

De ongelijkheid:

$$\mu - 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n} < \underline{\bar{x}}\ ,$$

is equivalent met:

$$\mu < \underline{\bar{x}} + 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n}\ .$$

Leeszaal
Centrale Bibliotheek
T.H. Eindhoven

En de ongelijkheid:

$$\underline{\bar{x}} < \mu + 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n}\ ,$$

is equivalent met

$$\mu > \underline{\bar{x}} - 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n}\ .$$

Door combinatie vinden wij dus:

$$P[\underline{\bar{x}} - 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n} < \mu < \underline{\bar{x}} + 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n}] = 0{,}95\ .$$

De betekenis hiervan is dat vóór de steekproef wordt getrokken er een kans van 0,95 bestaat dat dit stochastisch interval:

van $\underline{\bar{x}} - 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n}$ tot $\underline{\bar{x}} + 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n}$,

de onbekende, vaste, μ zal bevatten.
Hebben we nu een realisatie $\bar{x}$ van $\underline{\bar{x}}$ dan is het interval:

van $\bar{x} - 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n}$ tot $\bar{x} + 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n}$,

juist het eerder geconstrueerde betrouwbaarheidsinterval. Verondersteld is dat σ bekend is.
We zeggen nu dat de uitspraak:

$$\bar{x} - 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n},$$

een betrouwbaarheid van 0,95 of 95 % heeft.
Dat wil dus zeggen dat bij herhalingen van steekproefrealisaties de uitspraak eens op de 20 keer onjuist zal zijn, dat het gerealiseerde interval eens op de 20 keer de ware waarde μ niet bevat.

Het betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid α opgesteld bij $\underline{\bar{x}} = \bar{x}$ is dus een intervalschatting voor μ, waarvan "de redelijke zekerheid dat μ er in ligt", de betrouwbaarheid, $(1-\alpha)$ bedraagt.
Dit geldt bij elke verdeling $f(x;\theta)$, waarbij voor de parameter θ met een schatter $\underline{t}$ een betrouwbaarheidsinterval wordt opgesteld.

Voorbeeld:

Wil de fabrikant in het voorbeeld van de flessen slaolie, besproken in § 18 een betrouwbaarheidsinterval opstellen voor het onbekende gemiddelde μ met betrouwbaarheid 0,95 dan gaat dit als volgt. Er geldt

$$P[\mu - 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n} < \underline{\bar{x}} < \mu + 1{,}96\ \sigma/\sqrt{n}] = 0{,}95$$

waaruit het interval

$$\bar{x} - 1,96\ \sigma/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + 1,96\ \sigma/\sqrt{n}\ .$$

Het gevraagde interval wordt:

$$704,3 \pm 1,96 \frac{5}{\sqrt{10}} = 704,3 \pm 3,1 = 701,2 \text{ tot } 707,4.$$

Dit is een zogenaamd tweezijdig interval. De fabrikant wil namelijk zowel een ondergrens als een bovengrens weten.
Uit dit voorbeeld zal hierna blijken dat op volkomen gelijke wijze ook een eenzijdig betrouwbaarheidsinterval een interval blijkt te zijn, waarin de ware μ-waarde met "redelijke zekerheid" ligt.

Vervolg voorbeeld:
De ambtenaar van de Keuringsdienst voor Waren zal alleen belangstelling hebben voor een bovengrens. Als de geëiste betrouwbaarheid opnieuw 95 % is, dan is de redenering als volgt:

$$P[\underline{\bar{x}} > \mu - 1,645\ \sigma/\sqrt{n}] = 0,95\ ,$$

$$P[\mu < \underline{\bar{x}} + 1,645\ \sigma/\sqrt{n}] = 0,95\ .$$

De gevraagde bovengrens is in dit geval:

$$704,3 + 1,645\ 5/\sqrt{10} = 704,3 + 2,6 = 706,9.$$

De bovengrens in het eenzijdige geval is dus, zoals te verwachten was, kleiner dan de bovengrens van het tweezijdige interval. Deze laatste grens, 707,4, als bovengrens van een éénzijdig interval genomen, geeft hieraan een betrouwbaarheid 0,975 omdat

$$P[\underline{\bar{x}} > \mu - 1,96\ \sigma/\sqrt{n}] = 0,975.$$

Het interval $\mu < 706,9$ is een intervalschatting met een betrouwbaarheid 0,95.

§ 20. Toetsen en betrouwbaarheidsintervallen bij de binomiale verdeling

Iets gecompliceerder dan bij de normale verdeling is het toetsen van de hypothese $p = p_0$ voor de kans p op succes bij een binomiale verdeling met m trekkingen. We hebben hier namelijk te maken met een discrete verdeling waardoor, zoals zal blijken, niet altijd precies een bepaalde onbetrouwbaarheid kan worden bereikt.

Voorbeeld:

Een presidentskandidaat meent dat hij 65 % van de uitgebrachte stemmen zal krijgen. Hij laat dit toetsen door een bureau voor opinie-onderzoek. Dit bureau telt in een aselecte steekproef van 10 kiezers het aantal personen $\underline{k}$ dat op deze kandidaat wil stemmen.

Men wil toetsen $H_o : p = 0{,}65$,
tegen $H_a : p \neq 0{,}65$.

Evenals bij de normale verdeling is er ook hier een tweezijdig kritiek gebied. H_o wordt verworpen als $\underline{k} \geq r$ of $\underline{k} \leq \ell$, waarin ℓ resp. r de linker- en rechterkritieke grenswaarden zijn. Bij een te groot of te klein aantal voorstemmers wordt H_o "ongeloofwaardig".

De onbetrouwbaarheid van de toets is:

$$P[\underline{k} \leq \ell \text{ of } \underline{k} \geq r \mid p = 0{,}65] \leq \alpha.$$

Bij de normale verdeling bepalen we ℓ en r zodanig dat deze kans precies de door ons voorgeschreven waarde α bedraagt.
Door het discrete karakter van $\underline{k}$ moeten we ons tevreden stellen met ℓ en r waarden die deze kans, fout van de 1e soort, hoogstens gelijk aan α maken. Hierbij zij opgemerkt dat we niet toelaten dat de onbetrouwbaarheid groter dan α wordt.

Uitwerking van het voorbeeld:

A : $\alpha = 0{,}05$
$H_o : p = 0{,}65$
$H_a : p \neq 0{,}65$

Het betreft een geval van tweezijdige toetsing.

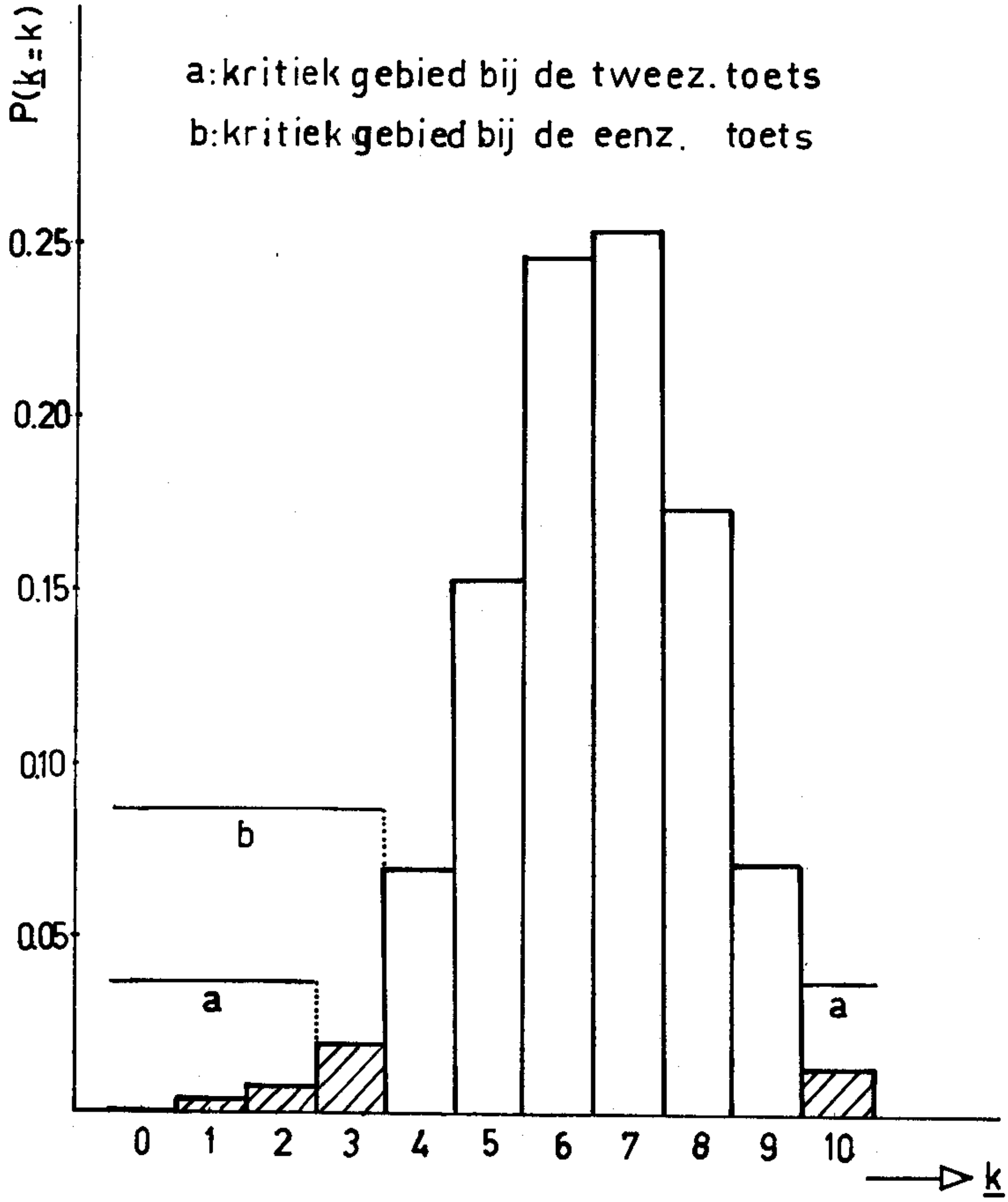


fig. 20.1
Kritieke gebieden bij het toetsen van $p = 0,65$

linkerkritieke grens:

$$P[\underline{k} \leq \ell \mid p = 0,65] \leq 0,025.$$

Tabel 5.2 $\ell = 2$ (tabellen in compendium)

$$P[\underline{k} \leq 2 \mid p = 0,65] = 0,0048 << 0,025.$$

Opmerking: $\ell \neq 3$ want $P[\underline{k} \leq 3 \mid p = 0,65] = 0,026 > 0,025$.

rechterkritieke grens:

$P[\underline{k} \geq r \mid p = 0{,}65] \leq 0{,}025.$

Tabel 5.2 $\quad r = 10$

$P[\underline{k} \geq 10 \mid p = 0{,}65] = P[\underline{k} = 10 \mid p = 0{,}65] = 0{,}0135 < 0{,}025.$

Opmerking: $r \neq 9$ want $P[\underline{k} \geq 9 \mid p = 0{,}65] = 0{,}086 > 0{,}025.$

Onbetrouwbaarheid:

$P[\underline{k} \leq 2 \vee \underline{k} \geq 10] = 0{,}0183 << 0{,}05$ = de maximaal toelaatbare onbetrouwbaarheid.

Indien de presidentskandidaat van mening is dat hij minstens 65 % van de uitgebrachte stemmen krijgt zal het opiniebureau de toetsing van deze mening éénzijdig uitvoeren.

B : $\alpha = 0{,}05$

$H_o : p \geq 0{,}65$

$H_a : p < 0{,}65.$

Uitsluitend bij een "te klein" aantal vóór-stemmers in de steekproef van 10 kiezers wordt H_o ongeloofwaardig.

linkerkritieke grens:

$P[\underline{k} \leq \ell \mid p = 0{,}65] \leq 0{,}05.$

Tabel 5.2 $\quad \ell = 3$

$P[\underline{k} \leq 3 \mid p = 0{,}65] = 0{,}026 < 0{,}05$

Onbetrouwbaarheid: $P[\underline{k} \leq 3 \mid p = 0{,}65] = 0{,}026.$

Opmerking: Het kritieke gebied bij $p = 0{,}65$ bestaat uit $\underline{k} \leq 3$. Dat wil zeggen dat de kans op de uitkomst $\underline{k} \leq 3$ onder $p = 0{,}65$ - de onbetrouwbaarheid - hoogstens gelijk aan 0,05 is. Bij p-waarden met $p > 0{,}65$ zal deze onbetrouwbaarheid $= P[\underline{k} \leq 3 \mid p = p_o > 0{,}65]$ kleiner zijn dan bij $p = 0{,}65$. Dientengevolge worden ook deze p-waarden bij een realisatie van $\underline{k}$, met $\underline{k} \leq 3$, verworpen. H_o wordt in zijn geheel bij $\underline{k} \leq 3$ verworpen.

C : Overschrijdingskans

$\alpha = 0{,}05.$

Ook de overschrijdingskans kan als criterium worden gehanteerd.
Stel dat de realisatie van de steekproef $\underline{k} = 3$ heeft opgeleverd.

Volgens de definities op blz. 56 is

$$P_1 = P[\underline{k} \leq 3 \mid p = 0{,}65] = 0{,}0260 \ ,$$

$$P_2 = P[\underline{k} \geq 3 \mid p = 0{,}65] = 0{,}9952$$

en

$$P = \mathrm{MIN}(P_1,P_2) = P_1 = 0{,}026 \ .$$

$P = 0{,}026 > 0{,}025 = \alpha/2$ zodat in het geval van de tweezijdige toets geen reden tot twijfel aan H_0 is.
$P_1 = 0{,}026 < 0{,}05 = \alpha$ zodat in het geval van de (links) éénzijdige toets reden tot twijfel aan H_0 is. Verwerpen van H_0.

In het algemeen worden bij een tweezijdige toets met onbetrouwbaarheid α de ℓ en r, en bij een eenzijdige toets met onbetrouwbaarheid α de ℓ resp. de r zo bepaald dat:

Tweezijdig	Eenzijdig
$P[\underline{k} \leq \ell \mid p = p_0] \leq \alpha/2$	$P[\underline{k} \leq \ell \mid p = p_0] \leq \alpha$
en	respectievelijk
$P[\underline{k} \geq r \mid p = p_0] \leq \alpha/2$	$P[\underline{k} \geq r \mid p = p_0] \leq \alpha$

Keuze van de toets is geheel afhankelijk van de nul- en alternatieve hypothese, waarbij $\underline{k}$ het aantal successen in een steekproef ter grootte m is.
De methode der overschrijdingskans luidt algemeen:
Bepaal bij een realisatie $\underline{k} = k$:

$$P_1 = P[\underline{k} \leq k \mid p = p_0], \quad P_2 = P[\underline{k} \geq k \mid p = p_0] \text{ en}$$

$$P = \mathrm{MIN}(P_1,P_2).$$

Vergelijk P met $\alpha/2$ bij een tweezijdige toets: als $P \leq \alpha/2$ is, wordt H_0 verworpen. Bij een linkséénzijdige resp. rechtséénzijdige toets wordt H_0 verworpen als $P_1 \leq \alpha$ resp. $P_2 \leq \alpha$ is.

Betrouwbaarheidsintervallen

Evenals bij de normale verdeling is het in het geval van de binomiale verdeling mogelijk bij een gegeven realisatie van het aantal successen $\underline{k} = k$.

in m herhalingen, een betrouwbaarheidsinterval op te stellen. Hierin liggen volgens de definitie alle p-waarden, die met onbetrouwbaarheid α op basis van de waarde k voor de toetsingsgrootheid $\underline{k}$ niet verworpen kunnen worden. Tweezijdige en eenzijdige toets corresponderen met een tweezijdig $p_1 < p < p_2$ respectievelijk eenzijdig ($p > p_1$ *of* $p < p_2$) betrouwbaarheids-interval.

Tweezijdig betrouwbaarheidsinterval

Ter illustratie behandelen we een concreet geval. In een steekproef ter grootte m = 10 zijn $\underline{k}$ = 5 successen gevonden. Bepaal de grenzen p_1 en p_2 ($p_1 < p_2$) van het betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid 0,05.

Voor p = P[succes] = 0,05 en p = P[succes] = 0,95 wordt in fig. 20.2 de kansverdeling van de grootheid $\underline{k}$ gegeven.
Indien p toeneemt "verschuift" de kansverdeling over de mogelijke $\underline{k}$-waarden naar rechts, dat wil zeggen: de grote kanswaarden komen bij grotere k-waarden te liggen. Dit is equivalent met het gevolg van de toenemende μ bij de normale verdeling. De "kansmassa" verschuift daar over de Re-as (= mogelijkhedenverzameling) naar rechts.

Op een bepaald moment zal $p = p_2$ zo groot zijn, dat de gerealiseerde $\underline{k}$ = 5 precies de linkerkritieke grens zou vormen, indien $p = p_2$ als nulhypothese met onbetrouwbaarheid 0,05 werd getoetst.

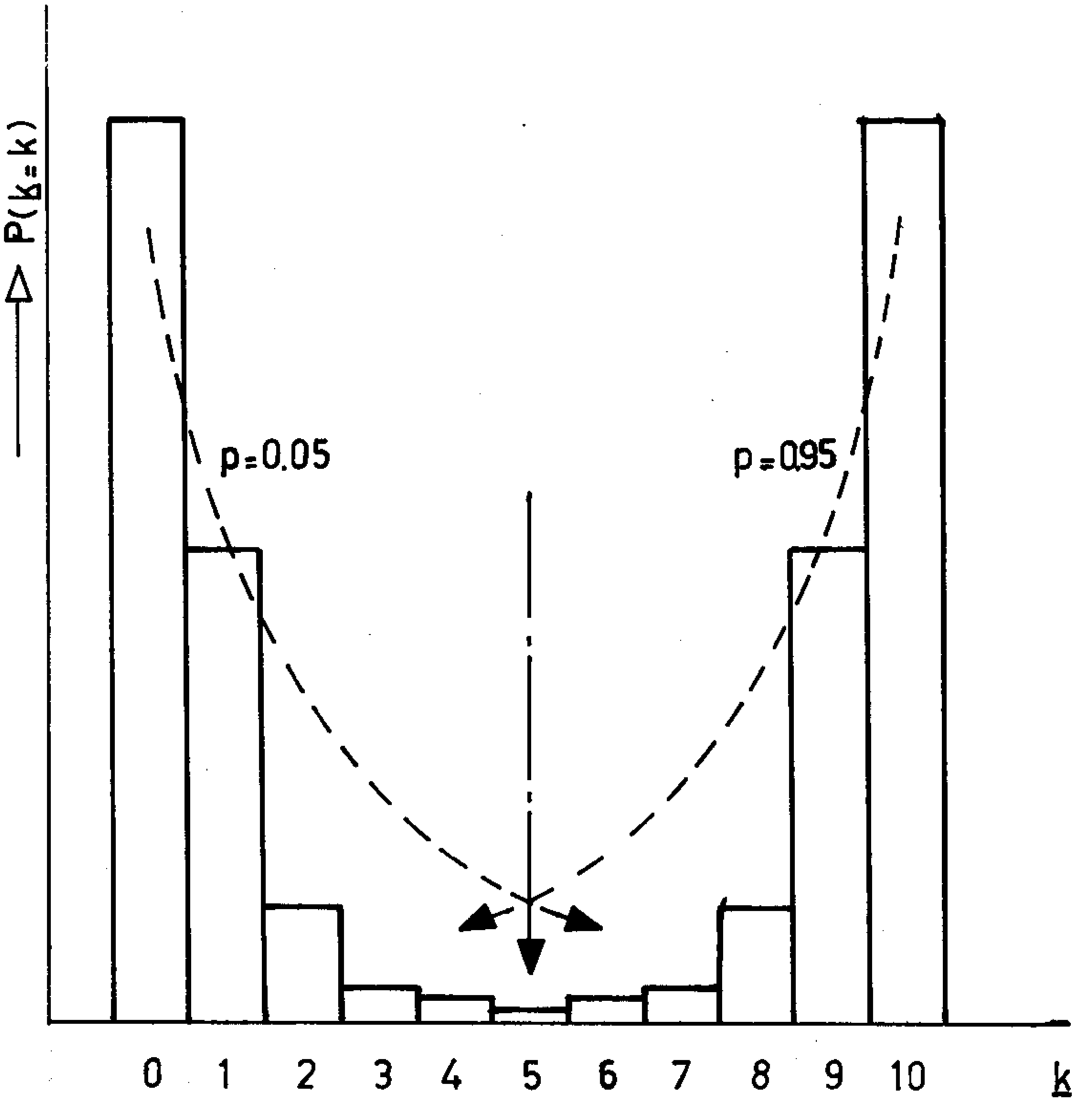


fig. 20.2

Kansverdeling over $\underline{k}$ bij p = 0,05 resp. 0,95 en m = 10

$$P[\underline{k} \leq 5 \mid p = p_2,\ m = 10] = 0{,}025$$

Met interpolatie volgt uit tabel 5.2 van het compendium:

$$\boxed{p_2 = 0{,}817}$$

$$P[\underline{k} \leq 5 \mid p = 0{,}817,\ m = 10] = 0{,}025.$$

Evenzo wordt p_1 gevonden. Bij afnemende p "verschuift" de kansverdeling over de mogelijke k-waarden naar links en op een gegeven moment, als $p = p_1$, vormt $\underline{k} = 5$ precies de rechterkritieke grens.

$$P[\underline{k} \geq 5 \mid p = p_1,\ m = 10] = 0{,}025.$$

Met interpolatie volgt uit tabel 5.2 van het compendium:

$$\boxed{p_1 = 0,183}$$

$$P[\underline{k} \geq 5 \mid p = 0,183,\ m = 10] = 0,025.$$

Het betrouwbaarheidsinterval voor p bij m = 10, $\underline{k}$ = 5 en α = 0,05 wordt:

$$\boxed{0,183 < p < 0,817}$$

In fig. 20.3 is de constructie in beeld gebracht.

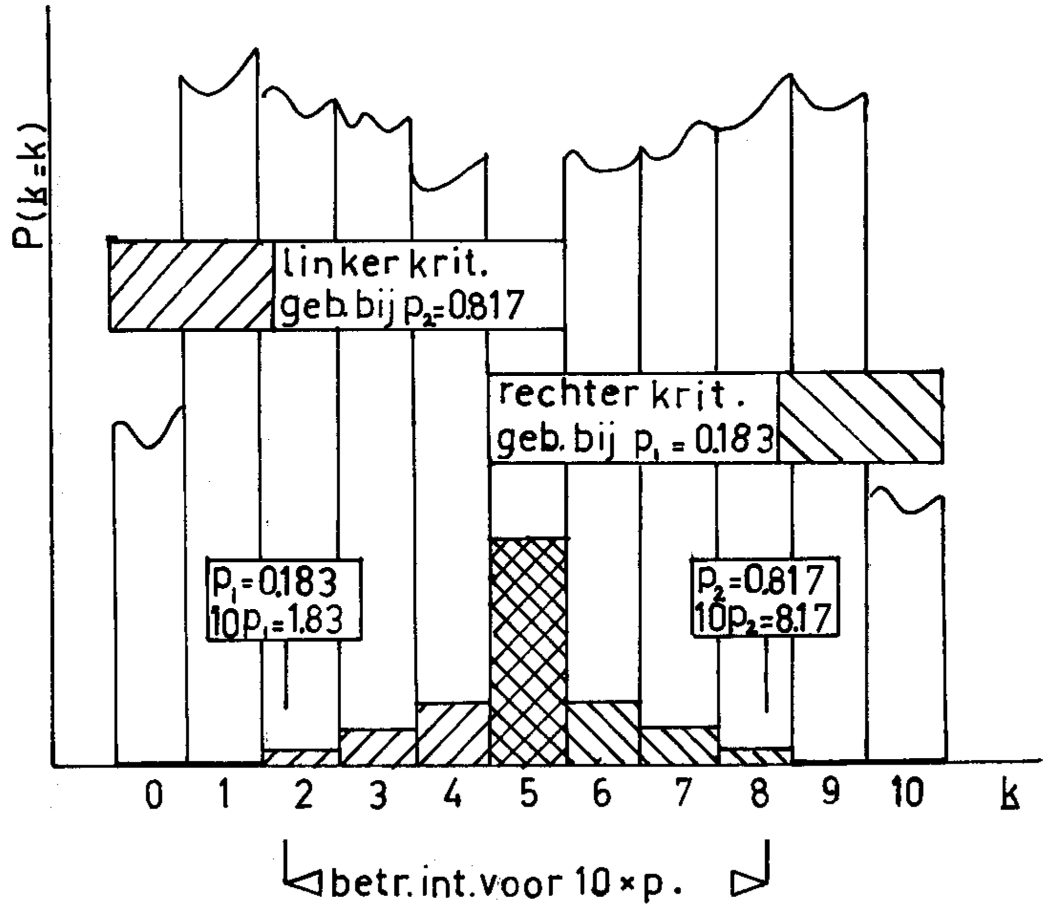


fig. 20.3

Opmerkingen

1) Alle p-waarden met $p < p_1$ of $p > p_2$ behoren niet tot het betrouwbaarheidsinterval omdat ze als nulhypothese bij m = 10, $\underline{k}$ = 5 en α = 0,05 verworpen worden; $\underline{k}$ = 5 behoort voor al deze p-waarden tot het kritieke gebied.

Voor p-waarden in de "directe omgeving" van p_1 of p_2 en niet in het betrouwbaarheidsinterval kan $\underline{k} = 5$ bij toetsing van deze p-waarden toch als kritieke grens optreden. We mogen evenwel deze p-waarden ($< p_1$ of $> p_2$) niet als begrenzing voor het betrouwbaarheidsinterval nemen omdat het bij toetsing ontstane deel van de onbetrouwbaarheid < 0,025 is. De p_1 en p_2 worden juist geconstrueerd zodanig dat dit gelijk is aan 0,025.

2) Het eenzijdige betrouwbaarheidsinterval ontstaat op analoge wijze. Het heeft een bovengrens als de bijbehorende toets linkseenzijdig is, en een ondergrens als de toets rechtseenzijdig is.

Het voorbeeld

$m = 10 \qquad \underline{k} = 5 \qquad \alpha = 0{,}05$

$P[\underline{k} \leq 5 \mid p = p_2] = 0{,}05$

Met interpolatie volgt uit tabel 5.2 van het compendium

$$\boxed{p_2 = 0{,}781}$$

waardoor het betrouwbaarheidsinterval wordt

$$\boxed{p < 0{,}781}$$

Algemeen beschreven wordt een betrouwbaarheidsinterval als volgt opgesteld bij een steekproefgrootte m, aantal successen $\underline{k} = k$ en α:

	Tweezijdig	Eenzijdig
p_1	$P[\underline{k} \geq k \mid p = p_1] = \alpha/2$	$P[\underline{k} \geq k \mid p = p_1] = \alpha$
	en	respectievelijk
p_2	$P[\underline{k} \leq k \mid p = p_2] = \alpha/2$	$P[\underline{k} \leq k \mid p = p_2] = \alpha$

Rest nu de vraag:
Mogen we het betrouwbaarheidsinterval - met betrouwbaarheid $(1-\alpha)$ - $p_1 < p < p_2$ interpreteren als een intervalschatting?
Is de uitspraak over de werkelijke p-waarde, $p_1 < p < p_2$, betrouwbaar?
Noodzakelijk hiervoor is dat vóór realisatie van de steekproef, er een kans is, minstens gelijk aan de betrouwbaarheid $1-\alpha$, dat een interval gevonden wordt waarin de werkelijke p-waarde ligt.

We schetsen als illustratie voor alle k-waarden bij m = 10 en α = 0,05 de betrouwbaarheidsintervallen.

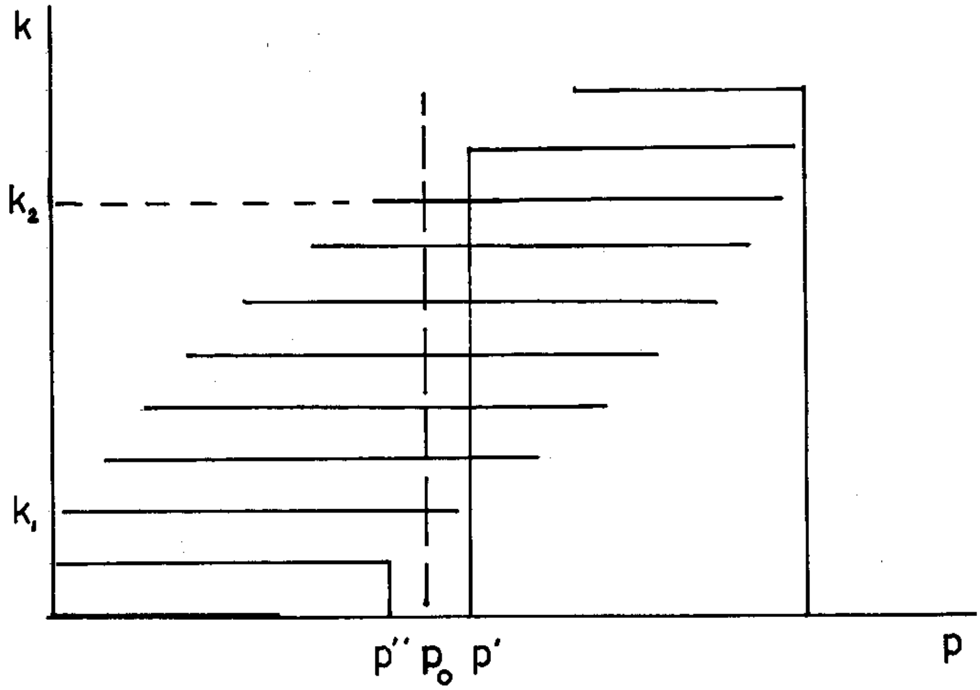


fig. 20.4

Stel dat de ware parameterwaarde p_o is. Volgens figuur 20.4 ligt p_o in de betrouwbaarheidsintervallen behorend bij k_1 tot en met k_2. Dat de kans op deze aantallen:

$P[k_1 \leq \underline{k} \leq k_2 \mid p_o] > 1 - \alpha$ is constateren we nu als volgt.

De ondergrens p' van het bij k_2+1 behorend interval is zo gekozen dat

$$P[\underline{k} \geq k_2 + 1 \mid p = p'] = P[\underline{k} > k_2 \mid p = p'] = \alpha/2.$$

Maar $p_o < p'$, dus

$$P[\underline{k} > k_2 \mid p = p_o] < \alpha/2.$$

Aan de andere kant geldt voor de bovengrens van het bij k_1-1 behorend interval

$$P[\underline{k} \leq k_1 - 1 \mid p = p''] = P[\underline{k} < k_1 \mid p = p''] = \alpha/2.$$

Maar $p_o > p''$ dus

$$P[\underline{k} < k_1 \mid p = p_o] < \alpha/2$$

waarmede

$$P[\underline{k} < k_1 \vee \underline{k} > k_2 \mid p = p_o] < \alpha$$

en

$$P[k_1 \leq \underline{k} \leq k_2 \mid p = p_o] > 1 - \alpha$$

zodat er een kans groter dan 1-α is op een interval dat de werkelijke p-waarde bevat.
Het betrouwbaarheidsinterval met betrouwbaarheid 1-α is een "goede" intervalschatting.

Appendix (Wiskunde 31)

Gammafunktie

De gammafunktie van Euler $\Gamma(r)$ wordt voor $r > 0$ gedefinieerd door

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty v^{r-1}\, e^{-v} dv\ . \qquad (1)$$

Deze oneigenlijke integraal (limiet van $\int_0^t v^{r-1}\, e^{-v} dv$ die de onvolledige gammafunktie wordt genoemd) berekenen we door partiële integratie. Dan volgt:

$$\Gamma(r) = (r-1)\,\Gamma(r-1) \qquad (r-1>0)\ . \qquad (2)$$

En omdat $\Gamma(1) = 1$ volgt voor natuurlijke r:

$$\Gamma(r) = (r-1)! \qquad (3)$$

Dit geeft ons de mogelijkheid om de definitie van n! ook voor niet natuurlijke n uit te breiden door (1). Bijvoorbeeld:

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \int_0^\infty \sqrt{v}\, e^{-v} dv = \int_0^\infty 2y^2\, e^{-y^2} dy \qquad (\sqrt{v} = y)$$

en

$$\{\Gamma(\tfrac{3}{2})\}^2 = (\int_0^\infty \sqrt{v}\, e^{-v} dv) \times (\int_0^\infty \sqrt{u}\, e^{-u} du) = \int_0^\infty \int_0^\infty 4x^2y^2\, e^{-(x^2+y^2)} dxdy =$$

$$= 4 \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} r^4 \cos^2\varphi\ \sin^2\varphi\ e^{-r^2}\, r d\varphi =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\ \sin^2\varphi d\varphi . \tfrac{1}{2} \int_0^\infty r^4\, e^{-r^2}\, dr^2 =$$

$$= 4\ .\ \frac{1.1}{4.2}\ .\ \frac{\pi}{2}\ .\ \frac{1}{2}\,\Gamma(3) = \frac{\pi}{4}\ ,$$

zodat

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \text{ (want } \Gamma(\tfrac{3}{2}) > 0) = \tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

en dus $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Betafunktie

De Betafunktie van Euler wordt gedefinieerd door

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \quad \text{voor } p > 0 \text{ en } q > 0 . \tag{4}$$

Stelling:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} . \tag{5}$$

Bewijs: (voor p,q natuurlijk)

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \quad (t = \sin^2\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/2)$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\varphi.\cos^{2q-1}\varphi d\varphi =$$

$$= 2 . \frac{(2p-2)!!\ (2q-2)!!}{(2p+2q-2)!!} . 1 \quad \text{(zie Wiskunde 20 pag. X.12)}$$

$$= \frac{(p-1)!\ (q-1)!}{(p+q-1)!} = \frac{\Gamma(p)\ \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} .$$

Eventueel bewijs van (5):

$$\Gamma(p).\Gamma(q) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx . \int_0^\infty y^{q-1}e^{-y}dy \quad (x \to x^2,\ y \to y^2)$$

$$= 4\int_0^\infty x^{2p-1}e^{-x^2}dx . \int_0^\infty y^{2q-1}e^{-y^2}dy =$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy \quad (x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi)$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} e^{-r^2}r^{2(p+q-1)}\cos^{2p-1}\varphi\ \sin^{2q-1}\varphi\ rd\varphi dr =$$

$$= 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q-1)} dr^2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\varphi \, \sin^{2q-1}\varphi d\varphi \quad (\sin^2\varphi = t)$$

$$= \Gamma(p + q) \, . \int_0^1 (1 - t)^{p-1} t^{q-1} dt = \Gamma(p + q).B(q,p) = \Gamma(p + q)B(p,q).$$

Gammaverdeling

We definiëren voor $\lambda > 0$ en $r > 0$

$$\Gamma(x;\lambda,r) := \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^x \lambda^r t^{r-1} e^{-\lambda t} dt \qquad (0 \le x < \infty) \, . \tag{6}$$

Dit zullen we een gammaverdeling noemen met parameters λ en r. Dit wordt gerechtvaardigd door

$$\Gamma' = \gamma(x;\lambda,r) = \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x} \ge 0 \tag{7}$$

en door

$$\Gamma(\infty;\lambda,r) = 1, \quad \Gamma(0;\lambda,r) = 0 \, .$$

Heeft $\underline{x}$ een gammaverdeling, dan is zoals gebruikelijk

$$P(\underline{x} \le x) = \Gamma(x;\lambda,r) \, .$$

We bepalen de Laplace getransformeerde van de dichtheidsfunktie van $\underline{x}$:

$$\varphi_{\underline{x}}(s) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty t^{r-1} \lambda^r e^{-(\lambda+s)t} dt =$$

$$= \frac{\lambda^r}{(\lambda + s)^r} \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \{(\lambda + s)t\}^{r-1} e^{-(\lambda+s)t} d((\lambda + s)t) =$$

$$= \frac{\lambda^r}{(\lambda + s)^r} \, ,$$

en vervolgens de verwachting van $\underline{x}$, en de variantie.

$$\mathcal{E}\underline{x} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty \lambda^r t^r e^{-\lambda t} dt = \frac{\Gamma(r+1)}{\lambda\Gamma(r)} = \frac{r}{\lambda} \tag{8}$$

$$\mathcal{E}\underline{x}^2 = \frac{\Gamma(r+2)}{\lambda^2\Gamma(r)} = \frac{r(r+1)}{\lambda^2}$$

zodat

$$\mathrm{var}(\underline{x}) = \sigma^2(\underline{x}) = \frac{r}{\lambda^2}\ .$$

De kansdichtheid $\gamma(x;\lambda,r)$.

We bepalen voor r natuurlijk de modus van de kansdichtheid, dit is de waarde van x waarvoor $\gamma(x;\lambda,r)$ maximaal is.

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x}(-\lambda x^{r-1} + (r-1)x^{r-2}) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-2} \frac{((r-1) - \lambda x)}{e^{\lambda x}}$$

zodat voor $r \geq 2$ in $x = 0$ een minimum

en in $x = \frac{r-1}{\lambda}$ een maximum optreedt, (9)

en voor $r = 1$ een maximum in $x = 0$ wordt aangenomen.

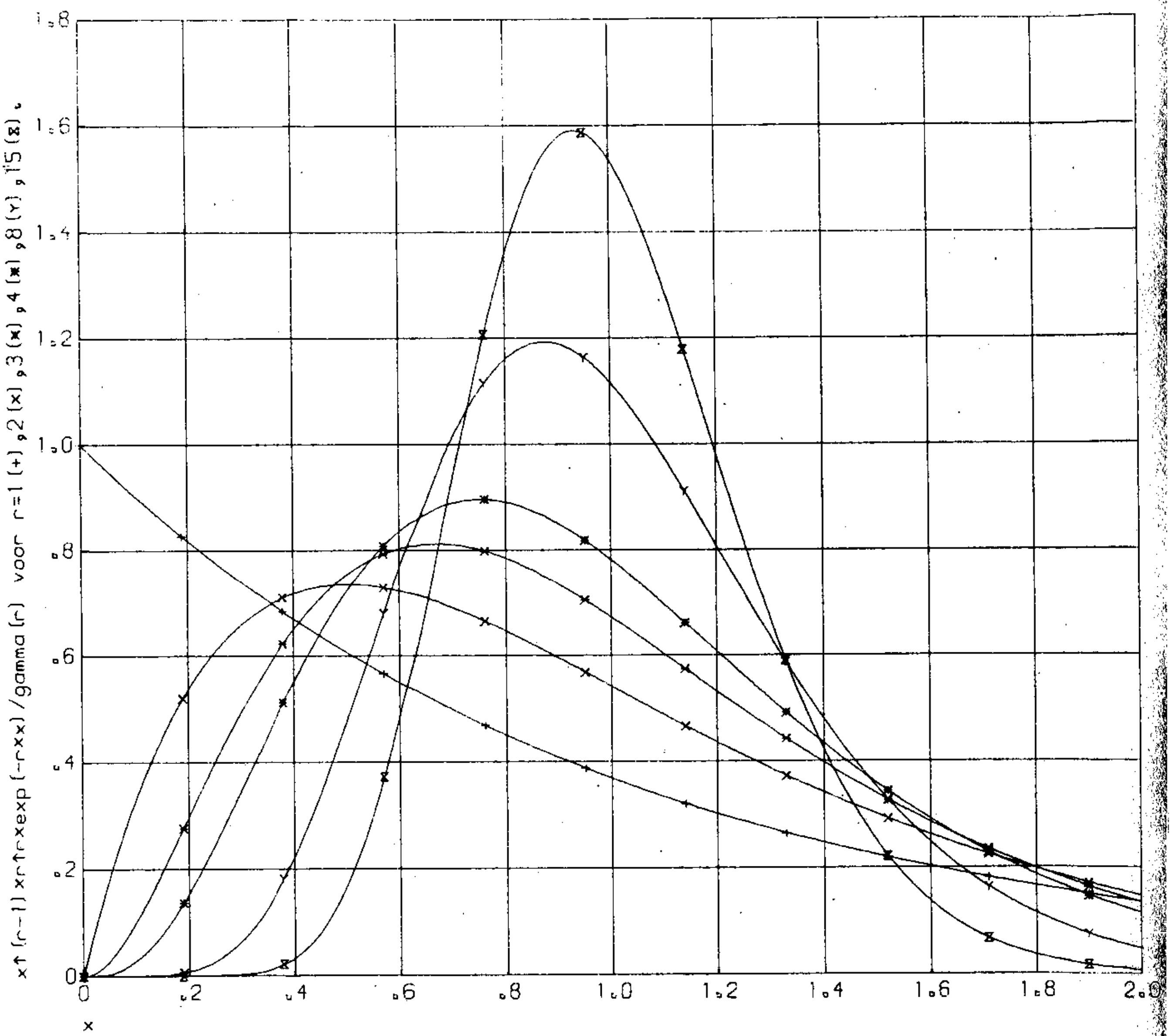
N.B. Bij een eentoppige symmetrische verdeling zoals bijv. de normale verdeling vallen het zwaartepunt $\mathcal{E}\underline{x}$, de top (of modus) en de mediaan samen. Bij een scheve verdeling zoals de gammaverdeling of de exponentiële (d.i. een gammaverdeling met $r = 1$) meestal niet.
Een vuistregel is dat men bij een willekeurige eentoppige scheve verdeling, waarbij mean, median en mode verschillend zijn, de x-coördinaten van mean ($\mathcal{E}\underline{x}$), median en mode vindt in alfabetische volgorde als de verdeling een "lange staart" heeft naar links, of net andersom bij een lange staart naar rechts zoals bijv. bij de Γ verdeling.
We zullen zodra we de mediaan bepalen zien dat daarvoor geldt:

$$\frac{r-1}{\lambda} < \text{median} < \frac{r}{\lambda}\ .$$

We gaan een aantal grafieken tekenen van de kansdichtheid bij verschillende waarden van r en beperken ons voorlopig tot verdelingen met gemiddelde 1 waarbij dus $\lambda = r$.

De plotter van de EL-X8 levert ons de grafieken van

$$\gamma(x;r,r) = \frac{1}{\Gamma(r)}\, x^{r-1} r^{r} e^{-rx} \quad \text{voor } r = 1,2,3,4,8,15 \;.$$



Merk op dat de top (modus) samenvalt met $x = \frac{r-1}{r}$ en dat de verdeling bij toenemende r meer symmetrisch wordt.

De grafiek van de kansdichtheid bij $r = 8$ en $\lambda = 4$ is uit $\gamma(x;8,8)$ als volgt te verkrijgen. Het gemiddelde wordt nu 2 zodat de x-coördinaten met 2 worden vermenigvuldigd maar de hoogte wordt gehalveerd.

Algemeen geldt:

$$\gamma(\tfrac{xr}{\lambda};\lambda,r) = \frac{\lambda}{r}\,\gamma(x;r,r)$$

en

$$x\gamma(x;\lambda,r) = \frac{r}{\lambda}\,\gamma(x;\lambda,r+1) \ ,$$

een relatie die al bij (8) is gebruikt.
In opgave 13.11 wordt de verdeling gevraagd van $\underline{x} + \underline{y}$ als $\underline{x}$ en $\underline{y}$ exponentieel en onafhankelijk verdeeld zijn (met dezelfde λ).
We geven drie oplossingen:

i) $$F(t) = P(\underline{x} + \underline{y} \le t) = \int_0^t dx \int_0^{t-x} f(x)f(y)dy = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t} \ .$$

Door diff. volgt:

$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \qquad (0 \le t < \infty) \ .$$

ii) M.b.v. de convolutie (pag. 41)

$$f(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \,.\, \lambda e^{-\lambda(t-x)} dx = \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^t 1 dx = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \ .$$

iii) M.b.v. de Laplace getransformeerde

$$\varphi_{\underline{x}}(s) = \int_0^\infty \lambda e^{-x(\lambda+s)} dx = \frac{\lambda}{\lambda + s} \int_0^\infty e^{-t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + s} \ .$$

Dus

$$\varphi_{\underline{x}+\underline{y}}(s) = \varphi_{\underline{x}}(s) \,.\, \varphi_{\underline{y}}(s) = \frac{\lambda^2}{(\lambda + s)^2} \ .$$

Dit is de Laplace getransformeerde van $\gamma(t;\lambda,2)$.

Toepassing van iii) op $\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_r$ levert de volgende
<u>Conclusie</u> (Zie Appendix E van dictaat Bedrijfseconometrie):

De som van r onafhankelijke exponentiële verdelingen $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_r$ (allen met $\mu = \frac{1}{\lambda}$, $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$) is een Γ verdeling met

$$\mathcal{E}(\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \ldots + \underline{x}_r) = \frac{r}{\lambda} \quad \text{en} \quad \sigma^2(\underline{x}_1 + \ldots + \underline{x}_r) = \frac{r}{\lambda^2} \ .$$

Leeszaal
Centrale Bibliotheek
T.H. Eindhoven

Som van twee gammaverdelingen.

De vraag per maand $\underline{x}$, die continu wordt verondersteld, volgt een Γ verdeling $\Gamma(x;\lambda,r)$. Dan is ook de vraag in twee maanden Γ verdeeld.

Want

zij $\underline{x}_1$ de vraag in de 1e maand

en $\underline{x}_2$ de vraag in de 2e maand,

dan is

$$\varphi_{\underline{x}_1}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^r = \varphi_{\underline{x}_2}(s) .$$

Zij $\underline{t} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2$ de vraag in twee maanden, dan

$$\varphi_{\underline{t}}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^{2r},$$

dus

$$P(\underline{t} \le t) = \Gamma(t;\lambda,2r) . \tag{10}$$

Opmerking:

Het bewijs van (10) zonder Laplace getransformeerde. Bepaal f(t) met de convolutie:

$$f(t) = \left(\frac{1}{\Gamma(r)}\right)^2 \int_0^t \lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x} \, . \, \lambda^r (t - x)^{r-1} e^{-\lambda(t-x)} dx =$$

$$= \frac{\lambda^{2r} e^{-\lambda t}}{\Gamma^2(r)} \int_0^t x^{r-1}(t - x)^{r-1} dx \qquad \left(\frac{x}{t} = \tau\right)$$

$$= \frac{\lambda^{2r} e^{-\lambda t} t^{2r-1}}{\Gamma^2(r)} \int_0^1 \tau^{r-1}(1 - \tau)^{r-1} d\tau =$$

$$= \lambda^{2r} e^{-\lambda t} t^{2r-1} \, . \, \frac{B(r,r)}{\Gamma(r).\Gamma(r)} \qquad \text{(met (4))}$$

$$= \frac{\lambda^{2r} e^{-\lambda t} t^{2r-1}}{\Gamma(2r)} \qquad \text{(met (5))}$$

$$= \gamma(t;\lambda,2r) . \qquad \text{(met (7))}$$

De vraag per maand is Γ verdeeld ($\underline{y}$), dan is ook de vraag per dag ($\underline{x}$), per week en in bijv. 5.9 maanden Γ verdeeld als we aannemen dat de vraag per dag gelijk verdeeld en onafhankelijk is.
Want

$$\varphi_{\underline{y}}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^r = \varphi_{\underline{x}_1+\underline{x}_2+\ldots+\underline{x}_{30}}(s) = \{\varphi_{\underline{x}}(s)\}^{30} ,$$

zodat

$$\varphi_{\underline{x}}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^{r/30} .$$

Conclusie:

Als de vraag per tijdvak Γ verdeeld is, is de vraag over elk ander rationaal veelvoud van dat tijdvak Γ verdeeld. Zonder bewijs nemen we aan dat dit ook algemeen waar is.

N.B. Er geldt niet: als de vraag per maand Γ verdeeld is, dat dan de vraag over een stochastisch tijdvak Γ verdeeld is. Voorbeeld: stel de levertijd voor een bepaald product is 1 maand met kans ½ en 2 maanden met kans ½. De vraag per maand is Γ verdeeld. Ga na dat de vraag gedurende de levertijd niet Γ verdeeld is.

Gebruik van tabel 3.1a (Statistisch Compendium, blz. 40a).

De gammaverdeling wordt uitgebreid toegepast o.a. bij levensduur, bij voorraad- of vervangingsproblemen. De populariteit komt voor een deel voort uit het feit dat bij een willekeurige eentoppige scheve verdeling, door geschikte keuze van de parameters λ en r, een gammaverdeling kan worden aangepast waarbij de verwachting en de variantie overeenstemmen.
Om niet een heel boek te moeten gebruiken voor de gammatabel, nml. bij elke r en λ een andere tabel, zullen we net zoals bij de normale verdeling standaardiseren.
Hier kunnen we alleen bereiken (door vermenigvuldiging met $\frac{\lambda}{r}$) dat het gemiddelde gelijk aan één wordt. De spreiding blijft variabel.
Heeft $\underline{x}$ een gammaverdeling $\Gamma(x;\lambda,r)$ dan heeft $\underline{v} = \frac{\lambda \underline{x}}{r}$ ook een gammaverdeling $\Gamma(v;r,r)$ met $\mathcal{E}\underline{v} = \frac{r}{r} = 1$ en $\sigma^2(\underline{v}) = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}$.

Want

$$P(\underline{v} \le v) = P(\frac{\lambda \underline{x}}{r} \le v) = P(\underline{x} \le \frac{rv}{\lambda}) = \Gamma(\frac{rv}{\lambda};\lambda,r) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\frac{rv}{\lambda}} \lambda^r t^{r-1} e^{-\lambda t} dt \qquad (t = \frac{r}{\lambda}\,\tau)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{v} r^r \tau^{r-1} e^{-r\tau} d\tau = \Gamma(v;r,r) \ .$$

We hebben dus alleen een tabel nodig voor de gammaverdeling van $\underline{v}$ (met $\mathcal{E}\underline{v} = 1$) waarbij we om numerieke redenen $\sigma = \frac{1}{\sqrt{r}}$ als ingang (i.p.v. r of r^{-1}) gekozen hebben.

Voorbeeld:

Zij $\underline{x}$ gamma verdeeld met parameters $\lambda = 4$, $r = 16$.

a) Gevraagd de kritieke waarde van x zodat $P(\underline{x} < x) = 90\%$.

Oplossing:

Bepaal x zodat $\Gamma(x;4,16) = 90\%$.

$\Gamma(x;4,16) = \Gamma(\frac{4x}{16};16,16)$, dan volgt uit de tabel bij $r^{-\frac{1}{2}} = 0.25$ dat $\frac{4x}{16} = 1.33$, dus $x = 5.32$.

b) Bereken $P(\underline{x} < 6)$.

Oplossing:

$$P(\underline{x} < 6) = \Gamma(6;4,16) = \Gamma(\frac{24}{16};16,16) = \Gamma(1.5;16,16) = 0.963.$$

Nog enige opmerkingen over de gammatabel.

a) De tabel is zo geconstrueerd dat lineaire interpolatie in een kolom een antwoord geeft dat in twee decimalen correct is.

b) Hoewel voor $r \ge 16$ een gammaverdeling globaal te benaderen is door een normale (zie grafiek $\gamma(x;\lambda,15)$) zitten de grootste afwijkingen in de staart. Daarom zijn de waarden voor $\frac{1}{\sqrt{r}} < 0.25$ toch vermeld.

Speciaal is $r = \infty$ (hoewel statistisch zonder betekenis) gegeven om te kunnen interpoleren voor zeer grote waarden van r.

c) Deze tabel komt qua indeling overeen met die welke is gegeven in het dictaat Bedrijfseconometrie op pag. 167. De percentagepunten zijn opnieuw en nauwkeuriger berekend.

d) Eén rij, nml. die met $r = 1$, is m.b.v. tabel 9.5 (exponentiële verdeling) onmiddellijk te verifiëren.

e) Is men geinteresseerd in lagere percentagepunten dan 0.90 dan moet men zijn toevlucht nemen tot de χ^2-verdeling (Chi-kwadraat als één symbool te beschouwen) (formule χ^2 op pag. 12, tabel op pag. 40 van het Compendium).

Voorbeeld:

Bepaal x zodat $\Gamma(x;2,5) = 0.50$.

Oplossing:

$$\Gamma(x;2,5) = \Gamma(2x;1,5) = P(\chi^2_{10} < 4x).$$

Uit tabel 3.1 volgt $4x = 9.34$, dus $x = 2.34$ = mediaan.

We wisten al dat $\mathcal{E}\underline{x} = 2.50$ (met (8))

en de modus = 2.00 (met (9)),

zodat mode < median < mean (zie blz. 78).

<u>*Samenhang tussen Poissonverdeling en exponentiële verdeling.*</u>

Zij $\underline{x}_T$ het aantal gebeurtenissen in een tijdsinterval ter lengte T en $\underline{t}$ de lengte van het tijdsinterval tussen twee opeenvolgende gebeurtenissen. Dan:

$$\left.\begin{array}{l}\underline{x}_T \text{ is Poisson verdeeld met} \\ \text{parameter } \mu T \text{ (waarin } \mu = \\ \mathcal{E}\text{(aantal gebeurtenissen per} \\ \text{tijdseenheid))} .\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\underline{t} \text{ is exponentieel verdeeld} \\ \text{met parameter } \mu .\end{array}\right.$$

Bewijs "$\Longrightarrow$" (zie blz. 26):

$P(\underline{t} > t) = P(\text{aantal gebeurtenissen (in een tijdsinterval ter lengte } t) = 0) =$

$$= e^{-\mu t}\,\frac{(\mu t)^0}{0!} = e^{-\mu t} = 1 - F(t) \qquad (t \geq 0) .$$

Dus

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \mu e^{-\mu t} & (t \geq 0) . \end{cases}$$

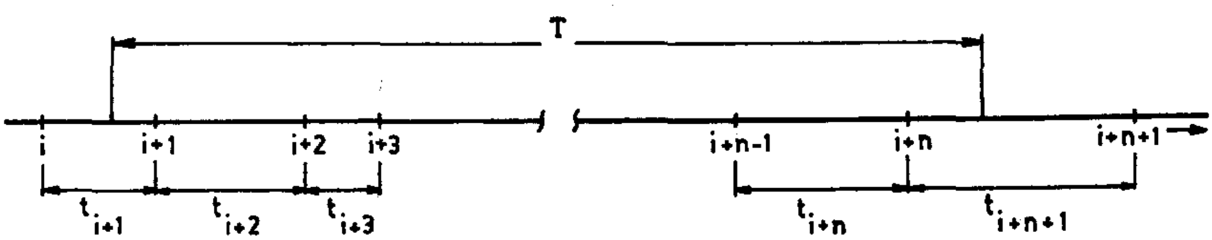
Bewijs "$\Longleftarrow$" (m.b.v. Laplace getransformeerde):

Uit $$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \mu e^{-\mu t} & (t \geq 0) \end{cases}$$

volgt

$$\varphi_{\underline{t}}(s) = \mathcal{E}e^{-s\underline{t}} = \int_0^\infty \mu e^{-(\mu+s)t}\,dt = \frac{\mu}{\mu + s} .$$

Beschouwen we nu een tijdsinterval ter lengte T. We berekenen de kans op maximaal n gebeurtenissen in dit interval: $P(\underline{x}_T \leq n)$.



Zij $\underline{t}_{i+k}$ de lengte van het tijdsinterval tussen de $(i+k-1)^e$ en de $(i+k)^e$ gebeurtenis en

$$\underline{u}_{n+1} = \underline{t}_{i+1} + \underline{t}_{i+2} + \ldots + \underline{t}_{i+n+1} \,.$$

Wegens de onafhankelijkheid van $\underline{t}_{i+1},\ldots,\underline{t}_{i+n+1}$ is de Laplace getransformeerde van $\underline{u}_{n+1}$:

$$\varphi_{\underline{u}_{n+1}}(s) = \left(\frac{\mu}{\mu + s}\right)^{n+1} \qquad \text{(zie blz. 40)},$$

waaruit voor de kansdichtheid g_{n+1} van $\underline{u}_{n+1}$ volgt (zie blz. 77):

$$g_{n+1}(u) = \frac{1}{n!}\,\mu^{n+1}u^n e^{-\mu u} \qquad (u \geq 0) \,.$$

Dus

$$P(\underline{u}_{n+1} > T) = \frac{1}{n!}\int_T^\infty \mu^{n+1}u^n e^{-\mu u}du = I_n \,.$$

Omdat geldt:

$$\underline{u}_{n+1} > T \iff \underline{x}_T \leq n$$

is

$$P(\underline{x}_T \leq n) = P(\underline{u}_{n+1} > T) = I_n \,.$$

Dan

$$P(\underline{x}_T = n) = P(\underline{x}_T \leq n) - P(\underline{x}_T \leq n-1) = I_n - I_{n-1} =$$

$$= \frac{-1}{n!}\int_T^\infty (\mu u)^n\, d(e^{-\mu u}) - \frac{1}{(n-1)!}\int_T^\infty \mu^n u^{n-1} e^{-\mu u}du =$$

$$= \left[-\frac{1}{n!}(\mu u)^n e^{-\mu u}\right]_T^\infty = \frac{(\mu T)^n e^{-\mu T}}{n!} \qquad (n = 1,2,\ldots) \,,$$

$$P(\underline{x}_T = 0) = I_0 = \int_T^\infty \mu e^{-\mu u}du = \left[-e^{-\mu u}\right]_T^\infty = e^{-\mu T} \,.$$

Een eigenschap van de exponentiële verdeling (zie blz. 17).

$$P(\underline{t} > t+s \mid \underline{t} > s) = \frac{P(\underline{t} > t+s)}{P(\underline{t} > s)} = \frac{\int_{t+s}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt}{\int_{s}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} =$$

$$= e^{-\lambda t} = P(\underline{t} > t)$$

d.w.z.: de kans dat het apparaat nog functioneert op tijdstip t + s, onder de voorwaarde dat het nog functioneert op tijdstip s, is onafhankelijk van s. M.a.w. op elk tijdstip s (waarop het apparaat nog werkt) is de kansverdeling van de (resterende) levensduur dezelfde als de "oorspronkelijke" kansverdeling. Er treedt geen veroudering of slijtage op (Lack of memory).
"Zolang het apparaat nog werkt, is het geheel nieuw".
We berekenen nog de voorwaardelijke verwachting van de levensduur.
De voorwaardelijke kansdichtheid is:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < s \\ \dfrac{f(t)}{\int_s^{\infty} f(t)dt} = \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda s}} = \lambda e^{-\lambda(t-s)} & \text{voor } t \geq s \end{cases} .$$

Dus

$$\mathcal{E}(\underline{t} \mid \underline{t} > s) = \int_s^{\infty} \lambda t e^{-\lambda(t-s)} dt = - \int_s^{\infty} t \, de^{-\lambda(t-s)} =$$

$$= s + e^{\lambda s} \int_s^{\infty} e^{-\lambda t} dt = s + \frac{1}{\lambda} ,$$

of

$$\mathcal{E}(\underline{t} \mid \underline{t} > s) = s + \mathcal{E}(\underline{t}) .$$

Omgekeerd: als voor een continue stochastische grootheid $\underline{t}$ geldt

(α) $P(\underline{t} < 0) = 0$

(β) $P(\underline{t} > t+s \mid \underline{t} > s) = P(\underline{t} > t)$ (voor alle $t,s \geq 0$)

dan is $\underline{t}$ exponentieel verdeeld.

Bewijs: Schrijf $1 - F(t) = P(\underline{t} > t) = p(t)$ dan luidt (β):

$$p(t + s) = p(t)\, p(s) \qquad (t,s \geq 0)$$

of

$$p(t_1 + t_2) = p(t_1)\, p(t_2) \qquad (t_1,t_2 \geq 0)\ .$$

Maar dan is $p(t_1 + t_2 + t_3) = p(t_1)\, p(t_2 + t_3) = p(t_1)\, p(t_2)\, p(t_3)$ enz..
Met volledige inductie (Wiskunde 10, blz. III.1):

(β') $p(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) = p(t_1)\, p(t_2) \ldots p(t_n)$ $(t_1,\ldots,t_n \geq 0,\ n \geq 1)$.

Stel nu dat er een getal $s > 0$ is met $p(s) = 1$, dan volgt uit (β'):

$$p(ns) = \{p(s)\}^n = 1 \qquad \text{voor } n = 1,2,\ldots$$

of $F(ns) = 0$, wat in strijd is met $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$.

Stel er bestaat een getal $s > 0$ met $p(s) = 0$, dan volgt uit (β'):

$$0 = p(s) = \{p(\tfrac{s}{n})\}^n, \text{ dus } p(\tfrac{s}{n}) = 0 \text{ voor } n = 1,2,\ldots$$

of $F(\frac{s}{n}) = 1$, wat in strijd is met (α) en de continuïteit van $F(t)$.
We concluderen:

$$0 < p(t) < 1 \qquad \text{voor alle } t > 0.$$

Stel $p(1) = a$, dan volgt uit (β'):

$$p(n) = \{p(1)\}^n = a^n$$

$$p(\tfrac{1}{m}) = a^{\frac{1}{m}} \qquad (a = p(1) = \{p(\tfrac{1}{m})\}^m)$$

$$p(\tfrac{n}{m}) = \{p(\tfrac{1}{m})\}^n = a^{\frac{n}{m}}\ .$$

Om $p(t_0)$ te bepalen voor niet-rationale t_0, construeren we een rij van rationale $u_1,u_2,\ldots$ met $\lim_{n\to\infty} u_n = t_0$.

Daar p(t) continu is (immers F(t) is continu) geldt

$$p(t_0) = \lim_{n\to\infty} p(u_n),$$

zodat

$$p(t) = a^t \quad \text{voor alle } t \geq 0 .$$

Met $\lambda = -\log a$ (dus $\lambda > 0$), volgt

$$F(t) = 1 - p(t) = 1 - (e^{\log a})^t = 1 - e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0) ,$$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) . \end{cases}$$

Hiermee is bewezen dat het exponentiële kansveld het <u>enige</u> continue kansveld is dat de eigenschappen (α) en (β) bezit.

<u>Het (discrete) geometrische kansveld</u>:

$$P(\underline{x} = n) = p(1 - p)^{n-1} \quad (0 < p < 1,\ n = 1,2,\ldots)$$

heeft overeenkomstige eigenschap:

$$P(\underline{x} > n + m \mid \underline{x} > m) = \frac{P(\underline{x} > n + m)}{P(\underline{x} > m)} = \frac{\sum_{\ell=n+m+1}^{\infty} p(1 - p)^{\ell-1}}{\sum_{\ell=m+1}^{\infty} p(1 - p)^{\ell-1}} =$$

$$= \frac{(1 - p)^{n+m}}{(1 - p)^m} = (1 - p)^n = P(\underline{x} > n)$$

(voor alle nat. n,m).

Zo ook:

$$\mathcal{E}(\underline{x} \mid \underline{x} > m) = \frac{\sum_{\ell=m+1}^{\infty} \ell . p(1 - p)^{\ell-1}}{\sum_{\ell=m+1}^{\infty} p(1 - p)^{\ell-1}} .$$

Hierin is:

$$p \sum_{\ell=m+1}^{\infty} \ell(1 - p)^{\ell-1} = p \frac{d}{d(1-p)} \sum_{m+1}^{\infty} (1-p)^{\ell} = -p \frac{d}{dp} \{\frac{(1 - p)^{m+1}}{p}\} =$$

$$= (1 - p)^m \, (m + 1 + \frac{1}{p} - 1) \; ,$$

zodat

$$\mathcal{E}(\underline{x} \mid \underline{x} > m) = m + \frac{1}{p} = m + \mathcal{E}(\underline{x}) \qquad (m \geq 0) \; .$$

Omgekeerd: Als voor een discrete stochastische grootheid $\underline{x}$ geldt

$$P(\underline{x} \leq 0) = 0$$

$$P(\underline{x} = n) > 0 \qquad (n = 1,2,\dots)$$

$$P(\underline{x} > n + m \mid \underline{x} > m) = P(\underline{x} > n) \qquad (\text{voor alle nat. } n,m)$$

dan is $\underline{x}$ geometrisch verdeeld.
Bewijs: Schrijf $P(\underline{x} > n) = p_n$.
Uit

$$p_{n+m} = p_n \, p_m$$

volgt

$$p_n = (p_1)^n \; .$$

Stel

$$P(\underline{x} = 1) = p$$

dan

$$p_1 = P(\underline{x} > 1) = 1 - p$$

zodat

$$p_n = (1 - p)^n \; .$$

Nu

$$P(\underline{x} = n) = P(\underline{x} > n - 1) - P(\underline{x} > n) = p_{n-1} - p_n =$$

$$= (1 - p)^{n-1} - (1 - p)^n = p(1 - p)^{n-1} \qquad (n = 1,2,\dots) .$$

$p \neq 1$, want uit $p_1 = 0$ volgt $P(\underline{x} > n) = 0$ voor alle nat. n, wat in strijd is met het gegeven.
$p \neq 0$, want uit $p_1 = 1$ volgt $P(\underline{x} > n) = 1$ voor alle nat. n, wat eveneens in strijd is met het gegeven.

De overeenkomst in het bezit van de eigenschap "lack of memory" voor de geometrische en exponentiële verdeling is wel te verwachten.
We demonstreren dit door een vergroving in te voeren in het exponentiële kansveld. We zijn nu niet meer geinteresseerd in de vraag: hoe groot wordt $\underline{t}$, het tijdstip waarop het apparaat ophoudt te functioneren precies, maar

slechts in de vraag: in welk interval valt dat tijdstip.
Daartoe voeren we een (discrete) stochastische grootheid $\underline{x}$ in, zodanig dat $\underline{x} = n$ $(n = 1,2,\ldots)$ correspondeert met $(n-1)s < \underline{t} \le ns$ (s constant, willekeurig).
Dan is

$$P(\underline{x} = n) = P((n-1)s < \underline{t} \le ns) = \int_{(n-1)s}^{ns} \lambda e^{-\lambda t} dt =$$

$$= e^{-(n-1)\lambda s} - e^{-n\lambda s} = e^{-(n-1)\lambda s}(1 - e^{-\lambda s}) \; .$$

Stellen we $P(\underline{t} \le s) = 1 - e^{-\lambda s} = p_s$, dan $0 < p_s < 1$ wegens $\lambda s > 0$, zodat

$$P(\underline{x} = n) = p_s(1 - p_s)^{n-1} \quad (n = 1,2,\ldots) \; .$$

Dus $\underline{x}$ is geometrisch verdeeld.

Failure rate

Zij $\underline{t}$ een continue stochastische grootheid met kansdichtheid $f(t)$ $(t \ge 0)$ dan

$$P(t < \underline{t} < t + \Delta t \mid \underline{t} > t) = \frac{\int_t^{t+\Delta t} f(t)dt}{\int_t^{\infty} f(t)dt} \; .$$

We definiëren de failure rate door

$$h(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} f(t)dt}{\Delta t . \int_t^{\infty} f(t)dt}$$

dus

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} \; .$$

$$\log(1 - F(t)) = -\int_0^t h(\tau)d\tau$$

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau} \tag{1}$$

Voorbeeld 1: Een apparaat gaat kapot tengevolge van een incident; de kans op het optreden van een dergelijk incident wordt constant verondersteld, dus $h(t) = \lambda$.
Nu uit (1):

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

Voorbeeld 2: Veronderstel dat wel veroudering optreedt: $h(t)$ afhankelijk van t (monotoon stijgend).
Stel bv. $h(t) = \lambda t$.
Nu

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda t^2} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda t e^{-\frac{1}{2}\lambda t^2} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

(dit is een Weibullverdeling).

Litteratuur

Hieronder vermelden we enige boeken, waarin de kollegestof of gedeelten daarvan behandeld worden.

H. Meschkowski, Wahrscheinlichkeitsrechnung.
(Hochschultaschenbücher 285/285 a, Bibliographisches Institut; ƒ 6,25).

I. Adler, Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek (Aula 295).

M.L. Wijvekate, Verklarende statistiek (Aula 39).

M.J. Moroney, Feiten uit cijfers (Marka 71, ƒ 8,--).

H. Freudenthal, Waarschijnlijkheid en statistiek
(Volksuniversiteitsbibliotheek 2.57; ƒ 8,50).

A.J. Stam, Inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening.
H. Stam, Haarlem 1964; ƒ 35,65.

G.B. Wetherill, Elementary Statistical Methods
Methuen, Londen 1967; 50:- .

D. Blackwell, Basic Statistics.
McGraw-Hill, New York, 1969; ƒ 21,75.

J. Wessels, Rekenen met kansen
Torusreeks - 4, Wolters-Noordhoff, Groningen 1969; ƒ 5,85.