TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken en Antwoorden

bij de colleges

WISKUNDE 31 en 49

KANSREKENING en STATISTIEK

Cursusjaar 1975-1976

2262 Bobl / Mag

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken en Antwoorden

bij de colleges

Wiskunde 31 en 49

Kansrekening en statistiek

Dictaatnr. 2.262 Prijs *f* 4,--

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken en Antwoorden
bij de colleges
Wiskunde 31 en 49

Kansrekening en Statistiek

Cursusjaar 1975-1976

V O O R W O O R D

Deze vraagstukkenverzameling bevat veel meer opgaven dan op de instructies in ongeveer 9 weken gemaakt kunnen worden. De vroegere collectie is aangevuld met analoge opgaven en met alle tentamenopgaven die in het verleden zijn gegeven, zodat voldoende oefenstof voor zelfstudie overblijft.
In de onderstaande lijst is aangegeven welke vraagstukken U zou moeten kunnen maken en op welk ogenblik, zodat U zelf Uw vooruitgang of Uw lacunes in de statistiek kunt constateren. Bovendien kunt U nagaan door een tentamen in zijn geheel te maken in week 8 of 9 of U in staat bent vraagstukken te maken als ze niet gerubriceerd zijn en of Uw tempo hoog genoeg is.
Veel plezier met de studie!

Week	De opgaven van	en bovendien
1	§ 1, 2, 3, 4	
2	§ 4, 5, 6	
3	§ 7, 8	
4	§ 9, 10	G 9, 13
5	§ 11	G 5, 18
6	§ 13, 14	G 1, 6, 8, 11, 17
7	§ 14, 15, 16, 17	G 2, 3, 4, 7, 10, 12
8	§ 17, 18, 19	G 14, 15, 16
9	Herhaling	

8 januari 1971.

I N H O U D

§ 1. UITKOMSTEN

1.1. Een electronisch systeem heeft 3 componenten die stuk voor stuk bij gebruik kunnen weigeren. Een experiment bestaat uit het laten werken van het systeem en nagaan welke componenten weigeren.

a) Geef de mogelijkhedenverzameling U van dit experiment. Noem de uitkomst

"component i weigert" $\equiv A_i$.

b) Schrijf A_1 als deelverzameling van U.

c) Druk de volgende uitkomsten in woorden uit:

$$A_1 \cup A_2 \;;\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 \;;\; A_1 \cap A_2 \;;\; A_1^* \;;\; A_1^* \cap A_3 \;;\; (A_1 \cap A_2)^* \;.$$

d) Druk de volgende uitkomsten uit in A_1, A_2, A_3:

"hoogstens één component weigert"
"geen enkele component weigert".

1.2. In een electrisch netwerk zijn twee componenten R en S in serie geschakeld. De componenten kunnen elk wel of niet werken. Na inschakeling van het netwerk wordt nagegaan welke componenten weigeren.

a) Geef de mogelijkhedenverzameling U voor dit experiment.

Noem: "de serieschakeling als geheel werkt" $\equiv B_1$

"minstens één van R en S werkt" $\equiv B_2$.

b) Schrijf B_1 en B_2 als deelverzameling van U.

c) Druk de volgende uitkomsten in woorden uit:

$$B_1^* \;;\; B_2^* \;;\; B_1^* \cap B_2 \;;\; B_1 \cup B_2^* \;.$$

1.3. Bij het trekken van een kaart uit een kaartspel beschouwt men de volgende paren van uitkomsten:

a) {een aas} , {een vrouw of een zeven} ;

b) {een harten of een heer} , {een schoppen of een plaatje} ;

c) {een heer} , {een vrouw of een harten} .

Welke van deze paren bestaat uit elkaar uitsluitende uitkomsten; geef als ze elkaar niet uitsluiten aan uit welke mogelijkheden hun doorsnede bestaat. Bepaal voor elk van deze uitkomsten de kans op realisatie.

1.4. We werpen tweemaal met een dobbelsteen. Maak een tabel van alle mogelijkheden en bepaal door het aantal gunstige te tellen de kansen op de volgende uitkomsten:

a) de som der worpen is deelbaar door drie;

b) de som der worpen is even of de eerste worp is een drievoud;

c) $10x + y$ is een zevenvoud, als x de eerste worp en y de tweede worp voorstelt.

1.5. Men werpt tegelijk met een muntstuk en een dobbelsteen.
E_1 is de uitkomst dat het muntstuk "kruis" geeft;
E_2 is de uitkomst dat de dobbelsteen 3 of 6 geeft.

Welke betekenis (in woorden) hechten we nu aan de volgende uitdrukkingen:

a) E_1^* ;

b) E_2^* ;

c) $E_1 \cap E_2$;

d) $E_1 \cup E_2$;

e) $E_1^* \cap E_2$.

Bepaal de kansen op de uitkomsten onder a), b), c), d) en e).

1.6. Uit een verzameling boomvlotten wordt een boomstam getrokken. Van deze boomstam wordt de lengte gemeten (m). Wat is de mogelijkhedenverzameling van dit experiment?
Een boom van minstens 15,50 m kan als heipaal naar Purmerend verkocht worden (uitkomst P) en een van minstens 9,50 m naar Zaltbommel (Z). Bij hoogstens 12,75 m kan de paal met een kleine oplegger vervoerd worden (K) en tot 18,00 m met een grote (G).
Geef de volgende uitkomsten weer in woorden en laat zien om welke verzamelingen het gaat:

a) $P \cap Z$;

b) $P \cap K^*$;

c) $Z^{*} \cap P^{*}$;

d) $Z \cap K \cap G$;

e) $P \cup (G^{*} \cap K)$.

1.7. Laat A, B en C drie uitkomsten zijn (drie deelverzamelingen van de verzameling der mogelijkheden).
Geef uitdrukkingen voor de volgende met behulp van A, B en C gedefinieerde uitkomsten:

a) alleen A,
b) A en B, maar niet C,
c) alle drie,
d) tenminste één van de drie,
e) tenminste twee,
f) geen enkele,
g) precies één van de drie,
h) niet meer dan twee.

§ 2. ASELECTE GETALLEN

Opmerking: De tabel waarnaar in deze opgaven wordt verwezen is tabel 8.4 op de pagina's 69, 70, 71 en 72 van het "Statistisch Compendium" (S.C.).

2.1. Men trekt aselect een getal uit de verzameling $\{0,1,\ldots,9\}$.
Door het aantal gunstige mogelijkheden te tellen blijkt de kans op de uitkomst "even" gelijk aan $\frac{1}{2}$.
Realiseer 100 van deze aanwijzingen met behulp van een tabel van aselecte getallen en vergelijk het frequentiequotiënt:

$$\frac{\text{aantal even uitkomsten}}{100}$$

met bovengenoemde kans op een even uitkomst.

2.2. Men trekt aselect, met teruglegging, tweemaal uit de verzameling $\{0,1,\ldots,9\}$.
Bepaal door gunstige mogelijkheden te tellen de kans dat het verschil tussen de aangewezen cijfers een drievoud of nul wordt.
Realiseer 100 paar aanwijzingen met behulp van een tabel van aselecte getallen en vergelijk het frequentiequotiënt:

$$\frac{\text{aantal realisaties waarbij het verschil een drievoud of nul is}}{100}$$

met de bovengenoemde kans.

2.3. Construeer met behulp van een tabel van aselecte getallen twee complementaire uitkomsten A en B zodat

a) $P(A) = \frac{5}{18}$,

b) $P(B) = \frac{13}{18}$.

2.4. Construeer met behulp van een tabel van aselecte getallen twee complementaire uitkomsten A en B zodat

a) $P(A) = 2/5$, $P(B) = 3/5$,

b) $P(A) = 1/4$, $P(B) = 3/4$,

c) $P(A) = 1/3$, $P(B) = 2/3$.

§ 2

2.5. Construeer met behulp van een tabel van aselecte getallen drie uitkomsten A, B en C, zodat

$$P(A) = 1/5\ ,\quad P(B) = 3/10\ ,\quad P(C) = 1/2\ .$$

§ 3. HOMOGENE OF SYMMETRISCHE KANSVELDEN

3.1. Beschouw een loterij met 10 fiches: een met nummer 1, twee met nummer 2, drie met nummer 3, vier met nummer 4. Men trekt tweemaal, aselect met teruglegging.

Bereken de kansverdeling over de mogelijke resultaten.

a) Wat is de kans op een totaal ≥ 7 ?

b) Wat is de kans op twee gelijken?

3.2. Men werpt tweemaal met een dobbelsteen. Het resultaat van de eerste worp noemen we x, dat van de tweede worp y. Geef in de verzameling van mogelijke (x,y)-resultaten (tekening) de volgende uitkomsten aan:

$$A = \{x,y \mid x + y \geq 8\} \quad \text{en} \quad B = \{x,y \mid |x - y| \leq 2\} .$$

Bepaal $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ en $P(A \cup B)$.

3.3. Gegeven zijn 8 kaarten, die ieder een uit drie letters bestaand kenmerk hebben, en wel: AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB. Men wil blindelings één greep doen bestaande uit 2 kaarten.

a) Bepaal de kans, dat in het kenmerk van elk der getrokken kaarten minstens één keer de letter A voorkomt.

b) Bepaal de kans, dat in beide kenmerken samen van de getrokken kaarten de letter A precies drie keer voorkomt. (1966)

§ 4. PERMUTATIES, VARIATIES, COMBINATIES. BINOMIUM VAN NEWTON, BINOMIAALCO-EFFICIËNTEN

4.1. Bewijs:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, (driehoek van Pascal)

b) $\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}$,

c) $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\ 2^{n-1}$,

d) $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$,

e) $\sum\limits_{m=0}^{n} \binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m} = \binom{N}{n}$, $(m \le n,\ m \le M,\ n \le N,\ M \le N)$

Alle letters die in deze formules voorkomen zijn natuurlijke getallen of nul.

4.2. In het land X met een alfabet van 26 letters bestaat een autonummer uit drie verschillende letters, gevolgd door drie cijfers, waarvan het eerste geen nul mag zijn. Hoeveel verschillende autonummers zijn in dit land mogelijk?

4.3. a) Op hoeveel verschillende manieren kan uit zeven personen een commissie van vier leden worden samengesteld?

b) Op hoeveel verschillende manieren kan uit zeven personen een commissie bestaande uit voorzitter, vice-voorzitter, eerste en tweede secretaris worden samengesteld?

4.4. Uit 5 chemici en 7 physici moet een commissie worden gevormd bestaande uit 2 chemici en 3 physici.

Op hoeveel verschillende manieren kan dit gedaan worden als:

a) elke chemicus en elke physicus in deze commissie kan worden opgenomen;

b) een bepaalde physicus lid moet worden van deze commissie;

c) een bepaalde chemicus en een bepaalde physicus niet samen lid mogen zijn van deze commissie.

4.5. Op hoeveel verschillende manieren kan men een stok van 52 speelkaarten in 4 gelijke stapeltjes verdelen?

4.6. Gevraagd het aantal rangschikkingen van n nullen en n^2 enen op een rij waarin geen nullen naast elkaar staan.

§ 5. DISCRETE KANSVELDEN

5.1. Uit een vaas die 11 witte en 17 zwarte ballen bevat zal driemaal achtereen, aselect en zonder teruglegging een bal worden getrokken. Wat is de kans dat deze drie trekkingen ballen zullen opleveren van dezelfde kleur?

5.2. Hoe groot is de kans, dat van 40 (aselect gekozen) personen er minstens 2 op dezelfde dag jarig zijn? (1 jaar = 365 dagen, gebruik S.C. 9.2 en 9.3.) Geef een schatting van de kans alvorens te gaan rekenen.

5.3. Tabel 8.4 van het "Statistisch Compendium" is verkregen door aselecte trekkingen met teruglegging uit de getallen 0 tot en met 9. Hoe groot is bij driemaal aselect aanwijzen van één der getallen 0 tot en met 9 de kans op:

a) 3 gelijke;
b) 2 gelijke en een verschillend daarvan;
c) 3 verschillende.

Controleer dit in tabel 8.4, bijvoorbeeld in 3 naast elkaar staande kolommen.

5.4. In de lift van een gebouw met 10 etages staan 4 personen die elk aselect een knop indrukken. Bereken de kans dat de 4 personen uitstappen:

a) op dezelfde verdieping;
b) op twee verschillende verdiepingen, waarbij 3 personen op de ene en de 4e op de andere verdieping;
c) op twee verschillende verdiepingen, waarbij een paar op de ene en het andere tweetal op de andere verdieping;
d) op drie verschillende verdiepingen;
e) op vier verschillende verdiepingen.

Ga na dat de som van de kansen een is.

5.5. In een vaas zitten 7 briefjes waarop de letters van het woord "energie" voorkomen (op elk een). Men is van plan aselect 3 briefjes te trekken. Bereken de kansen om met de drie getrokken letters de woorden "erg" resp. "een" te kunnen vormen:

a) met teruglegging;
b) zonder teruglegging.

5.6. Idem als opgave 5.5 als de vaas de 7 letters van het woord "negeren" bevat en met de drie getrokken letters de woorden "een" resp. "ren" worden gevormd.

5.7. Van de 16 delen van een encyclopedie zijn er vier van hun plaats gehaald. Zij zullen blindelings op de open plaatsen worden teruggezet.

a) Hoe groot is de kans dat de 16 delen dan weer in de juiste volgorde komen?

b) Hoe groot is de kans dat men de 16 delen na het terugzetten door alsnog twee exemplaren te verwisselen weer in de juiste volgorde kan brengen? (1966)

5.8. a) We werpen met 2 dobbelstenen.
Gevraagd de kans op elk der mogelijke waarden voor de som der ogen.

b) Idem voor 3 dobbelstenen (gebruik het bij a) gevondene).

c) Geef de gevonden kansverdelingen weer in grafieken.

5.9. $U := \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ en $p_1 = 0{,}1$
$p_2 = 0{,}2$
$p_3 = 0{,}3$
$p_4 = 0{,}4$
$p_5 = 0$.

Vormt deze U met $p_1,\dots,p_5$ een discreet kansveld? Als verder geldt:

$$A := \{u_1,u_2,u_3\}\ ,\quad B := \{u_1,u_4,u_5\}\ ,\quad C := \{u_2,u_3,u_5\}\ ,$$

bereken dan: $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap B^*)$,
$P(A \cap B \cap C)$, $P(B^* \cap C^*)$.

5.10. Toon aan dat voor discrete kansvelden geldt:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^*)\ .$$

Verifieer dit ook in de vorige opgave.

5.11. We werpen met 3 dobbelstenen. Gevraagd de kans dat:

a) een 3, een 4 en een 5 wordt geworpen;

b) drie opeenvolgende cijfers worden geworpen;

c) het product der drie worpen even is;

d) de laagste worp een 1 is;

e) de laagste worp een 3 is.

5.12. Men werpt één dobbelsteen viermaal en noteert de vier worpen (bijv. 2, 6, 3, 3).

a) Wat is de kans dat de som van de vier worpen even is?

b) Wat is de kans dat de laagste worp een 2 is? (1965)

5.13. Een vaas bevat 7 witte en 8 zwarte ballen. Men trekt aselect en zonder teruglegging 5 ballen uit deze vaas.

a) Wat is de kans op 3 witte en 2 zwarte ballen?

b) Wat is de verzameling van mogelijkheden? Bepaal de kansverdeling over de mogelijkheden.

c) Ga na dat opgave 4.1.e) nu in een speciaal geval bewezen is.

5.14. Hoe groot is de kans bij bridge:

a) dat U het spel begint met minstens een renonce (d.w.z. bijv. geen klaveren, etc.);

b) dat U het spel begint met een zevenkaart in één kleur;

c) dat, als U bij het begin één aas hebt, de overige drie azen bij Uw partner zitten;

d) Idem als a) met precies één renonce.

§ 6. CONTINUE KANSVELDEN

6.1. Gegeven is het volgende continue kansveld:

$$U := \mathbb{R} \quad \text{en} \quad f(x) := \begin{cases} x & \text{voor } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{voor } 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken en schets de verdelingsfunctie F.

Bereken de kans op de uitkomsten $[-1,1]$

$[\frac{1}{2},1\frac{1}{2}]$.

6.2. Bereken bij een exponentiële verdeling met $\lambda = 2$ de kansen op de uitkomsten $[0,1]$ en $[2,\infty)$.

6.3. Gegeven is het volgende continue kansveld:

$$U := [0,\infty) \quad \text{en} \quad f(x) = Axe^{-\lambda x} \quad \text{met } \lambda > 0 .$$

Gevraagd A en $P([0,\lambda])$.

6.4. Gegeven is een normaal kansveld met $\mu = 50$ en $\sigma = 7$. Gevraagd:

a) $P((60,\infty))$;

b) $P((-\infty,40))$;

c) $P((42,63))$;

d) bepaal a, zodat $P((-\infty,a)) = 0{,}025$;

e) bepaal b, zodat $P((50-b,50+b)) = 0{,}85$.

§ 7. VOORWAARDELIJKE KANS, DEELEXPERIMENTEN

7.1. Uit een volledig spel kaarten wordt aselect een kaart getrokken. Dit blijkt een plaatje te zijn.

Hoe groot is de kans dat het getrokken plaatje een boer is?

7.2. Een meting wordt beschreven door een homogeen kansveld op het interval $[-1,1]$.

Bepaal het voorwaardelijke kansveld bij de voorwaarde dat het resultaat positief is.

7.3. Uit een volledig spel kaarten worden aselect 13 kaarten getrokken. Bepaal de voorwaardelijke kans dat de kleuren in de trekking 3-3-3-4 verdeeld zijn, onder het gegeven dat de trekking 7 rode en 6 zwarte kaarten bevat.

7.4. Gegeven zijn 2 vazen. Vaas 1 bevat 3 zwarte en 5 witte ballen. Vaas 2 bevat 7 zwarte en 3 witte ballen. Men kiest willekeurig een vaas en trekt daaruit aselect een bal. Hoe groot is de kans dat deze bal wit is?

7.5. Machine A produceert van een bepaald product tweemaal zoveel als machine B. A levert 5% defecte, B 7%. Een klant krijgt een defect product. Hoe groot is de kans dat het afkomstig is van machine A ?

7.6. Een kast heeft 3 laden. In de ene la liggen 2 gouden munten, in een andere 2 zilveren en in de derde 1 gouden en 1 zilveren munt. Blindelings wordt een la opengetrokken en hieruit aselect 1 munt gepakt die van goud blijkt te zijn. Hoe groot is de kans dat de andere munt in de la van goud is?

7.7. Hoe groot is de kans dat een gezin van 4 kinderen bestaat uit 3 jongens en 1 meisje als men respectievelijk de keuze beperkt tot:

a) gezinnen met tenminste 3 jongens;

b) gezinnen waarin de oudste 3 kinderen jongens zijn.

(Aangenomen wordt dat de kans op een jongensgeboorte gelijk is aan $\frac{1}{2}$.)

7.8. Een doos bevat 3 geldstukken. Twee geldstukken zijn eerlijk (gelijkwaardige kruis- en muntzijde). Het derde geldstuk is afwijkend; het heeft twee kruiszijden . Er wordt aselect een geldstuk getrokken en dit wordt tweemaal opgegooid.

a) Wat is de kans dat beide worpen kruis opleveren?

b) Hoe groot is de kans dat het getrokken geldstuk het afwijkende exemplaar is, als beide worpen kruis hebben opgeleverd? (1970)

7.9. De kans dat iemand ten hoogste t minuten moet wachten op een bepaalde trein wordt gegeven door de verdelingsfunctie F:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ \frac{t}{2} & \text{voor } 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{voor } 1 \le t < 2 \\ \frac{t}{4} & \text{voor } 2 \le t < 4 \\ 1 & \text{voor } t \ge 4 \,. \end{cases}$$

a) Schets een grafiek van de verdelingsfunctie F(t).

b) Bepaal de kansdichtheid f(t) en teken een grafiek.

c) Bereken de kans dat de tijd die iemand moet wachten

i) meer dan 1 minuut is;

ii) minstens 3 minuten is;

iii) minstens 3 minuten is, onder voorwaarde dat ze meer dan 1 minuut is. (1970)

§ 8. AFHANKELIJKE EN ONAFHANKELIJKE UITKOMSTEN

8.1. Men heeft een stel van 48 kaarten; op elk der kaarten staat een der letters A, B, C, D en een der gehele getallen van 1 t/m 12, dusdanig dat elke combinatie van letter en getal precies één keer voorkomt. Men doet trekkingen uit het pak kaarten zodat iedere kaart dezelfde kans heeft om getrokken te worden. De uitkomst U is het trekken van een kaart waarop een 2 staat. De uitkomst V is het trekken van een kaart die minstens een der volgende kenmerken heeft: de kaart vermeldt het getal 3 of 7, de kaart vermeldt de letter B of D. Gevraagd wordt $P(V)$ en $P(V \mid U)$ te berekenen. Zijn U en V onafhankelijk? (1963)

8.2. Men werpt twee keer met een (zuivere) dobbelsteen. Men onderscheidt de volgende uitkomsten:

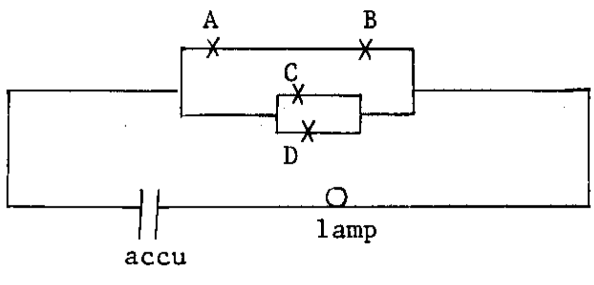
A: de som der ogen is een tweevoud;

B: de som der ogen is een drievoud;

C: bij tenminste een van beide worpen is het aantal ogen groter of gelijk aan 4.

Bereken P(A), P(B) en P(C). Zijn A en B onafhankelijk? Motiveer Uw antwoord. (1967)

8.3. A, B, C en D zijn onafhankelijke schakelaars. De kans op open zijn is voor elk p_1, op gesloten zijn is p_2 (dus $p_1 + p_2 = 1$).
Hoe groot is de kans dat de lamp brandt? (Accu, lamp, leiding functioneren goed.)



Wat wordt de uitkomst als $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$?

8.4. Een relais heeft een kans p_1 niet goed in te schakelen en een kans p_2 niet goed uit te schakelen.

a) Wat is de kans dat het relais éénmaal goed in- en uitschakelt?

b) Als 2 relais in serie geschakeld worden en tegelijkertijd bekrachtigd, hoe groot is dan de kans dat het duo éénmaal goed in- en uitschakelt? (Relais functioneren onafhankelijk van elkaar.)

c) Is het mogelijk dat beide relais in serie beter zullen functioneren dan één relais alleen en zo ja, onder welke voorwaarde?

d) Vervang in b) en c) het woord serie door parallel en beantwoord dezelfde vragen.

e) Wanneer moet serieschakeling en wanneer moet parallelschakeling geprefereerd worden?

8.5. De volgende beweringen zijn equivalent:

a) De uitkomsten A en B zijn onafhankelijk;

b) de uitkomsten A en B^* zijn onafhankelijk;

c) de uitkomsten A^* en B zijn onafhankelijk;

d) de uitkomsten A^* en B^* zijn onafhankelijk.

Toon dit aan.

8.6. Men werpt één dobbelsteen driemaal. Beschouw de uitkomsten

A: onder de drie geworpen getallen komt tenminste één 5 voor,

B: het product der drie geworpen getallen is even.

a) Bepaal P(A) en P(B).

b) Ga na of A en B onafhankelijk zijn.

8.7. Een experiment bestaat uit vier onafhankelijke deelexperimenten die elk beschreven worden door een normaal kansveld met $\mu = 2$ en $\sigma = 3$.
Hoe groot is de kans dat de grootste van de vier resultaten groter is dan 5 ?
En de kans dat de kleinste groter is dan 5 ?

8.8. In een systeem zijn ter verhoging van de betrouwbaarheid 2 componenten van een bepaald type parallel aangebracht. Voor beide componenten wordt de levensduur in maanden beschreven door een exponentieel kansveld met $\lambda = 2$.

a) Gevraagd wordt de kansverdeling die de levensduur van het samenstel beschrijft.

b) Bereken zowel voor één component als voor het samenstel van twee de kans op een levensduur van minstens 1 maand.

§ 9. HET BINOMIALE KANSVELD

9.1. We tellen het aantal zessen bij drie keer gooien met een zuivere dobbelsteen.

a) Wat is de verzameling van mogelijke uitkomsten?

b) Geef de kansverdeling over de verzameling van mogelijke uitkomsten.

9.2. Geef aan hoe U bij 15 keer werpen met een zuivere dobbelsteen de kansen op de volgende uitkomsten kunt uitrekenen (de berekening zelf niet uitvoeren):

a) er komen precies 2 zessen;

b) er komen meer dan 2 zessen;

c) er komen minder dan 2 zessen;

d) er komen 2 of minder zessen;

e) er komen 3 zessen of meer dan 5 zessen.

Bepaal nu deze kansen met behulp van S.C. 5.1 en 5.2.

9.3. In een fabriek blijkt gemiddeld 20% van de door een bepaalde machine geproduceerde bouten buiten gestelde normen te liggen en dus afgekeurd te worden. Men kan dit gegeven zo interpreteren dat elke bout een kans 0.20 heeft afgekeurd te worden.
Men neemt aselect 10 bouten uit een dagproductie. Bepaal de kans dat:

a) precies 2 bouten buiten de normen vallen;

b) 2 of meer bouten buiten de normen vallen;

c) meer dan 5 bouten buiten de normen vallen.

Gebruik S.C. 5.1 en 5.2.

9.4. In een seinsysteem heeft elk verzonden signaal een kans van 0,9 om goed over te komen.

a) Hoe groot is de kans dat een serie van 5 signalen in zijn geheel goed overkomt?

b) Hoe groot is de kans dat er van een serie van 5 signalen minstens 2 goed overkomen?

9.5. Als de kans om te slagen voor het tentamen statistiek 0,65 is, wat is dan de kans dat in een groep van 15 studenten er meer dan 6 zakken?

9.6. Tweehonderd studenten doen mee aan een multiple choice tentamen. Er zijn 20 vraagstukken, elk met 4 antwoorden waaronder precies 1 juist antwoord. (Het juiste antwoord wordt door loting op plaats 1, 2, 3 of 4 gezet.) Indien alle studenten de antwoorden zo maar gokken, hoe groot is dan de kans, dat er minstens één "ten onrechte" toch een voldoende (meer dan 11 juiste antwoorden) behaalt? (Gebruik tabel 5.2 en 9.5.)

9.7. Vijfhonderd studenten doen mee aan een multiple choice tentamen. Er zijn 20 vragen, elk met 3 antwoorden, waaronder precies één juist antwoord. (Het juiste antwoord is door loting op plaats 1, 2 of 3 gezet.)

a) Hoe groot is de kans voor een student, die alle antwoorden zo maar raadt, om een voldoende te behalen? (Voldoende is meer dan 11 goede antwoorden.) Rond Uw antwoord af op 3 decimalen.
b) Hoe groot is de kans dat, indien alle studenten alle antwoorden zo maar raden, er minstens één toch een voldoende behaalt? (1969)

9.8. Uit grote partijen artikelen neemt men steekproeven van 20 stuks. Een partij wordt afgekeurd als in zo'n steekproef 3 of meer foutieve exemplaren worden aangetroffen.

a) Wat is de kans dat een partij met 25% fouten wordt afgekeurd?
b) Noem de kans dat een partij met 10% fouten wordt goedgekeurd p. Wat is dan de kans dat van 10 partijen met elk 10% fouten er 8 of meer worden goedgekeurd? (1968)

9.9. Deze opgave is n.a.v. een televisie experiment "Telekynese". Boven in een Galtonbord werp ik n kogeltjes. De onderste rij bevat k spijkertjes, waaronder k+1 vakjes zijn geplaatst, genummerd 0,1,...,k. Bij botsing met een spijkertje is de kans om naar links te vallen p, naar rechts q = 1-p. Hoe groot is de kans dat in het vakje i minstens x kogeltjes terechtkomen?

§ 10. HET POISSON KANSVELD. HET BENADEREN VAN EEN BINOMIALE DOOR EEN POISSON VERDELING

10.1. De kans dat een individu een ongewenste reactie geeft op inenting met een bepaald serum is 0.001. Men ent 2000 individuen in. Het aantal ongewenst reagerende individuen kan gezien worden als een resultaat uit een Poisson verdeling.

a) Hoe groot zou U de parameter μ kiezen?

b) Wat is de kans dat meer dan 3 individuen ongewenst reageren?

c) Wat is de kans dat minder dan 10 individuen ongewenst reageren?

10.2. Op een kantoor komen gemiddeld 3 telefoongesprekken per uur binnen. De telefoniste is gedurende 10 minuten afwezig. Hoe groot is de kans dat in die tijd minstens één persoon geen gehoor heeft gekregen?

10.3. De volgende tabel geeft een overzicht van het aantal auto-ongelukken per dag gedurende een periode van 50 dagen in een bepaalde stad.
Pas een Poisson kansveld aan en maak de tabel compleet.

werkelijkheid		model	
aantal ongelukken x	aantal dagen	kans op x ongelukken per dag	verwachte aantal dagen met x ongelukken
0	21		
1	18		
2	7		
3	3		
4	1		
	50		

Opmerking: Er zijn statistische toetsen om te kijken of de overeenstemming tussen werkelijke en modelresultaten bevredigend is.

10.4. Een autoverhuurder bezit twee wagens die per dag worden verhuurd. Het aantal aanvragen per dag volgt een Poisson verdeling met $\mu = 1,5$. Onder dag wordt verstaan 9.00-18.00 uur.

a) Hoe groot is de kans dat hij om twaalf uur nog geen aanvraag heeft gekregen?

b) Welk percentage van de dagen zijn beide wagens thuis?

c) Welk percentage zijn beide uit?

d) Indien beide wagens even vaak worden gebruikt, welk percentage van de dagen is één bepaalde wagen dan thuis?

10.5. Gemiddeld gebeurt in een bepaald gebied elke 100 dagen een ongeluk. Het aantal ongelukken per maand (30 dagen) volgt een Poisson verdeling.

a) Hoe groot is de parameter μ ?

b) Wat is de kans op meer dan één ongeluk per maand?

c) Als het aantal ongelukken per maand een Poisson verdeling volgt met parameter μ, dan volgt het tijdsinterval in maanden tussen 2 opeenvolgende ongelukken een exponentiële verdeling met dichtheidsfunctie

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} , \qquad t \geq 0 .$$

Wat is de kans dat tussen 2 opeenvolgende ongelukken niet meer dan 3 dagen liggen?

10.6. Bereken de kansen op k successen door het aanpassen van een Poisson verdeling aan een binomiale verdeling waarbij $n = 20$ en de kans op succes 0.05 is. Vergelijk Uw antwoorden met de exacte waarden.

10.7. Een productieproces produceert gemiddeld 1% defecte producten. Hoe groot zijn de kansen dat een partij van N producten c of minder defecten bevat:

a) voor $N = 100$ en $c = 1,2,3$;

b) voor $N = 1000$ en $c = 10,20,30$.

c) Wat is bij a) en b) het gevolg van het vergroten van c ?

d) Wat is de ordegrootte van de gevraagde kansen als $N = 100.000$ en $c = 1000,2000,3000$.

Opmerking: Vergelijk de gevonden antwoorden onder a) en b) met de waarden verkregen uit een uitvoerige binomiale tabel.
ad a) 0.73576; 0.92063; 0.98163;
ad b) 0.58304; 0.99850; 1.00000.

10.8. In een seinsysteem heeft elk verzonden signaal een kans van 0.95 om goed over te komen.

a) Hoe groot is bij het overzenden van een woord met 10 tekens de kans op hoogstens 1 fout?

b) En voor een zin met 20 tekens op hoogstens 2 fouten?

c) En voor een zin met 40 tekens op hoogstens 4 fouten?

d) Bij welke zinslengten is de kans op hoogstens 10% fout overgebrachte tekens groter dan 0.99 ?

10.9. Een cake bevat 200 krenten. De cake wordt in 50 gelijke plakjes gesneden. Hoe groot is de kans dat men blindelings een plakje pakt zonder krenten? (Los dit op m.b.v. binomiale en Poisson verdeling.)

§ 11. VERWACHTING, VARIANTIE, MOMENTEN, STOCHASTISCHE GROOTHEDEN

11.1. Bereken de verwachting en de variantie van het aantal ogen als we gooien met een dobbelsteen:

a) eenmaal, b) 36 maal.

11.2. We trekken 12 maal uit een homogene verdeling op [0,1].

a) Bepaal de verwachting van de som van de 12 trekkingen.
b) Bepaal de variantie van de som.
c) Als we de trekkingen werkelijk uitvoeren (met aselecte getallen bijvoorbeeld), welk deelinterval van [0,12] zal dan "gewoonlijk" de som bevatten?

11.3. Er wordt 10 keer met een zuiver geldstuk getost. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ wordt als volgt gedefinieerd: $\underline{x}$ is het rangnummer van de eerste worp die "kruis" oplevert en 11 als "kruis" geen enkele keer optreedt.
Bereken de kansverdeling van $\underline{x}$.
Bereken ook de kansverdeling van het rangnummer van de eerste worp die "kruis" oplevert als net zo lang wordt geworpen tot een keer "kruis" resulteert. Doe hetzelfde voor het rangnummer van de tweede keer kruis.

11.4. Een cirkelvormige schietschijf met een straal van 4 dm heeft 4 ringen met elk een breedte van 1 dm. Voor een bepaalde schutter is de kans om een gebied te raken evenredig met de oppervlakte van het gebied, terwijl hij met kans $\frac{1}{2}$ de schijf raakt.

a) Zijn score $\underline{s}$ heeft de waarde 10 voor de roos (binnencirkel), 5, 3, 1 voor de volgende ringen en 0 bij niet raken van de schijf.
Bereken de kansverdeling van $\underline{s}$.
b) Bij 2 keer schieten (onafhankelijke deelexperimenten) wordt de score $\underline{c}$ bepaald door de som van de beide subscores.
Bereken de kansverdeling van $\underline{c}$.

11.5. Een experiment bestaat uit 2 onafhankelijke deelexperimenten, die elk door een standaardnormaal kansveld worden beschreven. De mogelijkhedenverzameling is dus R_2. De stochastische grootheid $\underline{r}$ geeft de afstand tussen de oorsprong en het resultaat van het experiment.
Bereken de kansverdeling van $\underline{r}$. (Dit is een Rayleigh-verdeling, deze treedt op bij ruisproblemen als de verdeling van de modulus van een signaal.)

11.6. a) $\underline{x}$ heeft een normale verdeling met $\mu = 10$, $\sigma = 2$.
Bereken: $P(\underline{x} \leq 6)$, $P(9 \leq \underline{x} \leq 11)$.

b) $\underline{k}$ heeft een binomiale verdeling met $n = 20$, $p = 0{,}4$.
Bereken: $P(\underline{k} = 4)$, $P(\underline{k} \geq 4)$.

c) $\underline{n}$ heeft een Poisson verdeling met $\mu = 9$.
Bereken: $P(\underline{n} = 9)$, $P(7 \leq \underline{n} \leq 11)$.

d) $\underline{\ell}$ heeft een binomiale verdeling met $n = 40$, $p = 0{,}05$.
Bereken: $P(\underline{\ell} \leq 3)$, $P(1 \leq \underline{\ell} \leq 3)$.

e) $\underline{t}$ heeft een exponentiële verdeling met $\lambda = 0{,}5$.
Bereken: $P(1 \leq \underline{t} \leq 3)$.

f) $\underline{y}$ heeft een gammaverdeling met kansdichtheid

$$f(y) := \begin{cases} 4ye^{-2y} & \text{voor } y \geq 0 \quad \text{(verg. S.C. blz. 10 met } \lambda = r = 2) \\ 0 & \text{voor } y < 0. \end{cases}$$

Bereken: $P(\underline{y} \leq 1)$, $P(0{,}5 \leq \underline{y} \leq 1{,}5)$.

11.7. De stochastische grootheid $\underline{x}$ heeft een zogenaamde driehoekige verdeling met

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{voor } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{voor } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken verwachting en variantie van $\underline{x}$.

11.8. Bereken verwachting en variantie van $\underline{x}$, indien

a) $\underline{x}$ een continue homogeen verdeelde stochastische grootheid is op $(0,a)$;

b) $\underline{x}$ de getallen $1,2,\ldots,n$ met gelijke kansen doorloopt.

11.9. Bereken verwachting en variantie van de stochastische grootheden $\underline{s}$ en $\underline{c}$ uit opgave 11.4.

11.10. Bereken de momenten van de stochastische grootheid $\underline{y}$ uit opgave 11.6.f). Tevens de variantie.

11.11. Een Geigerteller geeft ergens per minuut gemiddeld 100 aanslagen. Wat is de standaardafwijking van het aantal aanslagen per minuut?

11.12. Gegeven zijn twee vazen V_1 en V_2. V_1 bevat 1 zwarte en 1 witte bal, V_2 bevat 1 zwarte en 2 witte ballen. Uit elke vaas wordt aselect één bal getrokken. U ontvangt voor elke zwarte bal die U trekt ƒ 1,--.

a) Welke bedragen kunt U ontvangen?

b) Bepaal de kans op elk van deze bedragen.

c) Bereken de verwachting en de variantie van het ontvangen bedrag. (1970)

11.13. Een onderdeel moet op een bepaalde machine bewerkt worden; als het na de bewerking afgekeurd wordt moet het de bewerking opnieuw ondergaan. De kans om afgekeurd te worden is elke keer p.
Bereken de verwachting van het aantal keren dat de bewerking op eenzelfde exemplaar moet worden uitgevoerd.

11.14. Een droog korrelig poeder bevat deeltjes die zuiver bolvormig zijn en waarvan de diameter normaal verdeeld is met $\mu = 170$ en $\sigma = 11.6$ mikron. Men wil dit poeder in 3 soorten verdelen, nl. grof, middel en fijn, en wel zodanig dat deze drie klassen een gelijk aantal korrels bevatten.
Hoe groot moeten de diameters van de gaten van de benodigde zeven zijn, opdat de gewenste indeling wordt verkregen? Wat wordt de gemiddelde diameter der korrels voor elke soort?

11.15. De stochastische grootheid $\underline{x}$ bezit de volgende kansdichtheid f(x) :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 , \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 , \end{cases} \qquad (\lambda \text{ is een vast positief getal}).$$

a) Bereken de verwachtingswaarde van $\underline{x}$.

b) Bereken $P(\underline{x} \leq x \mid \underline{x} \geq a)$ met $a > 0$.

c) Bereken de voorwaardelijke verwachtingswaarde van $\underline{x}$ bij de voorwaarde $\underline{x} \geq a$. (1966)

Conclusie: Als de brandduur van een autolampje gegeven wordt door f(x), dan is de gemiddelde levensduur van het lampje, dat a uur gebrand heeft, (nog) even groot als die van een nieuw, waardoor het zou kunnen worden vervangen.

11.16. De door een machine geproduceerde staven hebben een normaal verdeelde lengte. Men neemt een steekproef van een groot aantal staven. Bij meting blijkt 16% langer dan 51,0 en 2,5% korter dan 49,5 cm.

a) Bij welk gemiddelde en welke standaardafwijking zijn de gevonden percentages te verwachten?

b) Men wil staven produceren met een gemiddelde lengte van 50,0 cm en keurt elke staaf die langer is dan 51,0 cm of korter dan 49,0 cm af. Bereken het te verwachten percentage uitval als de machine zo goed mogelijk is ingesteld. (1968)

11.17. Een automatische draaibank produceert assen waarvan de diameter $\underline{x}$ een normale verdeling bezit met $\mu = 5.010$ mm en $\sigma = 0.006$ mm. De tolerantie-eisen zijn $5.000 \leq x \leq 5.020$ mm.

a) Welk percentage producten valt buiten de toleranties?

b) Wanneer het gemiddelde μ verloopt doch σ constant blijft, hoe zal dan het percentage uitval met μ veranderen? (Neem bijv. $\mu = 5.006$; 5.008; 5.012; 5.014; 5.016.)

c) Tot welke waarde moet men σ verkleinen opdat bij een juiste instelling van μ het percentage uitval tot 1% wordt teruggebracht?

11.18. $\underline{x}$ is normaal verdeeld met $\mu = 3$, $\sigma = 1$.
Bereken verwachting en variantie van $\underline{y} = e^{\underline{x}}$ ($\underline{y}$ is lognormaal verdeeld).

11.19. Bereken de mediaan M voor een exponentieel verdeelde stochastische grootheid $\underline{t}$. Bewijs dat voor M_0 met $P(\underline{t} \leq M_0) = 0{,}75$ geldt: $M_0 = 2M$.

11.20. De kansdichtheid voor de snelheid van gasmoleculen luidt: $f(v) = av^2e^{-bv^2}$, $0 \leq v < \infty$.
Wat is de kansverdeling van de kinetische energie $\underline{E} = \frac{1}{2}m\underline{v}^2$ der moleculen?

11.21. $\underline{x}$ heeft een homogene verdeling op $(-a,a)$. Wat is de verdeling van $\underline{x}^2$?

§ 12. DE GAMMAVERDELING

N.B. Voor alle opgaven van deze paragraaf geldt:
De vraag $\underline{y}$ per maand naar een bepaald artikel in een magazijn is gamma verdeeld. De gemiddelde vraag per maand is 300, de standaardafwijking is 200.

12.1. Bij welke vraag is de kansdichtheid maximaal?

12.2. Bepaal y_1 zodat $P(\underline{y} < y_1) = 50\%$.

12.3. Bepaal y_2 zodat $P(\underline{y} < y_2) = 90\%$.

12.4. Bepaal y_3 zodat $P(\underline{y} < y_3) = 99\%$.

12.5. Als de beginvoorraad in een maand 800 stuks bedraagt, wat is dan de kans "om buiten voorraad" te raken in die maand?

12.6. In een jaar waarin men eigenlijk over teveel opslagruimte beschikt besluit men slechts één bestelling te plaatsen, waardoor men een grotere quantumkorting kan claimen. Er is geen levertijd en de magazijnvoorraad bedraagt op 31 december 110 stuks.
Hoe groot is de order die men plaatst op 1 januari als men het risico om buiten voorraad te raken in dat jaar wil reduceren:

a) tot 10%;
b) tot 0.1%.

12.7. Wat worden de antwoorden in opgave 12.6 als de vraag per jaar normaal verdeeld is?

12.8. Wat is de verwachte winst in de maand januari als de winst per stuk dat uit voorraad wordt geleverd ƒ 1,-- is? (beginvoorraad 4500 stuks).

12.9. Wat is de verwachte winst in een maand als de beginvoorraad in die maand 800 stuks (zoals bij 12.5) is.

12.10. Idem als 12.9 als de beginvoorraad 257 stuks bedraagt.

12.11. Wat is het bestelniveau als de levertijd twee maanden is en het risico om buiten voorraad te raken 10% ?

§ 13. RELATIES TUSSEN (NORMALE) STOCHASTISCHE GROOTHEDEN. CENTRALE LIMIETSTELLING

13.1. Een verpakkingsmachine die pakjes thee van nominaal 100 gram maakt, verpakt gemiddeld 101,0 gram in elk pakje. De verdeling van het gewicht aan thee in een pakje is normaal met een spreiding van 0.6 gram.
Hoeveel procent van de pakjes bevat minder dan het nominale gewicht?

13.2. In een magazijn van 3.20 m hoog ligt een groot aantal platte schijven waarvan de dikte normaal is verdeeld met verwachting 12 cm en standaardafwijking 2 cm. Men heeft de gewoonte 25 schijven op elkaar te stapelen.
Hoe groot is de kans dat dat mislukt?

13.3. De gewichtsinhoud van een pakje boter is normaal verdeeld met een spreiding van 3 gram. Een regeringsinstantie neemt ter controle af en toe een steekproef van 25 pakjes. De fabrikant krijgt een boete als de gemiddelde gewichtsinhoud van deze steekproef minder is dan 250 gram.
Op welk gemiddelde moet de verpakkingsmachine worden ingesteld om het risico van een boete tot 1% te reduceren?

13.4. Twintig lampen zijn in serie geschakeld. De levensduur van elke lamp mag als normaal verdeeld worden beschouwd met verwachting 400 uur en standaardafwijking 50 uur. Bereken het aantal branduren van de serie dat met een kans van 90% wordt overschreden.

13.5. Van een grote partij assen is de diameter normaal verdeeld met $\mu_1 = 14.82$ mm en $\sigma_1 = 0.03$ mm. Van een even grote partij boringen is de diameter eveneens normaal verdeeld met $\mu_2 = 14.89$ mm en $\sigma_2 = 0.04$ mm.
Een as "past" in een boring als zijn diameter minstens 0.05 en hoogstens 0.15 mm kleiner is dan die van de boring.

a) Bereken welk percentage assen in boringen zal passen als as en boring aselect aan elkaar worden toegevoegd.
b) Hoe kan dit percentage worden verhoogd indien men wèl de gemiddelden van as en boring door gewijzigde instelling der machines kan wijzigen, maar niet de standaardafwijkingen?
Bereken dit percentage.

13.6. In een magazijn worden dozen opgestapeld waarvan de hoogte normaal verdeeld is met gemiddelde 10 cm en spreiding 1 cm. De beschikbare hoogte is 106 cm. Wanneer men de dozen aselect opstapelt, hoe groot zijn dan de kansen

a) dat er voor een stapel van 10 dozen onvoldoende ruimte is?

b) dat er voor een stapel van 11 dozen wel voldoende ruimte is?

13.7. Een olieleverancier van flessen slaolie vermeldt als netto inhoud van zijn flessen 350 gram olie. Een winkelier wenst deze bewering te controleren zonder de flessen te openen. Hij weegt daartoe een zeer groot aantal gevulde flessen en hij vindt voor dit gewicht een normale verdeling met verwachting 585.2 gram en standaardafwijking $\sigma = 12.8$ gram. Vervolgens weegt hij een groot aantal lege flessen die hij van zijn klanten teruggekregen heeft met bijbehorende sluitcapsules. Voor dit gewicht vindt hij eveneens een normale verdeling met $\mu = 228.3$ gram en $\sigma = 11.3$ gram. Gevraagd het percentage der flessen olie die minder dan 350 gram olie bevatten.

13.8. Men wil een afstand van 100 meter afzetten door 100 maal achtereen een afstand van 1 meter af te passen. De fout die daarbij elke keer gemaakt wordt is een stochastische grootheid met $\mu = 0$ en $\sigma = 5$ cm.

a) Bereken de kans dat de afgezette afstand meer dan $\frac{1}{2}$ meter van de gewenste 100 meter verschilt.

b) De kans onder a) is tamelijk groot. Tot hoever zou men de standaardafwijking van de fout in iedere afgezette meter moeten reduceren opdat de kans onder a) ten hoogste 10% is?

13.9. Een weegmachine noteert gewichten g in eenheden van 1 kg, d.w.z. indien $26.5 \leq g < 27.5$, dan wordt 27 genoteerd. Men mag aannemen, dat in ieder interval van 1 kg de werkelijke gewichten homogeen verdeeld zijn en alle artikelen meer wegen dan $\frac{1}{2}$ kg.

Bereken de kans dat na 1000 onafhankelijke wegingen het werkelijke gewicht meer dan 16 kg groter is dan het totaal der genoteerde gewichten. (1967)

13.10. Een machine produceert bouten waarvan de diameter normaal verdeeld is met $\sigma = 0.3$ mm; bij een juiste instelling is $\mu = 26$ mm. Een bout wordt afgekeurd als de diameter groter dan 26,7 mm of kleiner dan 25,3 mm is.

a) Bepaal het percentage uitval.

b) Bereken de kans, dat in een steekproef van 200 stuks 3 of meer exemplaren afgekeurd worden.

c) Bij welk aantal afgekeurde exemplaren in een steekproef van 200 stuks gaat men twijfelen aan de juiste instelling van de machine? (1968)

13.11. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke exponentieel verdeelde grootheden met dezelfde parameter λ. Wat is de verdeling van $\underline{x} + \underline{y}$? (Met de definitie, of convolutie of Laplace getransformeerde.)

13.12. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke homogene stochastische grootheden op (0,1). Gevraagd de verdeling van $\underline{x} + \underline{y}$.

13.13. Twee personen hebben een afspraak tussen 8 en 9 uur. Hoe groot is de kans dat ze elkaar ontmoeten als ze niet langer dan 10 minuten op elkaar willen wachten? (Hun aankomsttijden zijn onafhankelijk en zonder voorkeur voor enig tijdstip tussen 8 en 9 uur.)

§ 14. AANPASSING VAN EEN NORMALE VERDELING AAN EEN BINOMIALE EN EEN POISSON VERDELING

14.1. Gegeven een binomiale verdeling met kans p op succes en n = 100. Bereken:

a) als p = 0.05 de kans op minder dan 4 successen;

b) als p = 0.2 de kans op precies 16 successen,

c) als p = 0.2 de kans op 16 of minder successen. (1970)

14.2. Door 1000 kg meel wordt een kleine hoeveelheid van een vitaminepreparaat gemengd ("goed gemengd"). Deze hoeveelheid bestaat uit n korrels, alle van dezelfde afmeting. Men neemt een monster van 10 gram van het mengsel. Het aantal korrels vitaminepreparaat in het monster volgt een verdeling van Poisson.

a) Bepaal de kans dat het monster tenminste 90% van het verwachte aantal korrels vitaminepreparaat bevat, indien $n = 10^6$.

b) Dezelfde vraag voor $n = 10^7$.

c) Bepaal n zo, dat bovengenoemde kans ≥ 95% is. (1967)

14.3. Iemand werpt 1800 maal met een zuivere dobbelsteen. Hoe groot is de kans dat hij meer dan 330 keer een zes noteert?

14.4. Bereken het aantal malen dat men met een zuivere dobbelsteen moet gooien, opdat de frequentie van "6" met een kans van 95% tussen 9/60 en 11/60 ligt.

a) Gebruik de normale benadering.

b) Gebruik de ongelijkheid van Cebysev.

14.5. Een Geigerteller geeft voor een bepaald radio-actief preparaat gemiddeld 900 tellingen per minuut. Hoe groot is de kans dat er in een bepaalde minuut minder dan 850 tellingen geregistreerd worden?

14.6. Een fabrikant maakt puddingpoeder voor rozijnenpudding. Het aantal rozijnen per pakje van 100 gram volgt vrijwel een Poisson verdeling. De fabrikant wil nu dat bij hoogstens 1% van al zijn pakjes het aantal rozijnen minder dan 10 bedraagt. Hoeveel rozijnen moet hij aan 100 kg poeder toevoegen?

14.7. Onderstel dat een firma gemiddeld 60 televisietoestellen per jaar verkoopt. Hij zorgt elke maand voor een nieuwe voorraad. Hoeveel toestellen moet de firma aan het begin van de maand minstens in huis hebben opdat de kans op "uitverkocht" vóór het eind van de maand kleiner is dan 5% ? Beantwoord dezelfde vraag bij een jaarverkoop van 240 apparaten.

14.8. Bij een machinaal weefgetouw treden gemiddeld 60 draadbreuken op in een tijdsinterval van lengte T. Als de machine ontregeld raakt neemt het aantal draadbreuken toe en men wenst dan zo snel mogelijk in te grijpen. De kans om ten onrechte in te grijpen dient echter bij iedere controle niet groter dan 0,01 te zijn. Bereken een getal x_0 zodanig, dat de regel "ingrijpen als $x > x_0$" voldoet aan de gestelde eisen.

14.9. Een grossier ontvangt van een fabrikant een zeer grote partij van een bepaald artikel. De grossier neemt een steekproef van 100 stuks uit de partij en gaat van deze 100 stuks na welke bruikbaar zijn voor een zeker doel.

a) Bereken de kans dat meer dan 72 exemplaren uit de steekproef bruikbaar zijn, onder de veronderstelling dat 80% van de gehele partij bruikbaar is.
b) De fabrikant garandeert dat minstens 80% van de geleverde goederen bruikbaar is voor het gestelde doel. De grossier wil de kans dat hij ten onrechte bij de fabrikant reclameert over het gegarandeerde percentage beperken tot ten hoogste 0,10. Bij welke aantallen bruikbare exemplaren in zijn steekproef zal de grossier reclameren? (1967)

14.10. Het gewicht $\underline{g}$ van de mannelijke studenten is een normaal verdeelde grootheid met $\mu = 155$ pond en $\sigma = 20$ pond.

a) Bepaal de kans dat een willekeurige student een gewicht heeft tussen de 120 en 130 pond.
b) Gegeven is een groep van 2000 mannelijke studenten. Hoe groot is het verwachte aantal studenten in deze groep met een gewicht tussen 120 en 130 pond?
c) Zij $\underline{x}$ het aantal studenten in deze groep met een gewicht tussen de 120 en 130 pond. Bepaal $P[\underline{x} \geq 142]$. (1970)

§ 15. ZUIVERE SCHATTER. FOUT VAN EERSTE EN TWEEDE SOORT. ONDERSCHEIDINGSVERMOGEN

15.1. Ga na dat de eerste trekking van een steekproef van n stuks uit een normale verdeling een zuivere schatter is van het populatiegemiddelde μ.

15.2. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden. En worden n onafhankelijke paren waarnemingen (x_i, y_i) gedaan. Men wil een schatting maken van de parameter $\mathcal{E}(\underline{xy})$. Toon aan dat $\frac{1}{n}\,\Sigma\, \underline{x}_i\underline{y}_i$ en $\overline{\underline{x}}\,\overline{\underline{y}}$ zuivere schatters zijn en dat de laatste nauwkeuriger is.

15.3. Men toetst de nulhypothese $\underline{x} \cong \underline{u}$ tegen de alternatieve hypothese $\underline{x} \cong 2 + \underline{u}$ met een rechtzijdig kritiek gebied, d.m.v. een steekproef ter grootte n.

a) Indien de kans op een fout van de eerste soort 0,05 is, hoe groot is dan de kans op een fout van de tweede soort?

b) Indien de kans op een fout van de tweede soort 0,10 is, hoe groot is dan de kans op een fout van de eerste soort?

15.4. Van een stochastische grootheid $\underline{x}$ die normaal verdeeld is met $\sigma = 10$ is μ onbekend. Men wenst op grond van het gemiddelde van een steekproef van nader te bepalen omvang n de hypothese $\mu = 50$ rechtseenzijdig te toetsen met onbetrouwbaarheid 0,05. Daarbij stelt men de eis dat het onderscheidingsvermogen van de toets, als $\mu = 52$ is, gelijk moet zijn aan 0,90.

a) Hoe groot moet men n nemen?

b) Hoe groot is dan het onderscheidingsvermogen voor $\mu = 51$?

15.5. Van een normaal verdeelde stochastische variabele is de spreiding 2.5. Er wordt een steekproef ter grootte 9 genomen.

a) Geef kritieke zones aan ($\alpha = 0.05$) voor $\bar{x}$ om achtereenvolgens de hypothesen $\mu = -3.0$ en $\mu = 5.0$ tegen de alternatieve hypothesen $\mu \neq -3.0$ resp. $\mu \neq 5.0$ te toetsen.

b) Bepaal bij de hypothese $\mu = 5.0$ de kans op een fout van de tweede soort als $\mu = 1.0$, $\mu = 2.0$, $\mu = 3.0$ en $\mu = 4.0$.

c) Schets het onderscheidingsvermogen van de toets van de hypothese $\mu = 5.0$.

15.6. Een handelaar koopt regelmatig van zekere fabrikant grote partijen goederen. Van deze goederen is één karakteristiek van belang. Deze karakteristiek is in elke partij steeds bij benadering normaal verdeeld met spreiding 5, doch met wisselend gemiddelde. De handelaar wil een partij keuren door het nemen van een steekproef. Bepaal steekproefgrootte en keuringsnorm bij een eenzijdige toets zodat aan de volgende eisen is voldaan:

1) de kans om een partij met μ = 100 te aanvaarden mag maximaal 0,05 zijn;
2) de kans om een partij met μ = 110 af te keuren mag maximaal 0,025 zijn.

§ 16. TOETSEN BIJ EEN NORMALE VERDELING

16.1. A werpt 2000 maal met een dobbelsteen en krijgt 290 maal "6". Tot welke conclusie t.a.v. de zuiverheid van de dobbelsteen leidt dit al naar gelang A een onbetrouwbaarheid 0,01 dan wel 0,05 aanhoudt?

16.2. Een chemicus heeft op theoretische gronden geconcludeerd dat een zekere grootheid de waarde 10 moet hebben. Hij wil deze uitkomst verifiëren door experimentele bepaling van de waarde. Hiertoe voert hij 12 maal een standaardexperiment uit waarvan aangenomen mag worden dat de uitkomst normaal verdeeld is met als spreiding 2 en als verwachting de gezochte waarde.

a) Stel een toets op voor de hypothese $\mu = 10$ ($\alpha = 0,01$).

b) De chemicus vindt het steekproefgemiddelde 9, verwerpt hij nu de hypothese?

16.3. Een eierhandelaar koopt een grote partij eieren van een kippenfokker. Bekend wordt verondersteld dat het gewicht in een homogene partij eieren (zelfde soort kippen, gelijke leeftijd, zelfde fokker) normaal verdeeld is. Voor kippen van deze soort en deze leeftijd wordt aangenomen dat de spreiding in de gewichten der eieren 6 gram bedraagt. De fokker garandeert dat het gemiddelde gewicht in deze partij boven de 60 gram ligt. De handelaar neemt een steekproef van 5 eieren, deze wegen samen 275 gram.
Heeft de koper reden tot klagen? ($\alpha = 0,05$.)

16.4. Een fabrikant van kabels weet uit langdurige ervaring, dat de treksterkte van een bepaalde kabel een normaal verdeelde grootheid is met een gemiddelde $\mu \geq 10$ ton en een standaardafwijking $\sigma = 1$ ton. Onlangs ontving hij een klacht van een klant; deze klant was van mening dat de treksterkte van de kabels lager was dan in het verleden. De fabrikant beweerde daarentegen dat de gemiddelde treksterkte niet kleiner was geworden. Om zijn bewering te toetsen neemt de fabrikant nu een steekproef van 25 stukken kabel. Deze 25 stukken bleken een gemiddelde treksterkte van 9,60 ton op te leveren.
Heeft de fabrikant reden - op basis van deze steekproef - te twijfelen aan zijn eigen bewering?
Neem als onbetrouwbaarheid van de toets:

a) $\alpha = 0,05$;

b) $\alpha = 0,01$. (1970)

16.5. Het gewicht van één sinaasappel van een bepaald soort is bij de tot nu toe gevolgde behandeling van de bomen een normaal verdeelde grootheid $\underline{g}$ met $\mu = 50$ gram en standaardafwijking $\sigma = 2$ gram. Er is een goedkopere behandeling ontwikkeld, waarvan beweerd wordt dat ze even zware sinaasappels (dus geen kleinere) oplevert als die welke tot nu gevolgd wordt. Een kweker wil deze bewering (H_0: $\mu = 50$ gram) toetsen tegen de alternatieve (H_a: $\mu < 50$ gram) waarbij aangenomen mag worden dat de standaardafwijking niet verandert. Een steekproef van 100 sinaasappels heeft een gemiddeld gewicht van 49,65 gram. Heeft de kweker reden om de nieuwe methode niet toe te passen? ($\alpha = 0{,}05$.) (1970)

16.6. In een fabriek staan twee vulmachines, A en B, waarmee flessen worden gevuld met slaolie. Bij een juiste instelling van een machine is de gemiddelde inhoud van een fles 250 gram. Van beide machines mag worden aangenomen dat de gedoseerde hoeveelheid normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 2,5 gram. Om te controleren of de machines goed zijn ingesteld wordt van elke machine de inhoud van 4 flessen nauwkeurig bepaald. De gemiddelde inhoud van de 4 flessen van machine A bedraagt 251,68 gram en het gemiddelde van machine B is 252,68 gram.

a) Toets of machine A op het juiste gemiddelde van 250 gram is ingesteld (onbetrouwbaarheid 0,05).
b) Doe hetzelfde voor machine B.
c) Toets of de instellingen van de machines A en B onderling verschillen (onbetrouwbaarheid 0,05). (1969)

16.7. In een fabricageproces maakt men platen waarvan de dikte normaal verdeeld is met $\mu = 50$ mm en $\sigma = 0.9$ mm. Verkoopbaar zijn platen met een dikte die ligt tussen 48.9 en 51.1 mm. Onbruikbaar zijn platen waarvan de dikte kleiner is dan 47.9 mm of groter dan 52.1 mm. De rest is tweede keus.

a) Bepaal het percentage dat onbruikbaar is (afronden).
b) Bepaal het percentage tweede keus (afronden).
c) Bepaal de kans dat in een productie van 150 stuks 6 of meer platen onbruikbaar zijn.
d) In een partij van 150 stuks vindt men 42 stuks tweede keus. Is dat voldoende reden om aan te nemen dat de instelling slechter is geworden? ($\alpha = 0{,}01$.) (1969)

16.8. Bij een bepaald radio-actief preparaat telt men gemiddeld 252 aanslagen per minuut. Bij een ander preparaat waarvan de radio-activiteit onbekend is telt men 315 aanslagen in één minuut. Is er verschil in activiteit?

§ 17. TOETSEN BIJ EEN BINOMIALE EN EEN POISSON VERDELING

17.1. Men laat een stuiver 20 maal op een harde gladde ondergrond tollen en ziet bij de afloop 15 maal munt boven komen. Hoeveel kans zouden de minder extreme resultaten (6 t/m 14 maal munt) hebben als er géén tendentie tot "munt boven" was? Welke conclusie trekt iemand die de onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05 aanhoudt?

17.2. Ter keuring van een grote partij blikjes conserven die lang bij een grossier opgeslagen zijn geweest, wordt hieruit een steekproef van 120 blikjes genomen. De grossier is van plan alleen dan de partij te verkopen als alle blikjes in de steekproef goed blijken te zijn. Hij vraagt zich echter af hoe groot het percentage bedorven blikjes in dat geval toch nog zou kunnen zijn.

a) Beantwoord deze vraag (neem $\alpha = 0{,}05$).

b) Indien hij eist dat het percentage bedorven blikjes in de partij (bij goedkeuring van de steekproef) niet hoger dan 1% mag zijn, hoe grote steekproef moet hij dan minstens nemen? ($\alpha = 0{,}05$.) (1961)

17.3. Een fabrikant produceert asjes waarvan aangenomen wordt dat de asdiameter normaal verdeeld is met gemiddelde $\mu = 10{,}0$ cm en spreiding $\sigma = 0{,}06$ cm. Een afnemer van deze asjes heeft als tolerantiegrenzen voor de asdiameter $9{,}900 \pm 0{,}177$ cm.

a) Welk percentage der asjes uit de productie valt buiten de tolerantiegrenzen? (Rond Uw antwoord af op een geheel getal.)

b) Hoe groot is de kans dat in een aselecte steekproef van 10 asjes minstens 2 buiten de tolerantiegrenzen vallen?

c) Stel in een steekproef van 10 asjes zijn k asjes die buiten de tolerantiegrenzen vallen. Voor welke waarden van k zal men de aanname omtrent de verdeling van de asdiameter in twijfel trekken? (Neem als onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 5\%$.) (1969)

17.4. Een handelaar verkoopt een grote partij goederen en deelt de koper mee dat er hoogstens 5% ondeugdelijke exemplaren in zitten. De koper neemt om dit te verifiëren een steekproef van 150 stuks en vindt er 10 ondeugdelijke in. Heeft hij recht te reclameren? Neem $\alpha = 0{,}05$. Zo neen, bij welk aantal ondeugdelijke dan wel?

17.5. In een stad zijn de laatste jaren gemiddeld 10 ongelukken per maand gebeurd. In december jl. vonden 15 ongelukken plaats. Ontwerp een eenzijdige toets om uit te maken of dit aantal nog wel van toevallige aard geacht kan worden!

17.6. Een zeker radio-actief preparaat moet vernieuwd worden als het in een omschreven opstelling gemiddeld minder dan 90 aanslagen per minuut op de Geigerteller geeft. Het gaf in een minuut 80 aanslagen. Mag men hieruit concluderen dat het preparaat niet meer aan de eisen voldoet? ($\alpha = 0{,}05$.)

17.7. Hoe luidt in het probleem van de vorige opgave Uw conclusie als in 10 minuten 800 aanslagen zijn geteld?

17.8. Een fabrikant beweert dat een partij van 100 producten een fractie p defecten bevat. Ter controle neemt een afnemer een aselecte steekproef van 10 stuks en vindt er 4 defecten in.
Bepaal in de volgende gevallen de overschrijdingskans:

a) als trekking gebeurt met teruglegging en $p = 1/5$;
b) als trekking gebeurt met teruglegging en $p = 1/100$;
c) als trekking gebeurt met teruglegging en $p = 1/20$;
d) als trekking gebeurt zonder teruglegging en $p = 1/20$.

Wat is de conclusie ten aanzien van de bewering van de fabrikant? (1969)

17.9. Een fabrikant betrekt al jaren transistors van A, die hem gemiddeld 8% defecte levert. Van een vertegenwoordiger B koopt hij een partijtje van 75 stuks die per stuk wat duurder zijn, maar minder defecte zouden bevatten. Hij vindt 5 defecte in deze partij. Is er verschil in percentage defecte tussen de producten van A en B ?

§ 18. BETROUWBAARHEIDSINTERVAL BIJ EEN NORMALE VERDELING

18.1. Geef op grond van het gevonden steekproefresultaat in opgave 16.2 een betrouwbaarheidsinterval voor μ.

18.2. Idem voor het steekproefresultaat uit opgave 16.3.

18.3. Idem voor het steekproefresultaat uit opgave 16.4.

18.4. Men bepaalt met een chemische methode het percentage onzuiverheid van een kleurstof die in voedingsmiddelen wordt gebruikt. De variantie van een bepaling is 0,8 $(\%)^2$. Drie bepalingen geven gemiddeld 4,2%.
Bereken een bovenste betrouwbaarheidsgrens met een betrouwbaarheid van 95% voor het percentage onzuiverheid. Aangenomen mag worden dat het percentage onzuiverheid normaal verdeeld is.

18.5. Van een stochastische grootheid $\underline{x}$ met spreiding 5 worden n onafhankelijke waarnemingen verricht. Hoe groot moet n minstens zijn opdat uit deze waarnemingen een betrouwbaarheidsinterval (α = 0,01) voor het onbekende gemiddelde μ bepaald kan worden, waarvan de lengte hoogstens 1 bedraagt? Eveneens voor lengte hoogstens 2.

18.6. Een telling met een Geigerteller heeft 80 aanslagen in een minuut opgeleverd. Geef een betrouwbaarheidsinterval (α = 0,05) voor het aantal μ per minuut. Doe hetzelfde voor het resultaat 800 aanslagen in 10 minuten.

18.7. Geef voor de stof waarvan de radio-activiteit onbekend is (opgave 16.8) een betrouwbaarheidsinterval voor de verwachting van het aantal aanslagen per minuut (α = 0,05).

18.8. Geef op grond van het gevonden steekproefresultaat in opgave 16.5 een betrouwbaarheidsinterval voor μ.

18.9. In een aselecte steekproef van 300 flessen melk heeft men bij 80% een voldoende vetgehalte geconstateerd. Bepaal een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval (P = 95%) voor het percentage flessen met voldoende vetgehalte in de productie. (Gebruik u_α = 2 in plaats van 1.96.)

§ 18

18.10. Bij een enquête onder 250 sigarettenrokers waren er 60 die merk A rookten en 190 merk B. Geef een 95% betrouwbaarheidsinterval voor het percentage rokers van merk A.

§ 19. BETROUWBAARHEIDSINTERVAL BIJ EEN BINOMIALE EN EEN POISSON VERDELING

19.1. We laten een muntstuk 10 maal tollen. De kans op "kruis" is in elk van de 10 gevallen p. Bereken:

a) als $p = 0.30$ de kans op 7 of meer maal "kruis";
b) als $p = 0.35$ de kans op 7 of meer maal "kruis";
c) als $p = 0.90$ de kans op 7 of minder maal "kruis";
d) als $p = 0.95$ de kans op 7 of minder maal "kruis".

In een steekproef van 10 stuks uit een grote partij vinden we 3 slechte en 7 goede exemplaren.

e) Geef een betrouwbaarheidsinterval voor de "fractie goed" in de hele partij ($\alpha = 0.05$).
f) Het steekproefresultaat versterkt mijn vermoeden dat de kans op goede exemplaren in de totale partij wel groter zal zijn dan 0.30.
Moet ik bij $\alpha = 0.01$ op grond van deze steekproef de hypothese $p = 0.30$ aanvaarden of verwerpen? (1970)

19.2. Van een alternatief geven n waarnemingen x successen.
Bepaal een betrouwbaarheidsinterval (P = 95%) voor de kans p op succes als

a) $n = 10$, $x = 6$;
b) $n = 100$, $x = 60$;
c) $n = 1000$, $x = 600$.

19.3. Op een kantoor valt geen regelmaat in de binnenkomende telefoontjes te bekennen. Hun aantal ($\underline{x}$) wordt gedurende een uur geteld. Geef een betrouwbaarheidsinterval (P = 95%) voor het gemiddelde aantal telefoontjes per uur:

a) als $x = 4$,
b) als $x = 40$.

19.4. In zeker land zijn vorig jaar 4 drielingen geboren. Geef een betrouwbaarheidsinterval ($\alpha = 0.10$) voor het aantal per jaar.

GEMENGDE OPGAVEN

G.1. Bij deze opgave worden alleen antwoorden gevraagd. Voor het paar stochastische variabelen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ is de volgende tabel van kansen gegeven:

$y = 2$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
$y = 1$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$y = 0$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$

Vul in

$P(\underline{x} = 0) =$ ___________, $P(\underline{x} = 1) =$ ___________, $P(\underline{x} = 2) =$ ___________,

$P(\underline{y} = 0) =$ ___________, $P(\underline{y} = 1) =$ ___________, $P(\underline{y} = 2) =$ ___________.

a) Noem A de uitkomst $x = 1$, B de uitkomst $y = 1$. De uitspraak "A en B zijn onafhankelijk" is juist/onjuist
b) De bewering "$\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijk" is juist/onjuist
c) De uitspraak: "Als gebeurtenissen elkaar uitsluiten, dan zijn ze onafhankelijk" is juist/onjuist
d) $\mathcal{E}(\underline{x}) =$ ___________
e) $\mathcal{E}(\underline{x}\underline{y}) =$ ___________
f) $\mathcal{E}(\underline{x} + \underline{y}) =$ ___________
g) $\mathcal{E}(\underline{x}^2) =$ ___________
h) $\mathrm{var}(\underline{y}) =$ ___________
k) $P(\underline{x} = 0 \mid \underline{y} \neq 2) =$ ___________ (1970)

G.2. In zeker experiment is de kans op uitkomst A onbekend. Er is echter een theorie die deze kans op minstens 0,95 stelt. Bij n onafhankelijke herhalingen van hetzelfde experiment wordt in 90% van de gevallen uitkomst A waargenomen. Is dit aanleiding om aan het door de theorie gestelde te gaan twijfelen? Neem $\alpha = 0{,}025$ en beschouw achtereenvolgens de gevallen $n = 10$, $n = 100$ en $n = 250$. (1968)

G

G.3. Een grossier staat op het punt een grote partij van een bepaald artikel te kopen. De fabrikant garandeert dat ten hoogste 5% van de partij defect is. Stel:

a) De grossier neemt een steekproef van n stuks. Bereken voor n = 20, 100 en 400 bij welke aantallen defecte exemplaren in de steekproef hij zal reclameren (α = 2,5%).

b) De grossier lijdt een gevoelig verlies als in feite het percentage defecten 10% of hoger is. Bereken voor de drie waarden van n de kans op het aanvaarden van de partij als dit percentage 10% bedraagt.

c) Vul de volgende conclusie aan: Uit a) en b) blijkt het volgende: als we bij gelijkblijvende onbetrouwbaarheid de steekproefgrootte vergroten, dan wordt de kans op .... (1967)

G.4. De lengte van de dienstplichtigen voor een bepaald jaar is normaal verdeeld met gemiddelde 176 cm en spreiding 6.8 cm. Men wordt afgekeurd (op lengte) als men kleiner is dan 155 cm.

a) Hoe groot is de kans dat een willekeurig (aselect) gekozen rekruut wordt afgekeurd (op lengte)?

b) In een bepaald centrum worden 3000 rekruten gekeurd. Hoe groot is de kans dat er minstens 5 worden afgekeurd?

c) De rekruten langer dan 190 cm worden bij de militaire politie (M.P.) ingedeeld. Hoe groot is de kans dat er van die 3000 minder dan 70 bij de M.P. worden ingedeeld?

d) Voor 18 T.H.E. studenten (aselect gekozen) vonden we voor de gemiddelde lengte 180.6 cm. Aangenomen wordt dat de spreiding in de lengte van T.H.E. studenten dezelfde is als de spreiding in de lengte van de dienstplichtigen. Zijn T.H.E. studenten gemiddeld langer dan deze dienstplichtigen? (Neem als onbetrouwbaarheidsdrempel α = 0.01.) (1966)

G.5. $\underline{x}$ is een continue stochastische variabele met kansdichtheid f(x) en verdelingsfunctie F(x). Stel $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ zijn onafhankelijke waarnemingen van $\underline{x}$. De kleinste onder deze n waarnemingen noemen we $\underline{y}$.

a) Hoe groot is, bij gegeven y, de kans $P(\underline{y} > y)$?

b) $\underline{x}$ is exponentieel verdeeld met parameter λ, dus

$$f(x) = 0 \quad , \quad x < 0$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geq 0 .$$

Toon aan dat $\underline{y}$ eveneens exponentieel verdeeld is met parameter $n\lambda$. (1966)

G.6. Er wordt eerst één dobbelsteen geworpen en daarna een tweede. Elk dergelijk paar worpen $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ geeft een verschil $\underline{v} = \underline{x}_1 - \underline{x}_2$ en een absoluut verschil $\underline{d} = |\underline{x}_1 - \underline{x}_2|$.

a) Bepaal gemiddelde en variantie van $\underline{v}$ en $\underline{d}$.

b) Onderzoek of $\underline{v}$ en $\underline{d}$ onafhankelijk zijn (motiveer Uw antwoord!). (1965)

G.7. De duur van een telefoongesprek is een continue stochastische grootheid $\underline{x}$. De tijdseenheid is de minuut. Gegeven is, dat de kans dat een gesprek langer duurt dan zes minuten, gelijk is aan 0.05. Men meet steekproefsgewijs lengten van telefoongesprekken.

a) Hoe groot is de kans, dat er in een steekproef van 10 gesprekken precies 2 voorkomen die langer duren dan zes minuten? (Antwoord in formule en uit S.C.)

b) Hoe groot is de kans, dat er in een steekproef van 200 gesprekken meer dan 15 gesprekken voorkomen, die langer duren dan zes minuten?

c) Gegeven wordt nog, dat $\underline{x}$ exponentieel verdeeld is met kansdichtheid

$$f(x) = 0 \quad \text{voor } x < 0 \,, \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{voor } x \geq 0 \,.$$

Bereken λ, indien nodig met S.C. 9.5.

d) Hoe lang duurt "gewoonlijk" een telefoongesprek? (1967)

G.8. Men speelt een spel met één dobbelsteen. Het spel eindigt als bij de eerste worp de uitkomst groter is dan 2. Zo niet, dan wordt nog een keer geworpen en als uitkomst geteld het totaal aantal ogen verkregen bij de eerste en bij de tweede worp.

a) Maak een kanstabel voor de mogelijke uitkomsten van het spel.

b) Bereken de verwachtingswaarde.

c) Bereken de spreiding. (1968)

G.9. a) In een vaas bevinden zich 6 rode en 4 witte ballen. Men trekt vijfmaal aselect met teruglegging 1 bal uit deze vaas. Hoe groot is de kans dat men hierbij minstens viermaal een rode bal trekt?

b) Men heeft een aantal vazen $V_0, V_1, V_2, \ldots, V_{10}$. In de vaas V_k bevinden zich k rode, 10 - k witte ballen (k = 0,1,...,10). Men kiest aselect één van de elf vazen en trekt daarna vijfmaal aselect met teruglegging uit de gekozen vaas.

1) Hoe groot is de kans, dat men hierbij minstens viermaal een rode bal trekt?
2) Men besluit dat de vaas meer rode dan witte ballen bevat, indien men minstens viermaal een rode bal trekt. Hoe groot is de kans, dat deze conclusie onjuist is? (1968)

G.10. Een bedrijf produceert draad met een treksterkte die bij goede productieomstandigheden een verwachting heeft van 151 kg en een standaardafwijking van 12 kg, terwijl aangenomen kan worden dat de treksterkte normaal verdeeld is. Men controleert de dagelijkse productie o.a. door het meten van de treksterkte van 9 stukken draad.

a) Hoe groot is de kans om bij de 9 metingen van een dag een gemiddelde treksterkte kleiner dan 145 kg te vinden?
b) Hoe groot is de kans om in 24 dagen hoogstens 5 dagen te hebben waarin de gemiddelde treksterkte uit de steekproef onder de 145 kg blijft?
c) Hoe groot is de kans om in 200 dagen hoogstens 20 van zulke dagen te hebben? (1968)

G.11. Gegeven zijn twee discrete stochastische variabelen $\underline{x}$ en $\underline{y}$, $\underline{x}$ met uitkomstenverzameling $\{0,1,2\}$ en $\underline{y}$ met uitkomstenverzameling $\{0,1\}$. Verder zijn de volgende kansen gegeven:

$P[\underline{x} = 0, \underline{y} = 0] = 0.10$; $P[\underline{x} = 1, \underline{y} = 0] = 0.20$; $P[\underline{x} = 2, \underline{y} = 0] = 0.10$;

$P[\underline{x} = 0, \underline{y} = 1] = 0.15$; $P[\underline{x} = 1, \underline{y} = 1] = 0.30$; $P[\underline{x} = 2, \underline{y} = 1] = 0.15$.

a) Bereken $P[\underline{x} = 1]$; $P[\underline{x} > 0 \mid \underline{y} > 0]$; $\mathcal{E}(\underline{x})$; $\text{var}(\underline{x})$.
b) Zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk? Motiveer Uw antwoord. (1969)

G.12. Men werpt 420 maal met een dobbelsteen (onafhankelijke worpen); $\underline{x}$ is de stochastische variabele die het totaal aantal ogen van deze worpen aangeeft.

a) Bereken $\mathcal{E}(\underline{x})$ en $\sigma(\underline{x})$.
b) Door welke verdeling mag men de verdeling van $\underline{x}$ benaderen en op grond van welke stelling?
c) Bepaal nu de kans $P[\underline{x} \geq 1400]$. (1969)

G.13. In een loterij worden zeer vele loten verkocht; de kans op een prijs bij het kopen van een lot is 1 op 50. Bepaal het kleinste getal n zodanig, dat men bij het kopen van n loten een kans groter dan 0.5 heeft op tenminste één prijs. (1969)

G.14. In Frankrijk wordt een ja-neen-referendum gehouden. Men verwacht beslist een meerderheid voor "neen". Om een indruk te krijgen van de mogelijke uitslag neemt men een aselecte steekproef van 3600 personen. Hiervan stemt 51% "neen". Is dit resultaat voor de aanhangers van "neen" voldoende reden tot juichen? (Neem als onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0.05$.) (1969)

G.15. In een magazijn heeft men twee grote en even grote partijen asjes opgeslagen. Van partij A is de diameter normaal verdeeld met verwachting 1,25 cm en een standaardafwijking 0,05 cm, van partij B is de diameter normaal verdeeld met verwachting 1,20 cm en een standaardafwijking 0,04 cm. Een asje is bruikbaar indien de diameter ligt tussen de tolerantiegrenzen 1,12 en 1,32 cm.

a) Welk percentage van partij A en van partij B is bruikbaar?

Door een vergissing geraken de partijen geheel door elkaar.

b) Welk percentage van de totale partij is nu bruikbaar?

c) Bereken de verwachting van de diameter van de asjes in de totale partij. (1969)

G.16. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ neemt de waarde 0,1,2 aan met kansen respectievelijk 1/2, 1/6, 1/3. Een van $\underline{x}$ onafhankelijke stochastische grootheid $\underline{y}$ neemt de waarden 1,2 aan met kansen respectievelijk 2/5, 3/5. Men stelt $\underline{z} = 3\underline{x} + 2\underline{y}$.

a) Beschrijf het kansveld van $\underline{z}$.

b) Welke relatie bestaat tussen de verwachtingen van $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$?

c) Welke relatie bestaat tussen de varianties van $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$?

d) Bereken $P(\underline{z} > 6 \mid \underline{y} = 2)$. (1969)

G.17. Een machine vult pakjes met een bepaald product. Het nominale gewicht bedraagt 250 gram. Het gemiddelde vulgewicht kan worden ingesteld. Er mag worden aangenomen dat het gewicht normaal is verdeeld met een standaardafwijking van 1 gram. Op geregelde tijden wordt een steekproef van 4 pakjes gewogen om te controleren of de machine-instelling nog goed is. Wanneer het gemiddelde van deze steekproef meer dan 1 gram afwijkt van het nominale gewicht (naar boven of naar beneden) wordt de vulmachine bijgeregeld.

a) Wat is de kans dat bij 10 controles minstens één keer wordt bijgeregeld als de machine telkens goed staat ingesteld? De numerieke waarde van deze kans hoeft niet te worden berekend.

b) Wat is de kans dat op grond van één steekproef in de juiste richting wordt bijgeregeld als de instelling 0,5 gram te hoog is?

c) Om een afwijking beter te kunnen vaststellen wordt de steekproefgrootte opgevoerd tot 9 pakjes. De kans op ten onrechte bijregelen (dus bij een juiste instelling) wordt gelijk gehouden aan de oorspronkelijke waarde. Bij welk verschil tussen steekproefgemiddelde en nominale waarde moet nu worden ingegrepen?

d) Hoe groot wordt in het onder c) beschreven geval de kans om een afwijking van 0,5 gram van de instelling te ontdekken, zodat de instelling verbeterd kan worden? (1969)

G.18. Gegeven is dat de functie $f(\xi) = e^{\alpha|\xi|}$ $(-\infty < \xi < \infty)$ frequentiefunctie is van de stochastische veranderlijke $\underline{x}$; hierin is α een constante.

a) Bepaal α.

b) Bereken het gemiddelde van $\underline{x}$.

c) Bereken de spreiding van $\underline{x}$.

d) Bereken de kans dat $\underline{x}$ minstens tweemaal de spreiding van het gemiddelde afwijkt. (1964)

T

Examen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (statistiek) op dinsdag 6 januari 1970, 9.00-10.30 uur.

1. Ik heb een vrij groot aantal blikjes vis nodig, die ik voordelig kan krijgen omdat, zo zegt de winkelier, er wel eens een slecht blikje tussen zit, gemiddeld één op de twintig. Ik overweeg op deze voorwaarde de koop, maar koop er eerst zes op proef. Hiervan blijken er twee bedorven. Heb ik nu reden aan de uitspraak van de winkelier te twijfelen, als ik een onbetrouwbaarheidsdrempel van 0.05 aanhoud?

2. De toepassing van een bepaald geneesmiddel blijft gemiddeld in één van de tien ziektegevallen zonder succes. Men denkt het middel door zeker procédé verbeterd te hebben en neemt het zo in gebruik bij de patiënten. Kan men op de volgende drie tijdstippen op statistische gronden concluderen, dat het middel werkelijk verbeterd is?

   a) Nadat 20 patiënten met het "verbeterde" middel behandeld zijn, waarbij in één geval zonder succes,

   b) nadat (in totaal) 40 patiënten zijn behandeld, waarbij in twee gevallen zonder succes,

   c) na behandeling van (in totaal) 160 patiënten, waarbij in 8 gevallen zonder succes.

3. A, B en C spelen een spel met lucifers (Bamzaaien). Ieder neemt een aantal lucifers ("geen" mag ook) in de gesloten hand, A hoogstens 3, B en C elk hoogstens 2. Ieder kiest met gelijke kansen uit zijn mogelijkheden. De stochastische variabele aangevende het totaal van de aantallen lucifers, die A, B en C in de hand nemen, wordt aangeduid door $\underline{t}$.

   a) Bereken $\mathcal{E}(\underline{t})$ en $\sigma(\underline{t})$.

   De spelers moeten vervolgens om beurten raden (in de volgorde A, B, C), hoeveel lucifers zij samen in de handen hebben. Wie dit aantal raadt, wint het spel. Ieder raadt zo, dat zijn kans op winnen het grootste is, behoudens de regel dat het niet geoorloofd is een getal te raden dat reeds door een vorige speler gezegd is.
   Gegeven is, dat in een concrete situatie A 3 heeft geraden en B twee lucifers in de hand heeft.

   b) Hoeveel lucifers heeft A in de hand? Welk getal raadt B ?
   Geef een duidelijke motivering van Uw antwoorden.

T

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (statistiek) op maandag 19 januari 1970, 9.00-10.30 uur.

1. Bepaal de kans op

   a) tenminste één 6 bij 5 worpen met een dobbelsteen;
   tenminste viermaal 6 bij 20 worpen met een dobbelsteen;

   b) tenminste achtmaal 6 bij 40 worpen met een dobbelsteen.

   c) Wat is de limiet van P_k voor $k \to \infty$ en waarom? Hierin is P_k = de kans op tenminste k maal 6 bij 5k worpen met een dobbelsteen.

2. "Dit blik verf is goed voor 8 tot 12 m^2."
Noemen we de oppervlakte in vierkante meters, die met één blik geverfd kan worden $\underline{x}$, dan kan men deze slogan bijv. interpreteren als:

$$\underline{x} \text{ is normaal verdeeld met } \mu - 2\sigma = 8,\ \mu + 2\sigma = 12 \ .$$

   a) Bereken de kans dat men met een blik zelfs niet 7.25 m^2 kan verven.
   Wat is de kans dat dit bij een partij van 100 stuks bij meer dan één blik het geval is?

   b) Hoeveel m^2 kan men tenminste verven (met een kans van 0.95) bij de verwerking van 100 blikken?

T

Examen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (statistiek) op dinsdag 9 juni 1970, 9.00-10.30 uur.

1. De levensduur $\underline{x}$ in uren van een bepaald type lamp heeft een (negatief) exponentiële verdeling met $\lambda = 0.01$.

   a) Hoe groot is de gemiddelde levensduur?

   b) Bepaal x_0 zodat $P(\underline{x} < x_0) = 0.50$ (tabel 9.5).

   c) Bereken $P(\underline{x} > 420)$.

   d) Bereken de kans dat in een steekproef van $n = 200$ stuks meer dan $k = 3$ exemplaren langer branden dan 420 uur?

   e) Idem als d) met $n = 5400$ en $k = 90$.

2. De lengte $\underline{x}$ van dienstplichtigen is normaal verdeeld met $\mu = 172.00$ cm en $\sigma = 6.08$ cm.

   a) Bereken $P(\underline{x} < 162.00)$.

   b) Bereken de kans dat in een groep van 20 precies 4 personen zijn, kleiner dan 162.00 cm.

   c) Men is van mening dat Limburgers gemiddeld kleiner zijn dan de doorsnee dienstplichtigen. Men neemt een steekproef van 37 Limburgers en vindt voor die groep een gemiddelde lengte van 169.43 cm. Beantwoord de vraag: "Zijn Limburgers gemiddeld kleiner dan de doorsnee dienstplichtigen?" met een betrouwbaarheid van 95%.

   d) In een groep van 15 waarin precies 4 personen zijn afkomstig uit Maastricht, worden er 3 aangewezen voor een bepaalde taak. Wat is de kans dat ze alle drie uit Maastricht afkomstig zijn?

T

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (statistiek) op woensdag 17 juni 1970, 9.00-10.30 uur.

1. U speelt mee in een voetbaltoto bestaande uit 10 wedstrijden, zonder enige kennis over voetbal of deelnemende elftallen. U vult Uw formulier in door voor elke wedstrijd met gelijke kansen te loten uit de drie mogelijkheden:

   A wint
   B wint
   Gelijkspel.

   U wint in de toto een:

   1e prijs: als U 10 uitslagen goed hebt;
   2e prijs: als U 9 uitslagen goed hebt;
   3e prijs: als U 8 uitslagen goed hebt;
   poedelprijs: als U minder dan 8, maar meer dan 4 uitslagen goed hebt.

   a) Bepaal de kans op elk van deze prijzen.
   b) Hoe vaak moet U meedoen in de toto - elke keer weer zonder benul van voetballen - opdat de kans dat U minstens één keer een derde prijs wint groter is dan of gelijk is aan 0,95 ?

   Uw buurman zegt dat hij een voetbalkenner is. U gelooft daar niets van en U beweert dat hij, evenals U, niets van voetballen afweet en dat de kans dat hij een prijs wint hoogstens gelijk is aan de kans dat Uzelf een prijs wint. U wilt deze bewering toetsen. Uw buurman speelt 20 keer mee en wint 5 keer een prijs.

   c) Is dit resultaat voor U aanleiding om aan Uw bewering te gaan twijfelen, als U een onbetrouwbaarheidsdrempel van 5% accepteert?

2. Een machine spoelt staalkabel op een klos. De lengte van de kabel op een klos is een normaal verdeelde grootheid. De gemiddelde lengte van de kabel, die op een klos wordt gespoeld, kan worden ingesteld. De standaardafwijking in de lengte van de kabel op een klos bedraagt - onafhankelijk van de ingestelde gemiddelde lengte - 0,5 meter. De machine wordt ingesteld op een gemiddelde lengte van 250 meter. Aan het eind van iedere werkdag wordt van 4 klossen, aselect getrokken uit de dagproductie, de lengte van de opgespoelde kabel bepaald. Indien het gemiddelde van deze steekproef méér dan 0,49 meter van 250 meter afwijkt, wordt de machine opnieuw op 250 meter ingesteld.

a) Stel dat de machine gedurende een werkdag correct is ingesteld. Bepaal de kans dat de machine aan het eind van de werkdag toch opnieuw wordt ingesteld.

b) Stel dat de machine gedurende een gehele 5-daagse werkweek correct is ingesteld. Bepaal dan de kans dat de machine in deze week toch tenminste éénmaal opnieuw wordt ingesteld.

c) Er komt een nieuwe bedrijfsleider. Deze zegt: "Uw beleid is fout. De kans op een klos met kabellengte kleiner dan 250 meter is te groot." De machine-instelling moet gewijzigd worden en wel zo dat de kans dat een klos minder dan 250 meter kabel bevat slechts 0,01 bedraagt.
Op welke lengte moet de machine ingesteld worden?

T

Examen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (statistiek) op dinsdag 12 januari 1971, 9.00-11.00 uur.

1. Gegeven: vaas I bevat 4 witte en 6 zwarte ballen;
   vaas II bevat 7 witte en 3 zwarte ballen.

   a) Wat is de kans op 2 witte ballen bij trekking uit vaas I zonder teruglegging?

   b) Men werpt met een dobbelsteen en trekt zonder teruglegging:
      bij de worpen 1 en 2, twee ballen uit vaas I,
      bij de worpen 3, 4 en 5 twee ballen uit vaas II,
      bij de worp 6 een bal uit vaas I en een uit vaas II.
      Bereken de kans dat de twee getrokken ballen wit zijn.

2. Op een station pleegt de helft van de treinen te laat en de helft te vroeg aan te komen. Op 13 januari komen van de 64 treinen er 42 te laat aan. De stationschef wijt dit aan het winterse weer dat zijns inziens gewoonlijk vertragingen tot gevolg heeft, en beweert dat de kans p op "aankomen met vertraging" op deze dag groter zou zijn dan $\frac{1}{2}$.
   Toets de hypothese dat p op deze dag toch gelijk is aan $\frac{1}{2}$ met een betrouwbaarheid van 99%.

3. Op een station komen treinen gemiddeld op tijd aan met een afwijking die een spreiding van 1 minuut vertoont en die praktisch normaal verdeeld is.
   Men let alleen op de te laat aankomende treinen.

   a) Welke vertraging wordt door de helft der te laat aankomende treinen overschreden?

   b) Wat is de gemiddelde vertraging van de te laat aankomende treinen?

4. (alleen Wiskunde 31) Bij de fabricage van vloerbedekking maakt men van elke kleur uit het assortiment eens per kwartaal voldoende voor de vraag in die 13 toekomstige weken. (Het hele assortiment wekelijks maken zou veel tijdverlies geven bij het verwisselen van walsen en veel afval bij het opnieuw afstalen van de kleur.)

a) Als de vraag per week naar een bepaalde kleur gamma verdeeld is (verwachting 810 m, standaardafwijking 973,50 m), hoeveel moet men dan produceren om met een kans van 95% aan de vraag in dat kwartaal te kunnen voldoen?

b) Welke hoeveelheid zal door de vraag in dat kwartaal met een kans van 95% worden overtroffen?

T

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (statistiek) op dinsdag 26 januari 1971, 9.00-10.30 uur.

1. Van de stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ is gegeven:

$$P(\underline{x} = -1) = \tfrac{1}{2}, \qquad P(\underline{x} = 1) = \tfrac{1}{2},$$

$$P(\underline{y} = -1) = \tfrac{1}{2}, \qquad P(\underline{y} = 1) = \tfrac{1}{2},$$

$$P(\underline{x} = 1 \text{ èn } \underline{y} = 1) = \frac{1}{8}\,.$$

a) Bepaal $P(\underline{x} = 1 \text{ èn } \underline{y} = -1)$.

b) Bepaal var $\underline{z}$ als $\underline{z} = \underline{x}.\underline{y}$.

c) Bepaal var $\underline{u}$ als $\underline{u} = \underline{x} + \underline{y}$.

d) Verifieer in dit voorbeeld de betrekking

$$\text{var}(\underline{x} + \underline{y}) = \text{var}\,\underline{x} + \text{var}\,\underline{y} + 2\,\text{cov}(\underline{x},\underline{y})\ .$$

N.B. $\text{cov}(\underline{x},\underline{y}) = \mathcal{E}(\underline{x} - \mathcal{E}(\underline{x}))(\underline{y} - \mathcal{E}(\underline{y}))$
$= \mathcal{E}(\underline{x}.\underline{y}) - \mathcal{E}(\underline{x}).\mathcal{E}(\underline{y})$.

2. De kijkdichtheid van een bepaald T.V. programma bedroeg in het verleden 50%. De betreffende omroeporganisatie heeft sterk de indruk dat de kijkdichtheid is achteruitgegaan.
Met behulp van een enquête wil men nagaan of dit inderdaad het geval is. Van 400 aselect gekozen T.V. kijkers blijken er 182 naar het bewuste programma te hebben gekeken.

a) Welke conclusie zal de omroep uit dit waarnemingsmateriaal kunnen trekken? ($\alpha = 0{,}05$)

b) Een dagblad beweert dat de kijkdichtheid van het bewuste programma gedaald is naar 40%. Geeft de uitslag van de enquête de omroep aanleiding om dit tegen te spreken? ($\alpha = 0{,}05$)

3. De onderling onafhankelijke stochastische grootheden $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ hebben alle een exponentiële verdeling met parameter λ. De stochastische grootheid $\underline{z}$ wordt gedefinieerd door $\underline{z} = \min\{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n\}$.

a) Bepaal $P(\underline{z} > z)$.

b) Bepaal de verwachting en de variantie van $\underline{z}$.

T

Examen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (statistiek) op dinsdag 8 juni 1971, 9.00-10.30 uur.

1. We gooien met twee dobbelstenen. Het aantal ogen dat bovenkomt duiden we aan met $\underline{d}_1$ resp. $\underline{d}_2$ en hun maximum met $\underline{m}$.

   a) Bepaal $P(\underline{m} = 3)$.

   b) Bepaal $\mathcal{E}\,\underline{m}$.

   c) Zijn $\underline{m}$ en $\underline{d}_1$ afhankelijk? Motiveer Uw antwoord.

2. Een grote partij appels wordt te koop aangeboden. Hoe groot is de kans dat ten hoogste 1/8 deel van een steekproef van n stuks niet voor consumptie geschikt is, als bekend is dat 90% van de hele partij voor consumptie geschikt is.

   Bereken de kans voor:

   a) $n = 8$, b) $n = 80$, c) $n = 400$.

3. Een fabriek vervaardigt staaldraad, waarvan de treksterkte normaal verdeeld is met gemiddelde 140 en standaardafwijking 8 kg/mm^2. Het fabriekslaboratorium heeft een nieuw procédé ter vervaardiging van staaldraad ontwikkeld, waarvan men verwacht dat het de gemiddelde treksterkte vergroot. Er wordt een steekproef genomen van 64 volgens het nieuwe procédé vervaardigde proefstukken draad.

   a) Bij welke steekproefuitkomsten wordt de hypothese H_0 verworpen met een onbetrouwbaarheid 0.01? (H_0 : Het nieuwe procédé levert dezelfde gemiddelde treksterkte als het oude.)

   Veronderstel nu verder dat het nieuwe procédé een gemiddelde treksterkte oplevert van 142 kg/mm^2, terwijl de standaardafwijking hetzelfde blijft.

   b) Hoe groot is dan de kans dat H_0 niet wordt verworpen?

   c) Bepaal de minimale steekproefgrootte zodat de kans genoemd in b) niet groter is dan 0.05.

T

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (statistiek) op donderdag 17 juni 1971, 9.00-10.30 uur.

1. A en B spelen een toernooi dat hoogstens uit 3 wedstrijden bestaat. De kans om een wedstrijd te winnen is voor A gelijk aan 2/3, voor B aan 1/3. Heeft één van hen twee wedstrijden achter elkaar gewonnen dan is hij winnaar. Is dat na drie wedstrijden niet het geval, dan wordt de winnaar door loting aangewezen waarbij A en B gelijke kansen hebben.

   a) Bereken de kansen dat:
      A winnaar wordt zonder loting,
      B winnaar wordt zonder loting,
      het lot moet beslissen wie als eerste eindigt.
   b) Bereken de kansen dat A resp. B, eventueel na loting, als winnaar eindigt.
   c) Bereken onder de voorwaarde dat A de eerste wedstrijd wint, de voorwaardelijke kansen dat A resp. B, na eventuele loting, winnaar wordt.

2. Er wordt een huis-aan-huis-verkoop van doosjes lucifers gehouden in het kader van een actie voor een ontwikkelingsproject. Er zijn twee formaten: kleine doosjes van een kwartje en grotere van een gulden. De publieke opinie staat zo sterk achter deze actie dat iedereen één doosje koopt. U verkoopt op 20 onafhankelijke adressen een doosje lucifers. Bij elk adres is de kans dat U een doosje van een kwartje verkoopt gelijk aan 4/5 en de kans een doosje van een gulden te verkopen gelijk aan 1/5.

   a) Bepaal de kans dat U op minstens 12 van de 20 adressen een doosje van een kwartje verkoopt.
   b) Bereken het verwachte aantal adressen waarop U een doosje van een gulden verkoopt.
   c) Bereken de verwachting en variantie van de totaalopbrengst van de verkoop aan de 20 adressen.

3. Een tuinder heeft een nieuwe beregenings- en verwarmingsinstallatie in zijn tomatenkassen laten aanleggen. De installateur beweert dat de kans p, dat een tomatenplant géén vruchten zal voortbrengen, voortaan hoogstens 0,05 is. De tuinder vindt dit toch wel aan de lage kant en vermoedt dat deze kans groter is. Om de bewering van de installateur tegen zijn vermoeden te toetsen neemt hij een aselecte steekproef van tomatenplanten in de kassen en telt na verloop van tijd het aantal daarvan, dat geen vruchten heeft voortgebracht.

a) Bepaal de kans dat minstens 6 planten van een steekproef van 20 planten geen tomaten voortbrengen als $p = 0{,}05$.

b) Bepaal een rechterkritieke waarde voor het aantal planten in een steekproef van 20 planten, dat geen tomaten voortbrengt als $p = 0{,}05$ en de onbetrouwbaarheid $\alpha = 0{,}025$.

c) Heeft de tuinder reden de uitspraak van de installateur te verwerpen als 3 planten van een steekproef van 20 geen tomaten voortbrengen en als hij uitgaat van de kritieke waarde, die in vraag 3b bepaald is?

d) Heeft de tuinder reden de uitspraak van de installateur te verwerpen, wanneer 30 planten van een steekproef van 400 geen tomaten voortbrengen? Onbetrouwbaarheid: $\alpha = 0{,}025$.

T

Examen/tentamen Wiskunde 31 (statistiek) op dinsdag 11 januari 1972, 9.00-10.30 uur.

1. In een telefooncentrale komt per 15 seconden gemiddeld 1 aanvraag voor een gesprek binnen.
   Van 5 opeenvolgende aanvragen noteert men tijd van binnenkomst van de eerste ($\underline{t}_1$) en laatste aanvraag ($\underline{t}_5$). Noem $\underline{t} := \underline{t}_5 - \underline{t}_1$ in seconden.

   a) Welke verdeling heeft $\underline{t}$?
   Bepaal $\mathcal{E}\,\underline{t}$.

   b) Bepaal t_M zodat $P(\underline{t} \le t_M) = 0,99$.

   c) Bepaal t_m zodat $P(\underline{t} \le t_m) = 0,01$.

2. Gegeven: Indien een klant bij een zeker loket aankomt heeft hij een kans $\frac{1}{3}$ dat hij direkt geholpen wordt en een kans $\frac{2}{3}$ dat hij moet wachten tot hij aan de beurt is. De voorwaardelijke kans dat hij langer moet wachten dan x minuten onder de voorwaarde dat hij moet wachten, bedraagt e^{-x}.

   a) Bereken de kans dat iemand die bij het loket aankomt langer dan 3 minuten moet wachten.

   b) Noem $\underline{x}$ de stochastische variabele die de wachttijd aangeeft van iemand die bij het loket aankomt. (De verdeling van $\underline{x}$ is dus gemengd discreet-continu.)
   Schets de grafiek van de functie $F(x) = P(\underline{x} \le x)$.

   c) Bereken de verwachtingswaarde van $\underline{x}$.

3. Bij een onderzoek van benzinemaatschappijen blijkt dat bij het gebruik van merkbenzine het verbruik van een bepaalde wagen 1 op 10 is.
   Met goedkopere witte benzine zal je gemiddeld met een liter minder kilometers afleggen, beweert men.
   Witte pomphouders stellen zich teweer en rijden proefritten onder dezelfde omstandigheden als bij het eerste onderzoek, doch nu met witte benzine, en leggen 365,5 km af met 36 liter.
   Als we aannemen dat de afstand die men per liter kan afleggen normaal verdeeld is, met gemiddelde μ en standaardafwijking 0,5 km, is het dan mogelijk met een betrouwbaarheid van 95% een uitspraak te doen die de bewering: "Met witte benzine rijd je minder kilometers" logenstraft?

Examen/tentamen Wiskunde 49 (statistiek) op dinsdag 11 januari 1972,
9.00-10.30 uur.

1. Men werpt driemaal met een dobbelsteen.
   Zij A de uitkomst: de som van de eerste en tweede worp is even;
   en B de uitkomst: het produkt van de drie worpen is even.

   a) Bereken P(A), P(B).

   b) Ga na of A en B onafhankelijk zijn.

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 31.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 31.

T

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (statistiek) op maandag 24 januari 1972, 9.00-10.30 uur.

1. Men werpt één keer met vijf dobbelstenen.

   a) Wat is de kans op drie of meer zessen?

   b) Wat is de kans op "full house"?
   Full house is een term uit het pokerspel waarmee wordt bedoeld een worp bestaande uit tweemaal een a en driemaal een b met $a \neq b$.

2. Een student vindt bij opgave 1b als antwoord $\frac{1}{30}$.
Hij vertrouwt dit niet en wil uitgaande van de veronderstelling $p = \frac{1}{30}$ een aantal malen pokeren om zijn antwoord experimenteel te verifiëren.
Hij gooit 90 maal met vijf dobbelstenen en vindt 7 maal "full house".
Als hij een onbetrouwbaarheid van 5% accepteert ondersteunt dit experiment dan zijn wantrouwen of niet?

3. Een hotelbedrijf heeft bij het aardewerk, dat in gebruik is, geconstateerd dat de kans, dat een bord 2,08 jaar of minder heel blijft, precies $\frac{1}{2}$ is.

   a) Bereken $\mathcal{E}\underline{x}$ in de veronderstelling dat de levensduur $\underline{x}$ van borden een exponentiële verdeling heeft.

   b) Wat is de kans dat een bord langer dan 11 dagen heel blijft? (1 jaar = = 365 dagen.)

   c) Wat is de kans dat in een partij van 225 stuks er binnen 2,08 jaar al meer dan 130 stuk zijn?

Examen/tentamen Wiskunde 31 (statistiek) op dinsdag 6 juni 1972,
9.00-10.30 uur.

1. De variabele $\underline{t}$ heeft een rechthoekige (d.i. uniforme of homogene) verdeling op $[-1,2]$.

   a) Bereken $P(\underline{t}^2 \leq \frac{1}{4})$.

   b) Bereken $P(\underline{t}^2 \leq 3)$.

   c) Bereken de verdelingsfunctie $F(x) = P(\underline{x} \leq x)$ voor de stochastische variabele $\underline{x} = \underline{t}^2$. Schets de grafiek van $F(x)$.

2. In een garage heeft 2% van de klanten nog klachten na het uitvoeren van een 10.000 km beurt. Men neemt na het vertrek van de chefmonteur een nieuwe in dienst. In de proeftijd van de nieuwe chefmonteur komen van de 200 uitgevoerde beurten klachten binnen van 8 klanten. De directie overweegt de man niet in vaste dienst aan te stellen. Zij meent dat het werk nu minder zorgvuldig wordt uitgevoerd dan te voren.
   Is deze conclusie statistisch te rechtvaardigen indien men $\alpha = 0,05$ aanhoudt?

3. De maandelijkse vraag naar televisietoestellen in een bepaald warenhuis is gamma-verdeeld; het gemiddelde is 60, de standaardafwijking 20.

   a) Bepaal het aantal toestellen dat in 90% van de gevallen voldoende is om aan de vraag per maand te kunnen voldoen.

   b) Bepaal de kans op buiten voorraad raken in een bepaalde maand, indien aan het begin van de maand 105 toestellen in voorraad zijn.

   c) Hoeveel toestellen zouden er in voorraad moeten zijn aan het begin van een kwartaal om aan de vraag in dat kwartaal in 95% van de gevallen te kunnen voldoen?

T

Examen/tentamen Wiskunde 49 (statistiek) op dinsdag 6 juni 1972,
9.00-10.30 uur.

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 31.

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 31.

3. Bij een enquête gehouden onder n aselect gekozen Nederlanders spreekt 51% zich uit voor een regering bestaande uit vertegenwoordigers van PvdA, KVP, ARP en CHU. In een krant wordt een bespreking van de enquête gegeven. De kop boven het artikel luidt: "De meerderheid van ons volk wil een regering van PvdA en Confessionelen".
Hoe groot zou n tenminste geweest moeten zijn (neem een tweezijdige toets met $\alpha = 0,05$) om deze uitspraak te rechtvaardigen?

o

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (statistiek) op donderdag 15 juni 1972, 9.00-10.30 uur.

1. a) Men werpt met een dobbelsteen éénmaal; is de uitkomst een getal < 3, dan vervalt de eerste worp en wordt één keer opnieuw gegooid.
   $\underline{x}$ is de stochastische variabele voorstellende de aldus te verkrijgen uitkomst.
   Bereken $\mathcal{E}\,\underline{x}$ en $\sigma(\underline{x})$.

   b) Men werpt met twee dobbelstenen éénmaal; elke steen waarvan de uitkomst een getal < 3 is, wordt, evenals bij a), één keer overgegooid.
   $\underline{y}$ is de stochastische variabele voorstellende de som van de getallen die uiteindelijk door beide stenen worden aangewezen.
   Bereken $\mathcal{E}\,\underline{y}$ en $\sigma(\underline{y})$.

2. In een aardewerkfabriek worden verschillende typen bloempotten in een vormmachine gemodelleerd, vervolgens gedroogd, afgewerkt, gebakken enz. Van een bepaald type pot valt tijdens de bewerking gemiddeld 10% af. Op een zeker moment worden 216 potten van dit type besteld.

   a) Als de bedrijfsleider opdracht geeft om 240 potten te laten maken, hoe groot is dan de kans, dat de bestelde potten geleverd kunnen worden?

   b) Hoeveel potten moeten op de vormmachine gemaakt worden, opdat het bestelde aantal potten met een waarschijnlijkheid van 99,9% kan worden geleverd? (Benader u_α door een geheel getal.)

3. Op theoretische gronden verwacht men dat een bepaalde grootheid kleiner of gelijk is aan 7. Om dit te verifiëren worden 100 waarnemingen verricht. De standaardafwijking van één enkele waarneming is 4,5. Men vindt voor het gemiddelde van de 100 waarnemingen 8,1.
   Is dit resultaat, indien een uitspraak met een betrouwbaarheid van 0,99 wordt verlangd, in overeenstemming met de theorie?

T

Examen/tentamen Wiskunde 31 (statistiek) op dinsdag 9 januari 1973, 9.00-10.30 uur.

1. Bij een loterij kan elke deelnemer één lot per trekking kopen. De kans op een prijs is 0.1. Iemand is van plan aan alle trekkingen deel te nemen en vraagt zich af wat de kans is, dat hij in de 16e trekking zijn derde prijs wint. Bereken deze kans.

2. In een fabriek liggen 4 orders op afwerking te wachten. De bewerkingstijd per order is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van een halve dag.
   a) Bepaal het aantal dagen dat nodig is om met een kans van 95% vier orders te kunnen afwerken, als ze na elkaar worden uitgevoerd.
   b) Wat is de kans dat de 4 orders in 3 dagen zijn afgewerkt?

3. Een bedrijf dat motoren assembleert is voor de montage van één motor afhankelijk van toeleveringsbedrijven voor 20 onderdelen. Stel dat de levertijd van elk van de onderdelen exponentieel verdeeld is met een gemiddelde levertijd van een maand voor elk onderdeel. Bovendien nemen we aan dat de levertijden onafhankelijk zijn.
   a) Bepaal de kans, dat de levertijd van één onderdeel ten hoogste 2 maanden bedraagt.
   b) Op een moment dat tien onderdelen bij het assemblagebedrijf in voorraad zijn, bestelt een klant een motor, waarbij hij te kennen geeft deze binnen twee maanden te willen hebben.
   Bepaal de kans dat het bedrijf niet aan deze wens zal kunnen voldoen, als men onmiddellijk de ontbrekende onderdelen bestelt.

4. In een fabriek staat een vulmachine waarmee papieren zakken gevuld worden met suiker. Het lege gewicht van de zakken is normaal verdeeld met $\mu = 30$ en $\sigma = 2$ gram. Bij een juiste instelling van de vulmachine is de gemiddelde inhoud van de zakken 1000 gram. Van de machine kan worden aangenomen dat de gedoseerde hoeveelheid normaal verdeeld is met $\sigma = 10$ gram.
   a) Bepaal het gemiddelde gewicht en de standaardafwijking van de gevulde zakken.

   Om te controleren of de instelling van de machine goed is, bepaalt men van 9 willekeurige zakken het gemiddelde gewicht. Dit blijkt 1036,0 gram te zijn.
   b) Toets of de machine op het juiste gemiddelde van 1000 gram is ingesteld ($\alpha = 0,05$).

T

Examen/tentamen Wiskunde 49 (statistiek) op dinsdag 9 januari 1973, 9.00-10.30 uur.

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 31.

2. Uit een tabel van aselecte getallen trekken vijf personen onafhankelijk van elkaar elk één van de cijfers 0 t/m 9.
   Wat is de kans dat tenminste twee personen hetzelfde cijfer trekken?

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 31.

4. Zie opgave 4 bij Wiskunde 31.

T

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (statistiek) op maandag 22 januari 1973, 9.00-10.30 uur.

1. Twee personen M en K spelen een gokspelletje met elkaar door met een geldstuk kruis óf munt te gooien. Er wordt per spelletje 5 maal gegooid.
M wint als er 3, 4 of 5 keer munt gegooid wordt.
K wint als er 3, 4 of 5 keer kruis gegooid wordt.
Veronderstel dat het muntstuk zuiver is.
Noem $\underline{x}$ het aantal keren munt per spelletje.

   a) Welke waarden kan $\underline{x}$ aannemen en wat is de kansverdeling van $\underline{x}$?
   b) Als de eerste worp munt is, hoe groot is dan de kans dat K wint?

   Neem nu aan dat de kans op munt 0.55 is.

   c) Wat is de kans dat K in vier spelletjes geen enkele keer wint?

2. Een woninginrichter rekent voor het ophangen van gordijnen voor de post arbeidsloon een vast bedrag van ƒ 30,-- gebaseerd op een gemiddelde werktijd van 3 uur en een uurloon van ƒ 10,-- hoewel hij weet dat de werkduur een exponentiële verdeling heeft met $1/\lambda = 3$ uur.

   a) Bepaal de kans dat een klant teveel betaalt.
   b) Bereken de gemiddelde werktijd van een karwei dat tenminste 3 uur duurt.
   c) De woninginrichter wil, op basis van een uurloon van ƒ 10,--, komen tot een meer gedifferentieerd tarief voor het in rekening brengen van het arbeidsloon.
   Voor karweien met een werktijd x, die kleiner is dan drie uur, vraagt hij x × ƒ 10,--.
   Voor de karweien met een werktijd van tenminste 3 uur wil hij een vast bedrag B.
   Bepaal B.

3. De schrijfsnelheid van de studentenpopulatie van een bepaald jaar is normaal verdeeld met $\mu = 100$ lettertekens/min. en $\sigma = 15$ lettertekens/min.
Van een methode ter handschriftverbetering wordt beweerd dat deze als neveneffect heeft dat de schrijfsnelheid hoger wordt.
Uit de genoemde groep worden 100 studenten aselect aangezocht om deze cursus te volgen. Men wil deze gelegenheid te baat nemen om de genoemde bewering te toetsen. Na afloop van de cursus, waaraan door deze 100 studenten is deelgenomen, blijkt de gemiddelde schrijfsnelheid 102,7 lettertekens/min. te zijn.
Is er reden om de bewering omtrent de schrijfsnelheid te onderschrijven?
($\alpha = 0.05$.)

T

Examen/tentamen Wiskunde 31 (statistiek) op dinsdag 5 juni 1973, 9.00-10.30 uur.

1. a) Bij een spel is de kans op succes p; men speelt 10 maal en noteert succes en mislukking als 1 resp. -1:

$P(\underline{x}_i = 1) = p$

$P(\underline{x}_i = -1) = 1 - p$, waarbij $\underline{x}_i$ de score is van spel i (i = 1,2,...,10).

Bereken:

i) $P(\sum_{i=1}^{10} \underline{x}_i = 4)$,

ii) $P(|\sum_{i=1}^{10} \underline{x}_i| = 4)$,

iii) $P(|\sum_{i=1}^{10} \underline{x}_i| \leq 4)$.

b) In een vaas zitten 20 loten; op 10 ervan staat +1, op de rest -1. Er wordt aselect zonder teruglegging een steekproef van 10 stuks getrokken.
Geef een uitdrukking voor de kans dat de som van de getrokken getallen gelijk is aan 4.

2. De vraag $\underline{y}$ naar een bepaald artikel per week is gamma verdeeld. De gemiddelde vraag per week is 400, de standaardafwijking is 300.

a) Bepaal y_1 zodat $P(\underline{y} < y_1) = 0,90$.

b) De beginvoorraad voor een tijdvak van 4 weken bedraagt 2400. Wat is de kans op buiten voorraad raken in dat tijdvak?

c) Idem als b) bij een beginvoorraad van 2000 stuks.

T

3. Door iedereen in de K.N.V.B. wordt als een vaststaand feit aangenomen dat in één op de vier wedstrijden penalties worden gegeven. "Ik vraag mij af of dit wel juist is" meent scheidsrechter S. "Want ik heb geconstateerd dat in de eerste 25 competitieweken, met elk negen wedstrijden, in 68 wedstrijden penalties werden toegekend."
Wijst dit er op dat de kans op het toekennen van penalties in een wedstrijd groter is dan wat men in de K.N.V.B. aanneemt, of is het verschil slechts van toevallige aard? Neem $\alpha = 0,05$.

Opmerking. Bij de oplossing dient duidelijk te worden aangegeven wat de nulhypothese en wat de alternatieve hypothese is, alsmede welke van de drie manieren: kritiek gebied, overschrijdingskans of betrouwbaarheidsinterval bij Uw afleiding is gebruikt.

T

Examen/tentamen Wiskunde 49 (statistiek) op dinsdag 5 juni 1973, 9.00-10.30 uur.

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 31.

2. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn twee normaal verdeelde onafhankelijke stochastische grootheden met gemiddelde nul en variantie een.

   a) Bepaal $P(\underline{z} = 4\underline{x} - 3\underline{y} \leq 2{,}25)$.

   b) Bepaal $P(\underline{x}^2 \leq 2{,}25)$.

   c) Bepaal t zodanig dat $P(\underline{x}^2 < t) = 0{,}95$.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 31.

T

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (statistiek) op donderdag 14 juni 1973, 9.00-10.30 uur.

1. Bij een kansspel kan men trekken uit de getallen 1 t/m 4.
De kans op het trekken van het getal k ($1 \leq k \leq 4$) is $(5-k)a$.
Het spel bestaat uit 4 onafhankelijke trekkingen met teruglegging.
De uitkomst van de i-de trekking noemen we k_i.
Men wint een prijs als iedere k_i gelijk is aan i.

a) Bereken a en bepaal de kans op een prijs.

b) Hoe groot is de kans dat van een groep van 1000 deelnemers vier of meer personen een prijs winnen?

We veranderen het spel en staan toe dat 5 maal wordt getrokken.
De uitkomst is een serie (k_1,k_2,k_3,k_4,k_5) met $1 \leq k_i \leq 4$.
Iemand wint nu een prijs als zijn getrokken serie (k_1,k_2,k_3,k_4,k_5) zodanig is dat door het schrappen van één k_i het rijtje (1,2,3,4) kan ontstaan.

c) Wat is in dit geval de kans op een prijs?

2. De kans op winst bij een spel is 0,6.
Iemand neemt n maal aan het spel deel.
Zij $\underline{k}$ het aantal gewonnen spellen.

a) Bepaal $P(\underline{k} > 10 \mid n = 20)$.

b) Bepaal $P(\underline{k} > 24 \mid n = 48)$.

c) Bepaal n zodanig dat $P(\underline{k} > \frac{1}{2}n) > 0,95$.

3. Het gewicht van slakken levend in een zoutwatermilieu is normaal verdeeld met $\mu = 26,0$ gram en $\sigma = 0,8$ gram.
Kweekt men slakken in een zoetwatermilieu, dan weet men wel dat het gewicht weer normaal verdeeld is met dezelfde variantie, maar het is niet duidelijk dat de μ dezelfde is.
Op grond van een steekproef van 25 stuks wil men tot een uitspraak komen over het gemiddelde gewicht van in zoet water gekweekte slakken.

a) Toetst U één- of tweezijdig?

b) Wat is Uw nulhypothese en wat Uw alternatieve hypothese?

c) Bepaal het kritieke gebied voor $\alpha = 0,05$.

Als resultaat van een steekproef vinden we voor het gemiddelde gewicht van 25 in zoet water gekweekte slakken 25,7 gram.

d) Wat is op grond van deze uitkomst Uw conclusie t.a.v. het gemiddelde gewicht van in zoet water gekweekte slakken?

e) Controleer Uw antwoord door berekening van het betrouwbaarheidsinterval.

ANTWOORDEN

§ 1. Uitkomsten

1\. d) $(A_1 \cap A_2)^* \cap (A_1 \cap A_3)^* \cap (A_2 \cap A_3)^*$ of

$(A_1^* \cap A_2^*) \cup (A_1^* \cap A_3^*) \cup (A_2^* \cap A_3^*)$;

$A_1^* \cap A_2^* \cap A_3^*$.

3\. a) Lege doorsnede; P(een aas) = 1/13; P(een vrouw of een zeven) = 2/13;
P($\emptyset$) = 0.

b) doorsnede = {hartenplaatje of een heer};
P(een harten of een heer) = 4/13; P(een schoppen of een plaatje) = 25/52;
P(doorsnede) = 7/52.

c) doorsnede = {hartenheer};
P(een heer) = 1/13; P(een vrouw of een harten) = 4/13; P(doorsnede) = 1/52.

4\. a) 1/3.

b) 2/3.

c) 1/6.

5\. $P(E_1^*) = \frac{1}{2}$; $P(E_2^*) = 2/3$; $P(E_1 \cap E_2) = 1/6$; $P(E_1 \cup E_2) = 2/3$; $P(E_1^* \cap E_2) = 1/6$.

7\. a) $A \cap B^* \cap C^*$.

b) $A \cap B \cap C^*$.

c) $A \cap B \cap C$.

d) $A \cup B \cup C$.

e) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

f) $A^* \cap B^* \cap C^*$.

g) $(A \cap B^* \cap C^*) \cup (A^* \cap B \cap C^*) \cup (A^* \cap B^* \cap C)$.

h) $(A \cap B \cap C)^*$.

A

§ 2. Aselecte getallen

2. 0.34.

§ 3. Homogene of symmetrische kansvelden

1. a) 4/10.
   b) 3/10.

2. $P(A) = 5/12$; $P(B) = 2/3$; $P(A \cap B) = 11/36$; $P(A \cup B) = 7/9$.

3. a) 3/4.
   b) 5/14.

§ 4. Permutaties, combinaties, variaties; binomium van Newton, binomiaalcoëfficiënten

2. 14.040.000.

3. a) 35.
   b) 840.

4. a) 350.
   b) 150.
   c) 290.

5. $\dfrac{52!}{(13!)^4 4!}$.

6. $\binom{n^2+1}{n}$.

§ 5. Discrete kansvelden

1. 65/252.

2. ≈ 89%.

3. a) 1/100.
   b) 27/100.
   c) 72/100.

4. a) $\left(\frac{1}{10}\right)^4 \frac{4!}{4!} \binom{10}{1} = 0.001.$

   b) $\left(\frac{1}{10}\right)^4 \frac{4!}{3!1!} \binom{10}{2} \binom{2}{1} = 0.036.$

   c) $\left(\frac{1}{10}\right)^4 \frac{4!}{2!2!} \binom{10}{2} = 0.027.$

   d) $\left(\frac{1}{10}\right)^4 \frac{4!}{2!1!1!} \binom{10}{3} \binom{3}{1} = 0.432.$

   e) $\left(\frac{1}{10}\right)^4 \frac{4!}{1!1!1!1!} \binom{10}{4} = 0.504.$

5. a) 18/343; 27/343.
   b) 3/35; 3/35.

6. a) 54/343; 36/343.
   b) 6/35; 6/35.

7. a) 1/24.
   b) 1/4.

8. a) x_i : 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12.
   p_i : (1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1)/36.
   b) x_i : 3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18.
   p_i : (1,3,6,10,15,21,25,27,27,25,21,15,10,6,3,1)/216.

9. $P(A) = 0.6$; $P(B) = 0.5$; $P(C) = 0.5$; $P(A \cup B) = 1$; $P(A \cap B) = 0.1$;
   $P(A \cap B^*) = 0.5$; $P(A \cap B \cap C) = 0$; $P(B^* \cap C^*) = 0$.

A

11. a) 1/36.
    b) 1/9.
    c) 7/8.
    d) 91/216.
    e) 37/216.

12. a) 1/2.
    b) 41/144.

13. a) $\binom{7}{3}\binom{8}{2}/\binom{15}{5}$.

    b) $P(x \text{ wit}) = \binom{7}{x}\binom{8}{5-x}/\binom{15}{5}$, $x = 0,\dots,5$.

14. a) $\left[4\binom{39}{13} - 6\binom{26}{13} + 4\binom{13}{13}\right]/\binom{52}{13}$.

    b) $4\binom{13}{7}\binom{39}{6}/\binom{52}{13}$.

    c) $\binom{3}{3}\binom{36}{10}/\binom{39}{13}$.

    d) $4\left[\binom{39}{13} - 3\binom{26}{13} + 3\binom{13}{13}\right]/\binom{52}{13}$.

§ 6. Continue kansvelden

1.
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{voor } 0 \le x \le 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 & \text{voor } 1 \le x \le 2 \\ 1 & \text{voor } x > 2. \end{cases}$$

$P([-1,1]) = \frac{1}{2}$; $P([\frac{1}{2},1\frac{1}{2}]) = \frac{3}{4}$.

2. $P([0,1]) = 1 - e^{-2} = 0.8647$; $P([2,\infty)) = e^{-4} = 0.01832$.

3. $A = \lambda^2$; $P([0,\lambda]) = 1 - e^{-\lambda^2}(1 + \lambda^2)$.

4. a) 0.0764.
   b) 0.0764.
   c) 0.8415.
   d) a = 36.28.
   e) b = 10.08.

§ 7. Voorwaardelijke kans, deelexperimenten

1. 1/4.

2. $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 1 & \text{voor } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{voor } x > 1 \end{cases}$.

3. $2\binom{13}{3}^3\binom{13}{4}/\binom{26}{7}\binom{26}{6}$.

4. 37/80.

5. 10/17.

6. 2/3.

7. a) 4/5.
   b) 1/2.

8. a) 1/2.
   b) 2/3.

9. b) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0,\ 1 < t < 2,\ t > 4. \\ \frac{1}{2} & \text{voor } 0 < t < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{voor } 2 < t < 4. \end{cases}$

   ci) 1/2; cii) 1/4; ciii) 1/2.

A

§ 8. Afhankelijke en onafhankelijke uitkomsten

1. $P(V) = 7/12$; $P(V \mid U) = 1/2$; U en V afhankelijk.

2. $P(A) = 1/2$; $P(B) = 1/3$; $P(C) = 3/4$; A en B onafhankelijk.

3. $P(\text{lamp brandt}) = 1 - (1 - p_2^2)p_1^2$; $P(\text{lamp brandt} \mid p_1 = p_2 = 1/2) = 13/16$.

4. a) $(1 - p_1)(1 - p_2)$.
   b) $(1 - p_1)^2(1 - p_2^2)$.
   c) Ja, als $p_2 > p_1/(1 - p_1)$.
   d) Vraag b: $(1 - p_1)^2(1 - p_2)^2 + 2(1 - p_1)p_1(1 - p_2)$;
   vraag c: ja, als $p_2 < p_1/(1 - p_1)$.
   e) In serie prefereren als $p_2 > \dfrac{p_1}{1 - p_1}$.

6. a) $P(A) = 91/216$; $P(B) = 7/8$.
   b) A en B afhankelijk.

7. $1 - (0.8413)^4 \approx 0.50$; $(0.1587)^4 \approx 0.0006$.

8. a) $H(t) = F^2(t) = (1 - e^{-2t})^2$, $h(t) = 2F(t)f(t) = 4e^{-2t}(1 - e^{-2t})$ $(t \geq 0)$.
   b) $e^{-2} = 0.1353$; $1 - (1-e^{-2})^2 = 2e^{-2} - e^{-4} = 0.2523$.

§ 9. Het binomiale kansveld

1. a) $x_i = 0$; 1 ; 2 ; 3.
   b) $p_i = 0.5787$; 0.3472; 0.0695; 0.0046. (tabel 5.1)

2. a) 0.2726.
   b) 0.4678.
   c) 0.2596.
   d) 0.5322.
   e) 0.2637.

3. a) 0.3020.
   b) 0.6242.
   c) 0.0064.

4. a) $(0.9)^5 = 0.5905$.
   b) 0.9995.

5. 0.2452.

6. 0.165.

7. a) 0.013.
   b) 0.9985.

8. a) 0.9087.
   b) $\sum_{x=8}^{10} \binom{10}{x} p^x (1-p)^{10-x}$

9. P(minstens x kogeltjes in vakje i) = $\sum_{\ell=x}^{n} \binom{n}{\ell} P^{\ell}(1-P)^{n-\ell}$ met $P = \binom{k}{i} p^{k-i} q^i$.

§ 10. Het Poisson kansveld. Het benaderen van een binomiale verdeling door een Poisson verdeling

1. a) 2.
   b) 0.1429.
   c) 1.000

   (tabel 6.2)

2. $1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.3935$ (tabel 6.1)

3. $\mu = 0.9$

x_i :	0	1	2	3	4
p_i :	0.41	0.37	0.16	0.05	0.01
$50p_i$:	20.5	18.5	8.0	2.5	0.5.

4. a) 0.6065. c) 44.22%.
   b) 22.31%. d) 39.05%.

A

5. a) 0.3.
   b) 0.0369.
   c) 0.0296.

6. Binomiaal, $n = 20$, $p = 0.05$ — Poisson, $\mu = 1$

	Binomiaal, $n = 20$, $p = 0.05$	Poisson, $\mu = 1$
$k = 0$	0.3585	0.3679
1	0.3774	0.3679
2	0.1887	0.1839
3	0.0596	0.0613
4	0.0133	0.0153
5	0.0022	0.0031
6	0.0003	0.0005

7. a) $\mu = 1$: 0.7358; 0.9197; 0.9810.
   b) $\mu = 10$: 0.5830; 0.9984; 1.0000.
   d) $\frac{1}{2}$; 1; 1.

8. a) 0.9139 (tabel 5.2).
   b) 0.9245.
   c) 0.9473 (tabel 6.2, $\mu = 2$).
   d) $n \geq 120$.

9. 0.018.

§ 11. Verwachting, variantie, momenten. Stochastische grootheden

1. a) $\mu = 7/2$; $\sigma^2 = 35/12$.
   b) $\mu = 126$; $\sigma^2 = 105$.

2. a) 6.
   b) 1.
   c) [4,8].

3. $x = 1,2,\ldots,10, \quad 11$

$$P(\underline{x} = x) = \tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\ldots,(\tfrac{1}{2})^{10},(\tfrac{1}{2})^{10}; \qquad \sum_{1}^{11} P(\underline{x} = x) = 1.$$

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ldots$$
$$P(\underline{x} = x) = 1/2, 1/4, 1/8, \ldots \quad ; \quad \sum_{1}^{\infty} P(\underline{x} = x) = 1.$$

$$x = 2, 3, \ldots$$
$$P(\underline{x} = x) = \binom{x-1}{1}(\tfrac{1}{2})^x \quad ; \quad \sum_{2}^{\infty} P(\underline{x} = x) = 1.$$

4. a) s_i : 0,1,3,5,10
   p_i : m(16,7,5,3,1) met m = 1/32.

   b) c_i : 0,1,2,3,4,5,6,8,10,11,13,15,20
   p_i : m(256,224,49,160,70,96,67,30,41,14,10,6,1) met m = 1/1024.

5. $F(r) = 1 - e^{-\frac{r^2}{2}}$; $f(r) = re^{-\frac{r^2}{2}}$ $\quad (0 \le r < \infty)$.

6. a) 0.0228; 0.3830.
   b) 0.0350; 0.9840.
   c) 0.1318; 0.5962.
   d) 0.8571; 0.7218 (Poisson).
   e) 0.3834.
   f) $1 - 3e^{-2} = 0.5941$; $2e^{-1} - 4e^{-3} = 0.5366$.

7. $\mu = 1$; $\sigma^2 = 1/6$.

8. a) $\mu = \frac{1}{2}a$; $\sigma^2 = \frac{1}{12}a^2$.

   b) $\mu = \frac{1}{2}(n + 1)$; $\sigma^2 = \frac{1}{12}(n^2 - 1)$.

9. $\mathcal{E}(\underline{s}) = 47/32$; $\sigma^2(\underline{s}) = 5055/1024$; $\mathcal{E}(\underline{c}) = 47/16$; $\sigma^2(\underline{c}) = 5055/512$.

10. $\mu_k = (k + 1)!/2^k$; $\sigma^2 = 1/2$.

11. $\sigma = 10$.

12. a) bedrag: ƒ 2,--; ƒ 1,--; ƒ 0,--.
    b) kans : 1/6 ; 1/2 ; 1/3.
    c) $\mu = 5/6$; $\sigma^2 = 17/36$.

13. $1/(1 - p)$.

A

14. $d_1 = 165$; $d_2 = 175$; $\mu_1 = 157.4$; $\mu_2 = 170$; $\mu_3 = 182.6$ (alles in mikron).

15. a) $1/\lambda$;
    b) $1 - e^{-\lambda(x-a)}$ voor $x \geq a$; 0 voor $x < a$.
    c) $a + 1/\lambda$.

16. a) $\mu = 50.5$ cm; $\sigma = 0.5$ cm.
    b) 4.56%.

17. a) 9.5%.
    b) $\mu = 5.006$ mm: 16.86%
    $\mu = 5.008$ mm: 11.46%
    $\mu = 5.012$ mm: 11.46%
    $\mu = 5.014$ mm: 16.86%
    $\mu = 5.016$ mm: 25.52%.
    c) $\sigma = 0.004$ mm.

18. $\mu(\underline{y}) = e^{3\frac{1}{2}} = 33.1$; $\sigma^2(\underline{y}) = e^7(e - 1) = 1884.4$.

19. $M = \dfrac{\log 2}{\lambda} = 0.6932/\lambda$.

20. $H(E) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{2E}{m}}} f(v)dv$; $h(E) = \dfrac{a}{m}\sqrt{\dfrac{2E}{m}}\, e^{-\frac{2bE}{m}}$ $(0 \leq E < \infty)$.

21. $\underline{y} = \underline{x}^2$; $H(y) = \dfrac{\sqrt{y}}{a}$; $h(y) = 1/(2a\sqrt{y})$ $(0 < y < a^2)$.

§ 12. De gammaverdeling

1. $166\,\frac{2}{3}$.

2. 257.

3. 567.

4. 948.

5. 0.025.

6. a) 4390.
   b) 6010.

7. a) 4378.
   b) 5631.

8. Nauwelijks minder dan ƒ 300,--.

9. ƒ 295,-- .

10. ƒ 203,50.

11. 978.

§ 13. Relaties tussen (normale) stochastische grootheden. Centrale limietstelling

1. 4.78%.

2. 0.0228.

3. 251.4 gram.

4. 272 uur.

5. a) 60.06%.
   b) 68.26%.

6. a) 0.029.
   b) 0.114.

7. 12.5% of 34% afhankelijk van de werking van de vulmachine.

8. a) 0.3174.
   b) $\sigma \leq 3$ cm.

9. 0.04.

A

10. a) 1.96%
    b) 0.7619 ($\mu = 4$).
    c) bijv. bij 8 of meer exemplaren ($P(\underline{x} \geq 8) \approx 0.05$) of bij 9 of meer exemplaren ($P(\underline{x} \geq 9) \approx 0.02$).

11. $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$; $f(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$ $(0 \leq z < \infty)$.

12. $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$;

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{voor } z \leq 0,\ z \geq 2 \\ z & \text{voor } 0 < z \leq 1 \\ -z+2 & \text{voor } 1 \leq z < 2. \end{cases}$$

13. 11/36.

§ 14. Aanpassing van een normale verdeling aan een binomiale en een Poisson verdeling

1. a) 0.2650.
   b) 0.0605 (met discontinuïteitscorrectie).
   c) 0.1908 (met discontinuïteitscorrectie).

2. a) 0.6672.
   b) 0.8413.
   c) $\geq 27.10^6$.

3. 0.029.

4. a) 1921.
   b) 10^4.

5. 0.048.

6. 20500; met discontinuïteitscorrectie: 19850.

7. 9; 28.

8. 78.

9. a) 0.9772.
   b) < 75.

10\. a) 0.0655.

b) 131.

c) 0.16.

§ 15. Zuivere schatter. Fout van eerste en tweede soort. Onderscheidingsvermogen

3\. a) $P(\underline{u} < 1.645 - 2\sqrt{n})$.

b) $P(\underline{u} \geq 2\sqrt{n} - 1.28)$.

4\. a) 214.

b) 0.43.

5\. a) $\mu = -3.0$: $\ell = -4.63$; $r = -1.37$.

$\mu = 5.0$: $\ell = 3.37$; $r = 6.63$.

b) $\mu = 1.0$: 0.0023; $\mu = 2.0$: 0.0501; $\mu = 3.0$: 0.3286; $\mu = 4.0$: 0.7744.

6\. Steekproefgrootte = 4;

keuringsnorm: afkeuren voor $\bar{x} \leq \ell$ met $\ell \in [104,105]$.

§ 16. Toetsen bij een normale verdeling

1\. $\alpha = 0.01$: $\ell = 290.4$; $r = 376.2$; hypothese $p = 1/6$ verwerpen.

$\alpha = 0.05$: $\ell = 300.6$; $r = 366.0$; hypothese $p = 1/6$ verwerpen.

2\. a) $H_0 : \mu = 10$; kritieke zone $Z = \{\bar{x} \mid \bar{x} \leq 8.51$ of $\bar{x} \geq 11.49\}$.

b) Nee.

3\. $P(\underline{y} \leq 275 \mid \mu_{\underline{y}} = 300) = 0.0312 < \alpha$, dus reden tot klagen;

of $\ell = 277.9 > 275$.

4\. $P(\underline{t} \leq 9.60 \mid \mu = 10) = 0.0228$;

a) ja.

b) nee.

A

5. $P(\underline{g} \leq 49.65 \mid \mu = 50) = 0.0401 < \alpha$ of $\ell = 49.67 > 49.65$.
De kweker heeft reden de nieuwe methode niet toe te passen.

6. $Z = \{\bar{x} \mid \bar{x} \leq 247.55$ of $\bar{x} \geq 252.45\}$
   a) De hypothese dat machine A juist is ingesteld niet verwerpen of m.a.w. A kan juist ingesteld zijn; $251.68 \notin Z$.
   b) De hypothese dat machine B juist is ingesteld verwerpen of m.a.w. B is (vermoedelijk) onjuist ingesteld; $252.68 \in Z$.
   c) $\underline{v} = \bar{\underline{x}}_A - \bar{\underline{x}}_B$; $P(\underline{v} \leq -1 \mid \mu_{\underline{v}} = 0) = 0.2860 >> \frac{\alpha}{2}$ of
   $\ell = -1.96 \times \sigma_{\underline{v}} = -1.96 \times 1.768 < -1$.
   De hypothese dat de instellingen gelijk zijn kan niet worden verworpen.

7. a) 2%.
   b) 20%.
   c) 0.0839.
   d) $P(\underline{u} \geq 2.41) = 0.0080 < \alpha$; ja.

8. $P(\underline{x} \geq 315 \mid \mu = 252) << 0.0001$; aanname $\mu_A = \mu_B$ verwerpen.

§ 17. Toetsen bij een binomiale en een Poisson verdeling

1. 0.9586; verwerpt de hypothese P(munt) = P(kruis).

2. a) $2\frac{1}{2}$%.
   b) 296 ; met Poisson: 300.

3. a) 10%.
   b) 0.2639.
   c) $k \geq 4$.

4. $P(\underline{x} \geq 10 \mid \mu = 7\frac{1}{2}) = 0.2236 > \alpha$; geen reden tot reclame; ≥ 13.

5. $P(\underline{x} \geq r \mid \mu = 10) \leq 0.05 \Rightarrow r = 16$. Dus bij 16 of meer ongelukken twijfel aan de toevallige aard.

6. Nee, nl. $P(\underline{x} \leq 80 \mid \mu = 90) \approx 0.15 > \alpha$.

7. Ja, nl. $P(\underline{x} \leq 800 \mid \mu = 900) = 0.0004 \ll \alpha$.

8. a) 0.1209.
   b) 0.0000.
   c) 0.0010.
   d) 0.0003.
   a niet, overige wel verwerpen.

9. $P(\underline{x} \leq 5 \mid \mu = 6) = 0.4457$; de hypothese $p_A = p_B$ niet verwerpen.

§ 18. Betrouwbaarheidsintervallen bij een normale verdeling

1. $7.51 < \mu < 10.49$.

2. $\mu < 59.4$.

3. a) $\mu < 9.93$.
   b) $\mu < 10.07$.

4. 5.05%.

5. $n \geq 664$; $n \geq 166$.

6. $64.3 < \mu < 99.6$; met $\sigma = \sqrt{\hat{\mu}}$: $62.5 < \mu < 97.5$; $74.5 < \mu < 85.5$.

7. $280 < \mu < 350$ (met $\sigma = \sqrt{\hat{\mu}}$).

8. $\mu < 49.98$.

9. $75\% < p < 84\%$.

10. $19\% < p < 29\%$ (met $\sigma = 100\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$).

A

§ 19. Betrouwbaarheidsintervallen bij binomiale en Poisson verdeling

1. a) 0.0106.
   b) 0.0260.
   c) 0.0702.
   d) 0.0115.
   e) $0.35 < p < 0.94$.
   f) aanvaarden.

2. a) $0.26 < p < 0.88$.
   b) $0.50 < p < 0.69$.
   c) $0.57 < p < 0.63$.

3. a) $1 < \mu < 10$.
   b) $29 < \mu < 55$.

4. $1.4 < \mu < 9.2$.

Gemengde opgaven

1. $P(\underline{x} = 0) = 1/3$; $P(\underline{x} = 1) = 1/3$; $P(\underline{x} = 2) = 1/3$;
   $P(\underline{y} = 0) = 1/3$; $P(\underline{y} = 1) = 1/3$; $P(\underline{y} = 2) = 1/3$.
   a) juist.
   b) onjuist.
   c) onjuist.
   d) 1.
   e) 13/9.
   f) 2.
   g) 5/3.
   h) 2/3.
   k) 1/2.

2. Overschrijdingskansen:
   0.4013 (binomiaal), geen twijfel;
   0.0318 (Poisson), geen twijfel;
   0.0001 (normaal), wel twijfel.

3. a) ≥ 4; ≥ 11; ≥ 29.
   b) 0.8670; 0.5830; 0.0228.

4. a) 0.0010.
   b) 0.1847.
   c) 0.92.
   d) $P(\underline{u} \geq 2.87) = 0.0021 < 0.005 = \frac{1}{2}\alpha$, dus significant verschil.

5. a) $[1 - F(y)]^n$.

6. a) $\mathcal{E}\underline{v} = 0$; $\mathcal{E}\underline{d} = 70/36$; var $\underline{v} = 35/6$; var $\underline{d} = 665/324$.
   b) niet onafhankelijk.

7. a) 0.0746.
   b) 0.0487 (Poisson).
   c) $\lambda \approx 1/2$.
   d) $\mathcal{E}\underline{x} = 2$(min); mediaan = log 4 = 1.39 (min).

8. a) x_i : 2,3,4,5,6,7,8
   p_i : (1,8,8,8,8,2,1)/36.
   b) $\mu = 14/3$.
   c) $\sigma = 1.39$.

9. a) 0.3370.
   b1) 0.3485; b2) 0.0815.

10. a) 0.0668.
    b) 0.9940.
    c) 0.9699.

11. a) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 1; $\frac{1}{2}$.
    b) onafhankelijk.

12. a) 1470; 35.
    b) $N(1470; 35^2)$; centrale limietstelling.
    c) 0.9772.

13. 35.

14. $u = 1.2 < 1.645$, dus geen voldoende reden.

15. a) A : 91.45%; B : 97.59%.
    b) 94.52%
    c) 1.225 cm.

A

16. a) $\underline{z}$: 2,4,5,7,8,10

$p(z)$: (6,9,2,3,4,6)/30.

b) $\mathcal{E}\underline{z} = 3\mathcal{E}\underline{x} + 2\,\mathcal{E}\underline{y}$.

c) $\mathrm{var}\ \underline{z} = 9\ \mathrm{var}\ \underline{x} + 4\ \mathrm{var}\ \underline{y}$.

d) 1/2.

17. a) $\sum_{x=1}^{10}\binom{10}{x}p^{x}(1-p)^{10-x}$ met $p = 2P(\bar{\underline{x}} > 251 \mid \mu = 250,\ \sigma = \frac{1}{2})$.

b) 0.1587.

c) > 2/3 gram.

d) 0.3085.

18. a) $\alpha = -2$.

b) $\mathcal{E}\underline{x} = 0$.

c) $\sigma(\underline{x}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

d) $e^{-2\sqrt{2}}$.

Tentamenopgaven

6 januari 1970

1. ja; $P(\underline{x} \geq 2) = 0.0328 < \alpha$.

2. a) $P(\underline{x} \leq 1) = 0.3917$, geen verbetering.
   b) $P(\underline{x} \leq 2) = 0.2381$, geen verbetering.
   c) $P(\underline{x} \leq 8) = 0.0239$, wel verbetering indien $\alpha > 0.0239$ (met discontinuïteitscorrectie).

3. a) $\mathcal{E}(\underline{t}) = 3.5$; $\sigma(\underline{t}) = \sqrt{31/12}$.
   b) één; 4 of 5.

19 januari 1970

1. a) 0.5981; 0.4335.
   b) 0.3632 (met discontinuïteitscorrectie).
   c) 0.

2. a) 0.003; 0.0369;
   b) 983.55 m^2.

9 juni 1970

1. a) 100 uur.
   b) 69 uur.
   c) 0.015.
   d) 0.3528.
   e) 0.1562.

2. a) 0.0500.
   b) 0.0133.
   c) ja.
   d) $\frac{4}{455} = 0.0088$.

A

17 juni 1970

1. a) $P(1^\circ) = 0.0000$; $P(2^\circ) = 0.0003$; $P(3^\circ) = 0.0030$; $P(\text{poedelprijs}) = 0.2097$.
   b) ≥ 1000.
   c) nee.

2. a) 0.05.
   b) 0.2262.
   c) 251.16.

12 januari 1971

1. a) $\frac{2}{15}$.
   b) $\frac{73}{225}$.

2. De hypothese $p = \frac{1}{2}$ verwerpen, want $r = 41.304 < 42$ of $P(\underline{k} \geq 42 \mid p = \frac{1}{2}) = 0.0062 < 0.01$.

3. a) 0.675 min.
   b) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ min.

4. a) 16953 m.
   b) 5493 m.

26 januari 1971

1. a) $\frac{3}{8}$.
   b) $\frac{3}{4}$.
   c) 1.

2. a) $P(\underline{k} \leq 182 \mid p = \frac{1}{2}) = 0.0359 < \alpha$ of $\ell = 183.55 > 182$: de kijkdichtheid is achteruitgegaan.
   b) Ja; $P(\underline{k} \geq 182 \mid p = 0.40) = 0.0123 < \alpha$ of $r = 176.11 < 182$.

3. a) 1 voor $z < 0$ en $e^{-n\lambda z}$ voor $z \geq 0$.

   b) $\mathcal{E}\underline{z} = \frac{1}{n\lambda}$; var $\underline{z} = \frac{1}{n^2\lambda^2}$.

8 juni 1971

1. a) $\frac{5}{36}$.

   b) $\frac{161}{36}$.

   c) ja.

2. a) 0.8131.

   b) 0.8159.

   c) 0.9522; met discontinuïteitscorrectie: 0.9599.

3. a) $\bar{x} \geq 142.326$ kg/mm^2.

   b) 0.6278.

   c) 253.

17 juni 1971

1. a) $\frac{16}{27}$; $\frac{5}{27}$; $\frac{6}{27}$.

   b) $\frac{19}{27}$; $\frac{8}{27}$.

   c) $\frac{7}{9}$; $\frac{2}{9}$.

2. a) 0.9900.

   b) 4.

   c) $\mathcal{E}\underline{x} = 8$, $\sigma^2(\underline{x}) = \frac{9}{5}$, waarbij $\underline{x}$ de opbrengst in guldens is.

3. a) 0.0003.

   b) 4, want $P(\underline{k} \geq 4 \mid p = 0.05) = 0.0159 < \alpha$ en $P(\underline{k} \geq 3 \mid p = 0.05) =$
   $= 0.0755 > \alpha$.

   c) nee.

A

3. d) ja; $P(\underline{k} \geq 30 \mid \mu = 20, \sigma^2 = 19) = 0.0109 < \alpha$ of
$r = 28.544 < 30$.

<u>11 januari 1972</u>

<u>Wiskunde 31</u>

1. a) gammaverdeling met $\lambda = \frac{1}{15}$, $r = 4$; $\mathcal{E}\,\underline{t} = 60$ seconden.
   b) $t_M = 150.6$ seconden.
   c) $t_m = 12.375$ seconden.

2. a) 0.03319.
   b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 1 - \frac{2}{3}e^{-x} & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$.
   c) $\frac{2}{3}$ minuut.

3. ja; $P(\underline{x} \geq 365.5 \mid \mu = 360, \sigma^2 = 9) = 0.0334 < 0.05$ of
$r = 364.935 < 365.5$.

<u>Wiskunde 49</u>

1. a) $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{7}{8}$.
   b) A en B niet onafhankelijk.

<u>24 januari 1972</u>

1. a) 0.0355.
   b) $\frac{25}{648}$.

2. Het experiment ondersteunt zijn wantrouwen niet;
$P(\underline{k} \geq 7 \mid \mu = 3) = 0.0335 > 0.025 = \frac{\alpha}{2}$.

3. a) $\mathcal{E}\,\underline{x} \doteq 3$ jaren.
   b) 0.9900.
   c) 0.0098.

6 juni 1972

Wiskunde 31

1. a) $\frac{1}{3}$.

   b) $\frac{1}{3}(1 + \sqrt{3})$.

   c) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x \le 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{x} & \text{voor } 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{3}(1 + \sqrt{x}) & \text{voor } 1 < x \le 4 \\ 1 & \text{voor } x > 4 \,. \end{cases}$$

2. Statistisch niet gerechtvaardigd; $P(\underline{k} \ge 8 \mid \mu = 4) = 0.0511 > \alpha$ of $r = 9 > 8$.

3. a) 87.

   b) 0.025.

   c) 242.

Wiskunde 49

3. $n \ge 9604$.

15 juni 1972

1. a) $\mathcal{E}\,\underline{x} = \frac{25}{6}$, $\sigma(\underline{x}) = \frac{1}{6}\sqrt{73}$.

   b) $\mathcal{E}\,\underline{y} = \frac{25}{3}$, $\sigma(\underline{y}) = \frac{1}{6}\sqrt{146}$.

2. a) 0.5000; met discontinuïteitscorrectie: 0.5430.

   b) 256.

3. Niet in overeenstemming met de theorie; $P(\bar{\underline{x}} \ge 8.1 \mid \mu = 7) = 0.0072 < \alpha$ of $r = 8.0467 < 8.1$.

A

9 januari 1973

Wiskunde 31

1. 0.02669.

2. a) 3.88 dagen.
   b) 0.83.

3. a) 0.8647.
   b) 0.7664.

4. a) μ = 1030 gram, σ = 10.20 gram.
   b) De vulmachine kan goed ingesteld zijn:

   $P(\underline{\bar{g}} \geq 1036.0; \mu = 1030, \sigma = 3.40) = 0.0392 > \frac{1}{2}\alpha$ of

   $r = 1030 + 1.96 * 3.40 = 1036.66 > 1036.0$.

Wiskunde 49

2. 0.6976.

22 januari 1973

1. a) $P(\underline{x} = x) = \binom{5}{x}(\frac{1}{2})^5$, $x = 0,1,2,3,4,5$.
   b) $\frac{5}{16}$.
   c) 0.1238.

2. a) 0.6321.
   b) 6 uur.
   c) ƒ 60,-.

3. Er is reden om de bewering te onderschrijven:

   $P(\underline{\bar{s}} \geq 102.7; \mu = 100, \sigma = 1.5) = 0.0359 < \alpha$ of

   $r = 100 + 1.645 * 1.5 = 102.47 < 102.7$.

5 juni 1973

Wiskunde 31

1\. a) i) $\binom{10}{7}p^7(1-p)^3$; ii) $\binom{10}{7}p^7(1-p)^3 + \binom{10}{3}p^3(1-p)^7$; iii) $\sum_{k=3}^{7} \binom{10}{k}p^k(1-p)^{10-k}$.

b) $\dfrac{\binom{10}{7}\binom{10}{3}}{\binom{20}{10}}$.

2\. a) 800.
b) 0.100.
c) 0.23.

3\. Het verschil is waarschijnlijk slechts van toevallige aard:

$r = \frac{225}{4} + 1.96 * \frac{15}{4}\sqrt{3} = 68.98 > 68$ of

$P(\underline{k} \geq 68;\ \mu = \frac{225}{4},\ \sigma = \frac{15}{4}\sqrt{3}) = 0.0490 > \frac{1}{2}\alpha$.

Wiskunde 49

2\. a) 0.6736.
b) 0.8664.
c) 3.84.

14 juni 1973

1\. a) $a = \frac{1}{10}$; 0.0024.
b) 0.2213.
c) 0.0096.

2\. a) 0.7553.
b) 0.9213.
c) 65.

A

3. a) tweezijdig.

   b) $H_0 : \mu = 26.0$, $H_a : \mu \neq 26.0$.

   c) $\{\bar{x} \mid \bar{x} \leq 25.69$ of $\bar{x} \geq 26.31\}$.

   d) het gemiddelde gewicht van in zoet water gekweekte slakken is waarschijnlijk 26.0 gram.

   e) $25.39 < \mu < 26.01$.