TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

bij de colleges

WISKUNDE 31, 49 en 64

met antwoorden

KANSREKENING en STATISTIEK

Voorjaar 1981

Inhoudsbeschrijving

Vraagstukken bij de colleges Wiskunde 31, 49 en 64

met antwoorden

Voorjaar 1981

JdG, 11 Juli 2005

Bibl / Mog.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken
bij de colleges
Wiskunde 31, 49 en 64
met antwoorden

Kansrekening en Statistiek

Voorjaar 1981

Diktaatnummer 2,262 Prijs 8.50

§ 1. Gebeurtenissen

1.1. A, B en C zijn drie gebeurtenissen. (Deelverzamelingen van de uitkomstenruimte U.)
Geef uitdrukkingen voor de volgende met behulp van A, B en C gedefinieerde gebeurtenissen:

a) alleen A,
b) A en B, maar niet C,
c) alle drie,
d) tenminste één van de drie,
e) tenminste twee,
f) geen enkele,
g) precies één van de drie,
h) niet meer dan twee.

1.2. Een electronisch systeem bestaat uit 3 componenten I, II en III die elk bij gebruik kunnen weigeren. Een experiment bestaat uit het inschakelen van het systeem en nagaan welke componenten weigeren.
De uitkomst: "component I weigert niet, II weigert, III weigert" wordt aangeduid met u_{011}, enz.; de gebeurtenis "component i weigert" met A_i.

a) Hoeveel elementen bevat de uitkomstenruimte U?
b) Schrijf A_1, $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cup A_2$ als deelverzameling van U.
c) Druk de volgende gebeurtenissen in woorden uit:

$$A_1 \cup A_2;\ A_1 \cup A_2 \cup A_3;\ A_1 \cap A_2;\ A_1^*;\ A_1^* \cap A_3;\ (A_1 \cap A_2)^* .$$

d) Druk de volgende gebeurtenissen uit in de A_i (en hun complementen): "hoogstens één component weigert"; "geen enkele component weigert".

1.3. In een electrisch netwerk zijn twee componenten in serie geschakeld. Na inschakeling van het netwerk wordt nagegaan welke componenten weigeren.
De uitkomst "component I weigert, II weigert niet" wordt aangeduid met u_{10} enz.; de gebeurtenis "de serieschakeling als geheel werkt" met S, "minstens één component werkt" met T.

a) Wat is het complement van $\{u_{10}\}$?
b) Schrijf S en T als deelverzameling van U.
c) Druk de volgende gebeurtenissen in woorden uit:

$$S^*;\ T^*;\ S^* \cap T\ ;\ S \cap T^*\ ;\ S \cup T^* .$$

1.4. Bij het trekken van één kaart uit een kaartspel beschouwt men de volgende paren van gebeurtenissen:

a) {een aas}, {een vrouw of een zeven};

b) {een harten of een heer}, {een schoppen of een plaatje};

c) {een heer}, {een vrouw of een harten}.

Welke van deze paren bestaat uit elkaar uitsluitende gebeurtenissen? Geef bij de overige paren aan waaruit hun doorsnede bestaat.
Bereken de kansen op elk van deze gebeurtenissen.

1.5. Men werpt tegelijk met een muntstuk en een dobbelsteen.
E_1 is de gebeurtenis: "het muntstuk geeft kruis";
E_2 is de gebeurtenis "de dobbelsteen geeft 3 of 6".
Wat is de betekenis (in woorden) van de volgende uitdrukkingen:

a) E_1^*; b) E_2^*; c) $E_1 \cap E_2$; d) $E_1 \cup E_2$; e) $E_1^* \cap E_2$?

Bereken de kansen op de gebeurtenissen onder a), b), c), d) en e).

1.6. Gegeven zijn 10 fiches, gemerkt a,b,...,j, maar overigens gelijk. Men schrijft op a het nummer 1, op b en c het nummer 2, op d, e en f het nummer 3, op g, h, i en j het nummer 4.
Men trekt aselect met terugleggen twee fiches en let alleen op de nummers.

a) Welke gebeurtenissen kan men onderscheiden?
Geef voor elke gebeurtenis aan welke uitkomsten er toe behoren (teken een schema).

b) Wat is de kans op een totaal ≥ 7?

c) Wat is de kans op twee gelijken?

d) Beantwoord de vragen a), b) en c) voor trekken zonder terugleggen.

1.7. We werpen tweemaal met een dobbelsteen. Maak een 6×6 schema van alle mogelijkheden en bepaal door het aantal gunstige te tellen de kansen op de volgende gebeurtenissen:

a) de som van de aantallen ogen is deelbaar door drie;

b) de som van de aantallen ogen is even of het aantal ogen bij de eerste worp is een drievoud;

c) $10x + y$ is een zevenvoud, als x het aantal ogen bij de eerste worp en y het aantal ogen bij de tweede worp voorstelt.

1.8. Men werpt tweemaal met een dobbelsteen. Het aantal ogen van de eerste worp noemen we x, dat van de tweede worp y. Geef in een plaatje van de verzameling van mogelijke (x,y)-resultaten de volgende gebeurtenissen aan:

$$A = \{(x,y) \mid x + y \geq 8\} \quad \text{en} \quad B = \{(x,y) \mid |x - y| \leq 2\} .$$

Bereken P(A), P(B), P(A ∩ B) en P(A ∪ B).

1.9. Gegeven zijn 8 kaarten, die ieder een uit drie letters bestaand kenmerk hebben: AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB. Men doet blindelings één greep bestaande uit 2 kaarten.

a) Bepaal de kans, dat in het kenmerk van elk van beide kaarten minstens één keer de letter A voorkomt.

b) Bepaal de kans, dat in beide kenmerken te zamen de letter A precies drie keer voorkomt. (1966)

§ 2. Aselecte getallen

Opmerking: De tabel 5.1 uit "Statistische Tabellen" (S.T. 5.1) dictaatnummer 2.200 waarnaar in deze paragraaf wordt verwezen kan men ontstaan denken door het gooien met een 10-zijdige "dobbelsteen"; in de opvolgende cijfers, zowel horizontaal als verticaal, zit geen systeem.
Uit de volgende opgaven blijkt dat aselecte getallen een nuttig hulpmiddel kunnen zijn bij het trekken van een steekproef, het schatten van de grootte van kansen, het simuleren (nabootsen) van een proces.

2.1. Een diergeneeskundige afdeling overweegt de 89 nieuw aangekomen studenten te immuniseren tegen de V-ziekte. Men is nog in een proefstadium en wil een eerste behandeling beperken tot 20 gevallen, blindelings te kiezen op basis van de inschrijvingsnummers. Deze lopen van 8001 t/m 8091. (No's 8043 en 8057 zijn een andere studie begonnen.) Geef aan hoe met aselecte getallen een verantwoorde keuze zonder voorkeur kan worden gedaan.

2.2. Probeer alvast een idee te krijgen van de grootte van de kansen uit opgave 4.4 door van honderd 4-tallen uit S.T. 5.1 na te gaan:

welke fractie van het type AAAA is,
" " " " " AAAB is,
" " " " " AABB is,
" " " " " AABC is,
" " " " " ABCD is.

2.3. Noteer veertig 3-tallen uit S.T. 5.1 met overslaan van 000 en die tripels die groter zijn dan 365. Elk tripel stelt een verjaardag voor in de situatie van opgave 4.2. Hoogstwaarschijnlijk is er een tripel dat meer dan eens voorkomt.

2.4. Een popcornfabriek krijgt van een reclamebureau het advies om in elk pak één van 7 verschillende plastic figuurtjes in te pakken. De figuren stellen de 7 dwergen voor uit een bekend sprookje. Heeft iemand ze alle zeven bij elkaar dan krijgt hij na wat plak- en knipwerk Sneeuwwitje cadeau.
Probeer m.b.v. aselecte getallen te schatten hoeveel pakjes hij moet kopen voor het zover is.

2.5. Bij een tankstation komt gemiddeld elke 5 minuten een auto aan. Simuleer de aankomsttijdstippen t_n van auto n als volgt: Neem $t_1 = 0$, neem voor $t_{n+1} - t_n$ een rij aselecte getallen $\in \{1,2,\ldots,9\}$ (0 telkens overslaan). Auto n rijdt weer weg na d_n minuten. Simuleer d_n door een andere rij aselecte getallen $\in \{1,2,\ldots,9\}$. Voer de simulatie uit voor enige tientallen auto's bijv. tot $n = 50$. Beschouw een auto als aanwezig vanaf het begin van de minuut van aankomst; en als vertrokken vanaf het begin van de minuut van vertrek.
Schat vervolgens hoeveel procent van de tijd er 0,1,2,3,... pompen bezet zijn.
Wenk: Noteer de tijden van aankomst en van vertrek; maak er één doorlopende lijst van.

2.6. De vereniging Pro Senectute wenst een prijs te verloten tussen een 25-jarige en een 65-jarige met kansen evenredig aan hun leeftijd: resp. $\frac{5}{18}$ en $\frac{13}{18}$. Geef aan hoe dat met aselecte getallen is te realiseren.

§ 3. Combinatoriek

3.1. Bewijs:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, (driehoek van Pascal) $(k \geq 1)$

b) $\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}$, $(k \geq 2)$

c) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}y^{n-k} = n(x+y)^{n-1}$

d) $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2}y^{n-k} = n(n-1)(x+y)^{n-2}$

e) $\sum_{k=0}^{n} \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} = \binom{N}{n}$, $(M \leq N)$.

Alle letters die in deze formules voorkomen zijn niet-negatieve gehele getallen.

3.2. Een kentekenadministratie werkt met autonummers bestaande uit 3 verschillende letters (uit een alfabet van 26), gevolgd door 3 cijfers waarvan het eerste geen nul mag zijn.
Hoeveel autonummers zijn er in dit systeem mogelijk?

3.3. a) Op hoeveel manieren kan uit zeven personen een commissie van vier leden worden samengesteld?
b) Op hoeveel manieren kan uit zeven personen een commissie bestaande uit voorzitter, vice-voorzitter, eerste en tweede secretaris worden samengesteld?

3.4. Uit 5 chemici en 7 physici moet een commissie worden gevormd bestaande uit 2 chemici en 3 physici.
Op hoeveel manieren kan dit gedaan worden als:

a) elke chemicus en elke physicus in deze commissie kan worden opgenomen;
b) een bepaalde physicus lid moet worden van deze commissie;
c) een bepaalde chemicus en een bepaalde physicus niet samen lid mogen zijn van deze commissie.

S 3.5. a) Op hoeveel manieren kunnen we de 52 kaarten van een spel onder 4 spelers verdelen? (Elke speler krijgt 13 kaarten.)

b) Op hoeveel manieren kunnen we de 52 kaarten in 4 stapeltjes van 13 stuks verdelen?

* 3.6. Gevraagd het aantal rangschikkingen van n "nullen" en n^2 "enen" op een rij waarin geen nullen naast elkaar staan.

S De letter S voor het nummer van een vraagstuk betekent dat de opgave ook voorkomt in de syllabus.

* Een * voor een vraagstuk (of een deel ervan) betekent dat de opgave in het algemeen boven het tentamenniveau van Wiskunde 31/49/64 ligt.

§ 4. Discrete kansvelden

4.1. Uit een vaas die 11 witte en 17 zwarte ballen bevat zal driemaal achtereen, aselect en zonder teruglegging een bal worden getrokken. Wat is de kans dat deze drie trekkingen ballen zullen opleveren van dezelfde kleur?

4.2. Hoe groot is de kans, dat van 40 (aselect gekozen) personen er minstens 2 op dezelfde dag jarig zijn? (1 jaar = 365 dagen, gebruik S.T. 6.2 en 6.3.) Geef een schatting van de kans alvorens te gaan rekenen.

4.3. Hoe groot is bij driemaal aselect trekken uit de getallen 0 tot en met 9 de kans op:

a) 3 gelijke;
b) 2 gelijke en een verschillend daarvan;
c) 3 verschillende.

* 4.4. In de lift van een gebouw met 10 etages staan 4 personen die elk aselect een knop indrukken. Bereken de kans dat de 4 personen uitstappen:

a) op dezelfde verdieping;
b) op twee verschillende verdiepingen, waarbij 3 personen op de ene en de 4e op de andere verdieping;
c) op twee verschillende verdiepingen, waarbij een paar op de ene en het andere tweetal op de andere verdieping;
d) op drie verschillende verdiepingen;
e) op vier verschillende verdiepingen.

Vergelijk de antwoorden met de schattingen van de kansen in opgave 2.2.

4.5. Vijf paar schoenen zijn door elkaar geraakt. Men pakt twee linker en twee rechter schoenen. Hoe groot is de kans dat er minstens één "paar" is bij dat 4-tal schoenen.

S 4.6. In een vijver zitten 200 vissen. Men vangt er 100, merkt ze en zet ze terug. Vervolgens vangt men (zonder terugleggen) 20 vissen. Wat is de kans dat onder deze 20 minder dan 10 gemerkte vissen voorkomen?

4.7. Van de 16 delen van een encyclopedie zijn er vier van hun plaats gehaald. Zij zullen blindelings op de open plaatsen worden teruggezet.

a) Hoe groot is de kans dat de 16 delen dan weer in de juiste volgorde komen?

b) Hoe groot is de kans dat men de 16 delen na het terugzetten door alsnog twee exemplaren te verwisselen weer in de juiste volgorde kan brengen? (1966)

4.8. a) We werpen met 2 dobbelstenen.
Gevraagd de kans op elk der mogelijke waarden voor de som der ogen.

b) Idem voor 3 dobbelstenen (gebruik het bij a) gevondene).

c) Geef de gevonden kansverdelingen weer in grafieken.

4.9. Gegeven een discreet kansveld $U := \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ met $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}4$ en $p_5 = 0$.
Bereken voor $A := \{u_1,u_2,u_3\}$, $B := \{u_1,u_4,u_5\}$, $C := \{u_2,u_3,u_5\}$,

$$P(A),\ P(B),\ P(C),\ P(A \cup B),\ P(A \cap B),\ P(A \cap B^*)\ .$$

Ga na dat $P(B \cup C) = P(B) + P(C)$ terwijl $B \cap C \neq \emptyset$.

4.10. We werpen met 3 dobbelstenen. Gevraagd de kans dat:

a) een 3, een 4 en een 5 wordt geworpen;

b) drie opeenvolgende cijfers worden geworpen;

c) het product der drie worpen even is;

d) de laagste worp een 1 is;

e) de laagste worp een 3 is.

4.11. Men werpt één dobbelsteen viermaal en noteert de vier worpen (bijv. 2, 6, 3, 3).

a) Wat is de kans dat de som van de vier worpen even is?

b) Wat is de kans dat de laagste worp een 2 is? (1965)

4.12. Een vaas bevat 7 witte en 8 zwarte ballen. Men trekt aselect en zonder teruglegging 5 ballen uit deze vaas.

a) Wat is de kans op 3 witte en 2 zwarte ballen?

b) Wat is de uitkomstenruimte? Bepaal de bijbehorende kansverdeling.

c) Ga na dat opgave 3.1 e) nu in een speciaal geval bewezen is.

* 4.13. Hoe groot is de kans bij bridge:

a) dat U het spel begint met zeven kaarten van één "kleur";

b) dat, als U bij het begin één aas hebt, de overige drie azen bij Uw partner zitten;

c) dat U het spel begint met minstens één renonce (d.w.z. bijv. geen klaveren, etc.);

d) dat U het spel begint met precies één renonce.

§ 5. Reële kansvelden

5.1. $\underline{k}$ heeft een binomiale verdeling met $n = 20$, $p = 0{,}4$.
Bereken $P(\underline{k} = 4)$, $P(\underline{k} \geq 4)$.

5.2. We tellen het aantal zessen bij 3 worpen met een zuivere dobbelsteen.*)

a) Wat is de verzameling van mogelijke uitkomsten?

b) Geef de kansverdeling over de verzameling van mogelijke uitkomsten.

5.3. $\underline{k}$ is het aantal zessen bij $n = 15$ worpen met een zuivere dobbelsteen.*)
Bereken (formule en numerieke waarde):

a) $P(\underline{k} = 2)$;

b) $P(\underline{k} > 2)$;

c) $P(\underline{k} < 2)$;

d) $P(\underline{k} \leq 2)$;

e) $P(\underline{k} = 3 \cup \underline{k} > 5)$.

5.4. In een fabriek blijkt gemiddeld 20% van de geproduceerde bouten buiten de gestelde normen te liggen en dus afgekeurd te worden. Men kan dit gegeven zo interpreteren dat elke bout een kans van 0,20 heeft afgekeurd te worden. Men neemt aselect 10 bouten uit een dagproductie*). Bepaal de kans dat

a) precies 2 bouten buiten de normen vallen;

b) 2 of meer bouten buiten de normen vallen;

c) meer dan 5 bouten buiten de normen vallen.

5.5. $\underline{n}$ heeft een Poisson verdeling met gemiddelde $\mu = 9$.
Bereken $P(\underline{n} = 9)$, $P(7 \leq \underline{n} \leq 11)$.

5.6. Mevrouw A maakt bij typewerk gemiddeld $1\frac{1}{2}$ fout per pagina. Bereken de kans dat het aantal typefouten op een willekeurig gekozen pagina groter is dan 4. Idem voor Mevrouw B die gemiddeld 2 fouten per pagina maakt.

5.7. Er wordt 3 keer met een zuiver geldstuk getost. De stochastische grootheid $\underline{x}$ wordt als volgt gedefinieerd: $\underline{x}$ is het rangnummer van de eerste worp die "kruis" oplevert en 4 als "kruis" geen enkele keer optreedt.
Bereken de kansverdeling van $\underline{x}$.

*) Zie in de syllabus 2.265 de theorie over het trekken met terugleggen bij geordende steekproeven.

5.8. Een cirkelvormige schietschijf met een straal van 4 dm heeft 3 ringen met elk een breedte van 1 dm, de roos heeft een diameter van 2 dm. Voor een bepaalde schutter is de kans om een gebied te raken evenredig met de oppervlakte van het gebied, terwijl hij met kans $\frac{1}{2}$ de schijf raakt. Zijn score $\underline{s}$ heeft de waarde 10 voor de roos (binnencirkel), 5,3,1 voor de volgende ringen en 0 bij niet raken van de schijf. Bereken de kansverdeling van $\underline{s}$.

5.9. Bij een continu reëel kansveld is de kansdichtheid gegeven door:

$$f_{\underline{u}}(u) = \begin{cases} u & \text{voor } 0 \le u \le 1, \\ 2-u & \text{voor } 1 \le u \le 2, \\ 0 & \text{voor } 0 > u \text{ of } u > 2. \end{cases}$$

a) Bereken en schets de verdelingsfunctie $P(\underline{u} \le x) = F_{\underline{u}}(x)$.

b) Bereken $P(-1 < \underline{u} \le 1)$, $P(\frac{1}{2} < \underline{u} \le 1\frac{1}{2})$.

5.10. $\underline{x}$ heeft een exponentiële verdeling met $\lambda = 2$.

Bereken:

a) $P(\underline{x} < \frac{1}{2})$;

b) $P(\underline{x} < 1)$;

c) $P(\underline{x} > 2)$;

d) de waarde van m zodanig dat $P(\underline{x} < m) = \frac{1}{2}$.

5.11. Bereken de mediaan m voor een exponentieel verdeelde grootheid $\underline{t}$. Bewijs dat voor m_0 met $P(\underline{t} \le m_0) = 0{,}75$ geldt $m_0 = 2m$.

5.12. Bij een continu reëel kansveld is de kansdichtheid gegeven door:

$$f_{\underline{u}}(u) = \begin{cases} 0 & (u < 0), \\ Aue^{-\lambda u} & (u \ge 0), \end{cases}$$

waarbij $\lambda > 0$.

Bepaal:

a) A;

b) $P(0 < \underline{u} \le \lambda^{-1})$.

5.13. $\underline{x}$ heeft een normale verdeling met $\mu = 50$ en $\sigma = 7$.
Gevraagd:

a) $P(\underline{x} > 60)$;

b) $P(\underline{x} < 40)$;

c) $P(42 < \underline{x} < 63)$;

d) Bepaal a zó dat $P(\underline{x} < a) = 0{,}025$;

e) Bepaal b zó dat $P(50 - b < \underline{x} < 50 + b) = 0{,}85$.

* 5.14. $\underline{y}$ heeft een gammaverdeling met kansdichtheid

$$f_{\underline{y}}(y) = \begin{cases} 4ye^{-2y} & \text{voor } y \geq 0 \text{ ,} \\ 0 & \text{voor } y < 0 \text{ .} \end{cases}$$

Bereken $P(\underline{y} \leq 1)$, $P(0{,}5 \leq \underline{y} \leq 1{,}5)$.

§ 6. Voorwaardelijke kans

6.1. Uit een volledig spel kaarten wordt aselect een kaart getrokken. Als het een plaatje zou blijken te zijn, hoe groot is dan de kans dat de kaart een boer is?

6.2. Een meting wordt beschreven door een homogeen kansveld op het interval [-1,1]. Beschrijf het voorwaardelijke kansveld bij de voorwaarde dat het resultaat positief is.

6.3. Uit een volledig spel kaarten worden aselect 13 kaarten getrokken. Bepaal de voorwaardelijke kans dat de kleuren in de trekking 3-3-3-4 verdeeld zijn, als bekend is dat de trekking 7 rode en 6 zwarte kaarten bevat.

6.4. Gegeven zijn 2 vazen. Vaas 1 bevat 3 zwarte en 5 witte ballen. Vaas 2 bevat 7 zwarte en 3 witte ballen. Men kiest willekeurig een vaas en trekt daaruit willekeurig een bal. Hoe groot is de kans dat deze bal wit is?

6.5. Machine A produceert van een bepaald product tweemaal zoveel als machine B. A levert 5% defecte, B [illegible]. Een klant krijgt een defect product. Hoe groot is de kans dat het afkomstig is van machine A?

* 6.6. Een kast heeft 3 laden. In de ene la liggen 2 gouden munten, in een andere 2 zilveren en in de derde 1 gouden en 1 zilveren munt. Blindelings wordt een la opengetrokken en daaruit blindelings 1 munt gepakt die van goud blijkt te zijn. Hoe groot is de kans dat de andere munt in de la van goud is?

6.7. Bij het plannen van een enquête onder gezinnen met 4 kinderen vraagt men zich af hoe groot de kans is op een gezin bestaande uit 3 jongens en 1 meisje, als men respectievelijk de keuze beperkt tot:

a) gezinnen met tenminste 3 jongens;

b) gezinnen waarin de oudste 3 kinderen jongens zijn.

(Aangenomen wordt dat alle 16 mogelijke gezinssamenstellingen gelijke kans hebben.)

* 6.8. Een doos bevat 3 geldstukken. Twee geldstukken zijn eerlijk (gelijkwaardige kruis- en muntzijde). Het derde geldstuk is afwijkend; het heeft twee kruiszijden. Er wordt aselect een geldstuk genomen en dit wordt tweemaal opgegooid.

a) Wat is de kans dat beide worpen kruis opleveren?

b) Hoe groot is de kans dat het getrokken geldstuk het afwijkende exemplaar is, als beide worpen kruis hebben opgeleverd? (1970)

6.9. De tijd die iemand moet wachten op een bepaalde trein geven we aan met $\underline{t}$. De verdelingsfunctie $F(t)$ van $\underline{t}$ is gegeven door

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ \frac{t}{2} & \text{voor } 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{voor } 1 \le t < 2 \\ \frac{t}{4} & \text{voor } 2 \le t < 4 \\ 1 & \text{voor } t \ge 4 \,. \end{cases}$$

a) Schets de grafiek van de verdelingsfunctie $F(t)$.

b) Bepaal de kansdichtheid $f(t)$ en teken de grafiek.

c) Bereken:

i) $P(\underline{t} > 1)$;

ii) $P(\underline{t} > 3)$;

iii) $P(\underline{t} > 3 \mid \underline{t} > 1)$. (1970)

§ 7. Afhankelijke en onafhankelijke gebeurtenissen

7.1. Men heeft 48 kaarten; op elk der kaarten staat een der letters A,B,C,D en een der gehele getallen van 1 t/m 12, zodanig dat elke combinatie van letter en getal precies één keer voorkomt. Men trekt aselect één kaart. De gebeurtenis U is het trekken van een kaart waarop een 2 staat. De gebeurtenis V is het trekken van een kaart die minstens één der volgende kenmerken heeft: de kaart vermeldt het getal 3 of 7, de kaart vermeldt de letter B of D.

a) Bereken $P(V)$ en $P(V \mid U)$.

b) Zijn U en V onafhankelijk? (1963)

7.2. Men werpt twee keer met een (zuivere) dobbelsteen. Men beschouwt de volgende gebeurtenissen:

A: de som der ogen is een tweevoud;

B: de som der ogen is een drievoud;

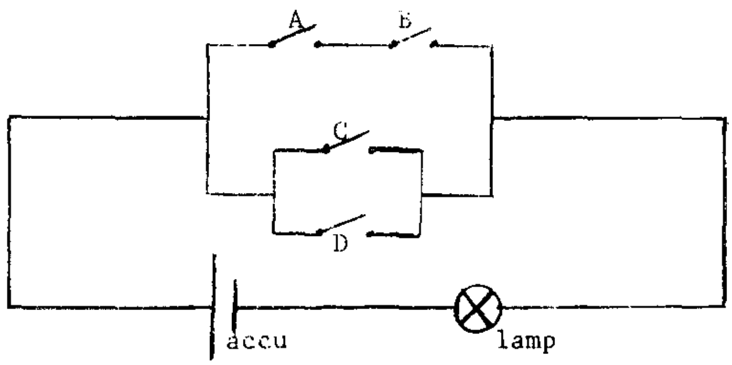
C: bij tenminste één van beide worpen is het aantal ogen minstens 4.

a) Bereken $P(A)$, $P(B)$ en $P(C)$.

b) Zijn A en B onafhankelijk? Motiveer Uw antwoord. (1967)

7.3. A, B, C en D zijn "onafhankelijke" schakelaars. De kans op ingeschakeld zijn is voor elk p.

Hoe groot is de kans dat de lamp brandt? (Accu, lamp en leiding functioneren goed.)



Wat wordt de uitkomst als $p = \frac{1}{2}$ is?

* 7.4. Een relais heeft een kans p_1 niet in te schakelen en na inschakelen een kans p_2 niet uit te schakelen.

a) Wat is de kans dat het relais éénmaal in- en uitschakelt?

b) Als 2 relais in serie geschakeld worden en tegelijkertijd bekrachtigd, hoe groot is dan de kans dat dit paar als geheel éénmaal in- en uitschakelt? (De relais functioneren onafhankelijk van elkaar.)

c) Is het mogelijk dat beide relais in serie geschakeld beter zullen functioneren dan één relais alleen en zo ja, onder welke voorwaarde?

d) Vervang in b) en c) "in serie" door "parallel" en beantwoord dezelfde vragen.

e) Wanneer moet serieschakeling en wanneer moet parallelschakeling geprefereerd worden?

7.5. De volgende beweringen zijn equivalent:

a) De gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk;

b) de gebeurtenissen A en B^* zijn onafhankelijk;

c) de gebeurtenissen A^* en B zijn onafhankelijk;

d) de gebeurtenissen A^* en B^* zijn onafhankelijk.

Bewijs dit.

7.6. Men werpt één dobbelsteen driemaal. Beschouw de gebeurtenissen

A: onder de drie geworpen getallen komt tenminste één 5 voor,

B: het product der drie geworpen getallen is even.

a) Bereken P(A) en P(B).

b) Ga na of A en B onafhankelijk zijn.

§ 8. Binomiale, Poisson verdeling. Het benaderen van een binomiale door een Poisson verdeling

8.1. In een seinsysteem heeft elk verzonden signaal een kans van 0,9 om goed over te komen.

a) Hoe groot is de kans dat een serie van 5 signalen in zijn geheel goed overkomt?

b) Hoe groot is de kans dat er van een serie van 5 signalen minstens 2 goed overkomen?

8.2. Maak opgave 4.6 maar nu met terugleggen.

8.3. Uit grote partijen tomaten neemt men steekproeven van 20 stuks. Een partij wordt afgekeurd als in zo'n steekproef 3 of meer rotte exemplaren worden aangetroffen.

a) Wat is de kans dat een partij met 25% rotte wordt afgekeurd?

b) Noem de kans dat een partij met 10% rotte wordt goedgekeurd p. Wat is dan de kans dat van 10 partijen met elk 10% rotte er 8 of meer worden goedgekeurd? (1968)

8.4. Vijfhonderd studenten doen mee aan een multiple choice tentamen. Er zijn 20 vragen, elk met 3 antwoorden, waaronder precies één juist antwoord. (Het juiste antwoord is door loting op plaats 1, 2 of 3 gezet.)

a) Hoe groot is de kans dat een student, die alle antwoorden zo maar raadt, een voldoende haalt? (Voldoende is meer dan 11 goede antwoorden.) Rond Uw antwoord af op 3 decimalen.

b) Hoe groot is de kans dat, indien alle studenten alle antwoorden zo maar raden, er minstens één een voldoende haalt? (1969)

8.5. Tweehonderd studenten doen mee aan een multiple choice tentamen. Er zijn 20 vraagstukken, elk met 4 antwoorden waaronder precies 1 juist antwoord. (Het juiste antwoord wordt door loting op plaats 1, 2, 3 of 4 gezet.) Indien alle studenten de antwoorden zo maar gokken, hoe groot is dan de kans, dat er minstens één "ten onrechte" toch een voldoende (meer dan 11 juiste antwoorden) behaalt?

* 8.6. Voor de televisie vertoont men een Galtonbord met 15 rijen spijkers, op de onderste rij dus 15, d.w.z. 16 sorteervakken, genummerd 0,1,...,15. Men werpt bovenin 20 knikkers. Bij elke spijker is de kans om naar rechts of links te vallen p resp. $1-p$. Normaal is $p = 0{,}50$. De vraag is of millioenen kijkers door de knikkers telekinetisch naar rechts te dwingen, p tot zeg 0,55 kunnen verhogen. Wat is de kans op 8 of minder knikkers in de rechterhelft (vakken 8 t/m 15):

a) als $p = 0{,}50$;
b) als $p = 0{,}55$.

8.7. Men gooit herhaaldelijk met een zuivere munt en definieert de stochastische grootheid $\underline{x}$ als volgt: $\underline{x}$ is het rangnummer van de eerste worp die "kruis" oplevert. Bereken de kansverdeling van $\underline{x}$.
Doe hetzelfde voor het rangnummer van de tweede keer kruis.

8.8. $\underline{\ell}$ heeft een binomiale verdeling met $n = 40$, $p = 0{,}05$. Bereken $P(\underline{\ell} \leq 3)$ en $P(1 \leq \underline{\ell} \leq 3)$.

8.9. De kans dat een individu een ongewenste reactie geeft op inenting met een bepaald serum is 0,001. Men ent 2000 individuen in. Het aantal ongewenst reagerende individuen kan gezien worden als een stochastische grootheid met een Poissonverdeling.

a) Hoe groot zou U de parameter μ van deze Poissonverdeling kiezen?
b) Wat is de kans dat meer dan 3 individuen ongewenst reageren?
c) Wat is de kans dat minder dan 10 individuen ongewenst reageren?

8.10. Op een kantoor komen gemiddeld 3 telefoongesprekken per uur binnen.
De telefoniste is gedurende 10 minuten afwezig. Hoe groot is de kans dat in die tijd minstens één persoon geen gehoor heeft gekregen?

8.11. Een autoverhuurder bezit twee wagens die per dag worden verhuurd. Het aantal aanvragen per dag heeft een Poissonverdeling met $\mu = 1{,}5$. Onder dag wordt verstaan 9.00-18.00 uur.

a) Hoe groot is de kans dat hij om twaalf uur nog geen aanvraag heeft gekregen?
b) Welk percentage van de dagen zijn beide wagens thuis?
c) Welk percentage zijn beide uit?
d) Indien beide wagens even vaak worden gebruikt, welk percentage van de dagen is één bepaalde wagen dan thuis?

8.12. Gemiddeld gebeurt in een bepaald gebied elke 100 dagen een ongeluk. Het aantal ongelukken per maand (30 dagen) heeft een Poisson-verdeling.

a) Hoe groot is de parameter μ van deze verdeling?

b) Wat is de kans op meer dan één ongeluk per maand?

Als het aantal ongelukken per maand een Poisson-verdeling heeft met parameter μ, dan heeft het tijdsinterval (in maanden) tussen 2 opeenvolgende ongelukken een exponentiële verdeling met kansdichtheid

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t > 0 .$$

c) Wat is de kans dat tussen 2 opeenvolgende ongelukken niet meer dan 3 dagen liggen?

8.13. Gegeven: $\underline{k}$ heeft een binomiale verdeling met $n = 20$, $p = 0,05$. Benader $P(\underline{k} = k)$, $k = 0,1,\ldots,20$, door middel van een Poisson-verdeling. Vergelijk de antwoorden met de exacte waarden.

8.14. Een productieproces levert gemiddeld 1% defecte producten. Hoe groot zijn bij een partij van N producten de kansen op hoogstens 1, 2, resp. 3% defecten:

a) als N = 100;

b) als N = 1000?

c) Welke tendentie tonen de gevraagde kansen bij toenemende N?

d) Hoe groot ongeveer zullen de gevraagde kansen zijn als N = 100.000?

Opmerking. Vergelijk de gevonden antwoorden onder a) en b) met de waarden verkregen uit een uitvoerige binomiale tabel.
ad a) 0,73576; 0,92063; 0,98163;
ad b) 0,58304; 0,99850; 1,00000.

8.15. In een seinsysteem heeft elk verzonden signaal een kans van 0,95 om goed over te komen.
Hoe groot is de kans op:

a) hoogstens 1 fout in een bericht van 10 tekens?

b) hoogstens 2 fouten in een bericht van 20 tekens?

c) hoogstens 4 fouten in een bericht van 40 tekens?

Bij welk aantal tekens is de kans op hoogstens 10% fouten groter dan 0,99?

8.16. Een cake bevat 200 krenten. De cake wordt in 50 gelijke plakjes gesneden. Hoe groot is de kans dat een blindelings gekozen plakje geen krenten bevat? Bereken de kans exact en geef een benadering m.b.v. de Poisson-verdeling.

§ 9. Stochastische vectoren, onafhankelijke stochastische grootheden, functies van stochastische grootheden

9.1. Het paar stochastische grootheden $(\underline{x},\underline{y})$ heeft de kansdichtheid

$$f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{voor } 0 \le x \le 1 \text{ en } 0 \le y \le 1 \text{ ,} \\ 0 & \text{anders .} \end{cases}$$

Bereken de marginale kansdichtheden $f_{\underline{x}}$ en $f_{\underline{y}}$. Ga na of $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk zijn.

9.2. Het paar stochastische grootheden $(\underline{x},\underline{y})$ heeft de kansdichtheid

$$f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = \begin{cases} 8xy & \text{op } 0 \le x \le y \le 1 \text{ ,} \\ 0 & \text{anders .} \end{cases}$$

Bereken $f_{\underline{x}}$ en $f_{\underline{y}}$. Ga na of $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk zijn.

* 9.3. Het paar stochastische grootheden $(\underline{x},\underline{y})$ heeft als (simultane) kansdichtheid

$$f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } |x| + |y| \le 1 \text{ ,} \\ 0 & \text{anders .} \end{cases}$$

a) Bepaal de marginale verdelingsfuncties en de kansdichtheden van $\underline{x}$ en $\underline{y}$.

b) Zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk?

c) Bepaal de verdelingsfunctie en de kansdichtheid van

i) $\underline{x} + \underline{y}$

ii) $\underline{x} - \underline{y}$

iii) $|\underline{x} + \underline{y}|$

iv) $|\underline{x}| + |\underline{y}|$.

* 9.4. $f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y)$ is een kansdichtheid op $x^2 + y^2 \le 1$ (d.w.z. $f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = 0$ voor $x^2 + y^2 > 1$). Is het mogelijk $f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y)$ zo te kiezen dat $\underline{x}$ en $\underline{y}$ o.o. zijn

a) als $f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) > 0$,

b) als $f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) \ge 0$?

9.5. Twee personen hebben een afspraak tussen 8 en 9 uur. Hun aankomsttijden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijk en zonder voorkeur voor enig tijdstip tussen 8 en 9 uur.

a) Hoe groot is de kans dat ze elkaar ontmoeten als ze elk niet langer dan 10 minuten wachten?

b) Bepaal de verdeling van het absolute verschil $\underline{v} = |\underline{x} - \underline{y}|$ tussen hun aankomsttijden.

S 9.6. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke exponentieel verdeelde grootheden met dezelfde parameter λ. Wat is de verdelingsfunctie van $\underline{x} + \underline{y}$? Wat is de kansdichtheid?

S 9.7. Bereken $F_{\underline{x}+\underline{y}}$ en $f_{\underline{x}+\underline{y}}$ als $(\underline{x},\underline{y})$ homogeen verdeeld is over het eenheidsvierkant.

S 9.8. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn N(0,1) en o.o. Bereken $f_{\underline{x}+\underline{y}}$.

9.9. $\underline{x}$ is een continue stochastische grootheid met kansdichtheid $f_{\underline{x}}(x)$ en verdelingsfunctie $F_{\underline{x}}(x)$. Stel $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ zijn onafhankelijke waarnemingen van $\underline{x}$. Noem $\underline{m} := \min(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n)$.

a) Bepaal $P(\underline{m} > m)$.

b) Stel

$$f_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0)\ , \\ \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0)\ . \end{cases}$$

Bewijs dat $\underline{m}$ ook exponentieel verdeeld is, en wel met parameter $n\lambda$. (1966)

9.10. Een experiment bestaat uit vier onafhankelijke deelexperimenten waarvan de resultaten beschreven worden door een normale verdeling met $\mu = 2$ en $\sigma = 3$. Hoe groot is de kans dat de grootste van de vier resultaten groter is dan 5? En de kans dat de kleinste groter is dan 5?

9.11. In een systeem is ter verhoging van de betrouwbaarheid een samenstel van twee componenten van een bepaald type parallel aangebracht. Voor beide componenten wordt de levensduur in maanden beschreven door een exponentiële verdeling met $\lambda = 2$.

a) Gevraagd wordt de kansverdeling die de levensduur van het samenstel beschrijft.

b) Bereken zowel voor één component als voor het samenstel van twee de kans op een levensduur van minstens 1 maand.

9.12. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke homogeen verdeelde stochastische grootheden op $[0,1]$.
Bepaal de verdelingsfunctie en de kansdichtheid van $\underline{z} = \underline{xy}$.

* 9.13. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ hebben de kansdichtheid

$$f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-(x^2-2\rho xy+y^2)/(2-2\rho^2)}, \quad 0 \le \rho < 1 .$$

Zij G het rechthoekige gebied bepaald door

$$u < \frac{x+y}{\sqrt{2}} < u + \Delta u, \quad v < \frac{y-x}{\sqrt{2}} < v + \Delta v .$$

Toon aan dat

$$P((\underline{x},\underline{y}) \in G) \approx \frac{\Delta u \Delta v}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2}{1+\rho} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{1-\rho}}, \text{ voor } \Delta u \text{ en } \Delta v \text{ klein.}$$

Leid hieruit af dat $\underline{u} = \dfrac{\underline{x}+\underline{y}}{\sqrt{2}}$ en $\underline{v} = \dfrac{\underline{y}-\underline{x}}{\sqrt{2}}$ onafhankelijk zijn.

9.14. Electronen treffen een verticaal vlak rond het punt O, met afwijkingen waarvan de horizontale en verticale componenten $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk van elkaar variëren, elk volgens een standaard normale ($N(0,1)$) verdeling.
Bereken de kansverdeling van de stochastische grootheid $\underline{r} = \sqrt{\underline{x}^2 + \underline{y}^2}$. (Dit is een Rayleigh-verdeling, deze treedt ook op bij ruisproblemen als de verdeling van de modulus van een signaal.)

9.15. $\underline{x}$ heeft een homogene verdeling op $[-a,a]$.
Wat is de verdeling van $\underline{x}^2$?

9.16. In het Maxwell-model wordt de kansdichtheid voor de snelheid $\underline{v}$ van gasmoleculen gegeven door:

$$f(v) = av^2 e^{-\frac{1}{2}\lambda m v^2}, \quad 0 \le v < \infty .$$

Wat is de kansverdeling van de kinetische energie $\underline{E} = \frac{1}{2}m\underline{v}^2$ der moleculen?

§ 10. Verwachting

10.1. Bereken de verwachting en de variantie van het aantal ogen als we gooien met een zuivere dobbelsteen:

a) eenmaal,

b) 36 maal.

10.2. We doen 12 onafhankelijke trekkingen uit een homogene verdeling op [0,1].

a) Bepaal de verwachting van de som van de 12 getrokken getallen.

b) Bepaal de variantie van deze som.

c) Als we de trekkingen werkelijk uitvoeren (met aselecte getallen bijvoorbeeld), welk deelinterval van [0,12] zal dan "gewoonlijk" de som bevatten (vergelijk met normale verdeling)?

10.3. Bereken de verwachting en de variantie van de stochastische grootheid $\underset{\sim}{s}$ uit opgave 5.8.

10.4. Bereken de verwachting en de variantie van de stochastische grootheid $\underset{\sim}{u}$ uit opgave 5.9.

10.5. Bereken de verwachting en de variantie van $\underset{\sim}{x}$, indien

a) $\underset{\sim}{x}$ een continue homogeen verdeelde stochastische grootheid is op $(0,a)$;

b) $\underset{\sim}{x}$ de waarden $1,2,\ldots,n$ aanneemt met gelijke kansen.

10.6. Gegeven zijn twee vazen V_1 en V_2. Vaas V_1 bevat 1 zwarte en 1 witte bal, V_2 bevat 1 zwarte en 2 witte ballen. Uit elke vaas wordt aselect één bal getrokken. U ontvangt voor elke zwarte bal die U trekt ƒ 1,--.

a) Welke bedragen kunt U ontvangen?

b) Bepaal de kans op elk van deze bedragen.

c) Bereken de verwachting en de variantie van het ontvangen bedrag. (1970)

10.7. Een onderdeel moet op een bepaalde machine bewerkt worden; als het na de bewerking afgekeurd wordt moet het de bewerking opnieuw ondergaan. De kans om afgekeurd te worden is elke keer p.
Bereken de verwachting van het aantal keren dat de bewerking op eenzelfde exemplaar moet worden uitgevoerd.

10.8. Bij een inentingscampagne wil men ramen hoeveel onkosten zullen ontstaan door het optreden van een vrij zeldzame complicatie. Men verwacht 10 gevallen en onderstelt dat het aantal een Poissonverdeling heeft. De kosten per geval nemen af met het aantal gevallen; zij worden bij k gevallen op $100.k.(0{,}95)^{k-1}$ gesteld.
Hoe hoog wordt de raming?

* 10.9. Een droog korrelig poeder bevat deeltjes die zuiver bolvormig zijn en waarvan de diameter normaal verdeeld is met $\mu = 170$ en $\sigma = 11{,}6$ mikron. Men wil dit poeder in 3 soorten verdelen, nl. grof, middel en fijn, en wel zodanig dat deze drie klassen een gelijk aantal korrels bevatten.
Hoe groot moeten de diameters van de gaten van de benodigde zeven zijn, opdat de gewenste indeling wordt verkregen? Wat is de kansverdeling van de diameter van elk soort? Bereken de verwachte diameter der korrels voor elk soort.

* 10.10. De stochastische grootheid $\underline{x}$ heeft de volgende kansdichtheid $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \,, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{voor } x \geq 0 \,, \end{cases} \qquad (\lambda \text{ is een vast positief getal}) \;.$$

a) Bereken de verwachting van $\underline{x}$.
b) Bereken $P(\underline{x} \leq x \mid \underline{x} \geq a)$ met $a > 0$. (1966)

Conclusie: Als de brandduur van een autolampje gegeven wordt door $f(x)$, dan heeft de levensduur van het lampje, dat a uur gebrand heeft, (nog) dezelfde verdeling als die van een nieuw, waardoor het zou kunnen worden vervangen.

* 10.11. Zij $\underline{x} \geq 0$ met verdelingsfunctie $F_{\underline{x}}$ en continue kansdichtheid $f_{\underline{x}}$. Als $E\underline{x} < \infty$ is, dan geldt

$$E\underline{x} = \int_0^\infty \{1 - F_{\underline{x}}(x)\}dx \;.$$

a) Bewijs dit (aanwijzing:

$$x\{1 - F_{\underline{x}}(x)\} \leq \int_x^\infty u f_{\underline{x}}(u)du \qquad \text{(ga na)}) \;.$$

b) Controleer dit voor de gevallen dat $\underline{x}$ exponentieel verdeeld is met parameter λ resp. homogeen verdeeld is op $(0,1)$.

10.12. Bereken $E\underline{z}$, waarbij $\underline{z}$ de stochastische grootheid is uit opgave 9.12.

10.13. De door een machine geproduceerde staven hebben een normaal verdeelde lengte met onbekende verwachting μ en onbekende variantie σ^2. Men neemt een steekproef van een groot aantal staven. Bij meting blijkt 16% langer dan 51,0 en 2,5% korter dan 49,5 cm.

a) Bij welke σ en μ zijn de gevonden percentages te verwachten?

b) Men wil staven produceren met een gemiddelde lengte van 50,0 cm en keurt elke staaf die langer is dan 51,0 cm of korter dan 49,0 cm af. Bereken het te verwachten percentage uitval als de machine zo goed mogelijk is ingesteld. (1968)

10.14. Een automatische draaibank produceert assen waarvan de diameter $\underline{x}$ een normale verdeling heeft met μ = 5,010 mm en σ = 0,006 mm. De tolerantie-eisen zijn $5{,}000 \le x \le 5{,}020$ mm.

a) Welk percentage producten voldoet hier niet?

b) Wanneer het gemiddelde μ verloopt doch σ constant blijft, schets dan hoe het percentage uitval met μ verandert. (Neem μ = 5,006; 5,008; 5,012; 5,014; 5,016.)

c) Tot welke waarde moet men σ verkleinen om bij een juiste instelling van μ het percentage uitval tot 1% terug te brengen?

10.15. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld (met dezelfde parameter). Zij

$$\underline{u} = \frac{\underline{x}}{\underline{x} + \underline{y}}, \quad \underline{v} = \frac{\underline{x} + \underline{y}}{\underline{x}} .$$

a) Bereken $F_{\underline{u}}$ en $f_{\underline{u}}$.

b) Bereken $F_{\underline{v}}$ en $f_{\underline{v}}$.

c) Bereken $E\underline{u}$, $E\underline{v}$ en $E\underline{u}\underline{v}$.

d) Zijn $\underline{u}$ en $\underline{v}$ onafhankelijk?

10.16. Bereken bij opgave 9.1: $E\underline{x}$, $E\underline{y}$, var $\underline{x}$, var $\underline{y}$, $E\underline{x}\underline{y}$, $\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{y})$ en $\rho(\underline{x},\underline{y})$.

10.17. Bereken bij opgave 9.2: $E\underline{x}$, $E\underline{y}$, var $\underline{x}$, var $\underline{y}$, $E\underline{x}\underline{y}$, $\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{y})$ en $\rho(\underline{x},\underline{y})$.

10.18. Bereken bij opgave 9.3: $\rho(\underline{x},\underline{y})$.

* 10.19. Het paar stochastische grootheden $(\underline{x},\underline{y})$ heeft een homogene verdeling op het parallellogram (0,d), (0,-d), (1,1-d), (1,1+d) met oppervlakte $2d > 0$.
Bereken $E\underline{x}$, $E\underline{y}$, $\sigma(\underline{x})$, $\sigma(\underline{y})$, $E\underline{x}\underline{y}$, $\rho(\underline{x},\underline{y})$.

10.20. Het paar $(\underline{x},\underline{y})$ is homogeen verdeeld op het eenheidsvierkant. Zij $\underline{m} := \min(\underline{x},\underline{y})$ en $\underline{M} := \max(\underline{x},\underline{y})$.
Bereken $\rho(\underline{m},\underline{M})$.

10.21. De stochastische grootheid $\underline{x}$ heeft de kansdichtheid

$$f(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)^2} \quad (x > 0) .$$

a) Bereken de verwachting, de modus en de mediaan van $\underline{x}$.

b) Ga na dat $E\underline{x}^2 = \infty$; wat betekent dit voor $\sigma(\underline{x})$?

* c) Ga na dat $E|\underline{x} - 1| = 1$ en $E|\underline{x} - a| = a + \frac{\pi}{2} - 2 \arctan a \geq 1$ $(a > 0)$.
(De gemiddelde lineaire afwijking t.o.v. a is minimaal als a de mediaan is.)

10.22. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld met verwachting $\frac{1}{\lambda}$.

a) Bereken $\mathrm{var}(\underline{x} - \underline{y})$.

b) Bereken $\rho(\underline{x},\underline{x} - \underline{y})$.

* 10.23. $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ zijn onderling onafhankelijk en hebben dezelfde verdeling. Veronderstel $E\underline{x}_j^2 < \infty$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ en definieer

$$\underline{S}_k := \sum_{j=1}^{k} \underline{x}_j \quad (k \leq n) .$$

Laat zien dat (ongeacht de kansverdeling van de $\underline{x}_j$)

$$\rho(\underline{S}_k,\underline{S}_n) = \sqrt{\frac{k}{n}} .$$

§ 11. Sommen van o.o. (normaal verdeelde) stochastische grootheden, centrale limietstelling

11.1. Een verpakkingsmachine die pakjes thee van nominaal 100 gram maakt, verpakt gemiddeld 101,0 gram in elk pakje. De verdeling van het gewicht aan thee in een pakje is normaal met een spreiding van 0,6 gram.
Hoeveel procent van de pakjes bevat minder dan het nominale gewicht?

11.2. In een magazijn van 3,20 m hoog ligt een groot aantal platte schijven waarvan de dikte normaal verdeeld is met verwachting 12 cm en standaardafwijking 2 cm. Men heeft de gewoonte 25 schijven op elkaar te stapelen.
Hoe groot is de kans dat 25 schijven samen te hoog zijn?

11.3. De gewichtsinhoud van een pakje boter is normaal verdeeld met een standaarddeviatie van 3 gram. Een regeringsinstantie neemt ter controle af en toe een steekproef van 25 pakjes. De fabrikant krijgt een boete als de gemiddelde gewichtsinhoud van deze steekproef minder is dan 250 gram.
Op welk gemiddelde moet de verpakkingsmachine worden ingesteld om de kans op een boete tot 1% beperkt te houden?

11.4. Twintig lampen zijn in serie geschakeld. De levensduur van elke lamp mag als normaal verdeeld worden beschouwd met verwachting 400 uur en standaardafwijking 50 uur. Bereken het aantal branduren van de serieschakeling dat met een kans van 90% wordt overschreden.

11.5. Van een grote partij assen is de diameter normaal verdeeld met $\mu_1 = 14,82$ mm en $\sigma_1 = 0,03$ mm. Van een even grote partij boringen is de diameter normaal verdeeld met $\mu_2 = 14,89$ mm en $\sigma_2 = 0,04$ mm.
Een as "past" in een boring als zijn diameter minstens 0,05 en hoogstens 0,15 mm kleiner is dan die van de boring.

a) Bereken welk percentage assen in boringen zal passen als as en boring aselect worden gekozen.
b) Tot hoever kan dit percentage worden verhoogd indien men wèl de gemiddelden van as en boring door gewijzigde instelling der machines kan wijzigen, maar niet de standaardafwijkingen?

11.6. In een magazijn worden dozen opgestapeld waarvan de hoogte normaal verdeeld is met gemiddelde 10 cm en standaarddeviatie 1 cm. De beschikbare hoogte is 106 cm. Wanneer men de dozen aselect opstapelt, hoe groot is dan de kans

a) dat er voor een stapel van 10 dozen onvoldoende ruimte is?

b) dat er voor een stapel van 11 dozen wel voldoende ruimte is?

* 11.7. Een leverancier van flessen slaolie vermeldt als netto inhoud van zijn flessen 350 gram olie. Een winkelier wenst deze bewering te controleren zonder de flessen te openen. Hij weegt daartoe een zeer groot aantal gevulde flessen en hij vindt voor dit gewicht een normale verdeling met verwachting 585,2 gram en standaardafwijking $\sigma = 12{,}8$ gram. Vervolgens weegt hij een groot aantal lege flessen die hij van zijn klanten teruggekregen heeft met bijbehorende sluitcapsules. Voor dit gewicht vindt hij eveneens een normale verdeling met $\mu = 228{,}3$ gram en $\sigma = 11{,}3$ gram. Gevraagd het percentage der flessen olie die minder dan 350 gram olie bevatten.

11.8. Men wil een afstand van 100 meter afzetten door 100 maal achtereen een afstand van 1 meter af te passen. De fout die daarbij elke keer gemaakt wordt is een stochastische grootheid met $\mu = 0$ en $\sigma = 5$ cm.

a) Bereken de kans dat de afgezette afstand meer dan $\frac{1}{2}$ meter van de gewenste 100 meter verschilt.

b) De kans onder a) is tamelijk groot. Tot hoever zou men de standaardafwijking van de fout in iedere afgezette meter moeten reduceren opdat de kans onder a) 0,10 is?

11.9. Een weegmachine noteert gewichten g in eenheden van 1 kg, d.w.z. indien $26{,}5 \le g < 27{,}5$, dan wordt 27 genoteerd. Men mag aannemen, dat de werkelijke gewichten homogeen verdeeld zijn op een interval van de vorm $(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})$ $(n \in \mathbb{N})$ en dat alle artikelen meer wegen dan $\frac{1}{2}$ kg.
Bereken de kans dat na 1000 onafhankelijke wegingen het werkelijke gewicht meer dan 16 kg groter is dan het totaal der genoteerde gewichten. (1967)

11.10. Lampen van een bepaald type hebben een levensduur gemeten in uren, met kansdichtheid $f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$ met $\lambda = 0{,}005$.
Hoeveel lampen heeft men nodig om een kans van 0,90 te hebben op minstens 100.000 branduren?

11.11. Een machine produceert bouten waarvan de diameter normaal verdeeld is met $\sigma = 0,3$ mm; bij een juiste instelling is $\mu = 26$ mm. Een bout wordt afgekeurd als de diameter groter dan 26,7 mm of kleiner dan 25,3 mm is.

a) Bereken het percentage uitval.

b) Bereken de kans, dat in een steekproef van 200 stuks 3 of meer exemplaren afgekeurd worden.

c) Welk aantal afgekeurde exemplaren in een steekproef van 200 stuks wordt met een kans kleiner dan 0,01 overschreden, zodat men gaat twijfelen aan de juiste instelling van de machine? (1968)

§ 12. Het benaderen van een binomiale en van een Poisson verdeling door een normale verdeling. Momentenvoortbrengende functies

12.1. Gegeven een binomiale verdeling met kans p op succes en $n = 100$. Bereken:

a) als $p = 0{,}05$ de kans op minder dan 4 successen;

* b) als $p = 0{,}2$ de kans op precies 16 successen;

c) als $p = 0{,}2$ de kans op 16 of minder successen. (1970)

* 12.2. Door 1000 kg meel wordt een kleine hoeveelheid van een vitaminepreparaat gemengd ("goed gemengd"). Deze hoeveelheid bestaat uit n korrels, alle van dezelfde afmeting. Men neemt een monster van 10 gram van het mengsel. Het aantal korrels vitaminepreparaat in het monster heeft een Poisson verdeling.

a) Bepaal de kans dat het monster tenminste 90% van het verwachte aantal korrels vitaminepreparaat bevat, indien $n = 10^6$.

b) Dezelfde vraag voor $n = 10^7$.

c) Bepaal n zo, dat bovengenoemde kans $\geq 0{,}95$ is. (1967)

12.3. Iemand werpt 1800 maal met een zuivere dobbelsteen. Hoe groot is de kans dat hij meer dan 330 zessen gooit?

12.4. Geef een benadering voor het aantal malen dat men met een zuivere dobbelsteen moet gooien, opdat de frequentie van "6" met een kans van 0,95 tussen 9/60 en 11/60 ligt.

a) Gebruik de normale benadering.

b) Gebruik de ongelijkheid van Chebyshev.

12.5. Een Geigerteller geeft voor een bepaald radioactief preparaat gemiddeld 900 tellingen per minuut. Hoe groot is de kans dat er in een bepaalde minuut minder dan 850 tellingen geregistreerd worden?

12.6. Een fabrikant maakt puddingpoeder voor rozijnenpudding. Het aantal rozijnen per pakje van 100 gram heeft een Poisson verdeling. De fabrikant wil nu dat bij hoogstens 1% van al zijn pakjes het aantal rozijnen minder dan 10 bedraagt. Hoeveel rozijnen moet hij aan 100 kg poeder toevoegen?

12.7. Onderstel dat een handelaar gemiddeld 60 televisietoestellen per jaar verkoopt. Hij zorgt elke maand voor een nieuwe voorraad. Hoeveel toestellen moet de handelaar aan het begin van de maand minstens in huis hebben opdat de kans op "uitverkocht" vóór het eind van de maand kleiner is dan 5%? Beantwoord dezelfde vraag bij een jaarverkoop van 240 apparaten.

12.8. Bij een machinaal weefgetouw treden gemiddeld 60 draadbreuken op in een tijdsinterval van lengte T. Als de machine ontregeld raakt neemt het aantal draadbreuken toe en men wenst dan zo snel mogelijk in te grijpen. De kans om ten onrechte in te grijpen dient echter bij iedere controle niet groter dan 0,01 te zijn. Bereken het kleinste getal x_0 zodanig, dat de regel "ingrijpen als $x > x_0$" voldoet aan de gestelde eisen.

12.9. Een grossier ontvangt van een fabrikant een zeer grote partij transistoren. De grossier neemt een steekproef van 100 stuks uit de partij en gaat van deze 100 stuks na welke bruikbaar zijn.

a) Bereken de kans dat meer dan 72 exemplaren uit de steekproef bruikbaar zijn, onder de veronderstelling dat 80% van de gehele partij bruikbaar is.
b) De fabrikant garandeert dat minstens 80% van de geleverde transistoren bruikbaar is. De grossier wil de kans dat hij ten onrechte bij de fabrikant reclameert over het gegarandeerde percentage beperken tot ten hoogste 0,10. Bij welke aantallen bruikbare exemplaren in zijn steekproef zal de grossier reclameren? (1967)

12.10. Het gewicht $\underline{x}$ van de mannelijke studenten is een normaal verdeelde grootheid met $\mu = 155$ pond en $\sigma = 20$ pond.

a) Bepaal de kans dat een willekeurige student een gewicht heeft tussen de 120 en 130 pond.
b) Gegeven is een groep van 2000 mannelijke studenten. Hoe groot is het verwachte aantal studenten in deze groep met een gewicht tussen 120 en 130 pond?
c) Zij $\underline{k}$ het aantal studenten in deze groep met een gewicht tussen de 120 en 130 pond. Bepaal $P[\underline{k} \geq 142]$. (1970).

12.11. Gegeven een stochastische grootheid $\underline{x}$ met kansdichtheid

$$f_{\underline{x}}(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1, \\ 2-t & 1 < t \leq 2, \\ 0 & t \leq 0 \text{ of } t > 2 . \end{cases}$$

a) Bepaal de momentenvoortbrengende functie $\varphi_{\underline{x}}(s)$.

b) Bereken alle momenten van $\underline{x}$.

c) Welke verdeling heeft $\sqrt{\varphi_{\underline{x}}(s)}$ als momentenvoortbrengende functie?

* 12.12. Zij $\underline{x}$ een waarneming uit de homogene verdeling op $[0,1]$, $\underline{y}$ het aantal ogen bij een worp met een dobbelsteen.

a) Bepaal $\varphi_{\underline{x}}(s)$, $\varphi_{\underline{y}}(s)$, $\varphi_{\underline{x}+\underline{y}}(s)$, $\varphi_{\underline{x}+\underline{y}-1}(s)$.

b) Wat is de verdeling van $\underline{x} + \underline{y} - 1$?

* 12.13. Zij $\underline{x}$ een stochastische grootheid met kansdichtheid

$$f_{\underline{x}}(t) = \begin{cases} \ln 4.(\tfrac{1}{2})^t & \text{voor } 0 \leq t \leq 1 , \\ 0 & \text{voor } t < 0 \text{ of } t > 1 . \end{cases}$$

Zij $\underline{y}$ de stochastische grootheid met kansverdeling $P(\underline{y} = k) = (\tfrac{1}{2})^{k+1}$, $k = 0,1,2,\ldots$.

a) Bepaal $\varphi_{\underline{x}}(s)$, $\varphi_{\underline{y}}(s)$, $\varphi_{\underline{x}+\underline{y}}(s)$.

b) Wat is de verdeling van $\underline{x} + \underline{y}$?

S 12.14. a) $\underline{k}_1$ en $\underline{k}_2$ zijn o.o. en binomiaal verdeeld met parameters (n_1,p) resp. (n_2,p). Bewijs dat $\underline{k}_1 + \underline{k}_2$ binomiaal verdeeld is met parameters $(n_1 + n_2,p)$.

b) $\underline{k}_1$ en $\underline{k}_2$ zijn o.o. en Poisson verdeeld met verwachting μ_1 resp. μ_2. Bewijs dat $\underline{k}_1 + \underline{k}_2$ ook Poisson verdeeld is (met verwachting $\mu_1 + \mu_2$).

S 12.15. $\underline{x}_1,\underline{x}_2,\ldots,\underline{x}_n$ zijn o.o. en exponentieel verdeeld met $E\underline{x}_j = \frac{1}{\lambda}$ $(j = 1,2,\ldots,n)$. Bewijs dat $\underline{z} = \Sigma_{j=1}^{n} \underline{x}_j$ een gammaverdeling heeft.

12.16. Bereken alle momenten van de $N(0,1)$-verdeling.

§ 13. Schatters

13.1. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn twee onafhankelijke waarnemingen uit een homogene verdeling op (a,b). (Zie vraagstuk 9.5.)
Toon aan dat $3|\underline{x} - \underline{y}|$ een zuivere schatter is voor $b - a$.

S 13.2. $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ is een aselecte steekproef uit een populatie met een homogene verdeling op $(0,\theta)$. Laat zien dat $\frac{n+1}{n}\max(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$ een zuivere schatter is voor θ.

13.3. $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ is een aselecte steekproef uit een populatie met een homogene verdeling op $(0,2\mu)$. Dan is $\bar{\underline{x}} = \frac{1}{2}(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)$ een zuivere schatter voor μ. Stel $\underline{x}_1 > \underline{x}_2$, dan is $\frac{3}{4}\underline{x}_1$ ook een zuivere schatter voor μ en wel met kleinere variantie: $\frac{3}{4}\sigma^2_{\bar{\underline{x}}}$. Toon dit aan. (Vergelijk stelling 2,p. 52 van de collegesyllabus).

* 13.4. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden. Er worden n onafhankelijke paren waarnemingen (x_i, y_i) gedaan. Men wil een schatting maken van de parameter $E(\underline{x}\underline{y})$. Toon aan dat $\frac{1}{n}\Sigma\underline{x}_i\underline{y}_i$ en $\bar{\underline{x}}\bar{\underline{y}}$ zuivere schatters zijn en dat de laatste nauwkeuriger is.

13.5. $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ is een aselecte steekproef uit een normale verdeling met $\mu = 0$ en een onbekende σ.
Toon aan dat $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|$ een zuivere schatter is voor σ.

13.6. $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ is een aselecte steekproef uit een exponentiële verdeling met een onbekende parameter λ.
Toon aan dat $\frac{1}{\underline{x}_1 + \underline{x}_2}$ een zuivere schatter is voor λ.

§ 14. Toetsen bij een normale verdeling, fout van eerste en tweede soort, onderscheidingsvermogen

14.1. A werpt 2000 maal met een dobbelsteen en krijgt 290 maal "6". Tot welke conclusie t.a.v. de zuiverheid van de dobbelsteen leidt dit bij gebruik van een onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0{,}01$? Idem bij $\alpha = 0{,}05$.

14.2. Een chemicus heeft op theoretische gronden geconcludeerd dat een zekere grootheid de waarde 10 moet hebben. Hij wil deze uitkomst verifiëren door experimentele bepaling van de waarde. Hiertoe voert hij 12 maal een standaardexperiment uit waarvan aangenomen mag worden dat de uitkomst normaal verdeeld is met als spreiding 2 en als verwachting de werkelijke waarde van de beschouwde grootheid.

a) Stel een toets op voor de hypothese $\mu = 10$ ($\alpha = 0{,}01$).

b) De chemicus vindt het steekproefgemiddelde 9. Verwerpt hij nu de hypothese?

14.3. Een eierhandelaar koopt een grote partij eieren van een kippenfokker. Aangenomen wordt dat het gewicht van een ei in een homogene partij (zelfde soort kippen, gelijke leeftijd) normaal verdeeld is. Verder wordt aangenomen dat de spreiding in de gewichten der eieren 6 gram bedraagt. De fokker garandeert dat het gemiddelde gewicht in deze partij boven de 60 gram ligt. De handelaar neemt een steekproef van 5 eieren, deze wegen samen 275 gram.
Heeft de koper voldoende reden om te reclameren? ($\alpha = 0{,}05$)

* 14.4. Een fabrikant van kabels weet uit langdurige ervaring, dat de treksterkte van een bepaald soort kabel een normaal verdeelde grootheid is met een gemiddelde $\mu \geq 10$ ton en een standaardafwijking $\sigma = 1$ ton. Onlangs ontving hij een klacht van een klant; deze klant was van mening dat de treksterkte van de kabels lager was dan in het verleden. De fabrikant beweerde daarentegen dat de gemiddelde treksterkte niet kleiner was geworden. Om zijn bewering te toetsen neemt de fabrikant nu een steekproef van 25 stukken kabel. Deze 25 stukken bleken een gemiddelde treksterkte van 9,60 ton op te leveren.
Heeft de fabrikant reden - op basis van deze steekproef - te twijfelen aan zijn eigen bewering? Toets links-eenzijdig en neem als onbetrouwbaarheid van de toets:

a) $\alpha = 0{,}05$; b) $\alpha = 0{,}01$. (1970).

14.5. Het gewicht van één sinaasappel van een bepaald soort is bij de tot nu toe gevolgde behandeling van de bomen een normaal verdeelde grootheid $\underline{g}$ met $\mu = 50$ gram en standaardafwijking $\sigma = 2$ gram. Er is een goedkopere behandeling ontwikkeld, waarvan beweerd wordt dat ze even zware sinaasappels (dus geen lichtere) oplevert als die welke tot nu gevolgd wordt. Een kweker wil deze bewering $\mu = 50$ gram toetsen tegen het alternatief $\mu < 50$ gram, waarbij aangenomen mag worden dat de standaardafwijking niet veranderd is. Een steekproef van 100 sinaasappels heeft een gemiddeld gewicht van 49,65 gram. Heeft de kweker reden om de nieuwe methode niet toe te passen? ($\alpha = 0{,}05$) (1970).

* 14.6. In een fabriek staan twee vulmachines, A en B, waarmee flessen worden gevuld met slaolie. Bij een juiste instelling van een machine is de gemiddelde inhoud van een fles 250 gram. Van beide machines mag worden aangenomen dat de gedoseerde hoeveelheid normaal verdeeld is met een standaardafwijking van 2,5 gram. Om te controleren of de machines goed zijn ingesteld wordt van elke machine de inhoud van 4 flessen nauwkeurig bepaald. De gemiddelde inhoud van de 4 flessen van machine A bedraagt 251,68 gram en het gemiddelde van machine B is 252,68 gram.

a) Toets of machine A op het juiste gemiddelde van 250 gram is ingesteld (onbetrouwbaarheid 0,05).
b) Doe hetzelfde voor machine B.
c) Toets of de instellingen van de machines A en B onderling verschillen (onbetrouwbaarheid 0,05). (1969)

14.7. In een fabricageproces maakt men platen waarvan de dikte normaal verdeeld is met $\mu = 50$ mm en $\sigma = 0{,}9$ mm. Verkoopbaar zijn platen met een dikte die ligt tussen 48,9 en 51,1 mm. Onbruikbaar zijn platen waarvan de dikte kleiner is dan 47,9 mm of groter dan 52,1 mm. De rest is tweede keus.

a) Bepaal het percentage dat onbruikbaar is (afronden).
b) Bepaal het percentage tweede keus (afronden).
c) Bepaal de kans dat in een productie van 150 stuks 6 of meer platen onbruikbaar zijn.
d) In een partij van 150 stuks vindt men 42 stuks tweede keus. Is dat voldoende reden om aan te nemen dat de instelling is veranderd? ($\alpha = 0{,}01$) (1969)

14.8. Bij een bepaald radioactief preparaat telt men met een Geigerteller gemiddeld 256 aanslagen per minuut. Bij een ander preparaat waarvan de radioactiviteit onbekend is telt men 288 aanslagen in één minuut. Is er verschil in radioactiviteit?

14.9. $\underline{x}$ is normaal verdeeld met var $\underline{x} = 1$ en verwachting μ. Men neemt een steekproef ter grootte n en toetst de nulhypothese $\mu = 0$ tegen het alternatief $\mu = 2$ met behulp van een rechtseenzijdig kritiek gebied.

a) Indien de kans op een fout van de eerste soort 0,05 is, hoe groot is dan de kans op een fout van de tweede soort?
b) Indien de kans op een fout van de tweede soort 0,05 is, hoe groot is dan de kans op een fout van de eerste soort?

* 14.10. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ is normaal verdeeld met $\sigma = 10$ en onbekende μ. Men wenst op grond van het gemiddelde van een steekproef van nader te bepalen omvang n de hypothese $\mu = 50$ rechtseenzijdig te toetsen met onbetrouwbaarheid 0,05. Daarbij stelt men de eis dat het onderscheidingsvermogen van de toets, als $\mu = 52$ is, gelijk moet zijn aan 0,90.

a) Hoe groot moet men n nemen?
b) Hoe groot is dan het onderscheidingsvermogen voor $\mu = 51$?

14.11. Van een normaal verdeelde stochastische grootheid is de spreiding 2,5. Er wordt een steekproef ter grootte 9 genomen.

a) Geef kritieke gebieden aan (α=0,05) voor $\bar{x}$ om achtereenvolgens de hypothesen $\mu = -3{,}0$ en $\mu = 5{,}0$ tegen de alternatieve hypothesen $\mu \neq -3{,}0$ resp. $\mu \neq 5{,}0$ te toetsen.
b) Bepaal bij de hypothese $\mu = 5{,}0$ de kans op een fout van de tweede soort als $\mu = 1{,}0$, $\mu = 2{,}0$, $\mu = 3{,}0$ en $\mu = 4{,}0$.
c) Schets het onderscheidingsvermogen van de toets van de hypothese $\mu = 5{,}0$.

* 14.12. Een handelaar koopt regelmatig van zekere fabrikant grote partijen goederen. Van deze goederen is één karakteristiek van belang. Deze karakteristiek is in elke partij steeds bij benadering normaal verdeeld met spreiding 5, doch met wisselend gemiddelde. De handelaar wil een partij keuren door het nemen van een steekproef. Bepaal steekproefgrootte en keuringsnorm bij een eenzijdige toets zodat aan de volgende eisen is voldaan:

1) de kans om een partij met $\mu = 100$ te aanvaarden mag maximaal 0,05 zijn;
2) de kans om een partij met $\mu = 110$ af te keuren mag maximaal 0,025 zijn.

§ 15. Toetsen bij een binomiale en een Poisson verdeling

15.1. Men laat een stuiver 20 maal op een harde gladde ondergrond tollen en ziet bij de afloop 15 maal munt boven komen. Hoeveel kans zouden de minder extreme resultaten (6 t/m 14 maal munt) hebben als er géén tendentie tot "munt boven" was? Welke conclusie trekt iemand die de onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05 aanhoudt?

15.2. Een fabrikant produceert assen waarvan aangenomen wordt dat de diameter normaal verdeeld is met gemiddelde $\mu = 10{,}0$ cm en spreiding $\sigma = 0{,}06$ cm. Een afnemer van deze assen hanteert als tolerantiegrenzen voor de diameter $9{,}900 \pm 0{,}177$ cm.

a) Welk percentage der assen uit de productie valt buiten de tolerantiegrenzen? (Rond Uw antwoord af op een geheel getal.)

b) Hoe groot is de kans dat in een aselecte steekproef van 10 assen er minstens 2 buiten de tolerantiegrenzen vallen?

c) In een steekproef van 10 assen zijn k assen die buiten de tolerantiegrenzen vallen. Voor welke waarden van k zal men de aanname omtrent de verwachting van de asdiameter in twijfel trekken? (Neem als onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 5\%$.) (1969)

15.3. Een handelaar verkoopt een grote partij goederen en deelt de koper mee dat er hoogstens 5% ondeugdelijke exemplaren in zitten. De koper neemt om dit te verifiëren een steekproef van 150 stuks.
Bij welk aantal ondeugdelijke exemplaren heeft de koper reden om te reclameren? Neem $\alpha = 0{,}05$.

15.4. In een stad zijn de laatste jaren gemiddeld 10 ongelukken per maand gebeurd. In december jl. vonden 15 ongelukken plaats. Bedenk een eenzijdige toets om uit te maken of dit aantal nog wel van toevallige aard geacht kan worden.

15.5. Een zeker radioactief preparaat moet vernieuwd worden als het in een omschreven opstelling gemiddeld minder dan 90 aanslagen per minuut op de Geigerteller geeft.

a) Het preparaat geeft bij controle in één minuut 80 aanslagen. Mag men hieruit concluderen dat het preparaat niet meer aan de eisen voldoet? (α = 0,05)

b) En hoe luidt Uw conclusie als in 10 minuten 800 aanslagen zijn geteld?

15.6. Een fabrikant beweert dat een partij van 100 producten een fractie p defecten bevat. Ter controle neemt een afnemer een aselecte steekproef van 10 stuks en vindt er 4 defecten in.
Bepaal in de volgende gevallen de overschrijdingskans:

a) als trekking gebeurt met teruglegging en p = 1/5;
b) als trekking gebeurt met teruglegging en p = 1/100;
c) als trekking gebeurt met teruglegging en p = 1/20;
d) als trekking gebeurt zonder teruglegging en p = 1/20.

Wat is de conclusie ten aanzien van de bewering van de fabrikant? (1969)

15.7. Een fabrikant betrekt al jaren transistoren van A, die hem gemiddeld 10% defecte levert. Van een vertegenwoordiger B koopt hij een partijtje van 75 stuks die per stuk wat duurder zijn, maar minder defecte zouden bevatten. Hij vindt 5 defecte transistoren in deze partij. Zijn de percentages defecte exemplaren in de producten van A en B verschillend?

§ 16. Betrouwbaarheidsinterval bij een normale verdeling

16.1. Geef op grond van het gevonden steekproefresultaat in opgave 14.2 een betrouwbaarheidsinterval voor μ.

16.2. Idem voor het steekproefresultaat uit opgave 14.3.

* 16.3. Idem voor het steekproefresultaat uit opgave 14.4.

* 16.4. Men controleert met een chemische methode de hoeveelheid verontreiniging per kg kleurstof. Aangenomen mag worden dat deze hoeveelheid normaal verdeeld is met standaardafwijking 0,9 gram. Men verricht drie controles en vindt gemiddeld 4,2 gram verontreiniging.
Geef een eenzijdig betrouwbaarheidsinterval (α = 0,05) voor de hoeveelheid verontreiniging per kg kleurstof.

16.5. Van een stochastische grootheid $\underline{x}$ met spreiding 5 worden n onafhankelijke waarnemingen gedaan. Hoe groot moet n minstens zijn opdat uit deze waarnemingen een betrouwbaarheidsinterval (α = 0,01) voor het onbekende gemiddelde μ bepaald kan worden, waarvan de lengte hoogstens 1 bedraagt? Eveneens voor lengte hoogstens 2.

16.6. Een telling met een Geigerteller heeft 80 aanslagen in een minuut opgeleverd. Geef een betrouwbaarheidsinterval (α = 0,05) voor het verwachte aantal aanslagen μ per minuut. Doe hetzelfde voor het geval dat 800 aanslagen in 10 minuten worden geteld.

16.7. Geef voor de stof waarvan de radioactiviteit onbekend is (opgave 14.8) een betrouwbaarheidsinterval voor de verwachting van het aantal aanslagen per minuut op de Geigerteller (α = 0,05).

16.8. Geef op grond van het gevonden steekproefresultaat in opgave 14.5 een betrouwbaarheidsinterval voor μ.

16.9. In een aselecte steekproef van 300 flessen melk heeft men bij 80% een voldoende vetgehalte geconstateerd. Bepaal een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval (P = 0,9544) voor het percentage flessen in de productie met voldoende vetgehalte.

16.10. Bij een enquête onder 250 sigarettenrokers rookten er 60 merk A en 190 merk B. Geef een 95% betrouwbaarheidsinterval voor het percentage rokers van merk A.

§ 17. Betrouwbaarheidsinterval bij een binomiale en een Poisson verdeling

17.1. We laten een muntstuk 10 maal tollen. De kans op "kruis" is in elk van de 10 gevallen p. Bereken:

a) als p = 0,30 de kans op 7 of meer maal "kruis";

b) als p = 0,35 de kans op 7 of meer maal "kruis";

c) als p = 0,90 de kans op 7 of minder maal "kruis";

d) als p = 0,95 de kans op 7 of minder maal "kruis".

In een steekproef van 10 stuks uit een grote partij vinden we 3 slechte en 7 goede exemplaren.

e) Geef een betrouwbaarheidsinterval voor de fractie "goed" in de hele partij (α = 0,05).

f) Het steekproefresultaat versterkt mijn vermoeden dat de kans op goede exemplaren in de totale partij wel groter dan 0,30 zal zijn.
Moet ik bij α = 0,01 op grond van deze steekproef de hypothese p = 0,30 verwerpen? (1970)

17.2. Van een alternatief geven n waarnemingen k successen.
Bepaal een betrouwbaarheidsinterval (P = 0,95) voor de kans p op succes als

a) n = 10, k = 6;

b) n = 100, k = 60;

c) n = 1000, k = 600.

17.3. Ter keuring van een grote partij blikjes conserven die lang bij een grossier opgeslagen zijn geweest, wordt een steekproef van 120 blikjes genomen. De grossier is van plan alleen dan de partij te verkopen als alle blikjes in de steekproef goed blijken te zijn. Hij vraagt zich echter af hoe groot het percentage bedorven blikjes in dat geval toch nog zou kunnen zijn.

a) Beantwoord deze vraag (neem α = 0,05).

b) Indien hij eist dat het percentage bedorven blikjes in de partij (bij goedkeuring van de steekproef) niet hoger dan 1% mag zijn, hoe groot moet hij de steekproef dan minstens nemen? (α = 0,05) (1961)

17.4. Op een kantoor valt geen regelmaat in de binnenkomende telefoontjes te bekennen. Zij x het aantal dat in de loop van een uur binnenkomt. Geef een betrouwbaarheidsinterval (P = 0,95) voor het gemiddelde aantal telefoontjes per uur: a) als x = 4; b) als x = 40.

17.5. In een land zijn vorig jaar 4 drielingen geboren. Geef een betrouwbaarheids-interval (α = 0,10) voor het verwachte aantal per jaar.

§ 18. De gammaverdeling (speciaal voor afd. BDK)

N.B. Voor de opgaven 1 t/m 11 van deze paragraaf geldt:
De vraag $\underline{y}$ in kilo's per maand naar een bepaald artikel in een magazijn is gamma verdeeld. De verwachte vraag per maand is 300, de standaardafwijking is 200.

18.1. Bij welke vraag is de kansdichtheid maximaal?

18.2. Bepaal y_1 zodat $P(\underline{y} < y_1) = 0{,}50$.

18.3. Bepaal y_2 zodat $P(\underline{y} < y_2) = 0{,}90$.

18.4. Bepaal y_3 zodat $P(\underline{y} < y_3) = 0{,}99$.

18.5. Als de beginvoorraad in een maand 800 kilo's bedraagt, wat is dan de kans om "buiten voorraad" te raken in die maand?

18.6. In een jaar waarin men eigenlijk over teveel opslagruimte beschikt besluit men slechts één bestelling te plaatsen, waardoor men een grotere quantumkorting kan claimen. Er is geen levertijd en de magazijnvoorraad bedraagt op 31 december 110 kilo's.
Hoe groot is de order die men plaatst op 1 januari als men de kans om buiten voorraad te raken in dat jaar wil reduceren:

a) tot 10%;
b) tot 0,1%?

18.7. Wat worden de antwoorden in opgave 18.6 als de vraag per jaar normaal verdeeld is?

18.8. Wat is de verwachte winst in de maand januari als de winst per kilo die uit voorraad wordt geleverd ƒ 1,-- is? (beginvoorraad 4500 kilo's).

18.9. Wat is de verwachte winst in een maand als de beginvoorraad in die maand 800 kilo's (zoals bij 18.5) is?

18.10. Als 18.9 nu met beginvoorraad 257 kilo's.

18.11. Wat is het bestelniveau als de levertijd twee maanden is en de kans om buiten voorraad te raken 10%?

18.12. In een fabriek van vloerbedekking maakt men van elke kleur uit het assortiment eens per kwartaal voldoende voor de vraag in de 13 toekomstige weken. (Het hele assortiment wekelijks maken zou veel tijdverlies geven bij het verwisselen van walsen en veel afval bij het opnieuw afstalen van de kleur.)

a) Als de vraag per week naar een bepaalde kleur gamma verdeeld is (verwachting 810 m, standaardafwijking 973,50 m), hoeveel moet men dan produceren om met een kans van 95% aan de vraag in dat kwartaal te kunnen voldoen?
b) Welke hoeveelheid zal door de vraag in dat kwartaal met een kans van 95% worden overtroffen? (1971)

18.13. In een telefooncentrale komt per 15 seconden gemiddeld 1 aanvraag voor een gesprek binnen.
Van 5 opeenvolgende aanvragen noteert men tijd van binnenkomst van de eerste ($\underline{t}_1$) en laatste aanvraag ($\underline{t}_5$). Noem $\underline{t} := \underline{t}_5 - \underline{t}_1$ in seconden.

a) Welke verdeling heeft $\underline{t}$?
Bepaal $E\underline{t}$.
b) Bepaal t_M zodat $P(\underline{t} \leq t_M) = 0{,}99$.
c) Bepaal t_m zodat $P(\underline{t} \leq t_m) = 0{,}01$. (1972)

18.14. De maandelijkse vraag naar televisietoestellen in een bepaald warenhuis is gamma-verdeeld; het gemiddelde is 60, de standaardafwijking 20.

a) Bepaal het aantal toestellen dat in 90% van de gevallen voldoende is om aan de vraag per maand te kunnen voldoen.
b) Bepaal de kans op buiten voorraad raken in een bepaalde maand, indien aan het begin van de maand 105 toestellen in voorraad zijn.
c) Hoeveel toestellen zouden er in voorraad moeten zijn aan het begin van een kwartaal om aan de vraag in dat kwartaal in 95% van de gevallen te kunnen voldoen? (1972)

18.15. In een continubedrijf liggen 4 orders op afwerking te wachten. De bewerkingstijd per order is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 12 uur.

a) Bepaal de tijd (in uren) zó dat men een kans van 95% heeft, dat in die tijd vier orders na elkaar kunnen worden afgewerkt.
b) Wat is de kans dat de 4 orders in 3 dagen (1 dag = 24 uur) zijn afgewerkt? (1973)

18.16. De vraag per week $\underline{y}$ naar een bepaald artikel is gamma-verdeeld. De gemiddelde vraag per week is 400, de standaardafwijking is 300.

a) Bepaal y_1 zodat $P(\underline{y} < y_1) = 0{,}90$.

b) De beginvoorraad voor een tijdvak van 4 weken bedraagt 2400. Wat is de kans op buiten voorraad raken in dat tijdvak?

c) Idem als b) bij een beginvoorraad van 2000 stuks. (1973)

Gemengde opgaven

G.1. Bij deze opgave worden alleen antwoorden gevraagd. Voor het paar stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ is de volgende tabel van kansen gegeven:

$y = 2$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
$y = 1$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$y = 0$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$

Vul in

$P(\underline{x} = 0) =$ ________, $P(\underline{x} = 1) =$ ________, $P(\underline{x} = 2) =$ ________ ,

$P(\underline{y} = 0) =$ ________, $P(\underline{y} = 1) =$ ________, $P(\underline{y} = 2) =$ ________ .

a) Noem A de gebeurtenis $\underline{x} = 1$, B de gebeurtenis $\underline{y} = 1$. De uitspraak "A en B zijn onafhankelijk" is juist/onjuist

b) De bewering "$\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijk" is juist/onjuist

c) De uitspraak: "Als gebeurtenissen elkaar uitsluiten, dan zijn ze onafhankelijk" is juist/onjuist

d) $E(\underline{x}) =$ ____________

e) $E(\underline{xy}) =$ ____________

f) $E(\underline{x} + \underline{y}) =$ ____________

g) $E(\underline{x}^2) =$ ____________

h) $\mathrm{var}(\underline{y}) =$ ____________

k) $P(\underline{x} = 0 \mid \underline{y} \neq 2) =$ ____________ (1970)

G.2. In een experiment is de kans op gebeurtenis A onbekend. Er is echter een theorie die deze kans op minstens 0,95 stelt. Bij n onafhankelijke herhalingen van hetzelfde experiment wordt in 90% van de gevallen gebeurtenis A waargenomen. Is dit aanleiding om aan het door de theorie gestelde te gaan twijfelen? Neem $\alpha = 0{,}025$ en beschouw achtereenvolgens de gevallen $n = 10$, $n = 100$ en $n = 250$. (1968)

G.3. Een grossier staat op het punt een grote partij van een bepaald artikel te kopen. De fabrikant garandeert dat ten hoogste 5% van de partij defect is.

a) De grossier neemt een steekproef van n stuks. Bereken voor $n = 20$, 100 en 400 bij welke aantallen defecte exemplaren in de steekproef hij zal reclameren ($\alpha = 0{,}025$).
b) De grossier lijdt een gevoelig verlies als het percentage defecten 10% of hoger is. Bereken voor de drie waarden van n de kans op het aanvaarden van de partij als dit percentage 10% bedraagt.
c) Vul de volgende conclusie aan: Uit a) en b) blijkt het volgende: als we bij gelijkblijvende onbetrouwbaarheid de steekproefgrootte vergroten, dan wordt de kans op .... (1967)

G.4. De lengte van de dienstplichtigen voor een bepaald jaar is normaal verdeeld met verwachting 176 cm en standaarddeviatie 6,8 cm. Men wordt afgekeurd als men kleiner is dan 155 cm.

a) Hoe groot is de kans dat een willekeurig gekozen rekruut wordt afgekeurd (op lengte)?
b) In een bepaald centrum worden 3000 rekruten gekeurd. Hoe groot is de kans dat er minstens 5 worden afgekeurd?
c) De rekruten langer dan 190 cm worden bij de militaire politie (M.P.) ingedeeld. Hoe groot is de kans dat er van die 3000 minder dan 70 bij de M.P. worden ingedeeld?
d) Voor 18 T.H.E. studenten (aselect gekozen) vonden we voor de gemiddelde lengte 180,6 cm. Aangenomen wordt dat de spreiding in de lengte van T.H.E. studenten dezelfde is als de spreiding in de lengte van de dienstplichtigen. Zijn T.H.E. studenten gemiddeld langer dan deze dienstplichtigen? (Neem als onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0{,}01$.) (1966)

G.5. De kans op winst bij een spel is 0,6.
Iemand neemt n maal aan het spel deel.
Zij $\underline{k}$ het aantal gewonnen spellen.

a) Zij $n = 20$; bepaal $P(\underline{k} > 10)$.
b) Zij $n = 48$; bepaal $P(\underline{k} > 24)$.
c) Bepaal n zodanig dat $P(\underline{k} > \frac{1}{2}n) > 0{,}95$. (1973)

G.6. Er wordt eerst één dobbelsteen geworpen en daarna een tweede. Elk dergelijk paar worpen $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ geeft een verschil $\underline{v} = \underline{x}_1 - \underline{x}_2$ en een absoluut verschil $\underline{d} = |\underline{x}_1 - \underline{x}_2|$.

a) Bepaal de verwachting en de variantie van $\underline{v}$ en $\underline{d}$.

b) Onderzoek of $\underline{v}$ en $\underline{d}$ onafhankelijk zijn (motiveer Uw antwoord!). (1965)

G.7. De duur van een telefoongesprek is een continue stochastische grootheid $\underline{x}$. Gegeven is, dat de kans dat een gesprek langer duurt dan zes minuten, gelijk is aan 0,05. Men meet steekproefsgewijs lengten van telefoongesprekken.

a) Hoe groot is de kans dat er in een steekproef van 10 gesprekken precies 2 voorkomen die langer duren dan zes minuten? (Antwoord in formule en uit S.T.)

b) Hoe groot is de kans dat er in een steekproef van 200 gesprekken meer dan 15 gesprekken voorkomen die langer duren dan zes minuten?

c) Gegeven wordt nog dat $\underline{x}$ (in minuten) exponentieel verdeeld is met kansdichtheid

$$f(x) = 0 \text{ voor } x < 0, \; f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ voor } x \geq 0 .$$

Bereken λ, indien nodig met S.T.

d) Hoe lang duurt "gewoonlijk" een telefoongesprek? (1967)

G.8. Men speelt een spel met één dobbelsteen. Het spel eindigt als bij de eerste worp de uitkomst groter is dan 2. Zo niet, dan wordt nog een keer geworpen en als uitkomst geteld het totaal aantal ogen verkregen in beide worpen samen.

a) Maak een kanstabel voor de mogelijke uitkomsten van het spel.

b) Bereken de verwachting.

c) Bereken de variantie. (1968)

G.9. Bij een kansspel kan men trekken uit de getallen 1 t/m 4.
De kans op het trekken van het getal k $(1 \leq k \leq 4)$ is $(5-k)a$.
Het spel bestaat uit 4 onafhankelijke trekkingen met teruglegging.
De uitkomst van de i-de trekking noemen we k_i.
Men wint een prijs als iedere k_i gelijk is aan i.

a) Bereken a en bepaal de kans op een prijs.

b) Hoe groot is de kans dat van een groep van 1000 deelnemers vier of meer personen een prijs winnen?

We veranderen het spel en staan toe dat 5 maal wordt getrokken.
De uitkomst is een serie (k_1,k_2,k_3,k_4,k_5) met $1 \leq k_i \leq 4$.
Iemand wint nu een prijs als zijn getrokken serie (k_1,k_2,k_3,k_4,k_5) zodanig is dat door het schrappen van één k_i het rijtje (1,2,3,4) kan ontstaan.

c) Wat is in dit geval de kans op een prijs? (1973)

G.10. Een bedrijf produceert draad met een treksterkte die bij goede productieomstandigheden een verwachting heeft van 151 kg en een standaardafwijking van 12 kg, terwijl aangenomen kan worden dat de treksterkte normaal verdeeld is. Men controleert de dagelijkse productie o.a. door het meten van de treksterkte van 9 stukken draad.

a) Hoe groot is de kans om bij de 9 metingen van een dag een gemiddelde treksterkte kleiner dan 145 kg te vinden?
b) Hoe groot is de kans om in 24 dagen hoogstens 5 dagen te hebben waarin de gemiddelde treksterkte uit de steekproef onder de 145 kg blijft?
c) Hoe groot is de kans om in 200 dagen hoogstens 20 van zulke dagen te hebben? (1968)

G.11. Gegeven zijn twee discrete stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$, met de volgende simultane kansverdeling:

$P[\underline{x} = 0, \underline{y} = 0] = 0{,}10$; $P[\underline{x} = 1, \underline{y} = 0] = 0{,}20$; $P[\underline{x} = 2, \underline{y} = 0] = 0{,}10$;
$P[\underline{x} = 0, \underline{y} = 1] = 0{,}15$; $P[\underline{x} = 1, \underline{y} = 1] = 0{,}30$; $P[\underline{x} = 2, \underline{y} = 1] = 0{,}15$.

a) Bereken $P[\underline{x} = 1]$; $P[\underline{x} > 0 \mid \underline{y} > 0]$; $E(\underline{x})$; $\mathrm{var}(\underline{x})$.
b) Zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onafhankelijk? Motiveer Uw antwoord. (1969)

G.12. Men werpt 420 maal met een dobbelsteen (onafhankelijke worpen); $\underline{x}$ is de stochastische grootheid die het totaal aantal ogen van deze worpen aangeeft.

a) Bereken $E(\underline{x})$ en $\sigma(\underline{x})$.
b) Door welke verdeling mag men de verdeling van $\underline{x}$ benaderen en op grond van welke stelling?
c) Bepaal nu de kans $P[\underline{x} \geq 1400]$. (1969)

G.13. In een loterij worden zeer vele loten verkocht; de kans op een prijs bij het kopen van een lot is 1 op 50. Bepaal het kleinste getal n zodanig, dat men bij het kopen van n loten een kans groter dan 0,5 heeft op tenminste één prijs. (1969)

G.14. In Frankrijk wordt een referendum gehouden. Men verwacht beslist een meerderheid voor "neen". Om een indruk te krijgen van de uitslag neemt men een aselecte steekproef van 3600 personen. Hiervan stemt 51% "neen". Is dit resultaat voor de aanhangers van "neen" voldoende reden tot juichen? (Neem als onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0{,}05$.) (1969)

G.15. In een magazijn heeft men van twee soorten asjes grote partijen opgeslagen, van elk soort evenveel. Van partij A is de diameter normaal verdeeld met verwachting 1,25 cm en een standaardafwijking 0,05 cm, van partij B is de diameter normaal verdeeld met verwachting 1,20 cm en een standaardafwijking 0,04 cm. Een asje is bruikbaar indien de diameter ligt tussen de tolerantiegrenzen 1,12 en 1,32 cm.

a) Welk percentage van partij A en van partij B is bruikbaar?

Door een vergissing geraken de partijen geheel door elkaar.

b) Welk percentage van de totale partij is nu bruikbaar?

c) Bereken de verwachting van de diameter van de asjes in de totale partij. (1969)

G.16. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ neemt de waarden 0, 1, en 2 aan met kansen respectievelijk 1/2, 1/6 en 1/3. Een van $\underline{x}$ onafhankelijke stochastische grootheid $\underline{y}$ neemt de waarden 1 en 2 aan met kansen respectievelijk 2/5 en 3/5. Men stelt $\underline{z} = 3\underline{x} + 2\underline{y}$.

a) Beschrijf de kansverdeling van $\underline{z}$.

b) Welke relatie bestaat tussen de verwachtingen van $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$?

c) Welke relatie bestaat tussen de varianties van $\underline{x}$, $\underline{y}$ en $\underline{z}$?

d) Bereken $P(\underline{z} > 6 \mid \underline{y} = 2)$. (1969)

G.17. Een machine vult pakjes met een bepaald product. Het nominale gewicht bedraagt 250 gram. Het gemiddelde vulgewicht kan worden ingesteld. Er mag worden aangenomen dat het gewicht normaal is verdeeld met een standaardafwijking van 1 gram. Op geregelde tijden wordt een steekproef van 4 pakjes gewogen om te controleren of de machine-instelling nog goed is. Wanneer het gemiddelde van deze steekproef meer dan 1 gram afwijkt van het nominale gewicht (naar boven of naar beneden) wordt de vulmachine bijgeregeld.

a) Wat is de kans dat bij 10 controles minstens één keer wordt bijgeregeld als de machine telkens goed staat ingesteld? De numerieke waarde van deze kans hoeft niet te worden berekend.

b) Wat is de kans dat op grond van één steekproef in de juiste richting wordt bijgeregeld als de instelling 0,5 gram te hoog is?

c) Om een afwijking beter te kunnen vaststellen wordt de steekproefgrootte opgevoerd tot 9 pakjes. De kans op ten onrechte bijregelen (dus bij een juiste instelling) wordt gelijk gehouden aan de oorspronkelijke waarde. Bij welk verschil tussen steekproefgemiddelde en nominale waarde moet nu worden ingegrepen?

d) Hoe groot wordt in het onder c) beschreven geval de kans om een afwijking van 0,5 gram van de instelling te ontdekken, zodat de instelling verbeterd kan worden? (1969)

G.18. Gegeven is dat de functie $f(\xi) = e^{\alpha|\xi|}$ $(-\infty < \xi < \infty)$ kansdichtheid is van de stochastische grootheid $\underline{x}$; hierin is α een constante.

a) Bepaal α.

b) Bereken de verwachting van $\underline{x}$.

c) Bereken de standaardafwijking van $\underline{x}$.

d) Bereken de kans dat $\underline{x}$ minstens tweemaal de standaardafwijking van het gemiddelde afwijkt. (1964)

G.19. Ik heb een vrij groot aantal blikjes vis nodig, die ik voordelig kan krijgen omdat, zo zegt de winkelier, er wel eens een slecht blikje tussen zit, gemiddeld één op de twintig. Ik overweeg op deze voorwaarde de koop, maar koop er eerst zes op proef. Hiervan blijken er twee bedorven. Heb ik nu reden aan de uitspraak van de winkelier te twijfelen, als ik (eenzijdig toetsend) een onbetrouwbaarheidsdrempel van 0,05 aanhoud? (1970)

G.20. De levensduur $\underline{x}$ in uren van een bepaald type lamp heeft een exponentiële verdeling met $\lambda = 0{,}01$.

a) Hoe groot is de verwachte levensduur?

b) Bepaal x_0 zodat $P(\underline{x} < x_0) = 0{,}50$ (S.T. 6.4).

c) Bereken $P(\underline{x} > 420)$.

d) Bereken de kans dat in een steekproef van $n = 200$ stuks meer dan $k = 3$ exemplaren langer branden dan 420 uur.

e) Idem als d) met $n = 5400$ en $k = 90$. (1970)

G.21. Gegeven: vaas I bevat 4 witte en 6 zwarte ballen;
vaas II bevat 7 witte en 3 zwarte ballen.

a) Wat is de kans op 2 witte ballen bij trekking uit vaas I zonder teruglegging?

b) Men werpt met een dobbelsteen en trekt zonder teruglegging:
bij de worpen 1 en 2, twee ballen uit vaas I,
bij de worpen 3, 4 en 5 twee ballen uit vaas II,
bij de worp 6 een bal uit vaas I en een uit vaas II.
Bereken de kans dat de twee getrokken ballen wit zijn. (1971)

G.22. Op een station pleegt de helft van de treinen te laat en de helft te vroeg aan te komen. Op 13 januari komen van de 64 treinen er 42 te laat aan. De stationschef wijt dit aan het winterse weer dat zijns inziens gewoonlijk vertragingen tot gevolg heeft, en beweert dat de kans p op "aankomen met vertraging" op deze dag groter zou zijn dan $\frac{1}{2}$.
Toets (eenzijdig) de hypothese dat p op deze dag gelijk is aan $\frac{1}{2}$ met een onbetrouwbaarheid $\alpha = 0{,}01$. (1971)

G.23. Op een station komen treinen gemiddeld op tijd aan met een afwijking die praktisch normaal verdeeld is, met standaarddeviatie 1 minuut. Men let alleen op de te laat aankomende treinen.

a) Welke vertraging wordt door de helft der te laat aankomende treinen overschreden?

b) Wat is de gemiddelde vertraging van de te laat aankomende treinen? (1971)

G.24. Van de stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ is gegeven:

$$P(\underline{x} = -1) = \tfrac{1}{2}, \qquad P(\underline{x} = 1) = \tfrac{1}{2},$$
$$P(\underline{y} = -1) = \tfrac{1}{2}, \qquad P(\underline{y} = 1) = \tfrac{1}{2},$$
$$P(\underline{x} = 1 \text{ èn } \underline{y} = 1) = \frac{1}{8}\,.$$

a) Bepaal $P(\underline{x} = 1 \text{ èn } \underline{y} = -1)$.

b) Bepaal var $\underline{z}$ als $\underline{z} = \underline{x}.\underline{y}$.

c) Bepaal var $\underline{u}$ als $\underline{u} = \underline{x} + \underline{y}$.

d) Verifieer in dit voorbeeld de betrekking

$$\text{var}(\underline{x} + \underline{y}) = \text{var}\,\underline{x} + \text{var}\,\underline{y} + 2\,\text{cov}(\underline{x},\underline{y})\,. \qquad (1971)$$

G.25. De kijkdichtheid van een bepaald T.V. programma bedroeg in het verleden 50%. De betreffende omroeporganisatie heeft sterk de indruk dat de kijkdichtheid is achteruitgegaan.
Met behulp van een enquête wil men nagaan of dit inderdaad het geval is. Van 400 aselect gekozen T.V. kijkers blijken er 182 naar het bewuste programma te hebben gekeken.

a) Welke conclusie zal de omroep uit dit waarnemingsmateriaal kunnen trekken? (Toets eenzijdig, $\alpha = 0{,}05$.)

b) Een dagblad beweert dat de kijkdichtheid van het bewuste programma gedaald is naar 40%. Geeft de uitslag van de enquête de omroep aanleiding om dit tegen te spreken? (Toets tweezijdig, $\alpha = 0{,}05$.) (1971)

G.26. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn twee onafhankelijke normaal verdeelde stochastische grootheden met verwachting nul en variantie een. Zij $\underline{z} = 4\underline{x} - 3\underline{y}$.

a) Bepaal $P(\underline{z} \leq 2{,}25)$.

b) Bepaal $P(\underline{x}^2 \leq 2{,}25)$.

c) Bepaal t zodanig dat $P(\underline{x}^2 < t) = 0{,}95$. (1973)

G.27. We gooien met twee dobbelstenen. Het aantal ogen dat bovenkomt duiden we aan met $\underline{d}_1$ resp. $\underline{d}_2$ en hun maximum met $\underline{m}$.

a) Bepaal $P(\underline{m} = 3)$.

b) Bepaal $E\underline{m}$.

c) Zijn $\underline{m}$ en $\underline{d}_1$ afhankelijk? Motiveer Uw antwoord. (1971)

G.28. Een grote partij appels wordt te koop aangeboden. Hoe groot is de kans dat ten hoogste 1/8 deel van een steekproef van n stuks niet voor consumptie geschikt is, als bekend is dat 90% van de hele partij voor consumptie geschikt is?
Bereken de kans voor:

a) $n = 8$; b) $n = 80$; c) $n = 400$. (1971)

G.29. A en B spelen een toernooi dat hoogstens uit 3 wedstrijden bestaat. De kans om een wedstrijd te winnen is voor A gelijk aan 2/3, voor B aan 1/3.
Heeft één van hen twee wedstrijden achter elkaar gewonnen dan is hij winnaar. Is dat na drie wedstrijden niet het geval, dan wordt de winnaar door loting aangewezen waarbij A en B gelijke kansen hebben.

a) Bereken de kansen op de volgende gebeurtenissen:
A wordt winnaar zonder loting,
B wordt winnaar zonder loting,
het lot moet beslissen wie als eerste eindigt.

b) Bereken de kans dat A, eventueel na loting, als winnaar eindigt.

c) Bereken onder de voorwaarde dat A de eerste wedstrijd wint, de voorwaardelijke kans dat A, na eventuele loting, winnaar wordt. (1971).

G.30. Gegeven: Indien een klant bij een zeker loket aankomt heeft hij een kans $\frac{1}{3}$ dat hij direkt geholpen wordt en een kans $\frac{2}{3}$ dat hij moet wachten tot hij aan de beurt is. De voorwaardelijke kans dat hij langer moet wachten dan x minuten onder de voorwaarde dat hij moet wachten, bedraagt e^{-x}.

a) Bereken de kans dat iemand die bij het loket aankomt langer dan 3 minuten moet wachten.

b) Noem $\underline{x}$ de stochastische grootheid die de wachttijd in minuten aangeeft van iemand die bij het loket aankomt. (De verdeling van $\underline{x}$ is dus gemengd discreet-continu.)
Schets de grafiek van de functie $F(x) = P(\underline{x} \leq x)$.

c) Bereken de verwachting van $\underline{x}$. (1972)

G.31. Men werpt driemaal met een dobbelsteen.
Zij A de gebeurtenis: de som van de eerste en tweede worp is even;
en B de gebeurtenis: het produkt van de drie worpen is even.

a) Bereken P(A), P(B).

b) Ga na of A en B onafhankelijk zijn. (1972)

G.32. Een hotelbedrijf heeft bij het aardewerk, dat in gebruik is, geconstateerd dat de kans, dat een bord 2,08 jaar of minder heel blijft, precies $\frac{1}{2}$ is.

a) Bereken $E\underline{x}$ in de veronderstelling dat de levensduur $\underline{x}$ van borden een exponentiële verdeling heeft.

b) Wat is de kans dat een bord langer dan 11 dagen heel blijft? (1 jaar = = 365 dagen.)

c) Wat is de kans dat in een partij van 225 stuks er binnen 2,08 jaar al 130 of meer stuk zijn? (1972)

G.33. De stochastische grootheid $\underline{t}$ heeft een homogene verdeling op $[-1,2]$.

a) Bereken $P(\underline{t}^2 \leq \frac{1}{4})$.

b) Bereken $P(\underline{t}^2 \leq 3)$.

c) Bereken de verdelingsfunctie $F_{\underline{x}}(x)$ van de stochastische grootheid $\underline{x} = \underline{t}^2$. Schets de grafiek van $F_{\underline{x}}(x)$. (1972)

G.34. Bij een enquête gehouden onder n aselect gekozen Nederlanders spreekt 51% zich uit voor een regering bestaande uit vertegenwoordigers van PvdA, KVP, ARP en CHU. In een krant wordt een bespreking van de enquête gegeven. De kop boven het artikel luidt: "De meerderheid van ons volk wil een regering van PvdA en Confessionelen".
Hoe groot zou n tenminste geweest moeten zijn (neem een tweezijdige toets met $\alpha = 0{,}05$) om deze uitspraak te rechtvaardigen? (1972)

G.35. a) Men werpt met een dobbelsteen éénmaal; is de uitkomst een getal < 3, dan vervalt de eerste worp en wordt één keer opnieuw gegooid.
$\underline{x}$ is de stochastische grootheid voorstellende de aldus te verkrijgen uitkomst.
Bereken $E\underline{x}$ en $\sigma(\underline{x})$.

b) Men werpt met twee dobbelstenen éénmaal; elke steen waarvan de uitkomst een getal < 3 is, wordt, evenals bij a), één keer overgegooid.
$\underline{y}$ is de stochastische grootheid voorstellende de som van de getallen die uiteindelijk door beide stenen worden aangewezen.
Bereken $E\underline{y}$ en $\sigma(\underline{y})$. (1972)

G.36. In een aardewerkfabriek worden verschillende typen bloempotten in een vormmachine gemodelleerd, vervolgens gedroogd, afgewerkt, gebakken enz. Van een bepaald type pot valt tijdens de bewerking gemiddeld 10% af. Op een zeker moment worden 216 potten van dit type besteld.

a) Als de bedrijfsleider opdracht geeft om 240 potten te laten maken, hoe groot is dan de kans, dat de bestelde potten geleverd kunnen worden?

b) Hoeveel potten moeten op de vormmachine gemaakt worden, opdat er maar 0,13% kans is dat het bestelde aantal potten niet kan worden geleverd? (1972)

G.37. Op theoretische gronden verwacht men dat een bepaalde grootheid c kleiner of gelijk is aan 7. Om dit te verifiëren worden waarnemingen verricht. Zo'n waarneming is een zuivere schatter voor c, met standaardafwijking 4,5. Men vindt voor het gemiddelde van 100 onafhankelijke waarnemingen 8,1.
Is dit resultaat, indien een uitspraak met een betrouwbaarheid van 0,99 wordt verlangd, in overeenstemming met de theorie? (1972)

G.38. Bij een loterij kan elke deelnemer één lot per trekking kopen.
De kans op een prijs is 0,1.
Iemand is van plan aan alle trekkingen deel te nemen en vraagt zich af wat de kans is, dat hij in de 16e trekking zijn derde prijs wint.
Bereken deze kans. (1973)

G.39. Een bedrijf dat motoren assembleert is voor de montage van één motor afhankelijk van toeleveringsbedrijven voor 20 onderdelen.
Stel dat de levertijd van elk van de onderdelen exponentieel verdeeld is met een gemiddelde levertijd van een maand voor elk onderdeel. Bovendien nemen we aan dat de levertijden onafhankelijk zijn.

a) Bepaal de kans, dat de levertijd van een besteld onderdeel ten hoogste 2 maanden bedraagt.
b) Op een moment dat tien onderdelen bij het assemblagebedrijf in voorraad zijn, bestelt een klant een motor, waarbij hij te kennen geeft deze binnen twee maanden te willen hebben.
Bepaal de kans dat het bedrijf niet aan deze wens zal kunnen voldoen, als men onmiddellijk de ontbrekende onderdelen bestelt. (1973)

G.40. In een fabriek staat een vulmachine waarmee papieren zakken gevuld worden met suiker. Het lege gewicht van de zakken is normaal verdeeld met $\mu = 30$ en $\sigma = 2$ gram. Bij een juiste instelling van de vulmachine is de gemiddelde inhoud van de zakken 1000 gram. Van de machine kan worden aangenomen dat de gedoseerde hoeveelheid normaal verdeeld is met $\sigma = 10$ gram.

a) Bepaal het gemiddelde en de standaardafwijking van het gewicht van gevulde zakken.

Om te controleren of de instelling van de machine goed is, bepaalt men van 9 willekeurige zakken het gemiddelde gewicht. Dit blijkt 1036,0 gram te zijn.

b) Toets, met onbetrouwbaarheid $\alpha = 0,05$, of de machine op het juiste gemiddelde van 1000 gram is ingesteld. (1973)

G.41. Twee personen M en K spelen een gokspelletje met elkaar door met een geldstuk kruis of munt te gooien. Er wordt per spelletje 5 maal gegooid.
M wint als er 3, 4 of 5 keer munt gegooid wordt.
K wint als er 3, 4 of 5 keer kruis gegooid wordt.
Veronderstel dat het muntstuk zuiver is.
Noem $\underline{x}$ het aantal keren munt per spelletje.

a) Welke waarden kan $\underline{x}$ aannemen en wat is de kansverdeling van $\underline{x}$?
b) Als de eerste worp munt is, hoe groot is dan de (voorwaardelijke) kans dat K wint?

Neem nu aan dat de kans op munt 0,55 is.

c) Wat is de kans dat K in vier spelletjes geen enkele keer wint? (1973)

G.42. De schrijfsnelheid van de studentenpopulatie van een bepaald jaar is normaal verdeeld met μ = 100 lettertekens/min. en σ = 15 lettertekens/ min.
Van een methode voor handschriftverbetering wordt beweerd dat deze als neveneffect heeft dat de schrijfsnelheid hoger wordt.
Uit de genoemde groep worden 100 studenten aselect aangezocht om deze cursus te volgen. Men wil deze gelegenheid te baat nemen om de genoemde bewering te toetsen. Na afloop van de cursus, waaraan door deze 100 studenten is deelgenomen, blijkt de gemiddelde schrijfsnelheid 102,7 lettertekens/min. te zijn.
Is er, behoudens onbetrouwbaarheid α = 0,05, reden om de bewering omtrent de schrijfsnelheid te onderschrijven? (1973)

Examen/tentamen Wiskunde 49 (Statistiek) op dinsdag 15 januari 1974.

1. Hoe groot is de kans dat bij zes onafhankelijke worpen met een zuivere dobbelsteen

   a) tenminste tweemaal een zes wordt gegooid?
   b) iedere zijde van de dobbelsteen één keer boven komt?
   c) in totaal 34 of meer ogen worden gegooid?
   d) in totaal 34 of meer ogen worden gegooid onder de voorwaarde dat zowel in worp 1 als in worp 2 een even aantal ogen wordt gegooid?

2. De brandtijden in jaren van een bepaald type lampen kunnen beschouwd worden als onafhankelijke stochastische grootheden met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{voor } x > 0 \,, \\ 0 & \text{voor } x \le 0 \,. \end{cases}$$

   a) Bereken de verwachting en de variantie van de brandtijd van één lamp.
   b) Twee lampen zijn parallel geschakeld.
      Bereken de kansdichtheid van de tijd die verloopt totdat beide lampen uit zijn.
   c) Twee lampen zijn in serie geschakeld.
      Bereken de kansdichtheid van de tijd die verloopt totdat beide lampen uit zijn.

3. In verband met de oliecrisis wil een autohandelaar onderzoeken of hij minder nieuwe auto's verkoopt. Hij beschouwt een periode van 60 werkdagen en constateert dat hij in deze periode 150 auto's verkocht heeft. Hij weet dat hij in de normale situatie gemiddeld 3 auto's per dag verkoopt. Onderzoek of hij met onbetrouwbaarheid 0,01 mag concluderen dat de verkoop van nieuwe auto's een terugslag gekregen heeft. (We nemen aan dat het aantal auto's dat per dag verkocht wordt Poisson verdeeld is.)
   <u>N.B.</u> Bij de oplossing moet duidelijk worden vermeld

   a) waarom er één- dan wel tweezijdig wordt getoetst,
   b) wat de nulhypothese en wat de alternatieve hypothese is,
   c) welke van de drie manieren: kritiek gebied, overschrijdingskans of betrouwbaarheidsinterval bij Uw afleiding wordt gebruikt.

Examen/tentamen Wiskunde 31 (Statistiek) op dinsdag 15 januari 1974.

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 49.

2. De brandtijden in jaren van een bepaald type lampen kunnen worden beschouwd als onafhankelijke stochastische grootheden met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{voor } x > 0 \,, \\ 0 & \text{voor } x \leq 0 \,. \end{cases}$$

   a) Bereken de verwachting en de variantie van de brandtijd van één lamp.
   b) Bereken de kans dat de totale brandtijd van vier lampen, waarbij een volgende lamp pas gaat branden als de vorige lamp uitgaat, tenminste 3 jaar is.
   c) Twee lampen zijn parallel geschakeld.
      Bereken de kansdichtheid van de tijd die verloopt totdat beide lampen uit zijn.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 49.

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (Statistiek) op woensdag 23 januari 1974.

1. Gegeven is een stochastische grootheid $\underline{x}$ met kansdichtheid

$$f_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{voor } 0 < x < 1 \,, \\ 0 & \text{voor } x \le 0 \text{ of } x \ge 1 \,. \end{cases}$$

   a) Bereken $P(-10 < \underline{x} < -2)$, $P(\underline{x} < \frac{1}{2})$, $P(\frac{1}{2} < \underline{x} \le 1)$.

   b) Bereken de verwachting van $\underline{x}$.

   c) Bereken $E(\underline{x} \mid \underline{x} < \frac{1}{2})$ (de verwachting van $\underline{x}$ onder de voorwaarde dat $\underline{x}$ kleiner is dan $\frac{1}{2}$).

2. Van een bepaald merk toast zitten er 46 in een pak. De kans per toastje om bij het vervoer te breken is 5%. De toastjes breken onafhankelijk van elkaar.

   a) Wat is de kans dat in een willekeurig gekozen pak toast tijdens het vervoer tenminste één toastje breekt?

   b) Wat is de kans dat er van 10 vervoerde pakken tenminste 3 breukvrij zijn?

   c) Wat is de kans dat er van 225 vervoerde pakken tenminste 30 breukvrij zijn?

3. Bij de huidige inenting tegen een bepaalde ziekte is er een kans van 0,01 dat men toch die ziekte krijgt. Men heeft een nieuw vaccin ontwikkeld en wil nagaan of dit beter is dan het oude. Men ent hiertoe 5000 personen in, waarvan er 37 personen de ziekte toch krijgen.
   Mag men hieruit met onbetrouwbaarheid 0,05 concluderen dat het nieuwe vaccin beter is dan het oude?

   N.B. Bij de oplossing moet duidelijk worden vermeld

   a) waarom er één- dan wel tweezijdig wordt getoetst,

   b) wat de nulhypothese en wat de alternatieve hypothese is,

   c) welke van de drie manieren: kritiek gebied, overschrijdingskans of betrouwbaarheidsinterval bij Uw afleiding wordt gebruikt.

Examen/tentamen Wiskunde 49 (Statistiek) op dinsdag 28 mei 1974.

1. Van een zeker lichaamskenmerk van mensen is gegeven dat dit bepaald wordt door twee soorten genen genaamd A en B, waarvan ieder mens er in totaal 2 bezit. Een nakomeling krijgt van elk van beide ouders één gen; als een ouder genen heeft van beide soorten, dan bestaat hierbij geen voorkeur voor één van beide.
Van een bepaalde persoon is bekend dat de grootouders van vaders kant de combinatie AA respectievelijk AB bezitten. De grootouders van moeders kant bezitten de combinatie AB respectievelijk BB.
   a) Wat is de kans dat deze persoon van vaderszijde een gen van het type B heeft ontvangen?
   b) Hoe groot is de kans dat deze persoon tenminste één gen van het type A heeft?

2. De lengten van houten blokken zijn aselecte trekkingen uit een normale verdeling met $\mu = 23$ cm en $\sigma = 3$ cm.
   a) Bereken de kans dat de gemiddelde lengte van 9 aselect gekozen blokken groter is dan 24 cm.
   b) Bereken de kans dat er van 9 aselect gekozen blokken meer dan 3 langer zijn dan 23 cm.
   c) Bereken de kans dat de grootste van 9 aselect gekozen blokken langer is dan 30 cm.

3. a) Op een willekeurig gekozen bladzijde van een uit vele bladzijden bestaande tabel van aselecte getallen wordt het aantal nullen geteld. Dit is 84. Het totale aantal cijfers op deze bladzijde is 1000. Onderzoek of deze uitkomst in strijd is met het aselecte karakter van deze tabel (gebruik $\alpha = 0,05$).
   b) Van een andere eveneens willekeurig gekozen bladzijde worden de 1000 cijfers in 500 paren verdeeld en men telt het aantal malen dat daaronder 99 voorkomt. Dit aantal is 8. Onderzoek of deze uitkomst in strijd is met het aselecte karakter van de tabel ($\alpha = 0,05$).

N.B. Geef bij het toetsen duidelijk aan

a) waarom er één- dan wel tweezijdig wordt getoetst,

b) wat de nulhypothese en wat de alternatieve hypothese is,

c) welke van de drie manieren: kritiek gebied, overschrijdingskans of betrouwbaarheidsinterval bij Uw afleiding wordt gebruikt.

T

Examen/tentamen Wiskunde 31 (Statistiek) op dinsdag 28 mei 1974.

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 49.

2. Een firma brengt een apparaat (Ω) op de markt waarin een onderdeel (α) zit, waarvan de levensduur $\underline{t}$ exponentieel verdeeld is met kansdichtheid:

$$f_{\underline{t}}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}; & t \geq 0;\ \frac{1}{\lambda} = 200 \text{ uur}, \\ 0 \quad ; & t < 0 . \end{cases}$$

a) Wat is de kans dat α minstens 500 uur meegaat?

b) Men verkoopt Ω met 4 onderdelen van type α, dus 3 als reserve, om de levensduur van Ω 3 maal te kunnen verlengen.
Hoe groot is nu de kans dat Ω tenminste 500 uur functioneert als α bij stukgaan onmiddellijk door een reserve-onderdeel wordt vervangen?

c) Hoeveel reserve-onderdelen α zijn nodig om te kunnen garanderen dat de kans dat Ω meer dan 500 uur functioneert, tenminste 0,90 is?

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 49.

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (Statistiek) op donderdag 13 juni 1974.

1. a) Speler A trekt op aselecte wijze uit een gewoon spel van 52 kaarten een drietal kaarten en legt deze met de beeldzijde naar boven op tafel. Het blijken drie rode kaarten te zijn. Wat is onder die voorwaarde de kans dat één van de 3 kaarten hartenvrouw is?
   b) Speler B trekt vervolgens op aselecte wijze ook een drietal kaarten uit een ander gewoon spel van 52 kaarten. Wat is de kans dat speler B tenminste één kaart trekt die ook door speler A is getrokken?

2. Veronderstel dat het aantal eieren, dat een vogel van een bepaalde soort per jaar legt, Poisson verdeeld is met parameter λ. Veronderstel bovendien dat ieder ei kans p heeft om uitgebroed te worden.
   a) Bewijs dat het aantal kuikens van een vogel van deze soort dat per jaar wordt geboren een Poissonverdeling heeft met parameter λp.
   b) Veronderstel $\lambda = 10$, $p = \frac{6}{25}$.
   Bereken nu de kans dat een vogel van deze soort tenminste 5 kuikens krijgt. (Rond dit getal af op twee decimalen.)
   c) Bereken de kans dat van 1000 aselect gekozen vogels van deze soort er 80 of meer tenminste 5 kuikens krijgen.

3. a) Handelaar A hanteert als keuringsnorm: "Weiger een partij als in een aselecte steekproef van 20 exemplaren 5 of meer defecte zitten en koop bij ten hoogste 4 defecte". Wat is de kans dat hij een partij met 15% defecte exemplaren koopt.
   b) Handelaar B koopt een partij die volgens de garanties van de fabrikant niet meer dan 8% defecte exemplaren bevat. Om dit te toetsen ($\alpha = 0{,}05$) neemt de koper een aselecte steekproef van 20 exemplaren en vindt 4 defecte. Moet hij nu reclameren?

N.B. Geef bij het toetsen duidelijk aan:

a) waarom er één- dan wel tweezijdig getoetst wordt,
b) wat de nulhypothese en wat de alternatieve hypothese is,
c) welke van de drie manieren: kritiek gebied, overschrijdingskans of betrouwbaarheidsinterval bij Uw afleiding wordt gebruikt.

Examen/tentamen Wiskunde 49 (Statistiek) op dinsdag 14 januari 1975.

1. Een kansmechanisme voor een stochastische grootheid $\underline{x}$ wordt gesimuleerd door middel van aflezen van getallen $\underline{y}$ in een tabel van aselecte getallen 0,1,2,...,9. Hierbij geldt de afspraak: als $\underline{y}$ = 1 of 2 stelt men $\underline{x}$ = 1, als $\underline{y}$ = 3,4,5,6 of 7 stelt men $\underline{x}$ = 0, en als $\underline{y}$ = 0, 8 of 9 stelt men geen waarde voor $\underline{x}$ vast maar gaat men verder in de tabel totdat weer een van de getallen 1 t/m 7 voor $\underline{y}$ optreedt en men weer een waarde voor $\underline{x}$ vast kan stellen.

   a) Bereken de kans dat het lezen van een getal $\underline{y}$ aanleiding geeft tot vaststelling van een waarde voor $\underline{x}$.
   b) Bepaal de kansverdeling van $\underline{x}$ door middel van voorwaardelijke kansen.
   c) Nadat men aldus een serie van 90 waarden voor $\underline{x}$ heeft vastgesteld, blijken zich hierbij 35 waarden 1 en 55 waarden 0 te bevinden. Geeft dit resultaat met een betrouwbaarheid van 95% reden tot twijfel aan de behoorlijke samenstelling van de gebruikte tabel van aselecte getallen?

2. Men heeft reden om aan te nemen dat van een grote partij blikken conserven een gedeelte niet goed meer is. Men neemt een steekproef van 20 stuks en treft hierbij 10 blikken aan met bedorven inhoud. Geef een 95% betrouwbaarheidsinterval voor de fractie p bedorven blikken in de partij.

3. In een bank berekent men aan de cliënten voor het uitvoeren van een telefonisch gegeven opdracht ƒ 2,50 extra. Het aantal telefonische verzoeken om uitvoering van een opdracht is Poisson verdeeld met een gemiddelde van 6 per uur. De vaste lasten voor het aannemen van deze telefonische opdrachten bedragen ƒ 26.800 per jaar. Indien een jaar 260 werkdagen telt en de werkdag duurt van 9.00 tot 16.00 uur, hoe groot is dan de kans dat gedurende een bepaald jaar de inkomsten minder bedragen dan de vaste lasten?

Examen/tentamen Wiskunde 31 (Statistiek) op dinsdag 14 januari 1975.

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 49.

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 49.

3. a) Een stochastische grootheid $\underset{\sim}{x}$ is gamma-verdeeld met kansdichtheid

$$f_{\underset{\sim}{x}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x} & \text{als } x > 0 \text{ ,} \\ 0 & \text{als } x < 0 \text{ .} \end{cases}$$

Bewijs dat $\underset{\sim}{E}\underset{\sim}{x} = \frac{r}{\lambda}$ en $\sigma^2(\underset{\sim}{x}) = \frac{r}{\lambda^2}$.

b) De vraag per maand naar een bepaald artikel is gamma-verdeeld met een verwachting van 50 en een standaardafwijking van 20. Hoeveel moet men in voorraad hebben om met een kans van 95% voor een periode van vier maanden voldoende te hebben?

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (Statistiek) op woensdag 22 januari 1975.

1. Gegeven zijn twee vazen; in een ervan zitten 2 witte en 5 zwarte knikkers, in de andere 3 witte en 4 zwarte knikkers.

   a) Men kiest aselect een vaas, trekt daaruit blindelings een knikker k_1 en doet deze in de andere vaas. Na goed schudden neemt men, wederom blindelings, een knikker k_2 uit deze andere vaas. Bereken de kans dat de knikkers k_1 en k_2 van gelijke kleur zijn.

   b) Men kiest uit de oorspronkelijke gegeven vazen aselect een vaas en neemt hieruit blindelings twee knikkers. Men doet deze twee knikkers in de andere vaas en trekt hieruit na goed schudden blindelings weer twee knikkers. Hoe groot is de kans dat het beide keren een witte en een zwarte knikker is?

2. Trein 1848 komt te A aan om 8.52 uur. Het laatste station voor A is de forensenplaats B. Het aantal reizigers tussen B en A op gewone werkdagen, d.w.z van dinsdag t/m vrijdag, is normaal verdeeld met verwachting 320 en standaardafwijking 20. In trein 1848 bevinden zich in standaardsamenstelling 342 zitplaatsen.

   a) Bereken de kans dat op een gewone werkdag tenminste 5% van de reizigers in trein 1848 moet staan tussen B en A.

   Op woensdag 26 februari 1975 organiseert de Bond van Plattelandsvrouwen een landdag in A. Met het oog hierop kunnen de spoorwegen een extra aantal passagiers in trein 1848 verwachten van circa 140. Zij besluiten twee wagons extra aan te koppelen, waardoor het aantal zitplaatsen op 514 komt.

   b) Indien het aantal extra passagiers wordt beschouwd als een normaal verdeelde grootheid met verwachting 140 en standaardafwijking 15, hoe groot is dan de kans dat in de verlengde trein iedereen tussen B en A kan zitten? (Neem aan dat de aantallen landdagbezoeksters en overige reizigers onderling onafhankelijk zijn.)

3. Een winkelbedrijf koopt bij een klokkenfabriek een grote partij klokjes van een zeker type. De fabrikant garandeert dat ten hoogste 2 op de 100 klokjes niet goed loopt.
   Nadat 40 exemplaren verkocht zijn, zijn drie klanten met een defect klokje teruggekomen. Het bedrijf stuurt hierop de resterende partij aan de fabriek retour.

a) Als 2% van de klokjes niet goed is, hoe groot is dan de kans dat in een steekproef van 40 precies drie defecte voorkomen?

b) Heeft het winkelbedrijf op grond van de ontvangen klachten reden om de bewering van de fabrikant in twijfel te trekken? (Eenzijdig toetsen met $\alpha = 0{,}05$).

c) Bepaal op grond van het aantal ontvangen klachten een tweezijdig 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage defecte klokjes dat door de fabriek werd afgeleverd.

Examen/tentamen Wiskunde 49 op dinsdag 27 mei 1975.

1. Men gooit één keer met vier dobbelstenen.
   A is de gebeurtenis dat er tenminste één vijf bij ligt.
   B is de gebeurtenis dat er tenminste één zes bij ligt.
   C is de gebeurtenis dat het hoogst gegooide getal een vijf is.

   a) Bereken $P(A)$, $P(B^*)$ en $P(C)$.
   b) Bereken $P(A|B^*)$.

2. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ is homogeen verdeeld op het interval $(-1,+1)$.
   De stochastische grootheid $\underline{y}$ is gedefinieerd door $\underline{y} = |\underline{x}|$.
   De stochastische grootheid $\underline{z}$ is gedefinieerd door $\underline{z} = e^{\underline{y}}$.

   a) Bepaal de verdelingsfunctie $G(y)$ en de kansdichtheid $g(y)$ van $\underline{y}$.
      Bereken $E\underline{y}$.
   b) Bepaal de verdelingsfunctie $H(z)$ en de kansdichtheid $h(z)$ van $\underline{z}$.
      Bereken $E\underline{z}$.

3. Een machine produceert koperen bouten met een diameter van ongeveer 32 mm. De bouten zijn bruikbaar als hun diameter ligt tussen 31,6 en 32,4 mm. Gegeven is dat de diameter van de door de machine geproduceerde bouten normaal verdeeld is met een verwachting gelijk aan de instelwaarde van de machine en een standaardafwijking van 0,16 mm.

   a) Als de machine ingesteld is op 32,0 mm, welk percentage van de productie is dan bruikbaar?
   b) Om de juiste instelling van de machine te toetsen neemt men van tijd tot tijd een steekproef van 25 bouten uit de productie, waarvan men de gemiddelde diameter bepaalt.
      Indien men bij zo'n steekproef een gemiddelde diameter $\bar{x} = 32{,}07$ vindt, is er dan reden om te menen dat de instelling van de machine is verlopen? ($\alpha = 0{,}05$.)
      (Vermeld de nulhypothese en de alternatieve hypothese; vermeld ook of U gebruik maakt van overschrijdingskans, van kritiek gebied, dan wel van een betrouwbaarheidsinterval.)

Examen/tentamen Wiskunde 31 op dinsdag 27 mei 1975.

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 49.

2. Een tijdschriftenhandelaar betrekt wekelijks een aantal exemplaren van zeker weekblad van een uitgever. De wekelijkse vraag naar het blad is gamma-verdeeld en bedraagt gemiddeld 50 stuks, met een standaardafwijking van 15 stuks.

   a) Hoeveel exemplaren zal de handelaar per week minstens van de uitgever moeten afnemen om met een kans van tenminste 95% aan de vraag te kunnen voldoen?

   b) Bereken de kans dat de handelaar in een week al zijn exemplaren van het weekblad verkoopt als hij er 65 in voorraad neemt.

   c) De handelaar verdient aan elk verkocht exemplaar *f* 1,--.
   Bereken de verwachting van zijn wekelijkse winst op dit weekblad als hij er elke week 65 in voorraad neemt.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 49.

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 op donderdag 12 juni 1975.

1. Tijdens een autorit stelt de bestuurder A aan zijn metgezel voor om het volgende spel te doen. Van de eerste 20 hen tegemoetkomende auto's wordt de cijferkombinatie bekeken gevormd door de eerste twee cijfers van het autonummer, met inachtneming van de volgorde. (Dus, bijvoorbeeld 15 FA 24 → 15.) Zijn al deze cijferkombinaties verschillend dan krijgt B *f* 10,-- van A. In het andere geval krijgt A *f* 2,-- van B.
Wat is de verwachting van de netto-opbrengst voor A?

2. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ heeft de kansdichtheid

$$f_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} c(1 - x^2)^2 & \text{voor } |x| < 1 \\ 0 & \text{voor } |x| \geq 1 \,. \end{cases}$$

a) Bereken c.
b) Bereken $E\underline{x}$ en $\sigma^2(\underline{x})$.

3. Men neemt aan dat in een vijver met een groot aantal vissen 20% van de vissen van de soort A is. Om deze aanname te toetsen worden in de vijver 80 vissen gevangen. Daaronder bevinden zich 20 vissen van de soort A. Is er op grond van dit resultaat reden de aanname te verwerpen? ($\alpha = 0{,}05$.)
(Vermeld de nulhypothese en de alternatieve hypothese; vermeld ook of U gebruik maakt van overschrijdingskans, van kritiek gebied, dan wel van een betrouwbaarheidsinterval.)

Examen/tentamen Wiskunde 49 (Statistiek) op dinsdag 13 januari 1976.

1. A en B spelen een spel dat bestaat uit het beurtelings gooien met een dobbelsteen; A begint. Het spel eindigt als één van de spelers evenveel ogen gooit als in de voorgaande worp (dit is dus een worp van de ander). Degene die het laatst gegooid heeft, wint het spel.

   a) Bereken de kans dat het spel eindigt na resp. 2 worpen (B wint), 3 worpen (A wint) en 4 worpen (B wint).

   b) Bereken de kans dat B wint.
   Zij spreken verder af dat de verliezer g gulden aan de ander betaalt, maar omdat de kans om te winnen voor B groter is dan voor A, behoeft A slechts $\frac{1}{2}$g gulden te betalen, als B direct (al bij de 2^e worp) wint.

   c) Bereken de verwachting van de winst van A (verlies gerekend als negatieve winst).

2. $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden, met resp. kansdichtheden

$$f_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} 2x & \text{als } 0 \le x \le 1 \ , \\ 0 & \text{elders } ; \end{cases}$$

$$f_{\underline{y}}(y) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 \le y \le 1 \ , \\ 0 & \text{elders } . \end{cases}$$

   a) Bereken de verwachting $E\underline{x}$ en de variantie $\sigma^2(\underline{x})$.

   b) Bereken $P(\underline{x} \le \frac{1}{2}$ en $\underline{y} \le \frac{1}{2})$.

   c) Wat is de twee-dimensionale kansdichtheid $f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y)$ van $\underline{x}$ en $\underline{y}$?

   d) Bereken $P(\underline{x} + \underline{y} < 1)$.

3. Een corrector vindt per bladzijde tekst gemiddeld 4 fouten. Men mag aannemen dat de aantallen fouten per bladzijde onafhankelijk en Poisson-verdeeld zijn.

   a) Bepaal de kans dat 2 gegeven bladzijden samen minder dan 10 fouten bevatten.

   Hij krijgt een tekst van 100 bladzijden, gezet in een andere letter, en vindt daarin 435 fouten.

   b) Concludeert hij nu dat het gebruik van een andere letter invloed heeft op het aantal fouten? Toets tweezijdig met $\alpha = 0{,}05$. Vermeld de nulhypothese en de alternatieve hypothese en geef aan, of U de methode van het kritieke gebied, de overschrijdingskans of het betrouwbaarheidsinterval gebruikt.

Examen/tentamen Wiskunde 31 (Statistiek) op dinsdag 13 januari 1976.

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 49.

2. a) $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden, die beide exponentieel verdeeld zijn met parameter $\lambda > 0$, d.w.z. met kansdichtheden resp.

$$f_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{voor } x > 0 \\ 0 & \text{voor } x < 0 \end{cases} \; ; \; f_{\underline{y}}(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{voor } y > 0 \\ 0 & \text{voor } y < 0 \, . \end{cases}$$

Zij $\underline{z} := \underline{x} + \underline{y}$. Bereken $P(\underline{z} \leq z)$, en laat door berekening van de kansdichtheid van $\underline{z}$ zien, dat $\underline{z}$ een Gamma-verdeling heeft met parameters λ en 2.

b) In een satelliet zitten 8 apparaten, die elk een stochastische levensduur (gemeten in maanden) hebben met dezelfde kansverdeling als $\underline{z}$. Deze apparaten functioneren onafhankelijk van elkaar en gebruiken, zolang ze leven, 1 liter brandstof per maand. De satelliet bevat 72 liter brandstof voor deze 8 apparaten samen. Voor welke waarde van de parameter λ is de kans, dat alle brandstof wordt verbruikt, gelijk aan 0,05?

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 49.

T

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (Statistiek) op woensdag 21 januari 1976.

1. Er worden 3 witte en 2 zwarte damschijven volgens toeval op elkaar gestapeld.

   a) Bereken de kans dat zich tussen de 2 zwarte schijven geen witte bevindt (gebeurtenis A).
   b) Wat is de kans dat de middelste schijf wit is (gebeurtenis B).
   c) Ga na of A en B onafhankelijk zijn.

   We voeren nu 150 van dergelijke stapelingen onafhankelijk van elkaar uit.

   d) Wat is de kans dat er van de 150 stapels minstens 100 zijn met de middelste schijf wit?

2. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ met verwachting μ en standaardafwijking σ heeft als kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{3}x) & \text{voor } 0 \leq x \leq 3 \text{ ,} \\ 0 & \text{elders .} \end{cases}$$

   a) Bereken $P(\underline{x} < \mu)$.
   b) Bereken $P(|\underline{x} - \mu| > \sigma\sqrt{2})$.

3. Men vermoedt dat van een zeer grote partij biljartballen een fractie $p = \frac{1}{3}$ rood is. Ter controle neemt men een steekproef ter grootte $n = 20$.

   a) Als het vermoeden juist is, wat is dan de kans dat er meer dan 10 rode ballen in de steekproef worden gevonden?
   b) Stel ter toetsing van het vermoeden een nulhypothese en alternatieve hypothese op, en bepaal het kritieke gebied bij $\alpha = 0{,}05$.
   Als er in de steekproef 11 rode ballen gevonden worden, wat is dan Uw conclusie?

Examen/tentamen Wiskunde 49 (Statistiek) op dinsdag 1 juni 1976.

1. Er worden onafhankelijke worpen met een dobbelsteen gedaan.
   Zij $\underline{k}$ het aantal worpen dat nodig is om tweemaal zes te gooien.
   a) Welke waarden kan $\underline{k}$ aannemen?
      Bereken $P(\underline{k} = 3)$ en $P(\underline{k} = 4)$.
   b) Bereken $P(\underline{k} = k)$ voor willekeurige k uit de waardenverzameling van $\underline{k}$.
   c) Zij $\underline{x}$ het aantal ogen dat bij de eerste worp wordt gegooid.
      Bereken $P(\underline{x} = 5 \mid \underline{k} = k)$.

2. Een autoverhuurbedrijf is gevestigd in twee verschillende kantoren A en B. Het aantal aanvragen dat A per dag krijgt noemen we $\underline{k}$; het aantal dat B per dag krijgt noemen we $\underline{l}$.
   We nemen aan dat $\underline{k}$ en $\underline{l}$ onafhankelijk zijn en Poisson-verdeeld met parameters $\mu = 3$, resp. $\mu = 9$.
   a) Bereken de kans dat minstens één kantoor gedurende één dag geen aanvraag heeft.

   Laat $\underline{n}$ het aantal aanvragen zijn dat het bedrijf per dag totaal krijgt. Zoals bekend heeft $\underline{n}$ een Poisson-verdeling met parameter $\mu = 12$.
   b) Bereken $P(\underline{k} = k \mid \underline{n} = 15)$.
   c) Wat is dit voor een verdeling?

3. De stochastische grootheid $\underline{x}$ heeft een exponentiële verdeling op (θ,∞) met $\lambda = 1$, d.w.z.

$$f_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{als } x > \theta\,, \\ 0 & \text{anders}\,, \end{cases}$$

   waarbij $\theta < 0$ is.
   a) Bereken $E\underline{x}$.

   Zij $p = P(\underline{x} > 0)$.
   b) Druk p in θ uit.
   c) Men doet 20 waarnemingen van $\underline{x}$; daaronder blijken er drie positief te zijn.
      Toets op grond van dit resultaat de hypothese $p = \frac{1}{3}$ bij een onbetrouwbaarheid $\alpha = 0{,}05$.
      Gebruik hierbij de methode van de overschrijdingskans.

T

Examen/tentamen Wiskunde 31 (Statistiek) op dinsdag 1 juni 1976.

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 49.

2. Een koffieautomaat start elke dag met 16,7 kg koffie. De vraag (in kg) is gamma-verdeeld met parameters r en λ, waarbij tussen de verwachting μ en de variantie σ^2 het verband $\sigma^2 = \frac{1}{2}\mu^2$ geldt. Verder blijkt de vraag zodanig dat de automaat gemiddeld eens in de 40 dagen leeg raakt.

   a) Bereken r en λ.

   b) Bereken de kans dat er aan het eind van een dag in de automaat meer dan 5 kg koffie overblijft.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 49.

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (Statistiek) op donderdag 17 juni 1976.

1. Mijnheer A heeft twee schaakspelende zoons, X en Y, die op zaterdag een partij spelen. Bij een winstpartij betaalt hij aan de winnaar twee gulden; in geval van remise krijgt iedere speler één gulden. (A betaalt dus steeds twee gulden uit.) De winstkansen van X en Y zijn 0,3 resp. 0,6. De betaling aan X noemen we $\underline{x}$, de betaling aan Y noemen we $\underline{y}$.
   Bereken
   a) $E\underline{x}$ en $E\underline{y}$,
   b) var $\underline{x}$ en var $\underline{y}$,
   c) $\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{y})$.

2. Een elektrisch verwarmingsapparaat bestaat uit drie parallel geschakelde spiralen. De levensduren (in uren) van de afzonderlijke spiralen zijn onafhankelijk en hebben elk een exponentiële verdeling met verwachting 1000.
   a) Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat na 1000 uur tenminste één van de spiralen defekt is.

   Een apparaat is defekt zodra alle drie de spiralen defekt zijn!
   b) Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat het apparaat nog niet defekt is na 1000 uur.
   c) Bepaal de verdelingsfunctie van de levensduur $\underline{t}$ van zo'n apparaat.

3. Een plastic-fabriek moet buizen leveren van tien meter. Het is bekend dat de afsnijmachine ten opzichte van zijn afstelling een speling van 6 cm ($\pm$ 3 cm) vertoont zo dat de lengte $\underline{x}$ homogeen verdeeld is.
   a) Bepaal $\sigma_{\underline{x}}$.

   Vermoed wordt dat de machine niet op tien meter is afgesteld. Bij een contrôle-steekproef van vijfenzeventig stuks vindt men een gemiddelde lengte die 0,5 cm te groot is.
   b) Is er reden om aan de juiste afstelling te twijfelen?
   Toets tweezijdig met $\alpha = 0{,}05$. Vermeld de nul-hypothese, de alternatieve hypothese en de gebruikte toetsingsmethode.

Examen/tentamen Wiskunde 49 (Statistiek) op dinsdag 18 januari 1977.

1. In een urn bevinden zich 10 loten, waarvan één met nummer 1, twee met nummer 2, drie met nummer 3 en vier met nummer 4. A trekt eerst een lot, waarvan we het nummer $\underline{a}$ noemen; zonder dat dit lot wordt teruggelegd trekt vervolgens B een lot, waarvan we het nummer $\underline{b}$ noemen.

   a) Bereken de kans dat A en B loten met verschillende nummers trekken.

   b) Bewijs dat de kans dat A bij dit spel een 4 trekt, gelijk is aan de kans dat B een 4 trekt, dus dat $P(\underline{a} = 4) = P(\underline{b} = 4)$.

   c) Ga na of $\underline{a}$ en $\underline{b}$ onafhankelijk zijn.

2. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ heeft de kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{voor } x \geq 0 , \\ 0 & \text{voor } x < 0 . \end{cases}$$

   a) Bereken de mediaan m, dat wil zeggen het getal m zodanig dat $P(\underline{x} \leq m) = 0{,}5$.

   b) Bereken de voorwaardelijke kans $P(\underline{x} > x \mid \underline{x} \geq m)$ voor $x \geq 0$.

   c) Bereken $E\underline{x}^2$.

3. Aan een instituut voor HBO haalt gemiddeld 60% van de aankomende leerlingen het einddiploma in vier jaar.

   a) Bereken de kans dat van een door het lot aangewezen groep van 10 aankomenden er tenminste 9 in vier jaar slagen.

   b) Van een "jaargang" van 75 aankomende leerlingen blijken er 38 in vier jaar te slagen. Is dit "opvallend" weinig of kan dit resultaat toevallig zijn? (Tweezijdig toetsen met $\alpha = 0{,}05$; aangeven welke toetsingsmethode U gebruikt.)

Examen/tentamen Wiskunde 31 (Statistiek) op dinsdag 18 januari 1977.

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 49.

2. De stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn onafhankelijk en exponentieel verdeeld met $E\underline{x} = E\underline{y} = 1$.

   a) Bereken de momenten-voortbrengende functie $\varphi_{\underline{x}}$ van $\underline{x}$, gedefinieerd door $\varphi_{\underline{x}}(s) = Ee^{s\underline{x}}$.

   b) Bereken $E\underline{x}^n$ $(n = 1,2,\ldots)$.

   c) Bereken de momenten-voortbrengende functie van $\underline{x} - \underline{y}$.

   d) Bereken $\mathrm{var}(\underline{x} - \underline{y})$.

   (Opmerking: voor het vinden van de antwoorden op de vragen b) en d) zijn de momenten-voortbrengende functies niet noodzakelijk; er worden wel <u>berekeningen</u> gevraagd: alleen een antwoord is niet voldoende.)

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 49.

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (Statistiek) op woensdag 26 januari 1977.

1. Bij konijnen is er 50% kans op de winterziekte. Voert men ze met hazegras, dan daalt de kans tot 25%. De ziekte is niet besmettelijk. Dr. H. voert drie van zijn zes konijnen met hazegras. Bereken de kans (in procenten) dat van deze drie er toch meer de winterziekte krijgen dan van de drie die niet met hazegras gevoerd worden.

2. Er wordt eenwedstrijd in uithoudingsvermogen gehouden. De kans dat men het langer dan t minuten volhoudt, wordt gegeven door

$$P(\underline{t} > t) = \frac{(T - t)^2}{T^2} .$$

(Niemand kan het langer volhouden dan T minuten.)

a) Bepaal de kansdichtheid van $\underline{t}$.

b) Bepaal de verwachting van $\underline{t}$.

c) Bepaal var $\underline{t}$.

d) Hoe lang moet men het volhouden om tot de "upper ten" (%) te behoren?

3. Bij een weefmachine treden blijkens langdurige waarneming gemiddeld 2 storingen per dag op.

a) Hoe groot is de kans dat er gedurende een week (= 5 dagen) 15 of meer storingen voorkomen?

Een amateur beweert er iets aan te hebben gedaan. Men telt daarna in 4 weken 30 storingen.

b) Kan men hieruit concluderen dat er inderdaad iets aan de machine is veranderd? (Tweezijdig toetsen met α = 0,05; aangeven welke toetsingsmethode U gebruikt.)

Examen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (Statistiek) op dinsdag 7 juni 1977.

1. Een typiste maakt per bladzij gemiddeld 2,3 fouten. Bevat een getypte bladzij minder dan 6 fouten, dan worden deze gecorrigeerd. Zijn het er 6 of meer dan wordt de bladzij overgetypt.

   a) Wat is de kans dat een bladzij wordt overgetypt?

   b) Zij $\underline{k}$ het aantal malen dat een bladzij wordt overgetypt. Bereken $P(\underline{k} = k)$, $k = 0,1,2,3,\ldots$.

   c) Bepaal $E\underline{k}$.

2. Een paar stochastische grootheden $\underline{x}$ en $\underline{y}$ heeft de kansdichtheid

$$f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } 0 < x < 1 \text{ en } 0 < y < 1 \,, \\ \frac{1}{2} & \text{als } -1 < x < 0 \text{ en } -1 < y < 0 \,, \\ 0 & \text{als } (x,y) \text{ elders} \,. \end{cases}$$

   a) Bepaal de marginale kansdichtheden van $\underline{x}$ en $\underline{y}$.

   b) Ga na of $\underline{x}$ en $\underline{y}$ afhankelijk dan wel onafhankelijk zijn.

   c) Bereken $\sigma_{\underline{x}}$ en $\sigma_{\underline{y}}$.

   d) Bereken $\text{cov}(\underline{x},\underline{y})$ en $\rho(\underline{x},\underline{y})$.

3. a) Een stochastische grootheid $\underline{v}$ heeft de kansdichtheid

$$f_{\underline{v}}(v) = \frac{3}{4}(1 - v^2) \quad \text{op } -1 < v < 1 \,.$$

   Bereken $P(-\frac{2}{3} < \underline{v} < \frac{2}{3})$; bereken $\sigma_{\underline{v}}$.

   b) Een kasboek bevat 100 bladzijden. Per bladzij wordt het saldo berekend; hierbij treedt een afrondingsfout $\underline{v}$ op als aangegeven in a). De 100 saldi worden opgeteld en leveren 4990.

   Uit andere informatie is bekend dat het totaal 5000 moet zijn.

   Toets (tweezijdig) de hypothese dat de afwijking uitsluitend aan de 100 afrondingsfouten te wijten is en niet aan andere oorzaken.

   Neem als onbetrouwbaarheid $\alpha = 0{,}05$ en vermeld de gebruikte toetsingsmethode.

T

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (Statistiek) op donderdag 23 juni 1977.

1. Men gooit 10 maal met een zuivere dobbelsteen.
   Bereken de kans op meer dan 4 maal een zes onder de voorwaarde dat er tenminste eenmaal zes wordt gegooid.

2. $\underline{u}$ en $\underline{v}$ zijn onafhankelijke stochastische grootheden; $\underline{u}$ is homogeen verdeeld op $(0,2)$, $\underline{v}$ homogeen verdeeld op $(0,4)$.

   a) Bepaal de simultane kansdichtheid van $\underline{u}$ en $\underline{v}$.
   b) Bereken $P(\underline{uv} \leq 2)$ (gebruik ${}^{e}\log 2 = \ln 2 \approx 0,6931$).

3. Een kogellager bestaat uit 9 kogels en 2 ringen. De gewichten van kogels en ringen zijn onafhankelijk en normaal verdeeld.
   Voor het gewicht $\underline{x}$ van een kogel geldt: $E\underline{x} = 25$, $\sigma(\underline{x}) = \frac{5}{3}$;
   voor het gewicht $\underline{y}$ van een ring geldt: $E\underline{y} = 75$, $\sigma(\underline{y}) = 10$.
   Bereken de kans dat het gewicht van een kogellager meer is dan 400.

4. De kans op een bepaalde zuigelingenziekte is 2%.

   a) Wat is de kans dat men in een groep van 625 babies tenminste 10 zieke zuigelingen aantreft?
   b) Hoe groot moet de groep babies tenminste zijn om daarbij met een kans van 0,99 10 of meer patientjes te vinden?

Examen/tentamen Wiskunde 49 (Statistiek) op dinsdag 17 januari 1978.

1. We gooien met twee dobbelstenen, een zwarte en een rode. Het aantal ogen dat bovenkomt bij de zwarte dobbelsteen, noemen we $\underline{x}$, en dat bij de rode $\underline{y}$. Het minimum van $\underline{x}$ en $\underline{y}$ noemen we $\underline{m}$.

   a) Bereken de kans $P(\underline{m} \leq 3)$ en de voorwaardelijke kans $P(\underline{m} \leq 3 \mid \underline{x} < \underline{y})$.

   b) Bepaal de kansverdeling van de variabele $\underline{m}$ onder de voorwaarde $\underline{x} < \underline{y}$.

   c) Bereken de verwachting van $\underline{m}$ onder de voorwaarde $\underline{x} < \underline{y}$.

2. Het paar variabelen $(\underline{x},\underline{y})$ is homogeen verdeeld op de cirkelschijf

$$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} .$$

   a) Bereken $P(\underline{x} + \underline{y} \leq 1)$.

   b) Welke verdeling heeft de variabele $\underline{z}$ gedefinieerd als $\underline{z} = \underline{x}^2 + \underline{y}^2$?

   c) Geef de marginale kansdichtheid $f_{\underline{x}}(x)$ van $\underline{x}$.

3. Eén op de 100 lucifers heeft geen kop. Een doosje bevat 50 lucifers.

   a) Bepaal de kans op een doosje met twee of meer koploze lucifers. Rond het antwoord af op één decimaal.

   In pakken van 10 doosjes vindt men (praktisch) altijd doosjes met allemaal goede lucifers.

   b) Bepaal het modale aantal (d.i. het aantal met de grootste kans) van dergelijke doosjes per pak. Hoe groot is de kans op dit aantal?

   c) Iemand koopt 10 pakken lucifersdoosjes en vindt daarin 49 doosjes met allemaal goede lucifers. Geeft dit reden tot twijfel aan het gegeven dat één op de 100 lucifers geen kop heeft? Toets tweezijdig met $\alpha = 0{,}05$. Vermeld de door U gebruikte toetsingsmethode.

T

Examen/tentamen Wiskunde 31 (Statistiek) op dinsdag 17 januari 1978.

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 49.

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 49.

3. In een haven komen schepen aan volgens een Poisson-proces, met een gemiddelde van 5,5 per dag.

   a) Om bepaalde redenen vermoedt men dat op zekere dag meer schepen dan gewoonlijk de haven zullen binnenlopen. Er blijken die dag 11 schepen binnen te komen. Toets (éénzijdig) met een onbetrouwbaarheid van 0,05 of dit aantal toch van toevallige aard kan zijn geweest.

   b) Wat is de verwachte datum van binnenkomst van het 200ste schip in 1978?

   c) Bereken op twee manieren de kans dat het 200ste schip in 1978 nog in januari binnenloopt.

      (N.B. Als de beide antwoorden niet precies overeenstemmen, hoeft dat geen fout in methoden of berekeningen te betekenen.)

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (Statistiek) op woensdag 25 januari 1978.

1. In een hoed bevinden zich 10 fiches, en wel twee "prijzen" en acht "nieten". Men mag blindelings (zonder terugleggen) drie fiches trekken. Trekt men hierbij beide prijzen, dan is de trekking ongeldig en begint men opnieuw. Hiermee gaat men door totdat bij de trekking één of geen prijs aangetroffen wordt.

   a) Bepaal de kans dat een trekking ongeldig is.
   b) Bepaal de kans dat men een prijs in de wacht sleept.

2. Bij afrondingen maakt een machine positieve en negatieve fouten. De kans op positieve fouten is tweemaal zo groot als die op negatieve. De positieve fouten zijn homogeen verdeeld op (0,1) en de negatieve zijn homogeen verdeeld op (-1,0).

   a) Bepaal de verdelingsfunctie en de kansdichtheid van de fout $\underline{x}$ die de machine maakt.
   b) Bepaal de verwachting van $\underline{x}$.
   c) Bepaal de standaardafwijking van $\underline{x}$.

3. De kwaliteit van zekere apparaten wordt bepaald door de weerstand $\underline{r}$ die normaal verdeeld is met verwachting 100Ω en standaardafwijking 2Ω. De apparaten worden naar de gemeten weerstand in twee typen ingedeeld, nl. eerste keus indien $r \geq 100\Omega$ en tweede keus indien $r < 100\Omega$.

   a) Bereken de kans dat een eerste-keus-apparaat een weerstand heeft groter dan 102Ω.
   b) Geef de kansdichtheid van de weerstand $\underline{x}$ voor eerste-keus-apparaten. Schets een grafiek van deze functie.
   c) Bereken de verwachting van $\underline{x}$.
   d) Bij een productie op een bepaalde dag van 225 apparaten worden er 97 "eerste keus" en 128 "tweede keus" gevonden. Toets aan dit resultaat of de apparaten nog wel met de opgegeven gemiddelde weerstand door de fabriek worden gemaakt.

      Toets tweezijdig, met een onbetrouwbaarheid van 0,05.

T

Examen/tentamen Wiskunde 49 (Statistiek) op dinsdag 30 mei 1978.

1. A en B spelen een spel dat bestaat uit een aantal ronden. Elke ronde wordt door A of door B gewonnen. In de eerste ronde zijn de winstkansen voor A en B gelijk; heeft een speler een ronde gewonnen, dan is in de daaropvolgende ronde zijn winstkans $\frac{3}{4}$ en die voor de ander $\frac{1}{4}$.
Noem A_k de gebeurtenis: speler A wint de k-de ronde.
   a) Bereken $P(A_2)$.
   b) Toon aan dat geldt:
$$P(A_{k+1}) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}P(A_k) \qquad (k \geq 1)\ .$$
   c) Bereken $P(A_k)$ voor $k = 1,2,3,\ldots$.
   d) Zij $\underline{n}$ het aantal door A gewonnen ronden in een spel dat uit drie ronden bestaat. Bepaal de kansverdeling van $\underline{n}$.

2. Het paar stochastische grootheden $(\underline{x},\underline{y})$ heeft de kansdichtheid
$$f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = \begin{cases} 4xy & \text{voor } 0 \leq x \leq 1 \text{ en } 0 \leq y \leq 1\ , \\ 0 & \text{anders}\ . \end{cases}$$
   a) Bereken de marginale kansdichtheid $f_{\underline{x}}(x)$ van $\underline{x}$.
   b) Zijn $\underline{x}$ en $\underline{y}$ onderling onafhankelijk?
   c) Bepaal $E\underline{x}$ en var $\underline{x}$.
   d) Schets in een grafiek de verzameling punten (x,y) waarvoor geldt:
$$F_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = \tfrac{1}{4}\ , \qquad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\ .$$

3. a) Een dobbelsteen heeft 2 rode en 4 witte zijvlakken. Bereken de kans dat bij 36 keer gooien 17 keer of vaker een rood zijvlak boven komt.

   Een dobbelsteen heeft k rode en 6-k witte zijvlakken. Men gooit er 36 keer mee, waarbij 17 keer een rood en 19 keer een wit zijvlak boven komt.

   b) Toets de nulhypothesen $k = 1$ en $k = 4$ aan dit resultaat, met een tweezijdige toets met $\alpha = 0{,}05$.
   c) Welke waarden van k worden op grond van dit resultaat niet verworpen bij een tweezijdige toets met $\alpha = 0{,}05$?

T

Examen/tentamen Wiskunde 31 (Statistiek) op dinsdag 30 mei 1978.

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 49.

2. In een fabriek wordt een bepaalde machine vervangen na 18800 bedrijfsuren. Een belangrijk onderdeel ervan heeft een levensduur $\underline{t}$ in uren die exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda = \frac{1}{2000}$.

   a) Een koper wil tegelijk met de complete machine drie stuks van dit onderdeel als reserve aanschaffen. Bereken de kans dat hij dan voldoende van deze onderdelen heeft voor de benodigde 18800 uur.

   b) Hoe groot wordt de onder a) genoemde kans als de koper niet drie maar acht stuks als reserve inslaat?

   c) Wat is de kansverdeling van het aantal reserveonderdelen $\underline{n}$ dat men gedurende de tijdsduur van 18800 uren ter vervanging bij een machine nodig heeft?

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 49.

T

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (Statistiek) op donderdag 15 juni 1978.

1. Een vaas bevat tien loten, genummerd 1,2,...,10. Er worden zonder teruglegging achtereenvolgens drie loten uit de vaas getrokken. Noem $\underline{m}$ het hoogste nummer dat hierbij voorkomt.

   a) Toon aan dat $P(\underline{m} = k) = \frac{(k-1)(k-2)}{240}$ voor $k = 1,2,...,10$.

   b) Bereken de verwachting $E\underline{m}$.

2. De stochastische grootheid $\underline{x}$ is exponentieel verdeeld met parameter λ. Een grootheid $\underline{y}$ wordt gedefinieerd als $\underline{y} = e^{-\underline{x}}$.

   a) Bereken $P(\underline{y} > \frac{1}{2})$.

   b) Bepaal de kansdichtheid $f_{\underline{y}}(y)$ van $\underline{y}$.

   c) Bereken $E\underline{y}$.

3. De levensduur in uren van een bepaald computeronderdeel is een stochastische grootheid $\underline{t}$. De fabrikant beweert dat tenminste 60% van de door hem geleverde onderdelen een levensduur hebben van tenminste 5000 uur.
   Een koper wil deze uitspraak onderzoeken en toetst eenzijdig de nulhypothese

   $$H_0: P(\underline{t} > 5000) = 0,6$$

   tegen de alternatieve hypothese

   $$H_a: P(\underline{t} > 5000) < 0,6 .$$

   a) De koper neemt een aselecte steekproef van 600 van deze onderdelen en vindt daarbij 335 stuks met een levensduur groter dan 5000 uur. Hij kiest de onbetrouwbaarheid $\alpha = 0,05$. Zal hij op grond van het resultaat H_0 verwerpen?

   b) Neem aan dat $\underline{t}$ normaal verdeeld is met $\sigma = 200$ uur. Met welke hypothesen betreffende $E\underline{t}$ komen dan H_0 en H_a overeen?

Examen/tentamen Wiskunde 49 (Statistiek) op dinsdag 16 januari 1979.

1. Twee spelers, A en B, spelen een spel dat uit $\underline{n}$ ronden bestaat ($\underline{n}$ is een stochastische grootheid). In elke ronde is de winstkans voor A gelijk aan $\frac{2}{3}$, voor B gelijk aan $\frac{1}{3}$. Het spel wordt gestopt zodra één van beide spelers precies 3 ronden heeft gewonnen; deze speler is dan winnaar van het spel.

   a) Welke waarden kan $\underline{n}$ aannemen?

   b) Bereken de kans dat A het spel wint.

   c) Bepaal de kansverdeling van $\underline{n}$.

2. De levensduur $\underline{x}$ van een machineonderdeel heeft de volgende kansdichtheid:

$$f_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & x \le \theta \quad (\theta > 0). \end{cases}$$

   De minimale levensduur θ is onbekend en wordt op basis van een aselecte steekproef $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4$ van $\underline{x}$ geschat.

   a) Toon aan dat de kansdichtheid van $\underline{m} = \min(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4)$ gegeven wordt door:

$$f_{\underline{m}}(m) = \begin{cases} 4e^{-4(m-\theta)}, & m > \theta, \\ 0, & m \le \theta. \end{cases}$$

   b) Bepaal de verwachting $E\underline{m}$.

   c) Geef een zuivere schatter voor θ.

   d) Bereken $P(\underline{m} > \theta + \frac{1}{4})$.

3. Bij een copieerapparaat dat reeds jaren in gebruik is treden regelmatig storingen op. Aangenomen mag worden dat de aantallen storingen in verschillende weken onderling onafhankelijk zijn.

   Zij $\underline{x}$ het aantal storingen in een week. Dan is $\underline{x}$ Poisson verdeeld met parameter μ. Waarnemingen over een periode van 25 weken geven een gemiddeld aantal storingen per week van 2,52.

   Geef een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval voor μ met betrouwbaarheid 95,44%.

   <u>Motiveer alle stappen in uw redenering</u>

Examen/tentamen Wiskunde 31 (Statistiek) op dinsdag 16 januari 1979.

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 49.

2. De levensduur $\underline{x}$ van een machineonderdeel heeft de volgende kansdichtheid:

$$f_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x > \theta , \\ 0 , & x \leq \theta \ (\theta > 0) . \end{cases}$$

Zij $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5$ een aselecte steekproef van $\underline{x}$.

a) Zij $\underline{y}_i = \underline{x}_i - \theta$ $(i = 1,2,3,4,5)$. Toon aan dat $\underline{y}_i$ exponentieel verdeeld is op $(0,\infty)$.

b) Geef de formule voor de kansdichtheid van $\sum_{i=1}^{5} \underline{y}_i$.

c) Bereken $P(\sum_{i=1}^{5} \underline{y}_i > 8)$.

d) De minimale levensduur θ is onbekend en wordt geschat. Bewijs dat $\underline{t} = \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{5} \underline{x}_i\right) - 1$ een zuivere schatter voor θ is en bereken de onnauwkeurigheid van $\underline{t}$.

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 49.

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31 en 49 (Statistiek) op woensdag 24 januari 1979.

1. In een vaas zitten 3 witte, 3 rode en 3 zwarte ballen. Uit deze vaas worden zonder teruglegging ballen getrokken.

   a) Bereken de kans op minstens 1 witte bal, minstens 1 rode bal en géén zwarte ballen, als in totaal 4 ballen worden getrokken.
   b) Bereken de kans dat bij 4 getrokken ballen minstens 1 bal van elke kleur is.
   c) Bereken de kans dat precies 5 ballen getrokken moeten worden om van elke kleur minstens één bal te hebben.

2. De incubatietijd $\underline{t}$ (in weken) die verloopt tussen de besmetting met een bepaald virus en het ziek worden is homogeen verdeeld op (2,4).
   (Men blijft na het uitbreken van de ziekte tenminste 2 weken ziek.)

   a) Als 2 kinderen tegelijk besmet zijn, bereken dan de kans dat de incubatietijden bij deze kinderen minder dan 1 week verschillen.
   b) In een klas zijn alle 20 kinderen tegelijk besmet. Als meer dan 10 kinderen ziek zijn geworden, wordt de hele klas naar huis gestuurd. Bereken de kans dat dit binnen 3 weken na de besmetting gebeurt.
   c) Bereken de kans dat een kind reeds binnen $2\frac{1}{2}$ week na de besmetting ziek is *geworden*, als dat kind na $3\frac{1}{2}$ week inderdaad ziek is.

3. Een koffieautomaat geeft normaal na inworp van één kwartje en twee stuivers een bekertje koffie, soms evenwel (ten gevolge van storingen die onafhankelijk van elkaar optreden) na inworp van één kwartje en één stuiver. Beweerd wordt dat de kans op een bekertje koffie van 35 ct gelijk is aan $p = 0{,}9$ en op een bekertje van 30 ct gelijk is aan $q = 0{,}1$. Om deze bewering te controleren wordt aan het einde van een bepaalde proefperiode het totaal aantal uit de automaat verkochte bekertjes koffie en het totale bedrag aan ingeworpen geld geteld. Er blijken 711 bekertjes koffie verkocht te zijn en het totale ingeworpen bedrag is f 246,05.
   Zij $\underline{k}$ het aantal bekertjes koffie van 35 ct.

   Toets eenzijdig, met $\underline{k}$ als toetsingsgrootheid, de hypothese H_0: $p = 0{,}9$ tegen H_a: $p > 0{,}9$. De onbetrouwbaarheid $\alpha = 0{,}05$.
   Wat is uw conclusie?

Examen/tentamen Wiskunde 49 en 64 (Statistiek) op dinsdag 29 mei 1979.

1. Twee vazen, A en B, bevatten elk 2 witte en 8 zwarte ballen. Men trekt uit elke vaas 3 ballen, uit A met teruglegging, uit B zonder teruglegging.
   a) Geef voor beide gevallen de kansverdeling van het aantal zwarte ballen.
   b) Bereken voor beide gevallen de verwachting van het aantal zwarte ballen.
   c) Bereken de kans dat uit A meer zwarte ballen worden getrokken dan uit B.

2. Een stochastische grootheid $\underline{u}$ is gegeven door de verdelingsfunctie

$$F_{\underline{u}}(u) = \begin{cases} 0 & \text{voor } u \le 0 \\ u - \frac{1}{4}u^2 & \text{voor } 0 < u \le 2 \\ 1 & \text{voor } 2 < u\,. \end{cases}$$

   a) Bepaal de kansdichtheid $f_{\underline{u}}(u)$ van $\underline{u}$, teken de grafiek daarvan en bereken de verwachting $E\underline{u}$.
   b) Bepaal de voorwaardelijke kans $P(\underline{u} \le \frac{1}{2} \mid \underline{u} \le 1)$.
   c) Bepaal de verdelingsfunctie $F_{\underline{v}}(v)$ van $\underline{v} = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{u}}$.

3. Een meubelfabriek ontvangt van een toeleveringsbedrijf tafelbladen en tafelpoten om er tafels met 4 poten van te maken. Kwaliteitseisen daargelaten dient het toeleveringsbedrijf gewichtsnormen in acht te nemen: het gewicht $\underline{b}$ van een blad is normaal verdeeld met verwachting $\mu_{\underline{b}} = 3{,}5$ kg en standaarddeviatie $\sigma_{\underline{b}} = 0{,}1$ kg; het gewicht $\underline{p}$ van een poot is eveneens normaal verdeeld met verwachting $\mu_{\underline{p}} = 1{,}0$ kg en standaarddeviatie $\sigma_{\underline{p}} = 0{,}05$ kg (alle gewichten zijn onderling onafhankelijk).
   Het toeleveringsbedrijf verzendt telkens 300 bladen en 1200 poten tegelijk. Het totaalgewicht van een zending geven we aan met $\underline{z}$.
   a) Bepaal $E\underline{z}$ en $\sigma_{\underline{z}}$. Wat voor verdeling heeft $\underline{z}$?
   b) Een zending blijkt bij ontvangst 2246 kg te wegen. Geeft dit feit aanleiding om te vermoeden dat er iets niet in orde is? Toets tweezijdig met $\alpha = 0{,}05$ en vermeld de door U gebruikte toetsingsmethode.

Examen/tentamen Wiskunde 31 (Statistiek) op dinsdag 29 mei 1979.

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 49/64.

2. Voor een Noordpoolexpeditie wordt een radiozender gebruikt die continu een signaal uitzendt. Deze zender wordt gevoed door een batterij van een type waarvan de gebruiksduur $\underline{t}$ exponentieel verdeeld is met een verwachting $E\underline{t}$ = 12 dagen. De expeditie duurt in totaal 48 dagen.

   a) Hoeveel batterijen moet men tenminste meenemen opdat de kans dat door gebrek aan batterijen de radiozender niet meer kan zenden, kleiner is dan 0,01?

   b) Men neemt slechts 8 batterijen mee en de expeditie duurt langer dan de geplande 48 dagen. Hoe lang moet de expeditie duren, opdat de kans dat alle 8 batterijen worden opgebruikt groter is dan 99%?

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 49/64.

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31, 49 en 64 (Statistiek) op donderdag 14 juni 1979.

1. Acht vluchtelingen willen een gevaarlijke rivier over, vijf zijn goede roeiers (G), drie zijn slechte (S). Er is slechts één bootje beschikbaar dat niet anders dan met twee personen kan worden bemand. De vluchtelingen besluiten te loten met een gelijke kans voor ieder. De kans om de overkant te halen hangt af van de bemanning: met GG: 70%, met GS: 56% en met SS: 28%.

   a) Bepaal de kans dat het bootje aan de overkant komt.

   b) Welke kans heeft elke goede roeier om aan de overkant te komen?

2. Men vergelijkt twee lampen, een van type T en een van type U. Beide lampen beginnen op het tijdstip 0 te branden. De brandduren $\underline{t}$ en $\underline{u}$ van deze lampen zijn onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld met $E\underline{t} = 1$ jaar en $E\underline{u} = 2$ jaar.

   a) Bereken de kans dat de lamp van het type T na 2 jaar nog brandt.

   b) Geef een formule voor $P(\underline{u} \leq t)$, de kans dat de lamp van het type U vóór het tijdstip t defect raakt.

   c) Bereken

$$\int_0^\infty P(\underline{u} \leq t) e^{-t} dt \quad \text{en} \quad \int_0^\infty P(\underline{t} \leq u) \tfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}u} du .$$

   d) Welke kansen worden door de integralen in c) weergegeven?

3. Een steenfabriek levert bakstenen in partijen van 1000 stuks met gemiddeld 3 onbruikbare per partij. Een klant wil ook eens een andere fabriek proberen. Hij koopt daar 10.000 stenen en vindt er in totaal 20 onbruikbare stenen bij. Geeft dit resultaat hem reden om van leverancier te veranderen? Toets tweezijdig met $\alpha = 0{,}05$ en vermeld de door U gebruikte toetsingsmethode.

Examen/tentamen Wiskunde 49 en 64 (Statistiek) op dinsdag 15 januari 1980.

1. Twee vazen, vaas I en vaas II, bevatten elk zes ballen, genummerd 1 t/m 6. Persoon A trekt zonder teruglegging eerst een bal uit vaas I en daarna een bal uit vaas II. Vervolgens trekt persoon B zonder teruglegging twee ballen op dezelfde wijze.

   a) Bereken de kans dat A twee ballen met een verschillend nummer trekt.

   b) Bereken de kans dat er onder de vier door A en B samen getrokken ballen geen ballen met hetzelfde nummer voorkomen.

   c) Bereken de kans dat de twee door A getrokken ballen onderling van nummer verschillen en tegelijk de twee door B getrokken ballen onderling van nummer verschillen.

   d) Zij $\underline{x}$ de som van de nummers van de getrokken ballen uit vaas I. Bereken $E\underline{x}$.

2. Iemand voert een rij onderling onafhankelijke experimenten uit die ieder een kans p op succes hebben. De stochastische variabelen $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn de rangnummers van die experimenten waarbij respectievelijk het eerste en het tweede succes optreedt.

   a) Bereken $P(\underline{x} = j,\ \underline{y} = 4)$ voor $j = 1,2,3,4,\ldots$.

   b) Bereken $P(\underline{x} = j,\ \underline{y} = k)$ voor $j = 1,2,3,4,\ldots$ en $k = 1,2,3,4,\ldots$.

   c) Zij $\underline{z} = \underline{y} - \underline{x}$. Bepaal de kansverdeling van $\underline{z}$.

   d) Bepaal $P(\underline{z} = j \mid \underline{y} = k)$ voor $j = 1,2,3,4,\ldots$ en $k = 2,3,4,\ldots$.

3. Van een radioactief materiaal wil men de toelaatbaarheid van de stralingsdosis vaststellen. Onder stralingsdosis wordt verstaan de verwachting van het aantal uitgezonden radioactieve deeltjes per 10 seconden. Aangenomen wordt dat het aantal per tijdseenheid uitgezonden deeltjes Poisson verdeeld is. Het materiaal wordt gevaarlijk geacht bij een stralingsdosis groter dan 2. Men wil met een onbetrouwbaarheid van 5% eenzijdig toetsen of de stralingsdosis deze gevarengrens van 2 niet overschrijdt.

   a) Gedurende 2 minuten telt men 32 uitgezonden deeltjes. Wordt het materiaal als niet gevaarlijk geclassificeerd?

   b) Geef het kritieke gebied voor tellingen gedurende 3 minuten.

N.B. Vermeld in Uw antwoord de nul- en de alternatieve hypothese.

Examen/tentamen Wiskunde 31 (Statistiek) op dinsdag 15 januari 1980.

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 49/64.

2. Zie opgave 2 bij Wiskunde 49/64.

3. De tijd in minuten die men moet wachten op een lift in een gebouw nadat men de oproepknop heeft ingedrukt is exponentieel verdeeld met parameter $\lambda = \frac{1}{3}$.

   a) Een persoon A maakt op een werkdag 4 maal gebruik van de lift. Hoe lang is met een kans van 95% de totale wachttijd van A op zijn hoogst?

   b) Bij de beheerder van het gebouw komen klachten binnen over lange wachttijden bij de lift. Deze is echter van mening dat de verwachte wachttijd niet groter dan 3 minuten is. Hij wil deze mening eenzijdig toetsen en laat daartoe 2500 onafhankelijke waarnemingen van de wachttijd registreren. Bij welke waarden van het totaal van deze 2500 wachttijden moet hij (met een onbetrouwbaarheid van 5%) concluderen dat zijn mening onjuist is?

N.B. Vermeld in Uw antwoord de nul- en de alternatieve hypothese.

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31, 49 en 64 (Statistiek) op woensdag 23 januari 1980.

1. Voor een ziekte bestaan drie behandelingen, A, B en C, met ieder een verschillende kans op genezing

$$p_A = 0{,}60,\ p_B = 0{,}50,\ p_C = 0{,}40\ .$$

De behandelingen beïnvloeden elkaar niet.
Op een patiënt wordt eerst behandeling A toegepast. Bij uitblijven van de genezing wordt vervolgens behandeling B toegepast. Indien daarbij nog geen genezing optreedt wordt tenslotte behandeling C toegepast.

a) Bereken de kans op genezing van de patiënt.

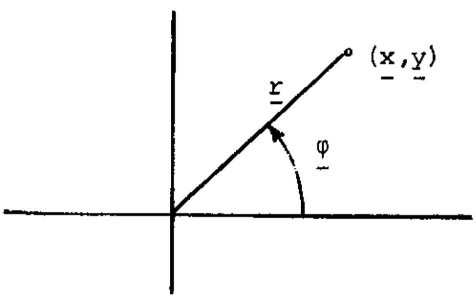
b) Bereken het verwachte aantal behandelingen per patiënt.

c) Wat is de kans dat een genezen patiënt zijn genezing dankt aan behandeling B?

2. Het paar stochastische grootheden $(\underline{x},\underline{y})$ heeft een kansdichtheid

$$f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2\pi}\sqrt{x^2+y^2} & \text{op de eenheidscirkel } \sqrt{x^2+y^2} \le 1\ , \\ 0 & \text{elders}\ . \end{cases}$$

Het paar stochastische variabelen $(\underline{r},\underline{\varphi})$ is gedefinieerd als de met het paar $(\underline{x},\underline{y})$ corresponderende poolcoördinaten (zie figuur).



$$\begin{cases} \underline{x} = \underline{r}\cos\underline{\varphi}\ , \\ \underline{y} = \underline{r}\sin\underline{\varphi}\ , \end{cases} \qquad (0 \le \underline{\varphi} < 2\pi)\ .$$

a) Bepaal de marginale kansdichtheid $f_{\underline{r}}(r)$.

b) Bepaal de marginale kansdichtheid $f_{\underline{\varphi}}(\varphi)$.

c) Bereken de verwachting $E\underline{r}$.

3. Bij een enquête die gehouden wordt twee weken voor een referendum wordt aan 400 aselect gekozen personen gevraagd of zij ja of nee zullen stemmen.

   a) Hoeveel moet het stemmenverschil in de uitslag van de enquête zijn opdat met een betrouwbaarheid van 95% de hypothese kan worden verworpen dat er onder de bevolking evenveel ja- als nee-stemmers zijn?

   b) De uitslag van de enquête blijkt te zijn 220 ja-stemmers en 180 nee-stemmers. Geef een schatting voor het percentage ja-stemmers onder de bevolking en een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval (met $\alpha = 0{,}0456$) voor dat percentage.

Examen/tentamen Wiskunde 49 en 64 (Statistiek) op maandag 2 juni 1980.

1. In een goktent kan voor een inzet van fl. 10,- drie keer met een (zuivere) dobbelsteen worden gegooid.
   Als men drie keer hetzelfde aantal ogen gooit, wordt een bedrag van 10 maal dat aantal ogen uitbetaald; dus bij 3 keer één fl. 10,- , bij 3 keer twee fl. 20,- , enz.
   Als men twee keer hetzelfde aantal ogen gooit, wordt een bedrag van 5 maal dat aantal ogen uitbetaald.
   In de andere gevallen wordt niets uitbetaald.

   a) Bereken de kans dat niets wordt uitbetaald.
   b) Bereken de kans dat fl. 5,- wordt uitbetaald.
   c) Bereken de verwachting van de winst van de goktenthouder.

2. Aan een medische faculteit kunnen in principe 500 eerstejaarsstudenten worden geplaatst. De ervaring leert dat van de studenten die door de faculteit geaccepteerd worden een bepaald afvalpercentage niet aan de studie begint en dus niet geplaatst behoeft te worden. Om te voorkomen dat er plaatsen onbezet blijven accepteert de faculteit meer dan 500 studenten en neemt daarbij de verplichting op zich om elke geaccepteerde student die de studie wil beginnen ook te plaatsen.

   a) De faculteit accepteert 540 Nederlandse studenten, voor wie het afvalpercentage gelijk is aan 10%.
      Hoe groot is de kans dat er meer dan 500 studenten geplaatst moeten worden?
   b) De faculteit accepteert 500 Nederlandse en 40 buitenlandse studenten, voor wie het afvalpercentage gelijk is aan respectievelijk 10% en 20%.
      Hoe groot is nu de kans dat er meer dan 500 studenten geplaatst moeten worden?
      Aangenomen mag worden dat het totaal aantal te plaatsen studenten normaal verdeeld is.

3. In een stadsdeel zijn gedurende de laatste jaren gemiddeld 102 ongelukken per jaar gebeurd. Op verzoek van de bewoners zijn een aantal woonerven ingericht.
Men wil nu onderzoeken of hierdoor de situatie is verbeterd.

a) Men telt in één maand 4 ongelukken. Is er op grond van dit resultaat reden om te veronderstellen dat het verkeer veiliger is geworden? Toets eenzijdig met een onbetrouwbaarheid van 5% en vermeld de nulhypothese, de alternatieve hypothese en de door U gebruikte toetsingsmethode.
Men mag aannemen dat het aantal ongelukken per tijdseenheid Poisson - verdeeld is.

b) Men telt in een periode van zes maanden 40 ongelukken.
Bepaal een tweezijdig betrouwbaarheidsinterval met $\alpha = 0,0456$ voor het verwachte aantal ongelukken per jaar.

Examen/tentamen Wiskunde 31 (Statistiek) op maandag 2 juni 1980.

1. Zie opgave 1 bij Wiskunde 49/64.

2. Bij het radiospel "driemaal is scheepsrecht" gaat het er om dat de deelnemer zo lang mogelijk vermijdt het woord "ja" te gebruiken. Driemaal is toegestaan; bij de vierde keer dat hij "ja" zegt is zijn tijd verstreken. De tijdsintervallen (in minuten) tussen het begin van het spel en de eerste keer "ja" zeggen en tussen elk tweetal opeenvolgende keren "ja" zeggen blijken onderling onafhankelijk te zijn en exponentieel verdeeld met parameter $\lambda = 3$.

   a) Laat zien dat de kans dat het spel na 1 minuut al is afgelopen gelijk is aan 0,35 (afgerond op 2 decimalen).
   b) Aan het spel zullen 20 deelnemers meedoen. Bepaal de kans dat er meer dan 15 het langer volhouden dan 1 minuut.
   c) Hoeveel tijd moet de radio-omroep voor de rechtstreekse uitzending van een spel met één deelnemer uittrekken opdat de kans dat het spel voortijdig moet worden afgebroken kleiner is dan 5% ?

3. Zie opgave 3 bij Wiskunde 49/64.

T

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 31, 49 en 64 (Statistiek) op donderdag 19 juni 1980.

1. In een kast liggen 7 tennisballen. Hiervan zijn er 3 al eerder gebruikt en 4 nog ongebruikt.
   Om een partij te spelen pakt men blindelings 2 ballen uit de kast. Na afloop van de partij legt men de ballen weer terug in de kast.
   Om een tweede partij te spelen pakt men weer blindelings 2 ballen uit de kast.

   a) Bereken de kans dat de eerste partij met nog ongebruikte ballen wordt gespeeld.
   b) Bereken de verwachting en de standaarddeviatie van het aantal ongebruikte ballen in de eerste partij.
   c) Bereken de kans dat de tweede partij met twee nog ongebruikte ballen wordt gespeeld.

2. Een employé van een bank gaat elke dag in het spitsuur met de tram naar huis. Buiten het spitsuur doet de tram over dat traject precies 30 minuten. In het spitsuur echter doet iedere tram er $\underline{v}$ minuten langer over. De bank-employé moet in het spitsuur bovendien nog $\underline{w}$ minuten op de tram wachten. De stochastische grootheden $\underline{v}$ en $\underline{w}$ zijn onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld met parameters $\lambda_v = 0{,}1$ en $\lambda_w = 0{,}2$. De totale reistijd in minuten van de employé is gelijk aan $30 + \underline{v} + \underline{w}$.

   a) Bepaal de verwachting en de standaardafwijking van de totale reistijd.
   b) Toon aan dat de verdelingsfunctie van $\underline{z} = \underline{v} + \underline{w}$ gegeven wordt door

   $$F_{\underline{z}}(z) = \begin{cases} 1 + e^{-0{,}2z} - 2e^{-0{,}1z} & \text{voor } z \geq 0 \\ 0 & \text{voor } z < 0\,. \end{cases}$$

   c) Bereken de kans dat de bankemployé er in totaal langer dan een uur over doet om van zijn werk naar zijn huis te komen.

3. Een automobielfabrikant beweert dat zijn nieuwste type gemiddeld minstens 15 km rijdt op een liter benzine. Een consumentenorganisatie wil deze bewering toetsen. Zij doet dit door na te gaan welke totale afstand door een auto van dit type met 100 liter benzine wordt afgelegd onder wisselende omstandigheden. Deze afstand blijkt 1465 km te zijn.

   a) Het benzineverbruik uitgedrukt in kilometers per liter, is een normaal verdeelde stochastische grootheid met een standaardafwijking van 2 km/liter.
   Hoe luidt de conclusie van de consumentenorganisatie bij een eenzijdige toets met een onbetrouwbaarheid van 5% ?
   Vermeld in Uw antwoord de nulhypothese, de alternatieve hypothese en de door U gebruikte toetsingsmethode.

   b) Bereken het tweezijdige betrouwbaarheidsinterval voor het verwachte benzineverbruik dat met een onbetrouwbaarheid van 5% uit het steekproefresultaat kan worden afgeleid.

Antwoorden

§ 1. Gebeurtenissen

1.1. a) $A \cap B^* \cap C^*$; e) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

b) $A \cap B \cap C^*$; f) $A^* \cap B^* \cap C^* = (A \cup B \cup C)^*$;

c) $A \cap B \cap C$; g) $(A \cap B^* \cap C^*) \cup (A^* \cap B \cap C^*) \cup (A^* \cap B^* \cap C)$;

d) $A \cup B \cup C$; h) $(A \cap B \cap C)^*$.

1.2. a) 2^3;

b) $A_1 = \{u_{100}, u_{110}, u_{101}, u_{111}\}$;
$A_1 \cap A_2 = \{u_{110}, u_{111}\}$;
$A_1 \cup A_2 = \{u_{100}, u_{110}, u_{101}, u_{111}, u_{010}, u_{011}\}$;

c) $A_1 \cup A_2$: tenminste één van de componenten I en II weigert;
$A_1 \cup A_2 \cup A_3$: tenminste één van de 3 componenten weigert;
$A_1 \cap A_2$: de componenten I en II weigeren;
A_1^*: component I weigert niet;
$A_1^* \cap A_3$: component I weigert niet en component III weigert;
$(A_1 \cap A_2)^*$: tenminste één van de componenten I en II weigert niet;

d) $(A_1^* \cap A_2^*) \cup (A_1^* \cap A_3^*) \cup (A_2^* \cap A_3^*)$; $A_1^* \cap A_2^* \cap A_3^*$.

1.3. a) $\{u_{00}, u_{01}, u_{11}\}$;

b) $S = \{u_{00}\}$, $T = \{u_{00}, u_{10}, u_{01}\}$;

c) S^*: tenminste één van de componenten weigert;
T^*: beide componenten weigeren;
$S^* \cap T$: precies één van de componenten weigert;
$S \cap T^*$: onmogelijkheid;
$S \cup T^*$: beide componenten werken of beide weigeren.

1.4. a) $P(a_1) = \frac{1}{13}$; $P(a_2) = \frac{2}{13}$; a_1, a_2 sluiten elkaar uit;

b) $P(b_1) = \frac{4}{13}$; $P(b_2) = \frac{25}{52}$; $P(b_1 \cap b_2) = \frac{7}{52}$;

c) $P(c_1) = \frac{1}{13}$; $P(c_2) = \frac{4}{13}$; $P(c_1 \cap c_2) = \frac{1}{52}$.

1.5. $P(E_1^*) = \frac{1}{2}$; $P(E_2^*) = \frac{2}{3}$; $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$; $P(E_1 \cup E_2) = \frac{2}{3}$; $P(E_1^* \cap E_2) = \frac{1}{6}$.

1.6. b) $\frac{4}{10}$; c) $\frac{3}{10}$;

d) vraag b): $\frac{2}{5}$; vraag c): $\frac{2}{9}$.

A

1.7. a) $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$; b) $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$; c) $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

1.8. $P(A) = \frac{5}{12}$; $P(B) = \frac{2}{3}$; $P(A \cap B) = \frac{11}{36}$; $P(A \cup B) = \frac{7}{9}$.

1.9. a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{5}{14}$.

§ 3. Combinatoriek

3.2. $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 9 \cdot 10^2 = 14040000$.

3.3. a) $\binom{7}{4} = 35$; b) $\binom{7}{4}4! = 840$.

3.4. a) $\binom{5}{2}\binom{7}{3} = 350$; b) $\binom{5}{2}\binom{6}{2} = 150$; c) $\binom{5}{2}\binom{7}{3} - \binom{4}{1}\binom{6}{2} = 290$.

3.5. a) $\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13} = \frac{52!}{(13!)^4}$; b) $\frac{52!}{(13!)^4 4!}$.

3.6. $\binom{n^2+1}{n}$.

§ 4. Discrete kansvelden

4.1. $\frac{65}{252}$.

4.2. 0,891.

4.3. a) 0,01; b) 0,27; c) 0,72.

4.4. a) 0,001; b) 0,036; c) 0,027; d) 0,432; e) 0,504.

4.5. 0,7.

4.6. $\sum_{k=0}^{9} \binom{100}{k}\binom{100}{20-k}/\binom{200}{20} = \frac{1}{2}[1 - \binom{100}{10}^2/\binom{200}{20}] = 0{,}4072$.

4.7. a) $\frac{1}{24}$; b) $\frac{1}{4}$.

4.8. a)

u_i:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 ;
$36p_i$:	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1 ;

b)

u_i:	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18;
$216p_i$:	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1.

4.9. $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,5$; $P(C) = 0,5$; $P(A \cup B) = 1,0$; $P(A \cap B) = 0,1$; $P(A \cap B^*) = 0,5$.

4.10. a) $\frac{1}{36}$; b) $\frac{1}{9}$; c) $\frac{7}{8}$; d) $\frac{91}{216}$; e) $\frac{37}{216}$.

4.11. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{41}{144}$.

4.12. a) $\binom{7}{3}\binom{8}{2}:\binom{15}{5}$;

b) $U = \{u_0,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$, waarbij u_k de uitkomst "k witte en 5 - k zwarte ballen" voorstelt. $P(\{u_k\}) = \binom{7}{k}\binom{8}{5-k}:\binom{15}{5}$.

c) $\sum_{k=0}^{5} P(\{u_k\}) = 1$ dit is 3.1e) met $n = 5$, $M = 7$, $N = 15$.

4.13. a) $4.\binom{13}{7}\binom{39}{6}:\binom{52}{13}$; b) $\binom{3}{3}\binom{36}{10}:\binom{39}{13}$;

c) $\dfrac{\binom{4}{1}\binom{39}{13} - \binom{4}{2}\binom{26}{13} + \binom{4}{3}\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}}$; d) $4.\dfrac{\binom{39}{13} - \binom{3}{1}\binom{26}{13} + \binom{3}{2}\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}}$.

§ 5. <u>Reële kansvelden</u>

5.1. $P(\underline{k} = 4) = 0,0350$; $P(\underline{k} \geq 4) = 1 - 0,0160 = 0,9840$.

5.2. a) $U = \{u_0,u_1,u_2,u_3\}$ waarbij u_i is "het aantal zessen is i".

b) $p_i := P(\{u_i\}) = \binom{3}{i}(\frac{1}{6})^i(\frac{5}{6})^{3-i}$, dus

i:	0	1	2	3
p_i:	0,5787	0,3472	0,0694	0,0046.

5.3. a) 0,2726; b) 0,4678; c) 0,2596; d) 0,5322; e) 0,2637.

5.4. a) 0,3020; b) 0,6242; c) 0,0064.

5.5. $P(\underline{n} = 9) = 0,1318$; $P(7 \leq \underline{n} \leq 11) = 0,5962$.

5.6. 0,0186; 0,0527.

5.7. $P(\underline{x} = 1) = \frac{1}{2}$; $P(\underline{x} = 2) = \frac{1}{4}$; $P(\underline{x} = 3) = \frac{1}{8}$; $P(\underline{x} = 4) = \frac{1}{8}$.

5.8. $P(\underline{s} = 0) = \frac{1}{2}$; $P(\underline{s} = 1) = \frac{7}{32}$; $P(\underline{s} = 3) = \frac{5}{32}$; $P(\underline{s} = 5) = \frac{3}{32}$; $P(\underline{s} = 10) = \frac{1}{32}$.

5.9. a)
$$F_{\underline{u}}(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0), \\ \frac{1}{2}x^2 & (0 \le x \le 1), \\ 1 - \frac{1}{2}(2 - x)^2 & (1 \le x \le 2), \\ 1 & (2 < x). \end{cases}$$
b) $P(-1 < \underline{u} \le 1) = \frac{1}{2}$, $P(\frac{1}{2} < \underline{u} \le \frac{3}{2}) = \frac{3}{4}$.

5.10. a) 0,6321; b) 0,8647; c) 0,0183; d) $m = \frac{1}{2} \ln 2$.

5.11. $m = \lambda^{-1} \ln 2$.

5.12. a) $A = \lambda^2$; b) $1 - 2e^{-1} = 0,2642$.

5.13. a) 0,0765; b) 0,0765; c) 0,8419; d) a = 36,28; e) b = 10,08 .

5.14. $P(\underline{y} \le 1) = 0,5941$; $P(\frac{1}{2} \le \underline{y} \le \frac{3}{2}) = 0,5366$.

§ 6. Voorwaardelijke kans

6.1. $\frac{1}{4}$.

6.3. $$2 . \frac{\binom{13}{4}\binom{13}{3}^3 : \binom{52}{13}}{\binom{26}{7}\binom{26}{6} : \binom{52}{13}} = 2 \frac{\binom{13}{4}\binom{13}{3}^3}{\binom{26}{7}\binom{26}{6}} .$$

6.4. $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{37}{80}$.

6.5. $\frac{10}{17}$.

6.6. $\frac{2}{3}$.

6.7. a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{1}{2}$.

6.8. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{3}$.

6.9. b) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{voor } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{voor } 1 < t < 2, \\ \frac{1}{4} & \text{voor } 2 < t < 4, \\ 0 & \text{voor } 4 < t. \end{cases}$ c) i) $\frac{1}{2}$, ii) $\frac{1}{4}$, iii) $\frac{1}{2}$.

§ 7. Afhankelijke en onafhankelijke gebeurtenissen

7.1. a) $P(V) = \frac{7}{12}$; $P(V \mid U) = \frac{1}{2}$;

b) U en V zijn afhankelijk.

7.2. a) $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{3}{4}$; b) A en B onafhankelijk.

7.3. P(lamp brandt) = $1 - (1-p^2)(1-p)^2$; voor $p = \frac{1}{2}$ wordt dit $\frac{13}{16}$.

7.4. a) P(in en uit) = P(in).P(uit|in) = $(1-p_1)(1-p_2)$;

b) $(1-p_1)^2(1-p_2^2)$; c) ja, als $p_2 > \frac{p_1}{1-p_1}$;

d) $(1-p_1)^2(1-p_2)^2 + 2(1-p_1)p_1(1-p_2)$; $p_2 < \frac{p_1}{1-p_1}$;

e) $p_2 > \frac{p_1}{1-p_1}$.

7.6. a) $P(A) = \frac{91}{216}$; $P(B) = \frac{7}{8}$; b) A en B zijn afhankelijk.

§ 8. Binomiale, Poisson verdeling. Het benaderen van een binomiale door een Poisson verdeling

8.1. a) 0,5905; b) 0,9995.

8.2. 0,4119.

8.3. a) 0,9087; b) $\sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k}$.

8.4. a) 0,0130; b) 0,9985.

8.5. 0,1647.

8.6. a) 0,2517; b) $\approx$ 0,0196.

8.7. $(\frac{1}{2})^x$, $x = 1,2,\ldots$; $(x-1)(\frac{1}{2})^x$ waarbij $x = 2,3,\ldots$.

8.8. 0,8571; 0,7218.

8.9. a) $\mu = 2$; b) 0,1429; c) 1,000.

8.10. 0,3935.

8.11. a) 0,6065; b) 22,31%; c) 44,22%; d) 39,05%.

8.12. a) $\mu = 0,3$; b) 0,0369; c) 0,0296.

8.14. a) resp. 0,7358; 0,9197; 0,9810 voor c = 1,2,3;
b) resp. 0,5830; 0,9984; 1,0000 voor c = 10,20,30;
c) afnemend, toenemend, toenemend.
d) $\frac{1}{2}$, 1, 1.

8.15. a) 0,9139; b) 0,9245; c) 0,9473; ongeveer 120.

8.16. $P(\underline{k} = 0) = 0,01759$; $P(\underline{k} = 0 \; ; \; \mu = 4) = 0,01832$.

§ 9. Stochastische vectoren, onafhankelijke stochastische grootheden, functies van stochastische grootheden

9.1. $f_{\underline{x}}(x) = x + \frac{1}{2}$ op $[0,1]$; $f_{\underline{y}}(y) = y + \frac{1}{2}$ op $[0,1]$;
$\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn afhankelijk.

9.2. $f_{\underline{x}}(x) = 4x(1 - x^2)$ op $[0,1]$; $f_{\underline{y}}(y) = 4y^3$ op $[0,1]$;
$\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn afhankelijk.

9.3. a) $f_{\underline{x}}(x) = 1 - |x|$ op $[-1,1]$; $f_{\underline{y}}(y) = 1 - |y|$ op $[-1,1]$;

b) $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn afhankelijk;

c) i) $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$, $F_{\underline{z}}(z) = \frac{1}{2}(1 + z)$ en $f_{\underline{z}}(z) = \frac{1}{2}$ op $[-1,1]$;

ii) $\underline{z} = \underline{x} - \underline{y}$, $F_{\underline{z}}(z) = \frac{1}{2}(1 + z)$ en $f_{\underline{z}}(z) = \frac{1}{2}$ op $[-1,1]$;

iii) $\underline{z} = |\underline{x} + \underline{y}|$, $F_{\underline{z}}(z) = z$ en $f_{\underline{z}}(z) = 1$ op $[0,1]$;

iv) $\underline{z} = |\underline{x}|+|\underline{y}|$, $F_{\underline{z}}(z) = z^2$ en $f_{\underline{z}}(z) = 2z$ op $[0,1]$.

9.4. a) Neen; b) Ja.

9.5. a) $\frac{11}{36}$; b) $F_{\underline{v}}(v) = 2v - v^2$ op $[0,1]$.

9.6. Zij $\underline{t} = \underline{x} + \underline{y}$; $F_{\underline{t}}(t) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}$ en $f_{\underline{t}}(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$ op $[0,\infty)$.

9.7.

$$F_{\underline{x}+\underline{y}}(z) = \begin{cases} 0 & \text{voor } z \le 0 \\ \frac{1}{2}z^2 & \text{voor } 0 < z \le 1 \\ 1 - \frac{1}{2}(2-z)^2 & \text{voor } 1 < z \le 2 \\ 1 & \text{voor } 2 < z \end{cases}; \quad f_{\underline{x}+\underline{y}}(z) = \begin{cases} 0 & \text{voor } z \le 0 \\ z & \text{voor } 0 < z \le 1 \\ 2-z & \text{voor } 1 < z \le 2 \\ 0 & \text{voor } 2 < z. \end{cases}$$

9.8. $f_{\underline{x}+\underline{y}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}t^2}$.

9.9. a) $P(\underline{m} > m) = [1 - F_{\underline{x}}(m)]^n$.

9.10. P(gr > 5) = 0,4990; P(kl > 5) = 0,0006.

9.11. a) $F_{\underline{x}}(x) = (1-e^{-2x})^2$ en $f_{\underline{x}}(x) = 4e^{-2x}(1-e^{-2x})$ op $[0,\infty)$;

b) 1 comp. 0,1353; duo 0,2523.

9.12. $F_{\underline{z}}(z) = z - z \ln z$ en $f_{\underline{z}}(z) = -\ln z$ op $(0,1]$.

9.14. $F_{\underline{r}}(r) = 1 - e^{-\frac{1}{2}r^2}$ op $(0,\infty)$.

9.15. Stel $\underline{y} = \underline{x}^2$; $F_{\underline{y}}(y) = \frac{1}{a}\sqrt{y}$ op $[0,a^2]$.

9.16. $f_{\underline{E}}(E) = \frac{a}{m}\sqrt{\frac{2E}{m}}\, e^{-\lambda E}$ op $[0,\infty)$.

§ 10. Verwachting

10.1. a) $E\underline{k} = 3{,}5$; $E\underline{k}^2 = \frac{91}{6}$; var $\underline{k} = \frac{35}{12}$;
b) $\Sigma \underline{k}_i = \underline{\ell}$; $E\underline{\ell} = 126$; var $\underline{\ell} = 105$.

10.2. a) 6; b) 1; c) [4,8].

10.3. $E\underline{s} = \frac{47}{32}$; $E\underline{s}^2 = \frac{227}{32}$; $\sigma^2(\underline{s}) = \frac{5055}{1024}$.

10.4. $E\underline{u} = 1$; $\sigma^2(\underline{u}) = \frac{1}{6}$.

10.5. a) $E\underline{x} = \frac{1}{2}a$; $\mathrm{var}(\underline{x}) = \frac{1}{12}a^2$;
b) $E\underline{x} = \frac{1}{2}(n+1)$, $\mathrm{var}(\underline{x}) = \frac{1}{n}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - \frac{1}{4}(n+1)^2 = \frac{1}{12}(n^2 - 1)$.

10.6. a) b) $P(\underline{x} = 0) = \frac{1}{3}$, $P(\underline{x} = 1) = \frac{1}{2}$, $P(\underline{x} = 2) = \frac{1}{6}$;
c) $E\underline{x} = \frac{5}{6}$; $\sigma^2(\underline{x}) = \frac{17}{36}$.

10.7. $E\underline{n} = \sum_1^\infty np^{n-1}q = \frac{1}{q}$ $(p \neq 1)$; (bestaat niet als $p = 1$).

10.8. $1000e^{-\frac{1}{2}} = 606{,}5$.

10.9. $d_1 = 170 - 0{,}431 \cdot 11{,}6 = 165{,}0$; $d_2 = 175{,}0$;
Kansdichtheid van bijv. soort fijn:

$$f_{\underline{x}}(x \mid \underline{x} \le d_1) = \begin{cases} \frac{3}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2], & (x \le d_1) \\ 0 & , (x > d_1) \end{cases}$$

waarbij $\mu = 170$ en $\sigma = 11{,}6$.

$E(\underline{x} \mid \underline{x} \le d_1) = 157{,}3$; $E(\underline{x} \mid d_1 \le \underline{x} \le d_2) = 170$;

$E(\underline{x} \mid d_2 \le \underline{x}) = 182{,}7$.

10.10. a) $E\underline{x} = \lambda^{-1}$;
b) $\begin{cases} 0 & \text{voor } x < a, \\ 1 - e^{-\lambda(x-a)} & \text{voor } x \ge a. \end{cases}$

10.12. $E\underline{z} = \frac{1}{4}$, allicht!

10.13. a) $\sigma = 0{,}5$; $\mu = 50{,}5$; b) $4{,}56\%$.

10.14. a) $9{,}5\%$;

b) $\mu = 5{,}006$: $16{,}86\%$,

$\mu = 5{,}008$: $11{,}46\%$,

$u = 5{,}012$: $11{,}46\%$,

$\mu = 5{,}014$: $16{,}86\%$,

$\mu = 5{,}016$: $25{,}52\%$;

c) $\sigma = 0{,}004$.

10.15. a)

$$F_{\underline{u}}(u) = \begin{cases} 0 & u \le 0, \\ u & 0 < u < 1; \\ 1 & 1 \le u. \end{cases} \qquad f_{\underline{u}}(u) = \begin{cases} 0 & u \le 0, \\ 1 & 0 < u < 1, \\ 0 & 1 \le u. \end{cases}$$

b) $$F_{\underline{v}}(v) = \begin{cases} 0 & v \le 1, \\ 1 - \frac{1}{v} & 1 < v. \end{cases} \qquad f_{\underline{v}}(v) = \begin{cases} 0 & v \le 1, \\ (\frac{1}{v})^2 & v > 1. \end{cases}$$

c) $E\underline{u} = \frac{1}{2}$; $E\underline{v} = \infty$; $E\underline{uv} = 1$.

d) Neen.

10.16. $E\underline{x} = E\underline{y} = \frac{7}{12}$; $\text{var } \underline{x} = \text{var } \underline{y} = \frac{11}{144}$; $E\underline{xy} = \frac{1}{3}$;

$\text{cov}(\underline{x},\underline{y}) = -\frac{1}{144}$; $\rho(\underline{x},\underline{y}) = -\frac{1}{11}$.

10.17. $E\underline{x} = \frac{8}{15}$; $E\underline{y} = \frac{4}{5}$; $\text{var } \underline{x} = \frac{11}{225}$; $\text{var } \underline{y} = \frac{2}{75}$;

$E\underline{xy} = \frac{4}{9}$; $\text{cov}(\underline{x},\underline{y}) = \frac{4}{225}$; $\rho(\underline{x},\underline{y}) = \frac{4}{\sqrt{66}}$.

10.18. $\text{cov}(\underline{x},\underline{y}) = 0$, dus $\rho(\underline{x},\underline{y}) = 0$.

10.19. $E\underline{x} = E\underline{y} = \frac{1}{2}$; $\sigma(\underline{x}) = \sqrt{\frac{1}{12}}$; $\sigma(\underline{y}) = \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{d^2}{3}}$;

$E\underline{xy} = \frac{1}{3}$; $\rho(\underline{x},\underline{y}) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4d^2}}$.

10.20. $\text{cov}(\underline{m},\underline{M}) = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$; $\text{var } \underline{m} = \text{var } \underline{M} = \frac{1}{18}$; $\rho(\underline{m},\underline{M}) = \frac{1}{2}$.

10.21. a) $E\underline{x} = \frac{\pi}{2}$; modus $\frac{1}{3}\sqrt{3}$; de mediaan 1;
b) $\sigma(\underline{x}) = \infty$.

10.22. a) $\frac{2}{\lambda^2}$; $\mathrm{cov}(\underline{x},\underline{x}-\underline{y}) = \mathrm{var}\ \underline{x} = \frac{1}{\lambda^2}$, $\rho(\underline{x},\underline{x}-\underline{y}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

§ 11. Sommen van o.o. (normaal verdeelde) stochastische grootheden, centrale limietstelling

11.1. 4,78%.

11.2. 0,0228.

11.3. 251,4.

11.4. 272.

11.5. a) 60,06%; b) 68,26%.

11.6. a) 0,0289; b) 0,1139.

11.7. 0,3431 of 0,1241 afhankelijk van het vulmechanisme.

11.8. a) 0,3174; b) tot 3 cm.

11.9. 0,0398.

11.10. 265.

11.11. a) 1,96 ≈ 2%; b) 0,7619; c) 10 of meer.

§ 12. Het benaderen van een binomiale en van een Poisson verdeling door een normale verdeling. Momentenvoortbrengende functies

12.1. a) 0,2650; b) 0,0605; c) 0,1587.

12.2. a) 0,6672; b) 0,8643; c) $n \geq 27.10^6$.

12.3. 0,0289.

12.4. a) $n = 1921$; b) $n = 10^4$.

12.5. 0,0446.

12.6. 19200 rozijnen of meer.

12.7. a) 9 (of 10); b) 28 (of 29).

12.8. 78.

12.9. a) 0,9772; b) bij $k \leq 74$.

12.10. a) 0,0655; b) 131; c) 0,1611.

12.11. a) $\left(\frac{e^s - 1}{s}\right)^2$;

b) $E\underline{x}^\ell = \frac{2^{\ell+2} - 2}{(\ell + 1)(\ell + 2)}$, $\ell = 0,1,2,\ldots$.

c) het is de momentenvoortbrengende functie van een op (0,1) homogeen verdeelde stochastische grootheid.

12.12. a) $\varphi_{\underline{x}}(s) = \frac{e^s - 1}{s}$; $\varphi_{\underline{y}}(s) = \frac{e^s(e^{6s} - 1)}{6(e^s - 1)}$;

$\varphi_{\underline{x}+\underline{y}}(s) = \frac{e^s(e^{6s} - 1)}{6s}$; $\varphi_{\underline{x}+\underline{y}-1}(s) = \frac{e^{6s} - 1}{6s}$;

b) een homogene verdeling op (0,6).

12.13. a) $\varphi_{\underline{x}}(s) = \frac{(e^s - 2)\ln 2}{s - \ln 2}$; $\varphi_{\underline{y}}(s) = \frac{1}{2 - e^s}$;

$\varphi_{\underline{x}+\underline{y}}(s) = \frac{\ln 2}{\ln 2 - s}$;

b) een exponentiële verdeling met $\lambda = \ln 2$.

12.16. $E\underline{x}^\ell = 0$ voor $\ell = 1,3,5,\ldots$;

$E\underline{x}^{2\ell} = \frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!}$ voor $\ell = 0,1,2,\ldots$.

§ 14. Toetsen bij een normale verdeling, fout van eerste en tweede soort, onderscheidingsvermogen

14.1. In beide gevallen H_0: $p = \frac{1}{6}$ verwerpen.

14.2. b) Neen, want $9 \notin K = \{\bar{x} \mid \bar{x} \leq 8{,}51 \text{ of } \bar{x} \geq 11{,}49\}$.

14.3. $55 \leq \ell = 55{,}59$, reden om te reclameren.

14.4. a) de overschrijdingskans $0{,}0228 < 0{,}05$; H_0 verwerpen,
b) de overschrijdingskans $0{,}0228 > 0{,}01$; H_0 niet verwerpen.

14.5. Zeker, want H_0: $\mu = 50$ wordt verworpen.

14.6. a) H_0: $\mu = 250$ niet verwerpen;
b) H_0 verwerpen;
c) geen verschil.

14.7. a) $0{,}0196 \approx 2\%$; b) 20%; c) $0{,}0839$;
d) voldoende reden, want $P(\underline{k} \geq 42) \approx P(\underline{u} \geq 2{,}45) = 0{,}0071 < \alpha$.

14.8. Als $P(\underline{k} \geq 288;\ \mu = 256) = 0{,}0228 \leq \frac{1}{2}\alpha$, dan is er verschil.

14.9. a) $\Phi(1{,}645 - 2\sqrt{n})$; b) $\Phi(1{,}645 - 2\sqrt{n})$.

14.10. a) $n = 214$; b) $0{,}4278$.

14.11. a) bij $\mu = -3{,}0$: $\ell = -4{,}63$; $r = -1{,}37$
bij $\mu = 5{,}0$: $\ell = 3{,}37$; $r = 6{,}63$.
b) $0{,}0023$; $0{,}0501$; $0{,}3286$; $0{,}7744$.

14.12. $n = 4$. Keuringsnorm: afkeuren als $\bar{x} \leq \ell$ waarbij $\ell \in [104{,}1,\ 105{,}1]$.

§ 15. Toetsen bij een binomiale en Poisson verdeling

15.1. 0,9586; de hypothese H_0: $p = \frac{1}{2}$ verwerpen.

15.2. a) 0,0998 $\approx$ 10%; b) 0,2639; c) $k \geq 4$.

15.3. $k \geq 13$ (bij Poisson benadering),
$k \geq 12$ (bij Normale benadering).

15.4. Bij $\alpha = 0{,}05$ is $K = \{k \mid k \geq 16\}$.

15.5. a) H_0: $\mu = 90$ niet verwerpen; b) H_0 verwerpen.

15.6. a) $P(\underline{k} \geq 4) = 0{,}1209$, $p = \frac{1}{5}$ niet verwerpen,
b) $P(\underline{k} \geq 4) = 0{,}0000$, $p = \frac{1}{100}$ verwerpen,
c) $P(\underline{k} \geq 4) = 0{,}0010$, $p = \frac{1}{20}$ verwerpen,
d) $P(\underline{k} \geq 4) = 0{,}00025$, $p = \frac{1}{20}$ verwerpen.

15.7. $P(\underline{k} \leq 5 ;\ n = 75,\ p = 0{,}10) = 0{,}2414$; geen verschil.

§ 16. Betrouwbaarheidsinterval bij een normale verdeling

16.1. $7{,}51 < \mu < 10{,}49$.

16.2. $\mu < 59{,}41$.

16.3. a) $\mu < 9{,}93$; b) $\mu < 10{,}07$.

16.4. $v < 5{,}05$ gram.

16.5. $n \geq 664$; $n \geq 166$.

16.6. $64{,}28 < \mu < 99{,}56$; $74{,}67 < \mu < 85{,}71$.

16.7. $256{,}8 < \mu < 323{,}0$.

16.8. $\mu < 49{,}98$.

16.9. 75 < percentage < 84.

16.10. 19 < percentage < 30.

§ 17. Betrouwbaarheidsinterval bij een binomiale en een Poisson verdeling

17.1. a) 0,0106; b) 0,0260;
c) 0,0702; d) 0,0115;
e) 0,35 < p < 0,94; f) niet verwerpen.

17.2. a) 0,26 < p < 0,88; b) 0,50 < p < 0,69; c) 0,57 < p < 0,63.

17.3. a) kleiner dan 2,5%; b) n ≥ 300.

17.4. a) 1,0 < μ < 10,3; b) 29,4 < μ < 54,5.

17.5. 1,36 < μ < 9,2.

§ 18. De gammaverdeling

18.1. 166,67.

18.2. 257.

18.3. 567.

18.4. 948.

18.5. 0,025.

18.6. a) 4390; b) 6010.

18.7. a) 4378; b) 5631.

18.8. Nauwelijks minder dan ƒ 300,--.

18.9. *f* 295,--.

18.10. *f* 203,50.

18.11. 978.

18.12. a) 16953 m; b) 5493 m.

18.13. a) gammaverdeling met $\lambda = \frac{1}{15}$, $r = 4$; $E\underline{t} = 60$ seconden;
b) $t_M = 150{,}6$ seconden; c) $t_m = 12{,}375$ seconden.

18.14. a) 87; b) 0,025; c) 242.

18.15. a) 93,12 uren; b) 0,83.

18.16. a) 800; b) 0,100; c) 0,23.

Gemengde opgaven

G.1. $P(\underline{x} = 0) = 1/3$; $P(\underline{x} = 1) = 1/3$; $P(\underline{x} = 2) = 1/3$;
$P(\underline{y} = 0) = 1/3$; $P(\underline{y} = 1) = 1/3$; $P(\underline{y} = 2) = 1/3$.
a) juist.
b) onjuist.
c) onjuist.
d) 1.
e) 13/9.
f) 2.
g) 5/3.
h) 2/3.
k) 1/2.

G.2. Overschrijdingskansen:
0,4013 (binomiaal), geen twijfel;
0,0318 (Poisson), geen twijfel;
0,0001 (normaal), wel twijfel.

G.3. a) ≥ 4; ≥ 11; ≥ 29.
b) 0,8670; 0,5830; 0,0228.

G.4. a) 0,0010.
b) 0,1847.
c) 0,92.
d) $P(\underline{u} \geq 2{,}87) = 0{,}0021 < 0{,}005 = \frac{1}{2}\alpha$, dus significant verschil.

G.5. a) 0,7553; b) 0,9213; c) $n \geq 65$.

G.6. a) $E\underline{v} = 0$; $E\underline{d} = 70/36$; var $\underline{v} = 35/6$; var $\underline{d} = 665/324$.
b) niet onafhankelijk.

G.7. a) $\binom{10}{2}(0{,}05)^2(0{,}95)^8 = 0{,}0746$.
b) 0,0487 (Poisson).
c) $\lambda \approx 1/2$.
d) $E\underline{x} = 2$(min); mediaan = ln 4 = 1,39 (min).

G.8. a) x_i : 2,3,4,5,6,7,8
p_i : (1,8,8,8,8,2,1)/36.
b) $\frac{14}{3}$.
c) 35/18

G.9. a) $a = \frac{1}{10}$; 0,0024.

b) 0,2213; c) 0,0096.

G.10. a) 0,0668.

b) 0,9940.

c) 0,9699.

G.11. a) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 1; $\frac{1}{2}$.

b) onafhankelijk.

G.12. a) 1470; 35.

b) $N(1470; 35^2)$; centrale limietstelling.

c) 0,9772.

G.13. 35.

G.14. $u = 1{,}2 < 1{,}645$, dus geen voldoende reden.

G.15. a) A : 91,45%; B : 97,59%.

b) 94,52%

c) 1,225 cm.

G.16. a) $\underline{z}$: 2,4,5,7,8,10

$p(z)$: (6,9,2,3,4,6)/30.

b) $E\underline{z} = 3\ E\underline{x} + 2\ E\underline{y}$.

c) $\text{var } \underline{z} = 9 \text{ var } \underline{x} + 4 \text{ var } \underline{y}$.

d) 1/2.

G.17. a) $\sum_{k=1}^{10} \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k}$ met $p = 2P(\underline{\bar{x}} > 251 ; \mu = 250, \sigma = \frac{1}{2})$.

b) 0,1587.

c) > 2/3 gram.

d) 0,3085.

G.18. a) $\alpha = -2$.

b) $E\underline{x} = 0$.

c) $\sigma(\underline{x}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

d) $e^{-2\sqrt{2}}$.

G.19. ja; $P(\underline{k} \geq 2;\ n = 6,\ p = 0{,}05) = 0{,}0328 < \alpha$.

G.20. a) 100 uur; b) 69 uur; c) 0,015; d) 0,3528; e) 0,1562.

G.21. a) 2/15; b) 73/225.

G.22. Overschrijdingskans: $P(\underline{k} \geq 42) \approx P(\underline{u} \geq 2{,}50) = 0{,}0062 < 0{,}01$.
Kritieke waarde $r = 41{,}3 < 42$.
Hypothese $p = \frac{1}{2}$ verwerpen.

G.23. a) 0,675 min; b) $\sqrt{2/\pi}$ min.

G.24. a) 3/8; b) 3/4; c) 1.

G.25. a) Overschrijdingskans $P(\underline{k} \leq 182) \approx P(\underline{u} \leq -1{,}80) = 0{,}0359 < 0{,}05$.
Kritieke waarde $\ell = 183{,}55 > 182$.
H_0: $p = \frac{1}{2}$ verwerpen.
b) H_0: $p = 0{,}40$, H_a: $p \neq 0{,}40$.
Overschrijdingskans $P(\underline{k} \geq 182) \approx P(\underline{u} \geq 2{,}25) = 0{,}0122 < 0{,}025$.
Kritieke waarde $r = 179{,}2 < 182$.
H_0 verwerpen.

G.26. a) 0,6736; b) 0,8664; c) 3,84.

G.27. a) 5/36; b) 161/36; c) ja.

G.28. a) 0,8131; b) 0,8159; c) 0,9522.

G.29. a) 16/27; 5/27; 6/27; b) 19/27; c) 7/9.

G.30. a) 0,03319;
b) $$F_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 1 - \frac{2}{3}\, e^{-x} & \text{voor } x \geq 0\ . \end{cases}$$
c) $\frac{2}{3}$ minuut.

G.31. a) 1/2; 7/8; b) A en B niet onafhankelijk.

G.32. a) 3 jaren; b) 0,9900; c) 0,0098.

G.33. a) 1/3; b) $(1 + \sqrt{3})/3$;

c)

Voor	$x \le 0$	$0 < x \le 1$	$1 < x \le 4$	$4 < x$
$F_{\underline{x}}(x)$:	0	$(2\sqrt{x})/3$	$(1 + \sqrt{x})/3$	1

G.34. $n \ge 9604$.

G.35. a) 25/6; $\sqrt{73}/6$.

b) 25/3; $\sqrt{146}/6$.

G.36. a) $\frac{1}{2}$; b) 256.

G.37. Overschrijdingskans: $P(\underline{\bar{x}} \ge 8,1) \approx P(\underline{u} \ge 2,44) = 0,0073 < 0,01$.

Kritieke waarde: $r = 8,047 < 8,1$.

Betrouwbaarheidsinterval: $c > 7,053$.

Niet in overeenstemming met de theorie.

G.38. 0,02669.

G.39. a) 0,8647; b) $1 - (0,8647)^{10} = 0,7664$.

G.40. a) 1030 gram; 10,2 gram.

b) Overschrijdingskans: $P(\underline{\bar{g}} \ge 1036,0) = P(\underline{u} \ge 1,76) = 0,0392 > \frac{1}{2}\alpha$.

Kritieke waarde: $r = 1030 + 1,96.3,40 = 1036,66 > 1036$.

De vulmachine kan goed ingesteld zijn.

G.41. a) $P(\underline{x} = x) = \binom{5}{x}(\frac{1}{2})^5$, $x = 0,1,2,3,4,5$.

b) 5/16.

c) 0,1238.

G.42. Er is reden om de bewering te onderschrijven:

overschrijdingskans: $P(\underline{\bar{s}} \ge 102,7) = 0,0359 < \alpha$;

kritieke waarde $r = 102,47 < 102,7$.

Tentamenopgaven

15 januari 1974

1. a) 0,2632; b) $6!/6^6$; c) $28/6^6$; d) $17/(6^6.\frac{1}{4}) = 17/11664$.

2. Wiskunde 49:
   a) ½; ¼.
   b) $4(1 - e^{-2x})e^{-2x}$, $x \geq 0$.
   c) $4e^{-4x}$, $x \geq 0$.

   Wiskunde 31:
   a) ½; ¼.
   b) 0,17.
   c) $4(1 - e^{-2x})e^{-2x}$, $x \geq 0$.

3. Overschrijdingskans 0,0127 > 0,01; geen terugslag. (Eenzijdig getoetst; bij tweezijdig toetsen, 0,0127 > ½.0,01, natuurlijk dezelfde conclusie.)

23 januari 1974

1. a) 0, 5/16, 11/16.
   b) 3/5.
   c) 9/25.

2. a) 0,9 (benadering, Poissonverdeling met $\mu = 2,3$).
   b) 0,0702.
   c) $P(\underline{k} \geq 30) \approx P(\underline{u} \geq 1,67) = 0,0475$.

3. Overschrijdingskans: $P(\underline{k} \leq 37) \approx P(\underline{u} \leq -13/7,036) = 0,0323 < 0,05$; vaccin beter. (Eenzijdig getoetst; bij tweezijdig toetsen, 0,0323 > ½.0,05, onvoldoende aanwijzing.)

28 mei 1974

1. a) ¼; b) 13/16.

2. Wiskunde 49:
   a) 0,1587.
   b) 0,7461.
   c) 0,0852.

   Wiskunde 31:
   a) 0,08208.
   b) 0,75.
   c) meer dan 4.

3. a) Kritieke waarde $\ell = 81,4 < 84$.
Overschrijdingskans $0,0458 > 0,025$.
Geen strijd met het aselecte karakter van de tabel.
b) Kritieke waarde $r = 11 > 8$.
Overschrijdingskans $0,1334 > 0,025$.
Geen strijd met het aselecte karakter van de tabel.

13 juni 1974

1. a) $\binom{1}{1}\binom{25}{2}/\binom{26}{3} = 3/26$; b) $1 - \binom{49}{3}/\binom{52}{3} = 0,1663$.

2. a) $P(k \text{ kuikens}) = \sum_{\ell=k}^{\infty} P(\ell \text{ eieren}).P(k \text{ van de } \ell \text{ uitgebroed}) =$

$$\sum_{\ell=k}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{\ell}}{\ell!}\cdot\binom{\ell}{k}p^{k}(1-p)^{\ell-k} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{\ell=k}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda p)^{\ell-k}}{(\ell-k)!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}.$$

b) $\lambda p = 2,4$; $P(\underline{k} \geq 5) = 0,0959 \approx 0,10$.
c) $P(\underline{n} \geq 80) \approx P(\underline{u} \geq -2,11) = 0,9826$.

3. a) $P(\text{A koopt partij}) = P(\underline{k} \leq 4;\ n = 20,\ p = 0,15) = 0,8298$.
b) Overschrijdingskans $P(\underline{k} \geq 4;\ \mu = 1,6) = 0,0788 > 0,05$ (eenzijdig getoetst).
Hij zal niet reclameren.

14 januari 1975

1. a) 7/10.
b) $P(\underline{x} = 1) = 2/7$, $P(\underline{x} = 0) = 5/7$.
c) Overschrijdingskans $P(\underline{k} \geq 35) \approx P(\underline{u} \geq 2,17) = 0,0150 < 0,025$.
Kritieke waarde $r = 180/7 + 1,96(30/7) = 34,1 < 35$.
Twijfel aan de behoorlijke samenstelling van de tabel.

2. $0,27 < p < 0,73$.

3. Wiskunde 49:
$P(\underline{k} < 10720) \approx 0,0281$.

Wiskunde 31:
b) 270.

<u>22 januari 1975</u>

1. a) 33/56.
   b) $\frac{5}{21} \cdot \binom{4}{1}\binom{5}{1}/\binom{9}{2} + \frac{2}{7} \cdot \binom{3}{1}\binom{6}{1}/\binom{9}{2} = \frac{52}{189}$.

2. a) $P(\underline{k} - 342 \geq 0{,}05.\underline{k}) = P(\underline{k} \geq 360) = P(\underline{u} \geq 2{,}00) = 0{,}0228$.
   b) $P(\underline{m} \leq 514) = P(\underline{u} \leq 2{,}16) = 0{,}9846$.

3. a) 0,0383.
   b) Overschrijdingskans $P(\underline{k} \geq 3;\ \mu = 0{,}8) = 0{,}0474 < 0{,}05$.
      Reden tot twijfel.
   c) 1,5 < percentage < 22,0.

<u>27 mei 1975</u>

1. a) 671/1296; 625/1296; 369/1296 = 41/144.
   b) 369/625.

2. Wiskunde 49:
   a)
$$G_{\underline{y}}(y) = \begin{cases} 0 & \text{voor } y \leq 0 \\ y & 0 < y < 1 \\ 1 & 1 \leq y \end{cases}$$
   met $g_{\underline{y}}(y) = 0$, 1 resp. 0.
   $E(\underline{y}) = \frac{1}{2}$.
   b)
$$H_{\underline{z}}(z) = \begin{cases} 0 & \text{voor } z \leq 1 \\ \ln z & 1 < z < e \\ 1 & e \leq z \end{cases}$$
   met $h_{\underline{z}}(z) = 0$, $1/z$ resp. 0.
   $E(\underline{z}) = e - 1$.

   Wiskunde 31:
   a) tenminste 77.
   b) $P(\underline{k} \geq 65) = 0{,}17$.
   c) $\int_0^\infty \min(x,65)\gamma(x;\lambda,r)dx = \int_0^{65} + \int_{65}^\infty =$
   $= 38{,}50 + 65.0{,}17 = 49{,}55$.

3. a) 98,76%.
   b) Overschrijdingskans: $P(\underline{\bar{x}} \geq 32{,}07) = P(\underline{u} \geq 2{,}19) = 0{,}0143 < 0{,}025$.
      Kritieke waarden: $\ell = 31{,}94$; $r = 32{,}06$.
      Betrouwbaarheidsinterval: $32{,}007 < \mu < 32{,}133$.
      Reden om te menen dat de instelling is verlopen.

12 juni 1975

1. P(20 verschillende cijfercombinaties) = $100!/(80!100^{20}) = 0,1304$.
Verwachting netto-opbrengst voor A: $-10.0,1304 + 2.0,8696 = 0,435$.

2. a) 15/16.
b) 0; 1/7.

3. Overschrijdingskans: $P(\underline{k} \geq 20) \approx P(\underline{u} \geq 1,12) = 0,1314 > 0,025$.
Kritieke waarden: $\ell = 9,0$; $r = 23,0$.
Betrouwbaarheidsinterval: $16,9\% = 0,169 < p < 0,353 = 35\%$.
Geen reden de aanname te verwerpen.

13 januari 1976

1. a) $(6.1)/6^2 = \frac{1}{6}$; $(6.5.1)/6^3 = \frac{1}{6}.\frac{5}{6}$; $(6.5.5.1)/6^4 = \frac{1}{6}.(\frac{5}{6})^2$.
b) $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^2 + \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^4 + \ldots = \frac{1}{6}\,\frac{1}{1-25/36} = \frac{6}{11}$.
c) $\frac{5}{11}\,g + \frac{1}{6}(-\frac{1}{2}g) + (\frac{6}{11} - \frac{1}{6})(-g) = -\frac{1}{132}\,g$.

2. Wiskunde 49:
a) 2/3; 1/18.
b) $\frac{1}{4}.\frac{1}{2} = 1/8$.
c) Voor $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$:
$f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = 2x$;
elders $f_{\underline{x},\underline{y}}(x,y) = 0$.
d) $\frac{1}{3}$.

Wiskunde 31:
a) $P(\underline{z} \leq z) = 1 - e^{-\lambda z} - \lambda z e^{-\lambda z}$ voor $z \geq 0$
resp. 0 voor $z \leq 0$,
$$f_{\underline{z}}(z) = \begin{cases} \lambda^2 z e^{-\lambda z} & \text{voor } z \geq 0 \\ 0 & \text{voor } z \leq 0 \,. \end{cases}$$
b) $\lambda = 0,32$.

3. a) 0,7166.
b) Overschrijdingskans: $0,0401 > 0,025$.
Kritieke waarde $r = 439,2 > 435$.
Betrouwbaarheidsinterval: $\mu_1 < \mu < \mu_2$ met $435 = \mu_1 + 1,96\sqrt{\mu_1}$,
$435 = \mu_2 - 1,96\sqrt{\mu_2}$ d.w.z. $\mu_1 = 396$, $\mu_2 = 478$. Dus: H_0 niet verwerpen; er is géén invloed op het aantal fouten te constateren.

21 januari 1976

1. a) $4/\binom{5}{2} = \frac{2}{5}$.

   b) $\binom{4}{2}/\binom{5}{2} = \frac{3}{5}$.

   c) afhankelijk. d) $P(\underline{k} \geq 100) \approx P(\underline{u} \geq 1{,}67) = 0{,}0475$.

2. a) 5/9; b) 1/9.

3. a) 0,0376.

   b) H_0: $p = 1/3$, H_a: $p \neq 1/3$.

   Kritiek gebied $\{k \mid k \leq \ell \vee k \geq r\}$ met $\ell = 2$, $r = 12$.

   H_0 niet verwerpen; geen aanwijzing dat fractie rode ballen van 1/3 verschilt.

1 juni 1976

1. a) 5/108, 25/432.

   b) $(k-1)(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{k-2}$, $k = 2,3,4,\ldots$.

   c) $\frac{1}{5}\,\frac{k-2}{k-1}$, $k = 3,4,5,\ldots$.

2. Wiskunde 49:

   a) 0,04991.

   b) $\binom{15}{k}(\frac{1}{4})^k(\frac{3}{4})^{15-k}$.

   c) Binomiale; $n = 15$, $p = \frac{1}{4}$.

   Wiskunde 31:

   a) $r = 2$; $\lambda = 1/3$.

   b) 0,900.

3. a) $\theta + 1$.

   b) e^{θ}.

   c) $P(\underline{k} \leq 3;\ n = 20,\ p = 1/3) = 0{,}0604 > 0{,}025$.

   Hypothese $p = 1/3$ niet verwerpen.

17 juni 1976

1. a) 0,7; 1,3.
   b) 0,81; 0,81.
   c) -0,81.

2. a) $1 - (e^{-1})^3 = 0{,}95$.
   b) $1 - (1 - e^{-1})^3 = 0{,}75$.
   c) $F_{\underline{t}}(t) = (1 - e^{-t/1000})^3,\ t \geq 0;\ F_{\underline{t}}(t) = 0,\ t \leq 0$.

3. a) $\sqrt{3}$ cm.
   b) Overschrijdingskans: $P(\bar{\underline{x}} \geq 1000{,}5) \approx P(\underline{u} \geq 2{,}5) = 0{,}0062 < 0{,}025$.
   Reden om aan de juiste afstelling te twijfelen.

18 januari 1977

1. a) $\frac{7}{9}$; c) $\underline{a}$ en $\underline{b}$ zijn afhankelijk.

2. Wiskunde 49:
   a) $m = \sqrt{\ln 4}$.
   b) $P(\underline{x} > x \mid \underline{x} \geq m) = \begin{cases} 1 & ,\ 0 \leq x < m, \\ 2e^{-\frac{1}{2}x^2} & ,\ x \geq m. \end{cases}$
   c) 2.

   Wiskunde 31:
   a) $\varphi_{\underline{x}}(s) = \frac{1}{1 - s}$.
   b) $E\underline{x}^n = n!$.
   c) $\varphi_{\underline{x}-\underline{y}}(s) = \frac{1}{1 - s^2}$.
   d) $\mathrm{var}(\underline{x} - \underline{y}) = 2$.

3. a) 0,0464.
   b) Overschrijdingskans: $P(\underline{k} \leq 38;\ n = 75,\ p = 0{,}60) \approx P(\underline{u} \leq -1{,}65) = 0{,}0495 > \frac{1}{2}\alpha$.
   Kritieke waarde: $\ell = 36{,}7 < 38$.
   Het resultaat kan toevallig zijn.

26 januari 1977

1. $\frac{35}{256} = 14\%$.

2. a) $f_{\underline{t}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0, \\ 2(T - t)/T^2 & \text{voor } 0 < t < T, \\ 0 & \text{voor } t > T. \end{cases}$

b) $T/3$.

c) $T^2/18$.

d) $P(\underline{t} > t_0) = 10\%$ geeft $t_0 = (1 - \frac{1}{\sqrt{10}})T = 0{,}6838\ T$.

3. a) 0,0835.

b) Overschrijdingskans: $P(\underline{k} \leq 30;\ \mu = 40) \approx P(\underline{u} \leq -1{,}58) = 0{,}0571 > \frac{1}{2}\alpha$.

Kritieke waarde: $\ell = 27{,}6 < 30$.

Men kan hieruit niet concluderen dat er iets aan de machine is veranderd.

7 juni 1977

1. a) 0,0300.

b) $P(\underline{k} = k) = (0{,}03)^k . 0{,}97,\ k = 0,1,2,3,\ldots$.

c) 0,0309.

2. a) $f_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 1,\ x \neq 0, \\ 0, & \text{elders}; \end{cases} \qquad f_{\underline{y}} = f_{\underline{x}}$.

b) afhankelijk.

c) $\sigma_{\underline{x}} = \sigma_{\underline{y}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

d) $\text{cov}(\underline{x},\underline{y}) = \frac{1}{4};\ \rho(\underline{x},\underline{y}) = \frac{3}{4}$.

3. a) $\frac{23}{27}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

b) Overschrijdingskans: $P(\underline{x} \geq 10;\ E\underline{x} = 0,\ \text{var}\ \underline{x} = 20) \approx P(\underline{u} \geq \frac{10}{\sqrt{20}}) =$

$= P(\underline{u} \geq \sqrt{5}) = 0{,}0125 < \frac{1}{2}\alpha$.

Kritieke waarde: $r = 8{,}765 < 10$.

Er zijn waarschijnlijk andere oorzaken waaraan de afwijking mede te wijten is.

23 juni 1977

1. 0,0185.

2. a) $f_{\underline{u},\underline{v}}(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & 0 < u < 2,\ 0 < v < 4, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$

   b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 = 0,5965$.

3. 0,0478.

4. a) 0,7611; b) 1020.

17 januari 1978

1. a) $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$; b) $P(\underline{m} = k \mid \underline{x} < \underline{y}) = \frac{6-k}{15}$, $k = 1,\ldots,5$; c) $\frac{7}{3}$.

2. a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}$.

   b) Homogene verdeling op het interval (0,1).

   c) $f_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2}, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

3. Wiskunde 49:

   a) 0,1.

   b) 6; 0,2508.

   c) Overschrijdingskans: $0,0125 < \frac{1}{2}\alpha$.
   Kritieke waarde: $\ell = 50,4 > 49$.
   Reden tot twijfel.

   Wiskunde 31:

   a) Overschrijdingskans: $0,0252 < \alpha$.
   Kritieke waarde: $r = 11$.
   Twijfel aan toevallige aard.

   b) 6 februari.

   c) $P(\underline{t}_{200} \leq 31) \approx P(\underline{u} \leq -2,09) = 0,0183$;
   $P(\underline{n}_{31} \geq 200) \approx P(\underline{u} \geq 2,26) = 0,0119$.

25 januari 1978

1. a) $\frac{1}{15}$; b) $\frac{1}{2}$.

AT

2. a) $F_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1, \\ \frac{1}{3}(x+1), & -1 \le x < 0, \\ \frac{1}{3}(2x+1), & 0 \le x < 1, \\ 1 & , x \ge 1; \end{cases}$ $f_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{3}, & -1 < x < 0, \\ \frac{2}{3}, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

b) $\frac{1}{6}$; c) $\frac{1}{6}\sqrt{11}$.

3. a) $P(\underline{r} > 102 \mid \underline{r} \ge 100) = 2P(\underline{r} > 102) = 2P(\underline{u} > 1) = 0{,}3174$.

b) $f_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} 0 & , x < 100, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{8}(x-100)^2], & x \ge 100. \end{cases}$

c) $100 + \frac{4}{\sqrt{2\pi}} = 101{,}60$.

d) Overschrijdingskans: $P(\underline{k} \le 97;\ n = 225,\ p = \frac{1}{2}) \approx P(\underline{u} \le -2{,}07) =$
$= 0{,}0192 < \frac{1}{2}\alpha$.

Kritieke waarde : $\ell = 97{,}8 > 97$.

De apparaten worden waarschijnlijk niet meer met de opgegeven gemiddelde weerstand gemaakt.

30 mei 1978

1. a) $\frac{1}{2}$.

c) $P(A_k) = \frac{1}{2},\ k = 1,2,3,\ldots$.

d) $P(\underline{n} = 0) = \frac{9}{32}$; $P(\underline{n} = 1) = \frac{7}{32} = P(\underline{n} = 2)$; $P(\underline{n} = 3) = \frac{9}{32}$.

2. Wiskunde 49:

a) $f_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$

b) Ja.

c) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{18}$.

d) Deel van de hyperbool $2xy = 1$.

Wiskunde 31:

a) $P(\underline{t}_1 + \underline{t}_2 + \underline{t}_3 + \underline{t}_4 \ge 18800) = 0{,}0175$.

b) 0,41.

c) Poisson-verdeling met parameter 9,4.

3. a) 0,0793.

b) i) Overschrijdingskans: $P(\underline{m} \ge 17;\ n = 36,\ p = \frac{1}{6}) \approx 1 - P(\underline{u} \le 4{,}47) =$
$= 0 < \frac{1}{2}\alpha$.

Kritieke waarde: $r = 10{,}38 < 17$.

Hypothese $k = 1$ verwerpen.

ii) Overschrijdingskans: $P(\underline{m} \leq 17;\ n = 36,\ p = \frac{4}{6}) \approx P(\underline{u} \leq -2{,}47) =$
$= 0{,}0068 < \frac{1}{2}\alpha$.

Kritieke waarde: $\ell = 18{,}46 > 17$.

Hypothese $k = 4$ verwerpen.

c) $k = 2$ en $k = 3$.

15 juni 1978

1\. b) $\frac{33}{4}$.

2\. a) $P(\underline{y} > \frac{1}{2}) = P(\underline{x} < \ln 2) = 1 - e^{-\lambda \ln 2} = 1 - 2^{-\lambda}$.

b) $f_{\underline{y}}(y) = \begin{cases} \lambda y^{\lambda-1}, & 0 < y < 1, \\ 0 \quad , & y \notin (0,1). \end{cases}$

c) $\frac{\lambda}{\lambda + 1}$.

3\. a) Overschrijdingskans: $P(\underline{k} \leq 335;\ n = 600,\ p = 0{,}6) \approx P(\underline{u} \leq -2{,}08) =$
$= 0{,}0188 < \alpha$.

Kritieke waarde : $\ell = 340{,}26 > 335$.

H_0 verwerpen.

b) H_0: $E\underline{t} = 5050$; H_a: $E\underline{t} < 5050$.

16 januari 1979

1. a) 3,4 en 5.

   b) $\frac{64}{81}$.

   c) $P(\underline{n} = 3) = \frac{9}{27}$, $P(\underline{n} = 4) = \frac{10}{27}$, $P(\underline{n} = 5) = \frac{8}{27}$.

2. Wiskunde 49:

   b) $\Theta + \frac{1}{4}$.

   c) $\underline{m} - \frac{1}{4}$.

   d) e^{-1} .

   Wiskunde 31:

   b) $f_{\underline{y}_1+\ldots+\underline{y}_5}(z) = \begin{cases} 0 & , z \leq 0 , \\ \frac{1}{24} z^4 e^{-z} & , z > 0 . \end{cases}$

   c) 0,10 .

   d) $\sqrt{E(\underline{t} - \Theta)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{5}$.

3. $1,96 < \mu < 3,24$.

24 januari 1979

1. a) $\frac{5}{42}$; b) $\frac{9}{14}$; c) $\frac{3}{14}$.

2. a) $\frac{3}{4}$; b) 0,4119; c) $\frac{1}{3}$.

3. Overschrijdingskans : $P(\underline{k} \geq 655;\ n = 711,\ p = 0,9) \approx$
   $\approx P(\underline{u} \geq 1,88) = 0,0301 < \alpha$.

   Kritieke waarde : $r = 653,16 < 655$.

   De kans dat men voor een bekertje koffie 35 ct moet offeren is waarschijnlijk groter dan 0,9.

29 mei 1979

1. a) $P(\underline{m} = m) = \binom{3}{m} \left(\frac{8}{10}\right)^m \left(\frac{2}{10}\right)^{3-m}$, $m = 0,1,2,3$;

$$P(\underline{n} = n) = \frac{\binom{8}{n}\binom{2}{3-n}}{\binom{10}{3}} \quad , \; n = 1,2,3 \; .$$

b) $E\,\underline{m} = 2{,}4$; $E\,\underline{n} = 2{,}4$.

c) $P(\underline{m} > \underline{n}) = \frac{112}{375}$.

2. Wiskunde 49/64:

a) $$f_{\underline{u}}(u) = \begin{cases} 0 & \text{voor } u < 0 \,, \\ 1 - \frac{1}{2}u & \text{voor } 0 < u < 2 \,, \\ 0 & \text{voor } u > 2 \,; \end{cases}$$

$E\,\underline{u} = \frac{2}{3}$.

b) $\frac{7}{12}$.

c) $$F_{\underline{v}}(v) = \begin{cases} 0 & , \; v \le 0 \,, \\ 2v^2 - v^4 & , \; 0 < v \le 1 \,, \\ 1 & , \; v > 1 \,. \end{cases}$$

Wiskunde 31:

a) 10 .

b) langer dan 192 dagen .

3. a) $E\,\underline{z} = 2250$ kg; $\sigma_{\underline{z}} = \sqrt{6}$ kg; $\underline{z}$ heeft een normale verdeling.

b) Overschrijdingskans : $P(\underline{z} \le 2246;\; E\,\underline{z} = 2250,\; \sigma_{\underline{z}} = \sqrt{6}) =$

$= P(\underline{u} \le -1{,}633) = 0{,}0513 > \frac{1}{2}\alpha$;

Kritieke waarden : $\ell = 2245{,}2$; $r = 2254{,}8$.

Er is geen aanleiding om te vermoeden dat er iets niet in orde is.

14 juni 1979

1. a) 0,58; b) 0,16 .

2. a) $e^{-2} = 0{,}1353$.

b) $P(\underline{u} \leq t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t}$, $t \geq 0$.

c) $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$.

d) $P(\underline{u} \leq \underline{t})$ en $P(\underline{t} \leq \underline{u})$.

3. Overschrijdingskans : $P(\underline{k} \leq 20;\ n = 10.000,\ p = 0{,}003) \approx$

$\approx P(\underline{u} \leq -1{,}83) = 0{,}0336 > \frac{1}{2}\alpha$;

Kritieke waarden : $\ell = 19{,}3;\ r = 40{,}7$.

Geen reden om van leverancier te veranderen.

15 januari 1980

1. a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $\frac{7}{10}$; d) $E\underline{x} = 7$.

2. a) $$P(\underline{x} = j,\ \underline{y} = 4) = \begin{cases} p^2(1-p)^2 & , j = 1,2,3, \\ 0 & , j = 4,5,6, \ldots . \end{cases}$$

b) $$P(\underline{x} = j,\ \underline{y} = k) = \begin{cases} p^2(1-p)^{k-2} & , j = 1,2,3,\ldots,\quad k = 2,3,4,\ldots,\quad j < k , \\ 0 & , j = 1,2,3,\ldots,\quad k = 1,2,3,\ldots,\quad j \geq k . \end{cases}$$

c) $P(\underline{z} = z) = p(1-p)^{z-1}$, $z = 1,2,3,\ldots$.

d) $$P(\underline{z} = j \mid \underline{y} = k) = \begin{cases} \frac{1}{k-1} & , j = 1,2,3,\ldots,\quad k = 2,3,4,\ldots,\quad j < k , \\ 0 & , j = 1,2,3,\ldots,\quad k = 2,3,4,\ldots,\quad j \geq k . \end{cases}$$

3. Wiskunde 49/64:

a) Overschrijdingskans:

$P(\underline{k} \geq 32;\ \mu = 24) \approx P(\underline{u} \geq 1{,}63) =$

$= 0{,}0516 > \alpha$;

Kritieke waarde: $r = 32{,}06 > 32$.

Het materiaal wordt als niet-gevaarlijk geclassificeerd.

b) $K = \{k \mid k \geq 46\}$.

Wiskunde 31:

a) 23,28 minuten.

b) bij een totale wachttijd van tenminste 7746,75 minuten.

<u>23 januari 1980</u>

1. a) 0,88; b) 1,60; c) 0,23 .

2. a) $f_{\underline{r}}(r) = \begin{cases} 0 & , \quad r < 0 \quad , \\ 3r^2 & , \quad 0 \leq r < 1 \; , \\ 0 & , \quad r > 1 \; . \end{cases}$

b) $f_{\underline{\varphi}}(\varphi) = \begin{cases} 0 & , \quad \varphi < 0 \quad , \\ \frac{1}{2\pi} & , \quad 0 < \varphi < 2\pi \; , \\ 0 & , \quad \varphi > 2\pi \quad . \end{cases}$

c) $E\,\underline{r} = \frac{3}{4}$.

3. a) tenminste 40; b) 55%; 50 < percentage < 60 .

<u>2 juni 1980</u>

1. a) $\frac{5}{9}$; b) $\frac{5}{72}$; c) f 1,74 .

2. Wiskunde 49/64:

   a) 0,0158 .

   b) 0,0040 .

Wiskunde 31:

   a) $\Gamma(1;3,4) = P(\underline{\chi}_8^2 \leq 6) = 0,35$.

   b) 0,1182 .

   c) meer dan 2,59 minuten .

3. a) Overschrijdingskans : $P(\underline{k} \leq 4;\ \mu = 8,5) = 0,0744 > \alpha$;
   Kritieke waarde : $\ell = 3$.

   Er is geen reden om te veronderstellen dat het verkeer veiliger is geworden.

   b) $58,39 < \mu < 109,61$.

19 juni 1980

1. a) $\frac{2}{7}$; b) $\frac{8}{7}$, $\frac{2}{7}\sqrt{5}$; c) $\frac{20}{147}$.

2. a) 45 en $5\sqrt{5}$ minuten; c) $2e^{-3} - e^{-6} = 0,0971$.

3. a) Overschrijdingskans : $P(\underline{x} \leq 1465;\ \mu = 1500,\ \sigma = 20) =$

   $= P(\underline{u} \leq -1,75) = 0,0401 < \alpha$;

   Kritieke waarde : $\ell = 1467,1 > 1465$.

   De bewering van de fabrikant is waarschijnlijk niet juist.

   b) $14,26 < \mu < 15,04$.