

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 64 (2e deel)

Syllabus van het college

Aanvullingen Kansrekening en Statistiek

Dr. F.W.Steutel en Prof. Dr. R. Doornbos

voor studenten van de afdeling Werktuigbouwkunde

Najaarssemester 1979

2285

Bebl / Moij

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Wiskunde 64

(2e deel)

Dr. F.W. Steutel
Prof.dr. R. Doornbos

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 64 (2-de deel)

Dr. F.W. Steutel

Prof. Dr. R. Doornbos

Voorjaarssemester 1979

<u>Inhoudsopgave</u>	blz.
Inleiding	1
Hoofdstuk 1: Stochastische grootheden en stochastische processen	1
Hoofdstuk 2: Foutenvoortplanting, correlatiefunctie, zwakke stationariteit	8
2.1. Foutenvoortplanting	8
2.2. Correlatiefunctie, zwakke stationariteit	11
Hoofdstuk 3: Ergodiciteit	16
Hoofdstuk 4: Fourier-getransformeerden: karakteristieke functie en spectrale dichtheid	19
4.1. Karakteristieke functie	19
4.2. Spectrale dichtheid en covariantiefunctie	22
Hoofdstuk 5: Waarnemingen uit normale verdelingen	27
5.1. Inleiding	27
5.2. Een steekproef uit een normale verdeling met onbekende variantie	27
5.2.1. Toets en betrouwbaarheidsinterval voor de verwachting	27
5.2.2. Toets voor de verwachtingen bij gepaarde waarnemingen	29
5.2.3. Toets en betrouwbaarheidsinterval voor de variantie	31
5.3. Twee normale verdelingen met onbekende varianties	33
5.3.1. Toets voor de gelijkheid van twee varianties	33
5.3.2. Toets voor de gelijkheid van twee verwachtingen	36
5.4. k steekproeven uit normale verdelingen ($k > 2$)	37
5.5. Regressieanalyse	40
5.5.1. Het schatten van de parameters α en β	41
5.5.2. Het schatten van σ^2	42
5.5.3. Betrouwbaarheidsintervallen en toetsen	43

<u>Inhoudsopgave (vervolg)</u>	blz.
Hoofdstuk 6: Binomiale, hypergeometrische en Poisson verdeling	47
6.1. De hypergeometrische verdeling	47
6.2. Toetsen voor gelijkheid van twee kansen	49
6.3. Het vergelijken van twee Poisson verdelingen	51
Hoofdstuk 7: Steekproefkeuringen in de industrie	54
7.1. Partijkeuringen	54
7.2.1. Keuringskarakteristieken	55
7.2.2. Dubbele steekproefschema's	58
7.2.3. Steekproeftabellen	59

Inleiding

Dit dictaat bevat een aanvulling op Wiskunde 49 (= Wsk 31 = Wsk 64, deel 1; dictaatnr. 2.265) speciaal ten behoeve van studenten in de Werktuigbouwkunde.

Wat de kansrekening betreft bestaat de aanvulling uit een aantal begrippen op het gebied van de stochastische processen, speciaal met het oog op de stochastische signaalanalyse. In samenhang hiermee wordt enige aandacht besteed aan Fourier-getransformeerden van kansdichtheden en spectrale dichtheden.

De aanvullingen op het gebied van de statistiek betreffen: foutenvoortplanting, enkele toetsen bij steekproeven uit normale-, binomiale- en Poisson-verdelingen, eenvoudige gevallen van variantieanalyse en lineaire regressie, iets over partijkeuring.

Er wordt verondersteld dat de student vertrouwd is met de inhoud van Wiskunde 49 voor zover die bij de te behandelen stof een rol speelt; dit betekent dat de hoofdstukken 1 en 2 van Wsk 49 bekend moeten zijn bij het begin van dit dictaat.

Literatuur (met * aangegeven literatuur stelt wiskundig hoge eisen).

- [1] C. Mack, Essentials of statistics for scientists and technologists, Plenum Press, London, 1975.
- [2] A. Papoulis, Probability, random variables and stochastic processes, McGraw-Hill, New York, etc., 1965.
- * [3] J. Wessels, Stochastische Processen II (collegedictaat 2.229)
- * [4] E. Wong, Stochastic processes in information and dynamical systems, McGraw-Hill, 1971.

1. Stochastische grootheden en stochastische processen

Als model voor een experiment waarvan de uitkomst van het toeval afhangt gebruikt men een *kansruimte* (of kansveld, zie Wsk 49, p.5, def. 1); dit is een tripel (U, \mathcal{F}, P) , waarbij U de *uitkomstenruimte* is: de verzameling van alle mogelijke uitkomsten van dit experiment, \mathcal{F} een collectie deelverzamelingen van U , de "*gebeurtenissen*" en de *kans* P een functie gedefinieerd op deze gebeurtenissen. Van \mathcal{F} wordt doorgaans geëist dat het een σ -algebra is, d.w.z. dat $U \in \mathcal{F}$, dat $A^* \in \mathcal{F}$ als $A \in \mathcal{F}$ en dat $\bigcup_1^\infty A_j \in \mathcal{F}$ als alle $A_j \in \mathcal{F}$. Dit betekent niets anders dan dat al deze verzamelingen weer als gebeurtenissen beschouwd kunnen worden, waarvoor de kans P gedefinieerd is: als A een gebeurtenis is, dan willen we ook over de gebeurtenis A^* (niet $-A$) kunnen spreken; het is i.h.a. niet mogelijk om P op *alle* deelverzamelingen van U te definiëren. Op de eigenschappen van \mathcal{F} gaan we verder niet in; voor de eigenschappen van P zie Wsk 49, p.6. Op p. 18 van Wsk 49 zagen we dat in sommige gevallen een stochastische grootheid op natuurlijke wijze beschouwd kan worden als *een functie* op U . We zullen dit nu als definitie gebruiken.

Definitie 1.1. Een stochastische grootheid \underline{x} is een (meetbare) reële functie $x : U \rightarrow \mathbb{R}$, dus $\underline{x} = x(u)$, gedefinieerd voor alle $u \in U$.

De toevoeging "meetbare" betekent dat $[\underline{x} \leq a] := \{u | x(u) \leq a\} \in \mathcal{F}$ voor alle reële a , d.w.z. dat $[\underline{x} \leq a]$ steeds een gebeurtenis is. We kunnen dan de verdelingsfunctie van \underline{x} (zie Wsk 49, p. 14 en 15) definiëren door

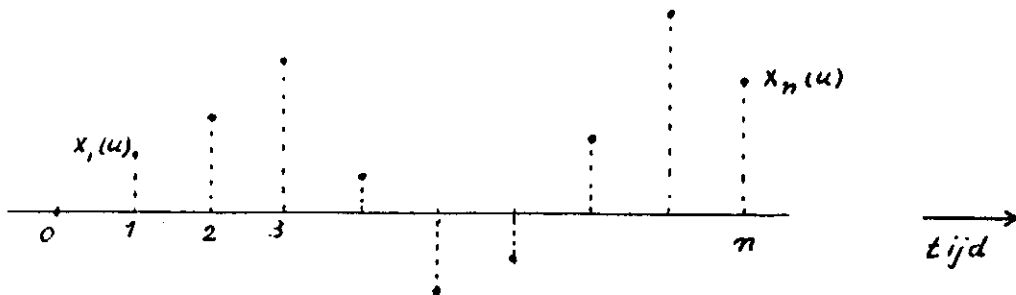
$$F_{\underline{x}}(x) = P(\underline{x} \leq x) = P(\{u | x(u) \leq x\}) .$$

Opmerking 1.2. Als een willekeurige verdelingsfunctie F gegeven is, d.w.z. een functie die voldoet aan (zie Wsk 49, p. 16) : a. F is niet-dalend, b. $F(-\infty) = 0$ en c. $F(\infty) = 1$, dan kunnen we een $(\tilde{U}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ vinden en functie $\underline{x} = x(\tilde{u})$ zó dat $F_{\underline{x}} = F$. Immers neem: $\tilde{U} = (-\infty, \infty)$, $\tilde{\mathcal{F}}$ zó dat $(-\infty, a] \in \tilde{\mathcal{F}}$ voor iedere a en \tilde{P} zó dat $\tilde{P}((-\infty, a]) = F(a)$. Als we dan \underline{x} definiëren door $x(u) = u$, dan is natuurlijk $F_{\underline{x}}(a) = F(a)$ voor iedere a . Dit alles betekent dat er geen wezenlijk verschil bestaat tussen de manier waarop hier \underline{x} en $F_{\underline{x}}$ worden ingevoerd en de manier waarop dat in Wsk 49 gebeurt: in de praktijk rekenen we meestal met alleen $F_{\underline{x}}$, maar desgewenst kunnen we

\underline{x} als functie van u beschouwen, zoals in definitie 1.1. De hier gebruikte methode is wat algemener.

Aanschouwelijk werkt de methode als volgt: "het toeval" wijst een $u \in U$ aan, en de waarde van \underline{x} wordt dan $x(u)$. We noemen het reële getal $x(u)$ een *realisatie* van \underline{x} . Als we één keer met een dobbelsteen gooien, dan is (U, F, P) volledig bekend, maar dikwijls zijn de experimenten zo ingewikkeld, dat het niet doenlijk is om de kansruimte expliciet aan te geven. De stochastische grootheden die bij zo'n experiment optreden zijn dan niet als functies van u bekend.

Een *stochastische vector* $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)$ is nu niets anders dan een rijtje stochastische grootheden, d.w.z. een rijtje functies van u . Een realisatie hiervan voor een waarde $u \in U$ is de vector $(x_1(u), x_2(u), \dots, x_n(u))$, een punt in de n -dimensionale ruimte. We kunnen deze realisatie ook op een andere manier weergeven, n.l. door de waarde $x_j(u)$ verticaal uit te zetten in het punt j van de reële as (zie figuur).



De realisatie wordt dan (bij vaste u) een *functie* op de verzameling getallen $\{1, 2, \dots, n\}$. De (simultane) verdelingsfunctie van $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)$ wordt gegeven door

$$F_{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n}(x_1, \dots, x_n) = P(\underline{x}_1 \leq x_1, \dots, \underline{x}_n \leq x_n) = P(\{u \mid x_j(u) \leq x_j \text{ (} j=1, \dots, n)\}).$$

Opmerking 1.3. Ook een steekproef $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ van \underline{x} is zo'n stochastische vector maar die zullen we i.h.a. niet weergeven als in de figuur; dit doen we alleen in \underline{x}_j ($j = 1, 2, \dots$) j de *tijd* voorstelt.

We geven nu de definitie van een stochastisch proces.

Definitie 1.4. Een *stochastisch proces* \underline{X} is een geordende verzameling stochastische grootheden:

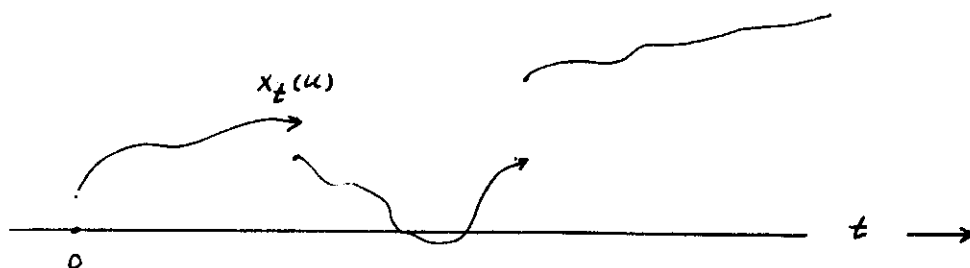
$$\underline{X} = \{\underline{x}_t; t \in T\} .$$

Hierbij stelt t doorgaans de tijd voor, terwijl meestal $T = \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$, $T = \mathbb{Z} := \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, $T = \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ of $T = \mathbb{R} := (-\infty, \infty)$. De verzameling van waarden die \underline{x}_t kan aannemen noemt men wel de *toestandsruimte*; T heet wel het *tijdsdomein*. Men noemt een proces *discreet* als $T = \mathbb{N}_0$ of $T = \mathbb{Z}$, *continu* als $T = \mathbb{R}_+$ of $T = \mathbb{R}$ (of een ander tijdsinterval; dit betekent niet dat $x_t(u)$ een continue functie van t is).

De *realisatie* $X(u)$ van \underline{X} behorend bij de uitkomst $u \in U$ is nu de verzameling

$$X(u) = \{x_t(u); t \in T\} ,$$

die bij elke $t \in T$ een getal $x_t(u)$ aangeeft; m.a.w. de realisatie is een *functie gedefinieerd op T* , bijv. (zie figuur, waar $T = [0, \infty)$).



De situatie is nu dus zó: "het toeval" wijst een $u \in U$ aan en bij deze u vinden we de functie (van t): $x_t(u)$. Men noemt daarom een stochastisch proces ook wel een *stochastische functie van de tijd*: de uitkomst van een experiment (meting, waarneming) is een functie; welke functie wordt

waargenomen hangt van het toeval af. In principe, en dit is soms nuttig, kan het experiment (stochastisch proces) beschreven worden met een kansruimte (vergelijk opmerking 1.2)

$$(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{P}) ,$$

waarin de uitkomstenruimte \tilde{U} bestaat uit alle mogelijke realisaties van het proces; \tilde{U} is dus een verzameling van functies op T . Deze verzameling wordt wel "ensemble" genoemd. Onder de kansverdeling \tilde{P} van het proces verstaan we de verzameling van alle simultane verdelingsfuncties van eindige aantallen stochastische grootheden:

$$\tilde{P} = \{F_{x_{t_1}, \dots, x_{t_n}} ; t_j \in T \quad (j = 1, 2, \dots, n) , \quad n = 1, 2, \dots\} ;$$

op de structuur van \tilde{F} en \tilde{P} gaan we niet verder in. Hele simpele voorbeelden van deze voorstellingswijze zijn (met $T = [0, \infty)$)

- a. $\tilde{U} = \{\cos, \sin\}$ met $\tilde{P}(\cos) = \tilde{P}(\sin) = \frac{1}{2}$; d.w.z. een realisatie bestaat uit $\cos t$ ($t \geq 0$) of uit $\sin t$ ($t \geq 0$). Dit "proces" ontstaat als $x_t(u) = \cos t$ voor $u \in A$ en $x_t(u) = \sin t$ voor $u \in A^*$ met $P(A) = \frac{1}{2}$.
- b. $\tilde{U} = \{t^p; t \geq 0, p > 0\}$, waarbij p homogeen verdeeld is op $(0, 1)$, zodat $\tilde{P}(t^a < \tilde{u}(t) \leq t^b$ voor alle $t \geq 0) = b - a$.

Hoewel in principe elk stochastisch proces op de bovenaangeduide manier beschreven kan worden, is dit in de meeste gevallen onpractisch; het is doorgaans verstandiger om het proces te beschrijven door aan te geven hoe het zich ontwikkelt in de tijd. We geven daarvan op blz. 6 een paar voorbeelden.

Opmerking: De *verwachting* van een stochastische grootheid x hebben we (zie Wsk. 49, p. 31) gedefinieerd door

$$(1.1) \quad E_{\underline{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\underline{x}}(x) = \begin{cases} \int x f_{\underline{x}}(x) dx, & \text{als } \underline{x} \text{ continu} \\ \sum x_k P(\underline{x} = x_k), & \text{als } \underline{x} \text{ diskreet} \end{cases}$$

De verwachting wordt ook wel gedefinieerd als

$$(1.2) \quad E_{\underline{x}} = \int_U x(u) dP(u)$$

waarbij de integraal in (1.2) evenals de eerste integraal in (1.1) een zogenaamde Stieltjes-integraal voorstelt. Men kan bewijzen dat beide integralen steeds gelijk zijn. Soms vallen ze samen: zie opmerking 1.2. Bij stochastische processen treedt een analoge situatie op: we hebben daar

$$(1.3) \quad E_{\underline{x}_t} = \int_U x_t(u) dP(u) = \int_{\tilde{U}} \tilde{u}(t) d\tilde{P}(\tilde{u}) .$$

Hierbij wordt in de tweede integraal in (1.3) gemiddeld over alle functies $\tilde{u}(t)$ in het ensemble \tilde{U} ; men noemt de verwachting daarom wel "*ensemble-gemiddelde*".

Voordat we een paar voorbeelden bespreken geven we nog de volgende definitie:

Definitie 1.5. Een proces $\{X_t, t \in T\}$ heet *strikt stationair* als voor iedere $n \in \mathbb{N}$, iedere $h \in \mathbb{R}$ en iedere (t_1, t_2, \dots, t_n) zó dat $t_j \in T$ en $t_j + h \in T$ ($j = 1, 2, \dots, n$) geldt

$$F_{\underline{x}_{t_1}, \underline{x}_{t_2}, \dots, \underline{x}_{t_n}} = F_{\underline{x}_{t_1+h}, \underline{x}_{t_2+h}, \dots, \underline{x}_{t_n+h}} ;$$

d.w.z.: het proces $\{\underline{x}_{t+h}; t \in T\}$ heeft dezelfde kansverdeling als het proces $\{\underline{x}_t; t \in T\}$. Speciaal is de kansverdeling van één stochastische grootheid \underline{x}_t onafhankelijk van t , zodat in het bijzonder $E_{\underline{x}_t}$ niet van t afhangt.

Voorbeeld 1.6. $\underline{X} = \{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots\}$ (\underline{x}_j o.o., dezelfde verdeling).

Voorbeeld 1.7. $\underline{X} = \{\sum_1^n \underline{y}_j ; n = 1, 2, \dots\}$ (\underline{y}_j , o.o., dezelfde verdeling)

Voorbeeld 1.8. $\underline{Z}^{(m)} = \{\sum_{j=n+1}^{n+m} \underline{y}_j ; n = 0, 1, \dots\}$ (\underline{y}_j , o.o., dezelfde verdeling;
m vast)

Voorbeeld 1.9. $\underline{X} = \{\underline{x}_t ; \underline{x}_t = \underline{x}, t \geq 0\}$.

Opgave 1.10. Beschrijf bij elk van de bovenstaande voorbeelden het ensemble van het proces, (i) als alle stochastische grootheden homogeen verdeeld zijn op (0,1) en (ii) als alle grootheden alleen de waarden 0 en 1 kunnen aannemen.

Opgave 1.11. Laat zien dat \underline{X} stationair is in de voorbeelden 1.6, 1.8 en 1.9, maar niet stationair in voorbeeld 1.7.

Voorbeeld 1.12. (Poisson-proces). Het Poisson-proces (zie wsk 49, Appendix) kan gedefinieerd worden als het proces $\{\underline{n}_t ; t \geq 0\}$ met de eigenschap, dat voor iedere $k \in \mathbb{N}$ en alle t_0, \dots, t_k met $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ geldt

$$P(\underline{n}_{t_1} = n_1, \underline{n}_{t_2} - \underline{n}_{t_1} = n_2, \dots, \underline{n}_{t_k} - \underline{n}_{t_{k-1}} = n_k) = \\ = \prod_1^k e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})} \frac{\{\lambda(t_j - t_{j-1})\}^{n_j}}{n_j!},$$

d.w.z. $\underline{n}_{t_1}, \dots, \underline{n}_{t_k} - \underline{n}_{t_{k-1}}$ zijn o.o. en Poisson-verdeeld met verwachtingen $\lambda(t_1 - t_0), \dots, \lambda(t_k - t_{k-1})$. Voor \underline{n}_t geldt dus in het bijzonder

$$P(\underline{n}_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

dit is afhankelijk van t , dus (zie definitie 1.5) \underline{n}_t is niet stationair. Uit het gegeven blijkt echter dat het proces $\{\underline{n}_{t+h} - \underline{n}_t; t > 0\}$ voor elke vaste $h > 0$ wel stationair is: de aangroeiingen $\underline{n}_{t+s} - \underline{n}_t$ zijn stationair en bovendien onafhankelijk als de intervallen $(t_1, t_1 + h)$ en $(t_2, t_2 + h)$ disjunct zijn. Iets dergelijks gebeurt in voorbeeld 1.7; men spreekt dan van *processen met onafhankelijke en stationaire aangroeiingen*.

Voorbeeld 1.13. ("witte ruis"). We voeren eerst kort de "Brownse beweging"

in. Dit is een proces $\underline{x}_t; t \geq 0$ met onafhankelijke en stationaire aangroeiingen, en verder de volgende eigenschappen:

a) $\underline{x}_0 = 0$, (b) $\underline{x}_{t+h} - \underline{x}_t$ is $N(0, h\sigma^2)$ -verdeeld. Het proces \underline{x}_t kan beschouwd worden als een continu analogon van voorbeeld 1.7, in het geval dat $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots$ normaal $N(0, \sigma^2)$ -verdeeld zijn: dan is in voorbeeld 1.7 het proces \underline{x}_n normaal $N(0, n\sigma^2)$ verdeeld, terwijl $\underline{x}_0 = 0$ ("lege som") en $\underline{x}_{n+m} - \underline{x}_n$ een $N(0, m\sigma^2)$ -verdeling heeft (dit is het proces $\underline{z}_n^{(m)}$ in voorbeeld 1.8). Als het continue analogon van het proces $\underline{z}_n^{(1)} = \underline{x}_{n+1} - \underline{x}_n$ ($n = 0, 1, \dots$) zou men het proces \underline{y} kunnen beschouwen gedefinieerd door $\underline{y}_t = \frac{d}{dt} \underline{x}_t$. Dit proces noemt men (normaal verdeelde) "witte ruis". Een moeilijkheid hierbij is, dat de realisaties \underline{x}_t van \underline{x}_t *niet differentieerbaar* zijn. Het stationaire proces \underline{y}_t bestaat dus eigenlijk niet. We werken daarom doorgaans met de benadering

$$\underline{y}_t^{(h)} = \frac{\underline{x}_{t+h} - \underline{x}_t}{h}$$

voor kleine h ; waar dat mogelijk is zullen we bij berekeningen $h \rightarrow 0$ laten gaan. Het blijkt wel mogelijk om (in zekere zin) \underline{x}_t als de integraal van \underline{y}_t te beschouwen.

2. Foutenvoortplanting, correlatiefunctie, zwakke stationariteit

2.1. Foutenvoortplanting

Onder een meet- of waarnemingsfout verstaan we het verschil tussen de gezochte waarde x_0 en de waargenomen waarde x . Omdat de meeste metingen "toevallige fluctuaties" vertonen, gaan we er hierbij van uit dat de waarneming x een realisatie is van een stochastische grootheid \underline{x} .

In het algemeen bestaat een fout uit twee onderdelen: een *toevallige fout* \underline{d} met $E\underline{d} = 0$ en een *systematische fout* δ . We hebben dus

$$(2.1.1) \quad \underline{x} = x_0 + \underline{d} + \delta ,$$

waarbij we δ kunnen beschouwen als de *onzuiverheid* van \underline{x} (vergelijk Wsk 49, blz. 52). Als maat voor de fout in \underline{x} gebruiken we *onnauwkeurigheid* (Wsk. 49, blz. 52):

$$(2.1.2) \quad \Delta\underline{x} = \sqrt{E(\underline{x} - x_0)^2} = \sqrt{\text{var } \underline{d} + \delta^2} = \sqrt{\text{var } \underline{x} + \delta^2}$$

zodat $(\Delta\underline{x})^2 = \text{var } \underline{x}$ als $\delta = 0$; aan dit laatste geval zullen we de meeste aandacht geven.

Opmerking 2.1.1. De grootheid $E(\underline{x} - x_0)$ is niet bruikbaar als maat voor de fout: deze grootheid is nul als $\delta = 0$ is. De grootheid $E|\underline{x} - x_0|$ is in principe wel bruikbaar, maar minder makkelijk hanteerbaar dan $\Delta\underline{x}$.

Opmerking 2.1.2. In plaats van de "absolute fout" $\Delta\underline{x}$ wordt ook de "relatieve fout" $\Delta\underline{x}/x_0$ gebruikt. Als $\delta = 0$ is, dan is $\Delta\underline{x}/x_0 = \sigma(\underline{x})/E\underline{x}$, een grootheid die wel de *variatiëcoëfficiënt* wordt genoemd en die wordt aangegeven met $V\underline{x}$.

Bij de "*voortplanting*" van fouten (engels: error propagation) gaat het om de fout in een functie van één of meer grootheden die zelf met fouten behept zijn. Als hulpmiddel om dergelijke fouten te berekenen, gebruiken we de Taylor-ontwikkeling (zie Wsk 10 en 20), die we hier kort weergeven.

- (i) Als f een functie is van één variabele met een continue afgeleide, dan geldt (voor kleine waarden van $x - x_0$):

$$(2.1.3) \quad f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) ;$$

hierbij is het verschil tussen linker- en rechterlid in (2.1.3) van "kleinere orde" dan $x - x_0$.

- (ii) Als f een functie is van twee variabelen, die continu eerste afgeleiden heeft, dan geldt:

$$(2.1.4) \quad f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + (x - x_0)f_x(x_0,y_0) + (y - y_0)f_y(x_0,y_0) ,$$

$$\text{waarin } f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ en } f_y = \frac{\partial f}{\partial y} .$$

- (iii) Voor functies van meer dan twee variabelen geldt analoog:

$$(2.1.5) \quad f(x_1, \dots, x_n) \approx f(x_{10}, \dots, x_{n0}) + \sum_1^n (x_j - x_{j0})f_{x_j}(x_{10}, \dots, x_{n0}) .$$

Met behulp van deze formules vinden we (zie (2.1.2)) voor de fout in f

$$(2.1.6) \quad \Delta f(\underline{x}) \approx |f'(x_0)| \Delta \underline{x} ,$$

en analoog voor functies van meer variabelen:

$$(2.1.7) \quad \Delta^2 f(\underline{x}, \underline{y}) \approx f_x^2 \Delta^2 \underline{x} + f_y^2 \Delta^2 \underline{y} + 2f_x f_y E(\underline{x} - x_0)(\underline{y} - y_0) ,$$

$$(2.1.8) \quad \Delta^2 f(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) \approx \sum_1^n f_{x_j} \Delta^2 \underline{x}_j + 2 \sum_{j < k} f_{x_j} f_{x_k} E(\underline{x}_j - x_{j0})(\underline{x}_k - x_{k0}) ;$$

hierbij is $f_x = f_x(x_0, y_0)$, etc.

We kunnen (2.1.6) en (2.1.7) ook schrijven als, resp.,

$$(2.1.6') \quad \Delta^2 f(\underline{x}) \approx \{f'(x_0)\}^2 (\text{var } \underline{x} + \delta^2)$$

$$(2.1.7') \quad \Delta^2 f(\underline{x}, \underline{y}) \approx f_x^2 (\text{var } \underline{x} + \delta_1^2) + f_x^2 (\text{var } \underline{x} + \delta_1^2) + f_y^2 (\text{var } \underline{y} + \delta_2^2) + \\ + 2f_x f_y \text{cov}(\underline{x}, \underline{y}) + \delta_1 \delta_2 \} ,$$

waarbij δ_1 en δ_2 de systematische fouten zijn in \underline{x} en \underline{y} . Op dezelfde manier kan (2.1.8) worden herschreven. Als de systematische fouten nul zijn, dan is $\Delta^2(\underline{x}) = \text{var } \underline{x}$ en we vinden

$$(2.1.6'') \quad \text{var } f(\underline{x}) \approx \{f'(x_0)\}^2 \text{var } \underline{x}$$

$$(2.1.7'') \quad \text{var } f(\underline{x}, \underline{y}) \approx f_x^2 \text{var } \underline{x} + f_y^2 \text{var } \underline{y} + 2f_x f_y \text{cov}(\underline{x}, \underline{y})$$

$$(2.1.8'') \quad \text{var } f(x_1, \dots, x_n) \approx \sum_1^n f_{x_j}^2 \text{var } \underline{x}_j + 2 \sum_{j < k} f_{x_j} f_{x_k} \text{cov}(\underline{x}_j, \dots, \underline{x}_k) ,$$

terwijl in geval van *onafhankelijkheid* de covariantie-termen nul zijn. In de praktijk zullen de varianties niet exact bekend zijn; men gebruikt dan de bovenstaande formules met de varianties vervangen door *schattingen* daarvoor (zie Wsk 49, blz. 53):

$$\text{var } \underline{x}_j \approx s_j^2 := \frac{1}{N_j - 1} \sum_{k=1}^{N_j} (x_j(k) - \bar{x}_j)^2 ,$$

waarin $x_j(1), \dots, x_j(n)$ waarnemingen zijn van \underline{x}_j en $\bar{x}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_j(k)$.

Als we overgaan op de relatieve fout, dan vinden we bijvoorbeeld (zie opmerking 2.1.2)

$$V^2 f(\underline{x}) \approx \left\{ x_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right\}^2 V^2 \underline{x} ,$$

variatiecoëfficiënten zijn handig bij machten en producten (zie voorbeelden).

Voorbeelden 2.1.3. (\underline{x} en \underline{y} onafhankelijk).

1. $f(x) = cx^\alpha$; $\text{var } f(\underline{x}) \approx c^2 \alpha^2 x_0^{2\alpha-2} \text{ var } \underline{x}$ of: $V^2 f(\underline{x}) \approx \alpha^2 V^2 \underline{x}$.

2. $f(x,y) = ax + by$; $\text{var } f(\underline{x}, \underline{y}) = a^2 \text{ var } \underline{x} + b^2 \text{ var } \underline{y}$.

3. $f(x,y) = cx^\alpha y^\beta$; $\text{var } f(\underline{x}, \underline{y}) \approx c^2 \alpha^2 x_0^{2\alpha-2} y_0^{2\beta} \text{ var } \underline{x} + c^2 \beta^2 x_0^{2\alpha} y_0^{2\beta-2} \text{ var } \underline{y}$.
of: $V^2 f(\underline{x}, \underline{y}) \approx \alpha^2 V^2 \underline{x} + \beta^2 V^2 \underline{y}$

Opgave 2.1.4. Bewijs het laatste resultaat in voorbeeld 3 door te werken met $\log f(x,y)$.

2.2. Correlatiefunctie, zwakke stationariteit

In Wsk 49 (blz. 33) voerden we de correlatiecoëfficiënt $\rho(\underline{x}, \underline{y})$ in:

$$(2.2.1) \quad \rho(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{\text{cov}(\underline{x}, \underline{y})}{\sigma(\underline{x})\sigma(\underline{y})} = \frac{E(\underline{x} - x_0)(\underline{y} - y_0)}{\sigma(\underline{x})\sigma(\underline{y})} = \frac{E\underline{x}\underline{y} - x_0 y_0}{\sigma(\underline{x})\sigma(\underline{y})}$$

waarin $x_0 = E\underline{x}$ en $y_0 = E\underline{y}$, Voor $\rho(\underline{x}, \underline{y})$ geldt

Stelling 2.2.1. $-1 \leq \rho(\underline{x}, \underline{y}) \leq 1$.

Bewijs. Equivalent is de ongelijkheid $\{\text{cov}(\underline{x}, \underline{y})\}^2 \leq \sigma^2(\underline{x})\sigma^2(\underline{y})$, die een speciaal geval is van de volgende ongelijkheid (van Schwarz):

$$(2.2.2) \quad (E\underline{u}\underline{v})^2 \leq E\underline{u}^2 E\underline{v}^2 .$$

Beschouw $E(z\underline{u} + \underline{v})^2 = z^2 E\underline{u}^2 + 2zE\underline{u}\underline{v} + E\underline{v}^2$; dit is een kwadratische vorm in z die *niet-negatief* is. Dit betekent dat de bijbehorende discriminant ≤ 0 is, d.w.z. $4(E\underline{u}\underline{v})^2 - 4E\underline{u}^2 E\underline{v}^2 \leq 0$, dus (2.2.2) geldt. Als we hierin invullen $\underline{u} = (\underline{x} - x_0)/\sigma(\underline{x})$ en $\underline{v} = (\underline{y} - y_0)/\sigma(\underline{y})$, dan vinden we de gevraagde ongelijkheid. We gaan er hierbij vanuit dat $\sigma(\underline{x})\sigma(\underline{y}) > 0$ is.

In een stochastisch proces $\{x_t; t \in T\}$ kunnen we kijken naar de correlatiecoëfficiënt van x_s en x_t . We geven in dit verband de volgende definitie.

Definitie 2.2.2. Zij $\{x_t; t \in T\}$ een stochastisch proces met eindige tweede momenten. Dan heet

$\mu(t) := E x_t$ de *verwachtingsfunctie*,

$R(s,t) := E(x_s - \mu(s))(x_t - \mu(t))$ de (auto-) covariantiefunctie,

$\rho(s,t) = \rho(x_s, x_t)$ de (auto-) correlatiefunctie.

Opmerking 2.2.3. Soms wordt ook $R(s,t)$ correlatiefunctie genoemd, soms ook $E x_s x_t$. Deze verwarring verdwijnt als $\mu(t) \equiv 0$ en $\text{var } x_t \equiv 1$, hetgeen bereikt kan worden door over te gaan op het proces

$$\left\{ \frac{x_t - \mu(t)}{\sigma(x_t)} ; t \in T \right\}.$$

Opgave 2.2.4. Ga na dat $R(s,t) = R(t,s)$ en dat $R(t,t) = \text{var } x_t$.

Opmerking 2.2.5. Een proces $\{x_t; t \in T\}$ is (natuurlijk) in het algemeen niet bepaald door zijn auto-correlatiefunctie. Dit is *wel* het geval, als nog gegeven is dat $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}$ voor iedere n en alle (t_1, \dots, t_n) een *normale* (simultane) *verdeling* heeft. In dat geval is *ongecorreleerd* ($\rho(x_{t_i}, x_{t_j}) = 0$) hetzelfde als onafhankelijk.

Opmerking 2.2.6. Behalve de auto-covariantie, beschouwt men bij twee processen $\{x_t; t \in T\}$ en $\{y_t; t \in T\}$ ook de *kruis-covariantie*:

$$R_{x,y}(s,t) = \text{cov}(x_s, y_t).$$

Opmerking 2.2.7. Als $T = \mathbb{N}$, dan is $R(j,k) = \text{cov}(x_j, x_k)$.

Opmerking 2.2.8. Eigenschappen als continuïteit, differentieerbaarheid en integreerbaarheid van x_t zijn direct in verband te brengen met dergelijke eigenschappen van $R(s,t)$. Zo geldt: x_t is *continu* in $t = \tau$

als $R(s,t)$ continu is in $(s,t) = (\tau,\tau)$. Hierbij is het limietbegrip dat bij deze continuïteit wordt gebruikt het volgende:

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \underline{x}_t = \underline{x}_\tau \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \tau} E(\underline{x}_t - \underline{x}_\tau)^2 = 0.$$

Opgave 2.2.9. Ga na dat \underline{x}_t continu is in $t = \tau$ als $R(s,t)$ continu is in $(s,t) = (\tau,\tau)$.

Opgave 2.2.10. Als $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$ onafhankelijke stochastische grootheden zijn met dezelfde variantie, en als $\underline{S}_n := \underline{x}_1 + \dots + \underline{x}_n$ ($n = 1, 2, \dots$), dan geldt

$$\rho(\underline{S}_m, \underline{S}_n) = \sqrt{m/n} \quad (n = 1, 2, \dots; m \leq n).$$

Opgave 2.2.11. Zij $\underline{x}_t = \underline{k}(t)$, het Poisson-proces, zoals gedefinieerd in Wsk 49 (blz. 69); zie ook voorbeeld 1.12. Dan is $R(s,t) = \mu \min(s,t)$.

Opgave 2.2.12. Zij $\{\underline{x}_t, t \geq 0\}$ een Brownse beweging (zie voorbeeld 1.13). Wat is $R(s,t)$?

Opgave 2.2.13. Zij $\underline{k}(t)$ een Poisson-proces met intensiteit λ en zij $\underline{x}_t = \underline{k}_{-t+h} - \underline{k}_{-t}$ met $h > 0$.
Bewijs dat

$$\frac{1}{\lambda} R(s,t) = \begin{cases} h - |s - t| & \text{als } |s - t| \leq h \\ 0 & \text{als } |s - t| > h \end{cases}.$$

Opgave 2.2.14. Zij \underline{w}_t een Brownse beweging met $\text{var } \underline{w}_t = \sigma^2 t$. Dan is

$$\underline{x}_t := \frac{\underline{w}_{-t+h} - \underline{w}_{-t}}{h}$$

een benadering voor "witte ruis". Laat zien dat

$$\frac{1}{\sigma^2} R_h(s-t) := R(s,t) = \begin{cases} \frac{h - |s-t|}{h^2} & |s-t| \leq h \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Opmerking 2.2.15. Het resultaat van opgave 2.2.14 betekent dat voor $h \rightarrow 0$

$$R_h(u) \rightarrow \sigma^2 \delta(u) ,$$

met δ de delta-"functie" van Dirac: $\delta(u) = 0$ voor $u \neq 0$ en $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) f(u) du = f(0)$ voor continue functies f die niet al te sterk toenemen voor $|u| \rightarrow \infty$.

De definitie van (sterke) stationariteit (def. 1.5) betekent een zeer sterke eis. We geven nu de definitie van een zwakker stationariteitsbegrip.

Definitie 2.2.16. Een stochastisch proces $\{x_t; t \in T\}$ heet *zwak stationair* (of tweede-orde stationair) als $Ex_t^2 < \infty$ en (zie definitie 2.2.2)

$$\mu(t) = \mu \quad (t \in T)$$

$$R(s,t) = R(0, t-s) \quad (s, t \in T)$$

(dit betekent dat ook Ex_t^2 en $\text{var } x_t$ onafhankelijk zijn van t).

Opgave 2.2.17. Een sterk stationair proces met *eindige tweede momenten* is zwak stationair.

Voorbeeld 2.2.18. Het Poisson-proces en de Brownse beweging zijn (ook) niet zwak stationair.

Voorbeeld 2.2.19. Het proces x_t in opgave 2.2.14 is een zwak stationair proces.

Opmerking 2.2.20. In plaats van $R(0, \tau)$ wordt dikwijls $R(\tau)$ geschreven.

Opmerking 2.2.21. Het is soms handig om complex-waardige stochastische processen \underline{z}_t te beschouwen: $\underline{z}_t = \underline{x}_t + iy_t$ met \underline{x}_t en \underline{y}_t reëel. De covariantiefunctie $R(s, t)$ van \underline{z}_t wordt dan gedefinieerd door

$$R(s, t) = E(\underline{x}_s - \mu(s)) \overline{(\underline{x}_t - \mu(t))} ;$$

hierbij geldt: als $\underline{x} = \underline{a} + i\underline{b}$, dan is $E\underline{x} = E\underline{a} + iE\underline{b}$, terwijl $\overline{\underline{x}} = \underline{a} - i\underline{b}$, de complex geconjugeerde van \underline{x} .

Opmerking 2.2.22. We zullen verder steeds aannemen dat bij de beschouwde stationaire processen $T = \mathbb{R}$ is (continue geval) of $T = \mathbb{Z}$ (diskrete geval). Dit betekent dat het proces al "oneindig lang" bezig is, zodat er geen aanloopverschijnselen meer zijn.

3. Ergodiciteit

In Wsk 49 (blz. 42, stelling 3) is de *zwakke wet van de grote aantallen* bewezen: als x_1, x_2, \dots onafhankelijk zijn met $E x_j = \mu$ en $\text{var } x_j = \sigma^2 < \infty$ ($j = 1, 2, \dots$), dan geldt

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \xrightarrow{P} \mu ,$$

waarin \xrightarrow{P} *convergentie in waarschijnlijkheid* betekend, gedefinieerd door

$$(3.1) \quad Y_n \xrightarrow{P} Y \Leftrightarrow \{ \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - Y| \geq \epsilon) = 0 \text{ voor elke } \epsilon > 0 \} .$$

Opgave 3.1. Als $E(Y_n - Y)^2 \rightarrow 0$, voor $n \rightarrow \infty$, dan geldt $Y_n \xrightarrow{P} Y$.

Een wat lastiger te bewijzen stelling is de *sterke wet van de grote aantallen*: als x_1, x_2, \dots o.o. zijn en *dezelfde verdeling* hebben met $E x_1 = \mu$, dan geldt

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \xrightarrow{\text{b.z.}} \mu ,$$

waarin $\xrightarrow{\text{b.z.}}$ *bijna zekere convergentie* voorstelt, d.w.z. (zie blz. 1)

$$Y_n \xrightarrow{\text{b.z.}} Y \Leftrightarrow [P(\{u \mid \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(u) = Y(u)\}) = 1] .$$

Evenals bij de wetten van grote aantallen gaat het bij ergodiciteit om convergentie van gemiddelden naar de verwachting.

Definitie 3.2. Een sterk-stationair proces $\{x_t; t \in T\}$ met $E x_t = \mu$ heet *sterk ergodisch* als

$$(3.2) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n x_k \xrightarrow{\text{b.z.}} \mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

in het geval dat $T = \mathbb{N}$, of als

$$(3.3) \quad \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \underline{x}_s ds \xrightarrow{\text{b.z.}} \mu \quad (t \rightarrow \infty)$$

in het geval dat $T = \mathbb{R}$.

Ergodiciteit betekent ruwweg dat *verwachtingen, d.w.z. ensemble-gemiddelden* gekregen kunnen worden als (limieten van) tijdsgemiddelden van één enkele realisatie: de eigenschappen van het proces kunnen worden verkregen door voldoende lange waarneming bij één experiment (zie ook opmerking op blz. 4). Een zwakker ergodiciteitsbegrip is het volgende.

Definitie 3.3. Een zwak-stationair proces heet *zwak ergodisch*, als (3.2) of (3.3) geldt met $\xrightarrow{\text{b.z.}}$ vervangen door \xrightarrow{P} .

Men noemt deze soorten ergodiciteit ook wel "ergodiciteit van het gemiddelde). Analoog definieert men bijv. ergodiciteit van de correlatiefunctie (zie opmerking 2.2.20):

$$\frac{1}{2t} \int_{-t}^t \underline{x}_{-s+\tau} \underline{x}_s ds \rightarrow R(\tau) \quad (t \rightarrow \infty) .$$

Net zo definieert men ergodiciteit van de verdelingsfuncties: de verdelingsfuncties kunnen worden gekregen als limieten van de corresponderende *fracties*. We beperken ons verder tot zwakke ergodiciteit van het gemiddelde en leiden daarvoor een voldoende voorwaarde af.

Als $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$ een zwak-stationair proces is met $E\underline{x}_k = \mu$, $\text{var } \underline{x}_k = \sigma^2$ en $\text{cov}(\underline{x}_j, \underline{x}_j + k) = R(k)$ ($k = 1, 2, \dots$), dan geldt (zie Wsk 49, blz. 36)

$$\begin{aligned} \text{var } \frac{1}{n} \sum_1^n \underline{x}_j &= \frac{1}{n^2} \sum_1^n \text{var } \underline{x}_k + \frac{2}{n^2} \sum_{j < k} \text{cov}(\underline{x}_j, \underline{x}_k) = \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{j < k} R(k - j) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{m=1}^{n-1} (n - m) R(m) . \end{aligned}$$

Nu geldt dus dat $\text{var } \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \underline{x}_j \rightarrow 0$ voor $n \rightarrow \infty$, als

$$(3.4) \quad \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \left(1 - \frac{m}{n}\right) R(m) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dit is een deel van het bewijs van de volgende stelling (die we niet verder bewijzen):

Stelling 3.4. Een zwak stationair proces $\{\underline{x}_t; t \in T\}$ is dan en alleen dan zwak ergodisch als (3.4) geldt in het geval dat $T = \mathbb{Z}$, of als

$$(3.5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right) R(s) ds = 0$$

in het geval $T = \mathbb{R}$, en analoog (zie formule (3.4)) als $T = \mathbb{N}$.

Opgave 3.5. Laat zien dat $\sum_{1 \leq j < k \leq n} R(k - j) = \sum_{j=1}^{n-1} (n - j) R(j)$.

Opgave 3.6. Zij k_t een Poisson-proces en zij $\underline{x}_t = k_{t+h} - k_t$. Laat zien dat het proces \underline{x}_t aan (3.5) voldoet (zie ook opgave 2.2.13).

Opgave 3.7. Zij \underline{x} een stochastische grootte met $E\underline{x} = \mu$ en $\text{var } \underline{x} = \sigma^2 < \infty$. Definieer een stochastisch proces $\{\underline{x}_n; n \in \mathbb{N}\}$ door $\underline{x}_n = \underline{x}$ ($n \in \mathbb{N}$). Laat zien dat dit proces niet ergodisch is.

Het is duidelijk dat men van één realisatie van het proces in opgave 3.7 niet veel kan leren: het proces is immers constant en in wezen niet meer dan de realisatie van één enkele stochastisch grootte. Bij een ergodisch proces vertoont één enkele realisatie alle eigenschappen van het proces; met name zal (practisch) iedere realisatie alle waarden moeten aannemen (of bij benadering aannemen) die voor het proces mogelijk zijn.

Opmerking 3.8. Sterke ergodiciteit (definitie 3.2) is een wiskundig veel diepere eigenschap en kan niet met eenvoudige middelen worden behandeld. De twee soorten ergodiciteit worden in de literatuur niet altijd duidelijk onderscheiden; dikwijls spreekt men kortweg van ergodiciteit.

4. Fourier-getransformeerden: karakteristieke functie en spectrale dichtheid

4.1. Karakteristieke functies

In Wsk 49, blz. 45 hebben we de momentenvoortbrengende functie $\varphi_{\underline{x}}$ van een grootheid \underline{x} ingevoerd:

$$\varphi_{\underline{x}}(s) = Ee^{s\underline{x}}.$$

Een bezwaar van deze functie is dat hij niet voor alle reële s gedefinieerd is, en voor sommige \underline{x} alleen voor $s = 0$. Als bijvoorbeeld \underline{x} de kansdichtheid

$$(4.1.1) \quad f_{\underline{x}}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

heeft, dan divergeert de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_{\underline{x}}(x) dx$ voor iedere $s \neq 0$. We werken daarom liever met de z.g. *karakteristieke functie* $\tilde{f}_{\underline{x}}(t) = \varphi_{\underline{x}}(it)$, dus

$$(4.1.2) \quad \tilde{f}_{\underline{x}}(t) = Ee^{it\underline{x}} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_{\underline{x}}(x) dx & (\underline{x} \text{ continu}) \\ \sum_{-\infty}^{\infty} e^{itx_k} p_{\underline{x}}(x = x_k) & (\underline{x} \text{ diskreet}) \end{cases}$$

Opmerking 4.1.1. Omdat $|e^{itx}| = |\cos tx + i \sin tx| = \sqrt{\cos^2 tx + \sin^2 tx} = 1$, bestaat $\tilde{f}_{\underline{x}}(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

Als \underline{x} een kansdichtheid $f_{\underline{x}}$ heeft, dan is $\tilde{f}_{\underline{x}}$ de gewone Fourier-getransformeerde van $f_{\underline{x}}$. We hebben dan (zie Wsk 30) de omkeerformule

$$(4.1.3) \quad f_{\underline{x}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \tilde{f}_{\underline{x}}(t) dt,$$

als de integraal in (4.1.3) absoluut convergeert. Voor $f_{\underline{x}}$ uit (4.1.1) geldt nu (vergelijk opgave 4.1.7)

$$(4.1.4) \quad \underline{f}_{\underline{x}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{1+x^2} dx = e^{-|t|} .$$

Opmerking 4.1.2. In plaats van de beide uitdrukkingen in (4.1.2) schrijft men wel

$$(4.1.5) \quad \underline{\tilde{f}}_{\underline{x}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{\underline{x}}(x) ,$$

waarin $F_{\underline{x}}$ de verdelingsfunctie is van \underline{x} en de gebruikte integraal een zogenaamde Stieltjes-integraal. Voor karakteristieke functies geldt de volgende algemene *omkeerformule*, waarvan (4.1.3) een speciaal geval is:

$$(4.1.6) \quad F_{\underline{x}}(b) - F_{\underline{x}}(a) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{e^{-ita} - e^{itb}}{it} \underline{\tilde{f}}_{\underline{x}}(t) dt .$$

Uit (4.1.6) volgt natuurlijk ook de *eenduidigheid* van de transformatie:

$$F_{\underline{x}} = F_{\underline{y}} \Leftrightarrow \underline{\tilde{f}}_{\underline{x}} = \underline{\tilde{f}}_{\underline{y}} .$$

Opmerking 4.1.3. Als \underline{x} een diskrete verdeling heeft met $P(\underline{x} = x_j) = p_j$ voor $j = 1, 2, \dots$, dan is $F_{\underline{x}}$ een trapfunctie met sprongen p_j in $x = x_j$ voor $j = 1, 2, \dots$. We kunnen dan (4.1.5) ook schrijven als

$$\underline{\tilde{f}}_{\underline{x}}(t) = \sum_1^{\infty} p_j e^{itx_j} = \sum_1^{\infty} p_j \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \delta(x - x_j) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx ,$$

met $f(x) = \sum_1^{\infty} p_j \delta(x - x_j)$, waarin δ de delta-functie van Dirac voorstelt (zie opmerking 2.2.15).

In de volgende stelling geven we enkele eigenschappen van karakteristieke functies.

Stelling 4.1.4. Als $\tilde{f} = \tilde{f}_{\underline{x}}$ de karakteristieke functie is van \underline{x} , dan geldt

(i) $\tilde{f}(0) = 1, \quad |\tilde{f}(t)| \leq 1, \quad \tilde{f}(-t) = \overline{\tilde{f}(t)}$ (complex geadjungeerde),

(ii) $\tilde{f}_{\underline{ax+b}}(t) = e^{itb} \tilde{f}_{\underline{x}}(at); \quad \text{speciaal: } \tilde{f}_{-\underline{x}}(t) = \tilde{f}_{\underline{x}}(-t),$

(iii) als \underline{x} en \underline{y} o.o. zijn, dan is $\tilde{f}_{\underline{x+y}}(t) = \tilde{f}_{\underline{x}}(t)\tilde{f}_{\underline{y}}(t).$

Bewijs: Ga na; zie ook opmerking 4.1.1 en Wsk 49, blz. 45, stelling 5.

Opgave 4.1.5. Als f de kansdichtheid is van \underline{x} , dan geldt

(4.1.7) $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow \tilde{f}(-t) = \tilde{f}(t) \quad (\text{d.w.z. } \tilde{f} \text{ is reëel}).$

Opmerking 4.1.6. Omdat voor onafhankelijke \underline{x} en \underline{y} geldt: $f_{\underline{x+y}} = f_{\underline{x}} * f_{\underline{y}}$, met

(4.1.8) $f * g(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f(z-x)f(x)dx,$

de *convolutie* van f en g , volgt uit (iii) van stelling 4.1.4

(4.1.9) $h = f * g \Leftrightarrow \tilde{h} = \tilde{f} \cdot \tilde{g}$

en analoog voor bijvoorbeeld drie functies

(4.1.10) $k = f * g * h \Leftrightarrow \tilde{k} = \tilde{f} \cdot \tilde{g} \cdot \tilde{h}.$

Opgave 4.1.7. Zij $f_{\underline{x}}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x > 0$). Dan is $\tilde{f}_{\underline{x}}(t) = \lambda/(\lambda - it)$ en $\tilde{f}_{-\underline{x}}(t) = \lambda/(\lambda + it)$. Als \underline{x} en \underline{y} o.o. zijn, terwijl \underline{y} dezelfde verdeling heeft als $-\underline{x}$, dan is

$$f_{\underline{x+y}}(z) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z|} \quad (z \in \mathbb{R})$$

$$\tilde{f}_{\underline{x+y}}(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Opgave 4.1.8. Als $f(x) = \frac{1}{2a}$ ($-a < x < a$; en verder nul), dan is $\tilde{f}(t) = \frac{\sin at}{at}$.

Opgave 4.1.9. Zij $g = f * f$ met f als in opgave 4.1.7. Bereken g en \tilde{g} .

Opgave 4.1.10. Als g een kansdichtheid is, $h(x) = \frac{\sin ax}{\pi x}$ en $f = g * h$, dan is

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} g(t) & -a < t < a \\ 0 & \text{anders} \end{cases}.$$

4.2. Spectrale dichtheid en covariantiefunctie

Vóór we de spectrale dichtheid invoeren, geven we een interpretatie van de Fourier-getransformeerde van een "signaal" $x(t)$. We hebben (zie omkeerformule (4.1.3))

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itv} \tilde{x}(v) dv,$$

d.w.z. \tilde{x} bepaalt welke frequenties in welke mate in x aanwezig zijn. Zo hebben we bijvoorbeeld (vergelijk opmerking 4.1.3)

$$(4.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a. } \tilde{x}(v) = \delta(v - v_0) \Leftrightarrow x(t) = e^{-itv_0}/(2\pi) \\ \text{b. } \tilde{x}(v) = \frac{1}{2}\{\delta(v + v_0) + \delta(v - v_0)\} \Leftrightarrow x(t) = \cos tv_0/(2\pi) \\ \text{c. } \tilde{x}(v) = \begin{cases} 1 & v_1 < v < v_2 \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \Leftrightarrow x(t) = e^{-it(v_1+v_2)/2} \frac{\sin(v_2 - v_1)t/2}{\pi t} \end{array} \right.$$

We kunnen nu een signaal $x(t)$ transformeren tot een signaal $y(t)$ m.b.v. een lineaire transformatie ("filter"): $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)x(u)du$, waarbij natuurlijk geldt (convolutierelatie (4.1.9)),

$$(4.2.2) \quad y = h * x \Leftrightarrow \tilde{y} = \tilde{h} \cdot \tilde{x}.$$

Als we bijvoorbeeld h zó kiezen dat

$$(4.2.3) \quad \tilde{h}(v) = \begin{cases} 1 & v_1 \leq v \leq v_2 \\ 0 & \text{anders} \end{cases},$$

dan worden uit x alle frequenties buiten het interval (v_1, v_2) "weggefilterd".

Zij nu $\{x_t; t \in \mathbb{R}\}$ een zwak stationair stochastisch proces met $Ex_t \equiv 0$ en $\text{var } x_t \equiv 1$. Dan geldt (zie definitie 2.2.2) dat $R(t) = Ex_{-s}x_{-s+t} = \rho(x_{-s}, x_{-s+t})$, terwijl R voldoet aan (zie stelling 2.2.1)

$$(4.2.4) \quad R(0) = 1, \quad |R(t)| \leq 1 \quad \text{en} \quad R(-t) = R(t).$$

Als we (4.2.4) vergelijken met (i) van stelling 4.1.4 en met (4.1.7), dan ligt het voor de hand om te veronderstellen dat R de Fourier-getransformeerde is van een symmetrische kansdichtheid $\varphi(v)$, d.w.z. dat

$$(4.2.5) \quad R(t) = R_{\underline{x}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itv} \varphi(v) dv.$$

We kunnen in ieder geval, als R absoluut integreerbaar is, $\varphi = \varphi_{\underline{x}}$ definiëren door

$$(4.2.6) \quad \varphi_{\underline{x}}(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itv} R_{\underline{x}}(t) dt;$$

de relaties (4.2.5) en (4.2.6) staan bekend als die van Wiener en Khintchine. Om een idee te krijgen van de betekenis van φ bekijken we naast het proces x_t het gefilterde proces y_t :

$$\underline{y}_t = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u) \underline{x}_u du ,$$

waarvoor dan geldt (als we integratie en E mogen verwisselen, bijv. in geval van absolute convergentie)

$$\begin{aligned} R_{\underline{Y}}(t) &= E \underline{y}_{s-s+t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(s-u)h(t+s-v) E \underline{x}_{-u-v} \underline{x} dudv = \\ (4.2.7) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(s-u)h(t+s-v) R_{\underline{X}}(u-v) dudv = h_{-} * h * R_{\underline{X}}(t) , \end{aligned}$$

waarbij $h_{-}(t) = h(-t)$. Nu is dus (omkeerformule en convolutierelatie)

$$R_{\underline{Y}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(-v) \tilde{h}(v) \varphi_{\underline{X}}(v) e^{-itv} dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{h}(v)|^2 \varphi_{\underline{X}}(v) e^{-itv} dv ,$$

zodat voor $t = 0$ en met $\tilde{h}(v)$ als in (4.2.3)

$$(4.2.8) \quad E \underline{y}_s^2 = R_{\underline{Y}}(0) = \int_{v_1}^{v_2} \varphi_{\underline{X}}(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\underline{Y}}(v) dv ,$$

waar uit volgt dat $\varphi_{\underline{X}}(v)$ *niet-negatief* is voor alle v . Als we $R_{\underline{X}}(0) = E \underline{x}_{-t}^2$ interpreteren als de *gemiddelde energie* van het stochastisch proces (signaal) \underline{x}_{-t} , dan is $R_{\underline{Y}}(0)$ de gemiddelde energie van \underline{y}_t , d.w.z. van \underline{x}_{-t} beperkt tot frequenties tussen v_1 en v_2 . Dit betekent dat $\varphi_{\underline{X}}(v)$ de *energiedichtheid* is voor de frequentie v .

Definitie 4.2.1. De in (4.2.6) gedefinieerde functie $\varphi_{\underline{X}}$ heet de *spectrale dichtheid* van het proces \underline{x}_{-t} .

Opgave 4.2.2. Verifieer de laatste gelijkheid in (4.2.7).

Opmerking 4.2.3. Men kan $R_{\underline{X}}(t)$ in het algemene geval (dus als $E \underline{x}_{-t} \neq 0$ of $\text{var } \underline{x}_{-t} \neq 1$) definiëren als $R_{\underline{X}}(t) = E \underline{x}_{-s-s+t} \underline{x}$ of als $R_{\underline{X}}(t) = \rho_{\underline{X}}(t) := \rho(\underline{x}_{-s}, \underline{x}_{-s+t})$;

het verschil bestaat uit een lineaire transformatie. Wij zullen verder $R_{\underline{x}}(t) = E\underline{x}_{-s}\underline{x}_{-s+t}$ gebruiken; deze conventie wordt niet in alle boeken gehanteerd.

Opmerking 4.2.4. Een moeilijkheid treedt op als $E\underline{x}_t^2 = R_{\underline{x}}(0) = \infty$. Dit is het geval bij z.g. "witte ruis" (zie opgave 2.2.14). Daar hebben we $R(t) = \delta(t)$ met " $\delta(0)$ " $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = \infty$. Dit betekent dat witte ruis geen zwak stationair proces is (zie definitie 2.2.16). Voorde spectrale dichtheid van witte ruis geldt nu (vergelijk (4.2.1, a) en opmerking 2.2.15): $\varphi(v) = \frac{1}{2\pi}$ voor alle $v \in \mathbb{R}$, d.w.z. de spectrale dichtheid is constant. In werkelijkheid is de energie van een signaal natuurlijk eindig; men werkt in de praktijk met spectrale dichtheden die over een groot interval constant zijn.

Als $R_{\underline{x}}(t)$ voor $t \rightarrow \infty$ niet naar nul gaat, dan heeft het spectrum een diskrete component. Als bijvoorbeeld $R_{\underline{x}}(t) \equiv 1$, dan is $\varphi_{\underline{x}}(v) = \delta(v)$ (vergelijk opmerking 4.2.4 en de omkeerformule). Analoog aan formule (4.1.5) schrijven we dan (4.2.5) als

$$(4.2.9) \quad R_{\underline{x}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itv} d\varphi_{\underline{x}}(v) ,$$

waarin $\varphi_{\underline{x}}$ de *spectrale verdelingsfunctie* is van \underline{x}_t .

Voorbeeld 4.2.5. Zij $\underline{x}_t = \underline{x} \sin 2\pi t + \underline{y} \cos 2\pi t$ met \underline{x} en \underline{y} onafhankelijk en $E\underline{x} = E\underline{y} = 0$, $\text{var } \underline{x} = \text{var } \underline{y} = 1$. Dan is (ga na) $R_{\underline{x}}(t) = \cos 2\pi t$ en

$$2\pi\varphi_{\underline{x}}(v) = \begin{cases} 0 & v < -2\pi \\ \frac{1}{2} & -2\pi \leq v < 2\pi \\ 1 & v \geq 2\pi \end{cases} ,$$

d.w.z. $2\pi\varphi_{\underline{x}}(v) = \frac{1}{2}\delta(v + 2\pi) + \frac{1}{2}\delta(v - 2\pi)$.

Voorbeeld 4.2.6. Zij $\underline{k}(t)$ een Poisson-proces met intensiteit λ , dan geldt voor $\underline{x}_t = \underline{k}(t+h) - \underline{k}(t)$ (zie opgave 2.2.13)

$$R_{\underline{x}}(t) = E \underline{x}_{-s} \underline{x}_{-s+t} = \lambda h - \lambda |t| + \lambda^2 h^2,$$

$$\varphi_{\underline{x}}(\nu) = \frac{\lambda^2 h^2}{2\pi} \delta(\nu) + \frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{\sin h\nu}{\nu} \right)^2$$

(vergelijk opgave 4.1.8). De constante component $\lambda^2 h^2$ geeft aanleiding tot een sprong in $\nu = 0$ bij $\varphi_{\underline{x}}$.

Opmerking 4.2.7. We zouden eigenlijk liever in plaats van $\varphi_{\underline{x}}$ of $\Phi_{\underline{x}}$ de Fourier-getransformeerde van \underline{x}_t zelf willen bekijken, dus het proces

$$\tilde{\underline{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\nu} \underline{x}_t dt.$$

Deze integraal bestaat echter in het algemeen niet. Wel kan bewezen worden (zie bijv. [1], [2] of [3]) dat \underline{x}_t geschreven kan worden als

$$\underline{x}_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\nu} d\tilde{X}_{-\nu},$$

waarin $\tilde{X}_{-\nu}$ een proces is met ongecorreleerde (orthogonale) aangroeiingen (vergelijk opmerking 2.2.5), en de integraal een Stieltjes-integraal voorstelt (zie (4.2.9) en (4.1.5)). Verder geldt nog (ook geen bewijs)

$$E |\tilde{X}_{-\nu_2} - \tilde{X}_{-\nu_1}|^2 = \Phi_{\underline{x}}(\nu_2) - \Phi_{\underline{x}}(\nu_1) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \varphi_{\underline{x}}(\nu) d\nu;$$

ook hieruit blijkt dat $\varphi_{\underline{x}}$ de energie van \underline{x}_t in het frequentiegebied (ν_1, ν_2) beschrijft

5. Waarnemingen uit normale verdelingen

5.1. Inleiding

Veel van de methoden die in de toegepaste statistiek worden gebruikt, zijn gebaseerd op de normale verdeling.

In Wiskunde 49 (hoofdstuk 5) hebben we reeds kennis gemaakt met toetsen en betrouwbaarheidsintervallen voor de verwachting μ van een normale verdeling met bekende variantie.

In de meeste praktijkgevallen zal ook de variantie σ^2 uit de waarnemingen geschat moeten worden.

5.2. Een steekproef uit een normale verdeling met onbekende variantie

5.2.1. Toets en betrouwbaarheidsinterval voor de verwachting

We gaan uit van een steekproef x_1, \dots, x_n van \underline{x} met

$$f_{\underline{x}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2},$$

waarin zowel μ als σ^2 onbekend zijn.

We willen de nulhypothese $\mu = \mu_0$ toetsen tegen één van de alternatieven $\mu \neq \mu_0$, $\mu < \mu_0$ of $\mu > \mu_0$. De in Wsk 49 gebruikte toetsingsgrootheid \bar{x} is niet zonder meer te gebruiken; want in de verdeling van \bar{x} , die $N(\mu, \sigma^2/n)$ is, komt de onbekende σ^2 voor.

Men zou nu in $(\bar{x} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})^2$ kunnen vervangen door \underline{s} . Het resultaat is echter niet $N(0,1)$ verdeeld. Toch gebruiken we

$$\underline{t}_v := \frac{\bar{x} - \mu_0}{\underline{s}/\sqrt{n}}$$

als toetsingsgrootheid. De stochastische grootheid \underline{t}_v heeft een symmetrische verdeling, die alleen afhangt van het aantal "vrijheidsgraden" v , waarop de schatter \underline{s}^2 van σ^2 is gebaseerd. In het beschouwde geval is $v = n - 1$, de factor waardoor de kwadratensom $\sum_1^n (x_j - \bar{x})^2$ moet worden gedeeld om de steekproefvariantie \underline{s}^2 te krijgen.

De kritieke waarden van de t-verdeling (of Student-verdeling) zijn te vinden in tabel S.C. 2.1.

Voor $v \rightarrow \infty$ (en dus $n \rightarrow \infty$) nadert de Student-verdeling tot de standaard-

normale verdeling, zoals ook uit de kritieke waarden bij verschillende α 's blijkt.

Voorbeeld 5.2.1.1.

In een laboratorium is van 7 monsters uit een partij steenkool het zwavelgehalte bepaald.

De waarnemingen zijn

3,18; 3,20; 3,22; 3,14; 3,09; 3,10; 3,10;

We onderstellen dat dit een steekproef is uit een normale verdeling en willen de hypothese toetsen $H_0 : \mu = 3,10$ tegen het alternatief $H_1 : \mu > 3,10$ met als onbetrouwbaarheid $\alpha = 0.05$. Zoals opgemerkt in Wsk 49 (pag. 59) zeggen we hier ook wel: $H_0 : \mu \leq 3,10$. We kunnen ons b.v. voorstellen dat 3,10 een grens is die in verband met mogelijke luchtverontreiniging niet naar boven overschreden mag worden. Dus als $\mu \leq 3,10$ is hoeft geen actie te worden ondernomen en als $\mu > 3,10$ moet worden ingegrepen. Het berekenen van de toetsingsgrootte gaat gemakkelijker als we de waarnemingen eerst coderen door alle met 3 verminderde waarnemingen met 100 te vermenigvuldigen. Ga zelf na dat de steekproef normaal verdeeld blijft en dat de toetsingsgrootte hierdoor niet verandert. De serie is na deze codering:

18 20 22 14 9 10 10

en H_0 luidt: $\mu \leq 10$.

We berekenen:

$$\bar{x} = \sum x_i / 7 = \frac{103}{7} = 14,7$$

en

$$\sum (x_j - \bar{x})^2 = \sum x_j^2 - \frac{(\sum x_j)^2}{7} = 1685 - 1515,6 = 169,4 ,$$

zodat de toetsingsgrootte wordt:

$$t = \frac{(14,7 - 10)\sqrt{7}}{\sqrt{169,4/6}} = 2,34 > t_6(0,05) = 1,94 .$$

De nulhypothese wordt dus verworpen. Het met deze eenzijdige toets corresponderende éénzijdige betrouwbaarheidsinterval bestaat uit die waarden van μ , die op grond van de toets niet zouden worden verworpen. Dat zijn de μ -waarden die voldoen aan

$$\frac{(14,7 - \mu)\sqrt{7}}{\sqrt{169,4/6}} < 1,94 ,$$

of

$$\mu > 14,7 - 1,94 \sqrt{\frac{169,4}{6 \cdot 7}} = 10,8 .$$

In de oorspronkelijke eenheden:

$$\mu > 3,108 , \text{ behoudens een onbetrouwbaarheid van } 0,05 .$$

5.2.2. Toets voor de verwachtingen bij gepaarde waarnemingen

We beschouwen nu de paren waarnemingen

$$x_{-1j} , x_{-2j} \quad (j = 1, \dots, n) .$$

We veronderstellen dat alle $2n$ waarnemingen onderling onafhankelijk normaal verdeeld zijn met de zelfde onbekende variantie σ^2 , terwijl

$$E x_{-ij} = \mu_{ij} \quad (i = 1, 2; j = 1, \dots, n) .$$

De te toetsen nulhypothese is

$$H_0 : \mu_{1j} = \mu_{2j} \quad (j = 1, \dots, n) .$$

De mogelijke alternatieve hypothesen zijn: $\mu_{1j} \neq \mu_{2j}$, $\mu_{1j} < \mu_{2j}$ en $\mu_{1j} > \mu_{2j}$. Hierbij dient te worden opgemerkt dat, in het geval $\mu_{1j} \neq \mu_{2j}$, het verschil $\mu_{1j} - \mu_{2j}$ voor $j = 1, \dots, n$ het zelfde teken heeft.

Door de verschillen

$$d_{-j} = x_{-1j} - x_{-2j} \quad (j = 1, \dots, n)$$

te beschouwen brengen we het probleem terug tot een toets voor één gemiddelde, namelijk tot een toets voor

$$H_0 : E\bar{d} = 0$$

tegen de alternatieven $E\bar{d} \neq 0$, $E\bar{d} < 0$ of $E\bar{d} > 0$.

De schatting voor $\text{var}(\bar{d})$ wordt gevonden uit

$$s^2(\bar{d}) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (d_j - \bar{d})^2$$

en de toetsingsgrootte wordt

$$\frac{\bar{d}}{s(\bar{d})/\sqrt{n}}$$

met, onder H_0 , een t_{n-1} verdeling, immers de d_j zijn weer onafhankelijk en normaal verdeeld.

Voorbeeld 5.2.2.1. Van 10 hartpatiënten werd zowel in 1950 als in 1962 de systolische bloeddruk (mg Hg) gemeten. De resultaten zijn in de volgende tabel samengevat.

patiënt	1950	1962	verschil d_j
1	115	144	-29
2	128	148	-20
3	110	166	-56
4	120	108	12
5	112	124	-12
6	110	126	-16
7	134	168	-34
8	120	136	-16
9	130	118	12
10	120	118	2

We willen de nulhypothese $H_0 : E\bar{d} = 0$ toetsen tegen het alternatief $E\bar{d} < 0$ (bloeddruk is toegenomen) met onbetrouwbaarheid $\alpha = 0,05$.

We berekenen:

$$\sum d_j = -157 \quad \sum d_j^2 = 6481 \quad \bar{d} = -15,7$$

$$s^2(\underline{d}) = 446,23 \quad s(\underline{d}) = 21,1 \quad v = 9 .$$

De toetsingsgrootheid is

$$t_9 = \frac{-15,7}{21,1/\sqrt{10}} = -2,35 .$$

De linkséénzijdige kritieke waarde is volgens tabel S.C. 2.1 gelijk aan -1,83.

De nulhypothese wordt dus verworpen.

Een betrouwbaarheidsinterval voor \underline{Ed} bestaat uit die waarden die op grond van de waarnemingen niet worden verworpen, dus:

$$\frac{-15,7 - \underline{Ed}}{21,1/\sqrt{10}} > -1,83 ,$$

of:

$$\underline{Ed} < -3,5 .$$

5.2.3. Toets en betrouwbaarheidsinterval voor de variantie

De nulhypothese $\sigma^2 = \sigma_0^2$ kan worden getoetst tegen één van de alternatieven $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$, $\sigma^2 < \sigma_0^2$ of $\sigma^2 > \sigma_0^2$.

We maken hierbij gebruik van de χ^2 -verdeling (chi-kwadraat). Deze wordt als volgt gedefinieerd (zie Appendix, Wsk 49, blz. 71 e.v.):

Een stochastische grootheid χ^2 heeft een χ^2 -verdeling met v vrijheidsgraden als

$$\chi_v^2 = \underline{u}_1^2 + \underline{u}_2^2 + \dots + \underline{u}_v^2 ,$$

waarbij $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_v$ onderling onafhankelijk standaard normaal verdeeld zijn.

Als x_1, \dots, x_n o.o. normaal verdeeld zijn met verwachting μ en variantie σ^2 , dan is

$$u_i := \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

standaard normaal, zodat

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

een χ^2 -verdeling met n vrijheidsgraden heeft. Als we in deze formule vervangen door \bar{x} , dan kan worden bewezen dat

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{KS}{\sigma^2}$$

een χ^2 verdeling heeft met $v = (n - 1)$ vrijheidsgraden. Dit bewijs valt buiten het bestek van dit college.

Kritieke waarden van de χ^2 -verdeling zijn te vinden in tabel S.T. 2.2.

Voorbeeld 5.2.3.1.

Voor de serie waarnemingen uit voorbeeld 5.2.1.1 (na codering) geldt:

$$KS = 169,4, \quad s^2 = 28,2, \quad s = 5,3, \quad v = 6.$$

Voor het toetsen van $H_0 : \sigma^2 = 30$ tegen $H_1 : \sigma^2 \neq 30$ geldt dan

$$\chi_6^2 = \frac{169,4}{30} = 5,65.$$

De kritieke waarden bij $\alpha = 0,05$ (tweezijdig) zijn volgens tabel S.C. 3.1. 1,24 en 14,4. De nulhypothese kan dus niet worden verworpen.

Een betrouwbaarheidsinterval met onbetrouwbaarheid 0,05 wordt gevonden uit

$$1,24 < \frac{169,4}{\sigma^2} < 14,4$$

$$\frac{169,4}{14,4} < \sigma^2 < \frac{169,4}{1,24}$$

$$11,8 < \sigma^2 < 136,6$$

en

$$3,4 < \sigma < 11,7 .$$

Met behulp van tabel S.C. 3.2 wordt dit laatste resultaat ook gevonden, nl.

$$3,4 = 0,64 \times 5,3 < \sigma < 2,20 \times 5,3 = 11,7 .$$

5.3. Twee normale verdelingen met onbekende varianties

We beschouwen nu de situatie dat er twee onafhankelijke series waarnemingen

$$x_{1j} , \quad (j = 1, \dots, n_1)$$

en

$$x_{2j} , \quad (j = 1, \dots, n_2)$$

zijn, elk afkomstig uit een normale verdeling met verwachting en variantie resp. μ_1, σ_1^2 en μ_2, σ_2^2 .

Er bestaat voor kleine steekproeven geen eenvoudige toets voor de hypothese $\mu_1 = \mu_2$, tenzij $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

We behandelen daarom eerst een toets voor de hypothese $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

5.3.1. Toets voor de gelijkheid van twee varianties

De toets voor de nulhypothese $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ tegen de alternatieven $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ of $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ berust op de in 5.2.3 besproken eigenschap dat de kwadratensom van een steekproef uit een normale verdeling, op een factor σ^2 na, een χ^2 -verdeling heeft met $\nu = n - 1$ vrijheidsgraden.

Dat betekent dat

$$\frac{(n_1 - 1)s_{-1}^2}{\sigma_1^2} \quad \text{en} \quad \frac{(n_2 - 1)s_{-2}^2}{\sigma_2^2}$$

beide een χ^2 -verdeling hebben met respectievelijk $(n_1 - 1)$ en $(n_2 - 1)$ vrijheidsgraden.

De verdeling van het quotiënt

$$\frac{\chi_{v_1}^2}{v_1} / \frac{\chi_{v_2}^2}{v_2} =: F_{v_2}^{v_1},$$

wordt een F-verdeling genoemd met v_1 en v_2 vrijheidsgraden. Rechter kritieke waarden van deze verdeling zijn te vinden in de tabellen S.C. 4.1 - 4.4.

Het quotiënt

$$\frac{\frac{s_1^2}{n_1 - 1}}{\frac{s_2^2}{n_2 - 1}} = \frac{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}}$$

heeft dus een F-verdeling met $(n_1 - 1)$ en $(n_2 - 1)$ vrijheidsgraden.

Onder H_0 heeft het quotiënt $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ een F-verdeling.

Uit de definitie van de F-verdeling volgt direct dat

$$F_{v_2}^{v_1}(\alpha) = \frac{1}{F_{v_1}^{v_2}(1 - \alpha)},$$

waarin $F_{v_2}^{v_1}(\alpha)$ wordt gedefinieerd door:

$$P(F_{v_2}^{v_1} \geq F_{v_2}^{v_1}(\alpha)) = \alpha.$$

De hypothese $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ wordt verworpen ten gunste van $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ als

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{v_2}^{v_1}(\frac{1}{2}\alpha)$$

of als

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} \geq F_{v_1}^{v_2}(\frac{1}{2}\alpha),$$

ten gunste van $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ als

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} \geq F_{v_2, v_1}(\alpha) \text{ en}$$

ten gunste van $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ als

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{v_1, v_2}(\alpha) .$$

Voorbeeld 5.3.1.1. Beschouw de (gecodeerde) serie waarnemingen van voorbeeld 5.2.1.1:

18 20 22 14 9 10 10

en de serie

20 19 18 27 24 .

Hiervoor geldt:

$$KS_1 = 169,4 \quad s_1^2 = 28,2 \quad v_1 = 6$$

$$KS_2 = 57,2 \quad s_2^2 = 14,3 \quad v_2 = 4 .$$

De hypothese $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ kan bij onbetrouwbaarheid 0,05 niet worden verworpen ten gunste van het alternatief $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, want

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{28,2}{14,3} = 1,97 < F_4^6(0,025) = 9,20 .$$

We hoeven uiteraard alleen te kijken naar het quotiënt met de grootste s^2 in de teller, daar een quotiënt < 1 zeker niet de kritieke waarde zal overschrijden.

Het 95% betrouwbaarheidsinterval voor σ_1^2/σ_2^2 vinden we uit:

$$F_4^6(0,975) = \frac{1}{F_6^4(0,025)} = \frac{1}{6,23} < \frac{28,2}{14,3} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_4^6(0,025) = 9,20 .$$

Dit levert op:

$$0,22 < \sigma_1^2 / \sigma_2^2 < 12,3 .$$

5.3.2. Toets voor de gelijkheid van twee verwachtingen

We beschouwen het toetsen van de nulhypothese $\mu_1 = \mu_2$ tegen de alternatieven $\mu_1 \neq \mu_2$, $\mu_1 < \mu_2$ of $\mu_1 > \mu_2$ onder de onderstelling dat $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Nu zijn s_1^2 en s_2^2 onafhankelijke schattingen van dezelfde σ^2 en ze kunnen gecombineerd worden tot één schatting:

$$s^2 = \frac{v_1 s_1^2 + v_2 s_2^2}{v_1 + v_2} = \frac{KS_1 + KS_2}{n_1 + n_2 - 2} ,$$

met $v_1 + v_2 = n_1 + n_2 - 2$ vrijheidsgraden.

De toetsingsgrootte

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

heeft een t-verdeling met $v = v_1 + v_2 = n_1 + n_2 - 2$ vrijheidsgraden.

Voorbeeld 5.3.2.1. Neem de twee series waarnemingen uit voorbeeld 5.3.1.1 en toets de hypothese $\mu_1 = \mu_2$ tegen $\mu_1 \neq \mu_2$ met $\alpha = 0,05$. De veronderstelling dat $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ is in voorbeeld 5.3.1.1 gebleken wel gerechtvaardigd te zijn. De schatting van de gezamenlijke variantie σ^2 is

$$s^2 = \frac{KS_1 + KS_2}{v_1 + v_2} = \frac{169,4 + 57,2}{6 + 4} = 22,7 ,$$

zodat $s = 4,76$. De gemiddelden zijn $\bar{x}_1 = 14,7$ en $\bar{x}_2 = 21,6$. De toetsingsgrootte is dus

$$t_{10} = \frac{14,7 - 21,6}{4,76 \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{5}}} = -2,48 .$$

De kritieke waarde $t_{10} (0,025) = 2,23$, dus de nulhypothese wordt verworpen. De grenzen van een 95%-betrouwbaarheidsinterval zijn:

$$-6,9 \pm 2,23 \times 4,76 \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{5}} = -6,9 \pm 6,2 ,$$

zodat het interval is:

$$-13,1 < \mu_1 - \mu_2 < -0,7 .$$

5.4. k steekproeven uit normale verdelingen ($k > 2$)

We hebben nu te maken met k series waarnemingen

$$x_{ij} \quad (i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, n_i; \quad \sum n_i = n)$$

Deze vormen k aselechte onafhankelijke steekproeven uit k verdelingen met verwachting μ_i ($i = 1, \dots, k$) en gemeenschappelijke variantie σ^2 .

Deze laatste veronderstelling wordt veelal niet getoetst. Als er twijfel is aan de juistheid van deze veronderstelling kan de in het volgende besproken methode niet worden toegepast.

De hypothese die wij willen toetsen is

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k .$$

We splitsen hiertoe de waarnemingen als volgt (met $\bar{x}_{i.} := \frac{1}{n_i} \sum_j x_{ij}$, $\bar{x}_{..} := \frac{1}{n} \sum_{i,j} x_{ij}$):

$$x_{ij} = (x_{ij} - \bar{x}_{i.}) + (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..}) + \bar{x}_{..} ,$$

of:

$$(x_{ij} - \bar{x}_{..}) = (x_{ij} - \bar{x}_{i.}) + (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..}) .$$

De afwijking van het totaalgemiddelde is dus gesplitst in twee componenten, nl. in $x_{ij} - \bar{x}_i$ = de afwijking binnen de steekproef en in $\bar{x}_i - \bar{x}_{..}$ = de afwijking tussen de steekproeven (eigenlijk tussen de steekproefgemiddelden).

Daar $\sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_i)(\bar{x}_i - \bar{x}_{..}) = 0$,
geldt:

$$\sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_i n_i (\bar{x}_i - \bar{x}_{..})^2 + \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 .$$

In woorden: Totale kwadratensom = kwadratensom tussen steekproeven + kwadratensom binnen steekproeven:

$$KS_T = KS_t + KS_b .$$

De bijbehorende splitsing in vrijheidsgraden is:

$$(n - 1) = (k - 1) + \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = (k - 1) + (n - k) .$$

De statistische theorie leert nu dat onder de nulhypothese de kwadratensommen KS_t en KS_b onderling onafhankelijk zijn en verdeeld als $\sigma^2 \chi^2$ met resp. $(k - 1)$ en $(n - k)$ vrijheidsgraden.

De verdeling van het quotiënt van de gemiddelde kwadratensommen

$$\frac{GK_t}{GK_b} := \frac{KS_t / (k - 1)}{KS_b / (n - k)} = F_{k-1, n-k}$$

is dan een F-verdeling (vgl. § 5.3.1).

Onder H_0 geldt:

$$EGK_t = \sigma^2 ; \quad EGK_b = \sigma^2 .$$

Als echter H_0 niet waar is en de μ_i 's verschillen, dan is nog steeds

$$EGK_b = \sigma^2 ,$$

maar

$$EGK_t = \frac{\sum_i n_i (\mu_i - \bar{\mu}_{..})^2}{k - 1} + \sigma^2 ,$$

dus groter dan σ^2 . In de laatste uitdrukking is $\bar{\mu}_i := \frac{\sum n_{ij} \mu_{ij}}{n_i}$.
Daarom is de toets gebaseerd op F ééNZijdig, alleen als $GK_t > GK_b$ kan H_0 worden verworpen.

De kwadratensommen worden als volgt berekend:

$$KS_b = \sum_{i,j} x_{ij}^2 - \sum_i \frac{x_{i.}^2}{n_i},$$

$$KS_t = \sum_i \frac{x_{i.}^2}{n_i} - \frac{x_{..}^2}{n},$$

waarin

$$x_{i.} := \sum_j x_{ij}, \quad x_{..} := \sum_{i,j} x_{ij}.$$

Voorbeeld 5.4.1.

Een laboratorium bepaalt volgens 4 methoden het zwavelgehalte van steenkool. De gecodeerde waarnemingen en tevens de nodige rekengrootheden zijn gegeven in de volgende tabel.

methode	waarnemingen	n_i	$x_{i.}$	$\sum_j x_{ij}^2$	$x_{i.}^2/n_i$	KS_i
I	13 15 20	3	48	794	768,00	26,00
II	20 19 18 27 24	5	108	2390	2332,80	57,20
III	14 18 13	3	45	689	675,00	14,00
IV	18 20 22 14 9 10 10	7	103	1685	1515,57	169,43
		$n=18$	$x_{..}=304$	5558	5291,37	266,63

We zien dat

$$KS_b = 5558 - 5291,37 = 266,63,$$

$$KS_t = 5291,37 - (304)^2/18 = 157,15.$$

De resultaten worden veelal weergegeven in de volgende variantie-analyse-tabel:

variatiebron	KS		GK	F
tussen methoden	157,15	3	52,38	2,75
binnen methoden	266,63	14	19,04	
totaal	423,78	17		

De rechter kritieke waarde is $F_{14}^3(0,05) = 3,34$. Er is dus geen reden om H_0 te verwerpen.

5.5. Regressieanalyse

Bij veel problemen wordt een stochastische grootheid \underline{y} waargenomen die afhangt van een aantal in te stellen of nauwkeurig te meten grootheden x_1, \dots, x_k en van een aantal parameters β_1, \dots, β_p .

Zo kan \underline{y} b.v. de opbrengst zijn van een chemisch proces, terwijl x_1, \dots, x_k temperatuur, druk, concentratie, roersnelheid e.d. zijn, waar de opbrengst van afhangt. Men kan schrijven:

$$E\underline{y} = f(x_1, \dots, x_k; \beta_1, \dots, \beta_p)$$

of

$$\underline{y} = f(x_1, \dots, x_k; \beta_1, \dots, \beta_p) + \underline{e} ,$$

met $E\underline{e} = 0$.

Is f een lineaire functie van de parameters, dan spreken we van lineaire regressie en we onderscheiden verder enkelvoudige ($k = 1$) en meervoudige ($k > 1$) lineaire regressie.

We moeten ons hier tot de enkelvoudige lineaire regressie beperken.

De regressievergelijking is dan

$$\underline{y} = \alpha + \beta x + \underline{e} .$$

Om de parameters α en β te kunnen schatten moeten bij verschillende waarden x_1, \dots, x_n van x waarnemingen aan \underline{y} worden verricht:

$$\underline{y}_i = \alpha + \beta x_i + \underline{e}_i \quad (i = 1, \dots, n) .$$

Meestal wordt, behalve $Ee_{\underline{i}} = 0$, verondersteld dat de covarianties $Ee_{\underline{i}}e_{\underline{j}} = 0$ zijn.

Om te kunnen toetsen wordt verder vaak aangenomen dat de $e_{\underline{i}}$ normaal verdeeld zijn met variantie σ^2 .

5.5.1. Het schatten van de parameters α en β

Men kan bewijzen dat men de nauwkeurigste lineaire zuivere schatters voor α en β krijgt door de methode van de kleinste kwadraten toe te passen.

In paragraaf 5.2 van Wiskunde 31/49 zijn we hiervan reeds het speciale geval $\beta = 0$ tegengekomen (stelling 2).

Dan is het model nl.: $Ey_{\underline{i}} = \alpha$. De kleinste kwadratenmethode komt dan neer op het minimaliseren van

$$\sum_{i=1}^n (y_{\underline{i}} - \alpha)^2 .$$

Dit minimum wordt bereikt voor $\alpha = \bar{x}$, dus het steekproefgemiddelde is de kleinste kwadratenschatter voor de verwachting Ey .

In het geval van de lineaire regressie houdt de methode in dat de som van de kwadraten van de afwijkingen van de waarnemingen $y_{\underline{i}}$ van de geschatte waarden minimaal is. Deze afwijking $(y_{\underline{i}} - \hat{y})$ heten de residuen.

Dus

$$\sum_i (y_{\underline{i}} - \hat{y}_{\underline{i}})^2 = \sum_i (y_{\underline{i}} - a - bx_{\underline{i}})^2 = \min_{\alpha, \beta} \sum_i (y_{\underline{i}} - \alpha - \beta x_{\underline{i}})^2$$

Voor het bereiken van een minimum is nodig dat de partiële afgeleiden naar α en β gelijk zijn aan 0:

$$-2 \sum_i (y_{\underline{i}} - a - bx_{\underline{i}}) = 0 ,$$

$$-2 \sum_i x_{\underline{i}} (y_{\underline{i}} - a - bx_{\underline{i}}) = 0 ,$$

ofwel:

$$na + b\sum x_i = \sum y_i$$

$$a\sum x_i + b\sum x_i^2 = \sum x_i y_i .$$

Hieruit kunnen we b en a oplossen:

$$b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n} \sum x_i \sum y_i}{\sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2} ,$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} .$$

Opmerking. Dat deze waarden inderdaad een minimum opleveren, kan worden nagegaan door ook de tweede afgeleiden te beschouwen.

5.5.2. Het schatten van σ^2

Hiervoor berekenen we de som van de kwadraten van de residuen.

$$KS_r = \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 ,$$

de zogenaamde restkwadratensom.

Men kan namelijk bewijzen dat, in het beschouwde model dat twee parameters bevat,

$$\underline{EKS}_r = (n - 2)\sigma^2 .$$

Een zuivere schatter voor σ^2 is dus

$$s^2 := \frac{KS_r}{n-2} .$$

Onder de veronderstelling dat de e_i onderling onafhankelijk normaal verdeeld zijn geldt verder dat

$$\frac{vs^2}{\sigma^2}$$

een χ_v^2 -verdeling heeft, met $v = n - 2$.

Om de restkwadratensom in de praktijk uit te rekenen is de hierboven gegeven formule minder geschikt. We gaan daarom de volgende herleiding uitvoeren:

$$\begin{aligned}KS_r &= \sum_i (y_i - a - bx_i)^2 = \sum_i [(y_i - \bar{y}) - b(x_i - \bar{x})]^2 = \\&= \sum_i (y_i - \bar{y})^2 - 2b \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + b^2 \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \\&= \sum_i (y_i - \bar{y})^2 - \frac{[\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2},\end{aligned}$$

waarbij weer $\sum_i (y_i - \bar{y})^2$ wordt berekend uit

$$\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n},$$

enz.

5.5.3. Betrouwbaarheidsintervallen en toetsen

In Wiskunde 31/49 (stelling 6, pag. 46) is bewezen dat een lineaire combinatie van onafhankelijke normaal verdeelde variabelen weer normaal verdeeld is. Nu is

$$b = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \sum_i \delta_i y_i,$$

met

$$\delta_i := \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_j (x_j - \bar{x})^2}$$

Dus, onder de eerder gemaakte veronderstellingen, is \underline{b} normaal verdeeld, met

$$E\underline{b} = \sum_1 \delta_1 (\alpha + \beta x_1) = \beta$$

en

$$\text{var } \underline{b} = \sum_1 \delta_1^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_1 (x_1 - \bar{x})^2} .$$

$$(\underline{b} - \beta) \sqrt{\sum_1 (x_1 - \bar{x})^2}$$

Dus $\frac{(\underline{b} - \beta) \sqrt{\sum_1 (x_1 - \bar{x})^2}}{\sigma}$ is standaard-normaal verdeeld.

Wordt nu σ vervangen door \underline{s} (uit 5.5.2), dan krijgen we de statistische grootheid

$$\frac{(\underline{b} - \beta) \sqrt{\sum_1 (x_1 - \bar{x})^2}}{\underline{s}} ,$$

die een student-verdeling met $\nu = (n - 2)$ vrijheidsgraden heeft. Hiermee kan men dus een hypothese betreffende β toetsen of een betrouwbaarheidsinterval met betrouwbaarheid $(1 - \alpha)$ opstellen:

$$\underline{b} - t_{\nu} \frac{\underline{s}}{\sqrt{\sum_1 (x_1 - \bar{x})^2}} < \beta < \underline{b} + t_{\nu} \frac{\underline{s}}{\sqrt{\sum_1 (x_1 - \bar{x})^2}} .$$

Voor de parameter α kunnen op een soortgelijke manier een toets en een betrouwbaarheidsinterval worden afgeleid. Immers

$$\underline{a} = \underline{\bar{y}} - \underline{b}\bar{x} = \sum_1 e_i \underline{y}_i ,$$

met

$$e_i := \frac{1}{n} - \delta_i \bar{x} .$$

Derhalve is ook \underline{a} normaal verdeeld met

$$E\bar{a} = E\bar{y} - \bar{x}E\bar{b} = (\alpha + \beta\bar{x}) - \beta\bar{x} = \alpha$$

en

$$\text{var } \bar{a} = \sum_i e_i^2 \sigma^2 = \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \right] \sigma^2 .$$

In dit verband is het verder nog interessant om te kijken naar de variantie van de geschatte waarde \hat{y} bij een willekeurige x (niet noodzakelijk gelijk aan één van de x_i ($i = 1, \dots, n$)).

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \bar{a} + \bar{b}x = \sum_i (e_i + \delta_i x) y_i = \\ &= \sum_i \left[\frac{1}{n} + \delta_i (x - \bar{x}) \right] y_i . \end{aligned}$$

Dus

$$\text{var } \hat{y} = \left[\frac{1}{n} + (x - \bar{x})^2 \sum_i \delta_i^2 \right] \sigma^2 = \left[\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \right] \sigma^2 .$$

De variantie is dus minimaal als $x = \bar{x}$.

Voorbeeld 5.5.1.

Gegeven de leeftijd x en bloeddruk y van 12 personen:

x :	56	42	72	36	63	47	55	49	38	42	68	60
y :	147	125	160	118	149	128	150	145	115	140	152	155

We gaan de regressielijn $\hat{y} = a + bx$ bepalen.

We berekenen nu eerst

$$n = 12 \quad \sum x_i^2 = 34416$$

$$\sum x_i = 628 \quad \sum y_i^2 = 238822$$

$$\sum y_i = 1684 \quad \sum x_i y_i = 89894$$

Vervolgens worden berekend

$$b = \frac{89894 - \frac{1}{12} \cdot 628 \cdot 1684}{34416 - \frac{1}{12} (628)^2} = \frac{1764,67}{1550,67} = 1,138$$

$$a = \frac{1}{12} \cdot 1684 - 1,138 \cdot \frac{1}{12} \cdot 628 = 80,78$$

$$\begin{aligned} \text{KS}_r &= [238822 - \frac{1}{12} (1684)^2] - \frac{(1764,67)^2}{1550,67} = \\ &= 2500,67 - 2008,20 = 492,47 . \end{aligned}$$

De geschatte varianties van \underline{a} en \underline{b} zijn:

$$\sigma^2(\underline{a}) = s^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right] = \frac{492,47}{10} \left[\frac{1}{12} + \frac{(52,33)^2}{1550,67} \right] = 91,08$$

$$\sigma^2(\underline{b}) = s^2 \frac{1}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{492,47}{10 \cdot 1550,67} = 0,0318$$

Het betrouwbaarheidsinterval voor β met onbetrouwbaarheid 0,05 is

$$1,138 - 2,23 \sqrt{0,0318} < \beta < 1,138 + 2,23 \sqrt{0,0318}$$

$$0,74 < \beta < 1,54 .$$

6. Binomiale, hypergeometrische en Poisson verdeling

Toetsen en betrouwbaarheidsintervallen voor de parameter p , de kans op succes, bij een binomiale verdeling zijn behandeld in Wiskunde 31/49. Voor de verwachting μ van een Poisson-verdeling kunnen toetsen en betrouwbaarheidsintervallen worden afgeleid volgens dezelfde principes. Als aanvulling hierop behandelen we toetsen voor de gelijkheid van twee kansen en van twee Poisson verdelingen. Voor een exacte toets voor de vergelijking van twee kansen hebben we de hypergeometrische verdeling nodig.

6.1. De hypergeometrische verdeling

Stel dat we uit een populatie van N elementen, waarvan M een bepaald kenmerk A hebben (b.v. defect zijn) een aselechte steekproef trekken van n elementen zonder teruglegging. Stelling 5 van Wiskunde 49/31 (pag. 10) geeft de kans op x elementen met kenmerk A in de steekproef.

$$P(\underline{x} = x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{n!M!(N-n)!(N-M)!}{N!x!(n-x)!(M-x)!(N-M-n+x)!}$$

We merken op dat "kenmerk A hebben" (of "defect" zijn), en "tot de steekproef behoren" verwisselbaar zijn. Dit blijkt ook uit de formule, want het is direct in te zien dat geldt:

$$P(\underline{x} = x) = \frac{\binom{n}{x} \binom{N-n}{M-x}}{\binom{N}{M}} .$$

Voor x gelden de grenzen:

$$\max(0, M + n - N) \leq x \leq \min(M, n) .$$

Het ligt voor de hand dat, als n klein is t.o.v. N , er weinig verschil is tussen trekken met en trekken zonder teruglegging. In het eerste geval is \underline{x} binomiaal verdeeld met aantal trekkingen n en kans $p = \frac{M}{N}$. Inderdaad nadert de hypergeometrische verdeling tot de binomiale als $N \rightarrow \infty$ en $\frac{M}{N} = p$ constant. Een soortgelijk geval doet zich voor als $M \ll N$. De volgende benaderingen zijn mogelijk:

	Voorwaarde (n)	Benadering
1)	$n \leq 0,1N$	binomiaal ($n, p = \frac{M}{N}$)
2)	$M \leq 0,1N$	binomiaal ($M, p = \frac{n}{N}$)
3)	$\begin{cases} n \leq 0,1N \\ M \leq 0,1N \end{cases}$	Poisson, $\mu = \frac{nM}{N}$
4)	$\begin{cases} \frac{nM}{N} \geq 5, \frac{M(N-n)}{N} \geq 5 \\ \frac{n(N-M)}{N} \geq 5, \frac{(N-n)(N-M)}{N} \geq 5 \end{cases}$	Normaal, $\mu = \frac{nM}{N}$ $\sigma = \sqrt{\frac{nM(N-M)(N-n)}{(N-1)N^2}}$

Bij enquêtes, zoals opinieonderzoeken, zal vaak aan voorwaarde 1) zijn voldaan en ook vaak aan 4).

Bij partijkeuring in de industrie is meestal aan 3) voldaan: de steekproef is klein t.o.v. de populatie en de fractie defecte producten is eveneens klein.

Exacte waarden van de hypergeometrische verdeling kunnen worden berekend met een tabel van $\log n!$ (S.C. 9.3) of van binomiaalcoëfficiënten (S.C. 9.4.). Verder is er een boek met tabellen:

G.J. Lieberman en D.B. Owen, Tables of the hypergeometric probability distribution, Stanford University Press, 1961.

Tenslotte een voorbeeld, waarin de exacte verdeling met de binomiale en met de normale benadering wordt vergeleken.

$$N = 100, \quad M = 40, \quad n = 10$$

x	Exact	Bin(10;0,4)	Normaal (4;1,477)
0	0,004355	0,0060	0,0077
1	0,034161	0,0403	0,0364
2	0,115291	0,1209	0,1097
3	0,220431	0,2150	0,2126
4	0,264312	0,2508	0,2650
5	0,207606	0,2007	0,2126
6	0,108128	0,1115	0,1097
7	0,036856	0,0425	0,0364
8	0,007863	0,0106	0,0077
9	0,000948	0,0016	0,0011
10	0,000049	0,0001	0,0001

6.2. Toetsen voor de gelijkheid van twee kansen

Uitgaande van de waarnemingen x_1 en x_2 bij steekproefgroottes van resp. n_1 en n_2 willen we de volgende hypothese toetsen:

$$H_0 : p_1 = p_2 ,$$

tegen de alternatieven $p_1 \neq p_2$, $p_1 < p_2$ of $p_1 > p_2$.

Een exacte toets kan worden gevonden met behulp van de hypergeometrische verdeling. Onder H_0 geldt namelijk:

$$P(\underline{x}_1 = x_1 \mid \underline{x}_1 + \underline{x}_2 = x) = \frac{\binom{n_1}{x_1} \binom{n_2}{x-x_1}}{\binom{n_1+n_2}{x}} .$$

Immers, als $p_1 = p_2 =: p$ geldt:

$$\begin{aligned} P(\underline{x}_1 = x_1 \mid \underline{x}_1 + \underline{x}_2 = x) &= \frac{P(\underline{x}_1 = x_1 \text{ en } \underline{x}_1 + \underline{x}_2 = x)}{P(\underline{x}_1 + \underline{x}_2 = x)} = \\ &= \frac{p \binom{n_1}{x_1} (1-p)^{n_1-x_1} \text{ en } \binom{n_2}{x-x_1} p^{x-x_1} (1-p)^{n_2-x+x_1}}{P(\underline{x}_1 + \underline{x}_2 = x)} = \\ &= \frac{\binom{n_1}{x_1} \binom{n_2}{x-x_1}}{\binom{n_1+n_2}{x}} . \end{aligned}$$

H_0 wordt nu verworpen, b.v. ten gunste van $H_1 : p_1 < p_2$ als

$$P(\underline{x}_1 \leq x_1 \mid \underline{x}_1 + \underline{x}_2 = x) \leq \alpha ,$$

of als \underline{x}_1 kleiner dan of gelijk is aan een linker kritieke waarde $l(x)$, waarbij

$$P(\underline{x}_1 \leq l(\underline{x}) \mid \underline{x} = x) \leq \alpha , \quad \text{met } \underline{x} := \underline{x}_1 + \underline{x}_2 .$$

Dit is een zogenaamde voorwaardelijke toets. Maar ook geldt dat de onvoorwaardelijke onbetrouwbaarheid $P(\underline{x}_1 \leq l(\underline{x})) \leq \alpha$.

Immers

$$P(\underline{x}_1 \leq l(\underline{x})) = \sum_x P(\underline{x}_1 \leq l(\underline{x}) \mid \underline{x} = x) \cdot P(\underline{x} = x) \leq \alpha \sum_x P(\underline{x} = x) = \alpha .$$

Een zelfde redenering gaat op voor de tweezijdige en voor de rechtséénzijdige toets.

Voorbeeld 6.2.1.

In de volgende tabel staan de aantallen patiënten waarbij een bepaald ongewenst neveneffect werd waargenomen na het gebruik van één van de geneesmiddelen A of B.

Geneesmiddel	neveneffect		totalen
	wel	niet	
A	5	10	15
B	24	11	35
Totalen	29	21	50

In dit geval is

$$n_1 = 15 ; \quad x_1 = 5$$

$$n_2 = 35 ; \quad x_2 = 24 .$$

Onder de nulhypothese dat de kansen op een bijwerking bij de twee geneesmiddelen gelijk zijn, heeft \underline{x}_1 een hypergeometrische verdeling (onder de voorwaarde $\underline{x}_1 + \underline{x}_2 = 29$).

Wij merken op dat het zelfde geldt voor \underline{x}_2 en, onder de voorwaarde

$$n_1 + n_2 - \underline{x}_1 - \underline{x}_2 = 21, \text{ ook voor } n_1 - \underline{x}_1 \text{ en } n_2 - \underline{x}_2 .$$

De tabellen van Lieberman en Owen bevatten de waarden voor $P(\underline{x} \leq x)$, waarbij (in de notatie van § 6.1 $M \leq \frac{1}{2}N$ en $n \leq M$).

Dat wil zeggen dat we in ons voorbeeld de volgende kans kunnen opzoeken:

$$P(n_1 - \underline{x}_1 \leq 9 \mid n_1 + n_2 - \underline{x}_1 - \underline{x}_2 = 21) = 0,977153$$

en dus geldt, onder dezelfde voorwaarde,

$$P(n_1 - \underline{x}_1 \geq 10) = P(\underline{x}_1 \leq 5) = 0,022847 < 0,025 .$$

Als we voor een tweezijdige toets (alternatieve hypothese $p_1 \neq p_2$) als onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0,05$ kiezen, wordt H_0 dus verworpen.

In dit voorbeeld kunnen we ook de normale benadering toepassen, omdat aan voorwaarde 4) is voldaan (§ 6.1).

Gemiddelde en standaardafwijking van \underline{x}_1 zijn resp.

$$\mu = \frac{15.29}{50} = 8,7$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{15.29.21.35}{49.50^2}} = 1,6155 ,$$

Met toepassing van de continuïteitscorrectie (vergelijk Wsk 49, Opm. 2, blz. 44) wordt de toetsingsgrootte:

$$k = \frac{5 + \frac{1}{2} - 8,7}{1,6155} = -1,98 .$$

De bijbehorende éézijdige overschrijdingskans is

$$P(\underline{u} \leq -1,98) = 0,0239 .$$

Een zeer goede overeenstemming dus met het exacte resultaat.

6.3. Het vergelijken van twee Poisson verdelingen

Stelling. Als \underline{x}_1 en \underline{x}_2 onderling onafhankelijk Poisson verdeeld zijn met verwachtingen resp. μ_1 en μ_2 , dan is

$$P(\underline{x}_1 = x_1 \mid \underline{x}_1 + \underline{x}_2 = n) = \binom{n}{x_1} p^{x_1} (1-p)^{n-x_1},$$

met

$$p := \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Dus onder de voorwaarde dat $\underline{x}_1 + \underline{x}_2 = n$, is \underline{x}_1 binomiaal verdeeld (en uiteraard \underline{x}_2 ook).

Bewijs:

$$\begin{aligned} P(\underline{x}_1 = x_1 \mid \underline{x}_1 + \underline{x}_2 = n) &= \frac{P(\underline{x}_1 = x_1 \text{ en } \underline{x}_1 + \underline{x}_2 = n)}{P(\underline{x}_1 + \underline{x}_2 = n)} = \\ &= \frac{P(\underline{x}_1 = x_1 \text{ en } \underline{x}_2 = n - x_1)}{P(\underline{x}_1 + \underline{x}_2 = n)} = \frac{e^{-\mu_1} \mu_1^{x_1} e^{-\mu_2} \mu_2^{n-x_1}}{x_1! (n-x_1)!} \frac{n!}{e^{-(\mu_1+\mu_2)} (\mu_1+\mu_2)^n} \\ &= \binom{n}{x_1} \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\right)^{x_1} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right)^{n-x_1}. \end{aligned}$$

Op deze stelling kunnen we een toets baseren voor de hypothese $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ tegen de alternatieven $\mu_1 \neq \mu_2$, $\mu_1 < \mu_2$ of $\mu_1 > \mu_2$.
Immers, onder H_0 geldt dat, als

$$\underline{k} = \underline{x}_1 \text{ of } \underline{x}_2, \quad \underline{x}_1 + \underline{x}_2 = n,$$

$$P(\underline{k} \leq k) = \sum_{r=0}^k \binom{n}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Kritieke waarden kunnen voor $n = 1, \dots, 50$ worden gevonden in tabel 7.1 van het S.C.

Voor $n \leq 20$ kunnen overschrijdingskansen worden gevonden in tabel S.T. 3.2

Een andere toets is gebaseerd op de normale benadering. Onder H_0 is

$$\text{var}(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) = \text{var } \underline{x}_1 + \text{var } \underline{x}_2 = 2\mu.$$

De schatting voor 2μ is

$$2\hat{\mu} = x_1 + x_2 .$$

De toetsingsgrootheid

$$\underline{k} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1 + x_2}} .$$

is dus bij benadering $N(0,1)$ verdeeld.

Zelfs voor kleine waarden van μ ($\mu \geq 2$) is deze toets goed bruikbaar.

Voorbeeld 6.3.1. Op een bepaald kruispunt worden in een jaar 14 aanrijdingen geregistreerd. Na het aanbrengen van verkeerslichten is het aantal aanrijdingen in het daarop volgende jaar teruggelopen tot 6. We nemen aan dat het aantal aanrijdingen Poisson verdeeld is. We toetsen de hypothese

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ tegen het alternatief $\mu_1 > \mu_2$ ($\alpha = 0,05$).

De exacte toets levert

$$P(k \leq 6; n = 20) = 0,0577 .$$

H_0 wordt niet verworpen.

De normale benadering geeft

$$k = \frac{14 - 6}{\sqrt{20}} = 1,79 ,$$

$$P(\underline{u} \geq 1,79) = 0,0367 .$$

H_0 zou wel worden verworpen.

Met continuïteitscorrectie vinden we

$$k = \frac{14 - 6 - \frac{1}{2}}{\sqrt{20}} = 1,68 ,$$

$$P(\underline{u} \geq 1,68) = 0,0465 .$$

7. Steekproefkeuringen in de industrie

Alle massaproducten moeten aan zekere kwaliteitseisen (specificaties) voldoen. Elk automatisch productieproces is aan verloop onderhevig en moet van tijd tot tijd worden bijgesteld. Bovendien zullen kleine variaties optreden ten gevolge van schommelingen in de grondstofkwaliteit en procesomstandigheden. Als geen foute producten mogen worden geproduceerd dan is dat alleen te bereiken door de procesnauwkeurigheid aanzienlijk groter te maken dan de geëiste tolerantie. Dit leidt tot zeer hoge fabrikagekosten, hetgeen niet in het belang is van de afnemer. Men zal daarom bij veel producten accepteren dat een klein percentage afwijkingen voorkomt. Men zou zich kunnen voorstellen dat deze afwijkende of defecte exemplaren door een 100% controle achteraf worden opgespoord en verwijderd. De ervaring heeft geleerd dat ook dit niet praktisch uitvoerbaar is.

Meestal is deze controle een geestdodende arbeid hetgeen tot verslapping van de aandacht leidt en soms worden door de controle nieuwe fouten geïntroduceerd.

Men zal dus meestal een zeker percentage foute exemplaren accepteren en ter controle regelmatig steekproeven aan een zeer precieze keuring onderwerpen.

Wij onderscheiden hierbij twee situaties.

- a) Procesbewaking of kwaliteitsbeheersing, waarbij op geregelde tijden, b.v. om het uur, uit de lopende productie een kleine steekproef wordt genomen van b.v. 4 tot 10 stuks teneinde tijdig vast te kunnen stellen of het proces moet worden bijgesteld.
- b) Keuring van gehele partijen van een massaproduct op het moment dat de partij door de leverancier aan de afnemer wordt afgeleverd.

Wij beperken ons tot deze tweede situatie.

7.1. Partijkeuringen

De eenvoudigste steekproefkeuring geschiedt door middel van een eenvoudige steekproef waarin het aantal foute exemplaren wordt bepaald. Is dit aantal, x , kleiner dan of gelijk aan een opgegeven criterium c dan wordt

de partij goedgekeurd. Is $x > c$ dan wordt de partij afgekeurd.

De vraag is dus, hoe moeten de steekproefgrootte n en het goedkeur-
criterium c worden gekozen.

De hiervoor beschreven keuring heet attributief, dat wil zeggen dat van een product alleen wordt vastgesteld of het goed of fout is. Zo wordt b.v. door middel van kalibers geconstateerd of een asdiameter binnen het tolerantiegebied valt of niet. Men zou ook de diameter nauwkeurig kunnen meten en uit een steekproef gemiddeld en variantie van de partij schatten en op grond daarvan een beslissing nemen over goed- of afkeuren.

Bij een dergelijke keuring op variabelen kan men in het algemeen met een kleinere steekproef volstaan. Daar staat tegenover dat:

- a) de meeste schemas voor keuring op variabelen gebaseerd zijn op een normale verdeling van het te meten kenmerk.
- b) zowel de meting als de verwerking van de resultaten meer tijd kost dan bij een keuring op attributen het geval is.
- c) het niet mogelijk is om op meerdere foutensoorten tegelijkertijd te keuren.

Wij behandelen alleen de attributieve keuring.

7.2.1. Keuringskarakteristieken

De kromme die voor een gegeven steekproefschema de goedkeurkans, P_g , weergeeft als functie van het percentage foute exemplaren in de partij heet de keuringskarakteristiek (O.C. curve of Operating Characteristic Curve).

In de overgrote meerderheid van de gevallen is

$$n < 0,1 N \quad \text{en} \quad p < 0,1 = 10\%$$

en kan men voor de berekening van de keuringskarakteristiek van de Poisson verdeling gebruik maken.

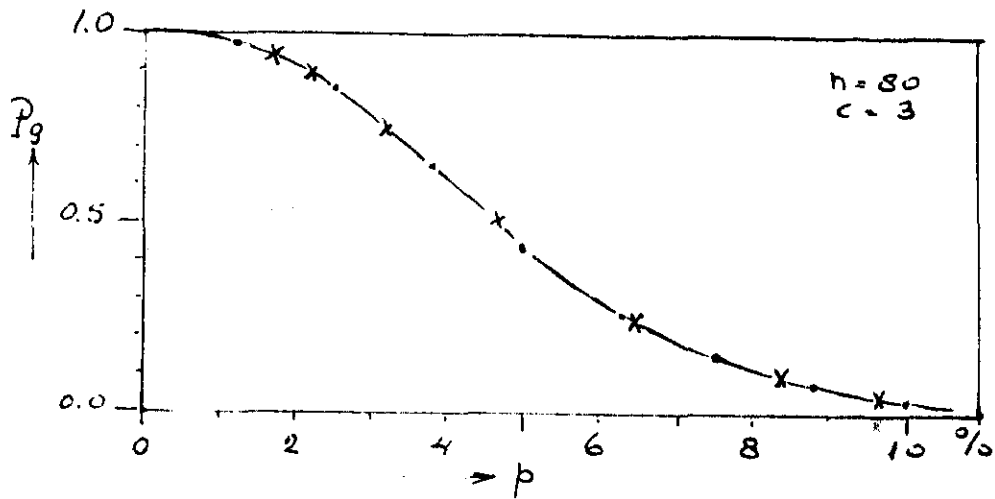


Fig. 7.2.1.1. De keuringskarakteristiek voor het enkelvoudige schema $n = 80$, $c = 3$.

De kruisjes zijn bepaald met behulp van S.C. 8.1, de punten met S.T. 4.2.

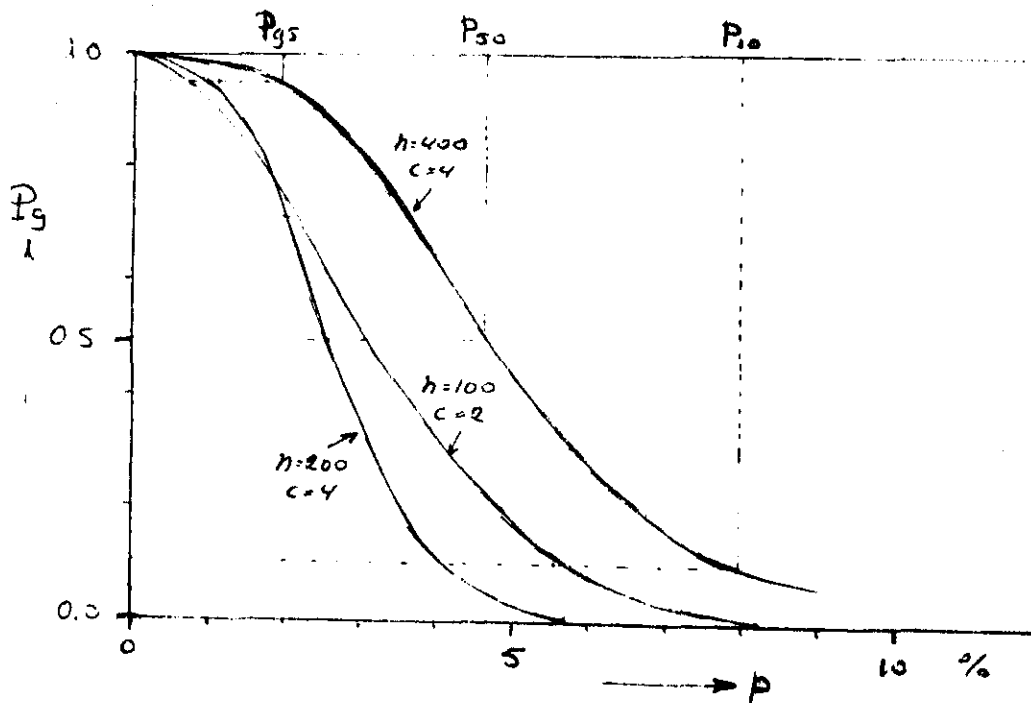


Fig. 7.2.1.2. Keuringskarakteristieken voor 3 verschillende enkelvoudige steekproefschema's

P_{95} = Risicopunt voor de producent (Producer's Risk Point) = percentage foute exemplaren, p , waarbij $P_g = 0.95$.

P_{50} = Controlepunt (Indifference Quality = I.Q.) = de waarde p waarbij $P_g = 0.50$.

P_{10} = Risicopunt van de afnemer (Lot Tolerance Percent Defective = LTPD) = de waarde p waarbij $P_g = 0.10$.

P_{10} wordt ook in ons land vaak de LTPD genoemd.

Fig. 7.2.1.1 geeft de keuringskarakteristiek voor $n = 80$, $c = 3$, welke kan worden geconstrueerd met behulp van S.C. 4.2 of S.C. 8.1.

Fig. 7.2.1.2 geeft een drietal karakteristieken die illustreren welke variaties optreden wanneer we n en c variëren.

Bij steekproefkeuringen loopt men steeds risico's op onjuiste beslissingen en deze keuringskarakteristieken illustreren dit. Bij $n = 100$, $c = 2$ wordt maximaal 2% foute exemplaren in de steekproef toegestaan. Bevat de partij 2% dan loopt die partij een kans van ongeveer 32% te worden afgekeurd, terwijl een partij met 5% foute exemplaren nog een kans van ongeveer 12% heeft te worden goedgekeurd. Dergelijke risico's zijn onvermijdelijk; men kan ze wel verkleinen door grotere steekproeven te nemen; zie $n = 200$, $c = 4$. De keuringskarakteristieken zijn altijd krommen van eenzelfde vorm zodat ze praktisch vastliggen wanneer twee punten op de karakteristiek zijn gegeven.

Twee punten die hiervoor zeer algemeen worden gebruikt zijn

$$P_g = 0.95, p = P_{95} \quad \text{en} \quad P_g = 0.10, p = P_{10} .$$

$P_g = 0.95$ resp. 0.10 zijn algemeen geaccepteerde standaardwaarden; p_{95} en p_{10} worden dan beschouwd als parameters waarmee een keuringskarakteristiek is vastgelegd en die de keuze van een steekproefschema bepalen. De benamingen die in gebruik zijn, zijn na Fig. 7.2.1.2 vermeld.

De leverancier weet dat wanneer de door hem geleverde partijen een percentage foute exemplaren $p < P_{95}$ bevatten, hij zelden last zal hebben met afgekeurde partijen. De afnemer weet van zijn kant dat partijen met $p > P_{10}$ zelden door de keuring heen zullen slippen.

Eén methode om een steekproefschema te construeren bestaat nu daarin dat voor P_{95} en P_{10} in overleg door de leverancier en de afnemer waarden worden vastgesteld. Stel men komt tot

$$P_{95} = 2.5\%, \quad P_{10} = 6\%, \quad P_{10}/P_{95} = 2.4$$

dan zoekt men in S.C. 8.1 laatste kolom de eerste regel op waarvoor $P_{10}/P_{95} \leq 2.4$. Dit geeft

$$c = 11, \quad \mu_{95} = 6.924, \quad n = \frac{6.924}{0.025} = 277,$$

of

$$\mu_{10} = 16.598, \quad n = \frac{16.598}{0.06} = 277,$$

hetgeen men in de praktijk zal afronden op $n = 275$ of 280 .

Een bezwaar van deze methode is dat men gemakkelijk tot grotere steekproeven komt dan men in de praktijk bereid is te aanvaarden. De eisen in het zojuist gestelde geval lijken niet onredelijk, maar tegen steekproeven van 280 stuks kan men achteraf bezwaren maken omdat de capaciteit van de afdeling die de keuring moet uitvoeren niet toereikend is.

Een alternatief is dan

$$P_{50} = \frac{P_{10} + P_{95}}{2}$$

te stellen en n en c te bepalen aan de hand van de relatie

$$np_{50} = c + 2/3$$

die zeer nauwkeurig geldt; zie S.C. 8.1. Dit biedt dan de mogelijkheid de steekproefgrootte aan de capaciteit aan te passen.

2.2. Dubbele steekproefschema's

Een dubbel steekproefschema werkt als volgt: Keur eerst een steekproef van n_1 stuks; zij x_1 het aantal foute exemplaren in deze steekproef dan wordt de betreffende partij:

goedgekeurd, wanneer $x_1 \leq c_1$,

afgekeurd, wanneer $x_1 > c_2$,

en een tweede steekproef genomen wanneer $c_1 < x_1 \leq c_2$.

Worden in de tweede steekproef van n_2 stuks x_2 foute exemplaren gevonden, dan wordt de partij

goedgekeurd, wanneer $x_1 + x_2 \leq c_3$,
afgekeurd, wanneer $x_1 + x_2 > c_3$.

Het voordeel van deze methode is dat uitgesproken goede of slechte partijen reeds door de eerste steekproef worden onderkend en dat alleen in twijfelgevallen tot een tweede steekproef wordt overgegaan. Men kan de 5 parameters, n_1, n_2, c_1, c_2, c_3 , zó kiezen dat de keuringskarakteristiek praktisch volledig samenvalt met de karakteristiek van een gegeven enkelvoudig schema. Het dubbele schema vereist dan gemiddeld een geringer aantal waarnemingen. Daar staat tegenover dat het aantal waarnemingen dat moet worden verricht niet vast is; soms is het n_1 , soms $(n_1 + n_2)$.

Dubbele steekproefschema's worden vrij veel toegepast. Zeer globaal kan men, vergeleken met een gelijkwaardig enkelvoudig systeem, het aantal keuringen op die wijze met 25% reduceren.

De berekening van de keuringskarakteristiek van een dubbel steekproefschema is wat gecompliceerder dan van een enkelvoudig schema, doch levert geen principiële moeilijkheden op en kan met behulp van S.T. 4.1 en 4.2 worden uitgevoerd.

Er bestaan tenslotte ook meervoudige steekproefschema's waarbij meer dan 2 steekproeven kunnen worden genomen en telkens na iedere steekproef opnieuw wordt besloten tot goedkeuren, afkeuren, of een volgende steekproef nemen, maar die worden praktisch niet toegepast en laten we buiten beschouwing.

7.2.3. Steekproeftabellen

In de praktijk wordt verreweg het meest gebruik gemaakt van steekproeftabellen waaruit het toe te passen steekproefschema kan worden gelezen als functie van de partijgrootte en een parameter die op het percentage foute exemplaren betrekking heeft. Eén van deze tabellen, het Philips Standaard Steekproef Systeem, is hieronder weergegeven.

Deze tabel heeft steekproefschema's voor 10 klassen van partijgrootten en 8 opklimmende waarden van p_{50} . Voor partijen met $N > 1000$ zijn dubbele steekproefschema's toegepast. De keuringskarakteristieken zijn toegevoegd, alsmede een tabel waarin de waarden van p_{95} en p_{10} zijn opgenomen. Door toevoeging van deze tabel kan het systeem op verschillende manieren worden toegepast, en de variëteit van schema's is groot genoeg om aan de meest voorkomende situaties te kunnen worden aangepast.

Een tweede internationaal in gebruik zijnde tabel staat bekend als de

Military Standard 105d (Mil. Std. 105d). Deze tabel is gebaseerd op de partijgrootte N en de AQL = Acceptable Quality Level.

De AQL is gedefinieerd als: het maximaal toelaatbare gemiddelde percentage foute exemplaren in de aangeboden partijen, en wordt ook in ons land algemeen de AQL genoemd.

Belangrijk is dat p_{95} , p_{50} en p_{10} in wezen kenmerken van een steekproefsche-
ma zijn, terwijl de AQL in wezen een kwaliteitseis is die aan het geleverde
produkt wordt gesteld en ook nog zinvol is, ook al wordt geen steekproef-
keuring toegepast.

STEEKPROEFVOORSCHRIFTEN VOOR PARTIJKEURING

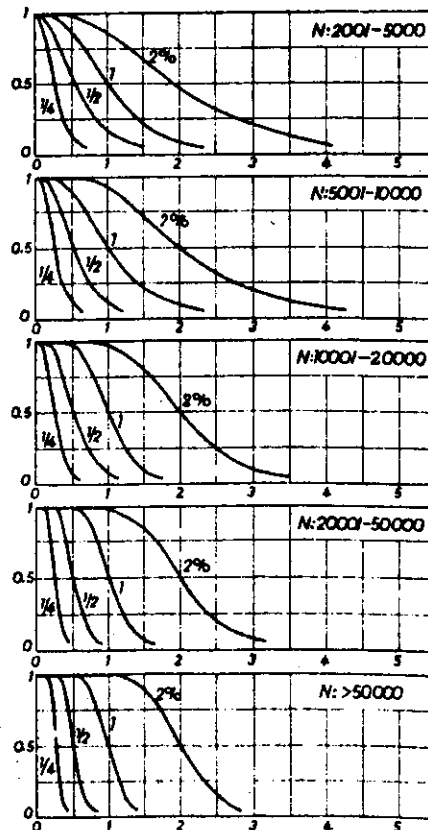
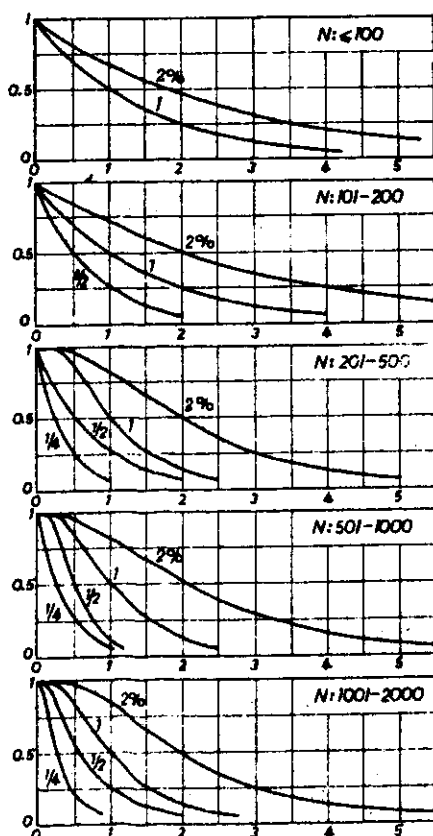
Philips standaard steekproef systeem (s.s.s.)

Keuze van de steekproefgrootte n en het afkeurcriterium c

P_{.50} is het foutenpercentage waarbij de partij 50% kans heeft te worden goedgekeurd.
A betekent; de hele partij moet worden gekeurd.

N Partijgrootte	Controlepunt P _{.50}																	
	1/4%		1/2%		1%		2%		2*		5%		7%		10%			
Enkelvoudige Steekproef	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c	n	c		
< 100	A	-	A	-	45	0	30	0	19	0	12	0	9	0	6	0		
101-200	A	-	90	0	55	0	30	0	50	1	30	1	23	1	16	1		
201-500	195	0	110	0	150	1	80	1	55	1	35	1	35	2	25	2		
501-1000	225	0	305	1	160	1	80	1	90	2	55	2	50	3	35	3		
Dubbele Steekproef	n ₁	c ₁	c ₂	n ₁	c ₁	c ₂	n ₁	c ₁	c ₂	n ₁	c ₁	c ₂	n ₁	c ₁	c ₂	n ₁	c ₁	
1001- 2000	330	0	1	150	0	1	110	0	2	55	0	2	45	0	3	25	0	3
2001- 5000	425	0	2	200	0	2	135	0	3	70	0	3	70	1	5	45	1	5
5001-10000	525	0	3	260	0	3	220	1	5	110	1	5	125	2	10	75	2	10
10001-20000	875	1	5	440	1	5	380	2	10	190	2	10	180	3	15	110	3	15
20001-50000	1500	2	10	750	2	10	540	3	15	270	3	15	240	4	20	140	4	20
50001 En meer	2200	3	15	1100	3	15	700	4	20	350	4	20	290	5	25	175	5	25

Bij dubbele steekproefschema's neemt men eerst een steekproef groot n₁ stuks en wordt de partij goedgekeurd wanneer m₁ ≤ c₁ en afgekeurd wanneer m₁ > c₂. Is c₁ < m₁ ≤ c₂ dan wordt een tweede steekproef genomen van n₂ = 2n₁ stuks en de partij uiteindelijk goedgekeurd wanneer m ≤ c₂ en afgekeurd wanneer m > c₂. Hierbij is m₁ het aantal defectieven in de eerste steekproef en m het aantal in beide steekproeven tezamen.



STEEKPROEFVOORSCHRIFTEN VOOR PARTIJKEURING

(VERVOLG)

Fracties defectieven $p_{.95}$ en $p_{.10}$ voor het P.S.S.S.

$p_{.95}$ is het foutenpercentage waarbij de partij 95% kans heeft te worden goedgekeurd.
 $p_{.10}$ is het foutenpercentage waarbij de partij 10% kans heeft te worden goedgekeurd.

N Partijgrootte	Controlepunt															
	1/4 %		1/2 %		1%		2%		3%		5%		7%		10%	
	$p_{.95}$	$p_{.10}$	$p_{.95}$	$p_{.10}$	$p_{.95}$	$p_{.10}$	$p_{.95}$	$p_{.10}$	$p_{.95}$	$p_{.10}$	$p_{.95}$	$p_{.10}$	$p_{.95}$	$p_{.10}$	$p_{.95}$	$p_{.10}$
Enkelvoudig																
≤ 100					0.25	2.1	0.50	5.4	0.50	8.3	0.65	14.0	0.85	19.6	1.1	28.0
101-200			0.10	1.2	0.13	2.7	0.20	5.6	0.75	6.3	1.2	10.5	1.7	14.7	2.4	21.0
201-500	0.04	0.65	0.06	1.1	0.28	2.1	0.50	4.2	0.70	6.6	1.2	11.0	2.3	13.6	3.3	19.5
501-1000	0.03	0.79	0.15	1.0	0.25	2.1	0.50	4.4	1.0	5.9	1.7	9.8	2.8	12.6	4.0	18.0
Dubbel																
1001-2000	0.04	0.61	0.09	1.2	0.25	2.1	0.55	4.2	1.0	5.8	1.7	9.7	2.9	12.6	4.1	18.0
2001-5000	0.07	0.55	0.14	1.1	0.35	2.0	0.70	3.9	1.2	5.4	2.1	9.0	3.9	10.2	5.5	14.5
5001-10000	0.09	0.50	0.17	1.0	0.40	1.8	0.80	3.6	1.7	4.4	2.8	7.3	4.4	9.4	6.3	13.5
10001-20000	0.13	0.45	0.20	0.90	0.55	1.5	1.1	2.9	1.9	4.1	3.1	6.8	4.8	9.1	6.8	13.0
20001-50000	0.14	0.35	0.30	0.75	0.65	1.4	1.3	2.7	2.1	3.9	3.4	6.5	5.0	8.8	7.1	12.5
50001 en meer	0.16	0.35	0.30	0.70	0.70	1.3	1.4	2.6	2.1	3.8	3.6	6.5	5.1	8.7	7.3	12.4

