

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 45

Integraaltransformaties voor E

Syllabus naar het college van

Prof. Dr. J. Boersma

Voorjaarssemester 1981



Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.248.2

Prijs f.8,00

Bibel / May

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Wiskunde 45

Integraaltransformaties voor E

Syllabus naar het college van prof.dr. J. Boersma

45

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 45

INTEGRAALTRANSFORMATIES voor E

Syllabus naar het college van
Prof.dr. J. Boersma

Voorjaarssemester 1981

<u>INHOUDSOPGAVE</u>	<u>blz.</u>
<u>Hoofdstuk 1. Fourier transformatie</u>	1
1.1. Fourierreeksen, Fourierintegralen	1
1.2. Integraalstelling van Fourier	8
1.3. Fourier transformatie, eigenschappen en voorbeelden	13
1.4. Convolutie, correlatie, bemonsteringstheorema	24
1.5. Delta-functie, gegeneraliseerde Fourier transformatie	32
<u>Hoofdstuk 2. Toepassingen van de Fourier transformatie</u>	44
2.1. Lineaire systemen	44
2.2. Causale systemen, Hilbert transformatie	60
2.3. Randwaardeproblemen voor partiële differentiaalvergelijkingen	65
<u>Hoofdstuk 3. Laplace transformatie</u>	69
3.1. Theorie van de Laplace transformatie	69
3.2. Toepassingen van de Laplace transformatie	81
<u>Hoofdstuk 4. Z-transformatie</u>	94
4.1. Theorie van de Z-transformatie	94
4.2. Toepassingen van de Z-transformatie	107
Literatuur	122
Formulelijst	123
Index	124

Voorwoord

Dit collegedictaat is tot stand gekomen in samenwerking met de Afdeling der Electrotechniek. De schrijver betuigt zijn dank aan Prof.dr.ing. H.J. Butterweck, wiens kritische opmerkingen tot verschillende verbeteringen aanleiding zijn geweest.

Eindhoven, november 1976

J. Boersma

Hoofdstuk 1. Fourier transformatie

1.1. Fourierreeksen, Fourierintegralen

Ter inleiding herhalen we een aantal begrippen en resultaten uit het college Wiskunde 30, hoofdstuk 3.

Zij de functie $f(t)$ gedefinieerd op $(-\infty, \infty)$ en periodiek met periode T , d.w.z. $f(t + T) = f(t)$ voor elke t ; $f(t)$ beschrijft bijv. een "signaal" als functie van de tijd t . In het vervolg is toegelaten dat $f(t)$ een complexe functie is, tenzij uitdrukkelijk vermeld is dat $f(t)$ reëel is. Laat $f(t)$ integreerbaar zijn over de periode $[-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T]$. De functie $f(t)$ is dan te ontwikkelen in de volgende Fourierreeks (met periode T):

$$1.1.1. \quad f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] .$$

Hierin is $\omega_0 = 2\pi/T$ de zg. grondfrequentie, terwijl de Fouriercoëfficiënten a_n, b_n worden gegeven door

$$1.1.2. \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt .$$

Het "~"-teken in 1.1.1 is slechts voorlopig en geeft aan dat de Fourierreeks "behoort" bij de functie $f(t)$. Merk op dat de functies $\cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t)$ periodiek zijn met periode $2\pi/\omega_0 = T$.

De formules 1.1.2 voor de coëfficiënten a_n, b_n zijn als volgt formeel af te leiden. De functies $\{1, \cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots\}$ vormen een orthogonaal stelsel op $[-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T]$, d.w.z. de functies voldoen aan de orthogonaliteitsrelaties

$$\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{als } m \neq n, \\ \frac{1}{2}T & \text{als } m = n \neq 0, \\ T & \text{als } m = n = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = 0 ,$$

$$\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{als } m \neq n, \\ \frac{1}{2}T & \text{als } m = n. \end{cases}$$

Ter bepaling van bijv. a_m voor $m \geq 1$, vermenigvuldigen we 1.1.1 (met " \sim " vervangen door het gelijkteken) met $\cos(m\omega_0 t)$ en integreren termsgewijs over $[-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T]$, dan volgt

$$\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = \frac{1}{2} a_0 \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} \cos(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{1}{2} T a_m,$$

op grond van de orthogonaliteitsrelaties. Evenzo zijn de coëfficiënten a_0 en b_m te bepalen.

Merk op dat in de formules 1.1.2 de integralen ook over een willekeurige periode $[t_0, t_0 + T]$ mogen worden genomen omdat $f(t)$ periodiek is met periode T ; zie de "versleepstelling" in het college Wiskunde 30, 3.3.5.

Over de convergentie van Fourierreksen is in het college Wiskunde 30, 3.2.4, 3.3.4 de zg. hoofdstelling bewezen die we hier iets gewijzigd herhalen.

1.1.3. Definitie. Een functie $f(t)$ heet stuksgewijs glad op een interval $[a, b]$ indien

(i) $f(t)$ continu differentieerbaar is op (a, b) , eventueel met uitzondering van een eindig aantal punten c_i ($i = 1, 2, \dots, m$) waarbij

$$f(c_i \pm) := \lim_{h \rightarrow 0} f(c_i \pm h) \quad \text{en} \quad f'(c_i \pm) := \lim_{h \rightarrow 0} f'(c_i \pm h)$$

bestaan;

(ii) $f(a+)$, $f(b-)$, $f'(a+)$ en $f'(b-)$ bestaan.

Opmerking. De voorgaande definitie verschilt van die in het college Wiskunde 30, 3.6.9, waar tevens nog geëist werd dat $f(t)$ continu is op $[a, b]$. Een functie die stuksgewijs glad is op $[a, b]$, voldoet overal op $[a, b]$ aan de Dirichlet-condities als ingevoerd in het college Wiskunde 30, 3.1.8.

1.1.4. Stelling. (hoofdstelling der Fourierreksen). Zij $f(t)$ periodiek met periode T en stuksgewijs glad op $[-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T]$. Dan is de Fourierreks van $f(t)$ convergent voor elke t met som

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] = \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)].$$

Opmerking. Indien $f(t)$ tevens continu is in t , dan is $f(t+) = f(t-) = f(t)$ en de som van de Fourierreeks is gelijk aan $f(t)$.

Voorbeelden. 1) Zij $f(t) = |\cos(\frac{1}{2}\omega_0 t)|$ met $\omega_0 = 2\pi/T$; $f(t)$ is periodiek met periode T . De functie $f(t)$ is even zodat $b_n = 0$, terwijl

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{1}{2}T} \cos(\frac{1}{2}\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{1}{2}T} [\cos((n + \frac{1}{2})\omega_0 t) + \cos((n - \frac{1}{2})\omega_0 t)] dt =$$

$$= \frac{2}{\omega_0 T} \left[\frac{(-1)^n}{n + \frac{1}{2}} - \frac{(-1)^n}{n - \frac{1}{2}} \right] = - \frac{(-1)^n}{\pi(n^2 - \frac{1}{4})}.$$

Omdat $f(t)$ continu en stuksgewijs glad is op $[-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T]$, volgt met de hoofdstelling (1.1.4) voor de Fourierreeks van $f(t)$:

$$|\cos(\frac{1}{2}\omega_0 t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \frac{1}{4}} \cos(n\omega_0 t) \quad \text{voor elke } t.$$

2) Zij $f(t)$ periodiek met periode T en gegeven door

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } 0 < t < \frac{1}{2}T, \\ 0 & \text{voor } \frac{1}{2}T < t < T. \end{cases}$$

We berekenen de Fouriercoëfficiënten van $f(t)$:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{1}{2}T} dt = 1, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{1}{2}T} \cos(n\omega_0 t) dt = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{1}{2}T} \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{\omega_0 T} \frac{1 - (-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{voor } n \text{ even,} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{voor } n \text{ oneven.} \end{cases}$$

Omdat $f(t)$ stuksgewijs glad is op $[0, T]$, volgt voor de Fourierreeks van $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)\omega_0 t)}{2n+1}.$$

In de discontinuïteitpunten $t = \frac{1}{2}mT$, m geheel, moet $f(t)$ in de laatste formule worden vervangen door $\frac{1}{2}[f(\frac{1}{2}mT+) + f(\frac{1}{2}mT-)] = \frac{1}{2}$.

De Fourierreeks 1.1.1 beschrijft de splitsing van $f(t)$ in tijd-harmonische componenten. De n -de term $a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$ heet wel de n -de harmonische van het signaal $f(t)$. In het geval van een stroom $f(t)$ noemt men de term $\frac{1}{2}a_0$ in 1.1.1 de "gelijkstroomterm".

Voor de Fouriercoëfficiënten a_n, b_n geldt de gelijkheid van Parseval:

$$1.1.5. \quad \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f^2(t) dt = \frac{1}{2} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) .$$

Afleiding. Vervang één der factoren $f(t)$ in de integrand door zijn Fourierreeks en integreer termsgewijs, dan volgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f^2(t) dt &= \frac{a_0}{2T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t) dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt + \frac{b_n}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \right] = \\ &= \frac{1}{2} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) . \quad \square \end{aligned}$$

Opmerking. De voorgaande afleiding is formeel in die zin dat niet nagegaan is onder welke voorwaarden de verschillende operaties geoorloofd zijn. Dergelijke formele redeneringen die ook later herhaaldelijk gevolgd zullen worden, worden in dit college aangegeven door "afleiding" in plaats van "bewijs". In de afleiding van 1.1.5 zijn de toegepaste operaties inderdaad geoorloofd als $f(t)$ stuksgewijs glad en continu is; zie college Wiskunde 30, 3.6.11. Evenwel, de gelijkheid van Parseval geldt ook onder de zwakkere voorwaarde dat $f(t)$ integreerbaar is over $[-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T]$.

Het linkerlid van 1.1.5 is te interpreteren als het gemiddelde vermogen van het signaal $f(t)$. Dit gemiddelde vermogen is volgens 1.1.5 gelijk aan de som van de gemiddelde vermogens der afzonderlijke Fouriercomponenten van $f(t)$; de vermogensbijdrage door wisselwerking tussen verschillende componenten is gelijk aan 0.

Voorbeeld. 3) Pas de gelijkheid van Parseval toe op de Fourierreeks uit voorbeeld 2, dan volgt

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

De functies $\cos(n\omega_0 t)$, $\sin(n\omega_0 t)$ in 1.1.1 zijn uit te drukken in $\exp(\pm jn\omega_0 t)$. De Fourierreeks 1.1.1 neemt dan in complexe schrijfwijze de volgende vorm aan:

$$1.1.6. \quad f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega_0 t)$$

met $\omega_0 = 2\pi/T$ en coëfficiënten c_n gegeven door

$$1.1.7. \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt.$$

Met de som van de reeks in 1.1.6 wordt de zg. hoofdwaaarde bedoeld, gegeven door $\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N$. De formule 1.1.7 voor de coëfficiënten c_n is formeel af te leiden door vermenigvuldiging van 1.1.6 met $\exp(-jm\omega_0 t)$ en termsgewijze integratie over $[-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T]$:

$$\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t) \exp(-jm\omega_0 t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} \exp(j(n-m)\omega_0 t) dt = T c_m.$$

De coëfficiënten c_n zijn ook af te leiden uit de vroegere Fouriercoëfficiënten a_n, b_n volgens

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Een periodiek signaal kan nu op twee manieren worden beschreven, namelijk door $f(t)$ als functie van de tijd t (beschrijving in het tijddomein), en door de coëfficiënten c_n (beschrijving in het frequentiedomein). De coëfficiënt c_n als functie van n (of als functie van de hoekfrequentie $\omega = n\omega_0$) heet het frequentiespectrum van $f(t)$. Aangezien deze functie alleen gedefinieerd is voor gehele waarden van n , spreekt men van een discreet frequentiespectrum of lijnspectrum. De (complexe) coëfficiënt c_n is voor te stellen door

$$c_n = |c_n| \exp(j\varphi_n)$$

en men noemt $|c_n|$ en φ_n als functies van $\omega = n\omega_0$, resp. het amplitudespectrum en het fasespectrum van $f(t)$.

Voor een reële periodieke functie $f(t)$ is $c_{-n} = c_n^*$ (c_n^* is de complex geconjugeerde van c_n); daaruit volgt $|c_{-n}| = |c_n|$, $\varphi_{-n} = -\varphi_n$.

De gelijkheid van Parseval (vergelijk 1.1.5) luidt in complexe schrijfwijze:

$$1.1.8. \quad \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 ;$$

hierbij mag $f(t)$ een complexe functie zijn.

Zij de functie $f(t)$ gedefinieerd op $(-\infty, \infty)$ en niet periodiek. Men kan dan niet $f(t)$ ontwikkelen in een Fourierreeks die voor elke t de functie $f(t)$ voorstelt. In plaats daarvan is $f(t)$ voor te stellen door een Fourierintegraal zoals we hierna zullen afleiden. Bij de afleiding wordt verondersteld dat $f(t)$ stuksgewijs glad is op elk eindig interval $[a, b]$, en dat $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ convergent is.

Voer in de hulpfunctie $f_c(t)$ gegeven door

$$f_c(t) = \begin{cases} f(t) & \text{voor } |t| \leq c, \\ 0 & \text{voor } |t| > c. \end{cases}$$

Beschouw $f_c(t)$ op het interval $[-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T]$ met $\frac{1}{2}T > c$, en ontwikkel $f_c(t)$ in een complexe Fourierreeks met periode T . De functie $f_c(t)$ is stuksgewijs glad op $[-\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}T]$, zodat op grond van de hoofdstelling (1.1.4) voor de Fourierreeks van $f_c(t)$ geldt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega_0 t) = \frac{1}{2} [f_c(t+) + f_c(t-)] = \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)] \text{ voor } -c < t < c,$$

met $\omega_0 = 2\pi/T$. De coëfficiënten c_n worden gegeven door

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f_c(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt = \frac{1}{T} \int_{-c}^c f(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt = \frac{\omega_0}{2\pi} F(n\omega_0)$$

onder invoering van de notatie

$$F(\omega) = \int_{-c}^c f(t) \exp(-j\omega t) dt .$$

Substitueer deze coëfficiënten c_n in de Fourierreeks, dan ontstaat er

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)] &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_0 F(n\omega_0) \exp(jn\omega_0 t) = \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi} [\dots + F(-2\omega_0) \exp(-2j\omega_0 t) + F(-\omega_0) \exp(-j\omega_0 t) + \\ &+ F(0) + F(\omega_0) \exp(j\omega_0 t) + F(2\omega_0) \exp(2j\omega_0 t) + \dots] \end{aligned}$$

voor $-c < t < c$. De laatste som is op te vatten als een soort Riemann-som behorend bij de functie $F(\omega) \exp(j\omega t)$ en het interval $(-\infty, \infty)$ verdeeld in deelintervallen $[(n-1)\omega_0, n\omega_0]$ (n geheel) met lengte ω_0 . Intuïtief verwachten we dat voor $T \rightarrow \infty$, $\omega_0 \rightarrow 0$, deze som overgaat in de integraal, waarna volgt

$$\frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad \text{voor } -c < t < c .$$

Bedenk dat de parameter c willekeurig is. Neem nu $c \rightarrow \infty$ dan vinden we het paar integralen

$$1.1.9. \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt ,$$

$$1.1.10. \quad \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad \text{voor elke } t ,$$

en door combinatie

$$1.1.11. \quad \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega t) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-j\omega \tau) d\tau \quad \text{voor elke } t .$$

De integralen 1.1.9 en 1.1.10 heten Fourierintegralen. Merk op dat de integraal 1.1.9 convergent is omdat $|f(t) \exp(-j\omega t)| = |f(t)|$ voor elke t en (volgens veronderstelling) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ convergent is.

Het eindresultaat 1.1.11 staat bekend als de integraalstelling van Fourier. De voorgaande afleiding van 1.1.11 is verre van streng en voornamelijk heuristisch bedoeld. Een bewijs van de stelling wordt gegeven in 1.2.3.

Blijkens 1.1.10 is $f(t)$ voor te stellen door een "som" van tijd-harmonische componenten $F(\omega)\exp(j\omega t)$ met hoekfrequentie ω . Een niet-periodiek signaal kan dan op twee manieren worden beschreven, namelijk door $f(t)$ als functie van de tijd t (beschrijving in het tijd domein), en door $F(\omega)$ als functie van de hoekfrequentie ω (beschrijving in het frequentie domein). De functie $F(\omega)$ heet het (complexe) frequentiespectrum van $f(t)$. Aangezien $F(\omega)$ gedefinieerd is voor elke ω , spreekt men van een continu frequentiespectrum.*) De (complexe) functie $F(\omega)$ is voor te stellen door

$$F(\omega) = |F(\omega)| \exp(j\varphi(\omega))$$

en men noemt $|F(\omega)|$ en $\varphi(\omega)$ als functies van ω , resp. het amplitudespectrum en het fasespectrum van $f(t)$.

1.2. Integraalstelling van Fourier

Als voorbereiding geven we eerst een tweetal hulpstellingen.

1.2.1. Lemma.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{voor } a < 0, \\ 0 & \text{voor } a = 0, \\ \pi/2 & \text{voor } a > 0. \end{cases}$$

Bewijs. Het is voldoende om het lemma te bewijzen voor het geval $a > 0$. Onder de substitutie $ax = t$ gaat de integraal over in

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt,$$

d.i. de integraal met $a = 1$.

Voer nu in de integraal $I(p)$ gegeven door

$$I(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\sin t}{t} dt, \quad p > 0.$$

*) Het begrip continu heeft hier niet de gebruikelijke wiskundige betekenis: $F(\omega)$ hoeft niet een continue functie van ω te zijn.

Differentieer deze naar p onder het integraalteken, dan volgt

$$I'(p) = - \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin t \, dt = -\operatorname{Im} \int_0^{\infty} \exp((-p+j)t) dt = - \frac{1}{p^2+1} .$$

Integratie van deze uitkomst levert

$$I(p) = C - \arctan p ,$$

waarin de integratieconstante C bepaald wordt door de eis $\lim_{p \rightarrow \infty} I(p) = 0$. We vinden dan

$$C = \frac{\pi}{2} , \quad I(p) = \frac{\pi}{2} - \arctan p .$$

Neem tenslotte de limiet van $I(p)$ voor $p \rightarrow 0$, dan volgt

$$\lim_{p \rightarrow 0} I(p) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2} . \quad \square$$

1.2.2. Lemma (lemma van Riemann-Lebesgue). Zij $f(t)$ stuksgewijs glad op $[a,b]$, dan geldt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(t) e^{j\lambda t} \, dt = 0 .$$

Bewijs. Volgens 1.1.3 is $f(t)$ continu differentieerbaar op (a,b) , eventueel met uitzondering van een eindig aantal punten c_i ($i = 1, 2, \dots, m$) waarbij $f(c_i \pm)$ en $f'(c_i \pm)$ bestaan; tevens bestaan $f(a+)$, $f(b-)$, $f'(a+)$ en $f'(b-)$. Beschouw de integraal over een deelinterval $[c_i, c_{i+1}]$ en integreer partieel:

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(t) e^{j\lambda t} \, dt = \frac{1}{j\lambda} [f(c_{i+1}-) \exp(j\lambda c_{i+1}) - f(c_i+) \exp(j\lambda c_i)] - \frac{1}{j\lambda} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f'(t) e^{j\lambda t} \, dt .$$

Voor $\lambda \rightarrow \pm\infty$, nadert het rechterlid tot 0, zodat

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(t) e^{j\lambda t} \, dt = 0 .$$

Evenzo kan men aantonen dat ook de integralen over $[a, c_1]$ en $[c_m, b]$ tot 0 naderen als $\lambda \rightarrow \pm\infty$. Hiermee is het lemma bewezen. \square

Opmerking. Uit het lemma volgt dat ook

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(t) \frac{\cos(\lambda t)}{\sin(\lambda t)} dt = 0 .$$

1.2.3. Stelling (integraalstelling van Fourier). Zij $f(t)$ gedefinieerd op $(-\infty, \infty)$ en stuksgewijs glad op elk eindig interval $[a, b]$, en zij $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ convergent. Dan is de integraal

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

convergent voor elke ω en er geldt

$$\frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{voor elke } t .$$

Bewijs. Uit de betrekking $|f(\tau) e^{-j\omega\tau}| = |f(\tau)|$ voor elke τ , en de convergentie van $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| d\tau$ volgt (zie college Wiskunde 10, 4.4.16) dat $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ (absoluut) convergent is voor elke ω .

Beschouw nu voor $\Omega > 0$ de volgende integraal:

$$I_{\Omega}(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau .$$

Verwissel hierin de integratievolgorde (deze verwisseling is geoorloofd op grond van de convergentie van $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| d\tau$), dan volgt

$$\begin{aligned} I_{\Omega}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Omega(t-\tau))}{t-\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Omega x)}{x} f(t+x) dx \end{aligned}$$

onder toepassing van de substitutie $\tau - t = x$. Splits de laatste integraal in $\int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty}$ en vervang in de eerste van deze integralen x door $-x$, dan ontstaat er

$$I_{\Omega}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\Omega x)}{x} [f(t+x) + f(t-x)] dx .$$

Te bewijzen is dat $I_{\Omega}(t) \rightarrow \frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)]$ als $\Omega \rightarrow \infty$. Schrijf daartoe met behulp van 1.2.1,

$$\frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\Omega x)}{x} [f(t+) + f(t-)] dx .$$

Vorm dan het verschil

$$\begin{aligned} I_{\Omega}(t) - \frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)] &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\Omega x)}{x} [f(t+x) - f(t+)] dx + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\Omega x)}{x} [f(t-x) - f(t-)] dx \end{aligned}$$

en noem de twee integralen in het rechterlid I_1 en I_2 .

De integraal I_1 is als volgt af te schatten:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \sin(\Omega x) \frac{f(t+x) - f(t+)}{x} dx \right| + \left| \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\Delta} \sin(\Omega x) \frac{f(t+x) - f(t+)}{x} dx \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{\pi} \int_{\Delta}^{\infty} \frac{\sin(\Omega x)}{x} f(t+x) dx \right| + \frac{|f(t+)|}{\pi} \left| \int_{\Delta}^{\infty} \frac{\sin(\Omega x)}{x} dx \right| \end{aligned}$$

waarin δ en Δ , met $0 < \delta < \Delta$, nog nader vastgelegd zullen worden.

Kies nu een willekeurige $\epsilon > 0$. Neem δ zo klein dat

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \sin(\Omega x) \frac{f(t+x) - f(t+)}{x} dx \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} |f'(t+\theta x)| dx < \frac{\epsilon}{4} ;$$

hierin is met behulp van de middelwaardstelling geschreven

$$\frac{f(t+x) - f(t+)}{x} = f'(t+\theta x) \quad \text{voor zekere } \theta \in (0,1) .$$

Neem Δ zo groot dat

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\Delta}^{\infty} \frac{\sin(\Omega x)}{x} f(t+x) dx \right| \leq \frac{1}{\pi \Delta} \int_{\Delta}^{\infty} |f(t+x)| dx = \frac{1}{\pi \Delta} \int_{t+\Delta}^{\infty} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4};$$

dit kan omdat $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ convergent is.

Vervolgens bestaat er een getal Ω_1 zodat

$$\left| \frac{f(t+)}{\pi} \int_{\Delta}^{\infty} \frac{\sin(\Omega x)}{x} dx \right| \leq \frac{|f(t+)|}{\pi} \left| \int_{\Omega \Delta}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

voor $\Omega > \Omega_1$, op grond van de convergentie van $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Tenslotte bestaat er een getal Ω_2 zodat

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\Delta} \sin(\Omega x) \frac{f(t+x) - f(t+)}{x} dx \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

voor $\Omega > \Omega_2$, omdat de betreffende integraal tot 0 nadert als $\Omega \rightarrow \infty$ op grond

van 1.2.2. Combineer nu de voorgaande resultaten, dan is $|I_1| < \varepsilon$ voor

$\Omega > \max(\Omega_1, \Omega_2)$, d.w.z. $\lim_{\Omega \rightarrow \infty} I_1 = 0$.

Evenzo kan men aantonen dat $\lim_{\Omega \rightarrow \infty} I_2 = 0$.

Daaruit volgt dat

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} I_{\Omega}(t) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)].$$

Opmerking. Uit het bewijs blijkt dat $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ moet worden opgevat als de zg. hoofdwaarde van de integraal, gedefinieerd door

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Vergelijk dit met de algemene definitie van een oneigenlijke integraal van het type $\int_{-\infty}^{\infty}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \lim_{A_1, A_2 \rightarrow \infty} \int_{-A_1}^{A_2} g(x) dx,$$

waarin $A_1 \rightarrow \infty$, $A_2 \rightarrow \infty$, onafhankelijk van elkaar.

Indien $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ convergent is volgens deze algemene definitie, dan bestaat ook de hoofdwaaarde van de integraal en deze is gelijk aan de integraal zelf. Het omgekeerde geldt niet zoals blijkt uit het voorbeeld $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$. De laatste integraal is divergent volgens de algemene definitie, terwijl de hoofdwaaarde van de integraal gegeven wordt door

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \frac{x}{1+x^2} dx = 0 .$$

1.3. Fourier transformatie, eigenschappen en voorbeelden

Zij de functie $f(t)$ gedefinieerd op $(-\infty, \infty)$. Conform 1.2.3 veronderstellen we dat $f(t)$ stuksgewijs glad is op elk eindig interval $[a, b]$, en dat $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ convergent is.

De "Fourier transform" (Fourier getransformeerde) $F(\omega)$ van $f(t)$ wordt nu gedefinieerd door

$$1.3.1. \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt .$$

De toevoeging $f(t) \rightarrow F(\omega)$ heet Fourier transformatie.

Omgekeerd volgt met de integraalstelling van Fourier (1.2.3) de inverse Fourier transformatie

$$\frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

We nemen aan dat in een eventueel discontinuïteitspunt van $f(t)$ geldt

$$f(t) = \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)] ;$$

door zonodig herdefiniëren van $f(t)$ is dit steeds te realiseren.

Dan volgt

$$1.3.2. \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

voor elke t en we noemen $f(t)$ de inverse Fourier transform van $F(\omega)$.

Zoals eerder opgemerkt moet $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ in 1.3.2 worden opgevat als de hoofdwaarde van de integraal. Gemakshalve zullen we ook in 1.3.1 de hoofdwaarde van de integraal nemen.

Met nadruk wordt erop gewezen dat de veronderstellingen: (i) $f(t)$ is stuksgewijs glad op elk eindig interval $[a,b]$, (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ is convergent, voldoende voorwaarden zijn voor de geldigheid van de integraalstelling van Fourier. De stelling blijft ook geldig onder zwakkere voorwaarden voor $f(t)$ waarbij bijv. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ slechts convergent en niet absoluut convergent hoeft te zijn; zie voorbeeld 1 van deze paragraaf. In het vervolg zullen we stilzwijgend aannemen dat $f(t)$ voldoet aan zodanige voorwaarden, dat $F(\omega)$ als gedefinieerd in 1.3.1 bestaat voor elke ω en de inversieformule 1.3.2 geldig is.

De toevoeging van $F(\omega)$ aan $f(t)$ en omgekeerd, zullen we kort aangeven door

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

of ook door

$$F(\omega) = F\{f(t)\}, f(t) = F^{-1}\{F(\omega)\} .$$

In het algemeen is $f(t)$ een complexe functie, te schrijven als

$$f(t) = f_1(t) + jf_2(t) ,$$

waarin $f_1(t)$ en $f_2(t)$ resp. het reële en imaginaire deel van $f(t)$ voorstellen. Evenzo is $F(\omega)$ te schrijven in de vorm

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) ,$$

met reëel deel $R(\omega)$ en imaginair deel $X(\omega)$.

De Fourier transformatie 1.3.1 gaat dan over in

$$R(\omega) + jX(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) + jf_2(t)][\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)]dt$$

en door gelijkstelling van resp. de reële en imaginaire delen links en rechts volgt

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)\cos(\omega t) + f_2(t)\sin(\omega t)]dt ,$$

$$X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)\sin(\omega t) - f_2(t)\cos(\omega t)]dt .$$

1.3.3.

De inverse Fourier transformatie 1.3.2 gaat over in

$$f_1(t) + jf_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) + jX(\omega)][\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]d\omega ,$$

waaruit volgt

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega)\cos(\omega t) - X(\omega)\sin(\omega t)]d\omega ,$$

1.3.4.

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega)\sin(\omega t) + X(\omega)\cos(\omega t)]d\omega .$$

We onderzoeken nu de betrekkingen 1.3.3, 1.3.4 in de volgende twee speciale gevallen:

- (i) $f(t)$ reëel. Dan is $f(t) = f_1(t)$, $f_2(t) = 0$, en $R(\omega)$, $X(\omega)$ worden gegeven door

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\cos(\omega t)dt; \quad X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\sin(\omega t)dt .$$

Het is duidelijk dat $R(\omega)$ een even functie is en $X(\omega)$ een oneven functie is, d.w.z. $R(-\omega) = R(\omega)$, $X(-\omega) = -X(\omega)$, of samengevat $F(-\omega) = F^*(\omega)$ ($F^*(\omega)$ is de complex geconjugeerde van $F(\omega)$); men noemt $F(\omega)$ dan hermitisch. Omgekeerd, als $F(-\omega) = F^*(\omega)$, dan is de integrand $R(\omega)\sin(\omega t) + X(\omega)\cos(\omega t)$ in 1.3.4 een oneven functie van ω , zodat $f_2(t) = 0$; $f(t) = f_1(t)$ is dan reëel.

Indien $f(t) = f_1(t)$ een even functie is, dan is $X(\omega) = 0$, $F(\omega)$ reëel, en omgekeerd.

Indien $f(t) = f_1(t)$ een oneven functie is, dan is $R(\omega) = 0$, $F(\omega)$ zuiver imaginair, en omgekeerd.

Voor reële $f(t)$ kan de inversieformule 1.3.4 worden geschreven in de vorm

$$\begin{aligned} f(t) = f_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega)\cos(\omega t) - X(\omega)\sin(\omega t)]d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [R(\omega)\cos(\omega t) - X(\omega)\sin(\omega t)]d\omega = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega . \end{aligned}$$

(ii) f(t) zuiver imaginair. Dan is $f(t) = jf_2(t)$, $f_1(t) = 0$, en $R(\omega)$, $X(\omega)$ worden gegeven door

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) \sin(\omega t) dt, \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) \cos(\omega t) dt .$$

In dit geval is $R(\omega)$ een oneven functie en $X(\omega)$ is een even functie, d.w.z. $R(-\omega) = -R(\omega)$, $X(-\omega) = X(\omega)$, of samengevat $F(-\omega) = -F^*(\omega)$; men noemt $F(\omega)$ dan scheef-hermitisch. Omgekeerd, als $F(-\omega) = -F^*(\omega)$, dan is de integrand $R(\omega)\cos(\omega t) - X(\omega)\sin(\omega t)$ in 1.3.4 een oneven functie van ω , zodat $f_1(t) = 0$; $f(t) = jf_2(t)$ is dan zuiver imaginair.

Indien $f(t) = jf_2(t)$ een even functie is, dan is $R(\omega) = 0$, $F(\omega)$ zuiver imaginair, en omgekeerd. Indien $f(t) = jf_2(t)$ een oneven functie is, dan is $X(\omega) = 0$, $F(\omega)$ reëel, en omgekeerd.

Voor zuiver imaginaire $f(t)$ kan de inversieformule 1.3.4 worden geschreven in de vorm

$$\begin{aligned} f(t) = jf_2(t) &= \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega)\sin(\omega t) + X(\omega)\cos(\omega t)] d\omega = \\ &= \frac{j}{\pi} \int_0^{\infty} [R(\omega)\sin(\omega t) + X(\omega)\cos(\omega t)] d\omega = \frac{j}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega . \end{aligned}$$

We vatten de voorgaande resultaten nog samen in de volgende tabel.

f(t)	F(ω)
reëel	hermitisch
zuiver imaginair	scheef-hermitisch
even	even
oneven	oneven
<hr style="border-top: 1px dashed black;"/>	
reëel, even	reëel, even
reëel, oneven	zuiver imaginair, oneven
zuiver imaginair, even	zuiver imaginair, even
zuiver imaginair, oneven	reëel, oneven

1.3.5. Definitie. Een functie $f(t)$ heet causaal indien $f(t) = 0$ voor $t < 0$.

Zij $f(t)$ een reële causale functie. Volgens 1.3.3 worden het reële en imaginaire deel van $F(\omega)$ dan gegeven door

$$R(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt, \quad X(\omega) = - \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt .$$

Daar $R(\omega)$ een even functie is en $X(\omega)$ een oneven functie, is de inverse transformatie 1.3.4 te herleiden tot

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [R(\omega) \cos(\omega t) - X(\omega) \sin(\omega t)] d\omega ,$$

geldig voor elke t . Speciaal voor $t = 0$ geldt

$$f(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) d\omega = \frac{1}{2} f(0+) .$$

Beschouw nu de voorgaande inversieformule voor $t > 0$ en voor $t < 0$. Vervang in het laatste geval t door $-t$ en bedenk dat $f(-t) = 0$ voor $t > 0$. We vinden dan

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [R(\omega) \cos(\omega t) - X(\omega) \sin(\omega t)] d\omega \quad \text{voor } t > 0 ,$$

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [R(\omega) \cos(\omega t) + X(\omega) \sin(\omega t)] d\omega \quad \text{voor } t > 0 ,$$

waaruit door resp. optellen en aftrekken volgt

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos(\omega t) d\omega = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \sin(\omega t) d\omega \quad \text{voor } t > 0 .$$

Voor een reële causale functie $f(t)$ zijn $R(\omega)$ en $X(\omega)$ niet onafhankelijk van elkaar. Door substitutie van $f(t)$ als boven in de formules voor $R(\omega)$ en $X(\omega)$ vinden we een éénduidig verband:

$$R(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega t) dt \int_0^{\infty} X(u) \sin(ut) du ,$$

$$X(\omega) = - \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\omega t) dt \int_0^{\infty} R(u) \cos(ut) du .$$

We komen hierop terug in 2.2. Daar wordt aangetoond dat $R(\omega)$ en $X(\omega)$ samenhangen door de zg. Hilbert transformatie.

We geven een aantal eigenschappen en rekenregels voor de Fourier transformatie. Hierbij is steeds verondersteld dat $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, d.w.z. $f(t)$ en $F(\omega)$ hangen samen volgens 1.3.1 en 1.3.2.

1.3.6. Eigenschappen en rekenregels

- 1) Lineariteit $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$.
 2) Reciprociteit $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$.

Afleiding. Verwissel in 1.3.1 en 1.3.2 de symbolen ω en t en vervang daarna ω door $-\omega$, dan volgt

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt, \quad F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi f(-\omega) e^{j\omega t} d\omega ;$$

dus $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$. □

- 3) Conjugatie $f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega)$.

Afleiding.

$$F\{f^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-j\omega t} dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right]^* = F^*(-\omega) . \quad \square$$

- 4) Schaalverandering $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ voor reële $a \neq 0$.

Afleiding. Indien $a > 0$ volgt met de substitutie $\tau = at$:

$$F\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau/a} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) .$$

Indien $a < 0$ krijgt het eindresultaat een min-teken omdat bij de substitutie de integratiegrenzen $-\infty$ en ∞ verwisseld worden. □

Als speciaal geval van 4) hebben we $f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$.

5) Verschuiving in de tijd $f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) \exp(-j\omega t_0)$.

Afleiding. Onder de substitutie $t - t_0 = \tau$ is

$$F\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-j\omega(\tau + t_0)) d\tau = F(\omega) \exp(-j\omega t_0). \quad \square$$

6) Verschuiving in de frequentie $f(t) \exp(j\omega_0 t) \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$.

Afleiding.

$$F\{f(t) \exp(j\omega_0 t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j(\omega - \omega_0)t) dt = F(\omega - \omega_0). \quad \square$$

Uit 6) volgt eenvoudig het zg. modulatietheorema

$$f(t) \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} f(t) [\exp(j\omega_0 t) + \exp(-j\omega_0 t)] \leftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)].$$

In het geval dat $f(t)$ reëel is beschrijft de functie $f(t) \cos(\omega_0 t)$ een amplitude-gemoduleerd signaal met omhullende $f(t)$ en drager $\cos(\omega_0 t)$ met hoekfrequentie ω_0 .

7) Differentiatie naar de tijd

$$f'(t) \leftrightarrow j\omega F(\omega) \quad \text{mits } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0,$$

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega) \quad \text{mits } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f^{(k)}(t) = 0 \text{ voor } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Afleiding. We beperken ons tot het geval van $f'(t)$. Door partiële integratie volgt

$$F\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt = f(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega F(\omega). \quad \square$$

8) Integratie naar de tijd

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega} \quad \text{mits } \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau = F(0) = 0.$$

Afleiding. Stel $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$, dan is $g'(t) = f(t)$ en $g(t) \rightarrow 0$ als $t \rightarrow \pm\infty$. Door partiële integratie is dan af te leiden

$$F\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} g(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{F(\omega)}{j\omega}. \quad \square$$

- 9) Differentiatie naar de frequentie $(-jt)^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(\omega)$.
Afleiding. Ga uit van

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(\omega)$$

en differentieer deze betrekking n keer naar ω :

$$F\{(-jt)^n f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} (-jt)^n f(t) e^{-j\omega t} dt = F^{(n)}(\omega) .$$

De hierbij toegepaste differentiatie onder het integraalteken is geoorloofd onder de voldoende voorwaarde dat $\int_{-\infty}^{\infty} |t^n f(t)| dt$ convergent is. \square

Opmerking. Let op de "symmetrie" tussen de regels 5) en 6), en tussen de regels 7) en 9). Deze symmetrie is in overeenstemming met de reciprociteitsregel 2).

Voorbeelden. 1) De rechthoekige puls $p_a(t)$ ($a > 0$) wordt gedefinieerd door

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } |t| < \frac{1}{2}a , \\ 0 & \text{voor } |t| > \frac{1}{2}a . \end{cases}$$

Voor de Fourier transform van $p_a(t)$ vinden we

$$F\{p_a(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} e^{-j\omega t} dt = \frac{2 \sin(\frac{1}{2}a\omega)}{\omega} .$$

Omgekeerd geldt dan op grond van de reciprociteitsregel 1.3.6,2):

$$F\left\{\frac{\sin(at)}{\pi t}\right\} = p_{2a}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{voor } |\omega| < a , \\ 0 & \text{voor } |\omega| > a , \end{cases} \quad a > 0 .$$

Dit resultaat is ook rechtstreeks af te leiden met behulp van 1.2.1:

$$\begin{aligned} F\left\{\frac{\sin(at)}{\pi t}\right\} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(at)}{t} e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(at) \cos(\omega t)}{t} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin((a+\omega)t)}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin((a-\omega)t)}{t} dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(a+\omega) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(a-\omega) = \begin{cases} 1 & \text{voor } |\omega| < a, \\ \frac{1}{2} & \text{voor } |\omega| = a, \\ 0 & \text{voor } |\omega| > a. \end{cases}$$

Merk op dat voor $\omega = a$ de Fourier transform gelijk is aan $\frac{1}{2}[p_{2a}(a+) + p_{2a}(a-)] = \frac{1}{2}$, en evenzo voor $\omega = -a$. We merken voorts op dat de integraalstelling van Fourier hier geldig blijkt te zijn ondanks het feit dat $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(at)}{\pi t} \right| dt$ niet convergent is; vergelijk met 1.2.3. De driehoekige puls $q_a(t)$ ($a > 0$) wordt gedefinieerd door

$$q_a(t) = \begin{cases} 1 - |t|/a & \text{voor } |t| \leq a, \\ 0 & \text{voor } |t| > a. \end{cases}$$

Onder Fourier transformatie geldt

$$q_a(t) \leftrightarrow \frac{4 \sin^2(\frac{1}{2}a\omega)}{a\omega^2}.$$

De afleiding wordt aan de lezer overgelaten.

2) De (eenheids)stapfunctie $u(t)$ wordt gedefinieerd door

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0, \\ 1 & \text{voor } t > 0. \end{cases}$$

Beschouw de functie

$$f(t) = e^{-at} u(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0, \\ e^{-at} & \text{voor } t > 0, \end{cases} \quad a > 0.$$

We bepalen het frequentiespectrum (Fourier transform) van $f(t)$:

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = - \left. \frac{\exp(-(a+j\omega)t)}{a+j\omega} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}.$$

Hieruit volgt voor het amplitude- en fasespectrum van $f(t)$:

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arg F(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Evenzo geldt

$$F\{e^{at} u(-t)\} = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{\exp((a-j\omega)t)}{a-j\omega} \right|_{-\infty}^0 = \frac{1}{a-j\omega}, \quad a > 0.$$

Door optelling van de voorgaande Fouriertransforms volgt nog

$$F\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad a > 0.$$

Men kan gemakkelijk nagaan dat de resultaten van dit voorbeeld geldig blijven voor complexe a met $\text{Re } a > 0$.

3) In het college Wiskunde 40, p. 98-99, is berekend de integraal

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu\alpha} e^{-\mu^2\beta} d\mu = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\beta}\right), \quad \beta > 0.$$

Met behulp van dit resultaat is af te leiden

$$F\{\exp(-at^2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right), \quad a > 0.$$

Men noemt $\exp(-at^2)$ wel een Gausse functie; de bijbehorende Fourier transform is eveneens een Gausse functie.

We vatten de resultaten van deze voorbeelden nog samen in de volgende tabel van Fourier transforms.

1.3.7. Tabel

$f(t)$	\longleftrightarrow	$F(\omega)$
$p_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t < \frac{1}{2}a, \\ 0 & \text{voor } t > \frac{1}{2}a, \end{cases} \quad a > 0$		$\frac{2 \sin(\frac{1}{2}a\omega)}{\omega}$
$\frac{\sin(at)}{\pi t}, \quad a > 0$		$p_{2a}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{voor } \omega < a \\ 0 & \text{voor } \omega > a \end{cases}$
$q_a(t) = \begin{cases} 1- t /a & \text{voor } t \leq a, \\ 0 & \text{voor } t > a, \end{cases} \quad a > 0$		$\frac{4 \sin^2(\frac{1}{2}a\omega)}{a\omega^2}$
$\frac{\sin^2(at)}{\pi at^2}, \quad a > 0$		$q_{2a}(\omega) = \begin{cases} 1- \omega /(2a) & \text{voor } \omega \leq 2a \\ 0 & \text{voor } \omega > 2a \end{cases}$
$e^{-a t }, \quad \text{Re } a > 0$		$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-at} u(t), \quad \text{Re } a > 0$		$\frac{1}{a + j\omega}$
$e^{at} u(-t), \quad \text{Re } a > 0$		$\frac{1}{a - j\omega}$
$\exp(-at^2), \quad a > 0$		$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right).$

Onder toepassing van de rekenregels 1.3.6 is de voorgaande tabel nog verder uit te breiden.

Voorbeeld. 4) Met behulp van het modulatietheorema 1.3.6,6) volgt

$$p_a(t) \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{\sin(\frac{1}{2}a(\omega - \omega_0))}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin(\frac{1}{2}a(\omega + \omega_0))}{\omega + \omega_0}, \quad a > 0,$$

$$e^{-at} \cos(bt) u(t) \leftrightarrow \frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + b^2}, \quad \text{Re } a > 0.$$

Met behulp van de reciprociteitsregel 1.3.6,2) is af te leiden

$$\frac{1}{a^2 + t^2} \leftrightarrow \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}, \quad \text{Re } a > 0,$$

en vervolgens met het modulatietheorema

$$\frac{\cos(bt)}{a^2 + t^2} \leftrightarrow \frac{\pi}{2a} [e^{-a|\omega-b|} + e^{-a|\omega+b|}], \quad \text{Re } a > 0.$$

Op grond van 1.3.6,9) is

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{j^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{d}{d\omega} \right)^{n-1} \left[\frac{1}{a + j\omega} \right] = \frac{1}{(a + j\omega)^n}, \quad \text{Re } a > 0, \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

Een rationale functie $T(j\omega)/N(j\omega)$ met $\text{gr}(T) < \text{gr}(N)$ is te splitsen in partiële breuken van de vorm $1/(a + j\omega)^n$ met $n = 1, 2, 3, \dots$ en in het algemeen complexe a . De inverse Fourier transform van de functie is dan te vinden met behulp van de tabel 1.3.7.

Voorbeeld. 5) Gevraagd wordt te bepalen de inverse Fourier transform

$$F^{-1} \left\{ \frac{-1 + 5j\omega}{(2 - j\omega)(1 + j\omega)^2} \right\} = f(t).$$

Splits de functie in partiële breuken:

$$\frac{-1 + 5j\omega}{(2 - j\omega)(1 + j\omega)^2} = \frac{1}{2 - j\omega} + \frac{1}{1 + j\omega} - \frac{2}{(1 + j\omega)^2},$$

dan volgt met de tabel 1.3.7 en voorbeeld 4,

$$f(t) = e^{2t} u(-t) + e^{-t} u(t) - 2te^{-t} u(t) = \begin{cases} e^{2t} & \text{voor } t < 0, \\ (1 - 2t)e^{-t} & \text{voor } t > 0. \end{cases}$$

1.4. Convolutie, correlatie, bemonsteringstheorema

1.4.1. Definitie. De convolutie van twee functies $f_1(t)$ en $f_2(t)$ is de functie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau .$$

Notatie: $h(t) = f_1(t) * f_2(t)$.

Voldoende voorwaarde voor het bestaan van $f_1(t) * f_2(t)$ is dat $f_1(t)$ of $f_2(t)$ begrensd is, en dat resp. $\int_{-\infty}^{\infty} |f_2(t)| dt$ of $\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)| dt$ convergent is. Met de substitutie $t - \tau = \sigma$ volgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\sigma) f_1(t - \sigma) d\sigma ,$$

zodat $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$; de convolutie is dus commutatief.

Indien $f_1(t)$ en $f_2(t)$ causale functies zijn, d.w.z. $f_1(t) = f_2(t) = 0$ voor $t < 0$, gaat de convolutie over in

$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau & \text{voor } t > 0 \end{cases} = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau u(t),$$

i.e. $f_1(t) * f_2(t)$ is eveneens een causale functie; vergelijk dit met de definitie van convolutie in het college Wiskunde 30, 4.2.4.

Voorbeelden. 1) Met de notatie $u(t)$ voor de stapfunctie is

$$\begin{aligned} f(t) * u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau , \\ \{f(t)u(t)\} * u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) u(\tau) u(t - \tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \\ \int_0^t f(\tau) d\tau & \text{voor } t > 0 \end{cases} = \\ &= \int_0^t f(\tau) d\tau u(t) . \end{aligned}$$

2) Beschouw de rechthoekige puls $p_a(t)$ ($a > 0$) als gedefinieerd in 1.3, voorbeeld 1.

De convolutie van $p_a(t)$ met zichzelf wordt gegeven door

$$p_a(t) * p_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(\tau) p_a(t-\tau) d\tau .$$

Merk op dat $p_a(\tau) = 0$ buiten het interval $[-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a]$ en $p_a(t-\tau) = 0$ buiten het interval $[t-\frac{1}{2}a, t+\frac{1}{2}a]$. De convolutie-integraal is dan 0 als $t-\frac{1}{2}a > \frac{1}{2}a$ oftewel $t > a$, en als $t+\frac{1}{2}a < -\frac{1}{2}a$ oftewel $t < -a$. Voor $0 \leq t \leq a$ is

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_a(\tau) p_a(t-\tau) d\tau = \int_{t-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a} d\tau = a - t ,$$

en voor $-a \leq t \leq 0$ is

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_a(\tau) p_a(t-\tau) d\tau = \int_{-\frac{1}{2}a}^{t+\frac{1}{2}a} d\tau = a + t .$$

Samengevat vinden we

$$p_a(t) * p_a(t) = \begin{cases} a-|t| & \text{voor } |t| \leq a \\ 0 & \text{voor } |t| > a \end{cases} = a q_a(t) ,$$

waarin $q_a(t)$ de bekende driehoekige puls voorstelt.

1.4.2. Stelling (convolutiestelling in het tijddomein). Zij $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$, dan geldt

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) .$$

Afleiding. Bepaal de Fourier transform van $f_1(t) * f_2(t)$ als volgt:

$$\begin{aligned} F\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) F_2(\omega) e^{-j\omega \tau} d\tau = F_1(\omega) F_2(\omega) . \end{aligned}$$

Hierbij is (formele) verwisseling van de integratievolgorde toegepast en gebruik gemaakt van 1.3.6, regel 5). □

1.4.3. Stelling (convolutiestelling in het frequentiedomein). Zij $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$, dan geldt

$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega-u)du .$$

Afleiding. In de Fourier transform

$$F\{f_1(t)f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t} dt$$

substitueren we

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)e^{jut} du .$$

Dan volgt onder verwisseling van de integratievolgorde,

$$\begin{aligned} F\{f_1(t)f_2(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)e^{jut} du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)du \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)\exp(-j(\omega-u)t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega-u)du = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) . \quad \square \end{aligned}$$

Voorbeelden. 3) De convolutie $p_a(t) * p_a(t) = aq_a(t)$ uit voorbeeld 2 gaat onder Fourier transformatie over in

$$F\{q_a(t)\} = \frac{1}{a} [F\{p_a(t)\}]^2 = \frac{4 \sin^2(\frac{1}{2}a\omega)}{a\omega^2} ,$$

in overeenstemming met tabel 1.3.7.

4) Uitgaande van $e^{-at}u(t) \leftrightarrow 1/(a+j\omega)$ met $\text{Re } a > 0$ (zie de tabel 1.3.7), is op grond van de convolutiestelling 1.4.2,

$$F^{-1}\left\{\frac{1}{(a+j\omega)^2}\right\} = \{e^{-at}u(t)\} * \{e^{-at}u(t)\} = \int_0^t e^{-a\tau} e^{-a(t-\tau)} d\tau u(t) = te^{-at}u(t) .$$

5) Een signaal $f(t)$ wordt toegevoerd aan een ideaal laagdoorlatend filter waardoor in het frequentiespectrum $F(\omega)$ de hoogfrequente componenten met $|\omega| > a$ worden afgesneden. Het uitgangssignaal $f_{2a}(t)$ heeft dan het frequentiespectrum

$$F_{2a}(\omega) = F(\omega)p_{2a}(\omega) = \begin{cases} F(\omega) & \text{voor } |\omega| < a, \\ 0 & \text{voor } |\omega| > a. \end{cases}$$

Met behulp van $\frac{\sin(at)}{\pi t} \leftrightarrow p_{2a}(\omega)$ en 1.4.2, vinden we

$$f_{2a}(t) = f(t) * \frac{\sin(at)}{\pi t} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{\sin(a(t-\tau))}{\pi(t-\tau)} d\tau.$$

Beschouw vervolgens het effect van afsnijden in de tijd, waarbij $f(t)$ wordt vervangen door

$$f(t)p_{2a}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{voor } |t| < a, \\ 0 & \text{voor } |t| > a. \end{cases}$$

Met behulp van $p_{2a}(t) \leftrightarrow (2/\omega)\sin(a\omega)$ en 1.4.3, vinden we voor het frequentiespectrum,

$$f(t)p_{2a}(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \frac{2 \sin(a\omega)}{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \frac{\sin(a(\omega-u))}{\pi(\omega-u)} du.$$

Zij $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$, dan geldt op grond van de convolutiestelling 1.4.3,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega-u)du.$$

Stel hierin $\omega = 0$ en vervang daarna de integratievariabele u door ω , dan ontstaat er

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2(-\omega)d\omega.$$

Teneinde tot een meer symmetrische uitkomst te komen, vervangen we $f_2(t)$ door $f_2^*(t)$ met bijbehorende Fourier transform $F_2^*(-\omega)$ (zie 1.3.6, regel 3)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2^*(\omega) d\omega .$$

Neem tenslotte $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ met bijbehorende Fourier transform $F(\omega)$, dan volgt de gelijkheid van Parseval:

1.4.4.
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega .$$

Vergelijk deze betrekking met de gelijkheid van Parseval uit de theorie der Fourierreeksen als gegeven in 1.1.5, 1.1.8.

Het linkerlid van 1.4.4 is te interpreteren als de energie-inhoud van het signaal $f(t)$. De functie $|F(\omega)|^2$ wordt het energiespectrum van $f(t)$ genoemd. De gelijkheid van Parseval is o.a. te gebruiken voor de berekening van bepaalde integralen.

Voorbeeld. 6) Uit de tabel 1.3.7 citeren we $\frac{\sin^2 t}{t^2} \leftrightarrow \pi q_2(\omega)$. Met behulp van de gelijkheid van Parseval volgt dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [q_2(\omega)]^2 d\omega = \pi \int_0^2 (1 - \frac{1}{2}\omega)^2 d\omega = \frac{2\pi}{3} .$$

Laat $f_1(t)$ en $f_2(t)$ reële functies zijn met eindige energie-inhoud, d.w.z. $\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)|^2 dt$ en $\int_{-\infty}^{\infty} |f_2(t)|^2 dt$ zijn convergent. De kruiscorrelatie $\rho_{12}(t)$ van $f_1(t)$ en $f_2(t)$ wordt dan gedefinieerd door

1.4.5.
$$\rho_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t + \tau) d\tau .$$

Vervang in deze integraal τ door $-\tau$, dan is $\rho_{12}(t)$ te schrijven als een convolutie:

$$\rho_{12}(t) = f_1(-t) * f_2(t) .$$

De kruiscorrelatie is niet commutatief. Voor de kruiscorrelatie $\rho_{21}(t)$ van $f_2(t)$ en $f_1(t)$ geldt namelijk

$$\rho_{21}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_1(t+\tau) d\tau = f_2(-t) * f_1(t)$$

en het is duidelijk dat $\rho_{12}(t) \neq \rho_{21}(t)$ is; er geldt wel

$$\rho_{12}(t) = \rho_{21}(-t) .$$

Zij $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$, dan volgt met de convolutiestelling (1.4.2) voor de Fourier transform van de kruiscorrelatie:

$$\rho_{12}(t) \leftrightarrow F_1^*(\omega) F_2(\omega), \quad \rho_{21}(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2^*(\omega) .$$

Bedenk hierbij dat $f_{1,2}(-t) \leftrightarrow F_{1,2}(-\omega) = F_{1,2}^*(\omega)$, op grond van 1.3.6, regel 4) en het gegeven dat $f_1(t)$ en $f_2(t)$ reëel zijn (zie p. 15, punt (i)).

De kruiscorrelatie van een (reële) functie $f(t)$ met zichzelf heet de auto-correlatie van $f(t)$ en wordt derhalve gedefinieerd door

$$1.4.6. \quad \rho(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t+\tau) d\tau = f(-t) * f(t) .$$

Uit de definitie volgt dat $\rho(t)$ een even functie van t is:

$$\rho(t) = \rho(-t) .$$

Zij $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, dan gaat $\rho(t)$ onder Fourier transformatie over in

$$\rho(t) \leftrightarrow F^*(\omega) F(\omega) = |F(\omega)|^2 ,$$

d.i. het energiespectrum van $f(t)$. Door uitschrijven van deze betrekking volgt het theorema van Wiener-Khintchine:

$$1.4.7. \quad |F(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) e^{-j\omega t} dt ,$$

$$\rho(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 e^{j\omega t} d\omega .$$

Stel $t = 0$ in de laatste formule, dan volgt opnieuw de gelijkheid van Parseval,

$$\rho(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega .$$

Uit dezelfde formule volgt ook

$$|\rho(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \rho(0) ,$$

i.e. de autocorrelatie $\rho(t)$ is maximaal voor $t = 0$.

1.4.8. Stelling (bemonsteringstheorema in het tijddomein). Zij $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, en zij $F(\omega) = 0$ voor $|\omega| > \omega_c$ (men noemt $f(t)$ dan een bandbegrensde functie). Dan geldt

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{\sin(\omega_c(t-nT))}{\omega_c(t-nT)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right) \frac{\sin(\omega_c t - n\pi)}{\omega_c t - n\pi} ,$$

waarin $T = \pi/\omega_c$.

Afleiding. Wegens $F(\omega) = 0$ voor $|\omega| > \omega_c$, geldt

$$f(t) = F^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

Ontwikkel de functie $F(\omega)$ op het interval $[-\omega_c, \omega_c]$ in een complexe Fourierreeks met periode $2\omega_c$ (vergelijk 1.1.6, 1.1.7):

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega T) \quad \text{voor } |\omega| < \omega_c ,$$

met $T = \pi/\omega_c$. Hierbij zijn de coëfficiënten c_n te herleiden tot

$$c_n = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} F(\omega) \exp(-jn\omega T) d\omega = \frac{\pi}{\omega_c} f(-nT) .$$

Na vervanging van n door $-n$ vinden we dan voor de Fourierreeks van $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{\pi}{\omega_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \exp(-jn\omega T) \quad \text{voor } |\omega| < \omega_c .$$

Substitueer deze reeks in de inversieformule als boven en integreer termsgewijs, dan volgt

$$f(t) = \frac{1}{2\omega_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \exp(j\omega(t-nT)) d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{\sin(\omega_c(t-nT))}{\omega_c(t-nT)} \cdot \square$$

Toevoeging. De stelling drukt uit dat een bandbegrensd functie $f(t)$ éénduidig bepaald wordt door haar waarden $f(nT)$ (bemonsteringen) in equidistante punten op afstand $T = \pi/\omega_c$. Men kan dit resultaat nog als volgt uitbreiden. Indien $F(\omega) = 0$ voor $|\omega| > \omega_c$, dan is ook $F(\omega) = 0$ voor $|\omega| > \omega_0$, voor elke $\omega_0 \geq \omega_c$. Toepassing van de stelling 1.4.8 leidt vervolgens tot

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{\sin(\omega_0(t-nT))}{\omega_0(t-nT)}$$

waarin nu $T = \pi/\omega_0 \leq \pi/\omega_c$. Hieruit volgt dat een bandbegrensd functie als in 1.4.8 volledig bepaald wordt door haar bemonsteringen in equidistante punten op afstand $T \leq \pi/\omega_c$.

1.4.9. Stelling (bemonsteringstheorema in het frequentiedomein). Zij $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, en zij $f(t) = 0$ voor $|t| > T$ ($f(t)$ beschrijft dan een signaal van eindige tijdsduur). Dan geldt

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{n\pi}{T}\right) \frac{\sin(\omega T - n\pi)}{\omega T - n\pi}.$$

Afleiding. Wegens $f(t) = 0$ voor $|t| > T$, geldt

$$F(\omega) = F\{f(t)\} = \int_{-T}^T f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Ontwikkel de functie $f(t)$ op het interval $[-T, T]$ in een complexe Fourierreeks met periode $2T$ (vergelijk 1.1.6, 1.1.7):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\pi t/T) \quad \text{voor } |t| < T,$$

waarin de coëfficiënten c_n te herleiden zijn tot

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \exp(-jn\pi t/T) dt = \frac{1}{2T} F\left(\frac{n\pi}{T}\right).$$

Substitueer deze Fourierreeks in de Fourierintegraal als boven en integreer termsgewijs, dan volgt

$$F(\omega) = \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{n\pi}{T}\right) \int_{-T}^T \exp(j(-\omega + n\pi/T)t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{n\pi}{T}\right) \frac{\sin(\omega T - n\pi)}{\omega T - n\pi} . \quad \square$$

Opmerking. De stelling drukt uit dat voor een signaal met eindige tijdsduur $2T$, het frequentiespectrum $F(\omega)$ éénduidig bepaald wordt door de waarden $F(n\pi/T)$ in equidistante punten op afstand π/T . Dit resultaat is nog uit te breiden op dezelfde wijze als 1.4.8.

1.5. Delta-functie, gegeneraliseerde Fourier transformatie

De delta-functie van Dirac wordt veelal gedefinieerd door de volgende eigenschappen:

$$\delta(t) = 0 \text{ voor } t \neq 0, \quad \delta(0) = \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 .$$

Mathematisch is deze definitie onbevredigend omdat de genoemde eigenschappen strijdig zijn. Als namelijk een functie overal nul is behalve in één punt, dan is de integraal van de functie noodzakelijk gelijk aan nul. De delta-functie is dan ook geen functie in de gewone zin. Een uitweg uit deze moeilijkheid biedt de theorie der distributies afkomstig van Schwartz (1950). In deze theorie wordt ingevoerd het begrip distributie of gegeneraliseerde functie dat een uitbreiding vormt van het klassieke begrip functie. De delta-functie blijkt dan een distributie te zijn. Aangezien een behandeling van de theorie der distributies niet goed mogelijk is in dit college, geven we de volgende meer elementaire opzet.

Beschouw de verzameling van functies $p_{\alpha}(t)$ gedefinieerd door

$$p_{\alpha}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{voor } |t| < \frac{1}{2}\alpha, \\ 0 & \text{voor } |t| > \frac{1}{2}\alpha, \end{cases}$$

met parameter $\alpha > 0$. De functie $p_{\alpha}(t)$ beschrijft een rechthoekige puls met hoogte $1/\alpha$ en tijdsduur α . Merk op dat de notatie $p_{\alpha}(t)$ hier een iets andere betekenis heeft dan in 1.3, voorbeeld 1.

In plaats van een definitie van $\delta(t)$ geven we nu een tweetal regels voor het opereren met de delta-functie.

1.5.1. Regel. Zij $\varphi(t)$ een continue functie, dan is

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha}(t)\varphi(t)dt .$$

1.5.2. Regel. Laat $d_1(t)$ en $d_2(t)$ uitdrukkingen zijn welke delta-functies en andere functies bevatten. Dan is $d_1(t) = d_2(t)$, indien geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_1(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} d_2(t)\varphi(t)dt$$

voor elke continue functie $\varphi(t)$ waarvoor de integralen bestaan.

Op basis van deze regels zullen we hierna een aantal eigenschappen en rekenregels voor de delta-functie afleiden.

Op grond van 1.5.1 schrijft men wel

$$\delta(t) = \text{"lim"}_{\alpha \rightarrow 0} p_{\alpha}(t) ,$$

waarin "lim" betekent de limiet in zg. distributie-zin. Deze definitie van $\delta(t)$ is intuïtief duidelijk: $\delta(t)$ is de "limiet" van een "rij" van pulsen met toenemende hoogte en afnemende tijdsduur, zodanig dat het product van hoogte en tijdsduur steeds gelijk aan 1 blijft. Men noemt de functie $\delta(t)$ ook wel (eenheids)-impulsfunctie of (eenheids)stootfunctie.

1.5.3. Eigenschappen en rekenregels

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 .$$

Afleiding. Uitgaande van

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha}(t)dt = \frac{1}{\alpha} \int_{-\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}\alpha} dt = 1 \quad \text{voor elke } \alpha > 0 ,$$

volgt met 1.5.1,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha}(t)dt = 1 .$$

□

2) Zeefeigenschap

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0),$$

onder de voorwaarde dat $f(t)$ continu is.

Afleiding. De eerste betrekking volgt op grond van

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha}(t)f(t)dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \int_{-\frac{1}{2}\alpha}^{\frac{1}{2}\alpha} f(t)dt = f(0).$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de middelwaardestelling der integraalrekening, zie college Wiskunde 10, 3.4.9.

De tweede betrekking is tot de eerste terug te brengen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha}(t-t_0)f(t)dt = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha}(t)f(t+t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t+t_0)dt = f(t_0). \quad \square \end{aligned}$$

3) Convolutie $f(t) * \delta(t) = f(t)$.

Afleiding. Overeenkomstig 1.5.2 is te verifiëren dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t) * \delta(t)]\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt$$

voor elke continue functie $\varphi(t)$ waarvoor de integralen bestaan. Werk het linkerlid uit en verwissel de integratievolgorde, dan volgt onder toepassing van de zeefeigenschap 2):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) * \delta(t)]\varphi(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)dt \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\varphi(\tau)d\tau. \quad \square \end{aligned}$$

$$4) \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) ,$$

waarin $u(t)$ de stapfunctie is.

Afleiding.

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) u(t-\tau) d\tau = \delta(t) * u(t) = u(t)$$

op grond van eigenschap 3). □

$$5) t\delta(t) = 0, f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) ,$$

onder de voorwaarde dat $f(t)$ continu is.

Afleiding. Met de zeefeigenschap 2) volgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\delta(t)\varphi(t) dt = 0$$

voor elke continue functie $\varphi(t)$; volgens 1.5.2 is dan $t\delta(t) = 0$.

Evenzo geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\varphi(t) dt = f(t_0)\varphi(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)\varphi(t) dt$$

voor elke continue functie $\varphi(t)$, zodat $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$. □

$$6) \text{ Schaalverandering } \quad \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \text{ voor reële } a \neq 0,$$

in het bijzonder $\delta(-t) = \delta(t)$.

Afleiding. Overeenkomstig 1.5.2 is te verifiëren dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\varphi(t) dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t) dt$$

voor elke continue functie $\varphi(t)$. Met 1.5.1 en de substitutie $\tau = at$ is het linkerlid te herleiden tot

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\varphi(t) dt &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha}(at)\varphi(t) dt = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha}(\tau)\varphi\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\varphi\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau = \frac{1}{|a|} \varphi(0) \end{aligned}$$

op grond van de zeefeigenschap 2). Voor het rechterlid vinden we dezelfde uitkomst eveneens met de zeefeigenschap. \square

Voor een continue functie $f(t)$ geldt

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = g(t) \Rightarrow f(t) = g'(t) .$$

In analogie hiermee schrijven we

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) \Rightarrow \delta(t) = u'(t) ,$$

waarbij $u'(t)$ de afgeleide in gegeneraliseerde zin genoemd wordt. Merk op dat $u(t)$ niet differentieerbaar is in de gewone zin in $t = 0$.

Beschouw vervolgens een functie $f(t)$ die continu is behalve in $t = t_0$ waar ze een eindige sprong vertoont. Men kan dan $f(t)$ voorstellen door

$$f(t) = g(t) + [f(t_0+) - f(t_0-)]u(t - t_0) ,$$

waarin $g(t)$ continu is. Als $g(t)$ tevens differentieerbaar is, dan heeft $f(t)$ de afgeleide in gegeneraliseerde zin

$$f'(t) = g'(t) + [f(t_0+) - f(t_0-)]\delta(t - t_0) .$$

De zeefeigenschap 1.5.3, 2) is kenmerkend voor de delta-functie en in de theorie der distributies wordt ze als definitie van de delta-functie gebruikt. De afleiding van de zeefeigenschap berustte erop dat

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha}(t) f(t) dt = f(0)$$

voor continue $f(t)$. Beschouw nu algemeen een verzameling van functies $\varphi_{\alpha}(t)$ met parameter $\alpha > 0$, met de eigenschap dat

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\alpha}(t) f(t) dt = f(0) .$$

Indien deze limiet geldt voor een zekere klasse van functies $f(t)$ (bijv. continue functies), dan schrijven we

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_{\alpha}(t) = \delta(t),$$

waarin "lim" weer betekent de limiet in distributie-zin. Voorbeelden van dergelijke verzamelingen van functies met "limiet" $\delta(t)$ zijn, naast uiteraard $p_{\alpha}(t)$,

$$\varphi_{\alpha}(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2}, \quad \psi_{\alpha}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{t^2}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0.$$

1.5.4. Lemma. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2} = \delta(t)$.

Bewijs. Te bewijzen is

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2} f(t) dt = f(0),$$

waarbij we veronderstellen dat $f(t)$ continu en begrensd is, d.w.z. er bestaat een getal M zodat $|f(t)| \leq M$ voor elke t .

Met gebruikmaking van de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2} dt = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1$$

vormen we het verschil

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2} f(t) dt - f(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) - f(0)}{\alpha^2 + t^2} dt.$$

Dan is te bewijzen dat $I(\alpha) \rightarrow 0$ als $\alpha \rightarrow 0$.

Kies nu een willekeurige $\varepsilon > 0$. Daar $f(t)$ continu is, laat zich bij deze ε een getal $\delta > 0$ vinden zodat

$$|f(t) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{voor } |t| \leq \delta.$$

Splitst de integraal $I(\alpha)$ in drie stukken,

$$I(\alpha) = \frac{\alpha}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) \frac{f(t) - f(0)}{\alpha^2 + t^2} dt,$$

en noem deze integralen resp. I_1, I_2, I_3 .

De integraal I_2 is af te schatten door

$$|I_2| \leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(t) - f(0)|}{\alpha^2 + t^2} dt \leq \frac{\epsilon}{3} \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} = \frac{\epsilon}{3} .$$

In de integralen I_1 en I_3 is $|f(t) - f(0)| \leq 2M$, waarna volgt

$$|I_{1,3}| \leq 2M \frac{\alpha}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} = \frac{2M}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\delta}{\alpha}\right) \right] = \frac{2M}{\pi} \arctan\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) .$$

Het rechterlid van deze ongelijkheid nadert tot 0 als $\alpha \downarrow 0$. Er bestaat daarom een getal α_0 , zodat $|I_{1,3}| < \frac{\epsilon}{3}$ voor $0 < \alpha < \alpha_0$.

Combineer nu de voorgaande resultaten, dan is $|I(\alpha)| < \epsilon$ voor $0 < \alpha < \alpha_0$,

d.w.z. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha) = 0$. Hiermee is het lemma bewezen. \square

We bepalen de Fourier transform van de delta-functie. Met behulp van de zeef-eigenschap vinden we

$$1.5.5. \quad F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 .$$

Op dezelfde wijze is

$$1.5.6. \quad F\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \exp(-j\omega t_0) .$$

We merken op dat de convolutiestellingen 1.4.2 en 1.4.3 geldig blijven indien één der functies $f_1(t)$ of $f_2(t)$ een delta-functie is. Zij $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, dan volgt door rechtstreekse Fourier transformatie van 1.5.3,3) en 5),

$$F\{f(t) * \delta(t)\} = F\{f(t)\} = F(\omega) ,$$

$$F\{f(t)\delta(t - t_0)\} = f(t_0)F\{\delta(t - t_0)\} = f(t_0)\exp(-j\omega t_0) .$$

Dezelfde uitkomsten worden ook verkregen onder toepassing van resp. 1.4.2, 1.4.3:

$$F\{f(t) * \delta(t)\} = F(\omega) \cdot 1 = F(\omega) ,$$

$$F\{f(t)\delta(t - t_0)\} = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \{\exp(-j\omega t_0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp(-j(\omega - u)t_0) du = f(t_0)\exp(-j\omega t_0) .$$

De Fourier transformatie

$$F(\omega) = F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

en haar inverse

$$f(t) = F^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

hebben slechts betekenis als de betreffende integralen convergent zijn. Voor een aantal belangrijke functies is niet aan deze voorwaarde voldaan. Zo heeft bijv. de constante functie $f(t) = 1$ geen Fourier transform omdat $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt$ divergent is:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{-j\omega t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{2 \sin(A\omega)}{\omega}$$

bestaat niet.

Ook de inverse Fourier transform $F^{-1}\{1\}$ heeft geen betekenis.

We zullen nu het begrip Fourier transformatie uitbreiden. Daartoe definiëren we de gegeneraliseerde Fourier transform van een functie $f(t)$ door

$$1.5.7. \quad F(\omega) = F\{f(t)\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} f(t) e^{-j\omega t} dt ,$$

waarin zo nodig de limiet in distributie-zin wordt opgevat. Men kan bewijzen dat de gegeneraliseerde Fourier transform samenvalt met de gewone Fourier transform als $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ convergent is. We zullen daarom de notatie $F\{f(t)\}$ blijven gebruiken voor de Fourier transform in gegeneraliseerde zin. Evenzo definiëren we de inverse Fourier transformatie in gegeneraliseerde zin door

$$1.5.8. \quad F^{-1}\{F(\omega)\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\omega|} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

Pas nu de definitie 1.5.7 toe op de constante functie $f(t) = 1$, dan volgt met behulp van de tabel 1.3.7,

$$F\{1\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} .$$

Volgens 1.5.4 is de laatste limiet in distributie-zin gelijk aan $2\pi\delta(\omega)$, zodat we vinden

$$F\{1\} = 2\pi\delta(\omega) .$$

Omgekeerd is

$$F^{-1}\{2\pi\delta(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 1 ,$$

d.i. de oorspronkelijke functie, zodat de integraalstelling van Fourier geldig blijft in dit geval. De gegeneraliseerde inverse Fourier transform van de constante functie $F(\omega) = 1$ wordt volgens 1.5.8 gegeven door

$$F^{-1}\{1\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\omega|} e^{j\omega t} d\omega = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2} = \delta(t) ,$$

d.i. de oorspronkelijke functie in 1.5.5. Samenvattend zijn hiermee gevonden de twee Fourier transform-paren

$$\delta(t) \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) ,$$

in overeenstemming met de reciprociteitsregel 1.3.6,2).

De verschuivingsregel 1.3.6,6) blijft geldig voor de gegeneraliseerde Fourier transform, zodat

$$F\{\exp(j\omega_0 t)\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) .$$

Uit dit resultaat en 1.5.6 volgen op dezelfde wijze als voren de correspondenties

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow \exp(-j\omega t_0), \exp(j\omega_0 t) \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) .$$

Analoog aan het modulatietheorema 1.3.6,6) geldt voorts

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] .$$

We bepalen vervolgens de (gegeneraliseerde) Fourier transform van de signum-functie $\text{sgn}(t)$ gedefinieerd door

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{voor } t < 0 , \\ 1 & \text{voor } t > 0 ; \end{cases}$$

eventueel definieert men wel $\text{sgn}(t) = 0$ voor $t = 0$. Uitgaande van de definitie 1.5.7 vinden we

$$F\{\text{sgn}(t)\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} \text{sgn}(t) e^{-j\omega t} dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} [e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} - e^{-\alpha t} e^{j\omega t}] dt =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\alpha + j\omega} - \frac{1}{\alpha - j\omega} \right] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega} .$$

Bij de inverse transformatie $F^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega}\right\}$ stuiten we op een divergente integraal: de functie $\frac{2}{j\omega}$ heeft een niet-integreerbare singulariteit in $\omega = 0$. Om deze moeilijkheid op te heffen zullen we de integraal opvatten als hoofdwaarde met betrekking tot $\omega = 0$ en ook met betrekking tot $\omega = \infty$, conform de vroegere afspraak. Deze hoofdwaarde wordt gedefinieerd door

$$F^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega}\right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left(\int_{-A}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^A \right) \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega .$$

Na herleiding volgt

$$F^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega}\right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, A \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_{\epsilon}^A \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega = \text{sgn}(t) ,$$

op grond van 1.2.1. Hiermee is gevonden de correspondentie

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} .$$

Opmerking. Laat de functie $g(x)$, gedefinieerd op $[a, b]$, een singulariteit hebben in $x = c \in (a, b)$. Dan wordt de hoofdwaarde van $\int_a^b g(x) dx$ gedefinieerd door

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\epsilon} + \int_{c+\epsilon}^b \right) g(x) dx .$$

Vergelijk dit met de algemene definitie van de betreffende oneigenlijke integraal:

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\epsilon_1} + \int_{c+\epsilon_2}^b \right) g(x) dx$$

waarin $\epsilon_1 \rightarrow 0$, $\epsilon_2 \rightarrow 0$, onafhankelijk van elkaar.

Indien $\int_a^b g(x)dx$ convergent is volgens deze algemene definitie, dan bestaat ook de hoofdwaaarde van de integraal en deze is gelijk aan de integraal zelf. Het omgekeerde geldt niet zoals blijkt uit het voorbeeld $\int_{-1}^2 x^{-1} dx$. De laatste integraal is divergent volgens de algemene definitie, terwijl de hoofdwaaarde van de integraal gegeven wordt door

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^2 \right) \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\log|x| \Big|_{-1}^{-\epsilon} + \log|x| \Big|_{\epsilon}^2 \right] = \log 2 .$$

Beschouw tenslotte de Fourier transformatie van de stapfunctie $u(t)$. Deze is uit te drukken in de signumfunctie,

$$u(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) + \frac{1}{2} ,$$

waarna onmiddellijk volgt

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) .$$

Opmerking. De Fourier transform van $u(t)$ is ook rechtstreeks te bepalen uitgaande van de definitie 1.5.7:

$$\begin{aligned} F\{u(t)\} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} . \end{aligned}$$

Merk op dat de overgang $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{j\omega}$ tot een incorrecte uitkomst voert.

We vatten de voorgaande resultaten samen in de volgende tabel van Fourier transforms die een aanvulling vormt op de tabel 1.3.7.

1.5.9. Tabel

$f(t)$	\longleftrightarrow	$F(\omega)$
$\delta(t)$		1
1		$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(t - t_0)$		$\exp(-j\omega t_0)$
$\exp(j\omega_0 t)$		$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$		$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\text{sgn}(t)$		$\frac{2}{j\omega}$
$u(t)$		$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

Men kan bewijzen dat de convolutiestellingen 1.4.2 en 1.4.3 geldig blijven indien één der functies $f_1(t)$ of $f_2(t)$ een constante functie, signumfunctie of stapfunctie is. Hierbij is zo nodig de Fourier transform in gegeneraliseerde zin te nemen, terwijl de integralen moeten worden opgevat als hoofdwaarden.

Voorbeeld. 1) In 1.4, voorbeeld 1 is afgeleid

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau .$$

Zij $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, dan volgt onder toepassing van 1.4.2,

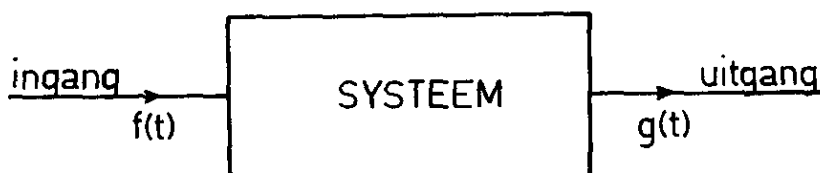
$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow F(\omega) \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) .$$

Dit resultaat vormt een uitbreiding van 1.3.6, regel 8), waar verondersteld werd $F(0) = 0$.

Hoofdstuk 2. Toepassingen van de Fourier transformatie

2.1. Lineaire systemen

De overdracht van signalen in communicatie- en regelsystemen vormt een belangrijk probleemgebied in de electrotechniek. Bij zo'n (overdrachts)stelsel bestaat er een eenduidige oorzaak-gevolg-relatie tussen ingangssignaal of excitatie en uitgangssignaal of responsie van het stelsel. In de hierna volgende analyse van systemen gaat het vooral om deze relatie tussen ingangs- en uitgangssignaal waarbij wordt afgezien van de interne structuur van het stelsel. De analyse is dan ook algemeen bruikbaar voor fysische systemen waarbij ingangs- en uitgangssignaal bepaalde relevante fysische grootheden voorstellen; zo kan men bijv. voor een mechanisch stelsel de verplaatsing opvatten als responsie van het stelsel bij excitatie door een uitwendige kracht. De ingangs- en uitgangssignalen zullen functies van de tijd t zijn. Indien deze functies gedefinieerd zijn voor elke t , spreekt men van een tijd-continu systeem. Indien de signalen slechts gedefinieerd zijn op discrete tijdstippen (bijv. door bemonstering van een continu signaal), spreekt men van een tijd-discreet systeem. Een tijd-continu systeem is schematisch voor te stellen door een "black box" (zie figuur) met ingangssignaal $f(t)$ en uitgangssignaal $g(t)$.



De functie $g(t)$ wordt hierbij eenduidig bepaald door de functie $f(t)$, d.w.z. er bestaat een transformatie T zodat

$$T\{f(t)\} = g(t) .$$

Door deze transformatie of operator T wordt het systeem volledig gekarakteriseerd.

We voeren nu een aantal begrippen in die van belang zijn voor het verdere onderzoek van systemen.

Een systeem heet lineair als uit $T\{f_1(t)\} = g_1(t)$, $T\{f_2(t)\} = g_2(t)$ volgt

2.1.1.
$$T\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) ,$$

waarbij a_1, a_2 willekeurige constanten zijn. De operator T is dan een lineaire operator. Voor een lineair systeem volgt eenvoudig: $T\{0\} = 0$; men noemt het

systeem dan wel bronvrij.

Een systeem heet tijdinvariant als uit $T\{f(t)\} = g(t)$ volgt

$$2.1.2. \quad T\{f(t-t_0)\} = g(t-t_0) ,$$

waarin t_0 een willekeurige constante is.

Een systeem heet reëel als voor $f(t)$ reëel, ook $T\{f(t)\} = g(t)$ reëel is.

Een systeem heet causaal als uit $f_1(t) = f_2(t)$ voor $t < t_0$ volgt dat voor de responsies $T\{f_1(t)\} = g_1(t)$, $T\{f_2(t)\} = g_2(t)$ geldt: $g_1(t) = g_2(t)$ voor $t < t_0$.

Deze definitie drukt uit dat de responsie $g(t_0)$ op het tijdstip t_0 slechts afhangt van het ingangssignaal $f(t)$ voor $t \leq t_0$, dus van het "verleden" van $f(t)$. In het geval van een lineair systeem is de voorgaande definitie te herleiden tot

$$f_1(t) - f_2(t) = 0 \text{ voor } t < t_0 \Rightarrow T\{f_1(t) - f_2(t)\} = g_1(t) - g_2(t) = 0 \text{ voor } t < t_0,$$

zodat we kunnen schrijven:

Een lineair systeem heet causaal als uit $f(t) = 0$ voor $t < t_0$ volgt dat ook $T\{f(t)\} = g(t) = 0$ voor $t < t_0$.

Fysisch realiseerbare systemen zijn reëel en causaal. In deze paragraaf beperken we ons tot het onderzoek van lineaire tijdinvariante systemen.

Voor een lineair tijdinvariant systeem geldt de volgende belangrijke eigenschap:

$$2.1.3. \quad T\{e^{j\omega t}\} = K e^{j\omega t} ,$$

waarin K een complexe constante is die in het algemeen van ω afhangt. De eigenschap drukt uit dat voor een tijd-harmonisch ingangssignaal $f(t) = e^{j\omega t}$, de responsie eveneens tijd-harmonisch is met dezelfde frequentie ω .

Bewijs. Noem $T\{e^{j\omega t}\} = g(t)$, dan volgt op grond van de tijdinvariantie 2.1.2,

$$T\{\exp(j\omega(t+t_0))\} = g(t+t_0) .$$

Anderzijds is ook met behulp van 2.1.1,

$$T\{\exp(j\omega(t+t_0))\} = \exp(j\omega t_0) T\{e^{j\omega t}\} = \exp(j\omega t_0) g(t) ,$$

zodat we vinden

$$g(t+t_0) = \exp(j\omega t_0) g(t) .$$

Stel hierin $t = 0$, dan volgt

$$g(t_0) = g(0)\exp(j\omega t_0) ,$$

geldig voor elke t_0 . Vervang nu t_0 door t , dan is

$$T\{e^{j\omega t}\} = g(t) = g(0)e^{j\omega t} = Ke^{j\omega t} ,$$

waarin $K = g(0)$ een constante is. □

Op grond van 2.1.3 noemt men $e^{j\omega t}$ een eigenfunctie van de operator T , behorend bij de eigenwaarde K . Omdat K afhangt van ω , gebruiken we voortaan de notatie $K = H(\omega)$, zodat

2.1.4.
$$T\{e^{j\omega t}\} = H(\omega)e^{j\omega t} ;$$

$H(\omega)$ wordt de overdrachtsfunctie of systeemfunctie genoemd.

De responsie van een lineair tijdinvariant systeem op een willekeurig ingangssignaal $f(t)$ is nu te bepalen met behulp van 2.1.4 en Fourier transformatie. Zij namelijk $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, dan is

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega ,$$

i.e. $f(t)$ is voor te stellen door een oneindige "som" van tijd-harmonische componenten.

De bijbehorende responsie wordt gegeven door

$$g(t) = T\{f(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)T\{e^{j\omega t}\}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H(\omega)e^{j\omega t} d\omega .$$

Hierbij is stilzwijgend aangenomen dat 2.1.1 (lineariteit) geldig blijft voor een oneindige "som".

Voer nu in $F\{g(t)\} = G(\omega)$, $F^{-1}\{H(\omega)\} = h(t)$, dan is de voorgaande uitkomst te herleiden tot

$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega), g(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau ,$$

op grond van de convolutiestelling 1.4.2.

De functie $h(t)$ heet de impulsresponsie of stootkarakteristiek van het systeem. Nemen we namelijk $f(t) = \delta(t)$, dan is

$$\mathcal{T}\{\delta(t)\} = \delta(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)h(t-\tau)d\tau = h(t) ,$$

i.e. $h(t)$ is de responsie op de impuls of stoot $\delta(t)$.

Omgekeerd kan men bij de analyse van lineaire tijdinvariante systemen ook uitgaan van de impulsresponsie. Noem daartoe $\mathcal{T}\{\delta(t)\} = h(t)$, dan is op grond van de tijdinvariantie 2.1.2,

$$\mathcal{T}\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau)$$

voor elke τ . Een willekeurig ingangssignaal $f(t)$ is nu voor te stellen door de convolutie (zie 1.5.3, regel 3))

$$f(t) = f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau ,$$

waarna de bijbehorende responsie gegeven wordt door

$$g(t) = \mathcal{T}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\mathcal{T}\{\delta(t-\tau)\}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

als voren.

Samenvatting. Een lineair tijdinvariant systeem $\mathcal{T}\{f(t)\} = g(t)$ is op twee manieren te beschrijven:

(i) beschrijving in het tijddomein

2.1.5.
$$g(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau ,$$

waarin $h(t)$ de impulsresponsie is;

(ii) beschrijving in het frequentiedomein

2.1.6.
$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega) ,$$

waarin $H(\omega)$ de overdrachtsfunctie of systemefunctie is.

In deze beschrijvingen wordt het systeem eenduidig gekarakteriseerd door $h(t)$ resp. $H(\omega)$; $h(t)$ en $H(\omega)$ hangen samen volgens $h(t) \leftrightarrow H(\omega)$.

Opmerking. De bruikbaarheid van de Fourier transformatie in de voorgaande beschouwing berust op de eigenschap 2.1.4 welke geldt voor lineaire tijd-invariante systemen. Bij de analyse van niet-lineaire systemen of van tijd-variabele systemen is de Fourier transformatie van weinig betekenis.

De (complexe) overdrachtsfunctie $H(\omega)$ is te schrijven als

$$H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) ,$$

waarin $R(\omega)$ en $X(\omega)$ resp. het reële en imaginaire deel van $H(\omega)$ voorstellen. Daarnaast wordt ook gebruikt de voorstelling

$$H(\omega) = \exp(-\alpha(\omega))\exp(-j\theta(\omega))$$

met dempingsconstante $\alpha(\omega) = -\log|H(\omega)|$ en fasehoek $\theta(\omega) = -\arg H(\omega)$.

Voor een reëel systeem is $h(t)$ reëel, en omgekeerd. Voor de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ geldt dan $H(-\omega) = H^*(\omega)$; zie p. 15, punt (i).

Voor een causaal systeem is $h(t) = 0$ voor $t < 0$, i.e. $h(t)$ is een causale functie. De consequenties voor $H(\omega)$ worden besproken in 2.2. De betrekking 2.1.5 gaat nu over in

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau .$$

Omgekeerd, als $h(t)$ een causale functie is, dan is het systeem causaal. Immers voor een ingangssignaal $f(t)$ met $f(t) = 0$ voor $t < t_0$, volgt eenvoudig met de voorgaande formule dat ook $g(t) = 0$ voor $t < t_0$.

Opmerking. Uit de voorgaande formule blijkt nog eens dat voor een causaal systeem de responsie $g(t)$ bepaald wordt door het ingangssignaal $f(\tau)$ voor $\tau \leq t$, waarbij de factor $h(t-\tau)$ als een soort "geheugenfunctie" fungeert. Indien bijv. $h(t) = 0$ voor $t > t_0$, wordt $g(t)$ bepaald door $f(\tau)$ over het interval $t-t_0 \leq \tau \leq t$; het systeem heeft dan een "geheugen" dat teruggaat over een periode t_0 . In het geval dat $h(t) = K\delta(t)$ met constante K , volgt uit 2.1.5: $g(t) = Kf(t)$, en het systeem heeft geen geheugen. De bijbehorende overdrachtsfunctie $H(\omega) = K$ is dan frequentie-onafhankelijk. Algemeen geldt dat er een samenhang bestaat tussen de geheugenwerking van een causaal systeem en de frequentie-afhankelijkheid (dispersie) van de overdrachtsfunctie.

Definitie. Een systeem $T\{f(t)\} = g(t)$ heet stabiel als voor elk begrensde ingangssignaal $f(t)$, de responsie $g(t)$ begrensd is.

2.1.7. Stelling. Een lineair tijdinvariant systeem met impulsresponsie $h(t)$ is stabiel dan en slechts dan als $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt$ convergent is.

Bewijs. (i) Zij $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt$ convergent. Laat $f(t)$ begrensd zijn, d.w.z. er bestaat een getal M zodat $|f(t)| \leq M$ voor elke t . Met 2.1.5 volgt voor de bijbehorende responsie $g(t)$:

$$|g(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)||h(t-\tau)|d\tau \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau .$$

De functie $g(t)$ is dus begrensd en het systeem is stabiel.

(ii) Zij $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt$ divergent. Neem dan als ingangssignaal

$$f(t) = \frac{h^*(-t)}{|h(-t)|} \text{ als } h(-t) \neq 0; \quad f(t) = 0 \text{ als } h(-t) = 0 .$$

Dit signaal is begrensd: $|f(t)| = 1$. Met 2.1.5 vinden we voor de bijbehorende responsie op $t = 0$:

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h^*(-\tau)h(-\tau)}{|h(-\tau)|} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau = \infty .$$

De responsie is dus niet begrensd en het systeem is niet stabiel. \square

We bespreken nog de responsie van een lineair tijdinvariant systeem op een drietal speciale ingangssignalen.

1. Responsie op een periodieke functie. Zij $f(t)$ periodiek met periode T , dan is $f(t)$ voor te stellen door een complexe Fourierreeks (zie 1.1.6, 1.1.7):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega_0 t)$$

met $\omega_0 = 2\pi/T$ en coëfficiënten c_n gegeven door

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t)\exp(-jn\omega_0 t)dt .$$

De responsie van het systeem op $f(t)$ is dan

$$g(t) = T\{f(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n T\{\exp(jn\omega_0 t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(n\omega_0) \exp(jn\omega_0 t)$$

onder gebruikmaking van 2.1.4. Deze responsie is eveneens periodiek met periode T .

- 2° Responsie op een tijd-harmonisch signaal ingeschakeld op het tijdstip $t = 0$. Neem als ingangssignaal $f(t) = e^{j\omega t} u(t)$, dan wordt de responsie van het systeem gegeven door (zie 2.1.5)

$$\begin{aligned} g(t) &= \{e^{j\omega t} u(t)\} * h(t) = \int_0^{\infty} e^{j\omega \tau} h(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^t \exp(j\omega(t - \tau)) h(\tau) d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^t h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau . \end{aligned}$$

Merk nu op dat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = H(\omega) .$$

We vinden dan

$$g(t) = T\{e^{j\omega t} u(t)\} \sim H(\omega) e^{j\omega t}, \quad t \rightarrow \infty ,$$

waarbij de notatie " \sim " betekent gelijkheid in de limiet voor $t \rightarrow \infty$. Deze limiet beschrijft de zg. stationaire toestand van het systeem waarbij alle inschakelverschijnselen zijn uitgedempt. In de stationaire toestand is de responsie dezelfde als de responsie op een tijd-harmonisch signaal $e^{j\omega t}$ ingeschakeld op $t = -\infty$, zie 2.1.4.

- 3° Responsie op een stapfunctie. De responsie van een systeem op de stapfunctie $u(t)$ wordt stapresponsie genoemd en aangegeven door $a(t)$. Met behulp van 2.1.5 volgt eenvoudig

$$2.1.8. \quad a(t) = T\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau .$$

Voor $t \rightarrow \infty$ gaat $a(t)$ over in

$$a(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = H(0) .$$

In het speciale geval van een causaal systeem is $h(t) = 0$ voor $t < 0$, waarna voor $a(t)$ volgt

$$a(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau \quad u(t) .$$

Overeenkomstig de tabel 1.5.9 is

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) .$$

Met 2.1.6 vinden we dan voor de Fourier transform van $a(t)$:

$$a(t) \leftrightarrow A(\omega) = \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] H(\omega) = \frac{H(\omega)}{j\omega} + \pi H(0)\delta(\omega) .$$

De responsie $g(t)$ op een algemeen ingangssignaal $f(t)$ kan worden uitgedrukt in de stapresponsie $a(t)$. Daartoe schrijven we

$$f(t) = f(-\infty) + \int_{-\infty}^t f'(\tau) d\tau = f(-\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

onder de aanname dat $f(-\infty)$ bestaat en $f(t)$ differentieerbaar is. Met behulp van de responsies

$$\mathcal{T}\{f(-\infty)\} = f(-\infty) \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) d\tau = f(-\infty) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = f(-\infty)H(0) ,$$

$$\mathcal{T}\{u(t-\tau)\} = a(t-\tau), \quad (\text{tijdinvariantie})$$

vinden we dan voor de responsie $g(t)$,

$$g(t) = \mathcal{T}\{f(t)\} = f(-\infty)H(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)a(t-\tau) d\tau .$$

Deze uitkomst blijft geldig indien $f(t)$ discontinu is in bepaalde punten, mits voor $f'(\tau)$ de afgeleide in gegeneraliseerde zin wordt genomen. Laat bijv. $f(t)$ in $t = t_0$ een eindige sprong vertonen, dan bevat de gegeneraliseerde afgeleide de extra term $[f(t_0+) - f(t_0-)]\delta(t-t_0)$. De bijdrage van deze term tot $g(t)$ is

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t_0+) - f(t_0-)] \delta(\tau - t_0) a(t - \tau) d\tau = [f(t_0+) - f(t_0-)] a(t - t_0) ,$$

d.i. precies de responsie op de stapfunctie $[f(t_0+) - f(t_0-)]u(t - t_0)$.
In het speciale geval van een causaal systeem is $a(t - \tau) = 0$ voor $\tau > t$,
waarna voor $g(t)$ volgt

$$g(t) = f(-\infty)H(0) + \int_{-\infty}^t f'(\tau) a(t - \tau) d\tau .$$

Laat vervolgens $f(t)$ een causale functie zijn, d.w.z. $f(t) = 0$ voor $t < 0$.
Dan is $f(-\infty) = 0$ en $f'(\tau)$ bevat de impulsterm $f(0+)\delta(\tau)$, waarna de voor-
gaande formule overgaat in

$$g(t) = f(0+)a(t) + \int_{0+}^t f'(\tau) a(t - \tau) d\tau .$$

Hierin is de integraal te nemen volgens $\int_{0+}^t = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^t$.

Voorbeelden. 1) Een systeem heet vervormingsvrij indien de responsie $g(t)$ op
een ingangssignaal $f(t)$ gegeven wordt door

$$g(t) = Kf(t - t_0) ,$$

waarin K en t_0 constanten zijn met $K > 0$, $t_0 \geq 0$; $t_0 \geq 0$ betekent dat het
systeem causaal is. Vergeleken met het ingangssignaal is de responsie van
dezelfde vorm en vertraagd over een tijd t_0 .

Voor een dergelijk vervormingsvrij systeem wordt de impulsresponsie gege-
ven door

$$h(t) = K\delta(t - t_0) ,$$

en de bijbehorende overdrachtsfunctie is

$$H(\omega) = K \exp(-j\omega t_0) .$$

Voor de amplitude en fase van $H(\omega)$ vinden we

$$|H(\omega)| = K, \theta(\omega) = -\arg H(\omega) = \omega t_0 ,$$

i.e. $|H(\omega)|$ is constant en de fasehoek $\theta(\omega)$ is een lineaire functie van ω .

Algemeen, indien voor een systeem met overdrachtsfunctie $H(\omega)$ de amplitude $|H(\omega)|$ niet constant is maar van ω afhangt, spreken we van amplitude-*vervorming*. Evenzo, indien de fasehoek $\theta(\omega)$ niet lineair van ω afhangt, spreken we van fase-*vervorming*.

2) Een ideaal filter is een systeem dat signalen met frequentiespectrum binnen een bepaalde frequentieband vervormingsvrij overdraagt. De overdrachtsfunctie $H(\omega)$ heeft een constante amplitude over deze frequentieband en de fasehoek $\theta(\omega)$ is daar een lineaire functie van ω . Buiten de frequentieband is $H(\omega) = 0$.

Als voorbeeld beschouwen we het ideale laagdoorlatende filter met overdrachtsfunctie gegeven door

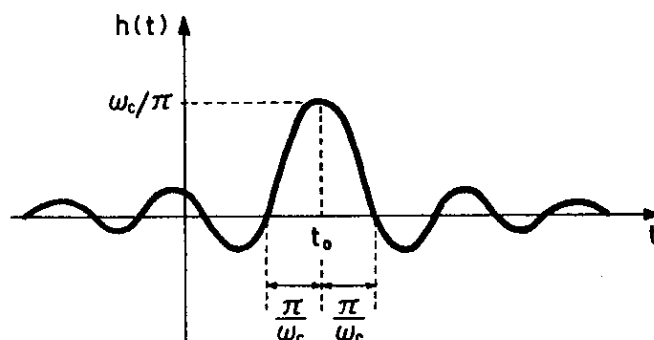
$$H(\omega) = \begin{cases} \exp(-j\omega t_0) & \text{voor } |\omega| < \omega_c, \\ 0 & \text{voor } |\omega| > \omega_c; \end{cases}$$

ω_c heet de afsnijfrequentie van het filter.

Door inverse Fourier transformatie vinden we voor de impulsresponsie van het filter,

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \exp(j\omega(t-t_0)) d\omega = \frac{\sin(\omega_c(t-t_0))}{\pi(t-t_0)};$$

de functie $h(t)$ is weergegeven in onderstaande figuur.



De impulsresponsie $h(t)$ heeft een maximum ω_c/π in $t = t_0$; rond $t = t_0$ ligt de hoofdpuls van de responsie met tijdsduur $2\pi/\omega_c$. Merk op dat niet geldt $h(t) = 0$ voor $t < 0$, zodat het systeem niet causaal is.

De stapresponsie van het filter volgt door integratie van $h(t)$ (zie 2.1.8):

$$a(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{\sin(\omega_c(\tau - t_0))}{\pi(\tau - t_0)} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx$$

onder toepassing van de substitutie $\omega_c(\tau - t_0) = x$.

We voeren nu in de sinus-integraal $Si(y)$ gedefinieerd door

$$Si(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx .$$

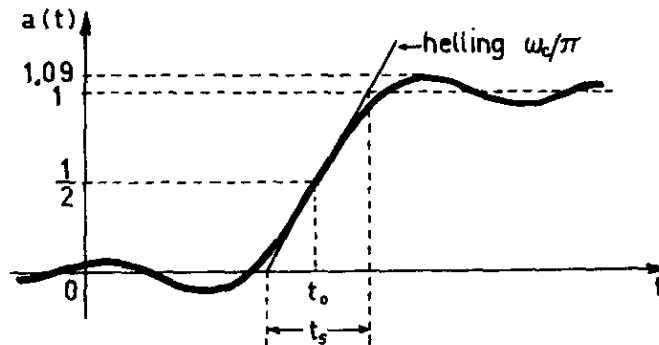
Deze functie is uitvoerig getabelleerd^{*)} en heeft o.m. de volgende eigenschappen:

- (i) $Si(y)$ is een oneven functie, d.w.z. $Si(-y) = -Si(y)$ voor elke y ;
- (ii) $Si(0) = 0$, $Si(\infty) = \pi/2$, $Si(-\infty) = -\pi/2$, zie 1.2.1;
- (iii) $Si(y)$ heeft opvolgende maxima en minima in $y = m\pi$, m geheel, $m \neq 0$.

Met behulp van de sinus-integraal is de stapresponsie $a(t)$ te herleiden tot

$$a(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(\omega_c(t - t_0)) ;$$

de functie $a(t)$ is weergegeven in onderstaande figuur.



Merk op dat $a(t_0) = \frac{1}{2}$ en dat de begin- en eindwaarden $a(-\infty) = 0$, $a(\infty) = 1$, oscillerend benaderd worden. De maximale "overshoot" treedt op voor $t = t_0 + \pi/\omega_c$ en bedraagt 9%. De stijging van $a(t)$ is te karakteriseren door de stijgtijd t_s , d.i. de tijd nodig om van 0 naar 1 te stijgen met helling $a'(t_0)$; zie de figuur. Met behulp van $a'(t_0) = h(t_0) = \omega_c/\pi$ volgt eenvoudig $t_s = \pi/\omega_c$. Als $\omega_c \rightarrow \infty$ gaat de stapresponsie over in

^{*)} Zie bijv. M. Abramowitz and I.A. Stegun (editors), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, National Bureau of Standards, Washington, 1964, chapter 5.

$$a(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(-\infty) = 0 & \text{voor } t < t_0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\infty) = 1 & \text{voor } t > t_0, \end{cases}$$

oftewel $a(t) = u(t - t_0)$, overeenkomend met een vervormingsvrij systeem. De responsie van het filter op een willekeurig ingangssignaal $f(t)$ wordt gegeven door

$$g(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{\sin(\omega_c(t - t_0 - \tau))}{\pi(t - t_0 - \tau)} d\tau.$$

We bepalen nog de responsie op de volgende speciale ingangssignalen:

- (i) Zij $f(t)$ bandbegrensd met frequentiespectrum $F(\omega) = 0$ voor $|\omega| > \omega_c$.
Dan geldt voor de responsie $g(t)$:

$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega) = F(\omega)\exp(-j\omega t_0),$$

$$g(t) = f(t - t_0),$$

i.e. de overdracht van het signaal $f(t)$ is vervormingsvrij.

- (ii) Zij $f(t)$ periodiek met periode T en gegeven door de complexe Fourierreeks

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega_0 t),$$

waarin $\omega_0 = 2\pi/T$. De responsie op $\exp(jn\omega_0 t)$ is volgens 2.1.4 gelijk aan

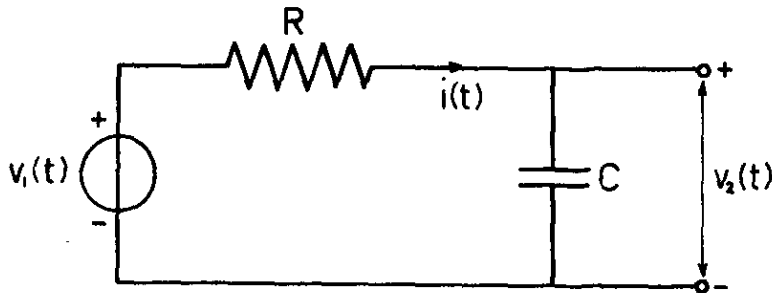
$$H(n\omega_0)\exp(jn\omega_0 t) = \begin{cases} \exp(jn\omega_0(t - t_0)) & \text{voor } |n\omega_0| < \omega_c, \\ 0 & \text{voor } |n\omega_0| > \omega_c. \end{cases}$$

Laat N het gehele getal zijn eenduidig bepaald door $N\omega_0 < \omega_c < (N+1)\omega_0$. Voor de responsie $g(t)$ op het periodieke signaal $f(t)$ volgt dan

$$g(t) = \sum_{n=-N}^N c_n \exp(jn\omega_0(t - t_0)) = f_N(t - t_0),$$

waarin $f_N(t)$ de N -de partiële som van de Fourierreeks van $f(t)$ voorstelt.

- 3) Het hierna getekende RC-netwerk kan worden opgevat als een systeem met ingangsspanning $v_1(t)$ en uitgangsspanning $v_2(t)$.



Noem de stroom in het netwerk $i(t)$, dan is

$$v_1(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau, \quad v_2(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau .$$

Door eliminatie van $i(t)$ volgt dat het verband tussen $v_1(t)$ en $v_2(t)$ beschreven wordt door de volgende differentiaalvergelijking:

$$RC \frac{dv_2}{dt} + v_2(t) = v_1(t) .$$

Pas nu Fourier transformatie toe met $v_1(t) \leftrightarrow V_1(\omega)$, $v_2(t) \leftrightarrow V_2(\omega)$, dan vinden we met behulp van 1.3.6, regel 7),

$$j\omega RC V_2(\omega) + V_2(\omega) = V_1(\omega), \quad V_2(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} V_1(\omega) .$$

Hieruit is onmiddellijk de overdrachtsfunctie van het netwerk af te lezen, namelijk

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} .$$

De impulsresponsie $h(t)$ van het netwerk volgt door inverse Fourier transformatie van $H(\omega)$. Met behulp van de tabel 1.3.7 vinden we

$$h(t) = \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) u(t) .$$

Merk op dat $h(t) = 0$ voor $t < 0$; het systeem is dus causaal.

De stapresponsie $a(t)$ van het netwerk wordt volgens 2.1.8 gegeven door

$$a(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \frac{1}{RC} \int_0^t \exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right) d\tau u(t) = \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right] u(t) .$$

De responsie $v_2(t)$ op een willekeurige ingangsspanning $v_1(t)$ wordt gegeven door

$$v_2(t) = v_1(t) * h(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t v_1(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{RC}\right) d\tau .$$

Zij bijv. $v_1(t) = e^{-\beta t} u(t)$, dan is, onder invoering van de notatie $\alpha = \frac{1}{RC}$:

$$v_2(t) = \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta \tau} u(\tau) \exp(-\alpha(t-\tau)) d\tau = \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t \exp((\alpha - \beta)\tau) d\tau u(t) =$$

$$= \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha - \beta} [e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}] u(t) & \text{als } \beta \neq \alpha , \\ \alpha t e^{-\alpha t} u(t) & \text{als } \beta = \alpha . \end{cases}$$

Tenslotte bepalen we nog de responsie van het netwerk op de periodieke ingangsspanning $v_1(t) = |\cos(\frac{1}{2}\omega_0 t)|$ met periode $T = 2\pi/\omega_0$. Overeenkomstig 1.1, voorbeeld 1 is $v_1(t)$ te ontwikkelen in de Fourierreeks

$$v_1(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \frac{1}{4}} \cos(n\omega_0 t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - \frac{1}{4}} \exp(jn\omega_0 t) .$$

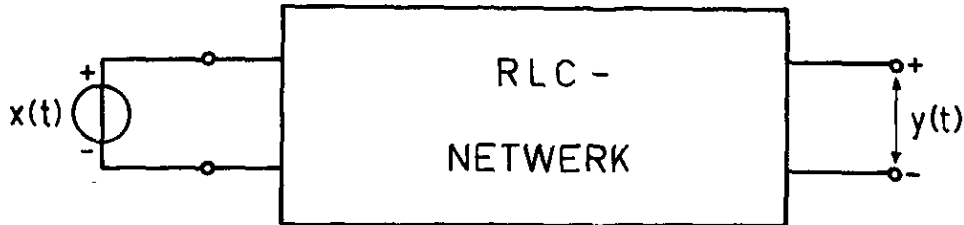
Met behulp van 2.1.4 volgt dan voor de bijbehorende responsie $v_2(t)$:

$$v_2(t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 - \frac{1}{4})(1 + jn\omega_0 RC)} \exp(jn\omega_0 t) ,$$

welke nog te herleiden is tot de reële vorm

$$v_2(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 - \frac{1}{4})[1 + (n\omega_0 RC)^2]} [\cos(n\omega_0 t) + n\omega_0 RC \sin(n\omega_0 t)] .$$

Een RLC-netwerk samengesteld uit weerstanden, spoelen en condensatoren, kan worden opgevat als een lineair tijdinvariant systeem. Als ingangssignaal van het systeem fungeert de bronsterkte van de spanningsbron of stroombron waardoor het netwerk geëxciteerd wordt. Het uitgangssignaal kan zijn de spanning tussen twee knooppunten van het netwerk of de stroom in een bepaalde tak van het netwerk. In afwijking van de tot dusver gebruikte notatie zullen we het ingangs- en uitgangssignaal voorstellen door resp. $x(t)$ en $y(t)$. Het RLC-systeem is schematisch weergegeven in de navolgende figuur.



In de netwerktheorie wordt afgeleid dat het verband tussen het ingangssignaal $x(t)$ en de responsie $y(t)$ beschreven wordt door een lineaire differentiaalvergelijking met constante reële coëfficiënten van de vorm

2.1.9.

$$a_m \frac{d^m y}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$

$$= b_n \frac{d^n x}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x .$$

Pas Fourier transformatie toe op deze differentiaalvergelijking en laat $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$, $y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$ zijn. Dan volgt met behulp van 1.3.6, regel 7),

$$[a_m (j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0] Y(\omega) =$$

$$= [b_n (j\omega)^n + b_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0] X(\omega) .$$

Hieruit is de overdrachtsfunctie of systeemfunctie $H(\omega)$ eenvoudig te bepalen:

2.1.10.

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{b_n (j\omega)^n + b_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_m (j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} ,$$

waarin $B(j\omega)$ en $A(j\omega)$ korte notaties zijn voor resp. het teller- en noemerpolynoom; $H(\omega)$ is dus een rationale functie.

De impulsresponsie $h(t)$ van het netwerk wordt verkregen door inverse Fourier transformatie van $H(\omega)$. Daartoe wordt $H(\omega)$ gesplitst in partiële breuken op de volgende wijze.

Ontbind het noemerpolynoom $A(j\omega)$ in factoren van de eerste graad volgens

$$A(j\omega) = a_m (j\omega - q_1)(j\omega - q_2) \dots (j\omega - q_m) .$$

De (complexe) getallen q_1, q_2, \dots, q_m zijn de nulpunten van $A(j\omega)$; deze heten ook polen van $H(\omega)$. In de netwerktheorie wordt bewezen dat voor een netwerk

met positieve R's, L's en C's geldt $\text{Re } q_k \leq 0$, $k = 1, 2, \dots, m$. We zullen ons hier beperken tot netwerken waarvoor $\text{Re } q_k < 0$, $k = 1, 2, \dots, m$. De q_k 's liggen dan in het complexe vlak links van de imaginaire as. Merk op dat de coëfficiënten a_0, a_1, \dots, a_m van het polynoom $A(j\omega)$ reëel zijn. De nulpunten q_k zijn dan òf reëel òf in paren toegevoegd complex.

We nemen nu voorlopig aan dat de q_k 's onderling verschillend zijn (enkelvoudige nulpunten) en dat $n < m$, i.e. $\text{gr}(B(j\omega)) < \text{gr}(A(j\omega))$. Dan is $H(\omega)$ te splitsen in partiële breuken volgens

$$H(\omega) = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{j\omega - q_k}$$

met coëfficiënten c_k gegeven door

$$c_k = \lim_{j\omega \rightarrow q_k} (j\omega - q_k) H(\omega) .$$

Voor de impulsresponsie $h(t)$ vinden we nu met behulp van de tabel 1.3.7:

$$h(t) = \sum_{k=1}^m c_k \exp(q_k t) u(t) .$$

Indien $A(j\omega)$ een meervoudig nulpunt q_k met multipliciteit m_k bezit, treedt in de ontbinding van $A(j\omega)$ een factor $(j\omega - q_k)^{m_k}$ op. De splitsing van $H(\omega)$ in partiële breuken bevat dan termen van de vorm $c_{k\ell} / (j\omega - q_k)^\ell$, $\ell = 1, 2, \dots, m_k$. De inverse Fourier transformatie van een dergelijke term is behandeld in 1.3, voorbeeld 4:

$$\frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \exp(q_k t) u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(j\omega - q_k)^\ell} .$$

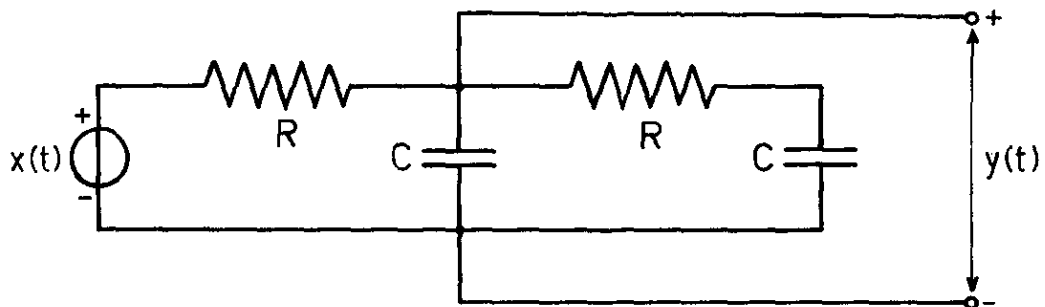
Indien $n = m$, kunnen we $H(\omega)$ door deling herleiden tot de vorm

$$H(\omega) = \frac{b_m}{a_m} + \frac{\tilde{B}(j\omega)}{A(j\omega)} ,$$

waarin $\tilde{B}(j\omega)$ een polynoom is met graad $< m$. Het quotiënt $\tilde{B}(j\omega)/A(j\omega)$ is dan te splitsen in partiële breuken als voren. Met de constante b_m/a_m correspondeert een bijdrage $(b_m/a_m)\delta(t)$ tot de impulsresponsie $h(t)$.

Het geval van een rationale overdrachtsfunctie met $n > m$ wordt niet besproken, omdat voor de meeste RLC-systemen geldt $n \leq m$.

Voorbeeld. 4) Het hieronder getekende netwerk wordt gevoed door een spanningsbron met bronsterkte $x(t)$. Het uitgangssignaal $y(t)$ is de spanning tussen de aangegeven knooppunten.



Het verband tussen $x(t)$ en $y(t)$ wordt beschreven door de volgende differentiaalvergelijking:

$$R^2 C^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3RC \frac{dy}{dt} + y = RC \frac{dx}{dt} + x ;$$

zie H.J. Butterweck, Elektrische Netwerken, Prisma-Technica 56, Utrecht, 1974, pp. 57,107-108.

Met behulp van Fourier transformatie vinden we voor de overdrachtsfunctie van het netwerk,

$$H(\omega) = \frac{j\omega RC + 1}{(j\omega RC)^2 + 3j\omega RC + 1} .$$

Ontbind het noemerpolynoom in factoren,

$$(j\omega RC)^2 + 3j\omega RC + 1 = (j\omega RC + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})(j\omega RC + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}) ,$$

dan is vervolgens $H(\omega)$ te splitsen in partiële breuken:

$$H(\omega) = \frac{1}{10} \left[\frac{5 + \sqrt{5}}{j\omega RC + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}} + \frac{5 - \sqrt{5}}{j\omega RC + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}} \right] e$$

Met behulp van de tabel 1.3.7 vinden we de impulsresponsie

$$h(t) = \frac{1}{10RC} \left[(5 + \sqrt{5}) \exp\left(-\frac{(3 + \sqrt{5})t}{2RC}\right) + (5 - \sqrt{5}) \exp\left(-\frac{(3 - \sqrt{5})t}{2RC}\right) \right] u(t) .$$

2.2. Causale systemen, Hilbert transformatie

Een lineair tijdinvariant systeem wordt volgens 2.1.5, 2.1.6 eenduidig gekarakteriseerd door de impulsresponsie $h(t)$ resp. de overdrachtsfunctie $H(\omega)$; $h(t)$ en $H(\omega)$ hangen samen door Fourier transformatie: $h(t) \leftrightarrow H(\omega)$. Voor een

reëel causaal systeem is $h(t)$ een reële causale functie, d.w.z. $h(t)$ is reëel en $h(t) = 0$ voor $t < 0$. De bijbehorende systeemfunctie $H(\omega)$ is te schrijven in de vorm

$$H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) ,$$

met reëel deel $R(\omega)$ en imaginair deel $X(\omega)$. Zoals afgeleid onder 1.3.5, geldt dan:

$R(\omega)$ is een even functie, $X(\omega)$ is een oneven functie;

$$\frac{1}{2}h(0+) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) d\omega ;$$

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos(\omega t) d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \sin(\omega t) d\omega \text{ voor } t > 0 .$$

Uit de laatste betrekking blijkt dat $R(\omega)$ en $X(\omega)$ niet onafhankelijk van elkaar zijn. In deze paragraaf zullen we het verband tussen $R(\omega)$ en $X(\omega)$ nader onderzoeken. De af te leiden betrekkingen tussen $R(\omega)$ en $X(\omega)$ gelden algemeen voor de Fourier transform van een causale functie.

Zij $h(t)$ een causale functie met Fourier transform $H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$. We nemen aan dat $h(t)$ geen impulsfunctie $\delta(t)$ bevat, zodat

$$h(t) = h(t)u(t) .$$

Pas Fourier transformatie toe, dan volgt met behulp van $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$ en de convolutiestelling 1.4.3:

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} H(\omega) * \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] = \frac{1}{2\pi} H(\omega) * \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2} H(\omega) ,$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\pi} H(\omega) * \frac{1}{j\omega} ,$$

oftewel uitgeschreven

$$R(\omega) + jX(\omega) = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(u) + jX(u)}{\omega - u} du .$$

Door gelijkstelling van resp. de reële en imaginaire delen links en rechts vinden we

2.2.1.
$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(u)}{\omega - u} du , \quad X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(u)}{\omega - u} du ,$$

d.i. het gezochte verband tussen $R(\omega)$ en $X(\omega)$. De integralen in 2.2.1 moeten worden opgevat als hoofdwaarden zowel met betrekking tot $u = \omega$ als ook met betrekking tot $u = \infty$, d.w.z.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(u)}{\omega - u} du = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left(\int_{-A}^{\omega - \epsilon} + \int_{\omega + \epsilon}^A \right) \frac{X(u)}{\omega - u} du$$

en evenzo voor de tweede integraal.

Toevoeging. We beschouwen nog het geval dat $h(t)$ een component $K\delta(t)$ bevat waarin K een reële constante is. De voorgaande resultaten zijn dan toe te passen op de functie $h(t) - K\delta(t)$ met Fourier transform

$H(\omega) - K = R(\omega) - K + jX(\omega)$. Aangezien

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K}{\omega - u} du &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left(\int_{-A}^{\omega - \epsilon} + \int_{\omega + \epsilon}^A \right) \frac{K}{\omega - u} du = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, A \rightarrow \infty} \frac{K}{\pi} [-\log \epsilon + \log |\omega + A| - \log |\omega - A| + \log \epsilon] = 0, \end{aligned}$$

volgt uit 2.2.1:

$$2.2.2. \quad R(\omega) = K + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(u)}{\omega - u} du, \quad X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(u)}{\omega - u} du.$$

Blijkens 2.2.1 hangen $R(\omega)$ en $X(\omega)$ samen door een integraaltransformatie, Hilbert transformatie genoemd. In korte notatie schrijven we

$$R(\omega) = -H\{X(\omega)\}, \quad X(\omega) = H\{R(\omega)\};$$

$R(\omega)$ en $X(\omega)$ zijn de Hilbert transforms van resp. $-X(\omega)$ en $R(\omega)$.

Relaties van de vorm 2.2.1 worden in de fysica dispersierelaties genoemd.

Zulke dispersierelaties treden op bij problemen waar de causaliteit een rol speelt. Als voorbeeld noemen we de Kramers-Kronig relaties die het verband geven tussen het reële en het imaginaire deel van de complexe permittiviteit van een diëlectrisch materiaal.

Voor een causale functie $h(t)$ met Fourier transform $H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ voldoen $R(\omega)$ en $X(\omega)$ aan 2.2.1. We schrijven 2.2.1 nu in de vorm

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} jX(\omega) * \frac{2}{j\omega}, \quad jX(\omega) = \frac{1}{2\pi} R(\omega) * \frac{2}{j\omega},$$

en passen inverse Fourier transformatie toe. Noem $F^{-1}\{R(\omega)\} = r(t)$, $F^{-1}\{jX(\omega)\} = x(t)$, dan volgt met behulp van $\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$ en de convolutiestelling 1.4.3:

$$2.2.3. \quad r(t) = x(t)\text{sgn}(t), \quad x(t) = r(t)\text{sgn}(t).$$

De betrekkingen 2.2.3 zijn afhankelijk, ze volgen uit elkaar. Dit betekent dat ook de oorspronkelijke betrekkingen 2.2.1 afhankelijk zijn: als $R(\omega)$ en $X(\omega)$ voldoen aan één der betrekkingen 2.2.1, dan voldoen ze ook aan de andere.

Als omgekeerde van het voorgaande resultaat geldt: Zij $F\{h(t)\} = H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ en laat $R(\omega)$ en $X(\omega)$ voldoen aan één der betrekkingen 2.2.1, dan is $h(t)$ causaal. Immers, laat $R(\omega)$ en $X(\omega)$ voldoen aan de eerste der betrekkingen 2.2.1, dan is $r(t) = x(t)\text{sgn}(t)$ volgens 2.2.3. Voor $h(t)$ vinden we dan

$$h(t) = F^{-1}\{R(\omega) + jX(\omega)\} = r(t) + x(t) = x(t)[1 + \text{sgn}(t)],$$

waaruit volgt $h(t) = 0$ voor $t < 0$, i.e. $h(t)$ is een causale functie.

Door de betrekkingen 2.2.1 wordt een eenduidig verband gelegd tussen $R(\omega)$ en $X(\omega)$. De uitwerking van 2.2.1 in concrete gevallen kan tot moeilijke integralen voeren. Deze moeilijkheid is te omzeilen door gebruik van Fourier transformatie als volgt. Laat bijv. $R(\omega)$ gegeven zijn en $X(\omega)$ te bepalen. Bepaal dan eerst $r(t) = F^{-1}\{R(\omega)\}$, vervolgens is $x(t) = r(t)\text{sgn}(t)$ op grond van 2.2.3, waarna $jX(\omega) = F\{x(t)\}$. De benodigde Fourier transforms zijn eventueel te ontleen aan een tabel.

Voorbeelden. 1) Van een causale functie $h(t)$ met Fourier transform $H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ is gegeven $R(\omega) = \pi\delta(\omega)$. De bijbehorende functie $X(\omega)$ is te bepalen met 2.2.1:

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi\delta(u)}{\omega - u} du = -\frac{1}{\omega}.$$

We vinden dan $H(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$, en vervolgens met de tabel 1.5.9, $h(t) = u(t)$.

2) We beschouwen een vervormingsvrij systeem met impulsresponsie

$h(t) = \delta(t - t_0)$ en overdrachtsfunctie $H(\omega) = \exp(-j\omega t_0)$; zie 2.1, voorbeeld 1.

Het reële en imaginaire deel van $H(\omega)$ worden in dit geval gegeven door

$$R(\omega) = \cos(\omega t_0), \quad X(\omega) = -\sin(\omega t_0) .$$

Voor $t_0 > 0$ voldoen $R(\omega)$ en $X(\omega)$ aan de betrekkingen 2.2.1, bijv.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(u)}{\omega - u} du &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ut_0)}{\omega - u} du = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos((\omega - u)t_0)}{u} du = \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos(\omega t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ut_0)}{u} du - \frac{1}{\pi} \sin(\omega t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ut_0)}{u} du = \\ &= -\sin(\omega t_0) = X(\omega) ; \end{aligned}$$

hiermee is nog eens bevestigd dat het systeem causaal is.

Voor $t_0 = 0$ geldt $R(\omega) = 1$, $X(\omega) = 0$, waarna de betrekkingen 2.2.2 met $K = 1$ van toepassing zijn.

We bepalen nog de inverse Fourier transforms van $R(\omega)$ en $jX(\omega)$ met behulp van de tabel 1.5.9:

$$r(t) = F^{-1}\{\cos(\omega t_0)\} = \frac{1}{2}[\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)] ,$$

$$x(t) = -F^{-1}\{j \sin(\omega t_0)\} = \frac{1}{2}[-\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)] .$$

Men kan gemakkelijk verifiëren dat $r(t)$ en $x(t)$ voldoen aan de betrekkingen 2.2.3.

3) We beschouwen een ideaal laagdoorlatend filter met overdrachtsfunctie gegeven door

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{voor } |\omega| < \omega_c , \\ 0 & \text{voor } |\omega| > \omega_c ; \end{cases}$$

zie 2.1, voorbeeld 2. In dit geval is $R(\omega) = H(\omega)$ en $X(\omega) = 0$. De functies $R(\omega)$ en $X(\omega)$ voldoen niet aan de eerste der betrekkingen 2.2.1 (en dus ook niet aan de tweede), zodat het systeem niet causaal is.

2.3. Randwaardeproblemen voor partiële differentiaalvergelijkingen

Tot dusver is bij de Fourier transformatie $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ verondersteld dat $f(t)$ een functie van de tijd t is, waarna ω geïnterpreteerd wordt als een frequentie. Meer algemeen beschouwen we nu de Fourier transformatie van een functie $f(x)$ waarbij x een variabele van "willekeurige soort" is. Zij $f(x)$ gedefinieerd op $(-\infty, \infty)$, dan wordt de Fourier transform $F(s)$ van $f(x)$ gedefinieerd door

$$2.3.1. \quad F(s) = F\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jsx} dx ,$$

analoog aan 1.3.1. Omgekeerd geldt dan de inverse Fourier transformatie

$$2.3.2. \quad f(x) = F^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{jsx} ds ,$$

analoog aan 1.3.2.

De Fourier transformatie is een waardevol hulpmiddel bij de oplossing van beginwaardeproblemen en randwaardeproblemen voor partiële differentiaalvergelijkingen. Beschouw bijv. een partiële differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten waarin een onbekende functie $u(x,y)$ voorkomt en één of meer partiële afgeleiden van u : $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$, enz. Laat $u(x,y)$ gedefinieerd zijn op de strook $-\infty < x < \infty, a < y < b$. Voer dan in de Fourier transform naar x van $u(x,y)$ gegeven door

$$2.3.3. \quad U(s,y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{-jsx} dx$$

en merk op dat deze Fourier transform een functie van y (en van s) is. De inverse van 2.3.3 wordt gegeven door

$$2.3.4. \quad u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(s,y) e^{jsx} ds .$$

Onder deze Fourier transformatie gaan de partiële afgeleiden van $u(x,y)$ over in

$$u_x(x,y) \rightarrow jsU(s,y), \quad u_y(x,y) \rightarrow U_y(s,y) , \\ u_{xx}(x,y) \rightarrow (js)^2 U(s,y), \quad u_{xy}(x,y) \rightarrow jsU_y(s,y), \quad u_{yy}(x,y) \rightarrow U_{yy}(s,y), \text{ enz.}$$

met behulp van 1.3.6, regel 7). Elke differentiatie $\frac{\partial}{\partial x}$ gaat over in een vermenigvuldiging met js .

De partiële differentiaalvergelijking voor $u(x,y)$ gaat nu over in een getransformeerde vergelijking voor $U(s,y)$, waarin naast $U(s,y)$ enkel afgeleiden naar y optreden: U_y , U_{yy} , enz. Deze vergelijking is dan op te vatten als een gewone differentiaalvergelijking voor $U(s,y)$ als functie van y , wat een wezenlijke vereenvoudiging betekent ten opzichte van de oorspronkelijke partiële differentiaalvergelijking. De functie $U(s,y)$ moet verder nog voldoen aan zekere begin- of randvoorwaarden welke volgen door Fourier transformatie van de overeenkomstige voorwaarden voor $u(x,y)$. Het aldus verkregen getransformeerde probleem voor $U(s,y)$ is meestal eenvoudiger dan het oorspronkelijke probleem voor $u(x,y)$. Nadat $U(s,y)$ bepaald is vinden we $u(x,y)$ door inverse Fourier transformatie volgens 2.3.4.

Als voorbeeld bespreken we het volgende beginwaardeprobleem voor de één-dimensionale golfvergelijking:

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty, \text{ (beginvoorwaarden) } . \end{cases}$$

Het probleem beschrijft de trilling van een oneindig lange snaar; $u(x,t)$ is de uitwijking van de snaar ter plaatse x en ten tijde t ; c is de voortplantingssnelheid. De gegeven functies $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ beschrijven resp. de beginuitwijking en de beginsnelheid op het tijdstip $t = 0$. Hetzelfde beginwaardeprobleem wordt in het college Wiskunde 40, 2.3.1, opgelost met de methode van d'Alembert. We geven hier de oplossing met behulp van Fourier transformatie.

Voer in de Fourier transform naar x van $u(x,t)$ gegeven door

$$U(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-jsx} dx ,$$

dan geldt voor de partiële afgeleiden van $u(x,t)$,

$$u_t(x,t) \rightarrow U_t(s,t), u_{xx}(x,t) \rightarrow (js)^2 U(s,t), u_{tt}(x,t) \rightarrow U_{tt}(s,t) .$$

Definieer verder de Fourier transforms

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-jsx} dx, \quad \Psi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-jsx} dx .$$

Het oorspronkelijke probleem voor $u(x,t)$ gaat dan onder Fourier transformatie over in het volgende getransformeerde probleem voor $U(s,t)$:

$$\begin{cases} U_{tt} + c^2 s^2 U = 0, & t > 0, \\ U(s,0) = \Phi(s), & U_t(s,0) = \Psi(s). \end{cases}$$

De (gewone) differentiaalvergelijking voor $U(s,t)$ heeft de algemene oplossing

$$U(s,t) = A \cos(cst) + B \sin(cst),$$

waarin A en B willekeurige constanten zijn die van s mogen afhangen. Door toepassing van de beginvoorwaarden volgt

$$A = \Phi(s), \quad csB = \Psi(s),$$

zodat

$$U(s,t) = \Phi(s) \cos(cst) + \frac{1}{c} \frac{\Psi(s)}{s} \sin(cst).$$

Hiermee is het getransformeerde probleem opgelost.

De oplossing $u(x,t)$ van het oorspronkelijke probleem wordt verkregen door inverse Fourier transformatie van $U(s,t)$: $u(x,t) = F^{-1}\{U(s,t)\}$. Met behulp van 1.3.6, regel 5) vinden we

$$\begin{aligned} F^{-1}\{\Phi(s) \cos(cst)\} &= \frac{1}{2} F^{-1}\{\Phi(s) e^{jcst}\} + \frac{1}{2} F^{-1}\{\Phi(s) e^{-jcst}\} = \\ &= \frac{1}{2} \varphi(x+ct) + \frac{1}{2} \varphi(x-ct). \end{aligned}$$

Voor de tweede term van $U(s,t)$ schrijven we

$$\frac{1}{c} \frac{\Psi(s)}{s} \sin(cst) = \frac{1}{4c} \frac{2}{js} [\Psi(s) e^{jcst} - \Psi(s) e^{-jcst}].$$

Met behulp van $\text{sgn}(x) \leftrightarrow \frac{2}{js}$ en de convolutiestelling 1.4.2 volgt dan

$$\begin{aligned} F^{-1}\left\{\frac{1}{c} \frac{\Psi(s)}{s} \sin(cst)\right\} &= \frac{1}{4c} \text{sgn}(x) * [\psi(x+ct) - \psi(x-ct)] = \\ &= \frac{1}{4c} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\xi) \psi(x+ct-\xi) d\xi - \frac{1}{4c} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(\xi) \psi(x-ct-\xi) d\xi = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4c} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{sgn}(x+ct-\xi) - \operatorname{sgn}(x-ct-\xi)] \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi .$$

Voor de oplossing $u(x,t)$ vinden we tenslotte

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \varphi(x+ct) + \frac{1}{2} \varphi(x-ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi$$

in overeenstemming met het resultaat in het college Wiskunde 40, p. 91.

Hoofdstuk 3. Laplace transformatie

3.1. Theorie van de Laplace transformatie

Zij de functie $f(t)$ gedefinieerd op $(-\infty, \infty)$ en integreerbaar over elk eindig interval $[a, b]$.

De tweezijdige "Laplace transform" (Laplace-getransformeerde) $F_{II}(p)$ van $f(t)$ wordt nu gedefinieerd door

$$3.1.1. \quad F_{II}(p) = \mathcal{L}_{II}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt ,$$

mits de integraal convergent is. De toevoeging $f(t) \rightarrow F_{II}(p)$ heet tweezijdige Laplace transformatie.

De grootte p in 3.1.1 is een complexe variabele. Indien t de tijd voorstelt heeft p de dimensie van een frequentie; men noemt p dan de complexe frequentie. Schrijven we $p = \sigma + j\omega$, dan volgt

$$F_{II}(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = F\{f(t)e^{-\sigma t}\} ,$$

i.e. de Laplace transform van $f(t)$ is gelijk aan de Fourier transform van $f(t)e^{-\sigma t}$. Met behulp van de inversieformule 1.3.2 voor Fourier transformatie volgt dan de inverse tweezijdige Laplace transformatie

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{II}(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega ,$$

oftewel, met $\sigma + j\omega = p$ gesteld,

$$f(t) = \mathcal{L}_{II}^{-1}\{F_{II}(p)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{II}(p) e^{pt} d\omega .$$

De aldus gevonden inversieformule is nog te herleiden tot een contour-integraal in het complexe p -vlak; de behandeling valt echter buiten het bestek van dit college.

De tweezijdige Laplace transformatie vormt een uitbreiding van de Fourier transformatie en bevat de laatste als bijzonder geval. Indien namelijk de Fourier transform $F\{f(t)\} = F(\omega)$ bestaat, dan bestaat ook de Laplace transform $\mathcal{L}_{II}\{f(t)\} = F_{II}(p)$ voor $p = j\omega$ en er geldt $F_{II}(j\omega) = F(\omega)$. De tweezij-

dige Laplace transformatie is toepasbaar op een grotere klasse van functies dan de Fourier transformatie. Zo heeft bijv. de stapfunctie $u(t)$ geen Fourier transform (wel in gegeneraliseerde zin), terwijl de Laplace transform gegeven wordt door

$$\mathcal{L}_{II}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = - \frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p} \quad \text{voor } \operatorname{Re} p > 0 .$$

Overeenkomstig 1.2.3, 1.3.1 bestaat de Fourier transform $F\{f(t)\} = F(\omega)$ onder de voldoende voorwaarde dat $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ convergent is. Daaruit volgt als voldoende voorwaarde voor het bestaan van de Laplace transform $\mathcal{L}_{II}\{f(t)\} = F_{II}(p)$: Als $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt$ convergent is voor zekere reële σ , dan bestaat $F_{II}(p)$ voor $p = \sigma + j\omega$. De laatste voorwaarde is duidelijk ruimer, d.w.z. vervuld voor een grotere klasse van functies $f(t)$, dan de voldoende voorwaarde voor het bestaan van $F(\omega)$.

We geven nog een andere voldoende voorwaarde voor het bestaan van de Laplace transform $\mathcal{L}_{II}\{f(t)\} = F_{II}(p)$: Veronderstel dat er reële constanten α, β en bijpassende positieve constanten K_1, K_2 bestaan, zodat $f(t)$ voldoet aan

$$3.1.2. \quad |f(t)| \leq \begin{cases} K_1 e^{\alpha t} & \text{voor } t > 0 , \\ K_2 e^{\beta t} & \text{voor } t < 0 ; \end{cases}$$

zij voorts $\alpha < \beta$, dan is de Laplace-integraal 3.1.1 convergent voor $\alpha < \operatorname{Re} p < \beta$, i.e. $F_{II}(p)$ bestaat in de strook $\alpha < \operatorname{Re} p < \beta$. Merk op dat de linkergrens α van deze convergentiestrook bepaald wordt door het gedrag van $f(t)$ voor $t > 0$; evenzo wordt de rechtergrens β bepaald door het gedrag van $f(t)$ voor $t < 0$. Ter afleiding van dit resultaat schrijven we 3.1.1 als

$$F_{II}(p) = \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-pt} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt .$$

Stel nu $\operatorname{Re} p = \sigma$, dan zijn deze integralen convergent voor resp. $\sigma < \beta$ en $\sigma > \alpha$. Immers, op grond van 3.1.2 is

$$\left| \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-pt} dt \right| \leq K_2 \int_{-\infty}^0 \exp((\beta - \sigma)t) dt = \frac{K_2}{\beta - \sigma} \quad \text{voor } \sigma < \beta ,$$

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq K_1 \int_0^{\infty} \exp((\alpha - \sigma)t) dt = \frac{K_1}{\sigma - \alpha} \quad \text{voor } \sigma > \alpha .$$

Indien er voor elke α en β bijpassende constanten K_1, K_2 bestaan zodat $f(t)$ voldoet aan 3.1.2, dan is de integraal 3.1.1 convergent voor elke complexe p ; $F_{II}(p)$ bestaat dan in het hele complexe p -vlak. Indien $f(t)$ causaal is, d.w.z. $f(t) = 0$ voor $t < 0$, kan men β willekeurig kiezen zodat $F_{II}(p)$ bestaat in het halfvlak $\text{Re } p > \alpha$. Evenzo, indien $f(t) = 0$ voor $t > 0$, kan men α willekeurig kiezen zodat $F_{II}(p)$ bestaat in het halfvlak $\text{Re } p < \beta$.

Indien de convergentiestrook $\alpha < \text{Re } p < \beta$ de imaginaire as bevat, kan men in 3.1.1 stellen $p = j\omega$. Dan volgt $F_{II}(j\omega) = F(\omega)$, waarbij $F(\omega)$ de Fourier transform van $f(t)$ is.

Er bestaan ook functies $f(t)$ waarvoor de Laplace-integraal 3.1.1 divergent is voor elke complexe p ; $f(t)$ bezit dan geen Laplace transform.

Voorbeelden. 1) Zij $f(t) = e^{-a|t|}$ met $a > 0$. Bereken nu de integralen

$$\int_{-\infty}^0 f(t)e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-pt} dt = \frac{\exp((a-p)t)}{a-p} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{a-p}, \text{ Re } p < a,$$

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-pt} dt = -\frac{\exp(-(a+p)t)}{a+p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+p}, \text{ Re } p > -a.$$

De Laplace transform $F_{II}(p) = \mathcal{L}_{II}\{e^{-a|t|}\}$ bestaat in de strook $-a < \text{Re } p < a$ en wordt gegeven door

$$F_{II}(p) = \frac{1}{a-p} + \frac{1}{a+p} = \frac{2a}{a^2 - p^2}.$$

Merk op dat $f(t)$ hier voldoet aan 3.1.2 met $\alpha = -a$, $\beta = a$. De convergentiestrook $-a < \text{Re } p < a$ bevat de imaginaire as. Stellen we $p = j\omega$, dan volgt

$$F_{II}(j\omega) = F\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

in overeenstemming met het resultaat uit de tabel 1.3.7.

2) We bepalen de Laplace transform van $f(t) = \exp(-at^2)$, $a > 0$. Voor reële p is

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-at^2) e^{-pt} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-a\left(t + \frac{p}{2a}\right)^2 + \frac{p^2}{4a}\right] dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left(\frac{p^2}{4a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{p^2}{4a}\right) \end{aligned}$$

onder toepassing van de substitutie $\sqrt{a}(t + \frac{p}{2a}) = x$, terwijl de laatste integraal ontleend is aan het college Wiskunde 20, 4.6.3, voorbeeld 4. De Laplace-integraal is tevens convergent voor elke complexe p en men kan bewijzen dat de voorgaande uitkomst geldig blijft voor complexe p . We vinden dan

$$\mathcal{L}_{II}\{\exp(-at^2)\} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{p^2}{4a}\right)$$

voor elke complexe p . Men kan verifiëren dat $f(t)$ hier voldoet aan 3.1.2 voor elke α en β en bijpassend gekozen K_1, K_2 . Stellen we $p = j\omega$, dan gaat de tweezijdige Laplace transform over in de Fourier transform

$$F\{\exp(-at^2)\} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right),$$

in overeenstemming met het resultaat uit de tabel 1.3.7.

De functie $f(t) = \exp(at^2)$ met $a > 0$, bezit geen Laplace transform. De Laplace-integraal is namelijk divergent voor elke complexe p . In dit geval bestaan er geen constanten α en β zodat $f(t)$ voldoet aan 3.1.2.

3) Zij $f(t) = \cosh(at)$ met $a > 0$. Bereken dan de integralen

$$\int_{-\infty}^0 \cosh(at)e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (e^{at} + e^{-at})e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a-p} - \frac{1}{a+p} \right), \text{ Re } p < -a,$$
$$\int_0^{\infty} \cosh(at)e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^{at} + e^{-at})e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a-p} + \frac{1}{a+p} \right), \text{ Re } p > a.$$

Aangezien de halfvlakken $\text{Re } p < -a$ en $\text{Re } p > a$ een lege doorsnede hebben, zal de Laplace transform $\mathcal{L}_{II}\{\cosh(at)\}$ niet bestaan. Merk op dat $f(t)$ hier voldoet aan 3.1.2 met $\alpha = a$, $\beta = -a$; de voorwaarde $\alpha < \beta$ is echter niet vervuld.

In de onderstaande tabel geven we een aantal eigenschappen en rekenregels voor de tweezijdige Laplace transformatie. De afleiding is analoog aan die van de overeenkomstige eigenschappen en rekenregels voor de Fourier transformatie, zie 1.3.6.

3.1.3. Tabel

$f(t)$	$F_{II}(p) = \mathcal{L}_{II}\{f(t)\}$
$f(at), a \neq 0$	$\frac{1}{ a } F_{II}\left(\frac{p}{a}\right)$
$f(t - t_0)$	$F_{II}(p) \exp(-pt_0)$
$f(t) \exp(p_0 t)$	$F_{II}(p - p_0)$
$f^{(n)}(t), n = 1, 2, 3, \dots$	$p^n F_{II}(p)$
$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F_{II}(p)}{p}$
$(-t)^n f(t), n = 1, 2, 3, \dots$	$F_{II}^{(n)}(p)$

We bespreken vervolgens de éénzijdige Laplace transformatie zoals hierna gedefinieerd in 3.1.4, 3.1.5. Deze transformatie vindt toepassing bij problemen waarbij we geïnteresseerd zijn in de oplossing alleen voor $t > 0$. Als voorbeeld noemen we de berekening van inschakelverschijnselen in RLC-netwerken bij excitatie door een bron die wordt ingeschakeld op het tijdstip $t = 0$; te bepalen zijn dan de spanningen en stromen voor $t > 0$. Het "verleden" $t < 0$ van het netwerk speelt slechts in zoverre mee dat de begintoestand op $t = 0^-$, d.i. onmiddellijk vòòr het inschakelen, bekend dient te zijn.

We zullen nu de éénzijdige Laplace transformatie als volgt invoeren. Zij de functie $f(t)$ gedefinieerd op $[-\epsilon_0, \infty)$ voor zekere $\epsilon_0 > 0$, en zij $f(t)$ integreerbaar over $[-\epsilon_0, A]$ voor elke $A > 0$. De éénzijdige Laplace transform $F_I(p)$ van $f(t)$ wordt dan gedefinieerd door

$$3.1.4. \quad F_I(p) = \mathcal{L}_I\{f(t)\} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt ,$$

mits de integraal convergent is. In het vervolg zullen we gemakshalve de index I weglaten. We noemen $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ kortweg de Laplace transform van $f(t)$, met weglating van het adjectief "éénzijdig".

N.B. In de notaties $F(p)$ voor de Laplace transform en $F(\omega)$ voor de Fourier transform heeft, strikt genomen, de functie F niet dezelfde betekenis. Laat bijv. $f(t)$ een causale functie zijn, dan is

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt ,$$

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt .$$

Daaruit blijkt dat de Fourier transform $F(\omega)$ gelijk is aan de Laplace transform $F(j\omega)$.

In 3.1.4 is met opzet de integratiegrens 0^- (in plaats van 0) gebruikt, opdat ook de delta-functie $\delta(t)$ een Laplace transform bezit: met de zeefeigenschap volgt eenvoudig $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$. Indien $f(t)$ geen impulsfunctie $\delta(t)$ bevat, mag de integratiegrens 0^- worden vervangen door 0 . Dan volgt

3.1.5.
$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt ,$$

mits de integraal convergent is. In het volgende zullen we, voorzover geoorloofd, uitgaan van 3.1.5 als definitie van de Laplace transform; zie ook het college Wiskunde 30, 4.2.1. De functie $f(t)$ hoeft dan slechts gedefinieerd te zijn op $[0, \infty)$. Evenwel, indien $f(t)$ een component $K\delta(t)$ bevat met K constant, dienen we terug te gaan tot de oorspronkelijke definitie 3.1.4.

In 3.1.4, 3.1.5 is p een complexe variabele. Men kan bewijzen dat de Laplace transformatie $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ een inverse heeft, de inverse Laplace transformatie, genoteerd als $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t)$ voor $t > 0$. Uit 3.1.5 blijkt dat $F(p)$ bepaald wordt door $f(t)$ met $t \geq 0$; $f(t)$ hoeft niet gedefinieerd te zijn voor $t < 0$. Het heeft daarom geen zin de inverse $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$ te beschouwen voor $t < 0$. De inversieformule (d.i. de formule voor $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$ bij $t > 0$) bevat weer een contour-integraal in het complexe p -vlak; de behandeling valt buiten het bestek van dit college. Voor de praktische uitvoering van de inverse Laplace transformatie zullen we daarom gebruik maken van een tabel zoals bijv. 3.1.7.

We geven een voldoende voorwaarde voor het bestaan van de Laplace transform $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, analoog aan 3.1.2: Veronderstel dat er een reële constante α en een bijpassende positieve constante K bestaat, zodat $f(t)$ voldoet aan

3.1.6.
$$|f(t)| \leq Ke^{\alpha t} \quad \text{voor } t > 0 ;$$

dan is de Laplace-integraal 3.1.5 convergent voor $\text{Re } p > \alpha$, i.e. $F(p)$ bestaat in het halfvlak $\text{Re } p > \alpha$. De afleiding van dit resultaat is bevat in de overeenkomstige afleiding voor de tweezijdige Laplace transformatie.

Onder verwijzing naar het college Wiskunde 30, 4.2, doen zich drie mogelijkheden voor ten aanzien van de convergentie van de Laplace-integraal 3.1.5:

- 1) De Laplace-integraal is convergent voor elke complexe p ;
voorbeeld: $f(t) = \exp(-at^2)$, $a > 0$.
- 2) De Laplace-integraal is divergent voor elke complexe p ;
voorbeeld: $f(t) = \exp(at^2)$, $a > 0$.
- 3) Er bestaat een reëel getal α_0 zodanig dat de Laplace-integraal convergent is voor $\text{Re } p > \alpha_0$ en divergent voor $\text{Re } p < \alpha_0$. De existentie van een dergelijk getal α_0 wordt hier niet bewezen.

Het getal α_0 heet de convergentie-abscis van de Laplace-integraal. In de gevallen 1) en 2) stellen we de convergentie-abscis gelijk aan $-\infty$ resp. $+\infty$.

Uit het college Wiskunde 30, 4.2.2, citeren we de volgende tabel van functies met hun Laplace transforms, aangevuld met $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

3.1.7. Tabel

$f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	conv.-abscis
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	a
$\frac{t^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	0
$\frac{t^n}{n!} e^{at}$, $n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{1}{(p-a)^{n+1}}$	a
$\cos(bt)$	$\frac{p}{p^2 + b^2}$	0
$\sin(bt)$	$\frac{b}{p^2 + b^2}$	0
$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}$	a
$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(p-a)^2 + b^2}$	a
$\delta(t)$	1	$-\infty$

In deze tabel zijn a en b reële constanten. Men kan gemakkelijk verifiëren dat deze resultaten ook gelden voor complexe a ; de betreffende convergentie-
abscis wordt dan $\text{Re } a$.

In veel leerboeken wordt aan de functies $f(t)$ in de eerste kolom van tabel 3.1.7 een factor $u(t)$ toegevoegd (behalve aan $\delta(t)$); de bijbehorende Laplace
transforms veranderen daardoor niet. Bij gebruik van de tabel 3.1.7 voor in-
verse Laplace transformatie is te bedenken dat $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t)$ alleen voor
 $t > 0$, dus bijv. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-a}\right\} = e^{at}$ voor $t > 0$.

We geven vervolgens een aantal eigenschappen en rekenregels voor de Laplace
transformatie. Hierbij is steeds verondersteld dat $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. De aflei-
ding wordt grotendeels achterwege gelaten, onder verwijzing naar het college
Wiskunde 30, 4.2.3, en naar de afleiding van de overeenkomstige eigenschap-
pen en rekenregels voor de Fourier transformatie, zie 1.3.6.

3.1.8. Eigenschappen en rekenregels

1) Lineariteit $\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(p) + a_2 F_2(p)$.

2) Schaalverandering $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$ voor $a > 0$.

Opmerking. De functie $f(t)$ hoeft slechts gedefinieerd te zijn op $[0, \infty)$.
Voor $a < 0$ heeft $f(at)$ dan geen betekenis; vandaar de voorwaarde $a > 0$.

3) Verschuiving in de tijd $\mathcal{L}\{f(t-t_0)u(t-t_0)\} = F(p)\exp(-pt_0)$ voor $t_0 \geq 0$.

4) Verschuiving in het p-domein $\mathcal{L}\{f(t)\exp(p_0 t)\} = F(p - p_0)$.

5) Differentiatie naar de tijd

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0^-) \quad \text{mits } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-pt} = 0,$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - f^{(n-1)}(0^-) - pf^{(n-2)}(0^-) - \dots - p^{n-1} f(0^-)$$

$$\text{mits } \lim_{t \rightarrow \infty} f^{(k)}(t)e^{-pt} = 0 \text{ voor } k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) \text{ als } f(t) \text{ causaal is.}$$

Afleiding. Zij $\epsilon > 0$; door partiële integratie volgt

$$\int_{-\epsilon}^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt = f(t)e^{-pt} \Big|_{-\epsilon}^{\infty} + p \int_{-\epsilon}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = -f(-\epsilon)e^{p\epsilon} + p \int_{-\epsilon}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Neem hierin $\epsilon \rightarrow 0$, dan vinden we met gebruik van de definitie 3.1.4,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = p\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0^-) = pF(p) - f(0^-) .$$

Op dezelfde wijze volgt het resultaat voor $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ door n keer partiëel integreren. Als $f(t)$ causaal is, geldt $f^{(k)}(0^-) = 0$ voor $k=0,1,\dots,n-1$, zodat $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p)$. \square

Opmerking. In regel 5) mag $f(t)$ discontinu zijn in $t = 0$ met eindige sprong. Voor $f'(t)$ moet dan de afgeleide in gegeneraliseerde zin worden genomen, met impulsterm $[f(0^+) - f(0^-)]\delta(t)$. Dit mogelijk optreden van de delta-functie verklaart waarom bij de afleiding van regel 5) gebruik gemaakt is van de definitie 3.1.4; zie ook het navolgende voorbeeld 1.

6) Integratie naar de tijd $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(p)}{p} .$

7) Differentiatie naar p $\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\} = F^{(n)}(p) .$

Voorbeeld.1) Beschouw de functies $f_1(t) = e^{at}$ voor elke t , en $f_2(t) = e^{at}u(t)$, welke dezelfde Laplace transform bezitten: $F_1(p) = F_2(p) = \frac{1}{p-a}$. Voor de afgeleiden van $f_1(t)$ en $f_2(t)$ geldt

$$f_1'(t) = ae^{at}, \quad f_2'(t) = ae^{at}u(t) + \delta(t) ,$$

waarbij $f_2'(t)$ de afgeleide in gegeneraliseerde zin is. Met behulp van de tabel 3.1.7 volgt eenvoudig

$$\mathcal{L}\{f_1'(t)\} = \frac{a}{p-a}, \quad \mathcal{L}\{f_2'(t)\} = \frac{a}{p-a} + 1 = \frac{p}{p-a} .$$

Dezelfde uitkomsten worden ook verkregen met gebruik van 3.1.8, regel 5); hierbij is te bedenken dat $f_1(0^-) = 1$, $f_2(0^-) = 0$.

In 1.4.1 is de convolutie van twee functies $f_1(t)$ en $f_2(t)$ gedefinieerd door

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau .$$

Indien $f_1(t)$ en $f_2(t)$ causale functies zijn, gaat de convolutie over in

3.1.9.
$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau u(t) ,$$

i.e. $f_1(t) * f_2(t)$ is eveneens een causale functie.

3.1.10. Stelling (convolutiestelling). Laat $f_1(t)$ en $f_2(t)$ causale functies zijn met Laplace transforms $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(p)$, $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(p)$, dan geldt

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(p)F_2(p) .$$

Voor het bewijs van deze stelling wordt verwezen naar het college Wiskunde 30, 4.2.5; zie tevens de daar gegeven voorbeelden.

Zij $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$. We geven nu een tweetal stellingen waarmee resp. de "beginwaarde" $f(0+)$ en de "eindwaarde" $f(\infty)$ van $f(t)$ rechtstreeks bepaald kunnen worden uit $F(p)$ zonder uitvoering van de inverse Laplace transformatie.

3.1.11. Stelling (beginwaarde-eigenschap). Laat $f(t)$ voldoen aan $|f(t)| \leq Ke^{\alpha t}$ voor $t \geq 0$, waarbij α reëel en $K > 0$ is; zij $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$. Indien $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) =: f(0+)$ bestaat, dan geldt

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0+) .$$

N.B. $p \rightarrow \infty$ impliceert hier dat p reëel is.

Bewijs. We schrijven $f(t)$ als

$$f(t) = f(0+) + g(t) ,$$

dan is

$$pF(p) = p\mathcal{L}\{f(0+)\} + p\mathcal{L}\{g(t)\} = f(0+) + pG(p) ,$$

waarin $G(p)$ de Laplace transform van $g(t)$ is.

Te bewijzen is nu dat $\lim_{p \rightarrow \infty} pG(p) = 0$.

Uit de gegevens voor $f(t)$ volgt voor $g(t)$:

$$(i) \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0; \quad (ii) |g(t)| \leq Ke^{\alpha t} + |f(0+)| \text{ voor } t \geq 0 .$$

Kies een willekeurige $\epsilon > 0$. Op grond van (i) laat zich bij deze ϵ een getal $\Delta > 0$ vinden zodat

$$(iii) \quad |g(t)| < \frac{1}{2}\epsilon \text{ voor } 0 < t \leq \Delta .$$

Splits de Laplace-integraal voor $g(t)$ in $\int_0^\Delta + \int_\Delta^\infty$ en neem aan dat $p > \max(0, \alpha)$ is. Met behulp van de ongelijkheden (ii) en (iii) is $pG(p)$ als volgt af te schatten:

$$\begin{aligned} |pG(p)| &\leq p \int_0^\Delta |g(t)| e^{-pt} dt + p \int_\Delta^\infty |g(t)| e^{-pt} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\epsilon p \int_0^\Delta e^{-pt} dt + Kp \int_\Delta^\infty \exp((\alpha - p)t) dt + |f(0+)| p \int_\Delta^\infty e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{2}\epsilon(1 - e^{-p\Delta}) + \frac{Kp}{p - \alpha} \exp((\alpha - p)\Delta) + |f(0+)| e^{-p\Delta}. \end{aligned}$$

De uitdrukking in de laatste regel nadert tot $\frac{1}{2}\epsilon$ als $p \rightarrow \infty$. Er bestaat daarom een getal A , zodat $|pG(p)| < \epsilon$ voor $p > A$. Hieruit volgt $\lim_{p \rightarrow \infty} pG(p) = 0$. \square

Opmerking. De stelling 3.1.11 kan gebruikt worden voor de berekening van $f(0+)$ rechtstreeks uit $F(p)$, mits bekend is dat de limiet $f(0+)$ bestaat. Men kan voorbeelden geven van functies waarvoor $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$ wel bestaat, maar $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ niet.

3.1.12. Stelling (eindwaarde-eigenschap). Laat $f(t)$ begrensd zijn voor $t \geq 0$, en zij $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$. Indien $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) =: f(\infty)$ bestaat, dan geldt

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(\infty).$$

N.B. $p \rightarrow 0$ impliceert dat p reëel is.

Bewijs. We schrijven $f(t)$ als

$$f(t) = f(\infty) + g(t),$$

dan is

$$pF(p) = p\mathcal{L}\{f(\infty)\} + p\mathcal{L}\{g(t)\} = f(\infty) + pG(p),$$

waarin $G(p)$ de Laplace transform van $g(t)$ is.

Te bewijzen is nu dat $\lim_{p \rightarrow 0} pG(p) = 0$.

Uit de gegevens voor $f(t)$ volgt voor $g(t)$:

(i) $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$; (ii) $g(t)$ is begrensd voor $t \geq 0$, i.e. $|g(t)| \leq M$ voor $t \geq 0$.

Kies een willekeurige $\epsilon > 0$. Op grond van (i) laat zich bij deze ϵ een getal $T > 0$ vinden zodat

(iii) $|g(t)| < \frac{1}{2}\epsilon$ voor $t \geq T$.

Splits de Laplace-integraal voor $g(t)$ in $\int_0^T + \int_T^\infty$ en neem aan dat $p > 0$ is. Met behulp van de ongelijkheden (ii) en (iii) is $pG(p)$ als volgt af te schatten:

$$\begin{aligned} |pG(p)| &\leq p \int_0^T |g(t)| e^{-pt} dt + p \int_T^\infty |g(t)| e^{-pt} dt \leq \\ &\leq Mp \int_0^T e^{-pt} dt + \frac{1}{2}\epsilon p \int_T^\infty e^{-pt} dt = \\ &= M(1 - e^{-pT}) + \frac{1}{2}\epsilon e^{-pT}. \end{aligned}$$

De uitdrukking in de laatste regel nadert tot $\frac{1}{2}\epsilon$ als $p \rightarrow 0$. Er bestaat daarom een getal δ , zodat $|pG(p)| < \epsilon$ voor $0 < p < \delta$. Hieruit volgt $\lim_{p \rightarrow 0} pG(p) = 0$. \square

Opmerking. De stelling 3.1.12 kan gebruikt worden voor de berekening van $f(\infty)$ rechtstreeks uit $F(p)$, mits bekend is dat de limiet $f(\infty)$ bestaat. Voor bijv. de functie $f(t) = \sin(\omega t)$ met Laplace transform $F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ bestaat wel $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, maar niet $\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = 0$.

Tenslotte bespreken we nog de Laplace transformatie van een periodieke functie. Zij de functie $f(t)$ gedefinieerd op $[0, \infty)$ en periodiek met periode T , d.w.z. $f(t+T) = f(t)$ voor elke $t \geq 0$. De Laplace transform $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ is dan als volgt te herleiden:

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \sum_{m=0}^\infty \int_{mT}^{(m+1)T} f(t) e^{-pt} dt = \\ &= \sum_{m=0}^\infty e^{-mpT} \int_0^T f(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \end{aligned}$$

waarbij de substitutie $t = mT + \tau$ is toegepast en gebruik gemaakt is van de

periodiciteit $f(mT + \tau) = f(\tau)$. Met de bekende somformule voor een meetkundige reeks volgt

$$\sum_{m=0}^{\infty} e^{-mpT} = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \quad \text{voor } \operatorname{Re} p > 0 .$$

We vinden dan

3.1.13.
$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad F_T(p) = \int_0^T f(t)e^{-pt} dt ,$$

voor $\operatorname{Re} p > 0$. De Laplace transform van een periodieke functie is dus uit te drukken in de Laplace-integraal over één periode.

Voorbeeld. 2) Zij $f(t) = t$ voor $0 \leq t < T$ en verder periodiek voortgezet met periode T . Via berekening van de integraal

$$F_T(p) = \int_0^T te^{-pt} dt = -\frac{1}{p} te^{-pt} \Big|_0^T - \frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_0^T = \frac{1 - (1 + pT)e^{-pT}}{p^2} ,$$

vinden we

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1 - (1 + pT)e^{-pT}}{p^2(1 - e^{-pT})} = \frac{1 + pT}{p^2} - \frac{T}{p(1 - e^{-pT})} .$$

3.2. Toepassingen van de Laplace transformatie

De Laplace transformatie vindt toepassing bij het oplossen van lineaire differentiaalvergelijkingen c.q. lineaire stelsels differentiaalvergelijkingen, met constante coëfficiënten; zie college Wiskunde 30, 4.2. Onder Laplace transformatie gaat de differentiaalvergelijking over in een algebraïsche vergelijking, terwijl het stelsel differentiaalvergelijkingen overgaat in een lineair stelsel algebraïsche vergelijkingen. Beide zijn eenvoudig op te lossen waarna de oplossing van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking(en) volgt door inverse Laplace transformatie.

De Laplace transformatie is voorts te gebruiken bij de analyse van systemen. We beschouwen een lineair tijdinvariant systeem met ingangssignaal $f(t)$ en uitgangssignaal $\mathcal{L}\{f(t)\} = g(t)$; zie 2.1. Overeenkomstig 2.1.5 is het systeem in het tijddomein te beschrijven door

$$g(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau ,$$

waarin $h(t)$ de impulsresponsie is, d.i. de responsie op de impuls $\delta(t)$. We beperken ons nu tot het geval dat het systeem tevens causaal is; dan is $h(t) = 0$ voor $t < 0$. Laat ook hetingangssignaal $f(t)$ een causale functie zijn, dan volgt voor de responsie $g(t)$,

3.2.1.
$$g(t) = f(t) * h(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau u(t) .$$

Pas nu Laplace transformatie toe en noem $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(p)$, $\mathcal{L}\{h(t)\} = H(p)$. Met behulp van de convolutiestelling (3.1.10) vinden we dan voor het systeem de volgende beschrijving in het p-domein:

3.2.2.
$$G(p) = F(p)H(p) .$$

De functie $H(p)$ wordt weer de overdrachtsfunctie van het systeem genoemd. Strikt genomen is deze functie niet helemaal dezelfde als de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ ingevoerd in 2.1. Immers

$$H(p) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-pt}dt ,$$
$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt ,$$

waaruit blijkt dat de vroegere functie $H(\omega)$ overeenstemt met de hierboven ingevoerde functie $H(j\omega)$; vergelijk met de aantekening op p. 74. De analyse van systemen op basis van 3.2.2 is verder analoog aan die op basis van 2.1.6 (beschrijving in het frequentiedomein).

In vervolg op de behandeling in 2.1 beschouwen we nogmaals het geval van een RLC-systeem beschreven door een lineaire differentiaalvergelijking met constante reële coëfficiënten van de vorm (zie 2.1.9)

3.2.3.
$$a_m \frac{d^m y}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$
$$= b_n \frac{d^n x}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x , \quad t > 0 .$$

Hierin is het ingangssignaal $x(t)$ de bronsterkte van de spanningsbron of stroombron waardoor het RLC-netwerk geëxciteerd wordt. Het uitgangssignaal $y(t)$ kan zijn de spanning tussen twee knooppunten van het netwerk of de stroom in een bepaalde tak van het netwerk.

Pas nu Laplace transformatie toe en noem $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(p)$, $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$. Op grond van 3.1.8, regel 5) is

$$\mathcal{L}\{x^{(k)}(t)\} = p^k X(p) - \sum_{\ell=0}^{k-1} p^{k-1-\ell} x^{(\ell)}(0^-)$$

en analoog voor $\mathcal{L}\{y^{(k)}(t)\}$. Onder Laplace transformatie gaat de differentiaalvergelijking 3.2.3 over in

$$\begin{aligned} & [a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0] Y(p) - \sum_{k=0}^m a_k \sum_{\ell=0}^{k-1} p^{k-1-\ell} y^{(\ell)}(0^-) = \\ & = [b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0] X(p) - \sum_{k=0}^n b_k \sum_{\ell=0}^{k-1} p^{k-1-\ell} x^{(\ell)}(0^-) . \end{aligned}$$

Hieruit is $Y(p)$ op te lossen, waarna de responsie $y(t)$ gevonden wordt door inverse Laplace transformatie van $Y(p)$. Merk op dat $y(t)$ op deze wijze één-duidig bepaald wordt door het ingangssignaal $x(t)$ en de "beginwaarden" $y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(m-1)}(0^-)$ op $t = 0^-$.

We veronderstellen nu dat $x(t) = 0$ voor $t < 0$, i.e. de spanningsbron of stroombron wordt ingeschakeld op het tijdstip $t = 0$, en $y(t) = 0$ voor $t < 0$, i.e. het netwerk verkeert voor $t < 0$ in de rusttoestand. Onder Laplace transformatie gaat 3.2.3 dan over in

$$\begin{aligned} & [a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0] Y(p) = \\ & = [b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0] X(p) . \end{aligned}$$

Hieruit is de overdrachtsfunctie $H(p)$ eenvoudig te bepalen:

$$3.2.4. \quad H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)} ,$$

waarin $B(p)$ en $A(p)$ korte notaties voor resp. het teller- en noemerpolynoom zijn; $H(p)$ is dus een rationale functie.

Opmerking. Na vervanging van p door $j\omega$ stemt 3.2.4 overeen met de uitkomst 2.1.10 voor de vroegere overdrachtsfunctie $H(\omega)$. De uitkomst 3.2.4 voor $H(p)$ is ook rechtstreeks af te leiden door substitutie van $x(t) = X(p)e^{pt}$, $y(t) = Y(p)e^{pt}$ in de differentiaalvergelijking 3.2.3; vergelijk met H.J. Butterweck, Elektrische Netwerken, Prisma-Technica 56, Utrecht, 1974, par. 3.6, 4.7.

De impulsresponsie $h(t)$ van het netwerk wordt verkregen door inverse Laplace transformatie van $H(p)$. Daartoe wordt $H(p)$ gesplitst in partiële breuken op de wijze als aangegeven in 2.1, zie p. 58-59.

Ontbind het noemerpolynoom $A(p)$ in factoren van de eerste graad volgens

$$A(p) = a_m (p - q_1)(p - q_2) \cdots (p - q_m) .$$

De (complexe) getallen q_1, q_2, \dots, q_m zijn de nulpunten van $A(p)$; deze heten ook polen van $H(p)$. Daar de coëfficiënten a_0, a_1, \dots, a_m van het polynoom $A(p)$ reëel zijn, zijn de nulpunten q_k , $k = 1, 2, \dots, m$, òf reëel òf in paren toegevoegd complex.

Veronderstel nu eerst dat de q_k 's onderling verschillend zijn (enkelvoudige nulpunten) en dat $n < m$, i.e. $gr(B(p)) < gr(A(p))$. Dan is $H(p)$ te splitsen in partiële breuken volgens

$$H(p) = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{p - q_k}$$

met coëfficiënten c_k gegeven door

$$c_k = \lim_{p \rightarrow q_k} (p - q_k) H(p) .$$

Voor de impulsresponsie $h(t)$ vinden we nu met behulp van de tabel 3.1.7:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \sum_{k=1}^m c_k \exp(q_k t) \quad \text{voor } t > 0 .$$

Indien $A(p)$ een meervoudig nulpunt q_k met multipliciteit m_k bezit, treedt in de ontbinding van $A(p)$ een factor $(p - q_k)^{m_k}$ op. De splitsing van $H(p)$ in partiële breuken bevat dan termen van de vorm $c_{k\ell} / (p - q_k)^\ell$, $\ell = 1, 2, \dots, m_k$. De inverse Laplace transform van een dergelijke term is te vinden met behulp van de tabel 3.1.7:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(p - q_k)^\ell} \right\} = \frac{t^{\ell-1}}{(\ell - 1)!} \exp(q_k t) \quad \text{voor } t > 0 .$$

Indien $n = m$, kan men $H(p)$ door deling herleiden op dezelfde wijze als in 2.1, zie p. 59. Het geval van een rationale overdrachtsfunctie met $n > m$ is van weinig praktisch belang, omdat voor de meeste RLC-systemen geldt $n \leq m$. Uit het voorgaande blijkt dat de impulsresponsie $h(t)$ van een RLC-systeem bestaat uit een som van termen van de vorm

$$\exp(q_k t) \text{ of } \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \exp(q_k t), \ell = 1, 2, \dots, m_k, t > 0,$$

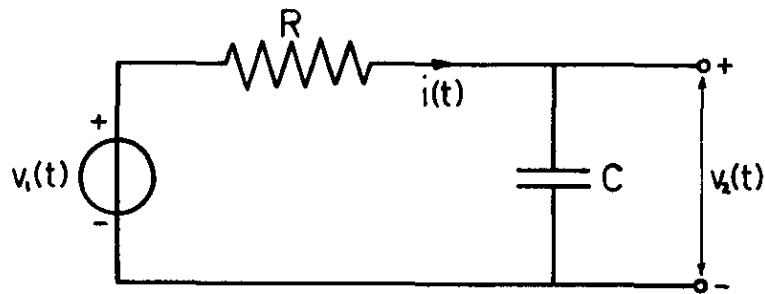
waarbij q_k enkelvoudig resp. m_k -voudig nulpunt is van het noemerpolynoom $A(p)$. Een systeem heet stabiel als voor elk begrensd ingangssignaal ook de responsie begrensd is. Overeenkomstig 2.1.7 is het voorgaande RLC-systeem stabiel dan en slechts dan als $\int_0^\infty |h(t)| dt$ convergent is. Beschouw nu de integralen van de absolute waarden der afzonderlijke termen van $h(t)$:

$$\int_0^\infty \exp(\operatorname{Re}(q_k)t) dt, \int_0^\infty \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \exp(\operatorname{Re}(q_k)t) dt ;$$

deze integralen zijn convergent als $\operatorname{Re} q_k < 0$ is. Het is duidelijk dat de voorwaarde $\operatorname{Re} q_k < 0$, $k = 1, 2, \dots, m$, voldoende is opdat $\int_0^\infty |h(t)| dt$ convergent is. Men kan bewijzen dat deze voorwaarde tevens nodig is voor de convergentie van $\int_0^\infty |h(t)| dt$. Het RLC-systeem is dus stabiel dan en slechts dan als $\operatorname{Re} q_k < 0$, $k = 1, 2, \dots, m$, i.e. de polen van de overdrachtsfunctie $H(p)$ liggen in het complexe vlak links van de imaginaire as.

Het begrip stabiliteit wordt ook wel op een andere wijze gedefinieerd. Een systeem heet stabiel als de impulsresponsie begrensd is. Onder deze definitie is het voorgaande RLC-systeem stabiel mits $\operatorname{Re} q_k \leq 0$, $k = 1, 2, \dots, m$, terwijl de eventuele nulpunten q_k met $\operatorname{Re} q_k = 0$ enkelvoudig dienen te zijn. Immers, in het geval van bijv. een tweevoudig nulpunt q_k met $\operatorname{Re} q_k = 0$, bevat $h(t)$ een term $t \exp(q_k t)$ en deze is niet begrensd voor $t > 0$. Voor een stabiel RLC-systeem liggen nu de polen van de overdrachtsfunctie $H(p)$ in het complexe vlak links van de imaginaire as of op de imaginaire as, terwijl de eventuele polen op de imaginaire as enkelvoudig zijn. Het is duidelijk dat de laatste definitie van stabiliteit ruimer is dan de eerste. Een stabiel RLC-systeem waarvoor de overdrachtsfunctie $H(p)$ één of meer zuiver imaginair polen heeft, wordt wel marginaal stabiel genoemd.

Voorbeelden. 1) Het hieronder getekende RC-netwerk wordt gevoed door een spanningsbron met bronsterkte $v_1(t)$, ingeschakeld op het tijdstip $t = 0$. Het uitgangssignaal $v_2(t)$ is de spanning over de condensator C. Vòòr het inschakelen van de spanningsbron is de condensator opgeladen tot de spanning v_0 , i.e. $v_2(0^-) = v_0$.



Zoals afgeleid in 2.1, voorbeeld 3, wordt het verband tussen $v_1(t)$ en $v_2(t)$ beschreven door de differentiaalvergelijking

$$RC \frac{dv_2}{dt} + v_2(t) = v_1(t) .$$

Pas nu Laplace transformatie toe en noem $\mathcal{L}\{v_{1,2}(t)\} = V_{1,2}(p)$. Bedenk dat $v_2(0^-) = v_0$, dan volgt met behulp van 3.1.8, regel 5),

$$pRCV_2(p) - RCv_0 + V_2(p) = V_1(p) ,$$

$$V_2(p) = \frac{1}{pRC + 1} V_1(p) + \frac{RCv_0}{pRC + 1} .$$

Zij nu $v_1(t) = Eu(t)$ met constante E, dan is $V_1(p) = E/p$, en vervolgens

$$V_2(p) = \frac{E}{(pRC + 1)p} + \frac{RCv_0}{pRC + 1} = \frac{E}{p} + \frac{RC(v_0 - E)}{pRC + 1} .$$

Met behulp van de tabel 3.1.7 vinden we dan

$$v_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_2(p)\} = E + (v_0 - E)\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad \text{voor } t > 0 .$$

Indien $v_0 = 0$, kan men onmiddellijk de overdrachtsfunctie van het netwerk aflezen, namelijk

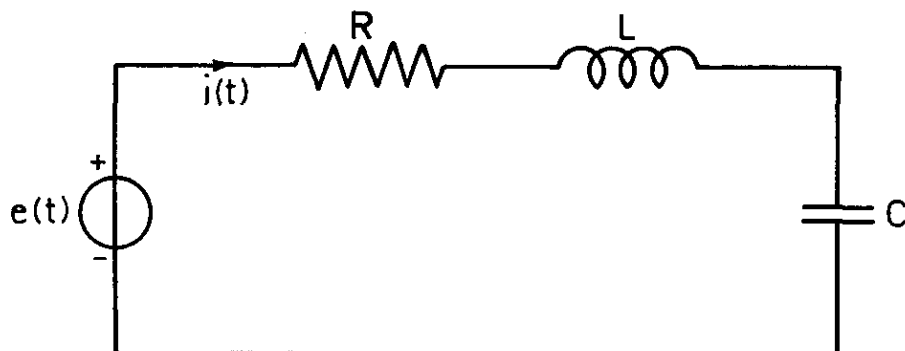
$$H(p) = \frac{1}{pRC + 1} .$$

De bijbehorende impulsresponsie volgt met behulp van de tabel 3.1.7:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad \text{voor } t > 0 ,$$

in overeenstemming met het resultaat uit 2.1, voorbeeld 3.

- 2) In de hieronder getekende serie RLC-schakeling is een spanningsbron opgenomen met bronsterkte $e(t)$, welke wordt ingeschakeld op het tijdstip $t=0$. Als uitgangssignaal wordt beschouwd de stroom $i(t)$ in de schakeling. Voor $t < 0$ zal de schakeling in de rusttoestand verkeren.



Het verband tussen spanning $e(t)$ en stroom $i(t)$ wordt beschreven door de differentiaalvergelijking

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt};$$

zie H.J. Butterweck, *Elektrische Netwerken, Prisma-Technica 56, Utrecht, 1974, par. 3.3.*

We passen Laplace transformatie toe en schrijven $\mathcal{L}\{e(t)\} = E(p)$, $\mathcal{L}\{i(t)\} = I(p)$. Bedenk dat $e(0^-) = 0$, $i(0^-) = i'(0^-) = 0$, dan volgt met behulp van 3.1.8, regel 5),

$$[p^2 L + pR + \frac{1}{C}]I(p) = pE(p).$$

Hieruit vinden we voor de overdrachtsfunctie $H(p)$ van de schakeling,

$$H(p) = \frac{I(p)}{E(p)} = \frac{p}{p^2 L + pR + 1/C}.$$

Merk op dat $H(p)$ hier gelijk is aan de admittantie van de schakeling; $1/H(p)$ is gelijk aan de impedantie.

We bepalen nog de impulsresponsie $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\}$. Ontbind daartoe het noemerpolynoom in factoren van de eerste graad volgens

$$p^2 L + pR + \frac{1}{C} = L(p - q_1)(p - q_2), \quad q_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Dan is $H(p)$ te splitsen in partiële breuken volgens

$$H(p) = \frac{p}{L(p - q_1)(p - q_2)} = \frac{1}{L(q_1 - q_2)} \left(\frac{q_1}{p - q_1} - \frac{q_2}{p - q_2} \right),$$

waarna we met behulp van de tabel 3.1.7 vinden

$$h(t) = \frac{1}{L(q_1 - q_2)} [q_1 \exp(q_1 t) - q_2 \exp(q_2 t)] \quad \text{voor } t > 0 .$$

Bij de verdere uitwerking van $h(t)$ onderscheiden we drie gevallen:

- (i) $R^2 > 4L/C$. In dit geval zijn q_1 en q_2 negatief reëel en verschillend. De impulsresponsie $h(t)$ is dan de som van twee exponentieel gedempte functies en we spreken van een aperiodiek inschakelverschijnsel.
- (ii) $R^2 < 4L/C$. In dit geval zijn q_1 en q_2 toegevoegd complex, en voor te stellen door

$$q_1 = -\alpha + j\omega, \quad q_2 = -\alpha - j\omega \quad \text{met } \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} .$$

De impulsresponsie $h(t)$ is dan te herleiden tot

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{e^{-\alpha t}}{2j\omega L} [(-\alpha + j\omega)e^{j\omega t} - (-\alpha - j\omega)e^{-j\omega t}] = \\ &= \frac{e^{-\alpha t}}{\omega L} [\omega \cos(\omega t) - \alpha \sin(\omega t)] = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega L} e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi), \quad t > 0, \end{aligned}$$

waarin $\varphi = \arctan(\alpha/\omega)$. De responsie $h(t)$ heeft in dit geval een gedempt periodiek verloop.

- (iii) $R^2 = 4L/C$. In dit geval is $q_1 = q_2 = -\frac{R}{2L} =: -\alpha$. De overdrachtsfunctie $H(p)$ is dan te schrijven als

$$H(p) = \frac{p}{L(p + \alpha)^2} = \frac{1}{L(p + \alpha)} - \frac{\alpha}{L(p + \alpha)^2},$$

waaruit met behulp van de tabel 3.1.7 volgt

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = \frac{1}{L}(1 - \alpha t)e^{-\alpha t} \quad \text{voor } t > 0 .$$

De impulsresponsie is hier aperiodiek, we spreken van het aperiodieke grensgeval of ook wel van kritische demping.

Als laatste toepassing van de Laplace transformatie bespreken we de responsie van een RLC-systeem op een causaal periodiek ingangssignaal $x(t)$. Het verband tussen het ingangssignaal $x(t)$ en de responsie $y(t)$ wordt beschreven door een differentiaalvergelijking van de vorm 3.2.3. We nemen aan dat het systeem voor $t < 0$ in de rusttoestand verkeert. De overdrachtsfunctie $H(p)$ van het systeem is dan een rationale functie gegeven door (zie 3.2.4)

$$H(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)} .$$

Gemakshalve zullen we veronderstellen dat de nulpunten q_k , $k = 1, 2, \dots, m$, van het noemerpolynoom $A(p)$ onderling verschillend zijn, terwijl voorts zal gelden $\text{Re } q_k < 0$, $k = 1, 2, \dots, m$, en $n \leq m$.

Zij nu $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(p)$, $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$, dan is volgens 3.2.2,

$$Y(p) = X(p)H(p) = \frac{B(p)}{A(p)} X(p) .$$

Uit $Y(p)$ volgt de responsie $y(t)$ door inverse Laplace transformatie. Het zal aanstonds blijken dat voor een periodiek ingangssignaal $x(t)$, de responsie $y(t)$ te schrijven is als $y(t) = y_{tr}(t) + y_{st}(t)$ (tr = transiënt, st = stationair). De component $y_{tr}(t)$ bestaat hierbij uit één of meer exponentieel gedempte functies en er geldt $y_{tr}(t) \rightarrow 0$ als $t \rightarrow \infty$. De component $y_{st}(t)$ is periodiek met dezelfde periode als $x(t)$. In de limiet voor $t \rightarrow \infty$, d.w.z. in de stationaire toestand van het systeem waarbij $y_{tr}(t)$ is uitgedempt, geldt $y(t) = y_{st}(t)$. We noemen $y_{st}(t)$ de stationaire responsie van het systeem. We zullen nu de componenten $y_{tr}(t)$ en $y_{st}(t)$ van de responsie bepalen in de volgende twee gevallen:

1°. Responsie op een causaal tijd-harmonisch ingangssignaal $x(t) = e^{j\omega t} u(t)$.

Met behulp van de tabel 3.1.7 bepalen we de Laplace transform

$$X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{p - j\omega} ,$$

dan is vervolgens

$$Y(p) = X(p)H(p) = \frac{B(p)}{A(p)(p - j\omega)} .$$

De noemer van de laatste uitkomst heeft nulpunten $j\omega$ en q_k , $k = 1, 2, \dots, m$, en deze zijn onderling verschillend. Dan is $Y(p)$ te splitsen in partiële breuken volgens

$$Y(p) = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{p - q_k} + \frac{c_0}{p - j\omega}$$

met coëfficiënten c_k, c_0 gegeven door

$$c_k = \lim_{p \rightarrow q_k} \frac{(p - q_k)B(p)}{A(p)(p - j\omega)}, \quad c_0 = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = H(j\omega).$$

De responsie $y(t)$ volgt nu door inverse Laplace transformatie met behulp van de tabel 3.1.7:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\} = \sum_{k=1}^m c_k \exp(q_k t) + H(j\omega)e^{j\omega t} \quad \text{voor } t > 0.$$

Bedenk dat $\text{Re } q_k < 0$ is, dan zijn de componenten $y_{tr}(t)$ en $y_{st}(t)$ eenvoudig af te lezen, namelijk

$$y_{tr}(t) = \sum_{k=1}^m c_k \exp(q_k t), \quad y_{st}(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}, \quad t > 0.$$

De aldus gevonden stationaire responsie stemt overeen met het resultaat op p. 50, geval 2°, afgeleid voor een algemeen lineair tijdinvariant systeem. Hierbij is te bedenken dat $H(j\omega)$ gelijk is aan de vroegere functie $H(\omega)$ als gebruikt in 2.1.

- 2°. Responsie op een causaal periodiek ingangssignaal $x(t)$ met periode T . Overeenkomstig 3.1.13 is de Laplace transform van $x(t)$ in dit geval te herleiden tot

$$X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{X_T(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad X_T(p) = \int_0^T x(t)e^{-pt} dt.$$

Vervolgens is dan

$$Y(p) = X(p)H(p) = \frac{B(p)X_T(p)}{A(p)(1 - e^{-pT})}.$$

In vele gevallen is deze $Y(p)$ te herleiden tot de vorm

$$Y(p) = \frac{B_1(p)}{A_1(p)} + \frac{B_2(p)}{A_2(p)(1 - e^{-pT})},$$

waarin $A_{1,2}(p)$, $B_{1,2}(p)$ polynomen in p zijn.

Voor de berekening van de responsie $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\}$ splitsen we $B_1(p)/A_1(p)$ en $B_2(p)/A_2(p)$ in partiële breuken op de bekende wijze. De inverse $\mathcal{L}^{-1}\{B_1(p)/A_1(p)\}$ is dan te bepalen met behulp van de tabel 3.1.7. Veronderstel nu dat $B_2(p)/A_2(p)$ gesplitst is in breuken van de vorm $d/(p - r)$, waarin d een constante is en r een (enkelvoudig) nulpunt van de noemer $A_2(p)$. Te bepalen is dan de inverse Laplace transform van

$$\frac{d}{(p-r)(1-e^{-pT})} = d \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-mpT}}{p-r},$$

waarbij de factor $(1 - e^{-pT})^{-1}$ ontwikkeld is in een meetkundige reeks. Met behulp van de tabel 3.1.7 en 3.1.8, regel 3) vinden we

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{(p-r)(1-e^{-pT})}\right\} = d \sum_{m=0}^{\infty} \exp(r(t-mT))u(t-mT).$$

Zij nu $nT < t < (n+1)T$, $n = 0, 1, 2, \dots$, dan is de voorgaande uitkomst te herleiden tot

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{(p-r)(1-e^{-pT})}\right\} &= d \sum_{m=0}^n \exp(r(t-mT)) = \\ &= \begin{cases} (n+1)d & \text{als } r = 0, \\ de^{rt} \frac{1 - \exp(-(n+1)rT)}{1 - e^{-rT}} & \text{als } r \neq 0, \end{cases} \quad nT < t < (n+1)T, \end{aligned}$$

onder gebruikmaking van de bekende somformule voor een meetkundige reeks. Op deze wijze is de responsie $y(t)$ in principe te bepalen. De component $y_{tr}(t)$ is dan de som van de exponentieel gedempte termen van $y(t)$, terwijl de overige termen van $y(t)$ samen de stationaire responsie $y_{st}(t)$ vormen. Men kan bewijzen dat $y_{st}(t)$ periodiek is met periode T ; zie ook het navolgende voorbeeld 4.

Voorbeelden. 3) Beschouw het RC-netwerk uit voorbeeld 1 en laat $RC = 1$ zijn. De overdrachtsfunctie $H(p)$ van het netwerk wordt dan

$$H(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Bij een ingangsspanning $v_1(t) = 5 \cos(2t)u(t)$ is de responsie $v_2(t)$ als volgt te bepalen met gebruikmaking van de tabel 3.1.7:

$$V_1(p) = \mathcal{L}\{v_1(t)\} = \frac{5p}{p^2+4},$$

$$V_2(p) = V_1(p)H(p) = \frac{5p}{(p+1)(p^2+4)} = -\frac{1}{p+1} + \frac{p}{p^2+4} + \frac{4}{p^2+4},$$

$$v_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_2(p)\} = -e^{-t} + \cos(2t) + 2 \sin(2t) \quad \text{voor } t > 0.$$

De responsie $v_2(t)$ bestaat nu uit de componenten

$$v_{2,tr}(t) = -e^{-t}, \quad v_{2,st}(t) = \cos(2t) + 2 \sin(2t), \quad t > 0.$$

Uitgaande van $v_1(t) = \frac{5}{2}[e^{2jt} + e^{-2jt}]u(t)$ is de stationaire responsie ook rechtstreeks te bepalen:

$$\begin{aligned} v_{2,st}(t) &= \frac{5}{2}[H(2j)e^{2jt} + H(-2j)e^{-2jt}] = \\ &= \frac{5}{2}\left[\frac{e^{2jt}}{1+2j} + \frac{e^{-2jt}}{1-2j}\right] = \cos(2t) + 2 \sin(2t) \quad \text{voor } t > 0. \end{aligned}$$

- 4) Beschouw nogmaals het RC-netwerk uit voorbeeld 1 en schrijf de overdrachtsfunctie $H(p)$ als

$$H(p) = \frac{\alpha}{p + \alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{RC}.$$

Neem als ingangsspanning een zaagtand-sigitaal gegeven door $v_1(t) = t$ voor $0 \leq t < T$ en verder periodiek herhaald met periode T . Overeenkomstig 3.1, voorbeeld 2 is dan

$$V_1(p) = \mathcal{L}\{v_1(t)\} = \frac{1+pT}{p^2} - \frac{T}{p(1-e^{-pT})},$$

waarna volgt

$$V_2(p) = V_1(p)H(p) = \frac{\alpha(1+pT)}{p^2(p+\alpha)} - \frac{\alpha T}{p(p+\alpha)(1-e^{-pT})}.$$

Spits de twee rationale functies in partiële breuken, dan vinden we

$$V_2(p) = \frac{1}{p} - \frac{1-\alpha T}{\alpha p} + \frac{1-\alpha T}{\alpha(p+\alpha)} - \frac{T}{p(1-e^{-pT})} + \frac{T}{(p+\alpha)(1-e^{-pT})}.$$

De inverse Laplace transform van de eerste drie termen van $V_2(p)$ is eenvoudig te bepalen met de tabel 3.1.7. Voor de laatste term van $V_2(p)$ schrijven we

$$\frac{T}{(p+\alpha)(1-e^{-pT})} = T \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-mpT}}{p+\alpha},$$

dan volgt met behulp van de tabel 3.1.7 en 3.1.8, regel 3),

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{T}{(p+\alpha)(1-e^{-pT})}\right\} = T \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-\alpha(t-mT))u(t-mT).$$

Zij $nT < t < (n+1)T$, $n = 0, 1, 2, \dots$, dan is deze uitkomst te herleiden tot

$$f^{-1}\left\{\frac{T}{(p+\alpha)(1-e^{-pT})}\right\} = T \sum_{m=0}^n \exp(-\alpha(t-mT)) = T \frac{\exp(-\alpha(t-(n+1)T)) - e^{-\alpha t}}{e^{\alpha T} - 1}.$$

Evenzo is af te leiden

$$f^{-1}\left\{\frac{T}{p(1-e^{-pT})}\right\} = (n+1)T \quad \text{voor } nT < t < (n+1)T.$$

Totaal vinden we op deze wijze voor de responsie $v_2(t)$:

$$v_2(t) = f^{-1}\{V_2(p)\} = t - \frac{1-\alpha T}{\alpha} + \frac{1-\alpha T}{\alpha} e^{-\alpha t} - (n+1)T + \\ + T \frac{\exp(-\alpha(t-(n+1)T)) - e^{-\alpha t}}{e^{\alpha T} - 1}$$

voor $nT < t < (n+1)T$. Isoleer hieruit de exponentieel gedempte termen, dan volgt

$$v_{2,tr}(t) = \left[\frac{1-\alpha T}{\alpha} - \frac{T}{e^{\alpha T} - 1} \right] e^{-\alpha t}, \quad t > 0.$$

De overige termen van $v_2(t)$ vormen samen de stationaire responsie

$$v_{2,st}(t) = t - nT - \frac{1}{\alpha} + \frac{T e^{\alpha T}}{e^{\alpha T} - 1} \exp(-\alpha(t-nT)), \quad nT < t < (n+1)T.$$

Inderaad is $v_{2,st}(t)$ periodiek met periode T .

Hoofdstuk 4. Z-transformatie

4.1. Theorie van de Z-transformatie

Zij de functie $f(n)$ gedefinieerd voor n geheel, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, d.i. voor discrete waarden van het argument. De functie $f(n)$ beschrijft bijv. een (tijd-)discreet "signaal" als functie van de tijdindex n .

N.B. De notatie $f(n)$ staat zowel voor de functie als geheel, als voor de functiewaarde bij argument n .

Ter inleiding tot de Z-transformatie beschouwen we een discreet signaal dat verkregen is door bemonstering van een (tijd-)continu signaal $f_c(t)$ op equidistante tijdstippen $t = nT$, n geheel, waarna gesteld wordt $f_c(nT) = f(n)$.

Beschrijf de bemonstering door de functie

$$f_b(t) = f_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_c(nT) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \delta(t - nT),$$

dan wordt de Laplace transform (tweezijdig resp. éénzijdig) van $f_b(t)$ gegeven door

$$\mathcal{L}_{II}\{f_b(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_b(t) e^{-pt} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-pnT},$$

$$\mathcal{L}_I\{f_b(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f_b(t) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-pnT}.$$

Stel hierin $z = e^{pT}$, dan ontstaat er

$$\mathcal{L}_{II}\{f_b(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n}, \quad \mathcal{L}_I\{f_b(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}.$$

Geleid door deze resultaten voeren we nu de Z-transformatie als volgt in.

Zij de functie $f(n)$ gedefinieerd voor n geheel, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

De tweezijdige "Z-transform" (Z-getransformeerde) $F_{II}(z)$ van $f(n)$ wordt gedefinieerd door

4.1.1.
$$F_{II}(z) = Z_{II}\{f(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n},$$

mits de reeks convergent is.

De éénzijdige "Z-transform" (Z-getransformeerde) $F_I(z)$ van $f(n)$ wordt gedefinieerd door

$$4.1.2. \quad F_I(z) = Z_I\{f(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n},$$

mits de reeks convergent is.

In 4.1.1 en 4.1.2 is z een complexe variabele. De toevoeging $f(n) \rightarrow F_{II}(z)$ resp. $f(n) \rightarrow F_I(z)$ heet tweezijdige resp. éénzijdige Z-transformatie. De Z_{II} -transformatie voor discrete signalen vormt het analogon van de tweezijdige Laplace transformatie en de Fourier transformatie voor tijd-continue signalen. Analooq aan de éénzijdige Laplace transformatie vindt de Z_I -transformatie vooral toepassing bij problemen waarbij we geïnteresseerd zijn in de oplossing alleen voor tijdindex $n \geq 0$; denk bijv. aan inschakelverschijnselen in tijd-discrete systemen.

Opmerking. De voorgaande definitie van de Z-transformatie is de meest gangbare in de electrotechnische literatuur. Daarnaast komt in de wiskundige literatuur ook voor de definitie

$$Z_{II}\{f(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^n, \quad Z_I\{f(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^n,$$

met z^n i.p.v. z^{-n} ; één en ander komt neer op vervanging van z^{-1} door z .

De functies $F_{II}(z)$ en $F_I(z)$ heten ook genererende functies of voortbrengende functies van de rij $(f(n))$. Genererende functies werden reeds toegepast in de waarschijnlijkheidsrekening door De Moivre in 1730.

We onderzoeken het convergentiegebied van $F_{II}(z)$ en $F_I(z)$. Schrijf daartoe

$$F_{II}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} f(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)(z^{-1})^n + \sum_{n=1}^{\infty} f(-n)z^n,$$

d.i. de som van twee complexe machtreeksen in z^{-1} en z .

In het college Wiskunde 10, 5.4.9, 5.4.10, is gesteld dat voor een complexe machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ één van de volgende uitspraken geldt:

- 1) De machtreeks is convergent alleen voor $z = 0$ en divergent voor alle $z \neq 0$.
- 2) De machtreeks is absoluut convergent voor alle z .
- 3) Er bestaat een (reëel) getal $R > 0$ zó dat de machtreeks absoluut convergent is voor $|z| < R$ en divergent voor $|z| > R$.

Het getal R heet de convergentiestraal van de machtreeks; in de gevallen 1) en 2) stellen we $R = 0$ resp. $R = \infty$.

Noem de convergentiestralen van de machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)(z^{-1})^n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} f(-n)z^n$ resp. $1/R_1$ en R_2 , dan geldt:

$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)(z^{-1})^n$ is convergent voor $|z^{-1}| < 1/R_1$ oftewel voor $|z| > R_1$,
 en divergent voor $|z^{-1}| > 1/R_1$ oftewel voor $|z| < R_1$;

$\sum_{n=1}^{\infty} f(-n)z^n$ is convergent voor $|z| < R_2$ en divergent voor $|z| > R_2$.

Door combinatie van deze resultaten volgt:

$F_{II}(z)$ is absoluut convergent in het gebied $R_1 < |z| < R_2$, mits $R_1 < R_2$,
 en divergent voor alle z indien $R_1 > R_2$;

$F_I(z)$ is absoluut convergent in het gebied $|z| > R_1$, mits $R_1 \neq \infty$,
 en divergent voor alle z indien $R_1 = \infty$.

De vermelding van het convergentiegebied is belangrijk, in het bijzonder bij $F_{II}(z)$. Zo kunnen twee verschillende discrete functies dezelfde Z_{II} -transform hebben, echter met verschillende convergentiegebieden; zie voorbeeld 4.

Men kan bewijzen dat de Z -transformatie $Z_{II}\{f(n)\} = F_{II}(z)$ resp. $Z_I\{f(n)\} = F_I(z)$ een inverse heeft, de inverse Z -transformatie, genoteerd als

$Z_{II}^{-1}\{F_{II}(z)\} = f(n)$ resp. $Z_I^{-1}\{F_I(z)\} = f(n)$ voor $n \geq 0$. De inversieformule (d.i. de formule voor $Z_{II}^{-1}\{F_{II}(z)\}$ resp. $Z_I^{-1}\{F_I(z)\}$ bij $n \geq 0$) bevat een

contour-integraal in het complexe z -vlak waarbij de integratiecontour verloopt in het convergentiegebied van $F_{II}(z)$ resp. $F_I(z)$; de behandeling valt buiten het bestek van dit college. Voor de praktische uitvoering van de inverse Z_I -transformatie zullen we daarom gebruik maken van een tabel zoals bijv. 4.1.4.

Voorbeelden. 1) Zij de functie $f(n)$ gegeven door

$$f(n) = \begin{cases} a^n & \text{voor } n \geq 0, \\ 0 & \text{voor } n < 0, \end{cases} \quad a \text{ complex,}$$

dan is

$$F_{II}(z) = F_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|.$$

De functiewaarden $f(n)$ vormen een meetkundige of exponentiële rij. De functie $f(n)$ is het discrete analogon van de tijd-continue functie $f_c(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ en is daaruit door bemonstering te verkrijgen.

2) Zij de functie $f(n)$ gegeven door

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{voor } n \geq 0, \\ b^n & \text{voor } n < 0, \end{cases} \quad b \text{ complex,}$$

dan is

$$F_{II}(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} b^{-n} z^n = \frac{b^{-1} z}{1 - b^{-1} z} = -\frac{z}{z-b}, \quad |z| < |b|.$$

3) Zij de functie $f(n)$ gegeven door

$$f(n) = \begin{cases} a^n & \text{voor } n \geq 0, \\ b^n & \text{voor } n < 0, \end{cases} \quad a \text{ en } b \text{ complex.}$$

Door optelling van de resultaten van de voorbeelden 1 en 2 volgt

$$F_{II}(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-b}, \quad |a| < |z| < |b|, \text{ mits } |a| < |b|.$$

Indien $|a| \geq |b|$ is $F_{II}(z)$ divergent voor alle z .

4) De twee functies

$$f(n) = \begin{cases} a^n & \text{voor } n \geq 0, \\ 0 & \text{voor } n < 0, \end{cases} \quad g(n) = \begin{cases} 0 & \text{voor } n \geq 0, \\ -a^n & \text{voor } n < 0, \end{cases}$$

hebben dezelfde Z_{II} -transforms

$$F_{II}(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|; \quad G_{II}(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|,$$

echter met verschillende convergentiegebieden.

We geven een aantal eigenschappen en rekenregels voor de Z-transformatie. Hierbij is steeds verondersteld dat $Z_{II,I}\{f(n)\} = F_{II,I}(z)$. Als de eigenschap zowel voor de tweezijdige als de éénzijdige Z-transformatie geldt, is de index II,I weggelaten. Vergelijk deze eigenschappen en rekenregels met 1.3.6 en 3.1.8.

4.1.3. Eigenschappen en rekenregels

- 1) Lineariteit $Z\{af(n) + bg(n)\} = aF(z) + bG(z)$.
- 2) Schaalverandering $Z\{a^n f(n)\} = F\left(\frac{z}{a}\right)$ voor complexe $a \neq 0$.
Afleiding. We beperken ons tot het geval van de Z_{II} -transformatie:

$$Z_{II}\{a^n f(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n f(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = F_{II}\left(\frac{z}{a}\right). \quad \square$$

3) Verschuiving $Z_{II}\{f(n-k)\} = z^{-k} F_{II}(z), k \text{ geheel};$

$$Z_I\{f(n-k)\} = z^{-k} F_I(z) + z^{-k} [f(-1)z + f(-2)z^2 + \dots + f(-k)z^k], k \text{ geheel en } \geq 0;$$

$$Z_I\{f(n+k)\} = z^k F_I(z) - z^k [f(0) + f(1)z^{-1} + \dots + f(k-1)z^{-k+1}], k \text{ geheel en } \geq 0.$$

Afleiding. Onder de substitutie $n-k = m$ is

$$Z_{II}\{f(n-k)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-k) z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) z^{-m-k} = z^{-k} F_{II}(z).$$

Op analoge wijze is af te leiden

$$\begin{aligned} Z_I\{f(n-k)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n-k) z^{-n} = \sum_{m=-k}^{\infty} f(m) z^{-m-k} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m-k} + \sum_{m=-k}^{-1} f(m) z^{-m-k} = \\ &= z^{-k} F_I(z) + z^{-k} [f(-1)z + f(-2)z^2 + \dots + f(-k)z^k]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_I\{f(n+k)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n+k) z^{-n} = \sum_{m=k}^{\infty} f(m) z^{-m+k} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m+k} - \sum_{m=0}^{k-1} f(m) z^{-m+k} = \\ &= z^k F_I(z) - z^k [f(0) + f(1)z^{-1} + \dots + f(k-1)z^{-k+1}]. \quad \square \end{aligned}$$

4) Differentiatie naar z $Z\{nf(n)\} = -zF'(z),$

$$Z\{n(n+1) \cdots (n+k-1)f(n)\} = (-1)^k z^k F^{(k)}(z), k \text{ geheel en } \geq 0.$$

Afleiding. We beperken ons tot het geval van de Z_{II} -transformatie. Differentieer

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n} = F_{II}(z)$$

naar z en vermenigvuldigd met $-z$, dan ontstaat er

$$-z \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)(-n)z^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nf(n)z^{-n} = -z F'_{II}(z),$$

$$Z_{II}\{nf(n)\} = -z F'_{II}(z).$$

De tweede regel volgt door k keer differentiëren naar z en vermenigvuldiging met $(-1)^k z^k$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n+1) \cdots (n+k-1)f(n)z^{-n} = (-1)^k z^k F_{II}^{(k)}(z). \quad \square$$

De discrete stapfunctie $u(n)$ gedefinieerd door

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{voor } n \geq 0, \\ 0 & \text{voor } n < 0, \end{cases}$$

heeft de Z-transform

$$Z\{u(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1.$$

De discrete delta-functie of Kronecker delta-functie $\delta(n)$ gedefinieerd door

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{voor } n = 0, \\ 0 & \text{voor } n \neq 0, \end{cases}$$

heeft de Z-transform

$$Z\{\delta(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = 1 \quad \text{voor alle } z.$$

Voor beide functies vallen de Z_{II} - en Z_I -transforms samen.

Voorbeelden. 5) Uit $Z\{u(n)\} = z/(z-1)$ volgt met de differentiatieregel 4.1.3, 4):

$$Z\{nu(n)\} = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1;$$

$$Z\{n(n+1) \cdots (n+k-1)u(n)\} = (-1)^k z^k \frac{d^k}{dz^k} \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{k! z^k}{(z-1)^{k+1}},$$

k geheel en ≥ 1 , $|z| > 1$.

Deze resultaten gelden zowel voor de Z_{II} - als de Z_I -transformatie, reden waarom de index II, I is weggelaten.

Toepassing van de verschuivingsregel 4.1.3, 3) in het laatste resultaat leidt tot

$$Z_{II}\{(n-k+1)(n-k+2) \cdots nu(n-k+1)\} = \frac{k! z}{(z-1)^{k+1}}, \quad k \text{ geheel en } \geq 1, |z| > 1,$$

oftewel

$$Z_{II}\left\{\binom{n}{k}u(n-k+1)\right\} = Z_I\left\{\binom{n}{k}\right\} = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}, \quad k \text{ geheel en } \geq 0, |z| > 1.$$

Hierbij wordt herinnerd aan de definitie van de binomiaalcoëfficiënt (zie college Wiskunde 10, 0.8.9):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}, \quad n \geq k; \quad \binom{n}{k} = 0, \quad n < k.$$

Vervolgens is met de schaalveranderingsregel 4.1.3, 2) af te leiden

$$Z_I\{na^n\} = Z\{na^n u(n)\} = \frac{za^{-1}}{(za^{-1}-1)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}, \quad |z| > |a|;$$

$$Z_I\left\{\binom{n}{k}a^n\right\} = \frac{za^{-1}}{(za^{-1}-1)^{k+1}} = \frac{a^k z}{(z-a)^{k+1}}, \quad k \text{ geheel en } \geq 0, |z| > |a|.$$

6) Met de verschuivingsregel 4.1.3, 3) volgt

$$Z_I\{u(n-2)\} = \frac{z^{-1}}{z-1}, \quad |z| > 1,$$

$$Z_I\{u(n+2)\} = \frac{z^3}{z-1} - z^2[1+z^{-1}] = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1,$$

welke resultaten ook eenvoudig rechtstreeks zijn af te leiden. Evenzo is

$$Z_{II}\{\delta(n-k)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-k)z^{-n} = z^{-k}$$

ook af te leiden met de verschuivingsregel.

We vatten de resultaten van de voorgaande voorbeelden nog samen in de volgende tabel van Z_I -transforms.

4.1.4. Tabel

$f(n)$	$F_I(z) = Z_I\{f(n)\}$	conv.gebied
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$\delta(n)$	1	alle z
a^n	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a $
$\binom{n}{k} a^n, k = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{a^k z}{(z-a)^{k+1}}$	$ z > a $

Ten behoeve van later gebruik bespreken we de inverse Z_I -transformatie van een rationale functie $R(z)$ van de vorm

$$R(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m}$$

met convergentiegebied $|z| > R_1$; hierbij is R_1 zodanig te kiezen dat het convergentiegebied geen polen van $R(z)$ bevat (zie onder). Te bepalen is de discrete functie $r(k)$, gedefinieerd voor $k = 0, 1, 2, \dots$, zodanig dat

$$Z_I\{r(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(k) z^{-k} = R(z).$$

We veronderstellen $n \leq m$, i.e. $\text{gr}(B(z)) \leq \text{gr}(A(z))$; deze veronderstelling is nodig opdat de inverse Z_I -transformatie van $R(z)$ inderdaad mogelijk is.

Analoog als voor de inverse Fourier en Laplace transformatie (zie p. 58-59, p. 84) gebruiken we de methode van splitsing in partiële breuken, hier toegepast op de functie $R(z)/z$. Ontbind het noemerpolyoom $A(z)$ in factoren van de eerste graad volgens

$$A(z) = a_0(z - q_1)(z - q_2) \dots (z - q_m).$$

De (complexe) getallen q_1, q_2, \dots, q_m zijn de nulpunten van $A(z)$; deze heten ook polen van $R(z)$. Voor de convergentiestraal R_1 (zie boven) is dan te nemen $R_1 = \max_{i=1, 2, \dots, m} |q_i|$, zodat de polen van $R(z)$ alle binnen of op de cirkel $|z| = R_1$ liggen en niet in het convergentiegebied $|z| > R_1$.

Veronderstel nu eerst dat de nulpunten q_1, q_2, \dots, q_m onderling verschillend en $\neq 0$ zijn (enkelvoudige nulpunten), dan is $R(z)/z$ te splitsen in partiële breuken volgens

$$\frac{R(z)}{z} = \frac{B(z)}{a_0 z(z-q_1) \cdots (z-q_m)} = \frac{c_0}{z} + \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{z-q_i}$$

met coëfficiënten c_0, c_i gegeven door

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{R(z)}{z} = R(0), \quad c_i = \lim_{z \rightarrow q_i} (z-q_i) \frac{R(z)}{z}.$$

Hieruit volgt voor $R(z)$ de breuksplitsing

$$R(z) = c_0 + \sum_{i=1}^m c_i \frac{z}{z-q_i}.$$

De inverse Z_I -transformatie is nu eenvoudig uit te voeren met de tabel 4.1.4:

$$r(k) = c_0 \delta(k) + \sum_{i=1}^m c_i q_i^k \quad \text{voor } k \geq 0.$$

Indien $A(z)$ een meervoudig nulpunt $q_i \neq 0$ met multipliciteit m_i bezit, treedt in de ontbinding van $A(z)$ een factor $(z-q_i)^{m_i}$ op. De splitsing van $R(z)/z$ in partiële breuken bevat dan termen van de vorm $c_{i\ell}/(z-q_i)^\ell$, $\ell = 1, 2, \dots, m_i$; in de splitsing van $R(z)$ worden deze termen $c_{i\ell} z/(z-q_i)^\ell$. De inverse Z_I -transform van een dergelijke term is te bepalen met behulp van de tabel 4.1.4:

$$Z_I^{-1} \left\{ \frac{z}{(z-q_i)^\ell} \right\} = \binom{k}{\ell-1} q_i^{k-\ell+1} \quad \text{voor } k \geq 0.$$

Tenslotte, indien $A(z)$ een nulpunt $q_i = 0$ bezit met multipliciteit m_i , treedt in de ontbinding van $zA(z)$ een factor z^{m_i+1} op. De splitsing van $R(z)$ in partiële breuken bevat dan termen van de vorm $c_{0\ell}/z^\ell$, $\ell = 0, 1, \dots, m_i$. De inverse Z_I -transformatie van een dergelijke term is triviaal,

$$Z_I^{-1} \{z^{-\ell}\} = \delta(k-\ell) = \begin{cases} 1 & \text{voor } k = \ell, \\ 0 & \text{voor } k \neq \ell, k \geq 0. \end{cases}$$

Door samenvoegen van de deelresultaten is $Z_I^{-1}\{R(z)\} = r(k)$ te bepalen.

De inverse Z_I -transformatie van een rationale functie $R(z)$ is ook uit te voeren met de methode van staartdeling, waarbij de deling verloopt naar afdalende machten van z . Deze methode is alleen bruikbaar indien men slechts in een beperkt aantal functiewaarden $r(k) = Z_I^{-1}\{R(z)\}$ geïnteresseerd is; zie voorbeeld 7.

Voorbeelden. 7) De rationale functie

$$R(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + z - \frac{3}{4}}$$

is te splitsen in partiële breuken volgens

$$\frac{R(z)}{z} = \frac{2z + 1}{z(z - \frac{1}{2})(z + \frac{3}{2})} = -\frac{4/3}{z} + \frac{2}{z - \frac{1}{2}} - \frac{2/3}{z + \frac{3}{2}},$$

$$R(z) = -\frac{4}{3} + \frac{2z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \frac{z}{z + \frac{3}{2}}.$$

Met de tabel 4.1.4 volgt

$$r(k) = Z_I^{-1}\{R(z)\} = -\frac{4}{3} \delta(k) + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \frac{2}{3} \left(-\frac{3}{2}\right)^k \quad \text{voor } k \geq 0.$$

Met de methode van staartdeling vinden we

$$\begin{array}{r} z^2 + z - \frac{3}{4} \Big/ 2z + 1 \qquad \backslash \ 2z^{-1} - z^{-2} + \frac{5}{2} z^{-3} - \dots \\ \underline{2z + 2 - \frac{3}{2} z^{-1}} \\ -1 + \frac{3}{2} z^{-1} \\ \underline{-1 - z^{-1} + \frac{3}{4} z^{-2}} \\ \frac{5}{2} z^{-1} - \frac{3}{4} z^{-2} \\ \underline{\frac{5}{2} z^{-1} + \frac{5}{2} z^{-2} - \frac{15}{8} z^{-3}} \\ \dots \end{array}$$

waaruit is af te lezen: $r(0) = 0, r(1) = 2, r(2) = -1, r(3) = \frac{5}{2}, \dots$

8) De rationale functie

$$R(z) = \frac{z}{(z - \frac{1}{2})(z - 1)^2}$$

is te splitsen in partiële breuken volgens

$$\frac{R(z)}{z} = \frac{1}{(z - \frac{1}{2})(z - 1)^2} = \frac{4}{z - \frac{1}{2}} - \frac{4}{z - 1} + \frac{2}{(z - 1)^2},$$

$$R(z) = \frac{4z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{4z}{z - 1} + \frac{2z}{(z - 1)^2}.$$

Met de tabel 4.1.4 vinden we

$$r(k) = Z_{\text{I}}^{-1}\{R(z)\} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^k - 4 + 2\binom{k}{1} = 2k - 4 + 2^{-k+2} \quad \text{voor } k \geq 0.$$

4.1.5. Definitie. Een functie $f(n)$ heet causaal indien $f(n) = 0$ voor $n < 0$.

Voor een causale functie $f(n)$ geldt $Z_{\text{II}}\{f(n)\} = Z_{\text{I}}\{f(n)\}$. De stapfunctie $u(n)$ en de delta-functie $\delta(n)$ zijn voorbeelden van causale functies.

4.1.6. Definitie. De convolutie van twee discrete functies $f(n)$ en $g(n)$ is de functie $h(n)$ gegeven door

$$h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k).$$

Notatie: $h(n) = f(n) * g(n)$.

Met de substitutie $n - k = \ell$ volgt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g(\ell)f(n-\ell),$$

zodat $f(n) * g(n) = g(n) * f(n)$; de convolutie is dus commutatief.

Indien $f(n)$ en $g(n)$ causale functies zijn, d.w.z. $f(n) = g(n) = 0$ voor $n < 0$, gaat de convolutie over in

$$f(n) * g(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k) & \text{voor } n \geq 0 \\ 0 & \text{voor } n < 0 \end{cases} = \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k)u(n),$$

i.e. $f(n) * g(n)$ is eveneens een causale functie.

4.1.7. Stelling (convolutiestelling). Zij $Z_{II}\{f(n)\} = F_{II}(z)$, $Z_{II}\{g(n)\} = G_{II}(z)$, dan geldt

$$Z_{II}\{f(n) * g(n)\} = F_{II}(z)G_{II}(z) .$$

Laat $f(n)$ en $g(n)$ causale functies zijn met Z_I -transforms $Z_I\{f(n)\} = F_I(z)$, $Z_I\{g(n)\} = G_I(z)$, dan geldt

$$Z_I\{f(n) * g(n)\} = F_I(z)G_I(z) .$$

Afleiding. Bepaal de Z_{II} -transform van $f(n) * g(n)$ als volgt:

$$\begin{aligned} Z_{II}\{f(n) * g(n)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n-k)z^{-n} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k} G_{II}(z) = F_{II}(z)G_{II}(z) . \end{aligned}$$

Hierbij is (formele) verwisseling van de sommatievolgorde toegepast en gebruik gemaakt van 4.1.3, regel 3).

Als $f(n)$ en $g(n)$ causale functies zijn, is ook $f(n) * g(n)$ causaal. Voor causale functies valt de Z_{II} -transformatie samen met de Z_I -transformatie zodat

$$Z_I\{f(n) * g(n)\} = F_I(z)G_I(z) . \quad \square$$

Voorbeelden. 9) Uit

$$f(n) * u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^n f(k)$$

volgt met de convolutiestelling 4.1.7,

$$Z_{II}\left\{\sum_{k=-\infty}^n f(k)\right\} = Z_{II}\{f(n)\}Z_{II}\{u(n)\} = \frac{z}{z-1} F_{II}(z) .$$

10) De convolutie van $u(n)$ met zichzelf wordt gegeven door

$$u(n) * u(n) = \sum_{k=C}^n u(k)u(n-k)u(n) = \sum_{k=0}^n 1 \cdot u(n) = (n+1)u(n) .$$

Onder Z -transformatie gaat deze convolutie over in

$$Z\{(n+1)u(n)\} = [Z\{u(n)\}]^2 = \frac{z^2}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1;$$

dit resultaat is ook af te leiden met de tabel 4.1.4.

11) Analoog aan 1.5.3, eigenschap 3) geldt

$$f(n) * \delta(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(n-k) = f(n),$$

en vervolgens

$$Z_{II}\{f(n) * \delta(n)\} = Z_{II}\{f(n)\}Z_{II}\{\delta(n)\} = Z_{II}\{f(n)\}.$$

Zij $Z_I\{f(n)\} = F_I(z)$. We geven nu een tweetal stellingen waarmee resp. de "beginwaarde" $f(0)$ en de "eindwaarde" $f(\infty)$ van $f(n)$ rechtstreeks bepaald kunnen worden uit $F_I(z)$ zonder uitvoering van de inverse Z_I -transformatie; vergelijk met de overeenkomstige stellingen 3.1.11 en 3.1.12 uit de theorie van de Laplace transformatie.

4.1.8. Stelling (beginwaarde-eigenschap). Laat $Z_I\{f(n)\} = F_I(z)$ convergent zijn voor $|z| > R_1$ met R_1 eindig, dan geldt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F_I(z) = f(0).$$

Bewijs. De machtreeks $F_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$ is uniform convergent voor $|z| > R_1$, zodat de volgende limiet termsgewijs mag worden genomen:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \lim_{z \rightarrow \infty} z^{-n} = f(0). \quad \square$$

4.1.9. Stelling (eindwaarde-eigenschap). Zij $Z_I\{f(n)\} = F_I(z)$. Indien $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = f(\infty)$ bestaat, dan geldt

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F_I(z) = f(\infty).$$

Bewijs. Vorm de Z_I -transform van $f(n+1) - f(n)$ met gebruikmaking van 4.1.3, regel 3):

$$Z_I\{f(n+1) - f(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} [f(n+1) - f(n)]z^{-n} = (z-1)F_I(z) - zf(0).$$

Neem hierin de limiet voor $z \rightarrow 1$ en merk op dat de reeks

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [f(n+1) - f(n)] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N [f(n+1) - f(n)] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} [f(N+1) - f(0)] = f(\infty) - f(0) \end{aligned}$$

convergent is. Op grond van de stelling van Abel (zie college Wiskunde 10, 4.5.13) is dan

$$\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} [f(n+1) - f(n)] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} [f(n+1) - f(n)] = f(\infty) - f(0)$$

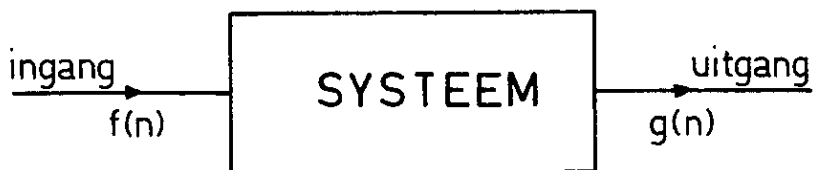
oftewel

$$\lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)F_I(z) - zf(0)] = f(\infty) - f(0), \quad \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F_I(z) = f(\infty). \quad \square$$

Opmerking. De stelling 4.1.9 kan gebruikt worden voor de berekening van $f(\infty)$ rechtstreeks uit $F_I(z)$, mits bekend is dat de limiet $f(\infty)$ bestaat. Voor bijv. de functie $f(n) = (-1)^n$ met Z_I -transform $F_I(z) = z/(z+1)$ bestaat wel $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F_I(z) = 0$, maar niet $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$.

4.2. Toepassingen van de Z-transformatie

Zoals de Fourier en Laplace transformatie een belangrijk hulpmiddel vormen bij de analyse van tijd-continue systemen, vindt de Z-transformatie toepassing bij de analyse van tijd-discrete systemen. Bij een tijd-discreet systeem zijn de ingangs- en uitgangssignalen functies van de tijd welke slechts gedefinieerd zijn op discrete tijdstippen. Een tijd-discreet systeem is schematisch voor te stellen door een "black box" (zie figuur) met discreet ingangssignaal $f(n)$ en discreet uitgangssignaal $g(n)$.



De functie $g(n)$ wordt hierbij eenduidig bepaald door de functie $f(n)$, d.w.z. er bestaat een transformatie T zodat

$$T\{f(n)\} = g(n) .$$

Door deze transformatie of operator T wordt het systeem volledig gekarakteriseerd.

Analoog als bij de behandeling van tijd-continue systemen (2.1, p. 44-45) voeren we de volgende begrippen in:

Een systeem heet lineair als uit $T\{f_1(n)\} = g_1(n)$, $T\{f_2(n)\} = g_2(n)$ volgt

$$4.2.1. \quad T\{a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n)\} = a_1 g_1(n) + a_2 g_2(n) ,$$

waarbij a_1 , a_2 willekeurige constanten zijn. De operator T is dan een lineaire operator.

Een systeem heet tijdinvariant als uit $T\{f(n)\} = g(n)$ volgt

$$4.2.2. \quad T\{f(n - n_0)\} = g(n - n_0) ,$$

waarin n_0 een willekeurig geheel getal is.

Een systeem heet reëel als voor $f(n)$ reëel, ook $T\{f(n)\} = g(n)$ reëel is.

Een systeem heet causaal als uit $f_1(n) = f_2(n)$ voor $n < n_0$ volgt dat voor de responsies $T\{f_1(n)\} = g_1(n)$, $T\{f_2(n)\} = g_2(n)$ geldt: $g_1(n) = g_2(n)$ voor $n < n_0$.

Uit deze definitie volgt net als op p. 45:

Een lineair systeem heet causaal als uit $f(n) = 0$ voor $n < n_0$ volgt dat ook $T\{f(n)\} = g(n) = 0$ voor $n < n_0$.

Fysisch realiseerbare systemen zijn reëel en causaal.

We beperken ons verder tot de analyse van lineaire tijdinvariante systemen. Daartoe voeren we in de impulsresponsie of stootkarakteristiek van het systeem

$$T\{\delta(n)\} = h(n) ,$$

i.e. $h(n)$ is de responsie op de delta-functie $\delta(n)$.

Op grond van de tijdinvariantie 4.2.2 van het systeem is dan

$$T\{\delta(n - k)\} = h(n - k)$$

voor elke gehele k . Een willekeurig ingangssignaal $f(n)$ is nu voor te stellen door de convolutie (zie 4.1, voorbeeld 11)

$$f(n) = f(n) * \delta(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(n-k) ,$$

d.i. een superpositie van delta-functies. Op grond van de lineariteit 4.2.1 van het systeem vinden we dan voor de responsie op het ingangssignaal $f(n)$:

$$g(n) = T\{f(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)T\{\delta(n-k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)h(n-k) = f(n) * h(n) .$$

Onder toepassing van de Z_{II} -transformatie gaat de convolutie over in een gewoon product (convolutiestelling 4.1.7). Voer in de notaties

$$Z_{II}\{f(n)\} = F(z) , \quad Z_{II}\{g(n)\} = G(z) , \quad Z_{II}\{h(n)\} = H(z) ,$$

dan volgt

$$G(z) = F(z)H(z) .$$

De functie $H(z)$ wordt de overdrachtsfunctie of systeemfunctie genoemd.

Samenvatting. Een lineair tijdinvariant systeem $T\{f(n)\} = g(n)$ is op twee manieren te beschrijven:

(i) beschrijving in het tijddomein

$$4.2.3. \quad g(n) = f(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)h(n-k) ,$$

waarin $h(n)$ de impulsresponsie is;

(ii) beschrijving in het z-domein

$$4.2.4. \quad G(z) = F(z)H(z) ,$$

waarin $H(z)$ de overdrachtsfunctie is.

In deze beschrijvingen wordt het systeem eenduidig gekarakteriseerd door $h(n)$ resp. $H(z)$; $h(n)$ en $H(z)$ hangen samen volgens

$$Z_{II}\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = H(z) .$$

Vergelijk deze samenvatting met 2.1.5, 2.1.6, 3.2.1, 3.2.2.

Toevoeging. De responsie op het ingangssignaal $f(n) = z^n$ wordt gegeven door

$$g(n) = z^n * h(n) = h(n) * z^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{n-k} = H(z)z^n ,$$

oftewel

$$4.2.5. \quad T\{z^n\} = H(z)z^n,$$

te vergelijken met 2.1.4. De discrete functie z^n is een eigenfunctie van de operator T , behorend bij de eigenwaarde $H(z)$. De overdrachtsfunctie $H(z)$ is ook door deze eigenschap te karakteriseren.

Voor een reëel systeem is $h(n)$ reëel, en omgekeerd.

Voor een causaal systeem is $h(n) = 0$ voor $n < 0$, i.e. $h(n)$ is een causale functie. De betrekking 4.2.3 gaat dan over in

$$g(n) = f(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^n f(k)h(n-k).$$

Hieruit blijkt dat voor een causaal systeem de responsie $g(n)$ bepaald wordt door het ingangssignaal $f(k)$ voor $k \leq n$. Omgekeerd, als $h(n)$ een causale functie is, dan is het systeem causaal. Immers voor een ingangssignaal $f(n)$ met $f(n) = 0$ voor $n < n_0$, volgt uit de voorgaande formule dat ook $g(n) = 0$ voor $n < n_0$.

4.2.6. Definitie. Een systeem $T\{f(n)\} = g(n)$ heet stabiel als voor elk begrensde ingangssignaal $f(n)$, de responsie $g(n)$ begrensd is.

4.2.7. Stelling. Een lineair tijdinvariant systeem met impulsresponsie $h(n)$ is stabiel dan en slechts dan als $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$ convergent is.

Bewijs. (i) Zij $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$ convergent. Laat $f(n)$ begrensd zijn, d.w.z. er bestaat een getal M zodat $|f(n)| \leq M$ voor elke gehele n . Met 4.2.3 volgt voor de bijbehorende responsie $g(n)$:

$$|g(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)h(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)||h(n-k)| \leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|.$$

De functie $g(n)$ is dus begrensd en het systeem is stabiel.

(ii) Zij $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$ divergent. Neem dan als ingangssignaal

$$f(n) = \frac{h^*(-n)}{|h(-n)|} \text{ als } h(-n) \neq 0; \quad f(n) = 0 \text{ als } h(-n) = 0.$$

Dit signaal is begrensd: $|f(n)| \leq 1$. Met 4.2.3 vinden we voor de bijbehorende responsie op $n = 0$:

$$g(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)h(-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h^*(-k)h(-k)}{|h(-k)|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \infty.$$

De responsie is dus niet begrensd en het systeem is niet stabiel. \square

Opmerking. Vergelijk 4.2.6, 4.2.7 met de overeenkomstige definitie en stelling 2.1.7 voor tijd-continue systemen op p. 49.

In het voorafgaande is de overdrachtsfunctie $H(z)$ gedefinieerd door

$$H(z) = Z_{II}\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}.$$

Deze Z_{II} -transform zal in het algemeen een convergentiegebied van de vorm $R_1 < |z| < R_2$ hebben. Laat nu het systeem stabiel zijn zodat $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$ convergent is volgens 4.2.7. Daaruit volgt dat de reeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$ absoluut convergent is voor $|z| = 1$. Voor een stabiel systeem ligt de cirkel $|z| = 1$ dus in het convergentiegebied van $H(z)$.

Beschouw nu de functie $H(z)$ op de cirkel $|z| = 1$. Stel $z = e^{j\varphi}$ met φ reëel, dan wordt $H(e^{j\varphi})$ de frequentiekaracteristiek of frequentie-responsie van het discrete systeem genoemd. Uit 4.2.5 volgt $\mathcal{T}\{e^{jn\varphi}\} = H(e^{j\varphi})e^{jn\varphi}$; de functie $H(e^{j\varphi})$ bepaalt dus de responsie van het systeem op hetingangssignaal $f(n) = e^{jn\varphi}$, d.i. de bemonsterde versie van een tijd-harmonisch tijd-continu signaal. De frequentiekaracteristiek $H(e^{j\varphi})$ is kennelijk periodiek met periode 2π . Uit de definitie van $H(z)$ volgt

$$H(e^{j\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\varphi}.$$

Deze reeks is op te vatten als de complexe Fourierreeks van $H(e^{j\varphi})$ met Fourier coëfficiënten $h(n)$. Volgens 1.1.7 is dan

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\varphi})e^{jn\varphi} d\varphi,$$

welke betrekking te lezen is als de inverse Z_I -transformatie van $H(e^{j\varphi})$ terug naar de impulsresponsie $h(n)$. Indien het discrete systeem tevens reëel en

causaal is, is $H(e^{j\varphi})$ te splitsen in een reëel en een imaginair deel,

$$H(e^{j\varphi}) = R(\varphi) + jX(\varphi) ,$$

met

$$R(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)\cos(n\varphi) , \quad X(\varphi) = - \sum_{n=1}^{\infty} h(n)\sin(n\varphi) .$$

Tussen de functies $R(\varphi)$ en $X(\varphi)$ bestaat dan weer een verband analoog aan 2.2.1.

De frequentiekaracteristiek $H(e^{j\varphi})$ van een discreet systeem vormt in veel opzichten het analogon van de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ van een tijd-continu systeem, als behandeld in 2.1. De frequentiekaracteristiek is vooral van belang bij gebruik van een discreet systeem als simulator van een tijd-continu systeem; zie A. Papoulis, Signal Analysis, McGraw-Hill, New York, 1977, Secs 1-3, 5-3.

Als belangrijke deelklasse van lineaire tijdinvariante systemen beschouwen we nu systemen beschreven door een lineaire differentievergelijking (of recurrente betrekking) met constante reële coëfficiënten van de vorm

4.2.8.
$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_{m-1} y(k-m+1) + a_m y(k-m) =$$
$$= b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_{n-1} x(k-n+1) + b_n x(k-n) , \quad k \geq 0 ,$$

of

$$\sum_{\ell=0}^m a_{\ell} y(k-\ell) = \sum_{\ell=0}^n b_{\ell} x(k-\ell) , \quad k \geq 0 .$$

In afwijking van de tot dusver gebruikte notatie worden hier het ingangs- en uitgangssignaal voorgesteld door resp. $x(k)$ en $y(k)$, k geheel. De differentievergelijking 4.2.8 vormt het discrete analogon van de differentiaalvergelijking 2.1.9, 3.2.3, voorkomend bij de beschrijving van RLC-systemen. In 4.2.8 zijn m en n vaste gehele getallen ≥ 0 . We veronderstellen $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$ en $a_0 \neq 0$. De laatste veronderstelling is essentieel opdat het systeem causaal is, zoals straks nader toegelicht wordt. Men kan bewijzen dat een tijd-discreet systeem beschreven door een differentievergelijking van de vorm 4.2.8 te realiseren is met een eindig aantal vertragingselementen, vermenigvuldigers en optellers; zie A. Papoulis, Signal Analysis, McGraw-Hill, New York, 1977, Sec. 2-3.

Herschrijf 4.2.8 als volgt,

$$a_0 y(k) = - \sum_{\ell=1}^m a_{\ell} y(k-\ell) + \sum_{\ell=0}^n b_{\ell} x(k-\ell), \quad k \geq 0.$$

Indien $a_0 \neq 0$ wordt hierdoor $y(k)$ uitgedrukt in de voorgaande waarden $y(k-1), \dots, y(k-m)$, en in het ingangssignaal $x(k), x(k-1), \dots, x(k-n)$. Indien $a_0 = 0$ en $a_1 \neq 0$, zou op dezelfde wijze $y(k-1)$ uitgedrukt kunnen worden in $y(k-2), \dots, y(k-m)$, en $x(k), x(k-1), \dots, x(k-n)$; $y(k-1)$ zou dan afhangen van $x(k)$, d.i. het ingangssignaal op tijd k , waardoor het systeem niet causaal zou zijn. We veronderstellen daarom $a_0 \neq 0$. Voor $k = 0$ vinden we $y(0)$ uitgedrukt in de zg. beginwaarden $y(-1), y(-2), \dots, y(-m)$, en in het ingangssignaal $x(0), x(-1), \dots, x(-n)$. Voor $k = 1$ vinden we vervolgens $y(1)$ uitgedrukt in voorgaande waarden en ingangssignaal, etc. Samengevat, door de differentievergelijking 4.2.8 wordt het uitgangssignaal $y(k)$, $k \geq 0$, in principe volledig bepaald, uitgedrukt in de beginwaarden $y(-1), y(-2), \dots, y(-m)$, en in het ingangssignaal $x(k)$, $k \geq -n$.

Voor de praktische bepaling van het uitgangssignaal is gebruik te maken van de Z_I -transformatie, met $Z_I\{x(k)\} = X(z)$, $Z_I\{y(k)\} = Y(z)$ te noemen. Op grond van 4.1.3, regel 3) is

$$Z_I\{x(k-\ell)\} = z^{-\ell} X(z) + z^{-\ell} \sum_{i=1}^{\ell} x(-i) z^i$$

en analoog voor $Z_I\{y(k-\ell)\}$. Onder Z_I -transformatie gaat de differentievergelijking 4.2.8 over in

$$\begin{aligned} & [a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{m-1} z^{-m+1} + a_m z^{-m}] Y(z) + \sum_{\ell=0}^m a_{\ell} z^{-\ell} \sum_{i=1}^{\ell} y(-i) z^i = \\ & = [b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n-1} z^{-n+1} + b_n z^{-n}] X(z) + \sum_{\ell=0}^n b_{\ell} z^{-\ell} \sum_{i=1}^{\ell} x(-i) z^i. \end{aligned}$$

Hieruit is $Y(z)$ op te lossen, waarna de responsie $y(k)$ gevonden wordt door inverse Z_I -transformatie van $Y(z)$. Het is duidelijk dat $y(k)$, $k \geq 0$, op deze wijze e nduidig bepaald wordt door het ingangssignaal $x(k)$ en de beginwaarden $y(-1), y(-2), \dots, y(-m)$.

We veronderstellen nu dat $x(k) = 0$ voor $k < 0$, i.e. het ingangssignaal wordt ingeschakeld op het "tijdstip" $k = 0$, en $y(k) = 0$ voor $k < 0$, i.e. het systeem verkeert voor $k < 0$ in de rusttoestand. Onder Z_I -transformatie gaat

4.2.8 dan over in

$$\begin{aligned} & [a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{m-1} z^{-m+1} + a_m z^{-m}] Y(z) = \\ & = [b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n-1} z^{-n+1} + b_n z^{-n}] X(z) . \end{aligned}$$

Hieruit is de overdrachtsfunctie $H(z)$ eenvoudig te bepalen:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n-1} z^{-n+1} + b_n z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{m-1} z^{-m+1} + a_m z^{-m}} = \\ &= z^{m-n} \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n}{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m} = \frac{z^{m-n} B(z)}{A(z)} = \frac{B(z)}{z^{n-m} A(z)} , \end{aligned}$$

waarin $B(z)$ en $A(z)$ korte notaties zijn voor resp. het teller- en noemerpolynoom; $H(z)$ is dus een rationale functie. Merk op dat $\text{gr}(\text{teller}) \leq \text{gr}(\text{noemer})$ wegens $a_0 \neq 0$; het \leftarrow -teken treedt op als $b_0 = 0$.

De impulsresponsie $h(k)$ van het systeem wordt verkregen door inverse Z_I^{-1} transformatie van $H(z)$,

$$Z_I^{-1}\{H(z)\} = h(k) \quad \text{voor } k \geq 0 .$$

De inverse Z_I^{-1} -transformatie van de rationale functies $H(z)$ is uit te voeren met de methode beschreven in 4.1, p. 101-102. Volgens deze methode dient eerst het noemerpolynoom $A(z)$ te worden ontbonden in factoren van de eerste graad volgens

$$A(z) = a_0 (z - q_1)(z - q_2) \cdots (z - q_m) ,$$

waarbij q_1, q_2, \dots, q_m polen van $H(z)$ heten. Na splitsing van $H(z)$ in partiële breuken en inverse Z_I^{-1} -transformatie van deze breuken, vinden we dat de impulsresponsie $h(k)$ bestaat uit een som van termen van de vorm

$$q_i^k ; \binom{k}{\ell-1} q_i^{k-\ell+1} , \quad \ell = 1, 2, \dots, m_i ; \quad \delta(k-\ell) , \quad \ell \geq 0 ; \quad \text{voor } k \geq 0 .$$

De eerste twee soorten termen corresponderen met $q_i \neq 0$ enkelvoudig resp. m_i -voudig nulpunt van $A(z)$; de derde soort correspondeert met een (meervoudig) nulpunt $z = 0$ van de noemer van $H(z)$.

Het tijd-discrete systeem beschreven door de differentievergelijking 4.2.8 zal overeenkomstig 4.2.7 stabiel zijn dan en slechts dan als $\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)|$

convergent is. Beschouw nu de som van de absolute waarden der afzonderlijke termen van $h(k)$:

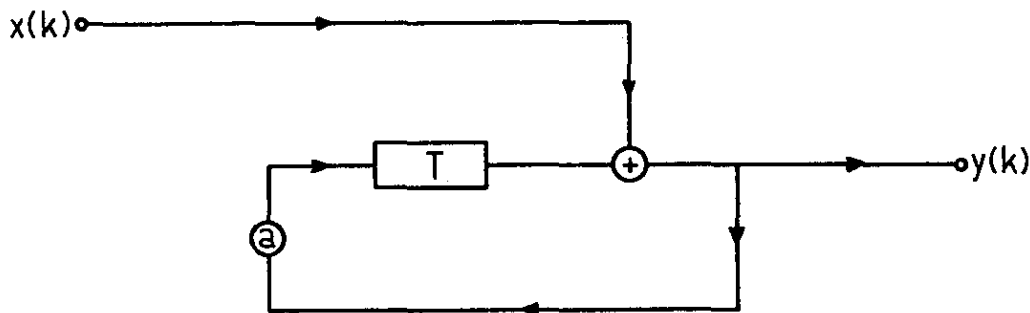
$$\sum_{k=0}^{\infty} |q_i|^k ; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{\ell-1} |q_i|^{k-\ell+1} ; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k-\ell) .$$

De laatste reeks is altijd convergent, terwijl de eerste twee reeksen convergent zijn als $|q_i| < 1$ is. Het is duidelijk dat de voorwaarde $|q_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, voldoende is opdat $\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)|$ convergent is. Men kan bewijzen dat deze voorwaarde tevens nodig is voor de convergentie van $\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)|$. Het tijd-discrete systeem beschreven door 4.2.8 is dus stabiel dan en slechts dan als $|q_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, i.e. als de polen van de overdrachtsfunctie $H(z)$ binnen de eenheidscirkel in het complexe vlak liggen.

Voorbeelden. 1) Beschouw een tijd-discreet systeem beschreven door de differentievergelijking

$$y(k) - ay(k-1) = x(k) , \quad k \geq 0 ,$$

met beginwaarde $y(-1) = b$. De realisatie van het systeem is schematisch weergegeven in onderstaand blokdiagram.



Hierin is \boxed{T} een eenheids-vertragingselement (unit delay), \oplus is een opteller en $\odot a$ is een vermenigvuldiger met de factor a .

Pas nu Z_I -transformatie toe en noem $Z_I\{x(k)\} = X(z)$, $Z_I\{y(k)\} = Y(z)$. Met gebruik van 4.1.3, regel 3), en van de beginwaarde $y(-1) = b$, volgt dan

$$Y(z) - az^{-1} Y(z) - ab = X(z) ,$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-a} X(z) + \frac{abz}{z-a} .$$

Zij nu $x(k) = u(k)$, dan is $X(z) = z/(z-1)$, en vervolgens

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-1)} + \frac{abz}{z-a} = \frac{1}{a-1} \left(\frac{az}{z-a} - \frac{z}{z-1} \right) + \frac{abz}{z-a},$$

aangenomen dat $a \neq 1$ is. Inverse Z_I -transformatie met behulp van de tabel 4.1.4 leidt tot

$$y(k) = \left(ab + \frac{a}{a-1} \right) a^k - \frac{1}{a-1} \quad \text{voor } k \geq 0.$$

Indien $y(-1) = b = 0$, kan men onmiddellijk de overdrachtsfunctie van het systeem aflezen, namelijk

$$H(z) = \frac{z}{z-a}.$$

De bijbehorende impulsresponsie volgt met behulp van de tabel 4.1.4:

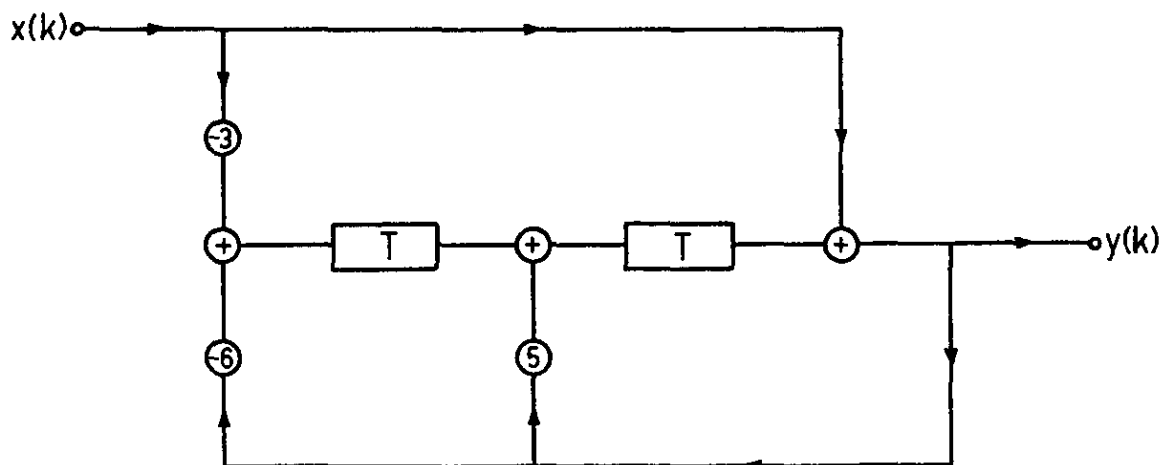
$$h(k) = a^k \quad \text{voor } k \geq 0.$$

Merk op dat het systeem stabiel is mits $|a| < 1$ is.

- 2) Beschouw een tijd-discreet systeem beschreven door de differentievergelijking

$$y(k) - 5y(k-1) + 6y(k-2) = x(k) - 3x(k-2), \quad k \geq 0.$$

Het systeem is te realiseren met een eindig aantal vertragingselementen, vermenigvuldigers en optellers; zie onderstaand blokdiagram.



Hetingangssignaal $x(k)$ wordt ingeschakeld op het tijdstip $k = 0$, terwijl het systeem voor $k < 0$ in de rusttoestand verkeert. Pas Z_I -transformatie toe (of Z_{II} -transformatie, dat is hier hetzelfde) en noem $Z_I\{x(k)\} = X(z)$, $Z_I\{y(k)\} = Y(z)$. De differentievergelijking gaat dan over in

$$(1 - 5z^{-1} + 6z^{-2})Y(z) = (1 - 3z^{-2})X(z) ,$$

waaruit de overdrachtsfunctie $H(z)$ eenvoudig te bepalen is,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 3z^{-2}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}} = \frac{z^2 - 3}{z^2 - 5z + 6} .$$

Via de splitsing in partiële breuken

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z^2 - 3}{z(z-2)(z-3)} = -\frac{1}{z} - \frac{\frac{1}{2}}{z-2} + \frac{2}{z-3} ,$$

$$H(z) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{z}{z-2} + \frac{2z}{z-3} ,$$

vinden we met behulp van de tabel 4.1.4 voor de impulsresponsie

$$h(k) = Z_I^{-1}\{H(z)\} = -\frac{1}{2} \delta(k) - 2^{k-1} + 2 \cdot 3^k \quad \text{voor } k \geq 0 .$$

Het systeem is kennelijk niet stabiel zoals ook reeds volgt uit het feit dat $H(z)$ polen $z = 2$ en $z = 3$ buiten de eenheidscirkel heeft.

3) De differentievergelijking

$$y(k) - 3y(k-1) + 3y(k-2) - y(k-3) = x(k-2) , \quad k \geq 0 ,$$

met causale functies $x(k)$ en $y(k)$, gaat onder Z_I -transformatie over in

$$(1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3})Y(z) = z^{-2} X(z)$$

waarin $X(z) = Z_I\{x(k)\}$, $Y(z) = Z_I\{y(k)\}$. De bijbehorende overdrachtsfunctie wordt dan

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3}} = \frac{z}{(z-1)^3} ,$$

waarna voor de impulsresponsie volgt met de tabel 4.1.4,

$$h(k) = \binom{k}{2} = \frac{1}{2} k(k-1) \quad \text{voor } k \geq 0 .$$

Als tweede toepassing bespreken we, aan de hand van enige voorbeelden, het gebruik van de Z-transformatie bij het oplossen van lineaire differentievergelijkingen (recurrente betrekkingen) met constante coëfficiënten in het algemeen, ook als de vergelijking niet voortkomt uit de beschrijving van een tijd-discreet systeem. Deze toepassing is analoog aan die van de Laplace transformatie bij het oplossen van lineaire differentiaalvergelijkingen c.q. lineaire stelsels differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten; zie college Wiskunde 30, 4.2.

Voorbeelden. 4) De rij van Fibonacci $x(n)$ voldoet aan de recurrente betrekking

$$x(n+2) = x(n) + x(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

met beginwaarden $x(0) = 1, x(1) = 1$. Na uitwerking vinden we de rij beginnend met

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

De rij komt voor bij Leonardo van Pisa (bijgenaamd Fibonacci) in 1202 als model voor de groei van een konijnenpopulatie. Een meer serieuze toepassing wordt gegeven in het college Wiskunde 41, 1.1.4: Langs een communicatiekanaal wordt een boodschap gestuurd bestaande uit een opvolging van signalen S_1 en S_2 , met een tijdsduur van één resp. twee seconden; een boodschap kan bijv. zijn $S_1 S_2 S_1 S_1 S_2 S_1$ met een totale tijdsduur van 8 seconden. Laat $x(n)$ het aantal verschillende boodschappen zijn met een tijdsduur van n seconden, dan is af te leiden dat $x(n)$ gelijk is aan het n -de Fibonacci getal als boven.

De recurrente betrekking is op te lossen met Z_1 -transformatie. Noem $Z_1\{x(n)\} = X(z)$, dan volgt met behulp van 4.1.3, regel 3),

$$z^2 X(z) - x(0)z^2 - x(1)z = X(z) + zX(z) - x(0)z.$$

Substitueer hierin $x(0) = x(1) = 1$, en los $X(z)$ op:

$$(z^2 - z - 1)X(z) = z^2, \quad X(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}.$$

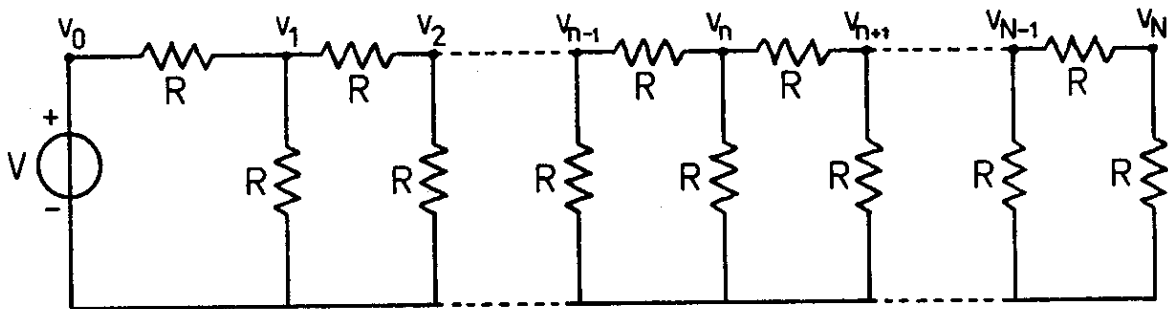
Via de splitsing in partiële breuken

$$X(z) = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \frac{z}{z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \frac{z}{z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}$$

en inverse Z_I -transformatie met behulp van de tabel 4.1.4, vinden we

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \text{ voor } n \geq 0 .$$

- 5) Het hieronder getekende laddernetwerk bestaat uit N mazen; alle weerstanden zijn gelijk aan R . Het netwerk wordt gevoed door een spanningsbron met constante spanning v .



De spanning in de knooppunten wordt voorgesteld door v_n , $n = 0, 1, \dots, N$; zie figuur. Uit de Kirchhoff-stroomvergelijking voor het n -de knooppunt volgt

$$\frac{v_{n-1} - v_n}{R} = \frac{v_n - v_{n+1}}{R} + \frac{v_n}{R}; \quad v_{n+1} - 3v_n + v_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1 .$$

Voor het N -de knooppunt vinden we

$$\frac{v_{N-1} - v_N}{R} = \frac{v_N}{R}, \quad 2v_N - v_{N-1} = 0 .$$

Voorts is gegeven de beginwaarde $v_0 = v$. Hiermee zijn in principe de spanningen (en ook de stromen) in het netwerk vastgelegd.

De recurrente betrekking voor v_n , beschouwd voor $n \geq 1$, is op te lossen met Z_I -transformatie. Vermenigvuldig de vergelijking met z^{-n} , sommeer van

$n = 1$ tot ∞ , en noem $Z_I\{v_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^{-n} = V(z)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{n+1} z^{-n} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} v_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{n-1} z^{-n} = 0 ,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} v_n z^{-n+1} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} v_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^{-n-1} = 0 ,$$

$$z[V(z) - v_0 - v_1 z^{-1}] - 3[V(z) - v_0] + z^{-1} V(z) = 0 .$$

Hieruit is $V(z)$ op te lossen,

$$V(z) = \frac{v_0 z + v_1 - 3v_0}{z - 3 + z^{-1}} = \frac{z(v_0 z + v_1 - 3v_0)}{z^2 - 3z + 1}$$

uitgedrukt in de beginwaarden $v_0 = v$ en v_1 (nog onbekend). Splits $V(z)$ in partiële breuken volgens

$$V(z) = \frac{(3 + \sqrt{5})v_0 - 2v_1}{2\sqrt{5}} \frac{z}{z - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}} - \frac{(3 - \sqrt{5})v_0 - 2v_1}{2\sqrt{5}} \frac{z}{z - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}} ,$$

dan volgt via inverse Z_I -transformatie met de tabel 4.1.4,

$$v_n = \frac{(3 + \sqrt{5})v_0 - 2v_1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{(3 - \sqrt{5})v_0 - 2v_1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ voor } n \geq 0 .$$

Deze oplossing moet nog voldoen aan de eindrelatie $2v_N - v_{N-1} = 0$ oftewel

$$\frac{(3 + \sqrt{5})v_0 - 2v_1}{2\sqrt{5}} (2 - \sqrt{5}) \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^{N-1} - \frac{(3 - \sqrt{5})v_0 - 2v_1}{2\sqrt{5}} (2 + \sqrt{5}) \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^{N-1} = 0 .$$

Hieruit is v_1 te bepalen uitgedrukt in v_0 :

$$v_1 = \frac{(1 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})^{N-1} - (1 - \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})^{N-1}}{(4 + 2\sqrt{5})(3 + \sqrt{5})^{N-1} - (4 - 2\sqrt{5})(3 - \sqrt{5})^{N-1}} v_0 .$$

Met deze waarde van v_1 is v_n voor $n = 0, 1, \dots, N$ volledig bepaald.

We bepalen nog de ingangsweerstand R_{in} van het laddernetwerk:

$$\frac{v_0 - v_1}{R} = \frac{v_0}{R_{in}} , \quad R_{in} = \frac{v_0}{v_0 - v_1} R ,$$

$$R_{in} = \frac{(4 + 2\sqrt{5})(3 + \sqrt{5})^{N-1} - (4 - 2\sqrt{5})(3 - \sqrt{5})^{N-1}}{(3 + \sqrt{5})^N - (3 - \sqrt{5})^N} R .$$

Interessant is voorts het limietgeval $N \rightarrow \infty$, corresponderend met een oneindig laddernetwerk. Wegens $3 + \sqrt{5} > 1$ en $0 < 3 - \sqrt{5} < 1$, is

$$\lim_{N \rightarrow \infty} v_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4 + 2\sqrt{5}} v_0 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} v_0 .$$

De oplossing voor v_n vereenvoudigt dan tot

$$v_n = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n v_0 \quad \text{voor } n \geq 0 ,$$

waaruit blijkt dat $v_n \rightarrow 0$ voor $n \rightarrow \infty$. De ingangsweerstand van het oneindige laddernetwerk is op dezelfde wijze te bepalen als tevoren:

$$R_{in} = \frac{v_0}{v_0 - v_1} R = \frac{1+\sqrt{5}}{2} R .$$

Dit resultaat is ook af te leiden door een limietovergang $N \rightarrow \infty$ in R_{in} voor het eindige netwerk.

Literatuur

- H. Blok, Integraaltransformaties in de electrotechniek, Collegeleidraad
T.H. Delft, 1974.
- G. Doetsch, Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation
und der Z-Transformation, Oldenbourg Verlag, München, 1967.
- R.A. Gabel and R.A. Roberts, Signals and linear systems, John Wiley,
New York, 1973.
- E.A. Guillemin, The mathematics of circuit analysis, MIT Press, Cambridge,
1965.
- H.P. Hsu, Fourier analysis (theory and step-by-step solutions to 335
problems), Simon and Schuster, New York, 1970.
- C.D. McGillem and G.R. Cooper, Continuous and discrete signal and system
analysis, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1974.
- A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer, Digital signal processing, Prentice Hall,
Englewood Cliffs, 1975.
- A. Papoulis, The Fourier integral and its applications, McGraw-Hill, New
York, 1963.
- A. Papoulis, Signal analysis, McGraw-Hill, New York, 1977.
- R.J. Schwarz and B. Friedland, Linear systems, McGraw-Hill, New York, 1965.

INTEGRAALTRANSFORMATIES

Tabel Fourier transformatie $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$, $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$

$f(t)$	$F(\omega)$
$p_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t \leq a, \\ 0 & \text{voor } t > a, \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{2 \sin(\frac{1}{2}a\omega)}{\omega}$
$q_a(t) = \begin{cases} 1 - (t /a) & \text{voor } t \leq a, \\ 0 & \text{voor } t > a, \end{cases} \quad a > 0$	$\frac{4 \sin^2(\frac{1}{2}a\omega)}{a\omega^2}$
$e^{-a t }, \quad \text{Re } a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$\frac{t^n}{n!} e^{-at} u(t), \quad \text{Re } a > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{1}{(a + j\omega)^{n+1}}$
$\exp(-at^2), \quad a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(-\frac{\omega^2}{4a})$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$

Tabel Laplace transformatie $F(p) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$ (éénzijdige Laplace transform)

$f(t)$	$F(p)$	conv.abscis
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	Re a
$\frac{t^n}{n!} e^{at}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{1}{(p-a)^{n+1}}$	Re a
$\cos(bt), \quad b \in \mathbb{R}$	$\frac{p}{p^2 + b^2}$	0
$\sin(bt), \quad b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{p^2 + b^2}$	0
$\delta(t)$	1	$-\infty$

Tabel Z-transformatie $F_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$ (éénzijdige Z-transform)

$f(n)$	$F_I(z)$	conv.gebied
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$\delta(n)$	1	alle z
a^n	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
$\binom{n}{k} a^n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{a^k z}{(z-a)^{k+1}}$	$ z > a $

I N D E X

- afgeleide in gegeneraliseerde zin 36,51,77
amplitudespectrum 6,8
amplitude-vertorming 53
 $a(t)$ 50
autocorrelatie 29
- beginwaarde-eigenschap 78,106 -
beginwaardeprobleem 66
bemonsteringstheorema 30,31
beschrijving in het frequentie-
domein 5,8,47
beschrijving in het p domein 82
beschrijving in het tijddomein
5,8,47,109
beschrijving in het z -domein 109
breuksplitsing, partiële 23,58,84,
101
- conjugatie 18
convergentie-abschis 75
convergentiegebied 95
convergentiestrook 70
convolutie 24,34,77,104
convolutiestelling, 25,26,78,105
convergentiestraal 96
- deltafunctie $\delta(t)$ 32
deltafunctie, discrete $\delta(n)$ 99
differentiatie naar de frequentie 20
differentiatie naar de tijd 19,73,76
differentiatie naar p 73,77
differentiatie naar z 98
distributie 32
- eenheids-impulsfunctie $\delta(t)$ 33
eenheidsstapfunctie $u(t)$ 21
eenheidsstootfunctie $\delta(t)$ 33
eigenfunctie 46,110
eigenwaarde 46,110
eindwaarde eigenschap 79,106
energie-inhoud 28
energiespectrum 28
- fasespectrum 6,8
fase-vertorming 53
Fibonacci rij 118
filter, ideaal laag doorlatend
77,53,64
Fouriercoëfficiënten 1,5
Fourierintegraal 7
Fourierreeks 1,5
frequentiekarakteristiek 111
frequentiespectrum 5,8
- functie, bandbegrensde 30,31,55
functie, causale 17,61,104
functie, Gausse 22
functie, gegeneraliseerde 32
functie, periodieke 1,49,80
functie, rationale 23,58,83,101,114
- gelijkheid van Parseval 4,6,28
genererende functie 95
grondfrequentie 1
- hermitisch 15
hoofdstelling der Fourierreeksen 2
hoofdwaarde 5,12,14,41,62
 $h(n)$ 108
 $h(t)$ 47,82
- impulsfunctie $\delta(t)$ 33
impulsresponsie 47,82,108
ingangssignaal, causaal periodiek 98,90
ingangssignaal, causaal tijd-harmonisch
50,89
integraalstelling van Fourier 7,10
integratie naar de tijd 19,73,77
- kruiscorrelatie 28
- laddernetwerk 119
lemma van Riemann-Lebesgue 9
limiet in distributie-zin 33,37
- marginaal stabiel 85
modulatiethorema 19
- netwerk, RLC- 57
- overdrachtsfunctie 46,47,58,82,83,
109, 114
- $p_a(t)$ 20
 $p_a^a(t)$ 32
pölen 58,84,101,114
puls, driehoekige ($q_a(t)$) 21
puls, rechthoekige ($\tilde{p}_a(t)$) 20
- $q_a(t)$ 21
- reciprociteit 18
responsie, frequentie- 111
responsie, stationaire 89
responsie, transiënte 89
- schaalverandering 18,35,73,76,97
scheef-hermitisch 16
signaal, tijd-harmonisch 50
signumfunctie $\text{sgn}(t)$ 8,40
sinus-integraal $\text{Si}(y)$ 54
staartdeling 103
stapfunctie $u(t)$ 21
stapfunctie, discrete $u(n)$ 99
stapresponsie $a(t)$ 50
stootfunctie $\delta(t)$ 33
stootkarakteristiek 47,108
stuksgewijs glad 2
stijgtijd 54
systeem, causaal 45,48,61,82,108,110,114
systeemfunctie 46,47,58,109
systeem, lineair 44,108
systeem, reëel 45,48,108,110
systeem RLC- 57,82,88
systeem, stabiel 49,85,110,114
systeem, tijd-continu 44
systeem, tijd-discreet 107
systeem, tijdinvariant 45, 108
systeem, vertormingsvrij 52,64
- theorema van Wiener-Khintchine 29
transformatie, éénzijdige
Laplace 73
transformatie, éénzijdige Z - 95
transformatie, Fourier 13
transformatie, gegeneraliseerde
Fourier 39
transformatie, gegeneraliseerde
inverse Fourier 39
transformatie, Hilbert 62
transformatie, inverse Fourier 13
transformatie, inverse Z - 96,101
transformatie, tweezijdige
Laplace 69
transformatie, tweezijdige Z - 94
- $u(n)$ 99
 $u(t)$ 21
- verschuiving in de frequentie 19
verschuiving in de tijd 19,73,76
verschuiving in het p -domein 73,76
verschuiving Z -transformatie 98
- zeefeigenschap 34