TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

# Vraagstukken bij het college

# WISKUNDE 45

# INTEGRAALTRANSFORMATIES

## voor E

Voorjaar 1981

2.255. Bibl/Mag

Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.255
Prijs f. 5,00

# Onderafdeling der Wiskunde en Informatica





Vraagstukken bij het college

# Wiskunde 45



Integraaltransformaties voor afdeling E



45

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het college

INTEGRAALTRANSFORMATIES voor E

WISKUNDE 45

Dec 81

Inhoudsopgave blz.

## Hoofdstuk 1. Fourier transformatie

1.1.1. Bepaal het frequentiespectrum van de volgende functies, periodiek met periode $T = 2\pi/\omega_0$:

a) $f(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ voor $-\infty < t < \infty$,

b) $f(t) = t$ voor $0 \le t < T$ ,

c) $f(t) = 1 - 2|t|/T$ voor $-T/2 \le t < T/2$ ,

d) $f(t) = |\sin(\omega_0 t)|$ voor $-\infty < t < \infty$,

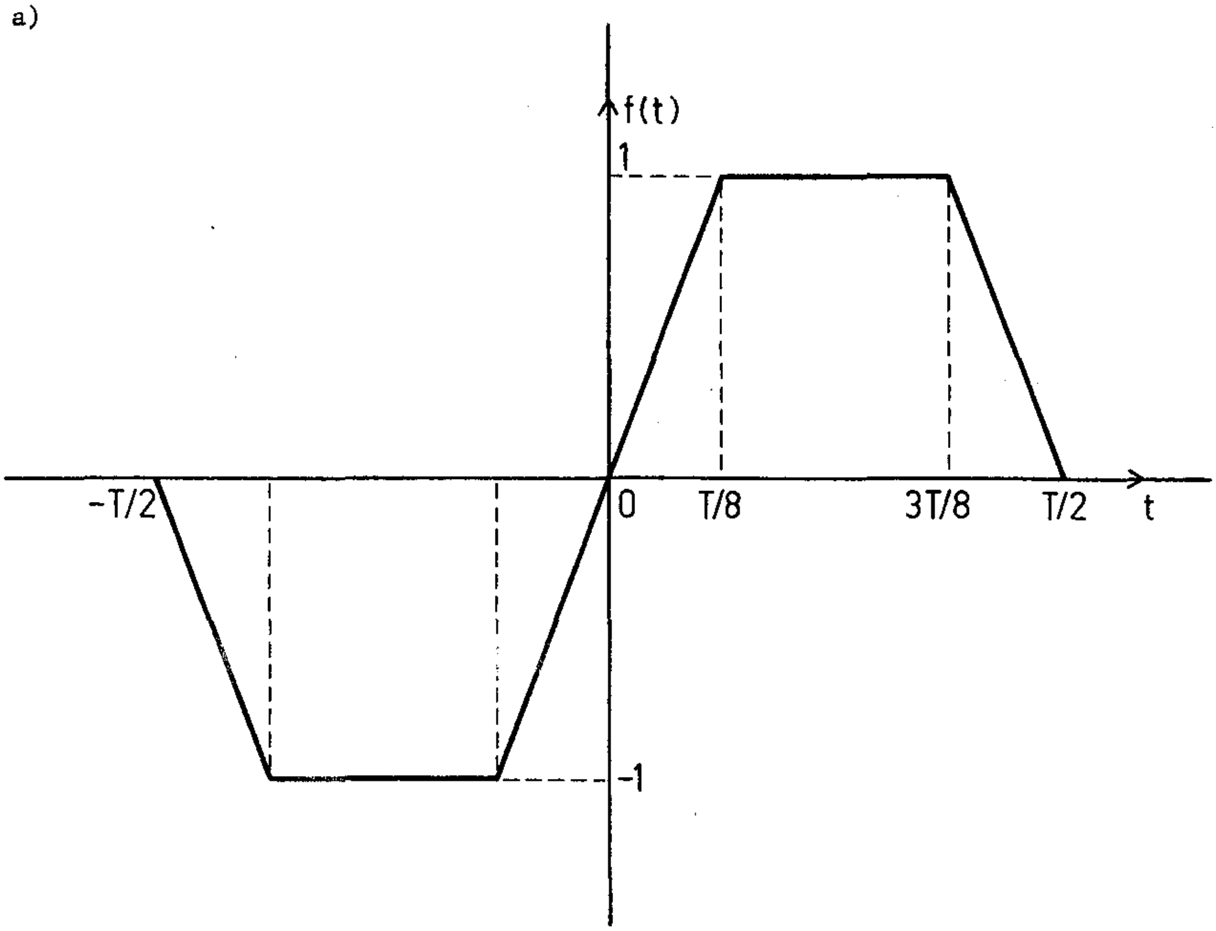
e) $f(t) = \max(0, \sin(\omega_0 t))$ voor $-\infty < t < \infty$,

f) $$f(t) = \begin{cases} 3t/T & \text{voor } 0 \le t < T/3 , \\ 1 & \text{voor } T/3 \le t < 2T/3 , \\ 3 - (3t/T) & \text{voor } 2T/3 \le t < T . \end{cases}$$

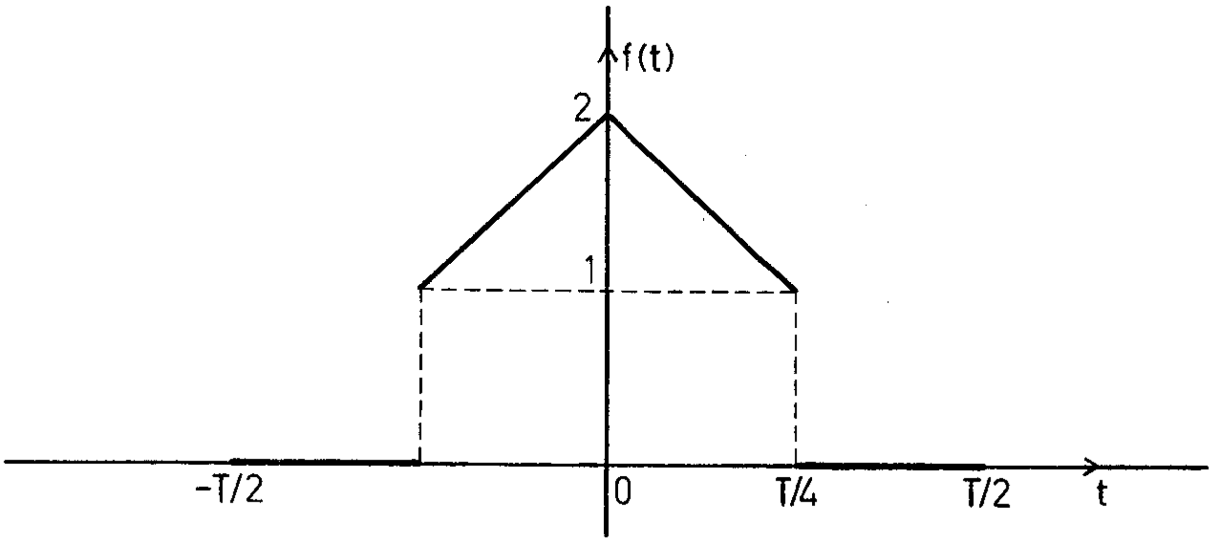
Onderzoek de convergentie van de betreffende complexe Fourierreeksen.

1.1.2. Schets het amplitude- en het fasespectrum van de volgende periodieke signalen (periode T).
Bereken eveneens de eerste drie harmonischen.

a)



b)




1.1.3. Zij gegeven een periodiek signaal $f(t)$ met periode $T = 2\pi/\omega_0$ en frequentie-spectrum $c_n$.
Bepaal het frequentiespectrum van de volgende signalen:

$$f(t)\cos(\omega_0 t),\ f(-t),\ f^*(t),\ f(t - t_0)\ .$$

1.1.4. Bewijs dat voor het frequentiespectrum $c_n$ van een reëel, periodiek en even signaal geldt:
$c_n$ is reëel en $c_{-n} = c_n$ .

1.1.5. Gegeven zijn de periodieke signalen $f_1(t)$ en $f_2(t)$ (periode T) met frequentie-spectra $c_{1,n}$ resp. $c_{2,n}$.

a) Laat zien dat de convolutie $h(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , gedefinieerd door

$$h(t) := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \ ,$$

eveneens periodiek is met frequentiespectrum $c_{1,n}c_{2,n}$.

b) Laat zien dat de kruiscorrelatie $\rho_{12}(t)$, gedefinieerd door

$$\rho_{12}(t) := \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_1(\tau)f_2(t+\tau)d\tau \quad (f_1(t) \text{ en } f_2(t) \text{ reëel}),$$

eveneens periodiek is met frequentiespectrum $c_{1,n}^{*}c_{2,n}$.

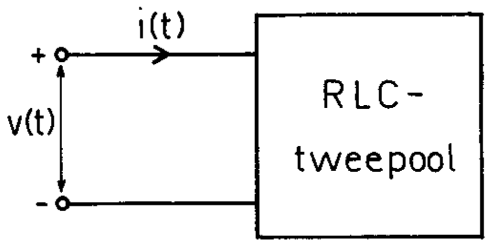
1.1.6. Bewijs met behulp van vraagstuk 1.1.5 dat

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_1(\tau)f_2^{*}(\tau)d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{1,n}c_{2,n}^{*} .$$

Opmerking. Uit bovenstaande betrekking volgt de gelijkheid van Parseval:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f_1(\tau)|^2 d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{1,n}|^2 .$$

1.1.7. Beschouw een RLC-tweepool




waarbij

$$v(t) = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) ,$$

$$i(t) = i_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i_n \cos(n\omega_0 t + \psi_n) .$$

Laat zien dat het aan het klemmenpaar opgenomen actieve vermogen wordt gegeven door

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} v(t)i(t)dt = v_0 i_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} v_n i_n \cos(\varphi_n - \psi_n) .$$

Wat kunt U hieruit concluderen?

1.1.8. De kruiscorrelatie van een reële periodieke functie met zichzelf wordt de autocorrelatie genoemd.
Bepaal de autocorrelatie van de functie

$$f(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi) \ .$$

1.1.9. Zij f(t) een reëel periodiek signaal voorgesteld door de Fourierreeks

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega_o t) \ .$$

a) Laat zien dat de autocorrelatie $\rho(t)$ van f(t) gegeven wordt door

$$\rho(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \exp(jn\omega_0 t) \ .$$

De coëfficiënt $|c_n|^2$ als functie van n heet het <u>vermogensspectrum</u> van f(t).

b) Bereken het vermogensspectrum van $f(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

1.1.10. Bewijs dat de vermogensspectra van f(t) en $f(t - t_0)$ gelijk zijn.

1.1.11. Zij f(t) periodiek met periode $2\pi$ en gegeven door

$$f(t) = e^{-t} \text{ voor } 0 < t \leq 2\pi \ .$$

a) Bereken de complexe Fourierreeks van f(t) .

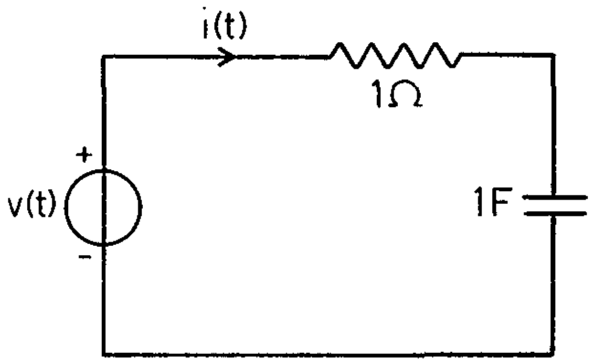
b) Voor welke waarden van t is f(t) gelijk aan de som van de complexe Fourierreeks?

c) Bereken

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \ .$$

1.1.12. Het RC-netwerk getekend in de navolgende figuur, wordt geëxciteerd door een periodieke spanning v(t) met periode $2\pi$ en gegeven door

$$v(t) = t \quad \text{voor } -\pi < t \leq \pi .$$




a) Laat zien dat

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{jn}{jn+1} v_n e^{jnt} ,$$

waarin $v_n$ het frequentiespectrum van v(t) voorstelt.

b) Bereken de eerste drie harmonischen van i(t).

c) Bereken het gemiddelde vermogen over een periode dat door de weerstand wordt opgenomen.
(Aanwijzing: gebruik opgave 1.1.11c).

1.2.1. Bereken de integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(ax)}{x^2} dx , \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} dx .$$

1.2.2. Zij f(t) stuksgewijs glad en periodiek met periode T.
Bewijs dat voor de complexe Fouriercoëfficiënten $c_n$ geldt

$$\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0 .$$

1.2.3. Zij f(t) gedefinieerd op $(-\infty,\infty)$ en stuksgewijs glad op elk eindig interval [a,b], en zij $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ convergent.
Dan is de Fourier transform

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt ,$$

een continue functie van $\omega$. Bewijs dit.

1.3.1. Zij $f(t)$ een reële functie en zij $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$.
Bewijs dat $|F(\omega)|$ een even functie is.

1.3.2. Zij $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$. Bewijs de volgende beweringen.

Als $F(\omega)$ even is, dan is $f(t)$ even.
Als $F(\omega)$ oneven is, dan is $f(t)$ oneven.

1.3.3. Zij $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$. Bepaal de Fourier transform van de functies

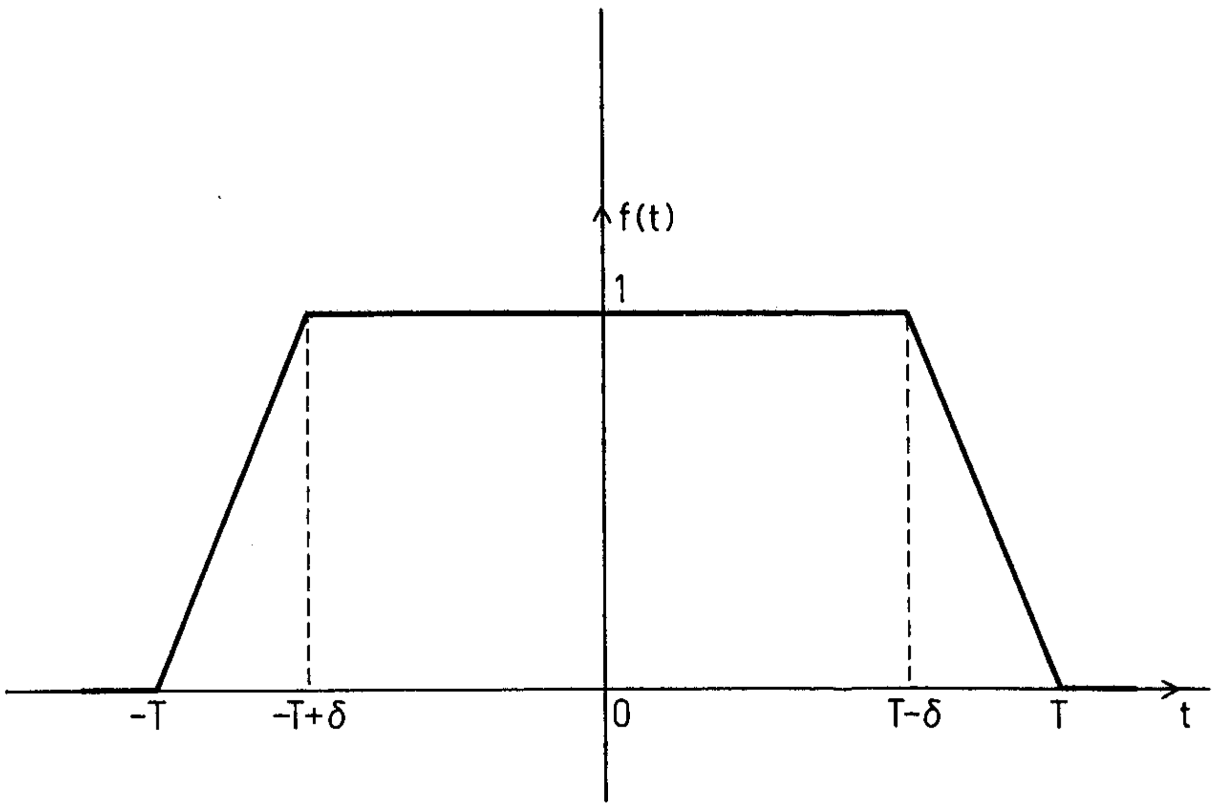
$$f(t)\sin(\omega_0 t),\; f(at)\exp(j\omega_0 t) \quad (a \neq 0),\; \mathrm{Re}(f(t)),\; \mathrm{Im}(f(t)) .$$

1.3.4. Zij $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ en zij $g(t)$ een periodieke functie met periode $T$.
Laat zien dat

$$g(t)f(t) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n F(\omega - n\omega_0) .$$

Hierin is $c_n$ het frequentiespectrum van $g(t)$ en $\omega_0 = 2\pi/T$.

1.3.5. Bepaal het frequentiespectrum van de functie $f(t)$ als weergegeven in de onderstaande figuur.



1.3.6. Bepaal de Fourier transform van de volgende functies:

a) $\frac{\sin 4t}{t}$ ,

b) $q_a(2t)$ ,

c) $e^{-at}u(t - t_0)$ (Re a > 0) ,

d) $te^{-at^2}$ (a > 0) ,

e) $e^{-at}\sin(bt)u(t)$ (Re a > 0) ,

f) $\exp(3 - 2t - t^2)$ .

1.3.7. Zij $f(t) \leftrightarrow F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ .
Schets $X(\omega)$ en $R(\omega)$ in de volgende gevallen:

a) $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t} + \frac{\sin^2 t}{t^2} \cos(\omega_0 t)$ ,

b) $f(t) = \frac{1}{(a + jt)^2}$ (a > 0) .

1.3.8. Zij $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$.
Bepaal de Fourier transform van de volgende functies:

a) $2f(3t - 1)$ ,

b) $e^{-2jt}f(t - 2)$ ,

c) $tf(t)$ ,

d) $f(-\frac{1}{2}t)$ ,

e) $f(1 - t)$ ,

f) $f(t)\cos^2 t$ .

1.3.9. De functie f(t) is gegeven door

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi t/T)) & \text{voor } |t| \le T , \\ 0 & \text{voor } |t| > T . \end{cases}$$

Bepaal de Fourier transform van f(t).

1.3.10. Bepaal de inverse Fourier transform van de volgende functies:

a) $F(\omega) = p_{2a}(\omega - \omega_0) + p_{2a}(\omega + \omega_0) \qquad (a > 0)$ ,

b) $|F(\omega)| = p_{2\omega_0}(\omega), \qquad \arg F(\omega) = \alpha$ ,

c) $F(\omega) = \dfrac{1}{4 + \omega^2}$ ,

d) $F(\omega) = \dfrac{2 + j\omega}{4 + 5j\omega - \omega^2}$ ,

e) $F(\omega) = \dfrac{2 + j\omega}{(1 + 2j\omega - \omega^2)(5 + 2j\omega - \omega^2)}$ ,

f) $F(\omega) = \dfrac{9}{(1 - j\omega)^2(2 + j\omega)}$ .

1.3.11. Zij $f(t) = u(t) - u(t - 1)$ .

a) Bepaal de Fourier transform $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ van $f(t)$.

b) Verifieer voor de gegeven functie $f(t)$ de volgende betrekkingen.

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(\omega)\cos(\omega t)d\omega = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty X(\omega)\sin(\omega t)d\omega \qquad (t > 0) ,$$

$$f(0+) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(\omega)d\omega .$$

1.4.1. Laat zien dat

$$\int_{-\infty}^\infty (f_1(t) * f_2(t))dt = \int_{-\infty}^\infty f_1(t)dt \cdot \int_{-\infty}^\infty f_2(t)dt .$$

1.4.2. Laat $f_1(t)$ en $f_2(t)$ continu differentieerbare causale functies zijn. Toon aan dat

$$\frac{d}{dt}(f_1(t) * f_2(t)) = f_1'(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2'(t) .$$

1.4.3. Bepaal de convolutie $f(t) * g(t)$ in de volgende gevallen:

a) $f(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ en $g(t) = e^{-\beta t}u(t)$ ,

b) $f(t) = e^{\alpha t}u(t)$ en $g(t) = e^{\beta t}u(-t)$ $(\beta > \alpha)$ ,

c) $f(t) = \dfrac{\sin(\alpha t)}{t}$ en $g(t) = \dfrac{\sin(\beta t)}{t}$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$ .

1.4.4. Van het signaal $f(t)$ is gegeven dat $f(t) = 0$ voor $|t| > T$ .
Bewijs dat de Fourier transform $F(\omega)$ van $f(t)$ voldoet aan de betrekking

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,\frac{\sin(a(\omega - u))}{\omega - u}\,du \qquad \text{voor alle } a \geq T .$$

1.4.5. Zij $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ en zij $F(\omega) = 0$ voor $|\omega| > \omega_c$ , d.w.z. $f(t)$ is een bandbegrensde functie.
Bewijs dat

$$f(t) * \frac{\sin(at)}{\pi t} = f(t) \qquad \text{voor alle } a > \omega_c .$$

1.4.6. Een signaal $f(t)$ wordt toegevoerd aan een laagdoorlatend filter waardoor in het frequentiespectrum $F(\omega)$ de hoogfrequente componenten met $|\omega| > a$ worden afgesneden en de laagfrequente componenten met $|\omega| < a$ worden vermenigvuldigd met $q_a(\omega)$.
Het uitgangssignaal $f_a(t)$ heeft dan het frequentiespectrum

$$F_a(\omega) = F(\omega)q_a(\omega) .$$

Bepaal $f_a(t)$.

1.4.7. Gegeven zijn de functies

$$f_i(t) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} \exp[-(t - \mu_i)^2/(2\sigma_i^2)] \qquad (\sigma_i > 0;\ i = 1,2,3)$$

met $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$ en $\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ .

Bewijs dat $f_1(t) * f_2(t) = f_3(t)$.

1.4.8. Bereken de Fourier transform van de functie

$$f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 .$$

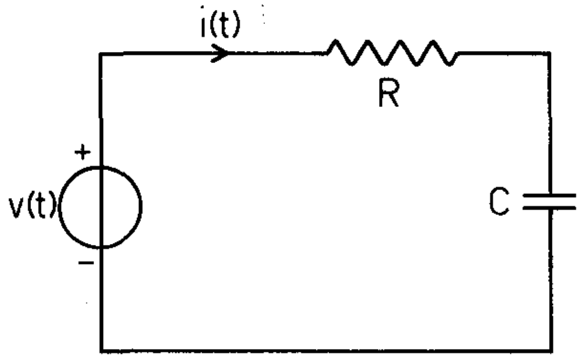
1.4.9. Bereken de inverse Fourier transform van de functie

$$F(\omega) = \frac{1}{(1+\omega^2)^2} .$$

1.4.10. Bereken de volgende integralen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx .$$

1.4.11. Het onderstaande RC-netwerk wordt geëxciteerd door de spanning $v(t) = \frac{\sin t}{t}$ :




a) Laat zien dat de stroom i(t) voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$R\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i = \frac{dv}{dt} .$$

b) Bepaal de Fourier transform van i(t).
(U mag aannemen dat $\lim_{t\to\pm\infty} i(t) = 0$) .

c) Bereken de energie

$$R \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t)dt$$

welke door de weerstand wordt opgenomen.

1.4.12. De kruiscorrelatie van twee reële functies $f_1(t)$ en $f_2(t)$ met eindige energie-inhoud, wordt gedefinieerd door

$$\rho_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t + \tau)d\tau \ .$$

a) Toon aan dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f_1(\tau) + \lambda f_2(t + \tau))^2 d\tau = \rho_{22}(0)\lambda^2 + 2\rho_{12}(t)\lambda + \rho_{11}(0) \ .$$

b) Bewijs vervolgens de ongelijkheden

$$2 \mid \rho_{12}(t) \mid \leq \rho_{11}(0) + \rho_{22}(0) \ ,$$

$$|\rho_{11}(t)| \leq \rho_{11}(0) \ ,$$

$$\rho_{12}^2(t) \leq \rho_{11}(0)\rho_{22}(0) \ .$$

1.4.13. Zij $f(t)$ een reële causale functie met Fourier transform $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ . Toon aan dat

$$\int_0^{\infty} f^2(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} R^2(\omega)d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} X^2(\omega)d\omega \ .$$

1.4.14. Bereken de kruiscorrelatie van de functies

$$f_1(t) = e^{-\alpha t}u(t) \quad \text{en} \quad f_2(t) = e^{-\beta t}u(t) \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0) \ .$$

1.4.15. Bereken de autocorrelatie van de functie

$$f(t) = e^{-|t|} \ .$$

1.4.16. Bepaal bij een gegeven signaal $f(t)$, een bandbegrensd signaal $g(t)$ waarvoor geldt

$$g(n) = f(n) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \ .$$

1.4.17. Gegeven is een signaal f(t) met Fourier transform

$$F(\omega) = p_{\pi}(\omega)\cos\omega \, .$$

a) Bepaal f(t) door inverse Fourier transformatie.

b) Bewijs dat

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(1-4n^2)} \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi t)}{t-2n} \, .$$

1.4.18. Laat het signaal f(t) bandbegrensd zijn met $F(\omega) = 0$ voor $|\omega| > \omega_c$.
Toon aan dat de energie-inhoud van f(t) gegeven wordt door

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(nT)|^2 \qquad (T = \pi/\omega_c) \, .$$

1.4.19. Gegeven is een bandbegrensd signaal met frequentiespectrum

$$F(\omega) = \begin{cases} |\omega| & \text{voor } |\omega| < \pi \, , \\ 0 & \text{voor } |\omega| > \pi \, . \end{cases}$$

a. Bereken f(n) $\quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ .

b. Is het signaal f(t) volledig bepaald door haar bemonsteringen in de punten $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ?
Motiveer Uw antwoord.

c. Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \, .$$

1.5.1. Toon aan dat voor een continue functie f(t) geldt

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)f(\tau)d\tau = f(0)u(t) .$$

1.5.2. a) Toon aan dat

$$\underset{a\downarrow 0}{\text{"lim"}} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \exp(-t^2/a) = \delta(t) .$$

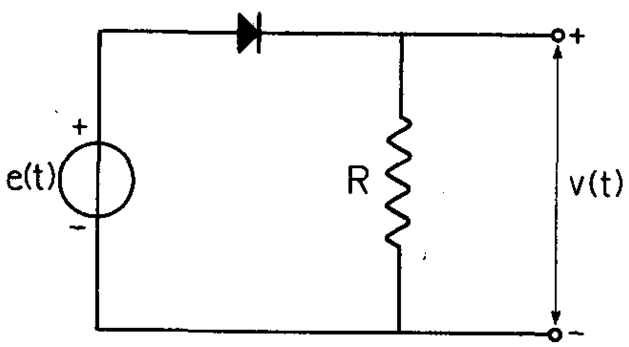
b) De functie $g_a(t)$ $(a > 0)$ is gegeven door

$$g_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } |t| > \frac{3}{2} a , \\ 1/a & \text{voor } \frac{1}{2} a < |t| < \frac{3}{2} a , \\ -1/a & \text{voor } |t| < \frac{1}{2} a . \end{cases}$$

Toon aan dat

$$\underset{a\downarrow 0}{\text{"lim"}} g_a(t) = \delta(t) .$$

c) In onderstaande schakeling wordt de diode als ideaal beschouwd.




Bepaal de spanning v(t) over de weerstand als gegeven is dat $e(t) = g_a(t)$.

Is het mogelijk om v(t) te bepalen, indien $e(t) = \delta(t)$?

1.5.3. Bepaal de afgeleide in gegeneraliseerde zin van de volgende functies:

a) $|t|$ ,

b) $tp_2(t)$ ,

c) $(\sin t)u(t)$ ,

d) $tp_2(t - 1)$ ,

e) $e^{jt}u(t - \pi)$ ,

f) $p_1(t)q_1(t)$ .

1.5.4. Bepaal de Fourier transform van de volgende functies:

a) $\sin(\omega_0 t)$ ,

b) $\exp(j\omega_0 t)u(t)$ ,

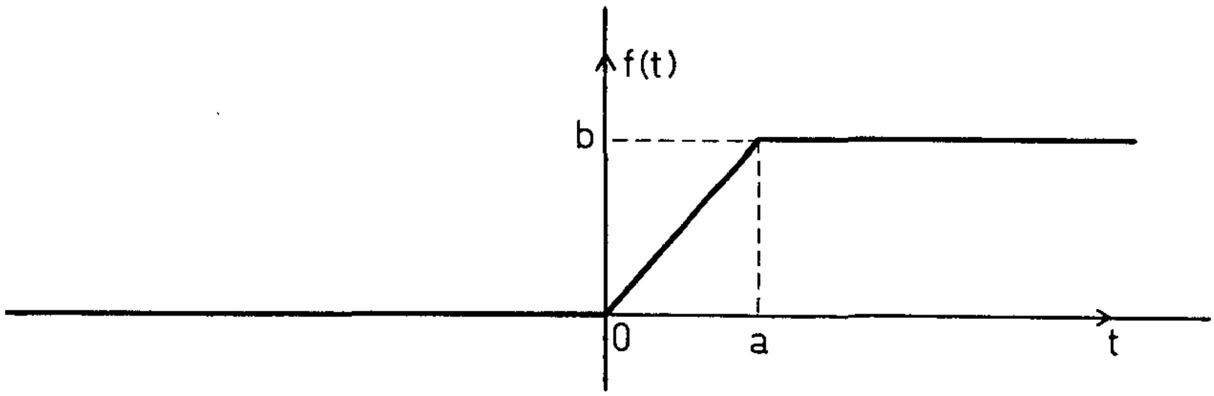
c) $\cos(\omega_0 t)u(t)$ ,

d) $\sin(\omega_0 t)u(t)$ ,

e) $\exp(j\omega_0 t)\mathrm{sgn}(t)$ ,

f) $u(t - 1) + 2p_2(t) - u(- t - 1)$ .

1.5.5. Bepaal de Fourier transform van de functie met de onderstaande grafiek.




1.5.6. Bepaal de Fourier transform van de functie

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 u(t) .$$

1.5.7. Bepaal de Fourier transform van de volgende functies:

a) $p_2(t) * u(t)$ ,

b) $\int_{-\infty}^{t} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ .

1.5.8. Bepaal de inverse Fourier transform van de volgende functies:

a) $\frac{1}{\omega(\omega^2+1)}$ ,

b) $\frac{\cos \omega}{\omega}$ ,

c) $u(\omega)$ ,

d) $\frac{1}{\omega - 1}$ .

1.5.9. Zij $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$.

Laat zien dat de differentiatieregel

$$f'(t) \leftrightarrow j\omega F(\omega) ,$$

ook geldig is voor de functies

$$u(t - t_0),\ \mathrm{sgn}(t),\ e^{j\omega_0 t} .$$

## Hoofdstuk 2. Toepassingen van de Fourier transformatie

2.1.1. Een systeem wordt beschreven door

$$g(t) = T\{f(t)\} = af(t) + bf(t-1) \ ;$$

hierin is $g(t)$ de responsie op het ingangssignaal $f(t)$.

a) Bewijs dat het systeem lineair en tijdinvariant is.

b) Bepaal de overdrachtsfunctie.

c) Bepaal de impulsresponsie.

d) Is het systeem causaal?

e) Is het systeem stabiel?

2.1.2. Een systeem wordt beschreven door

$$g(t) = T\{f(t)\} = f(t)\cos(\omega_0 t) \qquad (\omega_0 \text{ is reëel}) \ .$$

a) Bewijs dat het systeem lineair en stabiel is, echter niet tijdinvariant.

b) Is het systeem causaal?

2.1.3. Een systeem wordt beschreven door

$$g(t) = T\{f(t)\} = \int_{t-1}^{t+1} f(\tau)d\tau \ .$$

a) Bewijs dat het systeem lineair en tijdinvariant is.

b) Bepaal de overdrachtsfunctie en de impulsresponsie.

c) Is het systeem causaal?

d) Is het systeem stabiel?

e) Bepaal de responsie van het systeem op het ingangssignaal $f(t) = p_2(t)$ .

2.1.4. Bewijs dat de responsie $g(t)$ van een tijdinvariant systeem op een periodiek ingangssignaal $f(t)$ met periode $T$ eveneens periodiek is met periode $T$.

2.1.5. Een signaal $f(t)$ wordt toegevoerd aan een versterker met een niet-lineaire karakteristiek $y = K(x)$.

Het uitgangssignaal $g(t)$ hangt dus met $f(t)$ samen volgens de betrekking $g(t) = K(f(t))$.

a) Laat zien dat de versterker kan worden opgevat als een tijdinvariant systeem.

b) In de praktijk komt het vaak voor dat voor de versterkerkarakteristiek geldt $K(-x) = -K(x)$ .
Welke harmonischen komen dan in de responsie op het ingangssignaal $f(t) = \sin(\omega_0 t)$ niet voor?

2.1.6. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ gegeven door

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} \; \frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega}$$

a) Schets de impulsresponsie van het systeem.

b) Is het systeem stabiel?

2.1.7. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = e^{-\alpha t} u(t) \qquad (\alpha > 0) \, .$$

a) Is het systeem causaal?

b) Bepaal de overdrachtsfunctie.

c) Is het systeem stabiel?

d) Bepaal de responsie op de volgende ingangssignalen:

$$e^{-\beta t} u(t) \qquad (\beta > 0) \, , \qquad \sin(\omega_0 t) \, .$$

2.1.8. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = t e^{-t} u(t) \, .$$

a) Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$.

b) Is het systeem stabiel?

c) Bepaal de stapresponsie $a(t)$.

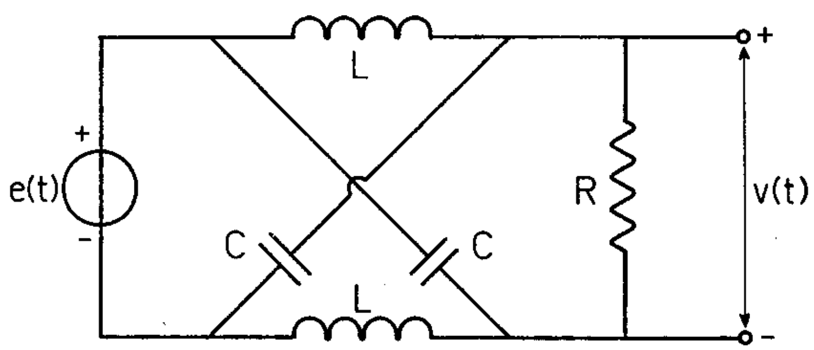
d) Laat zien dat $a'(t) = h(t)$.

2.1.9. Zij gegeven een reëel lineair tijdinvariant systeem met overdrachtsfunctie $H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$.
Bepaal de responsie op het ingangssignaal $\cos(\omega_0 t)u(t)$ in de stationaire toestand van het systeem.

2.1.10. Zij gegeven een lineair tijdinvariant systeem met een continue impuls-responsie $h(t) = T\{\delta(t)\}$ .
Bewijs dat $\lim_{\alpha \downarrow 0} T\{\frac{1}{\alpha} p_\alpha(t)\} = h(t)$ ,
waarin $p_\alpha(t)$ gedefinieerd is door

$$p_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad t < -\tfrac{1}{2}\alpha , \\ 1 & \text{voor} \quad -\tfrac{1}{2}\alpha < t < \tfrac{1}{2}\alpha , \\ 0 & \text{voor} \quad t > \tfrac{1}{2}\alpha . \end{cases}$$

2.1.11. In de hieronder getekende schakeling geldt $R = \sqrt{L/C}$.




De schakeling wordt opgevat als een lineair tijdinvariant systeem met als ingangssignaal de spanning $e(t)$ van de spanningsbron en als uitgangs-signaal de spanning $v(t)$ over de weerstand R.
Men kan afleiden dat de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ wordt gegeven door

$$H(\omega) = \frac{\alpha - j\omega}{\alpha + j\omega} \qquad (\alpha = 1/RC) .$$

a) Onderzoek de amplitude-vervorming van het systeem.
b) Laat zien dat de energie-inhoud van het ingangssignaal $e(t)$ gelijk is aan de energie-inhoud van de bijbehorende responsie $v(t)$.

c) Bepaal de impulsresponsie.

d) Bepaal de stapresponsie.

e) Bepaal de responsie op het ingangssignaal gegeven door

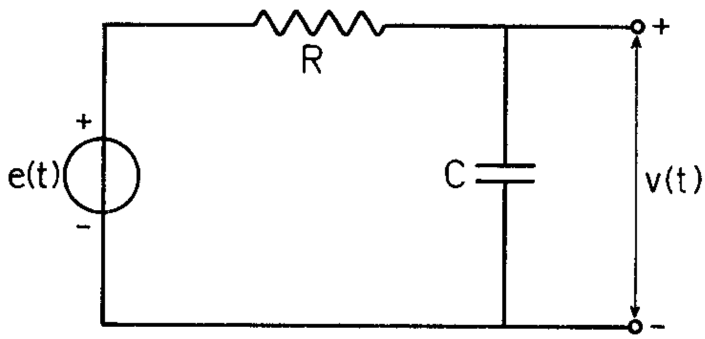
$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor} \quad |t| \le T \ , \\ 0 & \text{voor} \quad |t| > T \ . \end{cases}$$

f) Bepaal

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)dt \ ,$$

waarbij v(t) de responsie is als berekend onder e).

2.1.12. Het hieronder getekende RC-netwerk kan worden opgevat als een lineair tijd-invariant systeem met als ingangssignaal de spanning e(t) van de spanningsbron en als uitgangssignaal de spanning v(t) over de condensator.




a) Bepaal de overdrachtsfunctie en de impulsresponsie.

b) In de praktijk wordt de ingangsspanning $e(t) = \delta(t)$ "benaderd" met behulp van een impulsgenerator welke een korte puls genereert met spanning

$$e_\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad t < -\alpha, \\ 1/\alpha & \text{voor} \quad -\alpha < t < 0 \ , \\ 0 & \text{voor} \quad t > 0 \ . \end{cases}$$

Bepaal de responsie $v_\alpha(t)$ op het ingangssignaal $e_\alpha(t)$ .

c) Bepaal $\alpha$ zodat voor alle $t > 0$ geldt

$$|h(t) - v_\alpha(t)| \le 0{,}01|h(t)|.$$

2.1.13. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de responsie $g(t)$ op het ingangssignaal $f(t) = e^{-t}u(t)$ gegeven door

$$g(t) = (e^{-2t} + e^{-t} + e^{-\frac{1}{2}t})u(t) .$$

Bepaal de impulsresponsie.

2.1.14. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ gegeven door

$$H(\omega) = K \exp(-j\omega t_0 + j\alpha) \qquad (K > 0,\ \alpha \text{ reëel}).$$

a) Voor welke waarde(n) van $\alpha$ is het systeem reëel?

b) Voor welke waarde(n) van $\alpha$ is het systeem vervormingsvrij?

2.1.15. De overdrachtsfunctie $H(\omega)$ van het ideale laagdoorlatende filter wordt gegeven door

$$H(\omega) = e^{-j\omega t_0} p_{2\omega_c}(\omega) .$$

Bepaal de responsie op het ingangssignaal $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ .

2.1.16. De overdrachtsfunctie $H(\omega)$ van een ideaal banddoorlatend filter wordt gegeven door

$$H(\omega) = \tfrac{1}{2}(p_\alpha(\omega - \omega_0) + p_\alpha(\omega + \omega_0)) \qquad (0 < \tfrac{1}{2}\alpha < \omega_0) .$$

a) Bepaal de impulsresponsie.

b) Zij $a(t)$ de stapresponsie van het filter.
Bepaal $\lim\limits_{t\to\infty} a(t)$.

c) Is het filter causaal?

d) Zij $\alpha = \omega_0$. Bepaal de responsie op een periodiek ingangssignaal met periode $T = 2\pi/\omega_0$.

2.1.17. Een signaal $f(t)$ wordt toegevoerd aan een laagdoorlatend filter waardoor in het frequentiespectrum $F(\omega)$ de hoogfrequente componenten met $|\omega| > \omega_c$ worden afgesneden en de laagfrequente componenten worden vermenigvuldigd met $Y(\omega)$.

De overdrachtsfunctie $H(\omega)$ wordt dan gegeven door

$$H(\omega) = Y(\omega)p_{2\omega_c}(\omega)$$

Zij $g(t)$ de responsie op het signaal $f(t)$.

Bepaal bij gegeven $t_0 > 0$ de functie $Y(\omega)$ zodanig dat "de afstand" $\varepsilon$ tussen $f(t - t_0)$ en $g(t)$ gegeven door

$$\varepsilon^2 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t - t_0) - g(t)|^2 dt ,$$

minimaal is.

2.1.18. Schets de grafiek van de sinus-integraal

$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt .$$

2.1.19. De overdrachtsfunctie van het ideale hoogdoorlatende filter wordt gegeven door

$$H(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{voor } |\omega| < \omega_c , \\ \exp(-j\omega t_0) & \text{voor } |\omega| > \omega_c . \end{cases}$$

a) Bepaal de impulsresponsie.

b) Bepaal de stapresponsie.

c) Bepaal de responsie op het ingangssignaal $\cos(\omega_0 t)$ $(\omega_0 \neq \omega_c)$.

d) Bepaal de responsie op het ingangssignaal

$$\sin(\tfrac{2}{3}\,\omega_c t)u(t)$$

in de stationaire toestand van het systeem.

2.1.20. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ gegeven door

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 - (|\omega|/\omega_c) & \text{voor } |\omega| < \omega_c , \\ 0 & \text{voor } |\omega| > \omega_c . \end{cases}$$

a) Bepaal de impulsresponsie.

b) Laat zien dat de stapresponsie $a(t)$ monotoon stijgt met $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = 1$ en bepaal de stijgtijd $t_s$.

c) Bepaal $\lim\limits_{\omega_c\to\infty} a(t)$.

2.1.21. De overdrachtsfunctie $H(\omega)$ van een reëel lineair fasefilter wordt gegeven door

$$H(\omega) = K(\omega)\exp(-j\omega t_0) ;$$

hierin is $K(\omega) \geq 0$ .

a) Laat zien dat voor de impulsresponsie geldt:

(i) $$h(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty K(\omega)\cos(\omega(t - t_0))d\omega ,$$

(ii) $$|h(t)| \leq h(t_0) ,$$

(iii) $$h(t_0 - t) = h(t_0 + t) .$$

b) Laat zien dat voor de stapresponsie geldt:

(i) $$a(t) = \frac{K(0)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{K(\omega)}{\omega}\sin(\omega(t - t_0))d\omega ,$$

(ii) $$\lim_{t\to\infty} a(t) = K(0)$$

(iii) $$a(t) = \frac{K(0)}{2} + \int_0^{t-t_0} h(t_0 + \tau)d\tau ,$$

(iv) de stijgtijd $$t_s = \frac{K(0)}{h(t_0)} .$$

2.1.22. De overdrachtsfunctie van het zogenaamde Gausse filter wordt gegeven door

$$H(\omega) = \exp(-\alpha\omega^2)\exp(-j\omega t_0) \qquad (\alpha > 0) \ .$$

a) Bepaal de impulsresponsie.

b) Schets de stapresponsie en bepaal de stijgtijd $t_s$.

2.1.23. De overdrachtsfunctie van een ideaal laagdoorlatend filter wordt gegeven door

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{voor} \quad |\omega| < \omega_c \ , \\ 0 & \text{voor} \quad |\omega| > \omega_c \ . \end{cases}$$

Bepaal de responsie op het periodieke ingangssignaal f(t) met periode $T = 5\pi/\omega_c$ en gegeven door

$$f(t) = t \quad \text{voor} \quad 0 \le t < T \ .$$

2.1.24. De overdrachtsfunctie van een Gauss filter wordt gegeven door

$$H(\omega) = \exp(-\omega^2) \ .$$

Bepaal de responsie op het periodieke ingangssignaal $f(t) = \max(0, \sin(\omega_0 t))$.

2.1.25. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de stapresponsie a(t) gegeven door

$$a(t) = te^{-2t}u(t) \ .$$

Bepaal de responsie op de volgende ingangssignalen:

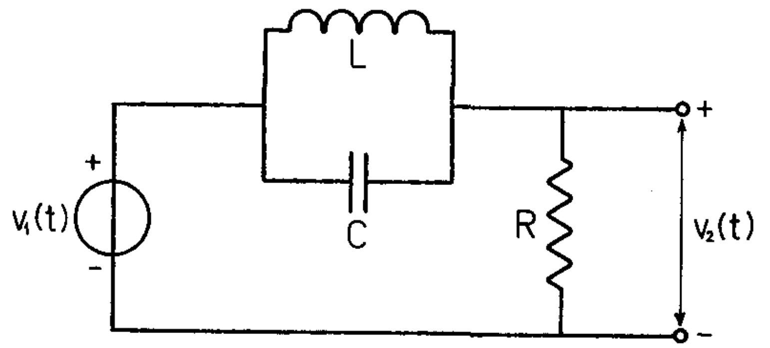
a) $p_\alpha(t)$ ,

b) $e^{-t}u(t)$ ,

c) $\sin(\omega_0 t)$ ,

d) $q_\alpha(t)$ .

2.1.26. In de hierna getekende schakeling geldt $L = 2R^2C$ .




De schakeling wordt opgevat als een lineair tijdinvariant systeem met ingangsspanning $v_1(t)$ en uitgangsspanning $v_2(t)$.

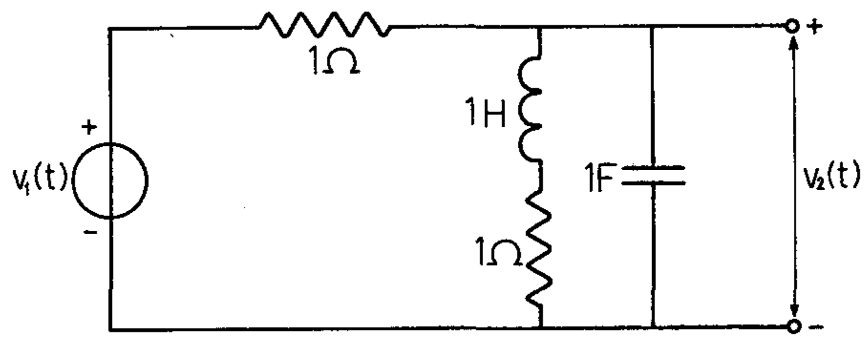
Zij $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

a) Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$.

b) Bepaal de responsie op $v_1(t) = \cos(\omega_0 t)$.

c) Bepaal de responsie op $v_1(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$.

2.1.27. De hieronder getekende schakeling wordt opgevat als een lineair tijdinvariant systeem met als ingangssignaal de spanning $v_1(t)$ van de spanningsbron en als uitgangssignaal de spanning $v_2(t)$ over de condensator

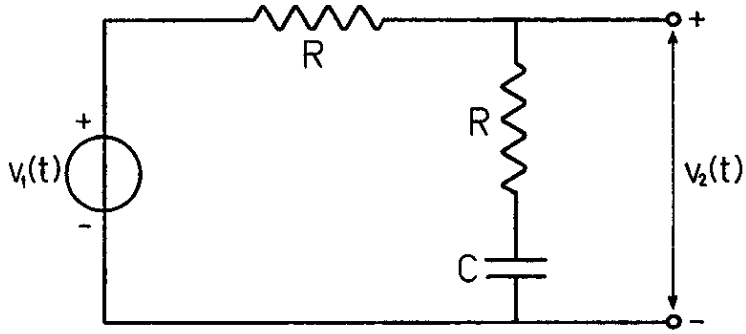



a) Bepaal de impulsresponsie.

b) Bepaal de stapresponsie.

c) Bepaal de responsie op het ingangssignaal $v_1(t) = e^{-t}u(t)$.

2.1.28. De hieronder getekende schakeling wordt opgevat als een lineair tijd-invariant systeem met als ingangssignaal de spanning $v_1(t)$ van de spanningsbron en als uitgangssignaal de spanning $v_2(t)$ over condensator en weerstand.




a) Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ en de impulsresponsie $h(t)$.

b) Beschouw het zogenaamde inverse systeem waarbij $v_2(t)$ als ingangssignaal wordt opgevat en $v_1(t)$ als responsie. Bepaal de overdrachtsfunctie $H_1(\omega)$ en de impulsresponsie $h_1(t)$ van het inverse systeem.

c) Bepaal $h(t) * h_1(t)$ .

d) Tracht een netwerk te vinden dat $H_1(\omega)$ realiseert.

2.2.1. Een (complex) signaal $f(t)$ heet analytisch indien het bijbehorende frequentiespectrum $F(\omega)$ causaal is, i.e. $F(\omega) = 0$ voor $\omega < 0$.
Een gegeven reëel signaal $f_1(t)$ met frequentiespectrum $F_1(\omega)$ wordt aangevuld tot een analytisch signaal $f(t) = f_1(t) + jf_2(t)$ met $f_2(t)$ reëel, zodanig dat $F(\omega) = 2F_1(\omega)$ voor $\omega > 0$.

Bepaal $f_2(t)$.

2.2.2. Zij $f(t)$ een causaal signaal met frequentiespectrum $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$.

a) Bepaal $X(\omega)$ indien $R(\omega)$ gegeven wordt door

1) $R(\omega) = \cos\omega$,

2) $R(\omega) = 1/(1 + \omega^2)$ ,

3) $R(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$ ,

4) $R(\omega) = p_2(\omega)$ ,

5) $R(\omega) = (1 + \omega^2)/(1 + \omega^4)$ ,

6) $R(\omega) = 1/(\omega^4 - 3\omega^2 - 4)$ .

b) Bepaal $R(\omega)$ indien $X(\omega)$ gegeven wordt door

1) $X(\omega) = \dfrac{-2\omega}{\omega^4 - 6\omega^2 + 25}$ ,

2) $X(\omega) = \dfrac{\omega + \omega^3}{1 + \omega^4}$ .

2.2.3. Zij $f(t)$ een reële causale functie met frequentiespectrum $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$, waarbij het reële deel $R(\omega)$ de volgende eigenschappen bezit:

(i) $R(\omega)$ is differentieerbaar en $\dfrac{dR(\omega)}{d\omega} \le 0$ voor $\omega \ge 0$ ,

(ii) $\lim\limits_{\omega\to\infty} R(\omega) = 0$ .

Toon aan dat

$$|f(t)| \le \frac{2R(0)}{\pi t} \qquad (t \neq 0) .$$

2.3.1. De temperatuurverdeling $T(x,t)$ in een oneindig lange staaf voldoet aan de warmtegeleidingsvergelijking

$$T_{xx} = T_t \ , \quad -\infty < x < \infty \ , \ t > 0 \ ,$$

en aan de beginvoorwaarde

$$T(x,0) = e^{-|x|} \ , \qquad -\infty < x < \infty.$$

Bepaal $T(x,t)$ in de vorm van een Fourierintegraal.

2.3.2. Bepaal de oplossing $T(x,t)$ van de warmtegeleidingsvergelijking

$$T_{xx} = T_t, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0 \ ,$$

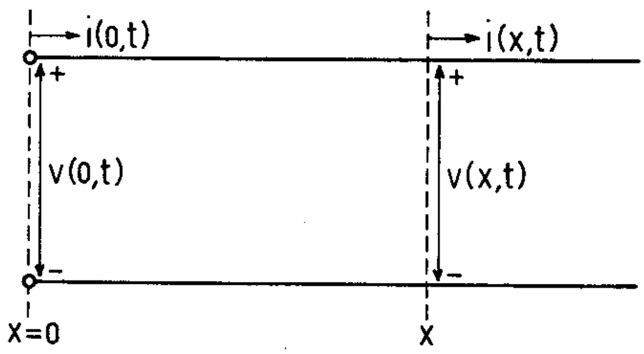
onder de beginvoorwaarde

$$T(x,0) = \begin{cases} T_1 & \text{voor } x < 0 \, , \\ T_2 & \text{voor } x > 0 \, . \end{cases}$$

2.3.3. Bepaal de oplossing $u(x,y)$ van het potentiaalprobleem

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \, , & -\infty < x < \infty, \quad y > 0 \, , \\ u(x,0) = f(x) \, , \quad -\infty < x < \infty, & \\ u(x,y) \text{ is begrensd voor} & -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0 \, . \end{cases}$$

2.3.4.




In een half-oneindige electrische tweedraadsleiding (zie bovenstaande tekening) wordt het verband tussen de stroom $i(x,t)$ en de spanning $v(x,t)$ beschreven door de partiële differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} + Ri + L\,\dfrac{\partial i}{\partial t} = 0 \, , \\ \\ \dfrac{\partial i}{\partial x} + Gv + C\,\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0 \, . \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty, \quad x > 0)$$

Hierin hebben de constanten de volgende betekenis:

R is de weerstand per eenheid van lengte,
L is de inductiviteit per eenheid van lengte,
G is de geleiding tussen de twee draden per eenheid van lengte,
C is de capaciteit per eenheid van lengte.

Veronderstel dat de leiding vervormingsvrij is, dat wil zeggen $\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$ .

Bepaal met behulp van Fourier transformatie naar de variabele t de oplossing v(x,t) die aan de partiële differentiaalvergelijkingen en aan de voorwaarden

$$v(0,t) = f(t) ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0 ,$$

voldoet.

## Hoofdstuk 3. Laplace transformatie

3.1.1. Bepaal de convergentiestrook voor de tweezijdige Laplace transform van de functie

$$f(t) = \frac{1}{\cosh(t)}.$$

3.1.2. Zij $F_{II}(p) = \mathcal{L}_{II}\{f(t)\}$ .

a) Bepaal de tweezijdige Laplace transform van de functies

$$f(-t), f^*(t),\ f(t)\cos(p_0 t) \qquad (p_0 \in \mathbb{R}) .$$

b) Toon aan dat voor een reële functie $f(t)$ geldt

$$F_{II}(p^*) = F^*_{II}(p) .$$

3.1.3. Bepaal de tweezijdige Laplace transform van de volgende functies:

a) $te^{-t^2}$ ,

b) $e^{-|t|}\cos t$ ,

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-s^2}\,ds$ ,

d) $q_a(t) \qquad (a > 0)$ .

3.1.4. Toon aan dat voor een even functie $f(t)$, die geen impulsfunctie $\delta(t)$ bevat, geldt

$$F_{II}(p) = F(p) + F(-p) ,$$

waarin $F_{II}$ en $F$ respectievelijk de tweezijdige- en eenzijdige Laplace transform van $f(t)$ voorstellen.

Hoe luidt de bewering voor een oneven functie?

3.1.5. Bepaal de Laplace transform $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ van de functie $f(t)$, gegeven door

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t \le 0 , \\ 1 & \text{voor } 0 < t \le 1 , \\ 2 & \text{voor } 1 < t \le 2 , \\ -1 & \text{voor } 2 < t \le 3 , \\ e^{-t} & \text{voor } t > 3 . \end{cases}$$

3.1.6. Zij $f(t) = (1 + u(t - 1))\cos t$ .
Verifieer de rekenregel

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = p\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0-) \ .$$

3.1.7. Bepaal de Laplace transform van de volgende functies:

a) $|\sin(p_0 t)|$ ,

b) $e^{at}\sinh(bt)$ ,

c) $[t]$ ,

d) $te^{-t}\cos(p_0 t)$ .

Hierbij is [t] de zogenaamde entier van t gedefinieerd door

$$[t] = n \qquad \text{voor } n \leq t < n + 1 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \ .$$

3.1.8. Bepaal de inverse Laplace transform van de volgende functies:

a) $\dfrac{p}{(p+8)^2}$ ,

b) $\dfrac{p^2 + 9}{p(p^2 + 4p + 3)}$ ,

c) $\dfrac{p + 3}{(p^2 + 9)(p + 4)}$ ,

d) $\dfrac{e^{-p}}{p(p^2 + 9)}$ ,

e) $\dfrac{p^2 - 3p + 2}{p^2 - 7p + 12}$ ,

f) $\dfrac{1}{(p^2 + 1)^2}$ ,

g) $\dfrac{1 + e^{-p\pi}}{p^2 + 1}$ ,

h) $\dfrac{e^{-(p+a)t_0}}{p + a} \quad (t_0 > 0)$ .

3.1.9. a) Bepaal de inverse Laplace transform van de functie

$$F(p) = \frac{1 - e^{-ap}}{p(1 - e^{-bp})} \qquad (0 < a < b) .$$

b) Schets de inverse Laplace transform van de functie

$$F(p) = \frac{1}{(p + a)(1 - e^{-pT})} \qquad (a > 0,\ T > 0) .$$

3.1.10. Zij $f(t)$ begrensd voor $t \geq 0$, i.e. $|f(t)| \leq M$ voor $t \geq 0$, en zij $F(p)$ de Laplace transform van $f(t)$.

Bewijs de ongelijkheid

$$|F(p)| \leq \frac{M}{\mathrm{Re}\, p} \qquad \text{voor } \mathrm{Re}\, p > 0 .$$

3.1.11. Zij $f(t)$ differentieerbaar met $f'(t)$ begrensd voor $t \geq 0$ en laat $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) =: f'(\infty)$ bestaan. Zij $F(p)$ de Laplace transform van $f(t)$.

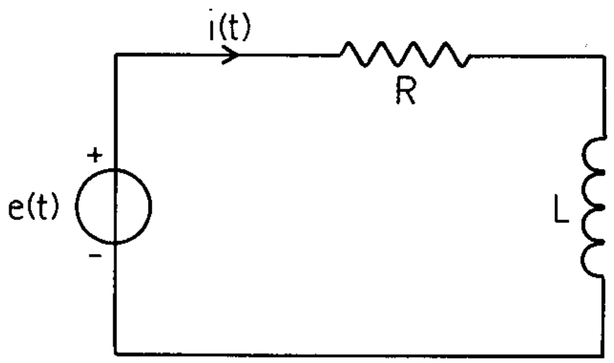
Bewijs dat

$$\lim_{p \downarrow 0} p^2 F(p) = f'(\infty) .$$

3.1.12. Zij de functie $f(t)$ gedefinieerd op $[0,\infty)$ en periodiek met periode $T$, en zij $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Bereken $\lim\limits_{p \downarrow 0} pF(p)$.

3.2.1. Het hieronder getekende RL-netwerk wordt gevoed door een spanningsbron met bronsterkte $e(t)$, ingeschakeld op het tijdstip $t = 0$. De stroomsterkte in de spoel heeft ten tijde $t = 0-$ de waarde $i(0-)$.



Bereken en schets de stroom i(t) in de volgende gevallen:

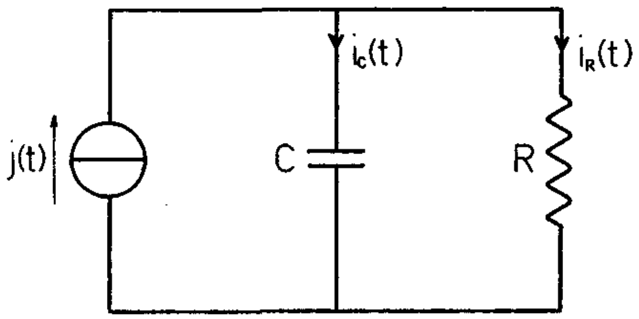
a) $e(t) = u(t)$ ,

b) $e(t) = \delta(t)$ ,

c) $e(t) = u(t) + u(t - 1)$ ,

d) $e(t) = e^{-t}u(t)$ .

3.2.2. Het hieronder getekende RC-netwerk verkeert voor $t < 0$ in de rusttoestand.



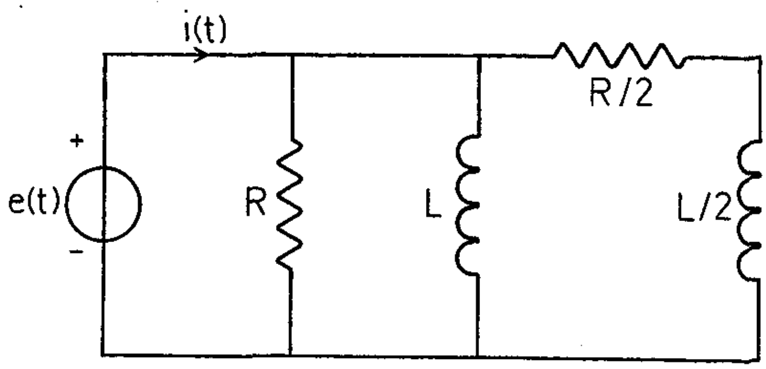

Ten tijde $t = 0$ wordt de stroombron met bronsterkte j(t) ingeschakeld.

Bereken $i_c(t)$ in de volgende gevallen:

a) $j(t) = u(t)$ ,

b) $j(t) = te^{-t}u(t)$ .

3.2.3. Het hieronder getekende netwerk verkeert voor $t < 0$ in de rusttoestand.



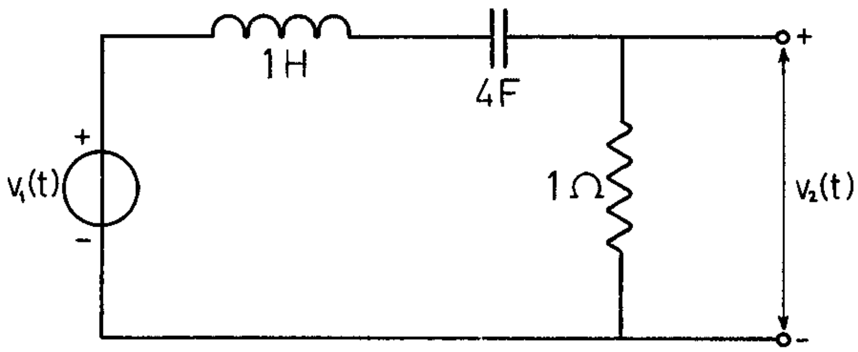

Op het tijdstip $t = 0$ wordt de spanningsbron met bronsterkte e(t) ingeschakeld.

Bereken de stroom $i(t)$ in de volgende gevallen.

a) $e(t) = u(t)$ ,

b) $e(t) = u(t) + (t - 1)u(t - 1)$ .

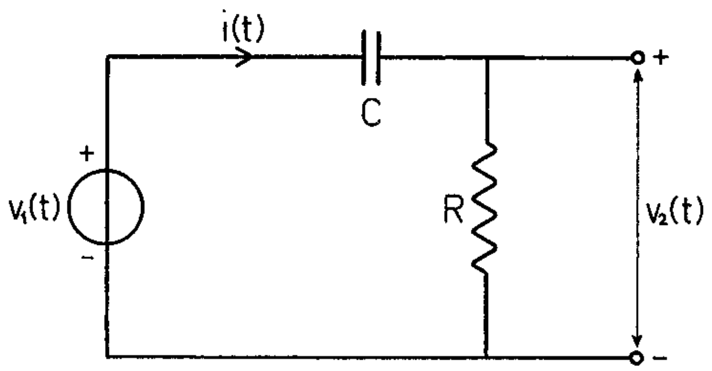
3.2.4. Het hieronder getekende netwerk wordt gevoed door een spanningsbron met bronsterkte $v_1(t)$, ingeschakeld op het tijdstip $t = 0$. De stroomsterkte in de spoel en de lading op de condensator hebben op het tijdstip $t = 0-$ de waarde $i(0-)$, resp. $q(0-)$.




Bereken de spanning $v_2(t)$ over de weerstand als gegeven is dat

$$v_1(t) = (e^{-t/2}\sin t)u(t) \ .$$

3.2.5. Het hieronder getekende RC-netwerk verkeert voor $t < 0$ in de rusttoestand. Het netwerk wordt opgevat als een lineair systeem met als ingangssignaal de bronsterkte $v_1(t)$ van de spanningsbron en als uitgangssignaal de spanning $v_2(t)$ over de weerstand.



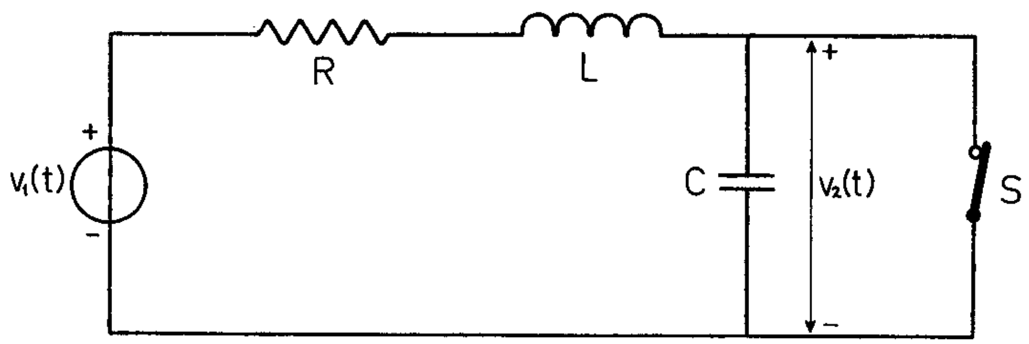
a) Bepaal de overdrachtsfunctie $H(p)$ van het systeem.

b) Bepaal de impulsresponsie.

c) Bepaal de responsie op het ingangssignaal $v_1(t) = tu(t)$.

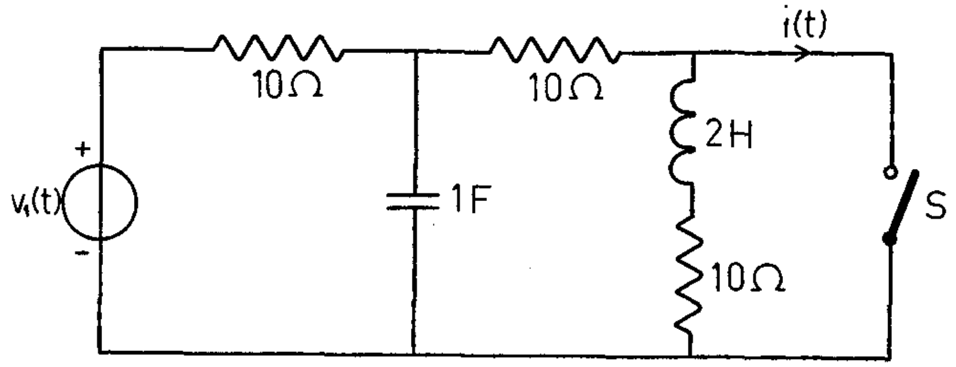
d) Bepaal de responsie op het ingangssignaal $v_1(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$.

3.2.6. In de hieronder getekende schakeling is de schakelaar S voor $t < 0$ gesloten.
Op het tijdstip $t = 0-$ bevindt de schakeling zich in stationaire toestand behorende bij $v_1(t) = E$.



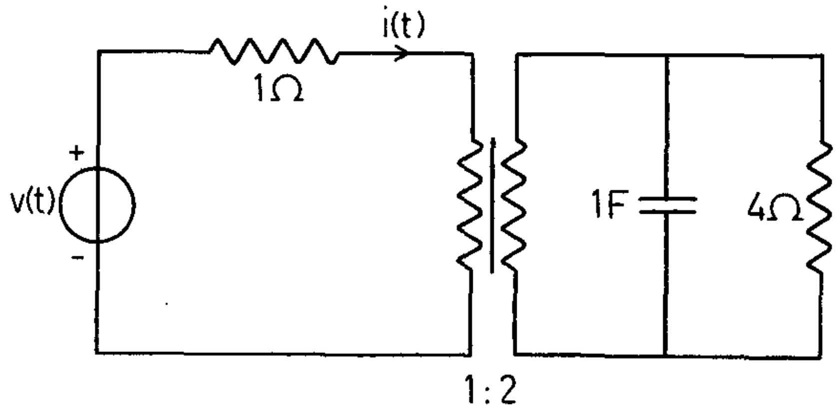

Bereken de spanning $v_2(t)$ nadat op $t = 0$ de schakelaar S geopend wordt; hierbij is nog gegeven dat $R^2 = \frac{4L}{C}$ .

3.2.7. In de hierna getekende schakeling is de schakelaar S voor $t < 0$ geopend.
Op het tijdstip $t = 0-$ bevindt de schakeling zich in stationaire toestand behorende bij $v_1(t) = E$.



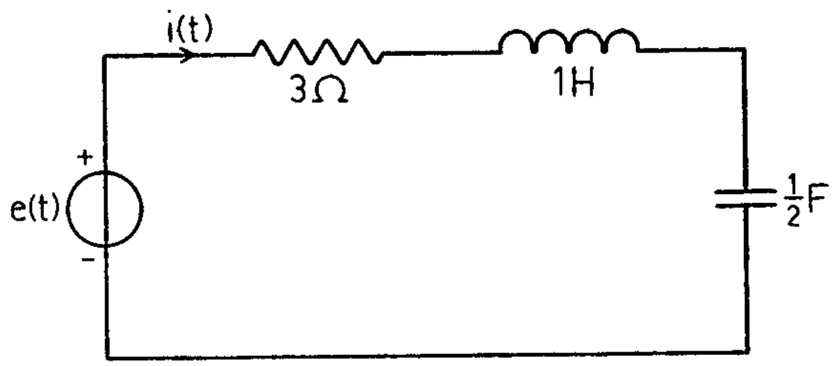

Bereken de stroom i(t) nadat op t = 0 de schakelaar gesloten wordt.

3.2.8. Het hieronder getekende netwerk, waarin een ideale transformator is opgenomen, verkeert voor t < 0 in de rusttoestand.




Bereken de stroom i(t) als gegeven is dat $v(t) = \delta(t)$.

3.2.9. Het hierna getekende RLC-netwerk verkeert voor t < 0 in de rusttoestand.

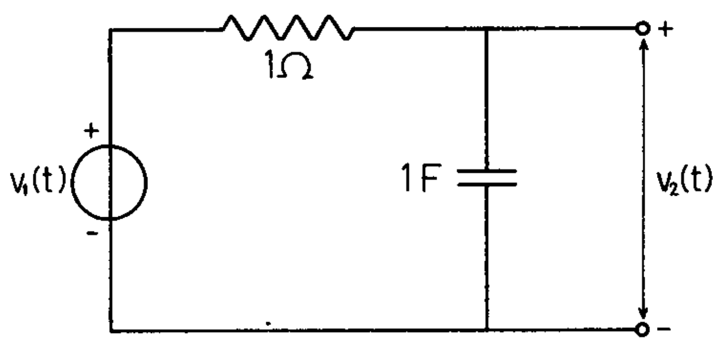



Op het tijdstip t = 0 wordt de spanningsbron met periodieke bronsterkte e(t) = t - [t] ingeschakeld.

a) Bereken de stroomsterkte i(t).

b) Bereken en schets de stroomsterkte in de stationaire toestand van het netwerk.

3.2.10. Het hieronder getekende RC-netwerk verkeert voor $t < 0$ in de rusttoestand. Het netwerk wordt opgevat als een lineair systeem met als ingangssignaal de bronsterkte $v_1(t)$ van de spanningsbron en als uitgangssignaal de spanning $v_2(t)$ over de condensator.




De responsie $v_2(t)$ op een causaal periodiek ingangssignaal $v_1(t)$ is te schrijven als

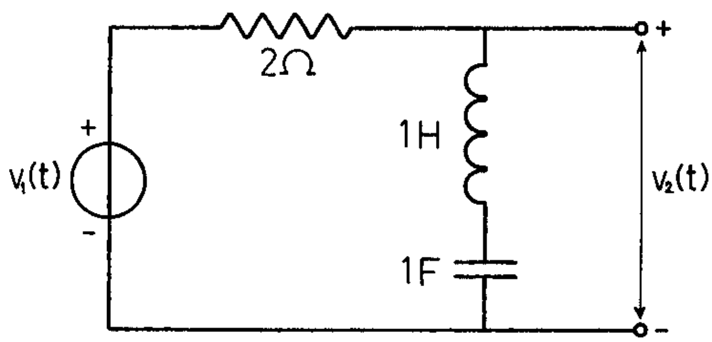
$$v_2(t) = v_{2,tr}(t) + v_{2,st}(t) \ .$$

a) Bereken $v_{2,st}(t)$ als gegeven is dat

$$v_1(t) = |\sin(\omega t)| \ .$$

b) Bereken $v_{2,tr}(t)$ .

3.2.11. Het hieronder getekende RLC-netwerk verkeert voor $t < 0$ in de rusttoestand.




Op het tijdstip $t = 0$ wordt een periodieke spanning $v_1(t)$ met periode T ingeschakeld:

$$v_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor} \quad 0 \le t < T/2 \ , \\ 0 & \text{voor} \quad T/2 \le t < T \ . \end{cases}$$

a) Bereken $v_{2,tr}(t)$ .

b) Bereken $v_{2,st}(t)$ .

Schets de grafiek van $v_{2,st}(t)$. Neem hierbij $T = 2 \log 3$ .

c) Bereken $v_{2,st}(t)$ als gegeven is dat $v_1(t) = \cos(\omega t)u(t)$ .

## Hoofdstuk 4. Z-transformatie

4.1.1. Bepaal de tweezijdige Z-transform, met convergentiegebied, van de volgende functies:

a) $f(n) = a^{|n|}$ , $|a| < 1$ ;

b) $f(n) = \begin{cases} n^2 a^n & \text{voor } n \geq 0 , \\ n^2 b^n & \text{voor } n < 0 , \end{cases}$ $|a| < |b|$ .

4.1.2. Zij de functie $f(n)$ gedefinieerd voor $n$ geheel, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ . De voorwaartse differentie van $f(n)$ wordt gedefinieerd door $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$; de achterwaartse differentie van $f(n)$ wordt gedefinieerd door $\nabla f(n) = f(n) - f(n-1)$. Bepaal de tweezijdige Z-transform van $\Delta f(n)$ en van $\nabla f(n)$, uitgedrukt in $Z_{II}\{f(n)\} = F_{II}(z)$.

4.1.3. Bepaal de éénzijdige Z-transform, met convergentiegebied, van de volgende functies:

a) $f(n) = \binom{n+k}{k} a^n$ , $k$ geheel en $\geq 0$ ;

b) $f(n) = \binom{k}{n}$ , $k$ geheel en $\geq 0$ ;

c) $f(n) = n^3 a^n$ ;

d) $f(n) = \cos(\alpha n)$ , $\alpha \in \mathbb{R}$ ;

e) $f(n) = \sin(\alpha n)$ , $\alpha \in \mathbb{R}$ ;

f) $f(n) = \frac{a^n}{n!}$ .

4.1.4. Bepaal de éénzijdige Z-transform, met convergentiegebied, van de volgende functies:

a) $f(n) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}n & \text{voor } n = 0,1,2,3 , \\ \frac{1}{2}n - 3 & \text{voor } n = 4,5,6,7 , \end{cases}$ $f(n)$ is periodiek met periode 8 ;

b) $f(n) = [\frac{n}{3}] + 1$ waarin $[\frac{n}{3}]$ = entier van n/3,
d.i. het grootste gehele getal $\leq n/3$.

4.1.5. Bepaal de inverse transform $Z_I^{-1}\{R(z)\} = r(k)$ van de volgende rationale functies R(z):

a) $R(z) = \dfrac{z^2}{z^2+3z+2}$ ; bepaal ook r(k) voor k = 0,1,2,3 met de methode van staartdeling;

b) $R(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z^2-1)}$ ;

c) $R(z) = \dfrac{z^3}{(z-\frac{1}{2})^2(z-\frac{1}{4})}$ ;

d) $R(z) = \dfrac{z+2}{z(2z^2-7z+3)}$ .

4.1.6. Bepaal de inverse transform $Z_I^{-1}\{F(z)\} = f(n)$ van de volgende functies F(z):

a) $F(z) = \left(1-\frac{4}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}$ , $|z| > 4$ ;

b) $F(z) = \log(1-\frac{1}{z})$ , $|z| > 1$ ;

c) $F(z) = \arctan(\frac{1}{z})$ , $|z| > 1$ .

4.1.7. Bepaal de convolutie $f(n) * g(n) = h(n)$ van de volgende functies f(n) en g(n):

a) $f(n) = a^n\, u(n)$ , $g(n) = b^n\, u(n)$ ;

b) $f(n) = a^n\, u(n)$ , $g(n) = b^n\, u(-n)$ , $|a| < |b|$ ;

c) $f(n) = u(n+1) - u(n-2) = g(n)$ ;

d) $f(n) = 2^n$ , $g(n) = u(n) - u(n-4)$ ;

e) $f(n) = 2^n$ , $g(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ .

4.1.8. Schrijf $\sum_{k=0}^{n} k$ en $\sum_{k=0}^{n} k^2$ als convoluties, en bepaal deze sommen met behulp van Z-transformatie.

4.1.9. Zij $f(n) * g(n) = h(n)$; bepaal de causale functie $g(n)$ indien $f(n)$ en $h(n)$ gegeven worden door

a) $f(n) = (n+1)u(n)$ , $h(n) = \delta(n)$ ;

b) $f(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1)$ , $h(n) = \delta(n)$ ;

c) $f(n) = \delta(n) + 4\delta(n-1) + 4\delta(n-2)$ , $h(n) = 3^n u(n)$ .

4.1.10. Voor een "valse" dobbelsteen wordt de kans $p(n)$ op een worp $n$ gegeven door $p(n) = \frac{1}{8}$ voor $n = 1,2,5,6$, en $p(n) = \frac{1}{4}$ voor $n = 3,4$; definieer $p(n) = 0$ voor $n \leq 0$ en voor $n \geq 7$. Men werpt twee keer met deze dobbelsteen waarbij de kans op een totale score $n$ wordt aangegeven door $q(n)$. Laat zien dat $q(n) = p(n) * p(n)$ en werk de kansverdeling $q(n)$ nader uit.

4.1.11. a) Bepaal de éénzijdige Z-transform van $\sum_{k=0}^{n} kf(k)$, uitgedrukt in $Z_I\{f(n)\} = F(z)$.

b) Toon aan, met behulp van de eindwaarde-eigenschap, dat $\sum_{k=0}^{\infty} kf(k) = -F'(1)$, aangenomen dat de reeks convergent is.

4.2.1. Zij gegeven een lineair tijdinvariant discreet systeem met impulsresponsie $h(n)$ en overdrachtsfunctie $H(z) = Z_{II}\{h(n)\}$. De responsie van het systeem op de stapfunctie $u(n)$ wordt stapresponsie genoemd en aangegeven door $a(n)$.

a) Druk $a(n)$ uit in $h(n)$ en omgekeerd.

b) Zij $g(n)$ de responsie van het systeem op een algemeen ingangssignaal $f(n)$; druk $g(n)$ uit in $f(n)$ en $a(n)$.

c) Vereenvoudig de uitkomst onder b) indien het systeem en het ingangssignaal $f(n)$ beide causaal zijn.

4.2.2. Zij gegeven een tijd-continu systeem met overdrachtsfunctie $H_c(\omega)$, ingangssignaal $f_c(t)$ en uitgangssignaal $g_c(t)$. Vorm door bemonstering op equidistante tijdstippen $t = nT$, $n$ geheel, de discrete signalen $f_c(nT) = f(n)$ en $g_c(nT) = g(n)$. Gevraagd wordt het tijd-continue systeem te simuleren door een tijd-discreet systeem met overdrachtsfunctie $H(z)$. Hierbij is $H(z)$ zo te bepalen dat de responsie van het discrete systeem op het ingangssignaal $f(n)$ gelijk wordt aan $g(n)$.

a) Toon aan dat voor $H(z)$ moet gelden

$$H(e^{j\omega T}) = H_c(\omega) \quad \text{voor elke } \omega \;;$$

merk op dat aan deze betrekking kan worden voldaan, slechts indien $H_c(\omega)$ periodiek is met periode $2\pi/T$.
Aanwijzing: Behandel eerst het geval van een tijd-harmonisch ingangssignaal $f_c(t) = e^{j\omega t}$; een algemeen ingangssignaal is hieruit op te bouwen met behulp van de Fourier integraal.

b) Beperk de klasse der ingangssignalen tot bandbegrensde functies $f_c(t)$, d.w.z. $\mathcal{F}\{f_c(t)\} = F_c(\omega) = 0$ voor $|\omega| > \omega_0$, waarbij $\omega_0 = \pi/T$ zal zijn.
Toon aan dat in dit geval voor $H(z)$ moet gelden

$$H(e^{j\omega T}) = H_c(\omega) \quad \text{voor } |\omega| < \omega_0 \;.$$

Hiermee is de functie $H(z)$ op de eenheidscirkel $|z| = 1$ vastgelegd; immers, als $\omega$ toeneemt van $-\omega_0$ naar $\omega_0$, doorloopt $z = e^{j\omega T}$ de eenheidscirkel.

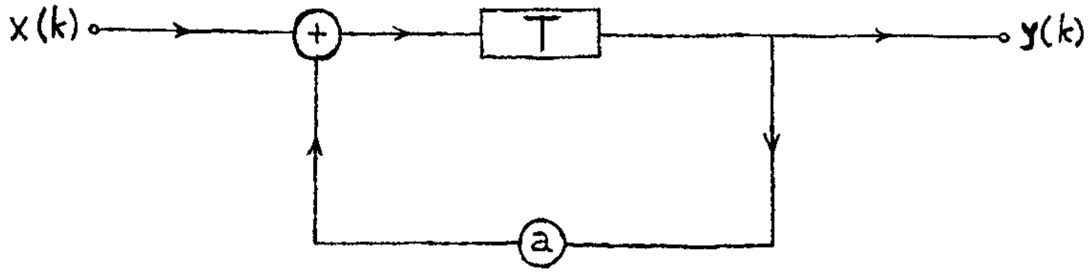
4.2.3. Van een causaal lineair tijdinvariant systeem wordt de responsie $g(n)$ op het ingangssignaal

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{voor } n = 0 \;, \\ 4 & \text{voor } n = 1,2 \;, \\ 0 & \text{voor } n < 0 \text{ en voor } n \geq 3 \;, \end{cases}$$

gegeven door $g(n) = n\,2^n u(n)$.
Bepaal de impulsresponsie van het systeem.

4.2.4. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de impulsresponsie $h(n)$ gegeven door $h(n) = n\,a^n u(n)$. Bepaal het ingangssignaal $f(n)$ zodanig dat de bijbehorende responsie van het systeem gegeven wordt door $g(n) = \delta(n-2)$.

4.2.5. Het hieronder getekende blokdiagram is de realisatie van een tijd-discreet systeem met ingangssignaal x(k) en uitgangssignaal y(k).




a) Bepaal de differentievergelijking waardoor het systeem beschreven wordt.

b) Bepaal de responsie y(k) van het systeem op het ingangssignaal $x(k) = (-a)^k\, u(k)$, onder de beginwaarde $y(-1) = b$.

c) Laat $y(-1) = 0$ zijn; bepaal de overdrachtsfunctie H(z) en de impulsresponsie h(k) van het systeem.

4.2.6. Een tijd-discreet systeem wordt beschreven door de differentievergelijking

$$y(k) + 6y(k-1) + 12y(k-2) + 8y(k-3) = x(k)\ , \quad k \geq 0\ ,$$

waarin x(k) het ingangssignaal en y(k) het uitgangssignaal voorstelt. Voor $k < 0$ zal het systeem in de rusttoestand verkeren.
Bepaal de impulsresponsie h(k) van het systeem.

4.2.7. Een tijd-discreet systeem beschreven door de differentievergelijking

$$y(k) + y(k-1) = x(k) + 2x(k-2)\ , \quad k \geq 0\ ,$$

wordt geëxciteerd door het ingangssignaal $x(k) = (\frac{1}{2})^k\, u(k)$, onder de beginwaarde $y(-1) = 1$. Bepaal het uitgangssignaal y(k) van het systeem.

4.2.8. Een tijd-discreet systeem wordt beschreven door de differentievergelijking

$$y(k) + 3y(k-1) + 2y(k-2) = x(k) - x(k-1)\ , \quad k \geq 0\ ,$$

waarin x(k) het ingangssignaal en y(k) het uitgangssignaal voorstelt. Voor $k < 0$ zal het systeem in de rusttoestand verkeren.

a) Bepaal de impulsresponsie h(k) van het systeem.

b) Bepaal de stapresponsie a(k) van het systeem.

4.2.9. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de stapresponsie a(k) gegeven door

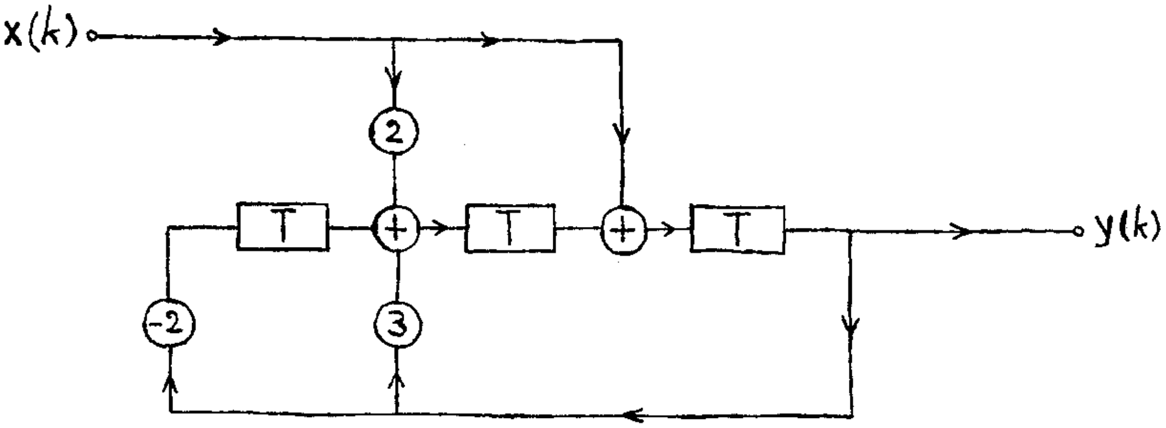
$$a(k) = [2^k - (-1)^k + 2]u(k) \ .$$

a) Bepaal de impulsresponsie h(k) van het systeem.

b) Bepaal een differentievergelijking waardoor het systeem te beschrijven is.

c) Teken een realisatie (blokdiagram) van het systeem.

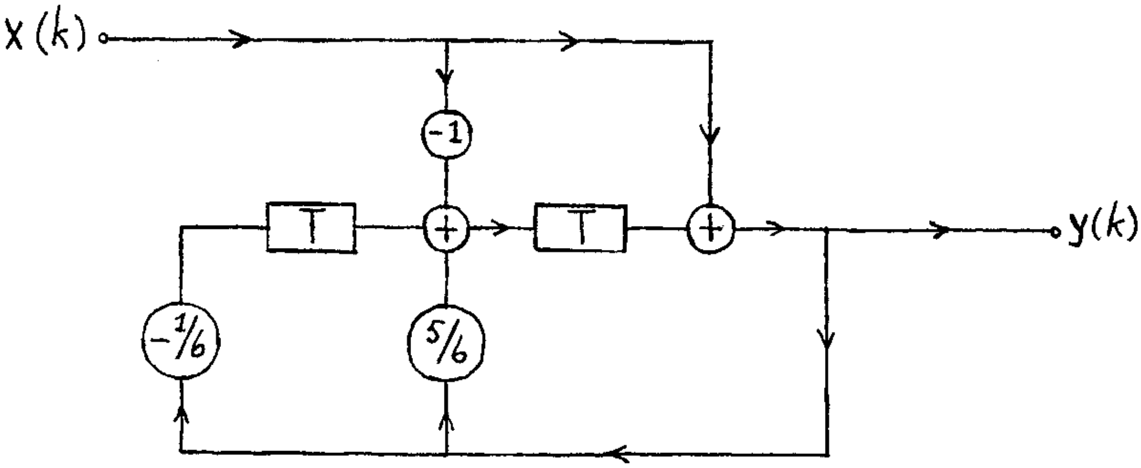
4.2.10. Het hieronder getekende blokdiagram is de realisatie van een tijd-discreet systeem met ingangssignaal x(k) en uitgangssignaal y(k). Voor k < 0 zal het systeem in de rusttoestand verkeren.




a) Bepaal de differentievergelijking waardoor het systeem beschreven wordt.

b) Bepaal de impulsresponsie h(k) van het systeem.

4.2.11. Het hieronder getekende blokdiagram is de realisatie van een tijd-discreet systeem met ingangssignaal x(k) en uitgangssignaal y(k). Voor k < 0 zal het systeem in de rusttoestand verkeren.



a) Bepaal de impulsresponsie $h(k)$ van het systeem.

b) Is het systeem stabiel?

c) Bepaal de responsie $y(k)$ van het systeem op het ingangssignaal $x(k) = (-1)^k u(k)$. Schrijf $y(k) = y_{tr}(k) + y_{st}(k)$ (tr = transiënt, st = stationair), waarbij $y_{tr}(k) \to 0$ als $k \to \infty$. Bepaal $y_{tr}(k)$ en $y_{st}(k)$, en verifieer dat de stationaire responsie $y_{st}(k)$ periodiek is met periode 2.

4.2.12. Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking

$$x(n+2) - 4x(n+1) + 3x(n) = 2 \,, \qquad n = 0,1,2,\ldots \,,$$

met beginwaarden $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

4.2.13. De $(n \times n)$-determinant $D(n)$ wordt gegeven door

$$D(n) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \bigcirc & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \bigcirc & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Leid een recurrente betrekking af voor $D(n)$ en bereken hieruit $D(n)$.

4.2.14. Bepaal met behulp van Z-transformatie de oplossing van de recurrente betrekking

$$(n+2)x_{n+2} = (n+1)x_{n+1} - x_n \,, \qquad n = 0,1,2,\ldots \,,$$

met beginwaarden $x_0 = 1$, $x_1 = 0$.

4.2.15. Theon van Smyrna beschreef de volgende methode om $\sqrt{2}$ te berekenen. Construeer de rijen $(x_n)$ en $(y_n)$, bepaald door de recurrente betrekkingen

$$x_{n+1} = x_n + y_n \,, \quad y_{n+1} = x_n + x_{n+1} \,, \qquad n = 0,1,2,\ldots \,,$$

uitgaande van de beginwaarden $x_0 = y_0 = 1$.
Dan is $\lim_{n\to\infty} y_n/x_n = \sqrt{2}$ ; toon dit aan.

4.2.16. Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking

$$x(m+1,n+1) = x(m+1,n) - x(m,n+1) \ , \qquad m,n = 0,1,2,\ldots \ ,$$

met beginwaarden $x(m,0) = 0$, $m = 0,1,2,\ldots$; $x(0,n) = 1$, $n = 1,2,3,\ldots$ .
Aanwijzing: Voer in de Z-transform $X_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(m,n)z^{-n}$ en leid een recurrente betrekking af voor de functies $X_m(z)$.

4.2.17. In een niet-associatieve algebra is in het algemeen $(a_1a_2)a_3 \neq a_1(a_2a_3)$, zodat het product $a_1\, a_2\, a_3$ twee verschillende uitkomsten kan hebben afhankelijk van de plaatsing van haakjes. Evenzo is een product van n factoren na plaatsing van haakjes te bepalen door $n-1$ opvolgende vermenigvuldigingen van telkens twee factoren, waarbij de einduitkomst zal afhangen van de plaatsing van haakjes. Het aantal uitkomsten van het product $a_1a_2 \cdots a_n$ wordt aangegeven door $p(n)$; stel per definitie $p(0) = 0$, $p(1) = 1$.

a) Laat zien dat $p(n)$ voldoet aan de recurrente betrekking

$$p(n) = \sum_{k=0}^{n} p(k)p(n-k) + \delta(n-1) = \{p(n)u(n)\} * \{p(n)u(n)\} + \delta(n-1) \ , \quad n \geq 0 \ .$$

b) Bepaal de oplossing van deze recurrente betrekking met behulp van Z-transformatie.

Antwoorden Vraagstukken

## Hoofdstuk 1. Fourier transformatie

1.1.1. a) $c_1 = \frac{1}{2}\exp(j\varphi_0)$, $c_{-1} = \frac{1}{2}\exp(-j\varphi_0)$ ,
$c_n = 0$ voor $|n| \neq 1$.

b) $c_n = \frac{j}{n\omega_0}$ voor $n \neq 0$, $c_0 = \frac{\pi}{\omega_0}$ .

c) $c_{2n+1} = \frac{2}{(\pi(2n+1))^2}$ , $c_{2n} = 0$ voor $n \neq 0$, $c_0 = \frac{1}{2}$ .

d) $c_{2n} = \frac{2}{\pi(1-4n^2)}$ , $c_{2n+1} = 0$ .

e) $c_{2n} = \frac{1}{\pi(1-4n^2)}$ , $c_1 = \frac{1}{4j}$ , $c_{-1} = -\frac{1}{4j}$ ,
$c_{2n+1} = 0$ voor $n \neq -1, 0$ .

f) $c_n = \frac{3}{2(\pi n)^2}\left(\cos(\frac{2n\pi}{3}) - 1\right)$ voor $n \neq 0$ ,
$c_0 = \frac{2}{3}$ .

1.1.2. a) $c_{2n} = 0$ , $c_{2n+1} = \frac{-8j(-1)^n}{(\pi(2n+1))^2}\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2})$ .

$0^e$ harmonische: 0 ,

$1^e$ harmonische: $\frac{8\sqrt{2}}{\pi^2}\sin(\omega_0 t)$ ,

$2^e$ harmonische: 0 ,

$3^e$ harmonische: $\frac{8\sqrt{2}}{9\pi^2}\sin(3\omega_0 t)$ .

b) $c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{\pi(2n+1)} + \frac{2}{\pi^2(2n+1)^2}$ , $c_{4n+2} = \frac{4}{\pi^2(4n+2)^2}$ ,

$c_{4n} = 0$ voor $n \neq 0$ , $c_0 = \frac{3}{4}$ .

$0^e$ harmonische: $\frac{3}{4}$ ,

$1^e$ harmonische: $(\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}) \cos(\omega_0 t)$ ,

$2^e$ harmonische: $\frac{2}{\pi^2} \cos(2\omega_0 t)$ ,

$3^e$ harmonische: $(- \frac{2}{3\pi} + \frac{4}{9\pi^2}) \cos(3\omega_0 t)$ .

1.1.3. $\frac{1}{2}(c_{n-1} + c_{n+1})$ , $c_{-n}$ , $c^*_{-n}$ , $c_n \exp(- jn\omega_0 t_0)$ .

1.1.8. $\frac{1}{2} \cos(\omega_0 t)$ .

1.1.9. b) $|c_n|^2 = 0$ voor $|n| \neq 1$ , $|c_1|^2 = |c_{-1}|^2 = \frac{1}{4}$ .

1.1.11. a) $\frac{1 - e^{-2\pi}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + jn} \exp(jnt)$ ,

b) $t \neq 2k\pi$ , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ,

c) $\pi \coth \pi$ .

1.1.12. b) $0^e$ harmonische: 0 ,

$1^e$ harmonische: $\cos t + \sin t$ ,

$2^e$ harmonische: $- \frac{2}{5} \cos(2t) - \frac{4}{5} \sin(2t)$ ,

$3^e$ harmonische: $\frac{1}{5} \cos(3t) + \frac{3}{5} \sin(3t)$ .

c) $\pi \coth \pi - 1$ .

1.2.1. $\frac{\pi}{2} |a|$ , $\frac{\pi}{2}(|b| - |a|)$ .

1.3.3. $\frac{1}{2j}(F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0))$ , $\frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega - \omega_0}{a}\right)$ ,

$\frac{1}{2}(F(\omega) + F^*(-\omega))$ , $\frac{1}{2j} (F(\omega) - F^*(-\omega))$ .

1.3.5. $F(\omega) = \dfrac{4}{\delta\omega^2}\sin(\frac{\omega\delta}{2})\sin(\omega(T - \frac{\delta}{2}))$ , $F(0) = 2T - \delta$ .

1.3.6. a) $\pi p_8(\omega)$ , b) $\dfrac{8\sin^2(\frac{1}{4}a\omega)}{a\omega^2}$ , c) $\dfrac{1}{a + j\omega}\exp(-at_0 - j\omega t_0)$ ,

d) $\dfrac{-j\omega\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}}\exp(-\omega^2/4a)$ , e) $\dfrac{b}{(a + j\omega)^2 + b^2}$ , f) $\sqrt{\pi}\exp(3 - \frac{1}{4}(\omega - 2j)^2)$ .

1.3.7. a) $R(\omega) = \frac{\pi}{2}(q_2(\omega + \omega_0) + q_2(\omega - \omega_0))$,

$X(\omega) = \frac{\pi}{2}(p_2(\omega + 1) - p_2(\omega - 1))$ ,

b) $R(\omega) = -2\pi\omega e^{a\omega}u(-\omega)$, $X(\omega) = 0$ .

1.3.8. a) $\frac{2}{3}F(\frac{\omega}{3})\exp(-\frac{1}{3}j\omega)$ ,

b) $F(\omega + 2)\exp(-2j(\omega + 2))$ ,

c) $jF'(\omega)$ ,

d) $2F(-2\omega)$ ,

e) $F(-\omega)\exp(-j\omega)$ ,

f) $\frac{1}{2}F(\omega) + \frac{1}{4}F(\omega + 2) + \frac{1}{4}F(\omega - 2)$ .

1.3.9. $F(\omega) = \dfrac{\pi^2\sin(\omega T)}{\omega(\pi^2 - \omega^2T^2)}$ , $F(0) = T$ .

1.3.10. a) $\dfrac{2}{\pi t}\sin(at)\cos(\omega_0 t)$ ,

b) $\dfrac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}e^{j\alpha}$ ,

c) $\frac{1}{4}e^{-2|t|}$ ,

d) $(\frac{1}{3} e^{-t} + \frac{2}{3} e^{-4t})u(t)$ ,

e) $\frac{1}{4}(1 + t)e^{-t}u(t) - \frac{1}{8}(2 \cos(2t) + \sin(2t))e^{-t}u(t)$ ,

f) $e^{-2t}u(t) + (1 - 3t)e^{t}u(- t)$ .

3.11. a) $R(\omega) = \dfrac{\sin \omega}{\omega}$ , $X(\omega) = \dfrac{\cos \omega - 1}{\omega}$ .

1.4.3. a) $\dfrac{1}{\alpha - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t})u(t)$ voor $\alpha \neq \beta$ ,

$te^{-\alpha t}u(t)$ voor $\alpha = \beta$ ,

b) $\dfrac{1}{\beta - \alpha} (e^{\alpha t}u(t) + e^{\beta t}u(- t))$ ,

c) $\dfrac{\pi \sin(\gamma t)}{t}$ , $\gamma = \min(\alpha,\beta)$ .

1.4.6. $f_a(t) = f(t) * \dfrac{2 \sin^2(\frac{1}{2}at)}{\pi a t^2}$ .

1.4.8.

$$F(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{voor } |\omega| \geq 3 , \\ \frac{\pi}{8} (3 - |\omega|)^2 & \text{voor } 1 \leq |\omega| < 3 , \\ \frac{\pi}{4} (3 - \omega^2) & \text{voor } |\omega| < 1 . \end{cases}$$

1.4.9. $\frac{1}{4}(1 + |t|)e^{-|t|}$ .

4.10. $\frac{3}{4}\pi$ , $\frac{1}{2}\pi$ .

1.4.11. b) $\dfrac{j\omega C\pi p_2(\omega)}{1 + j\omega RC}$ , c) $\dfrac{\pi}{R^2C}$ (RC-arctan RC) .

1.4.14. $\rho_{12}(t) = \frac{1}{\alpha + \beta}\,(e^{-\beta t}u(t) + e^{\alpha t}u(-t))$ .

1.4.15. $(1 + |t|)e^{-|t|}$ .

1.4.16. $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\,\frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}$ .

1.4.17. a) $\frac{1}{\pi(1-t^2)}\cos(\frac{\pi}{2}t)$ .

1.4.19. a) $f(n) = \frac{1}{n^2\pi}((-1)^n - 1)\ (n \neq 0)$ , $f(0) = \frac{\pi}{2}$ , b) ja , c) $\frac{1}{3}\pi^2$ .

1.5.2. c) nee .

1.5.3. a) $\mathrm{sgn}(t)$ ,

b) $p_2(t) - \delta(t-1) - \delta(t+1)$ ,

c) $\cos(t)u(t)$ ,

d) $p_2(t-1) - 2\delta(t-2)$ ,

e) $je^{jt}u(t-\pi) - \delta(t-\pi)$ ,

f) $\frac{1}{2}\delta(t+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\delta(t-\frac{1}{2}) - p_1(t)\mathrm{sgn}(t)$ .

1.5.4. a) $\frac{\pi}{j}(\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0))$ ,

b) $\frac{1}{j(\omega-\omega_0)} + \pi\delta(\omega-\omega_0)$ ,

c) $\frac{\omega}{j(\omega^2-\omega_0^2)} + \frac{\pi}{2}(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0))$ ,

d) $\frac{-\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2} + \frac{\pi}{2j}(\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0))$ ,

e) $\frac{2}{j(\omega-\omega_0)}$ ,

f) $\frac{2\cos\omega}{j\omega} + 4\,\frac{\sin\omega}{\omega}$ .

1.5.5. $\frac{2b}{a}\,\frac{\sin(\frac{1}{2}a\omega)}{j\omega^2}\,e^{-\frac{1}{2}j\omega a} + \pi b\delta(\omega)$ .

1.5.6. $\frac{1}{2}q_2(\omega) + \frac{1}{2\pi j}\left(-\omega\ln|\omega| + \frac{1}{2}(2+\omega)\ln|\omega+2| - \frac{1}{2}(2-\omega)\ln|\omega-2|\right).$

1.5.7. a) $\frac{2\sin\omega}{j\omega^2} + 2\pi\delta(\omega)$ ,

b) $\frac{\pi p_2(\omega)}{j\omega} + \pi^2\delta(\omega)$ .

1.5.8. a) $\frac{j}{2}\,\mathrm{sgn}(t) - \frac{j}{2}\,e^{-t}u(t) + \frac{j}{2}\,e^{t}u(-t)$ ,

b) $\frac{1}{4}\,j\,\mathrm{sgn}(t+1) + \frac{1}{4}\,j\,\mathrm{sgn}(t-1)$ ,

c) $\frac{j}{2\pi t} + \frac{1}{2}\,\delta(t)$ ,

d) $\frac{1}{2}\,je^{jt}\,\mathrm{sgn}(t)$.

## Hoofdstuk 2. Toepassingen van de Fourier transformatie

2.1.1. b) $a + be^{-j\omega}$ , c) $a\delta(t) + b\delta(t - 1)$ , d) ja , e) ja .

2.1.2. b) ja .

2.1.3. b) $\frac{2 \sin \omega}{\omega}$ , $p_2(t)$ , c) nee , d) ja , e) $2q_2(t)$ .

2.1.5. b) de "even" harmonischen ($c_n = 0$ voor even n).

2.1.6. a) $h(t) = \frac{1}{2}(\text{sgn}(t) - \text{sgn}(t-1)) - e^{-t}u(t) + e^{-(t-1)}u(t - 1)$ ,

b) ja.

2.1.7. a) ja , b) $\frac{1}{\alpha + j\omega}$ , c) ja ,

d) $\frac{1}{\alpha - \beta}(e^{-\beta t} - e^{-\alpha t})u(t)$ voor $\alpha \neq \beta$ ,

$te^{-\alpha t}u(t)$ voor $\alpha = \beta$ ;

$$\frac{1}{\alpha^2 + \omega_0^2}(\alpha \sin(\omega_0 t) - \omega_0 \cos(\omega_0 t)) .$$

2.1.8. a) $\frac{1}{(1 + j\omega)^2}$ , b) ja , c) $(1 - e^{-t} - te^{-t})u(t)$ .

2.1.9. $R(\omega_0)\cos(\omega_0 t) - X(\omega_0)\sin(\omega_0 t)$ .

2.1.11. a) geen amplitude-vervorming ,

c) $2\alpha e^{-\alpha t}u(t) - \delta(t)$ ,

d) $(1 - 2e^{-\alpha t})u(t)$ ,

e) $e(t) + 2e^{-\alpha(t-T)}u(t - T) - 2e^{-\alpha(t + T)}u(t + T)$ ,

f) 2T .

2.1.12. a) $H(\omega) = \frac{1}{RC} \frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega}$ , $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC} t} u(t)$ ,

b) $\frac{1}{\alpha} (u(t + \alpha) - u(t) + e^{-\frac{1}{RC} t} u(t) - e^{-\frac{1}{RC} (t+\alpha)} u(t + \alpha))$ ,

c) $\alpha \leq (0{,}02)RC$ .

2.1.13. $3\delta(t) - e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$ .

2.1.14. a) $\alpha = n\pi$ , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ,

b) $\alpha = 2n\pi$ , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ .

2.1.15. $\frac{\sin(\omega_c(t - t_0))}{t - t_0}$ als $\omega_c \leq 1$ ,

$\frac{\sin(t - t_0)}{t - t_0}$ als $\omega_c > 1$ .

2.1.16. a) $\frac{\sin(\frac{1}{2}\alpha t)}{\pi t} \cos(\omega_0 t)$ ,

b) 0 ,

c) nee ,

d) $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\cos(\omega_0(t - \tau))d\tau$ .

2.1.17. $Y(\omega) = e^{-j\omega t_0}$ .

2.1.19. a) $\delta(t - t_0) - \frac{\sin(\omega_c(t - t_0))}{\pi(t - t_0)}$ ,

b) $u(t - t_0) - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \mathrm{Si}(\omega_c(t - t_0))$ ,

c) $\cos(\omega_0(t - t_0))$ als $|\omega_0| > \omega_c$ ,
$0$ als $|\omega_0| < \omega_c$ .

d) 0 .

2.1.20. a) $\dfrac{2\sin^2(\frac{1}{2}\omega_c t)}{\pi\omega_c t^2}$ ,   b) $t_s = \dfrac{2\pi}{\omega_c}$ ,   c) $u(t)$ .

2.1.22. a) $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \exp(-\frac{1}{4\alpha}(t - t_0)^2)$ ,

b) $t_s = 2\sqrt{\pi\alpha}$ .

2.1.23. $\frac{1}{2}T - \dfrac{2}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) - \dfrac{1}{\omega_0}\sin(2\omega_0 t)$ , $\omega_0 = \dfrac{2\omega_c}{5}$ .

2.1.24. $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}e^{-\omega_0^2}\sin(\omega_0 t) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{1-4k^2} e^{-4k^2\omega_0^2}\cos(2k\omega_0 t)$ .

2.1.25. a) $a(t + \frac{\alpha}{2}) - a(t - \frac{\alpha}{2})$ ,

b) $(2te^{-2t} + e^{-2t} - e^{-t})u(t)$ ,

c) $\dfrac{\omega_0}{(4 + \omega_0^2)^2}(4\omega_0 \sin(\omega_0 t) + (4 - \omega_0^2)\cos(\omega_0 t))$ ,

d) $\varphi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t + \alpha) - \frac{1}{2}\varphi(t - \alpha)$ , waarbij

$\varphi(t) = \frac{1}{\alpha}((t + \frac{1}{2})e^{-2t}u(t) - \frac{1}{4}\,\mathrm{sgn}(t))$ .

2.1.26. a) $H(\omega) = \dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 + j\omega_0\sqrt{2}\omega - \omega^2}$ ,

b) $0$ ,

c) $e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_0 t}(\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_0 t) - \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_0 t))u(t)$ .

2.1.27. a) $e^{-t}\cos t\; u(t)$ ,

b) $\frac{1}{2}(e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t + 1)u(t)$ ,

c) $e^{-t}\sin t\; u(t)$ .

2.1.28. a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4RC}\,\frac{1}{\frac{1}{2RC} + j\omega}$ , $\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{4RC}\,e^{-t/2RC}u(t)$ ,

b) $H_1(\omega) = \frac{1}{H(\omega)} = 2 - \frac{1}{RC}\,\frac{1}{\frac{1}{RC} + j\omega}$ ,

$2\delta(t) - \frac{1}{RC}\,e^{-t/RC}u(t)$ ,

c) $\delta(t)$ .

2.2.1. $f_2(t) = \frac{1}{\pi}\,(f_1(t) * \frac{1}{t}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(\tau)}{t - \tau}\,d\tau$ .

2.2.2. a) 1) $-\sin\omega$ , 2) $\frac{-\omega}{1 + \omega^2}$ , 3) $\frac{-1}{\pi(\omega - \omega_0)}$ ,

4) $\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{\omega - 1}{\omega + 1}\right|$ , 5) $\frac{-\omega^3\sqrt{2}}{1 + \omega^4}$ ,

6) $\frac{1}{5}\,\frac{\omega}{1 + \omega^2} + \frac{\pi}{20}\,(\delta(\omega - 2) - \delta(\omega + 2))$ .

b) 1) $K + \frac{5 - \omega^2}{\omega^4 - 6\omega^2 + 25}$ ,

2) $K + \frac{\omega^4\sqrt{2}}{1 + \omega^4}$ .

2.3.1. $T(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + s^2}\,e^{-s^2t+jsx}ds$ .

2.3.2. $T(x,t) = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) + \frac{1}{2}(T_2 - T_1)\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$ .

2.3.3. $u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \tau^2}\,f(x - y\tau)\,d\tau$ .

2.3.4. $v(x,t) = \frac{1}{2}\{e^{\alpha\sqrt{LC}x}f(t + \sqrt{LC}x) + e^{-\alpha\sqrt{LC}x}f(t - \sqrt{LC}x)\}$ , $\alpha = \frac{R}{L}$ .

## Hoofdstuk 3. Laplace transformatie

3.1.1. $-1 < \mathrm{Re}\, p < 1$ .

3.1.2. a) $F_{II}(-p)$ , $F_{II}^{*}(p^{*})$ , $\frac{1}{2}F_{II}(p - jp_0) + \frac{1}{2}F_{II}(p + jp_0)$ .

3.1.3. a) $\frac{-p\sqrt{\pi}}{2}\, e^{p^2/4}$ ,

b) $\frac{4 - 2p^2}{4 + p^4}$ ,

c) $\frac{\sqrt{\pi}}{p}\, e^{p^2/4}$ ,

d) $\frac{4\sinh^2(\frac{1}{2}ap)}{ap^2}$ .

3.1.5. $\frac{1}{p}(1 + e^{-p} - 3e^{-2p} + (e^{-3} + 1)e^{-3p}) - \frac{e^{-3}}{p(p+1)}\, e^{-3p}$ .

3.1.7. a) $\frac{p_0}{p^2 + p_0^2}\coth(\frac{\pi p}{2p_0})$ ,

b) $\frac{b}{(p - a)^2 - b^2}$ ,

c) $\frac{e^{-p}}{p(1 - e^{-p})}$ ,

d) $\frac{(p + 1)^2 - p_0^2}{(p_0^2 + (p + 1)^2)^2}$ .

3.1.8. a) $(1 - 8t)e^{-8t}$ , $t > 0$ ,

b) $3 - 5e^{-t} + 3e^{-3t}$ , $t > 0$ ,

c) $\frac{1}{25}(\cos(3t) - e^{-4t} + 7\sin(3t))$ , $t > 0$ ,

d) $\frac{1}{9}(1 - \cos(3t - 3))u(t - 1)$ , $t > 0$ ,

e) $\delta(t) + 6e^{4t} - 2e^{3t}$ ,

f) $\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$ , $t > 0$ ,

g) $(\sin t)(1 - u(t - \pi))$ , $t > 0$ ,

h) $e^{-at}u(t - t_0)$ , $t > 0$ .

3.1.9. a) f(t) is voor $t > 0$ gegeven door

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } 0 < t < a , \\ 0 & \text{voor } a < t < b , \end{cases}$$

f periodiek met periode b.

3.1.12. $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ .

3.2.1. a) $\frac{1}{R} - (\frac{1}{R} - i(0-))e^{-Rt/L}$ , $t > 0$ ,

b) $(\frac{1}{L} + i(0-))e^{-Rt/L}$ , $t > 0$ ,

c) $\frac{1}{R} - (\frac{1}{R} - i(0-))e^{-Rt/L} + \frac{1}{R}(1 - e^{-R(t-1)/L})u(t - 1)$ , $t > 0$ ,

d) $\frac{1}{R - L}e^{-t} + (\frac{1}{L - R} + i(0-))e^{-Rt/L}$ voor $R \neq L$ ,

$(i(0-) + t/L)e^{-t}$ voor $L = R$ ; $t > 0$ .

3.2.2. a) $i_c(t) = e^{-\frac{1}{RC}t}u(t)$ ,

b) $i_c(t) = (te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t})u(t)$ voor $RC = 1$ ,

$i_c(t) = (\frac{RC}{(RC - 1)^2}e^{-t} + \frac{RC}{(RC - 1)}te^{-t} - \frac{RC}{(RC - 1)^2}e^{-t/RC})u(t)$ voor $RC \neq 1$ .

3.2.3. a) $i(t) = (\frac{3}{R} + \frac{1}{L}\, t - \frac{2}{R}\, e^{-Rt/L})u(t)$ ,

b) $(\frac{3}{R} + \frac{t}{L} - \frac{2}{R}\, e^{-Rt/L})u(t) +$

$+ (\frac{3}{R}\,(t - 1) + \frac{1}{2L}\,(t - 1)^2 - \frac{2L}{R^2})u(t - 1) +$

$+ \frac{2L}{R^2}\, e^{-R(t-1)/L}u(t - 1)$ .

3.2.4. $(1 + i(0-)e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{4}(q(0-) + 2i(0-) + 2)te^{-\frac{1}{2}t} - e^{-\frac{1}{2}t}\cos t + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\sin t$ , $t > 0$ .

3.2.5. a) $1 - \frac{1}{RC}\,\frac{1}{p + \frac{1}{RC}}$ ,

b) $\delta(t) - \frac{1}{RC}\, e^{-t/RC}u(t)$ ,

c) $RC(1 - e^{-t/RC})u(t)$ ,

d) $\frac{1}{\alpha^2 + \omega_0^2}\,(\omega_0^2\cos(\omega_0 t) - \alpha\omega_0\sin(\omega_0 t) + \alpha^2 e^{-\alpha t})u(t)$ ,

$(\alpha = 1/RC)$ .

3.2.6. $(1 - e^{-\alpha t} - \frac{\alpha}{2}\, te^{-\alpha t})Eu(t)$ $(\alpha = \frac{1}{\sqrt{LC}})$ .

3.2.7. $(\frac{1}{20} + \frac{1}{60}\, e^{-t/5} - \frac{1}{30}\, e^{-5t})Eu(t)$ .

3.2.8. $\delta(t) - \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$ .

3.2.9. $i(t) = i_{st}(t) + i_{tr}(t)$ ,

$$i_{tr}(t) = \left(-\tfrac{1}{2} + \frac{1}{1-e^2}\right)e^{-2t} - \frac{1}{1-e}\,e^{-t}, \qquad t > 0\,;$$

$$i_{st}(t) = \tfrac{1}{2} - \frac{e^2}{1-e^2}\,e^{-2t} + \frac{e}{1-e}\,e^{-t} \quad \text{voor } 0 < t < 1\,,$$

$i_{st}(t)$ periodiek met periode 1.

3.2.10. $$v_{2,tr}(t) = \frac{\omega}{\omega^2+1}\left(\frac{1+e^T}{1-e^T}\right)e^{-t} \qquad (t > 0)\,,$$

$$v_{2,st}(t) = \frac{-2\omega}{1+\omega^2}\,\frac{e^T}{1-e^T}\,e^{-t} + \frac{1}{\omega^2+1}\,(\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t))\,,$$

voor $0 < t < T$,

$v_{2,st}(t)$ periodiek met periode $T = \frac{\pi}{\omega}$ .

3.2.11. a) $$v_{2,tr}(t) = \frac{-2te^{-t}}{1+e^{T/2}} - \frac{Te^{T/2}}{(1+e^{T/2})^2}\,e^{-t} \qquad (t > 0)\,,$$

b) $$v_{2,st}(t) = 1 - \frac{2}{1+e^{T/2}}\,te^{-t+T/2} + \frac{T}{(1+e^{T/2})^2}\,e^{-t+T/2}$$

voor $0 < t < T/2$,

$$v_{2,st}(t) = \frac{2t}{1+e^{T/2}}\,e^{-t+T} - \frac{T}{(1+e^{T/2})^2}\left(e^{-t+\frac{3}{2}T} + 2e^{-t+T}\right) \quad \text{voor } T/2 < t < T\,,$$

$v_{2,st}(t)$ periodiek met periode T;

c) $$\frac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)^2}\,((1-\omega^2)\cos(\omega t) + 2\omega\sin(\omega t))\,, \qquad t > 0\,.$$

Hoofdstuk 4. Z-transformatie

4.1.1. a) $\dfrac{(1-a^2)z}{(z-a)(1-az)}$ , $|a| < |z| < |a|^{-1}$ ;

b) $\dfrac{az(z+a)}{(z-a)^3} - \dfrac{bz(z+b)}{(z-b)^3}$ , $|a| < |z| < |b|$ .

4.1.2. $Z_{II}\{\Delta f(n)\} = (z-1)F_{II}(z)$ , $Z_{II}\{\nabla f(n)\} = (1-z^{-1})F_{II}(z)$ .

4.1.3. a) $\left(\dfrac{z}{z-a}\right)^{k+1}$ , $|z| > |a|$ ; b) $\left(\dfrac{z+1}{z}\right)^k$ , $z \neq 0$ ;

c) $\dfrac{az(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$ , $|z| > |a|$ ; d) $\dfrac{z(z-\cos\alpha)}{z^2-2z\cos\alpha+1}$ , $|z| > 1$ ;

e) $\dfrac{z\sin\alpha}{z^2-2z\cos\alpha+1}$ , $|z| > 1$ ; f) $e^{a/z}$ , $z \neq 0$ .

4.1.4. a) $\dfrac{z(z^3+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2})}{z^4+1}$ ; b) $\dfrac{z^4}{(z-1)(z^3-1)}$ .

4.1.5. a) $r(k) = (-1)^k(2^{k+1}-1)$ , $k \geq 0$ ; b) $r(k) = \delta(k) + \frac{1}{2}k - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}(-1)^k$ , $k \geq 0$ ;

c) $r(k) = 2^{-k+1}k + 2^{-2k}$ , $k \geq 0$ ;

d) $r(k) = \frac{17}{9}\delta(k) + \frac{2}{3}\delta(k-1) - 2^{-k+1} + 3^{k-2}$ , $k \geq 0$ .

4.1.6. a) $f(n) = \binom{2n}{n}$ , $n \geq 0$ ; b) $f(0) = 0$ , $f(n) = -\frac{1}{n}$ , $n \geq 1$ ;

c) $f(2n) = 0$ , $f(2n+1) = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ , $n \geq 0$ .

4.1.7. a) $h(n) = \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}u(n)$ als $a \neq b$ , $h(n) = (n+1)a^n u(n)$ als $a = b$ ;

b) $h(n) = \dfrac{b^{n+1}}{b-a}u(-n+1) + \dfrac{a^n b}{b-a}u(n)$ ;

c) $h(n) = \delta(n+2) + 2\delta(n+1) + 3\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$ ;

d) $h(n) = 15 \cdot 2^{n-3}$ ; e) $h(n) = \frac{6}{5} \cdot 2^n$ .

4.1.8. $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$ , $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ .

4.1.9. a) $g(n) = \delta(n) - 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$ ; b) $g(n) = (-2)^n u(n)$ ;

c) $g(n) = \frac{1}{25} [3^{n+2} - (5n+8)(-2)^{n+1}] u(n)$ .

4.1.10. $(q(n)) = \frac{1}{64} (1,2,5,8,10,12,10,8,5,2,1)$ voor $n = 2,3,4,\dots,11,12$ ;

$q(n) = 0$ voor $n \le 1$ en voor $n \ge 13$ .

4.1.11. $Z_I\left\{\sum_{k=0}^{n} kf(k)\right\} = -\frac{z^2}{z-1} F'(z)$ .

4.2.1. a) $a(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} h(k)$ , $h(n) = a(n) - a(n-1)$ ;

b) $g(n) = f(-\infty)H(1) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} [f(k) - f(k-1)] a(n-k)$ ;

c) $g(n) = f(0)a(n) + \sum_{k=1}^{n} [f(k) - f(k-1)] a(n-k)$ , $n \ge 0$ .

4.2.3. $h(2n) = 0$ , $h(2n+1) = (n+1)2^{2n+1}$ , $n \ge 0$ .

4.2.4. $f(n) = a^{-1}\delta(n-1) - 2\delta(n-2) + a\delta(n-3)$ .

4.2.5. a) $y(k) - ay(k-1) = x(k-1)$ ; b) $y(k) = [a^2 b + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^k] a^{k-1}$ , $k \ge 0$ ;

c) $H(z) = \frac{1}{z-a}$ , $h(k) = a^{k-1} u(k-1)$ .

4.2.6. $h(k) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)(-2)^k$ , $k \geq 0$ .

4.2.7. $y(k) = -4\delta(k) + (-1)^k + 3(\frac{1}{2})^k$ , $k \geq 0$ .

4.2.8. a) $h(k) = (3 \cdot 2^k - 2)(-1)^k$ , $k \geq 0$ ; b) $a(k) = (2^{k+1} - 1)(-1)^k$ , $k \geq 0$ .

4.2.9. a) $h(k) = \frac{7}{2}\,\delta(k) + 2^{k-1} - 2(-1)^k$ , $k \geq 0$ ;

b) $y(k) - y(k-1) - 2y(k-2) = 2x(k) + x(k-1) - 7x(k-2)$ .

4.2.10. a) $y(k) - 3y(k-2) + 2y(k-3) = x(k-1) + 2x(k-2)$ ; b) $h(k) = k$ , $k \geq 0$ .

4.2.11. a) $h(k) = -3(\frac{1}{2})^k + 4(\frac{1}{3})^k$ , $k \geq 0$ ; b) ja;

c) $y(k) = -(\frac{1}{2})^k + (\frac{1}{3})^k + (-1)^k$ , $k \geq 0$ ,

$y_{tr}(k) = -(\frac{1}{2})^k + (\frac{1}{3})^k$ , $y_{st}(k) = (-1)^k$ .

4.2.12. $x(n) = 3^n - n - 1$ .

4.2.13. $D(n) = 2D(n-1) - D(n-2)$ , $n \geq 3$ , met beginwaarden $D(1) = 2$, $D(2) = 3$ ;

$D(n) = n+1$ .

4.2.14. $x_n = -\frac{n-1}{n!}$ .

4.2.16. $X_{m+1}(z) = -\frac{z}{z-1} X_m(z)$ , $X_0(z) = \frac{1}{z-1}$ ; $x(m,n) = (-1)^m \binom{m+n-1}{m}$ , $m \geq 0$, $n \geq 1$ .

4.2.17. $p(n) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ , $n \geq 1$ .

Examen/tentamen vraagstukken

Tentamen, woensdag 15 juni 1977

1. a) Bepaal de Fourier transform van de functie

$$f(t) = \frac{\sin t}{t} .$$

b) Bepaal de inverse Fourier transform van de functie

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega(1+\omega^2)} + \pi\delta(\omega) .$$

2. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de stapresponsie a(t) gegeven door

$$a(t) = u(t) - u(t-1) .$$

Bepaal de responsie van het systeem op het ingangssignaal

$$f(t) = e^{-t}u(t) .$$

3. Van een laagdoorlatend filter wordt de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ gegeven door

$$H(\omega) = \begin{cases} j\omega & \text{voor } |\omega| < \frac{3}{2} , \\ 0 & \text{voor } |\omega| > \frac{3}{2} . \end{cases}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van het filter.

b) Bepaal de responsie van het filter op het periodieke ingangssignaal

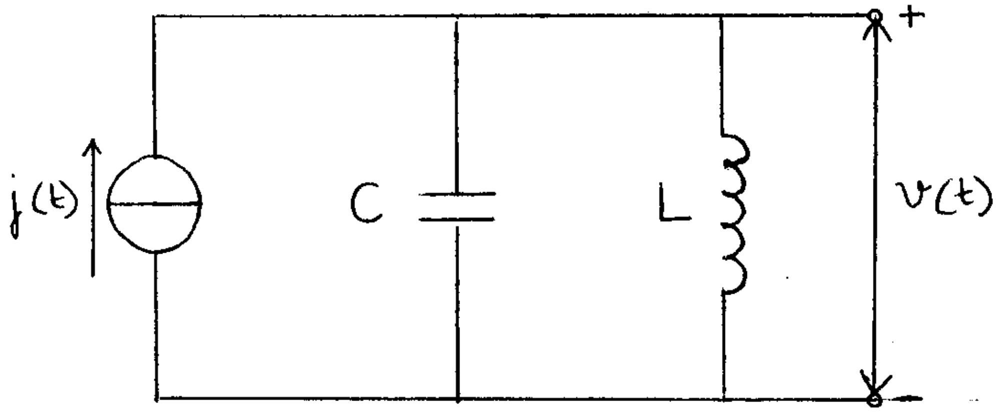
$$f(t) = \left|\cos(\tfrac{1}{2} t)\right| .$$

4. Bepaal de Laplace transform van de functie f(t) gegeven door

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{voor } 0 \le t \le 1 , \\ 2-t & \text{voor } 1 \le t \le 2 , \end{cases}$$

f(t) is periodiek met periode 2.

5. Het hieronder getekende LC-netwerk verkeert voor $t < 0$ in de rusttoestand. Op het tijdstip $t = 0$ wordt de stroombron met bronsterkte $j(t) = J \cos(\omega_0 t)$ ingeschakeld.




Voer in de notatie $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Bereken de spanning $v(t)$ met behulp van Laplace transformatie. Onderscheid daarbij de twee gevallen:

a) $\omega_0 \neq \omega_1$ ,

b) $\omega_0 = \omega_1$ .

<u>Herkansing, woensdag 22 juni 1977</u>

1. a) Bepaal de Fourier transform van de functie

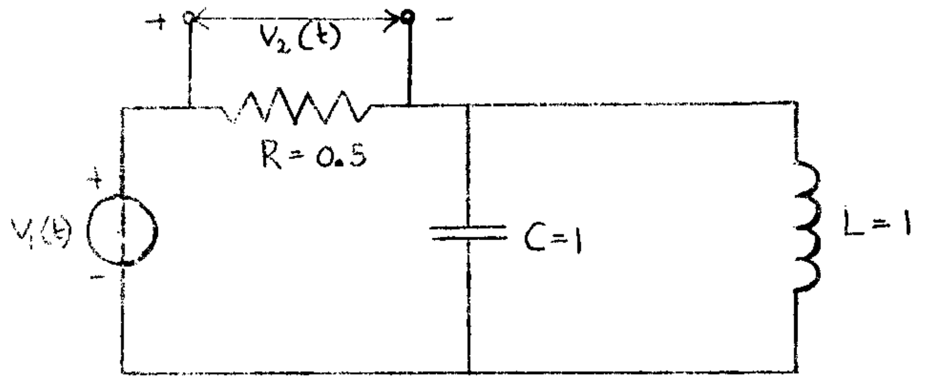
$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 4} \quad .$$

b) Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + 4)^2} \quad .$$

2. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de responsie $g(t)$ op het ingangssignaal $f(t) = e^{-t}u(t)$ gegeven door $g(t) = e^{-2t}u(t)$.
Bepaal de responsie van het systeem op het ingangssignaal $\cos(\omega_0 t)$.

3. Het hieronder getekende RLC-netwerk wordt opgevat als een lineair tijdinvariant systeem met als ingangssignaal de spanning $v_1(t)$ van de spanningsbron en als uitgangssignaal de spanning $v_2(t)$ over de weerstand.




a) Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ van het systeem.

b) Bepaal de responsie van het systeem op het ingangssignaal

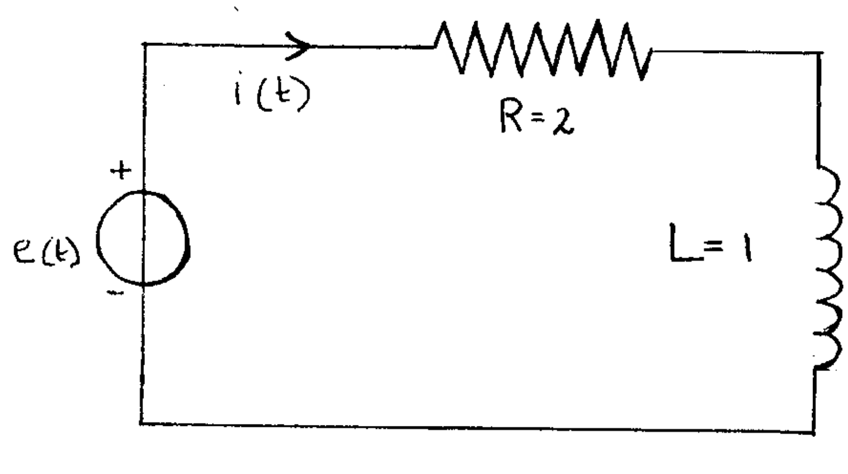
$$v_1(t) = e^{jt}u(t) \ .$$

N.B. R, L, C, t zijn uitgedrukt in hun resp. eenheden Ohm, Henry, Farad, seconde

4. Zij $f(t)$ een causaal signaal met frequentiespectrum $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$.
   Bepaal $X(\omega)$ indien $R(\omega)$ gegeven wordt door

$$R(\omega) = \frac{1}{4 + \omega^2} \ .$$

5. Het hieronder getekende RL-netwerk verkeert voor $t < 0$ in de rusttoestand.
   Op het tijdstip $t = 0$ wordt de spanningsbron met bronsterkte $e(t) = E \sin(\omega_0 t)$ ingeschakeld.




R en L zijn uitgedrukt in hun resp. eenheden Ohm en Henry.
Bereken de stroom $i(t)$ in de stationaire toestand $(t \to \infty)$ van het netwerk.

Tentamen, donderdag 12 januari 1978

1. Bepaal de inverse Fourier transform van de functie

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^3 + 4\omega^2 + 8\omega} .$$

2. Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\tau)}{\tau^2} \frac{\sin a(t-\tau)}{t-\tau} d\tau , \quad a > 0 .$$

3. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de overdrachtfunctie $H(\omega)$ gegeven door

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{1+j\omega} & \text{voor } |\omega| < 1 , \\ 0 & \text{voor } |\omega| > 1 . \end{cases}$$

Zij $h(t)$ de impulsresponsie van het systeem.

a) Bereken $h(0)$.

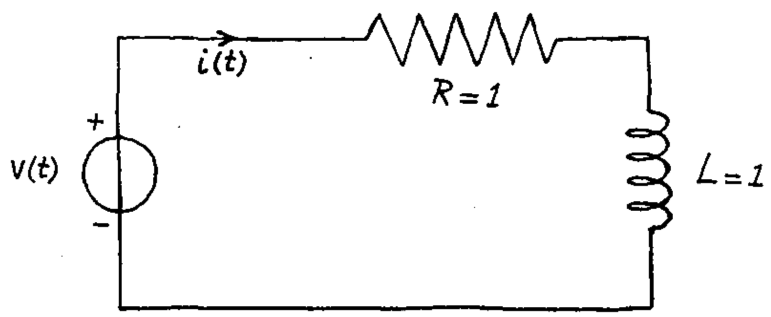
b) Is het systeem reëel? Motiveer Uw antwoord.

c) Bepaal de responsie van het systeem op het ingangssignaal $\sin^2(\frac{1}{3} t)$.

4. Zij $f(t)$ een causaal signaal met frequentiespectrum $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$. Bepaal $f(t)$ indien $R(\omega)$ gegeven wordt door

$$R(\omega) = \frac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)^2} .$$

5. Het hieronder getekende RL-netwerk verkeert voor $t < 0$ in de rusttoestand. R en L zijn uitgedrukt in hun resp. eenheden Ohm en Henry.




Op het tijdstip $t = 0$ wordt de spanningsbron ingeschakeld; de bronsterkte $v(t)$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} v(t) = e^t \text{ voor } 0 \le t < 1 , \\ v(t) \text{ is periodiek met periode } 1 . \end{cases}$$

Bereken met behulp van Laplace transformatie de stroom $i(t)$ in de stationaire toestand $(t \to \infty)$ van het netwerk.

Herkansing, vrijdag 27 januari 1978

1. Bepaal de Fourier transform van de functie

$$f(t) = \frac{t}{(1 - jt)^n} , \qquad n = 1,2,3,\ldots .$$

2. Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \frac{\sin t}{t} \, dt .$$

3. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de responsie $g(t)$ op het ingangssignaal $f(t) = \mathrm{sgn}(t)$ gegeven door

$$g(t) = u(t + 1) - u(t - 1) .$$

a) Bepaal de responsie van het systeem op een willekeurig ingangssignaal.
b) Is het systeem stabiel? Motiveer Uw antwoord.
c) Is het systeem causaal? Motiveer Uw antwoord.

4. Van een laagdoorlatend filter wordt de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ gegeven door

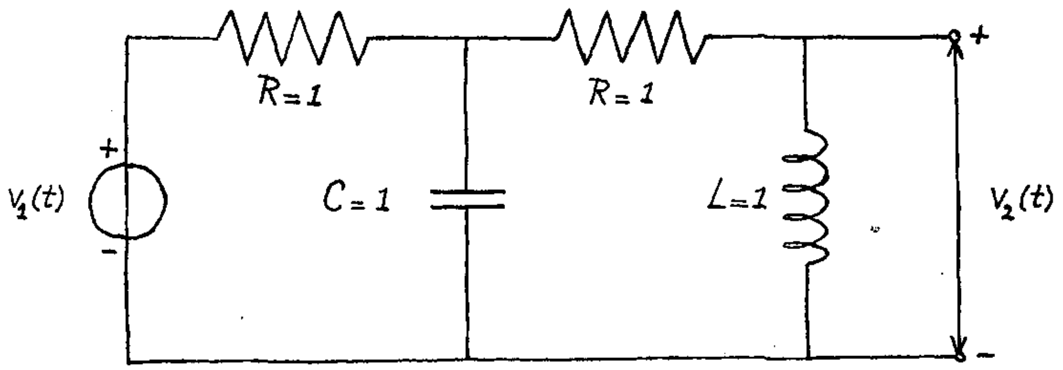
$$H(\omega) = \begin{cases} (1 - |\omega|)\exp(-j\omega t_0) & \text{voor } |\omega| < 1 , \\ 0 & \text{voor } |\omega| > 1 . \end{cases}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van het filter.
b) Bepaal $\lim_{t\to\infty} a(t)$, waarin $a(t)$ de stapresponsie van het filter is.
c) Bepaal $a(t)$ uitgedrukt in de sinus-integraal $Si(y)$ gedefinieerd door

$$Si(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} \, dx .$$

d) Bereken de stijgtijd $t_s$.

5. Het hieronder getekende RLC-netwerk verkeert voor $t < 0$ in de rusttoestand. Op het tijdstip $t = 0$ wordt de spanningsbron met bronsterkte $v_1(t)$ ingeschakeld. Als uitgangssignaal wordt beschouwd de spanning $v_2(t)$ over de spoel.




a) Bepaal de impulsresponsie van het netwerk.

b) Indien $v_1(t) = \sin t\, u(t)$, bereken de spanning $v_2(t)$ in de stationaire toestand ($t \to \infty$) van het netwerk.

N.B. R,L,C,t zijn uitgedrukt in hun resp. eenheden Ohm, Henry, Farad, seconde.

Tentamen, dinsdag 6 juni 1978

1. a) Bepaal de Fourier transform van de functie f(t) gegeven door

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t \le 0 , \\ t & \text{voor } 0 < t \le 2 , \\ 4 - t & \text{voor } 2 < t \le 3 , \\ 1 & \text{voor } t > 3 . \end{cases}$$

b) Bepaal de inverse Fourier transform van de functie

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2} .$$

2. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de stapresponsie a(t) gegeven door

$$a(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t \le 0 , \\ \sin(\pi t) & \text{voor } 0 < t \le 2 , \\ 1 & \text{voor } t > 2 . \end{cases}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van het systeem.

b) Bepaal de responsie van het systeem op het ingangssignaal

$$f(t) = \cos(\frac{\pi}{2}\, t) \ .$$

3. Van een filter wordt de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ gegeven door

$$H(\omega) = e^{-|\omega|}\ \frac{\sin \omega}{\omega} \ .$$

a) Bepaal de impulsresponsie van het filter.

b) Bepaal de responsie van het filter op het periodieke ingangssignaal $f(t)$ gegeven door

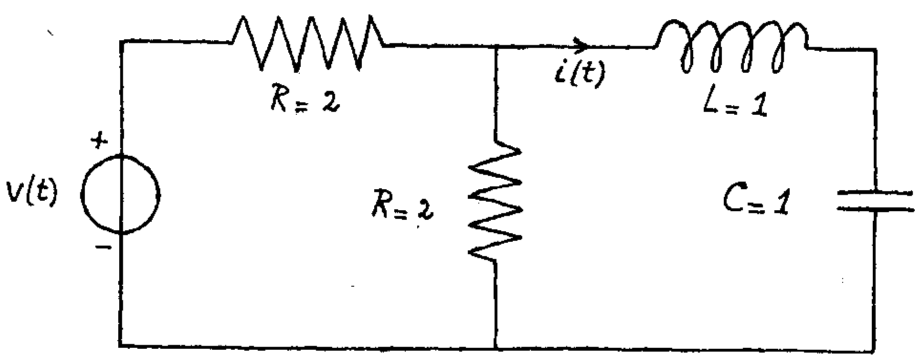
$$f(t) = e^{-t} \quad \text{voor } -1 \le t < 1 \ ,$$

$f(t)$ is periodiek met periode 2 .

4. Zij $f(t)$ een causaal signaal met frequentiespectrum $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$.
Bepaal $f(t)$ indien $R(\omega)$ gegeven wordt door

$$R(\omega) = q_2(\omega) \ .$$

5. Het hieronder getekende RLC-netwerk wordt gevoed door een spanningsbron met bronsterkte $v(t) = e^{-t}$, ingeschakeld op het tijdstip $t = 0$. Vóór het inschakelen van de spanningsbron is de stroom in de spoel gelijk aan 0 en de spanning over de condensator gelijk aan $v_0 = \frac{1}{4}$ .
R,L,C zijn uitgedrukt in hun resp. eenheden Ohm, Henry, Farad.




Bereken met behulp van Laplace transformatie de stroom $i(t)$ in de spoel voor $t > 0$.

Herkansing, vrijdag 16 juni 1978

1. a) Bepaal de Fourier transform van de functie

$$f(t) = t\sin(\pi t)p_2(t) \ .$$

b) Bepaal de inverse Fourier transform van de functie

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^3 + 4\omega^2 + 5\omega} \ .$$

2. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de responsie $g(t)$ op het ingangssignaal $f(t) = p_2(t)$ gegeven door

$$g(t) = e^{-t-1}u(t+1) - e^{-t+1}u(t-1) \ .$$

a) Bepaal de impulsresponsie van het systeem.

b) Bepaal de energie-inhoud van de responsie van het systeem op het ingangssignaal $\mathrm{sgn}(t)$.

3. Bepaal met behulp van Fourier transformatie naar de tijd t de oplossing $v(x,t)$ van het volgende randwaardeprobleem:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\frac{\partial v}{\partial t} + v, \quad x > 0, \quad -\infty < t < \infty \ ,$$

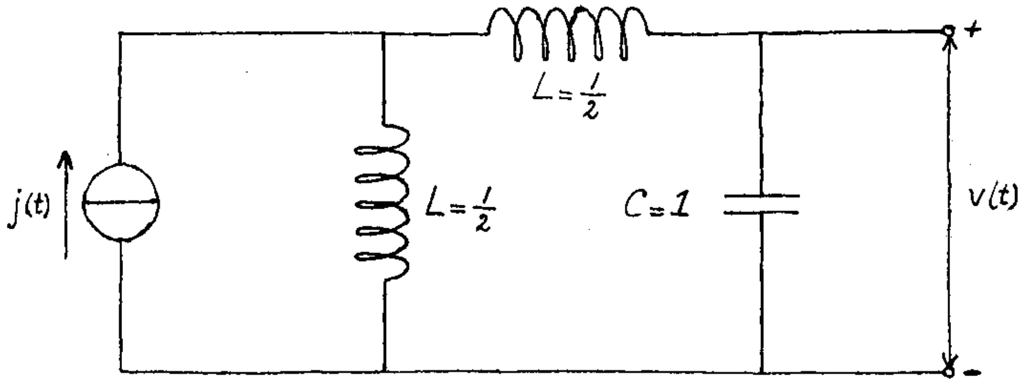
$$v(0,t) = te^{-t}u(t), \qquad -\infty < t < \infty \ ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = -e^{-t}u(t), \qquad -\infty < t < \infty \ .$$

4. Bepaal de Laplace transform van de functie $f(t)$ gegeven door

$$f(t) = e^{-t}\max(0, \sin\tfrac{t}{2}) \ .$$

5. Het hieronder getekende LC-netwerk verkeert voor $t < 0$ in de rusttoestand. Op het tijdstip $t = 0$ wordt de stroombron met bronsterkte $j(t) = \cos(\alpha t)$ ingeschakeld. L en C zijn uitgedrukt in hun resp. eenheden Henry and Farad.




Bereken met behulp van Laplace transformatie de spanning v(t) voor t > 0; onderscheid daarbij de twee gevallen $\alpha \neq 1$ en $\alpha = 1$.

Tentamen, donderdag 11 januari 1979.

1. a) Bepaal de Fourier transform van de functie f(t) gegeven door

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } |t| < 1 , \\ \cos(\frac{\pi t}{2}) & \text{voor } |t| \geq 1 . \end{cases}$$

b) Bepaal de inverse Fourier transform van de functie

$$F(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega^3 + \omega} .$$

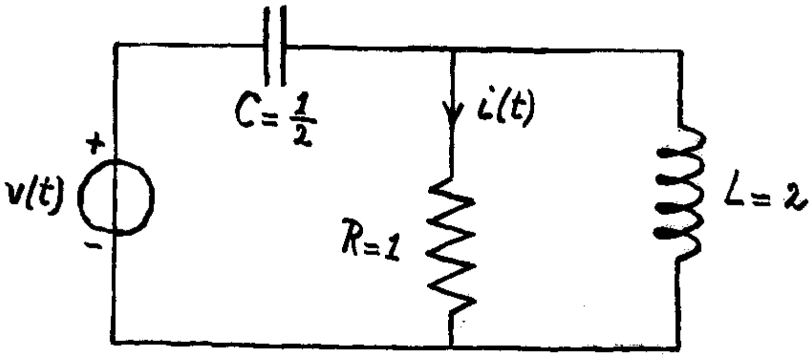
2. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de responsie g(t) op het ingangssignaal $f(t) = e^{-t}u(t)$ gegeven door

$$g(t) = (1 - e^{-t})u(t) .$$

a) Bepaal de impulsresponsie van het systeem.

b) Is het systeem causaal? Motiveer Uw antwoord.

3. Het hieronder getekende RLC-netwerk wordt opgevat als een lineair tijdinvariant systeem met als ingangssignaal de spanning v(t) van de spanningsbron en als uitgangssignaal de stroom i(t) door de weerstand. R, L en C zijn uitgedrukt in hun resp. eenheden Ohm, Henry en Farad.



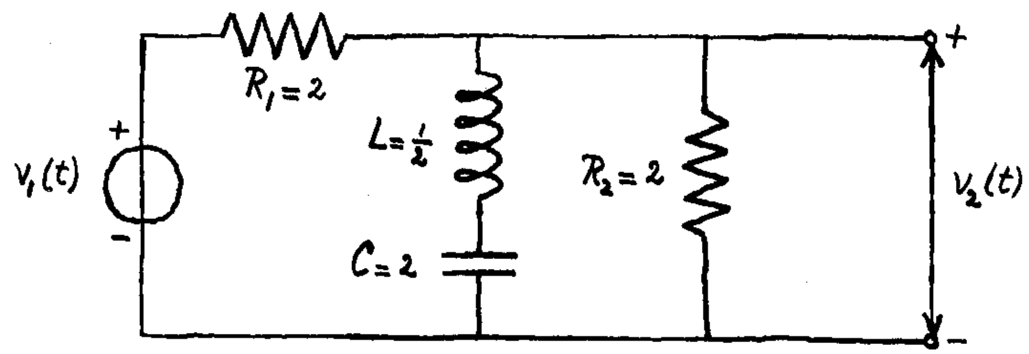

a) Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ van het systeem.

b) Bereken $\int_{-\infty}^{\infty} i^2(t)dt$, d.i. de hoeveelheid energie die opgenomen wordt door de weerstand, indien $v(t) = u(t)$.

4. Zij f(t) een causaal signaal met frequentiespectrum $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$. Bepaal $X(\omega)$ indien $R(\omega)$ gegeven wordt door

$$R(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega} .$$

5. Het hieronder getekende RLC-netwerk verkeert voor $t < 0$ in de rusttoestand. R, L en C zijn uitgedrukt in hun resp. eenheden Ohm, Henry en Farad.




Op het tijdstip $t = 0$ wordt de spanningsbron ingeschakeld; de bronsterkte $v_1(t)$ wordt gegeven door

$$\begin{cases} v_1(t) = \cos t + \sin t \quad \text{voor } 0 \le t < \pi , \\ v_1(t) \text{ is periodiek met periode } \pi . \end{cases}$$

Bereken met behulp van Laplace transformatie de spanning $v_2(t)$ over de weerstand $R_2$.
De overdrachtsfunctie van het netwerk wordt gegeven door

$$H(p) = \frac{p^2+1}{2(p+1)^2} \; ;$$

dit resultaat is als gegeven te beschouwen en hoeft niet te worden afgeleid.

Herkansing, vrijdag 26 januari 1979

1. a) Bepaal de Fourier transform van de functie f(t) gegeven door

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t \le 0 \,, \\ \sin(\pi t) & \text{voor } 0 < t < 1 \,, \\ 0 & \text{voor } t \ge 1 \,. \end{cases}$$

   b) Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 dt \,.$$

2. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de responsie g(t) op een willekeurig ingangssignaal f(t) gegeven door

$$g(t) = f(t-1) + 2\int_t^{t+1} f(\tau)\,d\tau + \int_0^{\infty} e^{-2\tau} f(t-\tau)\,d\tau \,.$$

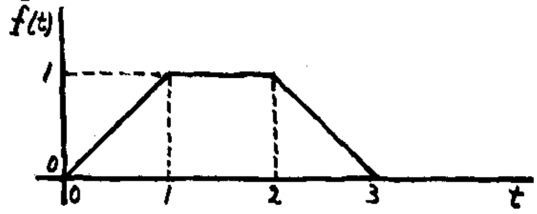
   a) Bepaal de overdrachtsfunctie van het systeem.
   b) Is het systeem causaal? Motiveer Uw antwoord.

3. Van een filter wordt de impulsresponsie h(t) gegeven door

$$h(t) = j\,\frac{\sin^2 t}{t}\,e^{jt} \,.$$

   a) Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ van het filter en schets de grafiek van $H(\omega)$.
   b) Bepaal de responsie van het filter op het periodieke ingangssignaal $f(t) = |\sin t|$.

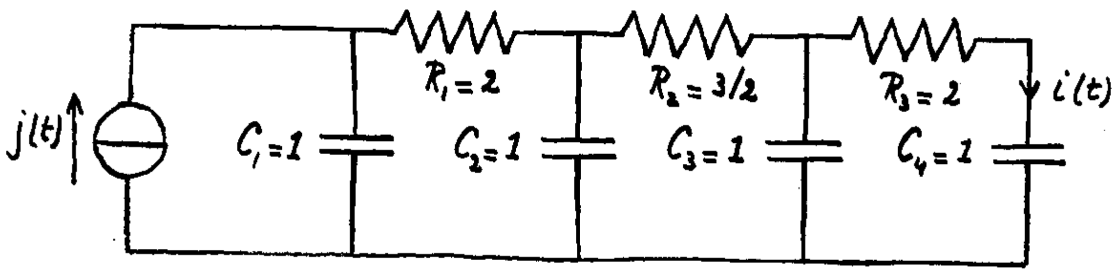
4. De functie f(t) wordt voor $0 \le t < 3$ gegeven door onderstaande grafiek en is verder periodiek met periode 3.




a) Bepaal de Laplace transform F(p) van f(t).

b) Bepaal $\lim_{p \downarrow 0} pF(p)$.

5. Het hieronder getekende RC-netwerk verkeert voor $t < 0$ in de rusttoestand. Op het tijdstip $t = 0$ wordt de stroombron met bronsterkte $j(t) = 1$ ingeschakeld. R en C zijn uitgedrukt in hun resp. eenheden Ohm en Farad.




Bereken met behulp van Laplace transformatie de stroom i(t) in de meest rechtse tak van het netwerk voor $t > 0$.

Tentamen, woensdag 6 juni 1979

1. Bepaal de inverse Fourier transform van de functie

$$F(\omega) = \frac{(1+5j)\omega^2 + (4+5j)\omega + 5}{\omega^3 + 2\omega^2 + 5\omega} .$$

2. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de responsie g(t) op het ingangssignaal

$$f(t) = p_2(t)\,\mathrm{sgn}(t) + \delta(t)$$

gegeven door

$$g(t) = q_1(t) - u(t) .$$

a) Bepaal de impulsresponsie van het systeem.

b) Is het systeem causaal? Motiveer Uw antwoord.

3. Van een filter wordt de impulsresponsie h(t) gegeven door

$$h(t) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\cos(2t)}{t} - \frac{\sin(2t)}{t^2}\right].$$

a) Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ van het filter.

b) Bepaal de responsie van het filter op het periodieke ingangssignaal f(t) gegeven door

$f(t) = t$ voor $0 \le t < 4$ ,

f(t) is periodiek met periode 4 .

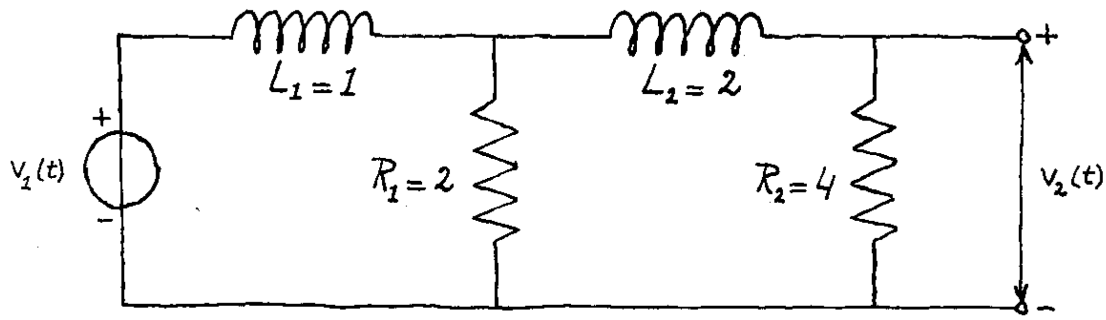
4. De functie f(t) wordt gegeven door

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{voor } t < 0 , \\ t & \text{voor } 0 \le t \le 1 , \\ 1 & \text{voor } 1 < t < 2 , \\ e^{-t} & \text{voor } t \ge 2 . \end{cases}$$

a) Bepaal de gegeneraliseerde afgeleide van f(t).

b) Bepaal de éénzijdige Laplace transform van f'(t) en van f(t).

5. Het hieronder getekende RL-netwerk verkeert voor $t < 0$ in de rusttoestand. R en L zijn uitgedrukt in hun resp. eenheden Ohm en Henry.




Op het tijdstip $t = 0$ wordt de spanningsbron ingeschakeld; de bronsterkte $v_1(t)$ wordt gegeven door

$$v_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } 0 \le t < 1 , \\ 0 & \text{voor } 1 \le t < 2 , \end{cases}$$

$v_1(t)$ is periodiek met periode 2 .

a) Bereken met behulp van Laplace transformatie de spanning $v_2(t)$ over de weerstand $R_2$.

b) Bereken hieruit de spanning $v_2(t)$ in de stationaire toestand ($t \to \infty$) van het netwerk.

Herkansing, zaterdag 16 juni 1979

1. a) Bepaal de complexe Fourierreeks van de functie f(t) gegeven door

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } -1 \le t < 1 , \\ 0 & \text{voor } \ 1 \le t < 3 , \end{cases}$$

f(t) is periodiek met periode 4 .

b) Bepaal de Fourier transform van de functie f(t) gegeven door

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(t - t_0) & \text{voor } |t| \le 1 , \\ 0 & \text{voor } |t| > 1 , \end{cases}$$

voor alle reële $t_0$.

2. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de stapresponsie a(t) gegeven door

$$a(t) = (1 + t)e^{-t}u(t) .$$

Bepaal de responsie van het systeem op het ingangssignaal

$$f(t) = te^{-t}u(t) .$$

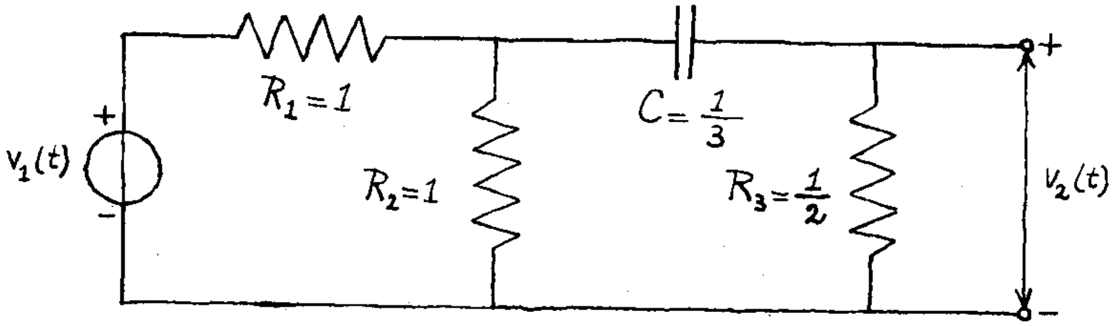
3. Zij f(t) een causaal signaal met frequentiespectrum $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$. Bepaal $R(\omega)$ indien $X(\omega)$ gegeven wordt door

$$X(\omega) = -\frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2} .$$

4. Bepaal de inverse Laplace transform van de functie

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1}\,\frac{1+e^{-p\pi}}{1-e^{-4p\pi}} .$$

5. Het hieronder getekende RC-netwerk wordt opgevat als een lineair tijdinvariant systeem met als ingangssignaal de spanning $v_1(t)$ van de spanningsbron en als uitgangssignaal de spanning $v_2(t)$ over de weerstand $R_3$. De spanningsbron wordt ingeschakeld op het tijdstip $t = 0$, terwijl het systeem voor $t < 0$ in de rusttoestand verkeert. R en C zijn uitgedrukt in hun resp. eenheden Ohm en Farad.




a) Bepaal met behulp van Laplace transformatie de overdrachtsfunctie $H(p)$ van het systeem en de impulsresponsie $h(t)$.

b) Indien $v_1(t) = \sin t \; u(t)$, bereken de spanning $v_2(t)$ in de stationaire toestand $(t \to \infty)$ van het systeem.

Tentamen, donderdag 10 januari 1980

1. Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega(1+\omega^2)} \, d\omega \, .$$

2. Bepaal de Laplace transform

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \, \frac{\sin t}{t} \, dt \, .$$

3. Een laagdoorlatend filter heeft de overdrachtsfunctie $H(\omega) = \omega^2 p_6(\omega)$. Bepaal de responsie van het filter op het periodieke ingangssignaal $f(t) = |\sin t|$.

4. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ gegeven door

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega}(1+e^{j\omega}) + A\delta(\omega) + B\,\frac{\sin\omega}{\omega}$$

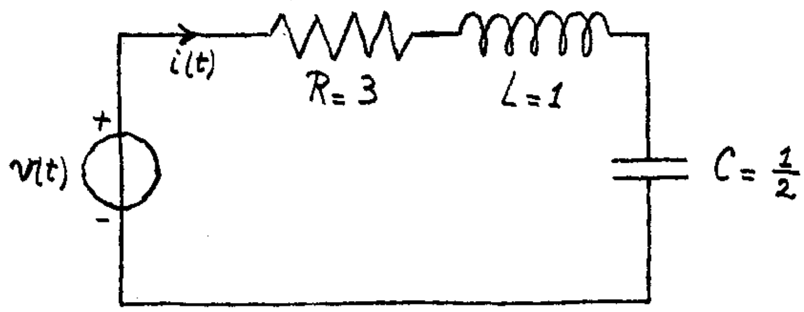
met constanten A en B.

a) Bepaal de responsie van het systeem op het ingangssignaal f(t) gegeven door

$$f(t) = p_2(t)\,\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 \text{ voor } 0 < t < 1 , \\ -1 \text{ voor } -1 < t < 0 , \\ 0 \text{ voor } |t| > 1 . \end{cases}$$

b) Bepaal A en B zò dat het systeem causaal is.

5. Onderstaande serie RLC-schakeling verkeert voor $t < 0$ in de rusttoestand. R, L en C zijn uitgedrukt in hun resp. eenheden Ohm, Henry en Farad.




Op het tijdstip $t = 0$ wordt de spanningsbron ingeschakeld; de bronsterkte v(t) wordt gegeven door

$$v(t) = t \text{ voor } 0 \le t < 1 ,$$

v(t) is periodiek met periode 1 .

Bereken met behulp van Laplace transformatie de stroom i(t) in de stationaire toestand ($t \to \infty$) van de schakeling.

Herkansing, vrijdag 25 januari 1980

1. De functie f(t) wordt gegeven door

$$f(t) = \frac{1 - \cos t}{t} .$$

a) Bepaal de Fourier transform van f(t).

b) Bepaal de autocorrelatie van f(t), gedefinieerd door

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(t+\tau)d\tau = f(-t) * f(t) .$$

2. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de stapresponsie a(t) gegeven door

$$a(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos t) & \text{voor } 0 < t < \pi , \\ 0 & \text{voor } t < 0 \text{ en voor } t > \pi . \end{cases}$$

a) Bepaal de impulsresponsie en de overdrachtsfunctie van het systeem.

b) Bepaal voor het ingangssignaal $f(t) = \cos t\, u(t)$, de responsie in de stationaire toestand ($t \to \infty$) van het systeem.

3. Van een causaal signaal f(t) met frequentiespectrum $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ is gegeven

$$R(\omega) = \omega \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{1 + \omega^2} \right) .$$

Bepaal f(t) en $X(\omega)$.

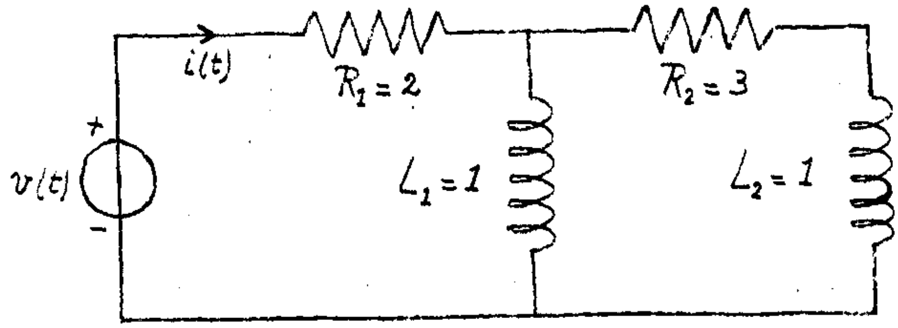
4. Van een netwerk, opgevat als lineair tijdinvariant systeem, wordt de overdrachtsfunctie H(p) gegeven door

$$H(p) = \frac{p}{p^2 + 1} .$$

a) Laat zien dat het systeem instabiel is.

b) Bepaal de responsie y(t) op het ingangssignaal $x(t) = \sin t\, u(t)$.

5. Het hieronder getekende RL-netwerk verkeert voor $t < 0$ in de stationaire toestand behorend bij de spanning $v(t) = E =$ constant. R en L zijn uitgedrukt in hun resp. eenheden Ohm en Henry.




Op het tijdstip $t = 0$ wordt de spanningsbron uitgeschakeld, d.w.z. $v(t) = 0$ voor $t > 0$.
Bepaal met behulp van Laplace transformatie de stroom $i(t)$ voor $t > 0$.

Tentamen, woensdag 11 juni 1980

1. a) Bepaal de Fourier transform van de functie

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\sin^2\tau}{\tau^2}\, d\tau \ .$$

b) Bepaal de inverse Fourier transform van de functie

$$F(\omega) = \frac{\omega - 1}{\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1} \ .$$

2. Van een filter wordt de impulsresponsie $h(t)$ gegeven door

$$h(t) = \frac{\sin t \cos(4t)}{t} \ .$$

a) Bepaal de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ van het filter en schets de grafiek van $H(\omega)$.

b) Bepaal de responsie van het filter op het periodieke ingangssignaal $f(t)$ gegeven door

$$f(t) = \pi^2 - 4t^2 \qquad \text{voor} \quad |t| \leq \pi/2 \ ,$$

$f(t)$ is periodiek met periode $\pi$ .

3. Zij f(t) een causaal signaal met frequentiespectrum $F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ .
   Bepaal $F(\omega)$ indien $R(\omega)$ gegeven wordt door

$$R(\omega) = \frac{2 - \omega^2}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4} .$$

4. Van een netwerk, opgevat als lineair tijdinvariant systeem, wordt de overdrachtsfunctie H(p) gegeven door

$$H(p) = \frac{1}{p + 1} .$$

   Op het tijdstip $t = 0$ wordt het ingangssignaal x(t) ingeschakeld, gegeven door

$$x(t) = \begin{cases} 1 \text{ voor } & 0 \le t < 1 , \\ 0 \text{ voor } & 1 \le t < 2 , \end{cases} .$$

$x(t)$ is periodiek met periode 2 .

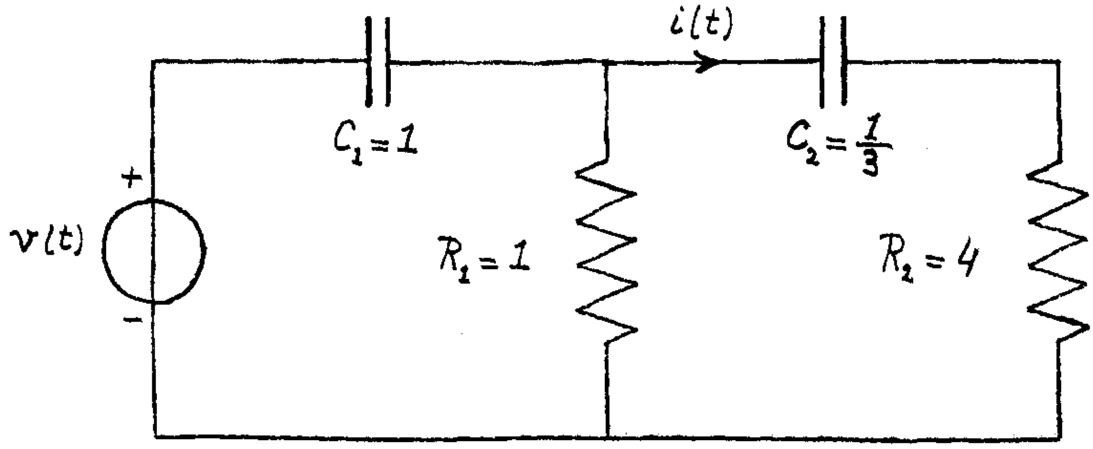
   Bereken met behulp van Laplace transformatie het uitgangssignaal y(t) in de stationaire toestand $(t \to \infty)$ van het netwerk. Schets de grafiek van deze stationaire responsie als functie van t.

5. Een tijd-discreet systeem met ingangssignaal x(k) en uitgangssignaal y(k) wordt beschreven door de differentievergelijking

$$y(k) - 2y(k-1) + \frac{5}{4}\,y(k-2) - \frac{1}{4}\,y(k-3) = x(k-1) \ , \quad k \ge 0 .$$

   Voor $k < 0$ zal het systeem in de rusttoestand verkeren.
   Bepaal met behulp van Z-transformatie de impulsresponsie h(k) van het systeem.

5.* Het hieronder getekende RC-netwerk wordt opgevat als een lineair tijd-invariant systeem met als ingangssignaal de spanning v(t) van de spanningsbron en als uitgangssignaal de stroom i(t) in de rechtse tak van het netwerk. De spanningsbron wordt ingeschakeld op het tijdstip t = 0, terwijl het netwerk voor t < 0 in de rusttoestand verkeert. R en C zijn uitgedrukt in hun resp. eenheden Ohm en Farad.




a) Bepaal met behulp van Laplace transformatie de overdrachtsfunctie H(p) van het systeem.

b) Bepaal de responsie i(t) op het ingangssignaal v(t) = u(t).

<u>Herkansing, zaterdag 21 juni 1980</u>

1. De functie f(t) wordt gegeven door

$$f(t) = \frac{\sin^2 t}{t} \quad .$$

a) Bepaal de Fourier transform van f(t).

b) Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\, dt \ .$$

2. Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de stapresponsie a(t) gegeven door

$$a(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \,, \\ 1 & \text{voor } 0 \le t < 1 \,, \\ e^{1-t} & \text{voor } t \ge 1 \,. \end{cases}$$

a) Bepaal de impulsresponsie van het systeem.

b) Bepaal de responsie van het systeem op het ingangssignaal f(t) gegeven door

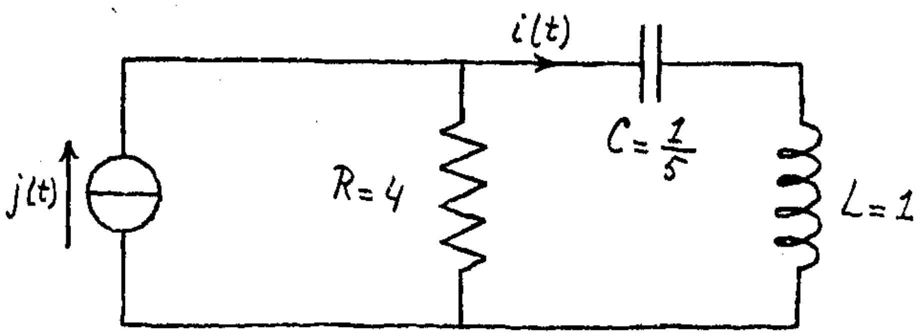
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0 \,, \\ t & \text{voor } 0 \le t < 1 \,, \\ 1 & \text{voor } t \ge 1 \,. \end{cases}$$

3. Bepaal de Laplace transform van de functie f(t) gegeven door

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{voor } 0 \le t < 1 \,, \\ 2 - t & \text{voor } 1 \le t < 2 \,, \\ 0 & \text{voor } 2 \le t < 3 \,, \end{cases}$$

f(t) is periodiek met periode 3 .

4. Het hieronder getekende RLC-netwerk wordt opgevat als een lineair tijdinvariant systeem met als ingangssignaal de bronsterkte j(t) van de stroombron en als uitgangssignaal de stroom i(t) door de condensator. De stroombron wordt ingeschakeld op het tijdstip t = 0, terwijl het netwerk voor t < 0 in de rusttoestand verkeert. R, L en C zijn uitgedrukt in hun resp. eenheden Ohm, Henry en Farad.




a) Bepaal met behulp van Laplace transformatie de overdrachtsfunctie H(p) van het systeem.

b) Indien j(t) = sin t u(t), bereken de stroom i(t) in de stationaire toestand ($t \to \infty$) van het systeem.

5. Van een causaal tijd-discreet systeem wordt de overdrachtsfunctie H(z) gegeven door

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1} .$$

a) Bepaal de impulsresponsie van het systeem.

b) Bepaal de stapresponsie van het systeem.

5.* Van een lineair tijdinvariant systeem wordt de overdrachtsfunctie $H(\omega)$ gegeven door

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1} .$$

Bepaal de responsie van het systeem op het ingangssignaal

$$f(t) = \cos t \; u(t) .$$

Antwoorden Examen/tentamen vraagstukken

Antwoorden tentamen, woensdag 15 juni 1977

1. a. $F(\omega) = \pi p_2(\omega)$ .

   b. $f(t) = (1 - \frac{1}{2}e^{-t})u(t) + \frac{1}{2}e^{t}u(-t)$ .

2. $e^{-t}u(t) - e^{-t+1}u(t-1)$ .

3. a. $h(t) = \frac{3}{2\pi t}\cos(\frac{3t}{2}) - \frac{1}{\pi t^2}\sin(\frac{3t}{2})$ .

   b. $-\frac{4}{3\pi}\sin t$ .

4. $F(p) = \frac{1}{p^2}\tanh(\frac{1}{2}p)$ .

5. a. $v(t) = \frac{J}{C}\frac{1}{\omega_1^2-\omega_0^2}[\omega_1\sin(\omega_1 t) - \omega_0\sin(\omega_0 t)]u(t)$ .

   b. $v(t) = \frac{J}{2C}[t\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)]u(t)$ .

Antwoorden herkansing, woensdag 22 juni 1977

1. a. $F(\omega) = \frac{\pi}{2}e^{-2|\omega|}$ .

   b. $\frac{\pi}{16}$ .

2. $\frac{2+\omega_0^2}{4+\omega_0^2}\cos(\omega_0 t) - \frac{\omega_0}{4+\omega_0^2}\sin(\omega_0 t)$ .

3. a. $H(\omega) = 1 - \frac{2}{1+j\omega} + \frac{2}{(1+j\omega)^2}$ .

   b. $v_2(t) = [1 + (-1+j)t]e^{-t}u(t)$ .

4. $X(\omega) = -\frac{1}{2}\frac{\omega}{4+\omega^2}$ .

5. $\frac{E}{4+\omega_0^2}[2\sin(\omega_0 t) - \omega_0\cos(\omega_0 t)]$ .

Antwoorden tentamen, donderdag 12 januari 1978

1. $f(t) = \frac{1}{16}\, j\, \mathrm{sgn}\, t - \frac{1+j}{16}\, e^{-(2+2j)t}u(t) - \frac{1-j}{16}\, e^{(2-2j)t}u(-t)$.

2. $\pi \dfrac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t^2}$ , $a \geq 1$,

$\frac{\pi}{2}(1-a)\dfrac{\sin at}{t} + \pi \dfrac{\sin^2 \frac{a}{2}t}{t^2}$ , $0 < a \leq 1$.

3. a) $h(0) = \frac{1}{4}$ ,

c) $\frac{1}{2} - \frac{9}{26}\cos\frac{2}{3}t - \frac{3}{13}\sin\frac{2}{3}t$.

4. $f(t) = te^{-t}u(t)$.

5. $i_{stat}(t) = \frac{1}{2}(e^{t-n} + e^{1-t+n})$, $n < t < n+1$, $n = 0,1,2,\ldots$ .

Antwoorden herkansing, vrijdag 27 januari 1978

1. $F(\omega) = \begin{cases} \dfrac{-2\pi j}{(n-1)!}(\omega - n + 1)\omega^{n-2}e^{-\omega}u(\omega), & n = 2,3,\ldots, \\ 2\pi j(-e^{-\omega}u(\omega) + \delta(\omega)), & n = 1 \ . \end{cases}$

2. $\frac{\pi}{2}$ .

3. a) $\frac{1}{2}(f(t+1) - f(t-1))$,

b) ja,

c) nee.

4. a) $h(t) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2 \frac{t-t_0}{2}}{(t-t_0)^2}$ ,

b) 1,

c) $a(t) = -\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2(\frac{t-t_0}{2})}{t-t_0} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Si}(t-t_0)$,

d) $t_s = 2\pi$.

5. a) $h(t) = (\cos t - \sin t)e^{-t}u(t)$,

   b) $v_{2,stat}(t) = \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t$.

<u>Antwoorden tentamen, dinsdag 6 juni 1978</u>

1. a) $F(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}(1 - 2e^{-2j\omega} + e^{-3j\omega}) + \pi\delta(\omega)$,

   b) $f(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|} - \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{-|t|\sqrt{2}}$.

2. a) $h(t) = \pi \cos \pi t(u(t) - u(t-2)) + \delta(t-2)$,

   b) $-\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{4}{3}\sin\frac{\pi}{2}t$.

3. a) $h(t) = \frac{1}{2\pi}(\arctan(t+1) - \arctan(t-1)) = \frac{1}{2\pi}\arctan\frac{2}{t^2}$,

   b) $\sinh(1)$.

4. $f(t) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2}u(t)$.

5. $i(t) = (-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)e^{-t/2})u(t)$.

<u>Antwoorden herkansing, vrijdag 16 juni 1978</u>

1. a) $F(\omega) = \frac{-2\pi}{\omega^2 - \pi^2}\cos\omega + \frac{4\pi\omega}{(\omega^2 - \pi^2)^2}\sin\omega$,

   b) $f(t) = \frac{j}{10}\,\mathrm{sgn}(t)[1 - e^{-|t|-2jt}] - \frac{1}{5}e^{-|t|-2jt}$.

2. a) $h(t) = \delta(t) - e^{-t}u(t)$,

   b) 2.

3. $v(x,t) = (t-x)e^{-t}u(t-x)$.

4. $F(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{((p+1)^2 + \frac{1}{4})(1 - e^{-2\pi(p+1)})}$.

5. $$v(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2(\alpha^2 - 1)}(\alpha \sin \alpha t - \sin t)u(t), & \alpha \neq 1, \\ \dfrac{1}{4}(t \cos t + \sin t)u(t), & \alpha = 1. \end{cases}$$

Antwoorden tentamen, donderdag 11 januari 1979

1. a) $F(\omega) = \pi[\delta(\omega - \frac{\pi}{2}) + \delta(\omega + \frac{\pi}{2})] - \dfrac{4\pi \cos \omega}{\pi^2 - 4\omega^2}$,

   b) $f(t) = \frac{1}{4}(1 - e^{-|t+1|})\mathrm{sgn}(t + 1) - \frac{1}{4}(1 - e^{-|t-1|})\mathrm{sgn}(t - 1)$ .

2. a) $h(t) = u(t)$,

   b) ja.

3. a) $H(\omega) = \dfrac{(j\omega)^2}{(1 + j\omega)^2}$,

   b) $\frac{1}{4}$ .

4. $X(\omega) = \dfrac{\cos \omega - 1}{\omega}$

5. $v_2(t) = -\frac{1}{2} e^{-t}u(t) + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-t+m\pi}u(t - m\pi)$.

Antwoorden herkansing, vrijdag 26 januari 1979

1. a) $F(\omega) = \dfrac{\pi}{\pi^2 - \omega^2}(1 + e^{-j\omega})$,

   b) $\dfrac{3\pi}{4}$ .

2. a) $H(\omega) = e^{-j\omega} + \dfrac{2}{j\omega}(e^{j\omega} - 1) + \dfrac{1}{2 + j\omega}$,

   b) nee.

3. a) $H(\omega) = \frac{1}{2}\pi[p_2(\omega - 2) - p_2(\omega)]$,

   b) $-1 - \frac{1}{3} e^{2jt}$ .

4. a) $F(p) = \dfrac{1}{p^2} \dfrac{1 - e^{-2p}}{1 + e^{-p} + e^{-2p}}$,

   b) $\dfrac{2}{3}$ .

5. $i(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\, e^{-t} - \frac{1}{20}\, e^{2t} - \frac{9}{20}\, e^{-t/3}, \quad t > 0.$

Antwoorden tentamen, woensdag 6 juni 1979

1. $f(t) = \frac{1}{2}j\ \mathrm{sgn}(t) + 3e^{(2-j)t}u(-t) - 2e^{-(2+j)t}u(t).$

2. a) $h(t) = -u(t)$ ,

   b) ja.

3. a) $H(\omega) = j\omega p_4(\omega)$ ,

   b) $-2\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ .

4. a) $f'(t) = \delta(t) + u(t) - u(t-1) - (1 - e^{-2})\delta(t-2) - e^{-t}u(t-2),$

   b) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = 1 + \frac{1 - e^{-p}}{p} - e^{-2p} + \frac{pe^{-2(p+1)}}{p+1}$ ,

   $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1 - e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-2(p+1)}}{p+1}$ .

5. a) $v_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m[1 - \frac{4}{3}\, e^{-t+m} + \frac{1}{3}\, e^{-4(t-m)}]u(t-m),$

   b) $$v_{2,stat}(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{4e}{3(e+1)}\, e^{-(t-2n)} + \dfrac{e^4}{3(e^4+1)}\, e^{-4(t-2n)}, & 2n < t < 2n+1, \\ \dfrac{4e^2}{3(e+1)}\, e^{-(t-2n)} - \dfrac{e^8}{3(e^4+1)}\, e^{-4(t-2n)}, & 2n+1 < t < 2n+2, \end{cases}$$

   $n = 0,1,2,\ldots$ .

Antwoorden herkansing, zaterdag 16 juni 1979

1. a) $\frac{1}{2} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)\pi} \exp[j(m+\frac{1}{2})\pi t],$

   b) $F(\omega) = \frac{2}{j\omega}\,(e^{-j\omega t_0} - \cos\omega), \quad |t_0| < 1,$

   $F(\omega) = -\frac{2\sin\omega}{\omega}\ \mathrm{sgn}(t_o), \quad |t_0| > 1.$

2. $(t - \frac{1}{6} t^3)e^{-t}u(t)$.

3. $R(\omega) = \dfrac{1 - \omega^2}{(1+\omega^2)^2}$ .

4. $f(t) = \begin{cases} \sin t \text{ voor } 0 \le t < \pi , \\ 0 \quad \text{voor } \pi \le t < 4\pi, \end{cases}$ $f(t)$ is periodiek met periode $4\pi$.

5. a) $H(p) = \dfrac{p}{4(p+3)}$ , $h(t) = \frac{1}{4}\delta(t) - \frac{3}{4} e^{-3t}u(t)$,

   b) $v_{2,stat}(t) = \frac{1}{40}$ (sin t + 3 cos t).

Antwoorden tentamen, donderdag 10 januari 1980

1. $\pi(1 - e^{-1})$.

2. $\frac{\pi}{2}$ - arctan p = arctan $(\frac{1}{p})$, $p > 0$.

3. $- \frac{16}{3\pi} \cos (2t)$.

4. a) $-q_1(t) - q_1(t + 1) - \frac{1}{2}Bq_1(t + 1) + \frac{1}{2}Bq_1(t - 1)$,

   b) $A = 2\pi$, $B = -2$.

5. $i_{stat}(t) = \frac{1}{2} + \dfrac{e^2}{e^2 - 1} e^{-2(t-n)} - \dfrac{e}{e - 1} e^{-(t-n)}$, $n < t < n+1$, $n = 0,1,2,\ldots$

Antwoorden herkansing, vrijdag 25 januari 1980

1. a) $F(\omega) = -j\pi p_2(\omega)\mathrm{sgn}(\omega)$,

   b) $\rho(t) = \dfrac{\pi \sin t}{t}$ .

2. a) $h(t) = -\frac{1}{2}$ sint t $[u(t) - u(t - \pi)] + \delta(t)$, $H(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \dfrac{1 + e^{-j\pi\omega}}{\omega^2 - 1}$ ,

   b) $\cos t - \frac{\pi}{4} \sin t$ .

3. $f(t) = (t - 1)e^{-t}u(t)$, $X(\omega) = \dfrac{\omega(\omega^2-1)}{(1+\omega^2)^2}$ .

4. b) $y(t) = \frac{1}{2}t \sin t\, u(t)$ .

5. $i(t) = \frac{E}{10}(2e^{-t} + 3e^{-6t})u(t)$ .

Antwoorden tentamen, woensdag 11 juni 1980

1. a) $F(\omega) = \frac{\pi q_2(\omega)}{j\omega} + \pi^2\delta(\omega)$ ,

   b) $f(t) = \frac{1}{2}j(e^{-|t|} - e^{-jt})\mathrm{sgn}(t)$.

2. a) $H(\omega) = \frac{1}{2}\pi[p_2(\omega - 4) + p_2(\omega + 4)]$,

   b) $-\frac{1}{2}\pi \cos(4t)$.

3. $F(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)}$ .

4. $y_{stat}(t) = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n] - \frac{(-1)^n e}{1 + e} e^{-(t-n)}$ , $n < t < n+1$, $n = 0,1,2,\ldots$ .

5. $h(k) = 4 - (2k + 4)(\frac{1}{2})^k$ , $k \geq 0$.

5*. a) $H(p) = \frac{p^2}{4p^2 + 8p + 3}$ ,

   b) $i(t) = \frac{1}{8}(3e^{-3t/2} - e^{-t/2})u(t)$ .

Antwoorden herkansing, zaterdag 21 juni 1980

1. a) $F(\omega) = \frac{\pi}{2j}[p_2(\omega - 1) - p_2(\omega + 1)]$,

   b) $\frac{\pi}{2}$ .

2. a) $h(t) = \delta(t) - e^{1-t}u(t - 1)$ ,

   b) $q_1(t - 1) + p_1(t - \frac{3}{2}) - e^{1-t}u(t - 1) + e^{2-t}u(t - 2)$.

3. $F(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p^2(1 + e^{-p} + e^{-2p})}$

4. a) $H(p) = \dfrac{4p}{p^2 + 4p + 5}$ ,

   b) $i_{stat}(t) = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t.$

5. a) $h(2n) = (-1)^n$, $h(2n + 1) = 0$, $n = 0,1,2,\ldots$

   b) $a(4n) = a(4n + 1) = 1$, $a(4n + 2) = a(4n + 3) = 0$, $n = 0,1,2,\ldots$

$5^*$ . $\frac{1}{2}\cos t\, u(t) - \frac{1}{4}e^{-|t|}\operatorname{sgn}(t)$ .

INTEGRAALTRANSFORMATIES

Tabel Fourier transformatie $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$ , $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$

| $f(t)$ | $\longleftrightarrow$ $F(\omega)$ |
|---|---|
| $p_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } \lvert t\rvert < \frac{1}{2}a \,, \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > \frac{1}{2}a \,, \end{cases} \quad a > 0$ | $\dfrac{2\sin(\frac{1}{2}a\omega)}{\omega}$ |
| $q_a(t) = \begin{cases} 1 - (\lvert t\rvert/a) & \text{voor } \lvert t\rvert \le a \,, \\ 0 & \text{voor } \lvert t\rvert > a \,, \end{cases} \quad a > 0$ | $\dfrac{4\sin^2(\frac{1}{2}a\omega)}{a\omega^2}$ |
| $e^{-a\lvert t\rvert}$ , Re $a > 0$ | $\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$ |
| $\frac{t^n}{n!}e^{-at}u(t)$ , Re $a > 0$ , $n = 0,1,2,\ldots$ | $\dfrac{1}{(a+j\omega)^{n+1}}$ |
| $\exp(-at^2)$ , $a > 0$ | $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp(-\frac{\omega^2}{4a})$ |
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $u(t)$ | $\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$ |
| $\mathrm{sgn}(t)$ | $\frac{2}{j\omega}$ |

Tabel Laplace transformatie $F(p) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$ (éénzijdige Laplace transform)

| $f(t)$ | $F(p)$ | conv.abscis |
|---|---|---|
| $e^{at}$ | $\frac{1}{p-a}$ | Re a |
| $\frac{t^n}{n!}e^{at}$, $n = 0,1,2,\ldots$ | $\frac{1}{(p-a)^{n+1}}$ | Re a |
| $\cos(bt)$ , $b \in \mathbb{R}$ | $\frac{p}{p^2+b^2}$ | 0 |
| $\sin(bt)$ , $b \in \mathbb{R}$ | $\frac{b}{p^2+b^2}$ | 0 |
| $\delta(t)$ | $1$ | $-\infty$ |

Tabel Z-transformatie $F_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$ (éénzijdige Z-transform)

| $f(n)$ | $F_I(z)$ | conv.gebied |
|---|---|---|
| $u(n)$ | $\frac{z}{z-1}$ | $\lvert z\rvert > 1$ |
| $\delta(n)$ | $1$ | alle z |
| $a^n$ | $\frac{z}{z-a}$ | $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$ |
| $\binom{n}{k}a^n$, $k = 0,1,2,\ldots$ | $\frac{a^k z}{(z-a)^{k+1}}$ | $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$ |