TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 41

bestemd voor

BDK-IV

Voorjaarssemester 1974

Technische Hogeschool Eindhoven

1980

Onderafdeling der Wiskunde

Wiskunde 41

bestemd voor BDK-IV

Dictaatnr. 2.272 Prijs *f* 3.--

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 41

bestemd voor BDK-IV

Voorjaarssemester 1974

INHOUD

blz.

HOOFDSTUK I. LINEAIRE ALGEBRA 1

§ 1. Lineaire afbeeldingen en matrices 1
§ 2. Basisovergang 8
§ 3. Eigenwaarden en eigenvectoren 12
§ 4. Vectorruimten met inprodukt. Orthonormale bases 18
§ 5. Symmetrische matrices en lineaire afbeeldingen 25

HOOFDSTUK II. FUNCTIES VAN MEER VERANDERLIJKEN 34

§ 1. Continuïteit. Differentieerbaarheid 34
§ 2. Extrema 42
§ 3. Extrema met nevenvoorwaarden 46

HOOFDSTUK III. GRAFENTHEORIE 52

§ 1. Inleiding 52
§ 2. Bomen 55
§ 3. Gerichte grafen 57
§ 4. Transportnetwerken 58

HOOFDSTUK I. LINEAIRE ALGEBRA

§ 1. Lineaire afbeeldingen en matrices

In de colleges Wiskunde 10 en Wiskunde 20 zijn de begrippen *vectorruimte* en *lineaire afbeelding* besproken. We herhalen dat, als V en W vectorruimten zijn, de afbeelding

$$\mathcal{A}: V \to W$$

lineair heet, als voor alle $\underline{x} \in V$, $\underline{y} \in V$ en alle getallen α geldt:

$$\mathcal{A}(\underline{x} + \underline{y}) = \mathcal{A}\underline{x} + \mathcal{A}\underline{y} ,$$

$$\mathcal{A}(\alpha\underline{x}) = \alpha\mathcal{A}\underline{x} .$$

We noteren lineaire afbeeldingen met geschreven hoofdletters. Verder beperken we ons in het vervolg tot het geval dat $W = V$, d.w.z. we beschouwen alleen $\mathcal{A}: V \to V$.

Voor lineaire afbeeldingen $V \to V$ kunnen we nu ook een optelling en een vermenigvuldiging met een scalar invoeren:
Als $\mathcal{A}: V \to V$ en $\mathcal{B}: V \to V$, dan

$$\left.\begin{array}{l} (\mathcal{A} + \mathcal{B})\underline{x} := \mathcal{A}\underline{x} + \mathcal{B}\underline{x} \\ (\alpha\mathcal{A})\underline{x} := \alpha\mathcal{A}\underline{x} \end{array}\right\} \text{ voor alle } \underline{x} \in V .$$

(:= betekent "wordt gedefinieerd door".)

Stelling 1.1. De lineaire afbeeldingen $V \to V$ vormen een vectorruimte.

Bewijs. We moeten in de eerste plaats bewijzen, dat $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ en $\alpha\mathcal{A}$ lineaire afbeeldingen zijn. We doen dit slechts voor $\alpha\mathcal{A}$:

$$(\alpha\mathcal{A})(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha\mathcal{A}(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha(\mathcal{A}\underline{x} + \mathcal{A}\underline{y}) =$$

$$= \alpha\mathcal{A}\underline{x} + \alpha\mathcal{A}\underline{y} = (\alpha\mathcal{A})\underline{x} + (\alpha\mathcal{A})\underline{y} ,$$

$$(\alpha\mathcal{A})(\beta\underline{x}) = \alpha\mathcal{A}(\beta\underline{x}) = \alpha(\beta\mathcal{A}\underline{x}) = (\alpha\beta)\mathcal{A}\underline{x} = \beta(\alpha\mathcal{A}\underline{x}) = \beta(\alpha\mathcal{A})\underline{x} .$$

Vervolgens moet bewezen worden, dat de axioma's van een vectorruimte vervuld zijn. Dit voeren we niet uit.

Bijzondere lineaire afbeeldingen V → V zijn $\mathcal{J}$ (*identieke afbeelding*) en $\mathcal{O}$ (*nulafbeelding*), gedefinieerd door:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{J}\underline{x} &:= \underline{x} \\ \mathcal{O}\underline{x} &:= \underline{0} \end{aligned}\right\} \text{ voor alle } \underline{x} \in V \,.$$

Verder is er nog als operatie het na elkaar uitvoeren van twee lineaire afbeeldingen, ook wel *produkt* genoemd:

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\underline{x} := \mathcal{A}(\mathcal{B}\,\underline{x}) \qquad \text{voor alle } \underline{x} \in V \,.$$

Let wel dat $\mathcal{A}\mathcal{B}$ betekent: eerst $\mathcal{B}$, dan $\mathcal{A}$.

Stelling 1.2. Het produkt van twee lineaire afbeeldingen is een lineaire afbeelding. Verder geldt:

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) \,, \quad \mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C} \,,$$

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C} \,, \quad (\alpha\mathcal{A})\mathcal{B} = \mathcal{A}(\alpha\mathcal{B}) = \alpha(\mathcal{A}\mathcal{B}) \,.$$

Het bewijs van deze stelling slaan we over.

Uit de hierna volgende voorbeelden blijkt, dat $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ niet hoeft te gelden.

Voorbeeld 1.1. Laat V het platte vlak R_2 zijn, $\mathcal{A}$ de rotatie over $\frac{1}{2}\pi$, $\mathcal{B}$ de projectie op de x-as. Stel verder $\underline{e}_1 := (1,0)$, $\underline{e}_2 := (0,1)$, dan is $\mathcal{A}\mathcal{B}\underline{e}_1 = \mathcal{A}\underline{e}_1 = \underline{e}_2$, maar $\mathcal{B}\mathcal{A}\underline{e}_1 = \mathcal{B}\underline{e}_2 = \underline{0}$.

Voorbeeld 1.2. Laat V de ruimte R_3 zijn, $\mathcal{A}$ de rotatie over $\frac{1}{2}\pi$ om de x-as, $\mathcal{B}$ de rotatie over $\frac{1}{2}\pi$ om de y-as. Stelt men $\underline{e}_1 := (1,0,0)$, $\underline{e}_2 := (0,1,0)$, $\underline{e}_3 := (0,0,1)$, dan is $\mathcal{A}\mathcal{B}\underline{e}_1 = \mathcal{A}(-\underline{e}_3) = \underline{e}_2$, maar $\mathcal{B}\mathcal{A}\underline{e}_1 = \mathcal{B}\underline{e}_1 = -\underline{e}_3$. Verder geldt $\mathcal{A}^4 = \mathcal{B}^4 = \mathcal{J}$, $\mathcal{A}^2\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^2\mathcal{A}^2$.

Het *beeld* van een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: V → V bestaat uit die vectoren $\underline{y} \in V$, waarvoor een $\underline{x} \in V$ bestaat, zodat $\mathcal{A}\underline{x} = \underline{y}$. Het beeld van $\mathcal{A}$ hoeft niet de hele V te zijn, zoals blijkt uit voorbeeld 1.1, waar $\mathcal{B}$ als beeld de x-as heeft. Van de nulafbeelding $\mathcal{O}$ bestaat het beeld zelfs slechts uit de nulvector $\underline{0}$. Wel is voor iedere lineaire afbeelding het beeld een deelruimte van V; daarom noemt men het beeld ook wel de *beeldruimte*.

Als V een eindige dimensie heeft en het beeld van de lineaire afbeelding $\mathcal{A}: V \to V$ de hele ruimte V is, dan is er bij iedere $\underline{y} \in V$ één en slechts één $\underline{x} \in V$, waarvoor geldt $\mathcal{A}\underline{x} = \underline{y}$; we noemen deze $\underline{x} = \mathcal{A}^{-1}\underline{y}$. Hiermee hebben we een afbeelding $\mathcal{A}^{-1}: V \to V$ gedefinieerd, waarvoor geldt $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\underline{y} = \underline{y}$ voor alle $\underline{y} \in V$, d.w.z.

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{J} .$$

Deze $\mathcal{A}^{-1}$ is ook lineair en is genaamd de *inverse* van $\mathcal{A}$. De inverse van $\mathcal{A}^{-1}$ is weer $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{J} , \quad (\mathcal{A}^{-1})^{-1} = \mathcal{A} .$$

Als $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ beide een inverse hebben, geldt $(\mathcal{A}\mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}$.

Als de vectorruimte V eindige dimensie n heeft, dan bezit V een basis $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$, dat is een stelsel van n onafhankelijke vectoren, waarvan iedere vector van V lineaire combinatie is.
Als $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ een basis van V is, $\underline{x} \in V$ en

$$\underline{x} = x_1\underline{e}_1 + \dots + x_n\underline{e}_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\underline{e}_j ,$$

dan schrijven we de $x_1,\dots,x_n$ onder elkaar als een $n \times 1$ matrix X, genaamd de *kolom* van $\underline{x}$ t.o.v. de basis $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

<u>Stelling 1.3</u>. Als $\underline{z} = \alpha\underline{x} + \beta\underline{y}$ en als X, Y, Z de kolommen van $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ zijn t.o.v. een basis, dan is $Z = \alpha X + \beta Y$.

<u>Bewijs</u>. Als

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j\underline{e}_j , \quad \underline{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j\underline{e}_j ,$$

dan is

$$\underline{z} = \alpha\underline{x} + \beta\underline{y} = \sum_{j=1}^{n} (\alpha x_j + \beta y_j)\underline{e}_j ,$$

dus

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \alpha X + \beta Y .$$

Deze stelling is direkt uit te breiden tot een lineaire combinatie van meer dan twee vectoren.

De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: V → V heeft t.o.v. de basis $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ van V een n × n matrix A, die verkregen wordt door als kolommen achtereenvolgens te nemen de kolommen van de vectoren $\mathcal{A}\underline{e}_1,\ldots,\mathcal{A}\underline{e}_n$ t.o.v. de basis $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$.

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{A}\underline{e}_1 & \mathcal{A}\underline{e}_2 & \cdots & \mathcal{A}\underline{e}_n \end{matrix} \end{array} ,$$

d.w.z.

$$\mathcal{A}\underline{e}_1 = a_{11}\underline{e}_1 + a_{21}\underline{e}_2 + \ldots + a_{n1}\underline{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\underline{e}_i$$

$$\mathcal{A}\underline{e}_2 = a_{12}\underline{e}_1 + a_{22}\underline{e}_2 + \ldots + a_{n2}\underline{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\underline{e}_i$$

$$\mathcal{A}\underline{e}_n = a_{1n}\underline{e}_1 + a_{2n}\underline{e}_2 + \ldots + a_{nn}\underline{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{in}\underline{e}_i .$$

Algemeen:

$$\mathcal{A}\underline{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\underline{e}_i \quad \text{voor } j = 1,\dots,n \ .$$

Opmerking. In Wiskunde 20 werden een lineaire afbeelding en haar matrix met dezelfde letter aangeduid. Dit kon, omdat met een vaste basis werd gewerkt. Wij kunnen deze conventie niet handhaven, omdat we binnenkort het effect van een verandering van basis zullen bestuderen. Wij duiden een lineaire afbeelding met een schrijfletter en haar matrix met een corresponderende drukletter aan.

Stelling 1.4. Als $\underline{x}$ kolom X heeft en $\mathcal{A}$ matrix A, dan heeft $\mathcal{A}\underline{x}$ kolom AX, alles t.o.v. dezelfde basis. (Met AX is het matrixprodukt van A en X bedoeld.)

Bewijs. Als

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j\underline{e}_j \ , \quad \mathcal{A}\underline{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\underline{e}_i \ ,$$

dan is

$$\mathcal{A}\underline{x} = \mathcal{A}\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\underline{e}_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathcal{A}\underline{e}_j$$

en dit heeft op grond van stelling 1.3 als kolom:

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \text{-------------------------} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AX \ .$$

Voorbeeld 1.3. In R_3 zijn de vectoren tripels (x_1,x_2,x_3). De *natuurlijke basis* is

$$\underline{e}_1 = (1,0,0)$$
$$\underline{e}_2 = (0,1,0)$$
$$\underline{e}_3 = (0,0,1)\ ,$$

dan is $(x_1,x_2,x_3) = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3$ en de kolom van (x_1,x_2,x_3) t.o.v. de natuurlijke basis is $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Als nu $\mathcal{A}: R_3 \to R_3$ lineair is, dan betekent de matrix A to.v. de natuurlijke basis hier, dat

$$\mathcal{A}(1,0,0) = (a_{11},a_{21},a_{31})$$
$$\mathcal{A}(0,1,0) = (a_{12},a_{22},a_{32})$$
$$\mathcal{A}(0,0,1) = (a_{13},a_{23},a_{33})\ .$$

Als

$$\mathcal{A}\underline{x} = \underline{y}\ , \quad \left.\begin{matrix} \underline{x} = (x_1,x_2,x_3) \\ \underline{y} = (y_1,y_2,y_3) \end{matrix}\right\} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad Y = AX\ ,$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

dan

$$\left.\begin{matrix} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{matrix}\right\}.$$

Voorbeeld 1.4. $\mathcal{A}$ zij in R_2 de projectie op de x-as. Natuurlijke basis.

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{A}(1,0) = (1,0) \\ \mathcal{A}(0,1) = (0,0) \end{matrix}\right\} \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld 1.5. $\mathcal{A}$ zij in R_2 de spiegeling in de lijn y = x. Natuurlijke basis.

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{A}(1,0) = (0,1) \\ \mathcal{A}(0,1) = (1,0)\end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld 1.6. $\mathcal{A}$ zij in R_2 de draaiing over $\frac{1}{2}\pi$. Natuurlijke basis.

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{A}(1,0) = (0,1) \\ \mathcal{A}(0,1) = (-1,0)\end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Stelling 1.5. Als $\mathcal{A}$ matrix A en $\mathcal{B}$ matrix B heeft, dan hebben $\alpha\mathcal{A}$, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ en $\mathcal{A}\mathcal{B}$ matrices αA, $A + B$ en AB, alles t.o.v. dezelfde basis. Verder heeft

$$\mathcal{I} \text{ matrix } I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathcal{O} \text{ matrix } 0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{A}^{-1}$ heeft matrix A^{-1}, die voldoet aan $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.
Voor matrices gelden dezelfde rekenregels als in stelling 1.2 voor lineaire afbeeldingen vermeld.

Het bewijs van deze stelling slaan we over.

Voorbeeld 1.7.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{dan} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld 1.8.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{dan} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 2. Basisovergang

Laat $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ en $\underline{e}'_1,\dots,\underline{e}'_n$ twee bases zijn van dezelfde vectorruimte V. Iedere vector is lineaire combinatie van $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$, dus ook $\underline{e}'_1$:

$$\underline{e}'_1 = s_{11}\underline{e}_1 + s_{21}\underline{e}_2 + \dots + s_{n1}\underline{e}_n$$

en evenzo met $\underline{e}'_2,\dots,\underline{e}'_n$. Algemeen:

$$\underline{e}'_j = s_{1j}\underline{e}_1 + s_{2j}\underline{e}_2 + \dots + s_{nj}\underline{e}_n \ .$$

De met deze s_{ij} gevormde matrix S heet de *overgangsmatrix* van de basis $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ op de basis $\underline{e}'_1,\dots,\underline{e}'_n$. De j-de kolom van S is de kolom van $\underline{e}'_j$ t.o.v. $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$.
Binnenkort bewijzen we, dat voor de overgangsmatrix T van de basis $\underline{e}'_1,\dots,\underline{e}'_n$ op de basis $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ geldt $T = S^{-1}$.

Voorbeeld 2.1. In R_2 zij $\underline{e}_1,\underline{e}_2$ de natuurlijke basis en $\underline{e}'_1 = (4,3)$, $\underline{e}'_2 = (5,4)$. Dan is

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} , \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

en inderdaad is

$$(1,0) = 4(4,3) - 3(5,4) ,$$
$$(0,1) = - 5(4,3) + 4(5,4) .$$

Voorbeeld 2.2. In R_2 zij $\underline{e}_1,\underline{e}_2$ de natuurlijke basis; $\underline{e}'_1,\underline{e}'_2$ ontstaat uit $\underline{e}_1,\underline{e}_2$ door draaiing over een hoek φ. Dan is

$$\underline{e}'_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi) , \quad \underline{e}'_2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$$

en

$$S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} .$$

Voorbeeld 2.3. In R_2 zij $\underline{e}_1 = (2,1)$, $\underline{e}_2 = (-1,1)$, $\underline{e}'_1 = (1,5)$, $\underline{e}'_2 = (3,0)$. Gevraagd de overgangsmatrix S.

$$(1,5) = s_{11}(2,1) + s_{21}(-1,1)$$

$$\left.\begin{aligned} 2s_{11} - s_{21} &= 1 \\ s_{11} + s_{21} &= 5 \end{aligned}\right\} \quad s_{11} = 2,\ s_{21} = 3 .$$

$$(3,0) = s_{12}(2,1) + s_{22}(-1,1)$$

$$\left.\begin{aligned} 2s_{12} - s_{22} &= 3 \\ s_{12} + s_{22} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad s_{12} = 1,\ s_{22} = -1 .$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} .$$

<u>Stelling 2.1.</u> Laat S de overgangsmatrix zijn van de basis $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ op de basis $\underline{e}'_1,\ldots,\underline{e}'_n$. Voor de kolom X t.o.v. $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ en de kolom X' t.o.v. $\underline{e}'_1,\ldots,\underline{e}'_n$ van een vector $\underline{x}$ uit V geldt $X = SX'$ en $X' = S^{-1}X$.

<u>Bewijs.</u> Stel $\underline{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j\underline{e}'_j$. Pas hierop stelling 1.3 toe:

$$X = x'_1\begin{pmatrix} s_{11} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix} + \ldots + x'_n\begin{pmatrix} s_{1n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}x'_1 + \ldots + s_{1n}x'_n \\ \vdots \\ s_{n1}x'_1 + \ldots + s_{nn}x'_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = SX' .$$

Zij nu T overgangsmatrix van de basis $\underline{e}'_1,\ldots,\underline{e}'_n$ op de basis $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$, dan geldt, zoals hierboven bewezen, $X' = TX$, dus $X = SX' = STX$. Kies nu $\underline{x} = \underline{e}_j$, dan is

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\ ,$$

dus STX = j-de kolom van ST en X = j-de kolom van I. Omdat dit voor alle $j = 1,\dots,n$ geldt, is $ST = I$, dus $T = S^{-1}$ en $X' = S^{-1}X$.

We passen dit toe op de reedes eerder behandelde voorbeelden. In voorbeeld 2.1 geldt

$$\left.\begin{aligned} x &= 4x' + 5y' \\ y &= 3x' + 4y' \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x' &= 4x - 5y \\ y' &= -3x + 4y \end{aligned}\right\} ;$$

en in voorbeeld 2.2 geldt

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \\ y &= x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x' &= x \cos\varphi + y \sin\varphi \\ y' &= -x \sin\varphi + y \cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

want

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} .$$

We hebben nu ook bewezen:

Stelling 2.2. De overgangsmatrix S van de basis $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ op de basis $\underline{e}'_1,\dots,\underline{e}'_n$ is regulier. De overgangsmatrix van de basis $\underline{e}'_1,\dots,\underline{e}'_n$ op de basis $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ is S^{-1}.

We behandelen nu wat er gebeurt met de matrix van een lineaire afbeelding bij basisovergang.

Stelling 2.3. Laat S de overgangsmatrix zijn van de basis $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ op de basis $\underline{e}'_1,\dots,\underline{e}'_n$. Laat verder de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ de matrix A t.o.v. $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n$ en de matrix A' t.o.v. $\underline{e}'_1,\dots,\underline{e}'_n$ hebben, dan geldt $A' = S^{-1}AS$.

Bewijs. Beschouw de vector $\mathcal{A}\underline{x}$; deze heeft kolom AX t.o.v. $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ en kolom A'X' t.o.v. $\underline{e}'_1,\ldots,\underline{e}'_n$ op grond van stelling 1.4. Uit stelling 2.1 volgt dan $A'X' = S^{-1}AX = S^{-1}ASX'$. Door nu $\underline{x} = \underline{e}'_j$ voor $j = 1,\ldots,n$ te nemen volgt hieruit op analoge wijze als in het bewijs van stelling 2.1, dat $A' = S^{-1}AS$.

Er geldt nu ook $A = SA'S^{-1}$.

Voorbeeld 2.4. Neem $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}'_1$, $\underline{e}'_2$ als in voorbeeld 2.1, dan ook S en S^{-1} als in dat voorbeeld. Definieer $\mathcal{A}$ door

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{A}(1,0) = (0,-1)\\ \mathcal{A}(0,1) = (-1,1)\end{array}\right\} \text{ dan } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Volgens de formule is

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ter controle rekenen we $\mathcal{A}\underline{e}'_1$ eerst in ongeaccentueerde coördinaten uit:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

dat is dus $(-3,-1)$. Nu in geaccentueerde coördinaten:

$$\begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix};$$

inderdaad is $-7(4,3) + 5(5,4) = (-3,-1)$.

Voorbeeld 2.5. $\underline{e}_1 = (1,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1)$, $\underline{e}'_1 = (1,1)$, $\underline{e}'_2 = (1,-2)$. Verder is van $\mathcal{A}$ de matrix t.o.v. $\underline{e}'_1,\underline{e}'_2$: $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Gevraagd de matrix A t.o.v. $\underline{e}_1,\underline{e}_2$.

$$A = SA'S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 3. Eigenwaarden en eigenvectoren

Een vector $\underline{v}$ heet *eigenvector* van een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$, als $\underline{v} \neq \underline{0}$ en als er een getal λ bestaat, zodat $\mathcal{A}\underline{v} = \lambda\underline{v}$. Het door de vector $\underline{v}$ op deze wijze vastgelegde getal λ heet de *eigenwaarde* van $\mathcal{A}$ behorende bij de eigenvector $\underline{v}$.

Voorbeeld 3.1. $\mathcal{A}$ is projectie op x-as in R_2. Dan is $\mathcal{A}\underline{e}_1 = \underline{e}_1$, dus $\underline{e}_1$ is eigenvector bij eigenwaarde 1; $\mathcal{A}\underline{e}_2 = \underline{0} = 0\underline{e}_2$, dus $\underline{e}_2$ is eigenvector bij eigenwaarde 0.

Opmerking. Eigenwaarden mogen nul zijn, eigenvectoren niet!
Verder als $\underline{v}$ eigenvector van $\mathcal{A}$ is bij eigenwaarde λ, dan is voor alle getallen $\alpha \neq 0$ de vector $\alpha\underline{v}$ eigenvector van $\mathcal{A}$ bij eigenwaarde λ.

Voorbeeld 3.2. $\mathcal{A}$ is spiegeling in $y = x$ in R_2.
(1,1) is eigenvector bij eigenwaarde 1, omdat $\mathcal{A}(1,1) = (1,1)$;
(-1,1) is eigenvector bij eigenwaarde -1, omdat $\mathcal{A}(-1,1) = (1,-1) = -1(-1,1)$.

Stelling 3.1. Laat $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$ eigenvectoren zijn van de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ met bijbehorende eigenwaarden $\lambda_1,\dots,\lambda_m$. Als $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ twee aan twee verschillend zijn, dan zijn $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$ onafhankelijk.

Bewijs. We passen volledige inductie toe naar het aantal m. Als $m = 1$, dan is er maar één $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, die onafhankelijk is. Veronderstel nu de stelling juist voor een zekere m. Laat $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_{m+1}$ eigenvectoren zijn met eigenwaarden $\lambda_1,\dots,\lambda_{m+1}$ (twee aan twee verschillend). Dan zijn $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$ eigenvectoren bij eigenwaarden $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ (twee aan twee verschillend) en volgens inductieveronderstelling zijn $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$ onafhankelijk.
Veronderstel nu, dat $\underline{v}_{m+1}$ een lineaire combinatie is van $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_m$:

$$\underline{v}_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \underline{v}_j \ .$$

Nu is $\mathcal{A}\underline{v}_{m+1} = \lambda_{m+1}\underline{v}_{m+1}$. Invullen geeft:

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{A}\underline{v}_{m+1} &= \mathcal{A}\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \underline{v}_j = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathcal{A}\underline{v}_j = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lambda_j \underline{v}_j \\
\lambda_{m+1}\underline{v}_{m+1} &= \lambda_{m+1} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \underline{v}_j = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lambda_{m+1} \underline{v}_j \ .
\end{aligned}\right\}$$

Gelijkstellen geeft

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j(\lambda_j - \lambda_{m+1})\underline{v}_j = \underline{0} \ .$$

Omdat echter $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_m$ onafhankelijk zijn, volgt hieruit $\alpha_j(\lambda_j - \lambda_{m+1}) = 0$ voor $j = 1,\ldots,m$, maar $\lambda_j \neq \lambda_{m+1}$, dus $\alpha_j = 0$ voor $j = 1,\ldots,m$. Dus

$$\underline{v}_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \underline{v}_j = \underline{0} \ ,$$

in strijd met het gegeven dat $\underline{v}_{m+1}$ eigenvector is. De veronderstelling, dat $\underline{v}_{m+1}$ lineaire combinatie is van $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_m$ is dus onjuist gebleken. Dus $\underline{v}_{m+1}$ is geen lineaire combinatie van $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_m$ en $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_m$ zijn onafhankelijk en daaruit volgt, dat $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_{m+1}$ onafhankelijk zijn, waarmee de stelling bewezen is.

Stel $\mathcal{A}: V \to V$ en $\dim V = n$. Als het lukt om n verschillende eigenwaarden $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ van $\mathcal{A}$ te vinden, dan zijn bijbehorende eigenvectoren $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n$ onafhankelijk en kunnen dus als basis van V worden gekozen. Het zoeken van eigenwaarden gaat als volgt: Kies een basis $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ in V. Als nu $\mathcal{A}\underline{v} = \lambda\underline{v}$, V is de kolom van $\underline{v}$ en A is de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$, dan is

$$AV = \lambda V \quad \text{of} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda v_i \qquad (i = 1,\ldots,n) \ .$$

Voor iedere vaste keuze van λ is dat een stelsel van n homogene lineaire vergelijkingen in de onbekenden $v_1,\ldots,v_n$ met coëfficiëntenmatrix $A - \lambda I$. Dit stelsel vergelijkingen heeft dan en slechts dan een andere dan de nuloplossing a

$$\det(A - \lambda I) = 0 \ ,$$

hetgeen een n-de graadsvergelijking voor λ is, genaamd de *karakteristieke vergelijking* van $\mathcal{A}$. De reële wortels van deze vergelijking zijn eigenwaarden van $\mathcal{A}$.

Stelling 3.2. De karakteristieke vergelijking is onafhankelijk van de basiskeuze.

Bewijs. Ga over op een andere basis $\underline{e}_1',\ldots,\underline{e}_n'$ met overgangsmatrix S. De matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. $\underline{e}_1',\ldots,\underline{e}_n'$ is dan $A' = S^{-1}AS$ en de karakteristieke vergelijking, berekend met $\underline{e}_1',\ldots,\underline{e}_n'$:

$$\det(A' - \lambda I) = \det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) =$$

$$= \det S^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det S$$

en dit is $\det(A - \lambda I)$, omdat uit $S^{-1}S = I$ volgt

$$1 = \det I = \det(S^{-1}S) = \det S^{-1} \cdot \det S \ .$$

Voorbeeld 3.3. In voorbeeld 2.4 hebben we gezien dat

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A' = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

matrices zijn van eenzelfde lineaire afbeelding t.o.v. verschillende bases.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 \ ;$$

$$\det(A' - \lambda I) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & -11 \\ 5 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 \ .$$

Eigenwaarden zijn $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

We keren terug tot een basis $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n$ van eigenvectoren van $\mathcal{A}$, zo die bestaat. Dan is $\mathcal{A}\underline{v}_1 = \lambda_1\underline{v}_1, \ldots, \mathcal{A}\underline{v}_n = \lambda_n\underline{v}_n$ en t.o.v. deze basis $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n$ wordt de matrix van $\mathcal{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} ,$$

een *diagonaalmatrix* met eigenwaarden op de hoofddiagonaal. Dit levert de volgende stelling.

Stelling 3.3. Als de karakteristieke vergelijking van de lineaire afbeelding $\mathcal{A}: V \to V$ (dim $V = n$) n verschillende reële wortels heeft, dan is er een basis van eigenvectoren van $\mathcal{A}$ en is de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. deze basis een diagonaalmatrix met eigenwaarden op de hoofddiagonaal.

We vertalen dit nu in matrixtaal:

Stelling 3.4. Als B een $n \times n$ matrix is, zodat de karakteristieke vergelijking van B n verschillende reële wortels $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ heeft, dan bestaat er een reguliere matrix S, zodat

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Bewijs. Vat B op als matrix van een lineaire afbeelding $\mathcal{B}: R_n \to R_n$ t.o.v. de natuurlijke basis $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$. Dan zijn $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ eigenwaarden van $\mathcal{B}$ en bijbehorende eigenvectoren $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n$ vormen een basis van R_n. Laat S de overgangsmatrix zijn van de basis $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ op de basis $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n$, dan geldt voor de matrix van $\mathcal{B}$ t.o.v. de basis $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n$:

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld 3.4. Laat $\mathcal{A}: R_2 \to R_2$ t.o.v. de natuurlijke basis gegeven zijn door haar matrix $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix}$. Karakteristieke vergelijking:

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 \\ -18 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 .$$

Eigenwaarden zijn $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$; we weten al dat t.o.v. een basis van bijbehorende eigenvectoren de matrix van $\mathcal{A}$ de gedaante $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ krijgt. Ter controle berekenen we de eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 2: \quad \left.\begin{array}{r} 6v_1 + 3v_2 = 0 \\ -18v_1 - 9v_2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (v_1,v_2) = \alpha(1,-2) \\ \text{dus bijv. } \underline{v}_1 = (1,-2) ; \end{array}$$

$$\lambda_2 = -1: \quad \left.\begin{array}{r} 9v_1 + 3v_2 = 0 \\ -18v_1 - 6v_2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (v_1,v_2) = \alpha(1,-3) \\ \text{dus bijv. } \underline{v}_2 = (1,-3) . \end{array}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Voorbeeld 3.5.</u> $\mathcal{A}: R_3 \to R_3$ is de spiegeling in het vlak $x + y + 2z = 0$.
Het is hier niet verstandig een matrix van $\mathcal{A}$ uit te rekenen, omdat de eigenvectoren hier direkt meetkundig te vinden zijn.
Een vector loodrecht op het vlak is eigenvector bij eigenwaarde -1 en een vector $\neq \underline{0}$ in het vlak is eigenvector bij eigenwaarde 1.
We kunnen dus de volgende basis kiezen:

$$\left.\begin{array}{lll} \underline{v}_1 = (1,1,2) & \text{bij } \lambda_1 = & -1 \\ \underline{v}_2 = (2,0,-1) & \text{bij } \lambda_2 = & 1 \\ \underline{v}_3 = (0,2,-1) & \text{bij } \lambda_3 = & 1 \end{array}\right\}.$$

T.o.v. deze basis heeft $\mathcal{A}$ de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We leiden hieruit nu de matrix A' van $\mathcal{A}$ t.o.v. de natuurlijke basis $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3$ af. Laat S de overgangsmatrix van $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3$ naar $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3$ zijn, dan is $A' = S^{-1}AS$ en

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} , \quad S = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} .$$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} ,$$

hetgeen de matrix van $\mathcal{A}$ is t.o.v. de natuurlijke basis. Dit resultaat kan gecontroleerd worden door rechtstreekse berekening van $\mathcal{A}\underline{e}_1$, $\mathcal{A}\underline{e}_2$, $\mathcal{A}\underline{e}_3$.

De methode van stelling 3.3 lukt alleen als de karakteristieke vergelijking twee aan twee verschillende reële wortels heeft. De methode kan falen, doordat de vergelijking complexe, niet-reële wortels heeft. Men zou dan complexe vectoren kunnen invoeren; daarop gaan we niet in. De methode kan echter ook falen, doordat de vergelijking meervoudige (reële of complexe) wortels heeft. Zelfs als alle wortels reëel zijn, kan het dan gebeuren, dat we eigenvectoren te kort komen.

Voorbeeld 3.6. $\mathcal{A}$ is draaiing over $\frac{1}{2}\pi$ in R_2. Meetkundig is het duidelijk, dat er geen eigenvectoren zijn.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 , \quad \text{wortels } i \text{ en } -i.$$

Voorbeeld 3.7. Neem $\mathcal{A}$ met matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 = 0 \; ; \quad \text{dubbele wortel } \lambda = 1.$$

We zoeken eigenvectoren bij $\lambda = 1$:

$$\left.\begin{matrix} v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix}\right\} (v_1,v_2) = \alpha(1,0) .$$

Er is maar één richting van eigenvectoren. Er is geen diagonaalmatrix van $\mathcal{A}$. Overigens leert voorbeeld 3.5, dat het ook mogelijk is, dat er bij optreden van meervoudige wortels van de karakteristieke vergelijking wel voldoende onafhankelijke eigenvectoren bestaan.

Er bestaan speciale klassen van lineaire afbeeldingen en matrices, die veel gebruikt worden en die alle diagonaliseerbaar zijn. Om deze in te voeren hebben we een *metriek* nodig, die we in de volgende paragraaf bespreken.

§ 4. Vectorruimten met inprodukt. Orthonormale bases

In R_n hebben we lengten van vectoren en hoeken tussen vectoren bepaald. Het hulpmiddel daartoe was het inprodukt: $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)$, $\underline{y} = (y_1,\dots,y_n)$ geeft

$$(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \sum_{j=1}^{n} x_jy_j \ .$$

In een vectorruimte V geven we een axiomatische karakterisering van het inprodukt.

Een vectorruimte V heeft een *inprodukt*, als aan ieder paar vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ uit V een reëel getal $(\underline{x},\underline{y})$ is toegevoegd, zodat voldaan is aan

(1) $(\underline{x},\underline{y}) = (\underline{y},\underline{x})$

(2) $(\underline{x},\underline{y} + \underline{z}) = (\underline{x},\underline{y}) + (\underline{x},\underline{z})$

(3) $(\underline{x},\alpha\underline{y}) = \alpha(\underline{x},\underline{y})$

(4) als $\underline{x} \neq \underline{0}$, dan $(\underline{x},\underline{x}) > 0$,

voor alle $\underline{x} \in V$, $\underline{y} \in V$, $\underline{z} \in V$ en alle reële getallen α.

Als $(\underline{x},\underline{y}) = 0$, heten $\underline{x}$ en $\underline{y}$ *orthogonaal*.

<u>Voorbeeld 4.1</u>. Het inprodukt $(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_jy_j$ in R_n voldoet aan bovenstaande axioma's.

<u>Voorbeeld 4.2</u>. De continue functies op $[0,1]$ vormen een vectorruimte, waarvoor het bij twee functies f en g behorende getal

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt \ ,$$

een inprodukt is. De functies f en g gedefinieerd door $f(t) := t$ en $g(t) := 3t - 2$ voor $0 \le t \le 1$ zijn orthogonaal, want

$$\int_0^1 t(3t-2)dt = 0 .$$

Het *orthogonale complement* W van een vector $\underline{v}$ in een vectorruimte V met inprodukt bestaat uit de vectoren van V, die orthogonaal zijn met $\underline{v}$:

$$W := \{\underline{x} \mid \underline{x} \in V, (\underline{v},\underline{x}) = 0\} .$$

Stelling 4.1. In een vectorruimte V met inprodukt is het orthogonale complement W van een vector $\underline{v} \neq \underline{0}$ een deelruimte van V. Als $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_k$ een basis van W is, dan is $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_k,\underline{v}$ een basis van V.

Bewijs. Als $\underline{w}_1 \in W$, $\underline{w}_2 \in W$, α_1 en α_2 reëel, dan is $(\underline{v},\underline{w}_1) = (\underline{v},\underline{w}_2) = 0$.

$$(\underline{v},\alpha_1\underline{w}_1 + \alpha_2\underline{w}_2) = \alpha_1(\underline{v},\underline{w}_1) + \alpha_2(\underline{v},\underline{w}_2) = 0 ,$$

dus $\alpha_1\underline{w}_1 + \alpha_2\underline{w}_2 \in W$, dus W is een deelruimte. Stel nu $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_k$ een basis van W; we bewijzen eerst, dat $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_k,\underline{v}$ onafhankelijk zijn. Stel

$$\alpha_1\underline{e}_1 + \dots + \alpha_k\underline{e}_k + \beta\underline{v} = \underline{0} ;$$

$$0 = (\underline{v},\underline{0}) = \alpha_1(\underline{v},\underline{e}_1) + \dots + \alpha_k(\underline{v},\underline{e}_k) + \beta(\underline{v},\underline{v}) = \beta(\underline{v},\underline{v}) ,$$

maar $(\underline{v},\underline{v}) > 0$ wegens $\underline{v} \neq \underline{0}$, dus $\beta = 0$, dus $\alpha_1\underline{e}_1 + \dots + \alpha_k\underline{e}_k = \underline{0}$. Omdat $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_k$ onafhankelijk zijn, volgt daaruit $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.
Neem nu een $\underline{x} \in V$ en probeer $\underline{x} = \underline{y} + \alpha\underline{v}$ met $\underline{y} \in W$ te schrijven. Dan geldt

$$(\underline{v},\underline{x}) = (\underline{v},\underline{y}) + \alpha(\underline{v},\underline{v}) = \alpha(\underline{v},\underline{v}) ,$$

dus $\alpha = (\underline{v},\underline{x})/(\underline{v},\underline{v})$. De schrijfwijze

$$\underline{x} = \underline{x} - \frac{(\underline{v},\underline{x})}{(\underline{v},\underline{v})}\underline{v} + \frac{(\underline{v},\underline{x})}{(\underline{v},\underline{v})}\underline{v}$$

voldoet nu inderdaad, want

$$(\underline{v},\underline{x} - \frac{(\underline{v},\underline{x})}{(\underline{v},\underline{v})}\underline{v}) = (\underline{v},\underline{x}) - \frac{(\underline{v},\underline{x})}{(\underline{v},\underline{v})}(\underline{v},\underline{v}) = 0 .$$

Iedere vector van W is echter als lineaire combinatie van $\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_k$ te schrijven, dus

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \underline{e}_j + \frac{(\underline{v},\underline{x})}{(\underline{v},\underline{v})} \underline{v} \ .$$

Dit voltooit het bewijs, dat $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_k,\underline{v}$ een basis is van V.

Uit de stelling volgt dat dim W = dim V - 1.

Stelling 4.2. Een vectorruimte van eindige dimensie met inprodukt heeft een basis bestaande uit twee aan twee orthogonale vectoren.

Bewijs. Volledige inductie naar dim V. Voor dim V = 1 is er niets te bewijzen. Veronderstel de stelling juist voor vectorruimten met dimensie n. Stel nu dim V = n + 1. Kies een vector $\underline{v} \neq \underline{0}$ in V; neem het orthogonale complement W van $\underline{v}$, dan geldt dim W = dim V - 1 = n. Volgens inductieveronderstelling heeft W een basis $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$, bestaande uit twee aan twee orthogonale vectoren. Volgens stelling 4.1 is $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n,\underline{v}$ een basis van V. Omdat $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ in het orthogonale complement van $\underline{v}$ liggen, zijn de vectoren van de gevonden basis van V ook twee aan twee orthogonaal.

Voorbeeld 4.3. Laat V de deelruimte van R_3 zijn, opgespannen door $\underline{e}_1 = (2,2,1)$ en $\underline{e}_2 = (1,-3,1)$. In V is door het gewone inprodukt van R_3 een inprodukt gedefinieerd. Kies als eerste vector $\underline{v}_1 = \underline{e}_1 = (2,2,1)$ en probeer $\underline{v}_2 = \underline{e}_2 + \alpha\underline{e}_1$ zo te bepalen dat $(\underline{v}_2,\underline{e}_1) = 0$.

$$0 = (\underline{v}_2,\underline{e}_1) = (\underline{e}_2,\underline{e}_1) + \alpha(\underline{e}_1,\underline{e}_1) \ ,$$

dus

$$\alpha = -\frac{(\underline{e}_1,\underline{e}_2)}{(\underline{e}_1,\underline{e}_1)} \ .$$

$$\underline{v}_2 = \underline{e}_2 - \frac{(\underline{e}_1,\underline{e}_2)}{(\underline{e}_1,\underline{e}_1)} \underline{e}_1 = (1,-3,1) - \frac{-3}{9}(2,2,1) = (\tfrac{5}{3}, -\tfrac{7}{3}, \tfrac{4}{3}) \ .$$

Nu is $\underline{v}_1,\underline{v}_2$ een basis van V en $(\underline{v}_1,\underline{v}_2) = 0$.

Noem $\sqrt{(\underline{v},\underline{v})}$ de *lengte* van $\underline{v}$. Als $\underline{v} \neq \underline{0}$, dan is er een getal α, zodat $\alpha\underline{v}$ lengte 1 heeft: $1 = (\alpha\underline{v},\alpha\underline{v}) = \alpha^2(\underline{v},\underline{v})$, dus $\alpha = \frac{1}{\sqrt{(\underline{v},\underline{v})}}$ voldoet.

Als men in een basis van een vectorruimte een vector met een getal $\neq 0$ vermenigvuldigt, ontstaat weer een basis van de vectorruimte. In een vectorruimte met inprodukt kan men zo aan elke vector van een basis lengte 1 geven; door deze vermenigvuldiging wordt eventuele orthogonaliteit der vectoren niet verstoord.

Een basis $g_1,\ldots,g_n$ van een vectorruimte met inprodukt heet *orthonormaal*, als alle g_j lengte 1 hebben en twee aan twee orthogonaal zijn (d.w.z. $(g_j,g_k) = 0$ als $j \neq k$ en $= 1$ als $j = k$).

De voorgaande opmerkingen en stelling 4.2 leveren de volgende stelling.

Stelling 4.3. Een vectorruimte van eindige dimensie met inprodukt bezit een orthonormale basis.

Stelling 4.4. Voor de kolommen X en Y van de vectoren

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j g_j \quad \text{en} \quad \underline{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j g_j$$

t.o.v. een orthonormale basis $g_1,\ldots,g_n$ geldt:

$$(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = X^TY .$$

Bewijs.

$$(\underline{x},\underline{y}) = (\sum_{j=1}^{n} x_j g_j, \sum_{k=1}^{n} y_k g_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j y_k (g_j,g_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = (x_1 \ \ldots \ x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^TY .$$

Opmerking. Omgekeerd geldt ook dat, als t.o.v. een basis voor alle vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ geldt $(\underline{x},\underline{y}) = X^TY$, de basis orthonormaal is. Zo is bij de gebruikelijke keuze van het inprodukt in R_n de natuurlijke basis orthonormaal. Meetkundig hebben we in R_2 en R_3 de natuurlijke basis ook altijd laten corresponderen met de keuze van een rechthoekig coördinatenstelsel.

Voorbeeld 4.4. Stel een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ en vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$. Als t.o.v. een orthonormale basis $\mathcal{A}$ matrix A, $\underline{x}$ kolom X en $\underline{y}$ kolom Y heeft, dan geldt:

$$(\mathcal{A}\underline{x},\underline{y}) = (AX)^TY = X^TA^TY \ ,$$

$$(\underline{x},\mathcal{A}\underline{y}) = X^T(AY) = X^TAY \ .$$

Stelling 4.5. De overgangsmatrix van een orthonormale basis op een orthonormale basis is een orthogonale matrix.

Bewijs. Laat S de matrix zijn, $g_1,\dots,g_n$ en $g_1',\dots,g_n'$ de bases. De kolommen van S zijn de kolommen van $g_1',\dots,g_n'$ t.o.v. de orthonormale basis $g_1,\dots,g_n$. Omdat echter ook $g_1',\dots,g_n'$ orthonormaal zijn, geldt voor de kolommen X en Y van S:

$$X^TY = \begin{cases} 0 & \text{voor verschillende kolommen} \\ 1 & \text{voor gelijke kolommen.} \end{cases}$$

Hieruit volgt $S^TS = I$, dus S is een orthogonale matrix.

Opmerking. Omgekeerd geldt ook dat, als de overgangsmatrix orthogonaal is en één van de bases is orthonormaal, de andere basis dan ook orthonormaal is.

Voor een orthogonale matrix S geldt det S = ± 1. In ons geval:

$$\det S = D(g_1',\dots,g_n') = \pm 1 \ .$$

Als det S = 1, heten de bases $g_1,\dots,g_n$ en $g_1',\dots,g_n'$ *gelijk georiënteerd*; als det S = −1 heten ze *tegengesteld georiënteerd*.

Voorbeeld 4.5. In R_3 nemen we

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= (1,0,0) \\ g_2 &= (0,1,0) \\ g_3 &= (0,0,1) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} g_1' &= (\tfrac{2}{3}\,,\tfrac{2}{3}\,,\tfrac{1}{3}) \\ g_2' &= (-\tfrac{1}{3}\,,\tfrac{2}{3}\,,-\tfrac{2}{3}) \\ g_3' &= (-\tfrac{2}{3}\,,\tfrac{1}{3}\,,\tfrac{2}{3})\ . \end{aligned}\right\}$$

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} , \quad S^{-1} = S^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

det $S = 1$.

Voorbeeld 4.6. Stel in R_3 orthonormale bases g_1, g_2, g_3 en g_1', g_2', g_3'. Als α_{ij} de hoek is tussen g_i en g_j' dan is $(g_j', g_i) = \cos \alpha_{ij}$. Verder volgt uit $g_j' = s_{1j}g_1 + s_{2j}g_2 + s_{3j}g_3$, dat $(g_j', g_i) = s_{ij}$. Dus

$$S = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} \\ \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{23} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{33} \end{pmatrix} .$$

Van een orthogonale matrix S zijn de kolommen orthonormaal, maar dan is ook $S^{-1} = S^T$ orthogonaal, dus ook de rijen van S zijn orthonormaal.

Stelling 4.6. Als $g_1, \ldots, g_n$ een orthonormale basis van V is, dan geldt voor iedere $\underline{x} \in V$:

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^{n} (\underline{x}, g_j) g_j \quad \text{en} \quad (\underline{x}, \underline{x}) = \sum_{j=1}^{n} (\underline{x}, g_j)^2 .$$

(Stelling van Pythagoras.)

Bewijs. Stel $\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i$, dan is

$$(\underline{x}, g_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i (g_i, g_j) = x_j .$$

Verder is

$$(\underline{x}, \underline{x}) = X^T X = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \sum_{j=1}^{n} (\underline{x}, g_j)^2 .$$

Laat V een vectorruimte met inprodukt zijn en W een deelruimte van dimensie m van V en $g_1, \ldots, g_m$ een orthonormale basis van W. We proberen een willekeurige $\underline{x} \in V$ te schrijven in de vorm $\underline{x} = \underline{y} + \underline{z}$ met $\underline{y} \in W$ en $\underline{z}$ orthogonaal op alle vectoren van W, d.w.z. $\underline{y} = y_1g_1 + \ldots + y_mg_m$ en $(\underline{z},g_j) = 0$ voor alle $j = 1,\ldots,m$. Dan is

$$0 = (\underline{z},g_j) = (\underline{x} - \underline{y},g_j) = (\underline{x},g_j) - (\underline{y},g_j) = (\underline{x},g_j) - y_j \; .$$

Probeer dus $\underline{y} = \sum_{i=1}^{m} (\underline{x},g_i)g_i$; die voldoet, want $\underline{y} \in W$ en $(\underline{y},g_j) = (\underline{x},g_j)$, dus $(\underline{x} - \underline{y},g_j) = 0$. We noemen $\underline{y}$ de *projectie* van $\underline{x}$ op W. Voor deze geldt $(\underline{y},\underline{y}) \le (\underline{x},\underline{x})$, want

$$(\underline{x},\underline{x}) = (\underline{y} + \underline{z},\underline{y} + \underline{z}) = (\underline{y},\underline{y}) + 2(\underline{y},\underline{z}) + (\underline{z},\underline{z}) =$$

$$= (\underline{y},\underline{y}) + (\underline{z},\underline{z}) \ge (\underline{y},\underline{y}) \; ;$$

het gelijkteken geldt dan en slechts dan als $\underline{x} \in W$. Dit levert de volgende stelling.

<u>Stelling 4.7</u>. Als in een vectorruimte V met inprodukt W een deelruimte met orthonormale basis $g_1,\ldots,g_m$ is, dan geldt voor de projectie $\underline{y}$ op W van een vector $\underline{x} \in V$:

$$\underline{y} = \sum_{j=1}^{m} (\underline{x},g_j)g_j \; ,$$

$$\sum_{j=1}^{m} (\underline{x},g_j)^2 \le (\underline{x},\underline{x}) \qquad \text{(ongelijkheid van Bessel).}$$

<u>Voorbeeld 4.7</u>. In R_3 zij W opgespannen door $\underline{e}_1 = (2,2,1)$, $\underline{e}_2 = (1,-3,1)$. Gevraagd de projectie $\underline{y}$ van $\underline{x} = (9,-5,-5)$ op W.

<u>Eerste methode</u>. Schrijf $\underline{x} = \underline{y} + \underline{z}$, $\underline{y} \in W$, $\underline{z}$ orthogonaal op W.

$$\underline{y} = \lambda\underline{e}_1 + \mu\underline{e}_2 = (2\lambda + \mu, 2\lambda - 3\mu, \lambda + \mu) \; .$$

$$\underline{x} - \underline{y} = (9 - 2\lambda - \mu, -5 - 2\lambda + 3\mu, -5 - \lambda - \mu)$$

moet orthogonaal zijn met $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$. Dit levert:

$$\left.\begin{aligned} -9\lambda + 3\mu &= -3 \\ 3\lambda - 11\mu &= -19 \end{aligned}\right\} \text{ met oplossing } \lambda = 1,\ \mu = 2 \; .$$

$$\underline{y} = (4,-4,3) \; .$$

<u>Tweede methode</u>. Zoek eerst een orthonormale basis in W. In voorbeeld 4.3 hebben we al orthogonale vectoren in W bepaald:

$$\underline{v}_1 = (2,2,1)$$

$$\underline{v}_2 = (\tfrac{5}{3}, -\tfrac{7}{3}, \tfrac{4}{3}) \ .$$

Ze hebben geen lengte 1. Dit verhelpen we:

$$\underline{g}_1 = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})$$

$$\underline{g}_2 = (\frac{5}{3\sqrt{10}}, -\frac{7}{3\sqrt{10}}, \frac{4}{3\sqrt{10}}) \ .$$

Nu is

$$(\underline{x},\underline{g}_1) = 1 \ , \quad (\underline{x},\underline{g}_2) = \frac{60}{3\sqrt{10}} = 2\sqrt{10} \ .$$

$$\underline{y} = (\underline{x},\underline{g}_1)\underline{g}_1 + (\underline{x},\underline{g}_2)\underline{g}_2 = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}) + 2\sqrt{10}(\frac{5}{3\sqrt{10}}, -\frac{7}{3\sqrt{10}}, \frac{4}{3\sqrt{10}}) = (4,-4,3) \ .$$

De tweede methode verdient de voorkeur, als van meer vectoren de projectie op dezelfde W moet worden bepaald.

§ 5. Symmetrische matrices en lineaire afbeeldingen

Een matrix M heet *symmetrisch* als $M^T = M$.
Als V een vectorruimte met inprodukt is, dan heet een lineaire afbeelding $\mathcal{A}: V \to V$ *symmetrisch* als

$$(\mathcal{A}\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},\mathcal{A}\underline{y})$$

voor alle $\underline{x} \in V$, $\underline{y} \in V$.

<u>Stelling 5.1</u>. Een symmetrische lineaire afbeelding heeft ten opzichte van iedere orthonormale basis van de vectorruimte, waarop zij werkt, een symmetrische matrix. Als er een orthonormale basis bestaat, ten opzichte waarvan een lineaire afbeelding een symmetrische matrix heeft, dan is de afbeelding symmetrisch.

Bewijs

1. Stel $\mathcal{A} : V \to V$ symmetrisch, $g_1,\dots,g_n$ een orthonormale basis van V en A de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. $g_1,\dots,g_n$. Dan is

$$(\mathcal{A}g_j,g_k) = (g_j,\mathcal{A}g_k) .$$

Maar

$$(g_j,\mathcal{A}g_k) = \begin{array}{c} (0\ \dots\ 0\ 1\ 0\ \dots\ 0) \\ \uparrow \\ j \end{array} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = a_{jk} ,$$

$$(\mathcal{A}g_j,g_k) = (a_{1j}\ \dots\ a_{nj}) \begin{array}{r} \\ \\ \\ k \to \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

dus $a_{jk} = a_{kj}$ voor alle j en k, dus $A^T = A$.

2. Stel $\mathcal{A} : V \to V$, $g_1,\dots,g_n$ een orthonormale basis van V, A de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. $g_1,\dots,g_n$ en $A^T = A$. Laat t.o.v. deze basis $\underline{x}$ kolom X en $\underline{y}$ kolom Y hebben. Dan heeft $\mathcal{A}\underline{x}$ kolom AX en $\mathcal{A}\underline{y}$ kolom AY en

$$(\mathcal{A}\underline{x},\underline{y}) = (AX)^TY = X^TA^TY$$

$$(\underline{x},\mathcal{A}\underline{y}) = X^TAY$$

en uit $A^T = A$ volgt $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},\mathcal{A}\underline{y})$, dus $\mathcal{A}$ is symmetrisch.

Opmerking. Uit de stelling volgt dat, als van een lineaire afbeelding de matrix t.o.v. één orthonormale basis symmetrisch is, dit t.o.v. iedere orthonormale basis het geval is. Dit is ook makkelijk rechtstreeks in te zien: Uit $A^T = A$ en S orthogonaal volgt $(S^{-1}AS)^T = (S^TAS)^T = S^TA^T(S^T)^T = S^TAS = S^{-1}AS$.

Voorbeeld 5.1.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$$(\underline{x},\mathcal{A}\underline{y}) = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} ay_1 + by_2 \\ by_1 + cy_2 \end{pmatrix} = x_1(ay_1 + by_2) + x_2(by_1 + cy_2) ,$$

$$(\mathcal{A}\underline{x},\underline{y}) = (ax_1 + bx_2 \quad bx_1 + cx_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (ax_1 + bx_2)y_1 + (bx_1 + cx_2)y_2 .$$

Beide zijn gelijk aan

$$ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2 = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = X^TAY = X^TA^TY .$$

Stelling 5.2. Alle wortels van de karakteristieke vergelijking van een (reële) symmetrische lineaire afbeelding zijn reëel.

Bewijs. Laat $\mathcal{A}$ t.o.v. een basis een (uiteraard reële) matrix A hebben en laat $\lambda = \alpha + i\beta$ (α en β reëel) een eventueel complexe wortel van de karakteristieke vergelijking $\det(A - \lambda I) = 0$ zijn, dan heeft het stelsel lineaire vergelijkingen $(A - \lambda I)V = 0$ een eventueel complexe, van de nuloplossing verschillende oplossing

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix} = X + iY \quad \text{met reële } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ en } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

waarvoor geldt

$$A(X + iY) = (\alpha + i\beta)(X + iY)$$

$$AX + iAY = (\alpha X - \beta Y) + i(\beta X + \alpha Y) .$$

Gelijkstelling van reële en imaginaire delen levert:

$$\left.\begin{aligned} AX &= \alpha X - \beta Y \\ AY &= \beta X + \alpha Y . \end{aligned}\right\}$$

Voor de vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ die de kolommen X resp. Y hebben, geldt dan

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}\underline{x} &= \alpha\underline{x} - \beta\underline{y} \\ \mathcal{A}\underline{y} &= \beta\underline{x} + \alpha\underline{y} \,. \end{aligned}\right\}$$

Pas hierop $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},\mathcal{A}\underline{y})$ toe:

$$(\mathcal{A}\underline{x},\underline{y}) = (\alpha\underline{x} - \beta\underline{y},\underline{y}) = \alpha(\underline{x},\underline{y}) - \beta(\underline{y},\underline{y})$$

$$(\underline{x},\mathcal{A}\underline{y}) = (\underline{x},\beta\underline{x} + \alpha\underline{y}) = \beta(\underline{x},\underline{x}) + \alpha(\underline{x},\underline{y}) \,.$$

Gelijkstellen levert $\beta\{(\underline{x},\underline{x}) + (\underline{y},\underline{y})\} = 0$. Maar $(\underline{x},\underline{x}) + (\underline{y},\underline{y}) > 0$, immers beide termen zijn ≥ 0; nul kan de som dus alleen zijn als $\underline{x} = \underline{y} = \underline{0}$, maar dan is $X = Y = 0$, dus $V = 0$, hetgeen niet zo is. Dus $\beta = 0$ en λ is reëel.

<u>Voorbeeld 5.2.</u>

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 \,.$$

Discriminant:

$$(a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0 \,.$$

<u>Stelling 5.3.</u> Als $\mathcal{A}: V \to V$ een symmetrische lineaire afbeelding is van een vectorruimte V met inprodukt van eindige dimensie, dan bezit V een orthonormale basis, bestaande uit eigenvectoren van $\mathcal{A}$.

<u>Bewijs.</u> We passen volledige inductie toe naar dim V. Het geval dim V = 1 is duidelijk. Stel dat de stelling juist is als dim V = n. Veronderstel dim V = n + 1. Kies in V een basis en bepaal de matrix A van $\mathcal{A}$ t.o.v. die basis en de karakteristieke vergelijking $\det(A - \lambda I) = 0$ van graad n + 1. Volgens de hoofdstelling van de algebra heeft deze minstens één complexe wortel λ, die echter op grond van stelling 5.2 reëel is. Daarbij behoort een eigenvector $\underline{v}$: $\mathcal{A}\underline{v} = \lambda\underline{v}$; we kunnen $\underline{v}$ zo kiezen, dat $(\underline{v},\underline{v}) = 1$. Uiteraard is $\underline{v} \neq \underline{0}$. Bepaal het orthogonale complement W van $\underline{v}$, dan is W een deelruimte van V en dim W = n (stelling 4.1). Verder geldt voor $\underline{x} \in W$, dat $\mathcal{A}\underline{x} \in W$, want

$$(\underline{v},\mathcal{A}\underline{x}) = (\mathcal{A}\underline{v},\underline{x}) = (\lambda\underline{v},\underline{x}) = \lambda(\underline{v},\underline{x}) = 0 \,, \quad \text{omdat } \underline{x} \in W \,.$$

Laat men $\mathcal{A}$ nu alleen op vectoren van W werken (restrictie van $\mathcal{A}$ tot W), dan levert dit een lineaire afbeelding $W \to W$, die uiteraard symmetrisch is. Omdat dim W = n, mogen we de inductieveronderstelling toepassen. Dus er is een orthonormale basis $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n$ van W bestaande uit eigenvectoren van $\mathcal{A}$. Dan is $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n,\underline{v}$ een orthonormale basis van V bestaande uit eigenvectoren van $\mathcal{A}$.

Uit de stelling volgt, dat bij een symmetrische lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ een basis van eigenvectoren bestaat, die bovendien zelfs nog orthonormaal kan worden gekozen. T.o.v. deze basis krijgt $\mathcal{A}$ als matrix een diagonaalmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

met de wortels van de karakteristieke vergelijking als diagonaalelementen. De karakteristieke vergelijking is namelijk onafhankelijk van de basiskeuze, dus

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda) \ .$$

In matrixtaal vertaald krijgen we:

Stelling 5.4. Bij iedere (reële) symmetrische $n \times n$ matrix B met wortels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ van de karakteristieke vergelijking bestaat een orthogonale matrix S, zodat

$$S^{-1}BS = S^TBS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Opmerking. Door zo nodig een kolom van S met -1 te vermenigvuldigen kunnen we zorgen dat $\det S = 1$.

Voorbeeld 5.3. Breng in diagonaalvorm met behulp van een orthogonale matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{vmatrix} 41-\lambda & -12 \\ -12 & 34-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 75\lambda + 1250 = (\lambda - 50)(\lambda - 25) = 0 ,$$

dus $\lambda_1 = 50$, $\lambda_2 = 25$. De gevraagde diagonaalvorm is

$$\begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} .$$

We zoeken echter ook nog een orthogonale S waarvoor

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} .$$

Daartoe bepalen we eigenvectoren:

$$\lambda_1 = 50: \left.\begin{array}{r} -\ \ 9v_1 - 12v_2 = 0 \\ -\ 12v_1 - 16v_2 = 0 \end{array}\right\} (v_1,v_2) = \alpha(4,-3) .$$

De hierop orthogonale vector (3,4) moet eigenvector zijn bij eigenwaarde 25.
Controle:

$$\lambda_2 = 25: \left.\begin{array}{r} 16v_1 - 12v_2 = 0 \\ -\ 12v_1 +\ \ 9v_2 = 0 \end{array}\right\} (v_1,v_2) = \alpha(3,4) .$$

Maak er eenheidsvectoren van:

$(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$, eigenwaarde 50,

$(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, eigenwaarde 25.

$$S = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} , \quad S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} .$$

Controle:

$$S^{-1}BS = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}41 & -12\\ -12 & 34\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}50 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}.$$

Voorbeeld 5.4. $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ is gegeven door

$$\mathcal{A}(1,0,0) = (-1,0,2)$$

$$\mathcal{A}(0,1,0) = (0,1,2)$$

$$\mathcal{A}(0,0,1) = (2,2,0) .$$

T.o.v. de natuurlijke basis is de matrix

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix},$$

dus $\mathcal{A}$ is symmetrisch. Karakteristieke vergelijking:

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & 2\\ 0 & 1-\lambda & 2\\ 2 & 2 & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda = -\lambda(\lambda-3)(\lambda+3) = 0 ,$$

dus $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$. Eigenvectoren:

$\lambda_1 = 0$: $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$ met oplossing $\alpha(2,-2,1)$, eenheidsvector $\underline{v}_1 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$;

$\lambda_2 = 3$: $\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ 0 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}$ met oplossing $\alpha(1,2,2)$, eenheidsvector $\underline{v}_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Inderdaad zijn $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ orthogonaal. De eigenvector bij $\lambda_3 = -3$ moet orthogonaal zijn op $\underline{v}_1$ en $\underline{v}_2$ en moet dus de richting hebben van $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 =$ $= (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \underline{v}_3$. Bij deze keuze is ook de determinant $= 1$.

Controle:

$$\lambda_3 = -3: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ met oplossing } \alpha(-2,-1,2)\ .$$

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = S^T, \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tot slot maken we enkele opmerkingen over *kwadratische vormen*, dat zijn homogene veeltermen van graad 2, dus bij twee veranderlijken van de vorm $ax^2 + bxy + cy^2$. Bij n veranderlijken zou men ze kunnen schrijven:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{i<j} b_{ij} x_i x_j \ .$$

Door a_i nu b_{ii} te noemen schrijven we het als één som $\sum_{i \le j} b_{ij} x_i x_j$. Het is echter makkelijker om afzonderlijke sommaties over i en j te hebben, dus iets van de gedaante $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Doet men dat, dan is er behalve een term $a_{12}x_1x_2$ ook een term $a_{21}x_2x_1$, dus $b_{12} = a_{12} + a_{21}$; algemeen $b_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$ voor $i < j$. Hoe men de waarde van b_{ij} over a_{ij} en a_{ji} verdeelt is willekeurig; een gelijke verdeling $a_{ij} = a_{ji}$ blijkt een praktische keuze te zijn. We vormen dus $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ met symmetrische matrix $A^T = A$.

Bij keuze van de kolom $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ is dit te schrijven als X^TAX.

Vatten we kolom X en matrix A op als kolom van een vector $\underline{x}$ en matrix van een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ t.o.v. een orthonormale basis van een vectorruimte met inprodukt, dan is

$$X^TAX = (\underline{x}, \mathcal{A}\underline{x}) = (\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x}) = X^TA^TX\ .$$

Daarom definiëren we een kwadratische vorm op een vectorruimte met inprodukt als $(\mathcal{A}\underline{x}, \underline{x})$ met een symmetrische lineaire afbeelding $\mathcal{A}$.

In de vectorruimte bestaat dan een orthonormale basis ten opzichte waarvan de matrix van $\mathcal{A}$ een diagonaalmatrix wordt:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Als X' de kolom van $\underline{x}$ t.o.v. die basis is, geldt

$$(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) = X'^T A' X' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 .$$

Verder is $X = SX'$ en $A' = S^{-1}AS = S^TAS$.

Stelling 5.5. Bij een kwadratische vorm X^TAX bestaat een orthogonale matrix S, zodat, als men $X = SX'$ stelt, $X^TAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2$, waarin $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ de wortels van de karakteristieke vergelijking van A zijn.

Voorbeeld 5.5. Kwadratische vorm $41x_1^2 - 24x_1x_2 + 34x_2^2$. Op grond van de resultaten van voorbeeld 5.3 vinden we: als

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{4}{5}x_1' + \tfrac{3}{5}x_2' \\ x_2 &= -\tfrac{3}{5}x_1' + \tfrac{4}{5}x_2' \end{aligned}\right\}$$

dan is

$$41x_1^2 - 24x_1x_2 + 34x_2^2 = 50x_1'^2 + 25x_2'^2 .$$

Meetkundige interpretatie: $41x_1^2 - 24x_1x_2 + 34x_2^2 = 1$ is een kromme, die door orthogonale transformatie van variabelen overgaat in $50x_1^2 + 25x_2^2 = 1$ en dus een ellips is.

HOOFDSTUK II. FUNCTIES VAN MEER VERANDERLIJKEN

§ 1. Continuïteit. Differentieerbaarheid

In een functie $f(x_1,\ldots,x_n)$ van n variabelen vatten we $(x_1,\ldots,x_n)$ op als een vector $\underline{x}$ in R_n: $f(\underline{x})$ is een afbeelding van R_n in R_1.
Evenzo kunnen we een stelsel van m functies van n variabelen tot één functie samenvoegen:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1,\ldots,x_n) = f_1(\underline{x}) \\ y_2 = f_2(x_1,\ldots,x_n) = f_2(\underline{x}) \\ \text{-----------------------} \\ y_m = f_m(x_1,\ldots,x_n) = f_m(\underline{x})\ . \end{array}\right\}$$

Vat nu $(y_1,\ldots,y_m)$ op als een vector $\underline{y}$ in R_m, dan is $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$ een *vectorfunctie* $\underline{f}$: $R_n \to R_m$. $f_1,\ldots,f_m$ heten de *componentfuncties* van $\underline{f}$.
Zoals vaak in de analyse hoeft zo'n functie niet in de hele R_n gedefinieerd te zijn.

Voorbeeld 1.1. $f(x) = \log x$ is alleen gedefinieerd voor $x > 0$, $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ is alleen gedefinieerd binnen en op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$.

Men spreekt wel van *geoorloofde waarden* en ook van de *definitieverzameling* V. Deze laatste is de deelverzameling van R_n, waarop de vectorfunctie gedefinieerd is:

$$\underline{f}: V \to R_m \quad \text{met } V \subset R_n\ .$$

Ter inleiding tot het begrip continuïteit voeren we het begrip omgeving in.

Als $\underline{a} \in R_n$ en $W \subset R_n$, dan heet W een *omgeving* van $\underline{a}$, als er een getal $\delta > 0$ bestaat, zodat voor alle $\underline{x} \in R_n$ met $|\underline{x} - \underline{a}| < \delta$ geldt, dat $\underline{x} \in W$. Deze laatste voorwaarde kan ook als volgt worden geschreven:

$$\{\underline{x} \mid \underline{x} \in R_n, |\underline{x} - \underline{a}| < \delta\} \subset W\ .$$

Merk op dat in het platte vlak (resp. de ruimte) de verzameling der $\underline{x}$ met $|\underline{x} - \underline{a}| < \delta$ het binnengebied is van de cirkel (resp. bol) met middelpunt $\underline{a}$ en straal δ.

Als $V \subset R_n$, $\underline{f}$: $V \to R_m$ en $W \subset R_n$, dan

$$\underline{f}(W) := \{\underline{f}(\underline{x}) \mid \underline{x} \in V \cap W\} \quad (\textit{beeld} \text{ van } W \text{ onder } \underline{f}).$$

De vectorfunctie $\underline{f}$: $V \to R_m$ ($V \subset R_n$) heet *continu* in $\underline{a}$, als $\underline{a} \in V$ en als er bij iedere omgeving W_m van $\underline{f}(\underline{a})$ een omgeving W_n van $\underline{a}$ bestaat, zodat $\underline{f}(W_n) \subset W_m$.

Als $U \subset R_n$ en $\underline{f}$: $V \to R_m$ ($V \subset R_n$) is continu in $\underline{a}$ voor iedere $\underline{a} \in U$, dan heet $\underline{f}$ *continu* in U (uiteraard geldt dan $U \subset V$).

Stelling 1.1. Voor $\underline{f}$: $V \to R_m$ ($V \subset R_n$) en $\underline{a} \in R_n$ geldt dat $\underline{f}$ dan en slechts dan continu in $\underline{a}$ is, als $\underline{a} \in V$ en als er bij ieder reëel getal $\varepsilon > 0$ een reëel getal $\delta > 0$ bestaat, zodat voor alle $\underline{x} \in V$, waarvoor $|\underline{x} - \underline{a}| < \delta$ geldt, ook $|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{a})| < \varepsilon$ geldt.

Opmerking. Voor een functie f: $V \to R_1$ ($V \subset R_n$) stemt het hier ingevoerde continuïteitsbegrip overeen met het in Wiskunde 10 ingevoerde continuïteitsbegrip.

Stelling 1.2. Een vectorfunctie $\underline{f}$ is continu in $\underline{a}$ dan en slechts dan, als al haar componentfuncties continu in $\underline{a}$ zijn.

De bewijzen van stelling 1.1 en stelling 1.2 slaan we over.

Voorbeeld 1.2.

$$\left.\begin{aligned} u &= x^2 + y^2 \\ v &= x \;\; + y \,. \end{aligned}\right\}$$

Stel $\underline{u} = (u,v)$, $\underline{x} = (x,y)$, dan krijgen we een functie $\underline{u} = \underline{f}(\underline{x})$: $R_2 \to R_2$, $V = R_2$. Het beeld $\underline{f}(R_2)$ is het binnengebied van de parabool $v^2 = 2u$. Dit vinden we, als we proberen bij gegeven (u,v) bijbehorende (x,y) te bepalen. Stel $y = v - x$; substitutie geeft $2x^2 - 2vx + v^2 - u = 0$, hetgeen oplossingen voor x heeft als $2u - v^2 \geq 0$.
Als $2u - v^2 > 0$, vinden we twee waarden voor x en voor y, die twee punten leveren die gespiegeld liggen t.o.v. de lijn $y = x$.
Als $2u - v^2 = 0$, dan $x = y = \frac{1}{2}v$.

Voorbeeld 1.3.

$$\left.\begin{array}{l} u = x + y \\ v = x - y \\ w = x^2 . \end{array}\right\}$$

Dit is een afbeelding: $R_2 \to R_3$ met als beeld $\{(u,v,w) \mid 4w = (u + v)^2\}$.

Een speciaal geval van een $\underline{f}$: $R_n \to R_m$ is een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_m$.

Stelling 1.3. Als $\mathcal{A}$: $R_n \to R_m$ een lineaire afbeelding is, dan bestaat er een constante $M > 0$ zodat

$$|\mathcal{A}\underline{x}| \leq M|\underline{x}| \qquad \text{voor alle } \underline{x} \in R_n.$$

Bewijs. Laat $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ de natuurlijke basis van R_n zijn en $\underline{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j\underline{e}_j$, dan is $|\underline{x}| \geq |x_j|$ en

$$|\mathcal{A}\underline{x}| = |\sum_{j=1}^{n} x_j\mathcal{A}\underline{e}_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j||\mathcal{A}\underline{e}_j| \leq |\underline{x}| \sum_{j=1}^{n} |\mathcal{A}\underline{e}_j| \leq M|\underline{x}| ,$$

als we bijvoorbeeld voor M kiezen:

$$M := 1 + \sum_{j=1}^{n} |\mathcal{A}\underline{e}_j| > 0 .$$

Stelling 1.4. Een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_m$ is continu in R_n.

Bewijs. Neem $\underline{a} \in R_n$, dan geldt voor alle $\underline{x} \in R_n$, dat

$$|\mathcal{A}\underline{x} - \mathcal{A}\underline{a}| = |\mathcal{A}(\underline{x} - \underline{a})| \leq M|\underline{x} - \underline{a}| ,$$

waarin de M gekozen is als in stelling 1.3. Als nu $\varepsilon > 0$ gegeven is, kiezen we $\delta = \varepsilon/M$, dan volgt uit $|\underline{x} - \underline{a}| < \delta$ dat

$$|\mathcal{A}\underline{x} - \mathcal{A}\underline{a}| \leq M|\underline{x} - \underline{a}| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon .$$

Voor de introductie van differentieerbaarheid herinneren we eraan, dat de differentieerbaarheid van een functie f: $R_1 \to R_1$ in a betekent, dat bij passende keuze van een constante A en een functie $\varepsilon(h)$ geldt:

$$f(a + h) = f(a) + Ah + h\varepsilon(h) \quad \text{en} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 .$$

De constante A is dan de afgeleide $f'(a)$. Verder is de betrekking ook goed voor $h = 0$, zodat we de voorwaarde $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ ook kunnen vervangen door: $\varepsilon(0) = 0$ en ε is continu in 0. Voor vectorfuncties vervangen we de vermenigvuldiging met de constante A door een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$.

De vectorfunctie $\underline{f}$: $V \to R_m$ $(V \subset R_n)$ is *differentieerbaar* in $\underline{a}$, als V een omgeving van $\underline{a}$ is en als er een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_m$ en een functie $\underline{e}(\underline{h})$ bestaan, zodat:

$$\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) = \underline{f}(\underline{a}) + \mathcal{A}\underline{h} + |\underline{h}|\underline{e}(\underline{h})$$

voor alle $\underline{h}$, waarvoor $\underline{a} + \underline{h} \in V$, $\underline{e}(\underline{0}) = \underline{0}$ en $\underline{e}(\underline{h})$ continu is in $\underline{0}$.

Opmerking. Door $\underline{f}$ en $\underline{a}$ zijn $\mathcal{A}$ en $\underline{e}$ vastgelegd; hierbij speelt de omstandigheid, dat V een omgeving van $\underline{a}$ is, een rol.

Stelling 1.5. Als $\underline{f}$ differentieerbaar is in $\underline{a}$, dan is $\underline{f}$ continu in $\underline{a}$.

Bewijs. $\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a}) = \mathcal{A}\underline{h} + |\underline{h}|\underline{e}(\underline{h})$, $\underline{e}(\underline{0}) = \underline{0}$ en $\underline{e}(\underline{h})$ continu in $\underline{0}$.
Er bestaat een $\delta_1 > 0$ zodat voor $|\underline{h}| < \delta_1$ geldt $|\underline{e}(\underline{h})| < 1$.
Er bestaat een $M > 0$, zodat $|\mathcal{A}\underline{h}| \le M|\underline{h}|$. Voor $|\underline{h}| < \delta_1$ geldt dan

$$|\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a})| = |\mathcal{A}\underline{h} + |\underline{h}|\underline{e}(\underline{h})| \le |\mathcal{A}\underline{h}| + |\underline{h}|\,|\underline{e}(\underline{h})| \le (M + 1)|\underline{h}| ,$$

en hieruit volgt de continuïteit op analoge wijze als in het bewijs van stelling 1.4.

De $\mathcal{A}$ uit de definitie van differentieerbaarheid heet de *functionaaloperator* van $\underline{f}$ in $\underline{a}$; de matrix A van $\mathcal{A}$ t.o.v. de natuurlijke basis heet de *functionaalmatrix* van $\underline{f}$ in $\underline{a}$.

Stelling 1.6. De vectorfunctie $\underline{f}$ is differentieerbaar in $\underline{a}$ dan en slechts dan, als al haar componentfuncties differentieerbaar in $\underline{a}$ zijn. Verder is de functionaalmatrix dan

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

waarbij alle partiële afgeleiden genomen zijn in $\underline{a}$.

Bewijs. We bewijzen alleen de bewering over de functionaalmatrix. Neem $\underline{h} = h\underline{e}_j$, dan is

$$\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a}) = h\mathcal{A}\underline{e}_j + |h|\underline{e}(\underline{h}) \; .$$

Neem de i-de component:

$$f_i(a_1,\ldots,a_j+h,\ldots,a_n) - f_i(a_1,\ldots,a_n) = ha_{ij} + |h|e_i(\underline{h}) \; ,$$

$$\frac{f_i(a_1,\ldots,a_j+h,\ldots,a_n) - f_i(a_1,\ldots,a_n)}{h} = a_{ij} \pm e_i(\underline{h}) \; .$$

Neemt men hiervan de limiet voor $h \to 0$, dan vindt men

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\underline{x}=\underline{a}} \; .$$

Als $m = n$ (evenveel functies als variabelen), is de matrix vierkant en kan men de determinant van de matrix vormen, genaamd de *functionaaldeterminant* (of Jacobiaan of determinant van Jacobi) van $\underline{f}$ in $\underline{a}$; notatie:

$$\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right)_{\underline{x}=\underline{a}} \; .$$

Als $\underline{f}$ differentieerbaar is in ieder punt van een verzameling W, dan heet $\underline{f}$ differentieerbaar in W; als $\underline{f}$ differentieerbaar is in zijn definitieverzameling, dan heet $\underline{f}$ differentieerbaar.

$\mathcal{J}$ en A hangen behalve van $\underline{f}$ ook van de keuze van $\underline{a}$ af; dit komt overeen met het feit dat $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ zelf weer een functie van $x_1,\ldots,x_n$ is.

Voorbeeld 1.4.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi\,. \end{aligned}\right\}$$

Transformatie op poolcoördinaten. $(x,y) = \underline{f}(r,\varphi)$, $\underline{f}$: $R_2 \to R_2$. Functionaalmatrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r\,.$$

Voorbeeld 1.5.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta\,. \end{aligned}\right\}$$

Transformatie op bolcoördinaten. $(x,y,z) = \underline{f}(r,\theta,\varphi)$. De volgorde der variabelen is belangrijk voor de volgorde der rijen en kolommen in de matrix en voor het teken van de determinant. Matrix:

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta\,.$$

Voorbeeld 1.6. Een kromme in R_3 kan gegeven worden met een parametervoorstelling $\underline{x} = \underline{x}(t)$, dat is een vectorfunctie $R_1 \to R_3$. De functionaalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

is een kolom, geschreven $\frac{d\underline{x}}{dt}$. Deze kolom is op te vatten als een vector, die de richting van de raaklijn van de kromme bepaalt.

Men schrijft, evenals bij functies van één veranderlijke, *differentialen*. Neem een vector $\underline{dx} \in R_n$. Als $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$, dan is $d\underline{y} := \mathcal{A}(d\underline{x})$. We schrijven daarom ook $\mathcal{A} = \dfrac{d\underline{y}}{d\underline{x}}$.

Om de kettingregel te behandelen voeren we het begrip samengestelde functie in. Laat gegeven zijn:

$$\left.\begin{array}{l} V \subset R_n,\ \underline{f}: V \to R_m \\ W \subset R_m,\ \underline{g}: W \to R_p \end{array}\right\}$$

Gemakshalve veronderstellen we $\underline{f}(V) \subset W$. Dan is de *samengestelde functie* $\underline{g}\circ\underline{f}: V \to R_p$ gedefinieerd door $(\underline{g}\circ\underline{f})(\underline{x}) := \underline{g}(\underline{f}(\underline{x}))$.

<u>Stelling 1.7.</u> Als $\underline{f}$ differentieerbaar is in $\underline{a}$ met functionaaloperator $\mathcal{A}$ en $\underline{g}$ is differentieerbaar in $\underline{b} = \underline{f}(\underline{a})$ met functionaaloperator $\mathcal{B}$, dan is $\underline{g}\circ\underline{f}$ differentieerbaar in $\underline{a}$ met functionaaloperator $\mathcal{B}\mathcal{A}$ (*kettingregel*).

Het bewijs slaan we over. Uiteraard worden niet alleen de functionaaloperatoren, maar ook de functionaalmatrices met elkaar vermenigvuldigd.

<u>Voorbeeld 1.7.</u> Stel

$$z = z(x,y) \quad \text{en} \quad \left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}\right\}$$

dan is

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u} \quad \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

hetgeen resulteert in de uit Wiskunde 10 bekende kettingregels:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}\ . \end{array}\right\}$$

Voorbeeld 1.8. Kromme $\underline{x} = \underline{x}(t)$. Ga over op de keuze van een andere parameter s door $t = t(s)$; $\underline{x} = \underline{x}(t(s))$. Dan geldt $\frac{d\underline{x}}{ds} = \frac{d\underline{x}}{dt}\frac{dt}{ds}$, d.w.z. $\frac{d\underline{x}}{ds}$ en $\frac{d\underline{x}}{dt}$ hebben dezelfde richting. Meetkundig betekent dit, dat de keuze van de parameter geen invloed heeft op de richting van de raaklijn.

Neemt men één functie van n veranderlijken $y = f(x_1,\ldots,x_n)$, dan is de functionaalmatrix een rij: $(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n})$, op te vatten als een vector, genaamd de *gradiënt* van f. Notatie: grad f of ∇f.

Stel nu f differentieerbaar in $\underline{a}$. Kies een rechte lijn door $\underline{a}$ met richtingsvector $\underline{v}$; kies $|\underline{v}| = 1$. Een parametervoorstelling van deze rechte is dan $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{v}$; hierin stelt $|t|$ de afstand van het punt op de lijn tot $\underline{a}$ voor: $|\underline{x} - \underline{a}| = |t|$. Vorm nu de samengestelde functie $g(t) = f(\underline{a} + t\underline{v})$; dit is de restrictie van f tot de rechte lijn met t als coördinaat op die rechte. De kettingregel levert nu:

$$\left(\frac{dg}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{\underline{x}=\underline{a}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = ((\text{grad } f)_{\underline{x}=\underline{a}}, \underline{v}) \; ,$$

hetgeen de *richtingsafgeleide* van f in de richting $\underline{v}$ in het punt $\underline{a}$ genoemd wordt.

Om hiervan een meetkundig beeld te krijgen nemen we $n = 3$. Dan is $f(x,y,z) =$ = constant een oppervlak: een *niveauvlak* van de functie. Het raakvlak aan zo'n niveauvlak in het punt $\underline{a} = (a,b,c)$ heeft als vergelijking:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\underline{x}=\underline{a}}(x - a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\underline{x}=\underline{a}}(y - b) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\underline{x}=\underline{a}}(z - c) = 0 \; .$$

Hieruit volgt, dat de vector $(\text{grad } f)_{\underline{x}=\underline{a}}$ loodrecht op het niveauvlak staat. De richtingsafgeleide is $(\text{grad } f,\underline{v}) = |\text{grad } f|\cos\varphi$, als φ de hoek is tussen $\underline{v}$ en grad f. De richtingsafgeleide is dus maximaal als $\varphi = 0$, d.w.z. in de richting van grad f; grad f is de richting van de sterkste toeneming van de functie f. Loodrecht op grad f is de richtingsafgeleide nul; de richting raakt dan aan het niveauvlak.

Niveauvlakken snijden elkaar uiteraard niet. Krommen loodrecht op alle niveauvlakken heten *orthogonale trajectoriën*; hun raaklijnen hebben richting grad f.

Als n = 2 vinden we niveaulijnen in plaats van niveauvlakken.

Voorbeeld 1.9. $f(x,y) = xy$. Niveaulijnen zijn orthogonale hyperbolen met x-as en y-as als asymptoten.

grad f = (y,x). Orthogonale trajectoriën:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x \end{aligned}\right\} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y},$$

met als oplossingen: $x^2 - y^2 = C$, dat zijn orthogonale hyperbolen met $y = x$ en $y = -x$ als asymptoten.

§ 2. Extrema

Een deelverzameling V van R_n heet *open* in R_n, als voor iedere $\underline{x} \in V$ geldt, dat V omgeving van $\underline{x}$ is.

Een deelverzameling V van R_n heet *gesloten* in R_n, als het complement van V t.o.v. R_n open is.

Een deelverzameling V van R_n heet *begrensd* in R_n, als er een constante $r > 0$ bestaat zodat $|\underline{x}| \le r$ voor alle $\underline{x} \in V$.

Als V een omgeving van $\underline{a}$ is, noemen we $\underline{a}$ een *inwendig punt* van V.

Een verzameling V is dan en slechts dan open, als alle punten van V inwendige punten van V zijn.

Voorbeeld 2.1. R_n is zowel open als gesloten in R_n.

In R_2 zijn de verzamelingen der punten die voldoen aan

$x^2 + y^2 < 1$: open, niet gesloten, begrensd,
$-1 < x < 1$: open, niet gesloten, niet begrensd,
$-1 \le x \le 1$: niet open, niet gesloten, niet begrensd,
$x^2 + y^2 \ge 1$: niet open, gesloten, niet begrensd,
$x \ge 1$: niet open, gesloten, niet begrensd,
$x + y > 0$: open, niet gesloten, niet begrensd,
$x^2 + y^2 = 1$: niet open, gesloten, begrensd,
$1 < x^2 + y^2 \le 2$: niet open, niet gesloten, begrensd.

Stelling 2.1. Zij $V \subset R_n$, $f: V \to R_1$ continu.
Als V gesloten is, dan is $\{\underline{x} \mid f(\underline{x}) = 0\}$ gesloten en
$\{\underline{x} \mid f(\underline{x}) \geq 0\}$ gesloten.
Als V open is, dan is $\{\underline{x} \mid f(\underline{x}) > 0\}$ open.

Opmerking. Alle beweringen gelden, als $V = R_n$.

Stelling 2.2. Als $V \subset R_n$, $f: V \to R_1$ continu, V gesloten en begrensd, dan heeft f een globaal maximum en een globaal minimum.

Van de stellingen 2.1 en 2.2 geven we geen bewijs. Stelling 2.2 doet een uitspraak over het bestaan van extrema. Schakelen we differentieerbaarheid in, dan kunnen we uitspraken doen over de plaatsen waar extrema worden aangenomen.

Stelling 2.3. Als f in $\underline{a}$ een lokaal extremum heeft, als $\underline{a}$ een inwendig punt is van de definitieverzameling van f en als f in $\underline{a}$ differentieerbaar is, dan is

$$(\text{grad } f)_{\underline{x}=\underline{a}} = \underline{0}\ .$$

Bewijs. Kies $\underline{v} = \underline{e}_j$, dan is $f(\underline{a} + t\underline{v}) = g(t)$ een functie van één variabele t met 0 als inwendig punt van de definitieverzameling, die in 0 een lokaal extremum heeft en differentieerbaar is met afgeleide $g'(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{\underline{x}=\underline{a}}$, die $= 0$ is volgens een bekende stelling over functies van één variabele. Omdat dit geldt voor iedere $j = 1,\dots,n$, geldt $(\text{grad } f)_{\underline{x}=\underline{a}} = \underline{0}$.

Opmerking. Vermelding van de voorwaarde dat $\underline{a}$ een inwendig punt van de definitieverzameling van f is in stelling 2.3 is strikt genomen overbodig, omdat deze voorwaarde opgesloten is in de voorwaarde dat f differentieerbaar is in $\underline{a}$. Zij is ten overvloede toegevoegd om er nadruk op te leggen.

Voorbeeld 2.2. $f(x,y) = x^2 + y^2$, grad $f = (2x,2y)$. Het enige punt, waar grad $f = \underline{0}$, is $(x,y) = (0,0)$; in dit punt heeft f een minimum.

Stelling 2.3 leert, dat van de inwendige punten van de definitieverzameling van f waar f differentieerbaar is, alleen de punten, waar graf $f = \underline{0}$, in aanmerking komen voor een lokaal extremum. Lokale extrema kunnen ook optreden in niet-inwendige punten van de definitieverzameling van f en in inwendige punten van de definitieverzameling, waar f niet differentieerbaar is. Dit laatste treedt op in voorbeeld 2.3.

Voorbeeld 2.3. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ heeft, evenals de functie van voorbeeld 2.2, een minimum in $(0,0)$, maar is daar niet differentieerbaar.

Een inwendig punt van de definitieverzameling van f, waar grad f = $\underline{0}$, hoeft anderzijds geen punt te zijn, waar f een extremum heeft.

Voorbeeld 2.4. $f(x,y) = xy$, grad f = (y,x). Het enige punt, waar grad f = $\underline{0}$, is $(0,0)$ en $f(0,0) = 0$. Echter is f positief in het eerste en derde kwadrant en negatief in het tweede en vierde kwadrant: $(0,0)$ levert geen extremum (het is een zg. *zadelpunt*).

Voorbeeld 2.5. f is gedefinieerd door $f(x,y) := 1 - (x^2 + y^2)$ in de verzameling $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. De definitieverzameling is begrensd en gesloten. Volgens stelling 2.2 moet er dus een maximum en een minimum zijn. Inwendige punten zijn de punten met $x^2 + y^2 < 1$. We zoeken eerst de mogelijke extrema in inwendige punten.
grad f = $(-2x,-2y)$, dus het punt $(0,0)$ komt in aanmerking.
Voor $x^2 + y^2 = 1$ is $f(x,y) = 0$ en voor $x^2 + y^2 \leq 1$ is $f(x,y) \geq 0$. In alle punten van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ is de functie minimaal en $= 0$; in $(0,0)$ moet de functie dus een maximum hebben (waarde 1).

Voorbeeld 2.6. $f(x,y) = (x - y)(x^2 + y^2 - 1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2xy + y^2 - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - x^2 + 2xy - 3y^2 + 1 \; .$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ levert de punten:

$$(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}), \text{ waarde } 0; \quad (-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}), \text{ waarde } 0;$$

$$(\tfrac{1}{6}\sqrt{6}, -\tfrac{1}{6}\sqrt{6}), \text{ waarde } -\tfrac{2}{9}\sqrt{6}; \quad (-\tfrac{1}{6}\sqrt{6}, \tfrac{1}{6}\sqrt{6}), \text{ waarde } \tfrac{2}{9}\sqrt{6}.$$

Om na te gaan of hier maxima of minima optreden tekenen we een hoogtekaart met de niveaulijnen $f = 0$, dat zijn de rechte $y = x$ en de cirkel $x^2 + y^2 = 1$. Uit de hoogtekaart leest men direkt af, dat $(\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(-\frac{1}{2}\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2})$ zadelpunten zijn. De verzameling $x \leq y$, $x^2 + y^2 \leq 1$ is gesloten en begrensd. De functie heeft in die verzameling dus een maximum en een minimum. In die verzameling is $f(x,y) \geq 0$ en op de rand ervan is $f(x,y) = 0$. In de punten van de rand heeft de functie dus een minimum, dat echter geen minimum blijft, als we de beperking tot die verzameling laten varen. Het maximum moet in een inwendig punt van de verzameling komen en dus in het punt $(-\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6})$, dat t.o.v. die verzameling een globaal maximum oplevert, maar als we de beperking tot die verzameling laten varen slechts een lokaal maximum. Met een analoge redenering ziet men, dat $(\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{6}\sqrt{6})$ een lokaal minimum oplevert.

<u>Voorbeeld 2.7</u>. $f(x,y) = x + y^2$ voor $x^2 + y^2 \leq 1$.
Inwendige punten: $x^2 + y^2 < 1$, grad $f = (1,2y)$, hetgeen nergens $\underline{0}$ is. Definitieverzameling is begrensd en gesloten. Er moet dus een maximum en een minimum zijn, dat in punten met $x^2 + y^2 = 1$ moet optreden. Voor die punten geldt $y^2 = 1 - x^2$ en $-1 \leq x \leq 1$ en dus $f(x,y) = -x^2 + x + 1$ voor $-1 \leq x \leq 1$.
Deze functie van x heeft
een globaal maximum $\frac{5}{4}$ voor $x = \frac{1}{2}$; daarbij horen de punten $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3})$, $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{3})$,
een lokaal minimum 1 voor $x = 1$; daarbij hoort het punt $(1,0)$,
een globaal minimum -1 voor $x = -1$; daarbij hoort het punt $(-1,0)$.
Dit geldt echter slechts bij beperking tot punten, waarvoor $x^2 + y^2 = 1$. Op grond van stelling 2.2 is er een globaal maximum en een globaal minimum; deze kunnen geen andere zijn dan het globale maximum $\frac{5}{4}$ in $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\sqrt{3})$ en het globale minimum -1 in $(-1,0)$. Om na te gaan wat er in $(1,0)$ aan de hand is, benaderen we dit punt via de x-as: $f(x,0) = x \leq 1 = f(1,0)$. In het punt $(1,0)$ is er dus geen extremum.
Men kan dit nog duidelijker maken door de niveaulijn $f(x,y) = 1$ te tekenen, dit is de parabool $x - 1 = -y^2$ en vast te stellen, dat er zowel punten binnen de parabool $(f(x,y) < 1)$ als punten buiten de parabool $(f(x,y) > 1)$ in het definitiegebied dicht bij $(1,0)$ liggen.

§ 3. Extrema met nevenvoorwaarden

Vaak wordt van een functie een extremum gezocht, waarbij de definitieverzameling bepaald is door een aantal nevenvoorwaarden van de gedaante $g(x_1,\dots,x_n) \geq 0$ of $g(x_1,\dots,x_n) = 0$. We behandelen eerst een hulpstelling.

Stelling 3.1. Zij f differentieerbaar in $\underline{a}$ en $\underline{v}$ een vector $\neq \underline{0}$.
Als $((\text{grad } f)_{\underline{x}=\underline{a}}, \underline{v}) > 0$, dan bestaat er een $\delta > 0$, zodat voor $0 < t < \delta$ geldt $f(\underline{a} + t\underline{v}) > f(\underline{a})$.
Als er een $\delta > 0$ bestaat, zodat voor $0 < t < \delta$ geldt $f(\underline{a} + t\underline{v}) \geq f(\underline{a})$, dan geldt $((\text{grad } f)_{\underline{x}=\underline{a}}, \underline{v}) \geq 0$.

Bewijs.

$$f(\underline{a} + \underline{h}) = f(\underline{a}) + ((\text{grad } f)_{\underline{x}=\underline{a}}, \underline{h}) + |\underline{h}| e(\underline{h})$$

met $e(\underline{0}) = 0$ en $e(\underline{h})$ continu in $\underline{0}$. Kies nu $\underline{h} = t\underline{v}$, $t > 0$:

$$f(\underline{a} + t\underline{v}) - f(\underline{a}) = t\{((\text{grad } f)_{\underline{x}=\underline{a}}, \underline{v}) + |\underline{v}| e(t\underline{v})\} ,$$

waaruit de eerste bewering van de stelling makkelijk volgt. De tweede bewering bewijst men dan uit het ongerijmde.

Voorbeeld 3.1. Beschouw $f(x,y) = x^2 - y$ in het punt $(1,1)$; $f(1,1) = 0$, grad $f = (2x,-1)$, hetgeen $(2,-1)$ is in het punt $(1,1)$ en $(\text{grad } f, \underline{v}) =$
$= 2v_1 - v_2$.
Voor $2v_1 - v_2 > 0$ wordt $f(x,y) > 0$.
Voor $2v_1 - v_2 < 0$ wordt $f(x,y) < 0$ (mits (x,y) voldoende dicht bij $(1,1)$).
Voor $2v_1 - v_2 = 0$ wordt $f(x,y) > 0$ (raaklijn).

We beginnen nu met het geval, dat alle nevenvoorwaarden van het type $g \geq 0$ zijn en het extremum een minimum is. We zoeken dus een lokaal minimum van $f(\underline{x})$, waarbij $\underline{x}$ beperkt wordt tot die waarden, waarvoor $g_1(\underline{x}) \geq 0,\dots$ $\dots, g_m(\underline{x}) \geq 0$. We veronderstellen, dat in het punt, waar het minimum optreedt, $f, g_1, \dots, g_m$ differentieerbare functies zijn.
In een punt, waar een minimum optreedt, zullen sommige $g_j = 0$ en sommige $g_j > 0$ zijn. Als $g_j > 0$, dan blijft dit zo in een voldoend kleine omgeving

van het punt. Bij beperking tot zo'n omgeving is de variatie van $\underline{x}$ dan geheel vrij wat betreft die nevenvoorwaarde. We laten die daarom voorlopig buiten beschouwing.

Stel f heeft een lokaal minimum onder nevenvoorwaarden $g_1 \geq 0,\dots,g_k \geq 0$ in een punt $\underline{x}$, waar $g_1 = \dots = g_k = 0$. Alle afgeleiden en gradiënten zijn in dat punt genomen. Als voor een vector $\underline{v}$ geldt:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} v_j > 0 \qquad \text{voor } i = 1,\dots,k \ ,$$

dan bestaat er, op grond van stelling 3.1, een $\delta > 0$ zodat voor $0 < t < \delta$ geldt:

$$g_i(\underline{x} + t\underline{v}) > g_i(\underline{x}) = 0 \qquad \text{voor } i = 1,\dots,k \ .$$

Deze $\underline{x} + t\underline{v}$ voldoen dus aan de nevenvoorwaarden, zodat we mogen concluderen tot $f(\underline{x} + t\underline{v}) \geq f(\underline{x})$, waaruit, wederom op grond van stelling 3.1, volgt:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} v_j \geq 0 \ .$$

We hebben dus gevonden:

Uit $(\text{grad } g_i,\underline{v}) > 0$ voor $i = 1,\dots,k$ volgt $(\text{grad } f,\underline{v}) \geq 0$.

Hierin zijn de vectoren grad g_i en grad f vast en $\underline{v}$ variabel. Deze inwendige produkten zijn zg. *lineaire vormen* $(\underline{a},\underline{x}) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$. Daarvoor geldt de volgende stelling.

<u>Stelling 3.2.</u> Als $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_k$ en $\underline{b}$ vectoren in R_n zijn, als

$$\exists_{\underline{x}_0 \in R_n} : (\underline{a}_1,\underline{x}_0) > 0,\dots,(\underline{a}_k,\underline{x}_0) > 0 \ ,$$

en als

$$\forall_{\underline{x} \in R_n} : \text{uit } (\underline{a}_1,\underline{x}) > 0,\dots,(\underline{a}_k,\underline{x}) > 0 \text{ volgt } (\underline{b},\underline{x}) \geq 0 \ ,$$

dan:

$$\exists_{\lambda_1 \geq 0},\dots,\exists_{\lambda_k \geq 0} : \underline{b} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{a}_i \ .$$

Opmerking. Een ietwat gewijzigde versie van deze stelling staat in de lineaire algebra bekend als *stelling van Farkas*. We geven geen bewijs van deze stelling.

Om deze stelling op bovenstaand geval te kunnen toepassen moet voldaan zijn aan:

(*) Er bestaat een vector $\underline{v}_0$, zodat $(\text{grad } g_i, \underline{v}_0) > 0$ voor $i = 1,\dots,k$.

We hebben de volgende stelling gevonden:

Stelling 3.3. Als f een lokaal minimum heeft onder nevenvoorwaarden $g_1 \geq 0,\dots,g_m \geq 0$ in een punt, waar $g_1 = \dots = g_k = 0$, $g_{k+1} > 0,\dots,g_m > 0$, waar $f,g_1,\dots,g_m$ differentieerbaar zijn en waar (*) vervuld is, dan bestaan er getallen $\lambda_1 \geq 0,\dots$ $\dots,\lambda_k \geq 0$, zodat

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{voor } j = 1,\dots,n \; .$$

Opmerking. Deze laatste gelijkheden vormen, tezamen met $g_1 = \dots = g_k = 0$, $n + k$ vergelijkingen met als $n + k$ onbekende grootheden $x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_k$, terwijl bovendien nog moet voldaan zijn aan $\lambda_i \geq 0$ voor $i = 1,\dots,k$ en $g_i > 0$ voor $k+1 \leq i \leq m$.
De betrekkingen in de laatste regel van de stelling worden genoemd naar *Kuhn-Tucker*. Het zijn noodzakelijke voorwaarden voor een lokaal minimum in een punt, dat aan (*) voldoet. In een maximum gaat alles analoog; alleen geldt dan $\lambda_i \leq 0$ voor $i = 1,\dots,k$.

Voorbeeld 3.2. $f(x,y) = (x + 1)^2 + y^2$ onder de voorwaarden $x \geq y$ en $x \geq -y$.

$$f(x,y) = (x + 1)^2 + y^2 \; , \qquad \text{grad } f = (2(x + 1),2y) \; ,$$

$$g_1(x,y) = x - y \; , \qquad \text{grad } g_1 = (1,-1) \; ,$$

$$g_2(x,y) = x + y \; , \qquad \text{grad } g_2 = (1,1) \; .$$

Er zijn vier gevallen, naargelang g_1 en $g_2 > 0$, dan wel $= 0$ zijn:

1) $\left.\begin{array}{l} 2(x+1) = 0 \\ 2y = 0 \\ x - y > 0 \\ x + y > 0 \end{array}\right\}$ $(-1,0)$ is geen oplossing (buiten gebied).

2) $\left.\begin{array}{l} 2(x+1) - \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y > 0 \end{array}\right\}$ $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1)$ is geen oplossing (buiten gebied).

3) $\left.\begin{array}{l} 2(x+1) - \lambda = 0 \\ 2y - \lambda = 0 \\ x - y > 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}$ $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1)$ is geen oplossing (buiten gebied).

4) $\left.\begin{array}{l} 2(x+1) - \lambda - \mu = 0 \\ 2y + \lambda - \mu = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right\}$ $(0,0;1,1)$ komt in aanmerking voor een minimum.

Meetkundig is duidelijk, dat $(0,0)$ een minimum levert.

Voorbeeld 3.3. $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ onder de voorwaarden $x \le y$ en $x \ge -y$. We vinden nu: eventueel minimum in $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, dat werkelijk globaal minimum is; in $(0,0)$ vinden we $\lambda < 0$, $\mu > 0$, dus geen extremum.

Voorbeeld 3.4. $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ onder de voorwaarden $x \le y$ en $-x \ge y$. We vinden nu: eventueel extremum in $(-1,0)$, dat werkelijk globaal minimum is; eventuele maxima in $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ en $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, die in werkelijkheid geen maxima zijn; eventueel maximum in $(0,0)$, dat werkelijk een lokaal maximum is.

Als de voorwaarde (*) niet vervuld is, kan een bestaand extremum met deze methode gemist worden. Dit blijkt uit het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 3.5. $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ onder de voorwaarden $x^3 \ge y$ en $x^3 \ge -y$ heeft een minimum in $(0,0)$, dat met de methode van Kuhn-Tucker niet gevonden wordt.

In voorbeeld 3.5 heeft het gebied in het punt (0,0) een "spits". Er is geen richting, die met alle gradiënten een scherpe hoek maakt. Er is geen richting, die echt het gebied inwijst, niet rakend aan een rand.

Opmerkingen.

1) Als alle nevenvoorwaarden lineair zijn (eventueel inhomogeen), dan is (*) overbodig. De bijvoorwaarden zien er dan uit als $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \geq b$.

2) De voorwaarden van Kuhn-Tucker zijn niet voldoende. Dit is aan bovenstaand voorbeeld 3.4 te zien, maar ook aan voorbeeld 2.7, dat ook met Kuhn-Tucker onder meer het punt (1,0) voor een eventueel maximum oplevert, dat in werkelijkheid geen maximum is.

3) Als f en alle g lineair zijn (eventueel inhomogeen), zijn de voorwaarden van Kuhn-Tucker wel voldoende. De probleemstelling wordt dan meestal echter anders geformuleerd (lineaire programmering).

Tenslotte bespreken we nog nevenvoorwaarden van het type $g = 0$. Deze zijn op te vatten als combinatie van $g \geq 0$ en $-g \geq 0$. Past men hierop Kuhn-Tucker toe, dan vindt men een bijdrage van de vorm:

$$-\lambda \frac{\partial g}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_j} = (\mu - \lambda) \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

waarin bij een minimum geldt $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$; nu kan echter $\mu - \lambda$ alle waarden aannemen. Er komt dus een analoge voorwaarde, maar zonder clausule over het teken van λ. Bovendien is (*) nooit vervuld, omdat $(\text{grad } g, \underline{v}) > 0$ en $-(\text{grad } g, \underline{v}) > 0$ met elkaar in strijd zijn. Toch loopt het soms goed af.

Voorbeeld 3.6. $f(x,y) = (x + 1)^2 + y^2$ onder nevenvoorwaarde $y^2 = x$.
Neem $g(x,y) = y^2 - x$.

$$\left.\begin{array}{l} 2(x + 1) + \lambda = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ x = y^2 \end{array}\right\} \text{ Oplossing } (0,0;-2).$$

Het is een minimum; dit is niet te zien aan het teken van λ.

Voorbeeld 3.7. $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ onder nevenvoorwaarde $y^2 = x^3$.

$$\left.\begin{array}{l} 2(x+1) + 3\lambda x^2 = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ x^3 = y^2 \end{array}\right\} \text{ Dit heeft geen oplossing.}$$

Toch is er een minimum in (0,0).

De volgende voorwaarde kan hier in plaats van (*) gebruikt worden:

(**) grad $g_1,\dots,$grad g_m zijn onafhankelijke vectoren.

Dit levert de volgende stelling.

Stelling 3.4. Als f een lokaal extremum heeft onder nevenvoorwaarden $g_1 = \dots = g_m = 0$ in een punt, waar $f, g_1, \dots, g_m$ differentieerbaar zijn en waar (**) vervuld is, dan bestaan er getallen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, zodat geldt

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad \text{voor } j = 1, \dots, n .$$

Opmerking. We vinden in dit geval n + m vergelijkingen voor n + m onbekende grootheden $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$. De betrekkingen in de laatste regel van de stelling worden genoemd naar *Lagrange*. We geven geen bewijs van de stelling.

In voorbeeld 3.6 is (**) wel en in voorbeeld 3.7 is (**) niet vervuld in het extremum.

HOOFDSTUK III. GRAFENTHEORIE

§ 1. Inleiding

Een graaf bestaat uit een aantal punten (knopen) en een aantal verbindingen tussen die punten (takken). Voorbeelden zijn: hoekpunten en ribben van een kubus, hiërarchie in een bedrijf, goederenstroom in een fabriek, prioriteitenschema van aktiviteiten in een proces, electrisch schakelschema, chemische structuurformule, stadsplattegrond, telefoonnet, blokdiagram voor een computer.

Soms zijn de takken van een richting voorzien, bijv. in een prioriteitenschema of een blokdiagram en bij eenrichtingsverkeer in een stadsplattegrond.

Precisering van het begrip vindt plaats door twee verzamelingen K (knopen) en T (takken) te kiezen. Bij elke tak horen twee knopen, al dan niet in een gegeven volgorde (gerichte of ongerichte graaf).

Een *gerichte graaf* is een tripel $< K,T,\varphi >$, waarin K en T eindige verzamelingen zijn en φ: $T \to K \times K$ een afbeelding. Als $\varphi(t) = (b(t),e(t))$, dan heet b(t) het *beginpunt* van t en e(t) het *eindpunt* van t. Elementen van K heten *knopen*, elementen van T *takken*.

Een *ongerichte graaf* heeft een analoge definitie; alleen is het paar, dat door φ aan een tak t wordt toegevoegd een ongeordend paar. Men kan dan ook geen beginpunt en eindpunt onderscheiden, doch slechts twee *randpunten* van een tak.

Bij iedere gerichte graaf hoort een bijbehorende ongerichte graaf, die ontstaat door van de volgorde van b(t) en e(t) af te zien.

Een graaf wordt getekend door de knopen als stippen te tekenen en de takken als verbindingslijnen; bij een gerichte graaf worden deze takken van een pijl voorzien.

Het is toegestaan, dat tussen twee knopen meer dan één tak loopt, in dezelfde of tegengestelde richting:

Zelfde richting: takken t_1 en t_2 met $t_1 \neq t_2$ en toch $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$.
Tegengestelde richting: takken t_1 en t_2 met $b(t_2) = e(t_1)$, $b(t_1) = e(t_2)$.

Beginpunt en eindpunt van een tak mogen gelijk zijn: $b(t) = e(t)$ is toegestaan. Een dergelijke tak heet een *lus*.

Een gerichte graaf $< K,T,\varphi >$ heet *enkelvoudig*, als uit $t_1 \neq t_2$ volgt $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ voor alle $t_1 \in T$, $t_2 \in T$ en als $b(t) \neq e(t)$ voor alle $t \in T$.

Let wel dat twee tegengesteld gerichte takken tussen dezelfde knopen wel zijn toegestaan bij een enkelvoudige gerichte graaf.

Een enkelvoudige ongerichte graaf heeft een analoge definitie: meer dan één tak tussen twee knopen evenals lussen zijn verboden.

Bij een enkelvoudige gerichte graaf is een tak vastgelegd door zijn beginpunt en eindpunt. Bij ieder geordend paar (x,y) van knopen hoort geen of één tak met beginpunt x en eindpunt y. We kunnen de graaf dus ook bepalen door een verzameling knopen en een verzameling paren knopen, nl. de verzameling van die paren, die verbonden zijn: $< K,T_1 >$ met $T_1 \subset K \times K$. Er geldt dan nog: $(x,x) \notin T_1$, omdat er geen lussen zijn.

Een analoge bepaling is mogelijk bij een enkelvoudige ongerichte graaf.

De gerichte graaf $< K,T,\varphi >$ heet *isomorf* met de gerichte graaf $< K',T',\varphi' >$, als er afbeeldingen $f: K \to K'$ en $g: T \to T'$ bestaan, die beide 1-1 en op zijn, zodat voor alle $t \in T$ geldt:

$$(b'(g(t)),e'(g(t))) = (f(b(t)),f(e(t))) .$$

Bij enkelvoudige gerichte grafen kan dit eenvoudiger geformuleerd worden: $<K,T_1>$ is isomorf met $< K',T_1' >$ als er een afbeelding $f: K \to K'$ bestaat, die 1-1 en op is, zodat

$$(x,y) \in T_1 \text{ dan en slechts dan als } (f(x),f(y)) \in T_1' .$$

$< K',T',\varphi' >$ heet een *deelgraaf* van $< K,T,\varphi >$, als $K' \subset K$, $T' \subset T$ en $\varphi'(t) = \varphi(t)$ voor alle $t \in T'$. De deelgraaf heet *vol* als

$$T' = \{t \mid t \in T \text{ en } \varphi(t) \in K' \times K'\} .$$

Voor iedere deelgraaf geldt uiteraard, dat $\varphi(t) \in K' \times K'$ voor alle $t \in T'$.

In een gerichte graaf heet een rij takken $t_1,\ldots,t_n$, zodat $e(t_i) = b(t_{i+1})$ voor $i = 1,\ldots,n-1$, een *weg*. $b(t_1)$ heet het *beginpunt* b van de weg, $e(t_n)$ heet het *eindpunt* e van de weg, n heet de *lengte* van de weg. De weg heet een weg van b naar e.
Als $t_1,\ldots,t_n$ onderling verschillend zijn, heet de weg een *pad*.
Als $e(t_1),\ldots,e(t_{n-1})$ onderling verschillend zijn en ook verschillend van $b(t_1)$ en $e(t_n)$, heet de weg een *boog*. Als voor een boog geldt $b(t_1) = e(t_n)$, dan heet de boog een *gesloten boog* of een *cykel* of een *kring*.
Uiteraard is iedere boog een pad.

<u>Stelling 1.1.</u> Als er een weg van x naar y bestaat, dan bestaat er ook een boog van x naar y.

Het bewijs is eenvoudig (volledige inductie naar de lengte van de weg).

Bij ongerichte grafen worden de begrippen weg, pad en boog op analoge wijze gedefinieerd.

Bij de studie van grafen wordt van matrices gebruik gemaakt. We noemen één van de gebruikte matrices.

Als een gerichte graaf n knopen heeft, nummeren we de knopen met de getallen $1,\ldots,n$. We vormen een $n \times n$ matrix A, waarvoor geldt: a_{ij} = aantal takken met beginpunt i en eindpunt j. Deze matrix wordt de knopenmatrix genoemd.
Bij een ongerichte graaf wordt de matrix symmetrisch.

<u>Stelling 1.2.</u> A^k heeft als (i,j)-de element het aantal wegen van lengte k van knoop i naar knoop j.

Het bewijs is eenvoudig (volledige inductie naar k).

Een ongerichte graaf heet *samenhangend* als er voor ieder tweetal knopen a en b met $a \neq b$ een weg van a naar b bestaat.

Een niet-samenhangende graaf bestaat uit een aantal samenhangende stukken, die *componenten* heten. Twee knopen behoren dan en slechts dan tot dezelfde component, als ze door een weg verbonden zijn. Een samenhangende graaf heeft één component.

Voor gerichte grafen worden de begrippen samenhangend en component voor de bijbehorende ongerichte graaf gedefinieerd. Het is zeer wel mogelijk, dat twee verschillende knopen a en b van een samenhangende gerichte graaf in de gerichte graaf niet door een weg verbonden zijn.

§ 2. Bomen

Een ongerichte graaf zonder kringen heet een *bos*. Een samenhangende ongerichte graaf zonder kringen heet een *boom*.

Stelling 2.1. Elke component van een bos is een boom. Een bos (en dus ook een boom) is een enkelvoudige graaf.

Dit is evident.

Een knoop, waarin precies één tak uitkomt, heet een *eindknoop*.

Stelling 2.2. Iedere boom met twee of meer knopen heeft minstens twee eindknopen.

Bewijs. Als alle knopen van de boom eindknopen zijn, is de stelling juist. We mogen dus aannemen, dat de boom een knoop a bevat, die geen eindknoop is. We passen volledige inductie toe naar het aantal knopen n. Stel dat het aantal takken, dat van a uitgaat, k is, dan is $k \geq 2$, want $k = 0$ is onmogelijk, omdat de graaf samenhangend is en $n \geq 2$ en $k = 1$ is onmogelijk omdat a geen eindknoop is. Laat nu de knoop a en die k takken weg. De resterende graaf is een bos en de k andere randpunten van die k takken liggen in verschillende componenten, omdat er anders in de oorspronkelijke graaf een kring zou zijn geweest (verbinden via a). Elk van deze k componenten bevat tenminste één knoop, die eindknoop is in de oorspronkelijke boom. Immers als zo'n component uit slechts één knoop bestaat, dan is deze knoop in de oorspronkelijke boom slechts met a verbonden en dus een eindknoop. Als zo'n component tenminste twee knopen bevat, kunnen we op die component de inductieveronderstelling toepassen, omdat het aantal knopen zeker $< n$ is, en concluderen, dat deze component tenminste twee eindknopen bezit, waarvan er tenminste één in de oorspronkelijke boom niet met a verbonden is en dus daar ook een eindknoop is. Op deze wijze vinden we in de boom k eindknopen, hetgeen het bewijs van de stelling voltooit, omdat $k \geq 2$.

Stelling 2.3. Iedere boom met n knopen heeft precies $n - 1$ takken.

Bewijs. We passen volledige inductie toe naar n. Het geval $n = 1$ is duidelijk. Als $n \geq 2$, is er een eindknoop a met aanliggende tak t. Laat a en t weg. De resterende graaf is weer een boom, omdat voor twee knopen x en y in die boom een pad in de oorspronkelijke boom, dat van x naar y loopt, de tak t niet bevat en dus een weg in de resterende graaf is. Volgens de inductieveronderstelling heeft de resterende boom $n - 2$ takken en de gegeven boom dus $n - 1$ takken.

Stelling 2.4. Een bos met n knopen en k componenten heeft $n - k$ takken.

Stelling 2.5. In een boom is ieder pad een boog. Als a en b verschillende knopen in een boom zijn, is er één en slechts één pad van a naar b.

Het bewijs van deze stellingen in eenvoudig.

Een deelgraaf van een samenhangende, ongerichte graaf, die alle knopen van de oorspronkelijke graaf bevat en tevens een boom is, heet een *skelet* van die graaf.

Stelling 2.6. Iedere samenhangende, ongerichte graaf bezit een skelet.

Bewijs. We passen volledige inductie toe naar het aantal takken. Als de graaf geen kring bevat, is hij een boom en dus zijn eigen skelet. Als de graaf wel een kring bevat, is de deelgraaf, die ontstaat door één van de takken van een kring weg te laten, samenhangend. Immers een weg in de oorspronkelijke graaf, die de weggelaten tak bevat, kan vervangen worden door een weg in de deelgraaf met hetzelfde begin- en eindpunt, door telkens die tak te vervangen door de rest van de kring, waarvan hij deel uitmaakt. De deelgraaf is dus samenhangend en heeft een tak minder en bezit dus volgens inductieveronderstelling een skelet, dat uiteraard ook skelet van de oorspronkelijke graaf is.

Opmerking. Uit het bewijs volgt, dat men een skelet kan vinden door herhaaldelijk schrappen van een tak in een kring. Verder kan een graaf meer dan één skelet hebben.

§ 3. Gerichte grafen

In gerichte grafen is het vaak belangrijk dat kringen ontbreken. Zo zijn in prioriteitenschema's kringen ongewenst. We behandelen een criterium voor het ontbreken van kringen.

Stelling 3.1. Voor een gerichte graaf zijn de volgende beweringen equivalent.

1) De knopen kunnen genummerd worden, dusdanig dat voor iedere tak t geldt:

   nummer van $b(t)$ < nummer van $e(t)$.

2) Iedere niet-lege verzameling A van knopen bevat een knoop a, die geen eindpunt is van een tak met beginpunt in A.
3) De graaf bevat geen kringen.

Bewijs.

1 ⇒ 2. We denken de knopen genummerd als in 1) gegeven. Als A een niet-lege verzameling knopen is, kiezen we voor a de knoop in A met het laagste nummer. Van iedere tak met eindpunt a heeft het beginpunt een lager nummer en ligt dus niet in A.

2 ⇒ 3. Als de graaf een kring heeft, kiezen we voor A de verzameling der knopen, die in de kring voorkomen. Dan is iedere knoop in A eindpunt van een tak met beginpunt in A, in strijd met 2).

3 ⇒ 1. Als de graaf geen kringen heeft, is iedere weg een boog en dus heeft iedere weg een lengte ≤ totale aantal knopen min 1. Noem $r(x)$:= lengte van langste weg met eindpunt x (*rang* van x). Nummer de knopen als volgt:

eerst de x met $r(x) = 0$ in willekeurige volgorde,

dan de x met $r(x) = 1$ in willekeurige volgorde, enz.

Dan geldt, dat uit $r(x) < r(y)$ volgt: nummer van x < nummer van y. Neem nu een tak t. Er is een weg met lengte $r(b(t))$ en eindpunt $b(t)$. Voeg aan deze weg de tak t toe, dan ontstaat een weg met lengte $r(b(t)) + 1$ en eindpunt $e(t)$. Dus

$$r(b(t)) < r(b(t)) + 1 \leq r(e(t)) \ ,$$

nummer van $b(t)$ < nummer van $e(t)$.

§ 4. Transportnetwerken

We nemen een gerichte graaf en denken ons hierop een stroom, die in iedere tak een bepaalde waarde heeft. In de knopen mag geen opeenhoping ontstaan en geen produktie plaats vinden; daarom is de totale stroom in de naar de knoop toelopende takken gelijk aan de totale stroom in de van de knoop aflopende takken. Een uitzondering vormen twee knopen i (ingang) en u (uitgang). In i mag meer stroom in uitgaande takken zitten dan in de inkomende takken en in u omgekeerd.
We beschrijven de stroom met een functie f, die aan iedere tak een reëel getal toevoegt.

Als $< K,T,\varphi >$ een gerichte graaf is, f een afbeelding, die aan iedere tak van de graaf een reëel getal toevoegt, $A \subset K$, $B \subset K$, dan stellen we

$$f(A,B) := \sum_{\substack{t\in T\\ b(t)\in A\\ e(t)\in B}} f(t) \ .$$

Als A uit één element x bestaat, schrijven we $f(x,B)$ en analoog in andere gevallen. Er geldt dan

$$f(A,B) = \sum_{x\in A} f(x,B) = \sum_{y\in B} f(A,y) = \sum_{\substack{x\in A\\ y\in B}} f(x,y) \ .$$

Als $< K,T,\varphi >$ een gerichte graaf is, als $i \in K$ (ingang) en $u \in K$ (uitgang), dan heet een afbeelding f, die aan iedere tak een reëel getal toevoegt, een *stroom* als geldt:

$$f(x,K) - f(K,x) = 0 \quad \text{voor alle } x \in K \text{ met } x \neq i \text{ en } x \neq u.$$

Stelling 4.1. Voor een stroom f geldt:

$$f(i,K) - f(K,i) = f(K,u) - f(u,K) \ .$$

Deze grootheid noemen we de *stroomsterkte* v van de stroom.

Bewijs.

$$f(i,K) - f(K,i) = f(i,K) - f(K,i) + \sum_{\substack{x\in K\\ x\neq i\\ x\neq u}} (f(x,K) - f(K,x)) =$$

$$= f(K,K) - f(u,K) - f(K,K) + f(K,u) = f(K,u) - f(u,K) .$$

We nemen nu aan, dat elke tak t een zekere capaciteit c(t) heeft en dat de stroom in zo'n tak niet groter kan zijn dan de capaciteit van de tak. Het is verder geen ernstige beperking van de algemeenheid als we de graaf enkelvoudig en samenhangend aannemen.

Een *transportnetwerk* is een enkelvoudige, samenhangende, gerichte graaf met aangewezen knopen i (ingang) en u (uitgang) en een afbeelding c, die aan iedere tak t een reëel getal $c(t) > 0$ toevoegt, genaamd de *capaciteit* van t.

Een stroom f op een transportnetwerk heet een *toegelaten stroom* als voor alle takken t geldt:

$$0 \le f(t) \le c(t) .$$

We zoeken in een transportnetwerk toegelaten stromen met maximale stroomsterkte. Om deze te bestuderen voeren we het begrip snede in. Daartoe verdelen we de verzameling K der knopen in twee complementaire verzamelingen A en B, dusdanig dat $i \in A$ en $u \in B$. De bij deze verdeling behorende snede is de verzameling der takken met beginpunt in A en eindpunt in B. De capaciteit van de snede is de som van de capaciteiten van haar takken.

Stel $A \cup B = K$, $A \cap B = \emptyset$, $i \in A$, $u \in B$. Dan is

$$S(A,B) := \{t \mid t \in T,\ b(t) \in A,\ e(t) \in B\} \quad (\textit{snede} \text{ van A en B}),$$

$$c(A,B) := \sum_{t\in S(A,B)} c(t) \quad (\textit{capaciteit} \text{ van snede}).$$

Stelling 4.2. Voor iedere toegelaten stroom met stroomsterkte v en iedere snede geldt:

$$v = f(A,B) - f(B,A) \le c(A,B) .$$

Bewijs.

$$v = f(i,K) - f(K,i) = f(i,K) - f(K,i) + \sum_{\substack{x\in A\\ x\neq i}} (f(x,K) - f(K,x)) =$$

$$= f(A,K) - f(K,A) = f(A,A) + f(A,B) - f(A,A) - f(B,A) =$$

$$= f(A,B) - f(B,A) \leq f(A,B) \leq c(A,B) .$$

De ongelijkheid $v \leq c$ geldt dus voor iedere toegelaten stroom en voor iedere snede en dus ook voor een snede met minimale capaciteit. Er is een stelling (*Ford-Fulkerson*), die zegt dat er een toegelaten stroom bestaat met stroomsterkte = minimale capaciteit van een snede. Deze stroom heeft dan uiteraard maximale stroomsterkte. We bewijzen deze stelling niet, maar schetsen wel een algoritme om in een gegeven transportnetwerk een stroom met maximale stroomsterkte te vinden.

Laat een toegelaten stroom f gegeven zijn. Als er een boog van i naar u is, zodat op iedere tak t van die boog geldt: $c(t) - f(t) > 0$, dan kunnen we een toegelaten stroom verkrijgen door in alle takken van de boog de stroom met het minimum m van deze $c(t) - f(t)$ te vermeerderen. De stroomsterkte van deze nieuwe stroom f_1 is m groter dan de stroomsterkte van f. Op minstens één der takken van de beschouwde boog geldt $c(t) - f_1(t) = 0$. Zo'n tak heet *verzadigd*. Een boog van i naar u met minstens één verzadigde tak noemen we ook verzadigd.
Als alle bogen van i naar u verzadigd zijn, heet de stroom *compleet*. De stroomsterkte hoeft dan evenwel nog niet maximaal te zijn.

Stel nu dat er een boog in de bijbehorende ongerichte graaf van i naar u is, eventueel met tegenliggende takken in de gerichte graaf, waarvoor geldt:

voor alle $\rightarrow$ takken: $c(t) - f(t) > 0$,
voor alle $\leftarrow$ takken: $f(t) > 0$.

Nemen we nu het minimum m van al deze $c(t) - f(t)$, resp. $f(t)$, en vermeerderen we de stroom met m op de $\rightarrow$ takken van de boog en verminderen we de stroom met m op de $\leftarrow$ takken van de boog, dan ontstaat een toegelaten stroom met een stroomsterkte, die m groter is dan de stroomsterkte van f.
We herhalen dit proces net zo lang tot het niet meer kan. We bespreken eerst twee voorbeelden.

Voorbeeld 4.1. $K = \{i, x_1, x_2, x_3, u\}$. De takken van de graaf zijn gegeven in de tweede kolom en hun capaciteiten in de eerste kolom van de volgende tabel.

c		f_1	f_2	f_3	f_4
6	$i \; x_1$	0	2	5	5
2	$i \; x_3$	0	0	0	2
2	$x_1 \; x_2$	0	2	2	2
3	$x_1 \; x_3$	0	0	3	3
10	$x_2 \; u$	0	2	2	2
6	$x_3 \; u$	0	0	3	5
	v	0	2	5	7

We beginnen met f_1 identiek nul. We zoeken bogen door de graaf en houden het mogelijk toe te voegen bedrag bij.

$i \to x_1$ 6
$x_1 \to x_2$ 2
$x_2 \to u$ 2 .

f_2 door verhoging langs boog met 2; $x_1 \; x_2$ verzadigd.

$i \to x_1$ 4
$x_1 \to x_3$ 3
$x_3 \to u$ 3 .

f_3 door verhoging langs boog met 3; $x_1 \; x_2$ en $x_1 \; x_3$ verzadigd.

$i \to x_1$ 1
$i \to x_3$ 2
$x_3 \to u$ 2 .

f_4 door verhoging langs boog met 2; $x_1 \; x_2$, $x_1 \; x_3$ en $i \; x_3$ verzadigd.

$i \to x_1$ 1 , breekt af.

De stroomsterkte van f_4 is maximaal; $v = 7$.

In dit voorbeeld is de gevonden complete stroom maximaal. In het volgende voorbeeld is dat niet zo.

Voorbeeld 4.2. $K = \{i, x_1, x_2, u\}$. Takken en capaciteiten staan in de tabel.

c		f_1	f_2	f_3	f_4
2	$i\ x_1$	0	2	2	2
5	$i\ x_2$	0	0	1	3
3	$x_1\ x_2$	0	2	2	0
4	$x_1\ u$	0	0	0	2
3	$x_2\ u$	0	2	3	3
	v	0	2	3	5

$i \to x_1$ 2
$x_1 \to x_2$ 2
$x_2 \to u$ 2 .

f_2 door verhoging langs boog met 2; $i\ x_1$ verzadigd.

$i \to x_2$ 5
$x_2 \to u$ 1 .

f_3 door verhoging langs boog met 1; $i\ x_1$ en $x_2\ u$ verzadigd.
De stroom f_3 is compleet, maar niet maximaal.

$i \to x_2$ 4
$x_2 \leftarrow x_1$ 2
$x_1 \to u$ 2 .

f_4 door verhoging (resp. verlaging) langs boog met 2; $i\ x_1$ en $x_2\ u$ verzadigd.

$i \to x_2$ 2 , breekt af.

De stroomsterkte van f_4 is maximaal; $v = 5$.

We bewijzen niet, dat de algoritme altijd na een eindig aantal stappen afbreekt, doordat u niet bereikt kan worden. Als echter de algoritme afbreekt, dan trachten we in een laatste stap, uitgaande van i zoveel mogelijk knopen op voorgeschreven wijze te bereiken. We vinden dan een verzameling A van bereikte knopen, waarvoor geldt $i \in A$ en $u \notin A$. Laat B het complement van A t.o.v. K zijn, dan geldt $u \in B$. Voor de takken van A naar B geldt $c(t) - f(t) = 0$, voor de takken van B naar A geldt $f(t) = 0$. Als dat namelijk niet zo zou zijn, zouden we het toevoegen van takken hebben kunnen voortzetten. Nu geldt echter

$$v = f(A,B) - f(B,A) = c(A,B) \ .$$

We hebben dus een snede gevonden, waarvoor de stroomsterkte gelijk is aan de capaciteit van de snede. De stroomsterkte is dus inderdaad maximaal. We beschouwen de stand van zaken in de behandelde voorbeelden.

In voorbeeld 4.1 is $A = \{i,x_1\}$, $B = \{x_2,x_3,u\}$,

$$S(A,B) = \{i\ x_3, x_1\ x_2, x_1\ x_3\} \ ,$$

$$c(A,B) = 2 + 2 + 3 = 7 \ .$$

In voorbeeld 4.2 is $A = \{i,x_2\}$, $B = \{x_1,u\}$,

$$S(A,B) = \{i\ x_1, x_2\ u\} \ ,$$

$$c(A,B) = 2 + 3 = 5 \ .$$

De algoritme levert dus niet alleen een stroom met maximale stroomsterkte, maar ook een snede met minimale capaciteit.