TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

en

Antwoorden

bij

WISKUNDE 41

(BDK-IV)

Voorjaarssemester 1974

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken en antwoorden bij het college

Wiskunde 41

Dictaatnr. 2.275 Prijs *f* 3,00

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken en antwoorden bij het college WISKUNDE 41

Voorjaarssemester 1974

Inhoud

Aanvullende Inhoudsbeschrijving
Tentamenopgaven + Antwoorden Wiskunde 41
Voorjaarssemester 1974

JdG, 12 Juli 2005

Hoofdstuk I. Lineaire Algebra

§ 1.

1. Bewijs dat voor elk tweetal matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix},$$

geldt AB = BA.

2. In R_2 zijn gegeven de basisvectoren $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$.
Wat zijn de kolommen ten opzichte van deze basis van de volgende vectoren?

$$\underline{a} = \underline{e}_1$$

$$\underline{b} = \underline{e}_2$$

$$\underline{c} = \underline{e}_1 - \underline{e}_2$$

$$\underline{d} = \sqrt{3}\,\underline{e}_1 - \frac{1}{9}\underline{e}_2 \,.$$

3. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ heeft de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Gevraagd:

a) dimensie beeldruimte

b) dimensie nulruimte

c) de vergelijking van de beeldruimte

d) de kolom van $\underline{x}$, als $\mathcal{A}\underline{x}$ de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ heeft.

4. Gegeven zijn twee lineaire afbeeldingen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ van R_3 in R_3 met matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -11 & 8 & -7 \\ -8 & 6 & -5 \end{pmatrix} .$$

Bepaal de matrices behorende bij de afbeeldingen $\mathcal{A}\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}\mathcal{A}$.

5. Gegeven is de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ met de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Bepaal de kolom van alle vectoren $\underline{x}$, die op zichzelf worden afgebeeld.

6. Zij $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ de loodrechte projectie op het vlak opgespannen door de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$, die resp. kolommen $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hebben. De vector $\underline{x}$ heeft de kolom $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Toon aan dat $\mathcal{A}$ een lineaire afbeelding is.
b) Bepaal de kolom van de vector $\mathcal{A}\underline{e}_i$ voor $i = 1,2,3$.
c) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$.
d) Bepaal de kolom van het beeld van $\underline{x}$.
e) Heeft $\mathcal{A}$ een inverse?
f) Bewijs $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.

7. Zij $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ de spiegeling aan het vlak opgespannen door de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$, die resp. kolommen $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ hebben. V is het vlak $(\underline{p},\underline{x}) = 0$, waarbij $\underline{p}$ de kolom $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ heeft.

a) Toon aan dat deze afbeelding lineair is.
b) Wat is de matrix van $\mathcal{A}$?
c) Wat is het beeld W onder de afbeelding $\mathcal{A}$ van het vlak V?
d) Als $\underline{p}$ de kolom $\begin{pmatrix} p \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ heeft, voor welke waarde(n) van p is dan $W \perp V$?
e) Bewijs $\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}$.

8. Zij V de vectorruimte van de polynomen $at^3 + bt^2 + ct + d$ van ten hoogste de derde graad.
De polynomen $1, t, t^2, t^3$ vormen een basis van V.
De afbeelding $\mathcal{D}$ is gedefinieerd door

$$\mathcal{D}(at^3 + bt^2 + ct + d) = 3at^2 + 2bt + c \ .$$

a) Toon aan dat $\mathcal{D}$ een lineaire afbeelding is.
b) Wat is de matrix D van $\mathcal{D}$ t.o.v. de basis $1, t, t^2, t^3$?
c) Wat zijn de matrices van $\mathcal{D}^2$, $\mathcal{D}^3$ en $\mathcal{D}^4$?

9. Zij V de vectorruimte van de polynomen $at^3 + bt^2 + ct + d$ van ten hoogste de derde graad.
De afbeelding $\mathcal{T} : V \to V$ is gedefinieerd door

$$\mathcal{T}(at^3 + bt^2 + ct + d) = a(1 + t)^3 + b(1 + t)^2 + c(1 + t) + d \ .$$

a) Toon aan dat $\mathcal{T}$ een lineaire afbeelding is.
b) Wat is de matrix T van $\mathcal{T}$ t.o.v. de basis $1, t, t^2, t^3$?
c) Toon aan dat $1, 1+t, (1+t)^2, (1+t)^3$ ook een basis van V is.
d) Heeft $\mathcal{T}$ een inverse? Zo ja, wat is de matrix van $\mathcal{T}^{-1}$ t.o.v. de basis $1, 1+t, (1+t)^2, (1+t)^3$?

10. V is de vectorruimte der op $[0,1]$ continue functies met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging.
De afbeelding $\mathcal{A} : V \to R_1$ is gedefinieerd door $\mathcal{A}f = f(0)$.

a) Toon aan dat $\mathcal{A}$ een lineaire afbeelding is.
b) Wat is de nulruimte N van $\mathcal{A}$?
c) Heeft $\mathcal{A}$ een inverse?
d) Als de functie f een oplossing van de vergelijking $\mathcal{A}x = c$ is, dan vinden wij alle oplossingen van de vergelijking door te nemen $x = f + n$ met $n \in N$. Bewijs dit.

11. Zij $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ een lineaire afbeelding met de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & a \\ \beta & \delta & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

t.o.v. een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.
V is het vlak opgespannen door $\underline{e}_1$ en $\underline{e}_2$ en W het beeld van V onder de afbeelding $\mathcal{A}$.

a) Wanneer is de beeldruimte W een deel van het vlak V?

b) Wanneer is W een 2-dimensionale deelruimte?

c) Wanneer heeft $\mathcal{A}$ een inverse?

d) Wanneer gaat V punt voor punt in zichzelf over?

e) Toon aan dat voor $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma \geq 0$ er steeds een vector $\underline{x} \neq \underline{0}$ is uit V, die in een veelvoud van zichzelf over gaat.

f) Wat zijn de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ als $\beta = 0$ is?

§ 2.

1. In R_1 is een basis $\underline{e}_1$ gegeven.
   Een andere basis $\underline{f}_1$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$ de kolom (5).
   Een vector $\underline{x}$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$ de kolom (x).
   Bepaal de overgangsmatrix S van $\underline{e}_1$ naar $\underline{f}_1$.
   Wat is de kolom van $\underline{x}$ t.o.v. $\underline{f}_1$?

2. In R_2 is een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ gegeven.
   Een andere basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ resp. de kolommen $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.
   Bepaal de overgangsmatrix S van $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ naar $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$.
   Wat is de kolom t.o.v. $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$ van een vector $\underline{x}$, die t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ de kolom $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ heeft?
   Maak dit duidelijk in een tekening voor het geval x = 4 en y = 7.

3. In R_3 is een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ gegeven. De vector $\underline{x}$ heeft t.o.v. deze basis de kolom $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.
   Een andere basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$ heeft t.o.v. de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ resp. de kolommen $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
   Wat is de overgangsmatrix S van $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ naar $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$?
   Wat is de kolom van $\underline{x}$ t.o.v. $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$?

4. Gegeven is de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ met de matrix

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\\0 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

   t.o.v. een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.
   Men gaat over op een nieuwe basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$ met resp. de kolommen

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$$

   t.o.v. de oude basis.
   Gevraagd de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. de nieuwe basis.

5. Gegeven is de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ met t.o.v. de basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Men gaat over op een nieuwe basis $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$, waarbij een overgangsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

behoort.

Wat is de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. $\underline{f}_1$, $\underline{f}_2$, $\underline{f}_3$?

De vector $\underline{x}$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wat is de kolom van de beeldvector $\mathcal{A}\underline{x}$ t.o.v. de oude en t.o.v. de nieuwe basis?

6. Gegeven zijn de afbeelding $\mathcal{A}$ en de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ van vraagstuk 6, §1 (blz. 2).

De vector $\underline{c}$ heeft de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

T.o.v. de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ heeft $\mathcal{A}$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ga dit na.

7. Gegeven zijn de afbeelding $\mathcal{A}$ en de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ van vraagstuk 7, §1 (blz. 2).

De vector $\underline{c}$ heeft de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wat is de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. de basis $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$?

8. In R_n zijn drie bases $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$, $\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_n$ en $\underline{g}_1,\ldots,\underline{g}_n$ gekozen.
De overgangsmatrix van $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ naar $\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_n$ zij S en die van $\underline{g}_1,\ldots,\underline{g}_n$ naar $\underline{f}_1,\ldots,\underline{f}_n$ zij T.
De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ heeft t.o.v. $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$ de matrix A.
Druk de matrix B van $\mathcal{A}$ t.o.v. $\underline{g}_1,\ldots,\underline{g}_n$ uit in A, S en T.

9. Zij V gedefinieerd als in de opgaven 8 en 9, §1 (blz. 3) en de afbeeldingen $\mathcal{D}$ en $\mathcal{T}$ eveneens.
Laat zien dat de matrix D' van $\mathcal{D}$ op de basis 1, 1+t, $(1+t)^2$, $(1+t)^3$ is gegeven door $D' = T^{-1}DT$.

§ 3.

1. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ heeft t.o.v. een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Bepaal een onafhankelijk stelsel eigenvectoren.

2. Van een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ zijn gegeven de eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -2$. De kolommen van de hierbij behorende eigenvectoren zijn resp.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Verder is $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ de kolom van het beeld van de eerste basisvector.

Bepaal:

a) de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. de gebruikte basis;

b) de derde eigenwaarde en de kolom van de bijbehorende eigenvector.

3. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ heeft op $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} .$$

Bepaal de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ en de kolommen der eigenvectoren $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ t.o.v. $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.
Neem $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ als nieuwe basis voor R_3 . Zij S de overgangsmatrix.
Controleer dat $S^{-1}AS$ een diagonaalmatrix is.

4. Bepaal de eigenwaarden en de kolommen der eigenvectoren van de afbeeldingen $\mathcal{A}$ uit de vraagstukken 6 en 7, §1 (blz. 2).
Wat is de meetkundige interpretatie hiervan?

5. Bepaal een matrix S zodanig dat $S^{-1}AS$ een diagonaalmatrix is en bereken $S^{-1}AS$ voor

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

6. De lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ heeft op een basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bepaal de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ en de kolommen der eigenvectoren.
b) Wat is de matrix van de lineaire afbeelding $\mathcal{A}^7$?

7. Zij N de nulruimte van de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$.
$\mathcal{A}$ heeft een eigenwaarde $\lambda = 0$ dan en slechts dan als dimensie $N \geq 1$ is.
Bewijs dit.

8. $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ zijn lineaire afbeeldingen $R_n \to R_n$ met een gemeenschappelijk stelsel onafhankelijke eigenvectoren $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$. Hoe zien de matrices van $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ er uit op de basis $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$?
Toon aan dat $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.

9. V is de vectorruimte van alle lineaire combinaties van de functies e^t en e^{2t}.
$\mathcal{D}$ is de lineaire afbeelding die aan een functie uit V zijn afgeleide naar t toevoegt.
Wat zijn de eigenwaarden van $\mathcal{D}$?

10. De reguliere lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ heeft eigenwaarden $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$.
Wat zijn de eigenwaarden van $\mathcal{A}^{-1}$?
Wat zijn de eigenvectoren hierbij?

11. $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ zijn lineaire afbeeldingen $R_n \to R_n$, die voldoen aan $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$;
λ is een eigenwaarde van $\mathcal{A}$ met eigenvector $\underline{v}$.
Als $\mathcal{B}\underline{v} \neq \underline{0}$ is, dan is $\mathcal{B}\underline{v}$ ook een eigenvector van $\mathcal{A}$ bij de eigenwaarde λ.
Bewijs dit.

12. $\mathcal{A}$ is een lineaire afbeelding $R_3 \to R_3$ met op zekere basis de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

Het spoor van A is gedefinieerd door $\mathrm{sp}(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}$.
Zij S de overgangsmatrix naar een andere basis.
Bewijs dat $\mathrm{sp}(A) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i$ als λ_1, λ_2 en λ_3 de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ zijn.
Bewijs dat $\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(S^{-1}AS)$.
Zoudt U het spoor van de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ kunnen definiëren?

13. Het spoor van een $n \times n$ matrix A wordt gedefinieerd door $\mathrm{sp}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
(verg. vorige opgave).

a) Laat zien dat $\mathrm{sp}(AB) = \mathrm{sp}(BA)$ als A en B $n \times n$ matrices zijn.
b) Laat zien dat voor twee lineaire afbeeldingen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ van $R_n \to R_n$ niet kan gelden $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{I}$.

§ 4.

1. Bewijs dat voor elk tweetal vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ uit een vectorruimte met inproduct geldt:

a) $|(\underline{x},\underline{y})| \leq |\underline{x}|\ |\underline{y}|$

b) $|\underline{x} + \underline{y}| \leq |\underline{x}| + |\underline{y}|$

c) $|\underline{x} + \underline{y}|^2 + |\underline{x} - \underline{y}|^2 = 2|\underline{x}|^2 + 2|\underline{y}|^2$.

Wat is de meetkundige betekenis?

2. De vectoren $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n$ uit een vectorruimte zijn onderling loodrecht en alle ongelijk de nulvector.
Bewijs dat $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n$ onafhankelijk zijn.

3. In R_3 wordt een vector $\underline{x}$ geprojecteerd op het vlak opgespannen door de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$. Als de projectie $\underline{y}$ geschreven wordt als $\underline{y} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$, toon dan aan dat

$$\alpha = \frac{(\underline{x},\underline{a})(\underline{b},\underline{b}) - (\underline{x},\underline{b})(\underline{a},\underline{b})}{(\underline{a},\underline{a})(\underline{b},\underline{b}) - (\underline{a},\underline{b})^2}$$

en

$$\beta = \frac{(\underline{x},\underline{b})(\underline{a},\underline{a}) - (\underline{x},\underline{a})(\underline{a},\underline{b})}{(\underline{a},\underline{a})(\underline{b},\underline{b}) - (\underline{a},\underline{b})^2} .$$

4. Voor een vector $\underline{x}$ uit de vectorruimte V geldt dat $(\underline{x},\underline{y}) = 0$ voor alle vectoren $\underline{y}$ uit V.
Bewijs dat $\underline{x} = \underline{0}$.

5. De vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ zijn van gelijke lengte.
Bewijs dat $\underline{x} - \underline{y}$ en $\underline{x} + \underline{y}$ loodrecht zijn.
Wat is de meetkundige betekenis?

6. In R_3 heeft een vector $\underline{a}$ de kolom $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ t.o.v. een orthonormale basis.

   Construeer een basis van onderling loodrechte vectoren waar $\underline{a}$ deel van uitmaakt.

7. V is de vectorruimte der op $[-1,1]$ continue functies. Ga voor elk van de onderstaande definities na of (f,g) voldoet aan de eisen voor een inproduct.

   a) $$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

   b) $$(f,g) = \int_{-1}^{1} t^2 f(t)g(t)dt$$

   c) $$(f,g) = \int_{0}^{1} t^2 f(t)g(t)dt \, .$$

8. V is de vectorruimte van alle polynomen op het interval $[0,1]$.
   Er is gedefinieerd

   $$(f,g) = \int_{0}^{1} f(t)g(t)dt \, .$$

   a) Is V een vectorruimte met inproduct?
   b) Vindt een polynoom in de deelruimte L opgespannen door de polynomen t en 1-t, dat loodrecht staat op t.
   c) Geef een tweedegraadspolynoom aan, dat loodrecht staat op L.
   d) Bepaal de projectie van t^2 op L.

9. V is de vectorruimte van alle lineaire combinaties van de functies e^t en e^{2t}.

   Construeer een basis van functies die volgens het inproduct $\int_{0}^{1} f(t)g(t)dt$

   (ga na dat dit inderdaad een inproduct is) loodrecht zijn.

10. V is de vectorruimte van alle polynomen van de graad ≤ 2 op $[0,\infty)$.
Er is gedefinieerd

$$(f,g) = \int_0^\infty e^{-t} f(t)g(t)dt \; .$$

a) Ga na dat (f,g) een inproduct is.

b) Bepaal een basis van onderling loodrechte vectoren.

11. W is een k-dimensionale deelruimte van de n-dimensionale vectorruimte V.
$W_\perp$ is de verzameling van vectoren uit V, die loodrecht staan op alle vectoren uit W.
$W_\perp$ heet het orthogonale complement van W.

a) Toon aan dat $W_\perp$ een deelruimte van V is.

b) Toon aan dat W en $W_\perp$ alleen de nulvector gemeen hebben.

c) Wat is de dimensie van $W_\perp$?

12. In R_5 wordt de deelruimte U opgespannen door de vectoren met kolommen

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

t.o.v. een orthonormale basis.

a) Bepaal een basis van het orthogonale complement van U.

b) Bepaal de loodrechte projectie op U van de vector $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$.

13. In R_4 zijn gegeven drie vectoren met kolommen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ t.o.v. een orthonormale basis.
Construeer een orthonormale basis voor de deelruimte opgespannen door deze drie vectoren.
Hoe zoudt U de gevonden basis aanvullen tot een orthonormale basis voor R_4?

14. Een lineaire afbeelding $\mathcal{A}: V \to V$ heet orthogonaal als voor elke $\underline{x} \in V$ geldt

$$(\underline{x},\underline{x}) = (\mathcal{A}\underline{x},\mathcal{A}\underline{x}) \ .$$

Bewijs dat voor elk tweetal vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ uit V geldt

$$(\mathcal{A}\underline{x},\mathcal{A}\underline{y}) = (\underline{x},\underline{y}) \ .$$

15. Een vierkante matrix A heet orthogonaal als geldt $A^{-1} = A^T$.
Een orthogonale afbeelding heeft t.o.v. een orthonormale basis een orthogonale matrix.
Als een lineaire afbeelding t.o.v. een orthonormale basis een orthogonale matrix heeft, dan is de lineaire afbeelding orthogonaal.
Bewijs dit. Zie ook Wiskunde 20.

16. De afbeelding $\mathcal{A}: R_n \to R_n$ is orthogonaal.
Bewijs dat voor elk tweetal vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ uit R_n geldt

$$(\mathcal{A}\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},\mathcal{A}^{-1}\underline{y}) \ .$$

17. In R_3 zijn twee vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ gegeven met respectievelijk kolommen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{6} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

t.o.v. een orthonormale basis.
De draaiing $\mathcal{A}$ beeldt $\underline{x}$ op $\underline{y}$ af. De draaiingsas staat loodrecht op $\underline{x}$ en $\underline{y}$.
Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$.
Wat is de matrix van $\mathcal{A}$ op de basis $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ als $\underline{z}$ de kolom $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ heeft?

18. Een orthogonale afbeelding $\mathcal{A}: V \to V$ heeft als reële eigenwaarden +1 of -1.
Bewijs dit.

19. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}: R_n \to R_n$ heeft t.o.v. een orthonormale basis de matrix A.
$\mathcal{A}^T$ is de lineaire afbeelding die t.o.v. deze basis de matrix A^T heeft.
Toon aan dat $\mathcal{A}^T\mathcal{A}$ t.o.v. deze basis een diagonaalmatrix heeft dan en slechts dan als de kolommen van A onderling loodrecht zijn.

§ 5.

1. De afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ is lineair en symmetrisch.
Is de matrix van $\mathcal{A}$ op elke basis symmetrisch?
Zo neen, construeer dan een tegenvoorbeeld.

2. De lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ is symmetrisch.
Toon aan:

   a) $\mathcal{A}^{-1}$ is symmetrisch als $\mathcal{A}$ regulier is.
   b) $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}$ is symmetrisch als $\mathcal{B} : R_n \to R_n$ orthogonaal is.
   c) $\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}$ is symmetrisch als $\mathcal{B} : R_n \to R_n$ symmetrisch is.

3. V is de vectorruimte der op $[0,1]$ oneindig vaak differentieerbare functies f, die aan de randcondities $f(0) = f(1) = 0$ en $f'(0) = f'(1) = 0$ voldoen.
De afbeelding $\mathcal{L} : V \to V$ is gedefinieerd door $\mathcal{L}f = -(rf')' + sf$, waarin r en s gegeven, niet-negatieve functies uit V zijn.
Verder is gedefinieerd

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt \ .$$

   a) Laat zien dat V een ruimte met inproduct is.
   b) Laat zien dat $\mathcal{L}$ een lineaire symmetrische afbeelding is.
   c) Laat zien dat $(\mathcal{L}f,f) \geq 0$ is.

4. Laat zien dat de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ uit opgave 6, §1 (blz. 2) symmetrisch is en dat $(\mathcal{A}\underline{v},\underline{v}) \geq 0$ voor alle $\underline{v}$ uit R_3.
Wat is van dit laatste de meetkundige betekenis?
Algemeen geldt: zij $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ de loodrechte projectie op een vlak V door de oorsprong dan is $\mathcal{A}$ symmetrisch en $(\mathcal{A}\underline{v},\underline{v}) \geq 0$ voor alle $\underline{v}$ uit R_3.
Toon dit aan.

5. Laat zien dat de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ uit opgave 7, §1 (blz. 2) symmetrisch is. Geldt algemeen dat spiegeling aan een vlak door de oorsprong in R_3 een symmetrische afbeelding is?

6. Van een symmetrische lineaire afbeelding $\mathcal{A}: R_n \to R_n$ is de nulruimte het orthogonale complement van de beeldruimte.
Toon dit aan.

7. Een lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ is gegeven met matrix A t.o.v. een orthonormale basis $\underline{e}_1,\ldots,\underline{e}_n$.
$\mathcal{A}^T$ is gedefinieerd als de lineaire afbeelding van R_n in R_n, die op deze basis de matrix A^T heeft.

   a) Laat zien dat de definitie van $\mathcal{A}^T$ onafhankelijk van de keuze van de orthonormale basis is.
   b) Bewijs dat voor elk tweetal vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ uit R_n geldt
   $$(\mathcal{A}\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},\mathcal{A}^T\underline{y}) .$$
   c) Bewijs dat $\mathcal{A}$ symmetrisch is dan en slechts dan als $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$.

8. Zij $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ een lineaire afbeelding. De afbeelding $\mathcal{A}^T$ is gedefinieerd als in opgave 7.
Toon aan:

   a) $\mathcal{A}^T\mathcal{A}$ is symmetrisch.
   b) $(\mathcal{A}^T\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) \geq 0$ voor alle $\underline{x}$ uit R_n.
   c) de eigenwaarden van $\mathcal{A}^T\mathcal{A}$ zijn ≥ 0.

9. De lineaire afbeelding $\mathcal{B} : R_n \to R_n$ is symmetrisch en alle eigenwaarden van $\mathcal{B}$ zijn ≥ 0.
Toon aan dat er een afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ bestaat, zodanig dat $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}$ is.

10. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}: R_n \to R_n$ heeft t.o.v. een orthonormale basis een matrix A, waarvan de kolommen onderling loodrecht zijn.
Toon aan

a) $A = A_1A_2$, waarbij A_1 een orthogonale matrix is en A_2 een diagonaalmatrix
b) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$, waarbij $\mathcal{A}_1$ een orthogonale afbeelding en $\mathcal{A}_2$ een symmetrische afbeelding is.

11. Gegeven de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$.
Kies een orthonormale basis, bestaande uit eigenvectoren van de symmetrische afbeelding $\mathcal{A}^T\mathcal{A}$.
Toon aan dat de matrix A van $\mathcal{A}$ t.o.v. deze basis onderling loodrechte kolommen heeft (zie ook opgave 19, § 4 (blz. 14)).

12. Elke lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$ is te schrijven als het product van een orthogonale afbeelding en een symmetrische afbeelding. (Combineer opgaven 10 en 11.)

13. $N(\mathcal{A})$ en $B(\mathcal{A})$ zijn respectievelijk de nulruimte en de beeldruimte van een lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_n \to R_n$. De afbeelding $\mathcal{A}^T$ is gedefinieerd als in opgave 7.
Toon aan:

a) $N(\mathcal{A}^T)$ is het orthogonale complement van $B(\mathcal{A})$
b) $B(\mathcal{A}^T)$ is het orthogonale complement van $N(\mathcal{A})$.

14. $\mathcal{A}: R_n \to R_n$ is een symmetrische lineaire afbeelding.
Toon aan:

$$\max_{|\underline{x}|=1} (\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) = \text{grootste eigenwaarde van } \mathcal{A},$$

$$\min_{|\underline{x}|=1} (\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) = \text{kleinste eigenwaarde van } \mathcal{A}.$$

15. Voor de symmetrische lineaire afbeeldingen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ van $R_n \to R_n$ geldt

$$(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) \geq (\mathcal{B}\,\underline{x},\underline{x})$$

voor alle $\underline{x}$ uit R_n.

Toon aan:

a) de afbeelding $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ heeft eigenwaarden ≥ 0;

b) de grootste eigenwaarde van $\mathcal{A} \geq$ de grootste eigenwaarde van $\mathcal{B}$.

Hoofdstuk II. Functies van meer veranderlijken

1. Een vectorfunctie van R_2 in R_2 is gedefinieerd door de betrekkingen:

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \; . \end{cases}$$

Schets in het (u,v)-vlak de beelden van

a) het halfvlak $x \geq 0$

b) het halfvlak $y \geq 0$

c) het eerste kwadrant van het (x,y)-vlak $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

d) de cirkel $x^2 + y^2 = 1$

Correspondeert met elk verkregen punt (u,v) één punt (x,y)?

2. Een vectorfunctie van R_2 in R_3 is gegeven door de betrekkingen:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \\ w = x^2 \; . \end{cases}$$

Schets de beelden van

a) het (x,y)-vlak

b) het halfvlak $x \geq 0$

c) het halfvlak $y \geq 0$

d) het derde kwadrant van het (x,y)-vlak $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

Bewijs dat bij elk verkregen punt (u,v,w) slechts één punt (x,y) hoort.

3. Een vectorfunctie is gegeven door de betrekkingen:

$$\begin{cases} u = x(1 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \\ v = y(1 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \\ w = z(1 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \text{met } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 < 1 \; .$$

Bereken:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} \; .$$

4. Een complexe functie $w = f(z)$ van een complexe veranderlijke kan men opvatten als een vectorfunctie $(u(x,y),\ v(x,y))$ van R_2 in R_2 door te stellen $w = u + iv$ en $z = x + iy$.
Beschouw de functie $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x - iy}$. Schrijf u en v als functies van x en y. Bewijs dat de Jacobiaan van deze functie gelijk is aan $-|z|^{-4}$ en druk x en y uit in u en v.

5. Een kromme in R_3 is gegeven door de parametervoorstelling:

$$\underline{x}(t) = (\tfrac{1}{4}t^4,\ \tfrac{1}{3}t^3,\ t)\ .$$

Bereken de punten van de kromme waarin de raaklijn evenwijdig is aan het vlak $x + 3y - 4z = 0$.

6. Bewijs dat alle raaklijnen aan de kromme met parametervoorstelling

$$\underline{x}(t) = (\sin t + \cos t,\ \sin t - \cos t,\ e^{-t})$$

het (x,y)-vlak op de cirkel $x^2 + y^2 = 4$ snijden.

7. Bereken de extrema van de volgende functies:

a) $f(x,y) = -x - y$ voor $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$

b) $f(x,y) = 2x^2 + 2x + y^2$ voor $x^2 + y^2 \le 1$

c) $f(x,y) = 5x^4 - 4x^5 + 5y^4$

d) $f(x,y) = (y^2 + x^4)^2(9 - 8x)$

e) $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$

f) $f(x,y) = (x - 1)^4 + (x - y)^4$

g) $f(x,y) = 2x^4 - x^2 - 2y^2 + y^4$

8. Bereken de extrema van de volgende functies onder de gegeven bijvoorwaarden:

a) $f(x,y) = x^3y + xy^3 - 2xy - x^2 - y^2 + 2; \; x^2 + y^2 = 1$

b) $f(x,y) = xy \quad ; \; x^2 + y^2 = 1$

c) $f(x,y,z) = xy + yz \quad ; \; x^2 + y^2 = 2, \; yz = 2$

d) $f(x,y,z) = |x + y + z| \quad ; \; x^2 + y^2 + z^2 = 1$

e) $f(x,y,z) = (xyz)^2 \quad ; \; x^2 + y^2 + z^2 = 3$

f) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 \quad ; \; x + y + z = 1$

9. Bepaal de extrema, hun aard en hun waarde, van de volgende functies op de gegeven verzamelingen:

a) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y); \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; x + y \leq \frac{\pi}{2}$

b) $f(x,y) = x(x^2 + y^2 - 2x) \quad ; \; x^2 + y^2 \leq 4$

c) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - x^2y \quad ; \; x^2 + y^2 \leq 1$

d) $f(x,y) = 4(x - 1)^2 - y^2 \quad ; \; x^2 + y^2 \leq 4$

e) $f(x,y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2} \quad ; \; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

f) $f(x,y) = x^2y - 2y^3 \quad ; \; x^2 + y^2 \leq 1$.

10. Bepaal het punt op de kromme

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

met de kleinste afstand tot de oorsprong.

11. Bepaal de punten op de ellips

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

met maximale en minimale afstand tot de oorsprong.

12. Bereken de kleinste afstand van het punt $(0,a)$ tot een willekeurig punt op de parabool $4y = x^2$.

13. Laat zien dat de afstand van een vast punt (a,b,c) tot een willekeurig punt in het vlak $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ minimaal is als de verbindingslijn van die punten loodrecht op het vlak staat. Bereken die minimale afstand (de afstand van het punt tot het vlak).

14. Gegeven zijn 5 getallen e_1, e_2, e_3, e_4 en e_5.
Bepaal een kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ zodanig dat

$$\{f(-2) - e_1\}^2 + \{f(-1) - e_2\}^2 + \{f(0) - e_3\}^2 +$$

$$+ \{f(1) - e_4\}^2 + \{f(2) - e_5\}^2$$

minimaal is. (Methode der kleinste kwadraten.)

15. a) Schets enige niveaulijnen van de functie f gedefinieerd door:

$$f(x,y) = x^2 + y .$$

b) We beschouwen f nu alleen op de cirkel met middelpunt $(0,1)$ en straal 1. Bepaal de extrema van f op deze cirkel.

16. Op de verzameling G gevormd door de punten (x,y) die voldoen aan

$$0 \le x \le 1$$
$$0 \le y \le x$$

is een functie gedefinieerd door $f(x,y) = x^2 + y^2 - y$.
Bepaal de extrema van f op G.

17. Onderzoek in welke punten van het gebied aangewezen door $x^2 + y^2 \leq 1$ de functie $4x^3 + 4xy^2 + x^2$ extrema heeft.
Van welke aard is elk van deze extrema?

18. Bepaal de extrema en hun aard, die $f(x,y) = x^2(1 - y^2)$ aanneemt op de verzameling $x^2 - 1 \leq y$.

19. Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de functie

$$(x + y)(x^2 + y^2 - 2)$$

op het gebied

$$x^2 + y^2 - 3x - 3y - 8 \leq 0 .$$

20. Gegeven:

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y .$$

Bepaal alle extrema, hun aard en hun waarde op het gebied $x^2 + y^2 \leq 4$.

21. Gegeven:

$$f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 .$$

Bepaal alle extrema, hun aard en waarde op het gebied $x^2 + y^2 \leq 8$.

22. Gegeven:

$$f(x,y) = (x + y - 2)(x - y) .$$

Bepaal de extrema, hun aard en waarde op het gebied $|x| + |y| \leq 3$.

23. Gegeven:

$$f(x,y) = \frac{x^2 + 9y^2}{1 + y^2} .$$

Bepaal de extrema, hun aard en waarde op het vierkant

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ -3 \leq y \leq 3 . \end{cases}$$

24. Bepaal de extrema van de functie f gedefinieerd door

$$f(x,y) = xy^2 .$$

25. Bepaal de extrema van

$$f(x,y) = xy(x^2 + y^2)$$

in het gebied $x^2 + y^2 \leq 1$.

26. Bepaal de extrema van

$$f(x,y) = (1 - x^2)(1 + y^2)$$

in het gebied $x^2 + y^2 \leq 1$.

27. Bepaal aard en plaats van de extrema van

$$f(x,y) = xy$$

in het gebied $x^2 + y^2 \leq 1$.

28. Gegeven:

$$f(x,y) = y^2 - (x^2 - 1)^2.$$

Bepaal de extrema, hun aard en waarde op het gebied $x^2 + y^2 \leq 4$.

29. Gegeven is in R_2 het gebied G, bepaald door $y^2 \leq x \leq 4$.
Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de functie $f(x,y) = y^2 - x^2y^2$ op G.

30. Een fabriek maakt producten van één soort en wil zijn winst maximaliseren. Het aantal geproduceerde en verkochte producten is x. De verkoopprijs V per stuk en de totale productiekosten p zijn voor $4 \leq x \leq 14$ bepaald als functies van x door:

$$V(x) = 56 - 2x$$

$$p(x) = x^2 - 4x + 100 .$$

a) Bepaal het aantal producten dat de fabriek moet maken opdat de winst maximaal is. Bepaal tevens deze maximale winst.

Veronderstel nu dat de fabriek gedurende twee perioden de winst wil maximaliseren en dat de verkoopprijs V_2 in de tweede periode afhangt zowel van het aantal geproduceerde en verkochte artikelen in de eerste periode x als in de tweede periode y door middel van de functie

$$V_2(x,y) = 56 - 2y - 1{,}2(x - \frac{7}{2}) \text{ .}$$

De kosten p_2 van de in de tweede periode geproduceerde artikelen hangt alleen af van y, d.w.z.

$$p_2(y) = y^2 - 4y + 100 \text{ .}$$

Vanwege renteverlies is de winst van de tweede periode $\frac{5}{6}$ deel waard van de winst van de eerste periode.

b) Bepaal het aantal producten dat de fabriek gedurende beide perioden moet maken opdat de totale winst maximaal is. Bepaal deze maximale winst.

c) Veronderstel dat de fabriek besluit om eerst in de eerste periode de winst te maximaliseren en daarna pas in de tweede periode. Bepaal het aantal producten dat de fabriek gedurende beide perioden moet maken. Bepaal tevens de winst in dit geval.

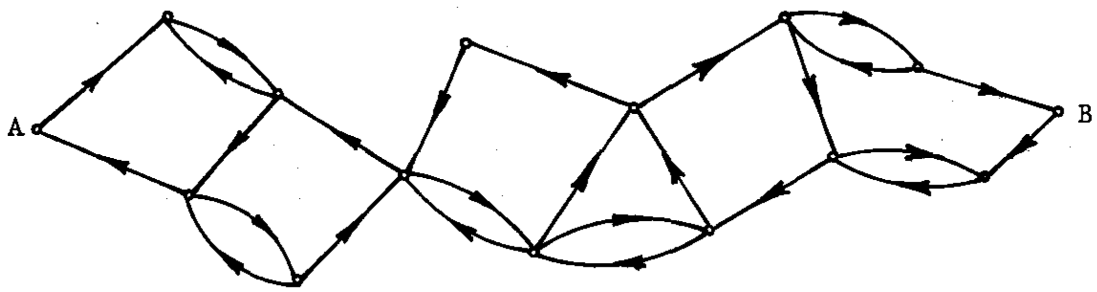
Hoofdstuk III. Grafentheorie

1. Het bepalen van de afstand tussen twee knopen in een enkelvoudige, samenhangende, gerichte graaf.

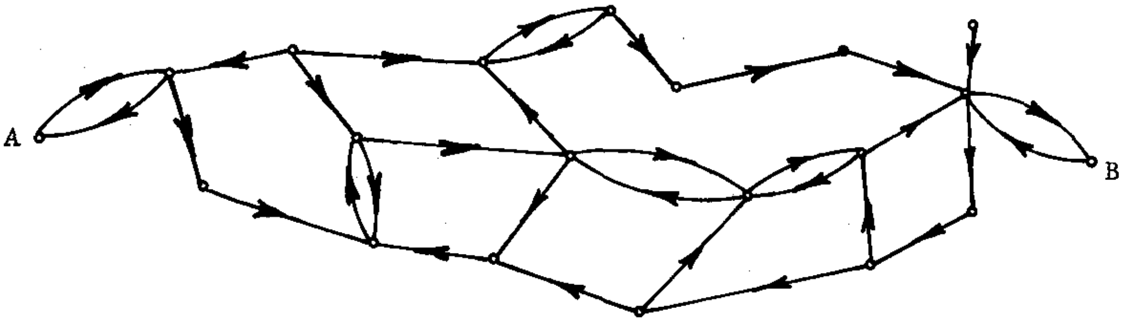
Zij gegeven een enkelvoudige, samenhangende, gerichte graaf G.
Een eenvoudige algoritme om de afstand te vinden tussen een knoop A van G en een willekeurige andere knoop van G die vanuit A bereikbaar is, is de volgende algoritme:
Nummer A met 0.
1^e slag nummer de knopen, die afstand 1 vanuit A hebben, met 1.
In het algemeen:
n^e slag nummer de nog niet genummerde knopen, die afstand 1 vanuit een met n-1 genummerde knoop hebben, met n.

Bepaal bij de volgende grafen de afstand van A naar B en de afstand van B naar A.
Teken in elk van de gevallen een deelgraaf van G zonder kringen, met dezelfde knopen als G en zo min mogelijk takken waarvan elke knoop vanuit A bereikbaar is langs de kortste weg.
Zie bv. A. Kaufmann, Graphs, dynamic programming and finite games, blz. 255.

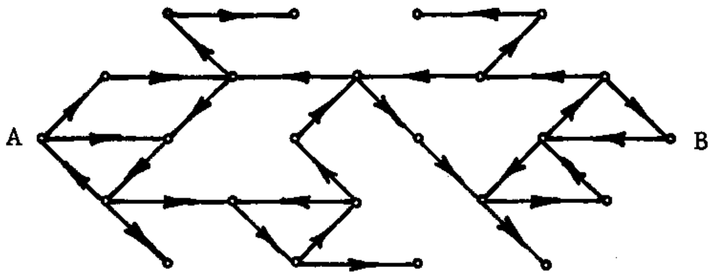
a)



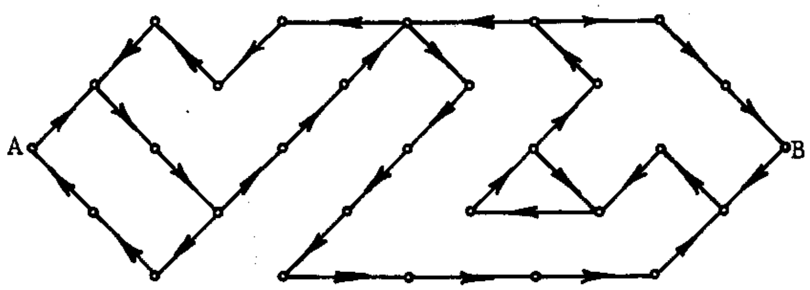
b)



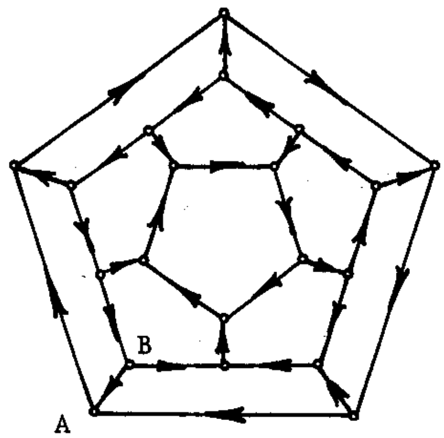
c)



d)



e)

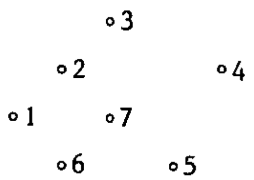


2. <u>Het bepalen van een optimale boom.</u>

Op een enkelvoudige, samenhangende, ongerichte graaf G is een afbeelding C gedefinieerd, die aan iedere deelgraaf g van G een geheel getal C(g) toevoegt, genaamd de kostprijs van g. De kostprijs van een deelgraaf van G is de som van de kostprijzen van de tot de deelgraaf behorende takken. De kostprijzen van de takken van G worden in een symmetrische matrix C genoteerd. Het matrixelement C_{ij} geeft de kostprijs aan van de tak $x_i x_j$; indien x_i en x_j niet verbonden zijn, staat op de plaats C_{ij} het symbool ∞.

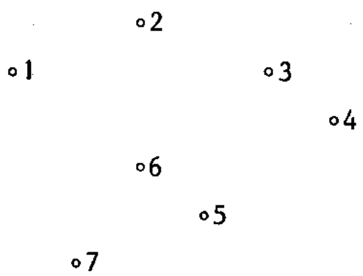
Een eenvoudige algoritme om een samenhangende deelgraaf van G te vinden zonder kringen, die alle knopen van G bevat en minimale kostprijs heeft (optimale boom), is de volgende algoritme:
Maak allereerst een bos, die slechts uit één tak van G bestaat en wel uit de tak van G met de laagste kostprijs. Voeg vervolgens telkens een tak toe aan het bos en wel de tak, die van de resterende takken van G de laagste kostprijs heeft en die géén kringen veroorzaakt.
De algoritme is afgelopen als alle knopen van G in het bos zijn opgenomen en het bos samenhangend is.
Bepaal van de onderstaande grafen, die met behulp van de kostprijsmatrix C gegeven zijn, een optimale boom.
Zie bv. A. Kaufmann, Introduction à la combinatorique et une des applications blz. 440.

a)



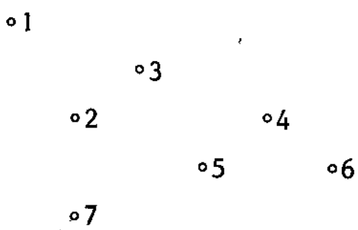
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 10 & 11 & 3 & 8 \\ & 0 & 4 & \infty & 12 & 7 & 4 \\ & & 0 & 5 & 8 & \infty & 6 \\ & & & 0 & 9 & 9 & 7 \\ & & & & 0 & 13 & 9 \\ & & & & & 0 & \infty \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

b)



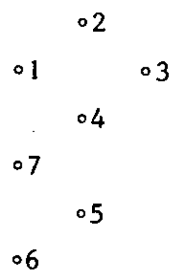
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 9 & \infty & 5 & \infty \\ & 0 & 11 & 12 & 6 & 4 & 13 \\ & & 0 & 7 & 9 & \infty & 10 \\ & & & 0 & 9 & 9 & 9 \\ & & & & 0 & 2 & \infty \\ & & & & & 0 & 9 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

c)



$$C = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 10 & \infty & 11 & 12 & \infty \\ & 0 & 2 & 11 & 6 & 8 & 6 \\ & & 0 & 6 & 5 & 8 & \infty \\ & & & 0 & 3 & 8 & 4 \\ & & & & 0 & 7 & 2 \\ & & & & & 0 & \infty \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

d)



$$C = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 10 & 5 & 12 & \infty & 5 \\ & 0 & 11 & 8 & 13 & 11 & \infty \\ & & 0 & 4 & \infty & 10 & 9 \\ & & & 0 & 10 & 9 & 8 \\ & & & & 0 & 1 & 2 \\ & & & & & 0 & 3 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

3. <u>Het bepalen van de rang van de knopen van een graaf</u>

Zij gegeven een eindige, enkelvoudige, samenhangende, gerichte graaf G zonder kringen.

De rang van de knopen van G kan als volgt bepaald worden

- bepaal de knopen waarin géén takken binnenkomen; ken deze knopen de rang 0 toe,
- verwijder alle takken die uitgaan van een knoop met rang 0.

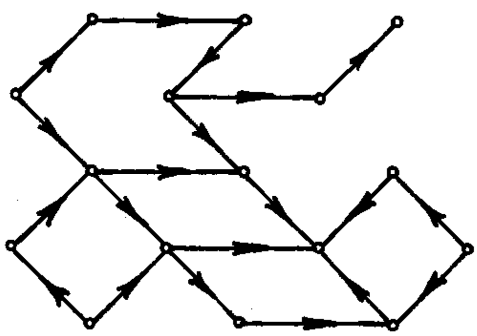
In het algemeen als we tot en met knopen van rang (n-1) gekomen zijn,

- bepaal de knopen die nog geen rangnummer hebben en waarin géén takken binnenkomen; ken deze knopen de rang n toe,
- verwijder alle takken die uitgaan van een knoop met rang n.

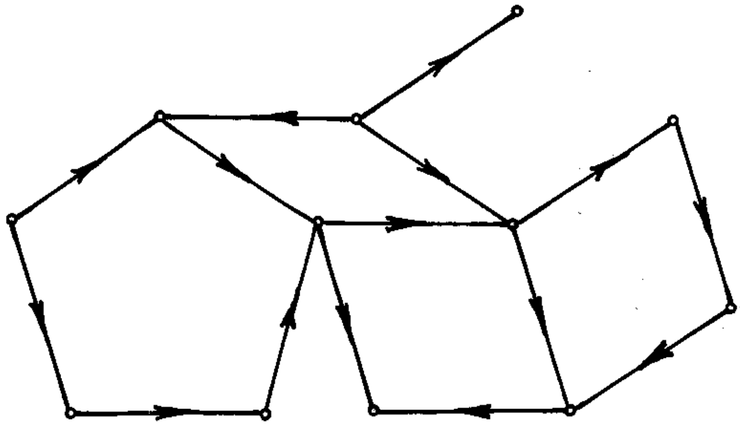
Bepaal de rang van de knopen van de grafen die gegeven zijn in opgave 4. Stemt de op deze wijze bepaalde rang overeen met die volgend uit de definitie van rang op pag. 57 van de college syllabus?

4. Nummer de knopen in de volgende grafen zodanig, dat voor iedere tak geldt: nummer b(t) < nummer e(t).

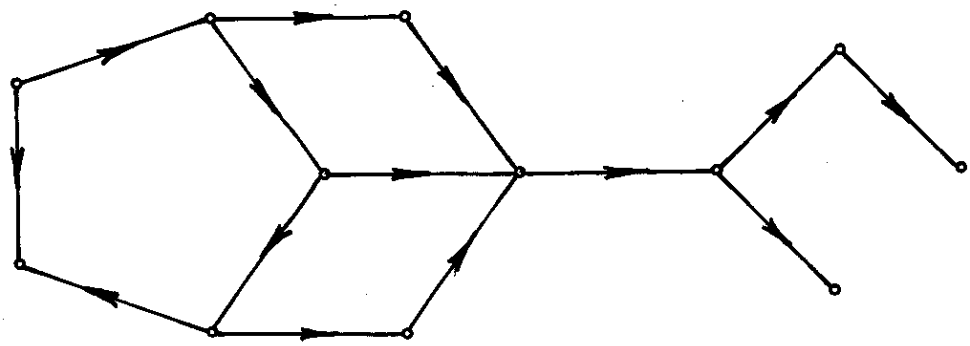
a)



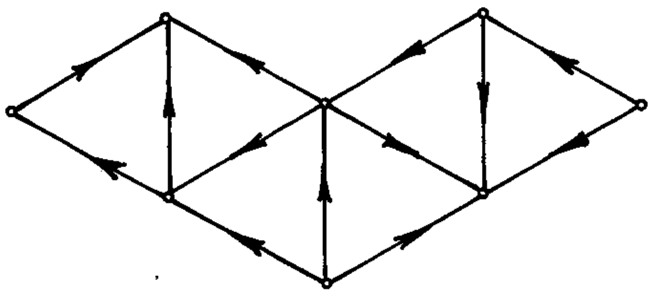
b)



c)

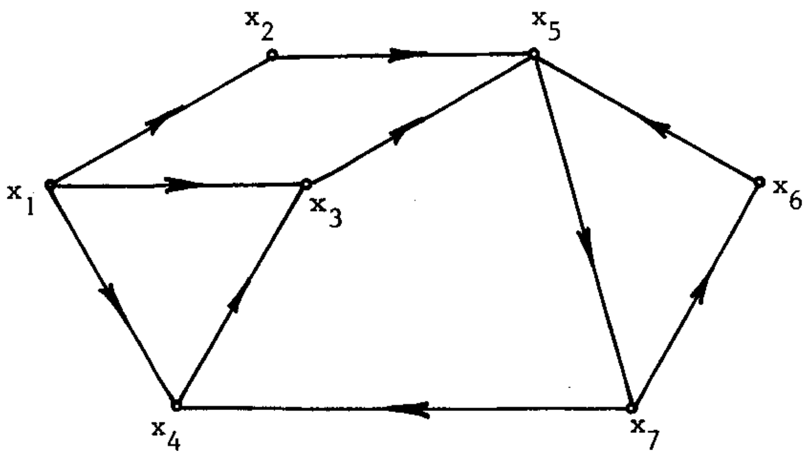


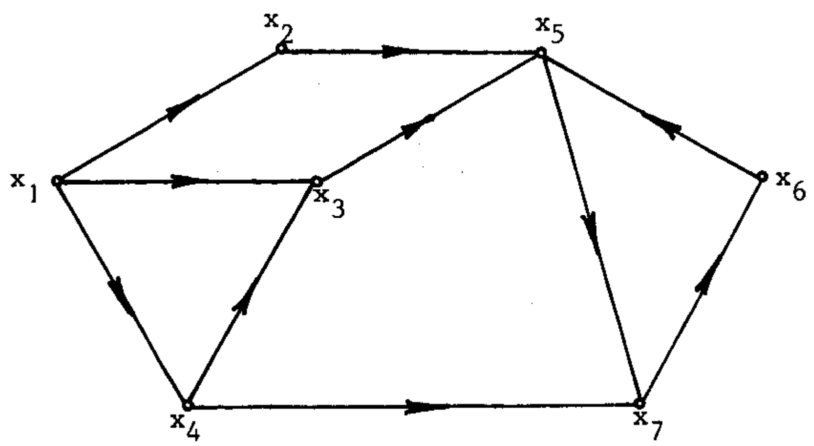
d)

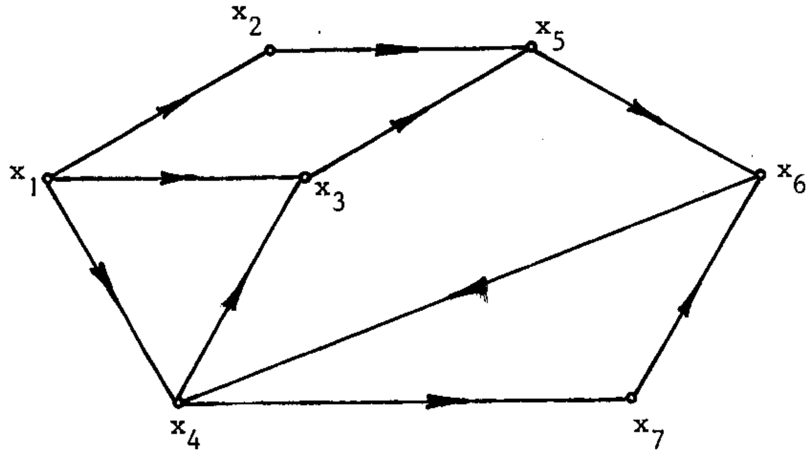


Bevatten bovenstaande grafen kringen?
Zie college syllabus.

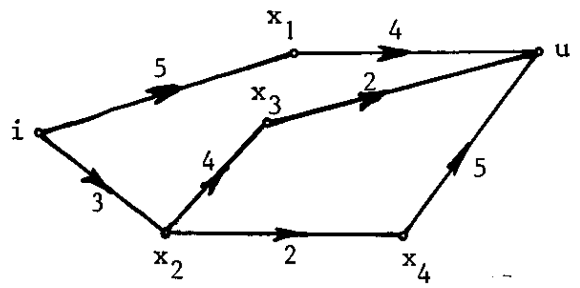
5. a) Stel de knopenmatrix K op van de grafen uit opgave 4.
   b) Bepaal de rang van de knopen met behulp van de in opgave 3 beschreven algoritme. Gebruik daarbij uitsluitend de matrix K.
   c) Wat gebeurt er als de graaf kringen bevat? Ga dit na aan de hand van de volgende grafen.


x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7


x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7

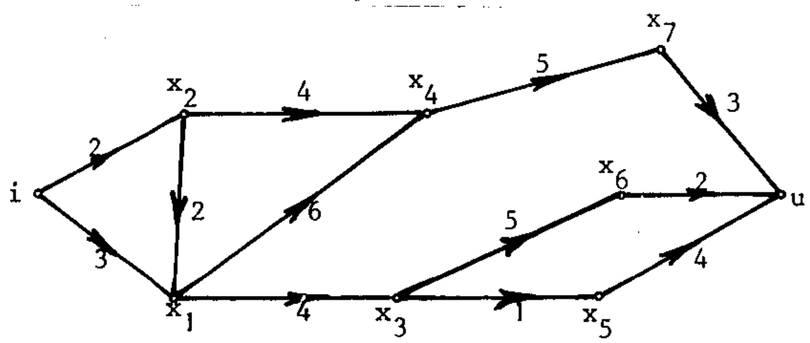

x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7

6\. a) Gegeven is het volgende transportnetwerk



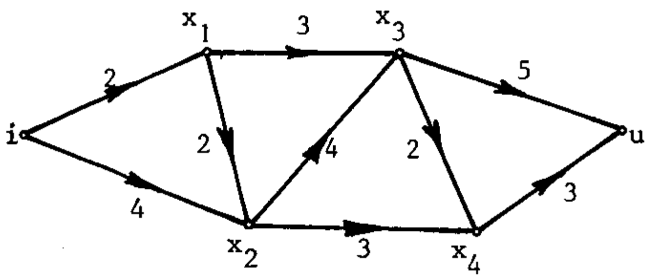
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

b) Gegeven is het volgende transportnetwerk



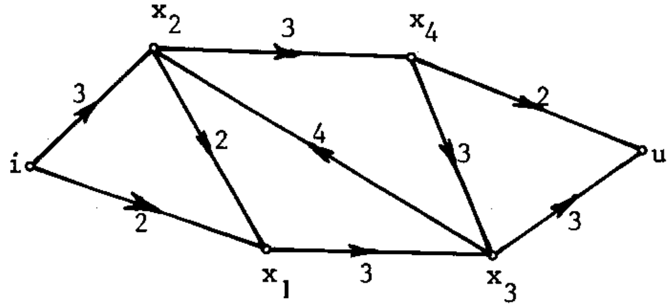
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

c) Gegeven is het volgende transportnetwerk



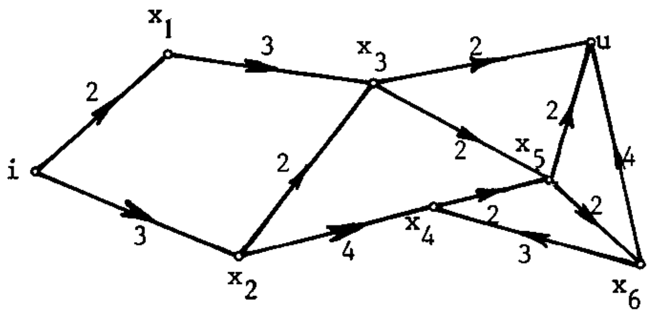
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

d) Gegeven is het volgende transportnetwerk



De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

e) Gegeven is het volgende transportnetwerk



De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

Antwoorden Hoofdstuk I. Lineaire Algebra

§ 1.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

3. a) 2; b) 1; c) $2x + y - 3z = 0$; d) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $X = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

6. b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; d) $AX = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \end{pmatrix}$; e) nee.

7. b) $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; c) het vlak $(\mathcal{A}\underline{p},\underline{x}) = 0$; d) $p = -2 \pm \sqrt{3}$.

8. b) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

D^4 = nulmatrix.

9. b) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) ja, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. b) de deelruimte van functies f uit V met $f(0) = 0$; c) nee.

11. a) altijd; b) $\alpha\delta \neq \beta\gamma$; c) $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ en $c \neq 0$; d) $\alpha = \delta = 1$ en $\beta = \gamma = 0$;
f) α, δ en c.

§ 2.

1. $S = (5)$; $(x/5)$.

2. $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3x + 2y \\ 2x - y \end{pmatrix}$.

3. $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. $A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $A' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -12 & -26 & -44 \\ 9 & 20 & 32 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$; $AX = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $A'X' = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8. $B = TS^{-1}AST^{-1}$.

§ 3.

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; b) 3, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

3. $\lambda_1 = 1$, $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2$, $U_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 3$, $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Vraagstuk 6, § 1: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 0$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vraagstuk 7, § 1: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = -1$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. a) $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

b) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}$, $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 0$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

b) $3^6 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & O \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \mu_n \end{pmatrix}$ met $\mathcal{A}\,\underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i$ en $\mathcal{B}\,\underline{u}_i = \mu_i \underline{u}_i$
(i = 1,2,...,n).

9. 1 en 2.

10. $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_k}$; de eigenvectoren van $\mathcal{A}$ bij $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

§ 4.

5. De diagonalen van een ruit staan loodrecht op elkaar.

7. a) en b) voldoen; c) voldoet niet.

8. a) ja; b) bijv. $1 - \frac{3}{2}t$; c) bijv. $6t^2 - 6t + 1$; d) $t - \frac{1}{6}$.

9. Bijv. e^t en $e^{2t} - \frac{2}{3}\,\frac{e^3 - 1}{e^2 - 1}\,e^t$.

10. Bijv. 1, $t - 1$ en $t^2 - 4t + 2$.

11. c) $n - k$.

12. a) bijv. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$; b) $\frac{3}{5}\begin{pmatrix}5\\3\\1\\2\\1\end{pmatrix}$.

17. $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -2+\sqrt{6} & 1+2\sqrt{6}\\ -2-\sqrt{6} & 4 & -2+\sqrt{6}\\ 1-2\sqrt{6} & -2-\sqrt{6} & 1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

§ 5.

1. Nee; bijv.: $\mathcal{A} : R_2 \to R_2$ met matrix $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ t.o.v. een orthonormale basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$. T.o.v. de basis $\underline{f}_1 = 2\underline{e}_1$, $\underline{f}_2 = \underline{e}_2$ heeft $\mathcal{A}$ de matrix

$$A' = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 2 & 0\end{pmatrix} .$$

4. De hoek tussen $\underline{v}$ en $\mathcal{A}\underline{v}$ is $\le \frac{\pi}{2}$.

5. Ja.

Antwoorden Hoofdstuk II. Functies van meer veranderlijken

1. a) en b) het hele (u,v)-vlak. De rechte $x = c$(onstant) heeft als beeld de parabool $4c^2u = 4c^4 - v^2$. De rechte $y = c$ heeft als beeld de parabool $4c^2u = v^2 - 4c^4$.

   c) het halfvlak $v \geq 0$.

   d) tweemaal de cirkel $u^2 + v^2 = 1$.
   Nee, want (x,y) en $(-x,-y)$ hebben hetzelfde beeld.

2. a) de parabolische cilinder met vergelijking $(u+v)^2 = 4w$.

   b) deel van de cilinder met $u + v \geq 0$.

   c) deel van de cilinder met $u \geq v$.

   d) deel van de cilinder in het "kwadrant" $\begin{cases} u \leq -v \\ u \leq v \end{cases}$.
   Bij gegeven (u_0,v_0,w_0) met $(u_0+v_0)^2 = 4w_0$ vinden wij $x_0 = \frac{1}{2}(u_0+v_0)$ en $y_0 = \frac{1}{2}(u_0-v_0)$. Maar dan is ook $x_0^2 = \frac{1}{4}(u_0+v_0)^2 = w_0$.

3. $(1-r^2)^{-\frac{5}{2}}$.

4. $\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y = \dfrac{v}{u^2+v^2} \end{cases}$.

5. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1)$ en $(4, -\frac{8}{3}, -2)$.

7. a) globaal maximum 0 in $(0,0)$, globaal minimum -2 in $(1,1)$

   b) globaal maximum 4 in $(1,0)$, globaal minimum $-\frac{1}{2}$ in $(-\frac{1}{2},0)$

   c) locaal minimum 0 in $(0,0)$

   d) locaal minimum 0 in $(0,0)$

   e) geen extrema

   f) globaal minimum 0 in $(1,1)$

   g) locaal maximum 0 in $(0,0)$, globale minima $-\frac{9}{8}$ in $\pm(\frac{1}{2},1)$ en $\pm(\frac{1}{2},-1)$.

8. a) globale maxima $\frac{3}{2}$ in $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1,-1)$, globale minima $\frac{1}{2}$ in $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1,1)$

   b) globale maxima $\frac{1}{2}$ in $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1,1)$, globale minima $-\frac{1}{2}$ in $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1,-1)$

   c) globale maxima 3 in $\pm(1,1,2)$, globale minima 1 in $\pm(1,-1,-2)$

   d) globale maxima $\sqrt{3}$ in $\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}(1,1,1)$

   globale minima 0 op de cirkel $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

   e) globale maxima 1 in $\pm(1,1,1)$, $\pm(1,1,-1)$, $\pm(1,-1,1)$ en $\pm(-1,1,1)$

   globale minima 0 op de cirkels $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + z^2 = 3 \end{cases}$ en $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$

   f) locaal minimum $\frac{1}{9}$ in $\frac{1}{3}$ $(1,1,1)$.

9. a) globaal maximum $1 + \sqrt{2}$ in $\frac{\pi}{4}$ $(1,1)$, globaal minimum 0 in $(0,0)$

   b) globale maxima 2 in $(1, \pm\sqrt{3})$
   globaal minimum -16 in $(-2,0)$
   locaal minimum $-\frac{32}{27}$ in $(\frac{4}{3},0)$

   c) globaal maximum $\frac{4}{15}\sqrt{5}$ in $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ $(2,-1)$

   globaal minimum $-\frac{4}{15}\sqrt{5}$ in $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ $(-2,1)$

   locaal maximum $\frac{1}{6}\sqrt{2}$ in $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $(-1,-1)$

   locaal minimum $-\frac{1}{6}\sqrt{2}$ in $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $(1,1)$

   locale maxima 0 in $(0,y)$ met $0 < y \le 1$

   locale minima 0 in $(0,y)$ met $-1 \le y < 0$

   d) globaal maximum 36 in $(-2,0)$
   globale minima $-\frac{16}{5}$ in $\frac{2}{5}$ $(2, \pm\sqrt{21})$
   locaal maximum 4 in $(2,0)$

   e) globaal maximum $\sqrt{2}$ in $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $(1,1)$

   globaal minimum $-\sqrt{2}$ in $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $(-1,-1)$

   f) globaal maximum 2 in $(0,-1)$
   globaal minimum -2 in $(0,1)$
   locale maxima $\frac{2}{9}$ in $\frac{1}{3}$ $(\pm2\sqrt{2},1)$

   locale minima $-\frac{2}{9}$ in $\frac{1}{3}$ $(\pm2\sqrt{2}, -1)$.

10. Er zijn 4 punten met minimale afstand tot de oorsprong: $\pm(1,0,0)$ en $\pm(0,1,0)$.

11. maximale afstand 1 in $(1,0,0)$
minimale afstand $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ in $\frac{1}{3}\,(1,2,0)$.

12. $|a|$ als $a \le 2$
$2\sqrt{a-1}$ als $a > 2$.

13. $$\frac{|\alpha a + \beta b + \gamma c - \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \; .$$

14. $$a = \frac{1}{14}\,(2e_1 - e_2 - 2e_3 - e_4 + 2e_5)$$
$$b = \frac{1}{10}\,(-2e_1 - e_2 \qquad + e_4 + 2e_5)$$
$$c = \frac{1}{35}\,(-3e_1 + 12e_2 + 17e_3 + 12e_4 - 3e_5) \; .$$

15. b) globale maxima $\frac{9}{4}$ in $(\pm \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2})$
globaal minimum 0 in $(0,0)$
locaal minimum 2 in $(0,2)$.

16. globale maxima 1 in $(1,0)$ en $(1,1)$
globaal minimum $-\frac{1}{8}$ in $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

17. globaal maximum 5 in $(1,0)$
globaal minimum -3 in $(-1,0)$
locaal maximum $\frac{1}{108}$ in $(-\frac{1}{6}, 0)$.

18. globale maxima $\frac{32}{27}$ in $(\pm \frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3})$
locale maxima 0 in $(0,y)$ met $y > 1$
locale minima 0 in $(0,y)$ met $-1 \le y < 1$.

19. globaal maximum 240 in $(4,4)$
globale minima -3 in $(1,-2)$ en $(-2,1)$
locaal maximum $\frac{8}{9}\sqrt{3}$ in $(-\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3})$
locaal minimum $-\frac{8}{9}\sqrt{3}$ in $(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$.

20. globale maxima $\frac{9}{2}$ in $(\pm \frac{1}{2}\sqrt{15}, -\frac{1}{2})$
globaal minimum -8 in $(0,2)$
locaal minimum 0 in $(0,-2)$.

21. globale maxima 8 in $\pm(2,2)$ en $\pm(2,-2)$
globale minima -8 in $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ en $(0, \pm 2\sqrt{2})$
locaal maximum 0 in $(0,0)$.

22. globaal maximum 15 in $(-3,0)$
globaal minimum -15 in $(0,-3)$
locaal maximum 3 in $(3,0)$
locaal minimum -3 in $(0,3)$.

23. globale maxima 9 in $(\pm 3,y)$ met $-3 \leq y \leq 3$
globaal minimum 0 in $(0,0)$.

24. locale maxima 0 in $(x,0)$ met $x < 0$
locale minima 0 in $(x,0)$ met $x > 0$.

25. globale maxima $\frac{1}{2}$ in $\pm(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$
globale minima $-\frac{1}{2}$ in $\pm(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$.

26. globale maxima 2 in $(0, \pm 1)$
globale minima 0 in $(\pm 1,0)$.

27. globale maxima $\frac{1}{2}$ in $\pm(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$
globale minima $-\frac{1}{2}$ in $\pm(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$.

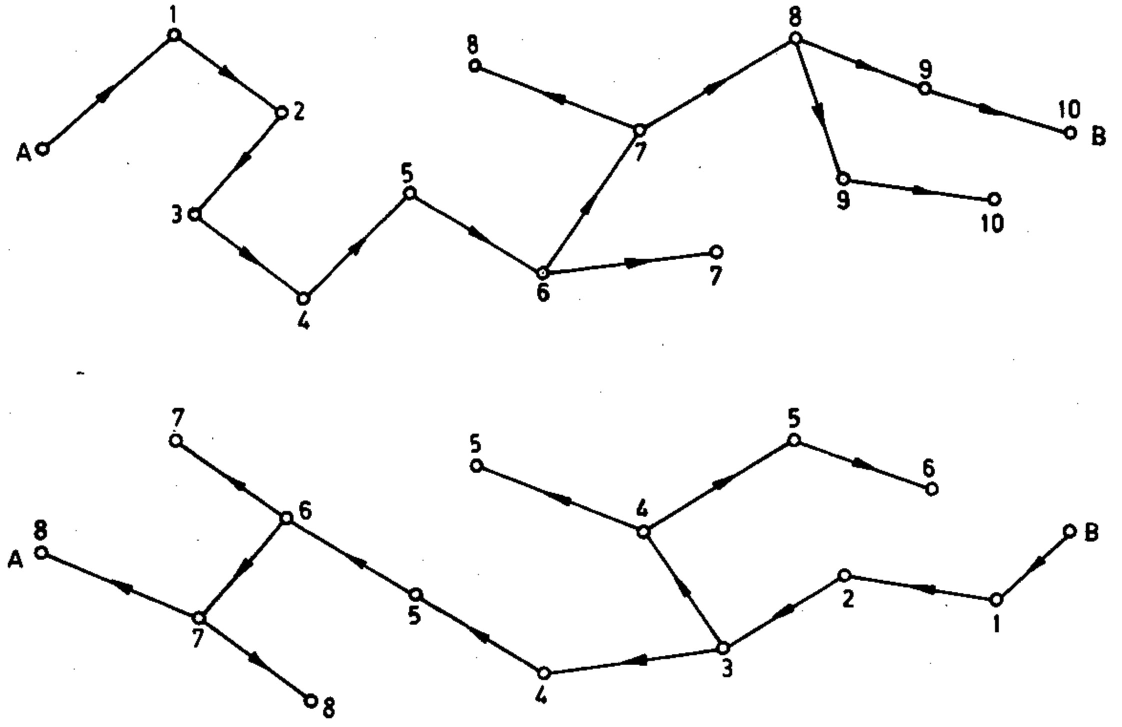
28. globale maxima $\frac{13}{4}$ in $\pm(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{14})$ en $\pm(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{14})$
globale minima -9 in $(\pm 2,0)$
locaal minimum -1 in $(0,0)$.

29. globale maxima $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ in $(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \pm 3^{-\frac{1}{4}})$
globale minima -60 in $(4, \pm 2)$
locale maxima 0 in $(x,0)$ met $1 < x \leq 4$
locale minima 0 in $(x,0)$ met $0 \leq x < 1$.

30. a) aantal producten 10, winst 200
b) $x = 8$, $y = 9$ of $x = y = 9$, winst in beide gevallen $311\frac{2}{3}$
c) $x = 10$, $y = 9$, winst $305\frac{2}{3}$.

Antwoorden Hoofdstuk III. Grafentheorie

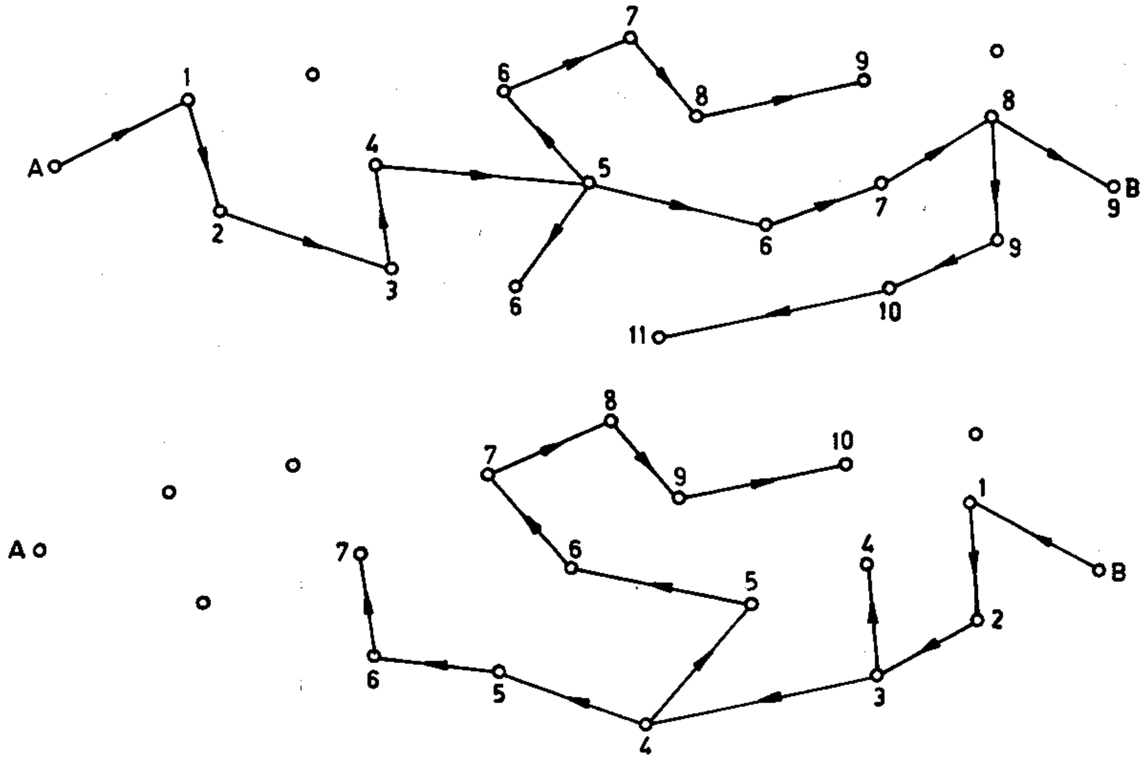
1. a)



dist (A,B) = 10

dist (B,A) = 8

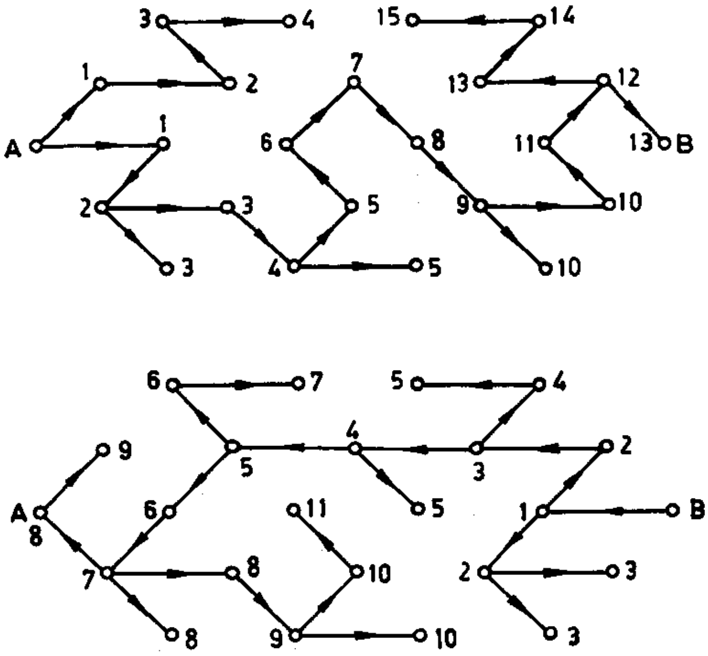
b)



dist (A,B) = 9

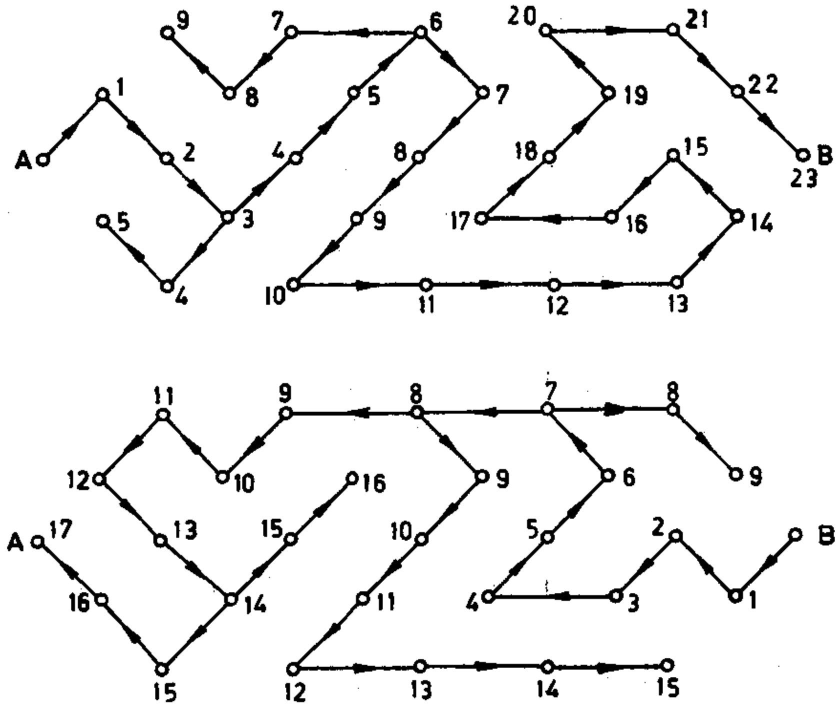
A is niet bereikbaar vanuit B.

c)



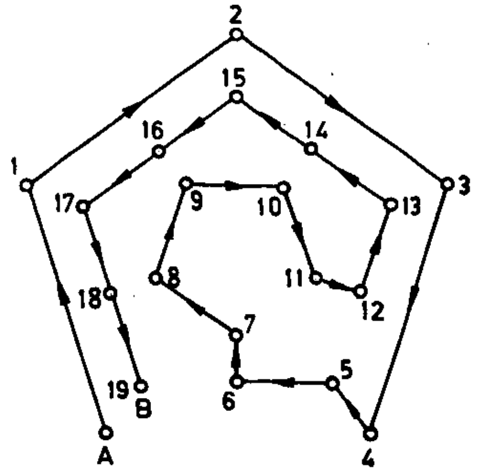
dist (A,B) = 13
dist (B,A) = 8 .

d)



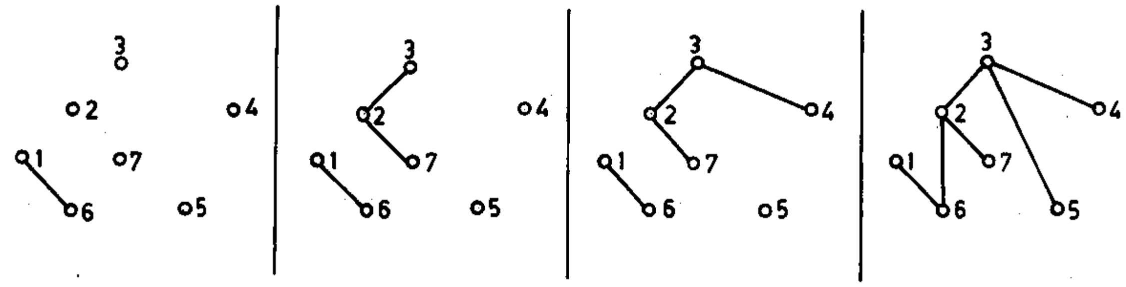
dist (A,B) = 23
dist (B,A) = 17 .

e)

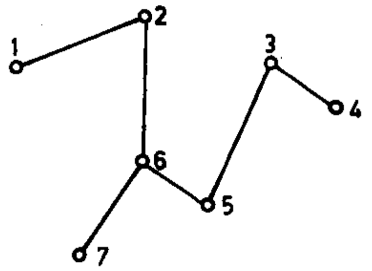


dist (A,B) = 19
dist (B,A) = 1 .

2. a)

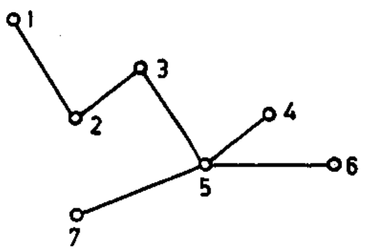


b)

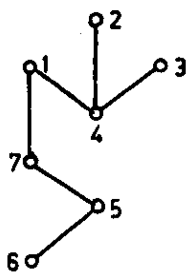


(meerdere oplossingen mogelijk)

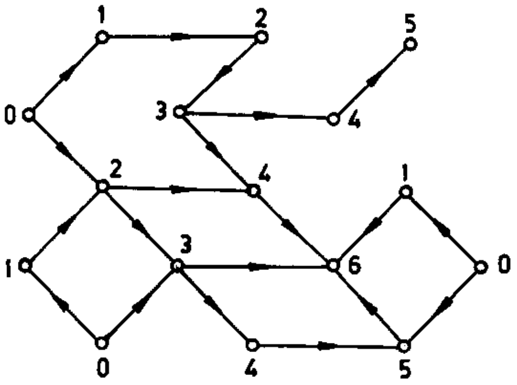
c)



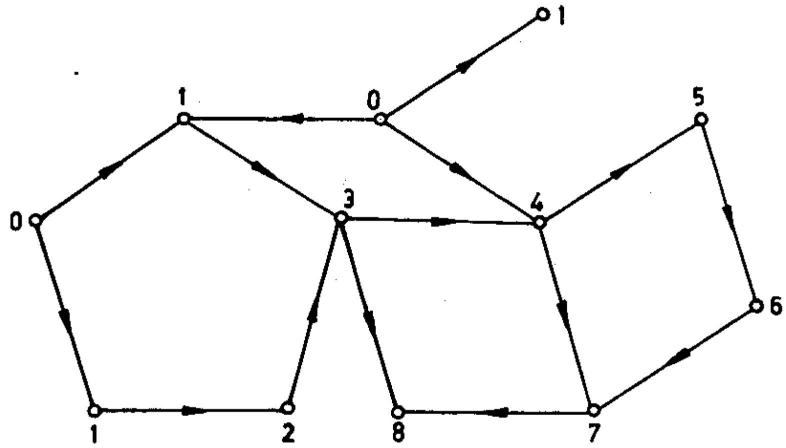
d)



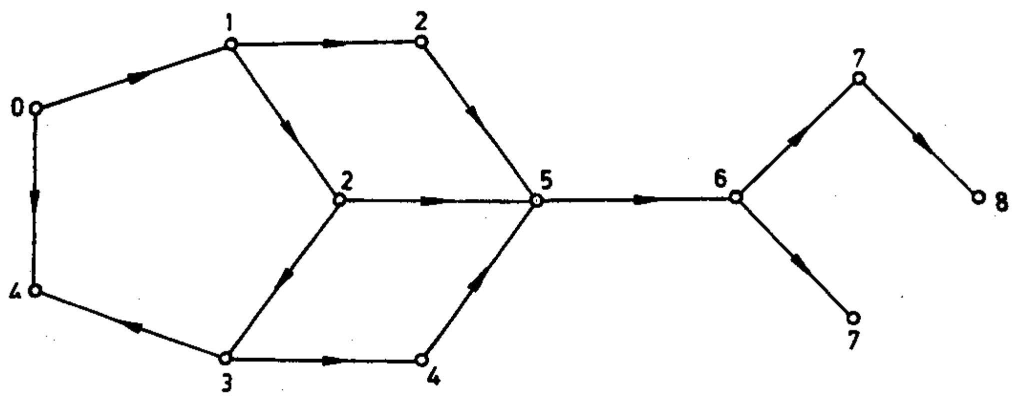
3 en 4. a)



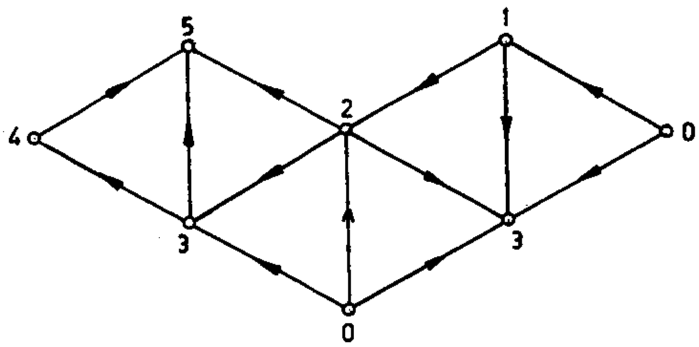
b)



c)



d)



6. a)

	c			
ix_1	5	4	4	4
ix_2	3	0	2	$\underline{3}$
x_1u	4	$\underline{4}$	$\underline{4}$	$\underline{4}$
x_2x_3	4	0	0	1
x_2x_4	2	0	$\underline{2}$	$\underline{2}$
x_3u	2	0	0	1
x_4u	5	0	2	2
		4	6	7

$S = \{ix_2, x_1u\}$

b)

	c			
ix_1	3	0	2	$\underline{3}$
ix_2	2	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$
x_1x_3	4	0	2	3
x_1x_4	6	0	0	0
x_2x_1	2	0	0	0
x_2x_4	4	2	2	2
x_3x_5	1	0	0	$\underline{1}$
x_3x_6	5	0	2	2
x_4x_7	5	2	2	2
x_5u	4	0	0	1
x_6u	2	0	$\underline{2}$	$\underline{2}$
x_7u	3	2	2	2
		2	4	5

$S = \{ix_1, ix_2\}$

c)

	c			
ix_1	2	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$
ix_2	4	0	3	$\underline{4}$
x_1x_2	2	0	0	0
x_1x_3	3	2	2	2
x_2x_3	4	0	0	1
x_2x_4	3	0	$\underline{3}$	$\underline{3}$
x_3x_4	2	0	0	0
x_3u	5	2	2	3
x_4u	3	0	$\underline{3}$	$\underline{3}$
		2	5	6

$S = \{ix_1, ix_2\}$

d)

	c			
ix_1	2	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$
ix_2	3	0	2	$\underline{3}$
x_1x_3	3	2	2	$\underline{3}$
x_2x_1	2	0	0	1
x_2x_4	3	0	2	2
x_3x_2	4	0	0	0
x_3u	3	2	2	$\underline{3}$
x_4x_3	3	0	0	0
x_4u	2	0	$\underline{2}$	$\underline{2}$
		2	4	5

$S = \{ix_1, ix_2\}$

of

$S = \{x_3u, x_4u\}$

e)

	c			
ix_1	2	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$
ix_2	3	0	2	$\underline{3}$
x_1x_3	3	2	2	2
x_2x_3	2	0	$\underline{2}$	$\underline{2}$
x_2x_4	4	0	0	1
x_3x_5	2	0	$\underline{2}$	$\underline{2}$
x_3u	2	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$
x_4x_5	2	0	0	1
x_5x_6	2	0	$\underline{2}$	$\underline{2}$
x_5u	2	0	0	1
x_6x_4	3	0	0	0
x_6u	4	0	2	2
		2	4	5

$S = \{ix_1, ix_2\}$.

T E N T A M E N O P G A V E N   M E T   A N T W O O R D E N

Tentamenopgaven

12 juni 1971

1. In R_3 is de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ bepaald door

$$\mathcal{A}(4,0,1) = (0,-2,1)$$

$$\mathcal{A}(3,1,1) = (-1,-1,1)$$

$$\mathcal{A}(1,2,0) = (-3,0,0)\ .$$

a) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. de natuurlijke basis.
b) Bepaal de eigenwaarden van $\mathcal{A}$ en een bijbehorende basis van eigenvectoren $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$.
c) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$.
d) Is $\mathcal{A}$ een symmetrische afbeelding? Motiveer Uw antwoord.

2. In R_3, met het gebruikelijke inproduct, is gegeven een vector $\underline{a}$ met lengte 1. De afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ is gedefinieerd door

$$\mathcal{A}\underline{x} = \underline{x} - 2(\underline{a},\underline{x})\underline{a}\ .$$

a) Bewijs dat $\mathcal{A}$ een lineaire afbeelding is.
b) Bewijs dat $\mathcal{A}$ een orthogonale afbeelding is.
c) Bewijs dat $\mathcal{A}$ een symmetrische afbeelding is.
d) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{A}$.

3. Bepaal de extrema, hun aard en waarde van de functie

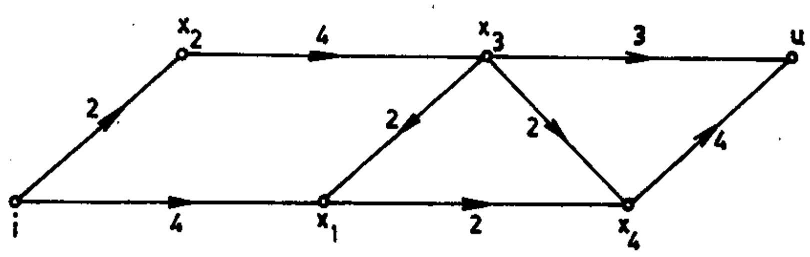
$$f(x,y) = (x - 1)^2 + y^2$$

op het gebied G dat bepaald wordt door

$$y^2 \leq x \leq \tfrac{1}{2}y^2 + 2\ .$$

T

4. Gegeven is het volgende transportnetwerk



De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.

Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

<u>21 juni 1971</u>

1. In R_3 is de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ bepaald door

$$\mathcal{A}(2,0,-1) = (1,-1,0)$$

$$\mathcal{A}(2,1,0) = (1,0,-1)$$

$$\mathcal{A}(1,2,3) = (-1,0,1) \quad .$$

a) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$ t.o.v. de natuurlijke basis.

b) Bepaal een basis $\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'$ ten opzichte waarvan $\mathcal{A}$ een diagonaalmatrix heeft.

c) Bepaal de overgangsmatrix S bij overgang van de natuurlijke basis naar de basis $\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'$.

d) Zij $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ de natuurlijke basis. Bepaal de kolom van $\underline{e}_1$ t.o.v. de basis $\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'$.

2. Zij V de vectorruimte van polynomen van de graad ≤ 2, gedefinieerd op de positieve reële as.
De relatie (f,g) wordt voor alle f en g uit V gedefinieerd door

$$(f,g) := \int_0^\infty e^{-t} f(t)g(t)dt \ .$$

a) Bewijs dat (f,g) een inproduct is.

b) Bepaal een orthonormale basis van V.

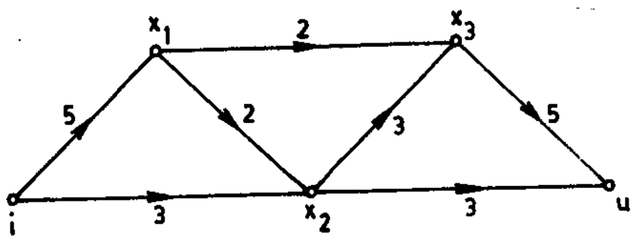
$$\left(\int_0^\infty e^{-t}\, t^n dt = n! \right)$$

3. Bepaal de extrema, hun aard en hun waarde van de functie

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$$

op het gebied G dat bepaald wordt door $x^2 + y^2 \leq 1$.

4. Gegeven is het volgende transportnetwerk



De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.

Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

17 januari 1972

1. In de drie-dimensionale Euclidische ruimte R_3 is een vector $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ met lengte 1 gegeven. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ van R_3 in R_3 is gedefinieerd door

$$\mathcal{A}(x,y,z) = (x + y + z)\underline{a} \; .$$

a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{A}$,

b) Bepaal een nodige en voldoende voorwaarde,op te leggen aan $\underline{a}$,zodat er een orthonormale basis van eigenvectoren bestaat,

c) Bepaal in het onder b) genoemde geval een orthonormale basis van eigenvectoren van $\mathcal{A}$ en de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van de gekozen basis.

2. Zij $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ een symmetrische lineaire afbeelding.

   a) Als $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) \geq 0$ voor alle $\underline{x} \in R_3$, bewijs dan dat alle eigenwaarden van $\mathcal{A}$ niet-negatief zijn,

   b) Als alle eigenwaarden van $\mathcal{A}$ niet-negatief zijn, bewijs dan dat $(\mathcal{A}\underline{x},\underline{x}) \geq 0$ voor alle $\underline{x} \in R_3$,

   c) Bewijs dat aan de voorwaarden onder a) en b) genoemd voldaan is dan en slechts dan als er een symmetrische lineaire afbeelding $\mathcal{B} : R_3 \to R_3$ bestaat zodat $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$.

3. In R_2 is het gebied G gedefinieerd door:

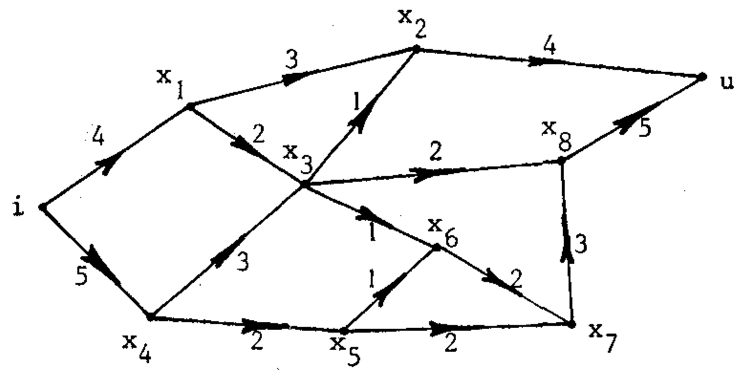
$$G : \begin{cases} x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \ . \end{cases}$$

   De functie $f(x,y)$ is op G gedefinieerd door:

$$f(x,y) = (1 - x^2)(1 - y^2) \ .$$

   Bepaal de extrema van $f(x,y)$ op G.

4. Gegeven is het volgende transportnetwerk



   De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.

   a) Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte.

   b) Bepaal een snede, waarvan beide componenten uit tenminste vier knooppunten bestaan, met minimale capaciteit.

29 januari 1972

1. Van een afbeelding $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ is gegeven dat voor elke vector $\underline{x} \in R_3$

$$\mathcal{A}\underline{x} = \underline{x} - \alpha(\underline{x},\underline{n})\underline{n}$$

waarbij α een gegeven reëel getal en $\underline{n}$ een gegeven vector met lengte 1 is.

a) Bewijs dat $\mathcal{A}$ een lineaire afbeelding is.

b) Bewijs dat $\mathcal{A}$ een symmetrische afbeelding is.

c) Bepaal α zodanig dat $\mathcal{A}$ een orthogonale afbeelding is.

2. Van de lineaire afbeeldingen $\mathcal{A}$: $R_3 \to R_3$ en $\mathcal{B}$: $R_3 \to R_3$ is gegeven de matrix

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ten opzichte van de natuurlijke basis $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$.
Verder is gegeven dat $\mathcal{A}$ orthogonaal is en dat $\mathcal{B} = \alpha\,\mathcal{I}$ waarin $\mathcal{I}$ de identiteit voorstelt en α een positief reëel getal is.

a) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$ en de matrix van $\mathcal{B}$ ten opzichte van de natuurlijke basis.

b) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. Ten opzichte van welk vlak is $\mathcal{A}$ een spiegeling?

c) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{B}\mathcal{A}$.

d) Is het mogelijk een basis te vinden ten opzichte waarvan zowel de matrix van $\mathcal{A}$ als de matrix van $\mathcal{B}$ een diagonaalmatrix is? Verklaar Uw antwoord.

3. In R_2 is het gebied G gedefinieerd door:

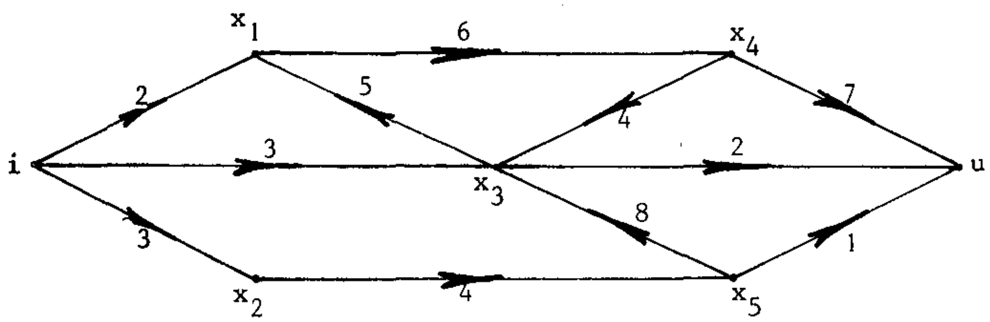
$$G : \begin{cases} x^2 - 2x - 2y \le 1 \\ \qquad\quad y \le 1 . \end{cases}$$

De functie f(x,y) is op G gedefinieerd door:

$$f(x,y) = (x - 1)(y - 1) .$$

Bepaal de extrema van f(x,y) op G.

4. Gegeven is het volgende transportnetwerk



De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.

a) Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte.

b) Bepaal een snede met minimale capaciteit.

10 juni 1972

1. In R_3 zijn gegeven de vectoren

$$\underline{a} = (1, 0, 0)$$
$$\underline{b} = (3, 2, 0)$$
$$\underline{c} = (1, 2, 3).$$

De lineaire afbeelding $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ is bepaald door

$$\mathcal{A}\underline{a} = (0, 0, 3)$$
$$\mathcal{A}\underline{b} = (0, 2, 3)$$
$$\mathcal{A}\underline{c} = (5, 4, 3).$$

a) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

b) Is $\mathcal{A}$ een symmetrische afbeelding?
Motiveer Uw antwoord.

2. In R_3 met het gebruikelijke inproduct is gegeven de vector $\underline{n}$ met lengte 1 en de vector $\underline{a}$ met de eigenschap $(\underline{a},\underline{n}) \neq 0$.
De afbeelding $\mathcal{A} : R_3 \to R_3$ is gedefinieerd door

$$\mathcal{A}\underline{x} = \underline{x} - 4(\underline{x},\underline{n})\underline{a}.$$

a) Bewijs dat $\mathcal{A}$ een lineaire afbeelding is.

b) Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren van $\mathcal{A}$.

c) Bepaal $\underline{a}$ zodanig dat $\mathcal{A}$ een orthogonale afbeelding is.

3. Bepaal de extrema, hun aard en hun waarde van de functie

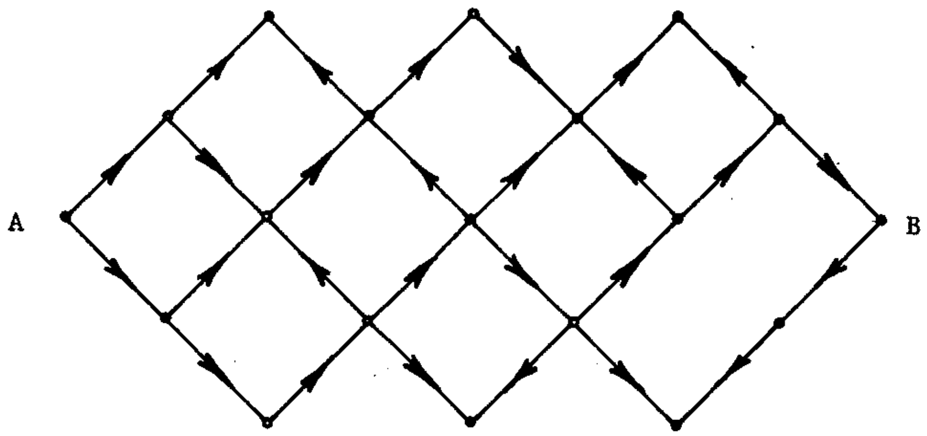
$$f(x,y) = (x-1)(y-1)$$

op het gebied G dat bepaald wordt door

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y \le 4 \\ 3x - 2y \le 0 \\ x \ge 0. \end{cases}$$

4. a) Bevat onderstaande gerichte graaf kringen?
Motiveer Uw antwoord.

b) Bepaal in deze graaf de lengte van de kortste weg tussen de knopen A en B.



17 juni 1972

1. Van de lineaire afbeelding $\mathcal{A}: R_3 \to R_3$ is gegeven dat

$$\mathcal{A}(1,\ 1,\ 1) = (2,\ 1,\ 2)$$
$$\mathcal{A}(1,\ 2,-1) = (0,\ 2,\ 0)$$
$$\mathcal{A}(-1,-1,2) = (1,-1,\ 1).$$

a) Bepaal de matrix A van $\mathcal{A}$ ten opzichte van de natuurlijke basis.

b) Bepaal een orthonormale basis van R_3, ten opzichte van het gebruikelijke inproduct, zodat de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van deze basis diagonaalvorm heeft.

c) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van de onder b) bepaalde basis.

2. Zij V een n-dimensionale vectorruimte met inproduct $(\underline{x}, \underline{y})$.
Zij $\mathcal{T}$ een symmetrische lineaire afbeelding van V in V.
Definieer voor $\underline{x} \in V$, $\underline{y} \in V$

$$[\underline{x}, \underline{y}] := (\mathcal{T}\underline{x}, \underline{y}).$$

Bewijs dat $[\underline{x}, \underline{y}]$ een inproduct is dan en slechts dan als alle eigenwaarden van $\mathcal{T}$ positief zijn.

3. Bepaal de extrema, hun aard en hun waarde van de functie

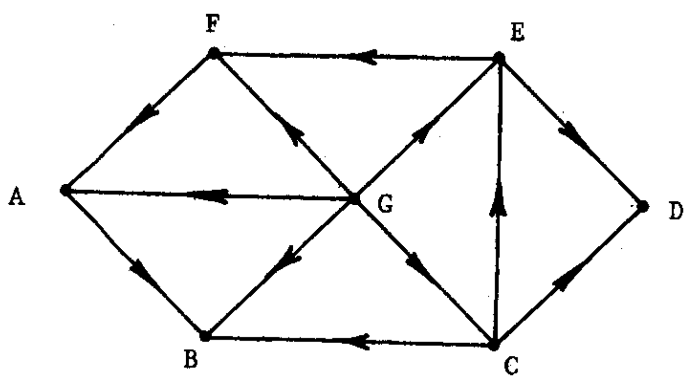
$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$$

op het gebied G dat bepaald wordt door

$$x^2 + 2y^2 \leq 4.$$

4. a) Nummer in de volgende gerichte graaf de knopen zodanig dat voor iedere tak het nummer van de beginknoop kleiner is dan het nummer van de eindknoop.

b) Keer nu de pijl tussen B en C om.
Lukt het weer om zo een nummering als onder a) gevraagd te geven?
Zo nee, waarom niet ?



15 januari 1973

1. In R_4 is de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ ten opzichte van een orthonormale basis g_1, g_2, g_3, g_4 bepaald door de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

a) Bepaal een orthonormale basis van R_4, ten opzichte waarvan de matrix van $\mathcal{A}$ diagonaalvorm heeft.

b) Zij $\underline{a} = \underline{g}_1 + g_2 + g_3 + g_4$. Druk $\mathcal{A}\underline{a}$ uit in de oude en in de nieuwe basis.

2. De vectoren $g_1, g_2, \ldots, g_n$ vormen een orthonormale basis in R_n.
De afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ is gedefinieerd door

$$\mathcal{A}\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (\underline{x}, g_i) g_i , \qquad \underline{x} \in R_n .$$

a) Bewijs dat $\mathcal{A}$ een lineaire symmetrische afbeelding is.

b) Bewijs dat $\mathcal{A}$ orthogonaal is.

c) Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{A}$.

d) Wat stelt $\mathcal{A}$ voor $n = 3$ meetkundig voor?

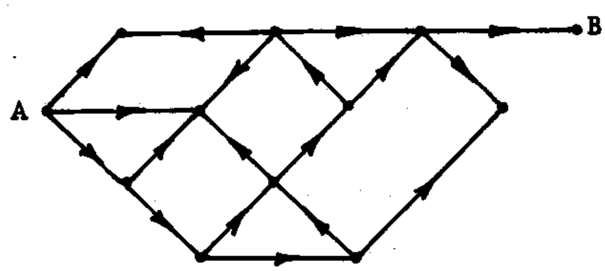
3. Bepaal de extrema, hun aard en hun waarde van de functie

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2(x+y)$$

op het gebied

$$G: \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \le 4 \\ x \le y \end{cases}$$

4. Gegeven is de volgende graaf



a) Nummer de knopen zodanig dat voor iedere tak geldt:
nummer $b(t)$ < nummer $e(t)$.

b) Wat is de lengte van de kortste weg tussen A en B? Motiveer Uw antwoord.

27 januari 1973

1. Van de lineaire afbeelding $\mathcal{A}: R_3 \to R_3$ is gegeven

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(6,7,5) &= (2,1,3)\\ \mathcal{A}(0,3,3) &= (-4,-3,1)\\ \mathcal{A}(1,-1,0) &= (5,5,2)\ .\end{aligned}$$

a) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van de basis $(1,2,3)$, $(3,2,1)$ en $(2,3,1)$.

b) Is $\mathcal{A}$ een orthogonale afbeelding? Motiveer Uw antwoord.

2. In R_3, met het gebruikelijke inproduct, zijn gegeven de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ met de eigenschappen

$$(\underline{a},\underline{a}) = (\underline{b},\underline{b}) = 1$$

en

$$(\underline{a},\underline{b}) = 0\ .$$

De lineaire afbeelding $\mathcal{A}: R_3 \to R_3$ is gedefinieerd door

$$\mathcal{A}\underline{x} = (\underline{a},\underline{x})\underline{a} - (\underline{b},\underline{x})\underline{b}\ .$$

a) Toon aan dat $\mathcal{A}$ een symmetrische afbeelding is.

b) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{A}$.

c) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{A}^2$.

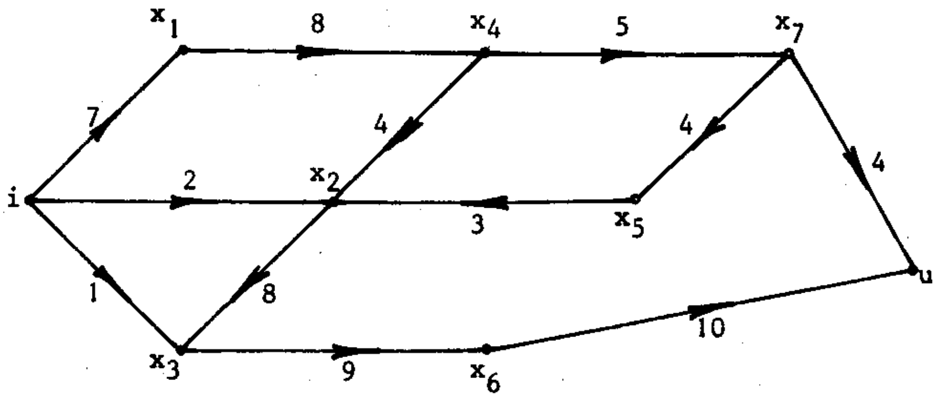
3. Bepaal de extrema, hun aard en hun waarde van de functie

$$f(x,y) = xy(1-x^2)$$

op het gebied

$$G: \begin{cases} -x^2 - 1 \le y \le x^2 + 1 \\ -1 \le x \le 1\ . \end{cases}$$

4. Gegeven is het volgende transportnetwerk



De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

9 juni 1973

1. In R_3 is de lineaire afbeelding $\mathcal{A}$ ten opzichte van de natuurlijke basis $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3$ bepaald door de matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Bepaal een orthonormale basis g_1,g_2,g_3 van R_3 ten opzichte waarvan de matrix van $\mathcal{A}$ diagonaalvorm heeft.
b) Bepaal de overgangsmatrix S bij overgang van de basis $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3$ op de basis g_1,g_2,g_3.
c) Druk $\underline{e}_1$ uit in g_1, g_2 en g_3.
d) Wat stelt $\mathcal{A}$ meetkundig voor?

2. Een lineaire afbeelding $\mathcal{A}$: $R_n \to R_n$ is gegeven met matrix A ten opzichte van een orthonormale basis $g_1,g_2,\dots,g_n$.
$\mathcal{B}$ is gedefinieerd als de lineaire afbeelding van R_n in R_n, die ten opzichte van deze basis de matrix A^T heeft.

a) Laat zien dat $\mathcal{B}$ onafhankelijk is van de keuze van de orthonormale basis.

b) Bewijs dat voor elk tweetal vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ uit R_n geldt

$$(\mathcal{A}\underline{x},\underline{y}) = (\underline{x},\mathcal{B}\underline{y}) .$$

c) Bewijs dat $\mathcal{A}$ symmetrisch is dan en slechts dan als $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

d) Zij $N(\mathcal{B})$ en $B(\mathcal{A})$ resp. nulruimte van $\mathcal{B}$ en beeldruimte van $\mathcal{A}$.
Bewijs dat $N(\mathcal{B})$ het orthogonale complement van $B(\mathcal{A})$ is.

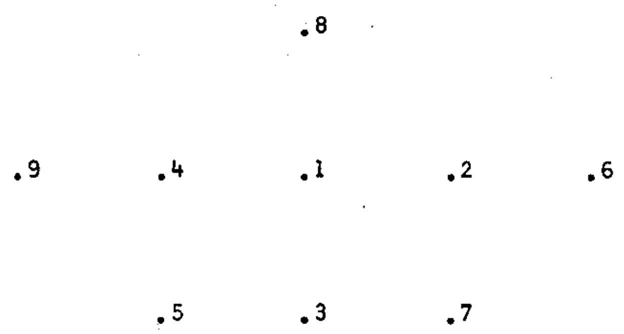
3. Bepaal de extrema, hun aard en hun waarde, van de functie

$$f(x,y) = (x+y)(x+y^2)$$

op het gebied

$$G: \begin{cases} x^2 \le 1 \\ y^2 \le 1 . \end{cases}$$

4. Van een ongerichte graaf zijn de kostprijzen van de takken genoteerd in onderstaande matrix C.



$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 6 & 2 & 3 \\ & 0 & 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ & & 0 & 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 6 \\ & & & 0 & 1 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ & & & & 0 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ & & & & & 0 & 5 & 6 & 3 \\ & & & & & & 0 & 4 & 2 \\ & & & & & & & 0 & 3 \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bepaal de goedkoopste weg van knoop 2 naar knoop 7.

b) Bepaal een optimale boom.
Bepaal in deze boom de goedkoopste weg van knoop 2 naar knoop 7.

16 juni 1973

1. De lineaire afbeelding $\mathcal{A}: R_3 \to R_3$ is gedefinieerd door

$$\mathcal{A}(3,3,5) = (2,2,4)$$
$$\mathcal{A}(2,1,2) = (1,0,1)$$
$$\mathcal{A}(1,1,3) = (2,2,4) .$$

a) Bepaal een basis ten opzichte waarvan $\mathcal{A}$ een diagonaalmatrix heeft.

b) Is er een orthonormale basis ten opzichte waarvan $\mathcal{A}$ een diagonaalmatrix heeft? Verklaar Uw antwoord.

2. In R_3 zijn gegeven de vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$. Zij $\alpha := (\underline{a},\underline{b})$. Er geldt

$$|\underline{a}| = |\underline{b}| = 1$$

en

$$|\alpha| \neq 1 .$$

De lineaire afbeelding $\mathcal{A}: R_3 \to R_3$ is gegeven door

$$\mathcal{A}\underline{x} = \frac{(\underline{x},\underline{a}) - \alpha(\underline{x},\underline{b})}{1-\alpha^2}\,\underline{a} + \frac{(\underline{x},\underline{b}) - \alpha(\underline{x},\underline{a})}{1-\alpha^2}\,\underline{b} .$$

a) Bewijs dat $\mathcal{A}$ symmetrisch is.

b) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van $\mathcal{A}$.

c) Bepaal de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a} \times \underline{b}$.

d) Zij $\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3$ de natuurlijke basis.
Is de overgangsmatrix van deze basis naar $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a} \times \underline{b}$ orthogonaal? Verklaar Uw antwoord.

3. Op het gebied G bepaald door

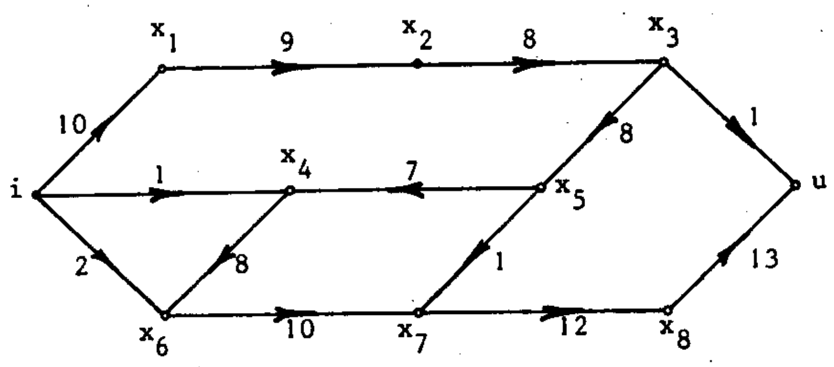
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ |y^2 - x^2| \leq 1 \end{cases}$$

is de functie f gedefinieerd door

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} .$$

Bepaal plaats, aard en waarde van de extrema van de functie f op het gebied G.

4. Gegeven is het volgende transportnetwerk



De cijfers bij de takken geven de capaciteiten aan.

a) Bepaal een stroom met maximale stroomsterkte.

b) Bepaal een snede met minimale capaciteit.

Antwoorden tentamenopgaven

12 juni 1971

1. a) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$; $\underline{v}_1 = (1,0,1)$, $\underline{v}_2 = (0,1,1)$, $\underline{v}_3 = (2,1,0)$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

d) nee.

2. d) $\lambda_1 = -1$: $\alpha\underline{a}$ $(\alpha \neq 0)$
$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$: alle $\underline{x} \neq \underline{0}$ met $(\underline{a},\underline{x}) = 0$.

3. globale maxima 13 in $(4, \pm 2)$
globaal minimum 0 in $(1,0)$
locaal maximum 1 in $(0,0)$.

4.

	c		
ix_1	4	2	2
ix_2	2	0	$\underline{2}$
x_1x_4	2	$\underline{2}$	$\underline{2}$
x_2x_3	4	0	2
x_3x_1	2	0	0
x_3x_4	2	0	$\underline{2}$
x_3u	3	0	0
x_4u	4	2	$\underline{4}$
		2	4

$S = \{ix_2, x_1x_4\}$.

21 juni 1971

1. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

b) bijv. $\underline{e}_1' = (1,1,1)$, $\underline{e}_2' = (1,0,-1)$, $\underline{e}_3' = (1,1,-2)$

c) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2\. b) bijv. $1,\ t-1,\ \frac{1}{2}t^2 - 2t + 1$.

3\. globale maxima $\frac{3}{2}$ in $\pm(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$

globaal minimum 0 in $(0,0)$.

4\.

	c			
ix_1	5	2	4	4
ix_2	3	0	0	$\underline{3}$
x_1x_2	2	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$
x_1x_3	2	0	$\underline{2}$	$\underline{2}$
x_2x_3	3	2	2	2
x_2u	3	0	0	$\underline{3}$
x_3u	5	2	4	4
		2	4	7

$S = \{ix_2,\ x_1x_2,\ x_1x_3\}$.

<u>17 januari 1972</u>

1\. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: alle $\underline{x} \neq \underline{0}$ in het vlak $x + y + z = 0$;

$\lambda_3 = a_1 + a_2 + a_3$: $\alpha\underline{a}$ $(\alpha \neq 0)$

b) $\underline{a}$ loodrecht op het vlak $x + y + z = 0$, dus $\underline{a} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}\ (1,1,1)$

c) bijv. $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1,-1,0)$, $\frac{1}{6}\sqrt{6}\ (1,1,-2)$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}\ (1,1,1)$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

3. globaal maximum 9 in (2,2)
globale minima -15 in (0,4) en (4,0)
locaal maximum 1 in (0,0) .

4.

	c					
ix_1	4	3	$\underline{4}$	$\underline{4}$	$\underline{4}$	$\underline{4}$
ix_4	5	0	0	1	3	$\underline{5}$
x_1x_2	3	$\underline{3}$	$\underline{3}$	$\underline{3}$	$\underline{3}$	$\underline{3}$
x_1x_3	2	0	1	1	1	1
x_2u	4	3	$\underline{4}$	$\underline{4}$	$\underline{4}$	$\underline{4}$
x_3x_2	1	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$
x_3x_6	1	0	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$
x_3x_8	2	0	0	0	$\underline{2}$	$\underline{2}$
x_4x_3	3	0	0	1	$\underline{3}$	$\underline{3}$
x_4x_5	2	0	0	0	0	$\underline{2}$
x_5x_6	1	0	0	0	0	0
x_5x_7	2	0	0	0	0	$\underline{2}$
x_6x_7	2	0	0	1	1	1
x_7x_8	3	0	0	1	1	$\underline{3}$
x_8u	5	0	0	1	3	$\underline{5}$
		3	4	5	7	9

$S = \{x_2u, x_3x_6, x_3x_8, x_4x_5\}$.

<u>29 januari 1972</u>

1. c) $\alpha = 0$ of $\alpha = 2$.

2. a) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\mathcal{A}$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$: alle $\underline{x} \neq \underline{0}$ in het vlak $x - y - z = 0$;
$\lambda_3 = -1$: $\alpha(1,-1,-1)$ $(\alpha \neq 0)$

$\mathcal{B}$: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$: alle $\underline{x} \neq \underline{0}$;

$\mathcal{A}$ is een spiegeling aan het vlak $x - y - z = 0$

c) $\mathcal{B}\mathcal{A} = 3\mathcal{A}$, dus eigenvectoren van $\mathcal{B}\mathcal{A}$ dezelfde als de eigenvectoren van $\mathcal{A}$ en eigenwaarden van $\mathcal{B}\mathcal{A}$: $\mu_1 = \mu_2 = 3$, $\mu_3 = -3$

d) ja; t.o.v. de basis (1,1,0), (1,0,1), (1,-1,-1) is de matrix

van $\mathcal{A}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ en de matrix van $\mathcal{B}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. globaal maximum $\frac{8}{9}\sqrt{3}$ in $(1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3})$

globaal minimum $-\frac{8}{9}\sqrt{3}$ in $(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3})$

locale maxima 0 in $(x,1)$ met $1 < x \le 3$

locale minima 0 in $(x,1)$ met $-1 \le x < 1$.

4.

	c					
ix_1	2	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$
ix_2	3	0	1	1	1	$\underline{3}$
ix_3	3	0	0	2	$\underline{3}$	$\underline{3}$
x_1x_4	6	2	2	2	3	5
x_2x_5	4	0	1	1	1	3
x_3x_1	5	0	0	0	1	3
x_3u	2	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$	$\underline{2}$
x_4x_3	4	2	2	0	0	0
x_4u	7	0	0	2	3	5
x_5x_3	8	0	0	0	0	2
x_5u	1	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$
		2	3	5	6	8

$S = \{ix_1, ix_2, ix_3\}$.

10 juni 1972

1. a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) nee ; bijv. $9 = (\mathcal{A}\underline{a},\underline{c}) \neq (\underline{a},\mathcal{A}\underline{c}) = 5$.

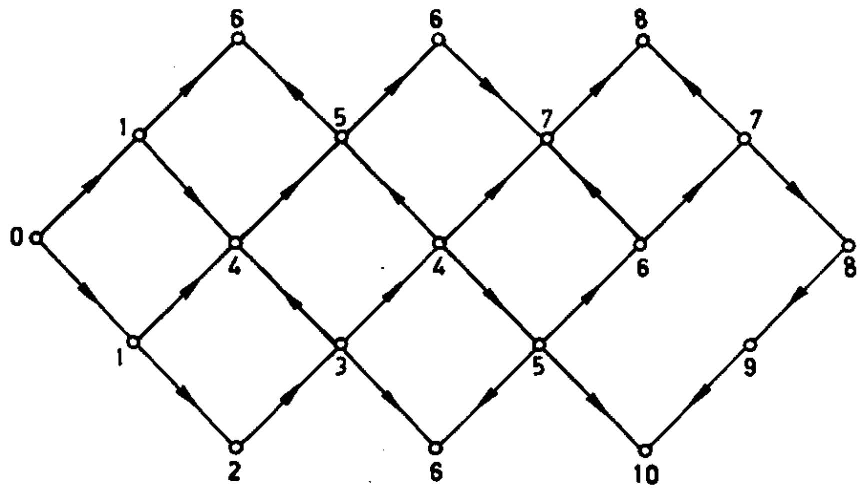
2. b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$: alle $\underline{x} \neq \underline{0}$ in het vlak $(\underline{x},\underline{n}) = 0$;

$\lambda_3 = 1 - 4(\underline{a},\underline{n})$: $\alpha\underline{a}$ $(\alpha \neq 0)$

c) $\underline{a} = \frac{1}{2}\underline{n}$.

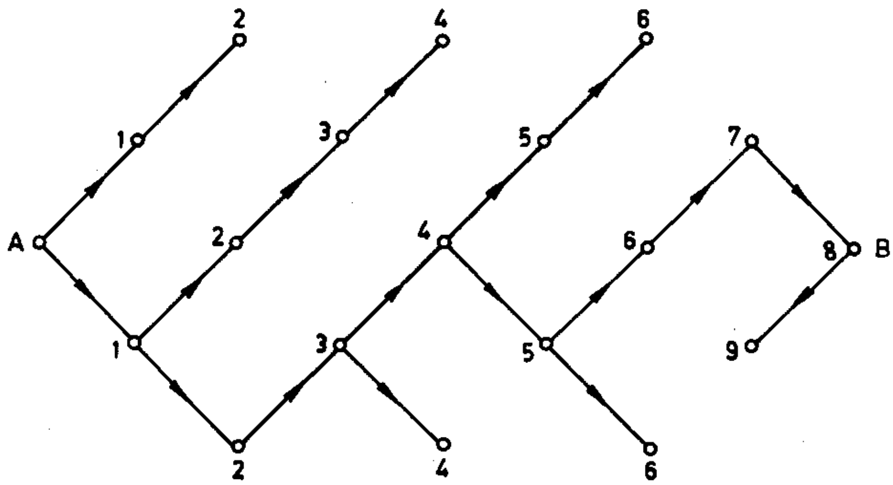
3. globaal maximum 2 in (2,3)
   globaal minimum -2 in (0,3)
   locaal maximum 1 in (0,0)

4. a)



De graaf bevat géén kringen. Er is een nummering van de knopen mogelijk zodat voor elke tak geldt nummer b(t) < nummer e(t).

b)



dist (A,B) = 8 .

17 juni 1972

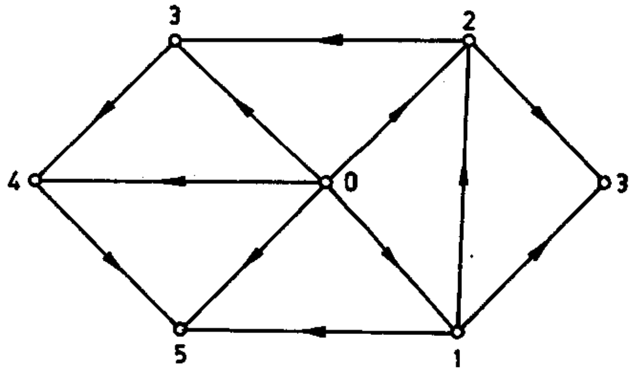
1. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) bijv. $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1,0,-1)$, $(0,1,0)$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1,0,1)$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. globaal maximum 1 in $(0,0)$
globale minima $\frac{1}{5}$ in $(\pm 2,0)$.

4. a)



b) Er is nu een kring BCEFAB.
Daarom is het niet mogelijk om een nummering als onder a) te geven.

15 januari 1973

1. a) $g_1' = g_1$, $g_2' = \frac{1}{2}\sqrt{2}(g_2 - g_4)$, $g_3' = g_3$, $g_4' = \frac{1}{2}\sqrt{2}(g_2 + g_4)$.

   b) $\mathcal{A}\underline{a} = 4g_1 + 7g_2 - g_3 + 7g_4 = 4g_1' - g_3' + 7g_4'\sqrt{2}$.

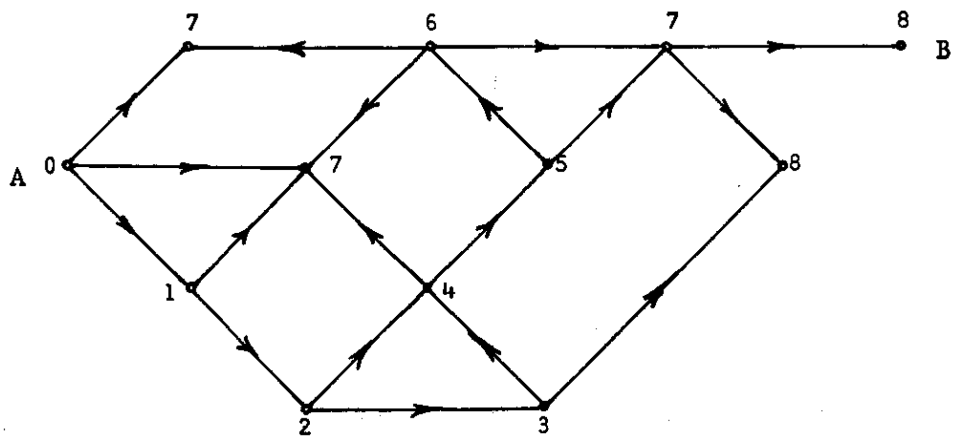
2. c) $\lambda = 1$: $\underline{x} = \alpha_1 g_1 + \alpha_3 g_3 + \alpha_5 g_5 + \dots$, $\underline{x} \neq \underline{0}$,

   $\lambda = -1$: $\underline{x} = \alpha_2 g_2 + \alpha_4 g_4 + \alpha_6 g_6 + \dots$, $\underline{x} \neq \underline{0}$.

   d) Spiegeling aan het (x,z)-vlak als g_1, g_2, g_3 de natuurlijke basis van R_3 is.

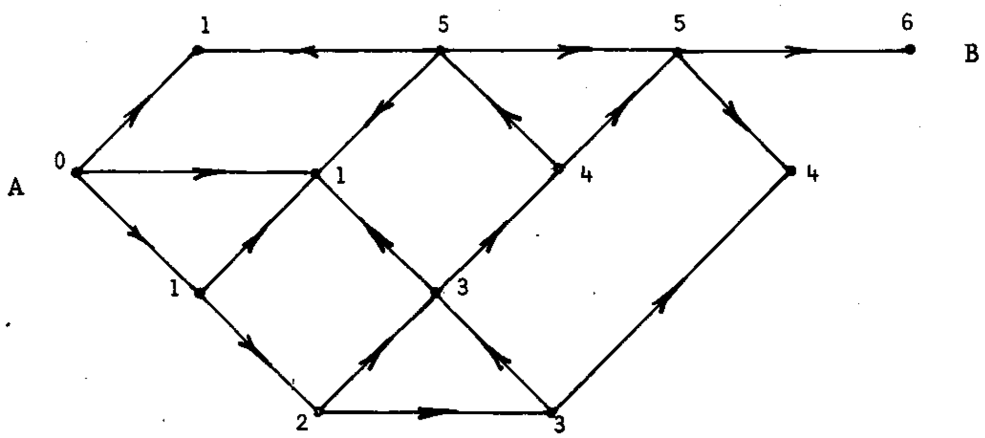
3. Globale maxima 0 in (0,0) en (2,2);
   globaal minimum -2 in (1,1).

4. a)



Zie voor de algoritme blz. 29 (rang bepalen).

b)



We schrijven bij elke knoop de afstand vanuit A tot die knoop.
In pseudo-Algol:

k := 0; A := 0;
<u>for</u> k := k + 1 <u>while</u> (niet alle knopen genummerd) <u>do</u>
nummer de nog niet genummerde knopen, die afstand 1 vanuit een met k - 1 genummerde knoop hebben, met k;

<u>27 januari 1973</u>

1. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Nee; bijv. $|\mathcal{A}(1,-1,0)| = \sqrt{25 + 25 + 4} = \sqrt{54}$, $|(1,-1,0)| = \sqrt{2}$.

2. b) $\lambda = -1$: $\beta\underline{b}$ $(\beta \neq 0)$,
$\lambda = 0$: $\gamma\underline{a} \times \underline{b}$ $(\gamma \neq 0)$,
$\lambda = 1$: $\alpha\underline{a}$ $(\alpha \neq 0)$.

c) $\lambda = 1$: $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$ $((\alpha,\beta) \neq (0,0))$,
$\lambda = 0$: $\gamma\underline{a} \times \underline{b}$ $(\gamma \neq 0)$.

3. Globale maxima $\frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$ in $\pm\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} + 1\right)$;

globale minima $-\frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$ in $\pm\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} - 1\right)$;

locale maxima 0 in $(-1,y)$ met $0 < y \le 2$ en in $(1,y)$ met $-2 \le y < 0$;
locale minima 0 in $(-1,y)$ met $-2 \le y < 0$ en in $(1,y)$ met $0 < y \le 2$.

4.

	c					
ix_1	7	4	$\underline{7}$	$\underline{7}$	$\underline{7}$	$\underline{7}$
ix_2	2			1	1	$\underline{2}$
ix_3	1				$\underline{1}$	$\underline{1}$
x_1x_4	8	4	7	7	7	7
x_2x_3	8	4	7	$\underline{8}$	$\underline{8}$	$\underline{8}$
x_3x_6	9	4	7	8	$\underline{9}$	$\underline{9}$
x_4x_2	4	$\underline{4}$	$\underline{4}$	$\underline{4}$	$\underline{4}$	3
x_4x_7	5		3	3	3	4
x_5x_2	3		$\underline{3}$	$\underline{3}$	$\underline{3}$	$\underline{3}$
x_6u	10	4	7	8	9	9
x_7x_5	4		3	3	3	3
x_7u	4					1
		4	7	8	9	10

$S = \{ix_1, ix_2, ix_3\}$,

$c(S) = 7 + 2 + 1 = 10$.

9 juni 1973

1. a) Bijv. $g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $g_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$, $g_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

b) $$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} .$$

c) $\underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} g_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} g_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} g_3$.

d) Spiegeling in het vlak $(g_3, \underline{x}) = 0$.

3. Globaal maximum 4 in (1,1),
   globaal minimum -1 in (0,-1),
   locaal maximum $\frac{32}{27}$ in $(-1,-\frac{1}{3})$,
   locaal minimum $-\frac{1}{64}$ in $(-\frac{3}{8},\frac{1}{2})$.

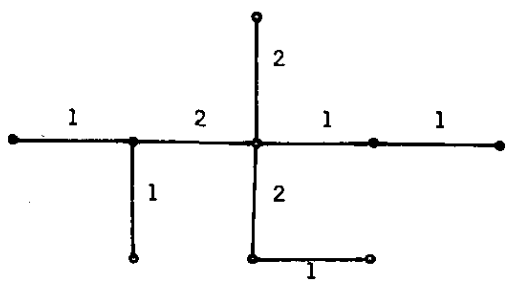
4. a)

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
C = & \left(\begin{array}{ccccccccc}
0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 6 & 2 & 3 \\
 & 0 & 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 6 \\
 & & 0 & 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 6 \\
 & & & 0 & 1 & 3 & 5 & 4 & 1 \\
 & & & & 0 & 2 & 5 & 3 & 1 \\
 & & & & & 0 & 5 & 6 & 3 \\
 & & & & & & 0 & 4 & 2 \\
 & & & & & & & 0 & 3 \\
 & & & & & & & & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}
\end{array}$$

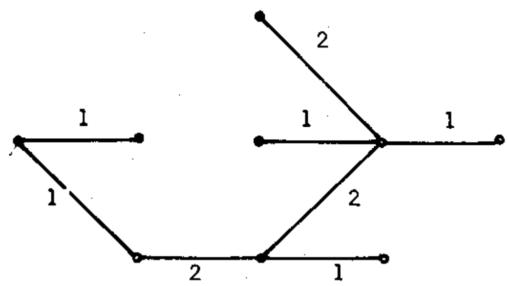
In één stap van 2 naar 7 kost $C_{27} = 5$.
In twee stappen van 2 naar 7 kost minimaal 3 (zie matrix).
In meer dan twee stappen van 2 naar 7 kost méér dan 3. Immers

$$C_{i7} \geq 5 \qquad (i \neq 3)$$
$$C_{37} + C_{3j} \geq 3 \quad (j \neq 7)\ .$$

b) b.v. of



$C(2 \to 1 \to 3 \to 7) = 4$



$C(2 \to 3 \to 7) = 3$

16 juni 1973

1. a) Bijv. (1,1,1), (1,0,1), (0,1,1).

   b) Nee.

2. b) $\lambda = 1$: $\underline{x} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$ $((\alpha,\beta) \neq (0,0))$,

   $\lambda = 0$: $\underline{x} = \gamma\underline{a} \times \underline{b}$ $(\gamma \neq 0)$.

   c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   d) In het algemeen niet, want $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a} \times \underline{b}$ hoeft geen orthonormale basis te zijn.

3. Globale maxima $\frac{1}{2}$ in (x.x) met $\frac{1}{2}\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, globale minima 0 in (1,0) en (0,1).

4. a)

	c				
ix_1	10	1	1	1	8
ix_4	1		$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$
ix_6	2			$\underline{2}$	$\underline{2}$
x_1x_2	9	1	1	1	8
x_2x_3	8	1	1	1	$\underline{8}$
x_3x_5	8				7
x_3u	1	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$
x_4x_6	8		1	1	$\underline{8}$
x_5x_4	7				$\underline{7}$
x_5x_7	1				
x_6x_7	10		1	3	$\underline{10}$
x_7x_8	12		1	3	10
x_8u	13		1	3	10
		1	2	4	11

   b) $S = \{ix_4, ix_6, x_2x_3\}$,

   $c(S) = 1 + 2 + 8 = 11$.