

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 41

Recurrente betrekkingen en grafen

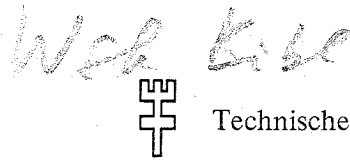
bestemd voor

BDK-IV

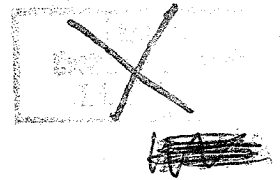
Voorjaarssemester 1980

2272

ATC
01
THE



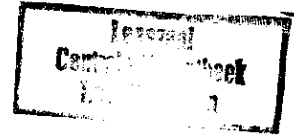
Technische Hogeschool Eindhoven



Onderafdeling der Wiskunde

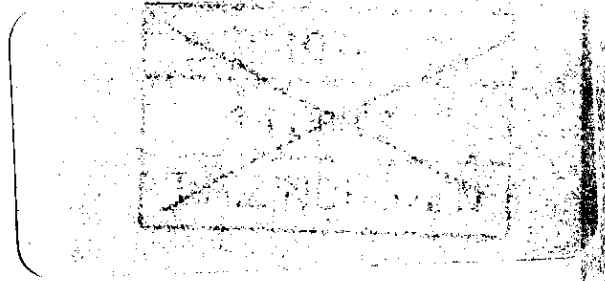
Wiskunde 41

Recurrente betrekkingen en grafen



TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde



WISKUNDE 41

Recurrente betrekkingen en grafen

Voorjaarssemester 1980

*S
du 80*

Hoofdstuk I. Recurrente betrekkingen

1.1 Inleiding	1
1.2 Bijzondere klassen van recurrente betrekkingen; begin- en rand waardeproblemen	5
1.3 Iteraties	6
1.4 Stabiliteit	13
1.5 Bifurcaties	16

Hoofdstuk II. Lineaire recurrente betrekkingen

2.1 Algemene theorie	22
2.2 Lineaire recurrente betrekkingen met constante coëfficiënten	24

Hoofdstuk III. Stelsels van recurrente betrekkingen

3.1 Algemene theorie	36
3.2 Substitutie en diagonalisering	38
3.3 Stelling van Cayley-Hamilton	47
3.4 Inhomogene vergelijkingen	50
3.5 Asymtotische gedrag van de oplossingen	53
3.6 Recurrente betrekkingen met niet-negatieve coëfficiënten	58

Hoofdstuk IV. De z-transformatie

4.1 Definitie en elementaire eigenschappen van de z-transformatie	69
4.2 Toepassingen van de z-transformatie op recurrente betrekkingen	74
4.3 Enkele andere toepassingen	77

Hoofdstuk V. Grafentheorie

5.1 Inleidende begrippen, gerichte grafen	81
5.2 Onderzoek naar het bestaan van kringen in en graaf	82
5.3 Grafen en matrices	83
5.4 De bereikbaarheidsmatrix	86
5.5 Transportnetwerken	89
5.6 Optimale paden	96
5.7 Ongerichte grafen	99

Literatuur

- S. Goldberg: Introduction to Difference Equations with illustrative examples from Economics, Psychology and Sociology.
- F. Harary, R.Z. Norman, D. Cartwright: Structural Models, an introduction to the theory of directed graphs.
- R.M. May: Simple mathematical models with very complicated dynamics, Nature, Vol. 261, June 1976, pp. 459-467

Hoofdstuk I. Recurrente betrekkingen

1.1. Inleiding

Laat $F_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ voor $k = 0, 1, \dots$. Als x_0, x_1, \dots, x_{n-1} reële getallen zijn, dan kan men een oneindige rij getallen x_0, x_1, \dots construeren d.m.v. het voorschrift

$$(1.1.1) \quad x_{k+n} = F_k(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1}) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Het is duidelijk, dat er precies één rij getallen $(x_k)_{k=0}^{\infty} = (x_0, x_1, \dots)$ bestaat met gegeven waarden van x_0, \dots, x_{n-1} die voldoet aan (1.1.1). We noemen (1.1.1) een recurrente betrekking van de n-de orde en de rij (x_k) een oplossing van (1.1.1). Soms spreekt men ook wel van een differentievergelijking. Heel vaak ontstaat een recurrente betrekking in een situatie waarin men een grootte op discrete equidistante tijdstippen $0, T, 2T, 3T, \dots$ beschouwt. De waarde van deze grootte op het tijdstip kT geeft men dan aan met x_k . Op deze manier krijgt men een oneindige rij (x_k) . Als nu de waarde x_{k+n} op een eenduidige manier is bepaald door x_k, \dots, x_{k+n-1} heeft men een recurrente betrekking van de vorm (1.1.1).

(1.1.2) VOORBEELD. Een van de bekendste en oudste voorbeelden van een recurrente betrekking werd geformuleerd door Leonardo van Pisa in zijn boek "Liber Abaci". Hierin telde hij het aantal nakomelingen van een konijnenpaar. Hij ging daarbij uit van de veronderstelling dat elk konijnenpaar vanaf de tweede maand van zijn bestaan, elke maand een paar jonge konijnen kreeg. Laten we het aantal konijnenparen in de k -de maand aangeven met x_k . Als er op het begintijdstip één konijnenpaar is, dan is $x_0 = x_1 = 1$. Het aantal konijnenparen op het tijdstip $k+2$ is gelijk aan het aantal konijnenparen op het tijdstip $k+1$ vermeerderd met het aantal pasgeboren konijnenparen en dit aantal is gelijk aan het aantal konijnenparen op het tijdstip k . (We veronderstellen hierbij dat er geen konijnen doodgaan.) In formule uitgedrukt is dit:

$$(1.1.3) \quad x_{k+2} = x_k + x_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

hetgeen een voorbeeld is van een recurrente betrekking. Uit (1.1.3) en de beginwaarden $x_0 = x_1 = 1$ vinden we voor de getallen x_0, x_1, x_2, \dots achtereenvolgens

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Daar Leonardo van Pisa als bijnaam Fibonacci had, staat deze rij bekend onder de naam: rij van Fibonacci. De getallen van deze rij worden aangegeven met F_0, F_1, F_2, \dots . □

De getallen x_k in de recurrente betrekking (1.1.1) hoeven echter niet altijd de waarde van een grootheid op het tijdstip k voor te stellen. De recurrente betrekking heeft ook andere interpretaties.

(1.1.4) VOORBEELD. We beschouwen een communicatiekanaal waardoor twee verschillende signalen S_1 en S_2 (bijv. punten en strepen in het Morse-alfabet) kunnen worden gestuurd. Laten we aannemen dat voor het signaal S_1 één eenheid van tijd en voor S_2 twee eenheden van tijd nodig zijn. Een boodschap is dan een opeenvolging van signalen die door het kanaal worden gestuurd. Voor de boodschap $S_1 S_2 S_2 S_1$ is bijvoorbeeld een tijdsduur van 6 eenheden vereist. We willen berekenen hoeveel boodschappen er bestaan die een tijdsduur k nodig hebben. We noteren dit aantal met x_k . We geven aan wat x_1, x_2, x_3 is en welke boodschappen in de tijdsduur 1, 2, 3 kunnen worden verstuurd.

$$x_1 = 1 : S_1$$

$$x_2 = 2 : S_1 S_1, S_2$$

$$x_3 = 3 : S_1 S_1 S_1, S_1 S_2, S_2 S_1 .$$

Verder leiden we een recurrente betrekking af voor de rij (x_k) . De verzameling van boodschappen met tijdsduur $k+2$ kunnen we verdelen in twee klassen, nl. boodschappen eindigend met S_1 en boodschappen eindigend met S_2 . Het aantal boodschappen met tijdsduur $k+2$ die eindigen met S_1 , is gelijk aan het totaal aantal boodschappen met tijdsduur $k+1$, d.w.z. aan x_{k+1} . We kunnen immers alle boodschappen met tijdsduur $k+2$, eindigend op S_1 verkrijgen door achter een willekeurige boodschap met tijdsduur $k+1$ een S_1 te plaatsen. Op dezelfde manier is het aantal boodschappen met tijdsduur $k+2$ die eindigen op S_2 , gelijk aan x_k . Voor het totaal aantal boodschappen met tijdsduur $k+2$ vinden we dus

$$x_{k+2} = x_k + x_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots) .$$

Als we $x_0 := 1$ definiëren geldt deze relatie ook voor $k = 0$. We zien dat (x_k) de rij van Fibonacci is.

Als het signaal S_2 drie in plaats van twee tijdseenheden nodig heeft, vinden we de betrekking

$$x_{k+3} = x_{k+2} + x_k,$$

die van de derde orde is. □

Soms heeft de recurrente betrekking alleen maar zin voor een eindig aantal k 's, bijvoorbeeld voor $k = 0, \dots, N-2$.

(1.1.5) VOORBEELD. Twee personen A en B spelen herhaaldelijk een spel waarbij ofwel A ofwel B kan winnen. De kans dat A dit spel wint is p , de kans dat B wint is $1-p$. Hierbij is $0 < p < 1$. Na ieder spel betaalt de verliezer een gulden aan de winnaar. De rij spelen wordt beëindigd als een van de spelers geen geld meer heeft. Neem aan dat A en B tezamen N guldens hebben. Dit bedrag verandert niet gedurende de rij spelen. We geven met x_k aan de kans dat A uiteindelijk wint omdat B op een gegeven ogenblik geen geld meer heeft, waarbij k het aanvangskapitaal van A is (dus $0 \leq k \leq N$). Het is duidelijk dat $x_0 = 0$ en $x_N = 1$. Speler A heeft een kans p dat hij na het eerste spel $k+1$ guldens heeft, waarna hij de kans x_{k+1} heeft om uiteindelijk te winnen. De kans dat A het eerste spel wint en daarna de totale overwinning behaalt is daarom px_{k+1} . (We nemen aan dat de spelen stochastisch onafhankelijk zijn). Op dezelfde manier zien we dat de kans dat A het eerste spel verliest en daarna uiteindelijk wint, gelijk is aan $(1-p)x_{k-1}$. Derhalve geldt

$$x_k = px_{k+1} + (1-p)x_{k-1} \quad (k = 1, \dots, N-1),$$

hetgeen we als volgt in de vorm (1.1.1) kunnen schrijven:

$$x_{k+2} = \frac{1}{p} x_{k+1} - \frac{1-p}{p} x_k \quad (k = 0, \dots, N-2).$$

Het heeft hier geen zin om x_k te berekenen voor $k > N$. Ook in dit voorbeeld stelt k niet een tijdstip voor. □

Tenslotte merken we op dat men soms recurrente betrekkingen heeft waarin F_k niet overal is gedefinieerd. Dan kan het zijn dat men de berekening van de rij (x_k) niet voor alle k kan uitvoeren omdat voor zekere k het punt (x_k, \dots, x_{k+n-1}) buiten het domein van F_k ligt. Men zegt dan dat de recurrente betrekking afbreekt.

(1.1.6) VOORBEELD. De recurrente betrekking

$$x_{k+1} = \sqrt{x_k - 1}$$

breekt af zodra $x_k < 1$. Dit moet voor elke waarde van x_0 eenmaal gebeuren. Als namelijk $x_k \geq 1$ voor alle k zou gelden, dan was $x_{k+1} \leq x_{k+1}^2 = x_k - 1$ en dus

$$x_k \leq x_0 - k \quad (k = 0, 1, \dots),$$

hetgeen onmogelijk is. □

Het is soms mogelijk dat een recurrente betrekking niet overal is gedefiniëerd en toch niet afbreekt mits men de beginwaarde maar geschikt kiest. Als bijv. $D \subset \mathbb{R}$ en $F_k: D \rightarrow D$ voor alle k dan heeft de eerste orde recurrente betrekking

$$x_{k+1} = F_k(x_k)$$

een oplossing $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ als maar $x_0 \in D$.

(1.1.7) VOORBEELD. De recurrente betrekking

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{2}{x_k} \right) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

heeft, als $x_0 > 0$ altijd een oplossing, daar $\frac{1}{2}(x + 2/x) > 0$ voor $x > 0$. We kunnen hier dus $D = (0, \infty)$ kiezen. Deze recurrente betrekking treedt op bij de berekening van $\sqrt{2}$ met de procedure van Newton-Raphson. □

(1.1.8) OPMERKING. Men noemt recurrente betrekkingen ook wel differentievergelijkingen. In dat geval gebruikt men ook een andere notatie. Als (x_k) een rij is, geeft men de differentie van deze rij aan met

$$(1.1.9) \quad \Delta x_k := x_{k+1} - x_k.$$

Ook voert men hogere differenties in zoals bijv.

$$\Delta^2 x_k = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k = (x_{k+2} - x_{k+1}) - (x_{k+1} - x_k)$$

dus

$$(1.1.10) \quad \Delta^2 x_k = x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k.$$

Zo kan men ook $\Delta^n x_k$ voor $n = 3, 4, \dots$ berekenen. Een differentievergelijking is nu een relatie tussen $x_k, \Delta x_k, \dots$. Bijv.

$$\Delta^2 x_k + a \Delta x_k + b x_k = 0$$

wordt m.b.v. (1.1.9) en (1.1.10):

$$x_{k+2} + (a-2)x_{k+1} + (1+b-a)x_k = 0.$$

De eenvoudigste manier om differentievergelijkingen te behandelen is ze om te werken tot een recurrente betrekking in de vorm zoals wij ze tot nu toe hebben gebruikt. □

1.2. Bijzondere klassen van recurrente betrekkingen; begin- en randwaardeproblemen

De recurrente betrekking (1.1.1) heet autonoom als F_k niet van k afhangt. De voorbeelden van 1.1 zijn allemaal autonome recurrente betrekkingen. Voorbeelden van een niet-autonome recurrente betrekking zijn

(1.2.1) VOORBEELD.

i) $x_{k+1} = 1 + x_k^2 / (k+1),$

ii) $x_{k+1} = x_k + k.$ □

Een autonome recurrente betrekking van de eerste orde noemt men een iteratie. Deze spelen een belangrijke rol bij het numeriek oplossen van vergelijkingen, zie voorbeeld (1.1.7). Zie ook Wiskunde 10, § 3.3. In de volgende paragraaf zullen we enkele eenvoudige eigenschappen van iteraties afleiden.

Een recurrente betrekking van de vorm

$$(1.2.2) \quad x_{n+k} + a_{1,k} x_{n+k-1} + \dots + a_{n,k} x_k = b_k \quad (k = 0, 1, \dots)$$

noemt men lineair. Als $b_k = 0$ voor alle k , dan noemt men de lineaire recurrente betrekking (1.2.2) homogeen en anders inhomogeen. Als $a_{i,k}$ niet van k afhangt, dus als

$$a_{i,k} = a_i \quad (i = 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots)$$

dan noemt men (1.2.2) een lineaire recurrente betrekking met constante coëfficiënten. De betrekking (1.2.2) heeft dan de vorm

$$(1.2.3) \quad x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \dots + a_n x_k = b_k.$$

De recurrente betrekking van Fibonacci (voorbeeld (1.1.2)) is een voorbeeld van een homogene lineaire recurrente betrekking met constante coëfficiënten. Lineaire recurrente betrekkingen worden behandeld in het volgende hoofdstuk.

Oplossingen van recurrente betrekkingen zijn niet eenduidig. Men kan de oplossing eenduidig vastleggen door extra voorwaarden op te leggen aan de rij $(x_k)_{k=0}^{\infty}$. Het eenvoudigste extra voorschrift is de waarde van x_k voor $k = 0, 1, \dots, n-1$. Dan krijgen we een zogenaamd beginwaardeprobleem. Zoals in het begin van de vorige paragraaf is opgemerkt, heeft het beginwaardeprobleem altijd een eenduidige oplossing (als de functies F_k overal zijn gedefinieerd). Moeilijker wordt de situatie waarin ander voorwaarden aan de rij worden opgelegd. We beschouwen bijv. een tweede orde recurrente betrekking

$$(1.2.4) \quad x_{k+2} = F_k(x_k, x_{k+1})$$

en we vragen naar de oplossing hiervan met x_0 en x_N voorgeschreven. Hierbij is N een natuurlijk getal. In dit geval spreekt men van een randwaardeprobleem. Gewoonlijk is men hier alleen geïnteresseerd in de waarden van x_k voor $k = 0, \dots, N$. Een voorbeeld van een randwaardeprobleem is (1.1.5). Een randwaardeprobleem hoeft geen oplossing te hebben. Als er een oplossing bestaat hoeft zij niet eenduidig te zijn. Een manier om een randwaardeprobleem op te lossen is de volgende: Men stelt $x_1 = \alpha$, een voorlopig nog onbekende parameter. Dan kan men achtereenvolgens x_2, \dots, x_N berekenen. Deze grootheden zijn functies van α . Tenslotte moet men α bepalen uit de vergelijking $x_N(\alpha) = x_N$.

1.3. Iteraties

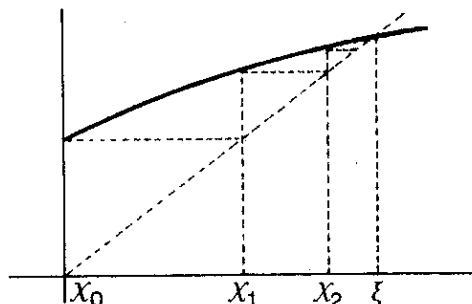
Het gedrag van de oplossing van de iteratie

$$(1.3.1) \quad x_{k+1} = F(x_k)$$

kan men illustreren aan de hand van de grafiek van F .

(1.3.2) VOORBEELD. Als $F(x) = \sqrt{1+x}$ voor $x \geq -1$, dan luidt de iteratie

$$x_{k+1} = \sqrt{1+x_k}.$$



Zij bijv. $x_0 = 0$. De figuur geeft dan onmiddellijk aanleiding tot de uitspraken

$$(1.3.3) \quad 0 \leq x_k < \xi \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$(1.3.4) \quad x_k < x_{k+1} \quad (k = 0, 1, \dots),$$

en

$$(1.3.5) \quad x_k \rightarrow \xi \quad (k \rightarrow \infty),$$

waar ξ de oplossing is van de vergelijking $\xi = F(\xi) = \sqrt{1 + \xi}$, dus $\xi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Het bewijs van (1.3.3) en (1.3.4) gaat met volledige inductie: (1.3.3) is duidelijk voor $k = 0$. Als (1.3.3) geldt voor $k = n$ dan is

$$0 < x_{n+1} = F(x_n) < F(\xi) = \xi,$$

omdat $F(x) > 0$ voor $x \geq 0$ en omdat F stijgend is voor $x \geq 0$. Zo hebben we (1.3.3) bewezen voor $k = n+1$. Op analoge manier vindt men dat (1.3.4) duidelijk is voor $k = 0$ en als (1.3.4) geldt voor $k = n$ dan is

$$x_{n+1} = F(x_n) < F(x_{n+1}) = x_{n+2}.$$

zodat (1.3.4) ook geldt voor $k = n+1$. Om (1.3.5) te bewijzen merken we op dat de monotone naar boven begrensde rij (x_k) een limiet $\bar{\xi}$ heeft en dat

$$\bar{\xi} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = F(\bar{\xi})$$

op grond van de continuïteit van F . Hieruit volgt $\bar{\xi} = \xi$. □

(1.3.6) VOORBEELD. Beschouw de recurrente betrekking (1.1.3) van Fibonacci:

$$x_{k+2} = x_k + x_{k+1}.$$

Als men deze vergelijking door x_{k+1} deelt en

$$y_k = x_{k+1}/x_k$$

stelt, dat vindt men voor y_k de iteratie

$$y_{k+1} = 1 + 1/y_k.$$

Omdat $F(y) := 1 + 1/y$ niet stijgend, maar dalend is, kunnen we de in het vorige voorbeeld gevolgde redenering niet direct gebruiken. Als we echter de functie

$$G(y) := F(F(y)) = \frac{2y + 1}{y + 1} = 1 + \frac{y}{y + 1}$$

invoeren, dan zien we dat $G(y)$ stijgend is. Verder geldt

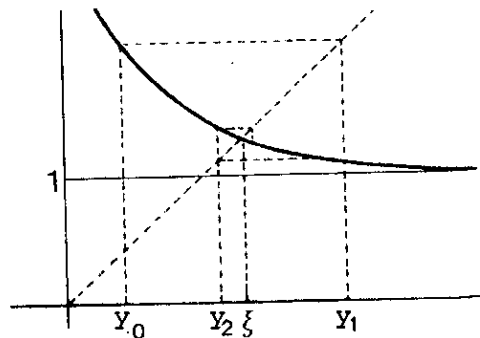
$$y_{k+2} = G(y_k) .$$

Op analoge wijze als in voorbeeld (1.3.2) kan men hieruit afleiden, dat als $0 < y_0 < \xi := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, dan

$$y_0 < y_2 < y_4 < \dots < \xi ,$$

$$y_1 > y_3 > \dots > \xi ,$$

$$y_k \rightarrow \xi \quad (k \rightarrow \infty) .$$



De rij (y_k) alterneert om ξ en convergeert naar ξ .

Uit dit voorbeeld volgt dat voor de rij (F_k) van Fibonacci geldt

$$F_{k+1}/F_k \rightarrow \xi \quad (k \rightarrow \infty) .$$

□

(1.3.7) VOORBEELD. (Economische groei). We beschouwen een economisch systeem, waar m.b.v. beschikbaar kapitaal en werkkraft een inkomen wordt verdiend dat gebruikt wordt voor consumptie en verdere kapitaalsuitbreiding (investering). We beschouwen de waarden van de volgende grootheden op de tijdstippen $t = 0, 1, \dots$

K_t : kapitaal

L_t : werkkraft

X_t : consumptie

I_t : investering

Y_t : inkomen (gedurende de periode $[t-1, t]$) .

We nemen aan dat er de volgende relaties bestaan tussen deze grootheden:

i) *Het inkomen in de periode $[t, t + 1]$ hangt af van het kapitaal en de werkkraft op het tijdstip t :*

$$(1.3.8) \quad Y_{t+1} = F(K_t, L_t) .$$

ii) *Het inkomen wordt besteed aan consumptie en investering*

$$(1.3.9) \quad Y_t = X_t + I_t .$$

iii) *De hoeveelheid werkkraft neemt elk jaar met een constante factor toe*

$$(1.3.10) \quad L_{t+1} = \rho L_t$$

met $\rho \geq 1$ (we laten toe dat L_t constant blijft).

iv) Het kapitaal neemt af tengevolge van waardevermindering (bijv. door slijtage, veroudering van gereedschap) en neemt toe tengevolge van investering

$$(1.3.11) \quad K_{t+1} - K_t = I_{t+1} - \mu K_t$$

waar $0 < \mu < 1$.

v) De consumptie is evenredig met de hoeveelheid werkkraft

$$(1.3.12) \quad X_t = \lambda L_t .$$

We nemen hier aan dat de productiefunctie F de volgende gedaante heeft:

$$(1.3.13) \quad F(K,L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$$

waar $0 < \alpha < 1$ (F wordt de Cobb-Douglas functie genoemd). Deze functie heeft de eigenschap dat zij bij vaste L weliswaar toeneemt bij stijgende K , maar dat dit effect kleiner wordt naarmate K groter wordt (dus $\partial F / \partial K \rightarrow 0$ ($K \rightarrow \infty$)). Een analoge eigenschap geldt als we de rol van K en L verwisselen. Als we K en L evenredig laten toenemen, dan neemt $F(K,L)$ overeenkomstig toe. Dus:

$$F(\mu K, \mu L) = \mu F(K, L) \quad (\mu > 0) .$$

(Men zegt dat F homogeen is.)

We kunnen de vergelijkingen (1.3.8) t/m (1.3.12) omwerken tot recurrenente betrekkingen voor L_t en K_t :

$$(1.3.14) \quad L_{t+1} = \rho L_t$$

$$(1.3.15) \quad K_{t+1} = (1 - \mu)K_t + K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \rho \lambda L_t .$$

De eerste vergelijking geeft aan dat $L_t = \rho^t L_0$ hetgeen (als $\rho > 1$) een exponentiële groei van de hoeveelheid werkkraft impliceert. Als we de hoeveelheid kapitaal per eenheid werkkraft

$$k_t := K_t / L_t$$

invoeren, kunnen we (1.3.15) herschrijven als

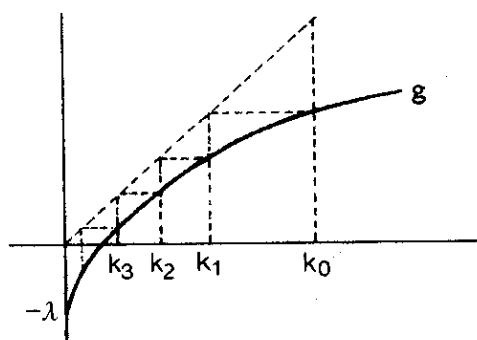
$$(1.3.16) \quad k_{t+1} = g(k_t)$$

waarbij

$$g(k) := \rho^{-1}(1 - \mu)k + \rho^{-1}k^\alpha - \lambda.$$

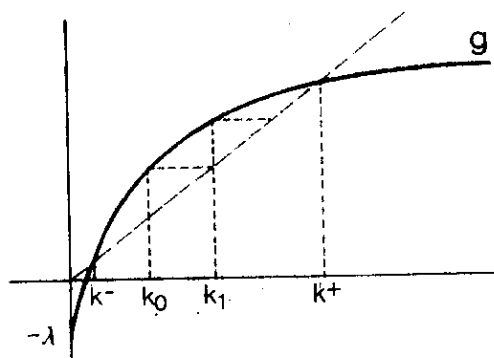
De functie g is stijgend en concaaf ($g'' < 0$). Er geldt $g(0) = -\lambda$, $g'(k) \rightarrow \infty$ ($k \downarrow 0$) en $g'(k) \rightarrow (1 - \mu)/\rho$ ($k \rightarrow \infty$). Hieruit volgt dat $g(k) < k$ geldt voor grote k en voor kleine positieve k . Er zijn drie mogelijkheden:

I. $g(k) < k$ voor alle k .



Dan breekt de iteratie af na een eindig aantal stappen, doordat $k_t < 0$ wordt. Zo'n economisch systeem kan dus niet blijven bestaan.

II. $g(k) = k$ voor $k = k^-$ en $k = k^+$ waarbij $k^- < k^+$. Op grond van de concaviteit van g geldt $g(k) < k$ voor $k > k^+$ en $k < k^-$, $g(k) > k$ voor $k^- < k < k^+$.



Nu vinden we:

Als $k_0 < k^-$, dan breekt het proces af.

Als $k_0 > k^-$, dan geldt $k_t \rightarrow k^+$ ($t \rightarrow \infty$) en wel stijgend als $k_0 < k^+$ en dalend als $k_0 > k^+$. Dit economisch systeem kan blijven bestaan als het beginkapitaal maar groot genoeg is.

III. In het grensgeval is $g(k) = k$ voor precies één getal k^* . Dan geldt $k_t \rightarrow k^*$ als $k_0 > k^*$. De iteratie breekt af als $k_0 < k^*$.

Uit de manier waarop g van λ afhangt volgt dat er precies één $\lambda^* > 0$ bestaat waarvoor III. optreedt. Als $\lambda > \lambda^*$ dan hebben we geval I. en als $\lambda < \lambda^*$ geval II. Merk op dat λ de consumptie per eenheid van werkkraft is.

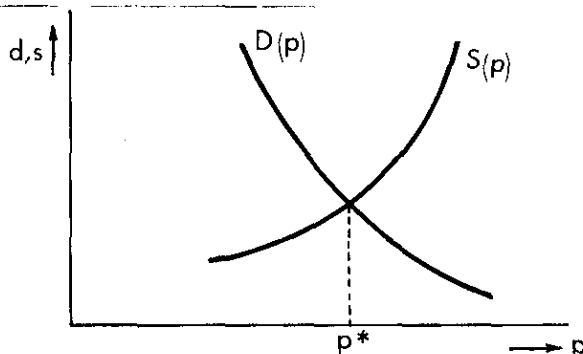
We kunnen λ^* en k^* vinden uit de vergelijkingen

$$\begin{aligned} g(k) &= k \\ g'(k) &= 1 \end{aligned}$$

Dit levert

$$k^* = \left(\frac{\rho + \mu - 1}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} \quad \text{en} \quad \lambda^* = \rho^{-1} (1 - \alpha) (k^*)^\alpha . \quad \square$$

(1.3.17) VOORBEELD. (Spinnewebverschijnsel). We beschouwen een economie met één artikel. De vraag d naar het artikel is een dalende functie $d = D(p)$ van de prijs p . Het aanbod s is een stijgende functie $s = S(p)$ van de prijs. De evenwichtsprijs p^* wordt bepaald door de vergelijking $D(p) = S(p)$.



Nu is het vaak zo dat het aanbod niet instantaan kan reageren op prijsfluctuaties, maar dat er een zekere vertraging optreedt. In dat geval is een meer dynamische beschrijving noodzakelijk. We beschouwen de vraag, de prijs en het aanbod op de tijdstippen $t = 0, 1, 2, \dots$ waarbij, het tijdsinterval tussen twee tijdstippen zo is gekozen, dat het aanbod op het tijdstip $t+1$ bepaald wordt door de prijs op tijdstip t . Op elk tijdstip wordt de prijs bepaald door de voorwaarde $D(p_t) = s_t$, m.a.w. de prijs stelt zich zodanig in dat alle aanbod wordt verkocht. We zien dat de grootheden d_t , p_t en s_t voldoen aan de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} d_t &= D(p_t) = s_t \\ s_{t+1} &= S(p_t) \end{aligned}$$

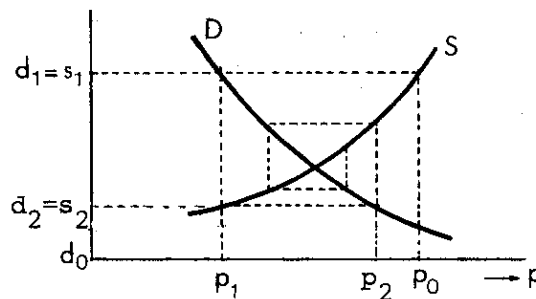
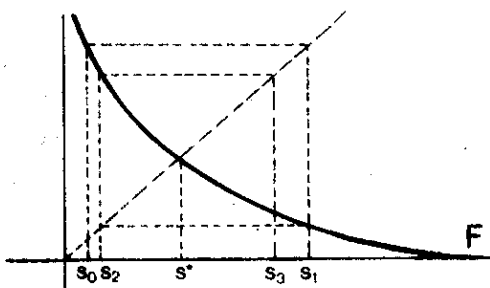
Als we de inverse functie van D met P aangeven, dan is dus

$$p_t = P(s_t) .$$

We kunnen dan een iteratie voor (s_t) afleiden:

$$s_{t+1} = F(s_t)$$

waar $F := S \circ P$, de samengestelde functie is. Uit de gegevens volgt dat F dalend is.



We krijgen dan een situatie analoog aan voorbeeld (1.3.6). Het is ook mogelijk de iteratie in de oorspronkelijke D - S-tekening aan te geven. De naam spinnewebverschijnsel vindt zijn verklaring in de figuren die hierbij ontstaan.

□

1.4. Stabiliteit

In de voorbeelden van § 1.3 hebben we gezien dat oplossingen van iteraties de eigenschap kunnen hebben dat ze convergeren naar een limiet en dat convergentie van de oplossing afhankelijk kan zijn van de beginvoorwaarde.

Bijvoorbeeld, als in voorbeeld (1.3.7) II op blz 10 de beginvoorwaarde k_0 groter dan k^- gekozen wordt dan geldt $k_t \rightarrow k^+$ en als k_0 kleiner dan k^- gekozen wordt convergeert de oplossing van de iteratie niet.

Nu is in de praktijk dat convergerend karakter vaak van groot belang. Zo'n punt dat limiet is van een iteratie kan vaak opgevat worden als een zogenaamd werkpunt van een of ander proces, bijvoorbeeld een groeiproses zoals beschreven is in voorbeeld (1.3.7).

Laten we er vanuitgaan dat het proces in een zodanige toestand is dat $k_t = k^+$ voor $0 \leq t \leq t_0$. Stel u verder voor dat k_{t_0} voor zekere t_0 verstoord wordt door een oorzaak waarvan het effect niet is opgenomen in het model voor deze economie. Veronderstel verder dat we er belang bij hebben dat k_t , voor $t > t_0$ (het tijdstip waarop de storing plaatsvond) toch weer naar k^+ convergeert. M.a.w. we willen graag dat k_t zo dicht mogelijk bij k^+ blijft, ofwel dat de economie niet volledig ontregeld raakt door zo'n verstoring. In het voorbeeld (1.3.7) kunnen we zien dat als die verstoring maar wel al te groot is, (dus als k_{t_0} nog voldoende dicht bij k^+ ligt) er zal gelden dat $k_{t_0+t} \rightarrow k^+$.

We zeggen dan dat de economie stabiel is t.a.v. verstoringen in de eigenschap die door k_t wordt uitgedrukt. Anders gezegd: de economie kan zekere verstoringen verdragen zonder daardoor volledig ontregeld te raken.

We zullen deze ideeën nu iets meer formaliseren en we gaan daarbij als volgt te werk.

De voorbeelden in § 1.3 suggereren dat voor convergentie van een rij, gedefinieerd door een iteratie $x_{k+1} = F(x_k)$, de hellingshoek van de grafiek van F in de snijpunten met de lijn $y = x$ van groot belang is.

Om dit te onderzoeken bekijken we nog eens de iteratie

$$(1.4.1) \quad x_{k+1} = F(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

(1.4.2) DEFINITIE. Een stationair punt van (1.3.1) is een oplossing van de vergelijking $x = F(x)$. □

Laat ξ en stationair punt zijn van (1.4.1). Veronderstel dat F differentieerbaar is op het interval $I = (\xi - r, \xi + r)$ voor zekere $r > 0$. We hebben dan de

volgende stelling waarin het "convergentiegedrag" gerelateerd wordt aan de afgeleide van F in een stationair punt.

(1.4.3) STELLING. Wanneer $|F'(x)| \leq M < 1$ voor alle $x \in I$, dan voldoet de oplossing (u_k) van de iteratie (1.4.1) met beginwaarde $u_0 \in I$ aan

$$(1.4.4) \quad |u_k - \xi| \leq M^k |u_0 - \xi| ,$$

$$(1.4.5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \xi .$$

Bewijs. Als $u_0 \in I$, dan volgt met de middelwaardstelling (Wisk. 10, 3.2.5) dat

$$|u_1 - \xi| = |F(u_0) - \xi| = |F'(\theta)(u_0 - \xi)| \leq M |u_0 - \xi| ,$$

waarin $\theta \in (u_0, \xi) \subset I$. Gebruik volledige inductie en veronderstel dat $|u_{k-1} - \xi| \leq M^{k-1} |u_0 - \xi|$. Dan geldt

$$|u_k - \xi| = |F(u_{k-1}) - \xi| = |F'(\theta)(u_{k-1} - \xi)| \leq M \cdot M^{k-1} |u_0 - \xi| ,$$

daar $\theta \in (u_{k-1}, \xi) \subset I$. Hiermee is (1.3.4) bewezen. Omdat $0 \leq M < 1$, geldt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |u_k - \xi| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} M^k |u_0 - \xi| = 0$$

waarmee ook (1.3.5) is bewezen.

(1.4.6) OPMERKING. De aanname $u_0 \in I$ kan worden vervangen door $u_{k_0} \in I$, voor zekere k_0 .

(1.4.7) DEFINITIE. Een begrensde oplossing $(u_k)_{k=0}^{\infty}$ van de iteratie (1.4.1) heet stabiel als er een $r > 0$ en een k_0 bestaan zodat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - u_{k_0+k}) = 0 ,$$

voor elke oplossing (x_k) met beginwaarde x_0 zodat $|x_0 - u_{k_0}| < r$.

Stabiliteit van de oplossing (u_k) betekent het volgende. Als de beginwaarde x_0 maar dicht genoeg wordt gekozen bij u_{k_0} , voor zekere k_0 , dan lijkt de staart van de rij (x_k) steeds meer op de staart van de rij (u_{k_0+k}) . De reden dat wij het getal k_0 (een verschuiving) invoeren zal blijken wanneer periodieke oplossingen worden bestudeerd. Voorlopig kunnen wij $k_0 = 0$ kiezen.

Iteraties (1.4.1) waarvoor F voldoet aan de voorwaarde van stelling (1.4.3) geven stabiele oplossingen (u_k) voor $u_0 \in I$. Inderdaad, voor elke oplossing (x_k) met $x_0 \in I$ geldt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - u_k) = \xi - \xi = 0 .$$

In het bijzonder is de constante oplossing $u_k = \xi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, stabiel; men noemt ξ dan een stabiel punt (ook wel limietpunt).

De situatie is aanmerkelijk ingewikkelder wanneer F niet voldoet aan de voorwaarde van stelling (1.4.3). Wij zullen dit geval ontmoeten in § 1.5. We zullen het begrip stabiele oplossing en stabiel punt nu illustreren aan de hand van voorbeelden in § 1.3.

Het punt ξ in voorbeeld (1.3.2) is een stabiel punt en de oplossing $x_k = \xi$ voor alle k is een stabiele oplossing want zoals gemakkelijk is in te zien geldt $|F'(\xi)| < 1$ en zelfs $|F'(x)| \leq \frac{1}{2}$ voor $x \geq 0$ zodat is voldaan aan de voorwaarden van stelling (1.4.3).

Beschouw nu voorbeeld (1.3.6). Ook hier is het punt ξ een stabiel punt en de oplossing $y_k = \xi$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$ is een stabiele oplossing. Dit zien we als volgt in

$$F'(y) = -\frac{1}{y^2} \text{ en dus geldt } F'(\xi) = -\frac{4}{(1 + \sqrt{5})^2} \text{ zodat}$$

$|F'(\xi)| < \frac{2}{3}$ in een interval $I = (\xi - r, \xi + r)$ voor r voldoende klein, immers F is continu voor $y > 0$.

1.5. Bifurcatie

Wij bestuderen bifurcatie aan de hand van de volgende iteratie met beginwaarde x_0 :

$$(1.5.1) \quad x_{k+1} = \alpha x_k (1 - x_k) \quad (k = 0, 1, \dots) .$$

(1.5.2) VOORBEELD. In een populatie van vaste grootte N komt een (niet fatale) besmettelijke ziekte voor. Zij Z_k het aantal zieken en G_k het aantal gezonden op het tijdstip k . Laat de besmetting verlopen volgens het model

$$(1.5.3) \quad Z_{k+1} = a Z_k G_k \quad (k = 0, 1, \dots) .$$

Hierbij is aangenomen dat er geen incubatie-periode is en dat de ziekte slechts één periode duurt; zieken kunnen echter direct opnieuw ziek worden. Schrijf de vergelijking (1.5.3) als

$$Z_{k+1} = a Z_k (N - Z_k) \quad (k = 0, 1, \dots) ,$$
$$\frac{Z_{k+1}}{N} = a N \frac{Z_k}{N} \left(1 - \frac{Z_k}{N}\right) \quad (k = 0, 1, \dots) ,$$

dan is een betrekking van de vorm (1.5.1) verkregen.

Het onderzoek van de betrekking

$$(1.5.1) \quad x_{k+1} = \alpha x_k (1 - x_k) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

wordt beperkt tot $0 < \alpha < 4$. Inderdaad, voor $\alpha < 0$ heeft de betrekking geen betekenis, voor $\alpha = 0$ voldoet slechts de nuloplossing, en voor $\alpha \geq 4$ bestaat geen interessante dynamica. Wij onderzoeken eerst de grafiek van de functie

$$(1.5.4) \quad F(x) = \alpha x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

Voor $x = \frac{1}{2}$ wordt het maximum $\frac{1}{4}\alpha$ van $F(x)$ bereikt. Het snijpunt $\neq (0,0)$ van de grafiek met $y = x$ heeft x -coördinaat ξ met

$$(1.5.5) \quad \xi = F(\xi) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} , \quad F'(\xi) = 2 - \alpha .$$

Wij onderscheiden de volgende gevallen:

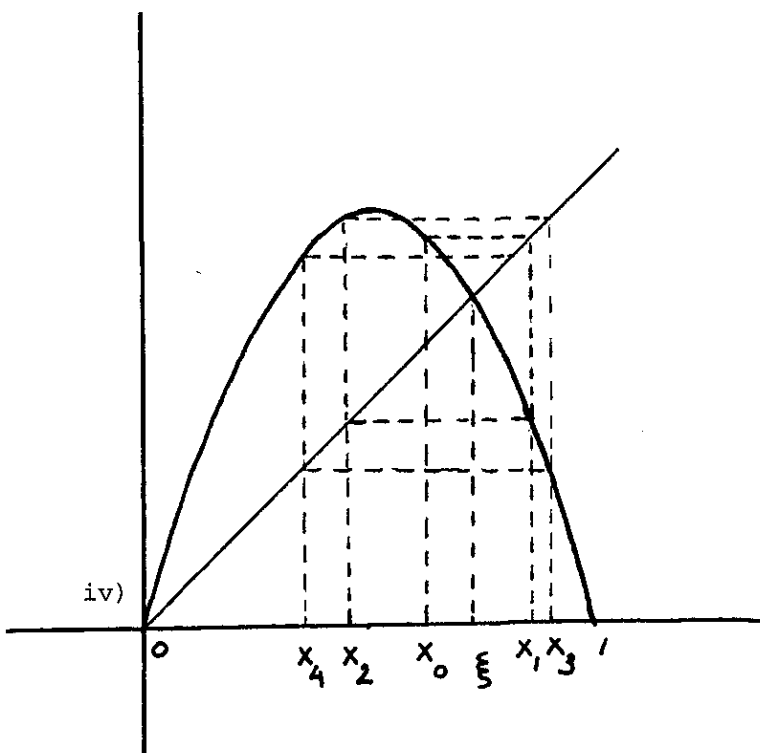
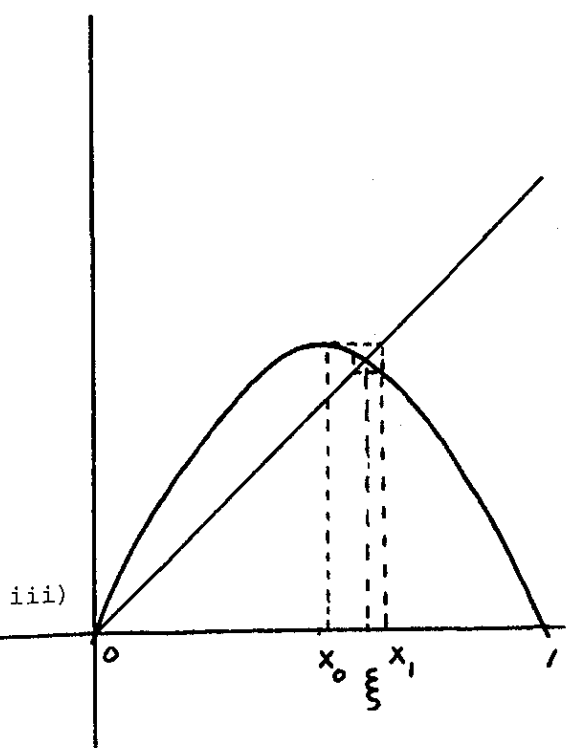
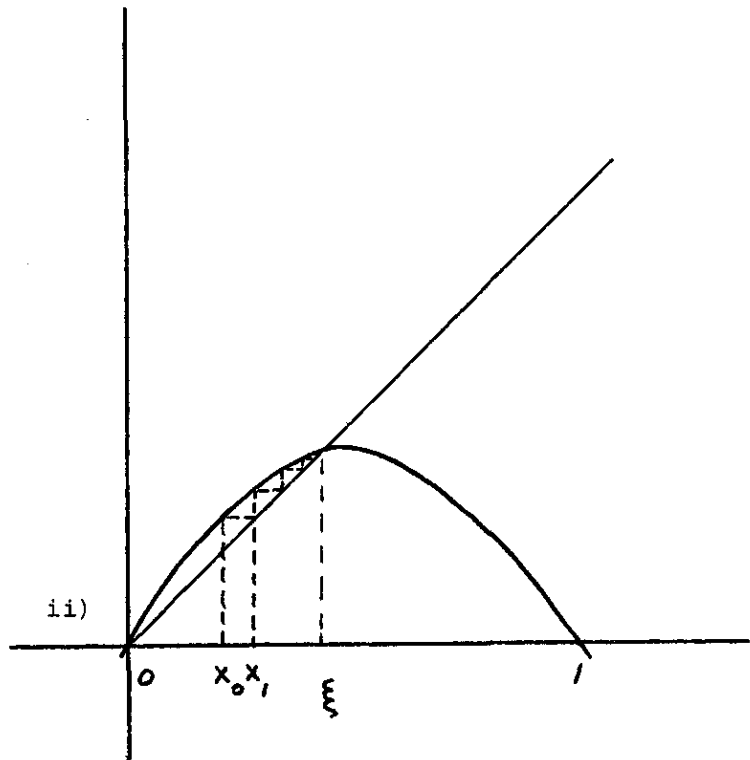
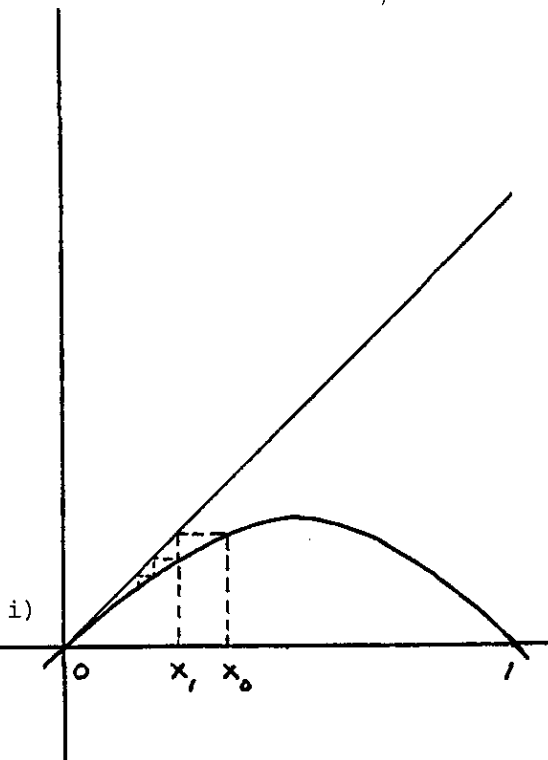
- i) $0 < \alpha \leq 1$,
- ii) $1 < \alpha \leq 2$,
- iii) $2 < \alpha < 3$,
- iv) $3 \leq \alpha < 4$.

Voor $0 < \alpha \leq 1$ is $(0,0)$ het enige snijpunt met $y = x$,

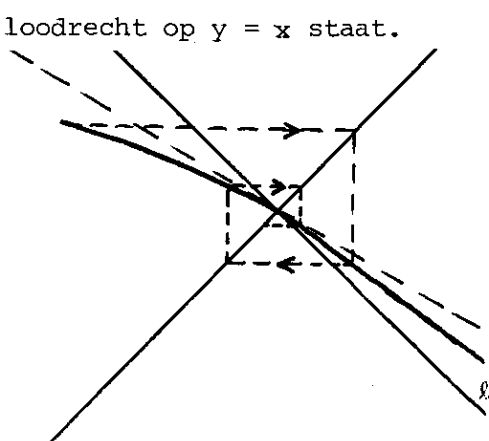
voor $1 < \alpha \leq 2$ geldt $0 < \xi \leq \frac{1}{2}$ en $0 \leq F'(\xi) < 1$,

voor $2 < \alpha < 3$ geldt $\frac{1}{2} < \xi < \frac{2}{3}$ en $-1 < F'(\xi) < 0$,

voor $3 \leq \alpha < 4$ geldt $\frac{2}{3} \leq \xi < \frac{4}{3}$ en $F'(\xi) \leq -1$.

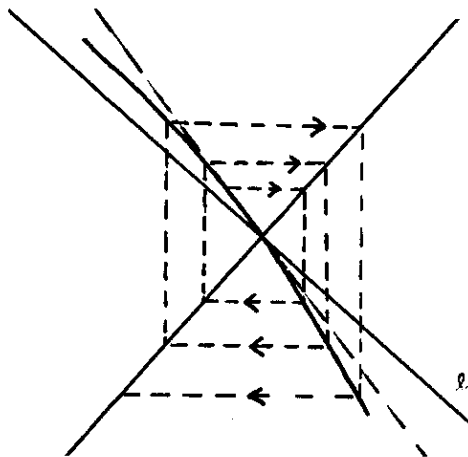


Wij illustreren de gevallen iii) en iv) nog met de volgende "vergrotingen" rond het punt $(\xi, F(\xi))$, waarbij de stippelijijn de raaklijn voorstelt en ℓ loodrecht op $y = x$ staat.



iii)'

$$-1 < F'(\xi) < 0$$



iv)'

$$F'(\xi) \leq -1$$

Wij bespreken de vier gevallen met behulp van stelling (1.4.3) en de definities (1.4.2) en (1.4.7).

- i) Voor elke $0 < x_0 < 1$ is de rij (x_k) dalend en geldt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$. Elke oplossing is stabiel.
- ii) Voor elke $0 < x_0 < \xi$ is de rij (x_k) stijgend en geldt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$. Voor $x_0 = 0$ geldt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$. De nuloplossing is niet stabiel, de oplossingen met limiet ξ zijn wel stabiel.
- iii) Wanneer x_0 voldoende dicht bij ξ ligt is voldaan aan de voorwaarden van stelling (1.4.3) en geldt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$. Elke oplossing van deze soort is stabiel.
- iv) In dit geval is niet meer voldaan aan de voorwaarden van stelling (1.4.3). Uit de grafiek blijkt dat er convergentieproblemen zijn, en dat het niet meer juist is dat $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$ als x_0 voldoende dicht bij ξ ligt (behalve natuurlijk wanneer $x_0 = \xi$). Wij onderzoeken dit geval nader.

De grafiek suggereert dat, in het geval de rij (x_k) niet convergeert, de volgende situatie zou kunnen optreden:

$$x_{k+2} = x_k, \text{ voor voldoende grote } k, \text{ voor speciale } x_0.$$

Deze situatie treedt op wanneer

$$(1.5.6) \quad x_{k+2} = F(x_{k+1}) = F(F(x_k)) = x_k.$$

Daarom onderzoeken wij de rij

$$x_0, x_2, x_4, \dots, x_{2k}, \dots$$

Na substitutie $y_k := x_{2k}$ wordt uit $x_{k+1} = F(x_k)$ verkregen

$$y_{k+1} = x_{2k+2} = F(F(x_{2k})) = F(F(y)) ,$$

dus in ons voorbeeld

$$(1.5.7) \quad y_{k+1} = \alpha(\alpha y_k (1 - y_k) (1 - \alpha y_k (1 - y_k))) .$$

Voor de convergentie van de rij (y_k) is nodig dat de volgende vergelijking reële oplossingen heeft:

$$(1.5.8) \quad y = \alpha^2 y (1 - y) (1 - \alpha y (1 - y)) .$$

Nu weten wij reeds dat deze vergelijking de wortels 0 en $\frac{\alpha - 1}{\alpha}$ heeft. Na deling door $y(y - \frac{\alpha - 1}{\alpha})$ komen wij tot de vierkantsvergelijking

$$\frac{\alpha^2}{\alpha + 1} y^2 - \alpha y + 1 = 0 .$$

Deze vergelijking heeft slechts reële wortels wanneer

$$\alpha^2 - \frac{4\alpha^2}{\alpha + 1} \geq 0 ,$$

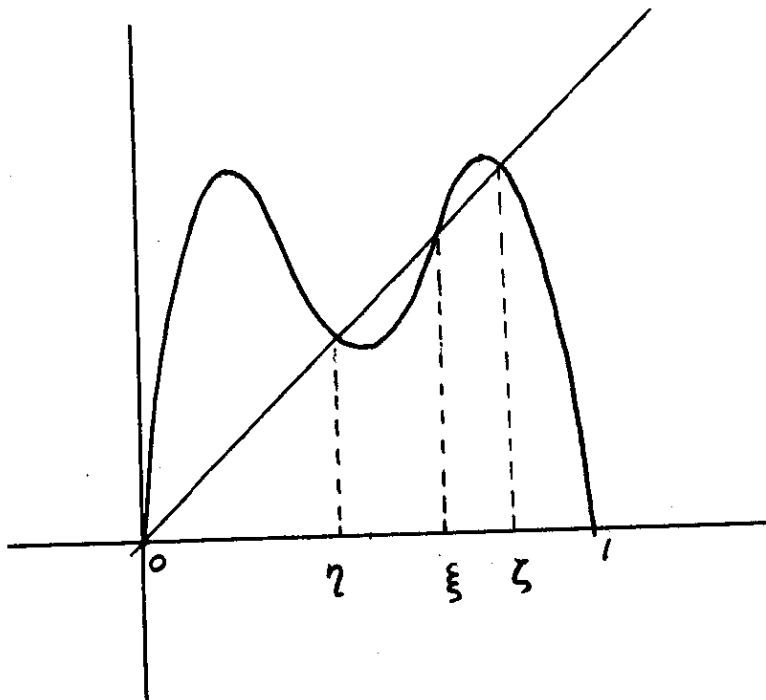
dus wanneer $\alpha \geq 3$. De conclusie is als volgt:

- iii) voor $2 < \alpha < 3$ zijn er, behalve 0 en ξ , geen andere stationaire punten voor (1.5.7), dus geen andere limietpunten voor de rij (x_{2k}) .
- iv) voor $3 \leq \alpha < 4$ zijn er, behalve 0 en $\xi = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$, nog twee andere wortels van (1.5.8), zeg η en ζ .

De grafiek van de functie

$$\alpha^2 y (1 - y) (1 - \alpha y (1 - y))$$

heeft met de rechte onder 45° behalve voor 0 en voor $\xi = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$ nog twee snijpunten, namelijk voor η en ζ .



De rij (y_k) kan geen limietpunt ξ hebben omdat $F'(\xi) > 1$. De rij (y_k) kan wel limietpunt η resp. ζ hebben wanneer geldt $-1 < F'(\eta) < 0$ resp.

$-1 < F'(\eta) < 0$. In zo'n geval kunnen wij op grond van stelling 1.3.3 besluiten dat de rij (y_k) convergeert naar η resp. ζ wanneer y_k voor zekere k dicht genoeg ligt bij η resp. ζ . Terugkerend tot de oorspronkelijke iteratie

$$x_{k+1} = \alpha x_k (1 - x_k) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

concluderen wij dat voor sommige α met $3 \leq \alpha < 4$ (zie ook de volgende figuur) en voor geschikte beginwaarde x_0 de rij (x_k) "convergeert" naar een periodieke oplossing met periode 2:

$$x_{k_0+2k} = x_{k_0} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Wanneer x_{k_0} voldoende dicht bij ζ ligt, dan geldt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k_0+2k} = \zeta$$

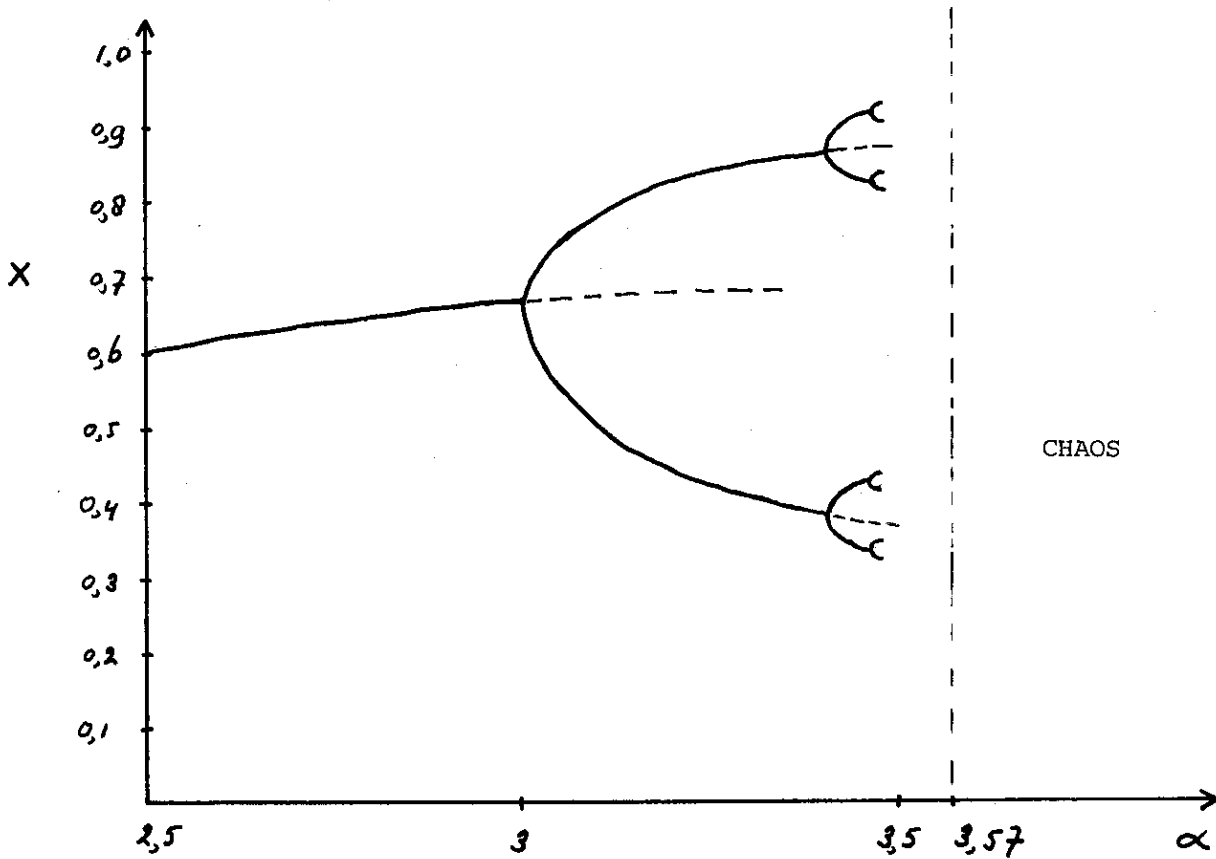
Bovendien geldt dan dat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k_0+2k+1} = F(\zeta) = \eta$$

Inderdaad, $F(\zeta) = \eta$ omdat η het enige in aanmerking komende punt is; $F(\zeta) = \zeta$ is onmogelijk want dan zou $\zeta = \xi$, en $F(\zeta) = 0$ is onmogelijk want dan zou $\zeta = 0$. De rij

$\zeta, \eta, \zeta, \eta, \zeta, \eta, \dots$

is dan een stabiele oplossing van de oorspronkelijke iteratie.



Wij vatten samen aan de hand van bovenstaande figuur, waarin de stationaire punten van $F(x)$ zijn weergegeven bij toenemende α . Het punt $\xi = (\alpha - 1)/\alpha$ is stabiel voor $1 < \alpha < 3$, maar instabiel voor $3 < \alpha$ (zie stippellijn). Voorbij $\alpha = 3$ ontstaan twee stationaire punten η en ζ van $F(F(x))$ die stabiele oplossingen van periode 2 geven, d.w.z. waartussen de rij x_k alterneert in een stabiele rij van periode 2. Het stabiele punt ξ vorkt in de twee stabiele punten η en ζ : bifurcatie. Na verdere toename van α wordt ook de rij van periode 2 instabiel en ontstaat een rij van periode 4: de punten η en ζ vorken wederom.

Wij schetsen hoe het verder gaat. Naarmate α toeneemt ontstaan rijen van periode 2^k , $k = 0, 1, \dots$. De intervallen voor α die corresponderen met hogere perioden worden echter steeds kleiner. Uiteindelijk, ongeveer bij $\alpha = 3.57$, treedt een geheel nieuwe situatie in. Voor waarden $\alpha > 3.57$ treden ook rijen van periode 3 op, dus oplossingen van

$$x_{k+3} = F(F(F(x_k))) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

en ook vele andere rijen van willekeurig grote periode (waarvan voor vaste α slechts één stabiel kan zijn). De chaos is compleet.

Hoofdstuk II. Lineaire recurrenente betrekkingen

2.1. Algemene theorie

Zoals in hoofdstuk I, gebruiken we de notatie (x_k) , $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ of (x_0, x_1, \dots) voor rijen. De verzameling van alle rijen $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ van reële getallen x_k geven we aan met S . In S is op een voor de hand liggende manier een optelling en een scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd door

$$\begin{aligned}(x_k) + (y_k) &:= (x_k + y_k), \\ \lambda(x_k) &:= (\lambda x_k),\end{aligned}$$

de zgn. termgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging. Met behulp hiervan wordt S een vectorruimte (zie Wiskunde 20 (3.3.1)). Het nulelement van S is natuurlijk de rij $(0, 0, 0, \dots)$.

Beschouw nu de homogene lineaire recurrenente betrekking

$$(2.1.1) \quad x_{k+n} + a_{1,k}x_{k+n-1} + \dots + a_{n,k}x_k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots).$$

De verzameling van rijen (x_k) die oplossing zijn van (2.1.1) geven we aan met V . Er geldt dus $V \subset S$. Het is gemakkelijk in te zien dat V een lineaire deelruimte van S en dus zelf een vectorruimte is, d.w.z. als (x_k) en (y_k) oplossingen van (2.1.1) zijn en α een reëel getal, dan zijn ook $(x_k + y_k)$ en (αx_k) oplossingen.

Als men wil nagaan of een m -tal rijen $(x_{1,k}), \dots, (x_{m,k})$ onafhankelijk zijn moet men onderzoeken of de relatie

$$(2.1.2) \quad p_1 x_{1,k} + p_2 x_{2,k} + \dots + p_m x_{m,k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

kan gelden met coëfficiënten p_1, \dots, p_m niet alle gelijk aan nul. Voor rijen uit V hoeft men dit slechts te verifiëren voor $k = 0, \dots, n-1$:

(2.1.3) LEMMA. Een m -tal oplossingen $(x_{1,k}), \dots, (x_{m,k})$ van (2.1.1) is onafhankelijk dan en slechts dan als de vectoren

$$(2.1.4) \quad \underline{x}_1 := \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{1,n-1} \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_2 := \begin{bmatrix} x_{2,0} \\ \vdots \\ x_{2,n-1} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \underline{x}_m := \begin{bmatrix} x_{m,0} \\ \vdots \\ x_{m,n-1} \end{bmatrix}$$

in \mathbb{R}^n onafhankelijk zijn.

BEWIJS. Als de oplossingen $(x_{1,k}), \dots, (x_{m,k})$ afhankelijk zijn dan bestaan er getallen p_1, \dots, p_m niet alle gelijk aan nul waarvoor (2.1.2) geldt. Dit houdt in dat

$$(2.1.5) \quad p_1 \underline{x}_1 + \dots + p_m \underline{x}_m = \underline{0}.$$

Als er omgekeerd getallen p_1, \dots, p_m , niet alle gelijk aan nul, bestaan waarvoor (2.1.5) geldt en als we definiëren

$$z_k := p_1 x_{1,k} + \dots + p_m x_{m,k} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

dan is (z_k) een oplossing van (2.1.1) met $z_0 = z_1 = \dots = z_{n-1} = 0$. Hieruit volgt $z_k = 0$ voor alle k , d.w.z. (2.1.2). \square

In plaats van: " $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m$ zijn onafhankelijk" kunnen we ook zeggen: "de matrix

$$(2.1.6) \quad X := \begin{bmatrix} x_{1,0} & \dots & x_{m,0} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1,n-1} & \dots & x_{m,n-1} \end{bmatrix}$$

heeft rang m ".

Uit (2.1.3) leiden we onmiddellijk het volgende resultaat af.

$$(2.1.7) \quad \text{STELLING. } \dim V = n.$$

BEWIJS. We laten eerst zien dat $n+1$ oplossingen afhankelijk zijn: Als $(x_{1,k}), \dots, (x_{n+1,k})$ oplossingen zijn dan zijn de $n+1$ vectoren

$$\begin{bmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{1,n-1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} x_{n+1,0} \\ \vdots \\ x_{n+1,n-1} \end{bmatrix}$$

in \mathbb{R}^n afhankelijk. Volgens (2.1.3) zijn daarom ook de rijen $(x_{1,k}), \dots, (x_{n+1,k})$ afhankelijk. Hieruit volgt $\dim V \leq n$. Vervolgens laten we zien dat er n onafhankelijke oplossingen zijn. We geven met $(u_{i,k})_{k=0}^{\infty}$ aan de oplossing met beginwaarden

$$u_{i,k} = 1 \quad \text{als } k = i$$

$$u_{i,k} = 0 \quad \text{als } k \neq i, 0 \leq k \leq n-1$$

voor $i = 0, 1, \dots, n-1$. De n oplossingen $(u_{0,k}), \dots, (u_{n-1,k})$ zijn onafhankelijk daar

$$\begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{1,0} & \dots & u_{n-1,0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{0,n-1} & u_{1,n-1} & \dots & u_{n-1,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} . \quad \square$$

Stelling (2.1.7) is belangrijk omdat zij ons een methode aan de hand doet om de algemene oplossing van (2.1.1) te vinden. We zoeken een n -tal onafhankelijk oplossingen $(x_{1,k}), \dots, (x_{n,k})$ van (2.1.1). De algemene oplossing is dan

$$(2.1.8) \quad z_k = \alpha_1 x_{1,k} + \dots + \alpha_n x_{n,k} .$$

Om te controleren of een gegeven n -tal oplossingen onafhankelijk zijn kan men gebruik maken van (2.1.3) of van $\text{rang } X = n$, waar X gegeven wordt door (2.1.6).

Tenslotte beschouwen we een inhomogene lineaire recurrente betrekking

$$(2.1.9) \quad x_{k+n} + a_{1,k} x_{k+n-1} + \dots + a_{n,k} x_k = b_k .$$

Als (\bar{x}_k) een oplossing is van (2.1.9) en (x_k) een oplossing van de corresponderende homogene vergelijking (2.1.1) dan is ook $(\bar{x}_k) + (x_k)$ een oplossing van (2.1.9). Verder kan men, als men eenmaal een particuliere oplossing (\bar{x}_k) van (2.1.9) gevonden heeft de algemene oplossing van (2.1.9) vinden door bij (\bar{x}_k) de algemene oplossing van (2.1.1) op te tellen. Net zoals in de theorie van lineaire differentiaalvergelijkingen heeft men hier dus dat

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{algemene oplossing} \\ \text{inhomogene} \\ \text{vergelijking} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{particuliere oplossing} \\ \text{inhomogene} \\ \text{vergelijking} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{algemene oplossing} \\ \text{homogene} \\ \text{vergelijking} \end{array} \right\} .$$

2.2. Lineaire recurrente betrekkingen met constante coëfficiënten

Zoals uit het voorafgaande blijkt, is er een grote analogie tussen de theorieën over differentiaalvergelijkingen en recurrente betrekkingen. Deze analogie zal nog sterker tot uiting komen als we lineaire recurrente betrekkingen met constante coëfficiënten beschouwen.

VOORBEELD.

$$(2.2.1) \quad x_{k+2} - 5x_{k+1} + 6x_k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots) .$$

Dit is een homogene lineaire recurrente betrekking van de tweede orde met constante coëfficiënten. We proberen een oplossing hiervan te vinden van de vorm $x_k = \lambda^k$. Substitutie hiervan in (2.2.1) levert

$$\lambda^{k+2} - 5\lambda^{k+1} + 6\lambda^k = 0$$

dus

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 .$$

Dit is de karakteristieke vergelijking van (2.2.1). Oplossingen zijn $\lambda = 2$ en $\lambda = 3$. Daarom zijn de rijen $x_k = 2^k$, $y_k = 3^k$ beide oplossingen van (2.2.1). De rijen zijn onafhankelijk want

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Derhalve luidt de algemene oplossing

$$x_k = \alpha 2^k + \beta 3^k .$$

De oplossing u_k met beginwaarden $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ vinden we door α en β op te lossen uit de vergelijkingen

$$\alpha 2^0 + \beta 3^0 = \alpha + \beta = 1$$

$$\alpha 2^1 + \beta 3^1 = 2\alpha + 3\beta = 0$$

hetgeen levert $\alpha = 3$, $\beta = -2$. Dus

$$u_k = 3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k .$$

□

Beschouw nu een algemene homogene lineaire betrekking met constante coëfficiënten

$$(2.2.2) \quad x_{k+n} + a_1 x_{k+n-1} + \dots + a_n x_k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots) .$$

Als men hierin substitueert $x_k = \lambda^k$, dan vindt men

$$(2.2.3) \quad \lambda^{k+n} + a_1 \lambda^{k+n-1} + \dots + a_n \lambda^k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots) .$$

Hieraan is voldaan dan en slechts dan als λ voldoet aan de karakteristieke vergelijking

$$(2.2.4) \quad \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 .$$

Dit is in feite (2.2.3) met $k = 0$. Stel dat deze vergelijking n verschillende oplossingen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heeft. Dan zijn de oplossingen $(x_{1k}) = (\lambda_1^k), \dots, (x_{nk}) = \lambda_n^k$ onafhankelijk. Dit volgt uit het feit dat de zogenaamde Van der Monde matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \dots & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

niet singulier is. Immers als de rijen van deze matrix afhankelijk zijn, dan bestaan er getallen p_0, \dots, p_{n-1} niet alle nul, zo dat

$$p_0 \lambda_i^{n-1} + \dots + p_{n-2} \lambda_i + p_{n-1} = 0$$

voor $i = 1, \dots, n$. Dit betekent dat het polynoom

$$p(\lambda) := p_0 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}$$

de getallen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ als nulpunten heeft. Aangezien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ verschillend zijn en de graad van p ten hoogste $n-1$ is, is dit een contradictie.

Als de karakteristieke vergelijking meervoudige oplossingen heeft dan moeten we bij elke wortel λ van multipliciteit m ook m onafhankelijke oplossingen vinden, willen we in totaal n onafhankelijke oplossingen bepalen. Men kan verifiëren dat, als λ een m -voudige oplossing is, de rijen $(\lambda^k), (k\lambda^k), \dots, (k^{m-1}\lambda^k)$ oplossingen zijn van (2.2.2) en dat, als we op deze manier n oplossingen construeren, deze oplossingen ook onafhankelijk zijn. We zullen het bewijs hier achterwege laten. Tenslotte is het mogelijk dat er complexe oplossingen van de karakteristieke vergelijking zijn. Als λ een complexe oplossing is dan is ook $\bar{\lambda}$ een oplossing. De rijen (λ^k) en $(\bar{\lambda}^k)$ zijn dan complexe oplossingen van (2.2.2). Reële oplossingen zijn (x_k) en (y_k) gegeven door

$$x_k := \frac{1}{2}(\lambda^k + \bar{\lambda}^k) = \operatorname{Re} \lambda^k$$

$$y_k := \frac{1}{2i}(\lambda^k - \bar{\lambda}^k) = \operatorname{Im} \lambda^k .$$

Als $\lambda = re^{i\varphi}$, dan is

$$(2.2.5) \quad \begin{aligned} x_k &= r^k \cos k\varphi \\ y_k &= r^k \sin k\varphi . \end{aligned}$$

Men kan laten zien dat men, door voor elke complexe wortel de corresponderende complexe oplossingen (z_k) en (\bar{z}_k) te vervangen door $(\operatorname{Re} z_k)$ en $(\operatorname{Im} z_k)$, een stelsel van n onafhankelijke oplossingen van (2.2.2) krijgt.

(2.2.6) OPMERKING. Er treedt hier een klein verschil op met de theorie van lineaire differentiaalvergelijkingen. Als men daar nl. een complexe λ vindt schrijft men deze met behulp van het reële en imaginaire deel. In formule (2.2.5) hebben we λ in poolcoördinaten geschreven. \square

We geven een aantal voorbeelden.

(2.2.7) VOORBEELD. Beschouw de recurrente betrekking van Fibonacci (zie (1.1.3)).

$$(2.2.8) \quad x_{k+2} - x_{k+1} - x_k = 0 .$$

De karakteristieke vergelijking luidt

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

met als oplossingen

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) .$$

We zoeken de oplossing (F_k) met beginwaarden $F_0 = F_1 = 1$. Daartoe moeten we α en β oplossen uit

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 &= 1 . \end{aligned}$$

We vinden

$$\alpha = \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\frac{\lambda_1}{\sqrt{5}},$$

$$\beta = \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\lambda_2}{\sqrt{5}}.$$

We vinden dus

$$F_k = \alpha \lambda_1^k + \beta \lambda_2^k = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_2^{k+1} - \lambda_1^{k+1}).$$

Uitgeschreven

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right].$$

Merk op dat het op grond van deze uitdrukking niet onmiddellijk duidelijk is dat F_k een geheel getal is! \square

(2.2.9) OPMERKING. We hebben in voorbeeld (1.3.6) gezien dat $F_{k+1}/F_k \rightarrow \xi = \lambda_2$ voor $k \rightarrow \infty$. Dit kunnen we ook uit de door ons gevonden formule voor F_k afleiden:

$$\frac{F_{k+1}}{F_k} = \frac{\lambda_2^{k+2} - \lambda_1^{k+2}}{\lambda_2^{k+1} - \lambda_1^{k+1}} = \lambda_2 \frac{1 - (\lambda_1/\lambda_2)^{k+2}}{1 - (\lambda_1/\lambda_2)^{k+1}} \rightarrow \lambda_2 \quad (k \rightarrow \infty)$$

daar $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. \square

(2.2.10) OPMERKING. Beschouw nog eens voorbeeld (1.1.4). Het aantal boodschappen ter lengte k is daar F_k . Shannon heeft de capaciteit van een communicatiekanaal gedefinieerd door

$$C := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{{}_2 \log x_k}{k},$$

als x_k het aantal boodschappen ter lengte k en ${}_2 \log x_k$ de logarithme van x_k met grondtal 2 voorstelt. Voor het communicatiekanaal beschreven in voorbeeld (1.1.4) geldt

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{{}_2 \log F_k}{k} = {}_2 \log \lambda_2 = 0,694\dots \quad \square$$

(2.2.11) VOORBEELD. Gevraagd wordt de eigenwaarden en eigenvectoren van de $n \times n$ -matrix

$$A := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

te bepalen. Daar deze matrix symmetrisch is, zijn alle eigenwaarden reëel. De vergelijking $A\underline{x} = \alpha\underline{x}$ luidt (met $\underline{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$):

$$(2.2.12) \quad \begin{aligned} x_2 &= 2\alpha x_1 \\ x_1 + x_3 &= 2\alpha x_2 \\ &\vdots \\ x_{n-2} + x_n &= 2\alpha x_{n-1} \\ x_{n-1} &= 2\alpha x_n \end{aligned}$$

Als we nog invoeren: $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$, dan kunnen we in plaats van (2.2.12) schrijven

$$(2.2.13) \quad \begin{aligned} x_{k+2} - 2\alpha x_{k+1} + x_k &= 0 \quad (k = 0, \dots, n-1) \\ x_0 = x_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Dit is een randwaardeprobleem. De karakteristieke vergelijking van deze betrekking is

$$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + 1 = 0$$

met als oplossingen

$$\lambda_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}, \quad \lambda_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1},$$

als $|\alpha| > 1$,

$$\lambda_1 = \alpha + i\sqrt{1 - \alpha^2}, \quad \lambda_2 = \alpha - i\sqrt{1 - \alpha^2}$$

als $|\alpha| < 1$, en

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$$

als $|\alpha| = 1$.

Als $x_1 = 0$, dan volgt onmiddellijk uit (2.2.12) dat $\underline{x} = \underline{0}$, in strijd met de definitie van eigenvector. We nemen dus aan dat $x_1 \neq 0$ en we mogen zelfs aannemen dat $x_1 = 1$ (als \underline{x} een eigenvector is dan is ook \underline{x}/x_1 een eigenvector). Als we (onder aanname dat $|\alpha| \neq 1$) de algemene oplossing met

$$x_k = a\lambda_1^k + b\lambda_2^k$$

aangeven, dan vinden we voor de oplossing met beginwaarden $x_0 = 0$, $x_1 = 1$:

$$x_k = \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

De eigenwaarden α van A voldoen aan de vergelijking $x_{n+1} = 0$, d.w.z.

$$\lambda_1^{n+1} = \lambda_2^{n+1}.$$

Aangezien $\lambda_1\lambda_2 = 1$ (zie de karakteristieke vergelijking) volgt hieruit $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Het is gemakkelijk te verifiëren dat dit onmogelijk is als $|\alpha| > 1$.

Als $\alpha = 1$ dan is de algemene oplossing $x_k = ak + b$. De oplossing met beginwaarden $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ is $x_k = k$. Blijkbaar is $x_{n+1} \neq 0$. Op analoge wijze kan men aantonen dat voor $\alpha = -1$ de oplossing met beginwaarden $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ niet kan voldoen aan $x_{n+1} = 0$. Derhalve vinden we dat α voldoet aan $|\alpha| < 1$. We kunnen daarom φ zo kiezen dat $\alpha = \cos \varphi$, en $0 < \varphi < \pi$. Dan vinden we

$$\lambda_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$$

en

$$\lambda_2 = e^{-i\varphi}.$$

Dit is in overeenstemming met het feit dat $\lambda_1\lambda_2 = 1$ en $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. De algemene oplossing van (2.2.13) luidt

$$x_k = a \sin k\varphi + b \cos k\varphi.$$

De voorwaarde $x_0 = 0$ levert $b = 0$ en uit $x_1 = 1$ volgt $a = 1/\sin \varphi$. Merk op dat $\sin \varphi \neq 0$ omdat $0 < \varphi < \pi$. We vinden dus

$$x_k = \frac{\sin k\varphi}{\sin \varphi}, \quad (k = 0, \dots, n+1).$$

De grootheid α (en dus φ) moet zo worden gekozen dat $x_{n+1} = 0$, d.w.z.

$$\sin(n+1)\varphi = 0 .$$

We vinden

$$\varphi = \frac{\ell\pi}{n+1} \quad (\ell = 1, \dots, n) .$$

(Bedenk dat $0 < \varphi < \pi$.) Derhalve zijn

$$\alpha_\ell = \cos \frac{\ell\pi}{n+1} \quad (\ell = 1, \dots, n)$$

de eigenwaarden van A. De eigenvectoren worden gegeven door:

$$\underline{x}^{(\ell)} = [x_1^{(\ell)}, \dots, x_n^{(\ell)}]^T \quad (\ell = 1, \dots, n)$$

waar

$$x_k^{(\ell)} = \frac{\sin(\frac{k\ell\pi}{n+1})}{\sin(\frac{\ell\pi}{n+1})}, \quad (k = 1, \dots, n) .$$

□

(2.2.14) VOORBEELD. We beschouwen weer voorbeeld (1.1.5). Van de recurrente betrekking

$$px_{k+2} - x_{k+1} + (1-p)x_k = 0$$

is de karakteristieke vergelijking

$$p\lambda^2 - \lambda + (1-p) = 0$$

met als oplossingen $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = (1-p)/p$.

Als $p \neq \frac{1}{2}$ dan is de algemene oplossing

$$x_k = \alpha + \beta\left(\frac{1-p}{p}\right)^k .$$

De voorwaarde $x_0 = 0$ geeft ons $\alpha + \beta = 0$ en uit $x_N = 1$ volgt

$$\alpha + \beta\left(\frac{1-p}{p}\right)^N = 1 .$$

Als we $\rho := (1-p)/p$ definiëren vinden we:

$$\alpha = -\beta = (1 - \rho^N)^{-1}$$

en

$$x_k = \frac{1 - \rho^k}{1 - \rho^N} \quad (k = 0, \dots, N) .$$

Als $p = \frac{1}{2}$, dan is de algemene oplossing

$$x_k = \alpha + \beta k .$$

De randvoorwaarden leveren dan $\alpha = 0$ en $\alpha + \beta N = 1$. Dan vinden we

$$x_k = k/N \quad (k = 0, \dots, N) .$$

□

We beschouwen nu enkele voorbeelden van inhomogene betrekkingen. Hier vinden we de algemene oplossing door eerst een particuliere oplossing te bepalen en daarbij de algemene oplossing van de homogene vergelijking op te tellen.

(2.2.15) VOORBEELD. Iemand gaat een lening aan van f100.000,-- die hij op basis van annuïteit door jaarlijkse betalingen aflost. Dat wil zeggen, dat hij de aflossing zo regelt dat hij elk jaar hetzelfde bedrag (= aflossing + rente) betaalt. Als zijn lening na 30 jaar moet zijn afgelost en als de rentevoet 10% bedraagt, hoeveel moet hij dan per jaar betalen?

We noemen de beginwaarde van de lening K , het aantal jaren waarin de lening wordt afgelost N en de rentevoet 100ρ (in bovenstaand getallenvoorbeeld is $K = 100.000$, $N = 30$, $\rho = 0.1$). Verder geven we de waarde van het in het jaar k verschuldigde bedrag aan met x_k . Dan geldt dus

$$(2.2.16) \quad x_0 = K, \quad x_N = 0 .$$

Als we het jaarlijks te betalen bedrag met w aangeven, dan wordt na afloop van het k -de jaar het volgende bedrag afgelost

$$w - \rho x_k$$

zodat de rij $(x_k)_{k=0}^N$ voldoet aan de volgende relatie

$$x_{k+1} = x_k - (w - \rho x_k)$$

dus

$$(2.2.17) \quad x_{k+1} = (1 + \rho)x_k - w .$$

De algemene oplossing van de homogene vergelijking is

$$x_k = (1 + \rho)^k c .$$

Een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking is

$$x_k = w/\rho .$$

Derhalve luidt de algemene oplossing van (2.2.17),

$$(2.2.18) \quad x_k = (1 + \rho)^k c + \frac{w}{\rho} .$$

(Gewoonlijk is $\rho > 0$, zodat deze uitdrukking correct is.)

De getallen c en w worden bepaald uit (2.2.16). Dus:

$$c + \frac{w}{\rho} = K ,$$

$$(1 + \rho)^N c + \frac{w}{\rho} = 0 ,$$

waaruit we vinden:

$$c = - \frac{K}{(1 + \rho)^N - 1} ,$$

$$w = \rho(K - c) .$$

In het bovenstaande getallenvoorbeeld vinden we $w = 10607,92$. Als we de waarde x_k van het kapitaal verschuldigd in het jaar k willen, weten moeten we de gevonden waarden van c en w in (2.2.18) substitueren. Dit levert

$$x_k = \frac{1 - (1 + \rho)^{k-N}}{1 - (1 + \rho)^{-N}} K .$$

□

(2.2.19) VOORBEELD. (voorraadbeheer). In een land wordt de totale productie van goederen verdeeld in goederen bestemd voor de verkoop en goederen bestemd voor het aanvullen van de voorraad. De tijd wordt onderverdeeld in tijdseenheden (bijv. jaren), genummerd $t = 0, 1, 2, \dots$. We geven de hoeveelheid goederen bestemd voor de verkoop op het tijdstip t aan met u_t en de hoeveelheid goederen geproduceerd voor de voorraad met s_t . Verder nemen we aan dat er elk jaar een vast bedrag v in bedrijven wordt geïnvesteerd. Het totale inkomen y_t wordt derhalve gegeven door

$$(2.2.20) \quad y_t = u_t + s_t + v \quad (t = 0, 1, 2, \dots) .$$

Een producent baseert zijn keuze van u_t op de in de periode $t-1$ *werkelijk* verkochte hoeveelheid goederen. We nemen aan dat deze werkelijke verkoop evenredig is met het inkomen van de consumenten en daarom evenredig met het nationale inkomen; dus βy_{t-1} . Verder nemen we aan dat producenten u_t gelijk kiezen aan de hoeveelheid in de periode $t-1$ werkelijk verkochte goederen.

Dus

$$(2.2.21) \quad u_t = \beta y_{t-1} \quad (t = 1, 2, \dots), \quad 0 < \beta < 1 .$$

De hoeveelheid s_t wordt ook aan het begin van de t -de periode vastgesteld en daarbij wordt een poging gedaan de voorraad constant te houden, d.w.z., als er in de periode $t-1$ meer verkocht is dan u_{t-1} , dan wordt het verschil geproduceerd als s_t en als er minder verkocht is dan bedoeld, dan wordt het overgeblevengedeelte het volgende jaar voor de verkoop gebruikt. De grootte s_t wordt dus gelijk aan de hoeveelheid werkelijk verkochte goederen verminderd met de hoeveelheid goederen geproduceerd voor de verkoop. In formule:

$$s_t = \beta y_{t-1} - u_{t-1} = \beta y_{t-1} - \beta y_{t-2}$$

(op grond van (2.2.21)). Combineren we dit met (2.2.20) dan krijgen we de volgende recurrente betrekking:

$$(2.2.22) \quad y_{t+2} - 2\beta y_{t+1} + \beta y_t = v \quad (t = 0, 1, \dots) .$$

We beschouwen eerst de homogene vergelijking:

$$x_{t+2} - 2\beta x_{t+1} + \beta x_t = 0 .$$

De karakteristieke vergelijking luidt:

$$\lambda^2 - 2\beta\lambda + \beta = 0$$

met als wortels

$$\lambda_1 = \beta + i\sqrt{\beta - \beta^2}, \quad \lambda_2 = \beta - i\sqrt{\beta - \beta^2} .$$

Dus

$$\lambda_1 = r e^{i\varphi}, \quad \lambda_2 = r e^{-i\varphi}$$

waarin $r = \sqrt{\beta}$ en φ is gegeven door

$$\cos \varphi = \sqrt{\beta}, \quad \sin \varphi = \sqrt{1 - \beta} .$$

De algemene oplossing van de homogene betrekking luidt dus

$$x_t = a\beta^{t/2} \cos(t\varphi + \theta) \quad (t = 0, 1, 2, \dots) .$$

We zoeken een particuliere oplossing van (2.2.22) die constant is: $y_t = \hat{y}$.
Dan vinden we

$$\hat{y} = \frac{v}{1 - \beta} .$$

Derhalve is de algemene oplossing van (2.2.22):

$$y_t = \frac{v}{1 - \beta} + a\beta^{t/2} \cos(t\varphi + \theta) .$$

Omdat $0 < \beta < 1$ dempt de tweede term uit als $t \rightarrow \infty$, zodat voor elke oplossing geldt $y_t \rightarrow \hat{y} = v/(1 - \beta)$. Merk op dat de oplossing oscilleert om de evenwichtsstand.

Verder zien we dat $s_t \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$). De voorraad nadert dus tot nul, hetgeen een gevolg is van het feit dat y_t tot een stationaire waarde nadert, zodat de voor de verkoop gemaakte goederen op de duur ook werkelijk worden verkocht. □

Hoofdstuk III. Stelsels van recurrente betrekkingen

3.1. Algemene theorie

De algemene gedaante van een stelsel lineaire recurrente betrekkingen met constante coëfficiënten is

$$\begin{aligned}
 (3.1.1) \quad & x_{1,k+1} = a_{1,1}x_{1,k} + a_{1,2}x_{2,k} + \dots + a_{1,n}x_{n,k} + b_{1,k} \\
 & x_{2,k+1} = a_{2,1}x_{1,k} + \dots + a_{2,n}x_{n,k} + b_{2,k} \\
 & \dots \\
 & x_{n,k+1} = a_{n,1}x_{1,k} + \dots + a_{n,n}x_{n,k} + b_{n,k}
 \end{aligned}$$

voor $k = 0, 1, \dots$

We kunnen zulk een stelsel handig aangeven met behulp van vector- en matrixnotatie. Als we invoeren de vectoren

$$\underline{b}_k = \begin{bmatrix} b_{1,k} \\ \vdots \\ b_{n,k} \end{bmatrix} \quad \underline{x}_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{bmatrix}$$

en de matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

dan luidt (3.1.1):

$$(3.1.2) \quad \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \underline{b}_k.$$

Het is onmiddellijk duidelijk, dat de rij vectoren (\underline{x}_k) op een eenduidige manier uit (3.1.2) kan worden berekend, zodra de vector \underline{x}_0 bekend is.

Lineaire recurrente betrekkingen van hogere orde met constante coëfficiënten, zoals deze behandeld zijn in hoofdstuk II, kunnen worden herleid tot stelsels van de vorm (3.1.2). Bij een recurrente betrekking van de tweede orde

$$x_{k+2} + ax_{k+1} + bx_k = c_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

vindt men na de substitutie

$$\underline{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

de relatie

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ -ax_{k+1} - bx_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_k \end{bmatrix} = A\underline{x}_k + \underline{b}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

waar

$$\underline{b}_k := \begin{bmatrix} 0 \\ c_k \end{bmatrix}, \quad A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}.$$

Een dergelijke substitutie kan men ook uitvoeren voor recurrente betrekkingen van hogere orde dan twee.

Verder is het duidelijk dat men ook stelsels van recurrente betrekkingen met niet-constante coëfficiënten kan beschouwen, dus stelsels van de vorm

$$\underline{x}_{k+1} = A_k \underline{x}_k + \underline{b}_k.$$

We beschouwen eerst een homogeen stelsel

$$(3.1.3) \quad \underline{x}_{k+1} = A_k \underline{x}_k.$$

In analogie met hoofdstuk II geven we met S_n aan de verzameling van rijen $(\underline{x}_k)_{k=0}^\infty$ van vectoren in \mathbb{R}^n en met V_n de verzameling van oplossingen van (3.1.3). Evenals in hoofdstuk II kan men een (termgewijze) optelling en scalaire vermenigvuldiging op S_n definiëren waarmee S_n een vectorruimte wordt. Ook hier kan men eenvoudig inzien dat V_n een lineaire deelruimte is van S_n . Het volgende resultaat is analoog aan (2.1.3):

(3.1.4) LEMMA. Een m -tal oplossingen $(\underline{x}_{1,k}), \dots, (\underline{x}_{m,k})$ van (3.1.3) is onafhankelijk dan en slechts dan als de vectoren $\underline{x}_{1,0}, \dots, \underline{x}_{m,0}$ in \mathbb{R}^n onafhankelijk zijn.

BEWIJS. Als $(\underline{x}_{1,k}), \dots, (\underline{x}_{m,k})$ afhankelijk zijn bestaan er getallen p_1, \dots, p_m , niet alle gelijk aan nul, waarvoor

$$(3.1.5) \quad p_1 \underline{x}_{1,k} + \dots + p_m \underline{x}_{m,k} = \underline{0} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Substitutie van $k = 0$ levert

$$(3.1.6) \quad p_1 \underline{x}_{1,0} + \dots + p_m \underline{x}_{m,0} = \underline{0}$$

zodat $(\underline{x}_{1,0}), \dots, (\underline{x}_{m,0})$ afhankelijk zijn. Als omgekeerd (3.1.6) geldt, dan definiëren we

$$\underline{z}_k := p_1 \underline{x}_{1,k} + \dots + p_m \underline{x}_{m,k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Dan is de rij (\underline{z}_k) een oplossing van (3.1.3) met $\underline{z}_0 = \underline{0}$. Met inductie ziet men gemakkelijk in dat $\underline{z}_k = \underline{0}$ voor alle k . Er geldt dus (3.1.5) waaruit volgt dat $(\underline{x}_{1,k}), \dots, (\underline{x}_{m,k})$ afhankelijk zijn. \square

Op dezelfde manier als in hoofdstuk II volgt hieruit

(3.1.7) STELLING. $\dim V_n = n$. Een n -tal oplossingen $(\underline{x}_{1,k}), \dots, (\underline{x}_{n,k})$ is een basis voor V_n dan en slechts dan als $\underline{x}_{1,0}, \dots, \underline{x}_{n,0}$ onafhankelijk zijn.

We beperken ons verder tot recurrente betrekkingen met constante coëfficiënten. Beschouw de betrekking

$$(3.1.8) \quad \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k .$$

Als $\underline{x}_0 = \underline{c}$ is gegeven, vinden we achtereenvolgens

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 &= A\underline{x}_0 = A\underline{c} \\ \underline{x}_2 &= A\underline{x}_1 = A^2\underline{c} \\ &\vdots \\ \underline{x}_k &= A\underline{x}_{k-1} = A^k\underline{c} . \end{aligned}$$

De algemene oplossing van de homogene betrekking is dus

$$(3.1.9) \quad \underline{x}_k = A^k\underline{c} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

waarbij $A^0 = I$ en $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$.

Als we in het bijzonder $\underline{c} = \underline{e}_i$ (de i -de eenheidsvector) substitueren, vinden we dat \underline{x}_k de i -de kolom is van A^k . We zien dat de rijen (\underline{x}_k) , waarbij \underline{x}_k de i -de kolom van A is voor $i = 1, \dots, n$, oplossingen zijn van (3.1.8). Het komt er dus op neer dat het oplossen van (3.1.8) equivalent is met het bepalen van A^k ($k = 0, 1, \dots$). In de twee volgende paragrafen zullen we enkele methoden hiervoor aangeven.

3.2. Substitutie en diagonalisering

We proberen een oplossing van (3.1.8) te vinden door substitutie van

$$(3.2.1) \quad \underline{x}_k = \lambda^k \underline{c} \quad (k = 0, 1, \dots) .$$

Dit levert

$$(3.2.2) \quad A\underline{c} = \lambda \underline{c} .$$

De rij $\underline{x}_k = \lambda^k \underline{c}$ is een oplossing van (3.1.8), dan en slechts dan als λ en \underline{c} aan (3.2.2) voldoen. We zijn uiteraard alleen geïnteresseerd in oplossingen die niet identiek nul zijn. Daarom zoeken we alleen oplossingen van (3.2.2) met $\underline{c} \neq \underline{0}$. Als voor zekere λ er een vector $\underline{c} \neq \underline{0}$ bestaat met de eigenschap (3.2.2), dan noemen we λ een eigenwaarde van A en \underline{c} de bijbehorende eigenvector (zie Wiskunde 20, 3.7.1). De eigenwaarden van A kunnen we vinden uit de karakteristieke vergelijking

$$(3.2.3) \quad \det(\lambda I - A) = 0 .$$

Als deze vergelijking n verschillende reële wortels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heeft dan zijn de bijbehorende eigenvectoren $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n$ onafhankelijk (Wiskunde 30/39, stelling 1.3.2). Derhalve zijn dan ook de oplossingen $(\lambda_1^k \underline{c}_1)_{k=0}^{\infty}, \dots, (\lambda_n^k \underline{c}_n)_{k=0}^{\infty}$ onafhankelijk. De algemene oplossing van (3.1.8) luidt dan

$$(3.2.4) \quad \underline{x}_k = \alpha_1 \lambda_1^k \underline{c}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \underline{c}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k \underline{c}_n \quad (k = 0, 1, \dots) .$$

Als er n verschillende oplossingen van (3.2.3) zijn die niet allemaal reëel zijn, dan is (3.2.4) nog altijd de algemene oplossing, maar deze is dan complex. Willen we reële oplossingen vinden dan moeten we reële en imaginaire delen van oplossingen nemen. Deze zijn dan ook weer oplossingen van (3.1.8). Als bijv. λ een niet-reële oplossing van (3.2.3) is en \underline{c} de bijbehorende eigenvector, dus

$$A\underline{c} = \lambda \underline{c}$$

dan is \underline{c} ook complex en

$$\overline{A\underline{c}} = \overline{\lambda \underline{c}} .$$

De vectoren \underline{c} en $\overline{\underline{c}}$ zijn dan onafhankelijk en dus ook de oplossingen $(\lambda^k \underline{c})$ en $(\overline{\lambda^k \underline{c}})$. Daarom zijn ook de oplossingen

$$\underline{x}_k = \operatorname{Re}(\lambda^k \underline{c}) = \frac{1}{2}(\lambda^k \underline{c} + \overline{\lambda^k \underline{c}})$$

en

$$\underline{y}_k = \operatorname{Im}(\lambda^k \underline{c}) = \frac{1}{2i}(\lambda^k \underline{c} - \overline{\lambda^k \underline{c}})$$

onafhankelijk. Bovendien zijn deze oplossingen reëel. In plaats van twee onafhankelijke complexe oplossingen hebben we nu twee onafhankelijke reële oplossingen gevonden.

Als λ een meervoudige eigenwaarde is, bijv. m -voudig, dan is het mogelijk dat er m onafhankelijke eigenvectoren $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m$ bij λ zijn. In dit geval vinden we m onafhankelijke oplossingen $(\lambda^k \underline{c}_1), \dots, (\lambda^k \underline{c}_m)$ van (3.1.8). Als er bij een eigenwaarde minder onafhankelijke eigenvectoren zijn dan de multipliteit van λ , dan komen we oplossingen te kort. Zo'n eigenwaarde noemen we defectief. (Merk op dat een enkelvoudige eigenwaarde altijd niet-defectief is.) Bij een defectieve eigenwaarde λ moeten we oplossingen van de vorm $\lambda^k(k\underline{v} + \underline{w})$ of eventueel zelfs $\lambda^k(k^2\underline{v} + k\underline{w} + \underline{u})$ enz. zoeken. Laat λ bijv. een dubbele eigenwaarde met één onafhankelijke eigenvector \underline{c} zijn. We zoeken een oplossing van de vorm

$$\underline{x}_k = \lambda^k(k\underline{v} + \underline{w}) ,$$

met $\underline{v} \neq \underline{0}$. Substitutie hiervan in (3.1.8) geeft

$$\lambda^{k+1}((k+1)\underline{v} + \underline{w}) = \lambda^k A(k\underline{v} + \underline{w}) .$$

Hieraan wordt voldaan als

$$kA\underline{v} + A\underline{w} = \lambda k\underline{v} + \lambda\underline{v} + \lambda\underline{w}$$

dus als

$$A\underline{v} - \lambda\underline{v} = \underline{0}$$

en

$$A\underline{w} - \lambda\underline{w} = \lambda\underline{v} .$$

We kunnen $\underline{v} = \underline{c}$ kiezen. Men kan bewijzen dat dan de vergelijking voor \underline{w} een oplossing heeft.

Op deze manier kan men bij een m -voudige eigenwaarde m onafhankelijke oplossingen aangeven.

We maken nog enkele opmerkingen over het geval dat $\lambda = 0$ een eigenwaarde is.

Als $\lambda = 0$ enkelvoudig is, met eigenvector \underline{c} (zodat dus $A\underline{c} = \underline{0}$), dan is de oplossing die daarmee correspondeert, d.w.z. $\underline{x}_k = \lambda^k \underline{c}$ gelijk aan:

$$\underline{x}_0 = \underline{c} , \quad \underline{x}_k = \underline{0} \quad (k = 1, 2, \dots) .$$

en dit is een oplossing die niet identiek nul is. (We hebben hier dus $0^0 = 1$ gesteld). Iets dergelijks geldt als λ een meervoudige niet-defectieve eigenwaarde is. Als $\lambda = 0$ een defectieve eigenwaarde is, dan levert bovenstaande procedure ons géén oplossing. Immers als bijv. $\lambda = 0$ tweevoudig is met één eigenvector \underline{v} , dan wordt de vergelijking voor \underline{w} : $A\underline{w} = \underline{0}$, d.w.z., \underline{w} is ook een eigenvector en derhalve afhankelijk van \underline{v} . In dat geval kan men eenvoudig inzien, dat

$$\underline{x}_0 = \underline{u} , \quad \underline{x}_1 = \underline{v} , \quad \underline{x}_k = \underline{0} \quad (k = 2, 3, \dots)$$

een oplossing is. Hierbij \underline{v} de eigenvector, terwijl \underline{u} bepaald wordt uit de

vergelijking $A\underline{u} = \underline{v}$.

(3.2.5) VOORBEELD. Theon van Smyrna beschreef de volgende methode om $\sqrt{2}$ te berekenen. Hij bepaalde rijen (x_k) en (y_k) door de volgende relaties

$$x_0 = y_0 = 1 ,$$

$$(3.2.6) \quad y_{k+1} = x_k + y_k ,$$

$$x_{k+1} = y_k + y_{k+1} .$$

k	x_k	y_k
0	1	1
1	3	2
2	7	5
3	17	12
4	41	29
5	99	70

Het bleek dat $x_k/y_k \rightarrow \sqrt{2}$ ($k \rightarrow \infty$).

We kunnen (3.2.6) herleiden tot een betrekking van de vorm (3.1.8) door de eerste betrekking in de tweede te substitueren. We willen nl. x_{k+1} , y_{k+1} uitdrukken in x_k , y_k . Dan vinden we

$$(3.2.7) \quad x_{k+1} = x_k + 2y_k$$

$$y_{k+1} = x_k + y_k .$$

Dit is de betrekking (3.1.8) met

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

De karakteristieke vergelijking luidt

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -1 & \lambda-1 \end{bmatrix} = 0$$

dus

$$(\lambda - 1)^2 = 2$$

met als oplossingen

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{2} .$$

Bij de eigenwaarde $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ vinden we de eigenvector \underline{c}_1 uit de volgende vergelijking

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

We zien dat

$$\xi_1 = [\sqrt{2}, 1]^T$$

een eigenvector is bij $\lambda = 1 + \sqrt{2}$.

Op analoge wijze vinden we de eigenvector

$$\xi_2 = [\sqrt{2}, -1]^T$$

bij $\lambda = 1 - \sqrt{2}$.

De algemene oplossing van (3.2.7) is dus

$$(3.2.8) \quad \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \alpha(1 + \sqrt{2})^k \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \beta(1 - \sqrt{2})^k \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} .$$

De getallen α en β kunnen worden bepaald uit de voorwaarde $x_0 = y_0 = 1$. Dit levert

$$\alpha \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Dus

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1/\sqrt{2} \\ \alpha - \beta &= 1 \end{aligned}$$

met, als oplossing

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} , \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} .$$

Dus:

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{2} \{ (1 + \sqrt{2})^{k+1} + (1 - \sqrt{2})^{k+1} \} , \\ y_k &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ (1 + \sqrt{2})^{k+1} - (1 - \sqrt{2})^{k+1} \} . \end{aligned}$$

Hieruit kan men laten zien dat inderdaad $x_k/y_k \rightarrow \sqrt{2}$ ($k \rightarrow \infty$). Dit geldt echter niet alleen voor de oplossing van (3.2.7) met beginwaarde $x_0 = y_0 = 1$, maar voor elke oplossing met $\alpha \neq 0$ (zie (3.2.8)). Voor zulke oplossing geldt inderdaad

$$\frac{x_k}{y_k} = \frac{\alpha + \beta \rho^k}{\alpha - \beta \rho^k} \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2} \quad (k \rightarrow \infty)$$

waar $\rho := (1 - \sqrt{2})/(1 + \sqrt{2}) \approx -0,17$. □

OPMERKING. Dat $x_k/y_k \rightarrow \sqrt{2}$ geldt, kan eenvoudiger bewezen worden door de twee vergelijkingen van (3.2.7) op elkaar te delen. Voor $z_k := x_k/y_k$ vinden we dan de eerste orde recurrente betrekking

$$z_{k+1} = \frac{z_k + 2}{z_k + 1}$$

die we met de methode van § 1.3 kunnen behandelen. □

(3.2.9) VOORBEELD. Beschouw een soort kevers met het volgende gedrag. Gemiddeld de helft van de kevers die worden geboren, overleeft het eerste jaar. Deze kevers produceren in het tweede jaar gemiddeld ieder een nieuwe kever. Verder overleeft slechts een op de drie kevers het tweede jaar. In het derde jaar produceren de kevers ieder drie nieuwe kevers (gemiddeld). Geen kever wordt ouder dan drie jaar. Hoe verloopt de bevolking van kevers?

Als we het aantal eerste-, tweede- en derdejaars kevers in het k-de jaar aangeven met resp. x_k , y_k , z_k , dan vinden we de volgende betrekkingen:

$$y_{k+1} = \frac{1}{2} x_k$$

$$z_{k+1} = \frac{1}{3} y_k$$

$$x_{k+1} = y_k + 3z_k .$$

D.w.z., er geldt vergelijking (3.1.8) met

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} .$$

De karakteristieke vergelijking $\det(\lambda I - A) = 0$ luidt hier

$$\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0 .$$

We zien onmiddellijk dat $\lambda = 1$ een oplossing is. Deling door $\lambda - 1$ geeft

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{2} = 0$$

met als oplossingen

$$\lambda = \frac{-1 \pm i}{2} = \frac{e^{\pm 3\pi i/4}}{\sqrt{2}} .$$

Als we de notatie $\sigma = e^{3\pi i/4}/\sqrt{2}$ gebruiken, dan zijn dus 1 , σ , $\bar{\sigma}$ de eigenwaarden. Voor de eigenvectoren vinden we:

Bij $\lambda = 1$: $[6, 3, 1]^T$,

Bij $\lambda = \sigma$: $[6\sigma^2, 3\sigma, 1]^T$,

Bij $\lambda = \bar{\sigma}$: $[6\bar{\sigma}^2, 3\bar{\sigma}, 1]^T$.

Met de twee complexe wortels corresponderen de volgende complexe oplossingen

$$\underline{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\sigma^2 \\ 3\sigma \\ 1 \end{bmatrix} \sigma^k, \quad \bar{\underline{x}}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\bar{\sigma}^2 \\ 3\bar{\sigma} \\ 1 \end{bmatrix} \bar{\sigma}^k.$$

De reële oplossingen

$$\text{Re } \underline{x}_k = \text{Re} \begin{bmatrix} 6\sigma^{k+2} \\ 3\sigma^{k+1} \\ \sigma^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot 2^{-(k+2)/2} \cos 3(k+2)\pi/4 \\ 3 \cdot 2^{-(k+1)/2} \cos 3(k+1)\pi/4 \\ 2^{-k/2} \cos 3k\pi/4 \end{bmatrix},$$

$$\text{Im } \underline{x}_k = \begin{bmatrix} 6 \cdot 2^{-(k+2)/2} \sin 3(k+2)\pi/4 \\ 3 \cdot 2^{-(k+1)/2} \sin 3(k+1)\pi/4 \\ 2^{-k/2} \sin 3k\pi/4 \end{bmatrix}$$

zijn onafhankelijk. De algemene oplossing is dus

$$x_k = 6\alpha 2^{-(k+2)/2} \cos \frac{3(k+2)\pi}{4} + 6\beta 2^{-(k+2)/2} \sin \frac{3(k+2)\pi}{4} + 6\gamma$$

$$y_k = 3\alpha 2^{-(k+1)/2} \cos \frac{3(k+1)\pi}{4} + 3\beta 2^{-(k+1)/2} \sin \frac{3(k+1)\pi}{4} + 3\gamma$$

$$z_k = \alpha 2^{-k/2} \cos \frac{3k\pi}{4} + \beta 2^{-k/2} \sin \frac{3k\pi}{4} + \gamma.$$

Uit deze algemene oplossing is af te lezen dat

$$\underline{x}_k \rightarrow \gamma \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k \rightarrow \infty).$$

De getallen α, β, γ worden bepaald uit de vergelijkingen

$$\begin{aligned} -3\beta + 6\gamma &= x_0 \\ -\frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta + 3\gamma &= y_0 \\ \alpha + \gamma &= z_0. \end{aligned}$$

Hieruit kunnen we γ berekenen als x_0, y_0, z_0 zijn gegeven:

$$\gamma = \frac{1}{15}(x_0 + 2y_0 + 3z_0) .$$

Als de beginpopulatie bijvoorbeeld 1000 kevers is van elk jaar dan is de limietpopulatie 2400 eerstejaars, 1200 tweedejaars en 400 derdejaars kevers.

In § 3.5 zullen we dit resultaat op een veel eenvoudigere manier kunnen vinden. \square

De tweede methode om (3.1.8) op te lossen is nauw verwant aan de eerste.

Neem aan dat de matrix A n verschillende reële eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heeft.

Dan bestaat er volgens stelling (1.3.5) van Wiskunde 30/39 (1975) een inverteerbare matrix S zo dat

$$(3.2.10) \quad S^{-1}AS = D := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Hieruit volgt

$$A = SDS^{-1}, \quad A^2 = SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^2S^{-1} .$$

Met inductie kan men bewijzen

$$A^k = SD^kS^{-1} .$$

Nu is gemakkelijk in te zien (ook met inductie), dat

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

zodat we voor de oplossing $\underline{x}_k = A^k \underline{x}_0$ hebben

$$(3.2.11) \quad \underline{x}_k = S \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} S^{-1} \underline{x}_0 .$$

Merk op dat de kolommen $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n$ van de matrix S eigenvectoren van A zijn:

Als we de matrix met kolommen $\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n$ met $[\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n]$ aangeven, dan geldt

vanwege $AS = SD$:

$$AS = A[\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_n] = [A\underline{s}_1, \dots, A\underline{s}_n] = SD = [\lambda_1 \underline{s}_1, \dots, \lambda_n \underline{s}_n]$$

en dus

$$A\underline{s}_l = \lambda_l \underline{s}_l .$$

We zien dat deze methode om A^k te bepalen in essentie gelijk is aan de eerste methode. De hier gegeven beschrijving is echter soms overzichtelijker. De methode kan ook worden toegepast als er samenvallende eigenwaarden zijn, mits er maar n onafhankelijke eigenvectoren zijn, (bijv. als A symmetrisch is).

(3.2.12) VOORBEELD.

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= 3x_k + 3y_k \\y_{k+1} &= x_k + 5y_k .\end{aligned}$$

De matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

heeft de volgende eigenwaarden en eigenvectoren:

$$\begin{aligned}\lambda = 2, \underline{s}_1 &= \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \lambda = 6, \underline{s}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} .\end{aligned}$$

We definiëren dus

$$D := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} ,$$

en

$$S := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Dan is

$$S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

en dus

$$A^k = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 6^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6^k + 3 \cdot 2^k & 3 \cdot (6^k - 2^k) \\ 6^k - 2^k & 3 \cdot 6^k + 2^k \end{bmatrix}. \quad \square$$

3.3. Stelling van Cayley-Hamilton

Als A een $n \times n$ -matrix is en

$$p(z) = p_0 z^m + p_1 z^{m-1} + \dots + p_{m-1} z + p_m$$

een polynoom dan definiëren we

$$p(A) := p_0 A^m + p_1 A^{m-1} + \dots + p_{m-1} A + p_m I.$$

Het is gemakkelijk te verifiëren dat de volgende eigenschap geldt.

(3.3.1) EIGENSCHAP. Als $u(z) = p(z) + q(z)$, $v(z) = p(z)q(z)$, dan is $u(A) = p(A) + q(A)$, $v(A) = p(A)q(A)$.

Op grond van deze eigenschap kan men met polynomen van matrices werken als met gewone polynomen. Belangrijk en minder eenvoudig in te zien is het volgende resultaat:

(3.3.2) STELLING. (Cayley-Hamilton). Zij A een $n \times n$ -matrix en $p(z) := \det(zI - A)$ het karakteristieke polynoom van A. Dan geldt $p(A) = 0$.

We bewijzen deze stelling hier niet.

(3.3.3) VOORBEELD. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Dan is $\det(zI - A) = z^2 + 1$ en dus volgens stelling (3.3.2): $A^2 = -I$. Dit is uiteraard gemakkelijk te verifiëren. Nu geldt

$$A^{2k} = (-I)^k = (-1)^k I$$

$$A^{2k+1} = (-1)^k I \cdot A = (-1)^k A$$

waarmee we A^k voor alle k hebben bepaald. □

(3.3.4) VOORBEELD.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

We kunnen schrijven $A = I + B$ waar

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Er geldt

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en

$$B^3 = 0 .$$

Dit laatste is in overeenstemming met de stelling van Cayley-Hamilton als we bedenken dat $\det(\lambda I - B) = \lambda^3$. Dus, volgens het binomium van Newton:

$$A^k = (I+B)^k = I + kB + \frac{1}{2}k(k-1)B^2 = \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{1}{2}k(k-1) \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad \square$$

In het algemeen kan men de stelling van Cayley-Hamilton als volgt gebruiken. Als $p(z)$ het karakteristieke polynoom van A is, probeert men voor elke k het polynoom z^k te schrijven als

$$(3.3.5) \quad z^k = p(z)q_k(z) + r_k(z)$$

met $\text{gr}(r_k) < n$ of $r_k = 0$. Dit kan op grond van bekende delingseigenschappen van polynomen. We zijn hierbij alleen geïnteresseerd in het polynoom r_k . Uit (3.3.1) en de stelling van Cayley-Hamilton volgt nl.

$$A^k = p(A)q_k(A) + r_k(A) = r_k(A) .$$

Het polynoom r_k kan men bepalen door voor z in (3.3.5) de eigenwaarden van A te substitueren (zo deze verschillend zijn). Men vindt dan de waarde van r_k in n verschillende punten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, waaruit r_k eenduidig is te bepalen. Als de λ 's niet allemaal verschillend zijn kan men r_k proberen te bepalen door (3.3.5) te differentiëren.

(3.3.6) VOORBEELD. We beschouwen nog eens voorbeeld (3.2.12). Het karakteristieke polynoom van

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

is

$$p(z) = z^2 - 8z + 12 .$$

Substitutie van $z = 2$ en $z = 6$ in (3.3.5) levert

$$r_k(2) = 2^k, \quad r_k(6) = 6^k .$$

Het polynoom r_k is van de vorm

$$r_k(z) = a_k + b_k z .$$

Er gelden dus de vergelijkingen

$$a_k + 2b_k = 2^k$$

$$a_k + 6b_k = 6^k$$

voor a_k en b_k . Hieruit volgt

$$a_k = \frac{1}{4}(3 \times 2^k - 6^k), \quad b_k = \frac{1}{4}(6^k - 2^k) .$$

Dit geeft

$$A^k = a_k I + b_k A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6^k + 3 \times 2^k & 3 \times (6^k - 2^k) \\ 6^k - 2^k & 3 \times 6^k + 2^k \end{bmatrix} .$$

□

(3.3.7) VOORBEELD. Zij

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} .$$

Het karakteristieke polynoom is $p(z) = (z - 3)^2$. Als we $z = 3$ substitueren in

$$(3.3.8) \quad z^k = p(z)q_k(z) + a_k + b_k z$$

vinden we

$$a_k + 3b_k = 3^k$$

Als we (3.3.8) differentiëren:

$$kz^{k-1} = 2(z-3)q_k(z) + (z-3)^2 q_k'(z) + b_k$$

vinden we na de substitutie $z = 3$:

$$b_k = k3^{k-1}.$$

Dus $a_k = -(k-1)3^k$ en

$$A^k = a_k I + b_k A = 3^{k-1} \begin{bmatrix} 3-k & k \\ -k & 3+k \end{bmatrix}.$$

□

3.4. Inhomogene vergelijkingen

De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking

$$(3.4.1) \quad \underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k + \underline{b}_k$$

vindt men als de som van de algemene oplossing van de homogene vergelijking en een particuliere oplossing. Een particuliere oplossing kan men proberen te vinden door eenvoudige oplossingen te substitueren met eventueel een aantal nader te bepalen parameters.

(3.4.2) VOORBEELD. Een drinkwaterfabriek maakt grondwater geschikt voor levering aan een waterleidingleiding door het viermaal een periode van biologische zuivering te laten ondergaan. Deze vier perioden zijn even lang. Het bedrijf beschikt over vier bassins, genummerd 1,2,3,4 waarin achtereenvolgens de eerste, tweede, derde en vierde zuivering plaats vindt. Alle vier bassins zijn gelijktijdig in bedrijf. Na afloop van elke zuiveringsperiode wordt water overgepompt van bassin 4 naar het waterleidingbedrijf, van bassin 3 naar bassin 4, van 2 naar 3 en van 1 naar 2. Bij het overpompen van water uit bassin i ($i = 1,2,3,4$) blijft een vast deel d van de inhoud in bassin i achter, een vast deel b komt in de volgende productiefase, en de rest $1-b-d$ gaat bij het overpompen verloren. Tenslotte wordt voordat de nieuwe periode ingaat, p m^3 onbewerkt grondwater in bassin 1 gebracht. Met $x_{i,t}$ geven we aan het aantal m^3 water dat zich gedurende periode t in bassin i bevindt. Dan geldt

$$\begin{aligned}x_{1,t+1} &= dx_{1,t} + p \\x_{2,t+1} &= dx_{2,t} + bx_{1,t} \\x_{3,t+1} &= dx_{3,t} + bx_{2,t} \\x_{4,t+1} &= dx_{4,t} + bx_{3,t} .\end{aligned}$$

In vectornotatie:

$$(3.4.3) \quad \underline{x}_{t+1} = A\underline{x}_t + \underline{b}$$

waar

$$\underline{x}_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ x_{3,t} \\ x_{4,t} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & b & d & 0 \\ 0 & 0 & b & d \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Hierbij nemen we aan dat $0 < d < 1$.

We willen de oplossing van (3.4.3) bepalen en in het bijzonder het gedrag van die oplossing voor $t \rightarrow \infty$. Eerst beschouwen we de homogene vergelijking:

$$\underline{x}_{t+1} = A\underline{x}_t .$$

Er geldt $A = dI + bN$, waar

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

We merken op dat

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en $N^4 = 0$ (vgl. voorbeeld (3.3.4)).

Voor $t = 1, 2, \dots$ geldt dus

$$A^t = d^t I + \binom{t}{1} d^{t-1} b N + \binom{t}{2} d^{t-2} b^2 N^2 + \binom{t}{3} d^{t-3} b^3 N^3 =$$

$$= \begin{bmatrix} d^t & 0 & 0 & 0 \\ \binom{t}{1} d^{t-1} b & d^t & 0 & 0 \\ \binom{t}{2} d^{t-2} b^2 & \binom{t}{1} d^{t-1} b & d^t & 0 \\ \binom{t}{3} d^{t-3} b^3 & \binom{t}{2} d^{t-2} b^2 & \binom{t}{1} d^{t-1} b & d^t \end{bmatrix}$$

Omdat $0 < d < 1$ volgt hieruit dat

$$A^t \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) .$$

De oplossing van de homogene vergelijking nadert naar nul, hetgeen natuurlijk intuïtief duidelijk is. Een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking zoeken we van de vorm $\underline{x}_t = \underline{y}$ (constant).

De vergelijking voor \underline{y} is

$$\underline{y} = A\underline{y} + \underline{b}$$

dus

$$\underline{y} = (I - A)^{-1} \underline{b} .$$

Merk op dat $I - A$ inverteerbaar is. Het getal d is nl. de enige eigenwaarde van A en $d \neq 1$. De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking luidt:

$$\underline{x}_t = A^t \underline{c} + (I - A)^{-1} \underline{b} .$$

Blijkbaar geldt

$$\underline{x}_t \rightarrow (I - A)^{-1} \underline{b} \quad (t \rightarrow \infty) ,$$

voor elke oplossing van (3.4.3). De speciale oplossing

$$\underline{x}_t = (I - A)^{-1} \underline{b}$$

heet de stationaire oplossing van (3.4.3). Het is gemakkelijk te berekenen dat

$$(I - A)^{-1} \underline{b} = \begin{bmatrix} p(1-d)^{-1} \\ pb(1-d)^{-2} \\ pb^2(1-d)^{-3} \\ pb^3(1-d)^{-4} \end{bmatrix} .$$

De hoeveelheid die bij de stationaire oplossing steeds aan het waterleidingbedrijf wordt geleverd is

$$bx_{4,t} = pb^4(1-d)^{-4} .$$

□

3.5. Asymptotische gedrag van de oplossingen

We beschouwen nu de homogene lineaire recurrente betrekking

$$(3.5.1) \quad \underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k .$$

In veel van de voorbeelden die we hebben gezien bleek dat het gedrag van \underline{x}_k voor $k \rightarrow \infty$ van belang te zijn. We proberen nu, zonder de oplossingen van (3.5.1) te bepalen, te onderzoeken of één of meer van de volgende eigenschappen gelden:

- I. alle oplossingen \underline{x}_k zijn begrensd,
- II. alle oplossingen \underline{x}_k convergeren voor $k \rightarrow \infty$,
- III. alle oplossingen \underline{x}_k convergeren naar $\underline{0}$.

In het geval II willen we ook graag $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k$ berekenen. Daar de algemene oplossing van (3.5.1) de gedaante $\underline{x}_k = A^k \underline{c}$ heeft en daar omgekeerd de rijen gevormd door de kolommen van A^k oplossingen zijn van (3.5.1), zijn de beweringen I, II, III, equivalent met

- I'. A^k is begrensd,
- II'. A^k convergeert voor $k \rightarrow \infty$,
- III'. $A^k \rightarrow \underline{0}$ ($k \rightarrow \infty$).

We zijn gewoonlijk alleen geïnteresseerd in het gedrag van de reële oplossingen van (3.5.1). Bij het bewijs van de stellingen in deze paragraaf is het gemakkelijker te werken met *complexe* oplossingen. Dit is echter zonder meer mogelijk, daar elk van de eigenschappen I, II, III dan en slechts dan voor alle complexe oplossingen geldt als zij geldt voor alle reële oplossingen. Als bijv. alle complexe oplossingen begrensd zijn, dan zijn natuurlijk alle reële oplossingen begrensd. Omgekeerd als alle reële oplossingen begrensd zijn en als (\underline{x}_k) een willekeurige complexe oplossing is, dan zijn $(\operatorname{Re} \underline{x}_k)$ en $(\operatorname{Im} \underline{x}_k)$ reële oplossingen van (3.5.1) en dus begrensd. Daarom is ook (\underline{x}_k) begrensd. Op analoge manier kan men bij II en III inzien dat men met complexe in plaats van reële oplossingen mag werken.

Het gedrag van de oplossingen voor $k \rightarrow \infty$ wordt grotendeels bepaald door de ligging van de eigenwaarden van A . Als λ een (eventueel complexe) eigenwaarde is en \underline{c} een bijbehorende eigenvector, dan is $\underline{x}_k = \lambda^k \underline{c}$ een oplossing van (3.5.1). Als $|\lambda| > 1$ dan is λ^k en daarom ook $\lambda^k \underline{c}$ onbegrensd. Als $|\lambda| = 1$ dan is $|\lambda^k| = 1$ en daarom is $\lambda^k \underline{c}$ begrensd maar er geldt niet $\lambda^k \underline{c} \rightarrow \underline{0}$ ($k \rightarrow \infty$). Als $|\lambda| < 1$ dan geldt $\lambda^k \underline{c} \rightarrow \underline{0}$.

(3.5.2) DEFINITIE. Zij A een $n \times n$ -matrix. De spectraalstraal van A is

$$r(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ is een eigenwaarde van } A\}.$$

Op grond van bovenstaande definitie komen we nu tot de volgende resultaten.

(3.5.3) STELLING. Er geldt

$$A^k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

dan en slechts dan als $r(A) < 1$.

BEWIJS. We hebben gezien dat er oplossingen (\underline{x}_k) zijn waarvoor geldt $\underline{x}_k \neq \underline{0}$ als er een eigenwaarde λ van A is met $|\lambda| \geq 1$. Als $|\lambda| < 1$ voor alle eigenwaarden geldt dan is de algemene oplossing van (3.5.1) een lineaire combinatie van termen van de gedaante $\lambda_j^k \underline{c}_j$ of (als λ_j een defectieve eigenwaarde is (zie § 3.2)) $k\lambda_j^k \underline{c}_j$, $k^2\lambda_j^k \underline{c}_j$ etc. Elk van deze termen, en dus ook de algemene oplossing, gaat naar nul voor $k \rightarrow \infty$. □

(3.5.4) STELLING. A^k is begrensd dan en slechts dan als aan allebei de volgende voorwaarden is voldaan

- i) $r(A) \leq 1$.
- ii) Elke eigenwaarde λ met $|\lambda| = 1$ is niet-defectief.

BEWIJS. We hebben al gezien dat er onbegrensde oplossingen zijn als er een eigenwaarde λ is met $|\lambda| > 1$. Voorwaarde i) is dus noodzakelijk. Ook ii) is nodig, want als er een eigenwaarde λ is met $|\lambda| = 1$ die defectief is, dan is er ook een oplossing van de vorm $\lambda^k(k\underline{c} + \underline{d})$. Daar $\underline{c} \neq \underline{0}$ en $|\lambda^k| = 1$ is deze oplossing onbegrensd. Als omgekeerd aan i) en ii) is voldaan en $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ zijn de (niet noodzakelijk verschillende) niet-defectieve eigenwaarden van A met $|\lambda_i| = 1$, dan is de algemene oplossing van de gedaante

$$\underline{x}_k = \alpha_1 \lambda_1^k \underline{c}_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m^k \underline{c}_m + (\text{termen met } |\lambda| < 1).$$

Daar de termen met $|\lambda| < 1$ naar nul naderen is \underline{x}_k begrensd. □

(3.5.5) STELLING. $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ bestaat dan en slechts dan als een van de volgende situaties zich voordoet

- (1) $r(A) < 1$.
- (2) $\lambda = 1$ is een niet-defectieve eigenwaarde, terwijl voor alle andere eigenwaarden λ van A geldt $|\lambda| < 1$.

BEWIJS. Als $\lim A^k$ bestaat, dan is A^k begrensd, zodat aan de voorwaarden i) en ii) van stelling (3.5.4) is voldaan. Om aan te tonen dat (1) of (2) geldt moeten we daarom laten zien dat er geen eigenwaarde λ met $|\lambda| = 1$ en $\lambda \neq 1$ bestaat. Als zo'n eigenwaarde λ wel bestaat dan bestaat $\lim \lambda^k$ niet en daarom ook niet $\lim \lambda^k \underline{c}$. Niet alle oplossingen hebben dan een limiet. Hiermee is aangetoond dat (1) of (2) noodzakelijk zijn.

Als aan (1) is voldaan dan is $\lim A^k = 0$ (zie (3.5.3)). Laten we aannemen dat (2) geldt. Dan is de algemene oplossing van de gedaante

$$\underline{x}_k = \alpha_1 \underline{c}_1 + \dots + \alpha_m \underline{c}_m + (\text{termen met } |\lambda| < 1) .$$

Hierbij is verondersteld dat $\lambda = 1$ een m -voudige eigenwaarde is met onafhankelijke eigenvectoren $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m$. We zien dat

(3.5.6) $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \alpha_1 \underline{c}_1 + \dots + \alpha_m \underline{c}_m .$ □

Tenslotte willen we onderzoeken hoe we de limiet van \underline{x}_k kunnen bepalen zonder de oplossing expliciet te berekenen. In het geval (1) van (3.5.5) is, zoals we hebben gezien, altijd $\lim \underline{x}_k = \underline{0}$. Beschouw nu verder geval (2). Dan wordt $\lim \underline{x}_k$ gegeven door (3.5.6) waarin de coëfficiënten $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ afhangen van de oplossing (\underline{x}_k) , d.w.z. van \underline{x}_0 .

We beperken ons verder tot het geval dat $\lambda = 1$ een enkelvoudige eigenwaarde is met bijbehorende eigenvector \underline{c} . Dan is volgens (3.5.6)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \alpha \underline{c} .$$

We willen nu de coëfficiënt α uitdrukken in de beginwaarde \underline{x}_0 . Daar $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A^T)$, is $\lambda = 1$ ook een eigenwaarde van A^T . Laat \underline{d} een bijbehorende eigenvector zijn, zodat $A^T \underline{d} = \underline{d}$, dus $\underline{d}^T A = \underline{d}^T$. Dan geldt

$$\underline{d}^T \underline{x}_{k+1} = \underline{d}^T A \underline{x}_k = \underline{d}^T \underline{x}_k$$

dus $\underline{d}^T \underline{x}_k = \underline{d}^T \underline{x}_0$ voor alle k . Derhalve geldt ook

$$(3.5.7) \quad \underline{d}^T \underline{x}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{d}^T \underline{x}_k = \alpha \underline{d}^T \underline{c} .$$

We merken op dat $\underline{d}^T \underline{c} \neq 0$. Immers, als $\underline{d}^T \underline{c} = 0$ dan zou $\underline{d}^T \underline{x}_0 = 0$ gelden voor alle \underline{x}_0 , hetgeen niet het geval is (neem bijv. $\underline{x}_0 = \underline{d}$). Daarom kunnen we α uit (3.5.7) oplossen: $\alpha = \underline{d}^T \underline{x}_0 / \underline{d}^T \underline{c}$, en dus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \frac{\underline{d}^T \underline{x}_0}{\underline{d}^T \underline{c}} \underline{c} .$$

(3.5.8) OPMERKING. Het geval dat $\lambda = 1$ een meervoudige niet-defectieve eigenwaarde is kan men analoog behandelen. Als bijv. λ een m -voudige eigenwaarde is, zodat (3.5.6) geldt, dan kan men bewijzen dat $\lambda = 1$ ook een m -voudige niet-defectieve eigenwaarde van A^T is. Laat $\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_m$ onafhankelijke eigenvectoren van A^T zijn. Dan geldt in analogie met (3.5.7)

$$\alpha_1 \underline{d}_1^T \underline{c} + \dots + \alpha_m \underline{d}_m^T \underline{c} = \underline{d}_i^T \underline{x}_0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

Dit zijn m vergelijkingen in de m onbekende coëfficiënten $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Men kan laten zien, dat deze vergelijkingen onafhankelijk zijn, zodat de α_i 's hieruit kunnen worden berekend. □

(3.5.9) VOORBEELDEN. We onderzoeken de voorbeelden uit dit hoofdstuk op de eigenschappen I, II, III. In voorbeeld (3.2.5), (3.2.12), (3.3.7) zijn er eigenwaarden λ met $|\lambda| > 1$. De recurrente betrekkingen hebben daar dan ook onbegrensde oplossingen.

In voorbeeld (3.3.4) is 1 de enige eigenwaarde. Deze is echter defectief, zodat A^k onbegrensd is. In voorbeeld (3.3.3) zijn de eigenwaarden $\lambda = i$, $\lambda = -i$. Daar deze enkelvoudig zijn, zijn ze niet-defectief. Daarom is A^k begrensd. $\lim A^k$ bestaat echter niet.

In voorbeeld (3.2.9) is $\lambda = 1$ een enkelvoudige eigenwaarde, terwijl voor de andere eigenwaarden geldt $|\lambda| < 1$. Derhalve bestaat $\lim \underline{x}_k$ voor elke oplossing. Volgens de zo net beschreven methode is $\lim \underline{x}_k = \gamma \underline{c}$ waar $\underline{c} = [6, 3, 1]^T$ een eigenvector bij de eigenwaarde 1 is. De vector $\underline{d} = [1, 2, 3]^T$ is een eigenvector van A^T behorend bij $\lambda = 1$. Volgens bovenstaande geldt dus

$$\gamma \underline{d}^T \underline{c} = \underline{d}^T \underline{x}_0$$

d.w.z.

$$15\gamma = x_0 + 2y_0 + 3z_0$$

zoals we ook in voorbeeld (3.2.9) hebben gevonden, zij het met aanzienlijk meer rekenwerk. \square

(3.5.10) VOORBEELD (zie Wiskunde 20, (1975), voorbeeld (3.6.40; 4)). In een land trekt elk jaar 2,5% van de plattelandsbevolking naar de stad en vestigt zich 1% van de stadsbevolking op het platteland. In het jaar $t = 0$ bevindt zich 60% van de bevolking in de stad, 40% op het land. We nemen aan dat de bevolking van het platteland en de stad niet door andere oorzaken verandert, zodat de totale bevolking N van het land constant is.

Laat s_t, ℓ_t het aantal personen voorstellen dat in het jaar t in de stad, resp. op het land woont. We geven de vector $[s_t, \ell_t]^T$ aan met \underline{x}_t . Volgens bovenstaande is dan

$$\underline{x}_{t+1} = A \underline{x}_t$$

waar

$$A := \begin{bmatrix} 0,99 & 0,025 \\ 0,01 & 0,975 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}$$

waar $p := 0,01$; $q := 0,025$. De eigenwaarden van A zijn $\lambda = 1$ en $\lambda = 1 - p - q$. Bij $\lambda = 1$ is $\underline{c} = [q, p]^T$ een eigenvector van A en $\underline{d} = [1, 1]^T$ een eigenvector van A^T . Daar $|1 - p - q| < 1$ kunnen we stelling (3.5.5) toepassen volgens welke $\lim \underline{x}_t$ bestaat. Er geldt $\lim \underline{x}_t = \alpha \underline{c}$, waar α wordt bepaald uit de vergelijking

$$\alpha \underline{d}^T \underline{c} = \underline{d}^T \underline{x}_0$$

dus

$$\alpha(p + q) = s_0 + \ell_0 = N .$$

Dus

$$\lim s_t = \frac{q}{p + q} N = \frac{5}{7} N$$

$$\lim \ell_t = \frac{p}{p + q} N = \frac{2}{7} N .$$

Merk op dat de eigenschap $\underline{d}^T \underline{x}_t = \underline{d}^T \underline{x}_0$ in dit voorbeeld niets anders zegt dan dat de totale bevolking constant is! \square

We beschouwen nu de inhomogene betrekking met constante inhomogene term:

$$(3.5.11) \quad \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \underline{b} .$$

Stel dat $r(A) < 1$. Dan kennen we een constante particuliere oplossing van (3.5.11). De vergelijking $\underline{x} = A\underline{x} + \underline{b}$ heeft nl. als oplossing $\underline{x} = (I - A)^{-1} \underline{b}$ waarbij $I - A$ inverteerbaar is, omdat $\lambda = 1$ geen eigenwaarde van A is (zie (3.5.2)). De algemene oplossing van (3.5.11) is dus

$$\underline{x}_k = A^k \underline{c} + (I - A)^{-1} \underline{b} .$$

Uit de vorm van de oplossing volgt dadelijk dat

$$\underline{x}_k \rightarrow (I - A)^{-1} \underline{b} \quad (k \rightarrow \infty)$$

daar $A^k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). We hebben dus gevonden:

(3.5.12) STELLING. *Als $r(A) < 1$, dan geldt voor elke oplossing van (3.5.11):*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = (I - A)^{-1} \underline{b} .$$

We hebben hiervan een voorbeeld gezien in (3.4.2). Ook hier zien we dat we $\lim \underline{x}_k$ kunnen bepalen zonder de oplossing expliciet te berekenen.

3.6. Recurrente betrekkingen met niet-negatieve coëfficiënten

Bij vele praktische problemen zijn de coëfficiënten a_{ij} en de inhomogene termen $b_{j,k}$ (in (3.1.1)) niet-negatief. Voor zulke betrekkingen gelden bijzondere eigenschappen, die we in deze paragraaf willen onderzoeken.

(3.6.1) DEFINITIE. Een matrix A heet niet-negatief (notatie $A \geq 0$) als alle elementen van A niet-negatief zijn en positief (notatie $A > 0$) als alle elementen positief zijn. Een analoge terminologie en notatie wordt gebruikt voor vectoren.

Voor vectoren gebruiken we dus de notatie $\underline{x} \geq \underline{0}$ resp. $\underline{x} > \underline{0}$ om aan te geven dat \underline{x} niet-negatief, resp. positief is. De uitdrukking $\underline{x} > \underline{y}$ betekent $\underline{x} - \underline{y} > \underline{0}$. Op analoge manier gebruiken we notaties als $A \geq B$, $A \leq 0$ etc. Het is duidelijk dat uit $A \geq 0$, $B \geq 0$ volgt $AB \geq 0$ (als het matrixproduct is gedefinieerd) en $A + B \geq 0$ (als de som is gedefinieerd). In het bijzonder volgt uit $A \geq 0$ dat $A^k \geq 0$ voor alle k (als A een vierkante matrix is).

(3.6.2) STELLING. Zij $A \geq 0$ en zij $\underline{c} > \underline{0}$ zodanig dat

$$\underline{A}\underline{c} \leq \underline{c} .$$

Dan is A^k begrensd.

BEWIJS. Met volledige inductie ziet men eenvoudig in dat

$$A^k \underline{c} \leq \underline{c} \quad (k = 1, 2, \dots) .$$

Als we de elementen van A^k aangeven met $a_{ij}^{(k)}$ ($i, j = 1, \dots, n$) en als α en β positieve getallen zijn met de eigenschap $0 < \alpha \leq c_j \leq \beta$ ($j = 1, \dots, n$), dan volgt

$$\alpha \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} c_j \leq c_i \leq \beta$$

en dus

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} \leq \beta/\alpha \quad (i = 1, \dots, n) .$$

In het bijzonder

$$a_{ij}^{(k)} \leq \beta/\alpha \quad (i, j = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots) .$$

□

We trekken een aantal conclusies uit dit resultaat.

(3.6.3) GEVOLG. Als $A \geq 0$, $\underline{c} > \underline{0}$ en als

$$\underline{A}\underline{c} < \underline{c}$$

dan geldt $A^k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

BEWIJS. Als $\underline{b} := \underline{A}\underline{c}$, dan geldt $b_i < c_i$ ($i = 1, \dots, n$), dus $b_i/c_i < 1$. Kies $\rho > 0$ zo dat $\max_{i=1, \dots, n} b_i/c_i \leq \rho < 1$. Dan geldt

$$b_i/c_i \leq \rho < 1$$

en dus

$$b_i \leq \rho c_i .$$

Als $B := \rho^{-1}A$, dan volgt hieruit $B\underline{c} = \rho^{-1}\underline{b} \leq \underline{c}$, zodat B^k volgens (3.6.2) begrensd is. Daar $A^k = \rho^k B^k$ en $0 < \rho < 1$ volgt hieruit dat $A^k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). □

(3.6.4) GEVOLG. Zij $A \geq 0$ en zij $\underline{c} > \underline{0}$ een eigenvector van A . Als λ de bijbehorende eigenwaarde is dan is $\lambda \geq 0$. Verder geldt

- i) Als $\lambda < 1$, dan geldt $A^k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).
- ii) Als $\lambda = 1$, dan is A^k begrensd, maar er geldt niet $A^k \rightarrow 0$.
- iii) Als $\lambda > 1$, dan is A^k onbegrensd.

BEWIJS. $\lambda \geq 0$ is duidelijk. i) volgt uit (3.6.3), ii) volgt uit (3.6.2) en (3.5.3), iii) volgt uit (3.5.4). □

Op grond van deze eigenschap kan men onmiddellijk nagaan of A^k al dan niet begrensd is of naar nul nadert zodra men een positieve eigenvector heeft.

(3.6.5) OPMERKING. Let wel dat het in (3.6.2), (3.6.3), (3.6.4) essentieel is dat \underline{c} echt positief is. Als \underline{c} slechts niet-negatief is, dan zijn de beweringen niet juist.

Als bijv.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan is $A\underline{c} = \underline{c}$, maar

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

is niet begrensd.

Daar in (3.6.3) geldt $A\underline{c} \geq \underline{0}$, kan daar aan de ongelijkheid $A\underline{c} < \underline{c}$ alleen door positieve \underline{c} voldaan zijn. Merk op dat \underline{c} in (3.6.2) en (3.6.3) geen eigenvector van A hoeft te zijn! □

(3.6.6) GEVOLG. Zij $A \geq 0$.

i) Beschouw de rijssommen

$$r_i := \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (i = 1, \dots, n) .$$

Als $r_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$) dan is A^k begrensd. Als $r_i < 1$ ($i = 1, \dots, n$) dan geldt $A^k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

ii) Beschouw de kolomsommen

$$k_j := \sum_{i=1}^n a_{ij} \quad (j = 1, \dots, n) .$$

Als $k_j \leq 1$ ($j = 1, \dots, n$) dan is A^k begrens. Als $k_j < 1$ ($j = 1, \dots, n$) dan geldt $A^k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

BEWIJS.

i) Pas (3.6.2) en (3.6.3) toe op $\underline{c} = [1, \dots, 1]^T$.

ii) Er geldt $(A^T)^k = (A^k)^T$, dus A^k is begrens dan en slechts dan als $(A^T)^k$ begrens is, en $A^k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) dan en slechts dan als $(A^T)^k \rightarrow 0$. Pas nu

i) toe op A^T . □

Als A echt positief is dan kan men zonder alle eigenwaarden uit te rekenen tot de existentie van $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ besluiten. Dit berust op

(3.6.7) STELLING. (Perron-Frobenius). Zij $A > 0$. Dan is $\lambda_0 = r(A)$ een positieve enkelvoudige eigenwaarde met een positieve eigenvector \underline{c} . Voor alle andere eigenwaarden λ geldt $|\lambda| < \lambda_0$.

Het bewijs van deze stelling laten we achterwege. We concluderen

(3.6.8) GEVOLG. Zij $A > 0$ en $r(A) = 1$. Dan bestaat $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$.

Daar in de situatie van (3.6.8) de eigenwaarde $\lambda = 1$ enkelvoudig is, kan men de limieten van oplossingen van de recurrente betrekkingen $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k$ berekenen met behulp van de in § 3.5 aangegeven methode.

(3.6.9) VOORBEELD. We beschouwen n landen die onderling handel drijven. In het jaar t exporteert het i -de land voor een bedrag $u_{ij}(t)$ naar het j -de land. Verder wordt er in het i -de land in het jaar t het bedrag $v_i(t)$ geïnvesteerd in het bedrijfsleven. Derhalve is het totale inkomen in het jaar t in het i -de land gelijk aan

$$(3.6.10) \quad x_i(t) = \sum_{j=1}^n u_{ij}(t) + v_i(t) .$$

We nemen aan dat de import u_{ij} in het land j uit het land i in het jaar t bepaald wordt door het inkomen van het land j in het voorafgaande jaar en wel volgens de relatie

$$(3.6.11) \quad u_{ij}(t) = a_{ij} x_j(t-1) .$$

Het getal a_{ij} geeft de neiging aan van het j -de land om uit het i -de land te importeren. We veronderstellen dat a_{ij} onafhankelijk is van t . Uiteraard is $a_{ij} \geq 0$. Verder nemen we aan dat

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1 ,$$

hetgeen betekent dat het totaal aan uitgaven d.m.v. import kleiner is dan het inkomen van het vorige jaar. Substitutie van (3.6.11) in (3.6.10) levert

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + v_i(t+1) .$$

Tenslotte nemen we aan dat de investering in elk land constant is: $v_i(t) = v_i$. Dan vinden we in vectornotatie

$$(3.6.12) \quad \underline{x}(t+1) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{v} .$$

De veronderstelling dat

$$k_j := \sum_{i=1}^n a_{ij} < 1 \quad \text{voor } j = 1, \dots, n$$

houdt volgens (3.6.6)(ii) in, dat $A^k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) en derhalve (zie (3.5.3)) dat $r(A) < 1$. In het bijzonder volgt hieruit dat $\lambda = 1$ geen eigenwaarde is van A , d.w.z. dat $I - A$ inverteerbaar is. Daarom heeft (3.6.12) een constante oplossing $\underline{x}(t) = \underline{x}$ waar \underline{x} voldoet aan

$$\underline{x} = \underline{A}\underline{x} + \underline{v}$$

d.w.z.

$$\underline{x} = (I - A)^{-1} \underline{v} .$$

De algemene oplossing van (3.6.12) is dus

$$\underline{x}(t) = A^t \underline{c} + (I - A)^{-1} \underline{v} .$$

Blijkbaar geldt

$$\underline{x}(t) \rightarrow (I - A)^{-1} \underline{v} \quad (t \rightarrow \infty)$$

voor elke oplossing van (3.6.12). We vinden dat het jaarlijks inkomen van elk land een limiet heeft voor $t \rightarrow \infty$. Deze limiet is onafhankelijk van de beginwaarden van de inkomens en wordt alleen bepaald door de matrix A en de investeringsvector \underline{v} . \square

(3.6.13) OPMERKING. Als $\underline{v} \geq \underline{0}$, $A \geq 0$, $r(A) < 1$, $\underline{x}(0) \geq \underline{0}$ en $\underline{x}(t)$ voldoet aan (3.6.12) dan volgt met volledige inductie dat $\underline{x}(t) \geq \underline{0}$. Hieruit leiden we af dat

$$(I - A)^{-1} \underline{v} = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) \geq \underline{0} .$$

Deze ongelijkheid geldt voor elke $\underline{v} \geq \underline{0}$. Als we in het bijzonder $\underline{v} = \underline{e}_\ell$, d.w.z. de ℓ -de eenheidsvector kiezen, dan zien we dat $(I - A)^{-1} \underline{e}_\ell$, d.w.z. de ℓ -de kolom van de matrix $(I - A)^{-1}$ niet-negatief is. We zien dat de matrix $(I - A)^{-1}$ niet-negatief is. Dus: Als $A \geq 0$ en $r(A) < 1$, dan is $(I - A)^{-1} \geq 0$. \square

(3.6.14) VOORBEELD. We specialiseren voorbeeld (3.6.9) tot een getallenvoorbeeld. Zij $n = 2$ en

$$A = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 \end{bmatrix} .$$

De kolomsommen zijn hier inderdaad kleiner dan één. Hieruit volgt dat voor elke eigenwaarde λ van A geldt $|\lambda| < 1$. Inderdaad kan men verifiëren dat $\lambda = 0,6$ en $\lambda = 0,9$ de eigenwaarden zijn. Blijkbaar geldt $A^k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Men kan berekenen dat

$$A^k = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} (0,6)^k + 2(0,9)^k & -2(0,6)^k + 2(0,9)^k \\ -(0,6)^k + (0,9)^k & 2(0,6)^k + (0,9)^k \end{bmatrix} .$$

Ook zien we dat

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,2 \\ -0,1 & 0,3 \end{bmatrix}^{-1} = 25 \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} .$$

Inderdaad blijkt $(I - A)^{-1} \geq 0$. Als bijv. $\underline{v} = [100, 200]^T$ dan is

$$(I - A)^{-1} \underline{v} = \begin{bmatrix} 1750 \\ 1250 \end{bmatrix} .$$

□

(3.6.15). VOORBEELD. We beschouwen een aantal producenten P_1, \dots, P_n . We nemen aan dat producent P_i alleen het goed G_i produceert, en wel een vaste hoeveelheid per jaar, laten we zeggen één eenheid. Voor de productie van zijn goederen zal P_i een zekere hoeveelheid goederen gebruiken van de andere producenten. Laat voor de productie van één eenheid G_i de producent de hoeveelheid a_{ij} van goed G_j nodig hebben ($j = 1, \dots, n$) (we sluiten niet uit dat P_i ook een zekere hoeveelheid van goed G_i gebruikt bij de productie van een eenheid G_i . Als dit niet het geval is dan is $a_{ii} = 0$). Er geldt uiteraard

$$(3.6.16) \quad a_{ij} \geq 0 .$$

We nemen aan dat niet de totale hoeveelheid van goed G_j wordt gebruikt door de producenten P_1, \dots, P_n . D.w.z.

$$(3.6.17) \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} < 1 .$$

Verder geeft producent P_i elk jaar voor een vast bedrag b_i uit aan goederen ingevoerd van buiten het systeem, aan salarissen en andere onkosten. Laat p_i de prijs van één eenheid van goed G_i zijn. Dan is het jaarlijkse inkomen van producent P_i gelijk aan

$$p_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j - b_i .$$

We gebruiken vectornotatie

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \underline{p} := \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} .$$

Dan is de vector van de jaarlijkse inkomens

$$\underline{p} = A\underline{p} - \underline{b} .$$

We zeggen dat het systeem in evenwicht is als het jaarlijkse inkomen van iedere producent nul is:

$$(3.6.18) \quad \underline{p} = A\underline{p} + \underline{b} .$$

Uit (3.6.16) en (3.6.17) volgt dat $r(A) < 1$, zodat de matrix $I - A$ inverteerbaar is en niet-negatief. Hieruit volgt dat er een eenduidig bepaalde prijsvector \underline{p} is waarvoor het systeem in evenwicht is, nl.

$$\underline{p} = (I - A)^{-1} \underline{b} .$$

Zo'n prijs zou bijv. door een overkoepelende organisatie kunnen worden vastgesteld op grond van gegevens over het systeem. Als zulke organisatie niet bestaat of als de gegevens over het systeem niet voldoende bekend zijn, dan zal iedere producent P_i zijn eigen prijs p_i vaststellen. De prijsvector die op deze manier ontstaat zal waarschijnlijk géén evenwichtsprijs zijn, zodat na afloop van het jaar sommige producenten een positief en sommige producenten een negatief inkomen hebben gehad. Stel nu dat de producenten zonder met elkaar overleg te plegen op de volgende manier tot een evenwichtssituatie proberen te komen. In het jaar $t + 1$ stelt producent P_i zijn uitgaven van het jaar t als prijs voor zijn goed vast. Dus

$$(3.6.19) \quad \underline{p}_{t+1} = A\underline{p}_t + \underline{b}$$

in de veronderstelling dat hij dan in het jaar $t + 1$ inkomen nul overhoudt als zijn uitgaven weer hetzelfde zijn. Zijn uitgaven zijn natuurlijk niet hetzelfde zodat hij het jaar daarna zijn prijs moet bijstellen. Op deze manier krijgen we een rij prijzen, die voldoen aan de recurrente betrekking (3.6.19). Op grond van het feit dat $r(A) < 1$, zien we dat

$$\underline{p}_t \rightarrow (I - A)^{-1} \underline{b} \quad (t \rightarrow \infty)$$

onafhankelijk van de beginprijs. □

(3.6.20) DEFINITIE. Een matrix $A \geq 0$ met de eigenschap

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

heet een rui lmatrix.

Stelsels van recurrente betrekkingen waarvan de coëfficiëntenmatrix een ruilmatrix is komen voor in de volgende situatie. Stel dat een bepaald goed (of een bepaalde populatie) over een aantal locaties S_1, \dots, S_n is verdeeld. De tijd wordt verdeeld in perioden. Aan het eind van zo'n periode wordt het goed herverdeeld over S_1, \dots, S_n . Daarbij is de hoeveelheid goed die van S_j naar S_i overgaat evenredig met de hoeveelheid die zich in S_j bevindt en wel met een evenredigheidsfactor a_{ij} (we laten toe dat $a_{ii} > 0$, hetgeen betekent dat een gedeelte van het goed dat zich in S_i bevindt, er blijft). Daar al het goed, dat zich in S_j bevindt zich na de herverdeling in een van de plaatsen S_1, \dots, S_n moet bevinden geldt

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) .$$

Verder geldt blijkbaar $a_{ij} \geq 0$, zodat de matrix A met elementen a_{ij} een ruilmatrix is. Als de hoeveelheid van het goed dat zich in S_i voor en na de herverdeling bevindt resp. met x_i en y_i wordt aangeduid, dan geldt

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j ,$$

of in vectornotatie

$$\underline{y} = A \underline{x} .$$

Als we de hoeveelhedsvectoren op de tijdstippen $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ achtereenvolgens aangeven met $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots$, dan geldt blijkbaar de volgende recurrente betrekking

$$(3.6.21) \quad \underline{x}_{t+1} = A \underline{x}_t .$$

(3.6.22) VOORBEELD. Bij een proef wordt het geheugen van ratten onderzocht. Men laat de ratten door een gang lopen die zich vertakt in drie gangen. In de linker gang ondervindt de rat een elektrische schok. De middelste gang loopt dood (zonder bijverschijnselen) en aan het eind van de rechter gang vindt de rat een stuk kaas. Bij deze proeven gedragen de ratten zich als volgt: Van de ratten die nog niet aan een proef hebben meegedaan gaat 30% naar links, 40% rechtdoor en 30% naar rechts. Dit geldt eveneens voor ratten die de vorige keer in de middelste gang zijn gelopen. (We nemen aan dat de ratten zich niet meer kunnen herinneren wat de keer daarvoor is gebeurd.)

Van de ratten die de vorige keer naar links zijn gegaan gaat 20% naar links, 40% rechtdoor en 40% naar rechts en van de ratten die de vorige keer naar rechts zijn gegaan, gaat 20% naar links, 30% rechtdoor en 50% naar rechts. We geven met x_k, y_k, z_k aan het aantal ratten dat bij het k-de experiment resp. naar links, rechtdoor, rechtsaf gaat.

Voor de vector $\underline{x}_k = [x_k, y_k, z_k]^T$ vinden we dan de recurrente betrekking

$$(3.6.23) \quad \underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k,$$

waar

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

□

Zij $\underline{e} = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$. Als A een ruilmatrix is dan geldt per definitie $\underline{e}^T A = \underline{e}^T$, d.w.z. $A^T \underline{e} = \underline{e}$. Uit (3.6.2) volgt nu dat $(A^T)^k$ en dus ook A^k begrensd is. Hieruit concluderen we dat $r(A) \leq 1$ en dat de eigenwaarden λ van A met $|\lambda| = 1$ niet-defectief zijn. Uit de relatie $A^T \underline{e} = \underline{e}$ volgt dat $\lambda = 1$ een eigenwaarde van A^T is met eigenvector \underline{e} . Het getal 1 is daarom ook een eigenwaarde van A. Dit houdt in dat $r(A) = 1$, zodat A^k niet tot nul nadert als $k \rightarrow \infty$. Het is mogelijk dat $\lim A^k$ bestaat. Maar dit geldt niet voor alle ruilmatrices.

(3.6.24) VOORBEELD.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Er geldt

$$A \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}.$$

Het effect van de matrixvermenigvuldiging is dus een verwisseling (of permutatie) van de componenten van \underline{x} . Men noemt A daarom een permutatiematrix. Het is duidelijk dat $\lim A^k \underline{x}$ niet bestaat (tenzij $x=y=z$). Dit kan men ook concluderen uit stelling (3.5.5), daar $\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 1$, zodat $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = e^{2\pi i/3}$, $\lambda_3 = e^{-2\pi i/3}$ eigenwaarden zijn van A.

□

Als $\lambda = 1$ de enige eigenwaarde met $|\lambda| = 1$ is, dan bestaat volgens (3.5.5) $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$. Dit betekent, dat $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k$ bestaat voor elke oplossing van de recurrente betrekking $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k$. Als $\lambda = 1$ een enkelvoudige eigenwaarde van A is, dan is $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k$ van de vorm $\alpha \underline{c}$, waar \underline{c} een eigenvector van A is bij eigenwaarde 1, d.w.z.

$$A \underline{c} = \underline{c} .$$

Volgens de theorie van § 3.5 kunnen we de constante α vinden m.b.v. een eigenvector van A^T bij eigenwaarde 1. We kennen zo'n eigenvector, nl. \underline{e} . Derhalve vinden we voor elke oplossing van

$$(3.6.25) \quad \underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k$$

dat $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \alpha \underline{c}$, waarbij α bepaald is door de vergelijking

$$\alpha \underline{e}^T \underline{c} = \underline{e}^T \underline{x}_0 .$$

Met andere woorden de som van de componenten van \underline{x}_k is constant. In het bijzonder is de som van de componenten van de limietvector gelijk aan de som van de componenten van de beginvector. Deze eigenschap is intuïtief duidelijk voor de situatie beschreven na definitie (3.6.20), daar hier de som van de componenten van \underline{x}_t gelijk is aan de totale hoeveelheid goed.

In het bijzonder geval dat alle elementen van A positief zijn, kunnen we de stelling van Perron-Frobenius gebruiken, die zegt dat als $A > 0$, de eigenwaarde $\lambda = 1$ de enige is met $|\lambda| = r(A) = 1$. In dat geval hoeven we om de limiet van oplossingen van de recurrente betrekking (3.6.25) te bepalen geen eigenwaarden te berekenen, maar slechts een eigenvector $\underline{c} > 0$ bij $\lambda = 1$.

(3.6.26) VOORBEELD. In voorbeeld (3.6.22) vinden we als eigenvector $\underline{c} = [21, 32, 36]^T$. Als N het totale aantal ratten is dat aan het experiment deelneemt, dan geldt voor elke oplossing van (3.6.23):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \frac{N}{89} \begin{bmatrix} 21 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} 0,236 \\ 0,359 \\ 0,405 \end{bmatrix} .$$

Deze vector geeft aan hoe op den duur het totale aantal ratten verdeeld is over de drie mogelijkheden. □

Hoofdstuk IV. De z-transformatie

4.1. Definitie en elementaire eigenschappen van de z-transformatie

We zullen in dit hoofdstuk een analogon van de Laplace-transformatie bespreken. In de technische literatuur gebruikt men hiervoor de term z-transformatie. We zullen ook de term voortbrengende functie gebruiken.

(4.1.1) DEFINITIE. Een rij getallen a_0, a_1, \dots heet exponentieel begrensd als er getallen M en α bestaan zo dat

$$|a_k| \leq M\alpha^k.$$

De rijen (k^{10}) , $(e^{\lambda k})$, (λ^k) , $(1/(k+1))$ zijn exponentieel begrensd, de rijen $(k!)$ en (k^k) , (e^{k^2}) niet.

(4.1.2) DEFINITIE. Zij a_0, a_1, \dots een exponentieel begrensde rij getallen. Onder de voortbrengende functie van deze rij verstaat men

$$\hat{a}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

$\hat{a}(z)$ wordt ook wel de z-getransformeerde van de rij (a_k) genoemd.

Als de rij (a_k) exponentieel begrensd is, dan is $\hat{a}(z)$ een convergente machtreeks in een omgeving van de oorsprong. Inderdaad, zoals men gemakkelijk verifieert, als $|a_k| \leq M\alpha^k$, dan convergeert de machtreeks $\hat{a}(z)$ voor $|z| < 1/\alpha$.

(4.1.3) OPMERKING. In de technische literatuur definieert men gewoonlijk de z-transformatie door

$$\hat{\hat{a}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots$$

Formules en eigenschappen van deze z-transformatie kan men verkrijgen door overal z door z^{-1} te vervangen. □

(4.1.4) VOORBEELDEN.

1) $a_k = 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Dan is

$$\hat{a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad (\text{voor } |z| < 1).$$

2) $a_k = \alpha^k$. Dan is

$$\hat{a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^k = \frac{1}{1-\alpha z} \quad (\text{voor } |z| < 1/\alpha).$$

3) Als $b_k = \alpha^k a_k$, dan is

$$\hat{b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\alpha z)^k = \hat{a}(\alpha z).$$

Voorbeeld 2) is hiervan een bijzonder geval.

4) Als $b_k = k a_k$, dan is

$$\begin{aligned} \hat{b}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^k = z \sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^{k-1} = \\ &= z \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d}{dz} z^k = z \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \end{aligned}$$

Dus

$$\hat{b}(z) = z \frac{d\hat{a}}{dz}.$$

5) Als $b_k = k$, dan volgt uit 1) en 4) dat

$$\hat{b}(z) = z \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

6) Als $b_k = k \alpha^k$, dan volgt uit 3) en 5) dat

$$\hat{b}(z) = \frac{\alpha z}{(1-\alpha z)^2}.$$

7) Als $b_k = k^2$ dan volgt uit 4) en 5) dat

$$\hat{b}(z) = z \frac{d}{dz} \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$

8) Als $\delta_0 = 1$, $\delta_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), dan is $\hat{\delta}(z) = 1$.

□

Uit bovenstaande voorbeelden zien we hoe we soms uit bekende voortbrengende functies nieuwe kunnen construeren. De nu volgende eigenschap geeft een aantal van dergelijke constructies, die erg belangrijk zijn voor de toepassing van de z-transformatie.

(4.1.5) EIGENSCHAP.

1) Als $a_k = b_k + c_k$ dan is $\hat{a}(z) = \hat{b}(z) + \hat{c}(z)$; als $a_k = \lambda b_k$ dan is $\hat{a}(z) = \lambda \hat{b}(z)$.

D.w.z., de z-transformatie is een lineaire afbeelding.

2) Als $b_k = a_{k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), dan is

$$\hat{b}(z) = z^{-1}(\hat{a}(z) - a_0) .$$

Als $b_k = a_{k+2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), dan is

$$\hat{b}(z) = z^{-2}(\hat{a}(z) - a_0 - a_1 z) .$$

Algemeen: Als $b_k = a_{k+n}$, dan is

$$\hat{b}(z) = z^{-n}\{\hat{a}(z) - (a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1})\} .$$

BEWIJS. 1) is duidelijk.

2) We beschouwen direct het algemene geval: Als $b_k = a_{k+n}$ dan is

$$\begin{aligned} \hat{b}(z) &= b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots = a_n + a_{n+1} z + a_{n+2} z^2 + \dots \\ &= z^{-n}(a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots) = z^{-n}\{(a_0 + a_1 z + \dots) - \\ &- (a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1})\} = z^{-n}\{\hat{a}(z) - (a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1})\} . \end{aligned}$$

□

Men kan verder elke uit de analyse bekende machtreeksontwikkeling gebruiken om voortbrengende functies te bepalen (zie Wiskunde 10, § 4.5 en § 4.6 (1975)) in het bijzonder (4.6.14)). Zo is bijv. e^z de voortbrengende functie van $a_k = 1/k!$. Uit $\cosh z = \sum z^{2k}/(2k)!$ volgt dat $\cosh \sqrt{z}$ de voortbrengende functie is van $a_k = 1/(2k)!$. Op analoge manier kan men voortbrengende functies van de rijen $(1/(2k+1)!)$, $((-1)^k/(2k)!)$, $((-1)^k/(2k+1)!)$ bepalen. Uit de formule

$$(4.1.6) \quad (1+x)^\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} x^k$$

kan men door de specialisatie $\mu = -n-1$, $x = -z$ en m.b.v.

$$\begin{aligned} \binom{-n-1}{k} &= \frac{(-n-1)(-n-2) \dots (-n-k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = (-1)^k \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+k)}{k!} = \\ &= (-1)^k \binom{n+k}{n} \end{aligned}$$

vinden dat

$$(1-z)^{-n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^k .$$

Op analoge wijze volgt door substitutie van $\mu = -\frac{1}{2}$, $x = -4z$ in (4.1.6) dat

$$(1-4z)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} z^k .$$

We vatten de gevonden formules samen in een tabel.

(4.1.7) TABEL.

rij	z-getransformeerde
a_k	$\hat{a}(z)$
λa_k	$\lambda \hat{a}(z)$
$a_k + b_k$	$\hat{a}(z) + \hat{b}(z)$
a_{k+1}	$z^{-1}\{\hat{a}(z) - a_0\}$
a_{k+2}	$z^{-2}\{\hat{a}(z) - (a_0 + a_1 z)\}$
a_{k+n}	$z^{-n}\{\hat{a}(z) - (a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1})\}$
ka_k	$z \frac{d\hat{a}}{dz}$
$\alpha^k a_k$	$\hat{a}(\alpha z)$
1	$\frac{1}{1-z}$
k	$\frac{z}{(1-z)^2}$
α^k	$\frac{1}{1-\alpha z}$
k^2	$\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$
δ_k	1
$1/k!$	e^z
$\begin{cases} a_k = 1/k & (k \geq 1) \\ a_0 = 0 \end{cases}$	$-\log(1-z)$
$\begin{cases} a_k = \binom{n}{k} & (k=0, \dots, n) \\ a_k = 0 & (k \geq n+1) \end{cases}$	$(1+z)^n$
$\binom{n+k}{n}$	$(1-z)^{-n-1}$
$\binom{2k}{k}$	$(1-4z)^{-\frac{1}{2}}$

4.2. Toepassingen van de z-transformatie op recurrente betrekkingen

We zullen oplossingen van recurrente betrekkingen bepalen m.b.v. de z-transformatie. Daartoe is de volgende eigenschap essentieel:

(4.2.1) STELLING. Laat (x_k) een oplossing zijn van een lineaire recurrente betrekking met constante coëfficiënten:

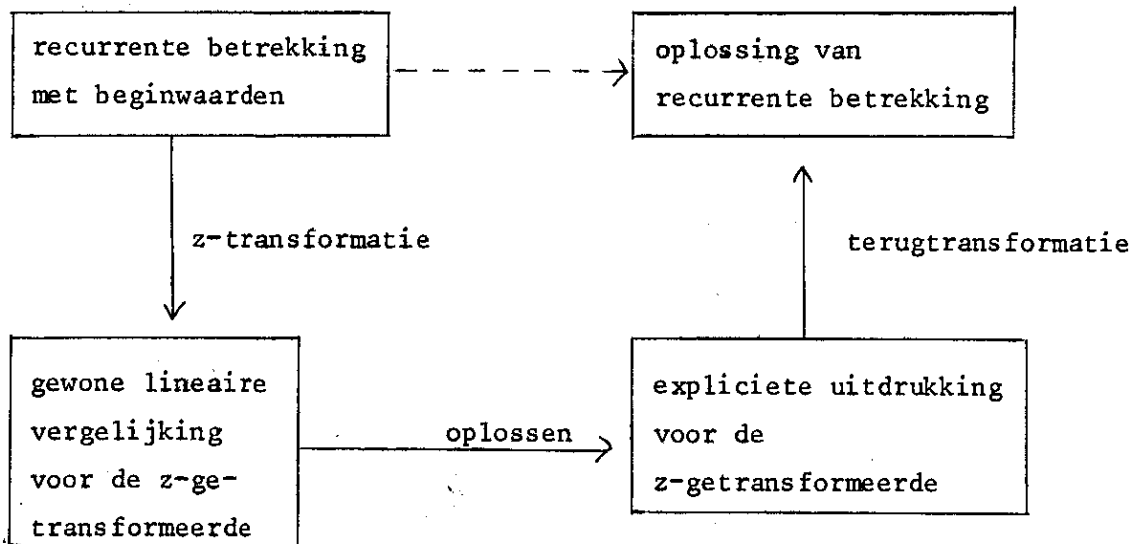
$$(4.2.2) \quad x_{k+n} + a_1 x_{k+n-1} + \dots + a_n x_k = b_k .$$

Als de rij (b_k) exponentieel begrensd is, dan is ook (x_k) exponentieel begrensd.

We laten het bewijs achterwege.

Om nu de recurrente betrekking (4.2.2) op te lossen, transformeren we deze betrekking m.b.v. de z-transformatie. Dit levert een eenvoudige vergelijking voor de voortbrengende functie mits de beginwaarden x_0, \dots, x_{n-1} bekend zijn. Als we de voortbrengende functie hieruit opgelost hebben moeten we haar terugtransformeren tot de rij (x_k) . Om de teruggetransformeerde te vinden, maken we gebruik van tabel (4.1.7). Verder speelt, net als bij de Laplace-transformatie, breuksplitsing hierbij een belangrijke rol.

Schematisch kunnen we de oplosmethode als volgt aangeven:



Opdat deze methode correct is moet de z-transformatie injectief zijn. D.w.z. als (a_k) en (b_k) twee verschillende rijen zijn moeten ze ook verschillende voortbrengende functies hebben. Het is echter gemakkelijk in te zien dat aan deze voorwaarde is voldaan, daar men de termen van de rij (a_k) expliciet in $\hat{a}(z)$ kan uitdrukken:

$$a_k = \frac{1}{k!} \hat{a}^{(k)}(0)$$

($\hat{a}^{(k)}$ is de k-de afgeleide van \hat{a}).

(4.2.3) VOORBEELD. $x_{k+2} - 5x_{k+1} + 6x_k = 1$ ($k = 0, 1, \dots$); $x_0 = x_1 = 0$.

De z-transformatie levert

$$\sum_0^{\infty} x_{k+2} z^k - 5 \sum_0^{\infty} x_{k+1} z^k + 6 \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

dus

$$z^{-2}(\hat{x}(z) - x_0 - x_1 z) - 5z^{-1}(\hat{x}(z) - x_0) + 6\hat{x}(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$(z^{-2} - 5z^{-1} + 6)\hat{x}(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$\hat{x}(z) = \frac{z^2}{(6z^2 - 5z + 1)(1-z)} = \frac{z^2}{(1-z)(1-2z)(1-3z)}$$

Breukspplitsing geeft

$$\hat{x}(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1-z} - \frac{1}{1-2z} + \frac{\frac{1}{2}}{1-3z}$$

Daar $\frac{1}{1-\alpha z}$ de voortbrengende functie is van α^k (zie tabel (4.1.7)), vinden we

$$x_k = \frac{1}{2} - 2^k + \frac{1}{2} 3^k \quad \square$$

We noemen een rij vectoren $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$ in \mathbb{R}^n exponentieel begrensd als voor elke i de rij van de i -de componenten $x_{i,0}, x_{i,1}, \dots$ exponentieel begrensd is. Voor een exponentieel begrensde rij vectoren definiëren we de voortbrengende functie door

$$\underline{\hat{x}}(z) = [\hat{x}_1(z), \dots, \hat{x}_n(z)]^T$$

waar

$$\hat{x}_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{i,k} z^k \quad (i = 1, \dots, n)$$

We schrijven ook wel

$$\underline{\hat{x}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{x}_k z^k = \underline{x}_0 + \underline{x}_1 z + \dots$$

Uit (4.1.5, (1)) volgt gemakkelijk dat als $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ een lineaire afbeelding is en $\underline{y}_k = A\underline{x}_k$, dan $\underline{\hat{y}}(z) = A\underline{\hat{x}}(z)$. Ook geldt het analogon van stelling (4.1.5, (2)), nl.: als $\underline{y}_k = \underline{x}_{k+1}$ dan is $\underline{\hat{y}}(z) = z^{-1}(\underline{\hat{x}}(z) - \underline{x}_0)$. Tenslotte hebben we net als in (4.2.1) het volgende resultaat:

(4.2.4) STELLING. Als (\underline{x}_k) een oplossing is van de recurrente betrekking

$$(4.2.5) \quad \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \underline{b}_k$$

en de rij (\underline{b}_k) is exponentieel begrensd, dan is de rij (\underline{x}_k) exponentieel begrensd.

Op grond hiervan kunnen we de z-transformatie ook gebruiken bij het oplossen van stelsels van recurrente betrekkingen. Voor de voortbrengende functie van de oplossing van (4.2.5) met beginwaarde \underline{x}_0 geldt

$$z^{-1}(\underline{\hat{x}}(z) - \underline{x}_0) = A\underline{\hat{x}}(z) + \underline{\hat{b}}(z)$$

dus

$$(I - zA)\underline{\hat{x}}(z) = \underline{x}_0 + z\underline{\hat{b}}(z)$$

en

$$\underline{\hat{x}}(z) = (I - zA)^{-1}(\underline{x}_0 + z\underline{\hat{b}}(z))$$

waaruit we \underline{x}_k kunnen vinden door terugtransformatie.

(4.2.6) VOORBEELD. Beschouw de recurrente betrekking (4.2.5) met

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}, \quad \underline{b}_k = \underline{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_0 = \underline{0}.$$

Dan is

$$(I - zA)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}z & -\frac{2}{5}z \\ -\frac{1}{2}z & 1 - \frac{3}{5}z \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta(z)} \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{5}z & \frac{2}{5}z \\ \frac{1}{2}z & 1 - \frac{1}{2}z \end{bmatrix}$$

waar $\Delta(z) := \det(I - zA) = 1 - \frac{11}{10}z + \frac{1}{10}z^2 = (1 - z)(1 - \frac{1}{10}z)$. Dus

$$\underline{\hat{x}}(z) = \frac{z}{(1-z)^2 (1 - \frac{1}{10}z)} \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{5}z & \frac{2}{5}z \\ \frac{1}{2}z & 1 - \frac{1}{2}z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

We hebben hier gebruikt dat voor de constante rij $\underline{b}_k = \underline{b}$ geldt $\underline{\hat{b}}(z) = (1-z)^{-1} \underline{b}$.

We vinden

$$\underline{\hat{x}}(z) = \frac{1}{(1-z)^2 (1 - \frac{1}{10}z)} \begin{bmatrix} 6z - \frac{24}{5}z^2 \\ -3z + \frac{9}{2}z^2 \end{bmatrix}.$$

Breuksplitsing levert

$$\hat{x}_1(z) = \frac{6z - \frac{24}{5}z^2}{(1-z)^2 (1 - \frac{1}{10}z)} = \frac{4/3}{(1-z)^2} + \frac{104/27}{1-z} - \frac{140/27}{1 - \frac{1}{10}z}$$

$$\hat{x}_2(z) = \frac{-3z + \frac{9}{2}z^2}{(1-z)^2 (1 - \frac{1}{10}z)} = \frac{5/3}{(1-z)^2} - \frac{185/27}{1-z} + \frac{140/27}{1 - \frac{1}{10}z}.$$

Uit tabel (4.1.7) volgt dat $\hat{c}(z) = (1-z)^{-2}$ de voortbrengende functie is van de rij $c_k = k + 1$. Derhalve vinden we

$$x_{1k} = \frac{4}{3}(k+1) + \frac{104}{27} - \frac{140}{27} 10^{-k},$$

$$x_{2k} = \frac{5}{3}(k+1) - \frac{185}{27} + \frac{140}{27} 10^{-k}.$$

□

4.3. Enkele andere toepassingen

Soms kan men de z -transformatie gebruiken bij het oplossen van recurrente betrekkingen met niet-constante coëfficiënten. Als de coëfficiënten polynomen in k zijn, dan volgt uit voorbeeld (4.1.4.4) dat de z -getransformeerde van een oplossing voldoet aan een differentiaalvergelijking. In eenvoudige gevallen kan men deze differentiaalvergelijking oplossen.

(4.3.1) VOORBEELD. Bepaal de oplossing van

$$(k+2)x_{k+2} = (k+1)x_{k+1} - x_k \quad (k = 0, 1, \dots), \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0.$$

Noemen we de rij $kx_k = y_k$, dan vinden we

$$y_{k+2} = y_{k+1} - x_k$$

en dus

$$z^{-2}(\hat{y}(z) - y_0 - y_1 z) = z^{-1}(\hat{y}(z) - y_0) - \hat{x}(z) .$$

Er geldt $y_0 = 0$ en $y_1 = x_1 = 0$, dus

$$\hat{y}(z) = -\frac{z^2}{1-z} \hat{x}(z) .$$

Anderzijds volgt uit (4.1.4.4) dat $\hat{y} = z d\hat{x}/dz$.

Dus

$$\frac{d\hat{x}}{dz} = -\frac{z}{1-z} \hat{x}(z) .$$

Deze differentiaalvergelijking lossen we op met scheiding van variabelen

$$\int \frac{d\hat{x}}{\hat{x}} = \int \frac{-z}{1-z} dz ,$$

$$\log|\hat{x}(z)| = z + \log|1-z| + C_1 ,$$

dus

$$\hat{x}(z) = C(1-z)e^z .$$

Daar $\hat{x}(0) = x_0 = 1$, vinden we $C = 1$, dus

$$\begin{aligned} \hat{x}(z) &= (1-z)e^z = (1-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z^k}{k!} - \frac{z^k}{(k-1)!} \right) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} (1-k) . \end{aligned}$$

We vinden

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_k &= -\frac{k-1}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots) . \end{aligned}$$

Het blijkt dat we kunnen schrijven

$$x_k = -\frac{k-1}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) .$$

□

Ook kunnen we de z-transformatie gebruiken bij dubbelrijen d.w.z. rijen met twee indices: $x_{k,\ell}$ ($k, \ell = 0, 1, 2, \dots$). We kunnen dan een twee-dimensionale versie van de z-transformatie invoeren:

$$\hat{x}(z, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} x_{k,\ell} z^k s^\ell .$$

Als we echter van het voorafgaande gebruik willen maken kunnen we beter $x_{k,\ell}$ bij elke vaste k als een rij met index ℓ beschouwen. De z-transformatie met betrekking tot de index ℓ geeft dan een recurrente betrekking met één index k voor $\hat{x}_k(z)$. Deze recurrente betrekking kunnen we proberen op te lossen met een van de ons bekende methoden.

(4.3.2) VOORBEELD. Beschouw de recurrente betrekking

$$(4.3.3) \quad x_{k+1,\ell+1} = x_{k+1,\ell} - x_{k,\ell+1} \quad (k, \ell = 0, 1, \dots)$$

met beginvoorwaarden

$$\begin{aligned} x_{k,0} &= 0 & (k = 0, 1, 2, \dots) \\ x_{0,\ell} &= 1 & (\ell = 1, 2, \dots) . \end{aligned}$$

Bij vaste k beschouwen we $x_{k,\ell}$ als een rij met index ℓ . Van die rij is de voortbrengende functie

$$\hat{x}_k(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} x_{k,\ell} z^\ell .$$

De betrekking (4.3.3) luidt na z-transformatie

$$z^{-1}(\hat{x}_{k+1}(z) - x_{k+1,0}) = \hat{x}_{k+1}(z) - z^{-1}(\hat{x}_k(z) - x_{k,0}) .$$

Daar $x_{k,0} = 0$ ($k = 0, 1, \dots$) volgt hieruit

$$(4.3.4) \quad \hat{x}_{k+1}(z) = \left(-\frac{1}{1-z}\right) \hat{x}_k(z) .$$

We vatten (4.3.4) op als een recurrente betrekking waarin de parameter z voorkomt. De oplossing is

$$\hat{x}_k(z) = \left(-\frac{1}{1-z}\right)^k \hat{x}_0(z) .$$

Daar $x_{0,\ell} = 1$ ($\ell = 1, 2, \dots$) en $x_{0,0} = 0$, geldt

$$\hat{x}_0(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell} = \frac{z}{1-z}$$

dus

$$\hat{x}_k(z) = (-1)^k z(1-z)^{-k-1} .$$

Uit tabel (4.1.7) zien we dat

$$(1-z)^{-k-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{k+\ell}{k} z^{\ell} .$$

De reeksontwikkeling van $\hat{x}_k(z)$ is dus

$$\hat{x}_k(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^k \binom{k+\ell-1}{k} z^{\ell} .$$

Zo zien we dat de oplossing van de recurrente betrekking met beginwaarden wordt gegeven door

$$x_{k,\ell} = (-1)^k \binom{k+\ell-1}{k} \quad (\ell \geq 1)$$

$$x_{k,0} = 0 .$$

□

Hoofdstuk V. Grafentheorie

5.1. Inleidende begrippen, gerichte grafen

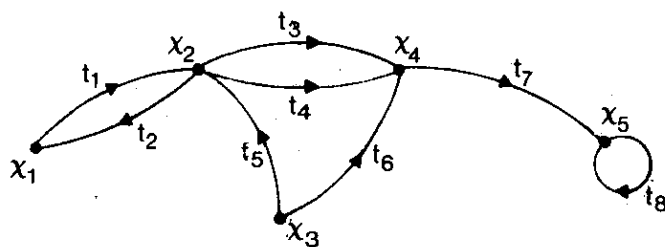
Een gerichte graaf bestaat uit een aantal punten (knopen genoemd) en een aantal gerichte verbindingen (takken) tussen die punten. Voorbeelden zijn: hiërarchie in een bedrijf, goederenstroom in een fabriek, prioriteitenschema van activiteiten in een proces, elektrisch schakelschema, blokdiagram voor een computer.

We preciseren dit begrip als volgt: Laat K en T twee verzamelingen zijn. Elementen van K noemen we knopen en elementen van T takken. Bij elke tak hoort een beginpunt en een eindpunt.

(5.1.1) DEFINITIE. Een gerichte graaf is een viertal $\langle K, T, b, e \rangle$, waarin K en T eindige verzamelingen zijn en $b: T \rightarrow K$, $e: T \rightarrow K$ afbeeldingen. Elementen van K heten knopen, elementen van T takken. $b(t)$ heet het beginpunt en $e(t)$ het eindpunt van t . We zullen het viertal $\langle K, T, b, e \rangle$ vaak aanduiden met de letter G .

Een gerichte graaf kan men tekenen door de knopen als stippen te tekenen en de takken als verbindingslijnen d.m.v. een pijl van richting voorzien. De vorm van de verbindingslijn is hierbij niet van belang.

(5.1.2) VOORBEELD.



De in deze figuur getekende graaf heeft 5 knopen en 8 takken. Er geldt bijv.

$$b(t_3) = x_2, e(t_3) = x_4 .$$

□

(5.1.3) DEFINITIE. In een gerichtegraaf G heet een rij takken (t_1, \dots, t_n) met de eigenschap

$$e(t_i) = b(t_{i+1}) \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

een weg. De knoop $b(t_1)$ heet het beginpunt b van de weg en $e(t_n)$ het eindpunt e . Het getal n heet de lengte van de weg. We noemen (t_1, \dots, t_n) een weg van b naar e .

Als t_1, \dots, t_n onderling verschillend zijn heet de weg een pad. Als $e(t_1), \dots, e(t_{n-1})$ onderling verschillend zijn en ook verschillend van $b(t_1)$ en $e(t_n)$ heet (t_1, \dots, t_n) een boog. Als voor een boog geldt $b(t_1) = e(t_n)$ dan heet de boog een kring (of cykel, gesloten boog).

Het is duidelijk dat iedere boog een pad is.

(5.1.4) VOORBEELD. In de graaf van (5.1.2) is $(t_1, t_3, t_7, t_8, t_8)$ een weg maar geen pad. x_1 is het beginpunt en x_5 het eindpunt van deze weg. (t_2, t_1, t_3) is een pad maar geen boog, daar het punt x_2 twee keer voorkomt. (t_1, t_3, t_7) is een boog. (t_1, t_2) is een kring. \square

De volgende eigenschap is eenvoudig in te zien.

(5.1.5) STELLING. Als er een weg van x naar y bestaat dan bestaat er ook een boog van x naar y .

We kunnen nl., als $e(t_i) = e(t_j)$ en $i < j$, het stuk van de weg tussen t_i en t_{j+1} weg laten.

5.2. Onderzoek naar het bestaan van kringen in een graaf

In gerichte grafen is het vaak belangrijk dat kringen ontbreken. Zo zijn in prioriteitenschema's kringen ongewenst. We behandelen een criterium voor het ontbreken van kringen.

We gebruiken de volgende notatie

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\} .$$

Een afbeelding van de knopenverzameling K in \mathbb{N}_0 noemt men een nummering van de knopen van K . We zullen i.h.a. niet eisen dat een nummering injectief is. Twee verschillende knopen mogen dus hetzelfde nummer hebben.

(5.2.1) STELLING. Voor een gerichte graaf G zijn de volgende beweringen equivalent:

- 1) Er bestaat een nummering $r: K \rightarrow \mathbb{N}_0$ zodanig dat voor elke tak t geldt $r(b(t)) < r(e(t))$.
- 2) Iedere niet-lege verzameling A van knopen bevat een knoop a , die geen eindpunt is van een tak met beginpunt in A .
- 3) De graaf bevat geen kringen.

BEWIJS. 1 \Rightarrow 2. We denken de knopen genummerd als in 1). Als A een niet-lege verzameling knopen is, kiezen we voor a een knoop in A met het laagste nummer. Van iedere tak met eindpunt a heeft het beginpunt een lager nummer en ligt dus niet in A .

2 \Rightarrow 3. Als de graaf een kring heeft, kiezen we voor A de verzameling der knopen, die in de kring voorkomen. Dan is iedere knoop in A eindpunt van een tak met beginpunt in A , in strijd met 2).

3 \Rightarrow 1. Als de graaf geen kringen heeft, is iedere weg een boog. Daarom is de lengte van iedere weg kleiner dan het totale aantal knopen. We definiëren $r(x)$ als de lengte van een langste weg met eindpunt x (rang van x). Neem nu een tak t . Er is een weg met lengte $r(b(t))$ en eindpunt $b(t)$. Voeg aan deze weg de tak t toe, dan ontstaat een weg met lengte $r(b(t)) + 1$ en eindpunt $e(t)$.

Dus

$$r(b(t)) < r(b(t)) + 1 \leq r(e(t)) .$$

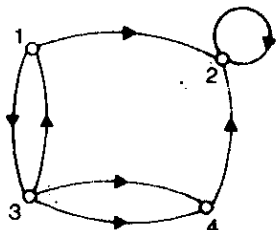
□

5.3. Grafen en matrices

Bij de studie van grafen wordt van matrices gebruik gemaakt.

(5.3.1) DEFINITIE. Laat de knopen van een gerichte graaf G injectief genummerd zijn van 1 tot en met n . De $n \times n$ -matrix A waarvoor a_{ij} het aantal takken is met beginpunt i en eindpunt j wordt knopenmatrix van de graaf genoemd. We noteren de knopenmatrix van G ook wel als volgt: $A(G)$.

(5.3.2) VOORBEELD. Van onderstaande graaf is gegeven de knopenmatrix A.

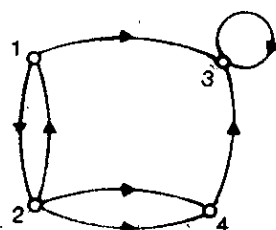


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

□

Merk op dat de knopenmatrix afhangt van de gekozen nummering van de knopenverzameling. Als we in de graaf van voorbeeld (5.3.2) een andere nummering kiezen krijgen we een andere knopenmatrix.

(5.3.3) VOORBEELD. Als we de knopen met nummers 2 en 3 van nummer verwisselen krijgen we de matrix B als knopenmatrix.



$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

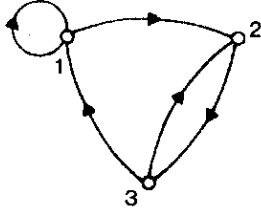
□

Belangrijk is de volgende eigenschap:

(5.3.4) STELLING. Als A de knopenmatrix is van de graaf G, dan is het (i,j)-de element van de matrix A^k gelijk aan het aantal wegen van lengte k van knoop i naar j.

BEWIJS. We bewijzen het resultaat met volledige inductie naar k. Voor $k = 1$ volgt het gestelde onmiddellijk uit de definitie van A. Laat het gestelde nu bewezen zijn voor $k - 1$ en laat i en j twee knopen voorstellen. Een weg ter lengte k van i naar j kunnen we splitsen in een weg met lengte $k - 1$ van i naar een knooppunt ℓ en een weg met lengte 1 van ℓ naar j. Als omgekeerd, ℓ een willekeurig knooppunt is en als we een weg met lengte $k - 1$ van i naar ℓ hebben en een weg met lengte 1 van ℓ naar j, dan kunnen we deze samennemen tot een weg met lengte k van i naar j. Als ℓ een vast knooppunt is dan is op grond van de inductieveronderstelling het aantal wegen met lengte $k - 1$ van i naar ℓ gelijk aan $a_{i\ell}^{(k-1)}$, het (i, ℓ)-de element van A^{k-1} . Het aantal wegen met lengte 1 (dus het aantal takken) van ℓ naar j is gelijk aan $a_{\ell j}$. Het aantal wegen met lengte k van i naar j dat we op deze manier krijgen is gelijk aan $a_{i\ell}^{(k-1)} a_{\ell j}$. Het totaal aantal wegen van i naar j krijgen we als we sommeren over alle knooppunten ℓ . Het resultaat is $\sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}^{(k-1)} a_{\ell j} = a_{ij}^{(k)}$. □

(5.3.5) VOORBEELD. Hoeveel wegen met lengte k zijn er in de volgende graaf van 1 naar 3?



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

We moeten A^k berekenen. Daartoe maken we gebruik van de stelling van Cayley-Hamilton (3.3.2). Het karakteristieke polynoom van A is

$$p(z) = z^3 - z^2 - z .$$

Volgens Cayley-Hamilton geldt dus

$$A^3 = A^2 + A .$$

We vermenigvuldigen dit met A^{k-1} ($k = 1, 2, \dots$). Dan vinden we

$$A^{k+2} = A^{k+1} + A^k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) .$$

Dit betekent dat de elementen van A^k voldoen aan de recurrente betrekking van Fibonacci. In het bijzonder geldt dit voor $a_{13}^{(k)}$:

$$a_{13}^{(k+2)} = a_{13}^{(k+1)} + a_{13}^{(k)} .$$

Om $a_{13}^{(k)}$ te berekenen moeten we $a_{13}^{(1)}$ en $a_{13}^{(2)}$ weten. Uit de matrix of uit de graaf kunnen we gemakkelijk zien dat

$$a_{13}^{(1)} = 0, \quad a_{13}^{(2)} = 1 .$$

Dus, voor $k \geq 2$ is $a_{13}^{(k)}$ het $(k-2)$ -de Fibonacci getal

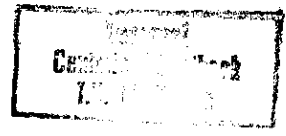
$$a_{13}^{(k)} = F_{k-2} .$$

Op analoge wijze kunnen we de andere elementen van A^k berekenen. We vinden

$$A^k = \begin{bmatrix} F_{k-1} & F_{k-1} & F_{k-2} \\ F_{k-2} & F_{k-2} & F_{k-3} \\ F_{k-1} & F_{k-1} & F_{k-2} \end{bmatrix} \quad (k \geq 3) .$$

□

Uit (5.3.4) leiden we de volgende voorwaarde af voor het niet bestaan van kringen in een graaf.



(5.3.6) STELLING. Zij A de knopenmatrix van een gerichte graaf G . De volgende beweringen zijn equivalent .

- i) De graaf bevat geen kringen.
- ii) $A^n = 0$, waar n het aantal knooppunten van de graaf is.
- iii) $\lambda = 0$ is de enige eigenwaarde van A .

BEWIJS. i) \Rightarrow ii). Als een graaf geen kringen bevat, zijn er geen wegen met lengte gelijk aan n . Stel nl. dat zo'n weg wel bestaat. Dan zou hij $n+1$ knooppunten moeten bevatten. Er zou dan minstens één knooppunt twee of meer keer op die weg liggen, hetgeen onmogelijk is als er geen kring is.

ii) \Rightarrow i). Als er een kring is, dan zijn er wegen van willekeurige lengte in de graaf. We kunnen nl. de kring zo vaak doorlopen als we willen. Als dus $A^n = 0$ is, dan zijn er geen kringen.

ii) \Rightarrow iii). Als λ een eigenwaarde is met eigenvector \underline{c} , dan geldt $A^k \underline{c} = \lambda^k \underline{c}$, zoals men gemakkelijk met inductie kan bewijzen. Uit $A^n = 0$ volgt dan $\lambda^n \underline{c} = \underline{0}$ en daar $\underline{c} \neq \underline{0}$ zien we dat $\lambda = 0$.

iii) \Rightarrow ii). Als $\lambda = 0$ de enige eigenwaarde van A is, dan is $p(z) = z^n$ het karakteristieke polynoom van A . Volgens de stelling van Cayley-Hamilton geldt daarom $A^n = 0$. □

Een $n \times n$ -matrix A waarvoor geldt $A^n = 0$ heet nilpotent.

5.4. De bereikbaarheidsmatrix

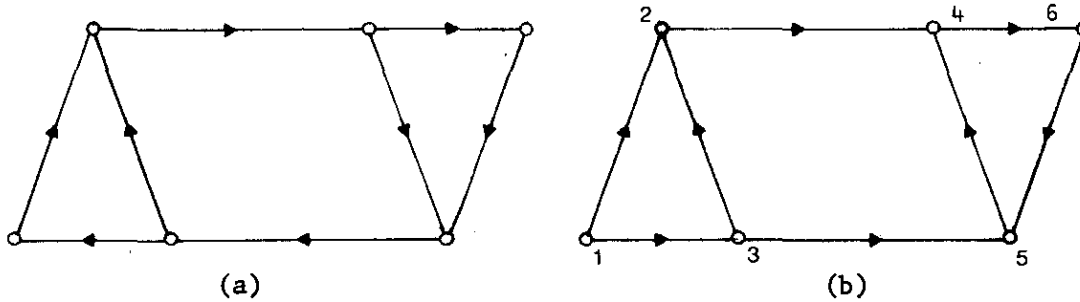
Als een graaf een sociale of organisatorische structuur aangeeft, kan het van belang zijn te weten of bepaalde delen van de graaf bereikbaar zijn vanuit andere delen. Het is van belang te weten welke samenhang de graaf heeft.

(5.4.1) DEFINITIE. Zij x een knooppunt van de gerichte graaf $\langle K, T, b, e \rangle$. De vanuit x bereikbare verzameling is de verzameling van knooppunten y met de eigenschap dat er een weg van x naar y bestaat. Deze verzameling wordt aangegeven met $\mathcal{R}(x)$. We spreken af dat $x \in \mathcal{R}(x)$. In plaats van $y \in \mathcal{R}(x)$ zeggen wij ook: y is vanuit x bereikbaar.

(5.4.2) DEFINITIE. Een gerichte graaf $\langle K, T, b, e \rangle$ heet sterk samenhangend als voor elk paar x, y van knopen geldt $y \in \mathcal{R}(x)$.

Een graaf is dus sterk samenhangend als elk punt vanuit elk punt bereikbaar is. Een equivalente voorwaarde is: Voor alle knopen x geldt $\mathcal{R}(x) = K$.

(5.4.3) VOORBEELD. Onderstaande graaf (a) is sterk samenhangend. De graaf



in figuur (b) is niet sterk samenhangend. Er geldt weliswaar $\mathcal{R}(1) = K$, maar $\mathcal{R}(6) = \{4,5,6\} \neq K$ en $\mathcal{R}(3) = \{2,3,4,5,6\}$. \square

OPMERKING. We hebben afgesproken dat steeds $x \in \mathcal{R}(x)$. We kunnen zeggen dat er een weg van x naar x loopt met lengte 0. In bovenstaand voorbeeld geldt dus inderdaad $\mathcal{R}(1) = K$ voor de graaf van figuur (b). \square

We kunnen de bereikbaarheidseigenschappen van een graaf tot uitdrukking brengen in de bereikbaarheidsmatrix van de graaf.

(5.4.4) DEFINITIE. Laat de knopenverzameling van een graaf G genummerd zijn zoals in (5.3.1). De bereikbaarheidsmatrix $R(G)$ van G wordt gedefinieerd als de $n \times n$ -matrix met elementen r_{ij} , waar

$$r_{ij} := 1 \quad \text{als } j \in \mathcal{R}(i) ,$$

$$r_{ij} := 0 \quad \text{als } j \notin \mathcal{R}(i) .$$

Uit deze definitie volgt onmiddellijk dat

$$\mathcal{R}(i) = \{j \mid r_{ij} = 1\}$$

en dat G sterk samenhangend is dan en slechts dan als alle elementen van $R(G)$ gelijk aan 1 zijn.

(5.4.5) VOORBEELD. Van de graaf in figuur (b) van voorbeeld (5.4.3) is de bereikbaarheidsmatrix (bij de in de figuur gegeven nummering)

$$R(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Merk op dat vanuit 1 elk punt kan worden bereikt en dat de punten 4,5,6 vanuit elk punt kunnen worden bereikt. \square

We kunnen $R(G)$ berekenen uit $A = A(G)$. We weten immers dat $a_{ij}^{(k)}$ (het (i,j) -de element van A^k) het aantal wegen aangeeft van i naar j met lengte k . Het totaal aantal wegen met lengte $\leq n-1$ van i naar j is dus

$$b_{ij} := \delta_{ij} + a_{ij} + a_{ij}^{(2)} + \dots + a_{ij}^{(n-1)}$$

waar $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$ en $\delta_{ii} = 1$. De term δ_{ij} is toegevoegd om ook de weg met lengte 0 te tellen als $i = j$.

We zien dat de elementen van de matrix

$$(5.4.6) \quad B = I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$$

het aantal wegen aangeven met lengte $\leq n-1$ die tussen de verschillende knooppunten liggen. Als j vanuit i bereikbaar is, dan is er een weg van i naar j . Dan is er ook een boog van i naar j . Daar de lengte van een boog in een graaf met n knooppunten ten hoogste $n-1$ is zien we dat elk punt j dat vanuit i bereikbaar is, ook bereikbaar is met een weg met lengte niet groter dan $n-1$. Derhalve geldt: $j \in \mathcal{R}(i)$ dan en slechts dan als $b_{ij} > 0$. We definiëren de functie

$$\sigma: \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0,1\}$$

door

$$\sigma(0) := 0$$

$$\sigma(k) := 1 \quad \text{als } k > 0$$

en als B een $n \times n$ -matrix is, dan definiëren we $\sigma(B)$ als de matrix met elementen $\sigma(b_{ij})$. Bijv.

$$\sigma \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Dan kunnen we bovenstaande als volgt aangeven.

(5.4.7) STELLING. Voor een gerichte graaf G geldt

$$R(G) = \sigma(I + A + \dots + A^{n-1}) .$$

Het is in feite niet nodig alle machten A^2, \dots, A^{n-1} te berekenen. Er geldt nl.

(5.4.8) GEVOLG. Voor een gerichte graaf G geldt

$$R(G) = \sigma((I + A)^{n-1}) .$$

Uit

$$(I + A)^{n-1} = I + \binom{n-1}{1}A + \binom{n-1}{2}A^2 + \dots + A^{n-1}$$

volgt nl. gemakkelijk dat

$$\sigma((I + A)^{n-1}) = \sigma(I + A + \dots + A^{n-1}) .$$

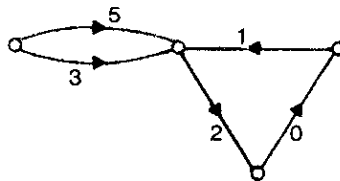
5.5. Transportnetwerken

We beschouwen een gerichte graaf en denken ons hierop een stroom, die in iedere tak een bepaalde waarde heeft. In de knopen mag geen opeenhoping ontstaan en geen productie plaats vinden; daarom is de totale stroom in de naar de knoop toelopende takken gelijk aan de totale stroom in de van de knoop aflopende takken. Een uitzondering vormen twee knopen i (ingang) en u (uitgang). In i mag meer stroom in uitgaande takken zitten dan in de inkomende takken en in u omgekeerd.

We beschrijven de stroom met een functie f , die aan iedere tak een reëel getal toevoegt.

Als G een gerichte graaf is dan noemen we een afbeelding $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ een takkenfunctie. We kunnen zo'n functie aangeven door bij elke tak t het getal $f(t)$ te schrijven.

(5.5.1) VOORBEELD.



□

Als f een takkenfunctie is en $A \subset K$, $B \subset K$, dan noteren we

$$f(A, B) := \sum_{\substack{t \in T \\ b(t) \in A \\ e(t) \in B}} f(t) .$$

Als A uit één element x bestaat, dan schrijven we $f(x, B)$ en analoog in andere gevallen. Er geldt dan

$$f(A, B) = \sum_{x \in A} f(x, B) = \sum_{y \in B} f(A, y) = \sum_{\substack{x \in A \\ y \in B}} f(x, y) .$$

Zo'n takkenfunctie kan verschillende interpretaties hebben. Als we $f(t)$ interpreteren als een stroom die door t loopt, dan is

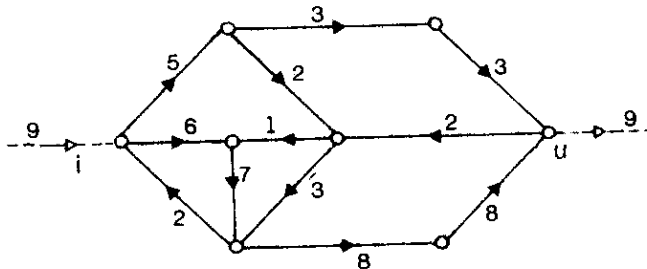
$$(5.5.2) \quad \varphi(x) := f(x, K) - f(K, x)$$

een grootte die aangeeft hoeveel er meer van x weg stroomt ($f(x, K)$) naar andere punten in de graaf, dan naar x toe ($f(K, x)$).

(5.5.3) DEFINITIE. Een takkenfunctie $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ heet een stroom of een stroomfunctie als $\varphi(x) = 0$ geldt voor alle $x \in K$ met uitzondering van twee vooraf gegeven knopen i en u .

We interpreteren i als het knooppunt waar de stroom van buiten af de graaf ingaat en u als de uitgang.

(5.5.4) VOORBEELD.



Gewoonlijk zijn stroomfuncties niet-negatief en is $\varphi(i) > 0$, $\varphi(u) < 0$.

(5.5.5) STELLING. Voor een stroom f geldt

$$\varphi(u) = -\varphi(i) .$$

De grootheid $\varphi(i)$ noemen we de stroomsterkte van de stroom f .

BEWIJS.
$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \varphi(u) + \sum_{\substack{x \in K \\ x \neq i \\ x \neq u}} \varphi(x) = -\varphi(i) + \sum_{x \in K} \varphi(x) = \\ &= -\varphi(i) + \sum_{x \in K} \{f(x,K) - f(K,x)\} = -\varphi(i) + f(K,K) - f(K,K) = \\ &= -\varphi(i) . \end{aligned}$$
 □

We nemen nu aan, dat elke tak t een zekere capaciteit $c(t)$ heeft en dat de stroom in zo'n tak niet groter kan zijn dan de capaciteit van de tak.

Een transportnetwerk is een gerichte graaf met aangewezen knopen i (ingang) en u (uitgang) en een takkenfunctie c , die aan iedere tak t een reëel getal $c(t) > 0$ toevoegt, genaamd de capaciteit van t .

Een stroom f op een transportnetwerk heet een toegelaten stroom als voor alle takken t geldt:

$$0 \leq f(t) \leq c(t) .$$

We zoeken in een transportnetwerk toegelaten stromen met maximale stroomsterkte. Om deze te bestuderen voeren we het begrip snede in. Daartoe verdelen we de verzameling K der knopen in twee complementaire verzamelingen A en B , dusdanig dat $i \in A$ en $u \in B$. De bij deze verdeling behorende snede is de verzameling der takken met beginpunt in A en eindpunt in B . De capaciteit van de snede is de som van de capaciteiten van haar takken.

Stel $A \cup B = K$, $A \cap B = \emptyset$, $i \in A$, $u \in B$. Dan is

$$S(A,B) := \{t \in T \mid b(t) \in A, e(t) \in B\} \quad (\text{snede van } A \text{ en } B),$$

$$c(A,B) := \sum_{t \in S(A,B)} c(t) \quad (\text{capaciteit van snede}).$$

(5.3.6) STELLING. Voor iedere toegelaten stroom en iedere snede geldt:

$$\varphi(i) = f(A,B) - f(B,A) \leq c(A,B).$$

BEWIJS.
$$\begin{aligned} \varphi(i) &= \varphi(i) + \sum_{\substack{x \in A \\ x \neq i}} \varphi(x) = \sum_{x \in A} \varphi(x) = \sum_{x \in A} \{f(x,K) - f(K,x)\} = \\ &= f(A,K) - f(K,A) = f(A,A) + f(A,B) - f(A,A) - f(B,A) = \\ &= f(A,B) - f(B,A) \leq f(A,B) \leq c(A,B). \quad \square \end{aligned}$$

De ongelijkheid $\varphi(i) \leq c$ geldt dus voor iedere toegelaten stroom en voor iedere snede en dus ook voor een snede met minimale capaciteit. Er is een stelling (Ford-Fulkerson), die zegt dat er een toegelaten stroom bestaat met stroomsterkte = minimale capaciteit van een snede. Deze stroom heeft dan uiteraard maximale stroomsterkte. We bewijzen deze stelling niet, maar schetsen wel een algoritme om in een gegeven transportnetwerk een stroom met maximale stroomsterkte te vinden.

Laat een toegelaten stroom f gegeven zijn. Als er een boog van i naar u is, zodat op iedere tak t van die boog geldt: $c(t) - f(t) > 0$, dan kunnen we een toegelaten stroom verkrijgen door in alle takken van de boog de stroom met het minimum m van deze $c(t) - f(t)$ te vermeerderen. De stroomsterkte van deze nieuwe stroom f_1 is m groter dan de stroomsterkte van f . Op minstens één der takken van de beschouwde boog geldt $c(t) - f_1(t) = 0$. Zo'n tak heet verzadigd. Een boog van i naar u met minstens één verzadigde tak noemen we ook verzadigd.

Als alle bogen van i naar u verzadigd zijn, heet de stroom compleet. De stroomsterkte hoeft dan evenwel nog niet maximaal te zijn.

Stel nu dat er een "boog" van i naar u is, die eventueel tegenliggende takken bevat en waarvoor geldt:

$$\text{voor alle } \rightarrow \text{ takken: } c(t) - f(t) > 0 ,$$

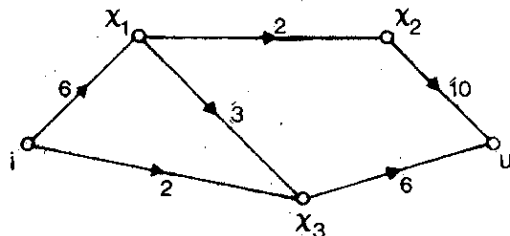
$$\text{voor alle } \leftarrow \text{ takken: } f(t) > 0 .$$

Nemen we nu het minimum m van al deze $c(t) - f(t)$, resp. $f(t)$, en vermeerderen we de stroom met m op de \rightarrow takken van de boog en verminderen we de stroom met m op de \leftarrow takken van de boog, dan ontstaat een toegelaten stroom met een stroomsterkte, die m groter is dan de stroomsterkte van f .

We herhalen dit proces net zo lang tot het niet meer kan. We bespreken eerst twee voorbeelden.

(5.5.7) VOORBEELD. $K = \{i, x_1, x_2, x_3, u\}$. De takken van de graaf zijn gegeven in de tweede kolom en hun capaciteiten in de eerste kolom van de volgende tabel.

c		f_1	f_2	f_3	f_4
6	$i \rightarrow x_1$	0	2	5	5
2	$i \rightarrow x_3$	0	0	0	2
2	$x_1 \rightarrow x_2$	0	2	2	2
3	$x_1 \rightarrow x_3$	0	0	3	3
10	$x_2 \rightarrow u$	0	2	2	2
6	$x_3 \rightarrow u$	0	0	3	5
	$\varphi(i)$	0	2	5	7



We beginnen met f_1 identiek nul. We zoeken bogen door de graaf en houden het mogelijk toe te voegen bedrag bij.

$$\begin{aligned} i &\rightarrow x_1 & 6 \\ x_1 &\rightarrow x_2 & 2 \\ x_2 &\rightarrow u & 10 . \end{aligned}$$

We vinden f_2 door verhoging van de stroom langs deze boog met 2; dan is de tak $x_1 x_2$ verzadigd.

$$\begin{aligned} i &\rightarrow x_1 & 4 \\ x_1 &\rightarrow x_3 & 3 \\ x_3 &\rightarrow u & 6 . \end{aligned}$$

We vinden f_3 door verhoging van de stroom langs deze boog met 3; nu zijn $x_1 x_2$ en $x_1 x_3$ verzadigd.

$$\begin{array}{l} i \rightarrow x_3 \quad 2 \\ x_3 \rightarrow u \quad 3 . \end{array}$$

We vinden f_4 door verhoging van de stroom langs deze boog met 2; de takken $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ en $i x_3$ zijn nu verzadigd.

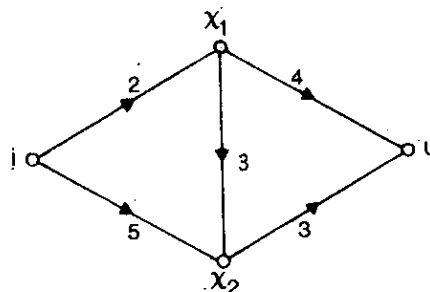
$$i \rightarrow x_1 \quad 1, \text{ breekt af .}$$

Zoals we dadelijk zullen zien is f_4 een stroom met maximale stroomsterkte $\varphi(i) = 7$. □

In dit voorbeeld is de stroomsterkte van de gevonden complexe stroom maximaal. In het volgende voorbeeld is dat niet zo.

(5.5.8) VOORBEELD. $K = \{i, x_1, x_2, u\}$. Takken en capaciteiten staan in de tabel.

c		f_1	f_2	f_3	f_4
2	$i \rightarrow x_1$	0	2	2	2
5	$i \rightarrow x_2$	0	0	1	3
3	$x_1 \rightarrow x_2$	0	2	2	0
4	$x_1 \rightarrow u$	0	0	0	2
3	$x_2 \rightarrow u$	0	2	3	3
$\varphi(i)$		0	2	3	5



Weer beginnen we met f_1 identiek aan nul. De eerste boog geeft

$$\begin{array}{l} i \rightarrow x_1 \quad 2 \\ x_1 \rightarrow x_2 \quad 3 \\ x_2 \rightarrow u \quad 3 . \end{array}$$

We vinden f_2 door verhoging van de stroom langs deze boog met 2; dan is de tak $i x_1$ verzadigd.

$$\begin{array}{l} i \rightarrow x_2 \quad 5 \\ x_2 \rightarrow u \quad 1 . \end{array}$$

We vinden f_3 door verhoging van de stroom langs deze boog met 1; i , x_1 en x_2 u zijn nu verzadigd.

$$\begin{array}{l} i \rightarrow x_2 \quad 4 \\ x_2 \leftarrow x_1 \quad 2 \\ x_1 \rightarrow u \quad 4 \end{array} .$$

Tenslotte vinden we f_4 door verhoging (resp. verlaging) van de stroom langs de "boog" met 2; i , x_1 en x_2 u zijn verzadigd.

Van deze stroom f_4 zullen we ook bewijzen, dat zij maximale stroomsterkte $\varphi(i) = 5$ heeft. □

Als de capaciteiten rationaal zijn (quotiënt van twee gehele getallen) en ook als in de algoritme steeds een boog gekozen wordt waarvan het aantal takken minimaal is, dan kan men bewijzen dat de algoritme na een eindig aantal stappen afbreekt. Dit zullen we hier niet doen. Als echter de algoritme afbreekt dan kan men inzien dat de stroom maximale sterkte heeft. Dit zullen we aantonen door een snede te construeren zodanig dat de stroomsterkte $\varphi(i)$ gelijk is aan de capaciteit van die snede. Volgens stelling (5.6.6) is de stroomsterkte dan maximaal. We definiëren A als de verzameling van knooppunten x waarvoor er een boog (met eventueel tegenliggende takken) van i naar x bestaat waarop we de stroom nog kunnen verhogen. (Daarbij negeren we het feit dat de stroom na het punt x niet meer noodzakelijk kan worden verhoogd.) We spreken af dat $i \in A$. Het is duidelijk dat $u \notin A$ omdat we anders de stroomsterkte volgens bovenstaand algoritme zouden kunnen verhogen. We definiëren B als het complement van A . Dan geldt voor de takken van A naar B dat $c(t) - f(t) = 0$ en voor de takken van B naar A geldt $f(t) = 0$. Dit volgt uit de definitie van A . Nu geldt echter $\varphi(i) = f(A, B) - f(B, A) = c(A, B)$, zodat de stroomsterkte gelijk is aan de capaciteit van de snede.

We beschouwen de stand van zaken in de behandelde voorbeelden.

In (5.5.7) is $A = \{i, x_1\}$, $B = \{x_2, x_3, u\}$,

$$\begin{aligned} S(A, B) &= \{i, x_3, x_1, x_2, x_1, x_3\}, \\ c(A, B) &= 2 + 2 + 3 = 7 . \end{aligned}$$

In (5.5.8) is $A = \{i, x_2\}$, $B = \{x_1, u\}$,

$$\begin{aligned} S(A, B) &= \{i, x_1, x_2, u\} , \\ c(A, B) &= 2 + 3 = 5 . \end{aligned}$$

De algoritme levert dus niet alleen een stroom met maximale stroomsterkte, maar ook een snede met minimale capaciteit.

5.6. Optimale bogen

We beschouwen een gerichte graaf zonder kringen waarbij aan elke tak een reëel getal $c(t)$ wordt toegekend. ($c : T \rightarrow \mathbb{R}$ is dus een takkenfunctie). Dit getal geeft aan hoeveel het kost, de tak in de voorgeschreven richting te doorlopen. De kosten bij het doorlopen van een boog vindt men door de kosten van de takken van die weg op te tellen. Als p en q knopen zijn van de graaf, dan willen we een boog van p naar q vinden met minimale kosten. Zo'n boog noemen we dan een optimale boog. Het is duidelijk dat een optimale boog altijd bestaat als er ten minste een boog van p naar q is (d.w.z. als q vanuit p bereikbaar is). We beschouwen q als een vast punt en we definiëren voor elke knoop x van de graaf, $w(x)$ als het minimale bedrag dat het kost om van x naar q te gaan. We definiëren $w(x) = \infty$ als er géén boog van x naar q is. Tenslotte spreken we af dat $w(q) = 0$. Bedenk, dat er geen weg met positieve lengte van q naar q loopt, omdat de graaf geen kringen bevat. De enige weg van q naar q is de "triviale weg" met lengte 0.

(5.6.1) STELLING. Als x een knoop is en $x \neq q$ dan geldt $w(x) < \infty$ dan en slechts dan als er een tak t bestaat met $b(t) = x$ en $w(e(t)) < \infty$. Als $w(x) < \infty$, dan is

$$w(x) = \min\{c(t) + w(e(t))\}$$

waarbij het minimum genomen wordt over alle takken t waarvan x het beginpunt is en waarvoor geldt $w(e(t)) < \infty$. Verder is een tak waarvoor in (5.6.2) het minimum wordt aangenomen de begintak van een optimale boog van x naar q .

BEWIJS. Als er een t bestaat met $b(t) = x$ en $w(e(t)) < \infty$, kiezen we een boog van $e(t)$ naar q . We laten deze boog voorafgaan door t en verkrijgen op deze manier een boog van x naar q . Omgekeerd, als er een boog van x naar q bestaat, dan geldt voor de begintak t van die boog $b(t) = x$ en $w(e(t)) < \infty$, om dat er ook een boog van $e(t)$ naar q bestaat.

Veronderstel nu, dat $w(x) < \infty$. Voor elke boog van x naar q zijn de kosten gelijk aan de kosten van de eerste tak t vermeerderd met de kosten van het resterende stuk van de boog, d.w.z. het stuk van $e(t)$ naar q . Dit laatste bedrag is niet kleiner dan $w(e(t))$, zodat de kosten van de totale boog niet

kleiner zijn dan $c(t) + w(e(t))$. Daar dit geldt voor elke tak t met $b(t) = x$ en $w(e(t)) < \infty$ volgt hieruit

$$w(x) \geq \min\{c(t) + w(e(t))\} .$$

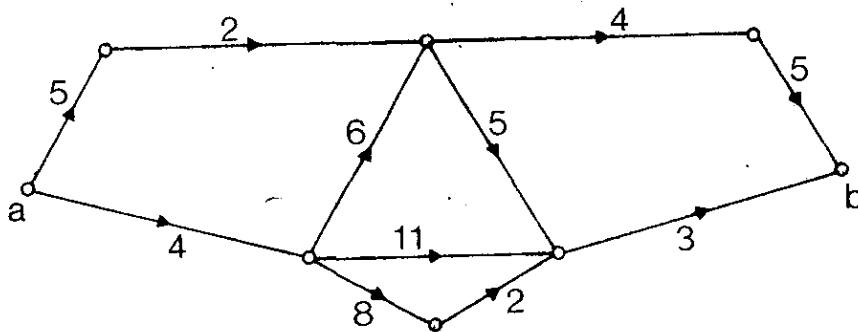
Anderzijds, moet er een optimale boog van x naar q bestaan. Als \bar{t} hiervan de begintak is, dan is het resterende stuk van de boog een optimale boog van $e(\bar{t})$ naar q . Derhalve geldt

$$w(x) = c(\bar{t}) + w(e(\bar{t})) = \min\{c(t) + w(e(t))\} .$$

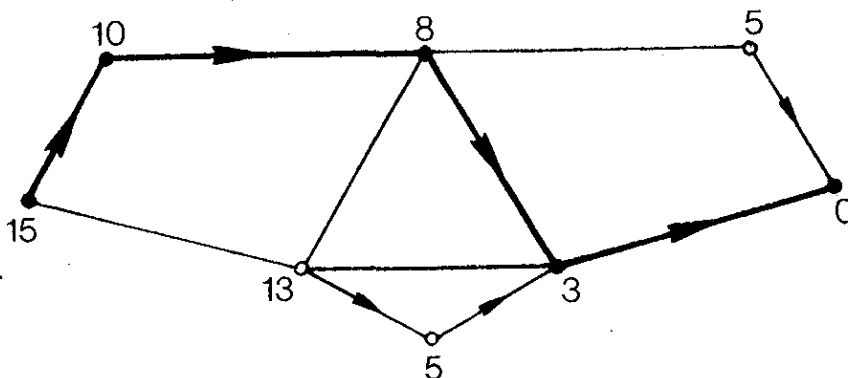
□

We kunnen stelling (5.6.1) gebruiken om optimale bogen te construeren.

(5.6.3) VOORBEELD.



In bovenstaande graaf wordt de waarde van $c(t)$ bij elke tak aangegeven. We bepalen m.b.v. (5.6.2) de waarde van $w(x)$ voor elk knooppunt x .



Verder geven we steeds d.m.v. een dubbele pijl aan voor welke tak in (5.6.2) het minimum wordt aangenomen. Als we dit hebben gedaan, dan komen bij het knooppunt a de minimale kosten te staan. Een optimale boog vinden we door in a te starten en steeds een tak te kiezen met dubbele pijl. Merk op dat de optimale boog niet noodzakelijk eenduidig is. Als er bijv. in bovenstaande graaf bijv. bij de tak t die vanuit a vertrekt en waarvoor $c(t) = 4$ geldt, 2 in plaats van 4 had gestaan waren er meer wegen mogelijk geweest.

□

We kunnen de methode zoals gebruikt in voorbeeld (5.6.3) formaliseren tot de volgende algoritme.

- 1° Nummer de knopen door aan elke knoop zijn rang toe te kennen (zie 5.2.1).
- 2° De knoop met nummer n krijgt de waarde $w(n) = 0$ en voor de knopen met nummers $i = n - 1, n - 2, \dots, 1$ geldt

$$w(i) + \min_{\substack{t \\ b(t) = i}} c(t) + w(e(t))$$

(5.6.4) OPMERKING. We kunnen de algoritme gebruiken om te bepalen vanuit welke punten een gegeven punt q in een gerichte graaf bereikbaar is. Daartoe definiëren we $c(t) = 0$ voor elke tak van de graaf en bepalen $w(x)$ voor elke knoop x .

Een andere toepassing is het bepalen van de kortste boog tussen twee punten (neem $c(t) = 1$ voor alle t) of de langste boog tussen twee punten ($c(t) = -1$) voor alle t . □

(5.6.5) OPMERKING. De voorwaarde dat de graaf geen kringen bevat kan vervallen als $c(t) > 0$ voor alle takken t , omdat dan zoals men gemakkelijk kan inzien, een optimale weg een boog moet zijn. Als $c(t) \geq 0$ kan men inzien dat optimale wegen alleen kringen kunnen bevatten waarvoor $c(t) = 0$ voor alle takken van de kring.

Een algoritme, die zeer nauw bij de intuïtie aansluit en die, in een gerichte graaf met n knopen en een niet negatieve lengtefunctie (takkenfunctie) ($c(t) \geq 0$ voor elke tak in de graaf), kortste paden construeert is de Dijkstra algoritme. We zullen nu net als in opmerking (5.6.5) toelaten dat de graaf kringen bevat.

We beschrijven deze algoritme voor een graaf met n knopen, met een niet negatieve lengtefunctie waar we de lengte der kortste paden naar een vaste knoop q willen weten.

(5.6.6) Dijkstra algoritme

- 1° zet bij knoop q het getal $w(q) = 0$
- 2° pas de volgende procedure hoogstens $n - 1$ maal toe

Laat t een tak zijn zó dat

- (i) bij $b(t)$ staat geen getal
- (ii) bij $e(t)$ staat wel een getal, nl. $w(e(t))$
- (iii) $c(t) + w(e(t))$ is minimaal

Zet dan bij de knoop $b(t)$ het getal $c(t) + w(e(t))$.

Het is evident dat na afloop van deze algoritme bij iedere knoop de minimale lengte van een pad van de knoop naar q staat.

(5.6.7) OPMERKING. De procedure in 2° hoeft zeker niet vaker dan $n - 1$ maal worden toegepast omdat er maar n knopen zijn. Het is bovendien duidelijk dat er grafen zijn waarbij de procedure precies $n - 1$ maal moet worden uitgevoerd. □

5.7. Ongerichte grafen

Een ongerichte graaf onderscheidt zich van een gerichte graaf doordat de takken niet van richting worden voorzien. Aan elke tak wordt dus een ongeordend paar punten toegevoegd, randpunten genaamd. Men kan hier dus niet spreken van begin- of eindpunten. Bij het tekenen van een ongerichte graaf voorziet men de takken dus niet van een pijl. Definities van weg, pad, boog, enkelvoudige graaf, isomorfe grafen, deelgrafen zijn analoog aan de overeenkomstige definities voor gerichte grafen.

(5.7.1) DEFINITIE. Een ongerichte graaf heet samenhangend als er voor ieder tweetal knopen a en b met $a \neq b$ een weg van a naar b bestaat. Een niet-samenhangende graaf bestaat uit een aantal maximale samenhangende stukken, die componenten heten.

Twee knopen behoren dan en slechts dan tot dezelfde component, als ze door een weg verbonden zijn. Een samenhangende graaf heeft één component.

(5.7.2) DEFINITIE. Een ongerichte graaf zonder kringen heet een bos. Een samenhangende ongerichte graaf zonder kringen heet een boom.

(5.7.4) STELLING. Elke component van een bos is een boom. Een bos (en dus ook een boom) is een enkelvoudige graaf.

Dit is evident.

Een knoop die randpunt is van precies één tak, heet een eindknoop.

(5.7.4) STELLING. Iedere boom met twee of meer knopen heeft ten minste twee eindknopen.

BEWIJS. Als alle knopen van de boom eindknopen zijn, is de stelling juist. We mogen dus aannemen, dat de boom een knoop a bevat, die geen eindknoop is. We passen volledige inductie toe naar het aantal knopen n . Stel dat het aantal takken, dat van a uitgaat, k is. Dan is $k \geq 2$, want $k = 0$ is onmogelijk, omdat de graaf samenhangend is en $n \geq 2$ en $k = 1$ is onmogelijk omdat a geen eindknoop is. Laat nu de knoop a en die k takken weg. De resterende graaf is een bos en de k andere randpunten van die k takken liggen in verschillende componenten, omdat er anders in de oorspronkelijke graaf een kring zou zijn geweest (door het punt a). Elk van deze k componenten bevat tenminste één knoop, die eindknoop is in de oorspronkelijke boom. Immers als zo'n component uit slechts één knoop bestaat, dan is deze knoop in de oorspronkelijke boom slechts met a verbonden en dus een eindknoop. Als zo'n component tenminste twee knopen bevat, kunnen we op die component de inductieveronderstelling toepassen, omdat het aantal knopen zeker kleiner dan n is, en concluderen, dat deze component tenminste twee eindknopen bezit, waarvan er tenminste één in de oorspronkelijke boom niet met a verbonden is en dus daar ook een eindknoop is. Op deze wijze vinden we in de boom k eindknopen, hetgeen het bewijs van de stelling voltooit, omdat $k \geq 2$. \square

(5.7.5) STELLING. *Iedere boom met n knopen heeft precies $n - 1$ takken.*

BEWIJS. We passen volledige inductie toe naar n . Het geval $n = 1$ is duidelijk. Als $n \geq 2$, is er een eindknoop a met aanliggende tak t . Laat a en t weg. De resterende graaf is weer een boom, omdat voor twee knopen x en y in die boom een pad in de oorspronkelijke boom, dat van x naar y loopt, de tak t niet bevat en dus een weg in de resterende graaf is. Volgens de inductieveronderstelling heeft de resterende boom $n - 2$ takken en de gegeven boom dus $n - 1$ takken. \square

(5.7.6) STELLING. *Een bos met n knopen en k componenten heeft $n - k$ takken.*

(5.7.7) STELLING. *In een boom is ieder pad een boog. Als a en b verschillende knopen in een boom zijn, is er één en slechts één pad van a naar b .*

Het bewijs van deze stellingen is eenvoudig.

(5.7.8) DEFINITIE. *Een deelgraaf van een samenhangende, ongerichte graaf, die alle knopen van de oorspronkelijke graaf bevat en tevens een boom is, heet een skelet van die graaf.*

(5.7.9) STELLING. *Iedere samenhangende, ongerichte graaf bezit een skelet.*

BEWIJS. We passen volledige inductie toe naar het aantal takken. Als de graaf geen kring bevat, is hij een boom en dus zijn eigen skelet. Als de graaf wel een kring bevat, is de deelgraaf, die ontstaat door één van de takken van een kring weg te laten, samenhangend. Immers een weg in de oorspronkelijke graaf, die de weggelaten tak bevat, kan vervangen worden door een weg in de deelgraaf met hetzelfde begin- en eindpunt, door telkens die tak te vervangen door de rest van de kring, waarvan hij deel uitmaakt. De deelgraaf is dus samenhangend en heeft een tak minder en bezit dus volgens inductieveronderstelling een skelet, dat uiteraard ook skelet van de oorspronkelijke graaf is. \square

(5.7.10) OPMERKING. Uit het bewijs volgt, dat men een skelet kan vinden door herhaaldelijk schrappen van een tak in een kring. Verder kan een graaf meer dan één skelet hebben. \square

Stelling (5.7.9) doet een uitspraak over het bestaan van een skelet. We kunnen dit idee nog uitbreiden naar het geval waar aan de takken van de ongerichte graaf getallen worden toegekend en dan een "zuinigst" skelet construeren.

We gaan uit van een samenhangende ongerichte graaf met n knopen voorzien van een niet-negatieve takkenfunctie c (d.w.z. $c(t_i) \geq 0$ voor elke tak t_i). We zullen een skelet construeren zodat de som der functiewaarden $c(t_i)$ minimaal is. We gaan te werk volgens de volgende algorithmen

- 1 Kies een tak t_1 waarvoor $c(t_1)$ minimaal is
- 2 Kies een tak $t_2 \neq t_1$ zodat $\{t_1, t_2\}$ eenboom is en $c(t_2)$ minimaal is
- 3 Kies een tak $t_3 \neq t_2, t_3 \neq t_1$ zodat $\{t_1, t_2, t_3\}$ eenboom is en $c(t_3)$ minimaal is
- \vdots
- i Kies een tak $t_i \neq t_{i-1}, \dots, t_i \neq t_1$ zodat $\{t_1, t_2, \dots, t_i\}$ een boom is en $c(t_i)$ minimaal is
- \vdots
- $n - 1$ Kies een tak $t_{n-1} \neq t_{n-2}, \dots, t_{n-1} \neq t_1$ zodat $\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\}$ een boom is en $c(t_{n-1})$ minimaal is

De takken t_1, \dots, t_{n-1} bepalen een skelet omdat ze een boom vormen met n knopen. Bovendien is $c(t_1) + \dots + c(t_{n-1})$ duidelijk minimaal.