TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

en

Antwoorden + Oplossingen

bij

WISKUNDE 41

(BDK-IV)

Voorjaarssemester 1978

Technische Hogeschool Eindhoven

1981

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken en antwoorden bij het college

Wiskunde 41

Dictaatnr. 2.275 Prijs *f* 5,00

8110462.

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het college

WISKUNDE 41

Voorjaarssemester 1978

Inhoudsbeschrijving

Vraagstukken bij WISKUNDE 41

Voorjaarssemester 1978

Onderwerpen	blz	Antw
I. Recurrente betrekkingen	1	31
II. Lineaire recurrente betrekkingen	6	33
III. Stelsels van recurrente betrekkingen	10	36
IV. De z-transformatie	15	41
V. Grafentheorie	17	42

TENTAMENS (1976-1977), gevolg door UITWERKINGEN:

Tentamen	blz
12 juni 1976	47
19 juni 1976	54
17 januari 1977	61
29 januari 1977	68
18 juni 1977	77
25 juni 1977	88

JdG, 12 Juli 2005

Hoofdstuk I.

§ 1.

1. Een bank geeft op een beleggingsrekening 100 p % samengestelde interest per jaar. Jaarlijks op 1 januari wordt de rente met het uitstaande kapitaal samengesteld.
Iemand zet jaarlijks op 1 januari het vaste bedrag R op zijn rekening. Hoeveel bedraagt het saldo na k jaren, aangenomen dat het beginsaldo 0 was?

2. Gegeven is de rij

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}, \qquad n = 0,1,2,\ldots .$$

Bewijs:

a) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $\qquad n = 0,1,2,\ldots$

b) $x_n = F_n$, $\qquad n = 0,1,2,\ldots$

waarin (F_n) de rij van Fibonacci voorstelt.

3. Gegeven is de rij

$$x_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Bewijs:

a) $x_{n+1} = 6x_n - 4x_{n-1}$, $\qquad n = 1,2,3,\ldots$

b) x_n is een natuurlijk getal, $\qquad n = 0,1,2,3,\ldots$

c) x_n is deelbaar door 2^n, $\qquad n = 0,1,2,3,\ldots$

4. Bewijs dat voor de rij (F_n) van Fibonacci geldt:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^n, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

5. Gegeven is de rij

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} a^{k-i}\, i\,, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

Bewijs:

$$x_{k+1} = ax_k + k + 1\,.$$

6. Beschouw de rijen bestaande uit n nullen of enen, waarin geen twee nullen naast elkaar staan.
Laat x_n het aantal van deze rijen zijn.
Bewijs:

a) $$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}\,, \qquad n = 3,4,5,\ldots$$

b) $$x_n = F_{n+1}\,, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

7. Laat x_n het aantal rijen zijn bestaande uit n getallen, 0, 1 of -1, waarin geen twee getallen 1 of -1 naast elkaar staan.
Bewijs:

$$x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}\,, \qquad n = 2,3,4,\ldots$$

8. Een lichtstraal met intensiteit I_0 valt loodrecht op een plaat absorberend materiaal. De dikte van de plaat is d.
Experimenteel is gebleken dat de absorptie in een zeer dun laagje met dikte h bij benadering gelijk is aan λIh. Hierin is I de intensiteit van het op het laagje vallende licht en λ is een evenredigheidsconstante, die de absorptiecoëfficiënt genoemd wordt.
We denken ons de plaat verdeeld in n dunne laagjes van gelijke dikte h.
Noem de intensiteit van het uit het k-de laagje tredende licht I_k.
Stel een recurrente betrekking op voor I_k.
Beschouw I_n en bepaal de intensiteit van de uit de plaat tredende lichtstraal.

9. Er zijn n kooien opgesteld in een rechte lijn. In deze kooien moeten k niet van elkaar te onderscheiden leeuwen worden ondergebracht en wel zó,

dat in een kooi hoogstens één leeuw zit en niet in twee opeenvolgende kooien leeuwen zitten.

Noem het aantal manieren waarop dit gerealiseerd kan worden $x_{n,k}$.

Bewijs:

$$x_{n,k} = x_{n-1,k} + x_{n-2,k-1} \ .$$

10. De rij punten $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ op de eenheidscirkel wordt op de volgende wijze gegeven:

$z_0 = 1$, $z_1 = \cos\alpha + i \sin\alpha$; z_{n+1} is het spiegelbeeld van z_{n-1} in de lijn, die 0 met z_n verbindt $(n = 1,2,\ldots)$. Bepaal z_n en onderzoek het gedrag van de rij voor

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \ .$$

N.B. Men kan de rij z_n interpreteren als de opeenvolgende posities van een biljartbal op een cirkelvormig biljart.

§ 3.

Beschouw de autonome iteratie

$$x_{k+1} = f(x_k) \ , \qquad k = 0,1,2,\ldots \ .$$

Voor welke waarden van x_0 is de rij (x_k) monotoon dan wel alternerend en voor welke waarden van x_0 is de rij (x_k) convergent als

1. $f(x) = \frac{1}{x}$.

2. $f(x) = \ln(1 + x)$.

3. $f(x) = e^{-x}$.

4. $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

5. $f(x) = x^3 - 6$.

6. $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$.

7. Beschouw de iteratie

$$x_{k+1} = ax_k^2 \ , \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$x_0 = b \ .$$

a) Geef de algemene oplossing.

b) Ga na voor welke waarden van a en b de rij (x_k) convergeert en bepaal in dat geval $\lim_{k\to\infty} x_k$.

8. Beschouw de autonome iteratie

$$x_{k+1} = 1 + ax_k^2 \ , \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$x_0 = b, \quad \text{waarin} \quad b > 0.$$

Ga na voor welke waarden van a en b de rij (x_k) convergeert en bepaal in dat geval $\lim_{k\to\infty} x_k$.

9. Bewijs, dat in § 1, opgave 7, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ bestaat.
Bereken deze limiet.

10. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y' = y - y^2 .$$

De integraalkromme van deze D.V., die door het punt $(0,\frac{1}{2})$ gaat kan men numeriek benaderen volgens de methode van Euler (Zie Wiskunde 39).
Dit procédé leidt tot de volgende autonome iteratie:

$$y_{k+1} = y_k + h(y_k - y_k^2)$$

$$y_0 = \tfrac{1}{2}$$

waarin $h > 0$; $k = 0,1,2,\ldots$.
Onderzoek voor welke waarden van h

$$\lim_{k\to\infty} y_k$$

bestaat en bepaal in geval van convergentie deze limiet.

Hoofdstuk II.

§ 2. Los de volgende **recurrente betrekkingen** op:

1. $2x_{k+1} = x_k + 2,\ x_0 = 4.$

2. $x_{k+1} = 2x_k + k,\ x_0 = 0.$

3. $x_{k+1} = x_k + k,\ x_0 = 0.$

4. $x_{k+1} = 2x_k + 2k^2,\ x_0 = 0.$

5. $x_{k+1} = 2x_k + 3^{-k},\ x_0 = 1.$

6. $x_{k+1} = 3x_k + k.3^k,\ x_0 = 1.$

7. $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + k!,\ x_0 = 0.$

8. $x_{k+1} = 5x_k + (-1)^k,\ x_0 = 2.$

9. $x_{k+1} = 2x_k + 2^k,\ x_0 = 4.$

10. $x_{k+1} = 5x_k + k^2 + 2k + 3,\ x_0 = 0.$

11. $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + k.2^{-k},\ x_0 = 1.$ **Bepaal** $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

12. $x_{k+1} = ax_k + k + 1,\ x_0 = 0,$ **(vergelijk I, § 1, 5).**

13. $x_{k+1} = \frac{k}{k+1}x_k + 1,\ x_0 = 1.$

14. $x_{k+1} = 2(1 + \frac{1}{k+1})x_k + 2k + 4,\ x_0 = 1.$

15. $x_{k+2} = 2x_{k+1} + x_k$, $k = 0,1,2,\ldots$ (vergelijk I, § 1, 7).

16. $x_{k+2} - 5x_{k+1} + 6x_k = 0$, $k = 0,1,2,\ldots$

17. $x_{k+2} - 7x_{k+1} + 10x_k = 4k$.

18. $x_{k+2} - 4x_{k+1} + 4x_k = 2^{k+1}$.

19. $x_{k+2} - 6x_{k+1} + 9x_k = 0$.

20. $x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k = 1$.

21. a) $x_{k+2} - 4x_k = 5.3^k$.

    b) $x_{k+2} - 4x_k = 2^k$.

22. $x_{k+2} + x_k = 1$.

23. $x_{k+2} + 2x_{k+1} + 2x_k = k$.

24. Bereken voor α reëel en $-2 \le \alpha \le 2$ de determinant met n rijen en n kolommen

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 & \ldots & . \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \ldots & . \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \ldots & . \\ . & . & . & & \ldots & . \\ 0 & . & . & & \ldots & \alpha \end{vmatrix}$$

Aanwijzing: Leid een recurrente betrekking voor D_n af.

25. Gegeven is de recurrente betrekking

$$x_{k+2} - 2\lambda x_{k+1} + \lambda^2 x_k = 0,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0,\ k = 0,1,2,\ldots\ .$$

a) Bewijs:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \lambda\ ,$$

als deze limiet bestaat.

b) Bepaal de algemene oplossing van de gegeven recurrente betrekking. Laat zien, dat

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k}$$

bestaat voor elke oplossing (x_k) ongelijk aan de nuloplossing.

26. Bepaal de algemene oplossing van

$$x_{k+2} + 2ax_{k+1} + ax_k = (-1)^k,\ k = 0,1,2,\dots,\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

27. Los op voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x_{k+2} - 2\alpha x_{k+1} + (1 + \alpha^2)x_k = 0\ .$$

Voor welke waarden van α zijn alle oplossingen begrensd?

28. Los op voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x_{k+2} + (\alpha + 1)x_{k+1} + \alpha x_k = (-1)^k, \quad k = 0,1,2,\dots\ ,\ \alpha \neq 0.$$

29. Los op:

$$x_k \cdot x_{k+2} = x_{k+1}^2, \quad x_0 = 1,\ x_1 = 2\ .$$

30. Los op:

$$x_{k+3} - 7x_{k+2} + 16x_{k+1} - 12x_k = 0\ .$$

31. Los op:

$$x_{k+4} - 2x_{k+3} + 2x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k = 0\ , \qquad x_0 = x_1 = 0\ .$$

$$x_2 = x_3 = 1\ .$$

32. Neem aan dat het nationaal inkomen over elk jaar is opgebouwd uit drie componenten:

1) Uitgaven voor de consumptie.
2) Investeringen in het particuliere bedrijfsleven.
3) Overheidsuitgaven.

Neem aan:

(i) dat de consumptieuitgaven in elk jaar evenredig zijn met het nationaal inkomen over het voorafgaande jaar.
(ii) dat de particuliere investeringen in een jaar evenredig zijn met de toename van de consumptie in dat jaar.
(iii) dat de overheidsuitgaven ieder jaar dezelfde zijn.

Stel de jaarlijkse overheidsuitgaven gelijk aan 1 (keuze der eenheid). Laat zien, dat het nationaal inkomen y_k over het k-de jaar voldoet aan een betrekking van de vorm

$$y_k = p_1 y_{k-1} - p_2 y_{k-2} + 1, \quad p_1 \text{ en } p_2 \text{ constant} .$$

Neem vervolgens $p_1 = 1$ en $p_2 = \frac{1}{2}$,
Bewijs dat in dit geval y_k een gedempte slingerbeweging vertoont en dat $\lim_{k\to\infty} y_k = 2$.

33. Laat N_t de grootte zijn van een zekere bevolking aan het eind van jaar t, $t = 0,1,2,\ldots$. De grootte van de bevolking wordt door 2 factoren beïnvloed:

(i) een relatieve groei van 2% per jaar.
(ii) bovendien een constant verlies van 10 individuen per jaar.

Neem $N_0 = 2500$ en bereken N_t, $t = 1,2,3,\ldots$.
Na hoeveel jaar is de bevolking verdubbeld?

Hoofdstuk III.

Los de volgende recurrente betrekkingen op.

1. a) $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$; $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$.

   b) $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \underline{b}$ met $\underline{b} \in \mathbb{R}^2$ constant

2. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + 2^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

3. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

4. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$, $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$; $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$; $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$.

6. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$; $k = 0,1,2,\ldots$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, $k = 0,1,2,\ldots$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$; $20\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $k = 0,1,2,\ldots$

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}.$$

Bepaal bovendien $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$.

10. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, $k = 0,1,2,\ldots$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

11. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, $k = 0,1,2,\ldots$

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} .$$

12. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, $k = 0,1,2,\ldots$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

a) $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

13. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

14. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$; $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

15. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$; $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

16. In een land zijn 3 politieke partijen A, B en C.
Jaarlijks verliest partij A $\frac{1}{3}$ van zijn aanhang aan partij B en $\frac{1}{3}$ aan partij C.
Partij B verliest de helft van zijn aanhang aan partij A en verliest niet aan C.
Partij C verliest de helft van zijn aanhang aan partij B en verliest niet aan A.
Neem aan dat de bevolkingsgrootte constant is.
Bewijs dat de grootte der partijen A, B en C nadert tot een stabiele limiet toestand.

17. Stel dat in de beroepen het volgende onderscheid wordt aangebracht: academisch, geschoold, ongeschoold.
Uit een onderzoek is gebleken dat

(i) van de kinderen van academici zijn 70% academicus, 20% geschoold en 10% ongeschoold.

(ii) van de kinderen van geschoolden zijn 20% academicus, 60% geschoold en 20% ongeschoold.

(iii) van de kinderen der ongeschoolden zijn 20% academicus, 30% geschoold en 50% ongeschoold.

Neem aan dat ieder lid der beroepsbevolking één kind heeft in de beroepsbevolking.

Bij het begin van de registratie waren er 16 miljoen academici, 18 miljoen geschoolden, 1 miljoen ongeschoolden.

Geef de verdeling over de beroepen in het k-de jaar en bepaal de stabiele eindtoestand.

18. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\alpha \in \mathbb{R}$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$; $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Bewijs: $A^k = \begin{bmatrix} 1 & 2k & k^2\alpha \\ 0 & 1 & k\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Geef met behulp van (a) de algemene oplossing.

19. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$, $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Bereken A^k en los daarmee het stelsel op.

20. $$\underline{x}_{k+1} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\underline{x}_k + \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

Bewijs, dat $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$ bestaat. Bepaal deze limiet.

21. $$\underline{x}_{k+1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\underline{x}_k, \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Onderzoek, of $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$ bestaat. Zo ja, bepaal deze limiet.

22. $$\underline{x}_{k+1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\underline{x}_k + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

Bepaal $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$.

23. $$\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{3} & -21 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{24} & 24 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}\underline{x}_k, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

a) Voor welke waarden van α zijn alle oplossingen begrensd? $(\alpha \in \mathbb{R})$.

b) Als $\underline{x}_0 = [1\ ,2,0\ ,10]^T$, bepaal dan $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$ voor die waarden van α waarvoor deze limiet bestaat.

24. $$\underline{x}_{k+1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\underline{x}_k, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

Bewijs, dat $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$ bestaat.

25. $$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = (\tfrac{3}{2}, 1, 1) .$$

Bereken $A\underline{c}$ en bepaal $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$.

26.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ga na of A^k begrensd is en of $\lim_{k\to\infty} A^k$ bestaat.

27.
$$\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \underline{x}_k, \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bewijs, dat $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$ bestaat en bepaal deze limiet.

28. Dezelfde vraag voor
$$\underline{x}_{k+1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}_k, \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

29. Dezelfde vraag voor
$$\underline{x}_{k+1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}_k, \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

30.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bewijs, dat A^k begrensd is, $k = 0,1,2,\ldots$. Ga na, of $\lim_{k\to\infty} A^k$ bestaat.

31. Neem aan, dat in een stad twee politieke partijen A en B bestaan. Van jaar op jaar behoudt partij A 70% van zijn aanhang, verliest 20% van zijn aanhang aan partij B en 10% van zijn aanhang wordt partijloos. Partij B behoudt 85%, verliest 10% aan partij A en 5% van de aanhang van B wordt partijloos. Van de partijlozen voegen zich jaarlijks 2000 personen bij partij A en eveneens 2000 personen bij partij B.
Bewijs dat de grootte van beide partijen nadert tot een limiet, die niet afhangt van de begintoestand en bepaal die limiet.

Hoofdstuk IV.

Los op met behulp van z-transformatie:

1. $x_{k+1} + x_k = 2$
   $x_0 = 0.$

2. $x_{k+1} - x_k = 1$
   $x_0 = 1.$

3. $x_{k+2} + 3x_{k+1} + 2x_k = 1$
   $\left.\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}\right\}.$

4. $x_{k+2} + 2x_{k+1} + x_k = 3$
   $\left.\begin{aligned} x_0 &= 3 \\ x_1 &= -1 \end{aligned}\right\}.$

5. $x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k = 0$
   $\left.\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}\right\}.$

6. $x_{k+2} + x_k = 1$
   $\left.\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}\right\}.$

7. $x_{k+2} + 2x_{k+1} + 2x_k = 3$
   $\left.\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}\right\}.$

8. $x_{k+1} = x_k + 3y_k + 1$
   $y_{k+1} = x_k - y_k$
   $x_0 = y_o = 0 .$

9. $x_{k+1} = 2x_k - y_k$
   $y_{k+1} = 4x_k - 3y_k$
   $x_0 = 1, y_0 = 0 .$

10. $x_{n,k} = x_{n-1,k} + x_{n-2,k-1}$,

$n = 2,3,4,\ldots;\quad k = 1,2,3,\ldots$,

$x_{0,0} = 1$; $x_{0,k} = 0$ als $k \geq 1$;

$x_{1,0} = x_{1,1} = 1$; $x_{1,k} = 0$, als $k \geq 2$;

$x_{n,0} = 1$, als $n \geq 2$.

11. $(k + 1)x_{k+1} + kx_k = 100x_k$; $\quad k = 0,1,2,\ldots$

$x_0 = 1$.

12. $x_{k+1} = x_k + \frac{k-1}{k!}$; $\quad k = 0,1,2,\ldots$

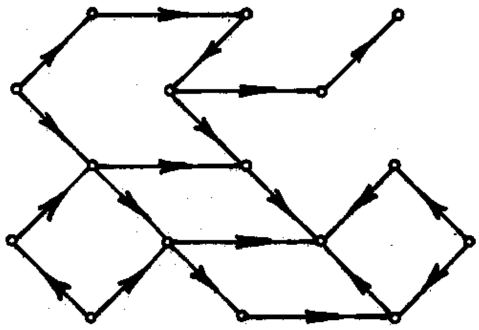
$x_0 = 1$.

Hoofdstuk V.

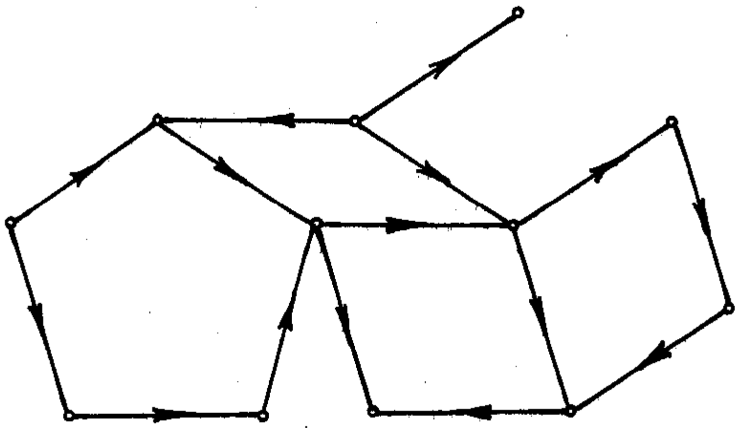
§ 2.

1. Nummer de knopen in de volgende grafen zodanig, dat voor iedere tak geldt: nummer b(t) < nummer e(t).

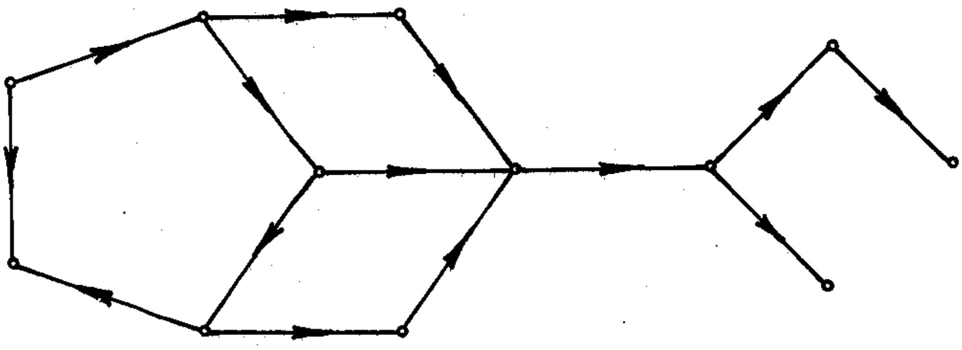
a)



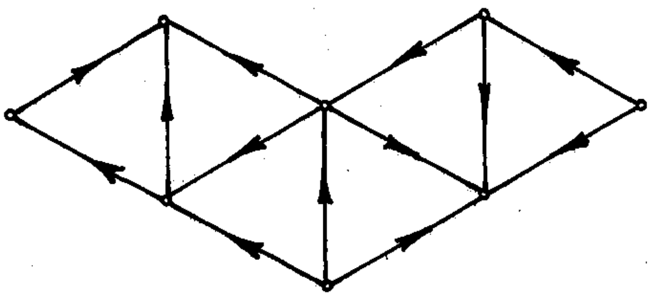
b)



c)

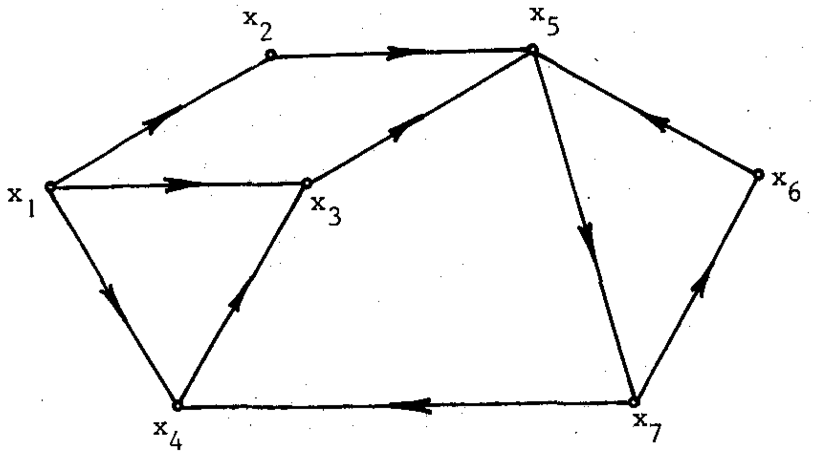


d)

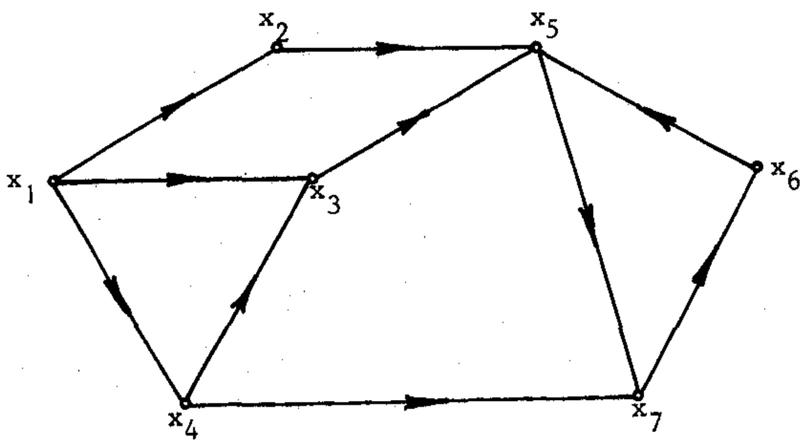


2. Onderzoek of de volgende grafen kringen bevatten.

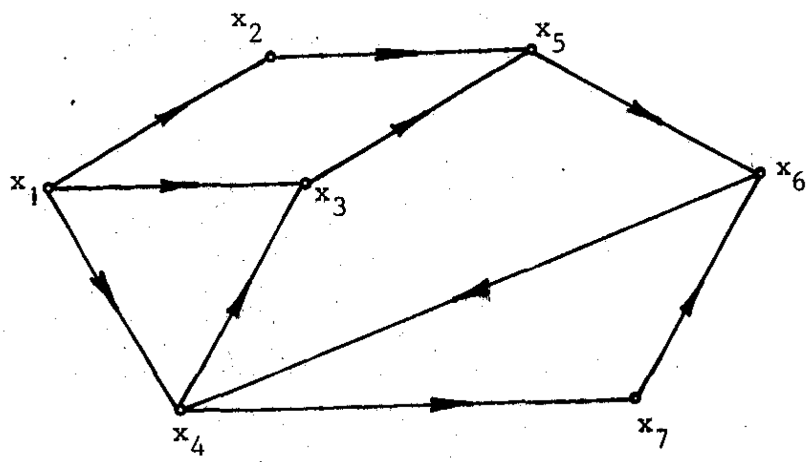
a)



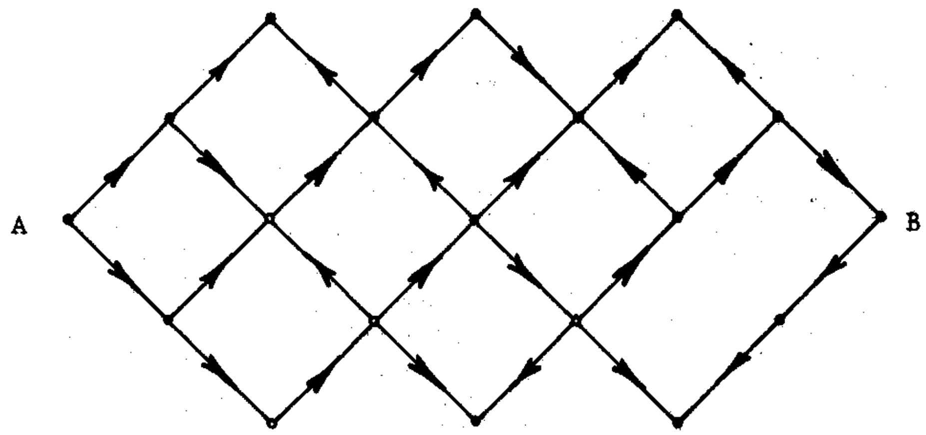
b)



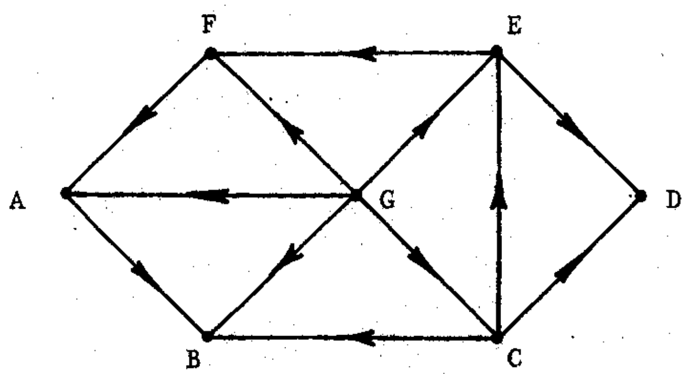
c)



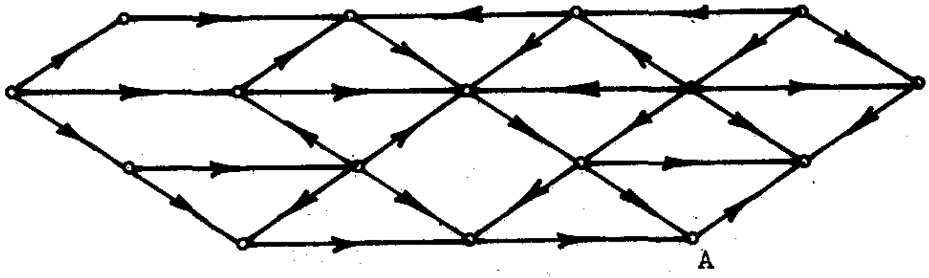
3. a) Bevat onderstaande gerichte graaf kringen?
   Motiveer Uw antwoord.
   b) Bepaal in deze graaf de lengte van de kortste weg tussen de knopen A en B.



4. a) Nummer in de volgende gerichte graaf de knopen zodanig dat voor iedere tak het nummer van de beginknoop kleiner is dan het nummer van de eindknoop.
   b) Keer nu de pijl tussen B en C om.
   Lukt het weer om zo een nummering als onder a) gevraagd te geven?
   Zo nee, waarom niet?



5. Beschouw de volgende graaf.

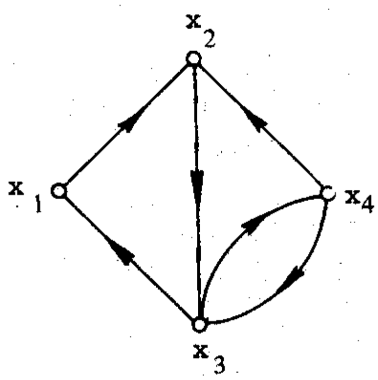


a) Bevat deze graaf kringen?

b) Bepaal de rang van de met A benoemde knoop.

§ 3 en 4.

1. Gegeven is de volgende gerichte graaf.

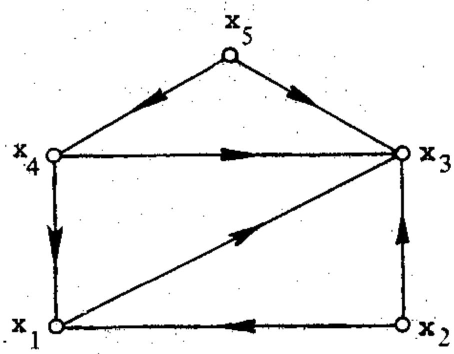


a) Bepaal de knopenmatrix van deze graaf.

b) Bewijs, dat in deze graaf elke knoop bereikbaar is vanuit elke andere knoop via een weg ter lengte hoogstens drie.

c) Wat is de bereikbaarheidsmatrix van de graaf?

2. Gegeven is de gerichte graaf.



a) Bepaal de knopenmatrix.

b) Bewijs dat in deze graaf geen kringen voorkomen.

c) Bepaal de bereikbaarheidsmatrix.

3. Een gerichte graaf met zes knopen $a_1, a_2, \ldots, a_6$ heeft als knopenmatrix

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

a) Toon aan dat de graaf geen kringen bevat.

b) Bereken tussen ieder tweetal knopen het aantal wegen ter lengte twee.

c) Toon aan dat in deze graaf juist één weg ter lengte vijf voorkomt en geen weg ter lengte zes.

d) Bepaal de bereikbaarheidsmatrix van deze graaf.

4. Een gerichte graaf met vier knopen a_1, a_2, a_3, a_4 heeft als knopenmatrix

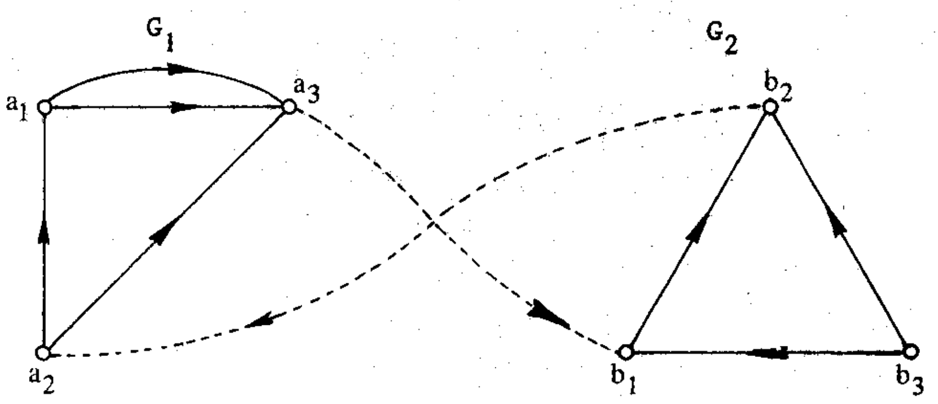
$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

a) Toon aan dat de graaf kringen bevat.

b) Bepaal de bereikbaarheidsmatrix van deze graaf.

5. Bewijs dat voor een graaf G zonder kringen geldt: $R(G) = \sigma(I - A)^{-1}$, waarin A de knopenmatrix van de graaf is.

6. Beschouw de grafen G_1 en G_2:



Geef de knopenmatrices A_1 en A_2 van deze grafen en bewijs dat G_1 en G_2 geen kringen bevatten. We maken nu een nieuwe graaf met zes knooppunten $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ door a_3 te verbinden met b_1 (zie tekening).
Geef de knopenmatrix van deze nieuwe graaf G en toon aan dat deze graaf geen kringen bevat.
Vervolgens verbinden we b_2 met a_2 (zie tekening). Welke consequenties heeft dit voor de knopenmatrix van deze graaf?
Toon aan dat de laatste graaf wel kringen heeft.
Schrijf voor alle grafen de bereikbaarheidsmatrix op.

7. De matrix A zij de knopenmatrix van een gerichte graaf met 8 knopen, genummerd x_1 tot en met x_8

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Toon aan dat deze graaf geen kring bevat door x_1.
Toon aan dat deze graaf geen kring bevat door x_8.
Onderzoek of deze graaf een kring bevat door x_2.
Onderzoek of deze graaf een kring bevat door x_7.
Schrijf de bereikbaarheidsmatrix van deze graaf op.

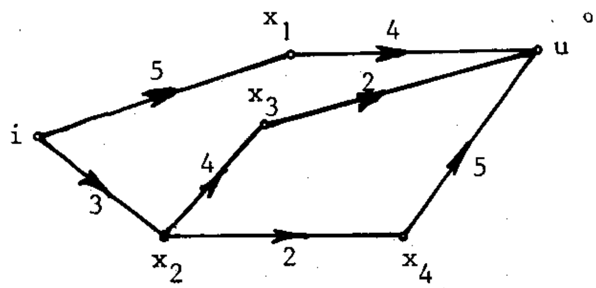
8. Teken een graaf, waarvan de knopenmatrix is:

a) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

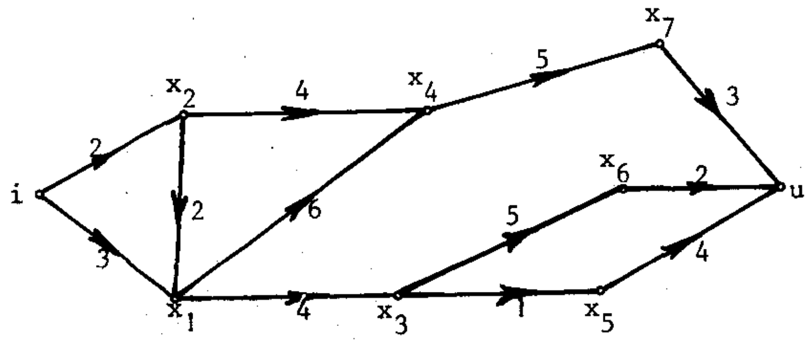
§ 6.

1. Gegeven is het volgende transportnetwerk



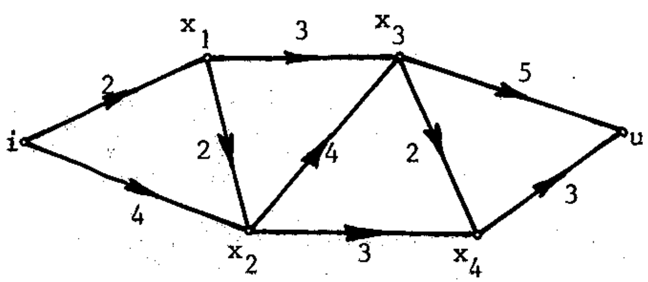
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

2. Gegeven is het volgende transportnetwerk



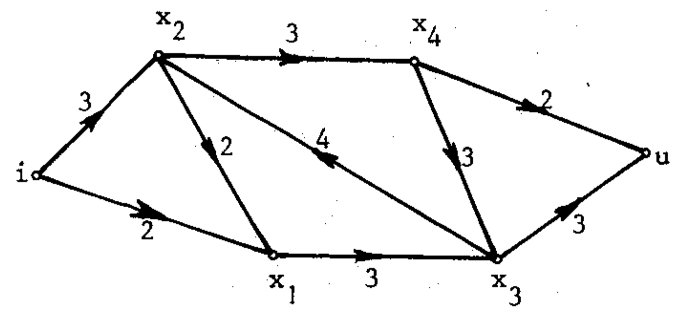
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

3. Gegeven is het volgende transportnetwerk



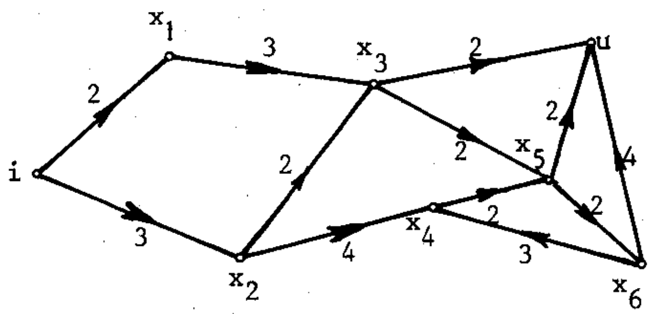
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximals stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

4. Gegeven is het volgende transportnetwerk



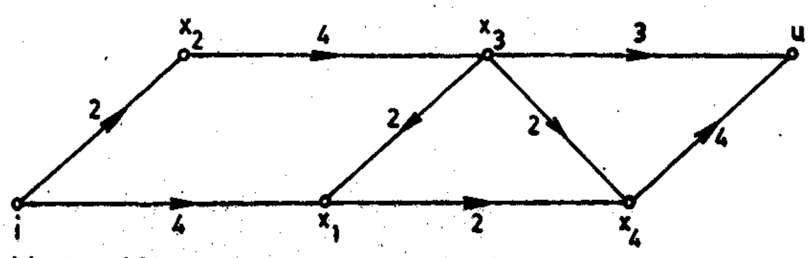
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

5. Gegeven is het volgende transportnetwerk



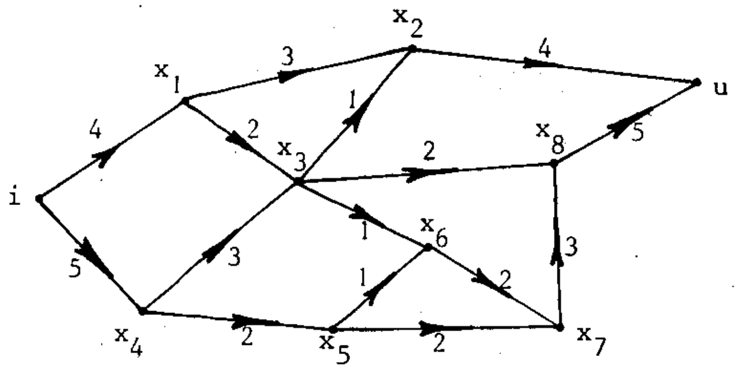
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

6. Gegeven is het volgende transportnetwerk



De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

7. Gegeven is het volgende transportnetwerk

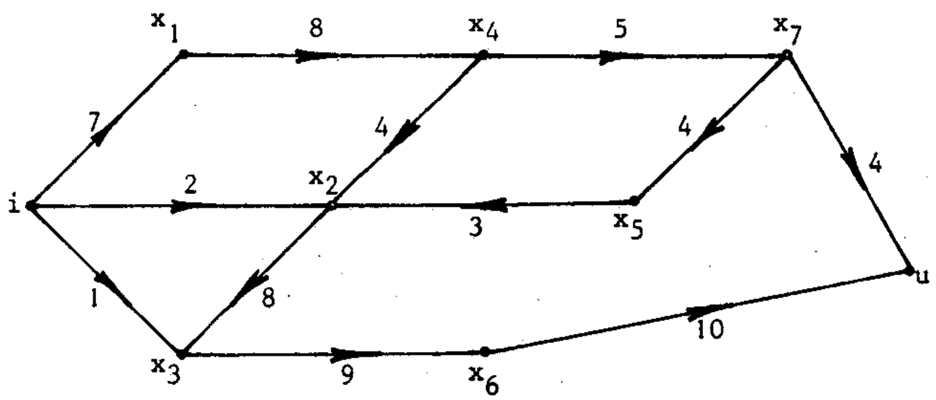


De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.

a) Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte.

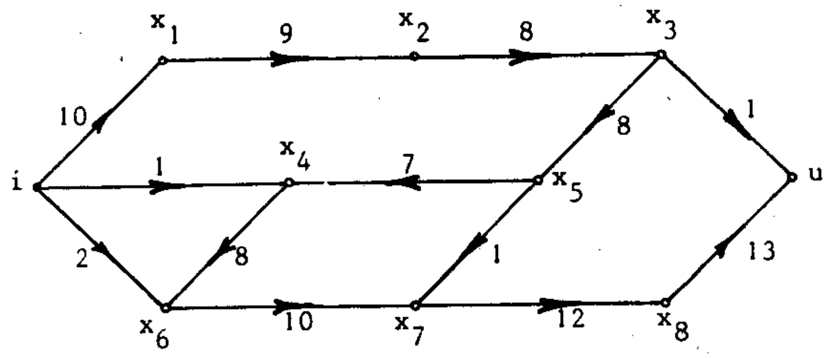
b) Bepaal een snede, waarvan beide componenten uit tenminste vier knooppunten bestaan, met minimale capaciteit.

8. Gegeven is het volgende transportnetwerk



De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

9. Gegeven is het volgende transportnetwerk

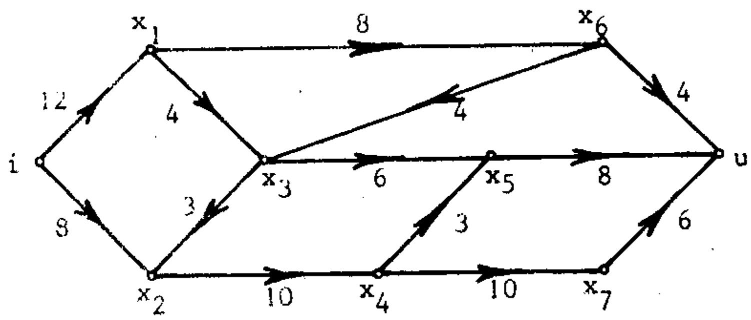


De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.

a) Bepaal een stroom met maximale stroomsterkte.

b) Bepaal een snede met minimale capaciteit.

10. Gegeven is het volgende transportnetwerk



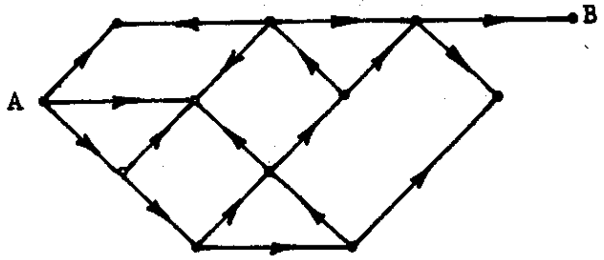
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.

a) Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte.

b) Bepaal een snede met minimale capaciteit.

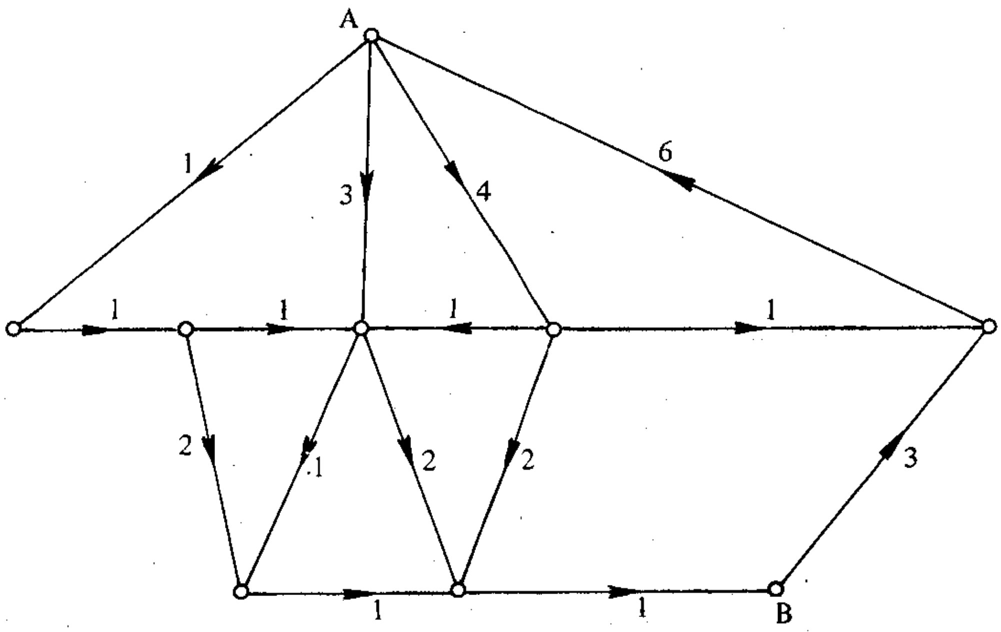
§ 7.

1. Gegeven is de volgende graaf.

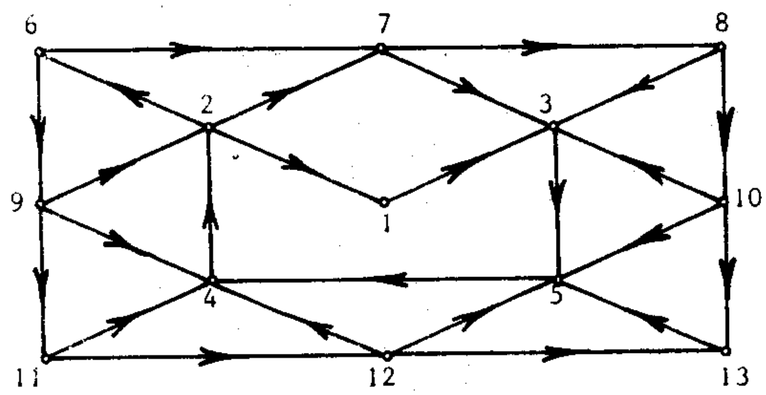


a) Nummer de knopen zodanig dat voor iedere tak geldt:
   nummer b(t) < nummer e(t).
b) Wat is de lengte van de kortste weg tussen A en B?
   Motiveer Uw antwoord.

2. Bepaal in de volgende graaf de goedkoopste weg van knoop A naar knoop B.
   De kostprijzen zijn naast de takken aangegeven.



3. Beschouw de volgende gerichte graaf:



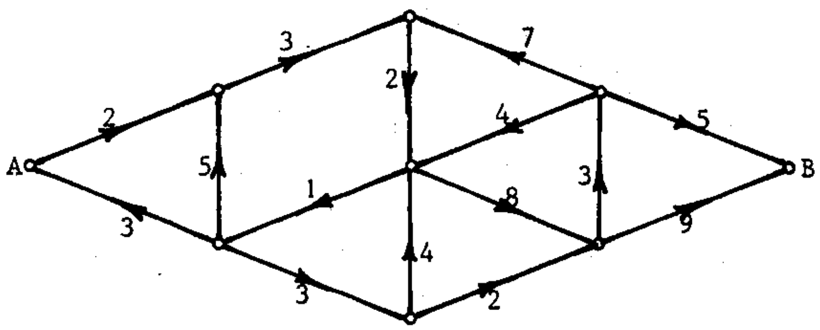
a) Bepaal in deze graaf de kortste weg van knoop 1 naar knoop 13.

b) Is het mogelijk in deze graaf de knopen zo te hernummeren, dat voor iedere tak het nummer van de beginknoop kleiner is dan het nummer van de eindknoop?

Zo ja, geef deze hernummering. Zo nee, geef aan waarom niet.

c) Bepaal in deze graaf de langste weg van knoop 1 naar knoop 13 die géén kringen bevat.

4. Beschouw de volgende gerichte graaf.



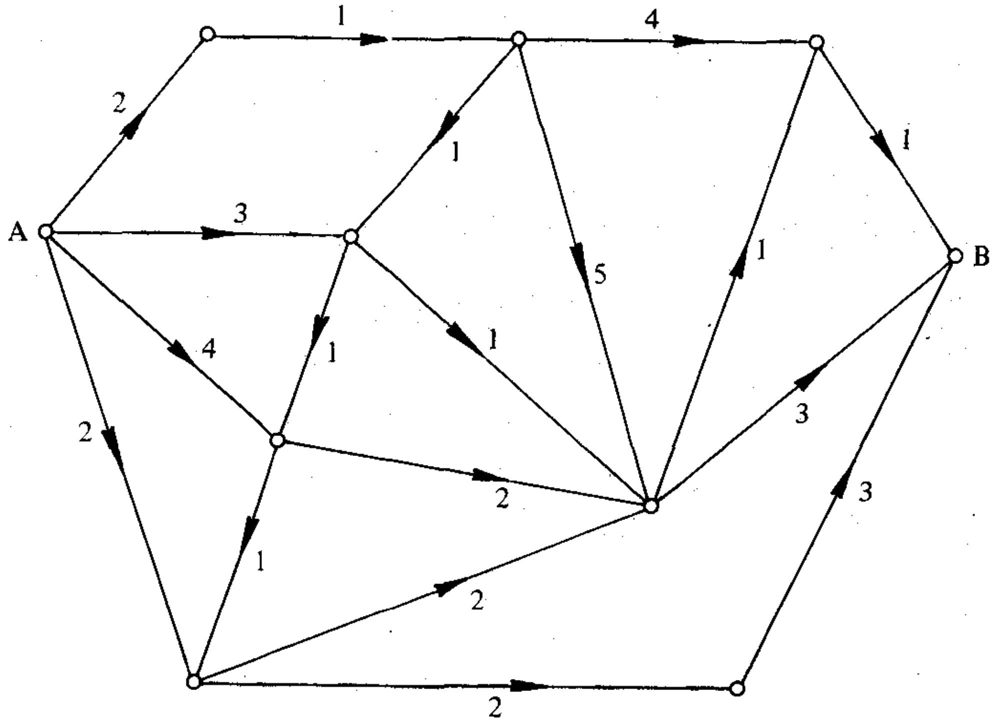
De cijfers bij de takken stellen de kostprijzen van de takken voor.

a) Ga na of deze graaf kringen bevat.

b) Bepaal de kortste weg van A naar B.

c) Bepaal de lengte en de kostprijs van de goedkoopste weg van A naar B.

5. Bepaal in de volgende graaf de goedkoopste weg van knoop A naar knoop B. De kostprijzen zijn naast de takken aangegeven.



Antwoorden bij hoofdstuk I

§ 1.

1. $x_{k+1} = x_k(1 + p) + R$, $x_0 = R$.

8. $I_K = I_{K-1}(1 - \lambda \frac{d}{n})$. Intensiteit van uittredende lichtstraal $I_0 e^{-\lambda d}$.

10. $Z_n = e^{in\alpha}$.

§ 3.

1. $x_0 = 0$: iteratie breekt af.
   $x_0 = \pm 1$: constante rij.
   overige x_0: alternerend, niet convergent.

2. $x_0 > 0$: x_k monotoon dalend, limiet 0.
   $x_0 = 0$: constante rij.
   $-1 < x_0 < 0$: x_k monotoon dalend, iteratie breekt af.

3. voor alle x_0: alternerend, convergent.

4. $x_0 < -1$: convergent (vanaf x_1 dalend), limiet 1.
   $x_0 = -1$, $x_0 = -\frac{1}{3}$: iteratie breekt af.
   $-1 < x_0 < 0$, $x_0 \neq -\frac{1}{3}$: komt in de rij de waarde -1 voor dan breekt de iteratie af, anders convergentie (limiet 1).
   $x_0 = 0$, $x_0 = 1$: constante rij.
   $0 < x_0 < 1$: stijgend, convergent.
   $x_0 > 1$: dalend, convergent.

5. $x_0 > 2$: stijgend, niet convergent.
   $x_0 = 2$: constante rij.
   $x_0 < 2$: dalend, niet convergent.

6. $x_0 = 0$: iteratie breekt af.
   $x_0 = \pm\sqrt{2}$: constante rij.
   $x_0 > \sqrt{2}$: dalend, convergent.
   $x_0 < -\sqrt{2}$: stijgend, convergent.
   $0 < x_0 < \sqrt{2}$: convergent (vanaf x_1 dalend).
   $-\sqrt{2} < x_0 < 0$: convergent (vanaf x_1 stijgend.

7. a) $x_k = (ax_0)^{2^k}\ \frac{1}{a}$.

   b) Is $ax_0 = \pm 1$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \frac{1}{a}$

   Is $|ax_0| < 1$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$

   Is $|ax_0| > 1$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \begin{cases} \infty \text{ als } a > 0, \\ -\infty \text{ als } a < 0. \end{cases}$

8. $a > \frac{1}{4}$; stijgend, niet convergent.

   $a = \frac{1}{4}$; voor $0 < b < 2$: stijgend met limiet 2.

   voor $b = 2$: constante rij.

   voor $b > 2$: stijgend, niet convergent.

   $0 < a < \frac{1}{4}$; voor $0 < b < \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a}$; stijgend met limiet $\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a}$.

   voor $b = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2a}$: constante rij.

   voor $\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a} < b < \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a}$: dalend met limiet $\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2a}$.

   voor $b > \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2a}$: stijgend, niet convergent.

9. a) 2.

   b) $1 + \sqrt{2}$.

10. in geval van convergentie: $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = 1$.

Hoofdstuk II

§ 2.

1. $x_k = 2(\frac{1}{2})^k + 1.$

2. $x_k = 2^k - k - 1.$

3. $x_k = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k.$

4. $x_k = 6.2^k - 2k^2 - 4k - 6.$

5. $x_k = \frac{8}{5}\, 2^k - \frac{3}{5}(\frac{1}{3})^k.$

6. $x_k = 3^k + \frac{1}{6}\, k^2 3^k - \frac{1}{6}\, k3^k.$

7. $x_k = 0 + (\frac{1}{2})^k \sum_{n=1}^{k} (n-1)!2^n.$

8. $x_k = \frac{13}{6}\, 5^k - \frac{1}{6}(-1)^k.$

9. $x_k = (4 + \frac{1}{2}k)2^k.$

10. $x_k = \frac{31}{32}\, 5^k - \frac{1}{4}\, k^2 - \frac{5}{8}\, k - \frac{31}{32}.$

11. $x_k = (k^2 - k + 1)(\frac{1}{2})^k$, dus $\lim_{k\to\infty} x_k = 0.$

12. $a = 0$: $x_k = k.$

$a = 1$: $x_k = \frac{1}{2}(k^2 + k).$

$a \neq 0, \neq 1$: $x_k = \frac{a^{k+1}}{(a-1)^2} + \frac{1}{1-a}\, k - \frac{a}{(a-1)^2}.$

13. $x_k = \frac{1}{2}(k + 1)$, $k \geq 1.$

$x_0 = 1.$

14. $x_k = (k+1)(-2 + 3.2^k).$

15. $x_k = A(1 + \sqrt{2})^k + B(1 - \sqrt{2})^k.$

16. $x_k = A2^k + B3^k$.

17. $x_k = A2^k + B5^k + k + \frac{5}{4}$.

18. $x_k = A2^k + Bk2^k + \frac{1}{4}k^2 2^k$.

19. $x_k = A3^k + Bk3^k$.

20. $x_k = A + Bk + \frac{1}{2}k^2$.

21. a) $x_k = A2^k + B(-2)^k + 3^k$.
b) $x_k = A2^k + B(-2)^k + \frac{1}{8}\, k2^k$.

22. $x_k = \frac{1}{2} + A \cos k\,\frac{\pi}{2} + B \sin k\,\frac{\pi}{2}$ of $x_k = \frac{1}{2} + C \cos(k\,\frac{\pi}{2} + D)$.

23. $x_k = \frac{1}{5}\, k - \frac{4}{25} + 2^{\frac{1}{2}k}(A \cos k\,\frac{3\pi}{4} + B \sin k\,\frac{3\pi}{4})$ of

$x_k = \frac{1}{5}\, k - \frac{4}{25} + 2^{\frac{1}{2}k}(C \cos(k\,\frac{3\pi}{4} + D))$.

24. $D_n = \alpha D_{n-1} - D_{n-2}$, $D_1 = \alpha$, $D_2 = \alpha^2 - 1$.

$\alpha = 2$: $D_n = 1 + n$.

$\alpha = -2$: $D_n = (-1)^n(1 + n)$.

$\alpha \neq |2|$: $D_n = \cos n\varphi + \dfrac{\alpha}{\sqrt{4 - \alpha^2}} \sin n\varphi$, $n \geq 1$.

$\sin \varphi = \dfrac{\sqrt{4 - \alpha^2}}{2}$, $\cos \varphi = \frac{1}{2}\alpha$.

25. b) $x_k = A\lambda^k + Bk\lambda^k$.

26. $a > 1$ of $a < 0$: $x_k = A(-a + \sqrt{a^2 - a})^k + B(-a - \sqrt{a^2 - a})^k + \dfrac{1}{1 - a}(-1)^k$.

$a = 1$: $x_k = A(-1)^k + Bk(-1)^k + \frac{1}{2}k^2(-1)^k$.

$0 < a < 1$: $x_k = A(\sqrt{a})^k \cos k\varphi + B(\sqrt{a})^k \sin k\varphi + \dfrac{1}{1 - a}(-1)^k$.

$\cos \varphi = -\sqrt{a}$, $\sin \varphi = \sqrt{1 - a}$.

27. $x_k = (\sqrt{1 + \alpha^2})^k(A \cos k\varphi + B \sin k\varphi)$

$\cos \varphi = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$, $\sin \varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$; begrensd als $\alpha = 0$.

28. $\alpha \neq 1$: $x_k = A(-1)^k + B(-\alpha)^k + \frac{1}{1-\alpha}\,k(-1)^k$.
    $\alpha = 1$: $x_k = A(-1)^k + Bk(-1)^k + \frac{1}{2}k^2(-1)^k$.

29. $x_k = 2^k$.

30. $x_k = A2^k + Bk2^k + C3^k$.

31. $x_k = \frac{1}{2}(1 - \cos k\,\frac{\pi}{2} - \sin k\,\frac{\pi}{2})$ of $x_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\cos(k\,\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4})$.

33. $N_t = 500 + 2000(1{,}02)^t$.
    Verdubbeling na ca. 41 jaar.

Hoofdstuk III

1. a) $\underline{x}_k = \alpha 5^k \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta(-1)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

   b) $\underline{x}_k = \alpha 5^k \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta(-1)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2b_1 - b_2}{8} \\ -b_1 \end{bmatrix}$, waarin $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

2. $\underline{x}_k = (\sqrt{13})^k \alpha\{\cos k\varphi \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \sin k\varphi \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\} + (\sqrt{13})^k \beta\{\cos k\varphi \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \sin k\varphi \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\} +$

   $+ \frac{1}{9} 2^k \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$; $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

3. $\underline{x}_k = \alpha 4^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. $\underline{x}_k = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} 2^k + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} 3^k + k2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

5. $\underline{x}_k = \alpha 0^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, d.w.z. $\underline{x}_0 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\underline{x}_k = \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ voor $k \geq 1$.

6. $\underline{x}_k = \alpha 3^k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \alpha 3^k (k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

7. $\underline{x}_k = \cos k \frac{\pi}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin k \frac{\pi}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

8. $\underline{x}_k = \alpha(-1)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3}(k+2) \\ \cos \frac{\pi}{3} k \\ \cos \frac{\pi}{3}(k-2) \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{3}(k+2) \\ \sin \frac{\pi}{3} k \\ \sin \frac{\pi}{3}(k-2) \end{bmatrix}$.

9. $\underline{x}_k = \alpha(-\frac{2}{5})^k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta(-\frac{1}{4})^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lim_{k\to\infty} x_k = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

10. $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\underline{x}_1 = \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$, $\underline{x}_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$, $\underline{x}_k = \underline{0}$ voor $k \geq 3$.

11. A is een spiegeling. Voor k even: $\underline{x}_k = \underline{x}_0$; k oneven: $\underline{x}_k = A\underline{x}_0 = \underline{x}_1$ of

$$\underline{x}_k = \alpha\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + \gamma(-1)^k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

12. A is een projectie.

$$\underline{x}_k = \alpha 0^k\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

a) $\underline{x}_k = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, b) $\underline{x}_k = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, $k \geq 1$; c) $\underline{x}_k = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

13. A is een draaiing.

$$\underline{x}_k = \alpha\begin{bmatrix}-\sin k\frac{\pi}{3}\\ \cos k\frac{\pi}{3}\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}\cos k\frac{\pi}{3}\\ \sin k\frac{\pi}{3}\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1-\sqrt{3}\\1+\sqrt{3}\end{bmatrix}.$$

14. $\underline{x}_k = \alpha 0^k\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} + \beta(-1)^k\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + \gamma 3^k\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$.

15. $\underline{x}_k = \alpha 0^k\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \beta(\sqrt{2})^k\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} + \gamma(-\sqrt{2})^k\begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$.

16. Deze opgave leidt tot het stelsel

$$\underline{x}_{t+1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\2 & 3 & 3\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}\underline{x}_t .$$

De eigenwaarden van deze matrix zijn 1, λ_0 en $\bar{\lambda}_0$ waarbij $|\lambda_0| < 1$.

Stabiele eindtoestand: $\begin{bmatrix}30000\\40000\\20000\end{bmatrix}$.

17. $\underset{\sim}{x}_k = \alpha\begin{bmatrix}14\\13\\8\end{bmatrix} + \beta(0{,}3)^k\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + \gamma(0{,}5)^k\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}.$

Stabiele eindtoestand: $\begin{bmatrix}14\\13\\8\end{bmatrix}10^6.$

18. b) $\underset{\sim}{x}_k = a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}2k\\1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}k^2\alpha\\k\alpha\\1\end{bmatrix}.$

19. $A^k = 2^{k-1}A.$

$$\underset{\sim}{x}_0 = c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

$$\underset{\sim}{x}_k = c_1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}2^{k-1} + c_2\underset{\sim}{0} + c_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}2^{k-1},\ k = 1,2,3,\dots\ .$$

20. $A \geq 0$ en $A\underset{\sim}{c} < \underset{\sim}{c}$ voor $\underset{\sim}{c} = [1,2,3]^T$, dus $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$ (st. 3.6.3). Dus de $\lim\limits_{k\to\infty} \underset{\sim}{x}_k = \underset{\sim}{\ell}$ bestaat.
Berekenen uit: $\underset{\sim}{\ell} = A\underset{\sim}{\ell} + [-1,4,0]^T$; $\lim \underset{\sim}{x}_k = \frac{4}{19}[7,40,30]^T$.
Men kan ook aan de kar. verg. zien dat $r(A) < 1$.

21. Eigenwaarden berekenen levert op: $r(A) \leq 1$.
De enige eigenwaarde met $|\lambda| = 1$ is: $\lambda = 1$.
Deze is enkelvoudig, dus niet defectief (zie st. 3.5.5).
Berekening van $\lim\limits_{k\to\infty} \underset{\sim}{x}_k$ met methoden op pagina 46 van de syllabus levert op:

$$\lim_{k\to\infty} \underset{\sim}{x}_k = \frac{1}{5}[2,2,3]^T\ .$$

22. $A \geq 0$ en rijsommen < 1, dus $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$ (st. 3.6.6), dus $\lim\limits_{k\to\infty} \underset{\sim}{x}_k$ bestaat.
Berekenen uit $\underset{\sim}{\ell} = A\underset{\sim}{\ell} + \frac{1}{2}[1,1,1]^T$; $\lim\limits_{k\to\infty} \underset{\sim}{x}_k = [2,2,2]^T$.

23. $A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ met $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$.

Eigenwaarden van A: α, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ met $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ eigenwaarden van $\tilde{A}$.
$\tilde{A} \geq 0$ en kolomsommen van $\tilde{A} < 1$ dus $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{A}^k = 0$ en dus $r(\tilde{A}) < 1$.

i) $|\alpha| > 1$: dan $r(A) = |\alpha| > 1$ en A^k is niet begrensd, dus er zijn niet-begrensde oplossingen.

ii) $|\alpha| < 1$: dan $r(A) < 1$ en alle oplossingen zijn begrensd, zelfs $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{0}$.

iii) $|\alpha| = 1$: α is dan enkelvoudige eigenwaarde en dus zijn alle oplossingen begrensd.

$\alpha = -1$: niet elke oplossing heeft een limiet.

$\alpha = 1$: elke oplossing heeft een limiet die berekend kan worden met de methode op pagina 46 van de syllabus: $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k = 10[6,-5,24,1]^T$.

24. $A \geq 0$ en rijsommen < 1.

25. $A \geq 0$; $\underline{c} > \underline{0}$; $A\underline{c} < \underline{c}$ dus $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$. $A\underline{c} = \frac{1}{8}[11,7,5]^T$.

26. Eigenwaarden: $1,i,-i$. Dus $r(A) = 1$ en eigenwaarden λ met $|\lambda| = 1$ zijn enkelvoudig. Dus A^k is begrensd.
$\lambda = 1$ is niet de enige eigenwaarde met $|\lambda| = 1$, dus $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ bestaat niet.

27. $A > 0$. Kolomsommen zijn 1 (ruilmatrix), dus A^k begrensd (st. 3.6.6(ii)), dus $r(A) \leq 1$. De vector $[1,1,1]^T$ is eigenvector van A^T bij de eigenwaarde 1 (van A^T). Dus ook A heeft een eigenwaarde 1, dus $r(A) = 1$. Volgens Perron-Frobenius is nu 1 een enkelvoudige, dus niet-defectieve eigenwaarde en voor alle overige eigenwaarden λ geldt $|\lambda| < 1$.
Volgens st. 3.5.5 (2) bestaat nu $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$, dus bestaat ook $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$ voor alle oplossingen $(\underline{x}_k)$.
Met de methode van pag. 46 vindt men $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k = 2[2,1,1]^T$.

28. $A \geq 0$ en kolomsommen $= 1$. Dus $\lambda = 1$ is een eigenwaarde. $\lambda = 1$ is zelfs enkelvoudige eigenwaarde (volgt uit berekening van de eigenwaarden). Verder zoals opgave 27. (N.B. Perron-Frobenius geldt hier niet). Zie ook syllabus pag. 58 (de alinea voor (3.6.24)). $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k = [5,2,6]^T$.

29. Analoog aan opgave 28: $\lim \underline{x}_k = \frac{10}{3}[1,1,1]^T$.

30. Eigenwaarden 1: $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$; verder als in opgave 26.

31. x_k := aantal aanhangers van partij A aan het einde van jaar k.
y_k idem voor B.

$$\underline{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} \text{ voldoet aan } \underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}85 \end{bmatrix} \underline{x}_k + \begin{bmatrix} 2000 \\ 2000 \end{bmatrix}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Kolomsommen} < 1 \\ \text{matrix} > 0\end{array}\right\} A^k \to 0 \text{ enz., analoog aan opgave 20.}$$

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \begin{bmatrix} 20.000 \\ 40.000 \end{bmatrix}.$$

Hoofdstuk IV

1. $x_k = 1 - (-1)^k.$

2. $x_k = k + 1.$

3. $x_k = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(-1)^k - \frac{2}{3}(-2)^k.$

4. $x_k = \frac{3}{4} + \frac{9}{4}(-1)^k - \frac{1}{2}k(-1)^k.$

5. $x_k = k.$

6. $x_k = \frac{1}{2}(1 - \cos k\frac{\pi}{2} - \sin k\frac{\pi}{2}).$

7. $x_k = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}(\sqrt{2})^k(-1)^k(7\cos\frac{k\pi}{4} - 9\sin\frac{k\pi}{4}).$

8. $x_k = -\frac{2}{3} + \frac{3}{4}(2)^k - \frac{1}{12}(-2)^k.$

$y_k = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4}(2)^k + \frac{1}{12}(-2)^k.$

9. $x_k = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(-2)^k.$

$y_k = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}(-2)^k.$

10. $x_{n,k} = \begin{bmatrix} n - k + 1 \\ k \end{bmatrix}.$

11. $x_k = \binom{100}{k}$ (N.B. $= 0$ voor $k > 100$).

12. $x_k = 1 - \frac{1}{(k-1)!}$ voor $k \geq 1$; $x_0 = 1.$

13. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} 2^{n-k}, \; n \geq 1.$

14. $x_n = (-1)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2(n-k)-1}, \; n \geq 1.$

Hoofdstuk V

§ 2.

2. Ieder van de grafen bevat kringen.

3. a) Nee. Er is een nummering $r: K \to N_0$ zodat voor elke tak geldt $r(b(t)) < r(e(t))$.
   b) 8.

4. b) Nee. Nu is ABCEFA een kring.

5. a) Nee.
   b) 8.

§ 3 en 4.

1. a) $A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; c) $R(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. a) $A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; c) $R(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. b) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; d) $R(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. b) $R(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. $A_1(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

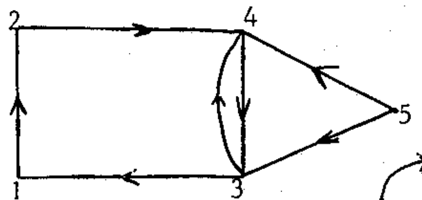
$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \; A(G') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R(G_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; R(G_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

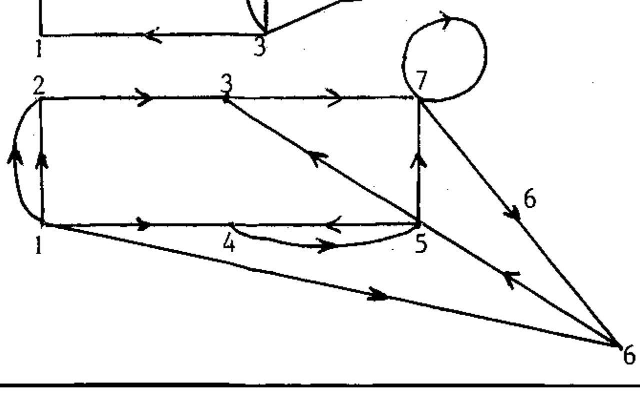
$$R(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \; R(G') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. $R(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. a)



b)



§ 6.

Opmerking: In een gegeven transportnetwerk is de maximale stroomsterkte ondubbelzinnig bepaald. Vaak is meer dan een stroom met maximale stroomsterkte mogelijk. Ook kan meer dan één snede bestaan met minimale capaciteit. In de hier onder genoemde antwoorden wordt slechts de waarde van de maximale stroomsterkte genoemd en één van de mogelijke sneden met minimale capaciteit.

1. 7
   $\{ix_2, x_1u\}$.

2. 5
   $\{ix_1, ix_2\}$.

3. 6
   $\{ix_1, ix_2\}$.

4. 5
   $\{ix_1, ix_2\}$.

5. 5
   $\{ix_1, ix_2\}$.

6. 4
   $\{ix_2, x_1x_4\}$.

7. a) 9
   $\{ix_1, ix_4\}$.
   b) $\{x_1x_2, x_3x_2, x_3x_8, x_3x_6, x_4x_5\}$.

8. 10
   $\{ix_1, ix_2, ix_3\}$.

9. a) 11
   b) $\{ix_4, ix_6, x_2x_3\}$.

10. a) 18
    b) $\{x_5u, x_6u, x_7u\}$.

§ 7.

1. b) 6.

2. ACDHIB
   ACDEHIB
   ACDEIB
   AEIB
   AEHIB.

3. a) $1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 2 \to 7 \to 8 \to 10 \to 13$.
   b) nee (kringen).
   c) $1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 2 \to 6 \to 7 \to 8 \to 10 \to 13$
   $1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 2 \to 6 \to 9 \to 11 \to 12 \to 13$.

4. a) ja.
   b) ACDGHB.
   c) lengte 8; kostprijs 21.

5. AFHEB; AIHEB.

Examen/tentamen Wiskunde 41 op zaterdag 12 juni 1976.

1. Bepaal de algemene oplossing van de iteratie

$$x_{k+1} = \tfrac{1}{2}x_k + (-1)^k, \quad k = 0,1,2,\ldots \; .$$

2. Gegeven is de iteratie

$$x_{k+1} = \frac{4x_k + 12}{3x_k + 13}, \qquad k = 0,1,2,\ldots \; ,$$

$$x_0 = 0 \; .$$

a) Laat zien dat de rij (x_k) monotoon stijgt.

b) Onderzoek of $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$ bestaat.

Zo ja, bereken deze limiet.

3. Los op de iteratie

$$x_{k+2} - 5x_{k+1} + 6x_k = 6, \qquad k = 0,1,2,\ldots \; ,$$

$$x_0 = 6, \; x_1 = 8 \; .$$

4. Gegeven is de iteratie

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k, \qquad k = 0,1,2,\ldots, \qquad \underline{x}_k \in \mathbb{R}^3 \; ,$$

$$\underline{x}_0 = [7,8,7]^T \; ,$$

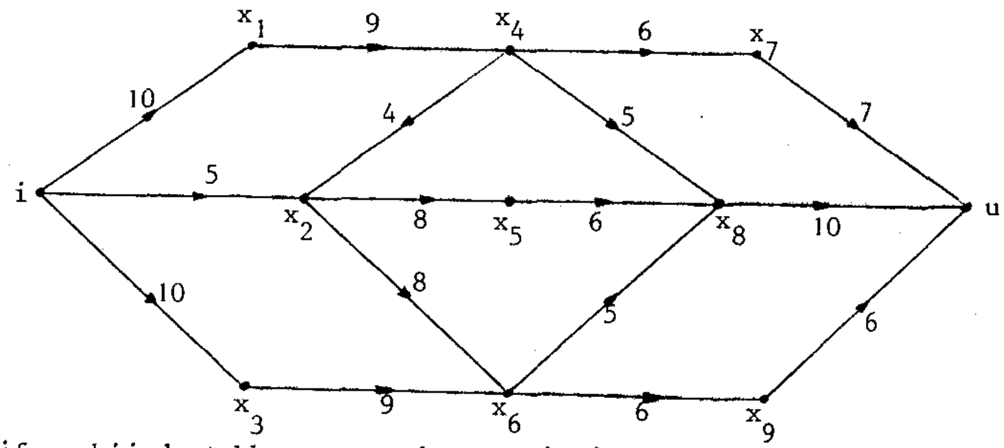
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

a) Bewijs dat $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$ bestaat.

b) Bereken $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$.

c) Bestaat er een vector $\underline{c} > \underline{0}$ waarvoor geldt: $A\underline{c} < \underline{c}$? Motiveer Uw antwoord.

5. Gegeven is het volgende transportnetwerk.



De cijfers bij de takken geven de capaciteiten aan.

Bepaal een maximale toegelaten stroom en een snede met minimale capaciteit.

Uitwerkingen behorende bij het Examen/tentamen Wiskunde 41 op zaterdag 12 juni 1976.

1. Homogene differentievergelijking: $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k$. Stel $x_k = \lambda^k$ dan $\lambda^{k+1} = \frac{1}{2}\lambda^k$ waaruit $\lambda = \frac{1}{2}$. Algemene oplossing van de homogene vergelijking $(x_k)_{hom} = c(\frac{1}{2})^k$. Probeer als particuliere oplossing $(x_k)_p = a(-1)^k$: $a(-1)^{k+1} = \frac{1}{2}a(-1)^k + (-1)^k$ of $-a = \frac{1}{2}a + 1$ waaruit $a = -\frac{2}{3}$. Totale oplossing:

$$x_k = c2^{-k} - \frac{2}{3}(-1)^k.$$

Andere manier voor de particuliere oplossing: Schrijf $(x_k) = (\frac{1}{2})^k y_k$ (vgl. variatie van constanten). Gesubstitueerd:

$$(\tfrac{1}{2})^{k+1} y_{k+1} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2})^k y_k + (-1)^k$$

$$y_{k+1} - y_k = \frac{(-1)^k}{(\frac{1}{2})^{k+1}} = 2(-2)^k$$

$$y_n - y_0 = (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \ldots + (y_1 - y_0) = \sum_{k=0}^{n-1} 2(-2)^k =$$

$$= 2\,\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = \frac{2}{3}\{1-(-2)^n\}$$

dus $y_n = y_0 + \frac{2}{3}\{1-(-2)^n\}$.

$$x_k = (\tfrac{1}{2})^k\{y_0 + \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}(-2)^k\} = (y_0 + \tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{2})^k - \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2})^k(-2)^k = c(\tfrac{1}{2})^k - \tfrac{2}{3}(-1)^k.$$

2. a) We bekijken eerst $x = \frac{4x+12}{3x+13}$.

$3x^2 + 13x = 4x + 12$

$3x^2 + 9x - 12 = 0$

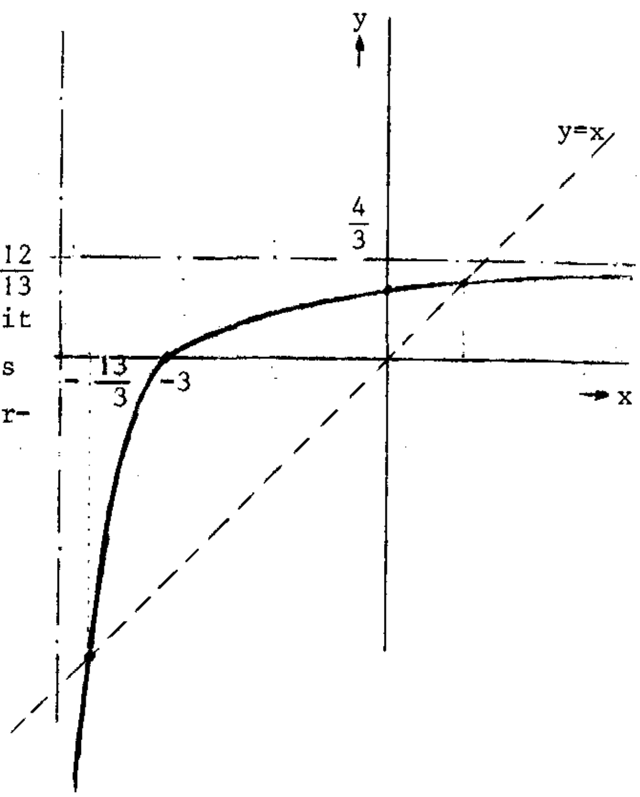
$x^2 + 3x - 4 = 0$

$(x-1)(x+4) = 0.$

De grafieken van $y = x$ en $y = \frac{4x+12}{3x+13}$ snijden elkaar bij $x = 1$, $x = -4$. Uit de figuur zien we dat als $x_0 = 0$ als startwaarde genomen wordt, er convergentie zal optreden naar $x = 1$. We trachten aan te tonen

$0 \le x_k < \xi$ (1), $(\xi = 1)$.

$x_k < x_{k+1}$ (2).



Met $x_0 = 0$ is aan (1) voldaan. Stel dat voor $k = n$ voldaan is aan (1), dan is

$$0 \le x_{n+1} = \frac{4x_n + 12}{3x_n + 13} < \frac{4\xi + 12}{3\xi + 13} = \frac{4 + 12}{3 + 13} = \frac{16}{16} = 1 = \xi$$

omdat $F(x) = \frac{4x + 12}{3x + 13} \ge 0$ voor $x \ge 0$ en F stijgend voor $x \ge 0$ (immers

$$F'(x) = \frac{4(3x + 13) - (4x + 12)3}{(3x + 13)^2} = \frac{42 - 36}{(3x + 13)^2} = \frac{6}{(3x + 13)^2} > 0) .$$

Op grond van de volledige inductie is aan (1) voldaan voor alle $k \ge 0$.
$x_0 = 0$ en $x_1 = \frac{12}{13}$ dus voor $k = 0$ is aan (2) voldaan. Stel dat voor $k = n$ aan (2) is voldaan, dan is

$$x_{n+2} = F(x_{n+1}) > F(x_n) = x_{n+1} .$$

Op grond van de volledige inductie is aan (2) voldaan voor alle $k \ge 0$.
Conclusie: Met $x_0 = 0$ stijgt de rij (x_k) monotoon.

b) Om te bewijzen dat $\lim_{k\to\infty} x_k$ bestaat, merken we op dat een monotoon stijgende, naar boven begrensde rij (x_k) een limiet $\bar{\xi}$ heeft. Omdat aan (1) en (2) voldaan is, heeft (x_k) een limiet.

$$\bar{\xi} = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} F(x_k) = F(\bar{\xi})$$

op grond van de continuïteit van F. Dan $\bar{\xi} = \xi = 1$.

3. $x_{k+2} - 5x_{k+1} + 6x_k = 6;\ x_0 = 6;\ x_1 = 8.$
Allereerst de homogene vergelijking $x_{k+2} - 5x_{k+1} + 6x_k = 0$. Substitueer $x_k = \lambda^k$: $\lambda^{k+2} - 5\lambda^{k+1} + 6\lambda^k = 0$ waaruit $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ of $(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$.
Oplossingen van de karakteristieke vergelijking zijn $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.
Algemene oplossing van de homogene vergelijking $x_k = A2^k + B3^k$. Probeer als particuliere oplossing $x_k = a$: $a - 5a + 6a = 6$ waaruit $a = 3$. Totale algemene oplossing $x_k = A2^k + B3^k + 3$. De gevraagde oplossing moet voldoen aan

$$x_0 = 6 = A2^0 + B3^0 + 3 \text{ of } 6 = A + B + 3 \text{ of } A + B = 3$$

en

$$x_1 = 8 = A2^1 + B3^1 + 3 \text{ of } 8 = 2A + 3B + 3 \text{ of } 2A + 3B = 5$$

waaruit $A = 4$, $B = -1$.
Gevraagde oplossing: $x_k = 4.2^k - 3^k + 3$.

4. a) en b). 1^e manier:

$$\det(A-\lambda I) = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 6-12\lambda & 3 & 4 \\ 3 & 6-12\lambda & 4 \\ 3 & 3 & 4-12\lambda \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{12^3}\{(-12\lambda)^3+(12\lambda)^2(6+6+4)-12\lambda\{12+12+27\}+\{144+36+36-72-72-36\}\} = 0$$

of

$$-12^3\lambda^3 + 16.12^2\lambda^2 - 12\lambda.51 + 36 = 0$$

waaruit

$$-48\lambda^3 + 64\lambda^2 - 17\lambda + 1 = 0$$

$$+48\lambda^3 - 64\lambda^2 + 17\lambda - 1 = (\lambda-1)(48\lambda^2 - 16\lambda + 1)$$

dus $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}$, $\lambda_3 = \frac{1}{12}$.

De eigenwaarden zijn dus enkelvoudig.

Conclusie: $r(A) = \max\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}\} = 1$ dus $\lim A^k$ bestaat, omdat $\lambda = 1$ een niet-defectieve eigenwaarde is.

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{pmatrix} 6-12 & 3 & 4 \\ 3 & 6-12 & 4 \\ 3 & 3 & 4-12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 3 & -6 & 4 \\ 3 & 3 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 9 & -9 & 0 \\ -9 & 9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -3a_1 \quad\quad + 4a_3 &= 0 \\ a_1 - a_2 \quad\quad &= 0 \text{ dus } \underline{a} = \mu[4,4,3]^T. \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = \tfrac{1}{4} \quad \begin{pmatrix} 6-3 & 3 & 4 \\ 3 & 6-3 & 4 \\ 3 & 3 & 4-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dus } \underline{b} = \tau[1,-1,0]^T$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{12} \quad \begin{pmatrix} 6-1 & 3 & 4 \\ 3 & 6-1 & 4 \\ 3 & 3 & 4-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ dus } \underline{c} = \sigma[1,1,-2]^T.$$

Algemene oplossing

$$\underline{x}_k = A\,1^k \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + B(\tfrac{1}{4})^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + C(\tfrac{1}{12})^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix}7\\8\\7\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}4\\4\\3\end{bmatrix} + B\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + C\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} \text{ of } \begin{matrix}4A + B + C = 7\\ 4A - B + C = 8\\ 3A \quad - 2C = 7\end{matrix} \text{ of } \left(\begin{array}{ccc|c}4 & 1 & 1 & 7\\4 & -1 & 1 & 8\\3 & 0 & -2 & 7\end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 1 & 1 & 7\\8 & 0 & 2 & 15\\3 & 0 & -2 & 7\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}11 & 2 & 0 & 21\\11 & 0 & 0 & 22\\3 & 0 & -2 & 7\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & 0 & -1\\1 & 0 & 0 & 2\\0 & 0 & -2 & 1\end{array}\right) A = 2 \quad \begin{matrix}B = -\frac{1}{2}\\ \\ C = -\frac{1}{2}\end{matrix}$$

Oplossing:

$$\underline{x}_k = 2\begin{bmatrix}4\\4\\3\end{bmatrix} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4})^k\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{12})^k\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}.$$

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = 2\begin{bmatrix}4\\4\\3\end{bmatrix}.$$

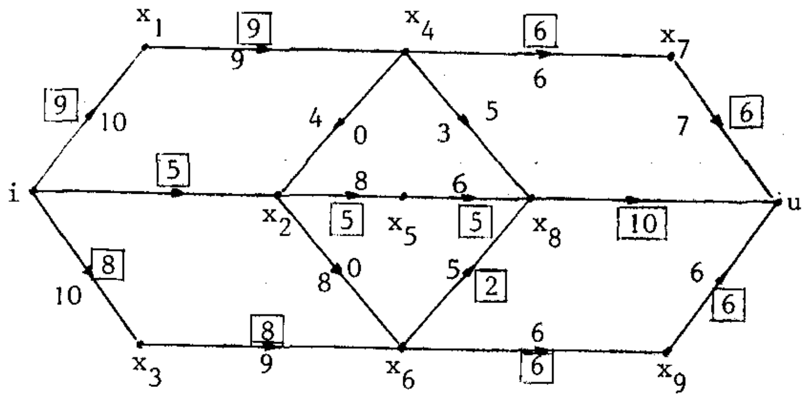
a) 2^e manier: Zonder alle eigenwaarden uit te rekenen:
$A > 0$. Noem $\underline{d} = [1,1,1]^T$; het is duidelijk dat $A^T\underline{d} = \underline{d}$ omdat de kolomsommen van A gelijk 1 zijn. Dan is ook $A^T\underline{d} \leq \underline{d}$, dus volgens st. 3.6.2 is A^k dus ook $\underline{x}_k$ begrensd. Daaruit is te concluderen dat $r(A) \leq 1$ (st. 3.5.4). Aangezien A^T en dus ook A een eigenwaarde 1 hebben, is $r(A) = 1$. Volgens Perron-Frobenius is 1 een enkelvoudig, dus niet-defectieve eigenwaarde en de absolute waarde van de overige eigenwaarden zijn kleiner dan 1. Maar dan bestaat (volgens st. 3.5.5) de limiet van A^k. Dus heeft ook de algemene oplossing $\underline{x}_k = A^k\underline{x}_0$ een limiet.

b) anders:

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \alpha\underline{a} \text{ met } \alpha = \frac{(\underline{d},\underline{x}_0)}{(\underline{d},\underline{a})} : \alpha = 2 \text{ dus } \lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = 2\begin{bmatrix}4\\4\\3\end{bmatrix}.$$

c) $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$ bestaat en $\underline{x}_k = A^k\underline{x}_0$. Dus $\lim_k A^k$ bestaat, maar is echter $\neq \mathcal{O}$. Als $A \geq 0$ en $\underline{c} > 0$ zodanig dat $A\underline{c} < \underline{c}$ dan geldt $A^k \to 0$ $(k \to \infty)$ (zie blz. 50, dictaat: 3.6.3). Dus er bestaat geen vector $\underline{c}$ zodat $A\underline{c} < \underline{c}$.

5.



De getallen bij de takken in □ zijn de stromen, de andere getallen de capaciteiten van de takken.

c(t)	t	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	
10	ix_1	0	6	9	9	9	9
5	ix_2	0	0	0	5	5	5
10	ix_3	0	0	0	0	6	8
9	x_1x_4	0	6	9	9	9	9
8	x_2x_5	0	0	0	5	5	5
8	x_2x_6	0	0	0	0	0	0
9	x_3x_6	0	0	0	0	6	8
4	x_4x_2	0	0	0	0	0	0
6	x_4x_7	0	6	6	6	6	6
5	x_4x_8	0	0	3	3	3	3
6	x_5x_8	0	0	0	5	5	5
5	x_6x_8	0	0	0	0	0	2
6	x_6x_9	0	0	0	0	6	6
7	x_7u	0	6	6	6	6	6
10	x_8u	0	0	3	8	8	10
6	x_9u	0	0	0	0	6	6
	v =	0	6	9	14	20	22

$i \to x_1$: 10	$i \to x_1$: 4	$i \to x_2$: 5	$i \to x_3$: 10	$i \to x_3$: 4
$x_1 \to x_4$: 9	$x_1 \to x_4$: 3	$x_2 \to x_5$: 5	$x_3 \to x_6$: 9	$x_3 \to x_6$: 3
$x_4 \to x_7$: 6	$x_4 \to x_8$: 3	$x_5 \to x_8$: 5	$x_6 \to x_9$: 6	$x_6 \to x_8$: 3
$x_7 \to u$: 6	$x_8 \to u$: 3	$x_8 \to u$: 5	$x_9 \to u$: 6	$x_8 \to u$: 2
x_4x_7 verz.	x_1x_4 verz.	ix_2 verz.	x_9u verz.	x_8u verz.
			x_6x_9 verz.	

$A_1 = \{i_1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8\}$, $B_1 = \{x_7, x_0u\}$.

$S(A_1, B_1) = \{x_4x_7, x_6x_9, x_8u\}$.

$C(A_1, B_1) = 6 + 6 + 10 = 22$.

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 41 op zaterdag 19 juni 1976.

1. Los op de iteratie

$$x_{k+1} = 5x_k + \frac{3}{4}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,$$
$$x_0 = 1 .$$

2. Gegeven is de iteratie

$$x_{k+1} = \sqrt{6 + x_k}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,$$
$$x_0 \geq -6 .$$

   a) Laat zien dat de rij (x_k) een limiet heeft.

   b) Bereken $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

3. Bepaal de algemene oplossing van de iteratie

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,$$

waarbij $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$ en

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} .$$

4. Gegeven is de matrix

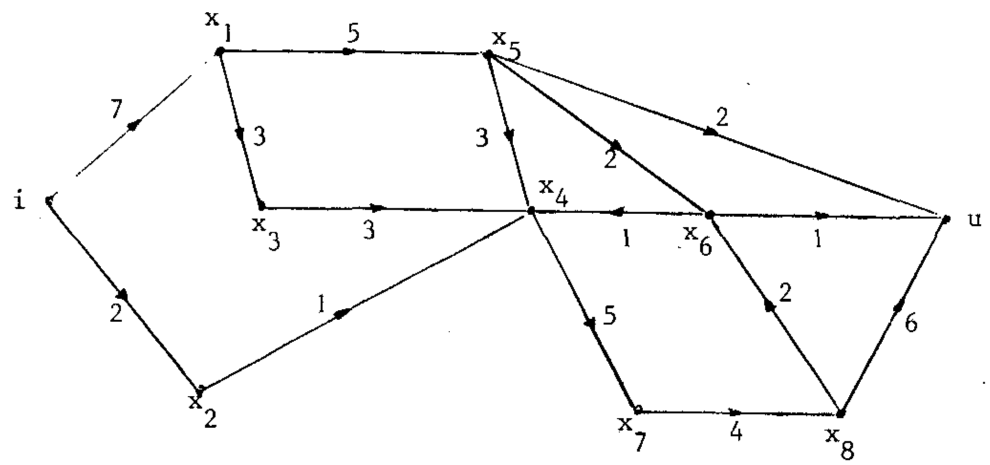
$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 4 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} .$$

   a) Bewijs dat A^k begrensd is.

   b) Bereken $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$, waarbij $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$ gegeven is door

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k, \qquad k = 0,1,2,\ldots,$$
$$\underline{x}_0 = [0,1,1]^T .$$

5. Gegeven is het volgende transportnetwerk.



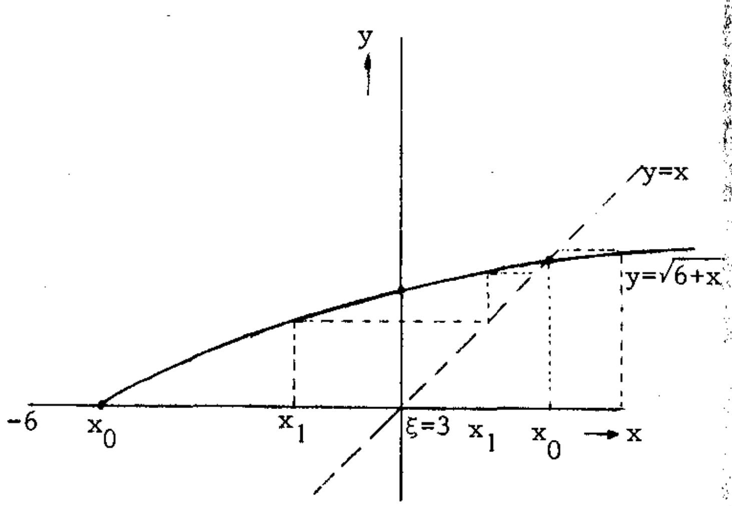
De cijfers bij de takken geven de capaciteiten aan.

Bepaal een maximale toegelaten stroom en een snede met minimale capaciteit.

Uitwerkingen behorende bij het Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 41 op zaterdag 19 juni 1976.

1. Homogene vergelijking $x_{k+1} = 5x_k$; substitueer $x_k = \lambda^k$: $\lambda^{k+1} = 5\lambda^k$ waaruit $\lambda = 5$. Homogene oplossing $x_k = c5^k$. Probeer als particuliere oplossing $(x_k)_p = a$. Gesubstitueerd: $a = 5a + \frac{3}{4}$ waaruit $a = -\frac{3}{10}$. Totale algemene oplossing $x_k = c5^k - \frac{3}{16}$. Bepaling c: $x_0 = 1 = c5^0 - \frac{3}{16}$ dus $C = 1 + \frac{3}{16} = \frac{19}{16}$. Gevraagde oplossing: $x_k = \frac{19}{16}5^k - \frac{3}{16}$.

2. We bekijken eerst de grafiek. $y = x$ snijden met $y = \sqrt{6 + x}$. $x^2 = 6 + x$ of $x^2 - x - 6 = 0$. of $(x - 3)(x + 2) = 0$. Alleen de waarde $x = 3$ is voor ons van belang. Nu proberen we te bewijzen:



$-6 \le x_k < \xi$ (1)
$x_k < x_{k+1}$ (2) als $-6 \le x_0 < 3$ (1^e)
en $x_k > \xi$ (3)
$x_k > x_{k+1}$ (4) als $x_0 > 3$. (2^e)

1) Voor x_0 is aan (1) voldaan. Stel (1) geldt voor $k = n$ dan is

$$-6 \le 0 \le x_{n+1} = F(x_n) = \sqrt{6 + x_n} < \sqrt{6 + \xi} = \xi$$

omdat $F(x) \ge 0$ voor $x \ge -6$ en omdat F stijgend is voor alle x (immers $F'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6+x}} > 0$). Aan (1) is nu voor $k = n + 1$ voldaan.

$x_1 = \sqrt{6 + x_0}$; voor $-6 \le x_0 < 0$: $x_1 \ge 0 > x_0$; $0 \le x_0 < 3$: $\sqrt{6 + x_0} > x_0$.
Dus voor x_0 is aan (2) voldaan. Stel (2) geldt voor $k = n$ dan is

$$x_{n+2} = F(x_{n+1}) > F(x_n) = x_{n+1}$$

zodat (2) ook geldt voor $k = n + 1$.

Conclusie: Als $6 \le x_0 < 3$ dan is (x_k) een monotoon stijgende naar boven begrensde rij en heeft dus een limiet.

2) Voor x_0 is aan (3) voldaan. Stel dat voor $k = n$ aan (3) voldaan is.

$$x_{n+1} = F(x_n) = \sqrt{x_n + 6} > \sqrt{\xi + 6} = \xi .$$

dus aan (3) ook voldaan voor $k = n + 1$.

$x_1 = \sqrt{6 + x_0}$; beschouw de functie $\sqrt{6 + x} - x$; deze heeft de waarde 0 voor $x = 3$ en is monotoon dalend immers

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{6+x} - x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{6+x}} - 1 < \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{6+3}} - 1 = \frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6}\,.$$

Voor $x > 3$ is dan $\sqrt{6+x} - x < 0$ dus $\sqrt{6+x_0} - x_0 < 0$ of $x_1 < x_0$.
Stel nu voor $k = n$ voldaan aan (4). $x_{n+1} = 6 + x_n < x_n$ want we weten $\sqrt{6+x_n} - x_n < 0$ voor $x_n > 3$.
Voor $x_0 > 3$ is (x_k) een monotoon dalende naar onder begrensde rij en heeft dus een limiet.

b) Schrijf $F(x) = \sqrt{6+x}$.
Stel de limiet van (x_k) is $\bar{\xi}$ dan is

$$\bar{\xi} = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} F(x_k) = \lim_{k\to\infty} \sqrt{6+x_k} =$$

(op grond van de continuïteit)

$$= \sqrt{\lim_{k\to\infty}(6+x_k)} = \sqrt{6+\bar{\xi}}\,.$$

Dus

$$\bar{\xi} = \sqrt{6+\bar{\xi}} \text{ of } \bar{\xi}^2 = 6 + \bar{\xi} \text{ of } (\bar{\xi}-3)(\bar{\xi}+2) = 0$$

$\bar{\xi}_1 = 3$; $\bar{\xi}_2 = -2$ maar deze voldoet niet aan $(-2) = \sqrt{6-2}$. De gevraagde limiet is dus 3.

3. $$\det(A - \quad I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2.$$

$\lambda = 2$ is een tweevoudige eigenwaarde. De eerste bijbehorende eigenvector vinden we uit

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ofwel $-c_1 + c_2 = 0$ waaruit $\underline{c} = \mu[1,1]^T$.
Om de tweede eigenvector te vinden, zoeken we een oplossing van de vorm

$$\lambda^k(k\underline{v} + \underline{w}).$$

Substitutie geeft: $\lambda^{k+1}((k+1)\underline{v} + \underline{w}) = \lambda^k A(k\underline{v} + \underline{w})$ of $\lambda k\underline{v} + \lambda\underline{v} + \lambda\underline{w} = kA\underline{v} + A\underline{w}$ of $k(\lambda\underline{v} - A\underline{v}) = A\underline{w} - \lambda\underline{v} - \lambda\underline{w}$. Nemen we $\underline{v} = \underline{c}$ en $\lambda = 2$ dan: $0 = A\underline{w} - 2\underline{v} - 2\underline{w}$. Uitgeschreven:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2w_1 \\ 2w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ of } -w_1 + w_2 = 2\,.$$

Stel $w_1 = \sigma$ dan $w_2 = 2 + \sigma$ dus $\underline{w} = \sigma[1,1]^T + [0,2]^T$.

Als tweede eigenvector voldoet $k[1,1]^T + [0,2]^T$ ($\sigma = 0$ genomen). De twee basisoplossingen zijn dan: $2^k[1,1]^T$ en $2^k(k[1,1]^T + [0,2]^T)$. Oplossing van de homogene vergelijking is

$$\underline{x}_k = \alpha 2^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta 2^k \left(k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

of

$$\underline{x}_k = \alpha 2^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta 2^k \begin{bmatrix} k \\ k+2 \end{bmatrix} .$$

Probeer als particuliere oplossing $\underline{x}_k = \underline{a}$.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{of} \begin{cases} a_1 = a_1 + a_2 - 2 \\ a_2 = -a_1 + 3a_2 + 4 \end{cases}$$

waaruit $a_1 = 10$, $a_2 = 2$.

Gevraagde oplossing:

$$\underline{x}_k = \alpha 2^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta 2^k \begin{bmatrix} k \\ k+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Toepassing van Cayley-Hamilton voor de homogene oplossing:

$$z^k = p(z)q_k(z) + a_k z + b_k : \; 2^k = 2a_k + b_k \; (1)$$

$$kz^{k-1} = p'q_k + pq_k' + a_k \quad : \; k2^{k-1} = a_k \; (2), \text{ in } (1): \; b_k = 2^k - 2k2^{k-1} .$$

Conclusie:

$$A^k = k2^{k-1}A + (2^k - 2k2^{k-1})I = \begin{bmatrix} k2^{k-1} + 2^k - 2k2^{k-1} & k2^{k-1} \\ -k2^{k-1} & 3k2^{k-1} + 2^k - 2k2^{k-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k - k2^{k-1} & k2^{k-1} \\ -k2^{k-1} & 2^k + k2^{k-1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_k = A^k \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2^{k-1}(2-k) & 2^{k-1}k \\ 2^{k-1}(-k) & 2^{k-1}(2+k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 2^{k-1} \begin{bmatrix} (2-k)a + kb \\ -ka + (2+k)b \end{bmatrix} =$$

$$= 2^k \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + k2^{k-1} \begin{bmatrix} -a+b \\ -a+b \end{bmatrix} = 2^k \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} + 2^k \begin{bmatrix} 0 \\ b-a \end{bmatrix} + k2^{k-1} \begin{bmatrix} -a+b \\ -a+b \end{bmatrix} =$$

$$= a2^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(b-a)}{2} 2^k \begin{bmatrix} k \\ k+2 \end{bmatrix} ,$$

dus van dezelfde structuur als de reeds eerder gevonden oplossing.

4. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 4 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$; $\det(A - \lambda I) = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4-12\lambda & 0 & 4 \\ 48 & 12-12\lambda & 24 \\ 6 & 0 & 3-12\lambda \end{bmatrix} =$

$$= (\tfrac{1}{12})^3\{(-12)^3\lambda^3 + 12^2\lambda^2(19) - 12\lambda\{36-12+48\} + \{144-288\} = 0$$

$$-12^3\lambda^3 + 12^2\lambda^2 19 - 12\lambda 72 - 144 = 0$$

$$-12\lambda^3 + 19\lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0$$

$$12\lambda^3 - 19\lambda^2 + 6\lambda + 1 = (\lambda-1)(12\lambda^2 - 7\lambda - 1)$$

dus $\lambda_1 = 1$.

$$\lambda_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{49+48}}{24} = \frac{7 \pm \sqrt{97}}{24}$$

$$0 < \lambda_2 = \frac{7+\sqrt{97}}{24} < \frac{7+10}{24} < 1;\ 0 > \lambda_3 = \frac{7-\sqrt{97}}{24} > \frac{7-10}{24} = -\frac{1}{8}$$

dus $0 > \lambda_3 > -\frac{1}{8}$ waaruit $|\lambda_3| < 1$.
Hieruit volgt nu ten eerste dat $r(A) = \max(1, |\lambda_2|, |\lambda_3|) = 1$. Ten tweede, volgt hieruit (omdat enkelvoudige eigenwaarden altijd niet-defectief zijn) dat de eigenwaarde $\lambda = 1$ niet-defectief is.
Conclusie: A^k heeft een limiet en is dus zeker begrensd.

b) $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 4-12 & 0 & 4 \\ 48 & 0 & 24 \\ 6 & 0 & 3-12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

dus $\underline{c} = \mu[0,1,0]^T$.

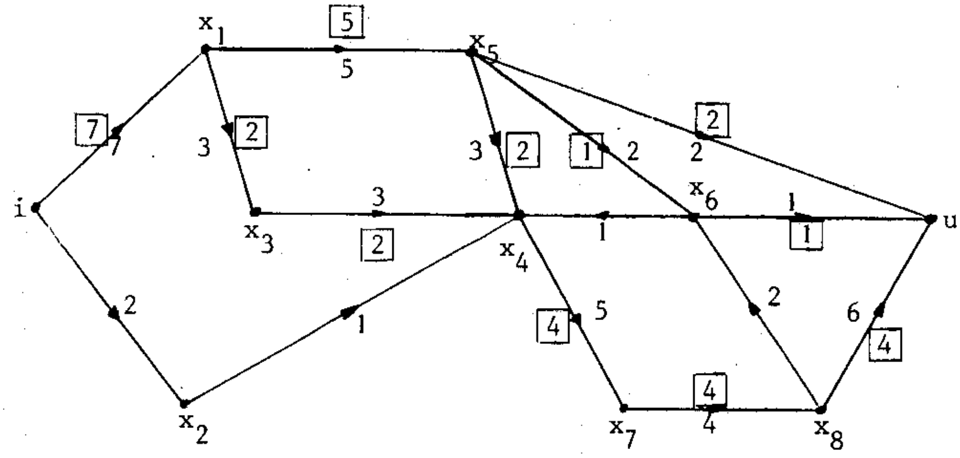
$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \alpha\underline{c}$ met $\alpha = \dfrac{\underline{d}^T\underline{c}}{\underline{d}^T\underline{x}_0}$ waarin $\underline{d}$ de eigenvector is van A^T voor de eigenwaarde $\lambda = 1$.

$(A^T - I)$: $\begin{pmatrix} 4-12 & 48 & 6 \\ 0 & 12-12 & 0 \\ 4 & 24 & 3-12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -8 & 48 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 24 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 96 & -12 \\ \\ 4 & 24 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 8 & -1 \\ \\ 4 & 24 & -9 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 0 & 8 & -1 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 8 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$: $\begin{cases} 8d_2 - d_3 = 0 \\ 2d_1 - 3d_3 = 0 \end{cases}$ waaruit $\underline{d} = \tau[3,16,2]^T$.

$$\alpha = \frac{((3,16,2),(0,1,0))}{((3,16,2),(0,1,1))} = \frac{16}{16+2} = \frac{8}{9}.\quad \lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \frac{8}{9}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{8}{9} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.



De getallen bij de takken in □ zijn de stromen, de andere getallen de capaciteiten van de takken.

c(t)	t	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
7	ix_1	0	2	3	5	7
2	ix_2	0				
3	x_1x_3	0				2
5	x_1x_5	0	2	3	5	
1	x_2x_4	0				
3	x_3x_4	0				2
3	x_5x_4	0			2	
2	x_5x_6	0		1		
2	x_5u	0	2			
1	x_6x_4	0				
1	x_6u	0		1		
5	x_4x_7	0			2	4
4	x_7x_8	0			2	4
2	x_8x_6	0				
6	x_8u	0			2	4
		0	2	3	5	7

$i \to x_1$: 7	$i \to x_1$: 5	$i \to x_1$: 4	$i \to x_1$: 2	$i \to x_2$: 2
$x_1 \to x_5$: 5	$x_1 \to x_5$: 3	$x_1 \to x_5$: 2	$x_1 \to x_3$: 2	$x_2 \to x_4$: 1
$x_5 \to u$: 2	$x_5 \to x_6$: 2	$x_5 \to x_4$: 2	$x_3 \to x_4$: 2	$x_4 \to x_7$: 1
	$x_6 \to u$: 1	$x_4 \to x_7$: 2	$x_4 \to x_7$: 2	breekt af
		$x_7 \to x_8$: 2	$x_7 \to x_8$: 2	
		$x_8 \to u$: 2	$x_8 \to u$: 2	

$A = \{i,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$, $B = \{u,x_8\}$.

$S(A,B) = \{x_5u,x_6u,x_7x_8\}$.

$C(A,B) = 2 + 1 + 4 = 7$.

Conclusie: Omdat de capaciteit van de snede gelijk is aan de gevonden stroomsterkte, is de capaciteit van de snede minimaal en de stroomsterkte maximaal.

Examen/tentamen Wiskunde 41 op maandag 17 januari 1977.

1. a) Geef de algemene oplossing van de recurrente betrekking

$$x_{k+1} + 3x_k + 2 = 0 \qquad (k = 0,1,2,\ldots) .$$

b) Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking

$$x_{k+1} + (1 + \frac{1}{k+1})x_k = k + 2 \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

met beginvoorwaarde $x_0 = 0$.

2. Beschouw voor $p \geq 0$ de autonome iteratie

$$x_{k+1} = (x_k + p)^2, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

met beginvoorwaarde $x_0 = \frac{1}{4}$.

a) Voor elke p bestaat $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$? Motiveer Uw antwoord.

b) Bereken $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$ voor die waarden van p waarvoor deze limiet bestaat.

3. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Bereken A^k $(k = 1,2,3,\ldots)$.

4. Beschouw het stelsel recurrente betrekkingen, gegeven door $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ waarin $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$ en

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

a) Bewijs dat voor iedere $\underline{x}_0$ de rij $\underline{x}_k$ een limiet heeft.

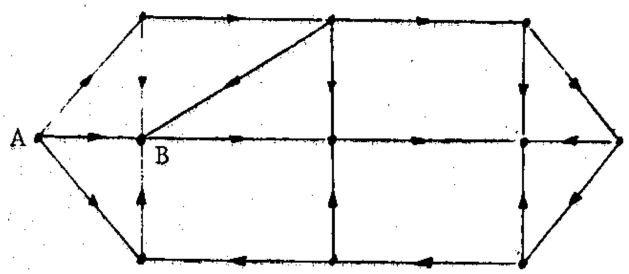
b) Neem $\underline{x}_0 = [2,1,-1]^T$ en bereken $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$.

5. Gegeven is de recurrente betrekking

$$x_{k+3} - 2x_{k+1} - 4x_k = 5 \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

met beginvoorwaarden $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
Bereken x_k met behulp van de z-transformatie.

6. Beschouw de volgende gerichte graaf.



a) Bewijs dat deze graaf geen kringen bevat.

b) Bepaal de lengte van de langste weg van A naar B.

c) Bepaal de lengte van de langste weg in de graaf.

Uitwerkingen behorende bij het Examen/tentamen Wiskunde 41 op maandag 17 januari 1977.

1. a) $x_{k+1} + 3x_k + 2 = 0$.

$x_{k+1} = -3x_k$ geeft als karakteristieke vgl.: $\lambda = -3$ dus $(x_k)_{hom} = C(-3)^k$.

Probeer als particuliere oplossing $(x_k)_p = a$:

$$a + 3a + 2 = 0 \text{ dus } a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Algemene oplossing:

$$x_k = C(-3)^k - \frac{1}{2}.$$

b) $x_{k+1} + (1 + \frac{1}{k+1})x_k = k + 2$; $x_{k+1} + \frac{k+1+1}{k+1} x_k = k + 2$

$\frac{x_{k+1}}{k+2} + \frac{x_k}{k+1} = 1$; noem $y_k = \frac{x_k}{k+1}$ dan: $y_{k+1} + y_k = 1$.

$(y_k)_{hom} = C(-1)^k$; probeer $(y_k)_p = a$: $a + a = 1$ of $a = \frac{1}{2}$.

$(y_k) = C(-1)^k + \frac{1}{2}$ en dus $x_k = C(1+k)(-1)^k + \frac{1}{2}(k+1)$.

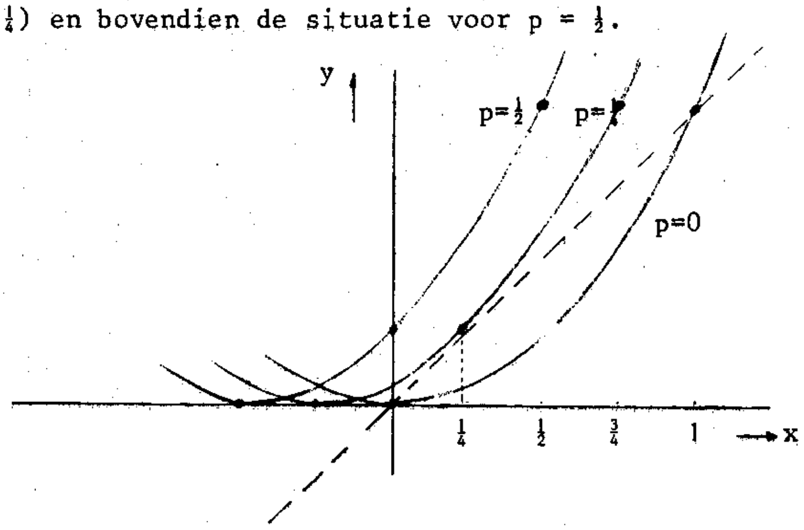
<u>Bepaling C</u>:

$$x_0 = 0:\ 0 = C(1+0)(-1)^0 + \tfrac{1}{2}(0+1) \text{ of } 0 = C + \tfrac{1}{2} \text{ dus } C = -\tfrac{1}{2}.$$

Gevraagde oplossing:

$$x_k = -\tfrac{1}{2}(1+k)(-1)^k + \tfrac{1}{2}(k+1) = \tfrac{1}{2}(k+1)\{1 + (-1)^{k+1}\}.$$

2. We beschouwen $y = x$ en $y = (x+p)^2$. Merk op dat de grafieken van de functies $y = (x+p)^2$ congruente parabolen zijn, waarvan de top bij afnemende p naar rechts verschuift. Bepaling snijpunten uit $x = (x+p)^2$ of $x^2 + (2p-1)x + p^2 = 0$. $D = (2p-1)^2 - 4p^2 = -4p + 1 \geq 0$ als $p \leq \frac{1}{4}$. We tekenen de twee grensgevallen ($p = 0$, $p = \frac{1}{4}$) en bovendien de situatie voor $p = \frac{1}{2}$.



$\lim\limits_{k\to\infty} x_k$ bestaat voor $0 \le p \le \frac{1}{4}$ omdat er dan snijpunten zijn van $y = x$ en $y = (x+p)^2$ en omdat de startwaarde $x_0 = \frac{1}{4} \in [G_1, G_2]$, constante rij) waarbij G_1 en G_2 de x-coördinaten zijn van de snijpunten van $y = x$ en $y = (x+p)^2$.

b) $p = \frac{1}{4}$: $x_1 = (x_0 + \frac{1}{4})^2 = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4})^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} = x_0$ dus $x_{k+1} = x_k$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \frac{1}{4}$.

$0 \le p < \frac{1}{4}$: $G = \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} (x_k + p)^2 = (\lim\limits_{k\to\infty} x_k + p)^2 = (G+p)^2$

dus

$$G = (G+p)^2 \quad \text{of} \quad G^2 + (2p-1)G + p^2 = 0 \to G_{1,2} = \frac{-(2p-1) \pm \sqrt{1-4p}}{2} .$$

Met $x_0 = \frac{1}{4}$ en $p < \frac{1}{4}$ volgt dat $x_1 = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \varepsilon)^2 = (\frac{1}{2} - \varepsilon)^2 < \frac{1}{4}$

$$x_2 = (x_1 + p) = (\tfrac{1}{4} - \delta + \tfrac{1}{4} - \varepsilon)^2 = (\tfrac{1}{2} - \gamma)^2 < \tfrac{1}{4} \text{ etc. dus } 0 \le x_k < \tfrac{1}{4} .$$

Als limietwaarde moeten we dus nemen: $G = \dfrac{1 - 2p - \sqrt{1-4p}}{2}$.

Dit kunnen we ook anders inzien: We maken nu gebruik van het stijgend zijn van de functie $(x+p)^2$ op het interval rechts van de top, dus zeker voor $x \ge 0$.

We hebben $0 \le G_1 < \frac{1}{4}$. Bewering: $x_k \ge G$ voor alle $k \in \mathbb{N}$, want (volledige inductie!):

1. $x_0 \ge G_1$.
2. als $x_k \ge \xi_1$ dan $x_{k+1} = f(x_k) \ge f(G_1) = G_1$.
3. dus voor alle k is $x_k \ge G_1$.

Ook is voor alle $k \in \mathbb{N}$: $0 \le x_{k+1} < x_k$ want

1. $0 \le x_1 < x_0$
2. als $0 \le x_{k+1} < x_k$ dan $0 \le x_{k+2} = f(x_{k+1}) < f(x_k) = x_{k+1}$.
3. dus voor alle $k \in \mathbb{N}$ is $x_{k+1} < x_k$, d.w.z. de rij is monotoon dalend.

We weten dus nu dat de rij een limiet heeft, die bovendien $< \frac{1}{4}$. De limiet moet dus de G_1 zijn.

3.
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2(2) - \lambda\{-1+0+1\} + \{1-1\} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0$$
$$\text{of } \lambda^2(\lambda - 2) = 0$$

$$z^k = z^2(z-2)q_k(z) + a_k z^2 + b_k z + c_k \quad (1)$$

$$kz^{k-1} = \{2z(z-2) + z^2\}q_k(z) + z^2(z-2)q_k'(z) + 2a_k z + b_k \quad (2).$$

Voor $k \geq 2$: $\lambda = 0$ in (1): $0 = \qquad c_k$

$\lambda = 0$ in (2): $0 = \qquad b_k$

$\lambda = 2$ in (3): $2^k = \qquad a_k . 4$

$$\text{A in (1): } A^k = \tfrac{1}{4}2^k A^2 = \tfrac{1}{4}2^k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{4}2^k \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; k \geq 2$$

$$A^1 = A;\ A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4, a)
$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Opdat $(\underline{x}_k)$ een limiet heeft bij iedere $\underline{x}_0$, moet $A^k \to 0$ $(k \to \infty)$. We kijken daartoe (immers $A \geq 0$) naar de kolommensommen. Geldt daarvoor $k_j < 1$ (alle j) dan $A_k \to 0$ $(k \to \infty)$. Nu blijkt dat

$k_1 = k_2 = k_3 = 1$ dus A^k is begrensd. Om te bewijzen dat lim x_k bestaat moeten we dus naar de eigenwaarden kijken:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{2}) - \lambda\{0 + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{5}\} + \{0 + 0 + 0 - 0 - 0 - \tfrac{1}{5}\} = 0$$

$$-\lambda^3 + \frac{7}{10}\lambda^2 + \frac{5}{10}\lambda - \frac{2}{10} = 0 \text{ of } -10\lambda^3 - 7\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$$

$$\lambda = 1: -10 + 7 + 5 - 2 = 0;\ 10\lambda^3 - 7\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (\lambda - 1)(10\lambda^2 + 3\lambda - 2)$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 80}}{20};\ |\lambda_2| = \left|\frac{-3 - \sqrt{89}}{20}\right| < \frac{3 + 10}{20} < 1;$$

$$|\lambda_3| = \left|\frac{-3 + \sqrt{89}}{20}\right| < \frac{10}{20} = \frac{1}{2} < 1.$$

$\lim_{k\to\infty} A^k$ bestaat dus omdat $\lambda = 1$ een niet-defectieve eigenwaarde is terwijl voor alle andere eigenwaarden van A geldt: $|\lambda| < 1$.

b) $\lambda = 1 \to$ eigenvector $\underline{c}$ behorende bij de matrix A:

$$A - 1I;\ \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & 0 - 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{2} - 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & -1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -8 & 10 & 5 \\ 4 & -10 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 10 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix};\ \begin{cases} 2c_1 - 5c_2 = 0 \\ 4c_1 - 5c_3 = 0 \end{cases};\ \left.\begin{matrix} c_1 = 5\mu \to c_2 = 2\mu \\ c_3 = 4\mu \end{matrix}\right\} \underline{c} = \mu[5,2,4]^T$$

$\lambda = 1 \to$ eigenvector $\underline{d}$ behorende bij matrix $\underline{d}$:

$$A^T - 1I: \begin{pmatrix} -8 & 4 & 4 \\ 10 & -10 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \underline{d} = \tau[1,1,1]^T.$$

$A^T\underline{d} = \underline{d}^T$ dus $\underline{d}^T A = \underline{d}^T$: $\underline{d}^T \underline{x}_{k+1} = \underline{d}^T A \underline{x}_k = \underline{d}^T \underline{x}_k$ dus $\underline{d}^T \underline{x}_k = \underline{d}^T \underline{x}_0$; $\forall k$.

$$\underline{d}^T \underline{x}_0 = \lim_{k\to\infty} \underline{d}^T \underline{x}_k = \underline{d}^T \alpha \underline{c} = \alpha \underline{d}^T \underline{c}$$

$$\alpha = \frac{\underline{d}^T \underline{x}_0}{\underline{d}^T \underline{c}} = \frac{(\underline{d},\underline{x}_0)}{(\underline{d},\underline{c})} = \frac{(1,1,1),(2,1,-1)}{(1,1,1)(5,2,4)} = \frac{2+1-1}{5+2+4} = \frac{2}{11}$$

$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \frac{2}{11}[5,2,4]^T$.

5. $x_{k+3} - 2x_{k+1} = 4x_k = 5$; $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_{k+3} z^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} x_{k+1} z^k - 4 \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k = 5 \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

$$z^{-3}(\hat{x}(z) - x_0 - x_1 z - x_2 z^2) - 2(\hat{x}(z) - x_0) z^{-1} - 4\hat{x}(z) = \frac{5}{1-z}.$$

$$\hat{x}(z)(z^{-3} - 2z^{-1} - 4) + (-z^{-2} - 3z^{-1}) = \frac{5}{1-z}.$$

$$\hat{x}(z)(-4z^3 - 2z^2 + 1) + (-z - 3z^2) = \frac{5z^3}{1-z}.$$

$$-\hat{x}(z)(4z^3 + 2z^2 - 1) = \frac{5z^3 + (z+3z^2)(1-z)}{1-z} = \frac{5z^3 + z - z^2 + 3z^2 - 3z^3}{1-z} = \frac{2z^3 + 2z^2 + z}{1-z}.$$

$z = \frac{1}{2}$: $4z^3 + 2z^2 - 1 \to 4\,\frac{1}{8} + 2\,\frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$.

$4z^3 + 2z^2 - 1 = (2z-1)(2z^2 + 2z + 1)$.

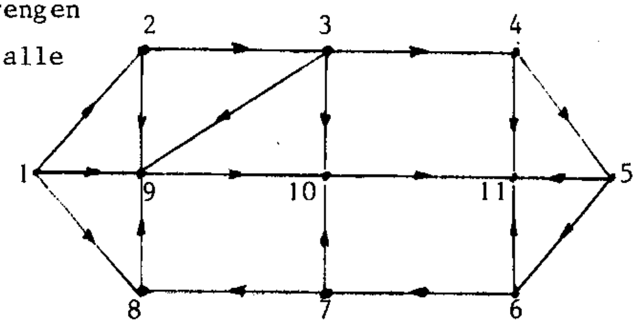
$$\hat{x}(z) = -\frac{z(2z^2+2z+1)}{(2z-1)(2z^2+2z+1)(1-z)} = \frac{z}{(1-2z)(1-z)} =$$

$$= \left\{\frac{A}{1-2z} + \frac{B}{1-z}\right\} = \frac{A(1-z) + B(1-2z)}{(1-2z)(1-z)}$$

$z = z(-A - 2B) + (A + B)$ waaruit $A = 1$, $B = 1$.

$$\hat{x}(z) = \frac{+1}{1-2z} + \frac{-1}{1-z} \to x_k = +1(2)^k - 1.$$

6. a) Er is een nummering aan te brengen zodat r(b(t)) < r(e(t)) voor alle takken. Dan geen kringen.



b),c) Algorithme voor het bepalen van de rang van de knooppunten.

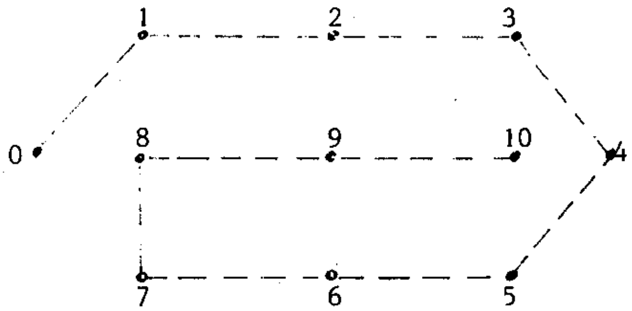
Bepaal de knopen waarin géén takken binnen komen; ken deze knopen de rang 0 toe. Verwijder alle takken die uitgaan van een knoop met rang 0. Als we t/m knopen van rang (n - 1) gekomen zijn:

Bepaal de knopen die nog géén rangnummer hebben en waarin géén takken binnenkomen; kan deze knopen de rang n toe.

Verwijder alle takken die uitgaan van de knoop met rang n.

We lezen af: lengte langste weg van A naar B: 8.

lengte langste weg in de graaf: 10.



Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 41 op zaterdag 29 januari 1977.

1. a) Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking

$$x_{k+1} + 2x_k = (-2)^k, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

met beginwaarde $x_0 = -\frac{1}{2}$.

b) Bepaal de algemene oplossing van de recurrente betrekking

$$x_{k+1} - 3x_k + k^2 = 1, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

2. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Bereken A^k voor $k = 2,3,4,\ldots$.

3. Beschouw de recurrente betrekking

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

waarbij

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

en $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$.

a) Bewijs, dat $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$ bestaat voor iedere vector $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.

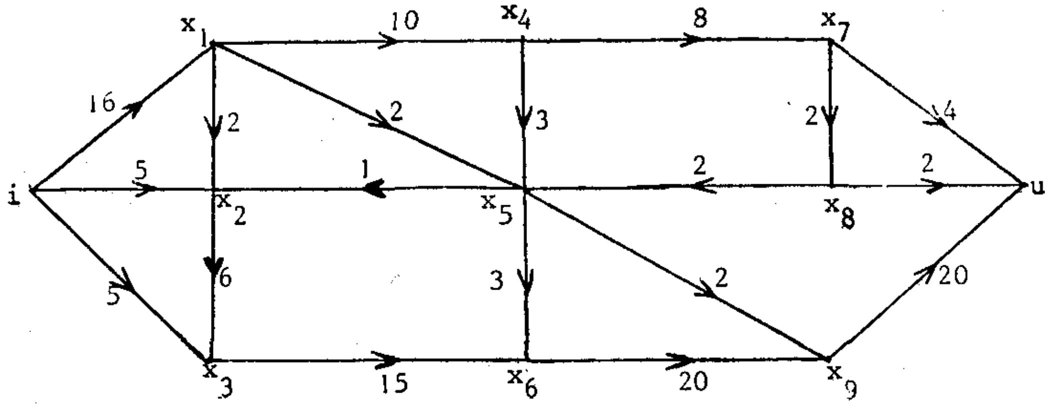
b) Bereken deze limiet, als gegeven is $\underline{x}_0 = [2,5,2]^T$.

4. Los de volgende recurrente betrekking op:

$$x_{k+3} - 3x_{k+2} + 3x_{k+1} - x_k = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$x_0 = 0;\ x_1 = 2;\ x_2 = 6.$$

5. Gegeven is het volgende transportnetwerk.



De cijfers bij de takken geven de capaciteiten aan.

Bepaal een maximale toegelaten stroom en een snede met minimale capaciteit.

Uitwerkingen behorende bij het Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 41, 29 januari 1977.

1. a) Eerst $x_{k+1} + 2x_k = 0$ oplossen. De oplossing is kennelijk $x_k = (-2)^k c$.
Inhomogeen: probeer $x_k = ak(-2)^k$, omdat $(-2)^k$ al een oplossing is van de homogene recurrente betrekking. Substitutie geeft:

$$(-2)a(k+1)(-2)^k + 2ak(-2)^k = (-2)^k$$

dus $-2a = 1$, $a = -\frac{1}{2}$.

De algemene oplossing is dus

$$x_k = -\tfrac{1}{2}k(-2)^k + c(-2)^k$$

$$x_0 = c = -\tfrac{1}{2} .$$

De gevraagde oplossing is dus

$$x_k = -\tfrac{1}{2}k(-2)^k - \tfrac{1}{2}(-2)^k = (k+1)(-2)^{k-1}, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

b) Eerst $x_{k+1} - 3x_k = 0$. Deze heeft de oplossing $x_k = 3^k c$.
Inhomogeen: probeer een willekeurig polynoom van graad 2: $x_k = pk^2 + qk + r$.
Substitueren geeft:

$$p(k^2 + 2k + 1) + q(k+1) + r - 3pk^2 - 3qk - 3r + k^2 = 1$$

$$(-2p+1)k^2 + 2(p-q)k + p + q - 2r = 1 \text{ voor alle } k .$$

Dus moet

$$\begin{aligned} -2p + 1 &= 0 \\ 2(p-q) &= 0 \quad \text{met als oplossing } p = q = \tfrac{1}{2},\ r = 0 . \\ p + q - 2r &= 1 \end{aligned}$$

Particuliere oplossing is dus $x_k = \frac{1}{2}(k^2 + k)$ en de algemene oplossing is

$$x_k = \tfrac{1}{2}(k^2 + k) + c3^k, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

2. $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Gevraagd: A^k. Dit kan op minstens 3 manieren.

a) Definieer

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} .$$

Men ziet makkelijk, dat (in bloknotatie)

$$A^k = \begin{bmatrix} \tilde{A}^k & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Bepaal dus nog $\tilde{A}^k$. We zullen dit niet verder uitvoeren.

b) De matrix A^k heeft als 1e, resp. 2e, resp. 3e kolom die oplossingen van het stelsel

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k ,$$

die als beginvector hebben

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ resp. } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ resp. } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Bepaal dus de algemene oplossing van dit stelsel en vervolgens de drie genoemde oplossingen. De karakteristieke vergelijking is

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(1 - \lambda)^2(\lambda - 2) = 0 .$$

Eigenwaarden dus $\lambda = 1$ (dubbel) en $\lambda = 2$.

$\lambda = 1$: het stelsel vergelijkingen heeft als matrix

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ met rang } 1 .$$

De eigenruimte E_1 heeft dus dimensie 2, een basis is $[1,-1,0]^T$ en $[0,0,1]^T$.

$\lambda = 2$: matrix

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ rang } 2 .$$

Basis van E_2 is $[1,1,0]^T$.

Algmene oplossing:

$$\underline{x}_k = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma 2^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Dus

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} \beta + \gamma \\ -\beta + \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Voor $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ moeten we dus nemen $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$; dan is

$$\underline{x}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 2^{k-1} \\ -\frac{1}{2} + 2^{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Voor $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ is $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$ en

$$\underline{x}_k = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + 2^{k-1} \\ \frac{1}{2} + 2^{k-1} \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Voor $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ is $\alpha = 1$ en $\beta = \gamma = 0$, dus $\underline{x}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dus is

$$A^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 2^{k-1} & -\frac{1}{2} + 2^{k-1} & 0 \\ -\frac{1}{2} + 2^{k-1} & \frac{1}{2} + 2^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

c) Met de stelling van Cayley-Hamilton. Noem het karakteristieke polynoom $p(\lambda)$. Dus $p(\lambda) = -(1 - \lambda)^2(\lambda - 2)$, een 3^e-graads polynoom. Dan geldt volgens de delingsalgorithme voor polynomen:

$$z^k = p(z)q_k(z) + q_k z^2 + b_k z + c_k, \; k = 0,1,2,\ldots$$

waarin $q_k(z)$ een polynoom, a_k, b_k en c_k constanten. We weten nu: $p(1) = p(2) = 0$, $p'(1) = 0$ want 1 is een nulpunt van p met multipliciteit 2. Volgens Cayley-Hamilton is het matrixpolynoom $p(A) = 0$. In

$$z^k = p(z)q_k(z) + a_k z^2 + b_k z + c_k$$

en

$$kz^{k-1} = p'(z)q_k(z) + p(z)q_k'(z) + 2a_k z + b_k$$

substitueren we $z = 1$ en omdat $p'(2) \neq 0$, <u>alleen in de eerste betrekking</u> $z = 2$. Dit geeft

$$\begin{aligned} 1 &= a_k + b_k + c_k \\ k &= 2a_k + b_k \\ 2^k &= 4a_k + 2b_k + c_k \quad . \end{aligned}$$

Na enig (dom) rekenwerk vinden we

$$\begin{aligned} a_k &= 2^k - k - 1 \\ b_k &= -2^{k+1} + 3k + 2 \\ c_k &= 2^k - 2k \ . \end{aligned}$$

Verder is

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

In

$$A^k = a_k A^2 + b_k A + c_k I$$

zijn nu alle termen bekend. Na invullen en herleiden vinden we A^k in dezelfde vorm als onder b). N.B. 2^k is de helft van 2^{k+1}.

3\. a) $A = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix}$. Karakteristieke vergelijking:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ \frac{2}{3} & -\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\lambda-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\lambda-\frac{1}{3} \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\lambda-\frac{1}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + \tfrac{1}{3}) = 0 \ .$$

De nulpunten λ_1 en λ_2 van $\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{3}$ zijn niet reëel (discriminant < 0), ze zijn dus toegevoegd complex: λ_1 en $\bar{\lambda}_1$, en $\lambda_1\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{3} = |\lambda_1|^2$, dus $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \frac{1}{3}\sqrt{3} < 1$. Dus de spectraalstraal $r(A) = 1$. Verder is 1 een enkelvoudige, dus niet-defectieve eigenwaarde en de absolute waarde van de overige eigenwaarden is < 1.
Derhalve bestaat $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ (st. 3.5.5). Maar dan heeft ook de algemene oplossing $\underline{x}_k = A^k\underline{c}$ een limiet voor iedere keuze van $\underline{c}$.

b) 1 is een enkelvoudige eigenwaarde, dus de methode van limietbepaling van collegedictaat pag. 46-47 is van toepassing. Zowel van A als van A^T zijn de rijsommen 1, dus A en A^T hebben beide de eigenvector $\underline{d} = [1,1,1]^T$ bij de eigenwaarde 1. Noemen we de limietvector $\underline{\ell}$, dan is volgens de theorie

$$(\underline{d},\underline{\ell}) = (\underline{d},\underline{x}_0) \text{ en } \underline{\ell} = \alpha\underline{d}\ .$$

Dus $\alpha(\underline{d},\underline{d}) = (\underline{d},\underline{x}_0)$

$$\alpha.3 = 9$$

$$\alpha = 3\ .$$

$$\underline{\ell} = \lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = 3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

4. $x_{k+3} - 3x_{k+2} + 3x_{k+1} - x_k = 0.$
Karakteristieke vergelijking:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^3 = 0$$

$\lambda = 1$ met multipliciteit 3 .

Basisoplossingen zijn dus 1^k, $k1^k$, $k^2 1^k$, algemene oplossing derhalve:

$$x_k = \alpha + \beta k + \gamma k^2\ .$$
$$x_0 = 0, \text{ dus } \alpha = 0\ .$$
$$x_1 = 2, \text{ dus } \beta + \gamma = 2\ .$$
$$x_2 = 6, \text{ dus } 2\beta + 4\gamma = 6\ .$$

dus $\beta = \gamma = 1$.
Gevraagde oplossing: $x_k = k(k+1)$, $k = 0,1,2,\ldots$

Tweede methode: z-transformatie

$$\frac{1}{z^3}(\hat{x}(z) - 0 - 2z - 6z^2) - \frac{3}{z^2}(\hat{x}(z) - 0 - 2z) + 3(\hat{x}(z) - 0) - \hat{x}(z) = 0.$$

$$\hat{x}(1 - 3z + 3z^2 - z^3) = 2z \ .$$

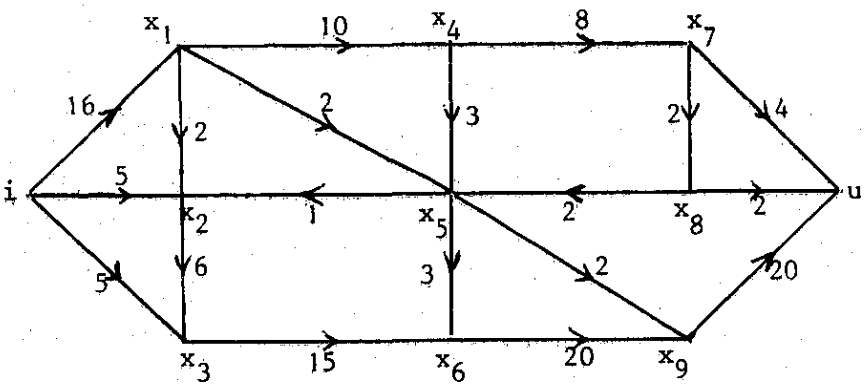
$$\hat{x} = \frac{2z}{(1-z)^3} = \frac{-2}{(1-z)^2} + \frac{2}{(1-z)^3} \ .$$

dus

$$x_k = -2\begin{pmatrix}1+k\\ k\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2+k\\ k\end{pmatrix} = -2(1+k) + (k+2)(k+1) =$$

$$= (k+1)(k+2-2) = k(k+1) \ .$$

5.



		f_1	f_2	f_3	f_4
16	ix_1	6	6	11	12
5	ix_2		5	5	5
5	ix_3		5	5	5
10	x_1x_4	6	6	9	9
2	x_1x_5			2	2
2	x_1x_2				1
6	x_2x_3		5	5	6
15	x_3x_6		10	10	11
3	x_4x_5			3	3
8	x_4x_7	6	6	6	6
3	x_5x_6			3	3
2	x_5x_9			2	2
1	x_5x_2				
20	x_6x_9		10	13	14
4	x_7u	4	4	4	4
2	x_7x_8	2	2	2	2
2	x_8u	2	2	2	2
2	x_8x_5				
20	x_9u		10	15	16
stroomsterkte		6	16	21	22

We construeren nu de knopenverzamelingen A en B.

$i \in A$. ix_1 niet verzadigd, dus $x_1 \in A$.

x_1x_2 niet verzadigd, dus $x_2 \in A$.

x_1x_4 niet verzadigd, dus $x_4 \in A$.

x_4x_7 niet verzadigd, dus $x_7 \in A$.

Neem $A = \{i, x_1, x_2, x_4, x_7\}$.

$B = \{$overige knopen$\}$.

Alle takken met beginpunt in A en eindpunt in B zijn verzadigd, alle takken (bijv. x_5x_2) beginnend in B en eindigend in A zijn stroomloos. De constructie van A en B is nu klaar.

De snede $S = S(A,B)$ bestaat uit de takken

$$ix_3, x_2x_3, x_1x_5, x_4x_5, x_7x_8, x_7u$$

en <u>niet</u> x_5x_2.

De capaciteit van S is $5 + 6 + 2 + 3 + 2 + 4 = 22$. Dus snedecapaciteit = stroomsterkte. Dus de stroomsterkte is maximaal en S is een snede met minimale capaciteit, want voor alle stromen geldt dat de stroomsterkte $\leq$ de capaciteit van elke snede is.

Examen/tentamen Wiskunde 41 op zaterdag 18 juni 1977.

1. Bepaal de algemene reële oplossing van de recurrente betrekking

$$x_{k+3} + x_{k+2} - 4x_{k+1} - 4x_k = (-1)^k, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

2. Bepaal de algemene reële oplossing van de recurrente betrekking

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \; k = 0,1,2,\ldots$$

met $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$ en $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Gegeven is de recurrente betrekking

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k, \quad k = 0,1,2,\ldots ,$$

met $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$ en

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

a) Bewijs dat alle oplossingen begrensd zijn.

b) Hebben alle oplossingen een limiet?
Zo neen, bepaal alle oplossingen, die een limiet hebben (motiveer Uw antwoord).

4. Gegeven is de recurrente betrekking

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k, \quad k = 0,1,2,\ldots ,$$

met $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$ en

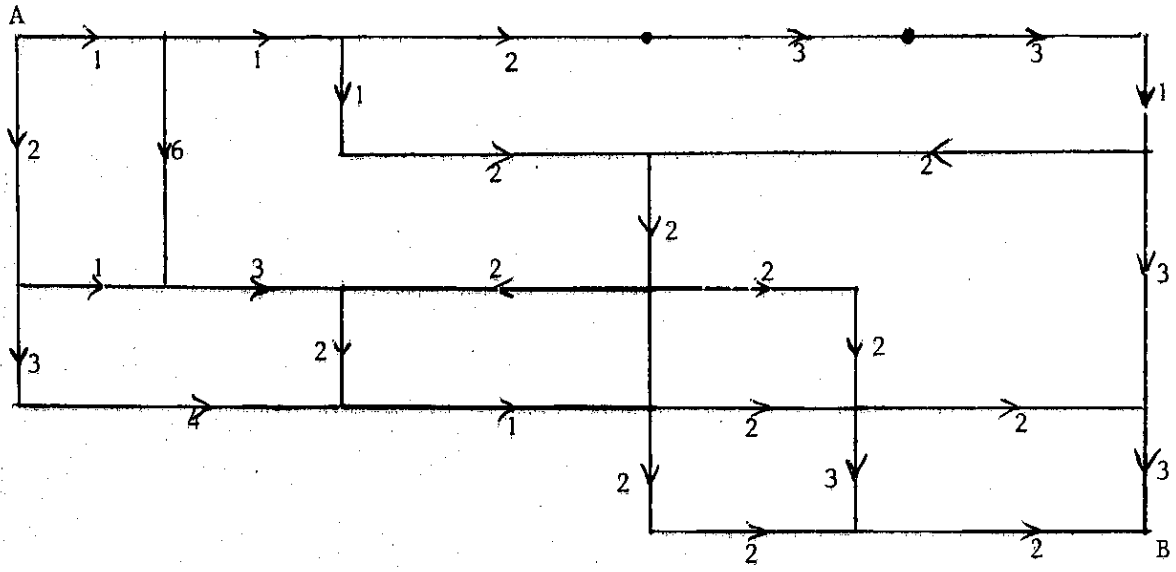
$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

a) Bereken $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

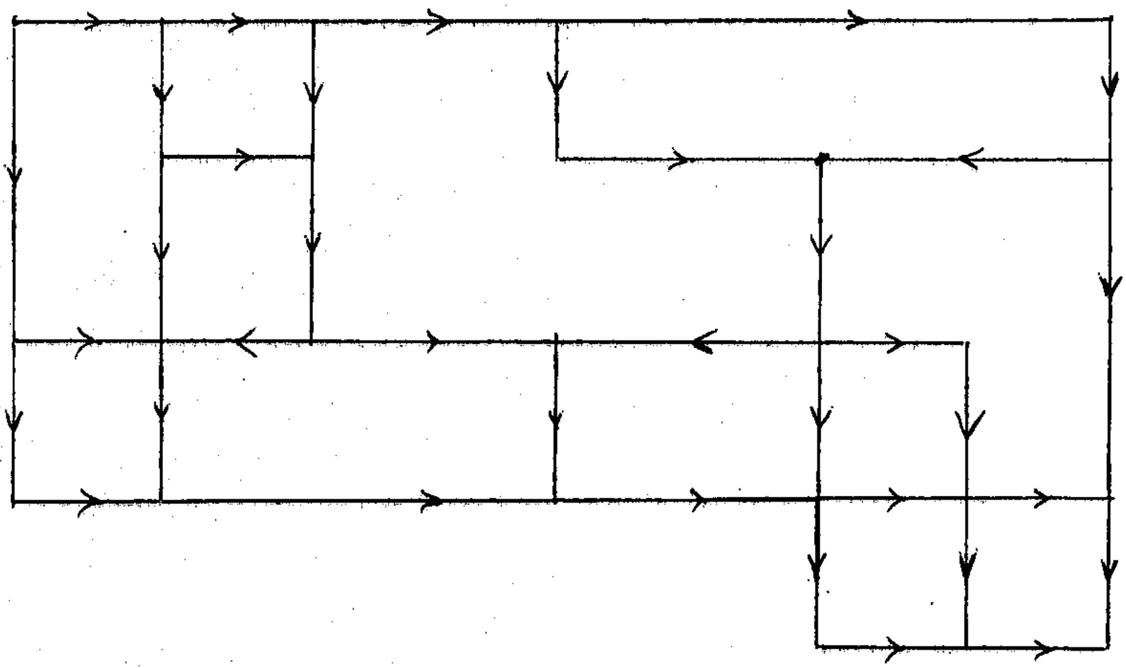
b) Bewijs, dat alle oplossingen een limiet hebben.

c) Neem $\underline{x}_0 = [4,0,4]^T$ en bepaal $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$.

5. a) Bepaal in onderstaande graaf de goedkoopste weg van knoop A naar knoop B.
De cijfers bij de takken geven de kosten aan.



b) Bewijs dat in onderstaande graaf geen kringen voorkomen.
Bepaal de lengte van de langste weg in de graaf. Hoeveel wegen van maximale lengte bevat de graaf?



6. Gegeven is de autonome iteratie

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

$$x_0 = \alpha, \ \alpha > 0 \ ,$$

met $f(x) = pxe^{-x}$, $0 \leq p \leq e$.
Voor welke waarden van α en p is de rij (x_k) convergent?
Bepaal in geval van convergentie $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$.
Motiveer Uw antwoord.

Uitwerkingen behorende bij het Examen/tentamen Wiskunde 41 op zaterdag 18 juni 1977.

1. Eerst de homogene betrekking oplossen:

$$x_{k+3} + x_{k+2} - 4x_{k+1} - 4x_k = 0 .$$

Karakteristieke vergelijking

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0 .$$
$$(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 .$$

Een basis van de oplossingsruimte wordt dus gevormd door de oplossingen $x_k = (-1)^k$, $y_k = 2^k$, $z_k = (-2)^k$.
Inhomogeen: daar $(-1)^k$ reeds oplossing is van de homogene betrekking, proberen we

$$x_k = ak(-1)^k .$$

Substitutie leidt tot

$$a(k+3)(-1)^{k+3} + a(k+2)(-1)^{k+2} - 4a(k+1)(-1)^{k+1} - 4ak(-1)^k = (-1)^k$$
$$-(k+3)a + (k+2)a + 4(k+1)a - 4ka = 1$$
$$3a = 1$$
$$a = \frac{1}{3} .$$

Dus de algemene reële oplossing is

$$x_k = \frac{1}{3} k(-1)^k + c_1(-1)^k + c_2 2^k + c_3(-2)^k$$

met c_1, c_2 en c_3 reëel.

2. De matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ heeft als karakteristieke vergelijking

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 8 = 0 .$$

Eigenwaarden: $\lambda = \pm 2i\sqrt{2}$.
Bij $\lambda = 2i\sqrt{2}$ vindt men de eigenvectoren uit het stelsel vergelijkingen met coëfficiëntenmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 - 2i\sqrt{2} & -3 \\ 3 & -1 - 2i\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{, met rang } 1 .$$

Een eigenvector is $[3,1-2i\sqrt{2}]^T$.

Basisoplossingen van het homogene stelsel $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$ zijn dus

$$\underline{x}_k = (2i\sqrt{2})^k \begin{bmatrix} 3 \\ 1-2i\sqrt{2} \end{bmatrix} = (2\sqrt{2})^k(\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}) \begin{bmatrix} 3 \\ 1-2i\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

en de geconjugeerde hiervan

$$\underline{x}_k = (2\sqrt{2})^k(\cos\frac{k\pi}{2} - i\sin\frac{k\pi}{2}) \begin{bmatrix} 3 \\ 1+2i\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Nu vormen $\mathrm{Re}(\underline{x}_k)$ en $\mathrm{Im}(\underline{x}_k)$ eveneens een basis van de oplossingsruimte.
Dit levert de reële basisoplossingen

$$(2\sqrt{2})^k \begin{bmatrix} 3\cos\frac{k\pi}{2} \\ \cos\frac{k\pi}{2} + 2\sqrt{2}\quad\sin\frac{k\pi}{2} \end{bmatrix} \text{ en } (2\sqrt{2})^k \begin{bmatrix} 3\sin\frac{k\pi}{2} \\ \sin\frac{k\pi}{2} - 2\sqrt{2}\quad\cos\frac{k\pi}{2} \end{bmatrix}$$

Om een particuliere oplossing van het inhomogene stelsel $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ te vinden proberen we $\underline{x}_k = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$. Dan geldt

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \text{ dus } \left.\begin{aligned} 3c_2 &= 3 \\ -3c_1 + 2c_2 &= -4 \end{aligned}\right\}$$

Dit levert $c_1 = 2$, $c_2 = 1$.

Algemene reële oplossing dus:

$$\underline{x}_k = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (2\sqrt{2})^k \left\{ d_1 \begin{bmatrix} 3\cos\frac{k\pi}{2} \\ \cos\frac{k\pi}{2} + 2\sqrt{2}\quad\sin\frac{k\pi}{2} \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 3\sin\frac{k\pi}{2} \\ \sin\frac{k\pi}{2} - 2\sqrt{2}\quad\sin\frac{k\pi}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

waarin d_1 en d_2 reëel zijn.

<u>Opm</u>: Een andere methode om het homogene stelsel $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$ op te lossen bestaat in het toepassen van de stelling van Cayley-Hamilton (C - H). Noemen we $p(\lambda) = \lambda^2 + 8$, dan houdt C - H in ons geval in: $p(A) = 0$.

Toepassing van de delingsalgoritme voor polynomen geeft voor $k \geq 0$:

$$z^k = p(z)q_k(z) + a_k z + b_k \quad \ldots\ldots \ (1)$$

met a_k en b_k reële constanten en $q_k(z)$ een reëel polynoom. Substitueer hierin $z = \pm 2i\sqrt{2}$, dan vinden we

$$(2\sqrt{2})^k(\cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2}) = a_k.2i\sqrt{2} + b_k$$

$$(2\sqrt{2})^k(\cos \frac{k\pi}{2} - i \sin \frac{k\pi}{2}) = -a_k.2i\sqrt{2} + b_k \ .$$

Hieruit volgt $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ en (tel op, trek af):

$$\left.\begin{aligned} a_k &= (2\sqrt{2})^{k-1}\sin \frac{k\pi}{2} \\ b_k &= (2\sqrt{2})^{k}\cos \frac{k\pi}{2} \end{aligned}\right\} \text{voor } k \geq 1 \ .$$

Wegens (1) en C - H is

$$A^k = a_k A + b_k I \ ,$$

dus

$$A^k = (2\sqrt{2})^{k-1}\sin \frac{k\pi}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + (2\sqrt{2})^k \cos \frac{k\pi}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ k \geq 1 \ .$$

Een basis voor de oplossingsruimte van het homogene stelsel wordt nu gevormd door de kolommen van A^k (te beginnen met $k = 0$).
Algemene oplossing van het homogene stelsel is dus

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \ \underline{x}_k = c_1(2\sqrt{2})^{k-1}\begin{bmatrix} \sin \frac{k\pi}{2} + 2\sqrt{2} \cos \frac{k\pi}{2} \\ 3 \sin \frac{k\pi}{2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \ c_2(2\sqrt{2})^{k-1}\begin{bmatrix} -3 \sin \frac{k\pi}{2} \\ -\sin \frac{k\pi}{2} + 2\sqrt{2} \cos \frac{k\pi}{2} \end{bmatrix} \ \text{voor } k \geq 1 \ .$$

3. De matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

heeft als karakteristieke vergelijking

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0.$$

Eigenwaarden dus 1, i en -i.

a) Blijkbaar hebben alle eigenwaarden de absolute waarde 1, dus de spectraalstraal $r(A) \le 1$. Alle eigenwaarden zijn enkelvoudig, dus niet-defectief. Derhalve is (st. 3.5.4) A^k begrensd. Daar de oplossing van $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$ luidt:

$$\underline{x}_k = A^k\underline{c} ,$$

zijn met A^k dus ook alle oplossingen begrensd.

b) Er zijn eigenwaarden $\neq 1$, maar met absolute waarde 1. Op grond van st. 3.5.5 heeft nu A^k geen limiet, dus hebben ook niet alle oplossingen een limiet.

Men kan ook eenvoudigweg constateren dat de oplossing $\underline{x}_k = i^k\underline{v}$, met $\underline{v}$ een eigenvector bij i, geen limiet heeft, dus hebben niet alle oplossingen een limiet.

De algemene oplossing is van de vorm

$$\underline{x}_k = \alpha 1^k\underline{u} + \beta i^k\underline{v} + \gamma(-i)^k\underline{w} ,$$

waarin $\underline{u}$, $\underline{v}$ en $\underline{w}$ eigenvectoren zijn bij 1, resp. i, resp. (-i). Het is duidelijk dat de oplossingen $\underline{x}_k = \alpha\underline{u}$ een limiet hebben. De oplossingen $\underline{x}_k = \beta i^k\underline{v} + \gamma(-i)^k\underline{w}$ bevatten de vectoren $\beta\underline{v} + \gamma\underline{w}$ (k = 4-voud) en $-\beta\underline{v} - \gamma\underline{w}$ (k = 4-voud + 2) oneindig vaak. Zo'n oplossing kan dus alleen dan een limiet hebben als $\beta\underline{v} + \gamma\underline{w} = -\beta\underline{v} - \gamma\underline{w}$, dus $2\beta\underline{v} + 2\gamma\underline{w} = \underline{0}$. Daar $\underline{v}$ en $\underline{w}$ lineair onafhankelijk zijn (eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden) volgt hieruit $\beta = \gamma = 0$.

Hieruit volgt dat de oplossingen van de vorm $\underline{x}_k = \alpha\underline{u}$ ook enige zijn die een limiet hebben. Voor $\underline{u}$ kan men nemen $[1,0,0]^T$.

4. a) $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

b) Uit a) blijkt dat er een vector $\underline{c} > 0$ bestaat waarvoor $A\underline{c} \le \underline{c}$ (neem $\underline{c} = [1,1,1]^T$). Daar $A \ge 0$ volgt hieruit dat A^k begrensd is (st. 3.6.2) en dat dus $r(A) \le 1$ (st. 3.5.4). Daar blijkens a) de matrix A de eigenwaarde 1 heeft, geldt dus $r(A) = 1$. Daar $A > 0$, is Perron-Frobenius van toepassing (st. 3.6.7), die zegt, dat nu 1 een enkelvoudige (dus niet-defectieve) eigenwaarde is en dat de overige eigenwaarden een absolute waar-

de < 1 hebben. Maar dan bestaat $\lim_{k\to\infty} A^k$ volgens st. 3.5.5 (2).
De algemene oplossing is

$$\underline{x}_k = A^k\underline{p} \quad (\underline{p} \text{ willekeurig}) .$$

Met $\lim_{k\to\infty} A^k$ bestaat dus ook $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$ voor elke oplossing $(\underline{x}_k)$.

c) De methode van pag. 46-47 van de syllabus is van toepassing want 1 is een enkelvoudige eigenwaarde.
Een eigenvector van A bij de eigenwaarde 1 is $\underline{c} = [1,1,1]^T$ (zie a)).
Een eigenvector $\underline{d}$ van A^T is te vinden uit het stelsel vergelijkingen met matrix

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -10 & 7 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 10 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Voor $\underline{d}$ kan men kiezen $\underline{d} = [11,7,10]^T$. Noem de limietvector $\underline{\ell} = \lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$.
Dan is volgens de theorie $\underline{\ell} = \alpha\underline{c}$ en $(\underline{d},\underline{\ell}) = (\underline{d},\underline{x}_0)$ dus

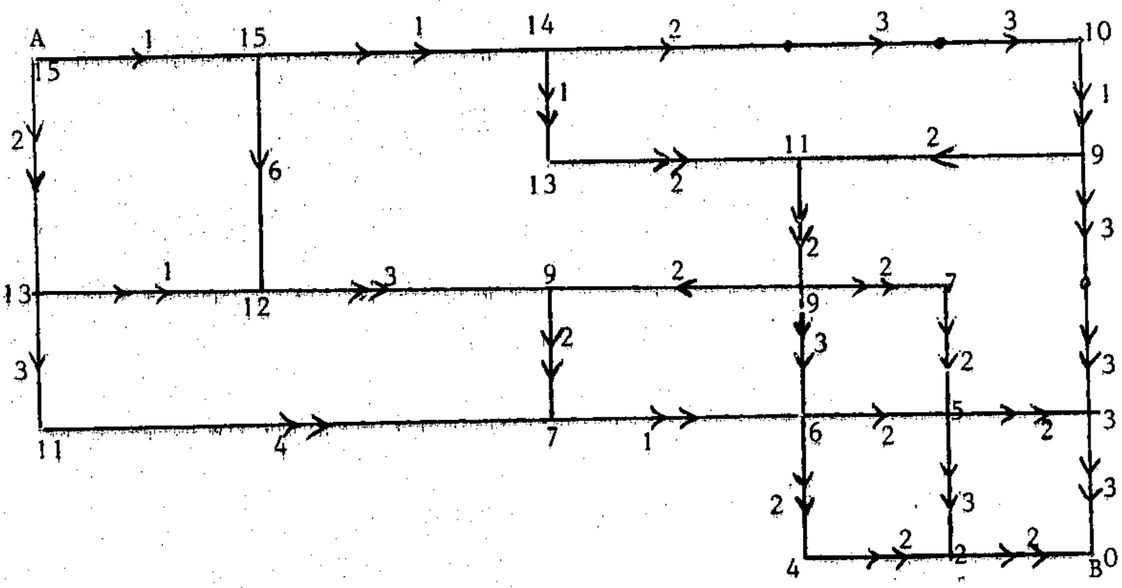
$$\alpha(\underline{d},\underline{c}) = (\underline{d},\underline{x}_0)$$

$$28\alpha = 84$$

$$\alpha = 3$$

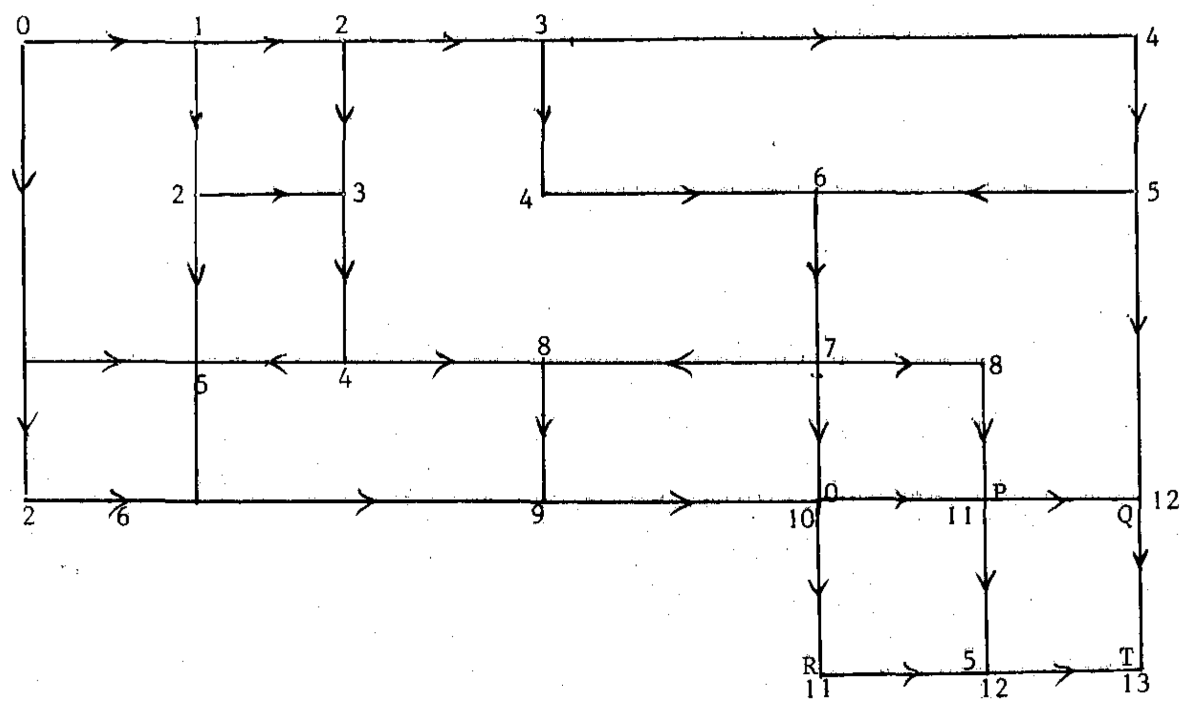
$$\underline{\ell} = 3[1,1,1]^T .$$

5. a)



Volgens de methode van pag. 90 van de collegesyllabus bepalen we voor elke knoop x de waarde w(x), die we naast de knoop x noteren.
Er blijkt één oplossing te zijn: begin in A en volg de dubbele pijlen.

b)



Er bestaat een nummering der knopen zó dat voor iedere tak t nummer van b(t) < nummer van e(t). In de nummering hierboven is iedere knoop genummerd met zijn rang (dictaat pag. 74). De langste weg in de graaf heeft de lengte 13. Er zijn 3 wegen ter lengte 13. De enige knoop met rang 0 en de enige knoop 0 met rang 10 zijn door maar één weg ter lengte 10 verbonden, (dit ziet men direct door in 0 te beginnen en via 9,8,7 enz. terug te lopen). Elke langste weg eindigt in T. Door gewoon goed te kijken ziet men 3 mogelijkheden om van 0 naar T te gaan: ORST, OPST en OPQT, elk met lengte 3. Dus 3 wegen met lengte 13.

6. $f(x) = pxe^{-x}$, $0 \leq p \leq e$.

$x_0 = \alpha > 0$.

Als $p = 0$, is $x_k = 0$ voor alle $k \in \mathbb{N}$, dus $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. Zij verder $0 < p \leq e$.

Dan is voor $x > 0$ ook $f(x) > 0$. Ter oriëntatie onderzoeken we de grafiek van f en de snijpunten daarvan met $y = x$.

$f(x) = 0$ enkel en alleen voor $x = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

$f'(x) = p(1 - x)e^{-x}$.

$f'(x) = 0$ alleen als $x = 1$ (voor alle p).

Daar $p > 0$ is $f'(x) > 0$ voor $x < 1$ en $f'(x) < 0$ voor $x > 1$.

f is dus maximaal voor $x = 1$.

Het maximum van f is $pe^{-1} = \frac{p}{e}$. Daar $p \leq e$ ligt het punt $(1,\frac{p}{e})$ onder de lijn $y = x$, behalve als $p = e$.

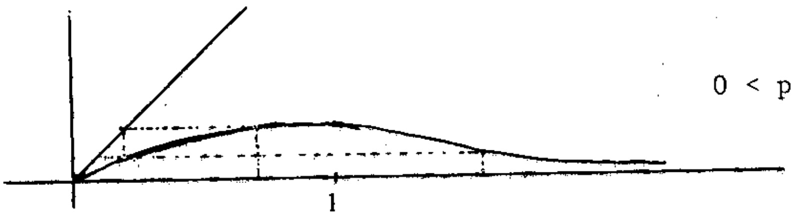
Snijpunten met $y = x$:

Uit $pxe^{-x} = x$ volgt $x = 0$ of $pe^{-x} = 1$; $p = e^x$, $x = \ln p$ (bestaat, want $p > 0$).

De x-coördinaat van het snijpunt buiten de oorsprong is dus negatief als $0 < p < 1$ en positief als $1 < p \leq e$. Voor $p = 1$ is er maar één snijpunt, en wel in 0. Daar voor $p = 1$, $f'(0) = 1$, raakt de grafiek van f de lijn $y = x$ dan in 0. Zo komen we tot de onderscheiding van de volgende relevante gevallen:

A) $0 < p < 1$; B) $p = 1$; C) $1 < p < e$; D) $p = e$.

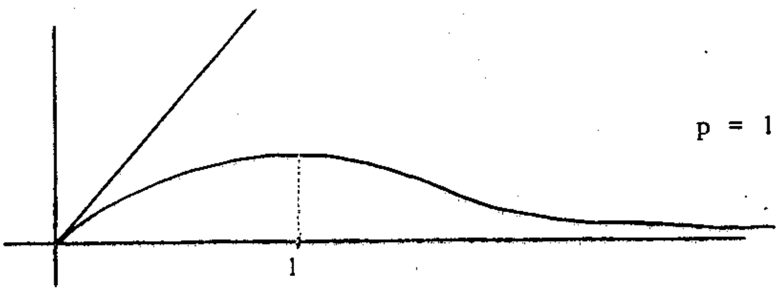
A)



$0 < p < 1$.

Uit de grafiek lezen we af dat in dit geval bij elke keuze van $x_0 > 0$ de rij (x_k) dalend is met limiet 0,

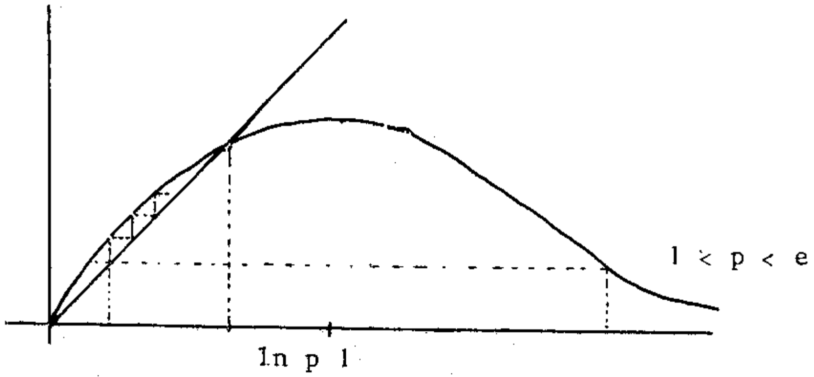
B)



$p = 1$.

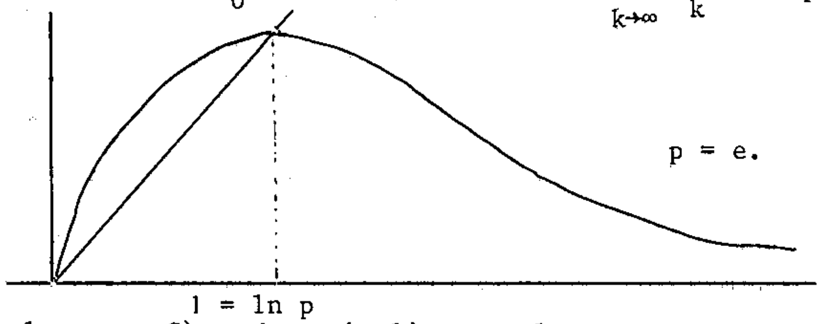
Ook hier is (x_k) monotoon dalend met limiet 0 voor elke $x_0 > 0$.

C)



Daar $1 < p < e$ is $0 < \ln p < 1$. Voor $x_0 = \ln p$, is voor alle $k \in \mathbb{N}$: $x_k = \ln p$. Voor $0 < x_0 < \ln p$ is de rij stijgend met $\lim_{k\to\infty} x_k = \ln p$. Voor $\ln p < x_0 \leq 1$ is de rij dalend met limiet $\ln p$. Voor $x_0 > 1$ is de rij niet voor alle x_0 monotoon, maar wel is $\lim_{k\to\infty} x_k = \ln p$.

D)



Analoog aan C): ook nu is $\lim_{k\to\infty} x_k = \ln p = 1$ voor elke $x_0 > 0$.

<u>Conclusie</u>: Voor alle $p \in [0,e]$ en voor alle $x_0 > 0$ is de rij (x_k) convergent. Voor $0 \leq p \leq 1$ is $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$. Voor $1 < p \leq e$ is $\lim_{k\to\infty} x_k = \ln p$.

Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 41 op zaterdag 25 juni 1977.

1. Bepaal de algemene reële oplossing van de recurrente betrekking

$$2x_{k+2} - 5x_{k+1} + 2x_k + k^2 = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

2. Bepaal voor alle $\alpha \geq 0$ de algemene reële oplossing van de recurrente betrekking

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \underline{b}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

met $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$ en

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2\alpha \\ 2 & 4\alpha \end{bmatrix},$$

en $\underline{b} = [1,2]^T$.

3. Gegeven is de recurrente betrekking

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k, \quad k = 0,1,2,\ldots ,$$

met $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$ en

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

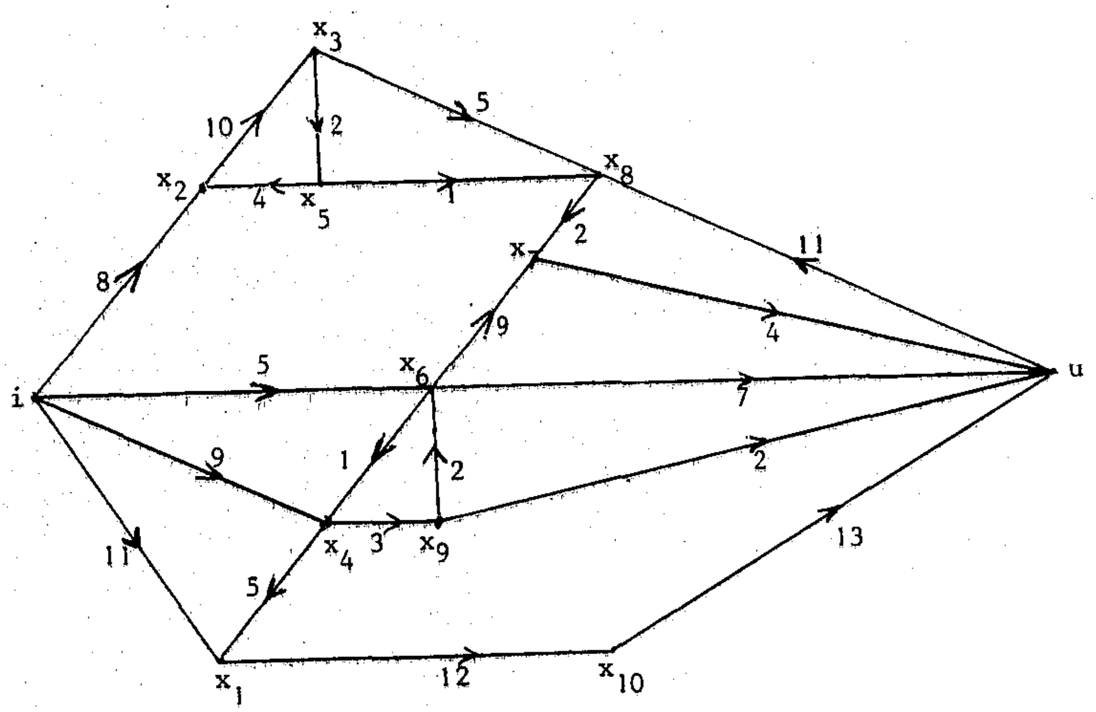
a) Bewijs dat alle oplossingen een limiet hebben.

b) Neem $\underline{x}_0 = [1,0,0]^T$ en bereken $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$.

4. Los op met behulp van de z-transformatie

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 3x_k + 4y_k \\ y_{k+1} &= -x_k - y_k \\ x_0 &= 4,\ y_0 = -1 . \end{aligned} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

5. Gegeven is het volgende transportnetwerk.
De getallen bij de takken geven de capaciteiten aan.



Bepaal de maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

6. Gegeven is de autonome iteratie

$$x_{k+1} = \sqrt{2x_k - p}, \quad k = 0,1,2,\dots .$$

$$x_0 = 2, \ p \in \mathbb{R} .$$

Voor welke waarden van p breekt de iteratie af?
Voor welke waarden van p is de rij (x_k) monotoon stijgend?
Voor welke waarden van p bestaat $\lim_{k\to\infty} x_k$?
Motiveer Uw antwoord.

Uitwerkingen behorende bij het Herkansingsexamen/tentamen Wiskunde 41 op zaterdag 25 juni 1977.

1. $2x_{k+2} - 5x_{k+1} + 2x_k + k^2 = 0.$
Eerst de homogene differentievergelijking: $2x_{k+2} - 5x_{k+1} + 2x_k = 0$. Substitueer $x_k = \lambda^k$: $2\lambda^{k+2} - 5\lambda^{k+1} + 2\lambda^k = 0$. Karakteristieke vergelijking:
$2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$ of $2\lambda^2 - 4\lambda - \lambda + 2 = 0$ of $(2\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 2$
dus algemene oplossing van de homogene vergelijking

$$x_k = A(\tfrac{1}{2})^k + B2^k$$

Probeer als particuliere oplossing: $x_k = ak^2 + bk + c$.
$2\{a(k+2)^2 + b(k+2) + c\} - 5\{a(k+1)^2 + b(k+1) + c\} + 2\{ak^2 + bk + c\} + k^2 = 0.$
$2\{ak^2 + 4ak + 4a + bk + 2b + c\} - 5\{ak^2 + 2ak + a + bk + b + c\} + 2\{ak^2 + bk + c\} + k^2 = 0.$
$k^2(2a - 5a + 2a + 1) + k(8a + 2b - 10a - 5b + 2b) + (8a + 4b + 2c - 5a - 5b - 5c + 2c) = 0.$
$-a + 1 = 0 \rightarrow a = 1.$
$-2a - b = 0 \rightarrow b = -2a = -2.$
$3a - b - c = 0 \rightarrow c = 3a - b = 3 - (-2) = 5.$
Algmene oplossing van de inhomogene vergelijking

$$x_k = A(\tfrac{1}{2})^k + B2^k + k^2 - 2k + 5\ .$$

Controle:
$$\begin{aligned}
&2A(\tfrac{1}{2})^{k+2} + 2B2^{k+2} + 2(k+2)^2 - 4(k+2) + 10\\
&-5A(\tfrac{1}{2})^{k+1} - 5B2^{k+1} - 5(k+1)^2 + 10(k+1) - 25\\
&+2A(\tfrac{1}{2})^k + 2B2^k + 2k^2 - 4k + 10 + k^2 =\\
&= (\tfrac{1}{2})^k\{\tfrac{2}{4} - \tfrac{5}{2} + 2\}A + 2^k\{8 - 10 + 2\}B + k^2(2 - 5 + 2 + 1) + k(8 - 4 - 10 + 10 - 4) +\\
&\qquad + (8 - 8 + 10 - 5 + 10 - 25 + 10)\\
&= A(\tfrac{1}{2})^k 0 + B2^k 0 + k^2 0 + k0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

2. $$\underline{x}_{k+1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2\alpha \\ 2 & 4\alpha \end{bmatrix}\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Eerst homogene stelsel oplossen. De eigenwaarden van A volgen uit

$$\begin{vmatrix} 1 - 5\lambda & 2\alpha \\ 2 & 4\alpha - 5\lambda \end{vmatrix} = 25\lambda^2 - 5(4\alpha + 1)\lambda = 0\ .$$

dus $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \dfrac{4\alpha + 1}{5}$.

Eigenvectoren bij λ_1 uit het stelsel vergelijkingen met matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\alpha \\ 2 & 4\alpha \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Een eigenvector is $\begin{bmatrix} -2a \\ 1 \end{bmatrix}$. Evenzo bij λ_2:

$$\begin{bmatrix} 1 - 4\alpha - 1 & 2\alpha \\ 2 & 4\alpha - 4\alpha - 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4\alpha & 2\alpha \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dus een eigenvector is $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Oplossing homogene stelsel dus

$$\underline{x}_k = \left(\frac{4\alpha + 1}{5}\right)^k c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0^k . c_2 \begin{bmatrix} -2\alpha \\ 1 \end{bmatrix}.$$

N.B. $0^0 = 1$.
We zoeken een oplossing van het inhomogene stelsel. Probeer, als 1 geen eigenwaarde is, dus als $\alpha \neq 1$, $\underline{x}_k = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$.
Substitutie in het stelsel geeft

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ dus } (I - A) \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dit levert

$$\frac{4}{5} p - \frac{2}{5} \alpha q = 1 \qquad 5\text{x}$$

$$-\frac{2}{5} p - \left(\frac{4}{5} \alpha - 1\right) q = 2 \qquad 10\text{x}$$

$+$

dus

$$\left.\begin{aligned} 10(1 - \alpha) q &= 25 \\ -2p + (5 - 4\alpha) q &= 10 \end{aligned}\right\} \text{ dus } q = \frac{5}{2} \frac{1}{1 - \alpha} \text{ en } p = \frac{5}{4} \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Voor $\alpha \neq 1$ is de algemene oplossing dus

$$\underline{x}_k = \frac{5}{4} \frac{1}{1 - \alpha} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_1 \left(\frac{4\alpha + 1}{5}\right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 0^k \begin{bmatrix} -2\alpha \\ 1 \end{bmatrix}, \ c_1 \text{ en } c_2 \text{ reëel}.$$

Als $\alpha = 1$ heeft het homogene stelsel reeds een constante oplossing. We proberen nu het inhomogene stelsel op te lossen door de aanzet

$$\underline{x}_k = k \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}.$$

Substitutie geeft

$$k\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}a+c\\b+d\end{bmatrix} = kA\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} + A\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

Door coëfficiëntenvergelijking zien we dat $A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ is dus eigenvector bij de eigenwaarde 1, dus $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = p\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ voor nader te bepalen $p \neq 0$. Verder is

$$\begin{bmatrix}a+c\\b+d\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

Vullen we in dat $[a,b]^T = p[1,2]^T$ en $\alpha = 1$, dan vinden we

$$\begin{bmatrix}p+c\\2p+d\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}c+2d\\2c+4d\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},$$

dus

$$\begin{aligned}4c - 2d &= -5p + 5\\ -2c + d &= -10p + 10\,.\end{aligned}$$

Bekijk de matrix

$$\begin{pmatrix}4 & -2 & -5p+5\\ -2 & 1 & -10p+10\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0 & 0 & -25p+25\\ -2 & 1 & -10p+10\end{pmatrix},$$

dan zien we dat voor oplosbaarheid nodig en voldoende is $-25p + 25 = 0$, dus $p = 1$ en $[c,d]^T$ moet voldoen aan $-2c + d = 0$. We kiezen de eenvoudigste oplossing: $c = d = 0$. Als particuliere oplossing hebben we dus $\underline{x}_k = k\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ en als algemene oplossing

$$\underline{x}_k = k\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2 0^k\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}, \text{ als } \alpha = 1,\ c_2 \text{ en } c_2 \text{ reëel}\,.$$

3.

a) $\underline{x}_{k+1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\underline{x}_k$.

$$8\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}1-2\lambda & -1 & -1\\ -1 & 1-2\lambda & -1\\ 1 & 1 & 2-2\lambda\end{vmatrix} = (-2\lambda)^3 + (2\lambda)^2\{4\} - 2\lambda\{3+3\} + \\ + \{2+1+1+1+1-2\}\,.$$

$-8\lambda^3 + 16\lambda^2 - 12\lambda + 4 = 0$ of $2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

$\lambda = 1$: $2 - 4 + 3 - 1 = 0$.

$(\lambda - 1)(2\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$.

$$\lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2.2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i \text{ dus } |\lambda_2| = |\lambda_3| = \tfrac{1}{2}\sqrt{1+1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Dit stelsel heeft dus één enkelvoudige dus niet-defectieve eigenwaarde $= 1$ en de andere zijn in absolute waarde < 1. Conclusie: $\lim_{k\to\infty} A^k$ bestaat (st. 3.5.5 (2)).

Omdat $\underline{x}_k = A^k\underline{x}_0$, bestaat ook $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$ voor alle $\underline{x}_0$.

b) Berekening van de eigenvector $\underline{c}$ van A bij $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1-2 & -1 & -1 \\ -1 & 1-2 & -1 \\ 1 & 1 & 2-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dus } \underline{c} = \mu(1,-1,0).$$

Berekening van de eigenvector $\underline{d}$ van A^T bij $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dus } \underline{d} = \tau(1,-1,0).$$

We kiezen $\underline{c} = \underline{d} = [1,-1,0]^T$.

$A^T\underline{d} = \underline{d}$ dus $\underline{d}^TA = d^T$.

$\underline{d}^T\underline{x}_{k+1} = \underline{d}^T(A\underline{x}_k) = (\underline{d}^TA)\underline{x}_k = \underline{d}^T\underline{x}_k$ dus ook $\underline{d}^T\underline{x}_k = \underline{d}^T\underline{x}_0$ voor alle k.

$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \alpha\underline{c}$.

$\lim_{k\to\infty} \underline{d}^T\underline{x}_k = \lim_{k\to\infty} \underline{d}^T\underline{x}_0 = \underline{d}^T\underline{x}_0$ maar ook $\lim_{k\to\infty} d^T\underline{x}_k = d^T\alpha\underline{c}$.

$$\alpha = \frac{\underline{d}^T\underline{x}_0}{\underline{d}^T\underline{c}} = \frac{((1,-1,0),(1,0,0))}{((1,-1,0),(1,-1,0))} = \frac{1}{2} \text{ dus } \lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \tfrac{1}{2}[1,-1,0]^T.$$

4. $\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\underline{x}_k,\ \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$.

z-transformatie: $z^{-1}(\hat{\underline{x}}(z) - \underline{x}_0) = A\hat{\underline{x}}(z)$ of $\hat{\underline{x}}(z) - \underline{x}_0 = zA\hat{\underline{x}}(z)$ of $\hat{\underline{x}}(z) - zA\hat{\underline{x}}(z) = \underline{x}_0$ dus $\hat{\underline{x}}(z) = (I - zA)^{-1}\underline{x}_0$.

$$I - zA = \begin{bmatrix} 1-3z & -4z \\ +z & 1+z \end{bmatrix},\ (I - zA)^{-1} = \frac{1}{1-2z-3z^2+4z^2}\begin{bmatrix} 1+z & +4z \\ -z & 1-3z \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{x}}(z) = \frac{1}{(1-z)^2}\begin{bmatrix} 1+z & 4z \\ -z & 1-3z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-z)^2}\begin{bmatrix} 4+4z-4z \\ -4z-1+3z \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-z)^2}\begin{bmatrix} 4 \\ -1-z \end{bmatrix}.$$

$$\hat{x}_1(z) = \frac{4}{(1-z)^2} = 4\frac{d}{dz}\frac{1}{(1-z)} = 4\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 4\sum_{k=0}^{\infty} kz^{k-1} =$$

$$= 4\sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = 4\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^k .$$

Als $\hat{x}_1$ correspondeert met x_k dan is $x_k = 4(k+1)$ of volgens de tabel $(1-z)^{-n-1} \leftrightarrow \binom{n+k}{n}$, dus hier $(1-z)^{-1-1} \leftrightarrow \binom{1+k}{1} = k+1$.

$$\hat{x}_2(z) = \frac{-1-z}{(1-z)^2} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{(1-z)^2} = \frac{A(1-z)+B}{(1-z)^2} \text{ dus } \left.\begin{aligned} A + B &= -1 \\ -A &= -1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -2 \end{aligned}$$

$$\hat{x}_2(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{-2}{(1-z)^2} \leftrightarrow y_k = 1 - 2(k+1) = -2k-1 \text{ dus } (\underline{x}_k) = \begin{bmatrix} 4k+4 \\ -2k-1 \end{bmatrix}.$$

Controle:

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4k+4 \\ -2k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12k+12-8k-4 \\ -4k-4+2k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4k+8 \\ -2k-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(k+1)+4 \\ -2(k+1)-1 \end{bmatrix}.$$

Andere manier van noteren:

$$\left.\begin{aligned} x_{k+1} &= 3x_k + 4y_k & x_0 &= 4 \\ y_{k+1} &= -x_k - y_k & y_0 &= -1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} z^{-1}\{\hat{x}(z) - 4\} &= 3\hat{x}(z) + 4\hat{y}(z) \\ z^{-1}\{\hat{y}(z) + 1\} &= -\hat{x}(z) - \hat{y}(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(z) - 4 &= 3z\hat{x}(z) + 4z\hat{y}(z) & (1-3z)\hat{x}(z) - 4z\hat{y}(z) &= 4 \\ \hat{y}(z) + 1 &= -z\hat{x}(z) - z\hat{y}(z) & z\hat{x}(z) + (1+z)\hat{y}(z) &= -1. \end{aligned}$$

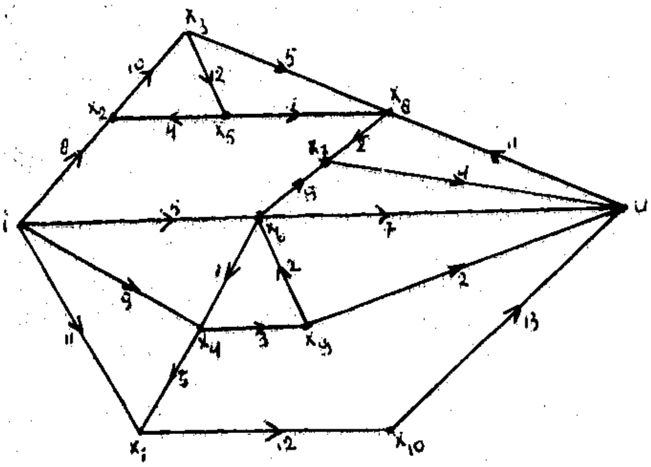
$$\hat{x}(z) = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -4z \\ -1 & 1+z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-3z & -4z \\ z & 1+z \end{vmatrix}} = \frac{4+4z-4z}{1-2z-3z^2+4z^2} = \frac{4}{1-2z+z^2} = \frac{4}{(1-z)^2} .$$

$$\hat{y}(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1-3z & 4 \\ z & -1 \end{vmatrix}}{(1-z)^2} = \frac{-1+3z-4z}{(1-z)^2} = \frac{-1-z}{(1-z)^2} = \frac{1-z}{(1-z)^2} - \frac{2}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{(1-z)^2} .$$

Hieruit

$$x_k = 4(k+1) \text{ en } y_k = -2k-1 .$$

5.



$A = \{i, x_2, x_3, x_5, x_8, x_4, x_1\}$.

$B = \{x_6, x_7, x_9, x_{10}, u\}$.

$S(A,B) = \{x_8x_7, ix_6, x_4x_9, x_1x_{10}\}$.

$C(A,B) = 2 + 5 + 3 + 12 = 22$.

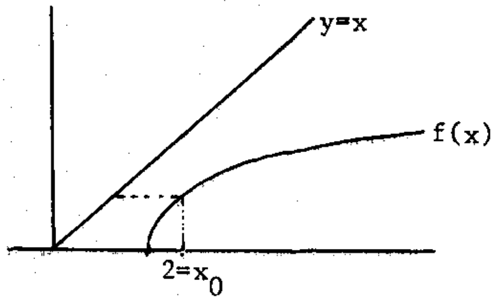
		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	
11	ix_1	0	11	11	11	11	11	11	11
8	ix_2	0						1	2
9	ix_4	0		1	3	4	4	4	4
5	ix_6	0					5	5	5
12	x_1x_{10}	0	11	12	12	12	12	12	12
10	x_2x_3	0						1	2
2	x_3x_5	0						1	1
5	x_3x_8	0							1
5	x_4x_1	0		1	1	1	1	1	1
3	x_4x_9	0			2	3	3	3	3
4	x_5x_2	0							
1	x_5x_8	0						1	1
1	x_6x_4	0							
9	x_6x_7	0							
7	x_6u	0				1	6	6	6
4	x_7u	0						1	2
2	x_8x_7	0						1	2
2	x_9x_6	0				1	1	1	1
2	x_9u	0			2	2	2	2	2
13	$x_{10}u$	0	11	12	12	12	12	12	12
		0	11	12	14	15	20	21	22

Bij deze stroom gaat de constructie van A als volgt: $i \in A$; omdat ix_2 niet verzadigd, $x_2 \in A$; zo ook x_3, x_5 en x_8 in A. Verder: ix_4 niet verzadigd, dus $x_4 \in A$ en dus ook $x_1 \in A$ want x_4x_1 niet verzadigd. B bevat de overige knopen. S(A,B) bestaat uit alle takken met beginpunt in A en eindpunt in B.

Omdat de capaciteit van deze snede gelijk is aan de stroomsterkte (22) is deze stroomsterkte maximaal en de snedecapaciteit minimaal. Immers, voor elke stroom geldt: stroomsterkte $\leq$ capaciteit van elke snede.

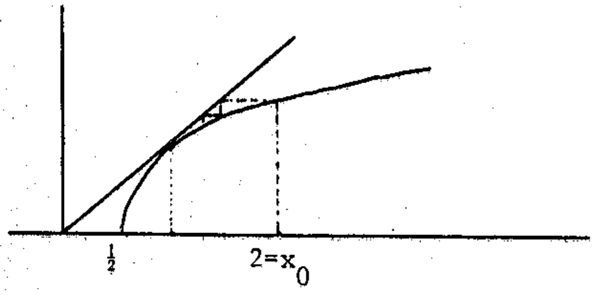
6. $x_{k+1} = f(x_k)$ met $f(x) = \sqrt{2x - p}$. f is gedefinieerd voor $x \geq \frac{p}{2}$, de grafiek van f is "halve" parabool. Voor de snijpunten van $y = x$ met $y = \sqrt{2x - p}$ geldt $\sqrt{2x - p} = x$, dus $x^2 - 2x + p = 0$, $x \geq 0$; $(x - 1)^2 = 1 - p$, $x \geq 0$; $x = 1 \pm \sqrt{1 - p}$, $x \geq 0$, heeft voor $p > 1$ geen oplossing, voor $p = 1$ één oplossing, voor $0 \leq p < 1$ 2 niet-negatieve oplossingen en voor $p < 0$ één positieve oplossing.
Dit leidt tot de volgende gevallen:

$p > 1$



iteratie breekt af.

$p = 1$

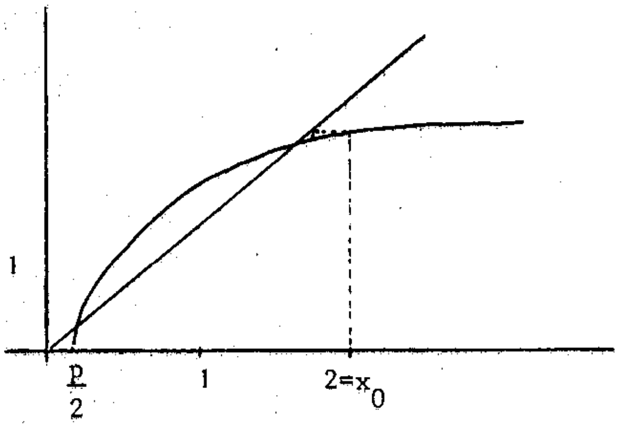


We lezen uit de grafiek af:

(x_k) monotoon dalend,

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 1.$

$0 < p < 1$



In dit geval is

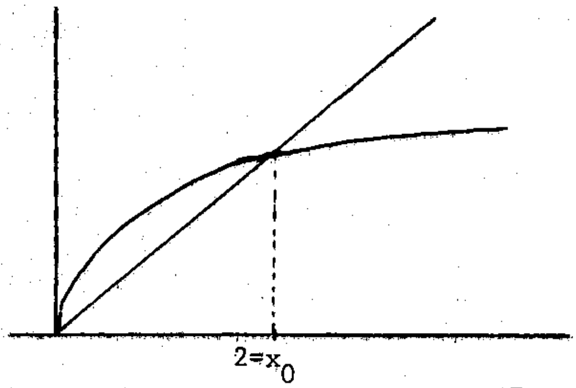
$0 < 1 + \sqrt{1-p} < 2$ en

$0 < 1 - \sqrt{1-p} < 1$

x_k is monotoon dalend.

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 1 + \sqrt{1-p}.$

$p = 0$



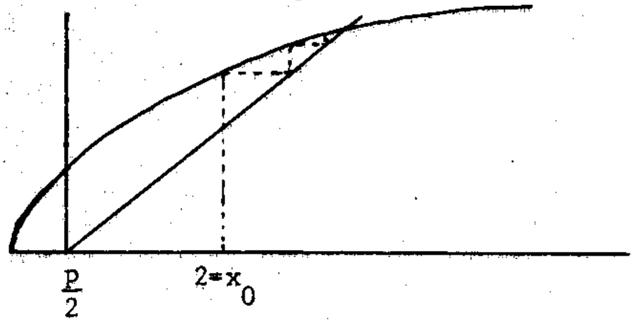
$1 + \sqrt{1-p} = 2$

$1 - \sqrt{1-p} = 0.$

Voor alle k is nu $x_k = 2$, dus

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 2.$

$p < 0$



$1 + \sqrt{1-p} > 2.$

De rij (x_k) is nu monotoon stijgend en $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 1 + \sqrt{1-p}.$

Derhalve: de iteratie breekt af als $p > 1$; de rij (x_k) is monotoon stijgend uitsluitend als $p < 0$; $\lim_{k\to\infty} x_k$ bestaat en is gelijk aan $1 + \sqrt{1 - p}$ voor $p \leq 1$.

Een formeel bewijs dat voor $p < 0$ de rij (x_k) monotoon stijgend is en een limiet heeft gaat als volgt: We bewijzen eerst met volledige inductie, dat (x_k) stijgend is:

1) $x_1 = \sqrt{4 - p} > \sqrt{4} = 2$, want $p < 0$, dus $x_1 > x_0$.

2) Als $x_k > x_{k-1}$, dan $x_{k+1} = f(x_k) > f(x_{k-1})$ want f is stijgend. Dus dan geldt $x_{k+1} > x_k$.

3) Dus geldt voor alle $k \in \mathbb{N}$: $x_k > x_{k-1}$ d.w.z. de rij (x_k) is stijgend.

Vervolgens tonen we aan dat (x_k) begrensd is, door te bewijzen dat voor alle $k \in \mathbb{N}$ geldt $x_k < \xi := 1 + \sqrt{1 - p}$.

1) $x_0 < \xi$, want $1 + \sqrt{1 - p} > 1 + \sqrt{1} = 2$, daar $p < 0$.

2) Als $x_k < \xi$, dan $x_{k+1} = f(x_k) < f(\xi)$, want f is stijgend. Verder is $f(\xi) = \xi$, dus $x_{k+1} < \xi$.

3) Dus voor alle $k \in \mathbb{N}$ is $x_k < \xi$.

De rij (x_k) is dus monotoon stijgend en naar boven begrensd, dus $\lim_{k\to\infty} x_k$ bestaat.

De limiet ℓ voldoet aan $\ell = f(\ell)$, dus er is maar 1 mogelijkheid: $\ell = 1 + \sqrt{1 - p}$.