TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

en

Antwoorden + Oplossingen

bij

WISKUNDE 41

(BDK-IV)

Voorjaarssemester 1981

Bibl / Mag

THE
Technische Hogeschool
Eindhoven

Dictaatnummer 2.275
Prijs f. 6,00

Onderafdeling der Wiskunde en Informatica

Vraagstukken en antwoorden bij het college

Wiskunde 41

41

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het college

WISKUNDE 41

Voorjaarssemester 1981

Inhoudsbeschrijving
Vraagstukken bij WISKUNDE 41
Voorjaarssemester 1981

TENTAMENS + UITWERKINGEN(1977-1980):

JdG, 12 Juli 2005

Hoofdstuk I.

1.1.

1. Een bank geeft op een beleggingsrekening 100 p % samengestelde interest per jaar. Jaarlijks op 1 januari wordt de rente met het uitstaande kapitaal samengesteld.
Noem x_k het saldo per 1 januari na k jaren (na de storting), aangenomen dat tevoren het saldo op de rekening 0 was. Geef een recurrente betrekking tussen x_{k+1} en x_k en bepaal x_k.

2. Gegeven is de rij

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}, \qquad n = 0,1,2,\ldots .$$

Bewijs:

a) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $\qquad n = 0,1,2,\ldots$

b) $x_n = F_n$, $\qquad n = 0,1,2,\ldots$

waarin (F_n) de rij van Fibonacci voorstelt.

3. Gegeven is de rij

$$x_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Bewijs:

a) $x_{n+1} = 6x_n - 4x_{n-1}$, $\qquad n = 1,2,3,\ldots$

b) x_n is een natuurlijk getal, $\qquad n = 0,1,2,3,\ldots$

c) x_n is deelbaar door 2^n, $\qquad n = 0,1,2,3,\ldots$

4. Bewijs dat voor de rij (F_n) van Fibonacci geldt:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^n, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

5. Gegeven is de rij

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} a^{k-i}\, i\ , \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

Bewijs:

$$x_{k+1} = ax_k + k + 1\ .$$

6. Beschouw de rijen bestaande uit n nullen of enen, waarin geen twee nullen naast elkaar staan.
Laat x_n het aantal van deze rijen zijn.
Bewijs:

a) $$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}\ , \qquad n = 3,4,5,\ldots$$

b) $$x_n = F_{n+1}\ , \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

7. Laat x_n het aantal rijen zijn bestaande uit n getallen, 0, 1 of -1, waarin geen twee getallen 1 of twee getallen -1 naast elkaar staan.
Bewijs:

$$x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}\ , \qquad n = 2,3,4,\ldots$$

8. Een lichtstraal met intensiteit I_0 valt loodrecht op een plaat absorberend materiaal. De dikte van de plaat is d.
Experimenteel is gebleken dat de absorptie in een zeer dun laagje met dikte h bij benadering gelijk is aan λIh. Hierin is I de intensiteit van het op het laagje vallende licht en λ is een evenredigheidsconstante, die de absorptiecoëfficiënt genoemd wordt.
We denken ons de plaat verdeeld in n dunne laagjes van gelijke dikte h.
Noem de intensiteit van het uit het k-de laagje tredende licht I_k.
Stel een recurrente betrekking op voor I_k.
Beschouw I_n en bepaal de intensiteit van de uit de plaat tredende lichtstraal.

9. Er zijn n kooien opgesteld in een rechte lijn. In deze kooien moeten k niet van elkaar te onderscheiden leeuwen worden ondergebracht en wel zó,

dat in een kooi hoogstens één leeuw zit en niet in twee opeenvolgende kooien leeuwen zitten. Beschouw hierbij de waarden $n = 1,2,\ldots$ en $k = 0,1,2,\ldots$.

Noem het aantal manieren waarop dit gerealiseerd kan worden $x_{n,k}$.

a) Definieer $x_{n,0} = 1$ voor $n = 1,2,\ldots$ en bewijs

$$x_{n,k} = x_{n-1,k} + x_{n-2,k-1}$$

voor $n = 2,3,\ldots$ en $k = 1,2,\ldots$

b) Maak een tabel en lees hieruit af aan welke binomiaalcoëfficient $x_{n,k}$ gelijk is.

c) Breng opgave 6 met het probleem van de leeuwen en de kooien in verband en leid af:

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n-k+1}{k} .$$

10. De rij punten $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ op de eenheidscirkel wordt op de volgende wijze gegeven:

$z_0 = 1$, $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$; z_{n+1} is het spiegelbeeld van z_{n-1} in de lijn, die 0 met z_n verbindt $(n = 1,2,\ldots)$. Bepaal z_n en onderzoek het gedrag van de rij voor

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4} .$$

N.B. Men kan de rij z_n interpreteren als de opeenvolgende punten waar een biljartbal tegen de rand van een cirkelvormig biljart stuit.

1.3 t/m 1.5.

Beschouw in de vraagstukken 1 t/m 6 de autonome iteratie

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0,1,2,\ldots \;.$$

Beantwoord daarbij de volgende vragen.

a) Voor welke waarden van x_0 is de oplossing (x_k) monotoon dan wel alternerend?

b) Bepaal stationaire punten en stabiele punten van de iteratie.

c) Voor welke waarden van x_0 is de oplossing (x_k) convergent? Geef de limiet voor deze waarden van x_0.

d) Welke oplossingen van de iteratie zijn stabiel?

1. $f(x) = \frac{1}{x}$.

2. $f(x) = \ln(1 + x)$.

3. $f(x) = e^{-x}$.

4. $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

5. $f(x) = x^3 - 6$.

6. $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$.

7. Beschouw de iteratie

$$x_{k+1} = ax_k^2 , \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

a) Geef de algemene oplossing.

b) Ga na voor welke waarden van a en x_0 de rij (x_k) convergeert en bepaal in dat geval $\lim_{k\to\infty} x_k$.

8. Beschouw de autonome iteratie

$$x_{k+1} = 1 + ax_k^2 , \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

a) Toon aan dat de iteratie stabiele oplossingen heeft voor $-\frac{3}{4} < a \leq \frac{1}{4}$.
b) Laat zien, dat voor $a = -\frac{3}{4}$ bifurcatie optreedt.
c) (juni 1980) Kies $a = -1$ en $x_0 = \frac{1}{10}$. Druk x_{k+2} uit in x_k en bepaal het getal η waarvoor geldt: $\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \eta$ (Schets een grafiek.)

9. Bewijs, dat in 1.1., opgave 7, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ bestaat.
Bereken deze limiet.

10. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y' = y - y^2 .$$

De integraalkromme van deze D.V. die door het punt $(0,\frac{1}{2})$ gaat, kan men numeriek benaderen volgens de methode van Euler (Zie Wiskunde 39).
Dit procédé leidt tot de volgende autonome iteratie:

$$y_{k+1} = y_k + h(y_k - y_k^2)$$

$$y_0 = \tfrac{1}{2}$$

waarin $h > 0$; $k = 0,1,2,\ldots$.
a) Toon aan dat $\lim_{k\to\infty} y_k$ bestaat voor $0 < h < 2$ en bepaal de limiet.
b) Beschouw het geval $h = 2$ en laat zien dat ook dan convergentie optreedt door aan te tonen:

als $\frac{1}{2} < y_k < 1$, dan $y_k < y_{k+2} < 1$.

(Schets een grafiek.)

Hoofdstuk II.

2.2. Los de volgende recurrente betrekkingen op:

1. $2x_{k+1} = x_k + 2$, $x_0 = 4$.

2. $x_{k+1} = 2x_k + k$, $x_0 = 0$.

3. $x_{k+1} = x_k + k$, $x_0 = 0$.

4. $x_{k+1} = 2x_k + 2k^2$, $x_0 = 0$.

5. $x_{k+1} = 2x_k + 3^{-k}$, $x_0 = 1$.

6. $x_{k+1} = 3x_k + k.3^k$, $x_0 = 1$.

7. $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + k!$, $x_0 = 0$.

8. $x_{k+1} = 5x_k + (-1)^k$, $x_0 = 2$.

9. $x_{k+1} = 2x_k + 2^k$, $x_0 = 4$.

10. $x_{k+1} = 5x_k + k^2 + 2k + 3$, $x_0 = 0$.

11. $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + k.2^{-k}$, $x_0 = 1$. Bepaal $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

12. $x_{k+1} = ax_k + k + 1$, $x_0 = 0$, (vergelijk I, 1.1 opgave 5).

13. $x_{k+1} = \frac{k}{k+1} x_k + 1$, $x_0 = 1$.

14. $x_{k+1} = 2(1 + \frac{1}{k+1})x_k + 2k + 4$, $x_0 = 1$.

15. $x_{k+2} = 2x_{k+1} + x_k$, $k = 0,1,2,\ldots$ (vergelijk I, 1.1, opgave 7).

16. $x_{k+2} - 5x_{k+1} + 6x_k = 0$, $k = 0,1,2,\ldots$

17. $x_{k+2} - 7x_{k+1} + 10x_k = 4k$.

18. $x_{k+2} - 4x_{k+1} + 4x_k = 2^{k+1}$.

19. $x_{k+2} - 6x_{k+1} + 9x_k = 0$.

20. $x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k = 1$.

21. a) $x_{k+2} - 4x_k = 5.3^k$.

b) $x_{k+2} - 4x_k = 2^k$.

22. $x_{k+2} + x_k = 1$.

23. $x_{k+2} + 2x_{k+1} + 2x_k = k$.

24. Bereken voor α reëel en $-2 \le \alpha \le 2$ de determinant met n rijen en n kolommen

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 & \ldots & . \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \ldots & . \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \ldots & . \\ . & . & . & & \ldots & . \\ 0 & . & . & & \ldots & \alpha \end{vmatrix}$$

Aanwijzing: Leid een recurrente betrekking voor D_n af.

25. Gegeven is de recurrente betrekking

$$x_{k+2} - 2\lambda x_{k+1} + \lambda^2 x_k = 0, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda \neq 0, \ k = 0,1,2,\ldots .$$

a) Bewijs:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \lambda ,$$

als deze limiet bestaat.

b) Bepaal de algemene oplossing van de gegeven recurrente betrekking. Laat zien, dat

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k}$$

bestaat voor elke oplossing (x_k) ongelijk aan de nuloplossing.

26. Bepaal de algemene oplossing van

$$x_{k+2} + 2ax_{k+1} + ax_k = (-1)^k, \; k = 0,1,2,\ldots, \; a \in \mathbb{R}, \; a \neq 0.$$

27. Los op voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x_{k+2} - 2\alpha x_{k+1} + (1 + \alpha^2)x_k = 0 .$$

Voor welke waarden van α zijn alle oplossingen begrensd?

28. Los op voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x_{k+2} + (\alpha + 1)x_{k+1} + \alpha x_k = (-1)^k, \quad k = 0,1,2,\ldots \; , \; \alpha \neq 0.$$

29. Los op:

$$x_k \cdot x_{k+2} = x_{k+1}^2, \quad x_0 = 1, \; x_1 = 2 .$$

30. Los op:

$$x_{k+3} - 7x_{k+2} + 16x_{k+1} - 12x_k = 0 .$$

31. Los op:

$$x_{k+4} - 2x_{k+3} + 2x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k = 0 , \qquad x_0 = x_1 = 0 .$$
$$x_2 = x_3 = 1 .$$

32. Neem aan dat het nationaal inkomen over elk jaar is opgebouwd uit drie componenten:

1) Uitgaven voor de consumptie.
2) Investeringen in het particuliere bedrijfsleven.
3) Overheidsuitgaven.

Neem aan:

(i) dat de consumptieuitgaven in elk jaar evenredig zijn met het nationaal inkomen over het voorafgaande jaar.
(ii) dat de particuliere investeringen in een jaar evenredig zijn met de toename van de consumptie in dat jaar.
(iii) dat de overheidsuitgaven ieder jaar dezelfde zijn.

Stel de jaarlijkse overheidsuitgaven gelijk aan 1 (keuze der eenheid).
Laat zien, dat het nationaal inkomen y_k over het k-de jaar voldoet aan een betrekking van de vorm

$$y_k = p_1 y_{k-1} - p_2 y_{k-2} + 1, \quad p_1 \text{ en } p_2 \text{ constant} .$$

Neem vervolgens $p_1 = 1$ en $p_2 = \frac{1}{2}$,
Bewijs dat in dit geval y_k een gedempte slingerbeweging vertoont en dat $\lim_{k\to\infty} y_k = 2$.

33. Laat N_t de grootte zijn van een zekere bevolking aan het eind van jaar t, $t = 0,1,2,\ldots$. De grootte van de bevolking wordt door 2 factoren beïnvloed:

(i) een relatieve groei van 2% per jaar.
(ii) bovendien een constant verlies van 10 individuen per jaar.

Neem $N_0 = 2500$ en bereken N_t, $t = 1,2,3,\ldots$.
Na hoeveel jaar is de bevolking verdubbeld?

Hoofdstuk III.

Geef de oplossingen (in reële vorm) van de volgende recurrente betrekkingen.

1. a) $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$; $\quad k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$.

   b) $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \underline{b}$ met $\underline{b} \in \mathbb{R}^2$ constant

2. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + 2^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\quad k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

3. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\quad k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

4. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\quad k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$; $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$.

6. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$; $\quad k = 0,1,2,\ldots$

   $$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \ \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, $\quad k = 0,1,2,\ldots$

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$; $20\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\quad k = 0,1,2,\ldots$

   $$A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}.$$

   Bepaal bovendien $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$.

10. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, $k = 0,1,2,\ldots$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \ \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

11. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, $k = 0,1,2,\ldots$

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} .$$

12. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, $k = 0,1,2,\ldots$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

a) $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

13. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

14. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$; $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

15. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$; $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

16. In een land zijn 3 politieke partijen A, B en C.
Jaarlijks verliest partij A $\frac{1}{3}$ van zijn aanhang aan partij B en $\frac{1}{3}$ aan partij C.
Partij B verliest de helft van zijn aanhang aan partij A en verliest niet aan C.
Partij C verliest de helft van zijn aanhang aan partij B en verliest niet aan A.
Neem aan dat de bevolkingsgrootte constant 90.000 is.
Bewijs dat de grootte der partijen A, B en C nadert tot een stabiele limiet toestand.

17. Stel dat in de beroepen het volgende onderscheid wordt aangebracht: academisch, geschoold, ongeschoold.
Uit een onderzoek is gebleken dat

(i) van de kinderen van academici zijn 70% academicus, 20% geschoold en 10% ongeschoold.

(ii) van de kinderen van geschoolden zijn 20% academicus, 60% geschoold en 20% ongeschoold.

(iii) van de kinderen der ongeschoolden zijn 20% academicus, 30% geschoold en 50% ongeschoold.

Neem aan dat ieder lid der beroepsbevolking één kind heeft in de beroepsbevolking.

Bij het begin van de registratie waren er 16 miljoen academici, 18 miljoen geschoolden, 1 miljoen ongeschoolden.

Geef de verdeling over de beroepen in de k-de generatie en bepaal de stabiele eindtoestand.

18. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$; $\alpha \in \mathbb{R}$; $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$; $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Bewijs: $A^k = \begin{bmatrix} 1 & 2k & k^2\alpha \\ 0 & 1 & k\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Geef met behulp van (a) de algemene oplossing.

19. $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$, $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, $k = 0,1,2,\ldots$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Bereken A^k en los daarmee het stelsel op.

20.
$$\underline{x}_{k+1} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}\underline{x}_k + \begin{bmatrix}-1\\ 4\\ 0\end{bmatrix}, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

Bewijs, dat $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$ bestaat. Bepaal deze limiet.

21.
$$\underline{x}_{k+1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\underline{x}_k, \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} .$$

Onderzoek, of $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$ bestaat. Zo ja, bepaal deze limiet.

22.
$$\underline{x}_{k+1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\underline{x}_k + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

Bepaal $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$.

23.
$$\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & -2\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{3} & -21\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{24} & 24\\ 0 & 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}\underline{x}_k, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

a) Voor welke waarden van α zijn alle oplossingen begrensd? ($\alpha \in \mathbb{R}$).

b) Als $\underline{x}_0 = [1\ ,2,0\ ,10]^T$, bepaal dan $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$ voor die waarden van α waarvoor deze limiet bestaat.

24.
$$\underline{x}_{k+1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\underline{x}_k, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

Bewijs, dat $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$ bestaat.

25.
$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}. \quad \underline{c}^T = (\tfrac{3}{2}, 1, 1) .$$

Bereken $A\underline{c}$ en bepaal $\lim_{k\to\infty} A^k$.

26.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ga na of A^k begrensd is en of $\lim_{k\to\infty} A^k$ bestaat.

27.
$$\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \underline{x}_k, \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bewijs, dat $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$ bestaat en bepaal deze limiet.

28. Dezelfde vraag voor
$$\underline{x}_{k+1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}_k, \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

29. Dezelfde vraag voor
$$\underline{x}_{k+1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}_k, \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

30.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bewijs, dat A^k begrensd is, $k = 0,1,2,\ldots$. Ga na, of $\lim_{k\to\infty} A^k$ bestaat.

31. Neem aan, dat in een stad twee politieke partijen A en B bestaan. Van jaar op jaar behoudt partij A 70% van zijn aanhang, verliest 20% van zijn aanhang aan partij B en 10% van zijn aanhang wordt partijloos. Partij B behoudt 85%, verliest 10% aan partij A en 5% van de aanhang van B wordt partijloos. Van de partijlozen voegen zich jaarlijks 2000 personen bij partij A en eveneens 2000 personen bij partij B.
Bewijs dat de grootte van beide partijen nadert tot een limiet, die niet afhangt van de begintoestand en bepaal die limiet.

Tabel voor de z-transformatie

rij	z-getransformeerde
a_k	$\hat{a}(z)$
λa_k	$\lambda\hat{a}(z)$
$a_k + b_k$	$\hat{a}(z) + \hat{b}(z)$
a_{k+1}	$z^{-1}\{\hat{a}(z) - a_0\}$
a_{k+2}	$z^{-2}\{\hat{a}(z) - (a_0 + a_1 z)\}$
a_{k+n}	$z^{-n}\{\hat{a}(z) - (a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1})\}$
a_{k-1}	$z\hat{a}(z)$
ka_k	$z\,\frac{d\hat{a}}{dz}$
$\alpha^k a_k$	$\hat{a}(\alpha z)$
1	$\frac{1}{1 - z}$
k	$\frac{z}{(1 - z)^2}$
α^k	$\frac{1}{1 - \alpha z}$
k^2	$\frac{z(1 + z)}{(1 - z)^3}$
δ_k	1
$1/k!$	e^z
$\begin{cases} a_k = 1/k \ (k \geq 1) \\ a_0 = 0 \end{cases}$	$-\log(1 - z)$
$\begin{cases} a_k = \binom{n}{k} \ (k = 0,\ldots,n) \\ a_k = 0 \ (k \geq n + 1) \end{cases}$	$(1 + z)^n$
$\binom{n+k}{n}$	$(1 - z)^{-n-1}$
$\binom{2k}{k}$	$(1 - 4z)^{-\frac{1}{2}}$

Hoofdstuk IV.

Los op met behulp van z-transformatie:

1. $x_{k+1} + x_k = 2$
   $x_0 = 0.$

2. $x_{k+1} - x_k = 1$
   $x_0 = 1.$

3. $x_{k+2} + 3x_{k+1} + 2x_k = 1$
   $\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \end{array}\right\}.$

4. $x_{k+2} + 2x_{k+1} + x_k = 3$
   $\left.\begin{array}{l} x_0 = 3 \\ x_1 = -1 \end{array}\right\}.$

5. $x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k = 0$
   $\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \end{array}\right\}.$

6. $x_{k+2} + x_k = 1$
   $\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array}\right\}.$

7. $x_{k+2} + 2x_{k+1} + 2x_k = 3$
   $\left.\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_1 = 1 \end{array}\right\}.$

8. $x_{k+1} = x_k + 3y_k + 1$
   $y_{k+1} = x_k - y_k$
   $x_0 = y_o = 0 .$

9. $x_{k+1} = 2x_k - y_k$
   $y_{k+1} = 4x_k - 3y_k$
   $x_0 = 1, \ y_0 = 0 .$

10. $x_{n+1,k+1} = x_{n,k} + x_{n,k+1}$, $n = 0,1,2,\ldots$
$k = 0,1,2,\ldots$, met de beginwaarden $x_{n,k} = 0$
als $n = 0$ of $k = 0$.

11. $x_{n,k} = x_{n-1,k} + x_{n-2,k-1}$,
$n = 2,3,4,\ldots$; $k = 1,2,3,\ldots$.
$x_{0,0} = 1$; $x_{0,k} = 0$ als $k \geq 1$;
$x_{1,0} = x_{1,1} = 1$; $x_{1,k} = 0$, als $k \geq 2$;
$x_{n,0} = 1$, als $n \geq 2$. (Vergelijk I, 1.1, opgave 9.)

(Aanwijzing: breng de opgave terug tot opgave 10 door de transformatie $x_{n,k} \to y_{n-2k+1,k+1}$ toe te passen, gevolgd door de substitutie $m = n-2k$; bepaal vervolgens geschikte beginwaarden.)

12. $(k + 1)x_{k+1} + kx_k = 100x_k$; $k = 0,1,2,\ldots$
$x_0 = 1$.

13. $x_{k+1} = x_k + \frac{k-1}{k!}$; $k = 0,1,2,\ldots$
$x_0 = 1$.

14. $x_{k+1} = 2x_k + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$, $k = 0,1,2,\ldots$
$x_0 = 0$.

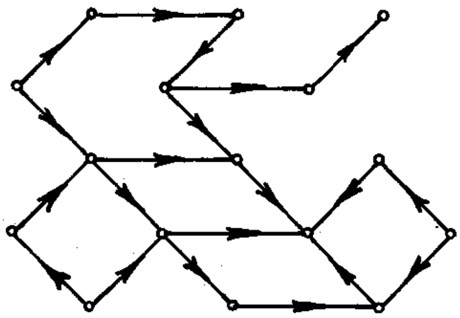
15. $x_{k+1} = -x_k + \frac{1}{2k+1}$, $k = 0,1,2,\ldots$
$x_0 = 1$.

Hoofdstuk V.

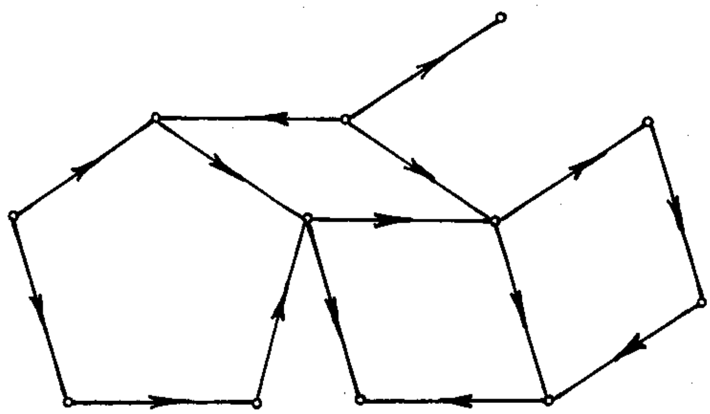
5.2.

1. Nummer de knopen in de volgende grafen zodanig, dat voor iedere tak geldt: nummer b(t) < nummer e(t).

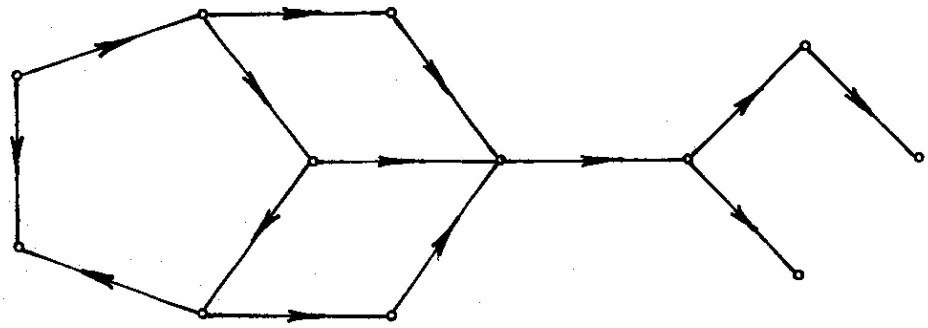
a)



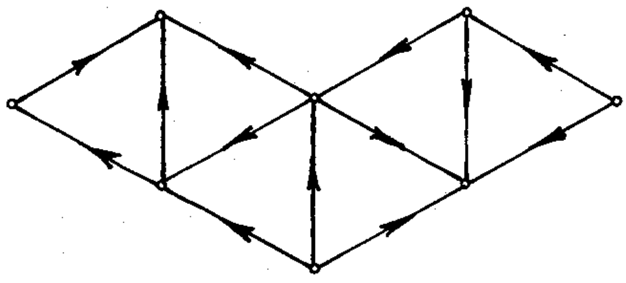
b)



c)

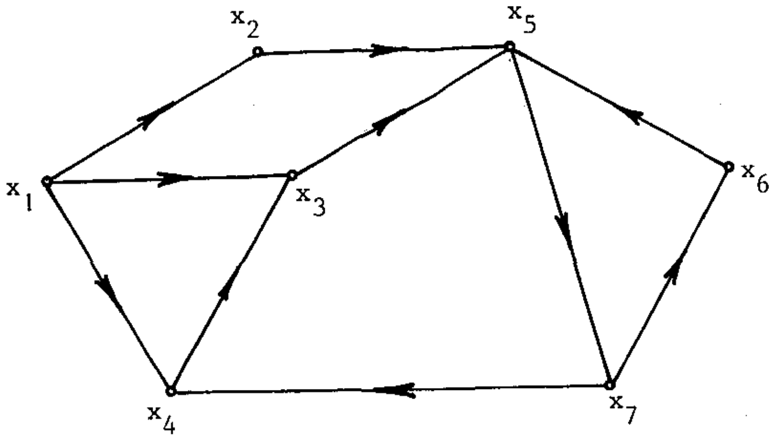


d)

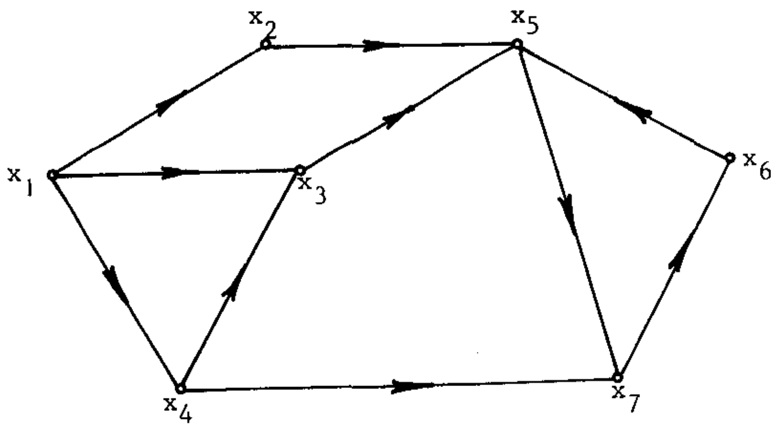


2. Onderzoek of de volgende grafen kringen bevatten.

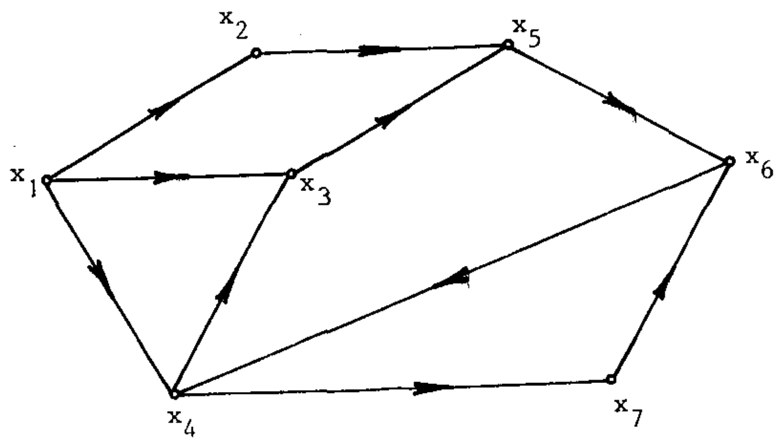
a)



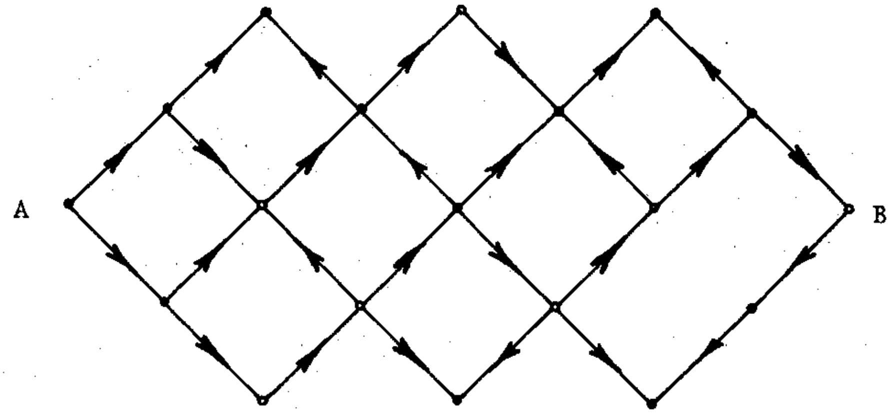
b)



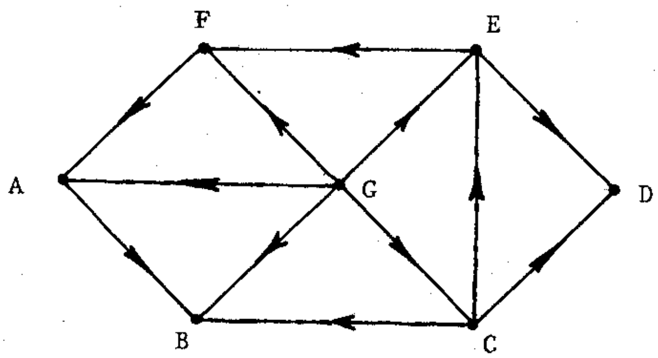
c)



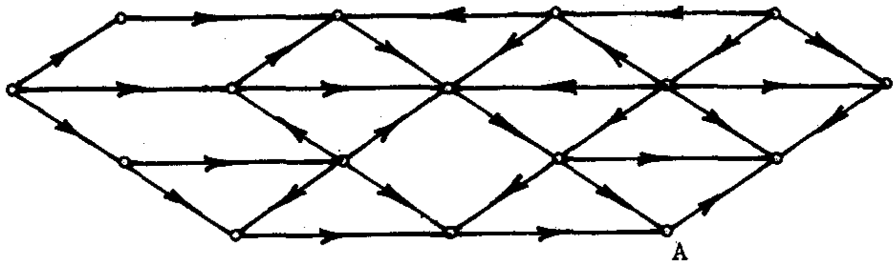
3. a) Bevat onderstaande gerichte graaf kringen?
   Motiveer Uw antwoord.
   b) Bepaal in deze graaf de lengte van de kortste weg tussen de knopen A en B.



4. a) Nummer in de volgende gerichte graaf de knopen zodanig dat voor iedere tak het nummer van de beginknoop kleiner is dan het nummer van de eindknoop.
   b) Keer nu de pijl tussen B en C om.
   Lukt het weer om zo een nummering als onder a) gevraagd te geven?
   Zo nee, waarom niet?



5. Beschouw de volgende graaf.

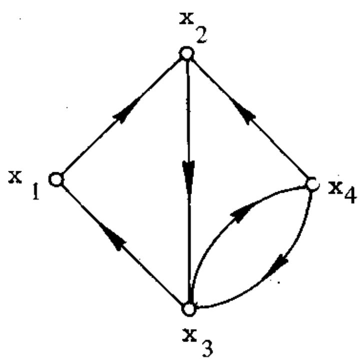


a) Bevat deze graaf kringen?

b) Bepaal de rang van de met A benoemde knoop.

5.3 en 5.4.

1. Gegeven is de volgende gerichte graaf.

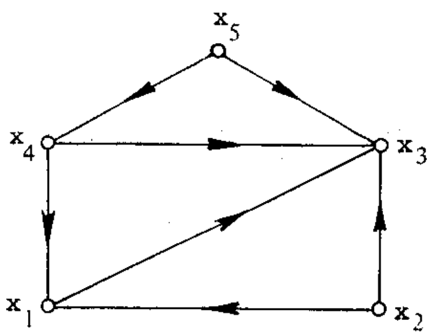


a) Bepaal de knopenmatrix van deze graaf.

b) Bewijs, dat in deze graaf elke knoop bereikbaar is vanuit elke andere knoop via een weg ter lengte hoogstens drie.

c) Wat is de bereikbaarheidsmatrix van de graaf?

2. Gegeven is de gerichte graaf.



a) Bepaal de knopenmatrix.

b) Bewijs dat in deze graaf geen kringen voorkomen.

c) Bepaal de bereikbaarheidsmatrix.

3. Een gerichte graaf met zes knopen $a_1, a_2, \ldots, a_6$ heeft als knopenmatrix

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

a) Toon aan dat de graaf geen kringen bevat.

b) Bereken tussen ieder tweetal knopen het aantal wegen ter lengte twee.

c) Toon aan dat in deze graaf juist één weg ter lengte vijf voorkomt en geen weg ter lengte zes.

d) Bepaal de bereikbaarheidsmatrix van deze graaf.

4. Een gerichte graaf met vier knopen a_1, a_2, a_3, a_4 heeft als knopenmatrix

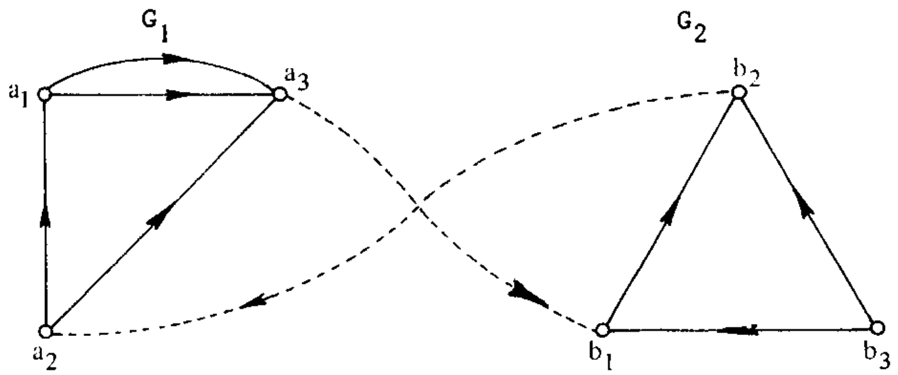
$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

a) Toon aan dat de graaf kringen bevat.

b) Bepaal de bereikbaarheidsmatrix van deze graaf.

5. Bewijs dat voor een graaf G zonder kringen geldt: $R(G) = \sigma(I - A)^{-1}$, waarin A de knopenmatrix van de graaf is.

6. Beschouw de grafen G_1 en G_2:



Geef de knopenmatrices A_1 en A_2 van deze grafen en bewijs dat G_1 en G_2 geen kringen bevatten. We maken nu een nieuwe graaf met zes knooppunten a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 door a_3 te verbinden met b_1 (zie tekening).
Geef de knopenmatrix van deze nieuwe graaf G en toon aan dat deze graaf geen kringen bevat.
Vervolgens verbinden we b_2 met a_2 (zie tekening). Welke consequenties heeft dit voor de knopenmatrix van deze graaf?
Toon aan dat de laatste graaf wel kringen heeft.
Schrijf voor alle grafen de bereikbaarheidsmatrix op.

7. De matrix A zij de knopenmatrix van een gerichte graaf met 8 knopen, genummerd x_1 tot en met x_8

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

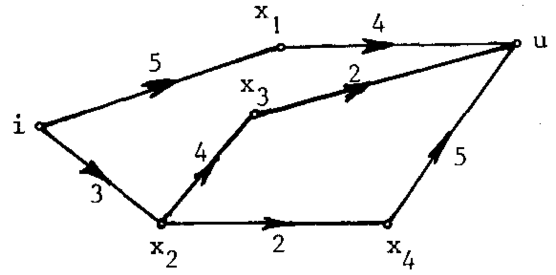
Toon aan dat deze graaf geen kring bevat door x_1.
Toon aan dat deze graaf geen kring bevat door x_8.
Onderzoek of deze graaf een kring bevat door x_2.
Onderzoek of deze graaf een kring bevat door x_7.
Schrijf de bereikbaarheidsmatrix van deze graaf op.

8. Teken een graaf, waarvan de knopenmatrix is:

a) $\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0&2&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix}$

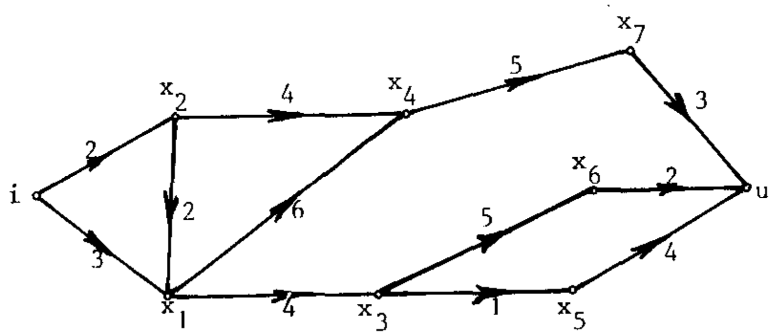
5.5.

1. Gegeven is het volgende transportnetwerk



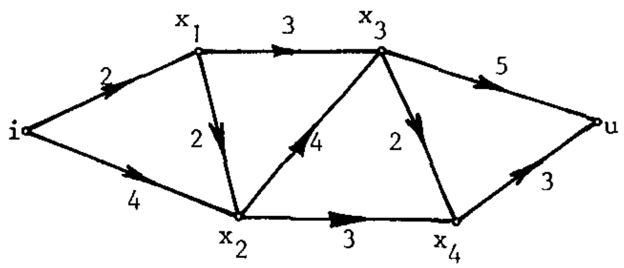
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

2. Gegeven is het volgende transportnetwerk



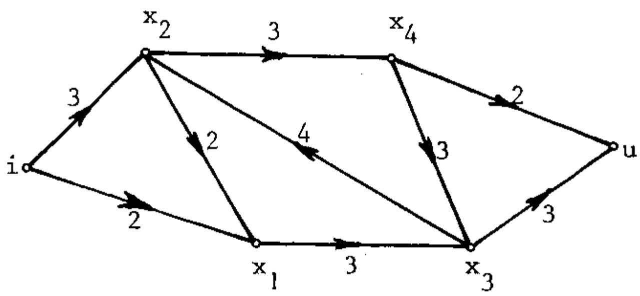
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

3. Gegeven is het volgende transportnetwerk



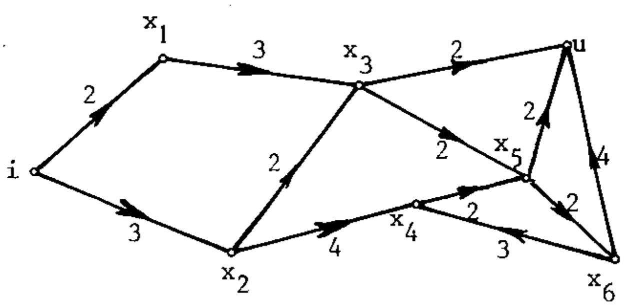
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximals stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

4. Gegeven is het volgende transportnetwerk



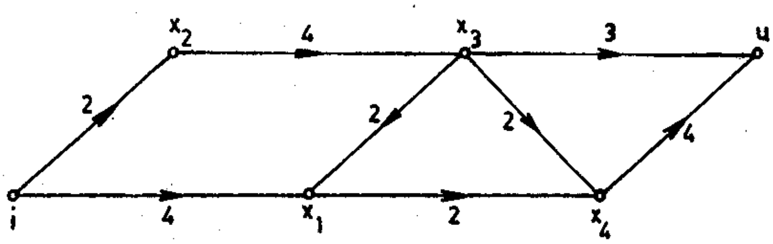
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

5. Gegeven is het volgende transportnetwerk



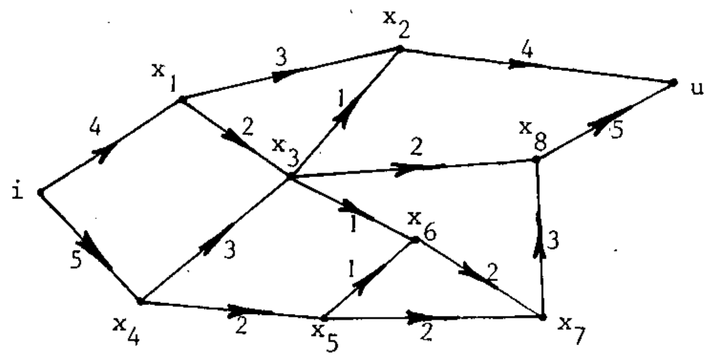
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

6. Gegeven is het volgende transportnetwerk



De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

7. Gegeven is het volgende transportnetwerk

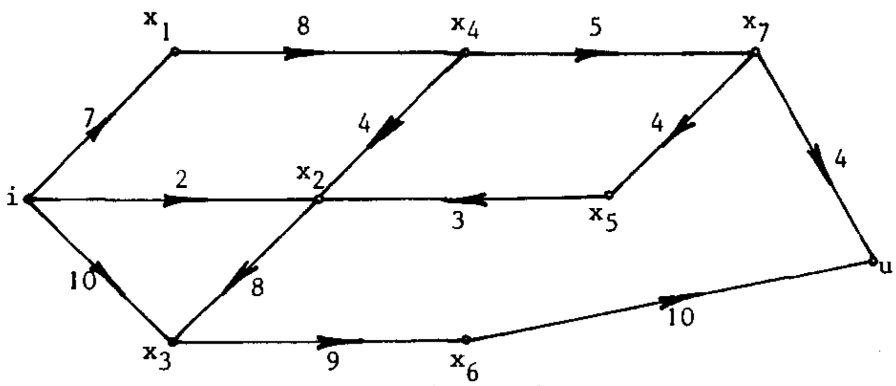


De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.

a) Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte.

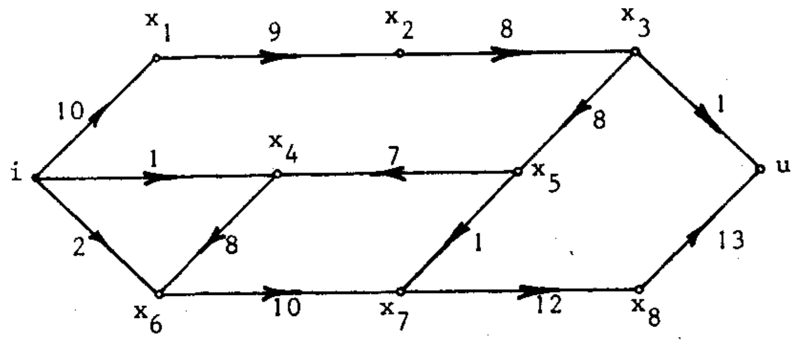
b) Bepaal een snede, waarvan beide componenten uit tenminste vier knooppunten bestaan, met minimale capaciteit.

8. Gegeven is het volgende transportnetwerk



De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

9. Gegeven is het volgende transportnetwerk

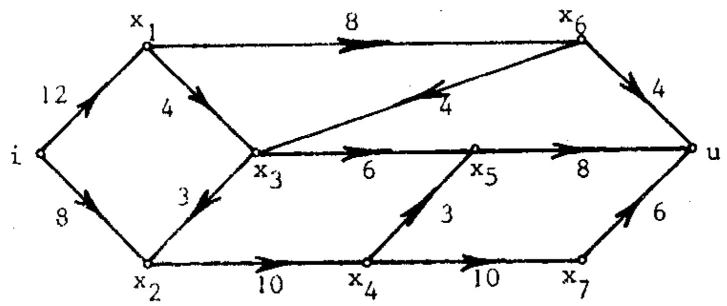


De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.

a) Bepaal een stroom met maximale stroomsterkte.

b) Bepaal een snede met minimale capaciteit.

10. Gegeven is het volgende transportnetwerk



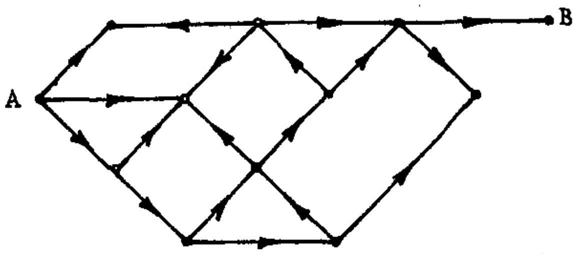
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.

a) Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte.

b) Bepaal een snede met minimale capaciteit.

5.6.

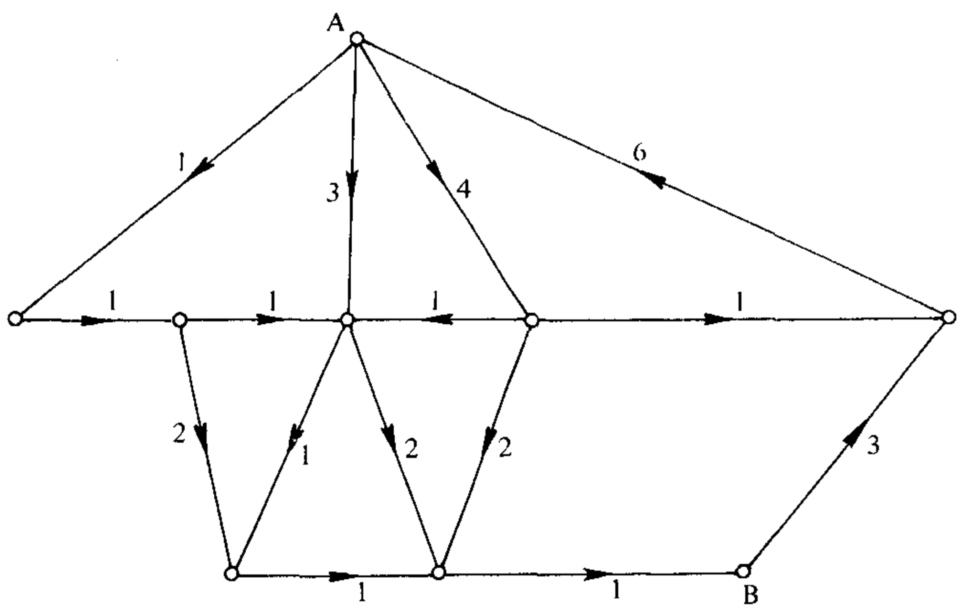
1. Gegeven is de volgende graaf.



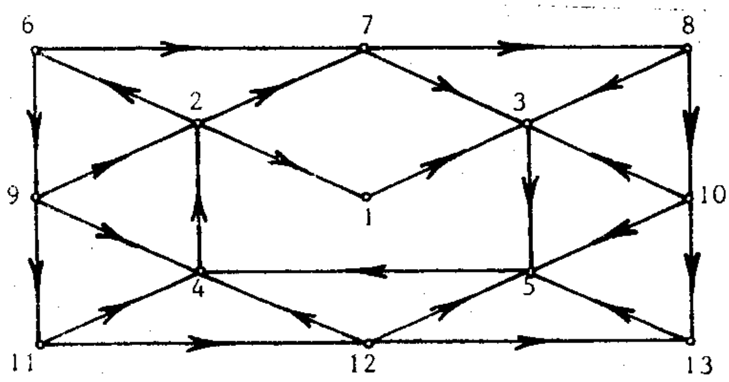
a) Nummer de knopen zodanig dat voor iedere tak geldt:
nummer b(t) < nummer e(t).

b) Wat is de lengte van de kortste weg tussen A en B?
Motiveer Uw antwoord.

2. Bepaal in de volgende graaf de goedkoopste weg van knoop A naar knoop B.
De kostprijzen zijn naast de takken aangegeven.



3. Beschouw de volgende gerichte graaf:



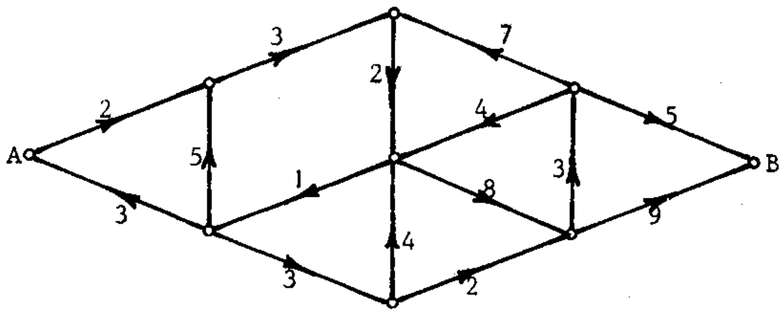
a) Bepaal in deze graaf de kortste weg van knoop 1 naar knoop 13.

b) Is het mogelijk in deze graaf de knopen zo te hernummeren, dat voor iedere tak het nummer van de beginknoop kleiner is dan het nummer van de eindknoop?

Zo ja, geef deze hernummering. Zo nee, geef aan waarom niet.

c) Bepaal in deze graaf de langste weg van knoop 1 naar knoop 13 die géén kringen bevat.

4. Beschouw de volgende gerichte graaf.



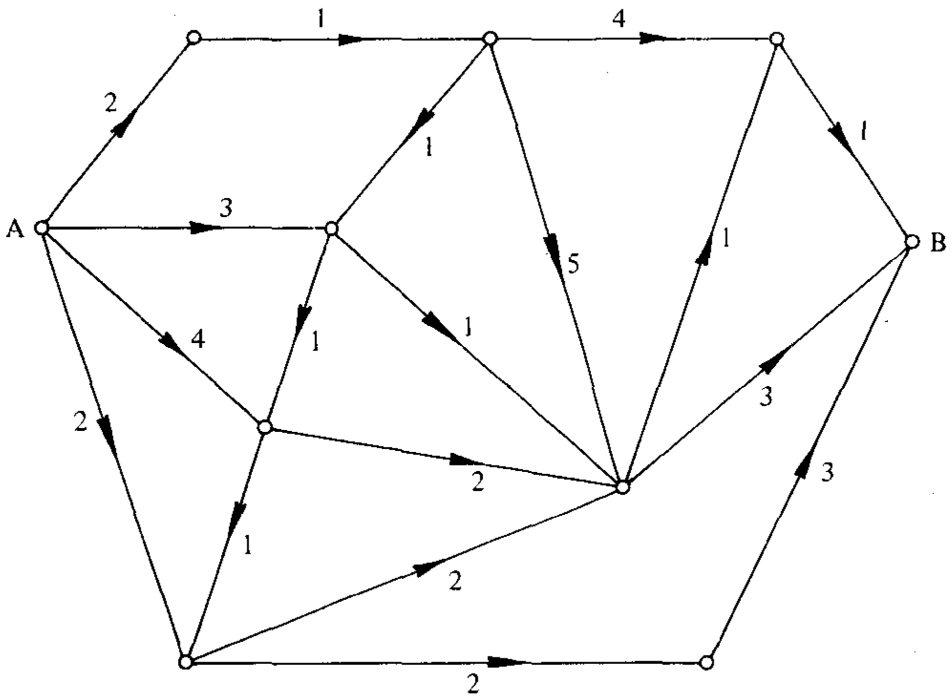
De cijfers bij de takken stellen de kostprijzen van de takken voor.

a) Ga na of deze graaf kringen bevat.

b) Bepaal de kortste weg van A naar B.

c) Bepaal de lengte en de kostprijs van de goedkoopste weg van A naar B.

5. Bepaal in de volgende graaf de goedkoopste weg van knoop A naar knoop B.
De kostprijzen zijn naast de takken aangegeven.



Antwoorden bij hoofdstuk I

1.1.

1. $x_{k+1} = x_k(1 + p) + R$; $x_0 = R$; $x_k = R\,\dfrac{(1 + p)^{k+1} - 1}{p}$.

2. $I_k = I_{k-1}(1 - \lambda\,\frac{d}{n})$. Intensiteit van de uittredende lichtstraal: $I_0e^{-\lambda d}$.

9. b) $x_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$.

10. $z_n = e^{in\alpha}$.

1.3 t/m 1.5.

1. a) $x_0 = 0$: iteratie breekt af.
   $x_0 = \pm\,1$: rij constant.
   overige x_0: rij alternerend.

   b) Stationair: $\xi_{1,2} = \pm\,1$; geen van beide stabiel (volgt uit a)).

   c) $x_0 = \pm\,1$; rij constant, met limiet 1, resp. -1.

   d) Geen stabiele oplossingen.

2. a) $x_0 > 0$: (x_k) monotoon dalend.
   $-1 < x_0 < 0$: (x_k) monotoon dalend, iteratie breekt af.

   b) Stationair: $\xi = 0$; punt is rechts-stabiel (volgt uit a)).

   c) (x_k) convergent voor $x_0 \geq 0$, limiet 0.

   d) Stabiele oplossingen voor $x_0 > 0$.

3. a) Voor alle x_0: rij alternerend.

   b) Stationair punt ξ voldoet aan $\xi = e^{-\xi}$. Het punt is stabiel, want $|f'(\xi)| = |e^{-\xi}| < 1$.

   c) Voor alle x_0: (x_k) convergent, limiet ξ.

   d) Alle oplossingen stabiel.

4. a) (x_k) dalend voor $x_0 > 1$ en vanaf x_1 voor $x_0 < -1$;
   (x_k) stijgend voor $0 < x_0 < 1$.

b) Stationair $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$; $|f'(1)| = \frac{1}{2} < 1$, dus ξ_1 is stabiel punt.

c) (x_k) convergeert naar limiet 1 voor $x_0 < -1$, voor $x_0 > 0$ en voor die waarden x_0 in $(-1,0)$ waarbij geen $x_k = -1$ in de rij voorkomt; in dat laatste geval breekt de iteratie af.
Voor $x_0 = 0$ is de rij constant 0; limiet 0.

d) Alle convergente oplossingen met $x_0 \neq 0$ zijn stabiel.

5. a) $x_0 > 2$: rij stijgend;
$x_0 < 2$: rij dalend.

b) Stationair: $\xi = 2$; $f'(2) > 1$, dus punt niet stabiel.

c) Alleen convergentie voor $x_0 = 2$, limiet 2.

d) Geen stabiele oplossingen.

6. a) (x_k) dalend voor $x_0 > \sqrt{2}$ en vanaf x_1 voor $0 < x_0 < \sqrt{2}$;
(x_k) stijgend voor $x_0 < -\sqrt{2}$ en vanaf x_1 voor $-\sqrt{2} < x_0 < 0$.

b) Stationair: $\xi_{1,2} = \pm\sqrt{2}$; $|f'(\xi_1)| = |f'(\xi_2)| = 0 < 1$, dus beide punten stabiel.

c) (x_k) convergeert voor alle $x_0 \neq 0$; limiet $\sqrt{2}$ voor $x_0 > 0$, limiet $-\sqrt{2}$ voor $x_0 < 0$.

d) Alle convergente oplossingen zijn stabiel.

7. a) $x_k = (ax_0)^{2^k} / a$.

b) Voor $ax_0 = \pm 1$ is $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \frac{1}{a}$,
voor $|ax_0| < 1$ is $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$,
voor $|ax_0| < 1$ is $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \infty$ als $a > 0$ en $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$ als $a < 0$.

8. a) Stationaire punten $\xi_{1,2} = \frac{1}{2a}(1 \pm \sqrt{1-4a})$ bestaan voor $a \leq \frac{1}{4}$.
Zij $f(x) = 1 + ax^2$; dan is $|f'(\xi_2)| = |f'(\frac{1}{2a}(1 - \sqrt{1-4a}))| < 1$ voor $-\frac{3}{4} < a < \frac{1}{4}$. Dus $\xi_2 = \frac{1}{2a}(1 - \sqrt{1-4a})$ is stabiel punt.

De constante oplossing $x_k = \xi_2$ is een stabiele oplossing.
Voor $a = \frac{1}{4}$ is $\xi_1 = \xi_2 = 2$, met $f'(\xi_1) = 1$. Dan geldt:
voor $x_0 > 2$: rij stijgend, divergent,
voor $x_0 = 2$: rij constant 2,
voor $0 < x_0 < 2$: rij stijgend, limiet 2.
$\xi = 2$ is links-stabiel punt; de oplossingen met $0 < x_0 < 2$ zijn stabiel.

b) $\xi_2 = \frac{1}{2a}(1 - \sqrt{1 - 4a})$ is stabiel voor $a > -\frac{3}{4}$ maar instabiel voor $a < -\frac{3}{4}$.

c) $x_{k+2} = 2x_k^2 - x_k^4$. Noem x_{2k} nu y_k en beschouw de iteratie $y_0 = \frac{1}{10}$ en $y_{k+1} = g(y_k)$, waarin $g(y) = 2y^2 - y^4$. Deze heeft stationaire punten die gevonden worden door op te lossen $g(y) = y$ of $y(y - 1)(y^2 + y - 1) = 0$: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_{3,4} = \xi_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. y_3 en y_4 zijn niet meer stabiel, y_1 en y_2 wel, wegens $g'(y_1) = g'(y_2) = 0$. Uit de grafiek van $f(x) = 1 - x^2$ volgt dat $\eta = y_1 = 0$ de limiet is van de oplossing met $x_0 = y_0 = \frac{1}{10}$.

9. $1 + \sqrt{2}$.

10. a) Stationaire punten $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$. Zij $f(y) = y + h(y - y^2)$; dan is $|f'(y)| < 1$ in $y = 1$ en in een linkeromgeving van $y = 1$ die $y_0 = \frac{1}{2}$ bevat, voor $0 < h < 2$; dus $\xi_2 = 1$ is stabiel en (y_k) convergeert naar de limiet 1 voor $y_0 = \frac{1}{2}$.

Hoofdstuk II

2.2.

1. $x_k = 2(\frac{1}{2})^k + 1.$

2. $x_k = 2^k - k - 1.$

3. $x_k = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k.$

4. $x_k = 6.2^k - 2k^2 - 4k - 6.$

5. $x_k = \frac{8}{5}\,2^k - \frac{3}{5}(\frac{1}{3})^k.$

6. $x_k = 3^k + \frac{1}{6}\,k^2 3^k - \frac{1}{6}\,k3^k.$

7. $x_k = 0 + (\frac{1}{2})^k \sum_{n=1}^{k} (n-1)!2^n.$

8. $x_k = \frac{13}{6}\,5^k - \frac{1}{6}(-1)^k.$

9. $x_k = (4 + \frac{1}{2}k)2^k.$

10. $x_k = \frac{31}{32}\,5^k - \frac{1}{4}\,k^2 - \frac{5}{8}\,k - \frac{31}{32}\,.$

11. $x_k = (k^2 - k + 1)(\frac{1}{2})^k$, dus $\lim_{k\to\infty} x_k = 0.$

12. $a = 0$: $x_k = k.$

$a = 1$: $x_k = \frac{1}{2}(k^2 + k).$

$a \neq 0, \neq 1$: $x_k = \dfrac{a^{k+1}}{(a-1)^2} + \dfrac{1}{1-a}\,k - \dfrac{a}{(a-1)^2}\,.$

13. $x_k = \frac{1}{2}(k+1),\ k \geq 1.$

$x_0 = 1.$

14. $x_k = (k+1)(-2 + 3.2^k).$

15. $x_k = A(1+\sqrt{2})^k + B(1-\sqrt{2})^k.$

16. $x_k = A2^k + B3^k$.

17. $x_k = A2^k + B5^k + k + \frac{5}{4}$.

18. $x_k = A2^k + Bk2^k + \frac{1}{4}k^2 2^k$.

19. $x_k = A3^k + Bk3^k$.

20. $x_k = A + Bk + \frac{1}{2}k^2$.

21. a) $x_k = A2^k + B(-2)^k + 3^k$.
b) $x_k = A2^k + B(-2)^k + \frac{1}{8}k2^k$.

22. $x_k = \frac{1}{2} + A\cos k\frac{\pi}{2} + B\sin k\frac{\pi}{2}$ of $x_k = \frac{1}{2} + C\cos(k\frac{\pi}{2} + D)$.

23. $x_k = \frac{1}{5}k - \frac{4}{25} + 2^{\frac{1}{2}k}(A\cos k\frac{3\pi}{4} + B\sin k\frac{3\pi}{4})$ of

$x_k = \frac{1}{5}k - \frac{4}{25} + 2^{\frac{1}{2}k}(C\cos(k\frac{3\pi}{4} + D))$.

24. $D_n = \alpha D_{n-1} - D_{n-2}$, $D_1 = \alpha$, $D_2 = \alpha^2 - 1$.

$\alpha = 2$: $D_n = 1 + n$.

$\alpha = -2$: $D_n = (-1)^n(1+n)$.

$|\alpha| \neq 2$: $D_n = \cos n\varphi + \frac{\alpha}{\sqrt{4-\alpha^2}}\sin n\varphi$, $n \geq 1$.

$\sin\varphi = \frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2}$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}\alpha$.

25. b) $x_k = A\lambda^k + Bk\lambda^k$.

26. $a > 1$ of $a < 0$: $x_k = A(-a + \sqrt{a^2 - a})^k + B(-a - \sqrt{a^2 - a})^k + \frac{1}{1-a}(-1)^k$.

$a = 1$: $x_k = A(-1)^k + Bk(-1)^k + \frac{1}{2}k^2(-1)^k$.

$0 < a < 1$: $x_k = A(\sqrt{a})^k\cos k\varphi + B(\sqrt{a})^k\sin k\varphi + \frac{1}{1-a}(-1)^k$.

$\cos\varphi = -\sqrt{a}$, $\sin\varphi = \sqrt{1-a}$.

27. $x_k = (\sqrt{1+\alpha^2})^k(A\cos k\varphi + B\sin k\varphi)$

$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$; begrensd als $\alpha = 0$.

28. $\alpha \neq 1$: $x_k = A(-1)^k + B(-\alpha)^k + \frac{1}{1-\alpha}\,k(-1)^k$.
$\alpha = 1$: $x_k = A(-1)^k + Bk(-1)^k + \frac{1}{2}k^2(-1)^k$.

29. $x_k = 2^k$.

30. $x_k = A2^k + Bk2^k + C3^k$.

31. $x_k = \frac{1}{2}(1 - \cos k\,\frac{\pi}{2} - \sin k\,\frac{\pi}{2})$ of $x_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\cos(k\,\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4})$.

33. $N_t = 500 + 2000(1{,}02)^t$.
Verdubbeling na ca. 41 jaar.

Hoofdstuk III

1\. a) $\underline{x}_k = \alpha 5^k \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta(-1)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

b) $\underline{x}_k = \alpha 5^k \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta(-1)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2b_1 - b_2}{8} \\ -b_1 \end{bmatrix}$, waarin $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

2\. $\underline{x}_k = (\sqrt{13})^k \alpha \{\cos k\varphi \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \sin k\varphi \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\} + (\sqrt{13})^k \beta \{\cos k\varphi \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \sin k\varphi \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\} +$

$+ \frac{1}{9} 2^k \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$; $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

3\. $\underline{x}_k = \alpha 4^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4\. $\underline{x}_k = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} 2^k + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} 3^k + k2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

5\. $\underline{x}_k = \alpha 0^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, d.w.z. $\underline{x}_0 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\underline{x}_k = \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ voor $k \geq 1$.

6\. $\underline{x}_k = \alpha 3^k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta 3^k (k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

7\. $\underline{x}_k = \cos k \frac{\pi}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin k \frac{\pi}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

8\. $\underline{x}_k = \alpha(-1)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3}(k+2) \\ \cos \frac{\pi}{3} k \\ \cos \frac{\pi}{3}(k-2) \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{3}(k+2) \\ \sin \frac{\pi}{3} k \\ \sin \frac{\pi}{3}(k-2) \end{bmatrix}$.

9\. $\underline{x}_k = \alpha(-\frac{2}{5})^k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta(-\frac{1}{4})^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

10. $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\underline{x}_1 = \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$, $\underline{x}_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$, $\underline{x}_k = \underline{0}$ voor $k \geq 3$.

11. A is een spiegeling. Voor k even: $\underline{x}_k = \underline{x}_0$; k oneven: $\underline{x}_k = A\underline{x}_0 = \underline{x}_1$ of

$$\underline{x}_k = \alpha\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + \gamma(-1)^k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

12. A is een projectie.

$$\underline{x}_k = \alpha 0^k\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

a) $\underline{x}_k = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, b) $\underline{x}_k = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, $k \geq 1$; c) $\underline{x}_k = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

13. A is een draaiing.

$$\underline{x}_k = \alpha\begin{bmatrix}-\sin k\frac{\pi}{3}\\ \cos k\frac{\pi}{3}\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}\cos k\frac{\pi}{3}\\ \sin k\frac{\pi}{3}\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1-\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3}\end{bmatrix}.$$

14. $\underline{x}_k = \alpha 0^k\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} + \beta(-1)^k\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} + \gamma 3^k\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}.$

15. $\underline{x}_k = \alpha 0^k\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \beta(\sqrt{2})^k\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix} + \gamma(-\sqrt{2})^k\begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}.$

16. Deze opgave leidt tot het stelsel

$$\underline{x}_{t+1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\2 & 3 & 3\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}\underline{x}_t .$$

De eigenwaarden van deze matrix zijn 1, λ_0 en $\bar{\lambda}_0$ waarbij $|\lambda_0| < 1$.
Stabiele eindtoestand: $\begin{bmatrix}30000\\40000\\20000\end{bmatrix}$.

17. $\underline{x}_k = \alpha\begin{bmatrix}14\\13\\8\end{bmatrix} + \beta(0,3)^k\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + \gamma(0,5)^k\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}.$

Stabiele eindtoestand: $\begin{bmatrix}14\\13\\8\end{bmatrix}10^6.$

18. b) $\underline{x}_k = a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}2k\\1\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}k^2\alpha\\k\alpha\\1\end{bmatrix}.$

19. $A^k = 2^{k-1}A.$

$$\underline{x}_0 = c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}_k = c_1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}2^{k-1} + c_2\underline{0} + c_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}2^{k-1},\ k = 1,2,3,\dots .$$

20. $A \geq 0$ en $A\underline{c} < \underline{c}$ voor $\underline{c} = [1,2,3]^T$, dus $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$ (st. 3.6.3). Dus de $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{\ell}$ bestaat.
Berekenen uit: $\underline{\ell} = A\underline{\ell} + [-1,4,0]^T$; $\lim \underline{x}_k = \frac{4}{19}[7,40,30]^T$.
Men kan ook aan de kar. verg. zien dat $r(A) < 1$.

21. Eigenwaarden berekenen levert op: $r(A) \leq 1$.
De enige eigenwaarde met $|\lambda| = 1$ is: $\lambda = 1$.
Deze is enkelvoudig, dus niet defectief (zie st. 3.5.5).
Berekening van $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$ met methoden op pagina 46 van de syllabus levert op:

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \frac{1}{5}[2,2,3]^T .$$

22. $A \geq 0$ en rijsommen < 1, dus $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$ (st. 3.6.6), dus $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$ bestaat.
Berekenen uit $\underline{\ell} = A\underline{\ell} + \frac{1}{2}[1,1,1]^T$; $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k = [2,2,2]^T$.

23. $A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ met $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$.

Eigenwaarden van A: α, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ met $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ eigenwaarden van $\tilde{A}$.
$\tilde{A} \geq 0$ en kolomsommen van $\tilde{A} < 1$ dus $\lim_{k\to\infty} \tilde{A}^k = 0$ en dus $r(\tilde{A}) < 1$.

i) $|\alpha| > 1$: dan $r(A) = |\alpha| > 1$ en A^k is niet begrensd, dus er zijn niet-begrensde oplossingen.

ii) $|\alpha| < 1$: dan $r(A) < 1$ en alle oplossingen zijn begrensd, zelfs $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{0}$.

iii) $|\alpha| = 1$: α is dan enkelvoudige eigenwaarde en dus zijn alle oplossingen begrensd.

$\alpha = -1$: niet elke oplossing heeft een limiet.

$\alpha = 1$: elke oplossing heeft een limiet die berekend kan worden met de methode op pagina 46 van de syllabus: $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = 10[6,-5,24,1]^T$.

24. $A \geq 0$ en rijsommen < 1.

25. $A \geq 0$; $\underline{c} > \underline{0}$; $A\underline{c} < \underline{c}$ dus $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$. $A\underline{c} = \frac{1}{8}[11,7,5]^T$.

26. Eigenwaarden: $1,i,-i$. Dus $r(A) = 1$ en eigenwaarden λ met $|\lambda| = 1$ zijn enkelvoudig. Dus A^k is begrensd.
$\lambda = 1$ is niet de enige eigenwaarde met $|\lambda| = 1$, dus $\lim_{k\to\infty} A^k$ bestaat niet.

27. $A > 0$. Kolomsommen zijn 1 (ruilmatrix), dus A^k begrensd (st. 3.6.6(ii)), dus $r(A) \leq 1$. De vector $[1,1,1]^T$ is eigenvector van A^T bij de eigenwaarde 1 (van A^T). Dus ook A heeft een eigenwaarde 1, dus $r(A) = 1$. Volgens Perron-Frobenius is nu 1 een enkelvoudige, dus niet-defectieve eigenwaarde en voor alle overige eigenwaarden λ geldt $|\lambda| < 1$.
Volgens st. 3.5.5 (2) bestaat nu $\lim_{k\to\infty} A^k$, dus bestaat ook $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$ voor alle oplossingen $(\underline{x}_k)$.
Met de methode van pag. 46 vindt men $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = 2[2,1,1]^T$.

28. $A \geq 0$ en kolomsommen $= 1$. Dus $\lambda = 1$ is een eigenwaarde. $\lambda = 1$ is zelfs enkelvoudige eigenwaarde (volgt uit berekening van de eigenwaarden). Verder zoals opgave 27. (N.B. Perron-Frobenius geldt hier niet). Zie ook syllabus pag. 58 (de alinea voor (3.6.24)). $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = [5,2,6]^T$.

29. Analoog aan opgave 28: lim $\underline{x}_k = \frac{10}{3}[1,1,1]^T$.

30. Eigenwaarden 1: $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$; verder als in opgave 26.

31. x_k := aantal aanhangers van partij A aan het einde van jaar k.
y_k idem voor B.

$$\underline{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} \text{ voldoet aan } \underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}85 \end{bmatrix} \underline{x}_k + \begin{bmatrix} 2000 \\ 2000 \end{bmatrix}.$$

$$\left.\begin{matrix} \text{Kolomsommen} < 1 \\ \text{matrix} > 0 \end{matrix}\right\} A^k \to 0 \text{ enz., analoog aan opgave 20.}$$

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \begin{bmatrix} 20.000 \\ 40.000 \end{bmatrix}.$$

Hoofdstuk IV

1. $x_k = 1 - (-1)^k$.

2. $x_k = k + 1$.

3. $x_k = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(-1)^k - \frac{2}{3}(-2)^k$.

4. $x_k = \frac{3}{4} + \frac{9}{4}(-1)^k - \frac{1}{2}\,k(-1)^k$.

5. $x_k = k$.

6. $x_k = \frac{1}{2}(1 - \cos k\,\frac{\pi}{2} - \sin k\,\frac{\pi}{2})$.

7. $x_k = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}(\sqrt{2})^k(-1)^k(7\cos\frac{k\pi}{4} - 9\sin\frac{k\pi}{4})$.

8. $x_k = -\frac{2}{3} + \frac{3}{4}(2)^k - \frac{1}{12}(-2)^k$.

$y_k = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4}(2)^k + \frac{1}{12}(-2)^k$.

9. $x_k = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}(-2)^k$.

$y_k = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}(-2)^k$.

10. $\binom{n}{k}$.

11. $x_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$.

12. $x_k = \binom{100}{k}$ (N.B. = 0 voor k > 100).

13. $x_k = 1 - \dfrac{1}{(k-1)!}$ voor $k \geq 1$; $x_0 = 1$.

14. $x_k = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(-1)^i}{i}\,2^{k-i}$ voor $k \geq 1$.

15. $x_k = (-1)^k + \sum_{i=0}^{k-1} \dfrac{(-1)^i}{2(k-i)-1}$ voor $k \geq 1$.

Hoofdstuk V

5.2.

2. Ieder van de grafen bevat kringen.

3. a) Nee. Er is een nummering r: $K \to N_0$ zodat voor elke tak geldt $r(b(t)) < r(e(t))$.
   b) 8.

4. b) Nee. Nu is ABCEFA een kring.

5. a) Nee.
   b) 8.

5.3 en 5.4.

1. a) $A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; c) $R(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. a) $A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; c) $R(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. b) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; d) $R(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. b) $R(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. $A_1(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

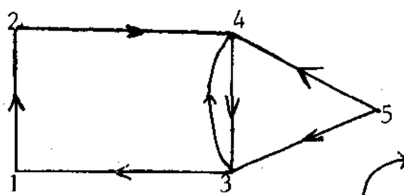
$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \; A(G') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R(G_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; R(G_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

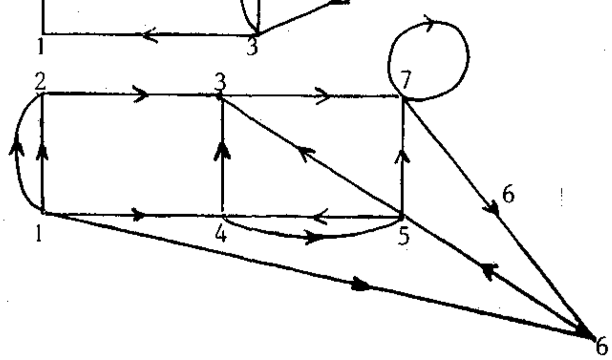
$$R(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \; R(G') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. $R(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. a)



b)



5.5.

Opmerking: In een gegeven transportnetwerk is de maximale stroomsterkte ondubbelzinnig bepaald. Vaak is meer dan een stroom met maximale stroomsterkte mogelijk. Ook kan meer dan één snede bestaan met minimale capaciteit. In de hier onder genoemde antwoorden wordt slechts de waarde van de maximale stroomsterkte genoemd en één van de mogelijke sneden met minimale capaciteit.

1. 7
   $\{ix_2, x_1u\}$.

2. 5
   $\{ix_1, ix_2\}$.

3. 6
   $\{ix_1, ix_2\}$.

4. 5
   $\{ix_1, ix_2\}$.

5. 5
   $\{ix_1, ix_2\}$.

6. 4
   $\{ix_2, x_1x_4\}$.

7. a) 9
      $\{ix_1, ix_4\}$.
   b) $\{x_1x_2, x_3x_2, x_3x_8, x_3x_6, x_4x_5\}$.

8. 13
   $\{x_3x_6, x_7u\}$.

9. a) 11
   b) $\{ix_4, ix_6, x_2x_3\}$.

10. a) 18
    b) $\{x_5u, x_6u, x_7u\}$.

5.6.

1. b) 6.

2. ACDHIB
   ACDEHIB
   ACDEIB
   AEIB
   AEHIB.

3. a) 1 → 3 → 5 → 4 → 2 → 7 → 8 → 10 → 13.
   b) nee (kringen).
   c) 1 → 3 → 5 → 4 → 2 → 6 → 7 → 8 → 10 → 13
      1 → 3 → 5 → 4 → 2 → 6 → 9 → 11 → 12 → 13.

4. a) ja.
   b) ACDGHB.
   c) lengte 8; kostprijs 21.

5. AFHEB; AIHEB.

Examen/tentamenopgaven

18 juni 1977

1. Bepaal de algemene reële oplossing van de recurrente betrekking

$$x_{k+3} + x_{k+2} - 4x_{k+1} - 4x_k = (-1)^k, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

2. Bepaal de algemene reële oplossing van de recurrente betrekking

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

met $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$ en $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Gegeven is de recurrente betrekking

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k, \quad k = 0,1,2,\ldots ,$$

met $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$ en

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Bewijs dat alle oplossingen begrensd zijn.

b) Hebben alle oplossingen een limiet?
Zo neen, bepaal alle oplossingen, die een limiet hebben (motiveer Uw antwoord).

4. Gegeven is de recurrente betrekking

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k, \quad k = 0,1,2,\ldots ,$$

met $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$ en

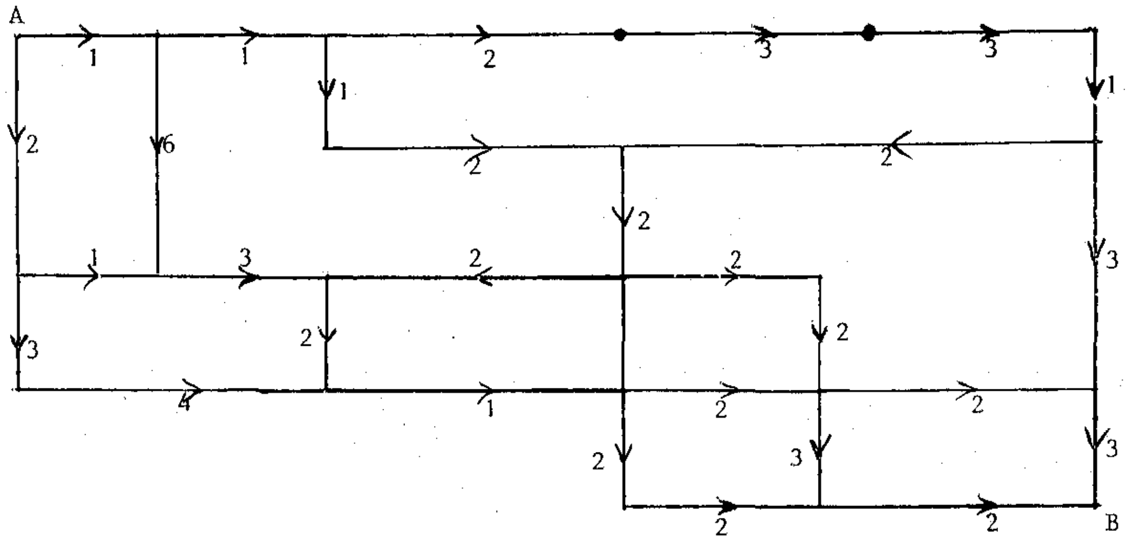
$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Bereken $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

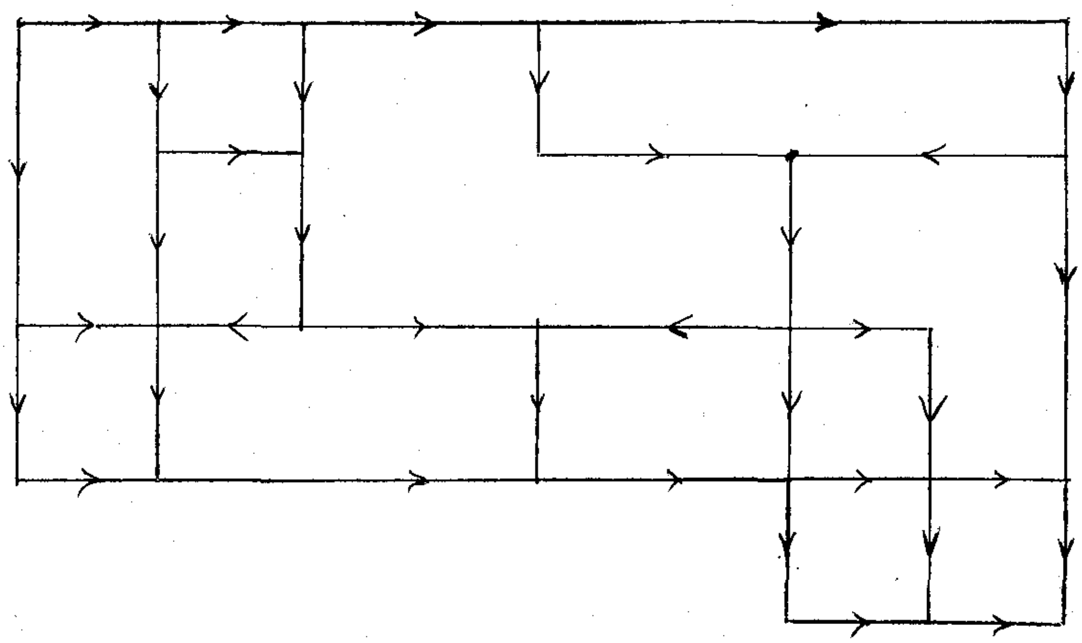
b) Bewijs, dat alle oplossingen een limiet hebben.

c) Neem $\underline{x}_0 = [4,0,4]^T$ en bepaal $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$.

5. a) Bepaal in onderstaande graaf de goedkoopste weg van knoop A naar knoop B.
De cijfers bij de takken geven de kosten aan.



b) Bewijs dat in onderstaande graaf geen kringen voorkomen.
Bepaal de lengte van de langste weg in de graaf. Hoeveel wegen van maximale lengte bevat de graaf?



6. Gegeven is de autonome iteratie

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$x_0 = \alpha, \ \alpha > 0 \ ,$$

met $f(x) = pxe^{-x}$, $0 \le p \le e$.

Voor welke waarden van α en p is de rij (x_k) convergent?

Bepaal in geval van convergentie $\lim_{k\to\infty} x_k$.

Motiveer Uw antwoord.

25 juni 1977

1. Bepaal de algemene reële oplossing van de recurrente betrekking

$$2x_{k+2} - 5x_{k+1} + 2x_k + k^2 = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

2. Bepaal voor alle $\alpha \geq 0$ de algemene reële oplossing van de recurrente betrekking

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \underline{b}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

met $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2$ en

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2\alpha \\ 2 & 4\alpha \end{bmatrix},$$

en $\underline{b} = [1,2]^T$.

3. Gegeven is de recurrente betrekking

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k, \quad k = 0,1,2,\ldots ,$$

met $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$ en

$$A = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Bewijs dat alle oplossingen een limiet hebben.

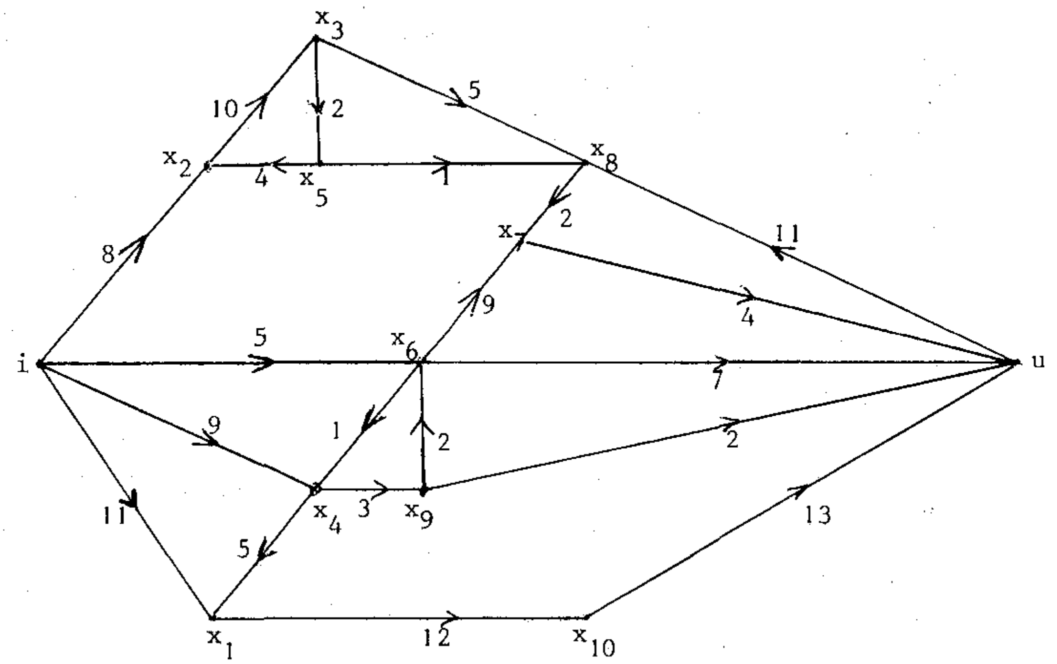
b) Neem $\underline{x}_0 = [1,0,0]^T$ en bereken $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$.

4. Los op met behulp van de z-transformatie

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 3x_k + 4y_k \\ y_{k+1} &= -x_k - y_k \end{aligned} \qquad k = 0,1,2,\dots$$

$$x_0 = 4, \ y_0 = -1 \ .$$

5. Gegeven is het volgende transportnetwerk.
De getallen bij de takken geven de capaciteiten aan.



Bepaal de maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

6. Gegeven is de autonome iteratie

$$x_{k+1} = \sqrt{2x_k - p}, \qquad k = 0,1,2,\dots \ .$$

$$x_0 = 2, \ p \in \mathbb{R} \ .$$

Voor welke waarden van p breekt de iteratie af?
Voor welke waarden van p is de rij (x_k) monotoon stijgend?
Voor welke waarden van p bestaat $\lim_{k\to\infty} x_k$?
Motiveer Uw antwoord.

16 januari 1978

1. Bepaal de algemene reële oplossing van de recurrente betrekking:

$$x_{k+3} - x_{k+2} - x_{k+1} + x_k = 4; \qquad k = 0,1,2,\ldots .$$

2. Beschouw de autonome iteratie:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 2x_k - x_k^2; & k = 0,1,2,\ldots \\ x_0 \geq 0 . \end{cases}$$

Voor welke waarde(n) van x_0 bestaat $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$?

Bepaal $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$, wanneer deze bestaat. Motiveer Uw antwoord.

3. Gegeven is het stelsel recurrente betrekkingen

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

waarin $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$ en $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bepaal de algemene reële oplossing van dit stelsel.

4. Gegeven is het stelsel recurrente betrekkingen

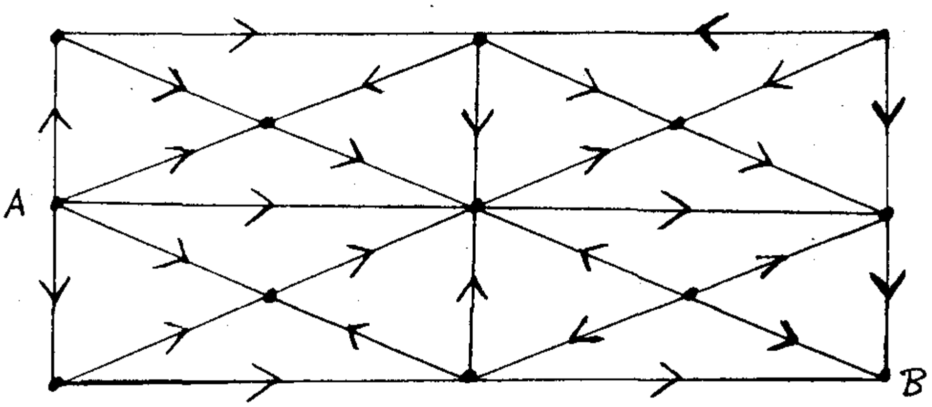
$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k; \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

waarin $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$ en $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Bewijs dat voor iedere $\underline{x}_0$ de rij $\underline{x}_k$ een limiet heeft.

b) Neem $\underline{x}_0 = [2,-2,1]^T$ en bereken $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$.

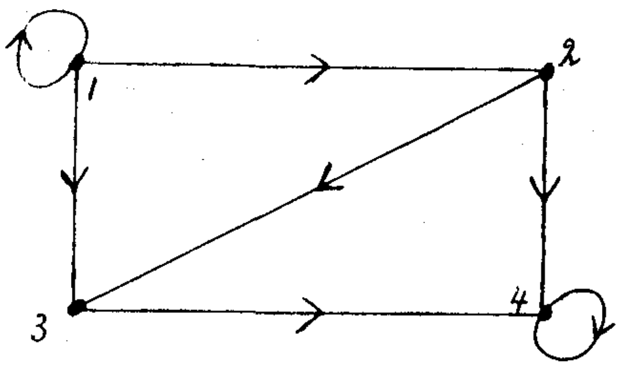
5. Gegeven is de volgende gerichte graaf.



a) Onderzoek of in deze graaf kringen voorkomen.

b) Bepaal de lengte van de langste weg in de graaf met beginpunt knoop A en eindpunt knoop B.

6. Gegeven is de volgende gerichte graaf.



a) Bepaal de knopenmatrix van deze graaf.

b) Bepaal de bereikbaarheidsmatrix R.

c) Bepaal voor ieder tweetal knopen x en y in deze graaf het aantal wegen met weglengte 4 met beginknoop x en eindknoop y.

d) Geef alle wegen met lengte 4 van knoop I naar knoop 4.

24 januari 1978

1. Bepaal de algemene reële oplossing van de recurrente betrekking

$$x_{k+2} + x_{k+1} - 2x_k = 1 + (-1)^k; \quad k = 0,1,2,\dots .$$

2. Beschouw de autonome iteratie

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{3}{4}x_k + \frac{1}{x_k}; & k = 0,1,2,\dots \\ x_0 = p . \end{cases}$$

Toon aan dat voor alle $p > 0$ de rij x_k convergeert en bepaal $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

3. Beschouw voor $\alpha \in \mathbb{R}$ het stelsel recurrente betrekkingen

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k; \quad k = 0,1,2,\dots$$

waarin $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$ en $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 \end{bmatrix}$.

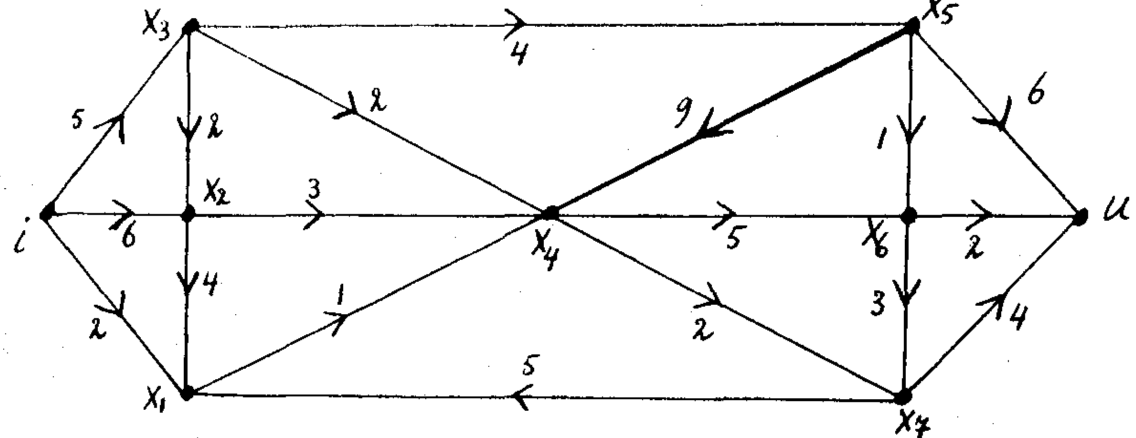
a) Onderzoek voor welke α iedere oplossing $\underline{x}_k$ convergeert en bepaal $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$ voor die waarde(n) van α en willekeurige $\underline{x}_0$.

b) Neem $\alpha = 1$ en onderzoek voor welke $\underline{x}_0$ de rij $\underline{x}_k$ convergeert, en bepaal $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$ voor die waarden van $\underline{x}_0$, waarvoor de rij convergeert.

4. Los op (bijvoorbeeld met behulp van de z-transformatie) het stelsel recurrente betrekkingen

$$\begin{cases} x_{k+1} - x_k + y_k = 2^k; & k = 0,1,2,\dots \\ y_{k+1} + x_k - 2y_k = k+1; & k = 0,1,2,\dots \\ x_0 = y_0 = 0 . \end{cases}$$

5. Gegeven is het volgende transportnetwerk:



De capaciteiten van de takken staan bij de pijlen aangegeven.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

1 juni 1978

1. a) Bepaal de algemene oplossing van de recurrente betrekking

$$x_{k+2} + x_{k+1} + \tfrac{1}{4}x_k = 0 \qquad (k = 0,1,2,\ldots) .$$

b) Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking

$$x_{k+1} + \frac{k+1}{k+2}\, x_k = \frac{1}{k+2} \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

met beginvoorwaarde $x_0 = 1$.

2. Beschouw de iteratie

$$x_{k+1} = \frac{2x_k + 5}{x_k + 3} \qquad (k = 0,1,2,\ldots) ,$$

$$x_0 > -3 .$$

a) Voor welke x_0 is de rij (x_k) monotoon stijgend?
b) Voor welke x_0 is de rij (x_k) monotoon dalend?
c) Bestaat $\lim_{k\to\infty} x_k$ voor $x_0 \geq 0$? Zo ja, bepaal deze limiet.
d) Bepaal een x_0 zodanig dat de rij (x_k) afbreekt.

3. Gegeven is het stelsel recurrente betrekkingen

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ 0 \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix} \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

waarin

$$\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3 \quad \text{en} \quad A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{bmatrix} .$$

Bestaat $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$? Zo ja, bepaal deze limiet.

4. Bepaal de algemene reële oplossing van het stelsel recurrente betrekkingen

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

met

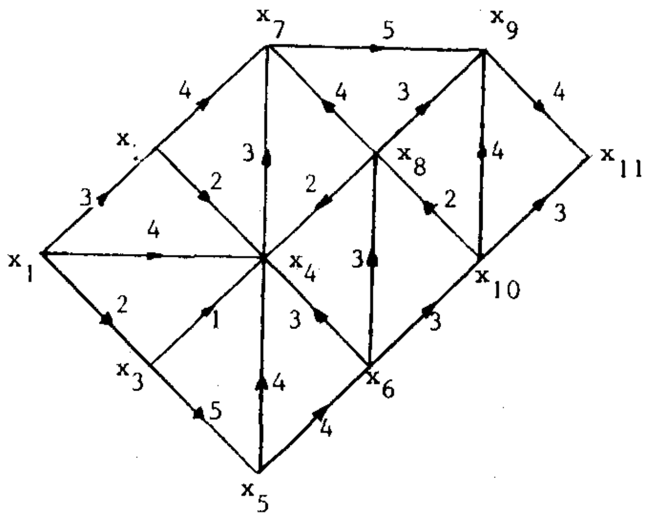
$$\underline{x}_k \in \mathbb{R}^2 , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} .$$

5. Los op met behulp van de z-transformatie

$$x_{k+2} - x_{k+1} - 2x_k = -2$$

$$x_0 = x_1 = 5 .$$

6. In onderstaande gerichte graaf geven de cijfers bij de takken de kosten aan.



a) Bewijs dat de graaf geen kringen heeft.

b) Bepaal de goedkoopste weg van x_1 naar x_{11}.

c) Als de pijl in de tak x_8x_7 omgekeerd wordt, bestaat er dan een duurste weg? Motiveer Uw antwoord.

15 januari 1979

1. Bepaal de algemene reële oplossing van de recurrente betrekking

$$x_{k+4} - 4x_{k+2} + 4x_{k+1} - x_k = 1 \qquad (k = 0,1,2,\ldots) .$$

2. Beschouw de autonome iteratie

$$x_{k+1} = \frac{1}{1 + x_k} \qquad (k = 0,1,2,\ldots) ,$$
$$x_0 > -1 .$$

a) Voor welke waarde(n) van x_0 bestaat $\lim_{k\to\infty} x_k$?

b) Bepaal $\lim_{k\to\infty} x_k$ wanneer deze bestaat.

Licht de beantwoording van deze vragen met een duidelijke tekening toe.

3. Gegeven is het stelsel recurrente betrekkingen:

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

waarin

$$\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{7}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \qquad \text{en } \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

a) Is A een ruilmatrix? Waarom ja of nee?

b) Bewijs dat A^k begrensd is $(k = 0,1,2,\ldots)$. Wat is de spectraalstraal?

c) Bewijs dat $\lim_{k\to\infty} A^k$ bestaat.

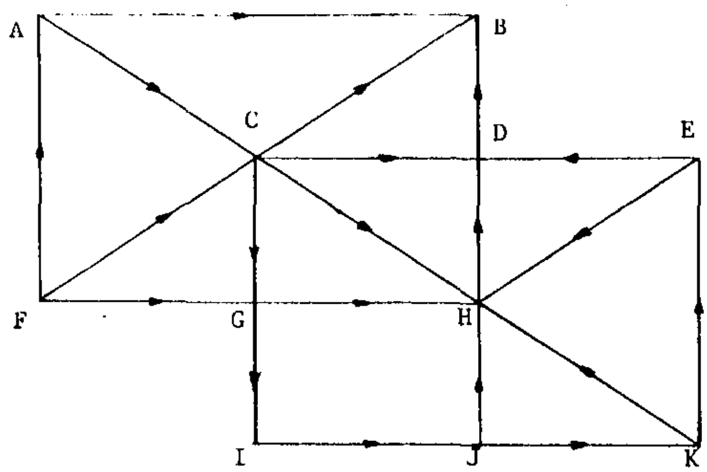
d) Bereken $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$.

4. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bepaal A^k $(k = 0,1,2,\ldots)$.

5. Beschouw de volgende gerichte graaf.

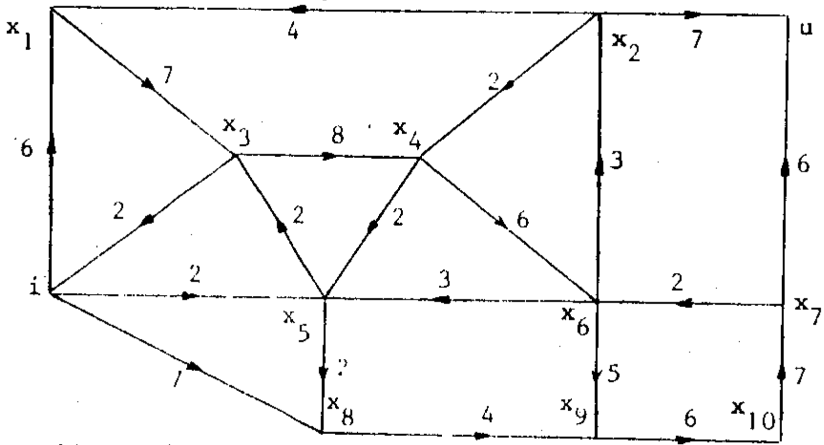


a) Bewijs dat de graaf geen kringen bevat.

b) Bepaal de langste weg in de graaf.

c) Wat zijn Uw conclusies ten aanzien van a) en b) als de richting in de tak BC wordt omgedraaid?

6. Gegeven is het volgende transportnetwerk.



De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte.
Geef een snede aan met minimale capaciteit.

31 mei 1979

1. Bepaal, bijvoorbeeld met behulp van de z-transformatie, de oplossing van de recurrente betrekking

$$x_{k+3} - 7x_{k+1} + 6x_k = 1, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

met

$$x_0 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 1\ .$$

2. Een recurrente betrekking is gegeven door de relaties

$$t_{k+1} = 2t_k \qquad \text{voor } k \text{ oneven },$$

$$t_{k+1} = 2t_k + 3 \qquad \text{voor } k \text{ even },$$

en de beginwaarde t_0.
Noem $t_{2k} = x_k$ en $t_{2k+1} = y_k$, $k = 0,1,2,\ldots$ en schrijf de relaties voor t_k in de vorm van een stelsel recurrente betrekkingen

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} + \underline{b}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

en druk de beginwaarde $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ uit in t_0.
N.B. U hoeft het verkregen stelsel niet op te lossen.

3. Gegeven is de matrix A

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} .$$

a) Bewijs dat er een vector $\underline{c} > \underline{0}$ bestaat zodat $A\underline{c} < \underline{c}$ door zo'n vector te vinden.

b) Gegeven is het stelsel recurrente betrekkingen

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 0,1,2,\dots$$

met beginwaarde

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

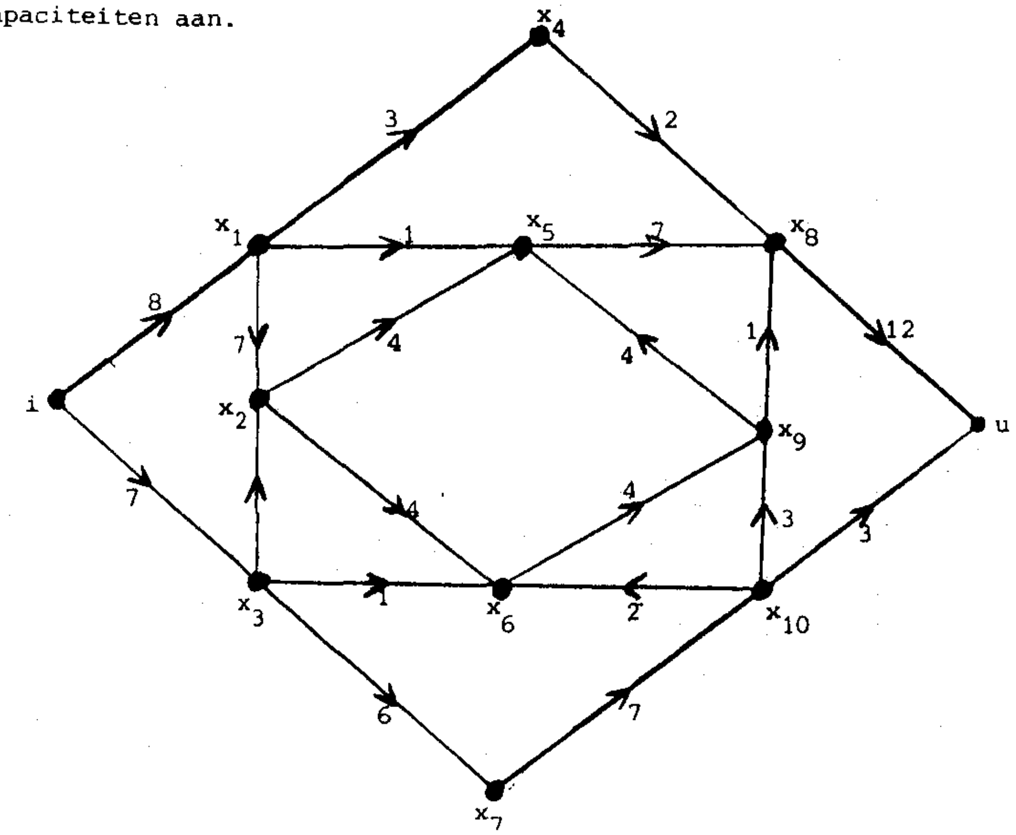
Bestaat $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$? Motiveer Uw antwoord.
Zo ja, bereken deze limiet.

4. Gegeven is de matrix A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Bereken A^k voor $k = 0,1,2,\dots$ (er wordt een antwoord gevraagd waar uitsluitend reële getallen in voorkomen).

5. Gegeven is het volgende transportnetwerk. De getallen bij de takken geven de capaciteiten aan.



Bepaal een toegelaten stroom van i naar u met maximale stroomsterkte en bepaal een snede met minimale capaciteit.

6. Gegeven is de iteratie

$$x_{k+1} = x_k e^{\alpha(1-x_k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$\alpha > 0$, $\alpha \neq 2$.

a) Neem $\alpha = \frac{3}{2}$. Voor welke waarden van x_0 is de rij $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ convergent? Motiveer Uw antwoord met behulp van een grafiek.

b) Voor welke waarden van α bestaat er een stabiele oplossing $x_k = \xi$ voor $k = 0,1,2,\ldots$

Bepaal ξ voor deze waarden van α.

Opmerking: We herinneren er aan dat een begrensde oplossing $(u_k)_{k=0}^{\infty}$ stabiel is als er een getal $r > 0$ bestaat zo dat

$$\lim_{k\to\infty} (x_k - u_k) = 0$$

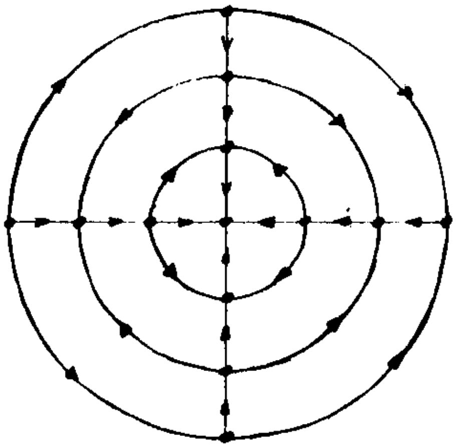
voor elke oplossing $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ met beginwaarde x_0 zo dat $|x_0 - u_0| < r$.

12 juni 1979

1. a) Bepaal de algemene reële oplossing van de recurrente betrekking

$$x_{k+3} - x_{k+2} + x_{k+1} - x_k = 1 \qquad (k = 0,1,2,\dots) .$$

   b) Gegeven is de volgende gerichte graaf.



   Heeft de graaf kringen? Motiveer Uw antwoord.

2. Gegeven is de autonome iteratie

$$x_{k+1} = \sqrt{a + x_k} \qquad (k = 0,1,2,\dots) ,$$

$$x_0 = 2,\ a > -2 .$$

   a) Voor welke waarden van a breekt de iteratie af?

   b) Voor welke waarden van a bestaat $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$? Bepaal de limiet in deze gevallen.
   Licht Uw antwoord toe aan de hand van een tekening.

3. Gegeven is het stelsel recurrente betrekkingen

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k \qquad (k = 0,1,2,\dots)$$

waarin

$$\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3 \quad \text{en} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

   a) Bestaat $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$ voor alle $\underline{x}_0$?

   b) Bepaal de algemene oplossing van het stelsel.

   c) Als $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, bestaat dan $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$?

4. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} .$$

a) Is A^k, $k = 0,1,2,\ldots$, begrensd voor $k \to \infty$?

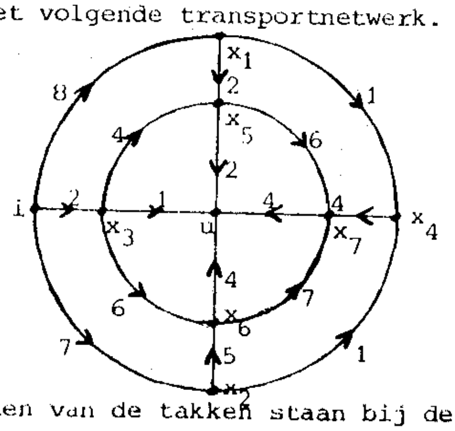
b) Bestaat $\lim_{k\to\infty} A^k$?

c) Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + (-1)^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (k = 0,1,2,\ldots) ,$$

waarin $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$.

5. Gegeven is het volgende transportnetwerk.



De capaciteiten van de takken staan bij de pijlen aangegeven.
Bepaal een stroom van i naar u met maximale stroomsterkte en bepaal een snede met minimale capaciteit.

14 januari 1980

1) Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking

$$x_{k+2} + 3x_{k+1} - 4x_k = 10 \qquad , k = 0,1,2,\ldots$$

$$x_0 = x_1 = 2 .$$

2) Bepaal de algemene oplossing van de recurrente betrekking

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \underline{b} \qquad , \underline{x}_k \in \mathbb{R}^3,\ k = 0,1,2,\ldots$$

met

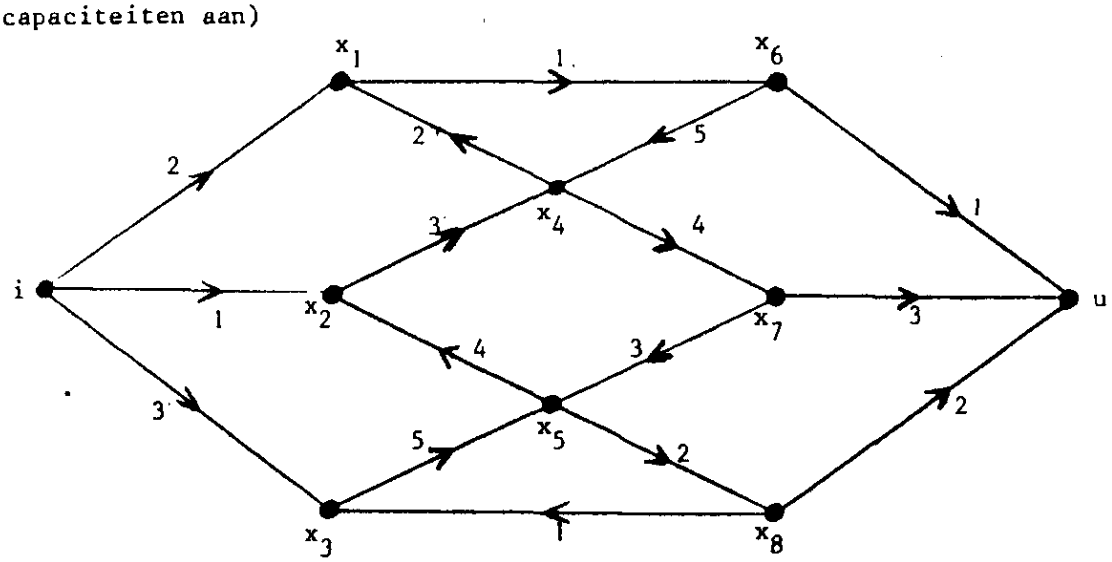
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} , \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

3) Gegeven is de autonome iteratie

$$x_{k+1} = x_k^{\,a} \qquad , k = 0,1,2,\ldots$$

Voor welke waarden van a is de rij (x_k) convergent voor alle $x_0 > 0$?

4) Gegeven is het transportnetwerk (de getallen bij de takken geven de capaciteiten aan)



Bepaal een toegelaten stroom van i naar u met maximale stroomsterkte en bewijs dat de gevonden stroom maximaal is.

5) Een vaas bevat een rode, een witte en een zwarte bal. Men trekt met teruglegging n keer aselect een bal uit de vaas en noteert de kleur van de getrokken bal. Noem x_n de kans dat hierbij slechts één kleur is opgetreden, y_n de kans dat er precies twee kleuren zijn opgetreden en z_n de kans dat alle drie de kleuren zijn opgetreden.

Zij $\underline{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$.

a) Bepaal $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$.

b) Geef een recurrente betrekking tussen $\underline{x}_{n+1}$ en $\underline{x}_n$ voor n = 1,2,3,...

c) Bereken z_n voor n = 1,2,3,...

<u>5 juni 1980</u>

1. Gegeven is de recurrente betrekking

$$x_{k+2} - x_{k+1} + \tfrac{1}{4}x_k = 1, \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

a. Bepaal de oplossing (x_k) in reële vorm voor het geval dat $x_0 = 0$ en $x_1 = 1$.
b. Noem $(\hat{x}_k)$ de oplossing voor het geval dat $x_0 = a$, $a \neq 0$, en $x_1 = b$, $b \neq 1$.

Toon aan dat $\lim_{k\to\infty} (x_k - \hat{x}_k) = 0$.

2. Gegeven is het stelsel *recurrente* betrekkingen

$$\underset{\sim}{x}_{k+1} = A\,\underset{\sim}{x}_k, \qquad k = 0,1,2,\ldots,$$

$$\text{met } \underset{\sim}{x}_k \in \mathbb{R}^3 \text{ en } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bepaal de algemene oplossing.

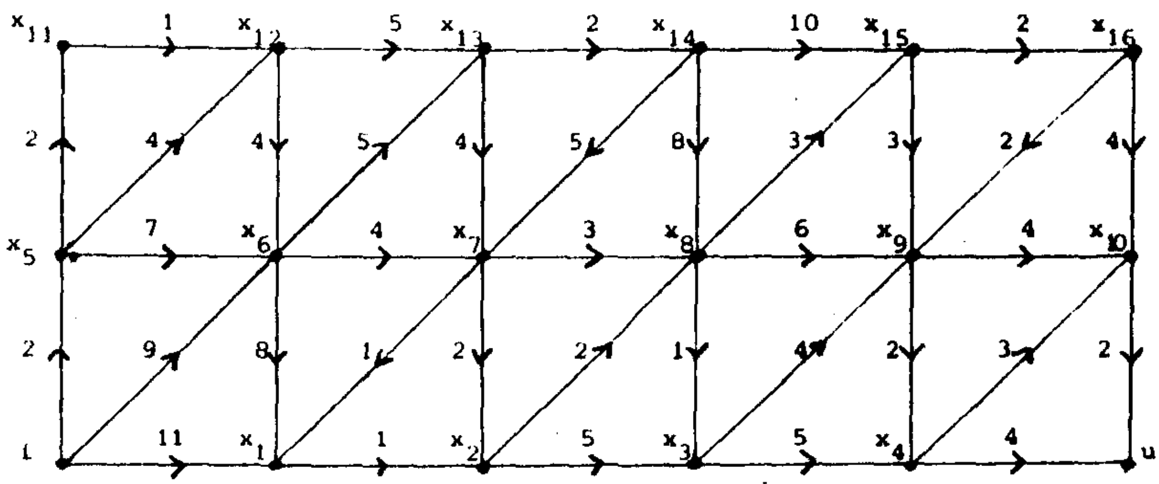
3. Gegeven is het stelsel recurrente betrekkingen

$$\underset{\sim}{x}_{k+1} = A\,\underset{\sim}{x}_k, \qquad k = 0,1,2,\ldots,$$

$$\text{met } \underset{\sim}{x}_k \in \mathbb{R}^3 \text{ en } A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Bewijs dat $\lim_{k\to\infty} \underset{\sim}{x}_k = \underset{\sim}{0}$ voor elke beginvector $\underset{\sim}{x}_0$.

4. Gegeven is de gerichte graaf:



De getallen bij de pijlen geven de kosten aan die gemaakt worden bij het doorlopen van de betreffende tak.

Bepaal een duurste weg van i naar u.

5. Gegeven is de autonome iteratie

$$x_{k+1} = a(1 - x_k^2) \,, \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad \text{met } a > 0 \,.$$

a. Bepaal de stationaire punten $\xi_1 > 0$ en $\xi_2 < 0$.

b. Toon aan, dat voor $0 < a < \sqrt{\tfrac{3}{4}}$ en $|x_0| < 1$ de rij (x_k) convergeert.

c. Kies $a = 1$ en $x_0 = \frac{1}{10}$. (Schets een grafiek.) Druk x_{k+2} uit in x_k en bepaal het getal η waarvoor geldt: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \eta$.

17 juni 1980

1. Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking

$$x_{k+3} - x_{k+2} + x_{k+1} - x_k = -2$$

waarvoor geldt $x_0 = 1,\ x_1 = 0,\ x_2 = -1$.

(Opmerking: De z-transformatie mag bij dit vraagstuk toegepast worden.)

2. Gegeven is het stelsel recurrente betrekkingen

$$\underline{x}_{k+1} = A\,\underline{x}_k, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

met $\underline{x}_k \in \mathbb{R}^3$ en $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a. Bepaal een beginvector $\underline{x}_0 \neq \underline{0}$ zodanig dat $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{0}$.

b. De verzameling van beginvectoren $\underline{x}_0$ met de eigenschap dat $\underline{x}_k$ begrensd is voor $k = 0,1,2,\ldots$ is een deelruimte V van $\mathbb{R}^3$. Geef een basis voor V.

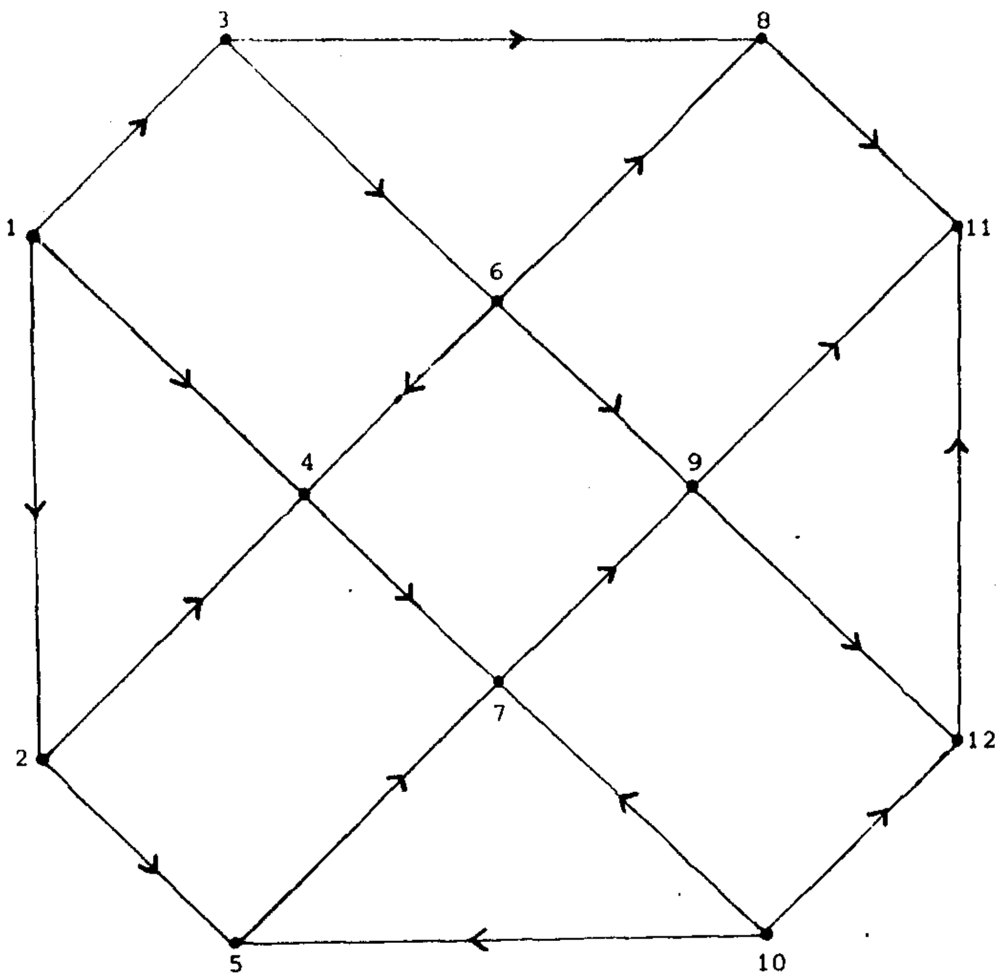
3. a. Gegeven is de matrix $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Bereken A^k voor $k = 1,2,\dots$.

b. Beschouw het stelsel recurrente betrekkingen

$$\underline{x}_{k+1} = A\,\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\quad k = 0,1,2,\dots,\quad \underline{x}_k \in \mathbb{R}^3,\ A \text{ als bij a.}$$

Heeft $\underline{x}_k$ een limiet voor $k \to \infty$ voor elke $\underline{x}_0$? Zo ja, bereken dan deze limiet.

4. Gegeven is de gerichte graaf



De knopen zijn genummerd van 1 tot en met 12. Noem A de knopenmatrix behorend bij deze nummering.

a. Geef de matrix A^2.

b. Toon aan dat $A^6 \neq 0$.

c. Motiveer dat de graaf geen kringen bevat.

5. Gegeven is de autonome iteratie

$$x_{k+1} = 2a\sqrt{a^2 + x_k}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

met $x_0 \geq - a^2$.

a. Voor welke waarden van a bestaat er een stabiele oplossing voor deze iteratie? (Onderscheid de gevallen $a = 0$, $a > 0$ en $a < 0$.)

b. Bepaal voor elk van deze gevonden waarden van a zo'n stabiele oplossing.

Uitwerkingen, respectievelijk antwoorden van de examen/tentamen opgaven.

18 juni 1977

1. Eerst de homogene betrekking oplossen:

$$x_{k+3} + x_{k+2} - 4x_{k+1} - 4x_k = 0 \; .$$

Karakteristieke vergelijking

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0 \; .$$
$$(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \; .$$

Een basis van de oplossingsruimte wordt dus gevormd door de oplossingen $x_k = (-1)^k$, $y_k = 2^k$, $z_k = (-2)^k$.

Inhomogeen: daar $(-1)^k$ reeds oplossing is van de homogene betrekking, proberen we

$$x_k = ak(-1)^k \; .$$

Substitutie leidt tot

$$a(k+3)(-1)^{k+3} + a(k+2)(-1)^{k+2} - 4a(k+1)(-1)^{k+1} - 4ak(-1)^k = (-1)^k$$

$$-(k+3)a + (k+2)a + 4(k+1)a - 4ka = 1$$
$$3a = 1$$
$$a = \frac{1}{3} \; .$$

Dus de algemene reële oplossing is

$$x_k = \frac{1}{3} k(-1)^k + c_1(-1)^k + c_2 2^k + c_3(-2)^k$$

met c_1, c_2 en c_3 reëel.

2. De matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ heeft als karakteristieke vergelijking

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 8 = 0 \; .$$

Eigenwaarden: $\lambda = \pm\, 2i\sqrt{2}$.

Bij $\lambda = 2i\sqrt{2}$ vindt men de eigenvectoren uit het stelsel vergelijkingen met coëfficiëntenmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 - 2i\sqrt{2} & -3 \\ 3 & -1 - 2i\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{, met rang } 1 \; .$$

Een eigenvector is $[3, 1-2i\sqrt{2}]^T$.
Basisoplossingen van het homogene stelsel $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$ zijn dus

$$\underline{x}_k = (2i\sqrt{2})^k \begin{bmatrix} 3 \\ 1 - 2i\sqrt{2} \end{bmatrix} = (2\sqrt{2})^k (\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 - 2i\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

en de geconjugeerde hiervan

$$\underline{x}_k = (2\sqrt{2})^k (\cos\frac{k\pi}{2} - i\sin\frac{k\pi}{2}) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 + 2i\sqrt{2} \end{bmatrix} .$$

Nu vormen $Re(\underline{x}_k)$ en $Im(\underline{x}_k)$ eveneens een basis van de oplossingsruimte.
Dit levert de reële basisoplossingen

$$(2\sqrt{2})^k \begin{bmatrix} 3\cos\frac{k\pi}{2} \\ \cos\frac{k\pi}{2} + 2\sqrt{2}\ \sin\frac{k\pi}{2} \end{bmatrix} \text{ en } (2\sqrt{2})^k \begin{bmatrix} 3\sin\frac{k\pi}{2} \\ \sin\frac{k\pi}{2} - 2\sqrt{2}\ \cos\frac{k\pi}{2} \end{bmatrix}$$

Om een particuliere oplossing van het inhomogene stelsel $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ te vinden proberen we $\underline{x}_k = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$. Dan geldt

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$(I - A) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \text{ dus } \left. \begin{array}{r} 3c_2 = 3 \\ -3c_1 + 2c_2 = -4 \end{array} \right\}$$

Dit levert $c_1 = 2$, $c_2 = 1$.
Algemene reële oplossing dus:

$$\underline{x}_k = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (2\sqrt{2})^k \left\{ d_1 \begin{bmatrix} 3\cos\frac{k\pi}{2} \\ \cos\frac{k\pi}{2} + 2\sqrt{2}\ \sin\frac{k\pi}{2} \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 3\sin\frac{k\pi}{2} \\ \sin\frac{k\pi}{2} - 2\sqrt{2}\ \sin\frac{k\pi}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

waarin d_1 en d_2 reëel zijn.

Opm: Een andere methode om het homogene stelsel $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$ op te lossen bestaat in het toepassen van de stelling van Cayley-Hamilton (C - H). Noemen we $p(\lambda) = \lambda^2 + 8$, dan houdt C - H in ons geval in: $p(A) = 0$.

Toepassing van de delingsalgoritme voor polynomen geeft voor $k \geq 0$:

$$z^k = p(z)q_k(z) + a_k z + b_k \quad \ldots\ldots \ (1)$$

met a_k en b_k reële constanten en $q_k(z)$ een reëel polynoom. Substitueer hierin $z = \pm 2i\sqrt{2}$, dan vinden we

$$(2\sqrt{2})^k(\cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2}) = a_k.2i\sqrt{2} + b_k$$

$$(2\sqrt{2})^k(\cos \frac{k\pi}{2} - i \sin \frac{k\pi}{2}) = -a_k.2i\sqrt{2} + b_k \ .$$

Hieruit volgt $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ en (tel op, trek af):

$$\left.\begin{aligned} a_k &= (2\sqrt{2})^{k-1}\sin \frac{k\pi}{2} \\ b_k &= (2\sqrt{2})^k \cos \frac{k\pi}{2} \end{aligned}\right\} \text{ voor } k \geq 1 \ .$$

Wegens (1) en C - H is

$$A^k = a_k A + b_k I \ ,$$

dus

$$A^k = (2\sqrt{2})^{k-1}\sin \frac{k\pi}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + (2\sqrt{2})^k \cos \frac{k\pi}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ k \geq 1 \ .$$

Een basis voor de oplossingsruimte van het homogene stelsel wordt nu gevormd door de kolommen van A^k (te beginnen met $k = 0$).
Algemene oplossing van het homogene stelsel is dus

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \ \underline{x}_k = c_1(2\sqrt{2})^{k-1}\begin{bmatrix} \sin \frac{k\pi}{2} + 2\sqrt{2} \cos \frac{k\pi}{2} \\ 3 \sin \frac{k\pi}{2} \end{bmatrix} +$$

$$+ c_2(2\sqrt{2})^{k-1}\begin{bmatrix} -3 \sin \frac{k\pi}{2} \\ -\sin \frac{k\pi}{2} + 2\sqrt{2} \cos \frac{k\pi}{2} \end{bmatrix} \text{ voor } k \geq 1 \ .$$

3. De matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

heeft als karakteristieke vergelijking

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0.$$

Eigenwaarden dus 1, i en −i.

a) Blijkbaar hebben alle eigenwaarden de absolute waarde 1, dus de spectraalstraal $r(A) \le 1$. Alle eigenwaarden zijn enkelvoudig, dus niet-defectief. Derhalve is (st. 3.5.4) A^k begrensd. Daar de oplossing van $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$ luidt:

$$\underline{x}_k = A^k\underline{c} ,$$

zijn met A^k dus ook alle oplossingen begrensd.

b) Er zijn eigenwaarden $\neq 1$, maar met absolute waarde 1. Op grond van st. 3.5.5 heeft nu A^k geen limiet, dus hebben ook niet alle oplossingen een limiet.

Men kan ook eenvoudigweg constateren dat de oplossing $\underline{x}_k = i^k\underline{v}$, met $\underline{v}$ een eigenvector bij i, geen limiet heeft, dus hebben niet àlle oplossingen een limiet.

De algemene oplossing is van de vorm

$$\underline{x}_k = \alpha 1^k\underline{u} + \beta i^k\underline{v} + \gamma(-i)^k\underline{w} ,$$

waarin $\underline{u}$, $\underline{v}$ en $\underline{w}$ eigenvectoren zijn bij 1, resp. i, resp. (−i). Het is duidelijk dat de oplossingen $\underline{x}_k = \alpha\underline{u}$ een limiet hebben. De oplossingen $\underline{x}_k = \beta i^k\underline{v} + \gamma(-i)^k\underline{w}$ bevatten de vectoren $\beta\underline{v} + \gamma\underline{w}$ (k = 4-voud) en $-\beta\underline{v} - \gamma\underline{w}$ (k = 4-voud + 2) oneindig vaak. Zo'n oplossing kan dus alleen dan een limiet hebben als $\beta\underline{v} + \gamma\underline{w} = -\beta\underline{v} - \gamma\underline{w}$, dus $2\beta\underline{v} + 2\gamma\underline{w} = \underline{0}$. Daar $\underline{v}$ en $\underline{w}$ lineair onafhankelijk zijn (eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden) volgt hieruit $\beta = \gamma = 0$.

Hieruit volgt dat de oplossingen van de vorm $\underline{x}_k = \alpha\underline{u}$ ook enige zijn die een limiet hebben. Voor $\underline{u}$ kan men nemen $[1,0,0]^T$.

4. a) $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$

b) Uit a) blijkt dat er een vector $\underline{c} > 0$ bestaat waarvoor $A\underline{c} \le \underline{c}$ (neem $\underline{c} = [1,1,1]^T$). Daar $A \ge 0$ volgt hieruit dat A^k begrensd is (st. 3.6.2) en dat dus $r(A) \le 1$ (st. 3.5.4). Daar blijkens a) de matrix A de eigenwaarde 1 heeft, geldt dus $r(A) = 1$. Daar $A > 0$, is Perron-Frobenius van toepassing (st. 3.6.7), die zegt, dat nu 1 een enkelvoudige (dus niet-defectieve) eigenwaarde is en dat de overige eigenwaarden een absolute waar-

de < 1 hebben. Maar dan bestaat $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ volgens st. 3.5.5 (2).
De algemene oplossing is

$$\underline{x}_k = A^k \underline{p} \ (\underline{p} \text{ willekeurig}) .$$

Met $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ bestaat dus ook $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$ voor elke oplossing $(\underline{x}_k)$.

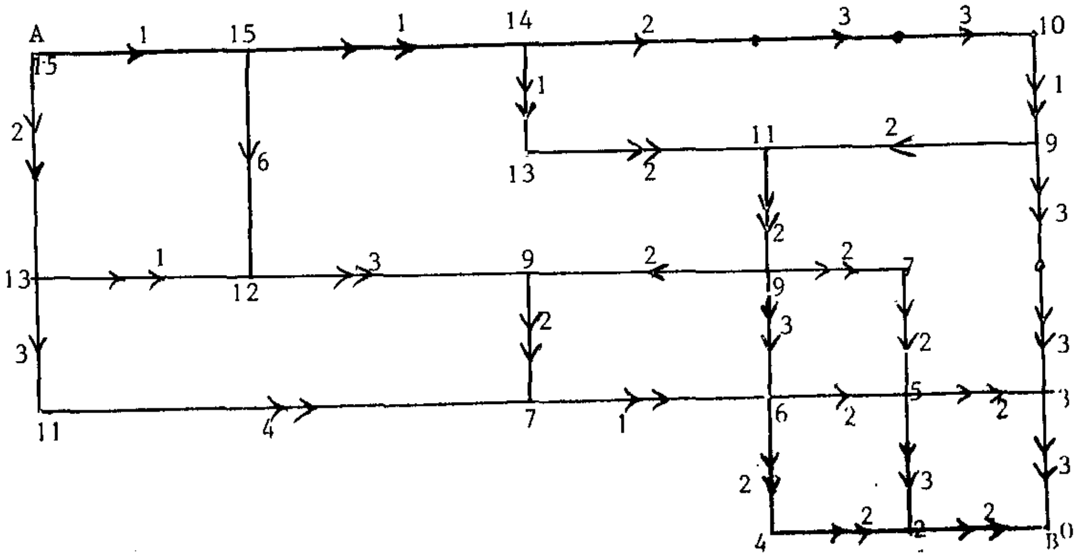
c) De methode van pag. 46-47 van de syllabus is van toepassing want 1 is een enkelvoudige eigenwaarde.
Een eigenvector van A bij de eigenwaarde 1 is $\underline{c} = [1,1,1]^T$ (zie a)).
Een eigenvector $\underline{d}$ van A^T is te vinden uit het stelsel vergelijkingen met matrix

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -10 & 7 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 10 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Voor $\underline{d}$ kan men kiezen $\underline{d} = [11,7,10]^T$. Noem de limietvector $\underline{\ell} = \lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$.
Dan is volgens de theorie $\underline{\ell} = \alpha\underline{c}$ en $(\underline{d},\underline{\ell}) = (\underline{d},\underline{x}_0)$ dus

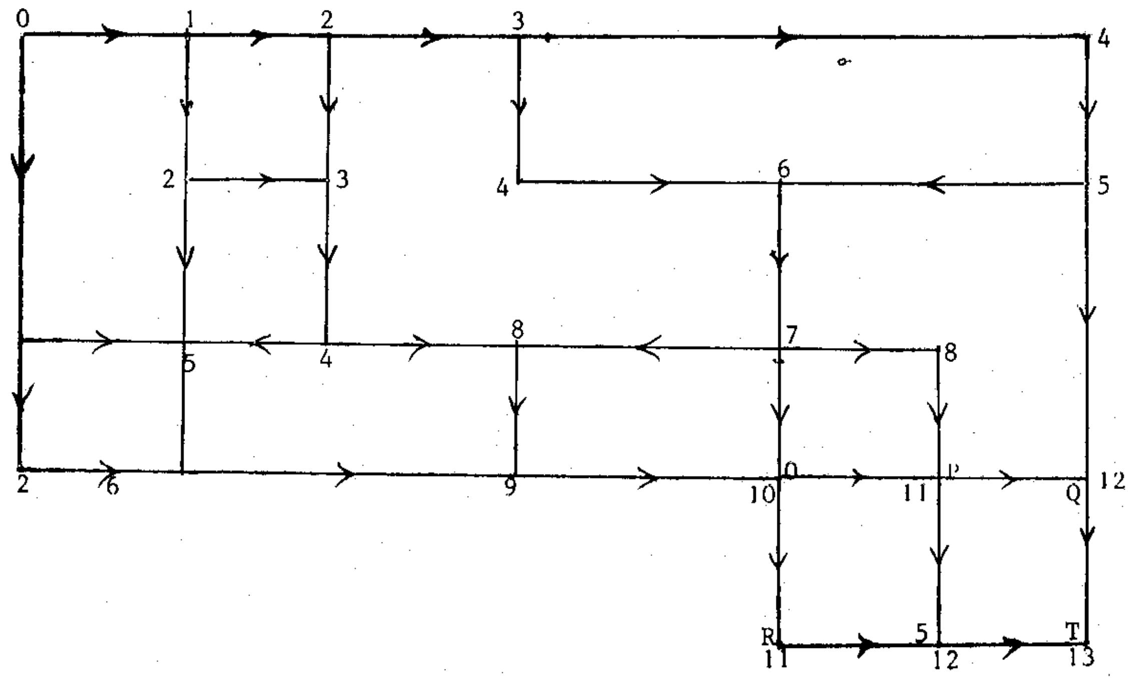
$$\alpha(\underline{d},\underline{c}) = (\underline{d},\underline{x}_0)$$
$$28\alpha = 84$$
$$\alpha = 3$$
$$\underline{\ell} = 3[1,1,1]^T .$$

5. a)



Volgens de methode van pag. 90 van de collegesyllabus bepalen we voor elke knoop x de waarde w(x), die we naast de knoop x noteren.
Er blijkt één oplossing te zijn: begin in A en volg de dubbele pijlen.

b)



Er bestaat een nummering der knopen zō dat voor iedere tak t nummer van b(t) < nummer van e(t). In de nummering hierboven is iedere knoop genummerd met zijn rang (dictaat pag. 74). De langste weg in de graaf heeft de lengte 13. Er zijn 3 wegen ter lengte 13. De enige knoop met rang 0 en de enige knoop 0 met rang 10 zijn door maar één weg ter lengte 10 verbonden, (dit ziet men direct door in 0 te beginnen en via 9,8,7 enz. terug te lopen). Elke langste weg eindigt in T. Door gewoon goed te kijken ziet men 3 mogelijkheden om van 0 naar T te gaan: ORST, OPST en OPQT, elk met lengte 3. Dus 3 wegen met lengte 13.

6. $f(x) = pxe^{-x}$, $0 \leq p \leq e$.

$x_0 = \alpha > 0$.

Als $p = 0$, is $x_k = 0$ voor alle $k \in \mathbb{N}$, dus $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. Zij verder $0 < p \leq e$. Dan is voor $x > 0$ ook $f(x) > 0$. Ter oriëntatie onderzoeken we de grafiek van f en de snijpunten daarvan met $y = x$. (Stationaire punten.)

$f(x) = 0$ enkel en alleen voor $x = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

$f'(x) = p(1 - x)e^{-x}$.

$f'(x) = 0$ alleen als $x = 1$ (voor alle p).

Daar $p > 0$ is $f'(x) > 0$ voor $x < 1$ en $f'(x) < 0$ voor $x > 1$.

f is dus maximaal voor $x = 1$.

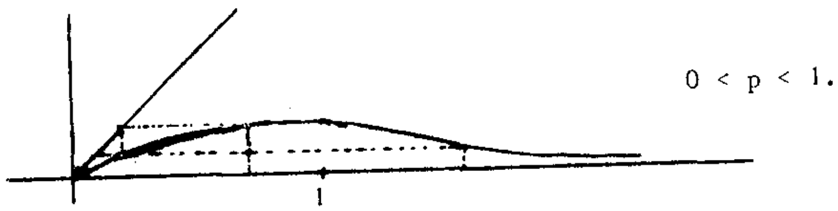
Het maximum van f is $pe^{-1} = \frac{p}{e}$. Daar $p \leq e$ ligt het punt $(1,\frac{p}{e})$ onder de lijn $y = x$, behalve als $p = e$.

Snijpunten met $y = x$:

Uit $pxe^{-x} = x$ volgt $x = 0$ of $pe^{-x} = 1$; $p = e^x$, $x = \ln p$ (bestaat, want $p > 0$). De x-coördinaat van het snijpunt buiten de oorsprong is dus negatief als $0 < p < 1$ en positief als $1 < p \leq e$. Voor $p = 1$ is er maar één snijpunt, en wel in 0. Daar voor $p = 1$, $f'(0) = 1$, raakt de grafiek van f de lijn $y = x$ dan in 0. Zo komen we tot de onderscheiding van de volgende relevante gevallen:

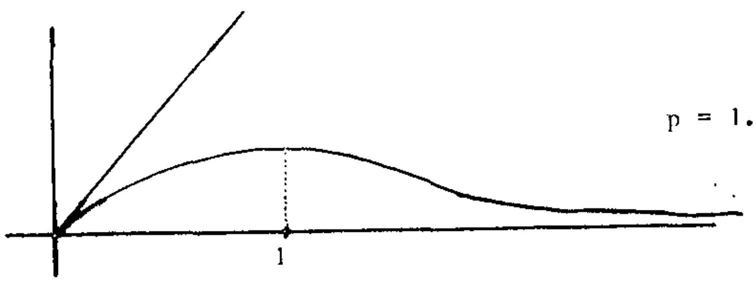
A) $0 < p < 1$; B) $p = 1$; C) $1 < p < e$; D) $p = e$.

A)



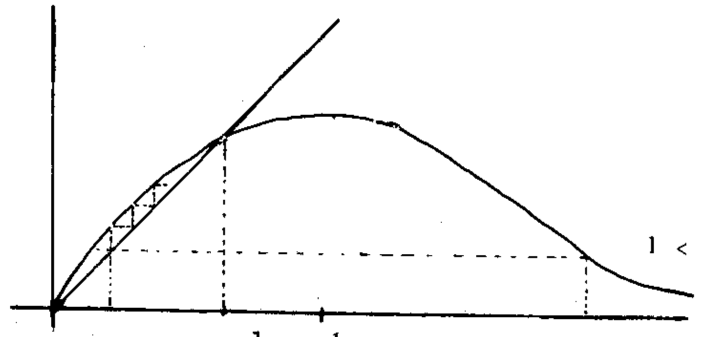
Uit de grafiek lezen we af dat in dit geval bij elke keuze van $x_0 > 0$ de rij (x_k) dalend is met limiet 0,

B)



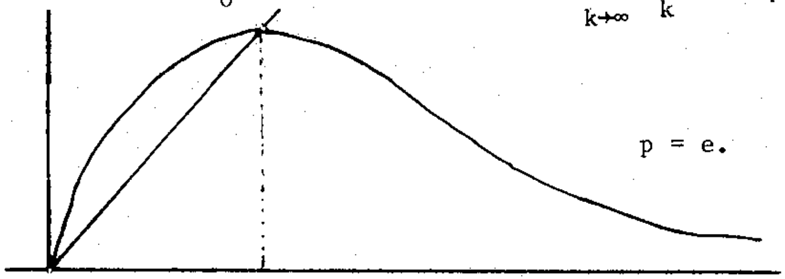
Ook hier is (x_k) monotoon dalend met limiet 0 voor elke $x_0 > 0$.

C)



Daar $1 < p < e$ is $0 < \ln p < 1$. Voor $x_0 = \ln p$, is voor alle $k \in \mathbb{N}$: $x_k = \ln p$. Voor $0 < x_0 < \ln p$ is de rij stijgend met $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \ln p$. Voor $\ln p < x_0 \le 1$ is de rij dalend met limiet $\ln p$. Voor $x_0 > 1$ is de rij niet voor alle x_0 monotoon, maar wel is $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \ln p$.

D)



Analoog aan C): ook nu is $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \ln p = 1$ voor elke $x_0 > 0$.

Conclusie: Voor alle $p \in [0,e]$ en voor alle $x_0 > 0$ is de rij (x_k) convergent. Voor $0 \le p \le 1$ is $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. Voor $1 < p \le e$ is $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \ln p$.

Opmerking. In geval A $(0 < p < 1)$ is $\xi = 0$ stabiel punt, omdat $|f'(0)| < 1$.
In geval B $(p = 1)$ is $\xi = 0$ rechts-stabiel punt; $f'(0) = 1$ (grensgeval).
In de gevallen C en D $(1 < p \le e)$ is $\xi = 1$ stabiel punt, omdat $|f'(1)| < 1$.
Voor alle vier de gevallen geldt dat alle oplossingen met $x_0 > 0$ stabiel zijn.

25 juni 1977

1. $2x_{k+2} - 5x_{k+1} + 2x_k + k^2 = 0$.

Eerst de homogene differentievergelijking: $2x_{k+2} - 5x_{k+1} + 2x_k = 0$. Substitueer $x_k = \lambda^k$: $2\lambda^{k+2} - 5\lambda^{k+1} + 2\lambda^k = 0$. Karakteristieke vergelijking: $2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$ of $2\lambda^2 - 4\lambda - \lambda + 2 = 0$ of $(2\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 2$ dus algemene oplossing van de homogene vergelijking

$$x_k = A(\tfrac{1}{2})^k + B2^k$$

Probeer als particuliere oplossing: $x_k = ak^2 + bk + c$.

$2\{a(k+2)^2 + b(k+2) + c\} - 5\{a(k+1)^2 + b(k+1) + c\} + 2\{ak^2 + bk + c\} + k^2 = 0$.

$2\{ak^2 + 4ak + 4a + bk + 2b + c\} - 5\{ak^2 + 2ak + a + bk + b + c\} + 2\{ak^2 + bk + c\} + k^2 = 0$.

$k^2(2a - 5a + 2a + 1) + k(8a + 2b - 10a - 5b + 2b) + (8a + 4b + 2c - 5a - 5b - 5c + 2c) = 0$.

$-a + 1 = 0 \rightarrow a = 1$.

$-2a - b = 0 \rightarrow b = -2a = -2$.

$3a - b - c = 0 \rightarrow c = 3a - b = 3 - (-2) = 5$.

Algmene oplossing van de inhomogene vergelijking

$$x_k = A(\tfrac{1}{2})^k + B2^k + k^2 - 2k + 5 .$$

$$\begin{aligned} \text{Controle: } & 2A(\tfrac{1}{2})^{k+2} + 2B2^{k+2} + 2(k+2)^2 - 4(k+2) + 10 \\ & -5A(\tfrac{1}{2})^{k+1} - 5B2^{k+1} - 5(k+1)^2 + 10(k+1) - 25 \\ & +2A(\tfrac{1}{2})^k + 2B2^k + 2k^2 - 4k + 10 + k^2 = \\ = {} & (\tfrac{1}{2})^k\{\tfrac{2}{4} - \tfrac{5}{2} + 2\}A + 2^k\{8 - 10 + 2\}B + k^2(2 - 5 + 2 + 1) + k(8 - 4 - 10 + 10 - 4) + \\ & + (8 - 8 + 10 - 5 + 10 - 25 + 10) \\ = {} & A(\tfrac{1}{2})^k 0 + B2^k 0 + k^2 0 + k0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

2. $$\underline{x}_{k+1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2\alpha \\ 2 & 4\alpha \end{bmatrix}\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Eerst homogene stelsel oplossen. De eigenwaarden van A volgen uit

$$\begin{vmatrix} 1 - 5\lambda & 2\alpha \\ 2 & 4\alpha - 5\lambda \end{vmatrix} = 25\lambda^2 - 5(4\alpha + 1)\lambda = 0 .$$

dus $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \dfrac{4\alpha + 1}{5}$.

Eigenvectoren bij λ_1 uit het stelsel vergelijkingen met matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\alpha \\ 2 & 4\alpha \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Een eigenvector is $\begin{bmatrix} -2a \\ 1 \end{bmatrix}$. Evenzo bij λ_2:

$$\begin{bmatrix} 1-4\alpha-1 & 2\alpha \\ 2 & 4\alpha-4\alpha-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4\alpha & 2\alpha \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dus een eigenvector is $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Oplossing homogene stelsel dus

$$\underline{x}_k = \left(\frac{4\alpha+1}{5}\right)^k c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0^k . c_2 \begin{bmatrix} -2\alpha \\ 1 \end{bmatrix} .$$

N.B. $0^0 = 1$.

We zoeken een oplossing van het inhomogene stelsel. Probeer, als 1 geen eigenwaarde is, dus als $\alpha \neq 1$, $\underline{x}_k = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$.

Substitutie in het stelsel geeft

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ dus } (I - A) \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Dit levert

$$\frac{4}{5} p - \frac{2}{5} \alpha q = 1 \qquad 5\text{x}$$

$$-\frac{2}{5} p - \left(\frac{4}{5} \alpha - 1\right) q = 2 \qquad 10\text{x}$$

$$+$$

dus

$$\left.\begin{aligned} 10(1-\alpha)q &= 25 \\ -2p + (5-4\alpha)q &= 10 \end{aligned}\right\} \text{ dus } q = \frac{5}{2}\frac{1}{1-\alpha} \text{ en } p = \frac{5}{4}\frac{1}{1-\alpha} .$$

Voor $\alpha \neq 1$ is de algemene oplossing dus

$$\underline{x}_k = \frac{5}{4}\frac{1}{1-\alpha} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_1 \left(\frac{4\alpha+1}{5}\right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 0^k \begin{bmatrix} -2\alpha \\ 1 \end{bmatrix} , \; c_1 \text{ en } c_2 \text{ reëel} .$$

Als $\alpha = 1$ heeft het homogene stelsel reeds een constante oplossing. We proberen nu het inhomogene stelsel op te lossen door de aanzet

$$\underline{x}_k = k \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} .$$

Substitutie geeft

$$k\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix} = kA\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + A\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Door coëfficiëntenvergelijking zien we dat $A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ is dus eigenvector bij de eigenwaarde 1, dus $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = p\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ voor nader te bepalen $p \neq 0$. Verder is

$$\begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Vullen we in dat $[a,b]^T = p[1,2]^T$ en $\alpha = 1$, dan vinden we

$$\begin{bmatrix} p + c \\ 2p + d \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} c + 2d \\ 2c + 4d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} ,$$

dus

$$\begin{aligned} 4c - 2d &= -5p + 5 \\ -2c + d &= -10p + 10 . \end{aligned}$$

Bekijk de matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5p + 5 \\ -2 & 1 & -10p + 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -25p + 25 \\ -2 & 1 & -10p + 10 \end{pmatrix} ,$$

dan zien we dat voor oplosbaarheid nodig en voldoende is $-25p + 25 = 0$, dus $p = 1$ en $[c,d]^T$ moet voldoen aan $-2c + d = 0$. We kiezen de eenvoudigste oplossing: $c = d = 0$. Als particuliere oplossing hebben we dus $\underline{x}_k = k\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ en als algemene oplossing

$$\underline{x}_k = k\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 0^k\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ als } \alpha = 1,\ c_2 \text{ en } c_2 \text{ reëel} .$$

3.

a) $\underline{x}_{k+1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\underline{x}_k.$

$$8 \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - 2\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1 - 2\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 2 - 2\lambda \end{vmatrix} = (-2\lambda)^3 + (2\lambda)^2\{4\} - 2\lambda\{3 + 3\} + \{2 + 1 + 1 + 1 + 1 - 2\} .$$

$-8\lambda^3 + 16\lambda^2 - 12\lambda + 4 = 0$ of $2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

$\lambda = 1$: $2 - 4 + 3 - 1 = 0$.

$(\lambda - 1)(2\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$.

$$\lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2.2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\,i \text{ dus } |\lambda_2| = |\lambda_3| = \frac{1}{2}\sqrt{1+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Dit stelsel heeft dus één enkelvoudige dus niet-defectieve eigenwaarde $= 1$ en de andere zijn in absolute waarde < 1. Conclusie: $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ bestaat (st. 3.5.5 (2)).

Omdat $\underline{x}_k = A^k\underline{x}_0$, bestaat ook $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$ voor alle $\underline{x}_0$.

b) Berekening van de eigenvector $\underline{c}$ van A bij $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1-2 & -1 & -1 \\ -1 & 1-2 & -1 \\ 1 & 1 & 2-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dus } \underline{c} = \mu(1,-1,0).$$

Berekening van de eigenvector $\underline{d}$ van A^T bij $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dus } \underline{d} = \tau(1,-1,0).$$

We kiezen $\underline{c} = \underline{d} = [1,-1,0]^T$.

$A^T\underline{d} = \underline{d}$ dus $\underline{d}^T A = \underline{d}^T$.

$\underline{d}^T\underline{x}_{k+1} = \underline{d}^T(A\underline{x}_k) = (\underline{d}^T A)\underline{x}_k = \underline{d}^T\underline{x}_k$ dus ook $\underline{d}^T\underline{x}_k = \underline{d}^T\underline{x}_0$ voor alle k.

$\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k = \alpha\underline{c}$.

$\lim\limits_{k\to\infty} \underline{d}^T\underline{x}_k = \lim\limits_{k\to\infty} \underline{d}^T\underline{x}_0 = \underline{d}^T\underline{x}_0$ maar ook $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{d}^T\underline{x}_k = \underline{d}^T\alpha\underline{c}$.

$$\alpha = \frac{\underline{d}^T\underline{x}_0}{\underline{d}^T\underline{c}} = \frac{((1,-1,0),(1,0,0))}{((1,-1,0),(1,-1,0))} = \frac{1}{2} \text{ dus } \lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \frac{1}{2}[1,-1,0]^T.$$

4. $\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\underline{x}_k,\ \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$.

z-transformatie: $z^{-1}(\hat{\underline{x}}(z) - \underline{x}_0) = A\hat{\underline{x}}(z)$ of $\hat{\underline{x}}(z) - \underline{x}_0 = zA\hat{\underline{x}}(z)$ of $\hat{\underline{x}}(z) - zA\hat{\underline{x}}(z) = \underline{x}_0$ dus $\hat{\underline{x}}(z) = (I - zA)^{-1}\underline{x}_0$.

$$I - zA = \begin{bmatrix} 1-3z & -4z \\ +z & 1+z \end{bmatrix},\ (I - zA)^{-1} = \frac{1}{1-2z-3z^2+4z^2}\begin{bmatrix} 1+z & +4z \\ -z & 1-3z \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{x}}(z) = \frac{1}{(1-z)^2}\begin{bmatrix} 1+z & 4z \\ -z & 1-3z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-z)^2}\begin{bmatrix} 4+4z-4z \\ -4z-1+3z \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-z)^2}\begin{bmatrix} 4 \\ -1-z \end{bmatrix}.$$

$$\hat{x}_1(z) = \frac{4}{(1-z)^2} = 4\frac{d}{dz}\frac{1}{(1-z)} = 4\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 4\sum_{k=0}^{\infty} kz^{k-1} =$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = 4 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^k \ .$$

Als $\hat{x}_1$ correspondeert met x_k dan is $x_k = 4(k+1)$ of volgens de tabel $(1-z)^{-n-1} \leftrightarrow \binom{n+k}{n}$, dus hier $(1-z)^{-1-1} \leftrightarrow \binom{1+k}{1} = k+1$.

$$\hat{x}_2(z) = \frac{-1-z}{(1-z)^2} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{(1-z)^2} = \frac{A(1-z)+B}{(1-z)^2} \text{ dus } \left.\begin{array}{r} A+B=-1 \\ -A=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=1 \\ B=-2 \end{array}$$

$$\hat{x}_2(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{-2}{(1-z)^2} \leftrightarrow y_k = 1 - 2(k+1) = -2k-1 \text{ dus } (\underline{x}_k) = \begin{bmatrix} 4k+4 \\ -2k-1 \end{bmatrix}.$$

Controle:

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4k+4 \\ -2k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12k+12-8k-4 \\ -4k-4+2k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4k+8 \\ -2k-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(k+1)+4 \\ -2(k+1)-1 \end{bmatrix}.$$

Andere manier van noteren:

$$\left.\begin{array}{ll} x_{k+1} = 3x_k + 4y_k & x_0 = 4 \\ y_{k+1} = -x_k - y_k & y_0 = -1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z^{-1}\{\hat{x}(z) - 4\} = 3\hat{x}(z) + 4\hat{y}(z) \\ z^{-1}\{\hat{y}(z) + 1\} = -\hat{x}(z) - \hat{y}(z) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \hat{x}(z) - 4 = 3z\hat{x}(z) + 4z\hat{y}(z) & (1-3z)\hat{x}(z) - 4z\hat{y}(z) = 4 \\ \hat{y}(z) + 1 = -z\hat{x}(z) - z\hat{y}(z) & z\hat{x}(z) + (1+z)\hat{y}(z) = -1. \end{array}$$

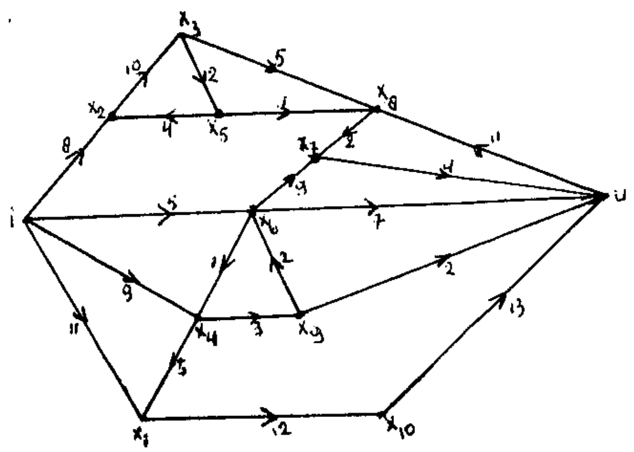
$$\hat{x}(z) = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -4z \\ -1 & 1+z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-3z & -4z \\ z & 1+z \end{vmatrix}} = \frac{4+4z-4z}{1-2z-3z^2+4z^2} = \frac{4}{1-2z+z^2} = \frac{4}{(1-z)^2} \ .$$

$$\hat{y}(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1-3z & 4 \\ z & -1 \end{vmatrix}}{(1-z)^2} = \frac{-1+3z-4z}{(1-z)^2} = \frac{-1-z}{(1-z)^2} = \frac{1-z}{(1-z)^2} - \frac{2}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{(1-z)^2}$$

Hieruit

$$x_k = 4(k+1) \text{ en } y_k = -2k-1 \ .$$

5.



$A = \{i, x_2, x_3, x_5, x_8, x_4, x_1\}$.

$B = \{x_6, x_7, x_9, x_{10}, u\}$.

$S(A,B) = \{x_8x_7, ix_6, x_4x_9, x_1x_{10}\}$.

$C(A,B) = 2 + 5 + 3 + 12 = 22$.

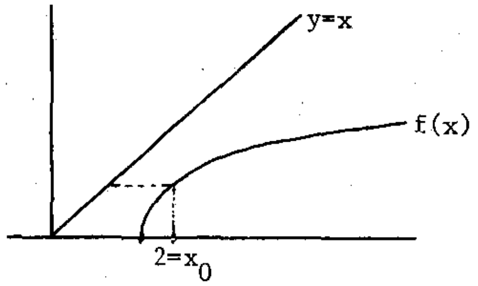
		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	
11	ix_1	0	11	11	11	11	11	11	11
8	ix_2	0						1	2
9	ix_4	0		1	3	4	4	4	4
5	ix_6	0					5	5	5
12	x_1x_{10}	0	11	12	12	12	12	12	12
10	x_2x_3	0						1	2
2	x_3x_5	0						1	1
5	x_3x_8	0							1
5	x_4x_1	0		1	1	1	1	1	1
3	x_4x_9	0			2	3	3	3	3
4	x_5x_2	0							
1	x_5x_8	0						1	1
1	x_6x_4	0							
9	x_6x_7	0							
7	x_6u	0				1	6	6	6
4	x_7u	0						1	2
2	x_8x_7	0						1	2
2	x_9x_6	0				1	1	1	1
2	x_9u	0			2	2	2	2	2
13	$x_{10}u$	0	11	12	12	12	12	12	12
		0	11	12	14	15	20	21	22

Bij deze stroom gaat de constructie van A als volgt: $i \in A$; omdat ix_2 niet verzadigd, $x_2 \in A$; zo ook x_3, x_5 en x_8 in A. Verder: ix_4 niet verzadigd, dus $x_4 \in A$ en dus ook $x_1 \in A$ want x_4x_1 niet verzadigd. B bevat de overige knopen. S(A,B) bestaat uit alle takken met beginpunt in A en eindpunt in B.

Omdat de capaciteit van deze snede gelijk is aan de stroomsterkte (22) is deze stroomsterkte maximaal en de snedecapaciteit minimaal. Immers, voor elke stroom geldt: stroomsterkte $\leq$ capaciteit van elke snede.

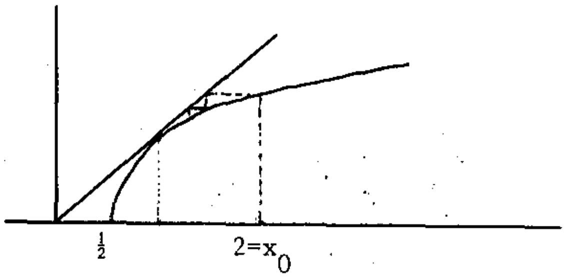
6. $x_{k+1} = f(x_k)$ met $f(x) = \sqrt{2x - p}$. f is gedefinieerd voor $x \geq \frac{p}{2}$, de grafiek van f is "halve" parabool. Voor de snijpunten van $y = x$ met $y = \sqrt{2x - p}$ geldt $\sqrt{2x - p} = x$, dus $x^2 - 2x + p = 0$, $x \geq 0$; $(x - 1)^2 = 1 - p$, $x \geq 0$; $x = 1 \pm \sqrt{1 - p}$, $x \geq 0$, heeft voor $p > 1$ geen oplossing, voor $p = 1$ één oplossing, voor $0 \leq p < 1$ 2 niet-negatieve oplossingen en voor $p < 0$ één positieve oplossing.
Dit leidt tot de volgende gevallen:

$p > 1$



iteratie breekt af.

$p = 1$

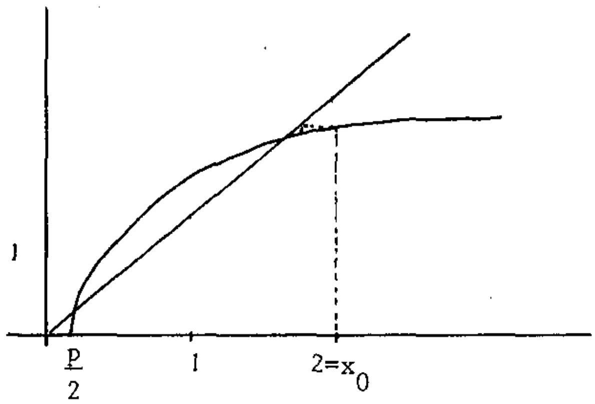


We lezen uit de grafiek af:

(x_k) monotoon dalend,

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 1.$

$0 < p < 1$



In dit geval is

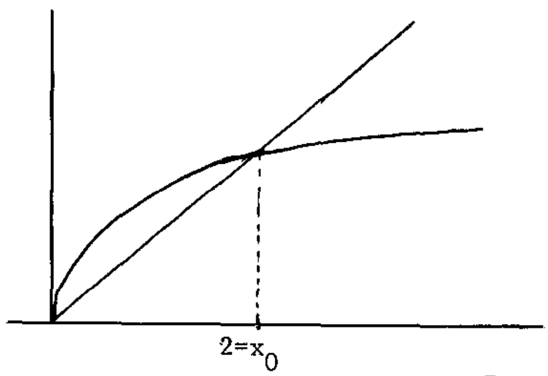
$0 < 1 + \sqrt{1 - p} < 2$ en

$0 < 1 - \sqrt{1 - p} < 1$

x_k is monotoon dalend.

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 1 + \sqrt{1 - p}.$

$p = 0$



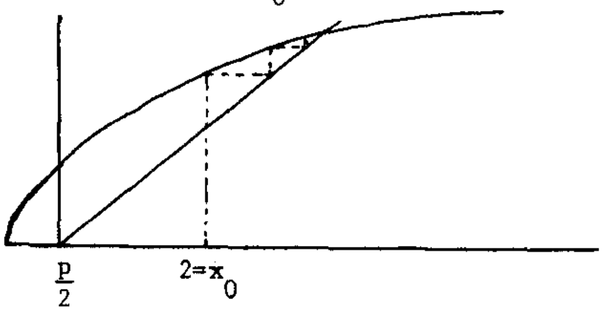
$1 + \sqrt{1 - p} = 2$

$1 - \sqrt{1 - p} = 0.$

Voor alle k is nu $x_k = 2$, dus

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 2.$

$p < 0$



$1 + \sqrt{1 - p} > 2.$

De rij (x_k) is nu monotoon stijgend en $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 1 + \sqrt{1 - p}.$

Derhalve: de iteratie breekt af als $p > 1$; de rij (x_k) is monotoon stijgend uitsluitend als $p < 0$; $\lim_{k\to\infty} x_k$ bestaat en is gelijk aan $1 + \sqrt{1-p}$ voor $p \leq 1$.

Een formeel bewijs dat voor $p < 0$ de rij (x_k) monotoon stijgend is en een limiet heeft gaat als volgt: We bewijzen eerst met volledige inductie, dat (x_k) stijgend is:

1) $x_1 = \sqrt{4-p} > \sqrt{4} = 2$, want $p < 0$, dus $x_1 > x_0$.
2) Als $x_k > x_{k-1}$, dan $x_{k+1} = f(x_k) > f(x_{k-1})$ want f is stijgend. Dus dan geldt $x_{k+1} > x_k$.
3) Dus geldt voor alle $k \in \mathbb{N}$: $x_k > x_{k-1}$ d.w.z. de rij (x_k) is stijgend.

Vervolgens tonen we aan dat (x_k) begrensd is, door te bewijzen dat voor alle $k \in \mathbb{N}$ geldt $x_k < \xi := 1 + \sqrt{1-p}$.

1) $x_0 < \xi$, want $1 + \sqrt{1-p} > 1 + \sqrt{1} = 2$, daar $p < 0$.
2) Als $x_k < \xi$, dan $x_{k+1} = f(x_k) < f(\xi)$, want f is stijgend. Verder is $f(\xi) = \xi$, dus $x_{k+1} < \xi$.
3) Dus voor alle $k \in \mathbb{N}$ is $x_k < \xi$.

De rij (x_k) is dus monotoon stijgend en naar boven begrensd, dus $\lim_{k\to\infty} x_k$ bestaat.
De limiet ℓ voldoet aan $\ell = f(\ell)$, dus er is maar 1 mogelijkheid: $\ell = 1 + \sqrt{1-p}$.

Opmerking. Men vindt $f'(x) = (2x-p)^{-\frac{1}{2}}$. In het geval $p = 1$ is $\xi = 1$ stabiel punt, hoewel $f'(1) = 1$ (grensgeval).

Voor $p < 1$ is het stationaire punt $\xi = 1 + \sqrt{1-p}$ stabiel, omdat $|f'(1 + \sqrt{1-p})| < 1$.
In al deze gevallen is de oplossing (met $x_0 = 2$) stabiel.

16 januari 1978

1. Wortels van de karakteristieke vergelijking zijn 1 (dubbel) en -1; algemene oplossing:

$$x_k = \alpha + \beta k + \gamma(-1)^k + k^2.$$

2. Voor $x_0 = 0$ of $x_0 = 2$ is $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$; voor $0 < x_0 < 2$ is $\lim_{k\to\infty} x_k = 1$; de rij is divergent voor andere waarden van x_0.

3. $\underline{x}_k = \alpha\left(\cos\frac{k\pi}{3}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix} + \sin\frac{k\pi}{3}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{3}\\0\\0\end{bmatrix}\right) + \beta\left(\cos\frac{k\pi}{3}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\\0\\0\end{bmatrix} +\right.$

$\left. + \sin\frac{k\pi}{3}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}\right) + \gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + k\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}.$

4. a. Eigenwaarden van A zijn 1, $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$, dus $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$ bestaat voor elke $\underline{x}_0$.

b. $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k = \dfrac{\underline{d}^T\underline{x}_0}{\underline{d}^T\underline{v}_1}\,\underline{x}_0 = \begin{bmatrix}8\\-8\\4\end{bmatrix}$, waarbij $\underline{d}^T = [1,-1,0]$, en $\underline{v}_1 = [2,1,0]^T$

(de eigenvector bij eigenwaarde 1).

5. Er bestaat een nummering zodanig dat voor elke tak t geldt:

nummer van b(t) < nummer van e(t).

De lengte van de langste weg is 7.

6. De knopenmatrix is

$$A = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

en de bereikbaarheidsmatrix is

$$R = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

In A^4 staat op de plaats (i,j) het aantal wegen met weglengte 4 van knoop i naar knoop j.

$$A^4 = \begin{bmatrix}1&1&2&8\\0&0&0&2\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

en de 8 wegen met lengte 4 van knoop 1 naar knoop 4 zijn: (1,1,1,3,4), (1,1,2,3,4),(1,1,1,2,4),(1,2,3,4,4),(1,1,3,4,4),(1,1,2,4,4),(1,2,4,4,4) en (1,3,4,4,4).

24 januari 1978

1. Wortels van de karakteristieke vergelijking zijn 1 en -2; de algemene oplossing is $x_k = \alpha + \beta(-2)^k + \frac{1}{3}k - \frac{1}{2}(-1)^k$.

2. Het gevraagde blijkt direct uit de grafiek van de functie f(x) die de iteratie definieert. De afgeleide van f(x) in het snijpunt van de grafiek met de lijn y = x is $\frac{1}{4}$. (Dit maakt bovendien, dat het limietpunt een stabiele oplossing representeert.) Men vindt $\lim_{k\to\infty} x_k = 2$.

3. a) Als $\alpha = 0$, is 1 een niet-defectieve eigenwaarde; voor alle andere α is er een eigenwaarde groter dan 1, dus we hebben alleen convergentie voor alle x_0 als $\alpha = 0$. $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = [x_{01},x_{02},0]^T$, als $\underline{x}_0 = [x_{01},x_{02},x_{03}]^T$.

   b) Alleen convergentie voor die $\underline{x}_0$ die liggen in het opspansel van de eigenvector bij de eigenwaarde 1 (de andere eigenwaarden zijn -1 en 2). Deze eigenvector is $[1,-1,0]^T$ en $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{x}_0$ in dat geval.

4. Na z-transformatie volgt $\hat{x}(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ zodat $x_k = k$, en

$$\hat{y}(z) = \frac{z}{(1-2z)(1-z)} = \frac{1}{1-2z} - \frac{1}{1-z} \text{ zodat } y_k = 2^k - 1.$$

5. Een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte 9 neemt op de volgende takken de daarachter vermelde waarden aan: ix_3, 5; ix_2, 3; ix_1, 1; x_3x_5, 4; x_5x_6, 4; x_3x_4, 1; x_2x_4, 3; x_1x_4, 1; x_4x_6, 5; x_6x_7, 3; x_6u, 2; x_7u, 3. Op de andere takken heeft de stroom de waarde 0. Een snede met minimale capaciteit is $\{ix_3;\ x_2x_4;\ x_1x_4\}$. De verzamelingen die deze snede definiëren, zijn (in de notatie van de syllabus): $A = \{i,x_2,x_1\}$ en $B = \{x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,u\}$.

1 juni 1978

1. a. De wortels van de karakteristieke vergelijkingen zijn $\frac{1}{2}$ en $-\frac{1}{2}$, dus is de algemene oplossing: $x_k = \alpha(\frac{1}{2})^k + \beta(-\frac{1}{2})^k$.

b. Substitueer $y_k = (k+1)x_k$. De gevraagde oplossing is $x_k = \dfrac{1+(-1)^k}{2k+2}$.

2. a. Na inspectie van de grafiek van $f(x) = \dfrac{2x+5}{x+3}$ blijkt dat voor $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21} < x_0 < -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}$ de rij (x_k) monotoon stijgend is.

   b. Voor $x_0 > -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}$ is (x_k) monotoon dalend.

   c. Uit a. en b. blijkt (zie ook de grafiek) dat $\lim_{k\to\infty} x_k$ bestaat voor $x_0 \geq 0$; deze is dan gelijk aan $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}$. In het snijpunt (ξ,ξ) van de grafiek met de lijn $y = x$ is $f'(\xi) = \dfrac{1}{(2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21})^2}$, dus absoluuut genomen kleiner dan 1.

   d. Als $x_1 = -3$, breekt de rij (x_k) af. Hieraan is voldaan voor $x_0 = -\frac{14}{5}$.

3. De eigenwaarden van A zijn $\frac{9}{10}$ en $-\frac{9}{10}$ (dubbel), dus bestaat $\lim_{k\to\infty} x_k$. Noem de limiet $\underline{a}$. Deze moet voldoen aan $\underline{a} = A\underline{a} + \begin{bmatrix} 1/10 \\ 0 \\ 1/10 \end{bmatrix}$. Oplossen van deze vergelijking geeft $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. De eigenwaarden van A zijn $\pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$. De eigenvectoren zijn $[1, \mp 2i\sqrt{3}]^T$. De algemene oplossing is nu (er is een constante particuliere oplossing):

$$x_k = \alpha(\tfrac{1}{2}\sqrt{3})^k\left(\cos\frac{k\pi}{2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \sin\frac{k\pi}{2}\begin{bmatrix}0\\2/3\end{bmatrix}\right) + \beta(\tfrac{1}{2}\sqrt{3})^k\left(\cos\frac{k\pi}{2}\begin{bmatrix}0\\2/3\end{bmatrix} + \sin\frac{k\pi}{2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}.$$

5. Na z-transformatie vinden we $\hat{x}(z) = \dfrac{-2z^2 - 5z + 5}{(1-2z)(1+z)(1-z)} = \dfrac{8/3}{1-2z} + \dfrac{4/3}{1+z} + \dfrac{1}{1-z}$. Dus $x_k = \frac{8}{3}\,2^k + \frac{4}{3}(-1)^k + 1$.

6. a. Breng een geschikte nummering aan.

   b. De goedkoopste weg van x_1 naar x_{11} is $(x_1,x_3,x_4,x_7,x_9,x_{11})$; de kosten bedragen 15.

   c. Er bestaat geen duurste weg, omdat de graaf in dat geval een kring bevat.

15 januari 1979

1. $x_k = \frac{1}{4}k^2 + \alpha + \beta k + \gamma(-1+\sqrt{2})^k + \delta(-1-\sqrt{2})^k$.

2. a. $x_0 > -1$; b. $\xi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

3. a. Neen: kolomsommen niet gelijk aan 1.
   b. $A \geq 0$ en rijsommen gelijk aan 1; $\underline{c} = [1,1,1]^T$ is eigenvector met $\lambda = 1$, dus A^k is begrensd (3.6.2. of 3.6.4.); $r(A) = 1$.
   c. $A > 0$, $\lambda = r(A) = 1$ dus $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ bestaat (3.6.7. en 3.6.8.).

4.
$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 8 - 8(\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^k & 0 \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}(-1)^k & 12 + \frac{8}{3}(-1)^k - \frac{44}{3}(\frac{1}{2})^k & (-1)^k \end{bmatrix}$$

5. a. Nummering N(x) mogelijk met N(b(t)) < N(e(t)) voor alle takken t: F-A-C-G-I-J-K-E-H-D-B.
   b. F-A-... (als bij a.); lengte 10.
   c. Er ontstaat een kring B-C-G-I-J-H-D-B. In de graaf zijn willekeurig lange wegen aanwezig.

6. Maximale stroom 9; snede met minimale capaciteit:
   $A = \{i,x_1,x_3,x_4,x_5,x_6,x_8,x_9\}$, $B = \{x_2,x_7,x_{10},u\}$.

31 mei 1979

1. $x_k = -\frac{3}{16} - \frac{1}{4}k + \frac{3}{16}(-3)^k$.

2. $\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\underline{x}_k + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ (bij voorbeeld); $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 \\ 2t_0+3 \end{bmatrix}$.

3. a. Neem $\underline{c} = [2,2,1]^T$.

b. $A^k \to 0$ voor $k \to \infty$, dus $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$ bestaat (3.6.3. of 3.6.6.). De limietvector is $[13,8,3]^T$.

4.
$$A^k = \begin{bmatrix} \cos\frac{k\pi}{2} & \sin\frac{k\pi}{2} & 0 \\ -\sin\frac{k\pi}{2} & \cos\frac{k\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

5. a. Voor $x_0 \geq 0$.

b. $\xi = 1$ is zeker een stabiel stationair punt voor $|f'(1)| = |1 - \alpha| < 1$ ofwel voor $0 < \alpha < 2$.

<u>12 juni 1979</u>

1. a. $x_k = \frac{1}{2}k + \alpha + \beta \cos\frac{k\pi}{2} + \gamma \sin\frac{k\pi}{2}$.

b. Een nummering N(x) met N(b(t)) < N(e(t)) voor alle takken t is mogelijk: begin met meest linkse knoop.

2. a. Voor $- 2 < a < - \frac{1}{4}$.

b. Voor $- \frac{1}{4} \leq a < 2$.

3. Neen: $\lambda = 1$ is defectieve eigenwaarde.

b. $$\underline{x}_k = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\left\{\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{bmatrix}\right\} + \gamma \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\tfrac{1}{2})^k.$$

c. $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{0}$.

4. a. A^k is begrensd: $A \geq 0$, rijsommen ≤ 1 (3.6.6.).

b. $\lambda = 1$ is niet defectief dus $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ bestaat.

c. $$\underline{x}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} 0^k + \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\left(-\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}\left(-1\right)^k .$$

5. Maximale stroom 11; snede met minimale capaciteit:

1e oplossing: $A = \{i,x_1,x_2\}$, $B = \{x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,u\}$.

2e oplossing: $A = \{i,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7\}$, $B = \{u\}$.

14 januari 1980

1. $x_k = \frac{8}{5} + 2k + \frac{2}{5}(-4)^k$.

2. $$\underline{x}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \left\{\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} + \beta\left(k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -18 \end{bmatrix}\right)\right\} 2^k + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} 3^k.$$

3. $-1 < a \leq 1$.

4. Maximale stroom: 5, snede met minimale capaciteit: $A = \{i, x_1\}$.
   $B = \{x_2, x_3, \ldots, x_8, u\}$.

5. a. $\underline{x}_1 = [1,0,0]^T$; $\underline{x}_2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0]^T$.

   b.
$$\underline{x}_{n+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \underline{x}_n.$$

   c. Oplossing:
$$\underline{x}_n = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} (\tfrac{1}{3})^n + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} (\tfrac{2}{3})^n + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ met } \alpha = 3,\ \beta = -3,\ \gamma = 1.$$

   Hieruit volgt

$$z_n = (\tfrac{1}{3})^{n-1} - 2(\tfrac{2}{3})^{n-1} + 1.$$

5 juni 1980

1. a. $x_k = -2\,(\frac{1}{2}\sqrt{2})^k \cos\frac{k\pi}{4} + 2$.

2. $$\underline{x}_k = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\left(k \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (\tfrac{1}{2})^k.$$

3. $B = -A > 0$ heeft rijsommen $\frac{7}{8} < 1$ dus $B^k \to 0$ en ook $A^k \to 0$ voor $k \to \infty$. Voor elke $\underline{x}_0$ is $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{0}$.

4. Kosten van de duurste weg zijn 40.

5. a. $\xi_1 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2a}$; $\xi_2 = \dfrac{-1-\sqrt{1+4a^2}}{2a}$.

b. Noem $f(x) = a(1-x^2)$; $|f'(\xi_1)| < 1$ dan en slechts dan als $a^2 < \frac{3}{4}$. Voor $0 < a < \frac{1}{2}\sqrt{3}$ is ξ_1 stabiel punt. Uit de figuur blijkt dat de rij convergent is voor $|x_0| < 1$ (limiet ξ_1).

c. $x_{k+2} = 2x_k^2 - x_k^4$. Deze iteratie heeft vier stationaire punten, $\xi_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 1$. De laatste twee zijn stabiel. $\eta = 0$ is het gevraagde limietpunt voor $x_0 = \frac{1}{10}$.

17 juni 1980

1. $x_k = 1 - k$.

2. a. Neem b.v. $\underline{x}_0 = [1,2,-4]^T$, eigenvector bij $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

b. $\lambda_2 = 1$, met eigenvector $\underline{v} = [0,1,-1]^T$.

Basis voor V: $\{[1,2,-4]^T, [0,1,-1]^T\}$.

3. a.

$$A^k = (\tfrac{1}{2})^k \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ k & 1 & \frac{1}{2}(k+k^2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

b. $A^k \to 0$ voor $k \to \infty$ dus $\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k$ bestaat. Deze is $[6,8,4]^T$.

4. a.

$$\begin{bmatrix}
0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&2&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

b. A^6 bevat het element $a_{1,11} = 1 \neq 0$. (Aflezen uit de figuur!)

c. Langste weg heeft lengte 7, dus $A^8 = 0$ en A is nilpotent. Er zijn dus geen kringen.

5. a. $a \geq 0$.

b. Voor $a = 0$ en voor $a > 0$ is elke oplossing met $x_0 \geq -a^2$ stabiel. Voor $a = 0$ is de limiet 0, voor $a > 0$ is de limiet $a^2(2 + 2\sqrt{2})$.