

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

## **WISKUNDE 17 en 27**

**Syllabus van het college van**

**Prof. Dr. S.T.M. Ackermans**

**voor eerstejaarsstudenten van de afdeling Bouwkunde**

**Cursusjaar 1973-1974**

2257

Bild / M<sub>20</sub>



Technische Hogeschool Eindhoven

## *Onderafdeling der Wiskunde*

### *Wiskunde 17 en 27*

Syllabus van het college voor eerstejaarsstudenten van  
de afdeling Bouwkunde.

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 17 EN 27

Syllabus van het college van  
Prof.dr. S.T.M. Ackermans  
voor eerstejaarsstudenten van  
de afdeling Bouwkunde,  
gegeven in het cursusjaar 1973-1974

Typewerk: Mej. Th.J.M. van den Hurk  
Mevr. H.K. van der Putten-Bosscher

## Inhoud

	blz.
Hoofdstuk 1. Bouwstenen der wiskunde	1
1.1. Verzamelingen	1
1.2. Getallen	4
1.3. Afstand	6
1.4. Afbeeldingen	10
Hoofdstuk 2. De grondbegrippen van de analyse	14
2.1. Limieten	14
2.2. Continuïteit	20
2.3. Differentieerbaarheid	22
Hoofdstuk 3. Integraalrekening	31
3.1. De bepaalde integraal	31
3.2. De hoofdstelling der integraalrekening; onbepaalde integralen	35
3.3. Exponentiële en logaritmische functies	38
3.4. Oneigenlijke integralen	42
3.5. Opmerkingen over het berekenen van integralen	43
Hoofdstuk 4. Toepassingen	47
4.1. Extrema	47
4.2. Differentiaalvergelijkingen	52
Hoofdstuk 5. Uitbreiding van de differentiaalrekening	60
5.1. Hogere afgeleiden	60
5.2. De betekenis van de tweede afgeleide	63
5.3. Differentiaalvergelijkingen (vervolg)	67
Hoofdstuk 6. Functies van meer dan één veranderlijke	74
6.1. Hoogtekaart; continuïteit	74
6.2. Differentieerbaarheid van functies van twee veranderlijken	79
6.3. Toepassingen van partieel differentiëren	87
Hoofdstuk 7. Aanvullende opmerkingen over analytische meetkunde	94
7.1. Parametervoorstellingen	94
7.2. Coördinaten	98

## Inhoud (vervolg)

	blz.
Hoofdstuk 8. Uitbreiding van de integraalrekening	102
8.1. Meervoudige integralen	102
8.2. Herhaalde integralen	107
8.3. Enkele formules voor lengte en oppervlakte	118
Hoofdstuk 9. Reeksen	119
9.1. Convergentie	119
9.2. Reeksen met uitsluitend niet-negatieve termen	122
9.3. Absolute convergentie	127
9.4. Machtreeksen	128
9.5. Numerieke berekeningen	135
Hoofdstuk 10. Reeksontwikkelingen	140
10.1. De formules van Taylor en MacLaurin	140
10.2. Toepassing op limieten	147
10.3. Numerieke berekeningen (vervolg)	149
10.4. Machtreekssubstitutie in differentiaal- vergelijkingen	150
Hoofdstuk 11. Iteratiemethoden	155
11.1. De methode van Newton	155
11.2. Contracties	157
11.3. De methode van Picard	160
Hoofdstuk 12. Fourierreeksen	162
12.1. Fouriercoëfficiënten	162
12.2. Fourierreeksen met periode $2L$	167
12.3. Sinusreeksen, cosinusreeksen	170
12.4. Het isoperimetrisch probleem	173
Aanhangsel. Het tellen van verzamelingen en afbeeldingen	179
Formulelijst tentamen wiskunde 27	181

## Hoofdstuk 1. Bouwstenen der Wiskunde.

### 1.1 Verzamelingen.

In een moderne opbouw van de wiskunde neemt het begrip verzameling een centrale plaats in. Wat verzamelingen zijn is iedereen intuïtief min of meer bekend. We volstaan met enkele kanttekeningen bij dit intuïtieve begrip.

Verzamelingen bestaan uit elementen. Als we alle elementen van een verzameling  $V$  kennen, is  $V$  daardoor volledig bepaald; het is daarbij niet van belang hoe we de elementen aangeven. "De verzameling bestaande uit de getallen 1, 2, 5 en 10" is dezelfde als "de verzameling van de delers van 10".

Als  $a$  een element van een verzameling  $V$  is, noteren we dit als:  $a \in V$ . We zeggen: " $a$  behoort tot  $V$ ", " $a$  ligt in  $V$ ". We geven met  $a \notin V$  aan dat  $a$  geen element van  $V$  is. Wezenlijk begrepen in het begrip verzameling is ook dat er verschil is tussen een verzameling en zijn elementen.

De verzameling van de clubs spelend in de eredivisie is zelf geen club. De verzameling van de leden van de tweede kamerfractie van D66 is zelf geen lid van de kamer; hetzelfde geldt voor de verzameling van de leden van de tweede kamerfractie van een partij die slechts één vertegenwoordiger in de tweede kamer heeft.

We zullen twee methodes gebruiken om verzamelingen aan te geven. De eerste is: alle elementen opschrijven tussen accolades en gescheiden door komma's. Voorbeelden:  $\{1, 2, 5, 10\}$ ;  $\{1, 2\}$ ; deze laatste verzameling heeft slechts één element nl. de verzameling  $\{1, 2\}$ , dat is de verzameling bestaande uit de getallen 1 en 2. De verzamelingen  $\{1\}$  en  $\{\{1\}\}$  zijn verschillend; denk hierbij aan het voorbeeld van de éénmanskamerfractie.

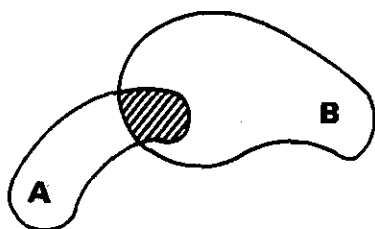
De nu beschreven methode is erg onhandig als de verzameling veel elementen bevat, en onbruikbaar indien hij oneindig veel elementen bevat. We moeten in deze gevallen onze toevlucht nemen tot het gebruik van veranderlijken, en dan de verzameling karakteriseren met een of ander kenmerk. Zo kunnen we de verzameling van de miljonairs uit de gemeente Waalre noteren als:

$$\{x \mid x \text{ woont in Waalre, } x \text{ is miljonair}\}.$$

Symbolisch kunnen we deze schrijfwijze dus aanduiden als  $\{x \mid P(x)\}$ , waarbij  $P(x)$  staat voor het kenmerk dat de verzameling definieert.

Ter illustratie van beweringen uit de verzamelingenleer gebruikt men vaak plaatjes waarbij iedere verzameling voorgesteld wordt door het inwendige

van een gesloten kring op het blad papier. Zulke plaatjes heten Venn-diagrammen:



Als A de verzameling van de inwoners van Waalre voorstelt en B die van de miljonairs, dan stelt het gearceerde stukje in het bovenstaande plaatje voor de verzameling:

$$\{x \mid x \text{ woont in Waalre, } x \text{ is miljonair}\}.$$

We zullen in de rest van deze paragraaf enkele begrippen uit de verzamelingenleer leren kennen.

Definitie. Laat A en B verzamelingen zijn. Als ieder element van A ook element van B is dan heet A deelverzameling van B. Notatie  $A \subset B$ .

We zeggen ook: B omvat A, en schrijven  $B \supset A$ .

Als voorbeeld geldt:

De verzameling van de inwoners van Venlo  $\subset$   
 $\subset$  de verzameling van de inwoners van Limburg  $\subset$   
 $\subset$  de verzameling van de inwoners van Nederland.

Dezelfde gedachtengang die ons de juistheid van de beweringen in dit voorbeeld laat inzien leidt ook tot:

De verzameling van de kolenmijnen in Venlo  $\subset$   
 $\subset$  de verzameling van de kolenmijnen in Limburg  $\subset$   
 $\subset$  de verzameling van de kolenmijnen in Nederland.

Hieruit lezen we twee dingen: Het is verstandig geweest dat we het begrip deelverzameling zo gedefinieerd hebben dat voor elke verzameling A geldt:  $A \subset A$ ; we zullen er gemak van hebben indien we ook zullen beschouwen de verzameling die geen enkel element bevat. Deze laatste verzameling noemen we de lege verzameling. Hij wordt steeds genoteerd m.b.v. de scandinavische letter  $\emptyset$ .

Ook bij het opschrijven van verzamelingen als:  $\{x \mid x \text{ woont in Vessem, } x \text{ is multimiljonair}\}$  hebben we gemak van de lege verzameling. Ook als de zojuist aangegeven verzameling geen enkel element bevat, dus leeg is, is hij nog wel een verzameling in ons systeem, nl.  $\emptyset$ .

In elke beschouwing waarin we verzamelingen gebruiken, zijn steeds alle voorkomende verzamelingen deelverzameling van een vaste verzameling, die we het universum van die beschouwing noemen.

Is  $U$  het universum,  $A \subset U$  dan heet  $\{x \mid x \in U, x \notin A\}$  het complement van  $A$ . We noteren het complement van  $A$  als  $A^*$ .

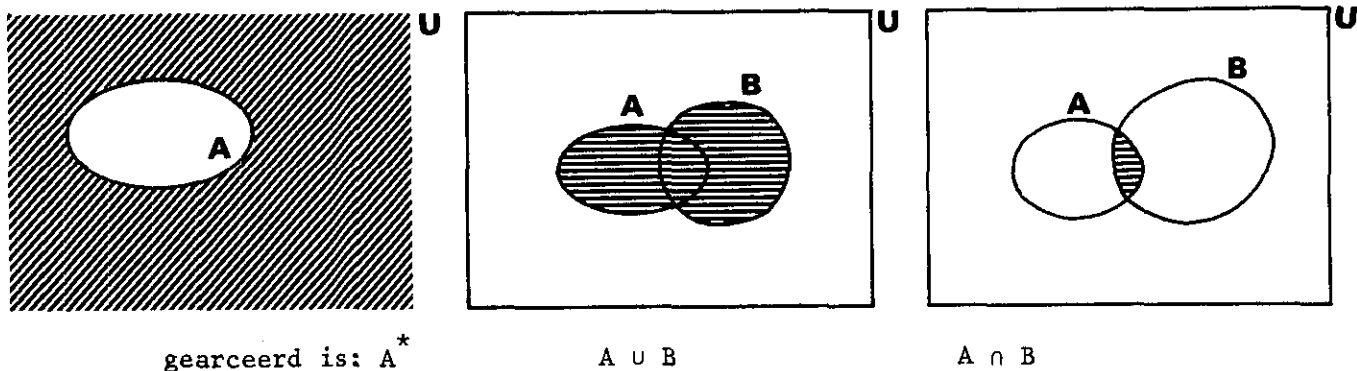
Definitie. We beschouwen een collectie deelverzamelingen van een universum  $U$ .

De vereniging van de collectie is de deelverzameling van  $U$  bestaande uit die elementen die in tenminste één verzameling uit de collectie liggen.

De doorsnede van de collectie is de deelverzameling van  $U$  bestaande uit die elementen die tot elke verzameling uit de collectie behoren.

De vereniging van de verzamelingen  $A$  en  $B$  noteren we  $A \cup B$ .

De doorsnede van de verzamelingen  $A$  en  $B$  noteren we  $A \cap B$ .



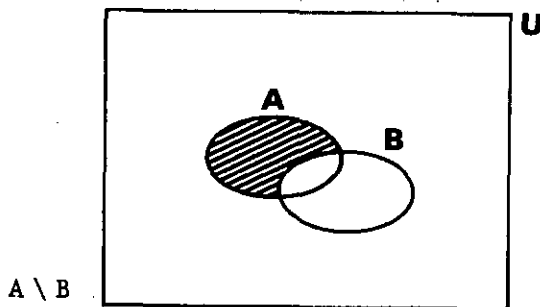
Een tweetal zeer belangrijke formules uit de verzamelingenleer zijn de volgende zgn. wetten van de Morgan:

$$(A \cap B)^* = A^* \cup B^*$$

$$(A \cup B)^* = A^* \cap B^*$$

Twee verzamelingen  $A$  en  $B$  waarvoor  $A \cap B = \emptyset$  heten disjunct.

We definiëren ook  $A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$ ,  $A \setminus B$  heet verschil van  $A$  en  $B$ .





## 1.2 Getallen.

We gaan er van uit dat de verzameling van de (reële) getallen - notatie  $\mathbb{R}$  - ons van de middelbare school bekend is. We kunnen twee getallen steeds optellen, aftrekken en vermenigvuldigen; we kunnen delen indien de noemer niet gelijk is aan 0.

De getallen corresponderen met de punten op een rechte: de getallenrechte. We kunnen van ieder getal een, misschien niet afbrekende, decimale breuk opschrijven.

Bekende deelverzamelingen van  $\mathbb{R}$  zijn de verzameling  $\mathbb{N}$  der natuurlijke getallen dat zijn  $1, 2, 3, \dots$ ; de verzameling  $\mathbb{G}$  der gehele getallen:  $\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  en de verzameling  $\mathbb{Q}$  der breuken met teller en noemer in  $\mathbb{G}$ , de elementen van  $\mathbb{Q}$  heten rationale getallen.

Uit de decimale ontwikkelingen zien we dat tussen elk tweetal reële getallen een getal uit  $\mathbb{Q}$  ligt. We drukken dit uit door te zeggen dat de rationale getallen dicht liggen op de getallenrechte.

Toch zijn er reële getallen die geen element van  $\mathbb{Q}$  zijn;  $\sqrt{2}$  is zo'n getal.

Stelling.  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

Bewijs. Stel  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ; dan zou  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  met  $p \in \mathbb{G}$ ,  $q \in \mathbb{G}$ ,  $p$  en  $q$  geen gemeenschappelijke factor (anders konden we de breuk vereenvoudigen). Nu is  $p^2 = 2q^2$ , dus  $p^2$  even, dus  $p$  even dus  $p^2$  deelbaar door 4, dus  $q^2$  even, dus  $q$  even, tegenspraak. De veronderstelling  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  is dus onjuist en we hebben bewezen  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

De verzameling  $\mathbb{R}$  is geordend; dit blijkt nl. uit het beeld op de getallenrechte: als  $a, b \in \mathbb{R}$  dan geldt óf  $a < b$ , óf  $a = b$ , óf  $b < a$ .

$a \leq b$  betekent  $a < b$  of  $a = b$ .

Van belang zijn de volgende eigenschappen:

als  $a < b$  dan is  $a+c < b+c$

als  $a < b$  en  $c > 0$ , dan is  $ac < bc$

als  $a < b$  en  $c < 0$ , dan is  $ac > bc$

als  $a < b$  en  $b < c$ , dan is  $a < c$ .

Van ieder reëel getal is gedefinieerd de absolute waarde (of modulus) door:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{als } a \geq 0 \\ -a & \text{als } a < 0 \end{cases}$$

(We gebruiken := om aan te geven dat de grootheid staande aan de kant van de dubbele punt gedefinieerd wordt als wat aan de andere zijde van het = teken staat).

Voorbeelden:  $|5| = 5$ ;  $|-3| = 3$ ;

$$|a-b| = \begin{cases} a-b & \text{als } a \geq b \\ b-a & \text{als } a \leq b . \end{cases}$$

Op de getallenrechte stelt  $|a-b|$  de afstand tussen  $a$  en  $b$  voor.

Van de vele eigenschappen der modulus noemen we slechts:

$$|a| \geq 0;$$

$$|-a| = |a|;$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|;$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

Bekende deelverzamelingen van  $\mathbb{R}$  zijn ook de zgn. intervallen; we geven een lijstje van de typen en hun notaties:

$$\{x \mid a < x < b\} =: \langle a, b \rangle$$

$$\{x \mid a \leq x < b\} =: [a, b \rangle$$

$$\{x \mid a < x \leq b\} =: \langle a, b]$$

$$\{x \mid a \leq x \leq b\} =: [a, b]$$

$$\{x \mid a < x\} =: \langle a, \infty \rangle$$

$$\{x \mid a \leq x\} =: [a, \infty \rangle$$

$$\{x \mid x < b\} =: \langle -\infty, b \rangle$$

$$\{x \mid x \leq b\} =: \langle -\infty, b] .$$

De eerste 4 van deze intervallen heten begrensd, de andere onbegrensd.

$\langle a, b \rangle$ ,  $\langle a, \infty \rangle$  en  $\langle -\infty, b \rangle$  heten open intervallen;  $[a, b]$ ,  $[a, \infty \rangle$  en  $\langle -\infty, b]$  heten gesloten intervallen. Merk op dat de bovenstaande notaties niet betekenen dat de symbolen  $\infty$  en  $-\infty$  getallen aangeven.

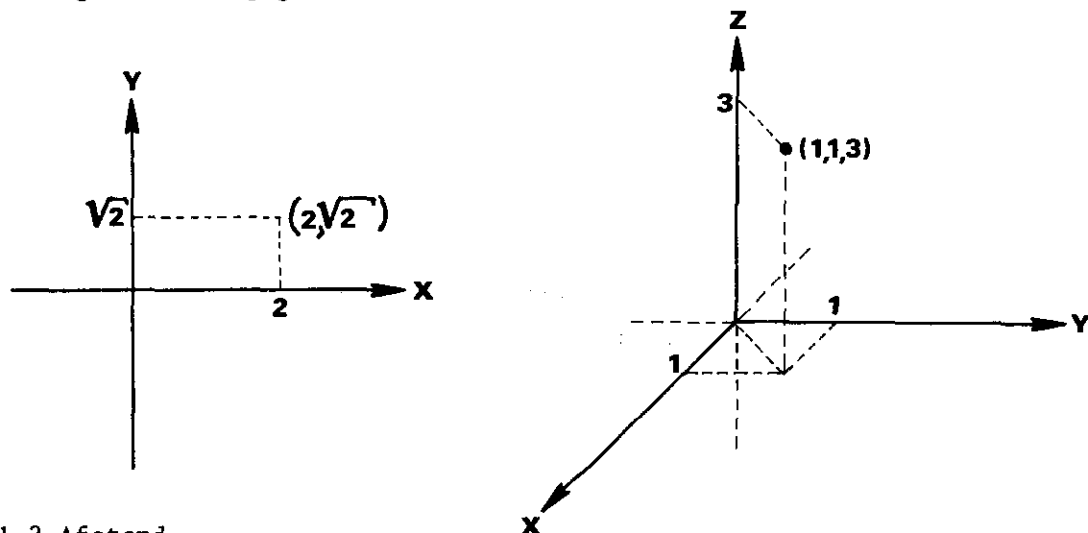
Opgebouwd met de reële getallen is ook de verzameling  $\mathbb{R}^2$  bestaande uit alle geordende paren van reële getallen. Een paar (= tweetal) heet geordend als we weten welke de eerste is en welke de tweede, (met de grootte-ordening in  $\mathbb{R}$  heeft dit niets te maken).

Als we het geordende paar bestaande uit  $x$  als eerste en  $y$  als tweede getal noteren als  $(x, y)$  dan hebben we dus:

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Uit de analytische meetkunde weten we dat  $\mathbb{R}^2$  tevens beschouwd kan worden als de verzameling van punten in het vlak met twee onderling loodrechte coördinaatassen.

Analoog gebruiken we  $\mathbb{R}^3$  voor de verzameling van alle geordende drietallen van reële getallen:  $\mathbb{R}^3 := \{(x,y,z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ .  $\mathbb{R}^3$  kunnen we beschouwen als de verzameling van punten in de ruimte. Het is gebruikelijk de drie onderling loodrechte coördinaatassen zo te kiezen als in onderstaande figuur is aangegeven.



1.3 Afstand.

Een verzameling met zijn elementen zonder meer is nog geen geschikt object voor wiskundige beschouwingen. Willen we met vrucht wiskundige gedachten kunnen aanwenden, dan moet er een of ander verband tussen de elementen bestaan. Een van de wiskundig meest interessante manieren waarop een dergelijk verband tussen de elementen van een verzameling gelegd kan worden is door het geven van een zgn. "afstand" tussen elk tweetal elementen. De voorbeelden waar we in eerste instantie mee zullen werken zijn afstanden in  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ ; in de geest van de moderne wiskunde zullen we echter de definitie algemeen geven.

Definitie. Laat  $V$  een verzameling zijn. We zeggen dat in  $V$  een afstand gedefinieerd is, indien aan elk tweetal elementen  $p$  en  $q$  uit  $V$  een getal  $d(p,q)$  is toegevoegd, waarbij deze toevoeging de volgende eigenschappen heeft:

- (a1)  $d(p,p) = 0$ ;
- (a2)  $d(p,q) > 0$  als  $p \neq q$ ;
- (a3)  $d(p,q) = d(q,p)$
- (a4)  $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$  (driehoeksongelijkheid).

Het getal  $d(p,q)$  heet de afstand van  $p$  tot  $q$ . Een verzameling waarin een afstand gedefinieerd is heet een metrische ruimte.

We bekijken enkele voorbeelden:

1. Als we in  $\mathbb{R}$  de afstand van  $x$  tot  $y$  nemen  $|x-y| := d(x,y)$  wordt  $\mathbb{R}$  tot een metrische ruimte.
2. In  $\mathbb{R}^2$  is  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  een afstand. (Denk aan de stelling van Pythagoras). De afstand van twee punten is de lengte van het verbindingslijnstuk.
3. Evenzo in  $\mathbb{R}^3$  :  $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ .
4. Het volgende voorbeeld is niet van veel theoretisch belang; het kan echter dienen om ons duidelijk te maken dat het begrip metrische ruimte veel meer omvat dan de gebruikelijke voorbeelden 1, 2 en 3. We denken aan een stad gebouwd op een groot aantal eilandjes, onderling verbonden door bruggen. Als elementen van onze verzameling  $S$  nemen we de eilandjes waar de stad op gebouwd is. Als afstand tussen twee elementen van  $S$ , dus tussen twee eilandjes, nemen we het kleinste aantal bruggen dat men passeren moet om van het ene eilandje naar het andere te komen. (We nemen aan dat op de bruggen tweerichtingsverkeer mogelijk is, anders komt a3 in gevaar). Merk op dat in dit voorbeeld de afstand tussen twee elementen steeds een geheel getal is.

In metrische ruimten kunnen we nu de "nabijheidsstructuur" (de wiskundige term is "topologie"), bestuderen, daarvoor dienen we nog wel enige begrippen in te voeren.

Definitie. We beschouwen een metrische ruimte  $V$ , waarin we de afstand voorstellen door  $d(p,q)$ . Laat  $\delta$  een positief getal zijn. De open bol met middelpunt  $p$  en straal  $\delta$ , notatie  $B(p,\delta)$ , is gedefinieerd door:

$$B(p,\delta) := \{x \mid x \in V, d(p,x) < \delta\},$$

in woorden:  $B(p,\delta)$  is de verzameling van alle punten waarvan de afstand tot  $p$  kleiner dan  $\delta$  is.

Voorbeelden: In  $\mathbb{R}$  is  $B(a, \delta) = \langle a-\delta, a+\delta \rangle$ ; iedere open bol in  $\mathbb{R}$  is dus een open interval; omgekeerd is ieder open interval een verzameling die we nu open bol genoemd hebben, nl.  $\langle a, b \rangle = B(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}|b-a|)$ . In  $\mathbb{R}^2$  met de afstand uit voorbeeld 2 geldt dat  $B((a,b), \delta)$  is de cirkelschijf zonder rand met middelpunt  $(a,b)$  en straal  $\delta$ .

In  $\mathbb{R}^3$  met de afstand uit voorbeeld 3 (- aan dit voorbeeld is de naam open bol ontleend -) is  $B((a,b,c), \delta)$  de volle bol zonder rand met middelpunt  $(a,b,c)$  en straal  $\delta$ .

Laat  $p$  een eilandje  $\in S$  uit voorbeeld 4 zijn. We hebben dan dat  $B(p, \frac{1}{2}) = B(p, 1) = \{p\}$ . Terwijl  $B(p, 1\frac{1}{2}) = B(p, 7/4) = B(p, 2)$  de verzameling is bestaande uit  $p$  en alle eilandjes die direct, d.w.z. met één brug, met  $p$  verbonden zijn.

Het bewijs van de volgende twee belangrijke eigenschappen van open bollen in een metrische ruimte is zo eenvoudig dat we het niet zullen uitschrijven:

Eigenschappen:

1. Als  $\delta_1 < \delta_2$  dan is  $B(p, \delta_1) \subset B(p, \delta_2)$
2. Als  $p \neq q$  dan zijn er bollen  $B(p, \delta_1)$  en  $B(q, \delta_2)$  zodat  $B(p, \delta_1) \cap B(q, \delta_2) = \emptyset$ .

In het bewijs van 2 kunnen we nemen  $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{2}d(p,q)$ .

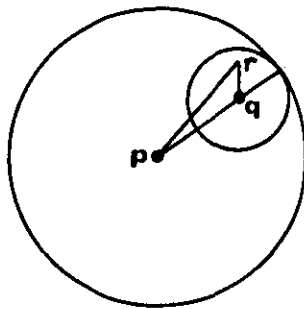
We kunnen nu komen tot het uiterst belangrijke begrip open verzameling.

Definitie. Een verzameling  $\mathcal{O}$  in een metrische ruimte heet open indien er voor elke  $p \in \mathcal{O}$  een open bol met  $p$  als middelpunt,  $B(p, \delta)$ , is zodat  $B(p, \delta) \subset \mathcal{O}$ .

Is  $\mathcal{O}$  open en is  $q \in \mathcal{O}$  dan heet  $\mathcal{O}$  een omgeving van  $q$ .

Stelling. Iedere open bol is open.

(Dankzij deze stelling zijn we niet in terminologische moeilijkheden hoewel we het woord open op verschillende wijzen geïntroduceerd hebben).



Bewijs. Laat  $q \in B(p, \delta)$ . We moeten laten zien dat er een open bol met middelpunt  $q$  bestaat die geheel binnen  $B(p, \delta)$  ligt. Nu is  $d(p, q) < \delta$ , en dus is  $\delta_1 := \delta - d(p, q) > 0$ .  $B(q, \delta_1)$  ligt nu geheel binnen  $B(p, \delta)$ , is nl.  $r$  een willekeurig element uit  $B(q, \delta_1)$  dan is  $d(r, p) \leq d(r, q) + d(q, p) < \delta_1 + d(p, q) = \delta$ ; derhalve  $r \in B(p, \delta)$  en  $B(q, \delta_1) \subset B(p, \delta)$ .

Voorbeelden. In  $\mathbb{R}^2$  (voorbeeld 2) is de ring  $\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$  een open verzameling. In  $S$  (voorbeeld 4) is iedere deelverzameling een open verzameling. In  $\mathbb{R}$  is het complement van een gesloten interval een open verzameling.

De belangrijkste eigenschappen van open verzamelingen worden uitgedrukt in de volgende stelling.

Stelling. Laat  $V$  een metrische ruimte zijn. Dan geldt:

- (1)  $V$  is een open verzameling,  $\emptyset$  is eveneens open.
- (2) De doorsnede van twee open verzamelingen is open.
- (3) De vereniging van een willekeurige collectie open verzamelingen is open.
- (4) Twee verschillende punten hebben disjuncte omgevingen.

De bewijzen zijn niet moeilijk; we volstaan met enkele opmerkingen. Ad(2).

Als  $a \in A \cap B$  en  $B(a, \delta_1) \subset A$ ,  $B(a, \delta_2) \subset B$  en  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , dan is  $B(a, \delta) \subset A \cap B$ .

Ad(3). Als  $a$  element is van de vereniging van een collectie open verzamelingen, dan is  $a$  zeker element van een open verzameling uit die collectie; er is dan een  $B(a, \delta)$  die geheel binnen die open verzameling ligt, deze  $B(a, \delta)$  is dan ook zeker deelverzameling van de vereniging.

Opmerking. Uit bewering (2) van bovenstaande stelling volgt dat ook de doorsnede van 3 of 4 of eindig veel open verzamelingen open is. De doorsnede van een willekeurige collectie open verzamelingen hoeft echter niet open te zijn. Laten we als voorbeeld bekijken de collectie open intervallen in  $\mathbb{R}$   $\langle -\frac{1}{n}, +\frac{1}{n} \rangle$  voor  $n = 1, 2, 3, \dots$ . De doorsnede van deze collectie is  $\{0\}$  en deze verzameling is niet open.

Opmerking. We besluiten deze paragraaf over afstanden met vast te stellen dat we soms bij verschillende afstandsbegrippen toch dezelfde open verzamelingen kunnen hebben. We bestuderen dit aan de hand van een voorbeeld.

In  $\mathbb{R}^2$  voeren we verschillende afstanden in:

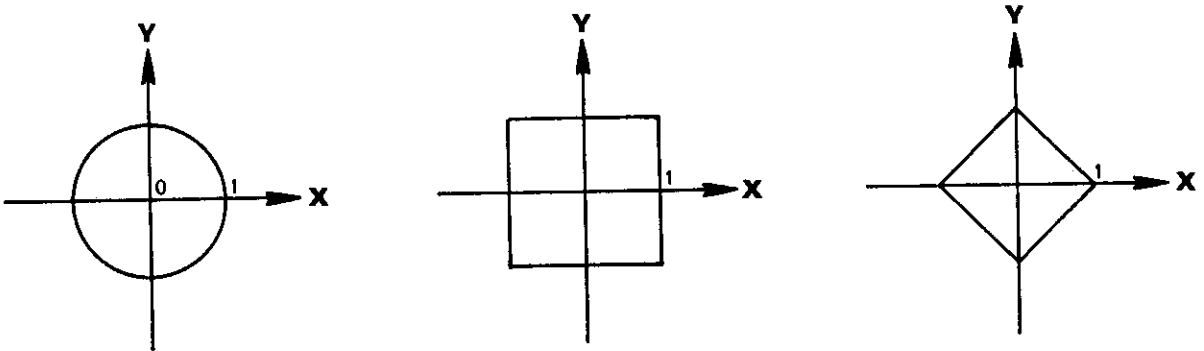
$$(\alpha) \quad d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$(\beta) \quad d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$$(\gamma) \quad d_3((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

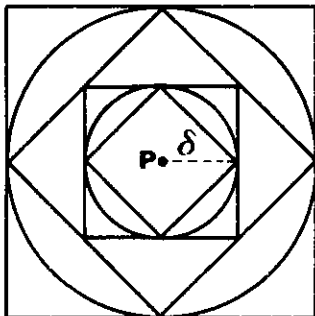
Open bollen t.o.v. deze drie afstanden (verifieer dat in alle drie gevallen aan (a1) t/m (a4) voldaan is) geven we aan met  $B_1((x, y), \delta)$ ,  $B_2((x, y), \delta)$ ,  $B_3((x, y), \delta)$ .

In de onderstaande figuur staat  $B_1((0, 0), 1)$ ,  $B_2((0, 0), 1)$ ,  $B_3((0, 0), 1)$ .



Dit illustreert nog eens dat de drie afstanden verschillend zijn. Toch zijn met elke soort open bollen precies dezelfde deelverzamelingen van  $\mathbb{R}^2$  open. Dit komt omdat elke open bol van de ene soort een open bol van de andere soort bevat en tevens zelf bevat is in een bol van de andere soort. Zoals in onderstaande figuur geïllustreerd is geldt:

$$B_3(P, \delta) \subset B_1(P, \delta) \subset B_2(P, \delta) \subset B_3(P, 2\delta) \subset B_1(P, 2\delta) \subset B_2(P, 2\delta).$$



Men beredeneer zorgvuldig dat we ten opzichte van elke afstand dezelfde open verzamelingen aantreffen. Bovenstaande schakeling van open bollen laat ons zien dat elke open bol ook ten opzichte van de andere afstanden een open verzameling is.

#### 1.4 Afbeeldingen.

Het fundamentele begrip afbeelding is een generalisatie van het functiebegrip.

Definitie. Laat A en B verzamelingen zijn. We zeggen dat F een afbeelding van A in B is - notatie:  $F: A \rightarrow B$  - indien F een voorschrift is volgens het welk aan elk element van A precies één element van B wordt toegevoegd.

Is  $b \in B$  het element dat aan  $a \in A$  wordt toegevoegd dan schrijven we  $b = F(a)$ ; we noemen b het beeld van a.

Merk op dat het begrip voorschrift veel ruimer is dan formule of tabel o.i.d. We geven slechts een enkel voorbeeld. Laat N de verzameling zijn van de inwoners van Nederland; G de verzameling van de gemeenten in Nederland. Nu zijn

$f: N \rightarrow G$  gedefinieerd door:  $f(n) :=$  de gemeente van inwoning van n,

en

$h: G \rightarrow N$  gedefinieerd door:  $h(g) :=$  de burgemeester van g,

afbeeldingen.

Nog enkele begrippen. Zij  $F: A \rightarrow B$ . Is  $A_0 \subset A$  dan heet de deelverzameling van B bestaande uit alle beelden van een element uit  $A_0$  het beeld van  $A_0$ ; notatie  $F(A_0)$ .

Is  $b \in B$  of  $B_0 \subset B$  dan heten de deelverzamelingen van A:

$$F^+(b) := \{x \mid F(x) = b\} \text{ en}$$

$$F^+(B_0) := \{x \mid F(x) \in B_0\}$$

het volledig origineel van b resp.  $B_0$ .

Laat in ons voorbeeld M zijn de verzameling van alle nederlandse ingezetenen die miljonair zijn:  $M \subset N$ ; en laat Z zijn de verzameling van de gemeenten in de provincie Zeeland;  $Z \subset G$ , dan is:

$f(M)$ : de verzameling der gemeenten die een miljonair als ingezetene hebben.

$f^+(Eindhoven)$ : de verzameling van de inwoners van Eindhoven.

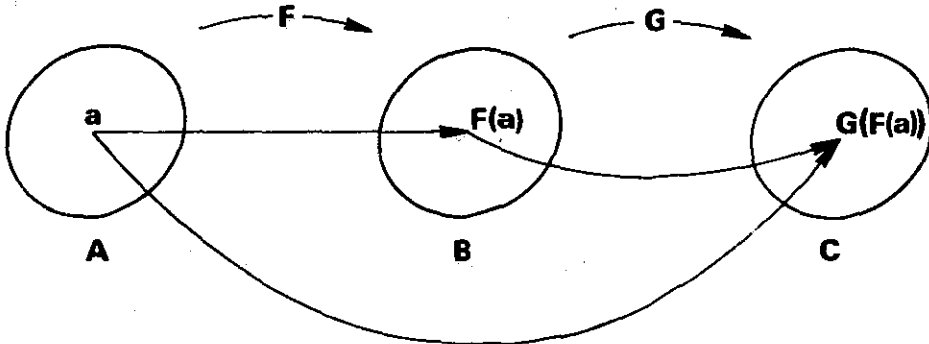
$f^+(Z)$ : de verzameling van de inwoners van Zeeland.

$h(G)$ : de verzameling van alle burgemeesters.

$h^+(M)$ : de verzameling van de gemeenten waarvan de burgemeester miljonair is.



Samengestelde afbeeldingen. Laat  $A, B,$  en  $C$  verzamelingen zijn  $F: A \rightarrow B,$   
 $G: B \rightarrow C$  dan is  $G \circ F$  een afbeelding van  $A$  in  $C$  gedefinieerd door  
 $G \circ F(a) := G(F(a)).$   $G \circ F$  heet de samengestelde afbeelding van  $G$  en  $F.$

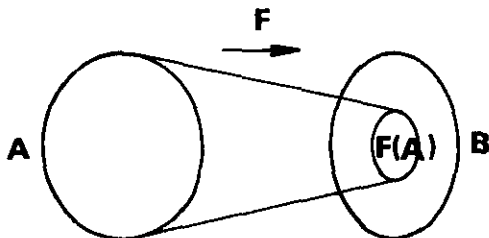


$(G \circ F)(a) := G(F(a))$                        $G(F(a))$

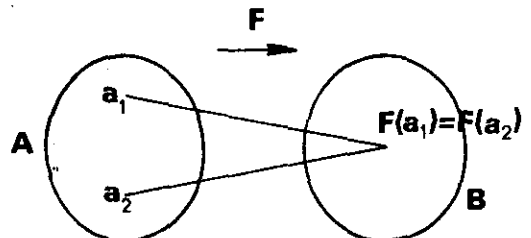
In ons voorbeeld:  $h \circ f(n) =$  de burgemeester van de woonplaats van  $n.$

$f \circ h(g) =$  de gemeente waarvan de burgemeester van  $g$  inwo-  
 ner is.

Definitie:  $F : A \rightarrow B$  heet een afbeelding van  $A$  op  $B$  indien elk element  
 van  $B$  als beeld van een element van  $A$  optreedt, dus indien  $B = F(A).$   
 $F: A \rightarrow B$  heet één-éénduidig indien verschillende elementen van  $A$  ook  
 verschillende beelden hebben; dus indien ieder element van  $B$  beeld is  
 van hoogstens één element van  $A.$



$F: A \rightarrow B$  is geen afbeelding op  $B$

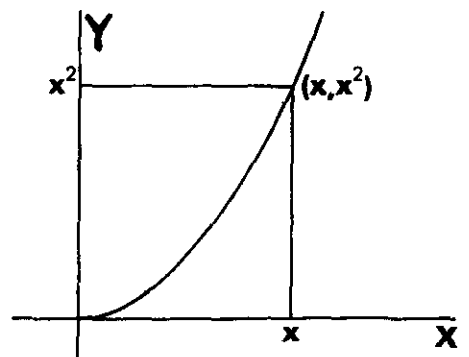


$F: A \rightarrow B$  is niet één-éénduidig

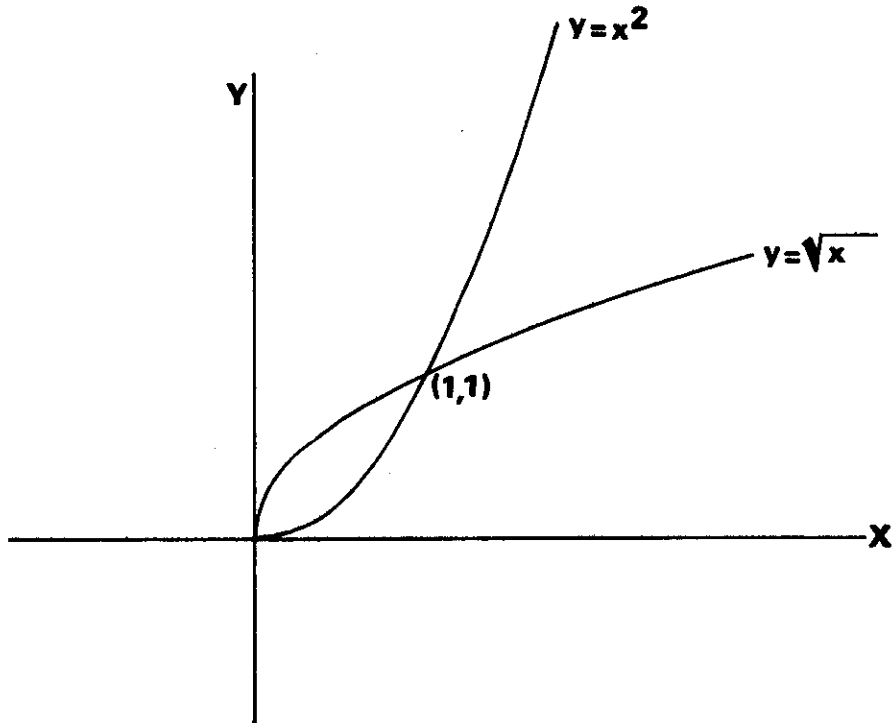
In ons voorbeeld geldt:  $f$  is een afbeelding van  $N$  op  $G;$   $f$  is niet één-één-  
 duidig.  $h$  is geen afbeelding van  $G$  op  $N,$   $h$  is wel één-éénduidig.  $h \circ f$  is  
 niet één-éénduidig en niet op.  $f \circ h$  is zowel één-éénduidig als op.

Als een afbeelding  $F: A \rightarrow B$  één-éénduidig  
 en op is, dan is het voorschrift: "zoek bij  
 $b$  het element  $a$  waarvoor  $b = F(a)$ ", een  
 afbeelding van  $B$  in  $A$  die de inverse van  
 $F$  heet.

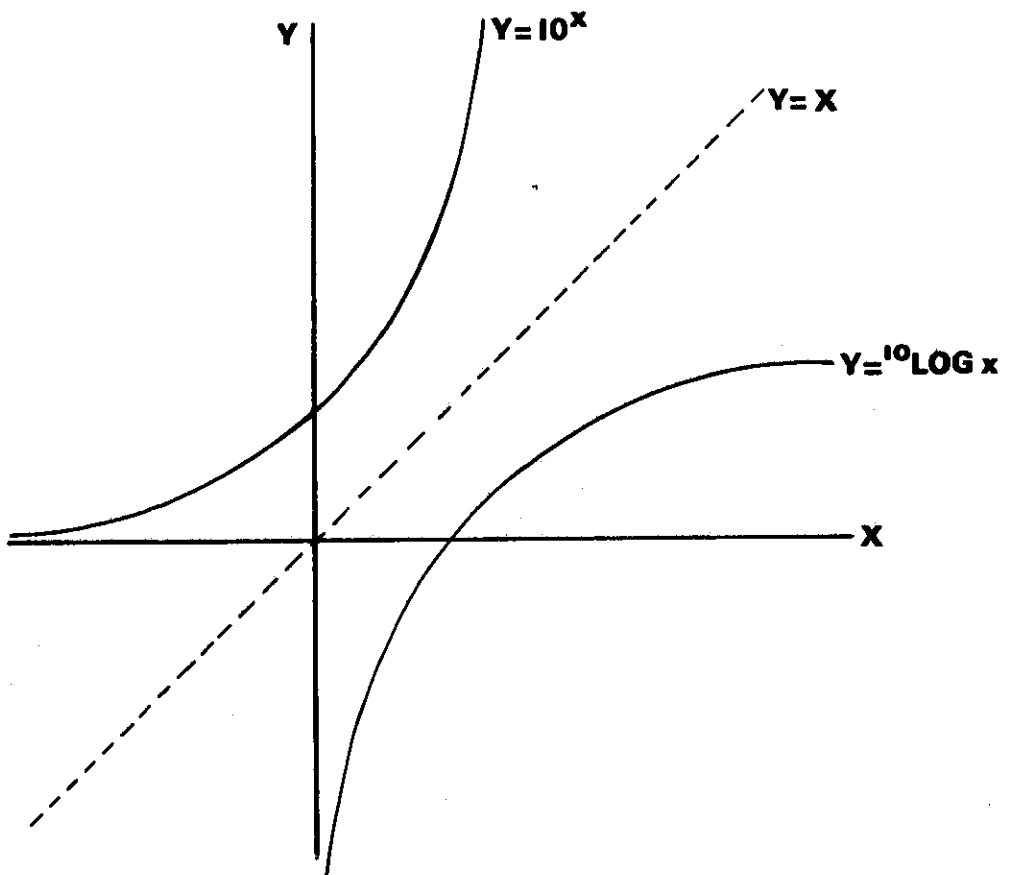
Voorbeeld. De afbeelding  $f(x) := x^2$  is



een één-éénduidige afbeelding van de positieve getallen op de positieve getallen. De inverse is  $g(y) = \sqrt{y}$ .



Als het over functies ( $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  afbeeldingen) en hun inverse gaat realiseren men zich dat de grafiek  $f^{-1}$  uit die van  $f$  ontstaat door spiegeling aan de lijn  $y = x$ .



## Hoofdstuk 2. De grondbegrippen van de analyse.

### 2.1 Limieten.

Met behulp van het afstands­begrip uit §1.3 kunnen we nu een preciese inhoud geven aan het begrip: "naderen tot". We moeten hierbij steeds in het oog houden dat we om te beschrijven hoe de "nabijheids­structuur" rond een punt in een metrische ruimte er uit ziet, alle omgevingen van dat punt in de be­schouwing moeten betrekken. We zullen het begrip "naderen tot" bestuderen in drie verschillende maar zeer verwante situaties.

#### 2.1.1 Rijen punten in een metrische ruimte.

We bestuderen oneindige rijen punten  $p_1, p_2, p_3, \dots$  in een metrische ruimte  $R$  (de afstand heet  $d$ ). Het is niet uitgesloten dat onder  $p_1, p_2, \dots$  eenzelfde punt met verschillende namen voorkomt; het is zelfs niet uitgesloten dat  $p_1 = p_2 = \dots$ . We geven eerst een preciese inhoud aan het begrip op den duur (afgekort o.d.d.): we zeggen n.l. dat de punten  $p_1, p_2, \dots$  op den duur een of andere eigenschap hebben indien slechts eindig veel punten die eigen­schap missen.

Omdat er onder die eindig veel uitzonderingspunten één is dat het grootste rangnummer heeft kunnen we ook zeggen: " $p_1, p_2, \dots$  hebben op den duur de eigenschap A" betekent: "er is een index  $N$  zodat voor elke  $n$  die groter dan  $N$  is  $p_n$  de eigenschap A heeft."

Voorbeelden. (alle rijen zijn rijen in  $\mathbb{R}$  met de gewone afstand). Voor

$p_n := 100 - 3n$  geldt  $p_n < 0$  o.d.d. omdat voor elke  $n > 33$  geldt

$p_n = 100 - 3n \leq 100 - 3 \cdot 34 = -2$ .

Voor  $p_n := \frac{1}{n}$  geldt  $p_n \in ]-\delta, \delta[$  o.d.d. voor elk getal  $\delta > 0$ .

Het is niet waar dat  $p_n := (-1)^n > 0$  o.d.d.

Definitie. Zij  $p \in R$  en  $p_1, p_2, \dots$  een rij van punten uit  $R$ . We zeggen dat de rij  $p_1, p_2, \dots$  nadert tot  $p$  indien voor elke omgeving  $\mathcal{O}$ , van  $p$  geldt dat  $p_n$  o.d.d. in  $\mathcal{O}$  ligt.

Andere zegswijzen en notaties die hetzelfde betekenen:  $p_n$  nadert tot  $p$  (als  $n$  nadert naar oneindig);  $p_n \rightarrow p$  ( $n \rightarrow \infty$ ); de rij  $p_n$  nadert tot  $p$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ ;  $p$  is de limiet van  $p_n$  als  $n \rightarrow \infty$ .

Voorbeelden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ ; om dit laatste te bewijzen moeten we laten zien dat voor een willekeurige omgeving van 0 in  $\mathbb{R}$  geldt dat  $\frac{1}{2^n}$  o.d.d. in die omgeving ligt; omdat iedere omgeving een open bol (= interval) bevat is het echter voldoende om te laten zien dat voor een willekeurige  $\delta > 0$  geldt:  $\frac{1}{2^n} < \delta$  o.d.d.: dit nu is het geval als  $2^n > 1/\delta$ , en dus indien  $n > \frac{10 \log 1/\delta}{10 \log 2}$ .

Voor een rij in de metrische ruimte  $S$  der eilandjes (zie §1.3) geldt  $p_n \rightarrow p$  dan en slechts dan indien  $p_n = p$  o.d.d., immers  $\{p\}$  is een omgeving van  $p$ .

We legden in onze voorbeelden een sterke voorkeur voor  $\mathbb{R}$  aan de dag. Dit wordt gemotiveerd door de volgende eigenschap:

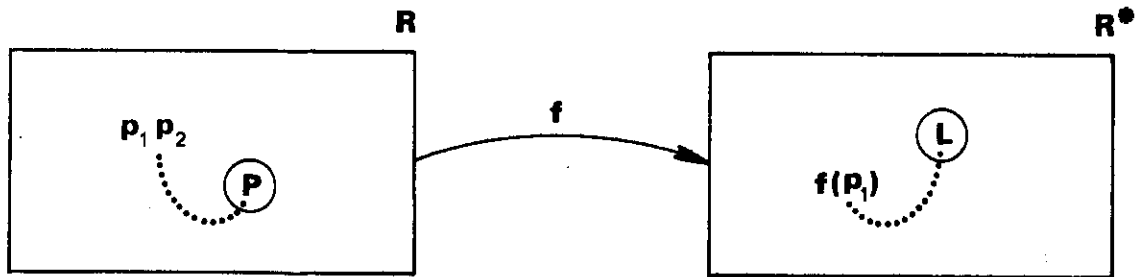
De rij  $p_n$  in  $\mathbb{R}$  nadert tot  $p$  dan en slechts dan indien  $d(p_n, p)$  nadert tot 0 in  $\mathbb{R}$ .

Een rij die een limiet heeft, heet convergent. De rij  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  is dus convergent. De rij  $(-1)^n$  is niet convergent (merk bijv. op dat er geen enkel interval met lengte 1 is waar  $(-1)^n$  in ligt o.d.d.).

2.1.2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$

Laat  $p_n \rightarrow p$  een convergente rij punten zijn. Laat  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  een afbeelding zijn van  $\mathbb{R}$  in een andere metrische ruimte. We kunnen nu vragen of de rij  $f(p_n)$  convergeert.

Nu betekent  $f(p_n) \rightarrow L$  dat voor elke omgeving  $\mathcal{O}^*$  van  $L$  in  $\mathbb{R}^*$  geldt dat  $f(p_n)$  o.d.d. in  $\mathcal{O}^*$  ligt. Hieraan nu is voldaan indien er bij elke omgeving  $\mathcal{O}^*$  van  $L$  in  $\mathbb{R}^*$  te vinden is een omgeving  $\mathcal{O}$  van  $p$  in  $\mathbb{R}$  met de eigenschap: als  $p_n \in \mathcal{O}$  dan  $f(p_n) \in \mathcal{O}^*$ .



Dit geeft ons nu in handen hoe een algemener limietbegrip te definiëren:

Definitie: Zij  $V \subset \mathbb{R}$ ;  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^*$ ; zij  $a \in \mathbb{R}$  zodanig dat elke omgeving van  $a$  punten van  $V$  bevat. Zij  $L \in \mathbb{R}^*$ . We zeggen:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ (of "f(x) } \rightarrow L \text{ als } x \rightarrow a\text{")}$$

indien er bij iedere omgeving  $\mathcal{O}^*$  van  $L$  in  $\mathbb{R}^*$  een omgeving  $\mathcal{O}$  van  $a$  in  $\mathbb{R}$  bestaat zodat  $f(x) \in \mathcal{O}^*$  voor elke  $x$  uit  $\mathcal{O} \cap V$  met  $x \neq a$ .

Voorbeelden. We nemen  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4;$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ , om in herinnering te houden dat de functie

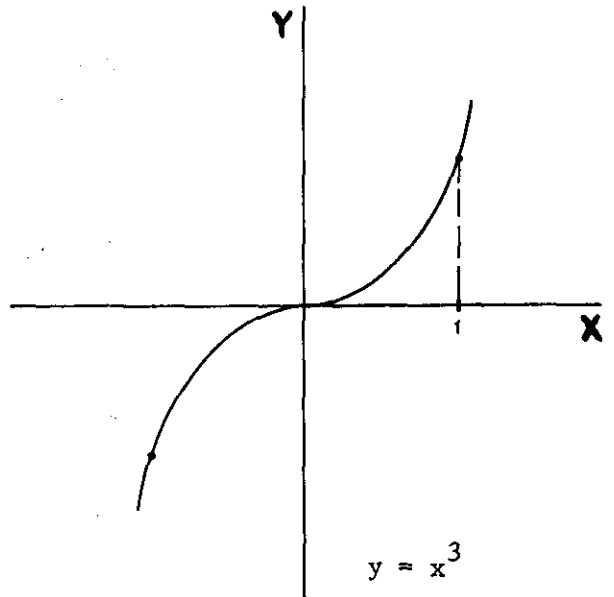
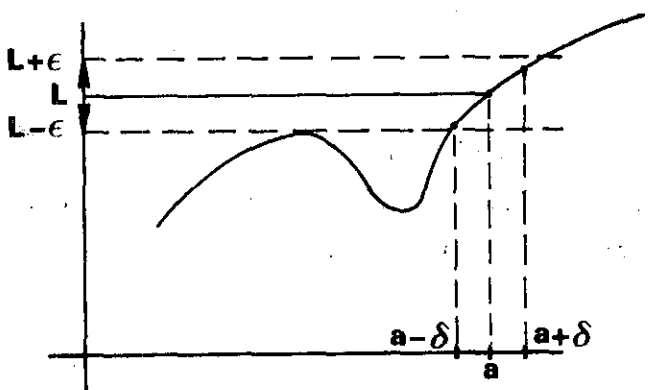
$\sqrt{x}$  alleen gedefinieerd is als  $x \geq 0$  schrijven we ook wel  $\lim_{x \downarrow 0} \sqrt{x} = 0$ . In

het algemeen betekent  $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ , resp.  $\lim_{x \uparrow a} f(x)$  dat we spreken over de

functie  $f$  gedefinieerd op zijn oorspronkelijke definitieverzameling doorsneden met  $[a, \infty)$  resp.  $(-\infty, a]$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{10}{9}.$$

Eigenschap: Als  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^* = \mathbb{R}$  kunnen we zeggen:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  dan en slechts dan indien er bij elke  $\epsilon > 0$  bestaat een  $\delta > 0$  zódat  $|f(x) - L| < \epsilon$  voor alle  $x$  waarvoor  $0 < |x-a| < \delta$  en waarvoor  $f$  gedefinieerd is. Zie figuur.



Nog twee voorbeelden:

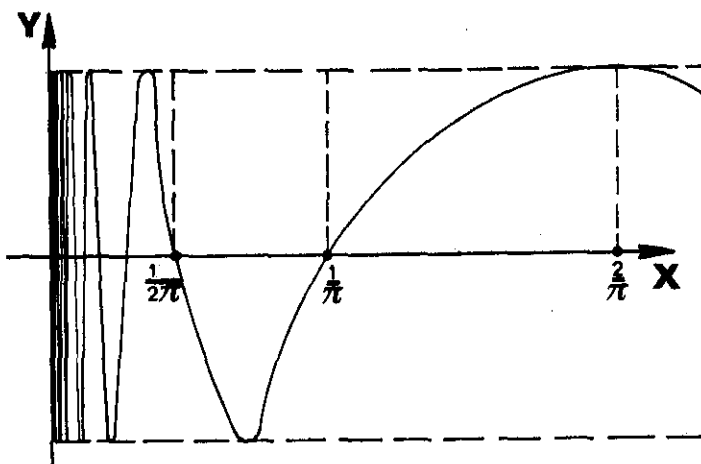
$$\lim_{x \rightarrow a} x^3 = a^3, \text{ want:}$$

$$|x^3 - a^3| = |x-a| \cdot |x^2 + ax + a^2| \leq |x-a| \cdot (x^2 + |a||x| + a^2) \leq 7a^2|x-a|$$

als we alvast  $|x| \leq 2|a|$  nemen; (dit argument werkt niet als  $a = 0!$ ).

Ander bewijs:  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$  en de onderstaande stelling.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ bestaat niet.}$$



Bij het berekenen van limieten van reëelwaardige functies maken we vaak met vrucht gebruik van de volgende stelling:

Stelling. Als  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , dan is

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)+g(x)) = L+M, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LM, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

mits  $L \neq 0$ .

2.1.3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  en  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ .

In deze paragraaf is steeds  $R = R^* = R$ .

We kunnen het limietbegrip nog verder uitbreiden door ook te zeggen wat het betekent dat iets naar  $+\infty$  of  $-\infty$  nadert. Dit doen we door de formele afspraak: Een omgeving van  $+\infty$  is een open verzameling die een interval  $\langle a, \infty \rangle$  bevat; een omgeving van  $-\infty$  is een open verzameling die een interval  $\langle -\infty, b \rangle$  bevat. De verdere definities zijn nu vanzelfsprekend. We geven voorbeelden (zie figuur)

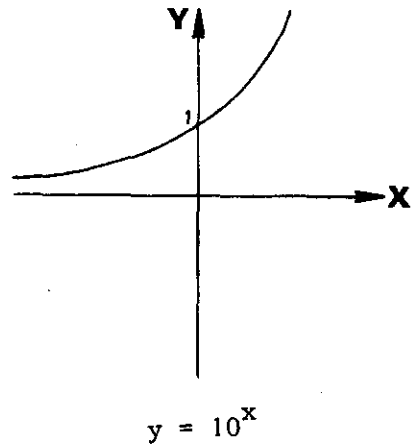
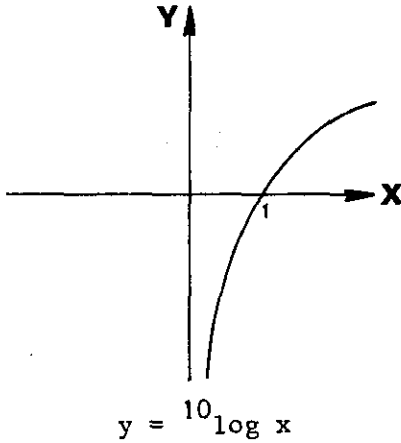
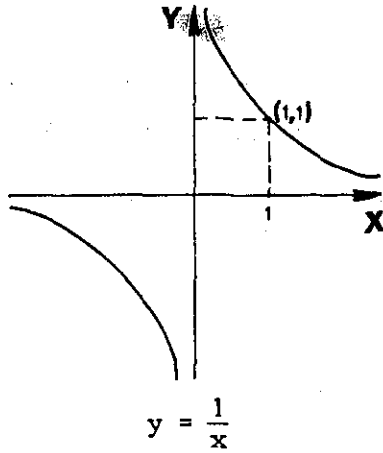
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  bestaat niet!

$\lim_{x \rightarrow 0} {}^{10}\log x = -\infty$  (omdat de  ${}^{10}\log x$  voor  $x \leq 0$  niet gedefinieerd is hoeven we niet  $x \rightarrow 0$  te schrijven).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} {}^{10}\log x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 10^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 10^x = \infty.$$



2.1.4. Insluitstelling.

De onderstaande stelling geldt voor alle drie de limietbegrippen mits  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}$ . We formuleren en bewijzen hem voor het tweede.

Stelling. Zij  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L$

en

$$\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L,$$

terwijl in een omgeving  $\sigma$  van  $a$  geldt voor  $x \neq a$  dat

$$f_1(x) \leq h(x) \leq f_2(x).$$

Dan is

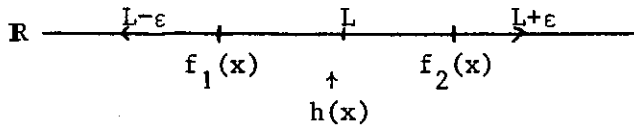
$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L.$$

Bewijs. Zij  $\sigma^*$  een omgeving van  $L$ ; zonder beperking mogen we aannemen dat  $\sigma^* = \langle L-\epsilon, L+\epsilon \rangle$  voor zekere  $\epsilon > 0$ . Nu zijn er omgevingen  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$  van  $a$  zodat voor alle in aanmerking komende  $x, x \neq a$  geldt:

$$\text{als } x \in \sigma_1 \text{ dan is } |f_1(x) - L| < \epsilon;$$

$$\text{als } x \in \sigma_2 \text{ dan is } |f_2(x) - L| < \epsilon.$$

Als nu  $x \in \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma$  (wat nog steeds een omgeving van  $a$  is) en  $x \neq a$  dan is:  $|h(x) - L| < \epsilon$  (zie figuurtje)



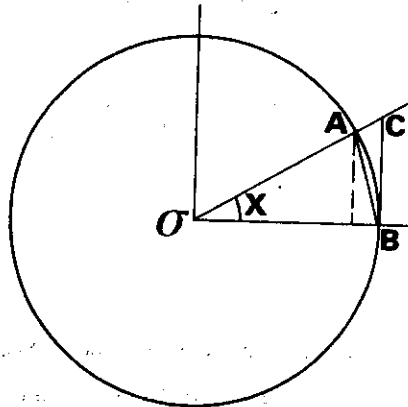
Voorbeeld:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \text{ omdat } -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Voorbeeld (zeer belangrijk!)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Bewijs. Door vergelijking van de oppervlakten van (zie figuur)  $\Delta OAB$ , sector  $OAB$  en  $\Delta OBC$  vinden we voor  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  ( $x$  uitgedrukt in radialen) de ongelijkheid:  $\sin x < x < \tan x$ .



Hieruit volgt:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

welke ongelijkheid ook geldt voor

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0.$$

Tevens zien we dat  $|\sin x| \leq |x|$  (dit laatste is zelfs goed voor alle reële  $x$ !).

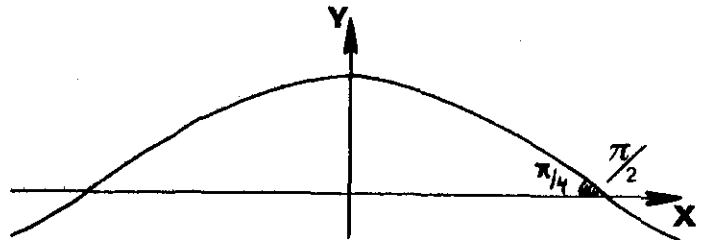
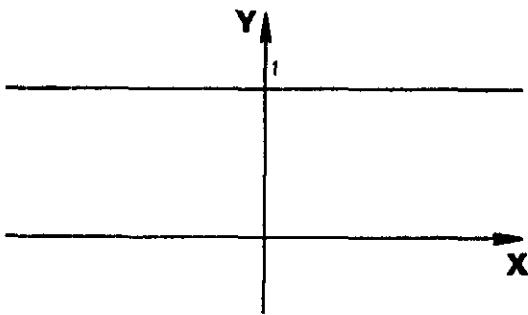
We hebben dus in een omgeving van 0 dat:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$



Nu is  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$  en het bewijs is voltooid als we hebben laten zien dat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$



$$\begin{aligned} \text{Nu is } |\cos x - 1| &= |\cos x - \cos 0| = |-2 \sin \frac{1}{2}(x+0) \sin \frac{1}{2}(x-0)| = \\ &= 2(\sin \frac{1}{2}x)^2 \leq \frac{1}{2}x^2. \text{ Daar } 0 < |\cos x - 1| \leq \frac{1}{2}x^2 \text{ en } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x^2 = 0 \text{ is} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\cos x - 1| = 0, \text{ en dus } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

## 2.2. Continuïteit.

Definitie. Een functie  $f: V \rightarrow R^*$ , waarbij  $V \subset R$  en  $R$ , zowel als  $R^*$  metrische ruimten zijn, heet continu in een punt  $a \in V$  indien er bij elke omgeving  $\mathcal{O}^*$  van  $f(a)$  in  $R^*$  een omgeving  $\mathcal{O}$  van  $a$  in  $R$  bestaat zódat:

$$f(\mathcal{O} \cap V) \subset \mathcal{O}^*.$$

Ruw gesproken kunnen we dus zeggen dat  $f$  in  $a$  continu is als alle waarden van  $f$  in een geschikt gekozen omgeving van  $a$  dicht bij  $f(a)$  komen te liggen.

Als elke omgeving van  $a$  ook van  $a$  verschillende punten van  $V$  bevat, betekent continuïteit in  $a$  dat:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Deze formulering spreekt dus impliciet uit dat  $f(a)$  gedefinieerd is en dat  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  bestaat.

Definitie. Een functie  $f$  heet continu op  $V$  indien  $f$  continu is in elk punt van  $V$ .

Voor een afbeelding  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  betekent continuïteit dus dat voor iedere open verzameling  $\mathcal{O}^*$  in  $\mathbb{R}^*$  de verzameling  $f^{-1}(\mathcal{O}^*)$  open in  $\mathbb{R}$  is.

Voor de functies met waarden in  $\mathbb{R}$  betekent continuïteit in  $x = a$  dat er bij elke  $\epsilon > 0$  een omgeving van  $a$  bestaat zódat voor alle  $x$  uit die omgeving waarvoor  $f(x)$  gedefinieerd is geldt:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Voor functies gedefinieerd in  $\mathbb{R}$  en met waarden in  $\mathbb{R}$  betekent continuïteit dat we de grafiek kunnen tekenen als een doorlopende kromme zonder gaten en sprongen.

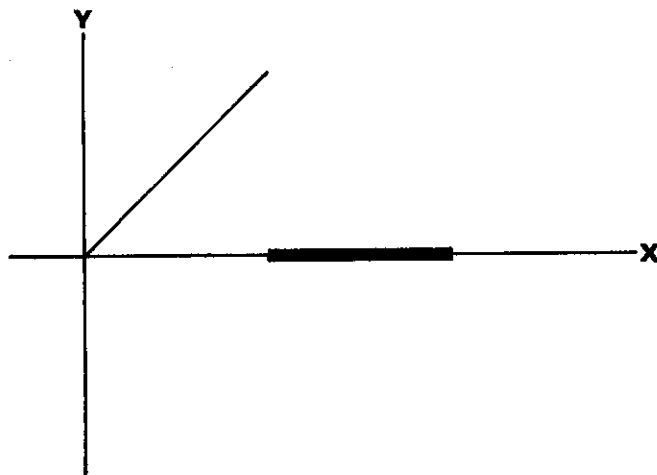
Later (blz. 69) zullen we nog nauwkeurig continuïteit van functies in  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$  moeten bestuderen. We volstaan thans met enkele voorbeelden van reële functies in  $\mathbb{R}$ .

De functies:  $y = x, x^2, x^3, \sin x, \cos x$  zijn continu voor alle reële  $x$ .

$\frac{1}{x}$  is niet continu in  $x = 0$  (niet eens gedefinieerd)

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{als } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{als } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

is niet continu in  $x = 1$ .



We bewijzen als voorbeeld dat  $\sin x$  continu is. Daartoe moeten we laten zien dat voor iedere reële  $a$  geldt

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a.$$

Nu is echter  $|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{1}{2}(x-a) \right| \left| \cos \frac{1}{2}(x+a) \right| \leq |x-a|$ , zodat

$|\sin x - \sin a| < \epsilon$  is indien  $|x-a| < \epsilon$  is.

Veel van de functies die we gebruiken voor de beschrijving van technische processen zijn continu, maar niet alle.

Discontinuïteiten treden vaak op bij beschrijvingen van gebeurtenissen waarin een drempelwaarde optreedt of waarbij verschillende media aan elkaar grenzen.

### 2.3. Differentieerbaarheid.

#### 2.3.1. Het begrip afgeleide.

We zullen thans een van de belangrijkste begrippen uit de wiskundige analyse leren kennen: de afgeleide. Het zal blijken dat deze afgeleide een limiet is van de soort besproken in 2.1.2.

Allereerst enkele voorbeelden.

Uit de mechanica. Als een deeltje beweegt langs een baan en de afgelegde weglengte gegeven wordt als functie van de tijd door  $f(t)$  dan is de weglengte afgelegd tussen de tijdstippen  $t_0$  en  $t_0+h$  (we nemen  $h > 0$ ) gelijk aan:

$$f(t_0+h) - f(t_0).$$

De gemiddelde snelheid over het tijdvak  $[t_0, t_0+h]$  is nu

$$\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}.$$

Merk op dat we  $f(t_0+h) - f(t_0)$  moeten uitdrukken in eenheden van lengte,  $h$  in eenheden van tijd. De zorg voor de keuze van zulke eenheden, is de taak van de beoefenaars van het vakgebied i.c. de natuurkunde en niet van de wiskunde. Wij zullen onze aandacht slechts richten op getalwaarden en niet op het gekozen stelsel van eenheden.

Men definieert nu de snelheid ten tijde  $t_0$  als:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}.$$

Dit is een grootheid die van het grootste belang is voor een wiskundige beschrijving van het proces: de beweging van het deeltje. Het is een theoretische grootheid; wat gemeten kan worden is alleen een gemiddelde snelheid!

Bevolkingstoename. In dit voorbeeld zullen we wederom een limiet van een gemiddelde beschouwen.

Laat  $y(t)$  de bevolking van een land op tijdstip  $t$  voorstellen, dan is de gemiddelde bevolkingstoename over het tijdsinterval  $[t_0, t_0+h]$  gelijk aan:

$$\frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} .$$

We definiëren de toename ten tijde  $t_0$  door:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} =: y'(t_0).$$

Een goede beschrijving van een bevolkingsgroei wordt gegeven door de aanname dat de toename ten tijde  $t_0$  dus  $y'(t_0)$  evenredig is met de bevolkingsgrootte ten tijde  $t_0$  dus:

$$\frac{y'(t_0)}{y(t_0)} = k, \text{ k een constante onafhankelijk van } t_0.$$

Indien deze evenredigheidsconstante bekend is (bijv. doordat  $k$  berekend is uit het gemeten gedrag van de functie  $y(t)$  tussen de jaren 1950 en 1970) dan stelt de vergelijking:

$$y'(t) = k y(t)$$

ons in staat de waarde van  $y(t)$  voor de verre toekomst te berekenen (mits zich geen wijzigingen in het sociale patroon zullen voordoen die de aanname dat  $k$  onafhankelijk van de tijd is op losse schroeven zetten). Wij zullen spoedig onze kennis zover uitgebreid hebben dat we dit probleem kunnen aanpakken.

Soortelijke warmte. Als  $Q(T)$  de warmte is, nodig om een eenheid van massa van een zeker materiaal van temperatuur  $0$  op temperatuur  $T$  te brengen, dan is de warmte nodig om de temperatuur van  $T_0$  op  $T_0+h$  te brengen:

$Q(T_0+h) - Q(T_0)$ . De limiet van de gemiddelde benodigde warmte:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(T_0+h) - Q(T_0)}{h}$$

is soortelijke warmte bij temperatuur  $T_0$ .

Definitie. Laat  $f$  gedefinieerd en reëelwaardig zijn in een omgeving van  $a \in \mathbb{R}$ .

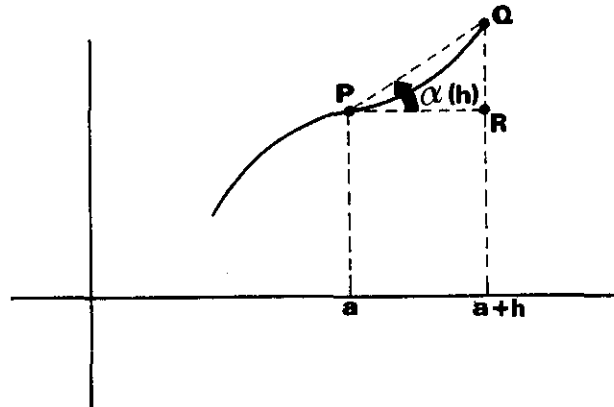
De functie heet differentieerbaar in  $x = a$  indien

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

bestaat. Deze limiet heet de afgeleide van  $f$  in  $a$ ; notatie  $f'(a)$ .

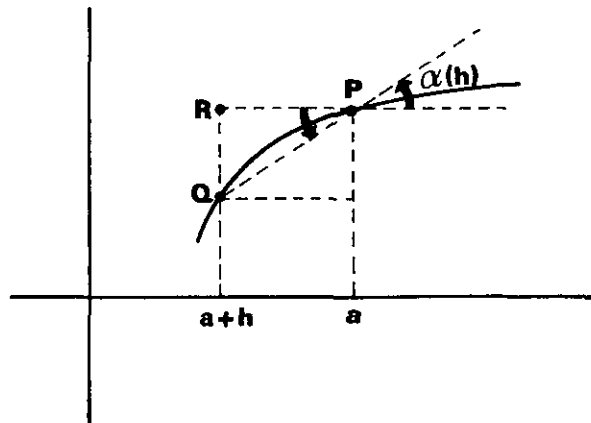
Indien de afgeleide bestaat in elk punt van een verzameling  $V$  dan heet  $f$  differentieerbaar in  $V$ ; de afgeleide  $f'(x)$  is dan een functie gedefinieerd op  $V$ .

De afgeleide heeft een heel belangrijke meetkundige interpretatie:  $f'(a)$  is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt  $(a, f(a))$  aan de grafiek van de functie  $f$ .



Zij  $h > 0$ .  $P = (a, f(a))$ ,  $Q = (a+h, f(a+h))$ ,  $R = (a+h, f(a))$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \tan \alpha(h)$$



$$h < 0. \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \tan \alpha(h)$$

"f is differentieerbaar in  $x = a$ " is dus gelijkwaardig met: de grafiek van f heeft een niet-verticale raaklijn in  $(a, f(a))$ .

De volgende stelling geeft ons een handzamere karakterisering van de afgeleide

Stelling. Zij  $f(x)$  gedefinieerd in een omgeving van  $a$ .  $f$  is dan en slechts dan differentieerbaar in  $x = a$  indien er bestaat een getal  $A$  en een functie  $\epsilon(h)$  gedefinieerd voor  $h \neq 0$  zódat:

$$f(a+h) - f(a) = Ah + h \epsilon(h)$$

en

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

Er geldt:  $A = f'(a)$ .

Bewijs (i) Laat  $f$  differentieerbaar in  $x = a$  zijn. Definieer

$$\epsilon(h) := \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

dan geldt  $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ , zodat aan de voorwaarden van de stelling voldaan is.

(ii). Als aan de voorwaarden van de stelling voldaan is geldt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (A + \epsilon(h)) = A,$$

zodat  $f$  differentieerbaar is in  $x = a$  met afgeleide  $A$ .

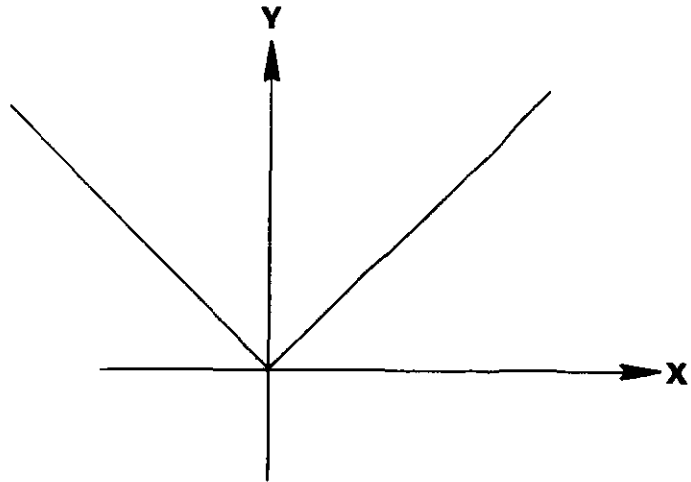
Intuïtief drukt deze stelling uit dat differentieerbaarheid betekent dat  $f(x)$  in eerste benadering een lineaire functie is:

$$f(a) + (x-a) f'(a) \approx f(x).$$

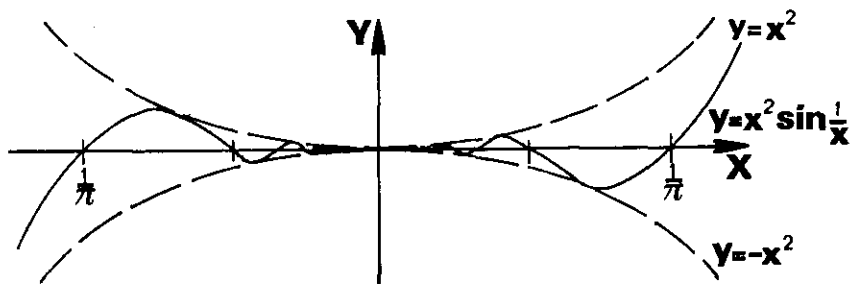
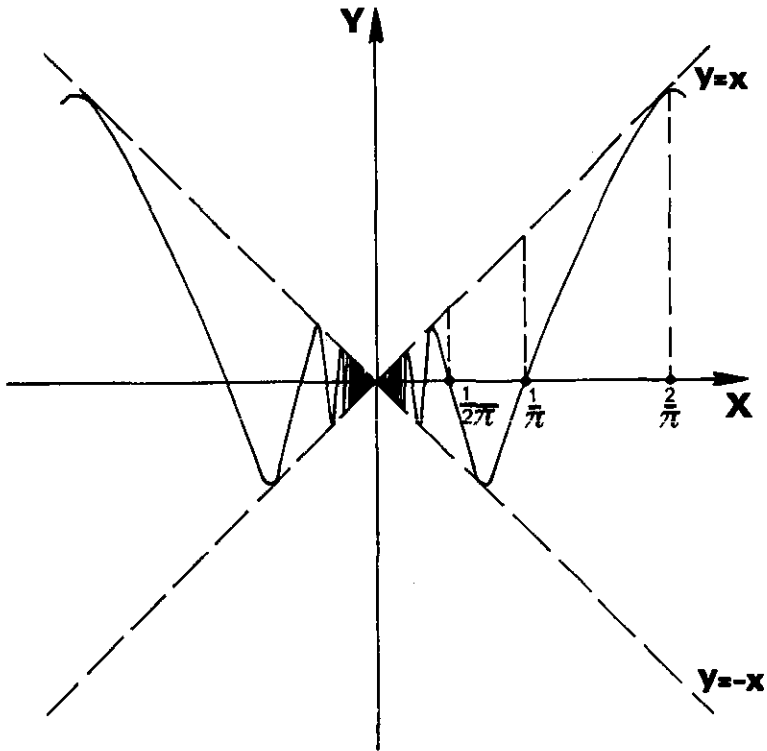
Gevolg. Als  $f$  differentieerbaar is in  $x = a$ , is  $f$  continu in  $x = a$ .

Bewijs.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a) \epsilon(x-a)) = f(a)$ .

beeld.  $f(x) = |x|$  is in  $x = 0$  wel continu maar niet differentieerbaar.



Men bekijke de volgende figuren die illustreren dat  $x \sin \frac{1}{x}$  wel continu maar niet differentieerbaar is in  $x = 0$  en dat  $x^2 \sin \frac{1}{x}$  continu en differentieerbaar is in  $x = 0$ . (We zagen reeds dat  $\sin \frac{1}{x}$  niet continu is in  $x = 0$ .)



2.3.2. De techniek van het differentiëren.

We bespreken in deze paragraaf twee reeksen stellingen die ons in staat zullen stellen van vele functies de afgeleiden te berekenen. De eerste reeks leert ons hoe de afgeleide te berekenen van sommen, producten, quotiënten,

samengestelden en inversen van differentieerbare functies; deze formules heten de regels van Leibniz (1646-1716). In de tweede reeks staan de afgeleiden van een aantal bekende functies.

Regels van Leibniz.

1. Als  $f(x)$  en  $g(x)$  differentieerbaar zijn in  $x = a$ , dan is ook  $f(x)+g(x)$  differentieerbaar in  $x = a$  met afgeleide  $f'(a)+g'(a)$ .

Dus  $(f+g)' = f'+g'$ .

Bewijs.  $f(a+h) - f(a) = hf'(a) + h\epsilon_1(h)$  en  $\epsilon_1(h) \rightarrow 0$  als  $h \rightarrow 0$

$g(a+h) - g(a) = hg'(a) + h\epsilon_2(h)$  en  $\epsilon_2(h) \rightarrow 0$  als  $h \rightarrow 0$ .

Maar dan ook

$$f(a+h) + g(a+h) - (f(a) + g(a)) = h(f'(a)+g'(a)) + h(\epsilon_1(h) + \epsilon_2(h))$$

en

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\epsilon_1(h) + \epsilon_2(h)) = 0.$$

2. Onder dezelfde aannamen als in 1 geldt  $f(x)g(x)$  is differentieerbaar in  $x = a$  met afgeleide  $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ . Dus  $(fg)' = f'g + fg'$ .

Bewijs.

$$f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) = h(f'(a)g(a) + g'(a)f(a)) + h\epsilon(h)$$

waarbij

$$\begin{aligned} \epsilon(h) = & \epsilon_1(h)g(a) + \epsilon_2(h)f(a) + hf'(a)g'(a) + h\epsilon_1(h)g'(a) + \\ & + h\epsilon_2(h)f'(a) + h\epsilon_1(h)\epsilon_2(h) \end{aligned}$$

derhalve

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

Gevolg.  $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$  enz.

3. Als  $f$  differentieerbaar is in  $x = a$  en  $f(a) \neq 0$  dan is  $\frac{1}{f(x)}$  differentieerbaar in  $x = a$  met afgeleide:  $-\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$ . Dus

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$



Bewijs 
$$\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{f(a)-f(a+h)}{f(a+h)f(a)} = \frac{-hf'(a)-h\epsilon_1(h)}{(f(a))^2+hf'(a)f(a)+h\epsilon_1(h)f(a)}$$

en

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\epsilon_1(h)}{(f(a))^2+hf'(a)f(a)+h\epsilon_1(h)f(a)} = 0; \text{ dus } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)} \right) = - \frac{f'(a)}{(f(a))^2}.$$

4. Kettingregel. Zij  $g(x)$  differentieerbaar in  $x = a$ ;  $g(a) =: b$ ; zij  $f(x)$  differentieerbaar in  $x = b$  dan is  $(f \circ g)(x)$  differentieerbaar in  $x = a$  met afgeleide  $f'(b)g'(a)$ .

$$\text{Dus } (f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x).$$

Bewijs. Zij

$$\begin{aligned} g(a+h) &= g(a) + hg'(a) + h\epsilon_1(h) & \epsilon_1(h) &\rightarrow 0 \text{ als } h \rightarrow 0 \\ f(b+k) &= f(b) + kf'(b) + k\epsilon_2(k) & \epsilon_2(k) &\rightarrow 0 \text{ als } k \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Definieer

$$k(h) := g(a+h) - g(a) \text{ dan is } \lim_{h \rightarrow 0} k(h) = k(0) = 0.$$

Dus  $k(h) = hg'(a) + h\epsilon_1(h)$  en

$$\begin{aligned} f(g(a+h)) - f(g(a)) &= f(b+k(h)) - f(b) = \\ &= k(h) f'(b) + k(h) \epsilon_2(k(h)) = \\ &= hf'(b) g'(a) + h\epsilon(h) \end{aligned}$$

waarbij

$$\epsilon(h) = \epsilon_1(h) f'(b) + g'(a) \epsilon_2(k(h)) + \epsilon_1(h) \epsilon_2(k(h)),$$

zodat

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

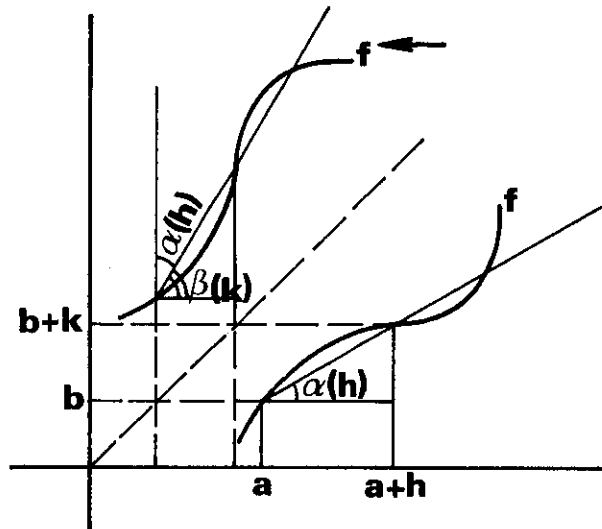
5. Is  $f(x)$  differentieerbaar in  $x = a$ ,  $f'(a) \neq 0$  en bestaat  $f^\leftarrow$  dan geldt (met  $b := f(a)$ ):  $f^\leftarrow(x)$  is differentieerbaar in  $x = b$  met afgeleide

$$\frac{1}{f'(a)}.$$

Het bewijs van de differentieerbaarheid van  $f^\leftarrow$  laten we achterwege. De afgeleide bepalen we met de kettingregel uit  $x = (f^\leftarrow \circ f)(x)$ . We vinden dan  $1 = (f^\leftarrow)'(b) f'(a)$ .

Omdat de grafieken van  $f$  en  $f^{\leftarrow}$  uit elkaar ontstaan door spiegeling t.o.v. de lijn  $y = x$  geldt, indien  $h$  en  $k$  samenhangen via de relatie  $k = f(a+h) - f(a)$  of  $h = f^{\leftarrow}(b+k) - f^{\leftarrow}(b)$  dat: de hoeken  $\alpha(h)$  en  $\beta(k)$  elkaars complement zijn dus dat

$$\tan\beta(k) = \frac{1}{\tan\alpha(h)} .$$



De afgeleiden van enkele bekende functies.

6. Als  $f(x) = x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{Q}$ ) dan  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$  (we moeten tevens eisen  $x > 0$  indien  $\alpha \leq 0$ ; in het volgende hoofdstuk zullen we leren dat deze eigenschap geldt voor  $\alpha \in \mathbb{R}$ )

Bewijs:

(i)  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ : herhaalde toepassing van 2, (alle  $x!$ ),

(ii)  $\alpha = 0$ :  $f(x) = 1, f'(x) = 0$ .

(iii)  $\alpha = -n, n \in \mathbb{N}, x \neq 0$ :  $f(x) = \frac{1}{x^n}$ , pas 3 toe,

(iv)  $\alpha = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, x > 0$ :  $f(x) = x^{1/n}$  dan

$$f^{\leftarrow}(x) = x^n \text{ en } (f^{\leftarrow})'(b) = nb^{n-1} \text{ en dus}$$

$$f'(a) = \frac{1}{nb^{n-1}} = \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1} \text{ als } a^{\frac{1}{n}} = b$$

)  $\alpha = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, x > 0$ :  $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$ ; pas 4 toe:

$$f'(x) = m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} .$$

7. Als  $f(x) = \sin x$  is  $f'(x) = \cos x$ .

Bewijs

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

Nu volgt het gestelde uit:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \text{ en } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0, \text{ daar}$$

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{-2(\sin \frac{1}{2}h)^2}{h} = -\frac{h(\sin \frac{1}{2}h)^2}{2(\frac{1}{2}h)^2}.$$

8. Als  $f(x) = \cos x$  is  $f'(x) = -\sin x$ .

Bewijs

$$f(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ dus (wegens 7 en 4)}$$

$$f'(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

$$9. (\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}.$$

Bewijs:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ en } 2,3,7,8.$$

Door combineren van de regels 1 t/m 9 zijn van zeer veel - ook ingewikkelde functies - de afgeleiden te berekenen. Men moet routine in het bepalen van afgeleiden verkrijgen door het maken van een niet te klein aantal vraagstukken. Zie bijv. de collectie instructievraagstukken.

Helaas is de klasse van functies die we thans kunnen differentieren nog niet voldoende; zo is er geen bij waarvoor de verhouding van  $f$  en  $f'$  een constante is (zie 2.3.1). Ook de functies  $10^x$  en  ${}^{10}\log x$  kunnen we nog niet differentieren. In het volgende hoofdstuk zullen we echter nog enkele functies nader leren kennen (zie §3.3).

Hoofdstuk 3. Integraalrekening.

3.1. De bepaalde integraal.

We zullen het begrip bepaalde integraal introduceren aan de hand van een voorbeeld. Een fabriek loost afvalwater in een meer; in het afvalwater bevindt zich een verontreinigende stof. De hoeveelheid geloosd ten tijde  $t$  van deze verontreiniger is  $f(t)$ . Hoeveel heeft de fabriek in totaal aan afvalstof geloosd tussen de tijdstippen  $t = a$  en  $t = b$ , ( $a < b$ )?

Het is principeel onmogelijk continu metingen te verrichten. Wat men zal doen is het tijdsbestek verdelen in een aantal intervallen door keuze van deelpunten:  $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ , in ieder tijdsintervalletje éénmaal een meting verrichten, en vervolgens aannemen dat de afvallozing over het gehele intervalletje gelijk is aan de ene gemeten waarde. Stel dat de meettijden zijn  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  met  $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Als benadering van de totale hoeveelheid geloosd vuil zal men dan opgeven:

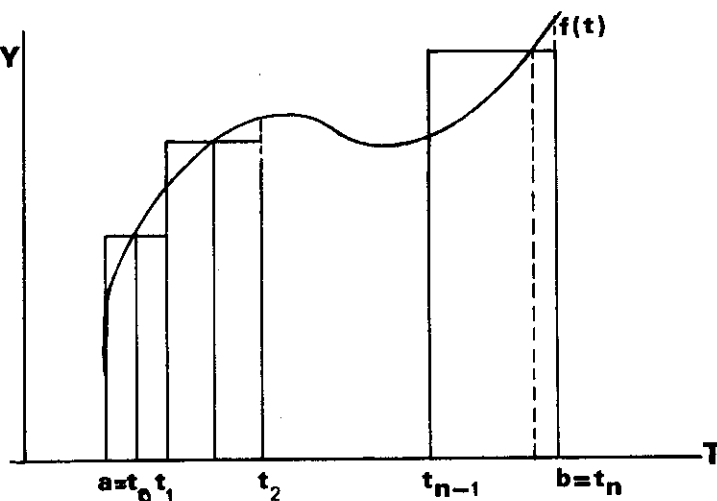
$$f(\xi_1)(t_1 - t_0) + f(\xi_2)(t_2 - t_1) + \dots + f(\xi_n)(t_n - t_{n-1}) =: \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

We zullen dit noteren als  $S(D, R_D)(f)$  en spreken van de Riemann-som van  $f$  bij de verdeling  $D: a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  en tussenpunten  $R_D: \xi_1, \dots, \xi_n$  met  $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). De diameter van  $D$  is:  $\delta(D) := \max_{i=1, \dots, n} (t_i - t_{i-1})$ .

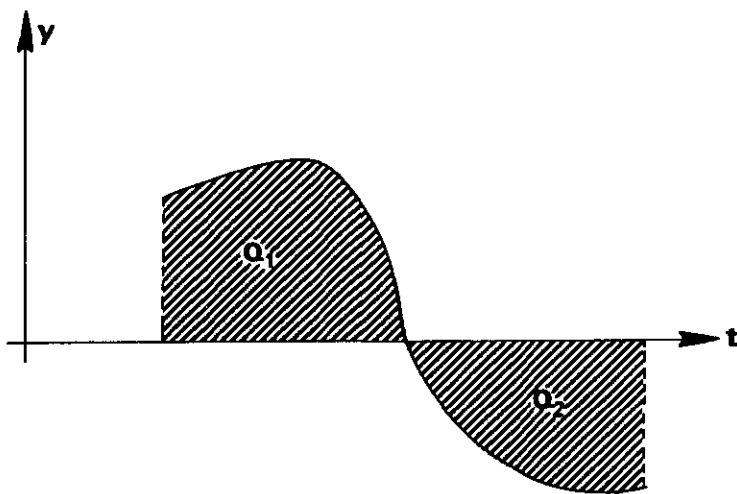
$S(D, R_D)(f)$  zal een betere benadering worden van de gezochte totale hoeveelheid afval als we verdelingen beschouwen die fijner en fijner worden, d.w.z.

$\delta(D) \rightarrow 0$ . Als nu " $\lim_{\delta(D) \rightarrow 0} S(D, R_D)(f)$ " bestaat onafhankelijk van de gekozen verdelingen en tussenpunten dan heet deze limiet de bepaalde integraal van  $f$  over  $[a, b]$ .

notatie:  $\int_a^b f(t)dt.$



Als de integraal  $\int_a^b f(t)dt$  bestaat noemen we  $f$  integreerbaar over  $[a,b]$ . Zonder bewijs merken we op dat als  $f$  continu is op  $[a,b]$  de integraal bestaat. Bovendien vermelden we dat iedere integreerbare functie begrensd is, d.w.z. dat er een getal  $M$  bestaat zodat  $|f(t)| \leq M$  voor alle  $t \in [a,b]$ . Als numerieke benadering van de integraal kunnen we steeds een Riemann-som nemen. In het figuurtje zien we dat ( $f(t)$  is hier  $> 0$ ) de Riemann-som een som van oppervlakten van een aantal rechthoekjes is, zodat we  $\int_a^b f(t)dt$  de "oppervlakte" tussen de  $t$ -as, de grafiek van  $f(t)$  en de lijnen  $t = a$  en  $t = b$  kunnen noemen. Is  $f(t) \leq 0$  op  $[a,b]$  dan is  $\int_a^b f(t)dt$  juist het tegengestelde van deze oppervlakte: In het hier getekende geval is  $\int_a^b f(t)dt = Q_1 - Q_2$  waarin  $Q_1$  en  $Q_2$  de oppervlakten van de beide gearceerde vlakdelen zijn.



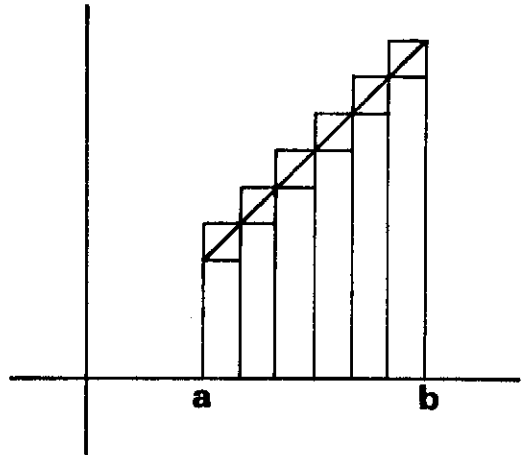
We noemen nog een tweetal voorbeelden: De kracht werkend op een punt varieert met de afgelegde rechte weg:  $K = K(s)$ . Dan is de arbeid, verricht bij de beweging van A naar B:

$$\int_{s_A}^{s_B} K(s)ds.$$

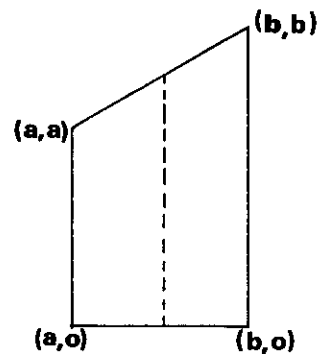
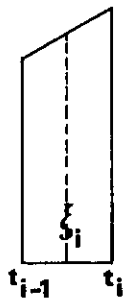
Het volume verkregen door wenteling van de grafiek van  $f(x)$  om de  $x$ -as is

$$\int_a^b \pi (f(x))^2 dx.$$

We zullen nu berekenen:  $\int_a^b t dt.$



Verdeel  $[a,b]$  in  $n$  gelijke delen. We kunnen nu gemakkelijk de grootste en kleinste Riemann-som opschrijven en zien dat beide naar dezelfde limiet naderen als  $n \rightarrow \infty$ . Op grond van de insluitstelling is dit dan ook de limiet voor elke rij Riemann-sommen behorend bij verdelingen van  $[a,b]$  in  $n$  gelijke delen. We gebruiken het feit dat we weten dat de integraal bestaat omdat de functie  $f(t) = t$  continu is, en we kiezen onze tussenpunten handig, d.w.z. in het midden van ieder interval.



Nu is  $\xi_i(t_i - t_{i-1})$  juist gelijk aan de oppervlakte van het trapezium met "hoogte"  $t_i - t_{i-1}$  en middenparallel  $\xi_i$ . Voor elke verdeling  $D$  is de Riemann-som met tussenpunten midden tussen de deelpunten dus gelijk aan de oppervlakte van het trapezium met hoekpunten:  $(a,0)$ ,  $(b,0)$ ,  $(b,b)$  en  $(a,a)$ .

us

$$\int_a^b t dt = \frac{1}{2}(a+b)(b-a) = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2.$$

We geven nu bondig een opsomming van een aantal eigenschappen van  $\int_a^b f(t)dt$

(we nemen steeds aan dat alle opgeschreven integralen bestaan).

I  $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$ , ("het doet er niet toe hoe de veranderlijke heet").

II  $\int_a^b f(t)dt$  heeft alleen zin als  $a \leq b$ , n.b.  $\int_a^a f(t)dt = 0$ .

We definiëren voor  $b < a$ :  $\int_a^b f(t)dt := - \int_b^a f(t)dt$ .

III  $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$  voor alle  $a, b$  en  $c$ .

IV  $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$  ( $\lambda, \mu$  constant).

V Als  $a \leq b$  en  $f(t) \leq g(t)$  voor alle  $t \in [a, b]$  dan is  $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$ .

N.B. dit is alleen goed als  $a \leq b$ !

VI Voor de functie  $f(t) \equiv 1$  vinden we  $\int_a^b dt = b-a$ .

VII Door combinatie van IV, V en VI vinden we uit  $|f(t)| \leq M$  voor  $t \in [a, b]$  dat voor  $a \leq b$  geldt

$$-M(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

en dus

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq M|b-a|$$

welke laatste ongelijkheid ook goed is als  $b < a$ .

In de volgende paragraaf zullen we een methode leren om bepaalde integralen te berekenen die heel veel eenvoudiger is dan het bepalen van limieten van Riemann-sommen.

3.2. De hoofdstelling der integraalrekening; onbepaalde integralen.

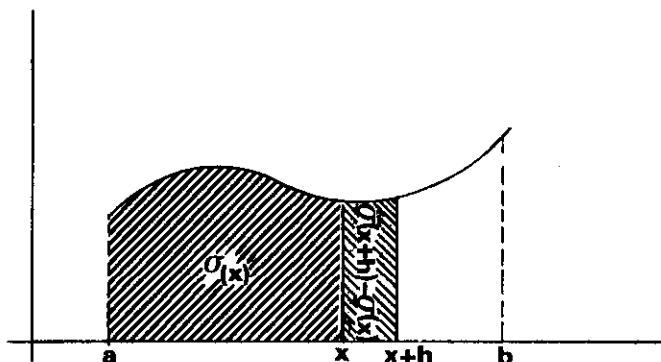
3.2.1. De hoofdstelling.

Zij  $f(t)$  integreerbaar over  $[a,b]$ , dan is voor  $x \in [a,b]$  door

$$\sigma(x) := \int_a^x f(t)dt$$

een functie gedefinieerd.

Stelling.  $\sigma(x)$  is continu.



Bewijs. Er bestaat een  $M$  zodat  $|f(t)| \leq M$  op  $[a,b]$  (zie 3.1). Voor een willekeurige  $c \in [a,b]$  geldt

$$|\sigma(x) - \sigma(c)| = \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt \right| = \left| \int_c^x f(t)dt \right| \leq M|x-c|.$$

Dus  $\lim_{x \rightarrow c} \sigma(x) = \sigma(c)$ .

Stelling. Als  $f$  continu is dan is  $\sigma(x)$  differentieerbaar met  $\sigma'(x) = f(x)$ .

Bewijs. We definiëren  $\epsilon(h) := \frac{\sigma(x+h) - \sigma(x)}{h} - f(x)$ , dan is

$$\epsilon(h) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt. \text{ Bij ieder getal } \epsilon_1 > 0 \text{ bestaat er een omge-}$$

ving van  $x$  zodat  $|f(t) - f(x)| < \epsilon_1$  voor elke  $t$  in die omgeving. Als we  $|h|$  klein nemen dat het interval  $[x-|h|, x+|h|]$  geheel binnen die omgeving ligt dan is  $|\epsilon(h)| \leq \frac{1}{|h|} \epsilon_1 |h| = \epsilon_1$  dus  $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ .



Hoofdstelling. Als  $f$  continu is en  $F' = f$  dan is

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Bewijs.  $\mathcal{O}'(x) = f(x) = F'(x)$ . Dus  $(\mathcal{O}-F)'(x) = 0$ , maar dan is  $\mathcal{O}-F$  constant: het is een continue functie waarvan de raaklijn aan de grafiek overal horizontaal is. (zie §4.1) Derhalve

$$\int_a^b f(t)dt = \mathcal{O}(b) = \mathcal{O}(b) - \mathcal{O}(a) = F(b) - F(a).$$

Voorbeeld.  $\int_0^\pi \sin t dt$ . We nemen als  $F(x) = -\cos x$ , dan zien we

$$\int_0^\pi \sin t dt = [-\cos x]_{x=0}^{x=\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 2.$$

### 3.2.2. De onbepaalde integraal.

Zij  $f$  een continue functie. We vragen naar  $\{F \mid F' = f\}$ . Deze verzameling

is niet leeg immers  $\mathcal{O}(x) = \int_a^x f(t)dt$  is er een element van. Alle paren

functies uit deze verzameling hebben een constant verschil; men krijgt uitgaande van een element alle andere door optelling van constanten.

Definitie. De onbepaalde integraal (notatie  $\int f(t)dt$ ) is een functie met  $F'(x) = f(x)$ .

Met behulp van de regels 6 t/m 9 uit §2.3.2. ziet men onmiddellijk:

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha \neq -1)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

In al deze voorbeelden is C een of andere constante.

De volgende eigenschappen volgen direct uit de overeenkomende regels van Leibniz

$$I \quad \int (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx$$

$$II \quad \int (f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) dx = f(x)g(x) + C$$

We kunnen deze formule ook schrijven als

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Deze is bekend als de formule der partiële integratie

$$III \quad \int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + C$$

Deze formule is aanleiding tot de methode der substitutie bij het bepalen van onbepaalde integralen.

Voorbeelden. (Merk op de handige notaties ontstaan door  $g'(x)dx$  als  $dg(x)$  te schrijven.)

$$I \quad \int \frac{x^4+1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{7/2}+x^{-1/2}) dx = \int x^{7/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \frac{2}{9}x^{9/2} + 2x^{1/2} + C.$$

$$\begin{aligned} II \quad \int x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int x(\sin 2x)' dx =: \frac{1}{2} \int x d \sin 2x := \\ &= \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} III \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2)'}{\sqrt{1-x^2}} dx =: \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = \\ &= -\sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Men lette op dat bij substitutie in bepaalde integralen ook de grenzen meegenomen moeten worden:

$$\int_1^3 (2t+5)^2 dt = \frac{1}{2} \int_7^{11} g^2 dg \text{ als } g(t) = 2t+5.$$

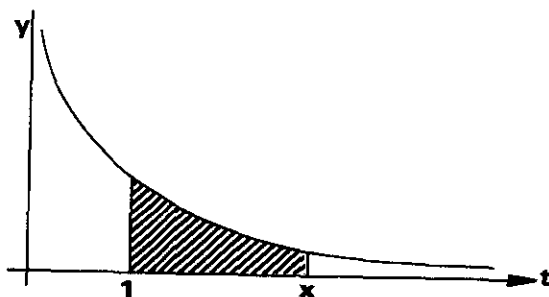
Evenals voor het differentiëren en elke andere wiskundige vaardigheid, geldt voor integreren dat men de techniek slechts onder de knie kan krijgen door oefening. Bij het berekenen van onbepaalde integralen komt als plezierige bijkomstigheid, dat er een steeds werkende meestal tamelijk eenvoudige controle-mogelijkheid is. Men kan nl. het gevonden resultaat differentiëren en moet dan de functie onder de integraal terugvinden.

### 3.3. Exponentiële en logaritmische functies.

We kennen nog geen formulefunctie waarvan de afgeleide gelijk is aan  $\frac{1}{x}$ . Een functie met deze afgeleide is natuurlijk

$$L(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}$$

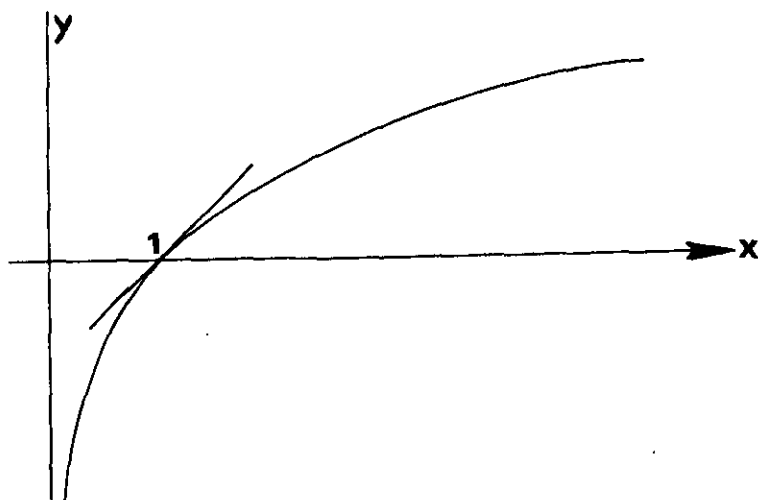
gedefinieerd voor alle  $x > 0$ , en daar continu wegens de eerste stelling uit §3.2. We bestuderen nu deze functie.



Een aantal eigenschappen van  $L(x)$  zijn nu meteen duidelijk:

$$L'(x) = \frac{1}{x}; \quad L(1) = 0; \quad L(x) > 0 \text{ als } x > 1, \quad L(x) < 0 \text{ als } x < 1.$$

$L(x)$  is één-éénduidig en stijgend, want als  $x_1 < x_2$  dan is  $L(x_1) < L(x_2)$ . De grafiek ziet er in eerste benadering zō uit:



Stelling:

$$L(ab) = L(a) + L(b).$$

Bewijs.  $\int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t}$ . Nu vinden we door substitutie in de laatste integraal van  $az = t$  dat  $\int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^b \frac{dz}{z}$ .

Gevolgen.  $L(a^n) = nL(a)$  als  $n \in \mathbb{N}$

$$L(a) + L\left(\frac{1}{a}\right) = L(1) = 0 \text{ dus } L(a^{-1}) = -L(a)$$

$$L(a^n) = nL(a) \text{ als } n \text{ geheel.}$$

Als  $\sqrt[n]{a} = \alpha$  is  $L(\alpha^n) = nL(\alpha)$  en dus  $\frac{1}{n}L(a) = L\left(a^{\frac{1}{n}}\right)$ . Stap voor stap verder gaand vinden we:

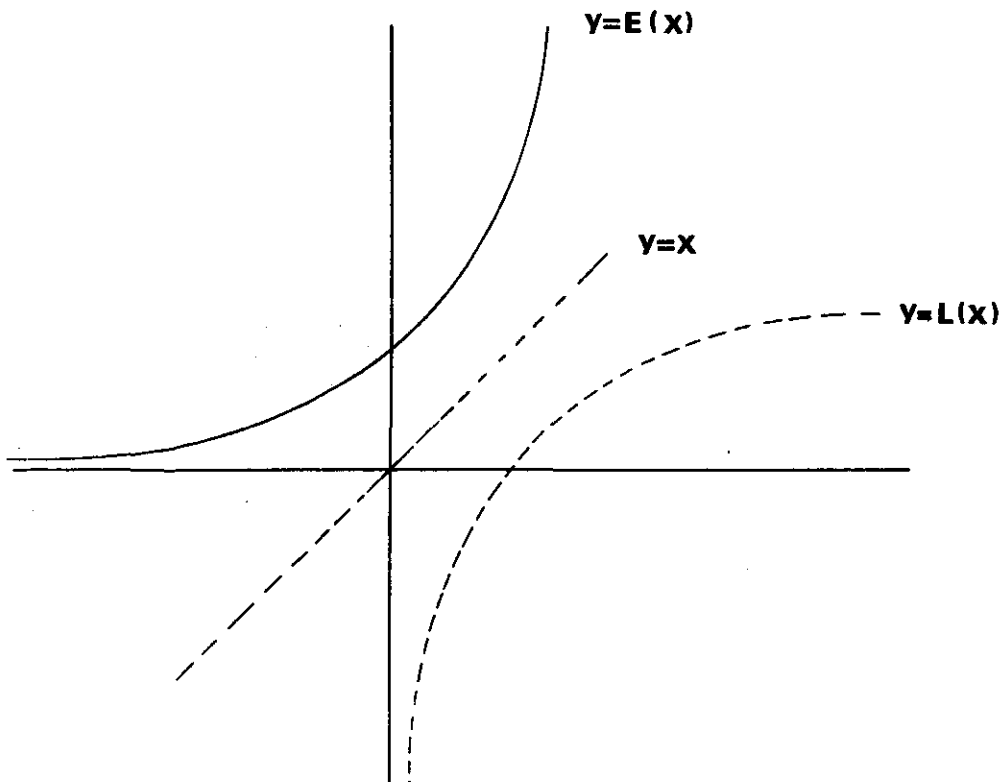
$$L(a^{m/n}) = \frac{m}{n}L(a)$$

en tenslotte

$$L(a^r) = rL(a) \text{ voor alle } r \in \mathbb{Q}.$$

Omdat  $L(2^n) = nL(2)$  en  $L(x)$  continu is gaat  $L(x) \rightarrow \infty$  als  $x \rightarrow \infty$ .  $L(1/2^n) = -nL(2)$  dus  $L(x) \rightarrow -\infty$  als  $x \rightarrow 0$ . We zijn nu in staat de grafiek beter te tekenen. Merk op dat de stijging voor grote  $x$  steeds minder wordt omdat de afgeleide  $\frac{1}{x}$  naar 0 nadert als  $x \rightarrow \infty$ . De  $y$ -as is een verticale asymptoot.

Omdat de functie  $L$  een één-éénduidige afbeelding is van  $\langle 0, \infty \rangle$  op  $\langle -\infty, \infty \rangle$  is de inverse  $L^+$  een afbeelding van  $\langle -\infty, \infty \rangle$  op  $\langle 0, \infty \rangle$ . We duiden  $L^+$  voorlopig aan met  $E$ . Dus  $y = L(x)$  en  $x = E(y)$  zijn gelijkwaardig. De grafiek van  $E$  is nu zo te tekenen



Eigenschappen van  $E(x)$ :

$$E(0) = 1, E'(b) = \frac{1}{L'(a)} \text{ als } a = E(b)$$

dus:

$$E'(b) = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a = E(b). \text{ (op grond van regel 5 van §2.3.2.)}$$

Hiermede hebben we bewezen dat  $E'(x) = E(x)$ ;  $E(x)$  is dus een functie waarvoor  $E'(x)/E(x)$  constant is en wel  $= 1$ .

Stelling.  $E(\alpha) E(\beta) = E(\alpha+\beta)$

Bewijs:  $E(\alpha) =: a, E(\beta) =: b$  dan is  $L(ab) = L(a) + L(b)$  dus  $ab = E(L(a)+L(b)) = E(\alpha+\beta)$ .

Gevolg:  $E(r\alpha) = (E(\alpha))^r$  ( $r \in \mathbb{Q}$ ).

Als we definiëren:  $E(1) =: e$  dan zien we dat  $E(x) = e^x$ .  $E(x)$  is dus een exponentiële functie. Op grond van het gevolg weten we in eerste instantie  $E(x) = e^x$  voor rationale  $x$ , maar omdat  $E(x)$  continu is en omdat  $e^x$  continu is (dit hebben we niet bewezen, we nemen het maar over van de middelbare school) geldt de relatie  $E(x) = e^x$  voor alle  $x$ .

Na de vaststelling dat  $E(x) = e^x$  volgt dat  $L(x) = {}^e \log x$ . We noemen logarithmen met grondtal  $e$ : natuurlijke logarithmen. Afwijkend van onze vroegere gewoonte zullen we van nu af  $\log x := {}^e \log x$  nemen en andere grondtallen steeds vermelden.

We hebben:

$$(e^x)' = e^x; (\log x)' = \frac{1}{x}.$$

Voor andere grondtallen volgen de afgeleiden met behulp van de kettingregel en bekende formules:

$$a^x = e^{x \log a} \text{ dus } (a^x)' = a^x \log a.$$

$${}^b \log x = \frac{\log x}{\log b} \text{ dus } ({}^b \log x)' = \frac{1}{x \log b}.$$

De bepaling van het getal  $e$  geschiedt bijv. uit  $L(e) = 1$ . (Tekenen de grafiek van  $\frac{1}{x}$  heel nauwkeurig op millimeter papier en tel rechts van één in verticale rijen net zo lang vierkante mm tot je er 100 hebt, zo vindt men een benadering voor  $e$ ). Met nauwkeurig rekenen vindt men  $e = 2,718281828\dots$

We zullen er in §4.2 op terugkomen maar we kunnen nu reeds vaststellen uit  $\frac{y'(t)}{y(t)} = k$  volgt dat  $\log |y(t)| = kt+C$  en dus dat  $y(t) = De^{kt}$  waarbij

$D := y(0)$ .

We besluiten dit hoofdstuk met enkele belangrijke limieten.

Nu is

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right);$$

laten we  $h \rightarrow 0$  dan nadert het linkerlid naar  $\frac{1}{x}$  (definitie van afgeleide!).

Dus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

Vervangen we  $\frac{1}{x}$  door  $z$  dan blijkt dat we hebben:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log(1 + zh) = z. \quad (1)$$

We verifiëren dat (1) goed is voor alle  $z \in \mathbb{R}$ .

Gebruikmakend van (1) en de continuïteit van  $e^x$  vinden we:

$$e^z = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{\log(1+zh)}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} (1+zh)^{1/h}. \quad (2)$$

Specialiserend  $z = 1$  en  $h$  beperkend tot  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  vinden we

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (3)$$

Dit levert een nieuwe mogelijkheid om het getal  $e$  te berekenen:

$$(1+1)^1 = 2; \quad \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25; \quad \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2,37, \dots ;$$
$$(1,001)^{1000} = 2,718, \dots$$

### 3.4. Oneigenlijke integralen

Behalve  $\int_a^b f(x)dx$  gebruiken we ook vaak  $\int_a^\infty f(x)dx$ . Per definitie betekent

dit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^k f(x)dx$ . We zeggen dan ook i.p.v.  $\int_a^\infty f(x)dx$  bestaat, dat de onei-

genlijke integraal  $\int_a^\infty f(x)dx$  convergeert.

Voorbeelden:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k \frac{dx}{x^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1 ;$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k \frac{dx}{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \log k \quad \text{bestaat niet.}$$

Terloops vermelden we dat men op analoge wijze te werk gaat als  $f(x)$  niet begrensd mocht zijn op  $\langle a, b \rangle$ .

Een voorbeeld:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} 2(1 - \sqrt{\delta}) = 2 .$$

### 3.5. Opmerkingen over het berekenen van integralen

#### 3.5.1. Herhaalde partiële integratie

$$\begin{aligned} I &:= \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} \int (e^{ax})' \cos bx dx = \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &:= \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a} \int (e^{ax})' \sin bx dx = \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx . \end{aligned}$$

Dus:

$$I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a} I ,$$

dus

$$I = \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$$

$$J = \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C .$$

#### 3.5.2. Rationale functies

We beperken ons tot noemers die in één of twee lineaire factoren te ontbinden zijn:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx ,$$

waarbij  $P(x)$  een veelterm is en

$$Q(x) = x - a \quad \text{of} \quad Q(x) = (x - a)(x - b) .$$



Deel eerst uit totdat de graad van de teller lager is dan die van de noemer:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{A}{x-a}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_2(x) + \frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)}$$

Nu zijn  $\int P_1(x)dx$ ,  $\int P_2(x)dx$  en  $\int \frac{A}{x-a} dx$  direct te berekenen.

Voor  $\int \frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)} dx$  onderscheiden we twee gevallen:

$$\begin{aligned} 1) a = b. \int \frac{Ax+B}{(x-a)^2} dx &= \int \frac{A(x-a)}{(x-a)^2} dx + \int \frac{B+Aa}{(x-a)^2} dx = \\ &= A \log|x-a| - \frac{B+Aa}{x-a} + C. \end{aligned}$$

2)  $a \neq b$ . De uitdrukking  $\frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)}$  splitsen we nu in zgn. partiële breuken, d.w.z. we proberen  $p$  en  $q$  te vinden zó dat

$$\frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)} = \frac{p}{x-a} + \frac{q}{x-b}$$

Zulke  $p$  en  $q$  zijn te vinden:

$$\frac{p}{x-a} + \frac{q}{x-b} = \frac{(p+q)x - pb - aq}{(x-a)(x-b)},$$

dus  $p$  en  $q$  moeten voldoen aan:

$$\begin{cases} p + q = A \\ bp + aq = -B \end{cases}$$

en deze vergelijkingen zijn oplosbaar ( $p = \frac{-aA - B}{b-a}$ ;  $q = \frac{bA + B}{b-a}$ .)

Voorbeelden:

$$1) \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{2} \log|x+1| + C$$

$$2) \int \frac{x-1}{3x^2+5x-2} dx = \int \frac{x-1}{(3x-1)(x+2)} dx.$$

Stel

$$\frac{x - 1}{3x^2 + 5x - 2} \equiv \frac{p}{x - 1/3} + \frac{q}{x + 2} ;$$

dan moet  $p(x + 2) + q(x - 1/3) \equiv 1/3(x - 1)$

$$\begin{cases} p + q = \frac{1}{3} \\ 2p - \frac{1}{3}q = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad p = -2/21, q = 3/7 .$$

Derhalve:

$$\begin{aligned} \int \frac{x - 1}{3x^2 + 5x - 2} dx &= -\frac{2}{21} \int \frac{dx}{x - 1/3} + \frac{3}{7} \int \frac{dx}{x + 2} = \\ &= -\frac{2}{21} \log|x - 1/3| + \frac{3}{7} \log|x + 2| + C . \end{aligned}$$

### 3.5.3. Integralen met goniometrische functies in de integrand

Voor het berekenen van zulke integralen bestaan talrijke recepten. Men heeft echter vaak al succes door toepassing van de goniometrische formules. De volgende serie voorbeelden is van groot belang voor hoofdstuk 12. Ze berusten op de formules:

$$\cos^2 nx = \frac{1}{2}(1 + \cos 2nx)$$

$$\sin^2 nx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)$$

$$\cos nx \sin mx = \frac{1}{2}(\sin(n + m)x - \sin(n - m)x)$$

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}(\cos(n + m)x + \cos(n - m)x)$$

$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2}(\cos(n - m)x - \cos(n + m)x) .$$

Toepassing van deze formules levert:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2 dx = \pi \quad (n \geq 1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 dx = \pi \quad (n \geq 1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0 \quad (n \geq 1, m \geq 1, m \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0 \quad (n \geq 1, m \geq 1, m \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \quad (n \geq 1, m \geq 1).$$

### 3.5.4. De formule van Wallis

Dit is een formule voor:

$$I_{m,n} := \int_0^{\pi/2} (\cos x)^m (\sin x)^n \, dx$$

waarbij  $m$  en  $n$  niet negatieve gehele getallen zijn.

Door gebruik te maken van  $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ ;  $(\cos x)' = -\sin x$ ,  
 $(\sin x)' = \cos x$  en partiële integratie bewijst men (ga na!)

$$I_{m,n} = \frac{(m-1)(m-3)(m-5) \dots (n-1)(n-3)(n-5) \dots}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4) \dots} \cdot \begin{cases} \pi/2 & \text{als } m \text{ en } n \text{ even zijn} \\ 1 & \text{anders} \end{cases}$$

(elk van de drie rijen factoren eindigt met 1 of 2).

Voorbeelden:

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^6 \, dx = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} = \frac{5}{32} \pi$$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^7 \, dx = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{16}{35}$$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^5 (\cos x)^4 \, dx = \frac{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{8}{315}.$$

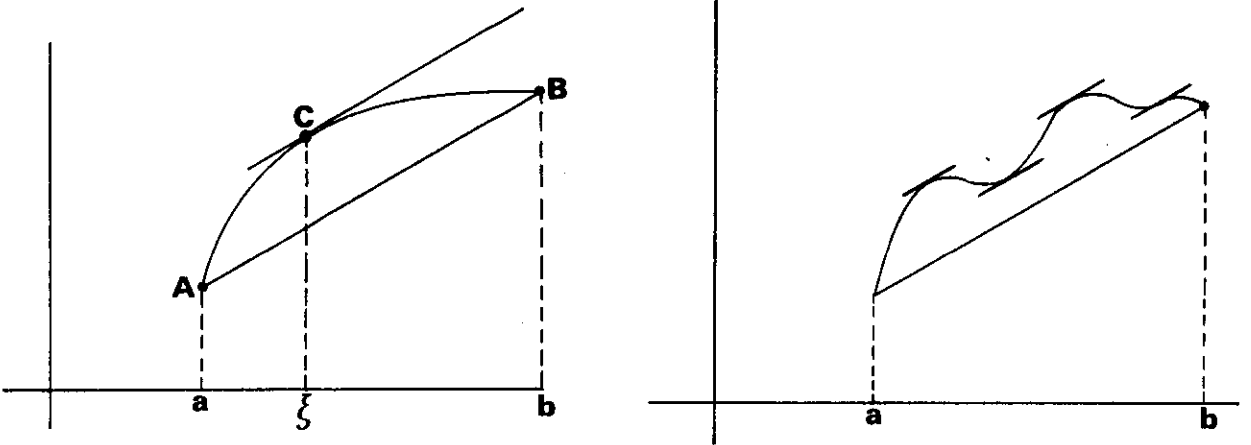
Hoofdstuk 4. Toepassingen.

4.1. Extrema.

Stelling (geheten middelwaardestelling). Als  $f$  differentieerbaar is op  $[a,b]$  ( $b > a$ ) dan is er een punt  $\xi$  in  $(a,b)$  zodanig dat:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

We zullen deze stelling niet bewijzen. Meetkundig drukt hij uit dat er tussen  $a$  en  $b$  een punt  $\xi$  ligt zodat de raaklijn aan de grafiek in  $(\xi, f(\xi))$  evenwijdig is aan de koorde die  $(a, f(a))$  en  $(b, f(b))$  verbindt. Het is zeer goed mogelijk dat er meerdere punten  $\xi$  zijn.



Gevolg: Is  $f'(x) > 0$  op het interval  $[\alpha, \beta]$  dan is de functie  $f$  daar stijgend; is  $f'(x) < 0$  dan is de functie dalend. Is  $f'(x) = 0$  op  $[\alpha, \beta]$ , dan is  $f(x)$  constant.

Bewijs. Zij  $f'(x) > 0$ , zij  $x_1 < x_2$  dan is  $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi) > 0$ . De andere bewijzen zijn analoog.

Definitie. Een functie  $f(x)$  heeft een lokaal maximum in  $c$  als er een omgeving van  $c$  bestaat zodat  $f(x) \leq f(c)$  voor alle geoorloofde  $x$  uit die omgeving. Analoog voor lokale minima. De functie heeft een maximum in  $x = c$  indien  $f(x) \leq f(c)$  voor alle  $x$  uit de definitieverzameling van  $f$ . In tegenstelling tot lokaal maximum spreekt men wel van globaal maximum.

We zullen ons in deze paragraaf nagenoeg uitsluitend interesseren voor locale maxima en minima (extrema). Zonder bewijs vermelden we de stelling dat een continue functie op een gesloten en begrensd interval,  $[a,b]$ , een maximum en een minimum aanneemt.

Stelling. Als  $f(x)$  differentieerbaar is in een omgeving van  $c$  en in  $c$  een lokaal maximum aanneemt, dan is  $f'(c) = 0$ .

Bewijs. Zowel voor  $h > 0$  als  $h < 0$  geldt  $f(c+h) - f(c) \leq 0$  dus:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \text{ als } h > 0$$

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \text{ als } h < 0.$$

Beide quotiënten naderen als  $h \rightarrow 0$  resp.  $h \rightarrow 0$  naar  $f'(c)$  dus  $f'(c) \leq 0$  en  $f'(c) \geq 0$ , dus  $f'(c) = 0$ .

Opmerking. Een analoge stelling geldt voor locale minima.

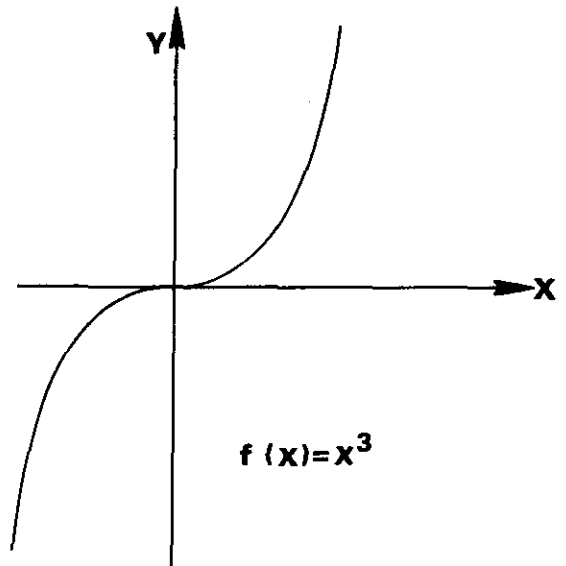
Opmerking. Het is niet waar dat uit  $f'(c) = 0$  volgt dat er in  $c$  een maximum of minimum wordt aangenomen.  $f(x) = x^3$  is een voorbeeld.

Afgeleide = 0 betekent horizontale raaklijn en meer niet. De punten waar  $f'(c)=0$  zijn dus slechts kanshebbers voor een extremum en moeten dus nog nader onderzocht worden. Tekenwisseling van de afgeleide is iets waar we het bestaan van een extremum uit kunnen afleiden. Denk er aan dat ook de rand-punten van een interval  $[a,b]$  steeds kanshebbers voor een extreme waarde zijn. Het bepalen van de locale extrema is een machtig hulpmiddel bij het tekenen van grafieken.

Wij bespreken in deze paragraaf enkele voorbeelden.

Voorbeelden:

1. Bepaal van alle rechthoeken met een gegeven oppervlakte het exemplaar met minimale omtrek.



Laat de oppervlakte  $a^2$  zijn; laat de lengte van de ene zijde  $x$  zijn  $x \in <0, \infty>$ . De lengte van de andere zijde is dan  $a^2/x$ . De omtrek is

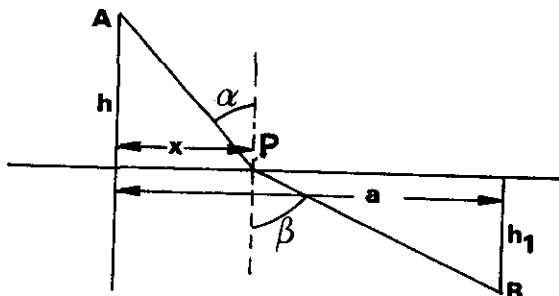
$$f(x) = 2x + \frac{2a^2}{x}.$$

We zien dat  $f(x) > 0$  op  $<0, \infty>$  en dat  $f(x) \rightarrow \infty$  voor  $x \rightarrow \infty$  zowel als voor  $x \rightarrow 0$

$$f'(x) = 2 - \frac{2a^2}{x^2} = 2 \frac{x^2 - a^2}{x^2}.$$

Het is duidelijk dat  $f'(x) < 0$  op  $<0, a>$  dus  $f(x)$  dalend terwijl  $f'(x) > 0$  op  $<a, \infty>$  dus  $f(x)$  stijgend. Conclusie  $f$  heeft een minimum voor  $x = a$ ; de rechthoek met minimale omtrek is het vierkant.

2. Bepaal de snelste weg van punt A naar punt B, als gegeven is dat de snelheid boven de lijn  $\ell$  die we als x-as nemen, constant  $c_1$ , onder de x-as constant  $c_2$  is. Het is duidelijk dat deze weg bestaat uit twee rechte segmenten (waarom?); het komt er dus op aan de ligging van P te vinden. (zie figuur). We kiezen de y-as zo dat A op de y-as ligt.



De lengte van AP is  $\sqrt{h^2+x^2}$  van PB is het  $\sqrt{(a-x)^2+h_1^2}$ . De tijd nodig is dus

$$f(x) = \frac{1}{c_1} \sqrt{h^2+x^2} + \frac{1}{c_2} \sqrt{(a-x)^2+h_1^2}.$$

De functie  $f(x)$  is voor alle  $x$  differentieerbaar en positief terwijl

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ als } x \rightarrow \infty \text{ en } x \rightarrow -\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} - \frac{1}{c_2} \frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+h_1^2}}.$$

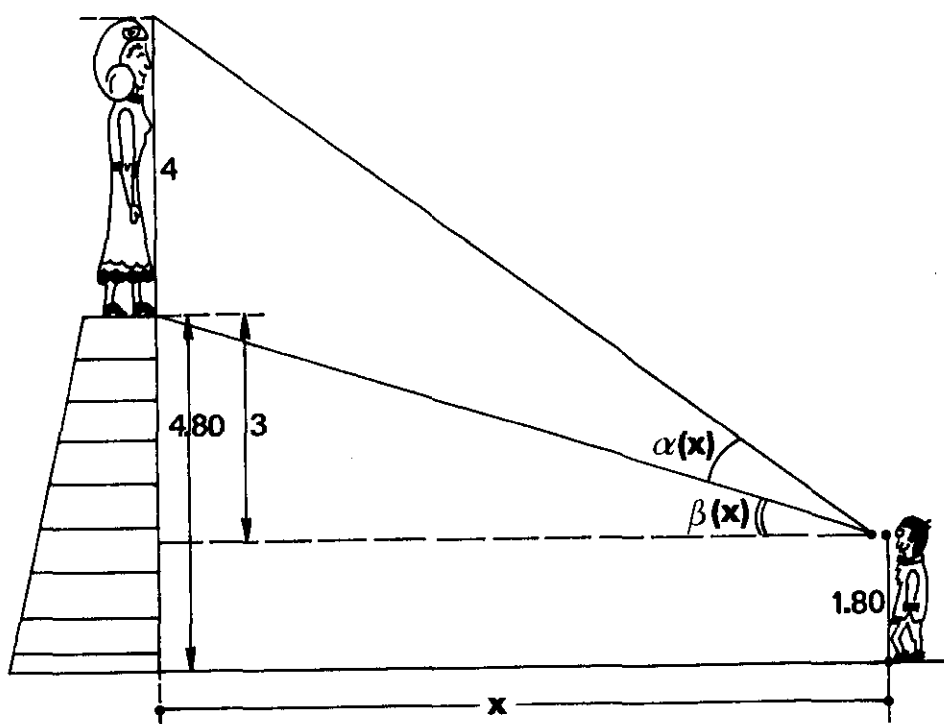
na dat  $f'(x)$  precies één nulpunt heeft en wel voor de  $x_0$  waarvoor

$$\frac{1}{c_1} \frac{x_0}{\sqrt{h^2+x_0^2}} = \frac{1}{c_2} \frac{(a-x_0)}{\sqrt{(a-x_0)^2+h_1^2}}$$

Op grond van bovenstaande eigenschappen van  $f$  is er voor deze  $x_0$  ook een minimum. Dit betekent dat de minimale tijd bereikt wordt als  $P$  zo gelegen is dat:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} \quad (\text{Brekingswet van Snellius}).$$

3. Een 4m hoog standbeeld staat op een 4,80 m hoog voetstuk. Op welke afstand moet een man met ooghoogte 1,80m zich plaatsen opdat hij het standbeeld onder een zo groot mogelijke hoek ziet?



Onder de aannamen aangegeven in de figuur hebben we:

$$\tan \beta(x) = \frac{3}{x} ; \tan(\alpha(x) + \beta(x)) = \frac{7}{x} .$$

Derhalve:

$$\tan(\alpha(x)) = \frac{\tan(\alpha(x) + \beta(x)) - \tan \beta(x)}{1 + \tan(\alpha(x) + \beta(x)) \tan \beta(x)} = \frac{\frac{7}{x} - \frac{3}{x}}{1 + \frac{21}{x^2}} = \frac{4x}{21 + x^2} .$$

Nu is voor scherpe hoeken de  $\tan$  een stijgende functie zodat  $\alpha(x)$  maximaal is als  $\tan(\alpha(x))$  maximaal is. We bepalen daarom het maximum van:

$$f(x) = \frac{4x}{21 + x^2} \text{ voor } x \in [0, \infty).$$

$$\text{Nu is } f'(x) = \frac{84 - 4x^2}{(21 + x^2)^2} .$$

We zien hieruit dat  $f$  stijgend is op  $[0, \sqrt{21}]$  en dalend op  $[\sqrt{21}, \infty)$ . Het maximum treedt op voor  $x = \sqrt{21}$ .

De maximale waarde van  $f$  is  $\frac{2}{21} \sqrt{21}$ . De daarbij behorende waarde van  $\alpha$  is de scherpe hoek waarvan de  $\tan$  gelijk is aan  $\frac{2}{21} \sqrt{21}$ .

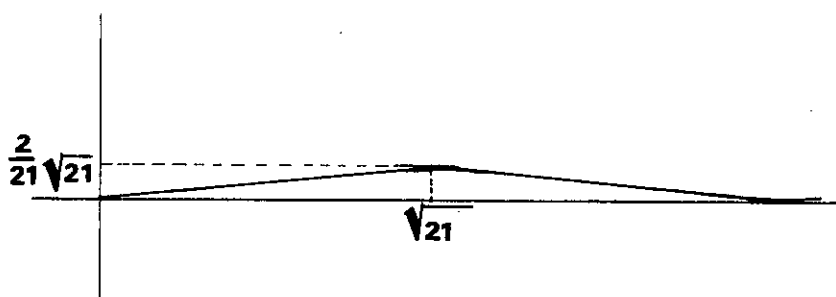
Met behulp van een logarithme tafel vinden we de volgende benaderingen: (men voelt wel aan dat zodra de problemen of de getallen iets ingewikkelder worden, rekenapparatuur heel plezierig is)

$$\sqrt{21} = 4,5826$$

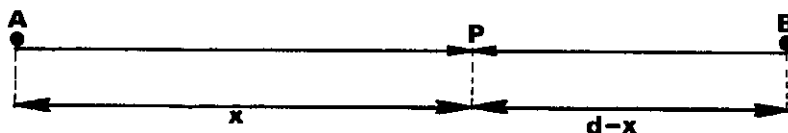
$$\frac{2}{21} \sqrt{21} = 0,4364$$

$$\alpha_{\max} = 23^{\circ} 12'.$$

Het schetsen van de grafiek van  $f$  is niet moeilijk



4. Aan de uiteinden van een recht traject met lengte  $d$  staan lichtbronnen A en B met intensiteit  $a$  resp.  $b$ .



Op welk punt P van het segment AB is de hoeveelheid licht het minst? We nemen aan dat de hoeveelheid licht die in P komt van uit een lichtbron evenredig is met de intensiteit van de bron en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand. De hoeveelheid licht uit verschillende bronnen kan worden opgeteld. Als  $\rho$  de evenredigheidsconstante is, komt in P

is

$$f(x) = \rho \frac{a}{x^2} + \rho \frac{b}{(d-x)^2} :$$



We zien dat  $f(x) \rightarrow \infty$  als  $x \downarrow 0$  en als  $x \uparrow d$  (betekent dit dat de aannamen niet met de realiteit overeenkomen, als we tegen de lamp lopen?)

$$f'(x) = \rho \left[ \frac{-2a}{x^3} + \frac{2b}{(d-x)^3} \right] = \frac{2\rho(-(d-x)^3 a + bx^3)}{x^3 (d-x)^3}.$$

Als  $x$  van 0 aangroeit tot  $d$  stijgt  $x^3$  en daalt  $(d-x)^3$  dus  $-a(d-x)^3 + bx^3$ , dat  $< 0$  is voor  $x = 0$ , stijgt van  $-d^3 a$  tot  $d^3 b$ . Er is derhalve precies één waarde van  $x$  in  $[0, d]$  waar  $f'(x)$  van teken wisselt en wel indien:

$$a(d-x)^3 = bx^3 \text{ d.w.z. } \frac{x}{\sqrt[3]{a}} = \frac{d-x}{\sqrt[3]{b}}.$$

Het punt met minimale hoeveelheid licht ligt dus zó dat

$$\frac{AP}{PB} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

#### 4.2. Differentiaalvergelijkingen.

Onder een differentiaalvergelijking verstaat men een vergelijking waarin behalve de grootheden  $x$  en  $y$  ook een afgeleide van  $y$  voorkomt.

We houden ons thans alleen bezig met de vergelijking

$$y'(x) = F(x, y(x)).$$

De vraag is nu: te bepalen welke functies  $y(x)$  hieraan voldoen.

Een zeer eenvoudige situatie ontstaat er als  $F(x, y) = \frac{f(x)}{g(y)}$ . Dan kan de vergelijking worden geschreven als

$$g(y)y' = f(x)$$

(we zeggen hiervan dat de variabelen gescheiden zijn).

Links van het gelijkteken staat de afgeleide naar  $x$  van

$$\int g(y(x)) y'(x) dx.$$

Rechts staat de afgeleide van  $\int f(x) dx$ .

Dus behoudens een constante is

$$\int g(y(x)) y'(x) dx = \int f(x) dx.$$

Als  $G(y)$  een functie is waarvan de afgeleide naar  $y$  gelijk is aan  $g(y)$ :

$G'(y) =: \frac{dG}{dy} := g(y)$  en  $F(x)$  een functie is met  $F'(x) = f(x)$  dan hebben we dus dat

$$\int g(y(x)) y'(x) dx = G(y(x)) = F(x) + \text{constante.}$$

In veel gevallen kunnen we  $y$  dan hieruit oplossen. Maar heel vaak noemt men slordigerwijze ook  $G(y) = F(x) + \text{constante}$  de oplossing

Voorbeelden:

1.  $y' = -\frac{x}{y}$ , we zien dat  $y \neq 0$  moet zijn (zie na voorbeeld 2). Dan  $2yy' = -2x$ , dus door integratie vinden we

$$y^2 = -x^2 + C.$$

De constante  $C$  is  $\geq 0$  want  $C = x^2 + y^2$ . Met de aangeduide slordigheid zegt men wel dat de oplossing is een stelsel concentrische cirkels:  $x^2 + y^2 = C$ .

Als men werkelijk functies als oplossingen aan wil geven, dan kan men bijv. op de cirkel  $x^2 + y^2 = 1$  twee functies geven:  $y = \sqrt{1-x^2}$  en  $y = -\sqrt{1-x^2}$  die beide op  $\langle -1, 1 \rangle$  aan de differentiaalvergelijking voldoen.

2. Als tweede voorbeeld nemen we de reeds vaak bekeken vergelijking:

$$y' = ky.$$

Hiervan is  $y(x) = 0$  een oplossing die we niet meer vinden indien we de vergelijking schrijven als

$$\frac{y'}{y} = k.$$

Nu zijn de variabelen gescheiden. Integratie levert ons:

$$\log|y| = kx + C, \quad C \text{ constant,} \quad C \in \langle -\infty, \infty \rangle.$$

We werken dit uit

$$|y| = e^C e^{kx} \quad 0 < e^C < \infty$$

$$y = \pm e^C e^{kx}, \text{ noem } \pm e^C =: A, \text{ we vinden:}$$

$$y(x) = Ae^{kx}.$$

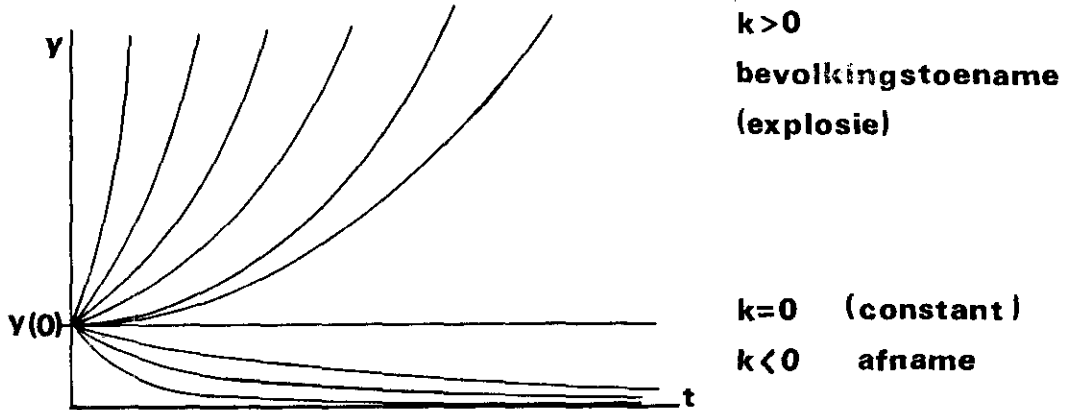
erin kan  $A$  elke waarde in  $\langle -\infty, \infty \rangle$  hebben. Merk op dat:

$$A = y(0).$$

We merken reeds op dat de bevolking van een land  $y(t)$  ten tijde  $t$  beschreven kan worden met een oplossing van  $y'(t) = ky(t)$ . We weten nu dat hieruit volgt:

$$y(t) = y(0)e^{kt}.$$

Om een idee te krijgen tekenen we grafieken van deze functies voor verschillende waarden van  $k$



Een goede manier om een idee te krijgen van groei en afname is eens na te gaan (m.b.v. van een log-tafel bijv.) hoeveel tijd nodig is voor een verdubbeling van de bevolking. Noemen we deze tijd  $T$  dan geldt dus:

$$y(T) = 2y(0) = y(0)e^{kT}; e^{kT} = 2$$

$$kT = \log 2$$

$$T = \frac{1}{k} \log 2 = \frac{1}{k} 0,6931$$

<b>k</b>	0,005	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
<b>T</b>	138,62	69,31	34,66	23,10	17,33	13,68

Deze getallen betekenen dat bij een toename van 3% per jaar verdubbeling optreedt in minder dan 24 jaar, d.w.z. binnen een eeuw is de bevolking meer dan verzestienvoudigd.

De thans besproken differentiaalvergelijking treedt ook op in de beschrijving van vele andere processen. Als voorbeeld nemen we de radioactieve desintegratie van een stof. Als  $y(t)$  de hoeveelheid stof ten tijde  $t$  is, dan geldt:

$$y' = ky.$$

$k < 0$  omdat er afname optreedt.

In plaats van met verdubbelingstijd werkt men nu met halfwaarde tijd:

$$\frac{\log \frac{1}{2}}{k} = \frac{-\log 2}{k}.$$

Andere voorbeelden; het warmteverlies van een warm lichaam in een milieu van lagere constante temperatuur; de verandering van de druk in een kolom gas of vloeistof.

Als geen scheiding der variabelen teweeg gebracht kan worden is het dikwijls niet mogelijk de oplossing in termen van bekende functies aan te geven. Men kan echter vaak een beeld krijgen van de oplossingen door de volgende meetkundige beschouwing: Als  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  dan is  $F(x,y)$  een getal dat we opvatten als de tangens van een hoek tussen  $-\frac{\pi}{2}$  en  $\frac{\pi}{2}$  die we als hoek tussen een lijntje door  $(x,y)$  en de positieve  $x$ -as voorstellen. Zo krijgt men in ieder punt waar  $F$  gedefinieerd is een richting. Het totaal van al deze richtingen noemen we het richtingsveld behorend bij de differentiaalvergelijking  $y' = F(x,y)$ .

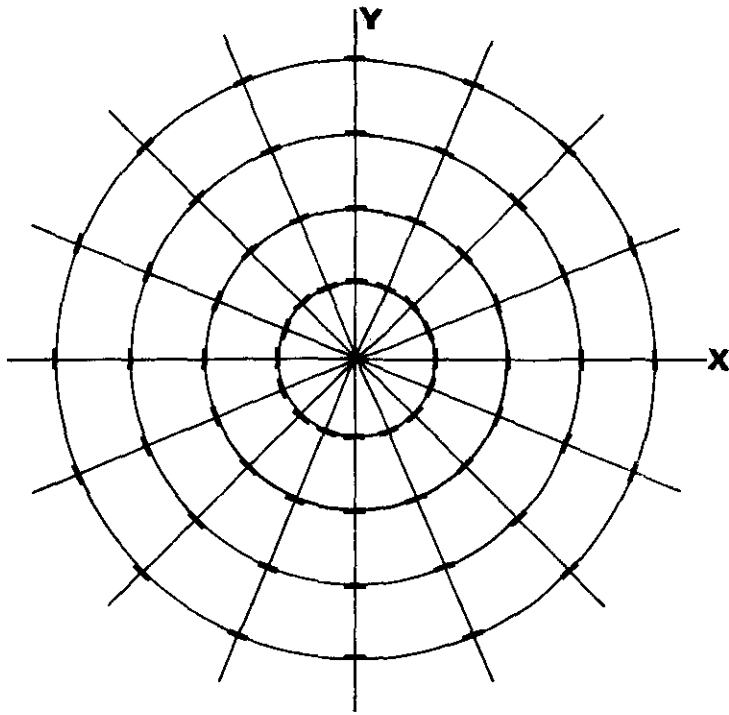
Een functie  $y(x)$  is een oplossing als de grafiek in ieder punt een raaklijn heeft waarvan de richting samenvalt met de richting van het richtingsveld in dat punt.

We kunnen ook zeggen: de grafiek raakt in elk punt aan het richtingsveld. Vanuit deze meetkundige beschouwingswijze wordt het duidelijk waarom men veelal krommen die overal aan het richtingsveld raken (zgn. integraalkrommen) als oplossingen beschouwt. (Zie voorbeeld 1). Bovendien breidt men het richtingsveld uit met verticale richtingen. (zie ook voorbeeld 1). Van groot nut bij het bepalen van het richtingsveld zijn de meetkundige plaatsen van punten met een gelijke richting de zgn. isoklinen. De vergelijking van de isokline van de richting waarvan de tangens  $C$  is, is  $F(x,y) = C$ . We tekenen de richtingsvelden behorend bij de voorbeelden 1 en 2.

Bij voorbeeld 1: de vergelijking van de isokline met richting  $C$  is  $-\frac{x}{y} = C$  dus  $y = -\frac{1}{C}x$ , een rechte door  $\mathcal{O}$  met richting loodrecht op de richting van het veld in zijn punten. We merken apart op dat het richtingsveld horizontaal is in punten van de  $y$ -as en verticaal in punten van de  $x$ -as ( $y = 0!$ ).

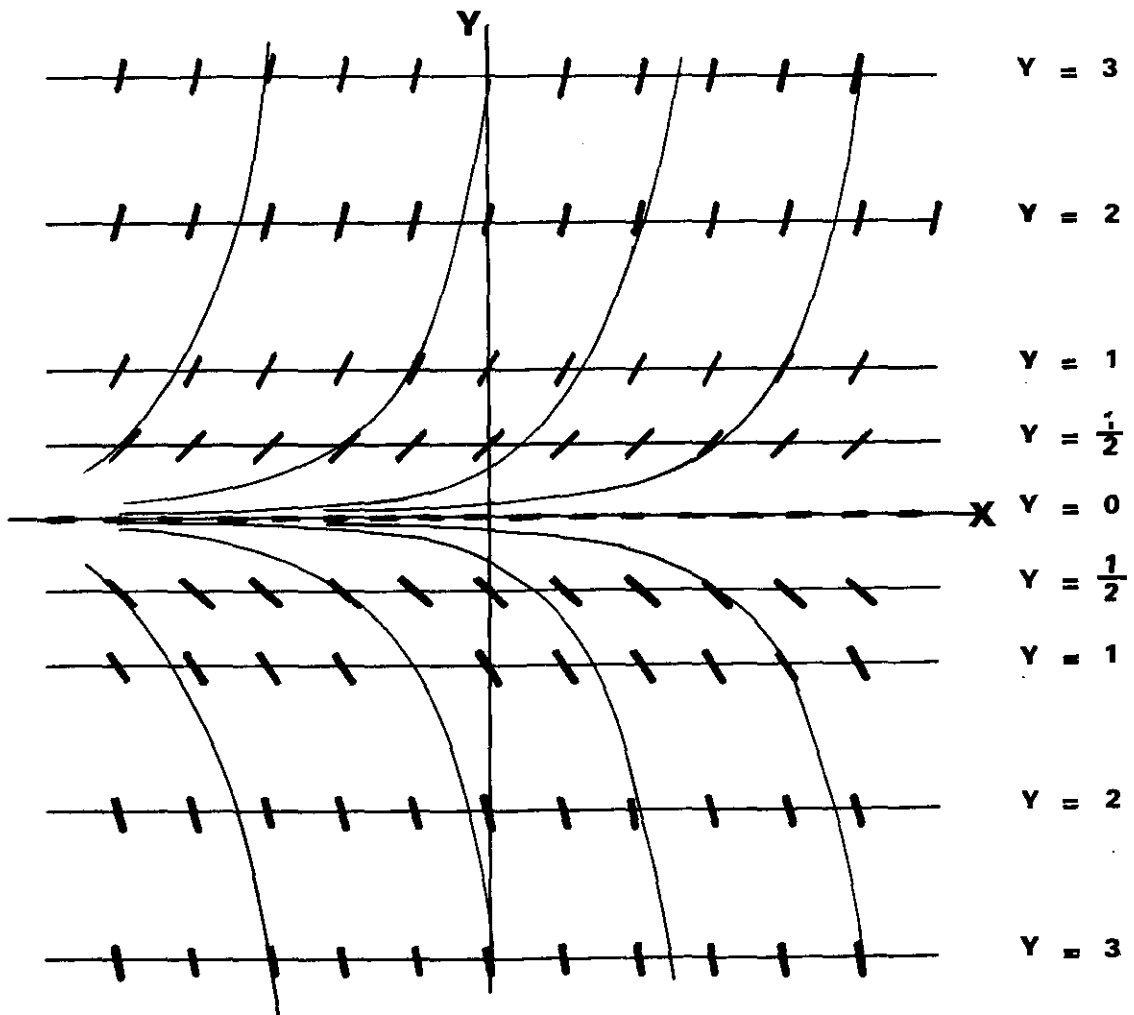
Van  $y' = -\frac{x}{y}$  zijn dus de isoklinen rechten door de oorsprong; integraalkrommen zijn cirkels met de oorsprong als middelpunt.

Voor de figuur zie volgende bladzijde.

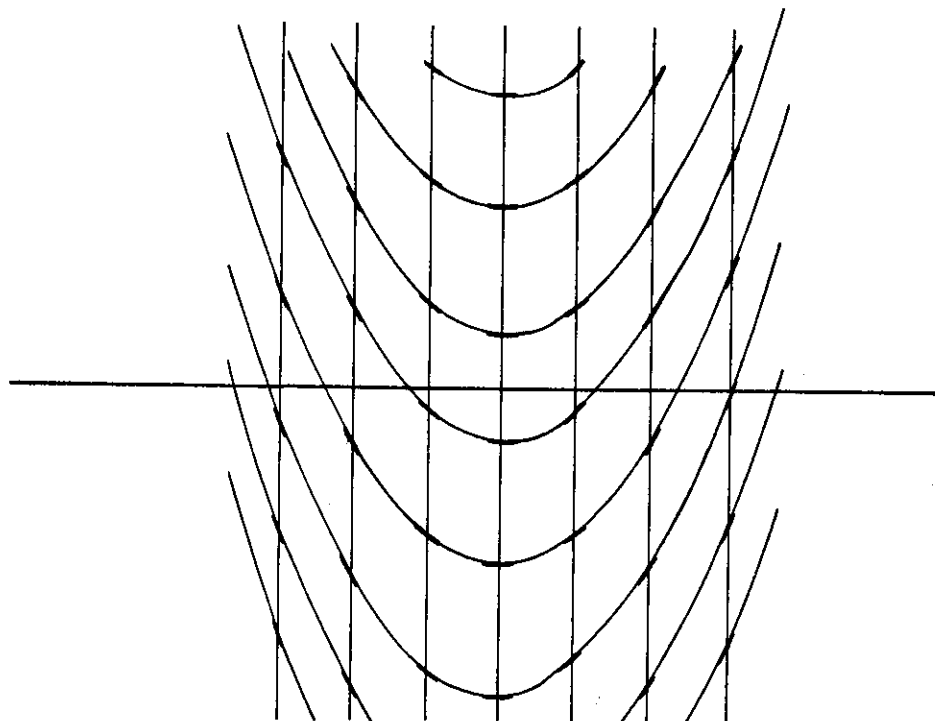


Voorbeeld 2. We nemen  $y' = 2y$ ; isoklinen zijn horizontale rechten; integraalkrommen  $y(x) = y(0)e^{2x}$ .

Zouden we hetzelfde willen doen voor  $y' = -2y$  dan vinden we een plaatje dat uit het onderstaande ontstaat door aan de y-as te spiegelen. Integraalkrommen zijn nu:  $y(x) = y(0)e^{-2x}$ ; dus  $y(x) \rightarrow 0$  als  $x \rightarrow \infty$  en  $y(x) \rightarrow \pm\infty$  als  $x \rightarrow -\infty$ .



Voorbeeld 3.  $y' = 2x$ .

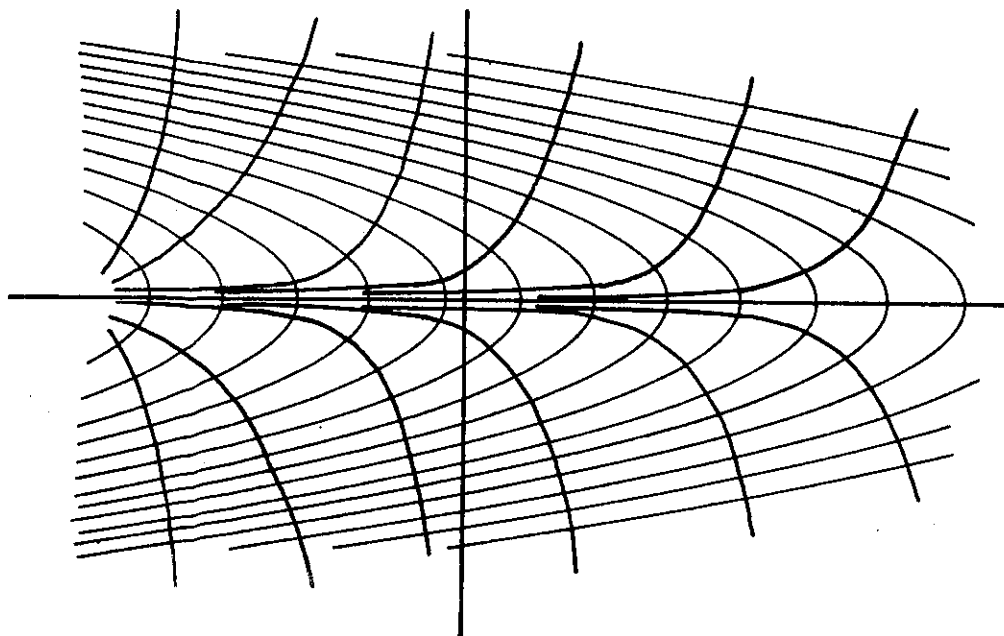


Isoklinen zijn verticale rechten; integraalkrommen  $y = x^2 + y_0$ .

Voorbeeld 4.  $y' = -\frac{1}{y}$  heeft als oplossingen  $y^2 = -2x + C$  (1)

$y' = y$  heeft als oplossingen  $y = De^x$ . (2)

Door elk punt van het vlak gaat een kromme van de familie (1) en van de familie (2). Deze beide krommen snijden elkaar in dat punt onder een rechte hoek. Men zegt daarom dat de families (1) en (2) elkaars orthogonale trajectoriën zijn.



Voorbeeld 5. Gevraagd de orthogonale trajectoriën van de familie parabolen:

$$y = cx^2 \quad -\infty < c < \infty.$$

We willen dus hebben alle krommen die in elk van hun punten loodrecht staan op de door dat punt gaande parabool.

Oplossing. De raaklijnrichtingen van de parabolen volgen door differentiëren  $y' = 2cx = \frac{2y}{x}$ . Voor de orthogonale trajectoriën geldt dus:

$$y' = \frac{-x}{2y}.$$

De oplossingen van deze laatste vergelijking zijn:

$$2y^2 = -x^2 + C, \quad C \geq 0,$$

een familie ellipsen.

### Lineaire differentiaalvergelijkingen.

Van een zeer belangrijk type differentiaalvergelijking zullen we een algemenere kunstgreep bespreken om tot de algemene oplossing te geraken. Het zijn de zgn. lineaire differentiaalvergelijkingen; deze kunnen geschreven worden als:

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Stel dat  $y(x) = u(x)v(x)$ , dan is  $y' = uv' + u'v$  dus

$$u'v + uv' + Puv = Q$$

$$v(u' + Pu) + uv' = Q.$$

Kies nu eerst een functie  $u(x)$ . ( $u(x) \neq 0$ ) zódat  $u' + Pu = 0$ . (deze vergelijking is met scheiding van veranderlijken op te lossen!) Om  $y = uv$  te bepalen moeten we nu  $v$  zó bepalen dat

$$uv' = Q \text{ of } v'(x) = \frac{Q(x)}{u(x)}$$

waar weer de veranderlijken gescheiden zijn.

### Voorbeeld 6:

$$y' - \frac{x+1}{x}y = x - x^2.$$

Oplossing. Met  $y(x) = u(x)v(x)$  vinden we

$$(u' - \frac{x+1}{x}u)v + v'u = x - x^2.$$

We bepalen eerst een  $u$  zódat  $u' = \frac{x+1}{x} u$ . Hier zijn de veranderlijken gescheiden:

$$\frac{u'}{u} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Integreren:

$$\log|u| = x + \log|x| + C.$$

We zijn tevreden met één functie  $u(x)$ . Een dergelijke functie is

$$u = xe^x.$$

We moeten nu oplossen

$$v'(x)xe^x = x - x^2;$$

$$v' = (1 - x)e^{-x};$$

$$v(x) = \int (1 - x)e^{-x} dx = \int e^{-x} dx - \int xe^{-x} dx.$$

Berekening van de integralen:

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C \text{ en}$$

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

(met partiële integratie) doet ons vinden:

$$v(x) = xe^{-x} + C.$$

Tenslotte:

$$y(x) = xe^x (xe^{-x} + C) = x^2 + Cxe^x.$$

Voor later merken we op dat deze oplossing  $y(x)$  de som is van  $y_a(x) := Cxe^x$  en  $y_p(x) := x^2$  waarbij  $y_p$  een oplossing is van de differentiaalvergelijking

$$y' - \frac{x+1}{x} y = x - x^2$$

$y_a(x)$  de algemene oplossing is van  $y' - \frac{x+1}{x} y = 0$ .

Zeer veel van de meest belangrijke differentiaalvergelijkingen die bij de beschrijving van technische processen optreden bevatten behalve  $y'$  ook nog de afgeleide van  $y'$ .

Voorbeeld 7. Teken het richtingsveld van  $y' + 2xy = x$ .



## Hoofdstuk 5. Uitbreiding van de differentiaalrekening

We zullen de differentiaalrekening in twee richtingen uitbreiden. Allereerst zullen we ons in dit hoofdstuk bezighouden met hogere afgeleiden en hun toepassingen; daarna zullen we spreken over functies van meer dan een veranderlijke (hoofdstuk 6).

### 5.1. Hogere afgeleiden

Bij een voor alle  $x$  differentieerbare functie  $f(x)$  hebben we in § 2.3 de afgeleide  $\frac{df}{dx} = f'(x)$  ingevoerd; deze afgeleide is zelf weer een functie van  $x$ ; het kan zijn dat deze functie weer differentieerbaar is.

We noemen  $\frac{d f'(x)}{dx}$  de tweede afgeleide van  $f$  en noteren deze als  $f''(x)$ .

We kunnen dit soms herhalen: de afgeleide van  $f''(x)$  heet de derde afgeleide van  $f$ , notatie  $f'''(x)$ .

Verdere notaties:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x) = f^{(2)}(x).$$

Algemeen:

$$\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x).$$

Voorbeeld. Als  $f(x) = \log x$ , geldt  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ;  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} \dots\dots$ ,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}. \quad (\text{N.B. } k! := 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k, 0! := 1;$$

uitspraak van  $k!$  is  $k$  faculteit).

Historisch overgeleverd is de vaak gebruikte gewoonte om de differentiaties met punten i.p.v. accenten aan te geven als de veranderlijke waarnaar gedifferentieerd wordt de tijd voorstelt. Zo schrijft men als  $y(t)$  een functie van de tijd is

$$\dot{y} := \frac{dy}{dt}; \quad \ddot{y} := \frac{d^2 y}{dt^2};$$

(men spreekt  $\dot{y}$  uit als  $y$  flux;  $\ddot{y}$  als  $y$  dubbel flux).

Zonder bewijs vermelden we het volgende intuïtief duidelijke feit:  
zoals differentieerbaarheid betekent dat

$$f(x) \approx f(a) + (x-a) f'(a),$$

zo kunnen we met de tweede afgeleide een betere benadering in de buurt van  $x = a$  vinden nl.:

$$f(x) \approx f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a).$$

De functie  $d(x) := f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)$  heeft:

$$\begin{cases} d(a) = f(a) \\ d'(a) = f'(a) \\ d''(a) = f''(a) \end{cases} .$$

In de volgende paragraaf zullen we dit formuleren als:  $f(x)$  en  $d(x)$  hebben in  $x = a$  dezelfde kromming (naast dezelfde waarde en dezelfde richting).

Een heel belangrijk voorbeeld van het gebruik van een tweede afgeleide is het begrip versnelling uit de mechanica. In § 2.3.1. zagen we dat als een deeltje langs een rechte baan beweegt en de afgelegde weg als functie van de tijd gegeven wordt door  $f(t)$  de snelheid ten tijde  $t$  gedefinieerd is als  $f'(t)$ .

Nu is  $\frac{f'(t_0+h) - f'(t_0)}{h}$  de gemiddelde snelheidstoename over het tijdvak

$[t_0, t_0+h]$ . De limiet hiervan voor  $h \rightarrow 0$  is per definitie de versnelling ten tijde  $t_0$ ; derhalve versnelling =  $f''(t)$ .

Deze opmerking stelt ons in staat de bekende wet van Newton: "kracht = massa  $\times$  versnelling" op te schrijven als een differentiaalvergelijking: (anders dan in hoofdstuk 4 hebben we nu te maken met een differentiaalvergelijking waarin de tweede afgeleide van de gezochte functie  $f(t)$  voorkomt).

$$K(t) = m f''(t).$$

We behandelen twee voorbeelden.

a)  $K(t) = K$  een constante onafhankelijk van de tijd.

We vinden dan voor de afgelegde weg

$$f''(t) = \frac{K}{m}$$

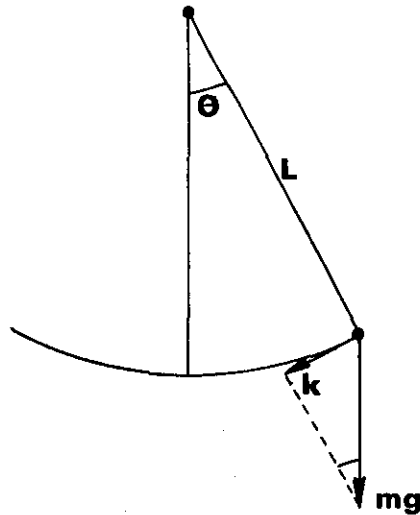
$$f'(t) = \frac{K}{m} t + C$$

$$f(t) = \frac{1}{2} \frac{K}{m} t^2 + C t + D ,$$

waarin C en D constanten zijn die we kunnen uitdrukken als  $C = f'(0)$ ,  $D = f(0)$ , d.w.z. C en D hebben de betekenis van de snelheid en de plaatscoördinaat ten tijde  $t = 0$ .

b) We beschouwen  $f(t)$  als de uitwijking uit een evenwichtstoestand van een deeltje met massa  $m$ .

Laten we aannemen dat het deeltje naar zijn evenwichtstoestand wordt teruggetrokken door een kracht die evenredig is met de uitwijking, d.w.z.  $K = -\alpha f(t)$  met  $\alpha > 0$ .



Een slinger wordt voor kleine uitwijkingen goed benaderd door bovenstaande beschrijving. De naar de evenwichtsstand drijvende kracht is de tangentiële component van de zwaartekracht  $mg$

$$K = -mg \sin \vartheta \approx -\frac{mg}{L} \vartheta L$$

waarbij  $\vartheta L$  ongeveer de uitwijking is.

De wet van Newton levert ons in dit geval:

$$-\alpha f(t) = m f''(t)$$

of  $f''(t) + a^2 f(t) = 0$ , waarbij  $a^2 := \frac{\alpha}{m} > 0$ .

In § 5.3 zullen we zien dat de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking is: (d.w.z. dat alle functies  $f(t)$  die voldoen aan  $f''(t) + a^2 f(t) = 0$ , geschreven kunnen worden als:)

$$f(t) = A \cos at + B \sin at = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(at + \varphi)$$

waarbij

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos \varphi \text{ en } A \text{ en } B \text{ constanten zijn.}$$

Gewoonlijk schrijft men dit als: (met  $C := \sqrt{A^2+B^2} > 0$ )  $f(t) = C \sin (at+\varphi)$ ; een zuiver sinusvormige trilling met amplitudo  $C$  en een fase op  $t = 0$  van  $\varphi$ .

### 5.2. De betekenis van de tweede afgeleide

Zoals we ons in § 4.1. hebben beziggehouden met de betekenis van het tekenverloop van  $f'(x)$  voor het gedrag van de functie zullen we nu enige aandacht schenken aan het tekenverloop van  $f''(x)$ .

Als de eerste afgeleide positief is, is de functie stijgend.

Als de tweede afgeleide positief is, dan is (wegens  $f''(x) = (f'(x))'$ ) de eerste afgeleide toenemend; de raaklijn aan de grafiek draait dus naar boven en de grafiek van  $f$  zelf is hol naar boven.

Als de tweede afgeleide negatief is, is de grafiek van de functie bol naar boven.

#### Schema.

$f''(x) > 0$ , dan  $f'(x)$  toenemend, en  $f(x)$  hol.

$f''(x) < 0$ , dan  $f'(x)$  afnemend, en  $f(x)$  bol.

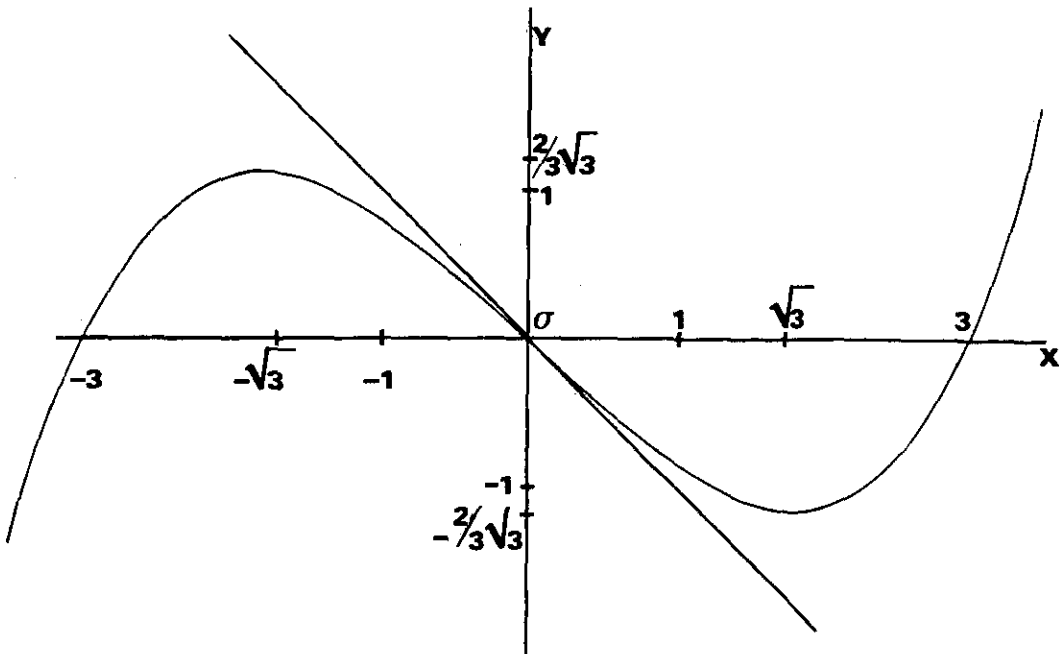
Als  $f''$  van teken wisselt in  $x = a$ , heeft  $f'$  een extreem in  $x = a$  en  $f$  zelf een buigpunt, dat is een punt waar de raaklijn de grafiek snijdt in die zin dat de punten van de grafiek links en rechts van  $x = a$  aan verschillende kanten van de raaklijn liggen.

Voorbeeld.  $f(x) = \frac{1}{9} x^3 - x$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^2 - 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{3} x.$$

Bij  $x = 0$  treedt een buigpunt op, voor  $x > 0$  is de functie hol, voor  $x < 0$  is hij bol. Verdere details: lokale extrema in  $x = \sqrt{3}$ ,  $x = -\sqrt{3}$  nulpunten in  $x = 0, -3, 3$ ; richting van de buigpuntsraaklijn:  $-1$ .



Het belang van de tweede afgeleide is dat deze een maat is voor het gekromd zijn van een grafiek.

We zullen dit nu in een meer expliciete vorm beschrijven.

Als we twee functies  $f(x)$  en  $g(x)$  beschouwen waarvoor geldt:

$$\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \end{cases}$$

dan betekent dat dat de beide functies in hun snijpunt bij  $x = a$  dezelfde richting hebben.

Bij iedere functie is er in ieder punt een rechte met dezelfde richting, nl. de raaklijn;

$$\text{de vergelijking hiervan is: } y = f(a) + (x-a) f'(a).$$

(De beschouwing is op triviale wijze uit te breiden voor verticale raaklijnen!)

We zullen zeggen dat de grafieken van twee functies  $f(x)$  en  $g(x)$  in  $x = a$  dezelfde kromming hebben indien:

$$\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \\ f''(a) = g''(a). \end{cases}$$

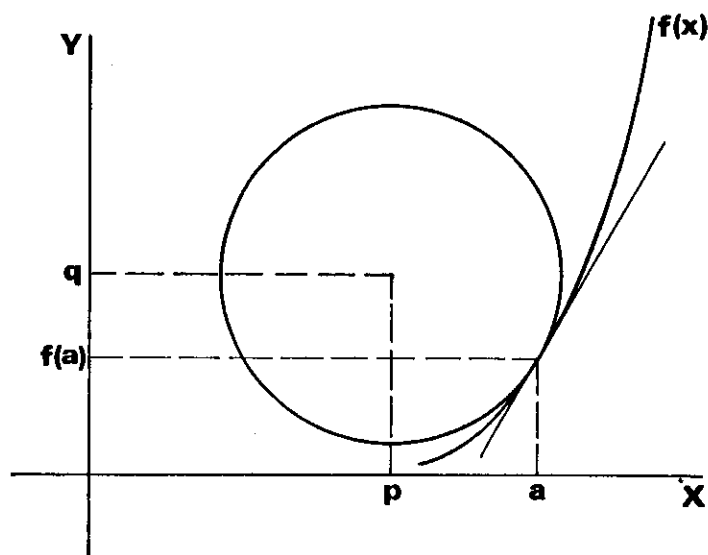
Bij nette functies is er in ieder punt een cirkel die dezelfde kromming heeft; (het zal duidelijk zijn dat een gedeelte van de cirkel in de buurt van het snijpunt steeds als grafiek van een functie te schrijven is, desnoods met verwisseling van de  $x$ - en  $y$ -coördinaat) deze cirkel heet de

kromtecirkel van  $f(x)$  in  $x = a$ .

De straal van deze cirkel heet de kromtestraal; het middelpunt heet het kromtemiddelpunt.

We zullen nu een formule afleiden voor de kromtestraal (de nu volgende berekening is tevens een bewijs voor het bestaan van de kromtecirkel!); gemakshalve nemen we aan dat  $f(x)$  in  $x = a$  een niet verticale raaklijn heeft.

Laat de kromtecirkel zijn  $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ . De opgave is dan  $p$ ,  $q$  en  $r$  te bepalen; in het bijzonder  $r$  te bepalen.



Omdat we verondersteld hebben dat  $f'(a) < \infty$  is, is de cirkel in de buurt van het punt  $(a, f(a))$  de grafiek van een functie  $y = g(x)$ .

In de buurt van  $x = a$  geldt dus:

$$(x-p)^2 + (g(x)-q)^2 = r^2; \text{ we differentiëren tweemaal.}$$

$$2(x-p) + 2(g(x)-q) g'(x) = 0;$$

$$2 + 2(g'(x))^2 + 2(g(x)-q) g''(x) = 0.$$

We willen nu voldoen aan: 
$$\begin{cases} g(a) = f(a) \\ g'(a) = f'(a) \\ g''(a) = f''(a) \end{cases}$$

d.w.z. dat  $p$ ,  $q$  en  $r$  moeten voldoen aan

$$(a-p)^2 + (f(a)-q)^2 = r^2$$

$$(a-p) + (f(a)-q) f'(a) = 0$$

$$1 + (f'(a))^2 + (f(a)-q) f''(a) = 0.$$

Als  $f''(a) \neq 0$  vinden we  $(f(a)-q) = -\frac{1+(f'(a))^2}{f''(a)}$

$$(a-p) = \frac{f'(a)(1+(f'(a))^2)}{f''(a)}$$

$$\text{en dus } r^2 = \frac{(1+(f'(a))^2)^3}{(f''(a))^2} \quad r = \frac{(1+(f'(a))^2)^{3/2}}{|f''(a)|}.$$

Als  $f''(a) = 0$ , zouden we vinden  $r = \infty$  het kromtemiddelpunt ligt dan "in het oneindige" en de raaklijn en de grafiek hebben dezelfde kromming.

Het getal  $\frac{1}{r} = \frac{|f''(a)|}{(1+(f'(a))^2)^{3/2}}$  heet ook wel de kromming van  $f(x)$  in  $x = a$ .

Als de kromme  $y = f(x)$  hol is ligt de kromtecirkel boven de kromme ( $f''(a) > 0$ ;  $f(a) < q$ ); bij een bolle kromme liggen de kromtecirkels beneden de kromme.

We kunnen het kromtemiddelpunt ook aldus vinden :

Neem de normaal op de kromme (= de normaal op de raaklijn) in  $(a, f(a))$  en ook in  $(a+h, f(a+h))$ . Laat  $M_h$  het snijpunt van beide normalen zijn. Het kromtemiddelpunt is nu  $\lim_{h \rightarrow 0} M_h$ ; (de limiet in de zin van de afstand in het

vlak; zie § 1.3; § 2.1.1).

We laten het aan de lezer over dit te verifiëren.

De kromming treedt op bij de beschrijving van buiging van balken. Als de doorbuiging klein is, kan men afschuiving verwaarlozen en de hypothese van Bernoulli aanvaarden dat een doorsnede loodrecht op de balkas na buiging nog vlak is en loodrecht op de doorgebogen balkas. Men probeert dan een uitdrukking te vinden voor de zg. elastische lijn (dit is de kromme die aangeeft de vorm na buiging van de vezel in balklengterichting die niet ten gevolge van de buiging verlengd of verkort is). Als  $y = y(x)$  de vergelijking van de elastische lijn is, dan leidt men in de mechanica af dat:

$$\frac{y''(x)}{(1+(y'(x))^2)^{3/2}} = A = \text{constante onafhankelijk van de plaats.}$$

Uit deze ingewikkelde differentiaalvergelijking kan men proberen  $y = y(x)$  op te lossen.

Veelal kan men volstaan met de benadering die ontstaat door:

$$y''(x) = A \text{ op te lossen.}$$

### 5.3. Differentiaalvergelijkingen (vervolg)

In de paragrafen 5.1 en 5.2 ontmoetten we reeds enkele voorbeelden van differentiaalvergelijkingen waarin ook hogere afgeleiden voorkwamen.

Een zeer belangrijke klasse van differentiaalvergelijkingen zijn de zg. lineaire differentiaalvergelijkingen, die geschreven kunnen worden als:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x),$$

waarbij de coëfficiënten  $a_1, \dots, a_n$  niet van  $x$  afhangen.  $n$  heet de orde van de differentiaalvergelijking. Onze kennis van de algebra is niet voldoende om de theorie van het oplossen van deze vergelijkingen afdoende te bespreken. We beperken ons thans tot de orde 2.

Vanwege het feit dat de meeste toepassingen processen beschrijven die in de tijd verlopen noemen we de onafhankelijk veranderlijke  $t$  in plaats van  $x$  en gebruiken we de flux notatie.

De vergelijking kan dan geschreven worden als:

$$(1) \quad \ddot{y} + 2a \dot{y} + by = f(t).$$

Vergelijkingen waarin  $f(t) \equiv 0$  heten homogeen.

$$(2) \quad \ddot{y} + 2a \dot{y} + by = 0$$

heet de bij (1) behorende homogene vergelijking.

We hebben nu de zeer belangrijke eigenschappen:

- a) Als  $y_1(t)$  en  $y_2(t)$  oplossingen zijn van (1) dan is  $y_1(t) - y_2(t)$  een oplossing van (2).
- b) Is  $y_1(t)$  een oplossing van (1) dan is elke oplossing van (1) te schrijven als  $y_1(t) + y_0(t)$ , waarbij  $y_0(t)$  een oplossing is van (2).
- c) Zijn  $y_1(t)$  en  $y_2(t)$  oplossingen van (2) dan is ook  $C y_1(t) + D y_2(t)$  een oplossing van (2), waarbij  $C$  en  $D$  willekeurige constanten zijn.



Op grond van a) en b) zullen we om de algemene oplossing van (1) te vinden, kunnen volstaan met het opsporen van de algemene oplossing van (2) en het zoeken van een (zg. particuliere) oplossing van (1).

We hebben intuïtief het idee dat de algemene oplossing van (2) twee niet door elkaar te vervangen constanten moet bevatten. Zonder dit te preciseren zien we m.b.v. c) dat we daarom klaar zijn met het oplossen van (2) als we twee niet in elkaar uit te drukken oplossingen  $y_1(t)$  en  $y_2(t)$  gevonden hebben.

De vergelijking  $\dot{y} + dy = 0$  heeft als oplossing  $y(t) = C e^{\lambda t}$ , waarbij  $\lambda + d = 0$ ; dit leidt ons er toe ook in het geval van (2) te proberen oplossingen te vinden die e-machten zijn.

Wil  $y = e^{\lambda t}$  een oplossing van (2) zijn dan moet:

$$(3) \quad \lambda^2 + 2a\lambda + b = 0.$$

(3) heet de bij (1) behorende karakteristieke vergelijking.

Of deze reële oplossingen heeft wordt bepaald door het teken van de discriminant  $\Delta := 4a^2 - 4b$ .

Stelling.

(i) Als  $a^2 > b$  dan heeft (2) als algemene oplossing

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

waarbij

$$\lambda_1, \lambda_2 = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$$

de wortels van (3) zijn.

(ii) Als  $a^2 = b$  dan heeft (2) als algemene oplossing

$$C_1 e^{-at} + C_2 t e^{-at},$$

waarbij  $-a$  de enige wortel van (3) is.

(iii) Als  $a^2 < b$  dan heeft (2) als algemene oplossing

$$e^{-at} (C_1 \sin \sqrt{b-a^2} t + C_2 \cos \sqrt{b-a^2} t).$$

We kunnen door differentiëren zonder moeite nagaan dat alles wat in de stelling een oplossing genoemd wordt het ook is; we merken op dat er steeds in de aangegeven oplossingen twee verschillende constanten voorkomen; we laten het bewijs dat we inderdaad alle oplossingen van (2) hebben achterwege.

Voor het vinden van een oplossing van de vergelijking (1), (de inhomogene vergelijking) zijn geen algemene regels te geven.

Men krijgt wel enige routine in het proberen van een goede gissing door het oplossen van vraagstukken.

We beperken ons hier tot enige voorbeelden die van groot belang zijn voor de toepassingen. Het is nl. zo dat vergelijking (1) de beschrijving is van een grote klasse van trillingen in mechanica en natuurkunde.

Beschouwen we een lichaam met massa  $m$ , dat een rechtlijnige beweging uitvoert onder werking van drie krachten:

- a) een elastische kracht, gericht naar een evenwichtstoestand,  $0$ , en evenredig met de uitwijking:  $-ey$  ( $e > 0$ );
- b) een wrijvingskracht, evenredig met de snelheid en tegengesteld gericht:  $-w \dot{y}$  ( $w > 0$ ),
- c) een uitwendige kracht:  $f(t)$ .

Op grond van de wet van Newton (kracht = massa  $\times$  versnelling) geldt nu:

$$m \ddot{y} = -w \dot{y} - e y + f(t);$$

$$\ddot{y} + \frac{w}{m} \dot{y} + \frac{e}{m} y = \frac{1}{m} f(t);$$

en dit is vergelijking (1) met  $a = \frac{w}{2m}$ ,  $b = \frac{e}{m}$  (dus  $a > 0$ ,  $b > 0$ ).

Ook het eerder besproken voorbeeld van een slinger wordt in goede benadering beschreven door een vergelijking van type (1) waarbij bovendien wrijving nog mede in rekening gebracht zou kunnen worden.

Is de uitwendige kracht  $f(t) \equiv 0$  dan spreken we van een vrije beweging; anders van een gedwongen; het getal  $a$  heet de dempingscoëfficiënt.

De vrije ongedempte beweging is dus de harmonische trilling (zuiver sinusvormige trilling) die we al in § 5.1 beschreven, want uit

$$\ddot{y} + by = 0 \quad b > 0$$

volgt:

$$y = C_1 \sin \sqrt{b} t + C_2 \cos \sqrt{b} t = C \sin(\sqrt{b} t + \varphi).$$

a bekijken enkele gevallen.

1) We beginnen met op te merken dat als (3) een of twee wortels heeft, deze negatief zijn (omdat in de fysische betekenis  $a > 0$ ,  $b > 0$  is).

De vrije beweging is dan aperiodiek en gaat naar nul omdat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-t} = 0.$$

Neem als voorbeeld  $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \sin t$ ;

homogene vergelijking  $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$ ;

karacteristieke vergelijking  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ ;

$$\text{wortels } \lambda = -1, \lambda = -2$$

algemene oplossing van de homogene vergelijking:

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}.$$

Om een particuliere oplossing te vinden proberen we  $\alpha$  en  $\beta$  zó te bepalen dat  $y_1(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t$  aan de inhomogene vergelijking voldoet:

$$\dot{y}_1 = \alpha \cos t - \beta \sin t;$$

$$\ddot{y}_1 = -\alpha \sin t - \beta \cos t;$$

$$\ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_1 = (-\alpha - 3\beta + 2\alpha) \sin t + (-\beta + 3\alpha + 2\beta) \cos t.$$

Om aan de vergelijking te voldoen moeten  $\alpha$  en  $\beta$  dus zo zijn dat

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta = 1 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$
$$\alpha = \frac{1}{10}, \beta = -\frac{3}{10}.$$

Als algemene oplossing van ons probleem vinden we

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{10} \sin t - \frac{3}{10} \cos t.$$

Elke functie die aan de vergelijking voldoet is dus te verkrijgen door een speciale keuze van  $C_1$  en  $C_2$ .

Om te weten welke de oplossing is van het probleem die we hebben moeten, moet meer gegeven zijn; bijv. de uitwijking en snelheid op het tijdstip  $t = 0$ :  $y(0)$  en  $y'(0)$  (we noemen dit de beginvoorwaarden).

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 - \frac{3}{10} \\ y'(0) &= -C_1 - 2C_2 + \frac{1}{10} \end{aligned} \right\} \text{ hieruit kunnen we } C_1 \text{ en } C_2 \text{ oplossen} \\ \text{en uitdrukken in } y(0) \text{ en } y'(0).$$

Is bijv.  $y(0) = y'(0) = 0$  dan is  $C_1 = \frac{1}{2}$ ,  $C_2 = -\frac{1}{5}$ .

Omdat  $\frac{1}{10} \sin t - \frac{3}{10} \cos t = \frac{1}{10} \sqrt{10} \sin(t-\varphi)$ , waarbij  $\cos \varphi = \frac{1}{10} \sqrt{10}$ ,  $\sin \varphi = +\frac{3}{10} \sqrt{10}$  zien we dat de beweging voor grote  $t$  ongeveer periodiek is met dezelfde periode als de uitwendige kracht en een fasevertraging van  $\varphi \approx 71^\circ 24'$ .

2) Bekijken we nu een geval waar de karakteristieke vergelijking geen reële wortels heeft. We nemen weer een periodieke sinusvormige uitwendige kracht.

In  $\ddot{y} + 2a \dot{y} + by = A \sin(\omega t)$  is dan  $b-a^2 > 0$ , noem dit  $p^2$  ( $p > 0$ ); de algemene oplossing van de homogene vergelijking is dan:

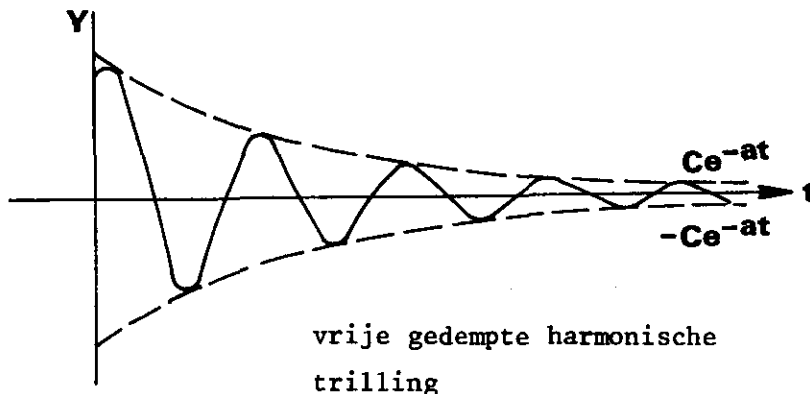
$$y(t) = C_1 e^{-at} \sin pt + C_2 e^{-at} \cos pt$$

en dit kunnen we schrijven als

$$y(t) = C e^{-at} \sin(pt + \varphi),$$

een harmonische trilling met periode  $\frac{2\pi}{p}$  waarvan de amplitude  $C e^{-at}$  exponentieel afneemt.

We schetsen de uitwijking van deze zg. vrije gedempte harmonische trilling.



We nemen aan dat  $a \neq 0$  (als  $a = 0$  is er geen demping en dan moeten we iets anders doen dan wat volgt, om een particuliere oplossing te vinden in het geval dat  $\omega = p$ ).

We proberen nu  $\alpha$  en  $\beta$  zo te bepalen dat  $y_1(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t$  aan de inhomogene vergelijking voldoet; beter nog proberen we  $B$  en  $\delta$  (met  $B > 0$  en  $-\pi \leq \delta < \pi$ ) te vinden zó dat  $y_1(t) = B \sin(\omega t + \delta)$  aan de vergelijking voldoet.

Dan moet:

$$\begin{aligned}
-B\omega^2 \sin(\omega t + \delta) + 2aB\omega \cos(\omega t + \delta) + b B \sin(\omega t + \delta) &= A \sin \omega t \\
B(b-\omega^2)(\sin\omega t \cos\delta + \cos\omega t \sin \delta) + 2aB\omega(\cos\omega t \cos\delta - \sin\omega t \sin\delta) &= \\
&= A \sin\omega t.
\end{aligned}$$

De coëfficiënt van  $\cos\omega t$  in het linkerlid moet = 0, die van  $\sin\omega t$  moet = A zijn; we vinden:

$$\sin \delta = \frac{-2a\omega}{\sqrt{(b-\omega^2)^2 + 4a^2\omega^2}} \qquad \cos \delta = \frac{b-\omega^2}{\sqrt{(b-\omega^2)^2 + 4a^2\omega^2}}$$

waaruit  $\delta$  te berekenen is; (merk op dat  $\sin \delta < 0$  dus  $-\pi < \delta < 0$ ; de fase blijft achter) en

$$B = \frac{A}{\sqrt{(b-\omega^2)^2 + 4a^2\omega^2}}.$$

In de algemene oplossing:

$$y(t) = B \sin(\omega t + \delta) + C e^{-at} \sin(pt + \varphi)$$

zijn C en  $\varphi$  willekeurige constanten. Omdat  $a > 0$  gaat  $e^{-at}$  naar 0. Voor grote waarde van t is de oplossing dus ongeveer:

$$y(t) = B \sin(\omega t + \delta).$$

Een zuiver sinusvormige trilling met dezelfde frequentie als de uitwendige kracht en een achterstand in fase.

We bekijken de amplitudo van de gedwongen beweging:  $B = A\{(b-\omega^2)^2 + 4a^2\omega^2\}^{-\frac{1}{2}}$ . Deze is afhankelijk van  $\omega$ ; we zoeken voor welke waarde van  $\omega$  de B maximaal is; daartoe moet  $(b-\omega^2)^2 + 4a^2\omega^2$  minimaal zijn; dit is het geval voor  $\omega^2 = b-2a^2$ . De maximale B is dan:

$$B_{\max} = \frac{A}{2ap}.$$

Als de demping gering is (a klein) kan deze zeer groot zijn; men spreekt van resonantie tussen uitwendige kracht en het trillende systeem.

Indien de demping afwezig is ( $a = 0$ ) wordt resonantie zeker catastrofaal, omdat de amplitudo van de gedwongen beweging dan naar oneindig nadert.

Onze oplossingsmethode ging uit van  $a \neq 0$ , daarom bekijken we dit geval apart in het geval  $b = \omega^2$ .

$$\ddot{y} + \omega^2 y = A \sin \omega t.$$

We proberen nu  $y_1(t) = Bt \sin(\omega t + \delta)$  en vinden als oplossing:

$$y = -\frac{A}{2\omega} t \cos \omega t.$$

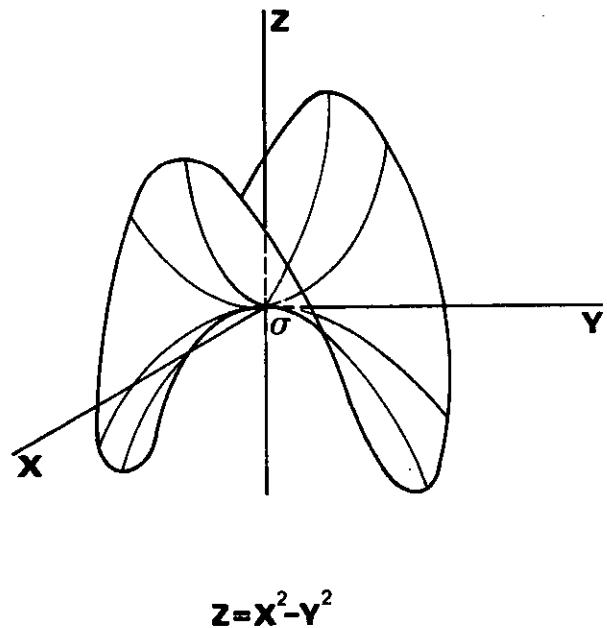
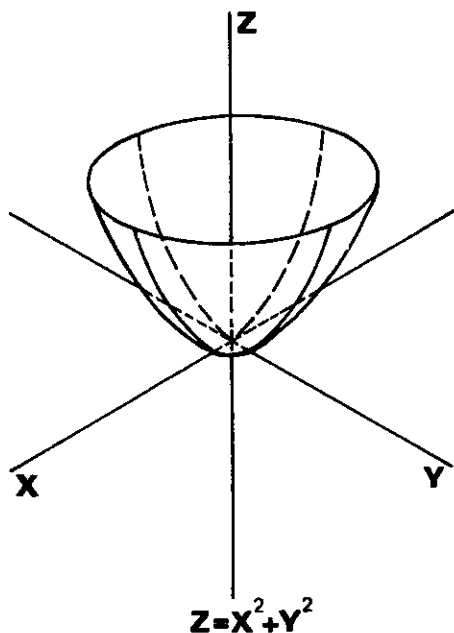
Hoofdstuk 6. Functies van meer dan één veranderlijke.

6.1. Hoogtekaart, continuïteit.

Hoewel we in hoofdstuk 2 limieten en continuïteit bestudeerden in de algemene situatie van metrische ruimten, hebben we ons vanaf hoofdstuk 3 beperkt tot reële functies van één reële veranderlijke. We zullen in dit en het volgende hoofdstuk de theorie uitbreiden tot reële functies van meer reële veranderlijken.

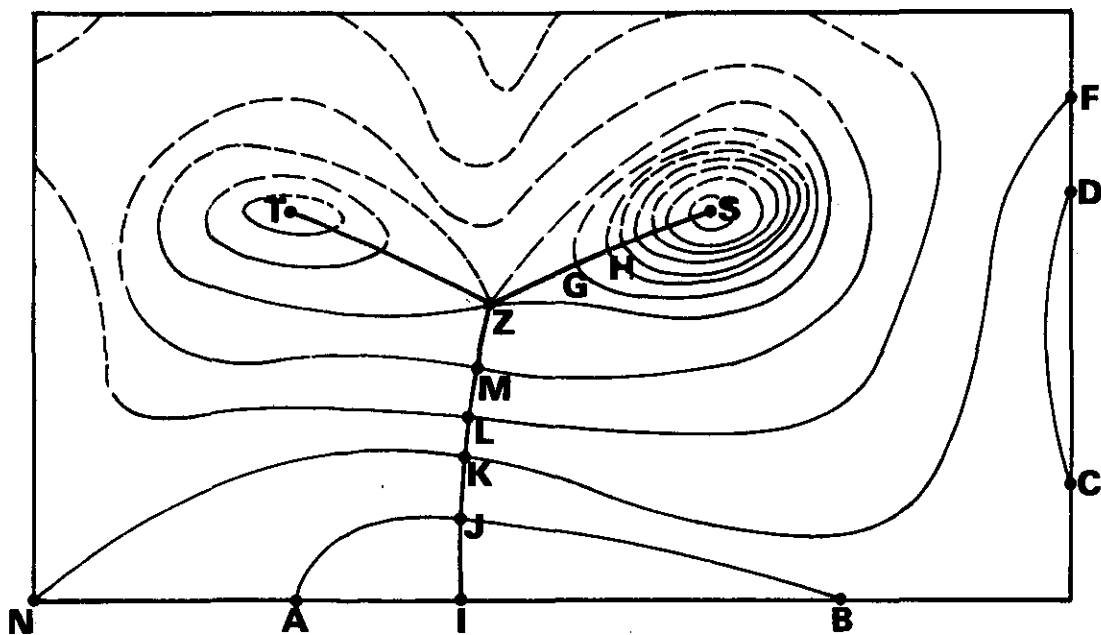
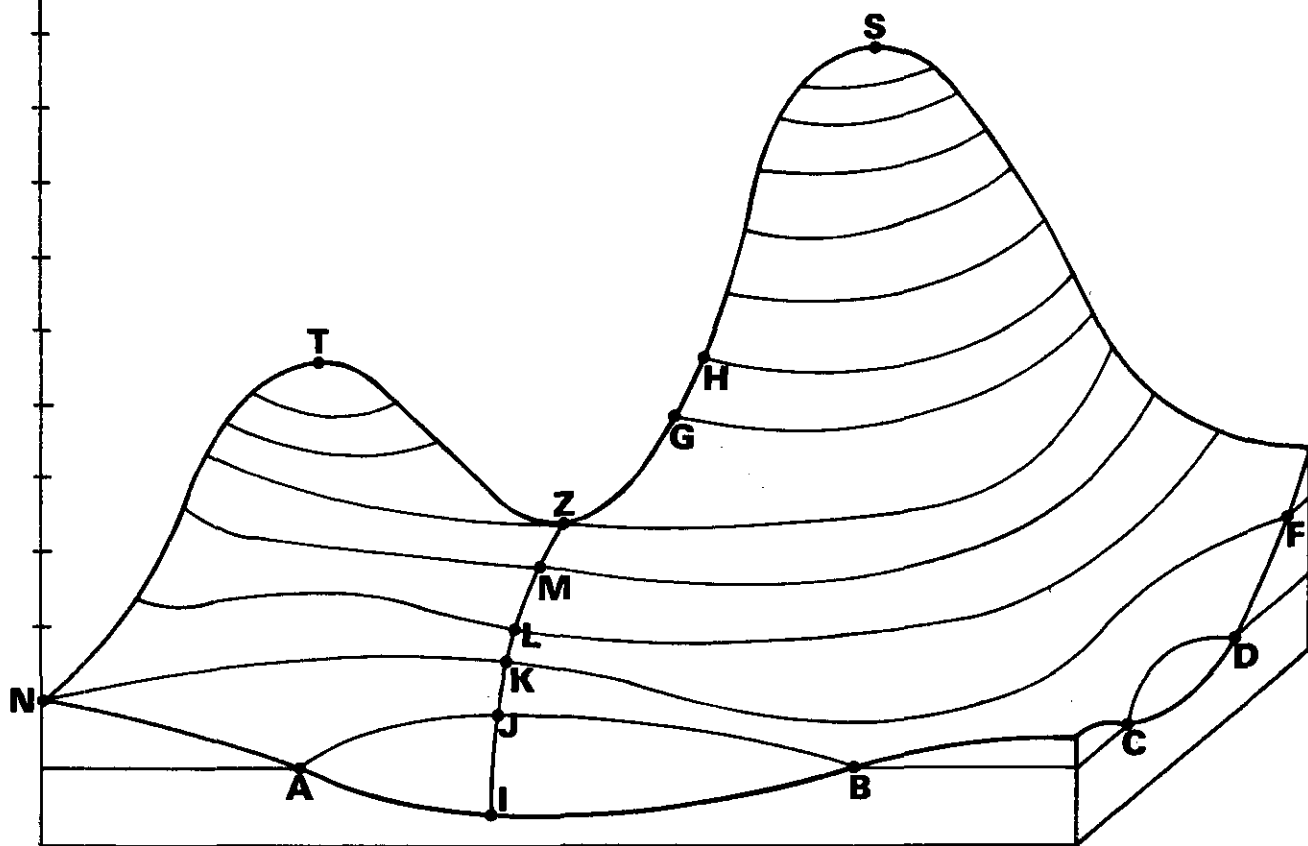
Om de notatie simpel te houden zullen we ons bijna steeds beperken tot functies van twee veranderlijken;  $z = f(x,y)$ ; bij de overgang naar drie of meer veranderlijken zijn geen essentieel andere begrippen nodig.

Als men van een functie  $z = f(x,y)$  een "grafiek" zou willen tekenen dan wordt dat een oppervlak in  $\mathbb{R}^3$

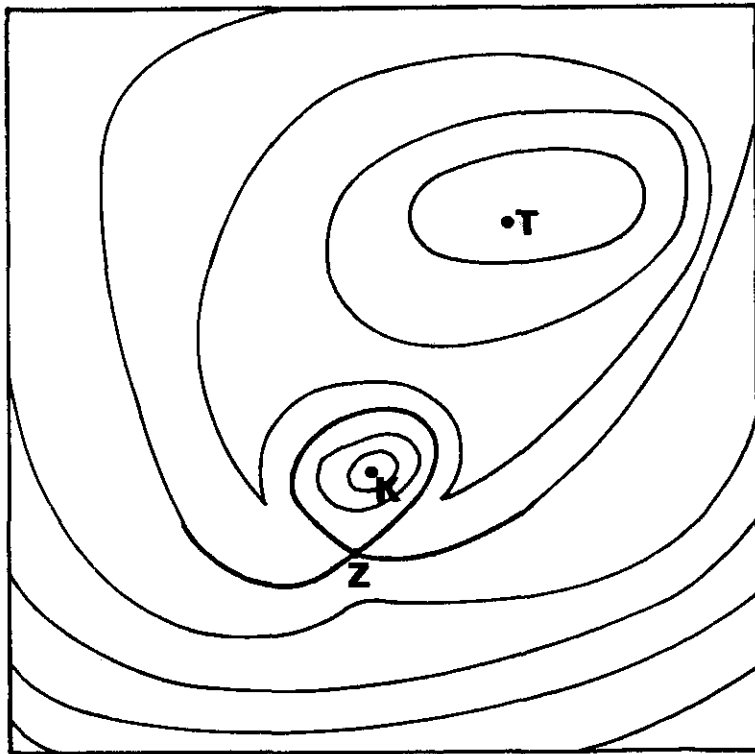
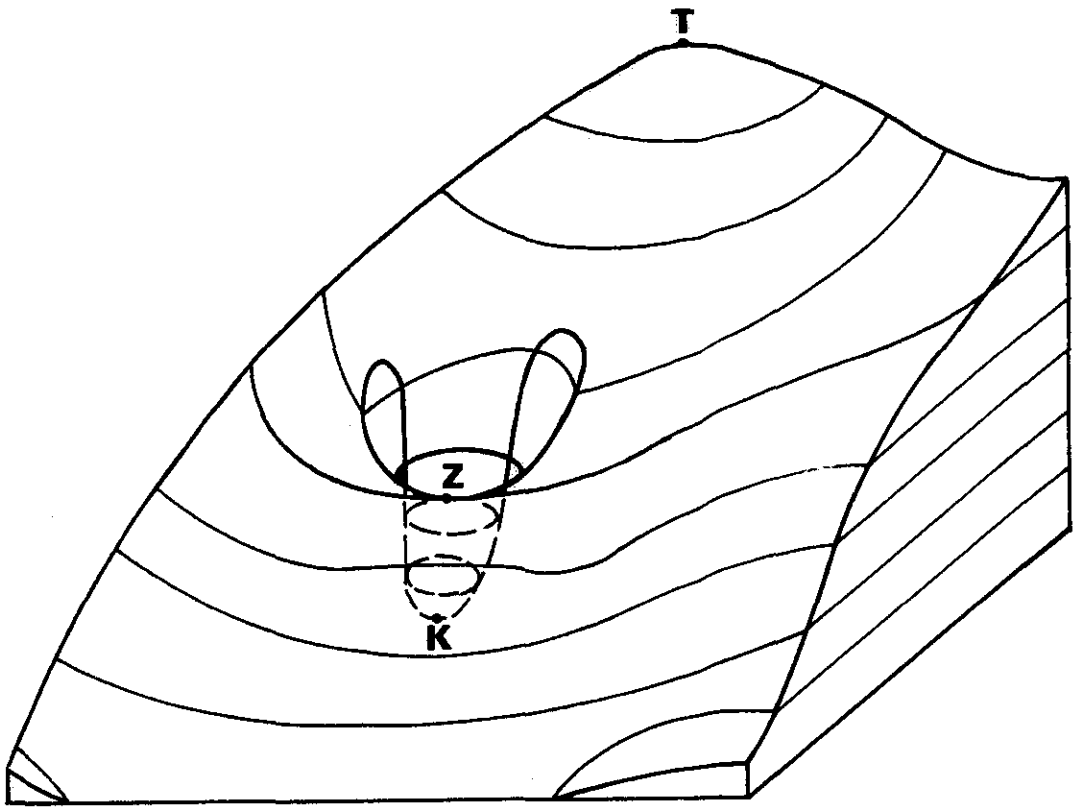


Vanwege het lastige tekenen, maken we meestal een zg. hoogtekaart, d.w.z. we tekenen in het platte vlak een aantal krommen, waarop de functie constant is.

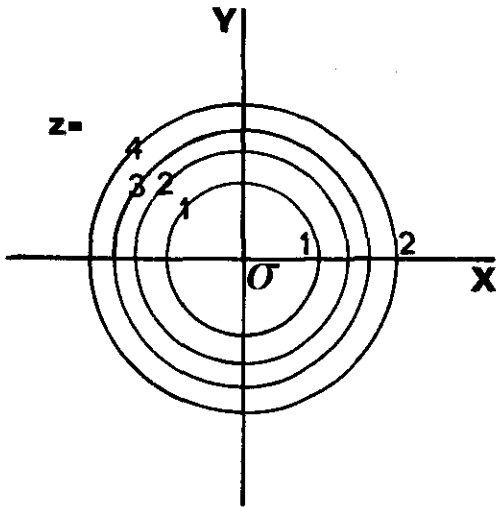
Deze wijze van voorstellen is volledig analoog aan wat in de topografie gebruikelijk is.



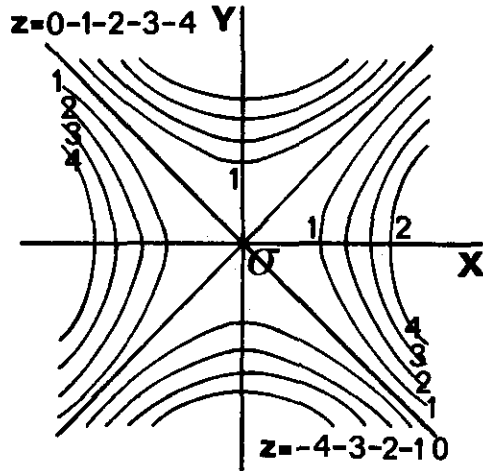




Voor de voorbeelden waarvan we de grafieken wel getekend hebben zien de hoogtekarten er aldus uit.



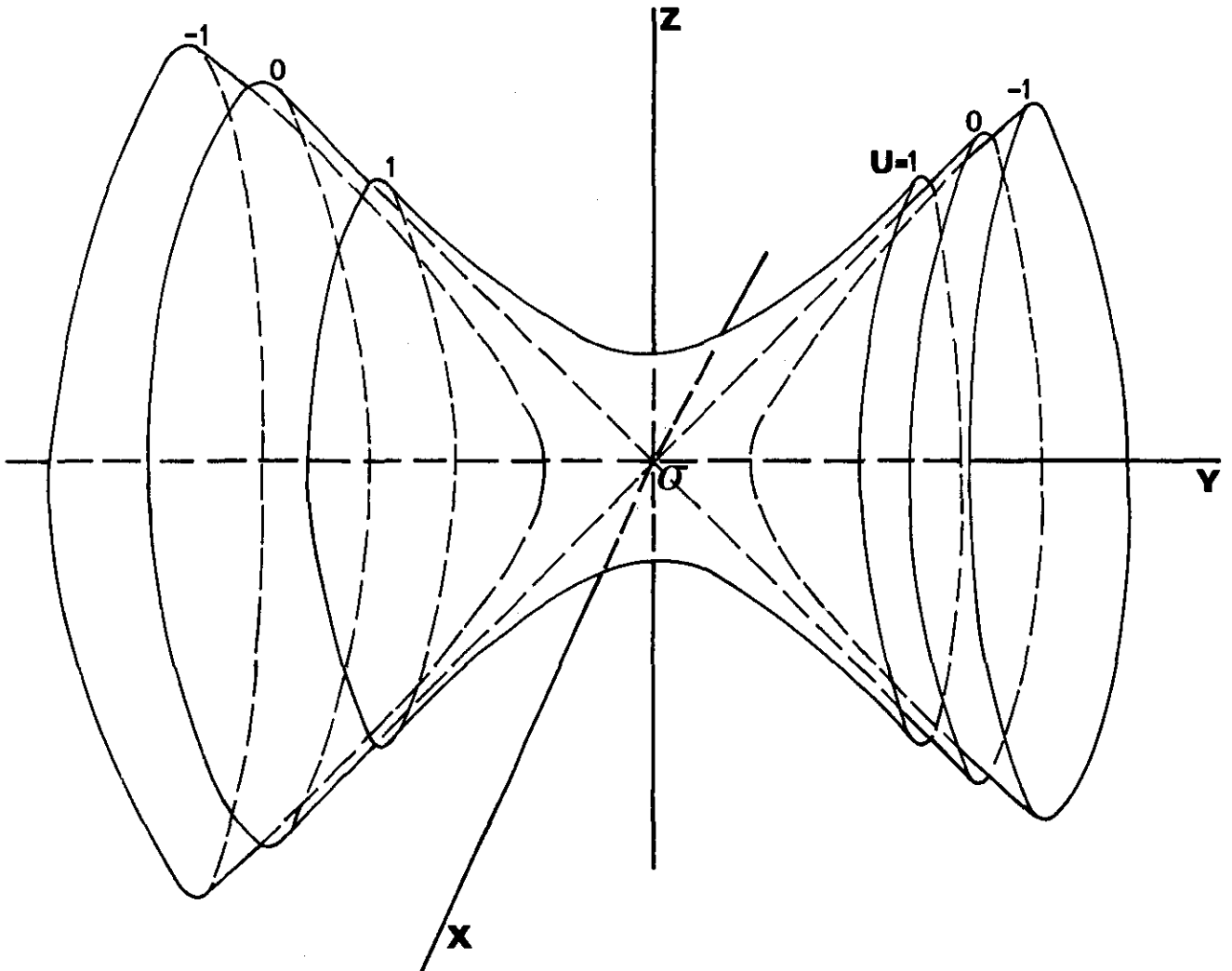
$$z = x^2 + y^2$$



$$z = x^2 - y^2$$

Analoog aan de hoogtelijnen op een hoogtekart, zou men  $u = f(x, y, z)$  kunnen voorstellen door een stelsel van niveaувlakken.

Voorbeeld:  $u = x^2 - y^2 + z^2$ .



Omdat de afstanden  $d_1$  en  $d_2$  in  $\mathbb{R}^2$  van blz. 10 dezelfde open verzamelingen opleverden kunnen we nu de definitie van continuïteit zoals op blz. 20 gegeven naar believen op de volgende beide wijzen interpreteren:

$f(x,y)$  is continu in het punt  $(a,b)$  indien er bij elke  $\epsilon > 0$  bestaat een  $\delta > 0$  zodanig dat:

$$|f(x,y) - f(a,b)| < \epsilon \text{ voor alle } (x,y) \text{ uit het definitiegebied met}$$

$$\sqrt{|x-a|^2 + |y-b|^2} < \delta$$

of:

dezelfde bewering maar met  $\sqrt{|x-a|^2 + |y-b|^2} < \delta$  vervangen door:

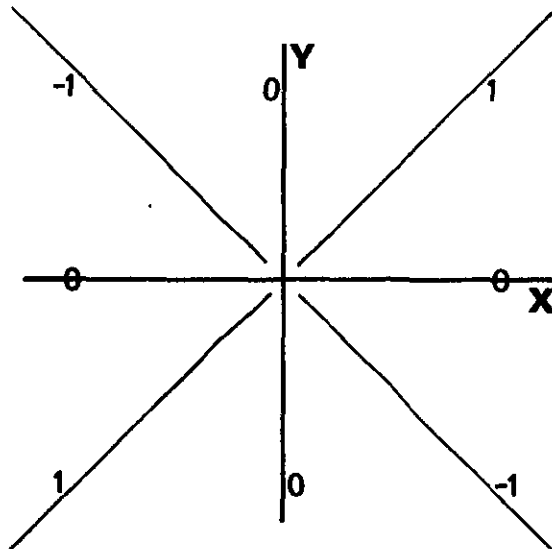
$$|x-a| < \delta \text{ en } |y-b| < \delta.$$

De normale eigenschappen (som van continue functies is continu, e.d.) blijven geldig. Het is belangrijk dat men discontinuïteiten leert vinden uit de hoogtekaart.

Een voorbeeld:

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

De functie is voor alle  $x$  en  $y$  gedefinieerd. We tekenen de hoogtekaart (althans iets er van)



In elke omgeving van  $\mathcal{O}$  komt dus zowel de waarde 1 als de waarde -1 voor. De functie is in  $\mathcal{O}$  niet continu !

Alle andere hoogtelijnen zijn rechten met vergelijkingen  $y=αx$ , steeds met uitzondering van het punt  $(0,0)$ ; de waarde op zo'n rechte is  $\frac{2α}{1+α}$  (een getal tussen  $-1$  en  $1$ !).

Daarentegen is de functie

$$\begin{cases} g(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ g(0,0) = 0 & \end{cases}$$

wel continu in  $(0,0)$ ; immers:

$$|g(x,y) - g(0,0)| = \left| \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |x y| \leq |x y|.$$

In termen van het vorige voorbeeld kunnen we ook zeggen:

$$|g(x,y) - g(0,0)| = \left| \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right| = \frac{1}{2}x^2 |f(x,y)| \text{ en}$$

we zagen uit de hoogtekaart van  $f$  dat  $f$  begrensd is ( $-1 \leq f(x,y) \leq 1$ !).

### 6.2. Differentieerbaarheid van functies van twee veranderlijken

Meetkundig zal differentieerbaarheid van  $f(x,y)$  in het punt  $(a,b)$  betekenen dat het oppervlak  $z = f(x,y)$  in het punt  $(a,b, f(a,b))$  een niet-verticaal raakvlak heeft. We generaliseren de karakterisering van differentieerbaarheid zoals gegeven op blz. 25.

Definitie. Zij  $f(x,y)$  gedefinieerd in een omgeving van  $(a,b)$ .

$f$  is differentieerbaar in  $(a,b)$  indien er bestaan getallen  $A$  en  $B$  en een functie  $\epsilon(h,k)$  gedefinieerd voor  $(h,k) \neq (0,0)$  zodanig dat:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2} \epsilon(h,k)$$

en

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \epsilon(h,k) = 0.$$

Hierbij moet  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)}$  begrepen worden in de zin van blz. 16.

Om de betekenis te achterhalen van de  $A$  en  $B$  in deze definitie nemen we  $k = 0$ , en daarna  $h = 0$ .

Met  $k = 0$  volgt er uit

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h};$$

met  $h \neq 0$

$$B = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k},$$

d.w.z. A is de afgeleide van de functie  $f(x, b)$  (omdat  $b$  vast is, is dit een functie van  $x$  alleen) in  $x = a$ , B is de afgeleide van  $f(a, y)$  in  $y = b$ .

We noemen deze afgeleiden waarbij slechts één van de argumenten varieert partiële afgeleiden. We gebruiken de notaties:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x} f(a, b) =: \frac{\partial f}{\partial x} (a, b) =: f_x(a, b);$$

evenzo

$$\frac{\partial f}{\partial y} f(a, b) := \frac{\partial f}{\partial y} (a, b) := f_y(a, b).$$

De meetkundige betekenis van partiële afgeleiden blijkt uit de volgende beschouwing:

$z = f(x, y)$  stelt een oppervlak voor dat gaat door  $P = (a, b, f(a, b))$ ; als we dit doorsnijden met het vlak  $y = b$  is de doorsnijdingsfiguur een kromme;  $f_x(a, b)$  is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan deze kromme in  $P$  (en uiteraard in het vlak  $y = b$ ).

Evenzo is  $f_y(a, b)$  de raaklijnrichting in  $P$  van de doorsnijdingskromme van vlak  $x = a$  met het oppervlak  $z = f(x, y)$ .

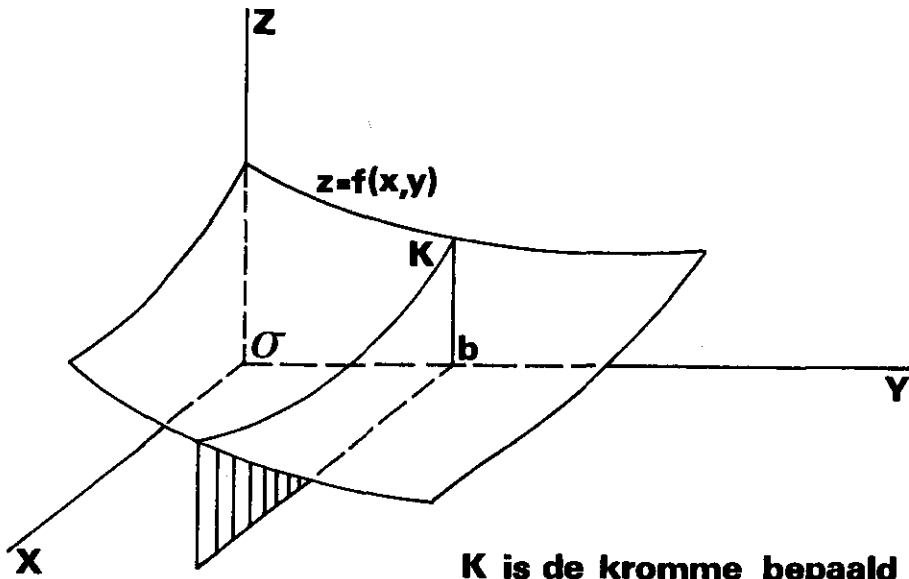
Eveneens ziet men meetkundig dat de vergelijking van het vlak door beide raaklijnen, dat tevens het raakvlak in  $P$  aan het oppervlak is, als tenminste het oppervlak in  $P$  een raakvlak heeft, als vergelijking heeft:

$$z - f(a, b) = f_x(a, b) (x-a) + f_y(a, b) (y-b). \quad (1)$$

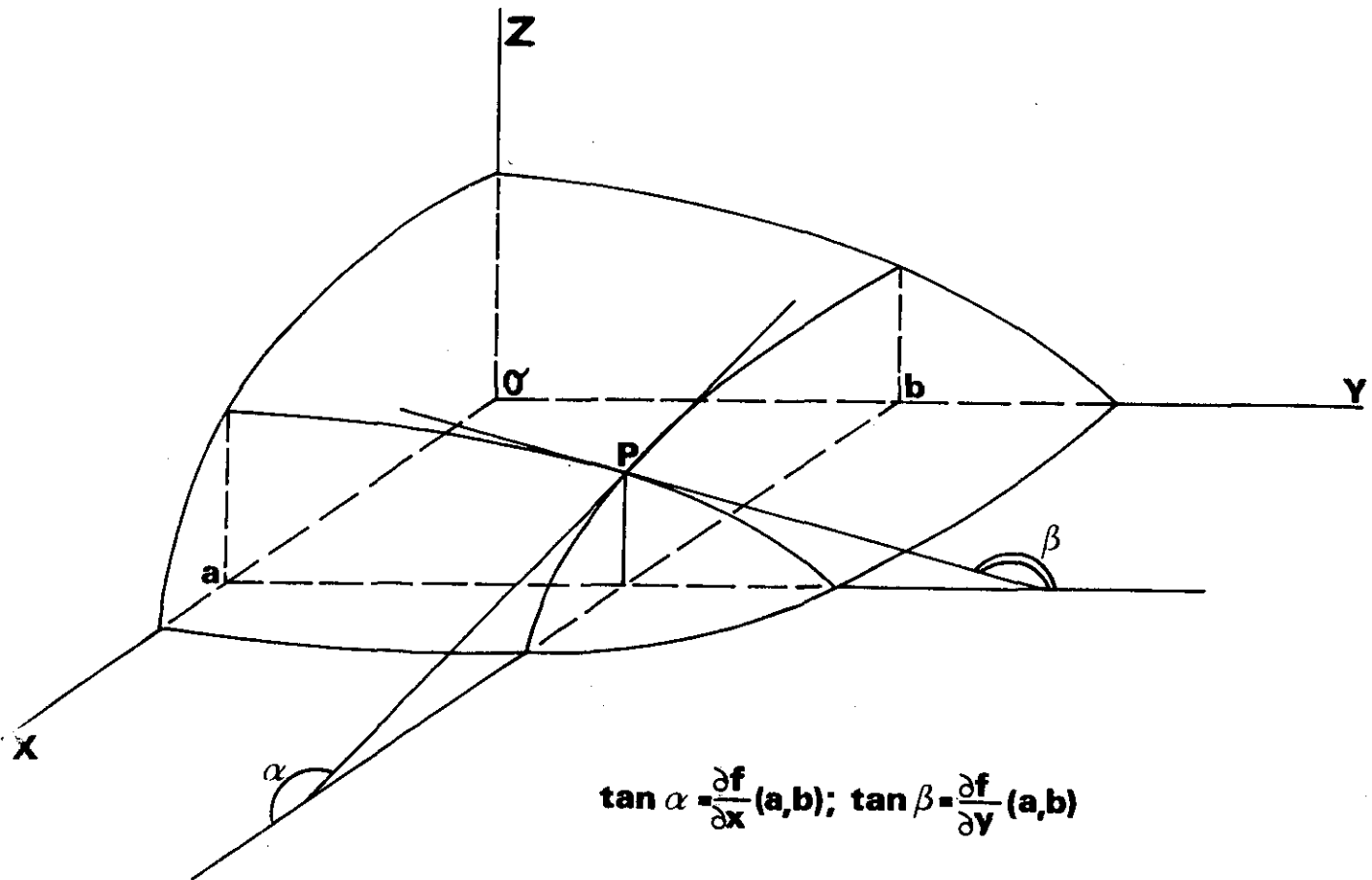
Zo zien we dat differentieerbaarheid inhoudt dat de functiewaarden in de buurt van  $(a, b)$  "goed" benaderd worden door de waarden van een eerste graadsfunctie.

Elke rechte door  $P = (a, b, f(a, b))$  in het vlak (1) is een raaklijn aan het oppervlak. Als  $S = (a+h, b+k, f(a+h, b+k))$  en  $Q = (a+h, b+k, f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k)$  dan is  $Q$  in (1) en  $S$  op het oppervlak. Het verschil van de tangenten van de hoeken die  $PS$  en  $PQ$  met het  $xy$ -vlak maken is  $|\epsilon(h, k)|$ . Omdat dit naar 0 nadert als  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , raakt  $PQ$  aan het oppervlak.

De gehele situatie is getekend in de volgende figuren.



K is de kromme bepaald door:  $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=b \end{cases}$



$$\tan \alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b); \quad \tan \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

Als we na partiële differentiatie het punt  $(a,b)$  laten variëren krijgen we functies van  $x$  en  $y$ :  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ;  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ , meestal kortweg  $f_x$ ,  $f_y$  of  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  genoteerd.

Het berekenen van partiële afgeleiden gaat geheel met de differentieertechniek die we reeds kennen; we beschouwen alle veranderlijken behalve die waarnaar gedifferentieerd wordt als constanten.

Voorbeeld.

$$f(x,y) = \log(1+x^2+y^4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2+y^4} \cdot 2x \qquad f_x(1,1) = 2/3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y^3}{1+x^2+y^4} \qquad f_y(1,1) = 4/3.$$

En:

$$f(1+h, 1+k) - f(1,1) \approx \frac{2}{3} h + \frac{4}{3} k .$$

(Deze laatste uitdrukking  $(\frac{2}{3} h + \frac{4}{3} k)$  wordt wel de totale differentiaal van  $f$  in  $(1,1)$  genoemd; het is een functie van twee veranderlijken, nl.  $h$  en  $k$ .)

Opmerkingen.

1. Evenals op blz. 25 volgt uit de definitie van differentieerbaarheid in  $(a,b)$  niet alleen het bestaan van de partiële afgeleiden in  $(a,b)$ , maar ook dat  $f$  in  $(a,b)$  continu is.

Wees er op bedacht dat uit het bestaan van partiële afgeleiden nog niet volgt dat  $f$  differentieerbaar is. Voor het reeds eerder bekeken voorbeeld:

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad (x,y) \neq (0,0); \quad f(0,0) = 0$$

geldt:

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0, \text{ doch } f \text{ is in } (0,0) \text{ niet eens continu,}$$

laat staan differentieerbaar.

2. Partiële afgeleiden zijn in het algemeen weer functies van  $x$  en  $y$ ; deze kunnen vaak zelf weer partieel gedifferentieerd worden. We bekijken alleen de notaties:

Als we hebben  $f(x,y)$  met eerste partiële afgeleiden:  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ;  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$  dan

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} :=: f_{xx}(x,y) :=: f_{xx} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} =: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} :=: f_{xy}(x,y) :=: f_{xy} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} :=: f_{yx}(x,y) :=: f_{yx} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} =: \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} :=: f_{yy}(x,y) :=: f_{yy} .$$

Als de tweede partiële afgeleiden continu zijn geldt steeds dat  $f_{xy} = f_{yx}$  (het bewijs laten we achterwege!) zodat de tweede partiële afgeleiden onafhankelijk zijn van de volgorde waarin de differentiaties worden uitgevoerd.

Met het voorbeeld:  $f(x,y) = \log(1+x^2+y^4)$  vinden we:

$$f_{xx} = \frac{2(1-x^2+y^4)}{(1+x^2+y^4)^2} ; f_{xy} = f_{yx} = \frac{-8xy^3}{(1+x^2+y^4)^2} ;$$

$$f_{yy} = \frac{12y^2(1+x^2)-4y^6}{(1+x^2+y^4)^2} .$$

$$\text{Dus: } f_{xx}(1,1) = \frac{2}{9} ; f_{xy}(1,1) = f_{yx}(1,1) = -\frac{8}{9} ; f_{yy}(1,1) = \frac{20}{9} .$$

3. Evenals in § 5.1 kunnen we naast de benadering van "functie door raakvlak" nl.:

$$f(x,y) \approx f(a,b) + (x-a) f_x(a,b) + (y-b) f_y(a,b),$$

een betere benadering in de buurt van  $(a,b)$  vinden door als benaderende functie er een te nemen die niet alleen de waarde en eerste partiële afgeleiden met  $f$  gemeen heeft, maar waarvan ook alle tweede partiële afgeleiden met die van  $f$  overeenstemmen. We krijgen dan (als  $f_{yx} = f_{xy}$ ):

$$f(x,y) \approx f(a,b) + (x-a) f_x(a,b) + (y-b) f_y(a,b) + \\ + \frac{1}{2}(x-a)^2 f_{xx}(a,b) + (x-a)(y-b) f_{xy}(a,b) + \frac{1}{2}(y-b)^2 f_{yy}(a,b).$$



4. Zonder de (overigens standaard-) bewijzen uit te schrijven vermelden we nog enige toepassingen van de kettingregel:

Als  $z = f(x,y)$ ;  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  dan is  $z = f(\varphi(t), \psi(t))$  ook een functie van  $t$  :

Er geldt:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = f_x \cdot \dot{x} + f_y \cdot \dot{y} .$$

Is bijvoorbeeld  $z = xy$  en is  $x = x(t)$ ;  $y = y(t)$  dan is

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} (x(t) y(t)) = \dot{x}(t) y(t) + x(t) \dot{y}(t) . \text{ (Zie blz. 27.)}$$

Een ander voorbeeld laat ons het belang zien van duidelijk onderscheid in de notaties:  $\frac{dz}{dt}$  en  $\frac{\partial z}{\partial t}$  :

Door  $z = x+y^2$ ,  $y = \log x$  is  $z$  zowel gegeven als functie van  $x$  en  $y$ , als ook als functie van  $x$  (nl.  $z = x+(\log x)^2$ ). Er geldt nu:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{2 \log x}{x} .$$

Een ander gebruik van de kettingregel is het volgende:

Als  $z = f(x,y)$ ;  $x = \varphi(u,v)$ ,  $y = \psi(u,v)$  dan is  $z = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$  dus ook een functie van  $u$  en  $v$ .

Nu geldt:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} ; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

in andere notatie:

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u ; \quad z_v = z_x x_v + z_y y_v .$$

Als voorbeeld nemen we er een waarin de  $x$  en  $y$  zeer bekende functies zijn van twee veranderlijken die  $r$  en  $\varphi$  heten (zie blz. 98).

Als  $z = f(x,y)$ ;  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , dan is

$$\frac{\partial z}{\partial r} = f_x \cdot \cos \varphi + f_y \cdot \sin \varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = - f_x \cdot r \cdot \sin \varphi + f_y \cdot r \cdot \cos \varphi .$$

5. Zonder enige essentieel nieuwe ideeën te introduceren is de voorafgaande theorie uit te breiden tot functies van 3 of meer veranderlijken. Veel in de praktijk voorkomende fysische problemen bevatten vier veranderlijken, waarvan drie de coördinaten in de ruimte,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , zijn en de vierde de tijd,  $t$ . In het algemeen zal men proberen, bijvoorbeeld door het gebruiken van symmetrie-argumenten, het aantal veranderlijken in een probleem zo klein mogelijk te laten zijn (zie § 7.2).
6. Een toepassing van het partieel differentiëren is het differentiëren van zg. impliciet gegeven functies (dat we overigens zonder het te vermelden in § 5.2 al gedaan hebben).

Door een vergelijking  $F(x,y) = 0$  kan voor sommige waarden  $y$  als functie van  $x$  beschouwd worden. Zo zijn door  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  de functies  $y_1(x) = \sqrt{1-x^2}$  en  $y_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$  bepaald (beide op  $[-1,1]$ ), terwijl de vereniging van de grafieken van  $y_1(x)$  en  $y_2(x)$  de verzameling is van alle punten die aan  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  voldoen. We zeggen dat de functies  $y_1(x)$  en  $y_2(x)$  door  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  impliciet gegeven zijn. Vaak is het handig over de afgeleiden van dergelijke impliciet gegeven functies te beschikken zonder ze eerst expliciet te maken (d.w.z. zonder ze te schrijven als  $y_1(x) = \dots$  enz.). Dit differentiëren van impliciete functies is niets anders dan het toepassen van de kettingregel op

$$F(x, y(x)) = 0.$$

$$\text{We krijgen: } \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'(x) = 0.$$

Uit  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  volgt:  $2x + 2y y' = 0$  dus  $y' = -x/y$ . (Controleer dat  $y_1(x)$  en  $y_2(x)$  hieraan voldoen op  $<-1, 1>$ !).

We bespreken nog een voorbeeld:  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ .

We proberen te vinden de punten op de kromme waarvan dit de vergelijking is waar de raaklijn horizontaal is:

$$\text{Daar } 3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0, \text{ is}$$

$$y' = \frac{y-x^2}{y^2-x}.$$

Horizontale raaklijnen kunnen dus optreden als  $y = x^2$ , d.w.z. in verband met de oorspronkelijke vergelijking als  $x^6 = 2x^3$  dus voor  $x = 0$  en  $x = \sqrt[3]{2}$ . Het punt  $(0,0)$  is een bijzonder punt omdat daar ook  $y^2 - x = 0$ .

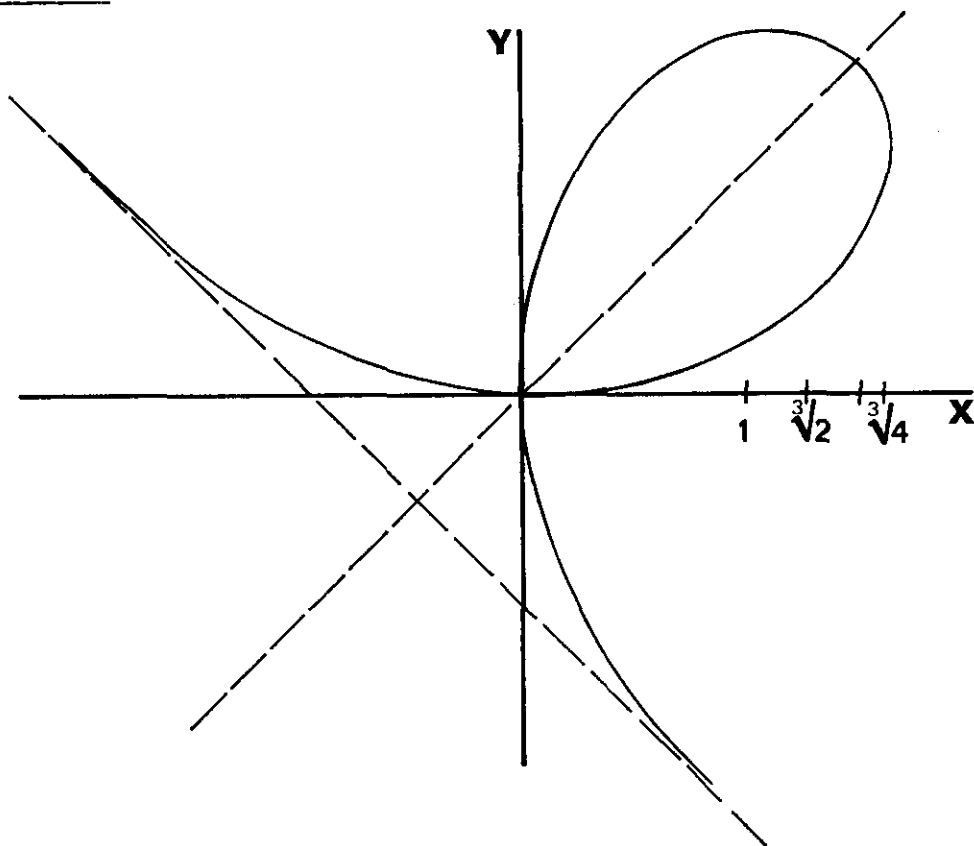
Het andere punt is  $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ .

We merken op dat er symmetrie is, d.w.z. als kanshebbers voor verticale raaklijnen vinden we weer  $(0,0)$  en ook  $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ . Om de grafiek te kunnen tekenen gebruiken we deze symmetrie en snijden de kromme met lijnen loodrecht op de symmetrie-as:  $y = -x+p$ .

Er komt:  $x^2(3p+3) - 3xp(p+1) + p^3 = 0$ . Voor  $p = -1$  is er geen snijpunt, voor  $p = 0$  is  $(0,0)$  een dubbel snijpunt terwijl uit de discriminant:

$3p^2(p+1)(3-p)$  blijkt dat er slechts snijpunten optreden voor  $-1 < p \leq 3$ .

De grafiek is nu na enig gepuzzel te tekenen; de kromme heet Folium van Descartes.



De besproken methode van het differentiëren van impliciet gegeven functies kan uitgebreid worden naar meer veranderlijken en meer vergelijkingen.

Zo kan men zich door  $F(x,y,z) = 0$ ,  $z$  gegeven denken als functie van  $x$  en  $y$ ; de partiële afgeleiden van  $z$  zijn dan te berekenen uit:

$$F_x + F_z \cdot z_x = 0; \quad F_y + F_z \cdot z_y = 0.$$

Uit:

$$x - e^y \sin z = 0 \text{ volgt: } 1 - e^y \cos z \cdot z_x = 0,$$

dus

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^y \cos z} \quad \text{etc.}$$

Als aanduiding van de uitbreiding naar meer vergelijkingen merken we op dat men door

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

z en y beide als functies van x kan beschouwen; dan is

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

een stelsel vergelijkingen voor y' en z'.

### 6.3. Toepassingen van partiële differentiëren

In hoofdstuk 4 bespraken we toepassingen van het differentiëren van functies van een veranderlijke. Als toepassingen van het differentiëren van functies van meer veranderlijken vermelden we dezelfde, nl.: differentiaalvergelijkingen en extremumbepalingen.

Differentiaalvergelijkingen met partiële afgeleiden, zg. partiële differentiaalvergelijkingen zijn voor de toegepaste wiskunde van het allergrootste belang; het oplossen is echter in het algemeen zeer moeilijk; we kunnen er hier niets aan doen; veelal zal men voor iedere vergelijking ad hoc een oplossing moeten vinden; we vermelden alleen enkele voorbeelden.

a) De warmte-vergelijking. Beschouwen we een lichaam waarvan niet alle punten dezelfde temperaturen hebben. Zij  $U(x,y,z,t)$  de temperatuur op tijdstip t in het punt  $(x,y,z)$  dan is onder zekere veronderstellingen:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = C \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)$$

waarin C een positieve constante is; uit deze vergelijking volgen alle mogelijke temperatuursverdelingen.

b) De uitwijking  $u(x,t)$  van een trillende snaar langs de X-as ten tijde t in het punt met coördinaat x voldoet aan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0).$$

Talrijke andere verschijnselen leiden tot dezelfde vergelijking.

Golfvoortplanting in drie dimensies voldoet aan:

$$u_{tt} = c(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).$$

c) De vergelijking van Laplace.

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Deze vergelijking, ook wel geheten potentiaalvergelijking (omdat de tijd-onafhankelijke elektrische potentiaal er aan voldoet) speelt een rol in tal van problemen. Wij zien uit voorbeeld a) dat stationaire (d.w.z. tijd onafhankelijke) temperatuurverdelingen er aan voldoen.

Oplossingen van de vergelijking van Laplace heten harmonische functies.

Meer aandacht zullen we kunnen besteden aan extremumbepaling bij functies van meer veranderlijken.

Eerst enige begrippen:

We beperken ons nagenoeg geheel tot  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  met de gebruikelijke afstanden. Op blz. 8 hebben we leren kennen het begrip open verzameling.

Nu definiëren we:

Een verzameling  $V$  in een metrische ruimte  $R$ , heet gesloten indien het complement van  $V$  in  $R$ ,  $V^* = R \setminus V$  open is. Voorbeelden van gesloten verzamelingen in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\};$$
$$\{(x,y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}.$$

In  $\mathbb{R}$  is het zo dat een gesloten interval een gesloten verzameling is (zie blz. 9).

Ook definiëren we:

Een verzameling  $V$  in een metrische ruimte  $R$  heet begrensd indien er bestaan  $a \in R$  en  $\delta > 0$  zó dat  $V \subset B(a, \delta)$ .

In  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  geldt dan: een verzameling is dan en slechts dan begrensd indien er een  $\delta > 0$  bestaat zó dat de verzameling bevat is in  $\langle -\delta, \delta \rangle$  (in  $\mathbb{R}$ ) resp.  $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < \delta^2\}$  (in  $\mathbb{R}^2$ ) resp.  $\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < \delta^2\}$  (in  $\mathbb{R}^3$ ); we kunnen nl. het middelpunt van de omvattende bol steeds in de oorsprong nemen.

Verzamelingen in  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  of  $\mathbb{R}^3$  die zowel gesloten als begrensd zijn hebben de belangrijke eigenschap dat een continue functie op een dergelijke verzameling een maximum en een minimum heeft.

Deze bewering bewijzen we niet, het is een uitbreiding van een - evenmin bewezen - stelling, die we op blz. 48 vermeldden.

We noemen gesloten begrensde verzamelingen in  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  of  $\mathbb{R}^3$  ook wel compact.

Een ander begrip dat we nodig hebben is het begrip inwendig punt. Een punt  $P$  in een deelverzameling  $V$  heet inwendig punt van  $V$  indien er bestaat een  $\delta > 0$  zó dat  $B(P, \delta) \subset V$ .

Van een open verzameling is ieder punt inwendig punt.

Voor het vinden van extrema is de volgende nodige voorwaarde van belang:

Stelling. Als  $f(x,y)$ , resp.  $g(x,y,z)$  differentieerbaar is in een omgeving van  $(a,b)$ , resp.  $(a,b,c)$ , en in  $(a,b)$ , resp.  $(a,b,c)$  een lokaal maximum of minimum heeft, dan is

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

$$g_x(a,b,c) = g_y(a,b,c) = g_z(a,b,c) = 0.$$

"Bewijs". In het geval van  $f(x,y)$  bekijken we het oppervlak  $z = f(x,y)$ .

De voorwaarden  $f_x(a,b) = 0$ ,  $f_y(a,b) = 0$  betekenen nu dat het raakvlak in  $(a,b, f(a,b))$  horizontaal is. Het is meetkundig duidelijk dat in het geval van een extreem het raakvlak horizontaal is. Een echt bewijs laten we achterwege; natuurlijk berust het er op dat als niet alle partiële afgeleiden nul zijn de uitdrukking

$hg_x(a,b,c) + kg_y(a,b,c) + lg_z(a,b,c)$  voor  $(h,k,l)$  in een omgeving van  $(0,0,0)$  zowel positief als negatief zijn kan, en dat deze uitdrukking in eerste benadering gelijk is aan  $g(a+h, b+k, c+l) - g(a,b,c)$ .

Punten waar alle partiële afgeleiden nul zijn heten stationaire punten.

We bewezen dat een inwendig punt waar de functie extreem is, een stationair punt is. De stationaire punten zijn dus kanshebbers voor extremen; er hoeven echter geen extremen te zijn.

Beschouwen we (zie blz. 69 en 72):

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
$$g(x,y) = x^2 - y^2.$$

Dan geldt:  $f_x(x,y) = 2x$ ,  $f_y(x,y) = 2y$ , het enige stationaire punt van  $f$  is  $(0,0)$  en hier heeft  $f$  een minimum. Eveneens  $g_x(x,y) = 2x$ ,  $g_y(x,y) = -2y$ ; het enige stationaire punt van  $g$  is  $(0,0)$  en hier heeft  $g$  geen extreem. We noemen zo'n punt als  $(0,0, g(0,0))$  een zadelpunt van de functie  $g$ .

Samenvattend kunnen we dus zeggen: een functie op een verzameling  $V$  kan extremen hebben:

- a) in alle punten van  $V$  die niet inwendige punten zijn;
- b) in die inwendige punten van  $V$  die stationaire punten van de functie zijn.

Enkele voorbeelden:

- a) Zoek de extremen van  $z = 1 - x^2 - y^2$  op de verzameling  $V := \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

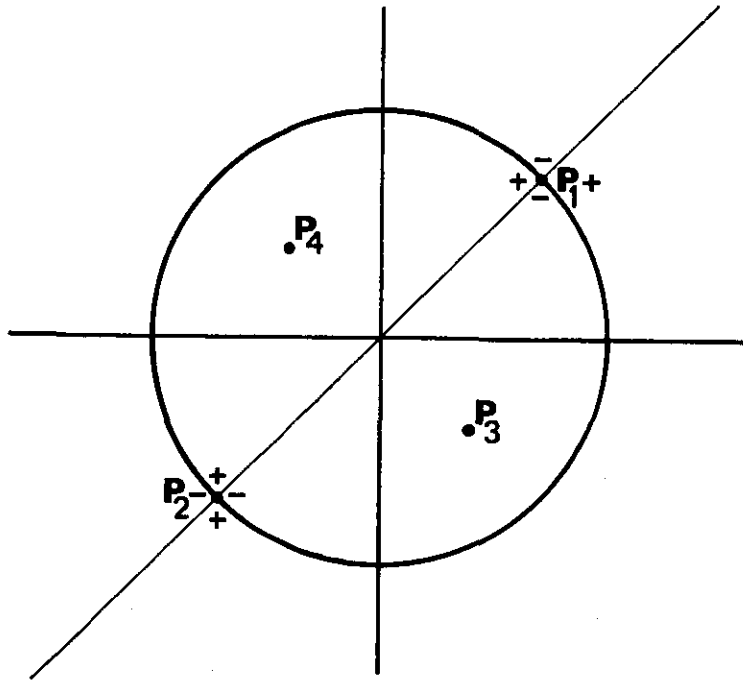
$V$  is compact, er moet dus een maximum en een minimum zijn.  $z \geq 0$  en  $z = 0$  op elk punt van de rand van  $V$  (het begrip rand is intuïtief duidelijk); in alle punten  $(x,y)$  met  $x^2 + y^2 = 1$  heeft  $z$  dus een minimum. Er moet ook een maximum zijn; er is slechts één stationair punt, nl.  $(0,0)$ . Daar is het maximum.

- b) Bepaal de extremen van  $f(x,y) = (x-y)(x^2+y^2-1)$  in  $\mathbb{R}^2$ .

Er zijn 4 stationaire punten, nl.  $P_1 = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ ;  $P_2 = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ ;  $P_3 = (\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{6}\sqrt{6})$ ;  $P_4 = (-\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6})$ .

Van de hoogtekaart van  $f$  tekenen we alleen de nul-niveau-lijn.

Deze bestaat uit een rechte (vergelijking  $x = y$ ) en een cirkel ( $x^2 + y^2 = 1$ ), in de gebieden waarin het vlak door het nul-niveau verdeeld wordt is de functie tekenvast.



Uit het tekenverloop blijkt ogenblikkelijk dat er in  $P_1$  en  $P_2$  geen extremen zijn. Op de bovenste halve cirkel inclusief rand ( $= \{(x,y) \mid y \geq x, x^2 + y^2 \leq 1\}$ ) moet de functie een maximum en minimum hebben, omdat deze verzameling compact is. Het minimum is nul en wordt op de hele rand aangenomen. Bijgevolg moet er in  $P_4$  een maximum optreden; analoog in  $P_3$  een minimum.

- c) Zoek de extremen van  $f(x,y) = x + y^2$  op de verzameling  $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

$f_x = 1$ ,  $f_y = 2y$ ; er zijn dus geen stationaire punten. Het maximum en het minimum, waarvan het bestaan uit de compactheid van de cirkelschijf volgt, wordt dus op de rand aangenomen.

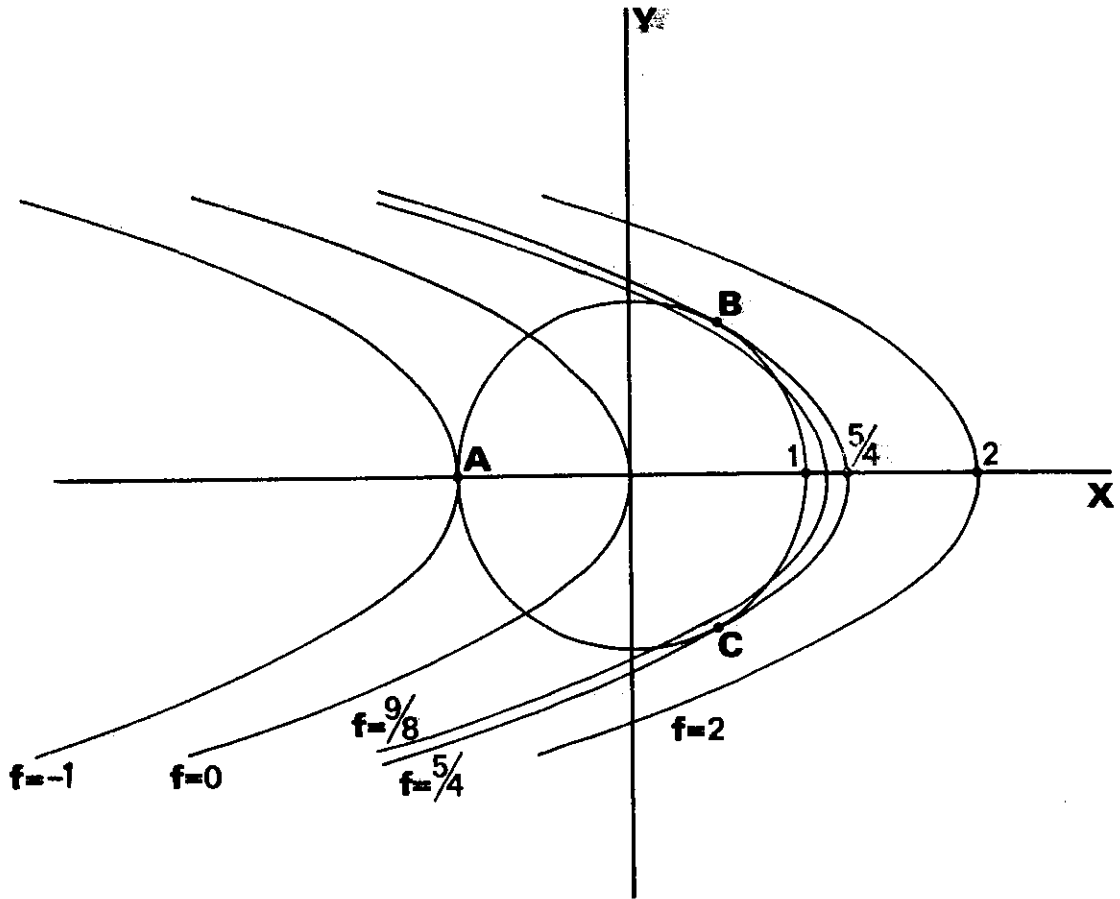
Het probleem is dan ook zo te formuleren

Vind: de extremen van  $f(x,y) = x + y^2$  als tevens voldaan is aan de nevenvoorwaarde  $x^2 + y^2 = 1$ .

Extremumproblemen met nevenvoorwaarden komen in de praktijk veel voor; de ingewikkelde theorie is in de meeste gevallen te omzeilen door verstandig gebruik van de hoogtekaart, of ligging der niveaувlakken (in  $\mathbb{R}^3$ ). Zo ook in ons voorbeeld.

De niveaulijn met waarde  $a$  is een parabool met vergelijking  $x + y^2 = a$ ;  $y^2 = a - x$ ; de as is de  $x$ -as, opening naar links; top in  $(a,0)$ . In de nevenstaande figuur zijn enige niveaulijnen en de cirkel  $x^2 + y^2 = 1$  getekend.





We zien dat het minimum optreedt in  $A = (-1, 0)$ , de waarde van het minimum is  $-1$ ; er zijn twee maxima, nl. in B en C; om die te berekenen moeten we vaststellen welke van de parabolen:  $y^2 = a - x$  aan de cirkel raakt.

Snijden 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 = a - x \end{cases}$$
 levert:  $x^2 - x + a - 1 = 0$ .

Er moeten twee samenvallende x-coördinaten van snijpunten zijn: dus discriminant  $1 - 4(a-1) = 0$ ,  $a = 5/4$ .

Het maximum is  $5/4$ ; dit wordt aangenomen in de punten  $B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$  en  $C = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$ .

- d) We bespreken nog een voorbeeldje van een extremumprobleem met een nevenvoorwaarde.

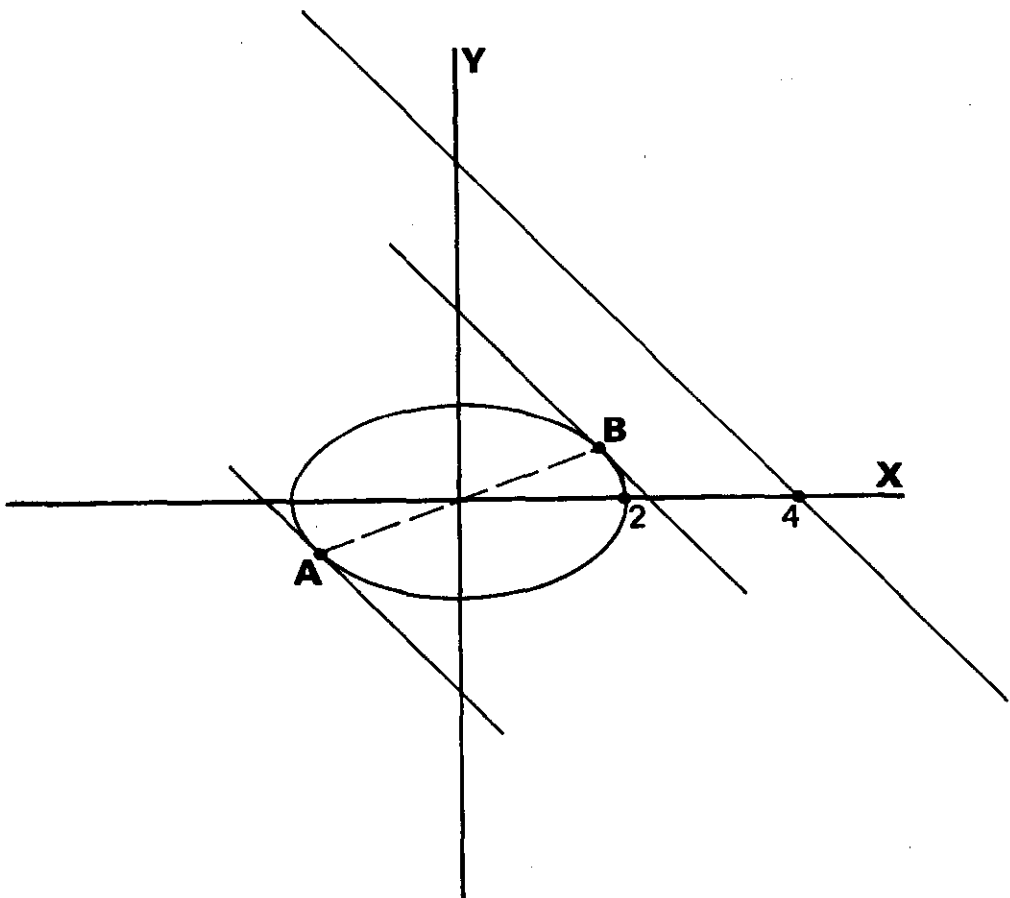
Bepaal het punt op de ellips  $x^2 + 4y^2 = 4$  dat de grootste en het punt dat de kleinste afstand heeft tot de rechte  $x + y = 4$ .

Merk op dat  $(x + y - 4)$  overal op de ellips  $\leq 0$  is. De afstand van  $(p, q)$  tot de rechte is  $\frac{1}{\sqrt{2}} |p + q - 4|$ . Het probleem is nu: vind de uiterste waarden van  $\frac{1}{\sqrt{2}} |x + y - 4|$  onder de nevenvoorwaarde  $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ .

De hoogtelijnen van de functie zijn rechten evenwijdig aan  $x + y = 4$ . Het maximum en minimum worden bereikt in A resp. B raakpunten van niveaulijnen aan de ellips. Uit de elementaire analytische meetkunde volgt:

$$A = \left(-\frac{4}{5}\sqrt{5}, -\frac{1}{5}\sqrt{5}\right) \text{ afstand tot } \ell : \frac{1}{2}\sqrt{2} (4 + \sqrt{5})$$

$$B = \left(+\frac{4}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5}\right) \text{ afstand tot } \ell : \frac{1}{2}\sqrt{2} (4 - \sqrt{5}).$$



Hoofdstuk 7. Aanvullende opmerkingen over analytische meetkunde

7.1. Parametervoorstellingen

Tot op heden stelden we krommen in het platte vlak steeds voor met een functie  $y = f(x)$  of impliciet met  $F(x,y) = 0$ . Vaak is het handiger de kromme op een andere manier voor te stellen, nl. met een hulpgrootheid die we parameter noemen. In plaats van één der coördinaten in de andere uit te drukken, of een verband tussen beide coördinaten op te schrijven kunnen we beide coördinaten  $x$  en  $y$  uitdrukken als functies van een derde veranderlijke, zeg  $t$ , de parameter.

Zo stelt het paar functies 
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

een kromme voor als de parameter  $t$  bepaalde waarden doorloopt. Als men de parameter elimineert komt er een vergelijking, maar dit is vaak lastig en meestal onhandig!

Enkele voorbeelden:

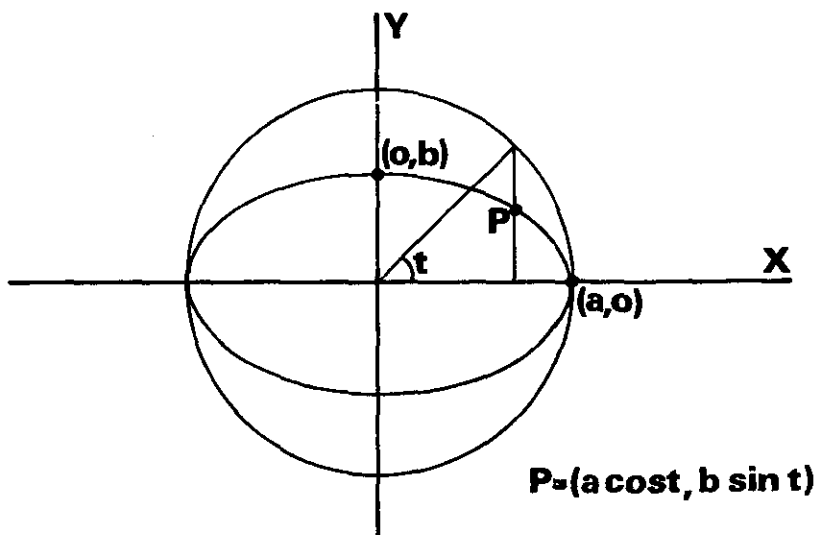
$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

is een parametervoorstelling van de cirkel met vergelijking  $x^2 + y^2 = a^2$ .

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi$$

stelt voor de ellips met vergelijking  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Meetkundig ziet men dat  $t$  nu is de hoek tussen de positieve  $x$ -as en de verbindingsrechte van  $(0,0)$  met het snijpunt van de cirkel  $x^2 + y^2 = a^2$  met de  $y$ -as.



Voorbeeld. 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \\ y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \end{cases} \quad -\infty < t < \infty$$

is een parametervoorstelling van de hyperbool  $x^2 - y^2 = 1$ . Men noteert:  $\frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) =: \cosh t$  (cosinushyperbolicus);  $\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) =: \sinh t$  (sinushyperbolicus). Het is niet moeilijk de grafieken van deze functies te tekenen.

Voorbeeld. 
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \end{cases} \quad -\infty < t < \infty$$

is een parametervoorstelling van de rechte  $x + 3y + 5 = 0$ .

Een probleem dat zich voordoet is hoe de raaklijnrichting te vinden van een kromme gegeven door een parametervoorstelling:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} .$$

We vinden voor de kromme:  $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} =: \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

als  $y = y(x)$  een functie is die een deel van de kromme als grafiek heeft. Om dit in te zien denken we ons  $t$  opgelost uit  $x = x(t)$  als  $t = t(x)$ , substitutie in de tweede vergelijking levert  $y = y(t(x))$  en de kettingregel:

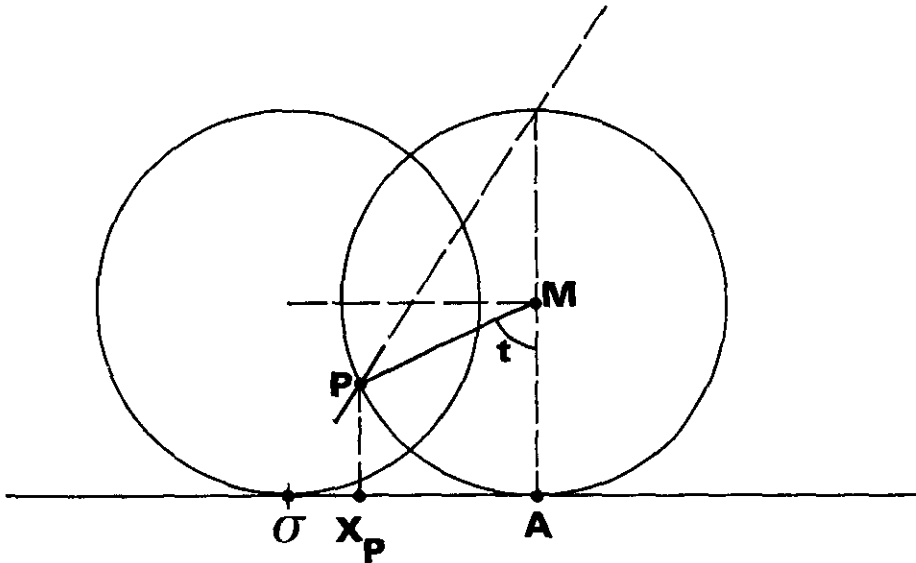
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} .$$

Uit de inverse functiestelling (blz. 28, 29) volgt

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} .$$

Horizontale (verticale) raaklijnen treden zeker op in punten waar  $\frac{dy}{dt} = 0$  en  $\frac{dx}{dt} \neq 0$  ( $\frac{dx}{dt} = 0$  en  $\frac{dy}{dt} \neq 0$ ).

Parametervoorstellingen zijn ondermeer handig bij het in formule brengen van een meetkundig gegeven kromme. We bekijken als voorbeeld een cycloïde. Een cirkel met straal 1 ligt op de  $x$ -as, het middelpunt  $M$  is in  $(0,1)$ . De cirkel gaat langs de  $x$ -as rollen (zonder slip!), gevraagd de kromme die beschreven wordt door het punt dat oorspronkelijk in  $\mathcal{O}$  was. We nemen als parameter de hoek  $t$  tussen de lijn van het middelpunt naar het betreffende punt ( $P$ ) en de verticaal.



Afwezigheid van slip betekent nu dat  $OA = \text{boog } AP$ .

Nu geldt  $x_P = x_M + (x_P - x_M) = t - \sin t$

$y_P = y_M + (y_P - y_M) = 1 - \cos t$ .

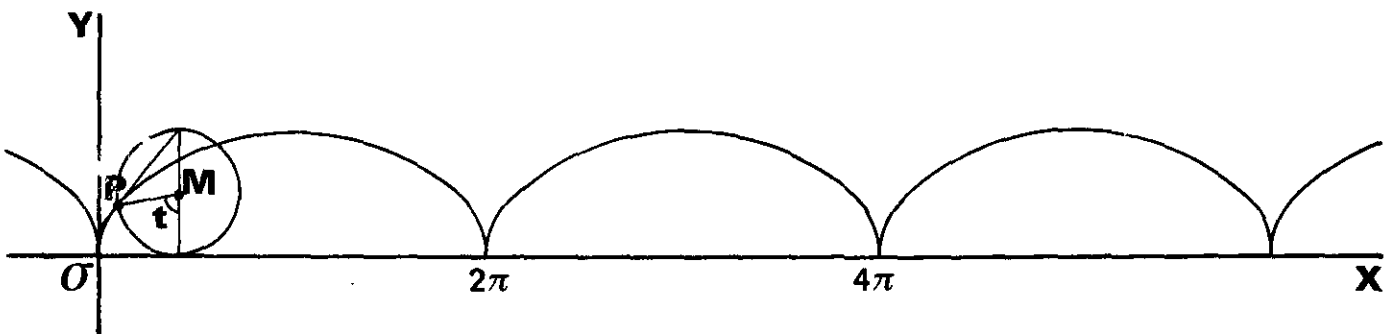
Als parametervoorstelling hebben we nu:

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

dus:  $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$ ;  $\frac{dy}{dt} = \sin t$ ;  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \tan \left( \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right)$ .

De raaklijn in P is dus gericht naar het hoogste punt van de cirkel die bij de stand P behoort.

We tekenen de kromme.



Oppervlakken beschreven we tot nu toe met  $z = f(x,y)$  of  $F(x,y,z) = 0$ , ook deze zijn met parameters te beschrijven. Voor een oppervlak zijn i.h.a. twee parameters nodig en  $x$ ,  $y$  en  $z$  worden dan functies van die parameters.

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \sin \theta & (0 \leq \varphi < 2\pi) \\ y = a \sin \varphi \sin \theta & (0 \leq \theta \leq \pi) \\ z = a \cos \theta \end{cases}$$

is een parametervoorstelling van de bol met vergelijking  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ y = \rho \sin \varphi & 0 \leq \rho < \infty \\ z = \rho^2 \end{cases}$$

is een parametervoorstelling van  $z = x^2 + y^2$ .

Het vinden van de coëfficiënten van de vergelijking van een raakvlak (dit zijn  $\frac{\partial z}{\partial x}$  en  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ) uit een parametervoorstelling is lastiger.

Laat

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}$$

de parametervoorstelling zijn. Evenals in het geval van een kromme denken we ons  $u$  en  $v$  uit de eerste twee vergelijkingen opgelost en in de derde gesubstitueerd. We vinden:

$$\begin{aligned} z_x &= z_u u_x + z_v v_x \\ z_y &= z_u u_y + z_v v_y \end{aligned}$$

De moeilijkheid is nu het vinden van  $u_x$ ,  $v_x$ ,  $u_y$ ,  $v_y$ . Bedenk dat er geen analogon van de inverse-functiestelling bestaat voor partiële afgeleiden. Vergelijkingen voor  $u_x$  en  $v_x$  vinden we door de eerste twee vergelijkingen te differentiëren naar  $x$ :

$$\begin{cases} 1 = f_u u_x + f_v v_x \\ 0 = g_u u_x + g_v v_x \end{cases} \text{ en deze op te lossen; evenzo voor } u_y \text{ en } v_y.$$

Als we dit toepassen op  $z = x^2 + y^2$  ( $z_x = 2x$ ,  $z_y = 2y$ ) en de besproken parametervoorstelling dan komt er voor  $z_x$ :

$$z_x = z_\rho \rho_x + z_\varphi \varphi_x = 2\rho \rho_x \quad \text{immers } z_\rho = 2\rho; z_\varphi = 0.$$

Om  $\rho_x$  te berekenen differentiëren we  $x = \rho \cos \varphi$  en  $y = \rho \sin \varphi$  naar  $x$ :

$$\begin{cases} 1 = \rho_x \cos \varphi - \rho \sin \varphi \cdot \varphi_x \\ 0 = \rho_x \sin \varphi + \rho \cos \varphi \cdot \varphi_x \end{cases}$$

Oplossen levert  $\rho_x = \cos \varphi$ , dus  $z_x = 2\rho \rho_x = 2x$ .

Merk op dat  $\varphi_x = -\frac{\sin \varphi}{\rho}$ , terwijl  $x_\varphi = -\rho \sin \varphi$ , zodat  $\varphi_x \cdot x_\varphi \neq 1$ .

## 7.2. Coördinaten

Tot nu toe hebben we de analytische meetkunde bedreven met cartesische coördinaten in  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$  ( $x,y$  resp.  $x,y,z$ ). Als men problemen bestudeert met "cirkel of bol-symmetrie" dan zijn andere coördinaten vaak handiger.

### Poolcoördinaten in $\mathbb{R}^2$ .

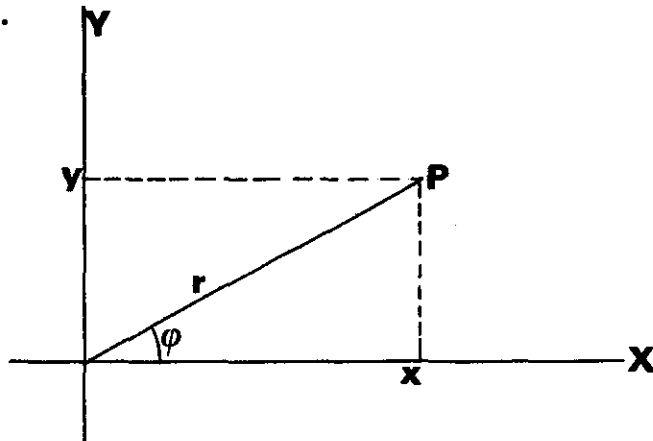
We leggen een punt  $P$  in het vlak vast door zijn afstand tot  $O = (0,0)$  en door de hoek die de verbindingslijn  $OP$  maakt met de positieve  $x$ -as.

De afstand heet gewoonlijk  $r$ , de hoek  $\varphi$ ; uit de aard van de keuze volgt dat  $r \geq 0$ ,  $\varphi$  slechts bepaald tot op veelvoud van  $2\pi$  ( $(r,\varphi)$  en  $(r,\varphi+2\pi)$  is het zelfde punt) en  $\varphi$  onbepaald in  $\mathbb{C}$ .

$O$  noemt men wel de pool, de positieve  $x$ -as de poolas,  $r$  de voerstraal van  $P$  en  $\varphi$  het argument van  $P$ .

Het verband tussen cartesische coördinaten  $(x,y)$  en poolcoördinaten  $(r,\varphi)$  is

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$



Een kromme  $r = r(\varphi)$  kan meteen als parametervoorstelling in cartesische coördinaten geschreven worden door:

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi. \end{cases}$$

zodat we de theorie van § 7.1 kunnen toepassen.

Voor problemen waarin cirkelsymmetrie voorkomt zijn poolcoördinaten erg handig:

De cirkel  $x^2 + y^2 = a^2$  heeft als vergelijking in poolcoördinaten:  $r = a$ .

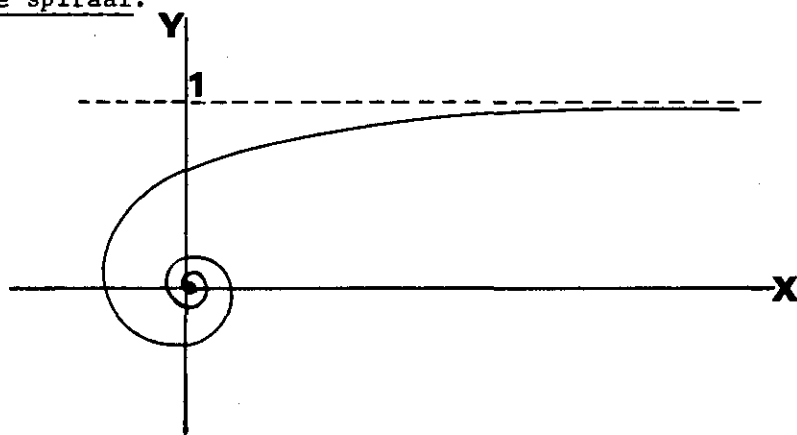
Krommen  $r = \text{constant}$  zijn cirkels om  $\mathcal{O}$ ; krommen  $\varphi = \text{constant}$  halve rechten door  $\mathcal{O}$  ( $\mathcal{O}$  zelf uitgezonderd).

We bekijken enkele voorbeelden:

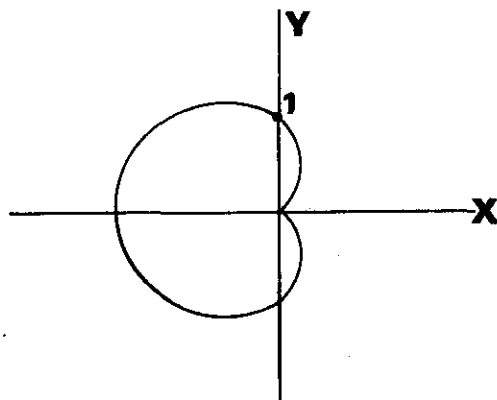
a)  $r = \frac{1}{\varphi}$ ;  $\varphi > 0$ .

We zien dat  $r \rightarrow \infty$  als  $\varphi \rightarrow 0$  maar daar  $y = r \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{\varphi}$  geldt  $y \rightarrow 1$

als  $\varphi \rightarrow 0$ ; er is dus een horizontale asymptoot bij  $y = 1$ . De kromme heet hyperbolische spiraal.

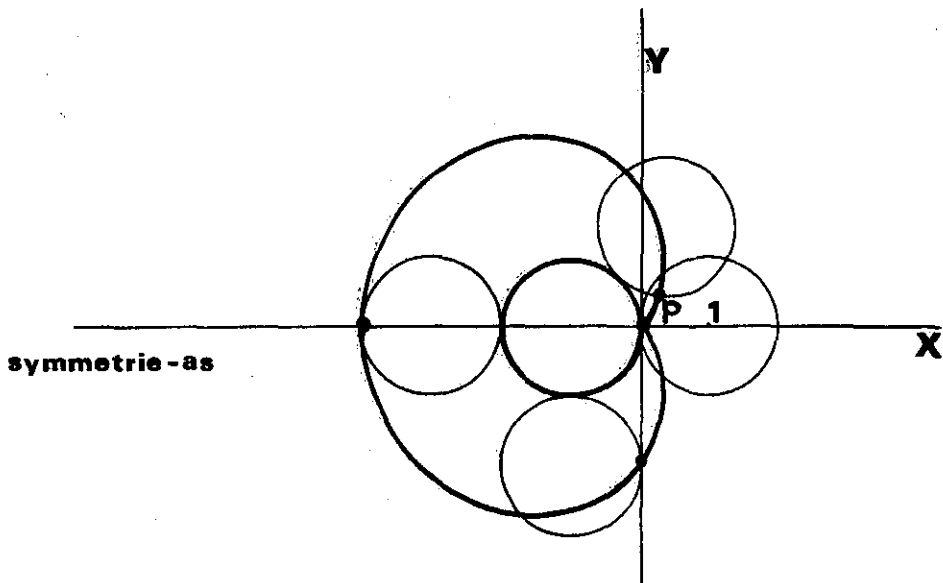


b)  $r = 2(1 - \cos \varphi)$  cardioïde



Deze kromme ontstaat als de baan van het punt P op de rechter cirkel als deze cirkel (met straal 1) zonder slip langs de vaste cirkel met middelpunt  $(-1,0)$  rolt.

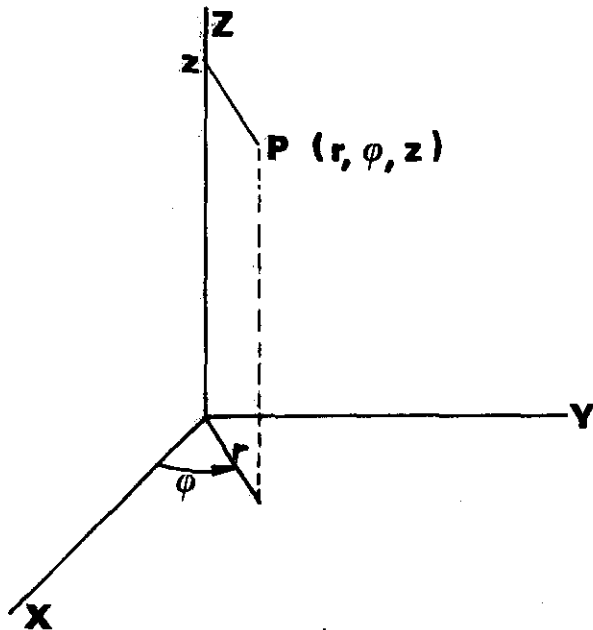




In cartesische coördinaten is de vergelijking van de cardioïde:  
 $(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$  hetgeen veel ingewikkelder is.

Cylindercoördinaten in  $\mathbb{R}^3$ .

Deze zijn de uitbreiding van poolcoördinaten in het  $(x,y)$ -vlak met een  $z$ -coördinaat.



De cylindercoördinaten van P zijn  $(r, \varphi, z)$ ;  
de samenhang met cartesische coördinaten is:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z . \end{cases}$$

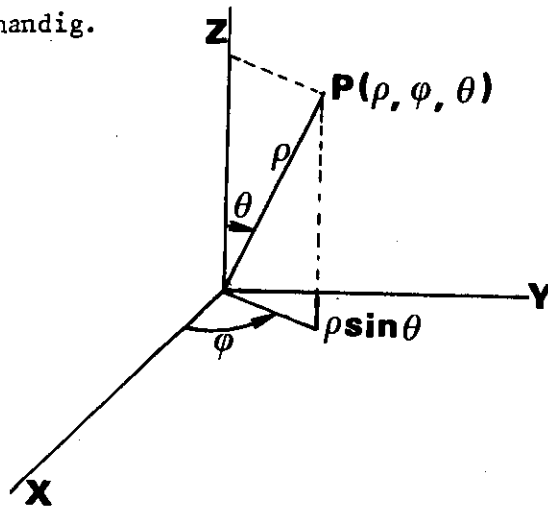
Cylindercoördinaten zijn gemakkelijk bij meetkundige figuren die cirkel-symmetrie hebben (omwentelingsfiguren!).

De cylinder  $x^2 + y^2 = a^2$  heeft als vergelijking in cylindercoördinaten:  
 $r = a$ .

De halve kegel  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  heeft als vergelijking  $z = r$ .

Bolcoördinaten in  $\mathbb{R}^3$ .

Voor figuren met een punt van symmetrie (bolsymmetrie) zijn de volgende coördinaten erg handig.



Een punt P in  $\mathbb{R}^3$  wordt bepaald door: afstand  $\rho$  tot O, hoek  $\varphi$  van de projectie van OP op het XY-vlak met de positieve X-as, hoek  $\theta$  van OP met de positieve Z-as.

Krachtens definitie is  $\rho \geq 0$ ,  $\varphi$  bepaald tot op veelvoud van  $2\pi$  en  $\theta$  tussen 0 en  $\pi$  te nemen.

De omrekeningsformules zijn: 
$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases}$$

$\rho = \text{constant}$  is een bol om  $O = (0,0,0)$

$\varphi = \text{constant}$  is een halfvlak door de Z-as

$\theta = \text{constant}$  is een halve kegel met de Z-as als as.

## Hoofdstuk 8. Uitbreiding van de integraalrekening

We zullen in dit hoofdstuk een uitbreiding geven van het begrip  $\int_a^b f(t) dt$

dat we in hoofdstuk 3 invoerden. De uitbreiding bestaat er in dat we het interval  $[a,b]$  vervangen door andere soorten verzamelingen. De behandeling zal volkomen intuïtief zijn. En passant zullen we onze techniek voor het berekenen van integralen met diverse nuttige substituties uitbreiden.

### 8.1. Meervoudige integralen

Allereerst moeten we invoeren het begrip 1-, 2- of 3-dimensionaal gebied. De algemene definitie is lastig; we volstaan met voorbeelden

1-dimensionale gebieden:  $[a,b]$  in  $\mathbb{R}$ ;  $[a,\infty)$  in  $\mathbb{R}$ ;

een stuk van een kromme in  $\mathbb{R}^2$  of  $\mathbb{R}^3$

2-dimensionale gebieden: een cirkelschijf, een massieve veelhoek in  $\mathbb{R}^2$ ;

een stuk oppervlak in  $\mathbb{R}^3$

3-dimensionale gebieden: een massieve bol, een massief veelvlak,

een willekeurig lichaam in  $\mathbb{R}^3$ .

We zullen nu algemeen het begrip  $\int_G f$  invoeren: de bepaalde integraal over

een gebied  $G$ . Als dit gebied 2 of 3 dimensionaal is spreken we van een meervoudige integraal.

De wijze van werken is als in hoofdstuk 3. We proberen het gebied te verdelen in kleine elementaire gebiedjes, die we brokken noemen. Van deze elementaire gebiedjes (in hoofdstuk 3 waren dat de deelintervallen van een verdeling) is een maat (in hoofdstuk 3 de lengte) gedefinieerd. Van tweedimensionale brokken is de maat de oppervlakte; van driedimensionale brokken is het de inhoud. De maat van een elementair gebiedje  $E$  geven we aan met  $\mu(E)$ . Bij een verdeling van een gebied  $G$  (het gebied zal niet steeds precies gelijk zijn aan de vereniging van de elementaire gebiedjes; als het na limietovergang maar goed is zijn we tevreden), nemen we in ieder elementair deelgebiedje een punt, en berekenen de Riemann-som:

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \mu(E_i),$$

waarbij  $E_1, \dots, E_n$  de elementaire gebiedjes zijn waarin we  $G$  "verdeeld" hebben, en  $P_i$  het in  $E_i$  gekozen punt is;  $f(P_i)$  is de waarde van de functie in  $P_i$ .

Indien nu de Riemann-sommen voor steeds fijnere verdelingen een limiet hebben (die onafhankelijk is van de gekozen verdelingen en tussenpunten enz.) dan noemen we dit de integraal van  $f$  over het gebied.

Een notatie is  $\int_G f d\mu$ ; ook wel  $\iint_G f d\mu$  of  $\iiint_G f d\mu$  als  $G$  2- of 3-dimensionaal

is. Maar we zullen meestal andere notaties gebruiken. Voor nette functies (bijv. continue) en nette gebieden (niet te wilde begrenzingsen e.d.)

bestaat  $\int_G f d\mu$ .

We bekijken enkele soorten 2- en 3-dimensionale brokken en berekenen hun maat (ten naaste bij; het is voldoende een getal te hebben dat met de maat d.i. oppervlakte of inhoud overeenkomt als de afmetingen naar nul naderen).

#### Tweedimensionale brokken

a) In  $\mathbb{R}^2$  is de rechthoek  $\{(x,y) \mid x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\}$  als  $\Delta x := x_2 - x_1$  en  $\Delta y := y_2 - y_1$  een brok  $E$  met maat

$$\mu(E) = \Delta x \Delta y.$$

Als deze brokken gebruikt zijn schrijft men

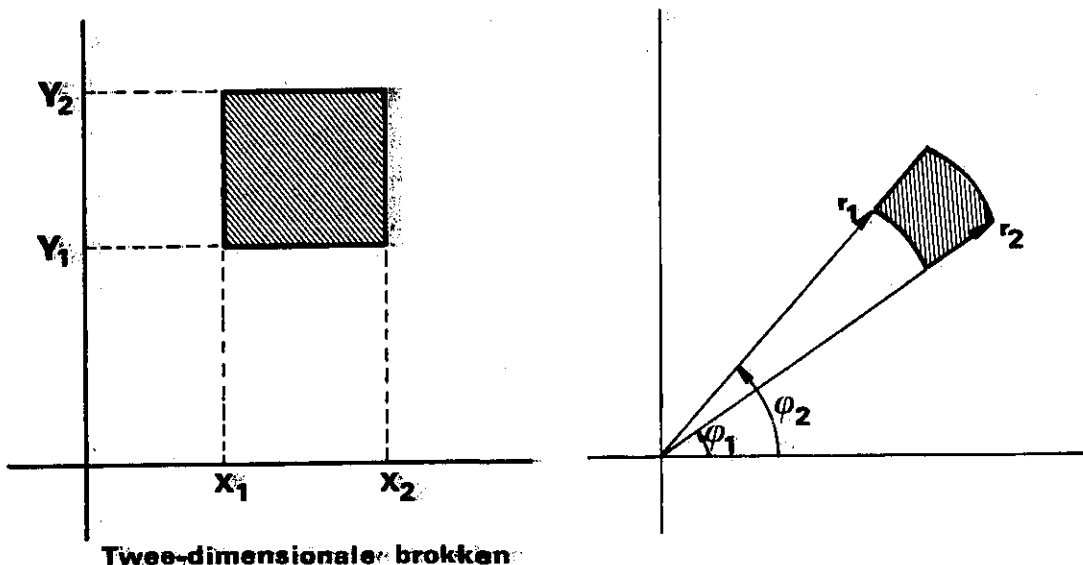
$$\int_G f d\mu =: \iint_G f(x,y) dx dy.$$

(N.B. De integraal moet onafhankelijk zijn van de gekozen brokken.)

b) In  $\mathbb{R}^2$  is het sectorstuk (poolcoördinaten)  $:= \{(r,\varphi) \mid r_1 < r < r_2, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$  als  $\Delta r := r_2 - r_1$  en  $\Delta \varphi := \varphi_2 - \varphi_1$  klein zijn een brok met maat  $\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)(r_2^2 - r_1^2)$ . Als  $r$  een getal tussen  $r_1$  en  $r_2$  voorstelt is dit ongeveer:

$$r \Delta r \Delta \varphi.$$

We noteren:  $\int_G f d\mu =: \iint_G f(r,\varphi) r dr d\varphi$ .



Driedimensionale brokken

- c) Een recht balkje met kleine ribbenlengten  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  en  $\Delta z$  is een brok met maat  $\Delta x \Delta y \Delta z$ .

Notatie:

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

- d) Een wigstuk in cylindercoördinaten:  $\{(r, \varphi, z) \mid r_1 < r < r_2, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2, z_1 < z < z_2\}$  is, als  $\Delta r := r_2 - r_1$ ,  $\Delta \varphi := \varphi_2 - \varphi_1$ ,  $\Delta z := z_2 - z_1$  klein zijn, een brok met maat ongeveer  $r \Delta r \Delta \varphi \Delta z$  ( $r$  is weer een getal tussen  $r_1$  en  $r_2$ ).

$$\iiint_G f(r, \varphi, z) \, r dr d\varphi dz.$$

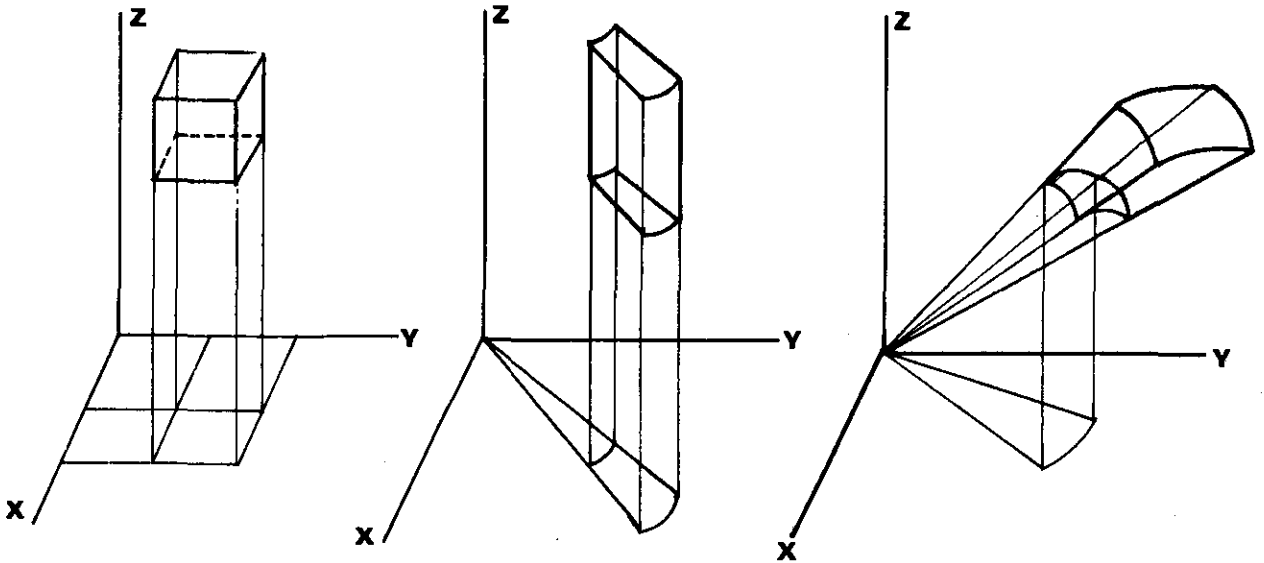
- e) Een blokachtig stuk in bolcoördinaten:

$\{(\rho, \varphi, \theta) \mid \rho_1 < \rho < \rho_2, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2, \theta_1 < \theta < \theta_2\}$  is, als  $\Delta \rho := \rho_2 - \rho_1$ ,  $\Delta \varphi := \varphi_2 - \varphi_1$ ;  $\Delta \theta := \theta_2 - \theta_1$  klein zijn, een brok, die bij benadering is een balkje met zijden  $\Delta \rho$ ,  $\rho_1 \Delta \theta$  en  $\rho_1 \sin \theta_1 \Delta \varphi$ . Als  $\rho$  een getal tussen  $\rho_1$  en  $\rho_2$ ,  $\theta$  een getal tussen  $\theta_1$  en  $\theta_2$  voorstelt is de maat van deze brok in benadering

$$\rho^2 \sin \theta \Delta \rho \Delta \theta \Delta \varphi.$$

Vandaar:

$$\iiint_G f(\rho, \varphi, \theta) \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi.$$



**Drie-dimensionale brokken**

Voor de bepaalde integraal  $\int_G f d\mu$  gelden de eigenschappen I, IV, V, VI

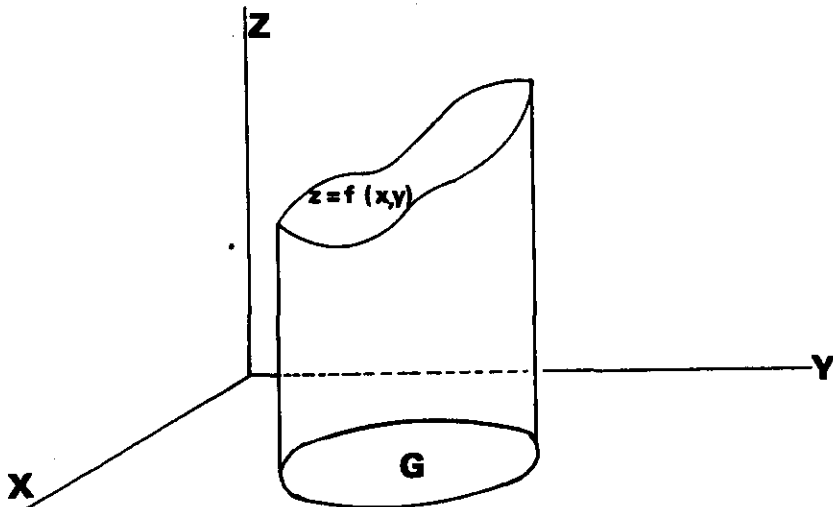
en VII, die we op blz. 34 voor de integraal over een interval formuleerden, nog steeds mits we maar overal lengte door maat vervangen.

Voorbeelden van meervoudige integralen:

- 1) Zij  $G$  een schijf in  $\mathbb{R}^2$  met massa verdeling  $f(x,y) \geq 0$  dan is de totale massa

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \iint_G f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

De integraal stelt ook voor het volume van het lichaam in  $\mathbb{R}^2$  begrensd door  $G$ , het oppervlak  $z = f(x,y)$  en de cylinder op de rand van  $G$ .



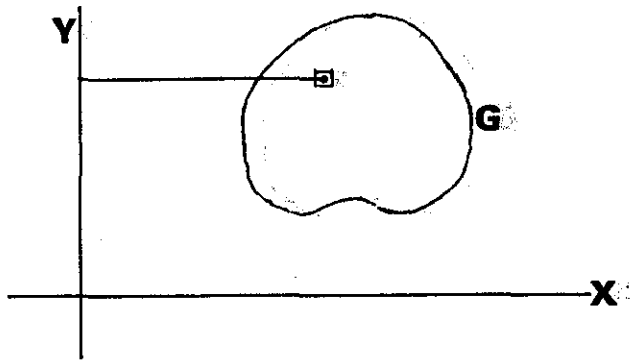
- 2) Zij  $G$  een lichaam in  $\mathbb{R}^3$  met een massa verdeling  $f(x,y,z)$ ; zij  $\bar{f}(r,\varphi,z) := f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$  en  $\bar{f}(\rho,\varphi,\theta) := f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta)$  dan is de totale massa:

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x,y,z) dx dy dz &= \iiint_G \bar{f}(r,\varphi,z) r dr d\varphi dz = \\ &= \iiint_G \bar{f}(\rho,\varphi,\theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

De inhoud van  $G$  is dus:

$$\iiint_G dx dy dz = \iiint_G r dr d\varphi dz = \iiint_G \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

3)



Het statisch moment van schijf  $G$  met massadichtheid  $f(x,y)$  t.o.v. de  $y$ -as is

$$\iint_G x f(x,y) dx dy.$$

- 4) Het traagheidsmoment t.o.v. de  $z$ -as van een lichaam  $L$  met massadichtheid  $f(x,y,z)$  is:

$$\iiint_L (x^2 + y^2) f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_L r^2 \bar{f}(r,\varphi,z) r dr d\varphi dz.$$

- 5) Het traagheidsmoment t.o.v. het vlak  $z = 0$  van een lichaam  $L$  met massa verdeling  $m(r,\varphi,z)$  is:

$$\iiint_L z^2 m(r,\varphi,z) r dr d\varphi dz.$$

6) Uit de momentenstelling volgt voor de coördinaten van het zwaartepunt  $(\xi, \eta, \zeta)$  van een lichaam  $L$  met massaverdeling  $m(x, y, z)$ :

$$M \xi = \iiint_L x m(x, y, z) dx dy dz;$$

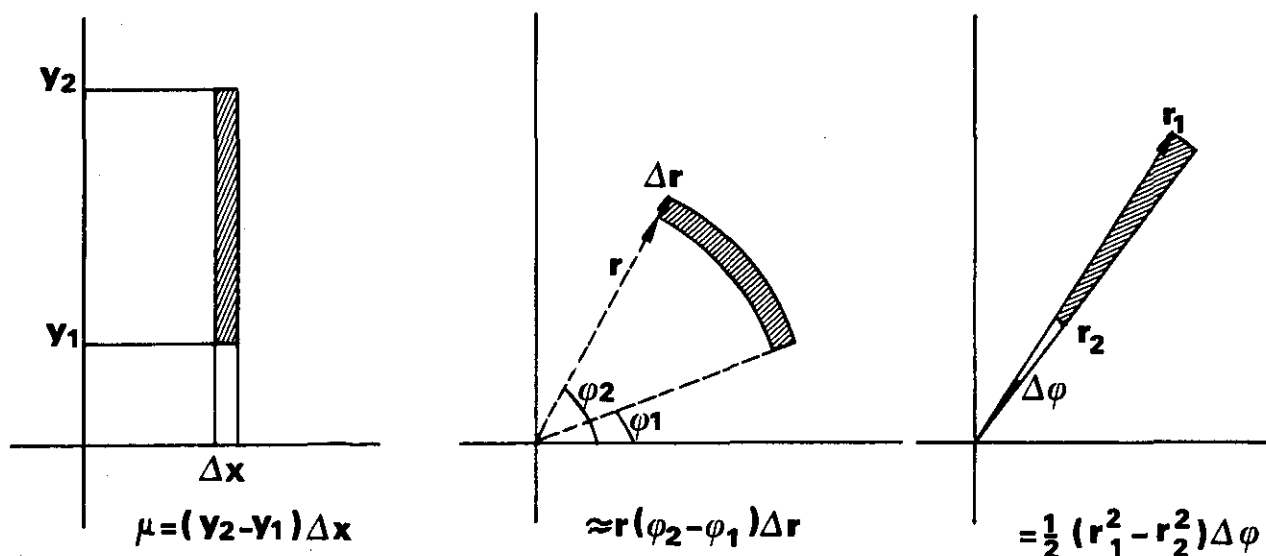
$$M \eta = \iiint_L y m(x, y, z) dx dy dz;$$

$$M \zeta = \iiint_L z m(x, y, z) dx dy dz,$$

waarbij  $M$  de totale massa van  $L$  is, dus  $M = \iiint_L m(x, y, z) dx dy dz$ .

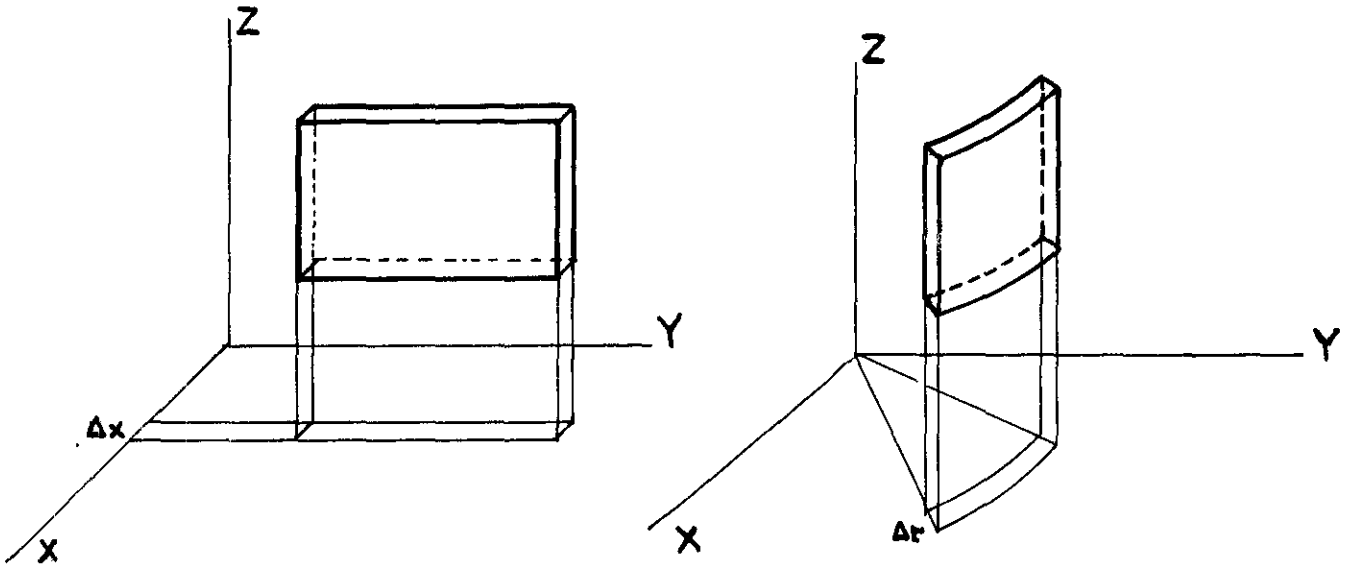
### 8.2. Herhaalde integralen

Met alle formules uit § 8.1 zijn we nog niet in staat om iets uit te rekenen. We zullen een methode bespreken om integralen als in § 8.1 uit te rekenen door herhaald gebruik van de hoofdstelling (blz. 36). Daartoe beschouwen we ook gebiedjes waarvan maar één afmeting klein is; deze noemen we repen. Voorbeelden van tweedimensionale repen in  $\mathbb{R}^2$  met hun maat:





In  $\mathbb{R}^3$  kunnen we verschillende soorten driedimensionale repen aangeven; we volstaan nu met twee voorbeelden:



$$\text{maat} = (y_2 - y_1)(z_2 - z_1) \Delta x ;$$

$$\text{maat} \approx r(\varphi_2 - \varphi_1)(z_2 - z_1) \Delta r$$

De berekening van meervoudige integralen zullen wij nu terugbrengen tot de berekening van een aantal enkelvoudige integralen. Daartoe verdelen wij het gebied  $G$  niet in brokken, doch in gelijksoortige repen. Aan elke reep kennen wij toe de functiewaarde  $\int_{\text{reep}} f$ . De berekening geschiedt dan met behulp van

de volgende enigszins vaag geformuleerde en in de huidige opzet moeilijk bewijsbare, maar wel plausibele stelling:

Stelling. 
$$\int_G f = \int_{\text{over alle repen in } G} \left[ \int_{\text{will. reep}} f \right].$$

Deze stelling drukt uit, dat men de integraal van  $f$  over  $G$  niet alleen als limiet van een som van bijdragen van een verdeling in brokken, maar ook als limiet van een som van bijdragen van een verdeling in repen kan beschouwen, waarbij de bijdrage over een reep zelf weer als limiet van een som te beschouwen is. Wij lichten dit op twee manieren toe voor de dubbelintegraal

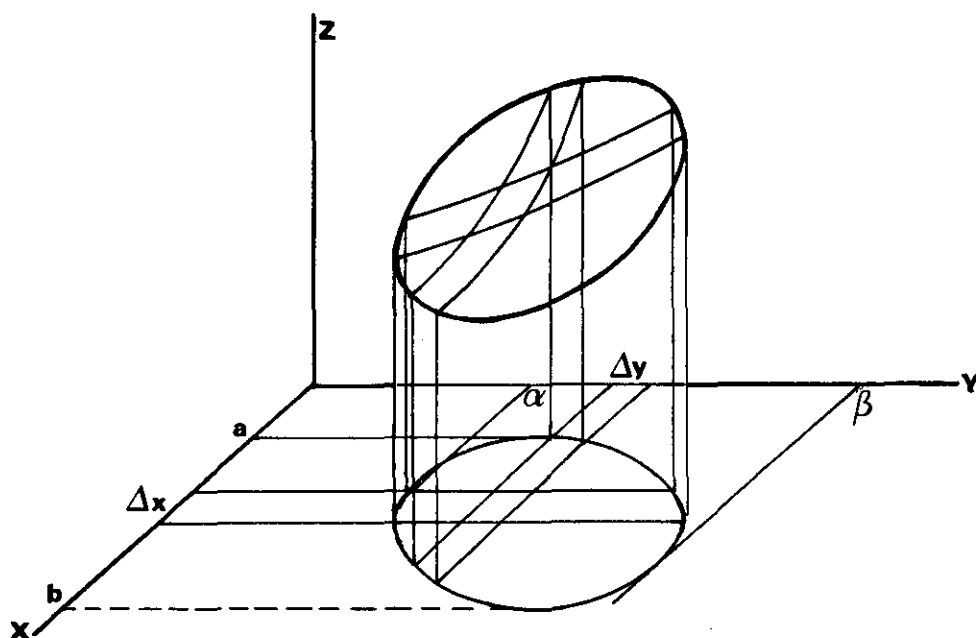
$$\iint_G f(x,y) dx dy .$$

le interpretatie. Interpreteer de dubbelintegraal als inhoud van de door de grafiek van  $f(x,y)$  afgeknotte cylinder boven de schijf  $G$  in het  $xOy$ -vlak, waarbij wij ons  $G$  ingesloten denken door de krommen

$$y = y_1(x) \text{ en } y = y_2(x),$$

die gedefinieerd zijn voor  $a \leq x \leq b$ . Verdeel  $G$  in repen evenwijdig aan de  $y$ -as met breedte  $\Delta x$ , dan is de integraal van  $f(x,y)$  over zo'n reep, dus de inhoud van de plak boven de reep

$$\int_{\text{reep}} f \approx \Delta x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy .$$



Deze integraal is afhankelijk van de  $x$ -coördinaat van de reep. Vervolgens integreren wij over  $x$ , dus over de repen, en komen zo tot

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \left[ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy \right] .$$

Wanneer wij ons het gebied  $G$  ingesloten denken door de krommen

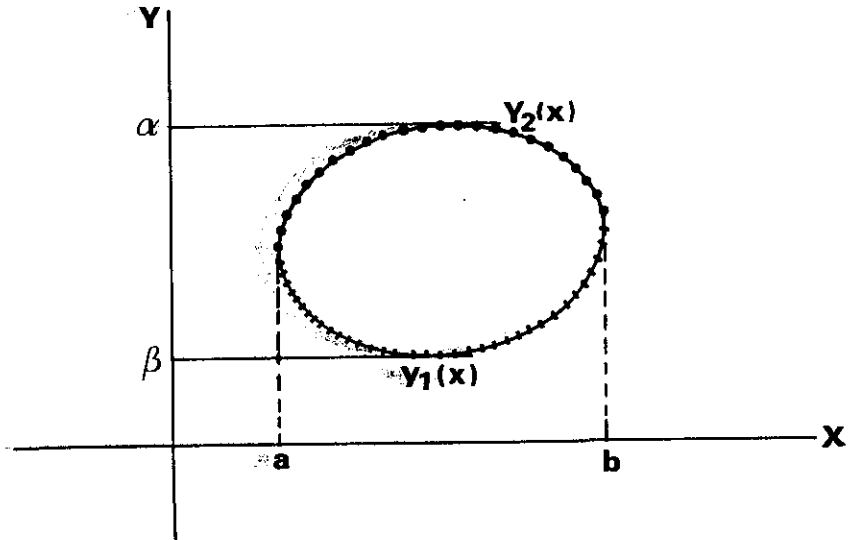
$$x = x_1(y) \text{ en } x = x_2(y) ,$$

die gedefinieerd zijn voor  $\alpha \leq y \leq \beta$ , en wanneer wij  $G$  verdelen in repen

evenwijdig aan de x-as met breedte  $\Delta y$ , dan krijgen wij op analoge wijze

$$\iint_G f(x,y) \, dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \left[ \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) \, dx \right].$$

De dubbelintegraal is dus op twee manier herleid tot een herhaalde integraal, die op de gewone wijze kan worden berekend.



2e interpretatie. Interpreteer de dubbelintegraal als de totale massa van de schijf G met massaverdeling  $f(x,y)$ . Dan is  $\int_{\text{reep}} f$  de totale massa van de reep

reep. Ook hier vindt men als de herleiding van dubbelintegraal tot herhaalde integraal:

$$\iint_G f(x,y) \, dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) \, dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) \, dx.$$

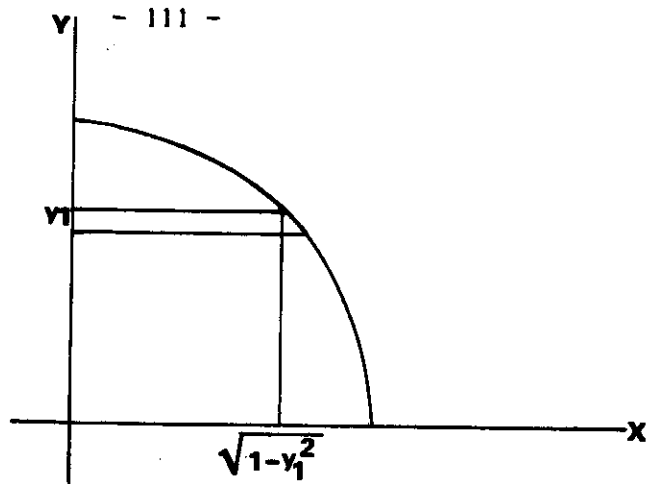
We bespreken veel voorbeelden.

Voorbeeld 1.

$$\iint_G xy^2 \, dx dy \text{ met } G : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1. \text{ Antwoord: } 0.$$

Voorbeeld 2. Zij G het kwart in eerste kwadrant van  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

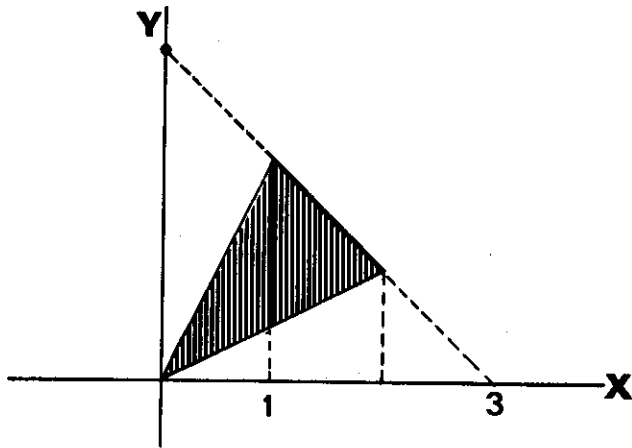
$$\text{Gevraagd wordt } \iint_G e^{x^2+y^2} xy \, dx dy.$$



Verdeel  $G$  in repen evenwijdig aan de  $x$ -as. Dan

$$\begin{aligned} \iint_G e^{x^2+y^2} xy dx dy &= \int_0^1 y e^{y^2} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x e^{x^2} dx = \int_0^1 y e^{y^2} dy \cdot \frac{1}{2}(e^{1-y^2} - 1) = \\ &= \frac{1}{2}e \int_0^1 y dy - \frac{1}{4} \int_0^1 e^{y^2} dy^2 = \frac{1}{4}e - \left(\frac{1}{4}e - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 3. Zij  $G$  de driehoek die in het  $xOy$ -vlak wordt ingesloten door de rechten  $y = 2x$ ,  $2y = x$ ,  $x + y = 3$ .



Om  $\iint xy dx dy$  over dit gebied te berekenen verdelen wij  $G$  eerst door de rechte  $x = 1$  in twee gebieden  $G_1$  en  $G_2$ , die wij elk in repen evenwijdig aan de  $y$ -as verdelen.

$$\begin{aligned}
 \iiint_G &= \iiint_{G_1} + \iiint_{G_2} = \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{2x} xy dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} xy dy = \\
 &= \int_0^1 x dx \cdot \frac{1}{2} (4x^2 - \frac{1}{4} x^2) + \int_1^2 x dx \cdot \frac{1}{2} [(3-x)^2 - \frac{1}{4} x^2] = \\
 &= \frac{15}{8} \int_0^1 x^3 dx + \frac{1}{8} \int_1^2 (3x^3 - 24x^2 + 36x) dx = \frac{13}{8} .
 \end{aligned}$$

Voorbeeld 4. Gevraagd  $\int_0^\pi dx \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) e^{\sin y} dy$  .

De binnenste integraal is zeer moeilijk. Wij schrijven de herhaalde integraal eerst als dubbelintegraal over het gebied G: de rechthoek  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$  . Vervolgens verdelen wij G in repen evenwijdig aan de x-as, dan

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi dx \int_0^{\pi/2} f(x,y) dy &= \iint_G f(x,y) dx dy = \int_0^{\pi/2} dy \int_0^\pi f(x,y) dx = \\
 &= \int_0^{\pi/2} dy \cdot e^{\sin y} \int_0^\pi \sin(x+y) dx = - \int_0^{\pi/2} e^{\sin y} dy [\cos(\pi+y) - \cos y] = \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{\sin y} \cos y dy = 2 [e^{\sin \frac{\pi}{2}} - e^0] = 2(e-1) .
 \end{aligned}$$

Voorbeeld 5. Gevraagd  $\int_0^\infty y^5 dy \int_{y^2}^\infty \frac{dx}{1+x}$  .

Daar de binnenste integraal te moeilijk is, schrijven wij eerst een dubbel-integraal. Het gebied G is het gebied boven de x-as, dat rechts van de parabool  $y^2 = x$  ligt. Dit gebied verdelen wij in repen evenwijdig met de y-as, dan

$$\int_0^{\infty} y^5 dy \int_{y^2}^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} = \iint_G \frac{y^5}{1+x^8} dx dy = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} \int_0^{\sqrt{x}} y^5 dy =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} \cdot \frac{1}{6} x^3 = \frac{1}{24} \int_0^{\infty} \frac{dx^4}{1+x^8} = \frac{1}{24} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{24} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{48},$$

waarbij:  $x^4 = t = \tan \varphi$ .

Voorbeeld 6. Gevraagd  $\iint_G \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^2}$  over  $G: 4x^2 + y^2 \geq 1$ .

Wij voeren poolcoördinaten in. De vergelijking van de ellips  $4x^2 + y^2 = 1$  in poolcoördinaten is  $r^2(4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1$ . De integraal gaat over in

$$\iint_G \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^2} = \iint_G \frac{r dr d\varphi}{r^4} = 4 \iint_{\frac{1}{4}G} \frac{dr d\varphi}{r^3} =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}}^{\infty} \frac{dr}{r^3} = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \left[ -\frac{1}{r^2} \right]_{\frac{1}{\sqrt{4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}}^{\infty} =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} (4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{5\pi}{2}.$$

Voorbeeld 7. Gevraagd de inhoud die wordt ingesloten door de cilindervormen  $x^2 + y^2 = 1$  en  $x^2 + z^2 = 1$ . Wij beschouwen het lichaam als de cilinder op  $x^2 + y^2 = 1$  in het  $xOy$ -vlak, die wordt afgeknot door de grafiek van  $z = \sqrt{1-x^2}$ . De gevraagde inhoud is dus

$$8 \iint_G \sqrt{1-x^2} dx dy,$$

waarbij  $G$  het eerste kwadrant van  $x^2 + y^2 \leq 1$  is.

Verdeel  $G$  in repen evenwijdig aan de  $y$ -as, dan

$$8 \iint_G \sqrt{1-x^2} dx dy = 8 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = 8 \int_0^1 (1-x^2) dx = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

Voorbeeld 8. Gevraagd de inhoud van het lichaam dat wordt bepaald door

$$0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq z^2 - x^2 - y^2.$$

Dit lichaam blijkt te zijn een kegel met  $\emptyset$  als top en de z-as als as.

De grondcirkel is de cirkel in  $z = 1$ , die als projectie op het xOy-vlak heeft de cirkel  $x^2 + y^2 = 1$ .

Noem deze projectie G, dan is de gevraagde inhoud (als functies worden  $z = 1$  en  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  beschouwd)

$$\begin{aligned} \iint_G 1 \cdot dx dy - \iint_G \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy &= \pi - \iint_G r \cdot r dr d\phi = \\ &= \pi - 4 \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^1 r^2 dr = \pi - 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \pi. \end{aligned}$$

Door de stelling van deze paragraaf toe te passen op een drievoudige integraal vinden we:

$$\iiint_G f d\mu = \int_{\text{over alle repen in G}} \left[ \iint_{\text{willekeurige reep}} f d\mu \right].$$

Op de binnenste integraal passen we de stelling nogmaals toe. Het resultaat kan beschreven worden als volgt.

G zij het gebied in  $\mathbb{R}^3$ . Op G zij gedefinieerd  $f(x, y, z)$ .

Laat G liggen tussen en geraakt worden door de vlakken  $x = a$  en  $x = b$ , beide dus loodrecht op de x-as.

Breng aan een willekeurig vlak loodrecht op de x-as en laat de doorsnede van dit vlak met G liggen tussen en geraakt worden door de vlakken

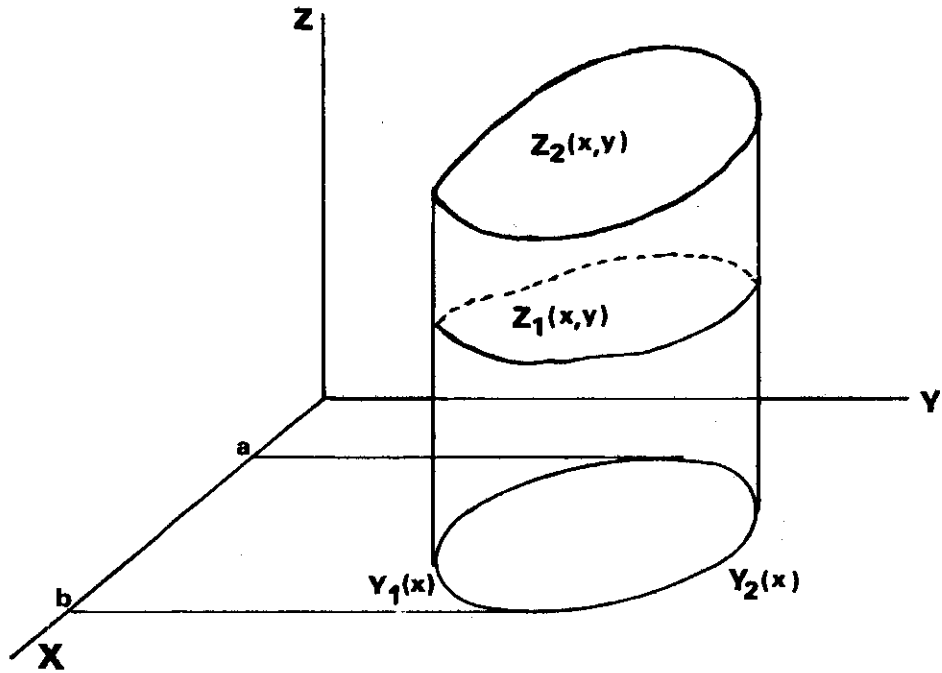
$$y = y_1(x) \quad \text{en} \quad y = y_2(x).$$

Breng aan een willekeurige verticale rechte in het willekeurige vlak en laat deze rechte de doorsnede met G snijden in de punten

$$z = z_1(x, y) \quad \text{en} \quad z = z_2(x, y).$$

Dan is

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$



Voorbeeld 9. Gevraagd  $\iiint \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$  over het gebied G in het eerste octant dat wordt begrensd door de coördinaatvlakken en het vlak  $x+y+z = 1$ .

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3} &= \int_{x=0}^1 dx \int_{y=0}^{1-x} dy \int_{z=0}^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[ \frac{-1}{2(x+y+z+1)^2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} = \\ &= -\frac{1}{8} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(x+y+1)^2} = \\ &= -\frac{1}{8} \int_0^1 (1-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[ \frac{-1}{x+y+1} \right]_{y=0}^{y=1-x} = \\ &= -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right] = \frac{1}{2} \log 2 - \frac{5}{16}. \end{aligned}$$



Voorbeeld 10. Gevraagd  $\iiint \frac{yz}{x^2} dx dy dz$  over de oneindig lange balk, die wordt beschreven door  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ ,  $1 \leq x$ .

$$\iiint \frac{yz}{x^2} dx dy dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x^2} \int_0^1 y dy \int_0^1 z dz = \frac{1}{4}.$$

Voorbeeld 11. Gevraagd het traagheidsmoment t.o.v. de z-as van de homogene kubus  $|x| \leq h$ ,  $|y| \leq h$ ,  $|z| \leq h$ .

$$\begin{aligned} I &= \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_{-h}^h dz \int_{-h}^h dy \int_{-h}^h (x^2 + y^2) dx = \\ &= 2h \int_{-h}^h dy \left( \frac{2}{3} h^3 + 2hy^2 \right) = \frac{16}{3} h^5. \end{aligned}$$

Voorbeeld 12. Gevraagd  $\iiint \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$  over  $G : |z| \geq 3$ .

1e manier: met cylindercoördinaten  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$ .

Dan

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{r dr d\varphi dz}{(z^2 + r^2)^2} &= 2 \int_3^\infty dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^2} = \\ &= - \int_3^\infty dz \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{z^2 + r^2} \right]_{z=0}^{z=\infty} d\varphi = 2\pi \int_3^\infty \frac{dz}{z^2} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

2e manier: met bolcoördinaten  $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = \rho \cos \theta$

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\rho}{\rho^4} &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{3/\cos \theta}^\infty \frac{\sin \theta}{\rho^2} d\rho = \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \left[ -\frac{1}{\rho} \right]_{3/\cos \theta}^\infty = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 13. Gevraagd het traagheidsmoment t.o.v. de z-as van het lichaam G, dat door het vlak  $z = x$  wordt afgesneden van de omwentelingsparaboloïde  $x^2 + y^2 = z$ . Wij voeren cylindercoördinaten in; dan is de vergelijking van het vlak  $z = r \cos \varphi$  en van de paraboloïde  $z = r^2$ .

Voor de projectie van de snijfiguur geldt  $r = \cos \varphi$ .

$$\begin{aligned} T &= \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint r^3 dr d\varphi dz = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^3 dr \int_{r^2}^{r \cos \varphi} dz = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} dr [r^4 \cos \varphi - r^5] = \frac{1}{15} \int_0^{\pi/2} \cos^6 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{96} \text{ (zie 3.5.4)}. \end{aligned}$$

Stelling van Guldin (1577-1643)

De inhoud van een omwentelingslichaam is gelijk aan het product van de oppervlakte van een meridiaandoorsnede en de lengte van de baan die het zwaartepunt van de meridiaandoorsnede bij de wenteling aflegt.

Bewijs. Stel dat het omwentelingslichaam L ontstaat door wenteling om de z-as van de in het xOz-vlak gelegen schijf G. Wij gebruiken cylindercoördinaten.

$$\text{Inhoud} = \iiint_L dx dy dz = \iiint_L r dr d\varphi dz = 2\pi \iint_G r dr dz = 2\pi \iint_G x dx dz .$$

Voor de x-coördinaat  $\xi$  van het zwaartepunt van G geldt

$$\xi \iint_G dx dz = \iint_G x dx dz , \text{ dus}$$

$$\text{Inhoud} = 2\pi \xi . \text{ Opp. } G.$$

Voorbeeld 14. Gevraagd de inhoud van het lichaam, begrensd door

$$[\sqrt{x^2 + y^2} - a]^2 + z^2 = b^2 , \quad (a > b).$$

Uit het onderzoek van de doorsnede met  $x = 0$  en met  $z = 0$  blijkt, dat het lichaam een torus is. De inhoud is dus

$$2\pi a . \pi b^2 = 2\pi^2 ab^2 .$$

### 8.3. Enkele formules voor lengte en oppervlakte

Naast de reeds behandelde voorbeelden kunnen we, uitgaande van hetzelfde beginsel van verdelingen in brokken en limietovergang, formules afleiden voor de lengte van gebogen krommen en voor de oppervlakte van ronde oppervlakken. We sommen hier de formules zonder meer op.

1. De lengte van de kromme met vergelijking  $y = f(x)$  tussen de punten  $(a, f(a))$  en  $(b, f(b))$  met  $a < b$  is:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx .$$

2. Is  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  een parametervoorstelling van een kromme dan is de lengte tussen

$(x(\alpha), y(\alpha))$  en  $(x(\beta), y(\beta))$  met  $\alpha < \beta$ :

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt .$$

3. Is  $r = r(\varphi)$  de vergelijking van een kromme in poolcoördinaten dan is de lengte tussen  $(\varphi_1, r(\varphi_1))$  en  $(\varphi_2, r(\varphi_2))$  met  $\varphi_1 < \varphi_2$ :

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + (r(\varphi))^2} d\varphi .$$

4. Is  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$  de parametervoorstelling van een kromme in  $\mathbb{R}^3$  dan is de lengte:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt .$$

5. Is  $z = f(x, y)$  met  $(x, y) \in G$  een oppervlak dan is de oppervlakte boven  $G$ :

$$\sigma = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy .$$

6. In cylindercoördinaten is dan  $z = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  en

$$\sigma = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} r dr d\varphi .$$

## Hoofdstuk 9. Reeksen

### 9.1. Convergentie en divergentie

Eindig veel getallen  $a_1, \dots, a_N$  hebben een som, zeg  $S_N$ . Dus

$$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N = \sum_{n=1}^N a_n .$$

Beschouw nu een oneindige rij getallen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  en vorm de rij van de zgn. partiële sommen:

$$S_1 := a_1 ; S_2 := a_1 + a_2 ; S_3 := a_1 + a_2 + a_3 ; \dots ;$$

$$S_N := a_1 + a_2 + \dots + a_N ; \dots .$$

De uitdrukking

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots (= \sum_{n=1}^{\infty} a_n)$$

noemen we een (oneindige) reeks; de  $N^{\text{de}}$  partiële som  $S_N$  is dus de som van de eerste  $N$  termen uit de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Definitie: Als  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$  bestaat en gelijk is aan  $S$  dan heet de oneindige reeks  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  convergent met som  $S$ ; als  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$  niet bestaat dan heet de reeks divergent en dan heeft hij geen som.

#### Voorbeelden:

1)  $1 + r + r^2 + \dots$ ;  $a_n = r^{n-1}$ ;  $S_N = \frac{1 - r^N}{1 - r}$  voor  $r \neq 1$ . De oneindige meetkundige reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$  is convergent als  $|r| < 1$  met som  $S = \frac{1}{1 - r}$  en is divergent als  $|r| \geq 1$ .

2)  $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ ;  $a_n = 1$ ;  $S_N = N$  is divergent

$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ ;  $a_n = (-1)^{n-1}$ ;  $S_N$  afwisselend 0 en 1

( $S_N = \frac{1}{2} + (-1)^{N-1} \frac{1}{2}$ ) is eveneens divergent.

- 3) Ook de oneindige rekenkundige reeks  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ ;  $a_n = n$ ;  
 $S_N = \frac{1}{2}N(N + 1)$  is divergent omdat  $S_N \rightarrow \infty$  als  $N \rightarrow \infty$ .
- 4)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ ;  $a_n = \frac{1}{n}$ , de harmonische reeks. Deze is divergent omdat  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$ , i.h.a.  $\sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ . Dus  $S_{2^{k+1}} > \frac{(k+1)}{2}$ . Hieruit volgt  $S_N \rightarrow \infty$  als  $N \rightarrow \infty$ .
- 5)  $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots$ ;  $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ .  $S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$ ;  
 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 1$ . De reeks is dus convergent en  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ .

Een van de eerste doeleinden die we nastreven is stellingen te bewijzen die ons in staat stellen tot convergentie of divergentie van een reeks te besluiten op grond van direct te controleren eigenschappen van de termen  $a_n$  en met omzeiling van het vaak moeizame uitrekenen van de partiële sommen  $S_N$ . Een voorbeeld van zo'n stelling is de volgende.

Stelling: Als de reeks  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  convergent is dan is  $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = 0$ .

Bewijs:  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{N-1} = S$ ;

dus

$$a_N = S_N - S_{N-1} \rightarrow S - S = 0 \quad \text{als } N \rightarrow \infty.$$

Opmerking: We kunnen deze stelling alleen gebruiken om van sommige reeksen de divergentie te bewijzen; als nl.  $a_N$  niet tot 0 nadert als  $N \rightarrow \infty$  dan is de reeks divergent. (Zie voorbeelden 2 en 3.) Het omgekeerde van de stelling ("als  $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = 0$  dan  $\sum a_n$  convergent") geldt niet zoals blijkt uit het voorbeeld van de harmonische reeks (voorbeeld 4).

We zullen bij het convergentieonderzoek gebruik maken van de volgende plausible (maar op ons niveau van fundering van het begrip "reële getallen" niet te bewijzen) uitspraak over rijen reële getallen.

Stelling: (Van de begrensde monotone rij). Als  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$  en  $a_n \leq M$  voor elke  $n$  dan bestaat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{en} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq M .$$

Opmerking: Er geldt een analoge uitspraak voor monotoon niet-stijgende rijen: Als  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$  en  $a_n \geq M$  dan bestaat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{en} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq M .$$

We gebruiken de voor zich sprekende symbolen voor monotoon niet dalende en niet stijgende rijen  $a_n \nearrow$  en  $a_n \searrow$ .

We bespreken nog één voorbeeld.

Voorbeeld 6:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots; a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} .$$

Nu geldt:

$$S_1 > S_3 > S_5 > \dots > 0$$

$$S_2 < S_4 < S_6 < \dots < 1 .$$

Wegens de zojuist vermelde stelling bestaan de limieten

$$S_o := \lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N-1} \quad \text{en} \quad S_e := \lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N} .$$

Omdat  $|S_{2N} - S_{2N-1}| = \frac{1}{2N}$  zijn  $S_o$  en  $S_e$  gelijk en convergeert de reeks. Noemen we

$$S_o = S_e = S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

dan blijkt bovendien dat  $|S - S_N| < \frac{1}{N+1}$ . Later (§ 9.4) zullen we vermelden dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log 2 .$$

We besluiten deze paragraaf met enige opmerkingen.

Als we in een convergente (divergente) reeks een eindig aantal termen wijzigen dan is de zo gevormde reeks weer convergent (divergent); hetzelfde geldt voor het toevoegen of weglaten van eindig veel termen. (Opgave: bewijs dit!)

We noemden de termen van de reeks  $a_1, a_2, \dots$  soms is het handiger (zie §9.4) de nummering van de termen met 0 te beginnen:  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

## 9.2. Reeksen met uitsluitend niet-negatieve termen

Stelling: Een reeks met niet-negatieve termen is convergent dan en slechts dan als de rij van de partiële sommen begrensd is.

Bewijs: De rij van de partiële sommen is monotoon niet-dalend, zodat het te bewijzen een directe toepassing is van de stelling van de begrensde monotone rij.

N.B. Alle reeksen in deze paragraaf hebben niet-negatieve termen; alle stellingen gelden alleen voor reeksen met niet-negatieve termen.

Stelling: (Vergelijkingsstelling)

- 1) Als  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  convergeert en  $b_n \leq a_n$  voor alle  $n$  dan is ook  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  convergent.
- 2) Als  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  divergeert en  $d_n \geq c_n$  voor alle  $n$  dan is ook  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$  divergent.

Bewijs:

- 1) Als  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$  dan zijn de partiële sommen van  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  begrensd door  $S$  want

$$b_1 + \dots + b_N \leq a_1 + \dots + a_N \leq S .$$

- 2) Als  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  divergeert dan betekent dit dat de partiële sommen naar  $\infty$  naderen ( $c_n$  is immers  $\geq 0!$ ). Omdat  $d_1 + \dots + d_N \geq c_1 + \dots + c_N$  geldt hetzelfde voor de partiële sommen van  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$  die dus ook divergeert.

Voorbeelden:

- 1)  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$  is divergent, omdat  $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$  en  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergent is.
- 2)  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$  is convergent, want  $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}$ ,  $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3}$ ,  $\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3 \cdot 4} \dots$   
 en  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  is convergent (§ 9.1 voorbeeld 5).

Als op den duur  $a_n \leq b_n$  dan noemen we  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  een majorant van  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , en  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  een minorant van  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Aangezien convergentie/divergentie niet beïnvloed wordt door de begintermen van de reeks kunnen we de vergelijkingstelling herformuleren als: "een reeks met een convergente majorant is zelf convergent; een reeks met een divergente minorant is zelf divergent". (Bewijs deze herformulering.)

De beide volgende voorbeelden zijn zo belangrijk dat ze in § 9.4 als stellingen geformuleerd zullen worden.

- 3) (Cauchy). Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$  bestaat dan is  $\sum a_n$  convergent als  $\ell < 1$  en divergent als  $\ell > 1$ . (N.B. Als  $\lim \sqrt[n]{a_n}$  niet bestaat of gelijk is aan 1 kan geen conclusie getrokken worden.)
- (i) Laat  $\ell < 1$ , dan is  $\ell < \frac{1}{2}(\ell + 1) < 1$ . Op den duur (zeg voor  $n \geq N$ ) is dan  $\sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{2}(\ell + 1) =: d$  dus  $a_n < d^n$ .  $\sum a_n$  heeft een convergente meetkundige reeks als majorant.
- (ii) Laat  $\ell > 1$ , dan is op den duur  $\sqrt[n]{a_n} > 1$ , dus  $a_n > 1$  en het is niet zo dat  $a_n \rightarrow 0$  als  $n \rightarrow \infty$ .
- 4) (d'Alembert). Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$  bestaat dan is  $\sum a_n$  convergent als  $\ell < 1$  en divergent als  $\ell > 1$  (N.B. zie boven).
- (i) Laat  $\ell < 1$  dan is  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  op den duur (zeg voor  $n \geq N$ ) kleiner dan  $d := \frac{1}{2}(\ell + 1)$ . Dus  $a_{N+1} < da_N$ ;  $a_{N+2} < da_{N+1} < d^2 a_N, \dots, a_{N+k} < d^k a_N, \dots$ , algemeen  $a_n < d^n \frac{a_N}{d^N}$ .  $\sum a_n$  heeft een convergente meetkundige reeks als majorant.
- (ii) Als  $\ell > 1$  dan is  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  op den duur groter dan  $a_n$  en dan is het niet zo dat  $a_n \rightarrow 0$  als  $n \rightarrow \infty$ .

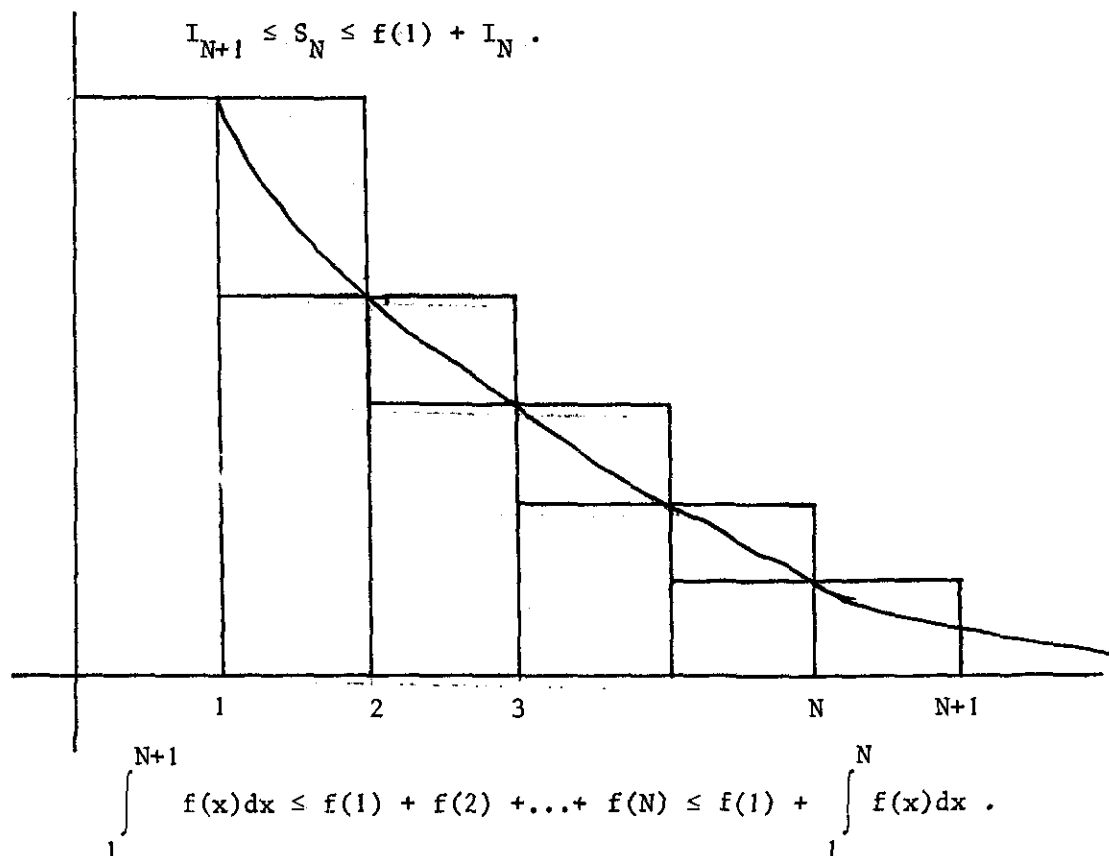


Voor het toepassen van de vergelijkingsstelling zijn twee dingen nodig: allereerst moeten we vooraf een idee hebben of de reeks convergeert of divergeert omdat we anders niet weten of we naar een majorant of een minorant moeten zoeken; ten tweede moeten we de beschikking hebben over reeksen waarvan we al weten of ze convergeren of divergeren om ze als bekende leden in de vergelijking te gebruiken.

Voor het eerste helpt ervaring, voor het tweede de volgende stelling

Stelling: (Integraalmerk). Laat  $f(x)$  een continue, monotoon dalende, niet-negatieve functie zijn op  $[1, \infty)$ , dan is  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  dan en slechts dan convergent als  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N f(x) dx$  bestaat.

Bewijs: (zie figuur). Als we wederom  $f(1) + f(2) + \dots + f(N) =: S_N$  noemen en  $I_N := \int_1^N f(x) dx$  dan zijn de rijen  $S_1, S_2, S_3, \dots$  en  $I_1, I_2, I_3, \dots$  beide monotoon niet dalend. De begrensdsheid (en dus convergentie) van een van beide heeft de begrensdsheid van de andere tot gevolg omdat



Met behulp van de terminologie uit § 3.4 blz. 41 kunnen we ook zeggen:  $\sum f(n)$  convergeert dan en slechts dan als  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  bestaat.

Voorbeelden:

5)  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$  is convergent omdat

$$\int_1^N \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{N} \rightarrow 1 \quad \text{als } N \rightarrow \infty .$$

6)  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$  is divergent omdat

$$\int_1^N \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{N} - 1) \rightarrow \infty \quad \text{als } N \rightarrow \infty .$$

7)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  is divergent omdat

$$\int_1^N \frac{dx}{x} = \log N \rightarrow \infty \quad \text{als } N \rightarrow \infty .$$

Stelling:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  is convergent als  $p > 1$  en divergent als  $p \leq 1$ .

Bewijs: Als  $p > 0$  is  $\frac{1}{x^p}$  een dalende functie. Voor  $p > 0$ ,  $p \neq 1$  is

$$\int_1^N \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} (N^{1-p} - 1) ;$$

als  $p = 1$ , zie voorbeeld 7; voor  $p \leq 0$  is het niet zo dat  $n^{-p} \rightarrow 0$  als  $n \rightarrow \infty$ .

De reeksen  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  zijn naast de meetkundige reeksen de meest gebruikte in de vergelijkingstelling.

We besluiten deze paragraaf met nog enkele voorbeelden.

8)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$  is convergent. Immers:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$ ; dus op den duur is

$$\sin \frac{1}{n^2} < 2 \frac{1}{n^2};$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$  is convergent en volgens de vergelijkingstelling is  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$

dus ook convergent.

9)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$  is divergent. Immers:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$  dus op den duur is

$$\sin \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \frac{1}{n};$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$  is divergent en volgens de vergelijkingstelling is  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$  dus

ook divergent.

10)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$  is convergent, want  $\frac{1}{1+n^2} < \frac{1}{n^2}$  en  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  is convergent. We

kunnen dit ook behandelen met het integraalmerk. We moeten dan laten

zien dat  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$  bestaat. Een dergelijke integraal hebben we al eerder

ontmoet (blz. 108). Als we substitueren  $x = \tan t$  gaat de integraal over

in  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} dt = \pi/4$ . (Zie ook § 9.4 voorbeeld 15.)

### 9.3. Absolute convergentie

We beschouwen nu ook reeksen die negatieve termen hebben.

Definitie: De reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heet absoluut convergent indien  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  convergent is.

Stelling: Een reeks die absoluut convergent is, is convergent.

Bewijs: Laat  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  convergent zijn; we moeten bewijzen dat dan  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  convergeert, d.w.z. dat  $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$  naar een limiet nadert als  $N \rightarrow \infty$ .

We definiëren:

$$P_N := \sum_{n=1}^N |a_n| .$$

Dan is  $P_N \uparrow$  en krachtens het gegeven is de rij  $P_N$  convergent, zeg

$P_N \rightarrow P$ . Beschouw:

$$Q_N = (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \dots + (a_N + |a_N|) = S_N + P_N .$$

Nu is  $Q_N \uparrow$  terwijl de rij  $Q_N$  tevens begrensd is, daar

$$Q_N \leq (|a_1| + |a_1|) + (|a_2| + |a_2|) + \dots + (|a_N| + |a_N|) = 2P_N \leq 2P ;$$

dus  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_N$  bestaat.

Omdat  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N$  bestaat en  $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N$  bestaat, bestaat ook

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} (Q_N - P_N) .$$

#### Opmerkingen:

- 1) Het is niet zo dat een convergente reeks ook absoluut convergeert. Als voorbeeld nemen we  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$  waarvan we in § 9.1 voorbeeld 6 aangetoond hebben dat deze convergeert, terwijl  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  divergeert (§ 9.1 voorbeeld 4).

2) Het onderzoek naar absolute convergentie kan geschieden met de hulpmiddelen uit § 9.2. Het onderzoek naar convergentie van reeksen met niet noodzakelijk positieve termen is in het algemeen zeer lastig. Voor onze doeleinden zal het bijna steeds voldoende zijn slechts de absolute convergentie te onderzoeken. Slechts één stelling zullen we leren kennen (in § 9.5) waaruit de convergentie van sommige reeksen volgt, zonder dat er van absolute convergentie sprake is.

#### 9.4. Machtreeksen

Een oneindige reeks heet een machtreeks in  $x$  als hij luidt:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad (1)$$

De  $(N+1)^e$  term van de machtreeks is  $a_N x^N$ .

Merk op dat elke partiële som een veelterm is

$$a_0 + a_1x + \dots + a_N x^N .$$

We zullen zien dat machtreeksen als voorstellingen van een grote klasse functies gebruikt kunnen worden. Allereerst onderzoeken we het convergentiegedrag voor verschillende waarden van  $x$ .

Stelling: Als de machtreeks convergeert voor  $x = \xi$  dan convergeert deze absoluut voor elke  $x$  met  $|x| < |\xi|$ .

Bewijs: Voor  $\xi = 0$  valt er niets te bewijzen. Stel dus  $\xi \neq 0$ . Daar  $\sum a_n \xi^n$  convergeert, is  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \xi^n = 0$ . Op den duur is dus  $|a_n \xi^n| < 1$ . Maar dan is

$$|a_n x^n| = |a_n \xi^n| \cdot \left| \frac{x}{\xi} \right|^n < \left| \frac{x}{\xi} \right|^n .$$

Voor elke  $x$  in  $\langle -|\xi|, |\xi| \rangle$  heeft  $\sum |a_n x^n|$  dus een convergente meetkundige reeks als majorant; voor zulke  $x$  is  $\sum |a_n x^n|$  dus convergent. q.e.d.

Gevolg: Voor een machtreeks zijn er dus drie mogelijkheden:

- 1) De machtreeks convergeert alleen voor  $x = 0$
- 2) Er is een getal  $R > 0$  zó dat de machtreeks absoluut convergeert voor alle  $x \in \langle -R, R \rangle$  en divergeert voor  $|x| > R$ .
- 3) De machtreeks convergeert voor alle  $x$ .

Het getal  $R$  in het geval 2 heet de convergentiestraal van de machtreeks; in de gevallen 1 en 3 zeggen we ook wel dat de machtreeks convergentiestraal 0 resp.  $\infty$  heeft.

Voorbeelden:

1)  $1 + x + 2x^3 + (3!)x^3 + (4!)x^4 + \dots$

(N.B.  $n! = 1.2.3\dots n$ ). Deze machtreeks heeft convergentiestraal 0; als  $x \neq 0$  is  $m|x| > 1$  voor voldoende grote  $m$ , zodat  $(n!)|x|^n \rightarrow \infty$  als  $n \rightarrow \infty$ .

2)  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

Deze machtreeks is een meetkundige reeks met reden  $x$ ;  $R = 1$ , want er is convergentie voor  $|x| < 1$  en divergentie voor  $|x| > 1$ .

3)  $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Deze reeks convergeert voor elke waarde van  $x$ , dus  $R = \infty$ . Om de absolute convergentie te bewijzen, merken we op dat:

$$\frac{|x|^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{|x|^{n-1}} = \frac{|x|}{n} \rightarrow 0 \quad \text{als } n \rightarrow \infty,$$

zodat de convergentie volgt uit § 9.2 voorbeeld 4 (d'Alembert).

We merken op dat voor  $|x| = R$  in het algemeen ( $R > 0$ ) niets gezegd kan worden. Dit blijkt uit de volgende drie voorbeelden.

4)  $1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots$

Deze reeks convergeert absoluut voor  $|x| \leq 1$  (dit volgt uit eerdere resultaten) en divergeert voor  $|x| > 1$  (als  $|x| > 1$  gaat  $\frac{|x|^n}{n}$  niet naar 0 als  $n \rightarrow \infty$  omdat  $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{|x|} = |x| \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} > 1$  op den duur). We

hebben dus  $R = 1$  en de reeks convergeert tevens voor  $x = R$  en  $x = -R$ .

5)  $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

Meetkundige reeks; deze convergeert voor  $|x| < 1$  en divergeert voor  $|x| \geq 1$ . Dus  $R = 1$  en de reeks divergeert voor  $x = R$  en  $x = -R$ .

6)  $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

Deze reeks convergeert absoluut voor  $|x| < 1$  (omdat  $\frac{|x|^n}{n} < |x|^n$ ) en divergeert voor  $|x| > 1$ . Hier is dus  $R = 1$ , en we bewezen eerder dat de reeks divergeert voor  $x = R$  en convergeert voor  $x = -R$ .

Hoe is het gedrag van  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$  ?

De waarde van de convergentiestraal is vaak niet meteen te zien. We bewijzen nu twee stellingen die in wezen herformuleringen zijn van voorbeelden uit § 9.2.

We beschouwen nog steeds de machtreeks (1).

Stelling: (Cauchy). Als voor de coëfficiënten  $a_n$  uit (1) geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$$

dan is de convergentiestraal van (1) gelijk aan  $\frac{1}{\ell}$ .

Bewijs: Als  $|x| < \frac{1}{\ell}$  dan is  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$  en volgens 9.2 voorbeeld 3 convergeert  $\sum |a_n x^n|$ . Als  $|x| > \frac{1}{\ell}$  is op den duur  $\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$  dus  $a_n x^n$  nadert niet naar 0 en  $\sum a_n x^n$  is divergent.

Opgave: Ga na dat bovenstaande stelling ook juist is voor  $\ell = 0$  en  $\ell = \infty$ .

Stelling: (d'Alembert). Als voor de coëfficiënten  $a_n$  uit (1) geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell ,$$

dan is de convergentiestraal van (1) gelijk aan  $\frac{1}{\ell}$ .

Bewijs: Als  $|x| < \frac{1}{\ell}$  dan is  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} < 1$  en volgens 9.2 voorbeeld 4 convergeert  $\sum |a_n x^n|$ . Als  $|x| > \frac{1}{\ell}$  is op den duur  $\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} > 1$  zó dat  $a_n x^n$  niet naar 0 nadert en  $\sum a_n x^n$  divergeert.

Opmerking: Ook deze stelling heeft zin voor  $\ell = 0$  en  $\ell = \infty$ .

Voorbeelden:

7)  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 3^n) x^n$ . Dan is  $\sqrt[n]{(2^n + 3^n)} \rightarrow 3$  als  $n \rightarrow \infty$ . Volgens de stelling van Cauchy geldt dus dat de convergentiestraal gelijk is aan  $1/3$ .

8)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n$ . Dan is  $\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$  als  $n \rightarrow \infty$ . Volgens de stelling van d'Alembert geldt dus dat de convergentiestraal gelijk is aan 1.

Opmerking: We zullen veelvuldig te maken krijgen met reeksen die machtreeks zijn in een van  $x$  verschillende vorm.

Voorbeeld:

9)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ . We vonden reeds dat deze reeks convergeert voor  $|x-2| \leq 1$  dus  $1 \leq x \leq 3$  en divergeert voor alle andere waarden van  $x$ .

We beschouwen nu een machtreeks met convergentiestraal  $R > 0$ :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

voor waarden van  $x$  die voldoen aan  $|x| < R$ .

Voor elke  $x$  uit het interval  $\langle -R, R \rangle$  heeft de machtreeks een som; noemen we deze  $S(x)$ , dan is  $S(x)$  dus een functie op  $\langle -R, R \rangle$ . Als voorbeeld vermelden we de reeds eerder genoemde meetkundige reeks  $1 + x + x^2 + \dots = S(x) = \frac{1}{1-x}$ . De nu volgende stelling is van het allergrootste belang; we zullen haar bewijs evenwel achterwege moeten laten.



Hoofdstelling: Laat  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$  convergentiestraal  $R > 0$  hebben, dan geldt:

1)  $S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$  is continu en zelfs differentieerbaar op  $\langle -R, R \rangle$ .

2)  $S'(x) = a_1 + 2a_2x^1 + 3a_3x^2 + \dots$  voor  $-R < x < R$ .

3)  $\int_0^x S(t)dt = a_0x + \frac{1}{2} a_1x^2 + \frac{1}{3} a_2x^3 + \dots$  voor  $-R < x < R$ .

4) De machtreeksen voor  $S'(x)$  en  $\int_0^x S(t)dt$ , die volgens 2) en 3) door termsgewijze differentiatie resp. integratie ontstaan zijn, hebben dezelfde convergentiestraal  $R$  als de reeks voor  $S(x)$ .

wijze differentiatie resp. integratie ontstaan zijn, hebben dezelfde convergentiestraal  $R$  als de reeks voor  $S(x)$ .

5) Als de machtreeks ook convergeert voor  $x = R$  dan is  $S(x)$  continu op  $[0, R]$ .

We zullen ons in hoofdstuk 10 bezighouden met de vraag welke functies als som van een machtreeks kunnen worden voorgesteld.

Voorbeelden:

10)  $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$  voor  $|x| < 1$ .

Deze formule ontstaat nl. door differentiatie van

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} .$$

11) Als we bovenstaande meetkundige reeks integreren komt er:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\log(1-x) \quad \text{voor } |x| < 1 .$$

12) Eveneens volgt uit  $1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}$  dat

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{voor } |x| < 1.$$

(Terzijde: uit bewering 5) van de hoofdstelling volgt dat dit ook nog goed is voor  $x = 1$ , dus  $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ , zie § 9.1 voorbeeld 6.)

13)  $\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.5} + \dots$  heeft convergentiestraal  $R = 1$ . We proberen de som te bepalen door uit te gaan van:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = -\log(1-x) \quad \text{voor } |x| < 1;$$

integreren levert:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \dots &= - \int_0^x \log(1-t) dt = \\ &= -x \log(1-x) + x + \log(1-x). \end{aligned}$$

De te bepalen som is dus voor  $x \neq 0$ ,  $|x| < 1$  gelijk aan  $-\log(1-x) + x + 1 + \frac{\log(1-x)}{x}$ ; voor  $x = 0$  is de som 0.

14) Bepaal  $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{10}}{10} \dots$ . Deze som is voor  $|x| < 1$  gelijk aan

$$\begin{aligned} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \dots - \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^9}{9} \dots = \\ = -\log(1-x) + \frac{1}{3} \log(1-x^3). \end{aligned}$$

15) We bespreken nog een heel belangrijk voorbeeld.

Beschouw:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

De machtreeks heeft convergentiestraal  $R = 1$ . (Bewijs dit m.b.v. d'Alemberts stelling toegepast op een machtreeks in  $x^2$ !)

Als we differentiëren vinden we:

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots = \frac{1}{1+x^2},$$

dus

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, \text{ voor } |x| < 1.$$

Een dergelijke integraal hebben we eerder (blz. 113) behandeld met de substitutie  $t = \tan \varphi$ . Als  $y = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ , dan zullen we laten zien dat  $x = \tan y$  en dat  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ . Uit

$$y = \int_{t=0}^{t=x} \frac{dt}{1+t^2}$$

volgt

$$y = \int_{\tan \varphi = 0}^{\tan \varphi = x} d\varphi = \varphi \left| \begin{array}{l} \tan \varphi = x \\ \tan \varphi = 0 \end{array} \right.$$

We zien hieruit dat als we  $\varphi$  zo kiezen dat  $\tan \varphi = 0$  correspondeert met  $\varphi = 0$  dat dan  $y$  het dichtst bij 0 gelegen getal is waarvan de tangens  $x$  is. We concluderen dat  $f(x)$  is de inverse van de functie  $\tan x$  op  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ . Notatie:  $f(x) =: \arctan x$ . De manier waarop wij aan de inverse functie van de tangens op  $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$  gekomen zijn is tamelijk gekunsteld. Natuurlijker is het na de opmerking dat  $\tan$  een één-éénduidige afbeelding van  $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$  op  $\mathbb{R}$  is, de arcustangens als de inverse te definiëren en de afgeleide m.b.v. de inversefunctiestelling (blz. 28-29) uit te rekenen. We krijgen dan het volgende.

Als  $\arctan a = b$  (d.w.z.  $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$  en  $\tan b = a$ ) dan is

$$(\arctan a)' = \frac{1}{(\tan b)'} = (\cos b)^2 = \frac{1}{1 + (\tan b)^2} = \frac{1}{1 + a^2}.$$

Als  $g(x) = \arctan x$  dan is derhalve  $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

(Opgave: Schets de grafiek van  $\arctan x$ !)

Als gevolg van voorbeeld 15 geldt de beroemde (maar tamelijk onpractische) gelijkheid:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots \quad (\text{Wallis}) .$$

### 9.5. Numerieke berekeningen

Als we tot taak zouden krijgen de som van een oneindige reeks te bepalen door optelling van de termen, is dat een onmogelijke opgave. We zijn slechts in staat de som van eindig veel termen uit de reeks te bepalen. In feite zullen we dus in plaats van de som  $S$ , door optelling slechts benaderende partiële sommen,  $S_N$ , kunnen berekenen. Het is van groot belang dat we een schatting hebben van de grootte van de gemaakte fout door de bepaling van  $S_N$  i.p.v.  $S$ . Deze fout, de zgn. afbreekfout, is dus  $|S_N - S|$ .

We zullen in deze paragraaf drie methoden leren kennen om deze afbreekfout te schatten; in § 10.3 zullen we een vierde methode zien. We wijzen erop dat als we de berekende  $S_N$  door middel van een eindige decimale breuk proberen weer te geven, we in het algemeen weer een fout maken, de zgn. afrondfout. Ook deze zullen we moeten kunnen schatten. In het algemeen kunnen we opmerken dat men afbreekfouten kan verkleinen door meer termen te beschouwen; afrondfouten kan men verkleinen door meer decimalen te berekenen.

De eerste methode om een afbreekfout te schatten berust op de vergelijkingsstelling: Vindt een majorant van  $a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \dots$  die een meetkundige reeks is, die we expliciet kunnen sommeren.

Voorbeeld 1: Bereken  $\log 0,9$ .

$$-\log 0,9 = -\log\left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \frac{1}{10^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{10^3} + \dots .$$

Wanneer we al na de tweede term afbreken vinden we

$$\pm \log 0,9 \approx \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \frac{1}{10^2} = 0,105 .$$

Voor de afbreekfout geldt:

$$|\text{fout}| = \frac{1}{3} \frac{1}{10^3} + \frac{1}{4} \frac{1}{10^4} + \dots < \frac{1}{3} \left( \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \dots \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{10^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{2700} .$$

We merken nog op dat de afrondfout in dit voorbeeld nul is.

Voor een tweede methode merken we op dat in de gevallen waar we convergentie met het integraalkenmerk konden bewijzen ook de afbreekfout als integraal te schatten is.

Voorbeeld 2: Bereken

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

met een fout die hoogstens  $10^{-2}$  is.

Als  $\frac{1}{N^2}$  de laatste term is die we mee optellen dan geldt voor de afbreekfout:

$$\frac{1}{N+1} = \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} < \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \dots < \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{N} .$$

Als we daarom als benadering van de oneindige som nemen

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{N^2} + \frac{1}{N+1} = S_N + \frac{1}{N+1}$$

dan is de gemaakte fout  $\leq \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N(N+1)}$ .

Als  $N = 10$  dan is dit  $\frac{1}{110} < \frac{1}{100}$ .

Dus  $S \approx 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} + \frac{1}{11}$ .

Als we dit als een decimale breuk willen schrijven moeten we zoveel decimalen uitrekenen dat de afrondfout kleiner is dan  $\frac{1}{100} - \frac{1}{110}$ . Mogelijkerwijs is het verstandig enige termen meer te nemen om grover af te kunnen ronden.

Terzijde: Uit de Fouriertheorie (§ 12.1) volgt dat

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6} .$$

De derde methode berust op de volgende stelling.

Stelling: (Leibniz). Als  $a_n$  monotoon naar nul daalt indien  $n \rightarrow \infty$ , dan convergeert

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots$$

en

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n - \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} a_n \right| < a_{N+1} .$$

Bewijs: Geheel analoog aan § 9.1 voorbeeld 6 geldt:

$$S_2 < S_4 < S_6 < S_8 < \dots < a_1 ;$$

$$S_1 > S_3 > S_5 > S_7 > \dots > 0 .$$

$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N} =: S_e$  en  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N-1} =: S_o$  bestaan dus, terwijl

$$S_e - S_o = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_{2N} - S_{2N-1}) = - \lim_{N \rightarrow \infty} a_{2N} = 0 .$$

Noem de som  $S$ , dan is:

$$\begin{aligned} |S - S_N| &= a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - a_{N+4} + a_{N+5} - \dots \\ &= a_{N+1} + (-a_{N+2} + a_{N+3}) + (-a_{N+4} + a_{N+5}) \\ &< a_{N+1} . \end{aligned}$$

Voorbeeld 3: Als we met de reeks van Wallis  $\pi$  willen berekenen door te stellen

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{(-1)^{N-1}}{2N-1}$$

dan geldt voor de gemaakte fout:

$$\frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+3} < |\text{fout}| < \frac{1}{2N+1} .$$

We zien dat we veel termen moeten nemen om een redelijke nauwkeurigheid te bereiken. Langzaam convergerende reeksen als die van Wallis zijn numeriek onplezierig.

Veel handiger is het om op te merken dat:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} .$$

(Is nl.  $\arctan \frac{1}{2} = \alpha$  dan is  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$  en  $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ; is  $\arctan \frac{1}{3} = \beta$ , dan is  $\tan \beta = \frac{1}{3}$  en  $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ .  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$  en  $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ , dus  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ .)

Nu is

$$\arctan \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - + \dots$$

$$\arctan \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - + \dots$$

dus bijv.

$$\frac{\pi}{4} \approx \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) .$$

Met slechts deze drie termen is de fout al kleiner dan

$$\frac{1}{7} \left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7}\right) < 0,0013 .$$

Op deze wijze heeft men gevonden:

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288 \dots$$

We bekijken nog een voorbeeld van een berekening.

Voorbeeld 4: Als we  $\log 2$  willen berekenen dan blijkt  $x = 1$  invullen in de reeks:

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

een zeer langzaam convergerende reeks op te leveren.

Als we echter van deze reeks aftrekken:

$$\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

dan vinden we

$$\log(1 + x) - \log(1 - x) = \log \frac{1 + x}{1 - x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right] \quad (|x| < 1) ,$$

Als we  $\log 2$  willen hebben moeten we in de laatste reeks  $x = 1/3$  substitueren en de reeks

$$2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \dots\right]$$

convergeert wel snel.

Bij afbreken na bijv. de 5<sup>de</sup> term is

$$\begin{aligned} 0 < \text{fout} &= 2\left[\frac{1}{11 \cdot 3^{11}} + \frac{1}{13 \cdot 3^{13}} + \dots\right] < \frac{2}{11 \cdot 3^{11}} \left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots\right] = \\ &= \frac{2}{11 \cdot 3^{11}} \frac{9}{8} \approx 0,0000011 . \end{aligned}$$

We vinden zo  $\log 2 = 0,6931458$ , waarbij nog wel afrondfouten geschat zouden moeten worden.



Hoofdstuk 10. Reeksontwikkelingen

10.1. De formules van Taylor en MacLaurin

Stelling: Als  $f(x)$  een veelterm is van graad  $\leq N$ , en  $a$  is een vast getal dan geldt:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \dots + \frac{(x-a)^N}{N!} f^{(N)}(a) . \quad (1)$$

Bewijs: Noem  $x - a = h$ , dan is  $f(x) = f(a + h)$  een veelterm in  $h$  van graad  $\leq N$  dus

$$f(a + h) = A_0 + A_1 h + \dots + A_N h^N .$$

Neem  $h = 0$ ; dan vinden we  $A_0 = f(a)$ .

Differentieer naar  $h$ :

$$f'(a + h) = A_1 + 2A_2 h + \dots + NA_N h^{N-1} .$$

Neem weer  $h = 0$ ; er komt dan  $A_1 = f'(a)$ .

Nogmaals naar  $h$  differentiëren:

$$f''(a + h) = 2A_2 + 2.3A_3 h + \dots + N(N-1)A_N h^{N-2} .$$

Voor  $h = 0$ , krijgen we  $f''(a) = 2A_2$ .

Wederom differentiëren levert:

$$f'''(a + h) = 2.3A_3 + \dots + N(N-1)(N-2)A_N h^{N-3} .$$

En voor  $h = 0$

$$f'''(a) = 2.3.A_3 . \quad \text{enz.}$$

Formule (1) heet de formule van Taylor voor veeltermen. Voor willekeurige functies als  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  geldt deze formule niet. Om toch een soortgelijke voorstelling te krijgen definiëren we voor een willekeurige functie  $R_N(x,a)$  door:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^N}{N!} f^{(N)}(a) + R_N(x,a) . \quad (2)$$

$R_N$  heet de restterm. We hopen dat voor sommige functies, sommige  $a$  en sommige  $x$  geldt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0 .$$

Wanneer dat nl. zo is dan convergeert de reeks

$$f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \quad (3)$$

met som  $f(x)$ . We hebben dan  $f(x)$  voorgesteld als een machtreeks in  $(x-a)$ . De reeks (3) heet de Taylorreeks van  $f$  rond  $x = a$ . Neemt men in het bijzonder  $a = 0$  in (3) dan komt er:

$$f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

en deze reeks heet de MacLaurinreeks van  $f(x)$ .

Het gedrag van  $R_N(x,a)$  (en  $R_N(x,0)$ ) wordt beschreven door de volgende stelling. Als in (2) voor  $R_N$  de uitdrukking (4) wordt ingevuld dan heet (2) de formule van Taylor (of van MacLaurin indien  $a = 0$ ).

Stelling: (Taylor). Er bestaat een  $\theta \in \langle 0,1 \rangle$  zodat in (2) geldt:

$$R_N(x,a) = \frac{(x-a)^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+1)}(a + \theta(x-a)) . \quad (4)$$

Opmerking: Men kan (4) herformuleren als:

$$R_N(x,a) = \frac{(x-a)^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi)$$

waarbij  $\xi$  een punt is op de X-as tussen  $a$  en  $x$ .

Zo is ook duidelijk dat de stelling van Taylor een generalisatie is van de middelwaardestelling uit hoofdstuk 4 (blz. 47). Het bewijs kan zonder erg veel moeite uit dat van de middelwaardestelling worden afgeleid; we laten het echter achterwege. We wijzen er op dat de stelling van Taylor ook de motivering is van beschouwingen op blz. 61. Convergente MacLaurin en Taylor reeksen heten ook wel reeksontwikkelingen van  $f(x)$  rond 0 resp.  $a$ . Uit de hoofdstelling van § 9.4 volgt dat als

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad \text{voor } |x| < R ,$$

de machtreeks tevens de MacLaurinreeks is van de functie  $S(x)$  (ga na!).

We zullen nu de reeksontwikkelingen van een aantal belangrijke functies leren kennen.

1)  $f(x) = e^x$ . Dan is  $f'(x) = e^x$ ,  $f''(x) = e^x$  etc.

De formule van MacLaurin luidt dus

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^N}{N!} + \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} e^{\theta x} .$$

Nu is  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} e^{\theta x} = 0$  voor elke  $x$  (bewijs!), derhalve:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

2)  $f(x) = \sin x$ .

$$f'(x) = \cos x; \quad f''(x) = -\sin x; \quad f'''(x) = -\cos x; \quad f^{(4)}(x) = \sin x .$$

$$f'(0) = 1; \quad f''(0) = 0; \quad f'''(0) = -1; \quad f^{(4)}(0) = 0 .$$

De formule van MacLaurin wordt dus:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \cos \theta x .$$

Merk op dat

$$|(-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \cos \theta x| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!} \rightarrow 0 \quad \text{als } m \rightarrow \infty.$$

Voor elke  $x$  geldt derhalve:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \dots +$$

3)  $f(x) = \cos x$ .

$$f'(x) = -\sin x; f''(x) = -\cos x; f'''(x) = \sin x; f^{(4)}(x) = \cos x.$$

$$f'(0) = 0; f''(0) = -1; f'''(0) = 0; f^{(4)}(0) = 1.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + (-1)^{m+1} \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \cos \theta x.$$

De reeksontwikkeling luidt:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \dots .$$

Deze reeks convergeert voor elke waarde van  $x$ .

4)  $f(x) = (1+x)^d$ ;  $d$  willekeurig constant.

Als  $d$  een natuurlijk getal is, is  $R_N(x,0) = 0$  voor  $N \geq d$ . De MacLaurinreeks breekt dan af.

Laat  $d$  niet natuurlijk zijn. We berekenen:

$$f'(x) = d(1+x)^{d-1} \qquad f'(0) = d$$

$$f''(x) = d(d-1)(1+x)^{d-2} \qquad f''(0) = d(d-1)$$

$$f'''(x) = d(d-1)(d-2)(1+x)^{d-3} \qquad f'''(0) = d(d-1)(d-2)$$

$$f^{(4)}(x) = d(d-1)(d-2)(d-3)(1+x)^{d-4} \qquad f^{(4)}(0) = d(d-1)(d-2)(d-3)$$

Men kan bewijzen dat de restterm naar nul nadert als  $N \rightarrow \infty$  voor  $|x| < 1$ .

Voor  $|x| < 1$  hebben we dus de MacLaurinreeks:

$$(1+x)^d = 1 + \frac{d}{1!} x + \frac{d(d-1)}{2!} x^2 + \frac{d(d-1)(d-2)}{3!} x^3 + \\ + \frac{d(d-1)(d-2)(d-3)}{4!} x^4 + \dots .$$

Vanwege het grote belang is het nuttig de belangrijkste reeksontwikkelingen van buiten te kennen. Dit zijn de zojuist afgeleide reeksen voor  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  en  $(1 + x)^d$  en de in § 9.4 afgeleide reeksen voor  $\log(1 + x)$  en  $\arctan x$ . Van deze hebben de reeksen van  $e^x$ ,  $\sin x$  en  $\cos x$  convergentiestraal  $\infty$ ; die van  $(1 + x)^d$ ,  $\log(1 + x)$  en  $\arctan x$  hebben convergentiestraal 1.

Bij het opstellen van reeksontwikkelingen maakt men vaak met profijt gebruik van het feit dat men machtreeksen als veeltermen kan vermenigvuldigen:

Stelling: Als

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

en

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

dan is

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \dots$$

Voorbeelden:

$$1) \frac{e^x}{1+x} = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

Deze ontwikkeling geldt voor  $|x| < 1$ .

2) De ontwikkeling als machtreeks van  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  krijgen we door in de MacLaurinreeks voor  $(1+x)^d$  voor  $d = -\frac{1}{2}$  te nemen en  $x$  door  $-x^2$  te vervangen.

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + (-\frac{1}{2})(-x^2) + (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\frac{1}{2!}(-x^2)^2 + \\ &+ (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\frac{1}{3!}(-x^2)^3 + (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})\frac{1}{4!}(-x^2)^4 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 + \dots \end{aligned}$$

3) In eerste benadering geldt in de buurt van  $x = 0$ :  $(1 + x)^d \approx 1 + dx$  dus  
bijv.  $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2} x$ .

4) Ontwikkel  $\frac{1}{4 + x^2}$ .

$$\frac{1}{4 + x^2} = \frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{-1} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{64} + \dots\right);$$

deze ontwikkeling is geldig voor  $|x| < 2$ .

5) Voor  $x > 1$  geldt:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^3} + \frac{3}{8} \frac{1}{x^5} + \frac{5}{16} \frac{1}{x^7} + \dots$$

Dit is een machtreeks in  $\frac{1}{x}$ . Voor  $x < -1$  geldt

$$(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} - \frac{3}{8x^5} - \frac{5}{16x^7} - \dots$$

6) Als gevraagd wordt de Taylorreeks van  $e^x$  rond  $x = \log 2$  staan ons twee wegen open.

(i)  $e^x = e^{\log 2} e^{x - \log 2} = 2e^t$  met  $t = x - \log 2$ , zodat uit

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{3!} t^3 + \dots$$

volgt

$$e^x = 2 \left(1 + x - \log 2 + \frac{(x - \log 2)^2}{2!} + \frac{(x - \log 2)^3}{3!} + \dots\right)$$

(ii) Uit de formule van Taylor volgt, daar

$$\left. \frac{d^n}{dx^n} e^x \right|_{x=\log 2} = e^{\log 2} = 2,$$

dat

$$e^x = 2 + 2(x - \log 2) + 2 \frac{(x - \log 2)^2}{2!} + 2 \frac{(x - \log 2)^3}{3!} + \dots$$

7) Het loont vaak de eenvoudigste uitdrukking van de te ontwikkelen functie te zoeken.

$$\begin{aligned} \cos x \sin x &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) = \\ &= x - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{5!}\right)x^5 - \dots \end{aligned}$$

Veel eenvoudiger is het echter op te merken dat

$$\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \left[ 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \dots \right].$$

8) Ontwikkel  $\sin x$  rond  $x = \frac{\pi}{4}$ .

(i)  $f(x) = \sin x$ ;  $f'(x) = \cos x$ ;  $f''(x) = -\sin x$ ;  $f'''(x) = -\cos x$ ;  
 $f^{(4)}(x) = \sin x$ .

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}; f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}; f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}; f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}; f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

en:

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \left(1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{4!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \dots \right). \end{aligned}$$

(ii)  $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos \frac{\pi}{4} + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin \frac{\pi}{4}$ .

Als we  $x - \frac{\pi}{4}$  afkorten als  $t$  staat er:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sin t + \cos t) = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots + 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \left(1 + t - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right). \end{aligned}$$

10.2. Toepassing van reeksontwikkelingen bij het bepalen van limieten

Eerst voorbeelden:

1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7}{e^x} = 0$  want voor positieve  $x$  is

$$0 < \frac{x^7}{e^x} = \frac{x^7}{1 + x + \dots + \frac{x^8}{8!} + \dots} < \frac{x^7}{\frac{x^8}{8!}} = \frac{8!}{x} \rightarrow 0 \text{ als } x \rightarrow \infty .$$

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$  want voor  $x > 1$  is

$$0 < \frac{\log x}{\sqrt{x}} = \frac{\log x}{e^{\frac{1}{2} \log x}} = \frac{\log x}{1 + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{8} \log^2 x + \dots} < \frac{8}{\log x} \rightarrow 0 \text{ als } x \rightarrow \infty .$$

Stelling:

i) Voor elke  $p$  geldt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0 .$$

ii) Voor  $\alpha > 0$  geldt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 .$$

Bewijs:

i) Als  $p \leq 0$  is het triviaal. Laat  $q$  een natuurlijk getal zijn dat groter is dan  $p$  dan is voor  $x > 0$

$$e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^q}{q!} + \dots > \frac{x^q}{q!} ;$$

$$0 < \frac{x^p}{e^x} < \frac{x^p}{\frac{x^q}{q!}} = \frac{q!}{x^{q-p}} \rightarrow 0 \text{ als } x \rightarrow \infty \text{ omdat } q - p > 0 \text{ is.}$$



ii) In analogie met voorbeeld 2 brengen we deze terug tot i)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{e^{\alpha \log x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\alpha e^t} = 0$$

als  $t = \alpha \log x$ ; merk op dat  $t \rightarrow \infty$  als  $x \rightarrow \infty$  omdat  $\alpha > 0$ .

Meer voorbeelden:

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\log x}{x}} = e^0 = 1.$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \log x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\log t}{t} = 0 \quad \text{als } t = \frac{1}{x}.$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots) = 1.$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x}{2!} + \dots) = 1.$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 - \sin(x^3))^4}{(1 - \cos(x^2))^9} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^3 - x^3 + \frac{x^9}{3!} - \frac{x^{15}}{5!} + \dots]^4}{[1 - 1 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^8}{4!} + \dots]^9} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\frac{1}{3!} - \frac{x^6}{5!} + \dots]^4}{[\frac{1}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots]^9} = \frac{(\frac{1}{6})^4}{(\frac{1}{2})^9} = \frac{2^5}{3^4}.$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^2}{2} + \dots}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \dots}{x} \quad \text{bestaat niet.}$$

### 10.3. Numerieke berekeningen (vervolg)

We zullen in deze paragraaf aan de hand van enige voorbeelden laten zien dat ook de restterm uit de formule van MacLaurin (ev. Taylor) zeer geschikt is om de afbreekfout bij numerieke berekeningen te schatten.

#### Voorbeelden:

1) Bereken  $e$  met een fout van ten hoogste  $10^{-4}$ . We hebben

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^N}{N!} + \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} e^{\theta x},$$

dus

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{N!} + \frac{e^{\theta}}{(N+1)!}.$$

We willen nu  $N$  zo groot hebben dat  $\frac{e^{\theta}}{(N+1)!} < 10^{-4}$ . Daar  $e^{\theta} < e < 3$ , is hieraan voldaan als  $\frac{3}{(N+1)!} < 10^{-4}$  dus als  $(N+1)! > 30.000$  dus  $N = 7$ .  
Als we dus stellen

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = \frac{13700}{5040}$$

is de fout ten hoogste  $\frac{3}{40320}$ .

We hebben dus gevonden:

$$\frac{13700}{5040} < e < \frac{13700}{5040} + \frac{3}{40320}.$$

Willen we op decimale breuken overgaan dan houden we de afrondfout volledig onder controle als we het linkereindpunt van het gevonden interval naar beneden afronden en het rechtereindpunt naar boven; we vergroten dus het interval. In ons geval:

$$2,71825 < e < 2,71833,$$

want

$$2,71825 < \frac{13700}{5040} \quad \text{en} \quad 2,71833 > \frac{13700}{5040} + \frac{3}{40320}.$$

- 2) Bereken  $\sin \frac{1}{10}$  met een fout van ten hoogste  $\frac{1}{1000}$ . De restterm in de reeks van de sinus is in absolute waarde

$$\left| \frac{1}{(2m+1)!} \frac{1}{10^{2m+1}} \cos \frac{\theta}{10} \right| \leq \frac{1}{(2m+1)!} \frac{1}{10^{2m+1}}$$

en dit is al kleiner dan  $\frac{1}{1000}$  als  $m = 1$  want  $\frac{1}{6000} < \frac{1}{1000}$ . Dus  $\sin \frac{1}{10} \approx 0,1$  en de fout is hoogstens  $\frac{1}{6000}$ .

In dit voorbeeld is de afschatting m.b.v. de restterm van MacLaurin dezelfde als die m.b.v. de stelling van Leibniz.

- 3) Het volgende voorbeeld laat zien dat de schatting met majorerende meetkundige reeksen scherper kan zijn dan die met de restterm van MacLaurin.

We berekenen weer

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{N!}.$$

De ene (in voorbeeld 1 gebruikte) schatting is nu:

$$0 < \text{fout} < \frac{e^\theta}{(N+1)!} < \frac{3}{(N+1)!}.$$

Met een majorerende meetkundige reeks krijgt men:

$$\begin{aligned} 0 < \text{fout} &= \frac{1}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+2)!} + \dots \\ &< \frac{1}{(N+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \dots \right] = \frac{1}{(N+1)!} \frac{N+2}{N+1}. \end{aligned}$$

#### 10.4. Machtrees substitutie in differentiaalvergelijkingen

illustreren aan enige voorbeelden het gebruik van machtrekken bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen. Historisch zijn pogingen oplossingen van een speciale vorm van differentiaalvergelijkingen te vinden, aanleiding geweest tot de introductie van het begrip machtreeks.

Voorbeelden:

1)  $y' - xy = 0$ .

(Terzijde: deze differentiaalvergelijking is ook met scheiding van veranderlijken op te lossen. De oplossing is  $y(x) = y(0)e^{\frac{1}{2}x^2}$ .)

Probeer nu  $a_0, a_1, a_2, \dots$  zo te bepalen dat

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

een oplossing is.

$y'(x)$  is dan volgens de hoofdstelling uit § 9.4 gelijk aan

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots \quad \text{als } R > 0 \text{ is.}$$

Als we in  $y' - xy = 0$  substitueren komt er:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots - a_0x - a_1x^2 - a_2x^3 - a_3x^4 - \dots = 0.$$

Stellen we de coëfficiënten van  $x^0, x^1, x^2, \dots$  alle gelijk aan nul dan vinden we:

$$a_1 = 0, \quad 2a_2 = a_0, \quad 3a_3 = a_1, \quad 4a_4 = a_2, \quad \dots, \quad na_n = a_{n-2}; \quad \dots$$

Hieruit volgt:

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$$

$$a_2 = \frac{1}{2} a_0; \quad a_4 = \frac{1}{4} a_2 = \frac{1}{2 \cdot 4} a_0; \quad a_6 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} a_0 \dots$$

$$a_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \dots \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{2n} a_0 = \frac{a_0}{2^n n!}.$$

De oplossing luidt dus:

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} = a_0 e^{\frac{1}{2}x^2} \quad (\text{n.b. } 0! := 1).$$

2)  $y' = x + y^2$ ,  $y(0) = 1$ .

We proberen

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

dan is

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$$

$$y(0) = 1 = a_0$$

en

$$(y(x))^2 = a_0^2 + 2a_0a_1x + (a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0)x^2 + \dots .$$

In de ontwikkeling van  $(y(x))^2$  is de coëfficiënt van  $x^N$  gelijk aan

$$a_0a_N + a_1a_{N-1} + \dots + a_Na_0 .$$

Als we dit in  $y' = x + y^2$  substitueren vinden we door vergelijking van de coëfficiënten van

$$x^0: \quad a_1 = a_0^2 = 1 ;$$

$$x^1: \quad 2a_2 = 1 + 2a_0a_1 ;$$

$$x^2: \quad 3a_3 = a_0a_2 + a_1^2 + a_2a_0 ;$$

$\vdots$

$$x^N: \quad (N+1)a_{N+1} = a_0a_N + a_1a_{N-1} + \dots + a_Na_0 .$$

We kunnen hieruit alle coëfficiënten de een na de ander berekenen:

$$a_0 = 1 ; \quad a_1 = 1 ; \quad a_2 = \frac{3}{2} ; \quad a_3 = \frac{4}{3} ; \quad a_4 = \frac{17}{12} ; \quad a_5 = \frac{93}{60} ; \dots .$$

We vinden zo als mogelijke oplossing:

$$y(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{17}{12}x^4 + \frac{93}{60}x^5 + \dots .$$

Om echter te kunnen stellen dat de gevonden  $y(x)$  ook werkelijk een oplossing is, moeten we nog bewijzen dat de gevonden machtreeks een positieve convergentiestraal heeft. We geven slechts een grove schatting. We zullen bewijzen dat  $0 < a_n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$  voor alle  $n$ . Voor  $n = 0, 1, 2$  is dit in orde; als we het bewezen hebben voor  $a_0, \dots, a_N$  dan volgt voor  $a_{N+1}$  dat:

$$0 < (N + 1)a_{N+1} = a_0 a_N + \dots + a_N a_0 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^0 \left(\frac{3}{2}\right)^N + \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{N-1} + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^N \left(\frac{3}{2}\right)^0 = (N + 1) \left(\frac{3}{2}\right)^N ;$$

dus

$$0 < a_{N+1} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^N \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{N+1} .$$

Voor  $x > 0$  heeft de gevonden reeks dus als majorant:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2} x\right)^n = 1 + \frac{3}{2} x + \left(\frac{3}{2} x\right)^2 + \dots .$$

Deze laatste meetkundige reeks heeft convergentiestraal  $\frac{2}{3}$ . De gevonden reeks convergeert dus zeker voor  $|x| < \frac{2}{3}$  (maar ook misschien nog voor meer waarden van  $x$ ).

We bespreken nog één voorbeeld.

3)  $y'' = y - y \log(1 - x)$  .

Als we ons beperken tot  $|x| < 1$  en stellen

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

dan geldt, daar  $1 - \log(1 - x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

$$y(x)(1 - \log(1 - x)) = a_0 + (a_1 + a_0)x + (a_2 + a_1 + \frac{1}{2} a_0)x^2 + \dots \\ \dots + (a_n + a_{n-1} + \frac{1}{2} a_{n-2} + \dots + \frac{1}{n} a_0)x^n + \dots ,$$

terwijl:

$$y''(x) = 1.2a_2 + 2.3.a_3 x + 3.4a_4 x^2 + \dots + (n + 1)(n + 2)a_{n+2} x^n + \dots .$$

Coëfficiëntenvergelijking na substitutie in de differentiaalvergelijking levert:

$$\begin{aligned} 1.2a_2 &= a_0 \\ 2.3a_3 &= a_1 + a_0 \\ 3.4a_4 &= a_2 + a_1 + \frac{1}{2}a_0 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$(N + 1)(N + 2)a_{N+2} = a_N + a_{N-1} + \frac{1}{2} a_{N-2} + \dots + \frac{1}{N} a_0 .$$

Zoals we van een tweede orde differentiaalvergelijking verwachten, kunnen we twee constanten kiezen. We kunnen nl.  $a_0$  en  $a_1$  willekeurige waarden geven en de overige coëfficiënten van de reeks in  $a_0$  en  $a_1$  uitdrukken. Zoeken we de oplossing  $y(x)$  die voldoet aan de beginvoorwaarden  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$  dan moeten we nemen  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ; we berekenen dan:

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}, \dots \text{ enz.}$$

Het is in dit voorbeeld heel gemakkelijk om met een argumentatie analoog aan die in voorbeeld 2 aan te tonen dat de gevonden oplossing:

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{6} x^4 + \dots$$

convergeert voor  $|x| < 1$ . We kunnen nl. laten zien dat  $0 < a_n \leq 1$  voor alle  $n$ . Voor  $a_0$ ,  $a_1$  en  $a_2$  is dit waar en als we hebben laten zien dat  $0 < a_n \leq 1$  voor  $n = 0, 1, \dots, N$  dan volgt direct

$$0 < (N + 1)(N + 2)a_{N+2} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} \leq N + 1 ;$$

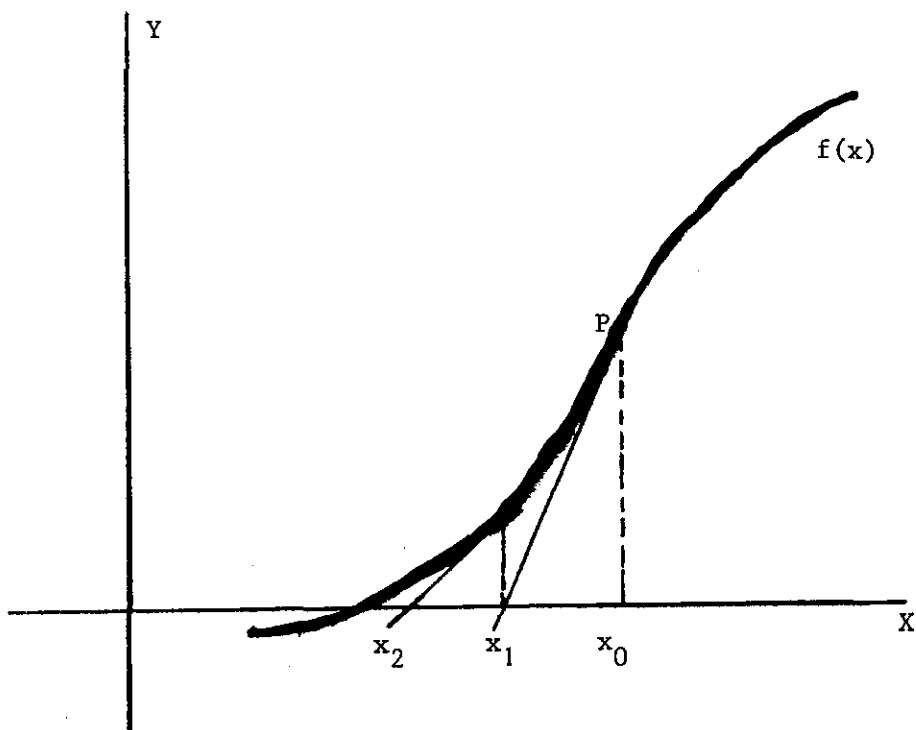
dus  $0 < a_{N+2} \leq \frac{1}{N + 2} \leq 1$ . De schatting van de coëfficiënten in dit voorbeeld is erg grof; het heeft echter in het geheel geen zin subtielere schattingen te proberen omdat de reeksontwikkeling van  $-\log(1 - x)$  ook slechts voor  $|x| < 1$  geldig is.

## Hoofdstuk 11. Iteratiemethoden

Het komt vaak voor dat we van een probleem niet in staat zijn een oplossing direct aan te geven, terwijl we wel over een methode beschikken om uitgaande van een benadering van de oplossing een betere benadering te vinden. In zulke gevallen herhaalt men dan de bewerking telkens met de benadering die in de vorige stap gevonden is. Zulke methoden komen in veel gebieden van de numerieke wiskunde voor; men noemt ze iteratiemethoden (ook: feed back, successieve approximaties). Zonder op de achtergronden of bewijzen in te gaan bespreken we drie voorbeelden.

### 11.1. De methode van Newton

Dit is een methode voor de benadering van wortels van vergelijkingen. Laat  $x_0$  in de buurt van de wortel liggen. De raaklijn in het punt  $P(x_0, f(x_0))$  aan de grafiek van  $y = f(x)$  snijdt de X-as in  $x_1$ . Onder zekere omstandigheden is  $x_1$  een betere benadering voor de wortel dan  $x_0$ . (Zie figuur)





De vergelijking van de raaklijn in P luidt:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) .$$

Voor het snijpunt  $(x_1, 0)$  met de X-as is

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

dus

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} , \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} , \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} , \quad \dots .$$

Het is niet steeds zo dat  $x_1$  een betere benadering van de wortel is. In sommige gevallen convergeert de rij  $x_0, x_1, x_2, \dots$  echter naar de gevraagde wortel als  $n \rightarrow \infty$ .

Voorbeeld:  $f(x) = x^2 - a = 0 \quad (a > 0)$ .

Als  $x_0 > 0$  dan is

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2 - a}{2x_0} = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{a}{x_0} \right) .$$

Uit  $x_1$  vinden we  $x_2$ , daaruit  $x_3$  enz. Algemeen is

$$x_n = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right) .$$

Om  $\sqrt{2}$  te benaderen, nemen we  $a = 2$ . Kies  $x_0 = 1$

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{17}{12} \approx 1,42$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{17}{12} + \frac{24}{17} \right) = \frac{577}{408} \approx 1,41422$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{577}{408} + \frac{816}{577} \right) = \frac{665857}{470832} \approx 1,41421356237 \quad \text{enz} .$$

We proberen nog iets te weten te komen over de fout:  $x_n - \sqrt{2}$ . Nu is

$$\begin{aligned}x_n - \sqrt{2} &= \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right) - \sqrt{2} = \frac{x_{n-1}^2 + 2 - 2\sqrt{2} x_{n-1}}{2x_{n-1}} = \\ &= \frac{(x_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2x_{n-1}}.\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat  $x_n - \sqrt{2} \geq 0$  voor  $n > 0$ ; we benaderen  $\sqrt{2}$  "van boven af". Hieruit volgt:

$$x_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} (x_{n-1} - \sqrt{2})^2.$$

Onze benaderingen convergeren zeer snel naar  $\sqrt{2}$ , want iedere fout is hoogstens gelijk aan het kwadraat van de vorige. Dit betekent dat als na een aantal stappen 5 decimalen goed zijn, na een stap meer 10 decimalen goed zijn en bij de dan volgende stap 20 decimalen. Alle opgeschreven decimalen van  $x_4$  zijn goed.

### 11.2. Contracties

Laat  $f$  een afbeelding zijn van een interval  $[a,b]$  in zichzelf (d.w.z. voor elke  $x$  met  $a \leq x \leq b$  is  $a \leq f(x) \leq b$ ). Een dergelijke afbeelding heet een contractie indien er bestaat een getal  $q$  met  $0 \leq q < 1$ , zódat voor alle  $x_1$  en  $x_2$  uit  $[a,b]$  geldt:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq q|x_1 - x_2|.$$

Het woord contractie betekent samentrekking. Door de afbeelding  $f$  worden alle afstanden verkort tot hoogstens  $q$ -maal de oorspronkelijke waarde, waarbij  $q$  een van  $f$  afhankelijk getal  $< 1$  is.

Stelling: (Contractie-stelling).

(i) Als  $f$  een contractie van  $[a,b]$  is, dan heeft de vergelijking

$$x = f(x)$$

precies één oplossing in  $[a,b]$ .

(ii) Als  $\xi$  de oplossing van  $x = f(x)$  in  $[a, b]$  is en  $x_0 \in [a, b]$  willekeurig dan convergeert de rij  $x_0, x_1 := f(x_0), x_2 := f(x_1), x_3 := f(x_2), \dots$  naar  $\xi$ .

In de situatie van de contractie-stelling kunnen we ook fraaie schattingen geven van de gemaakte fout.

Immers:

$$\begin{aligned} |x_n - \xi| &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - \xi|, \\ |x_n - x_{n+1}| &= |f(x_{n-1}) - f(x_n)| \leq q |x_{n-1} - x_n|, \\ |x_{n+1} - \xi| &= |f(x_n) - f(\xi)| \leq q |x_n - \xi|; \end{aligned}$$

dus

$$|x_n - \xi| \leq q |x_{n-1} - x_n| + q |x_n - \xi|$$

zodat

$$|x_n - \xi| \leq \frac{q}{1-q} |x_{n-1} - x_n|.$$

Dit is een schatting van de fout  $|x_n - \xi|$  uitgedrukt in de grootte van de laatste stap.

Voorbeeld: Zoek de oplossingen van  $x = e^x - 2$ .

We kunnen de vergelijking ook schrijven als  $x + 2 = e^x$ . We tekenen eerst grafieken.

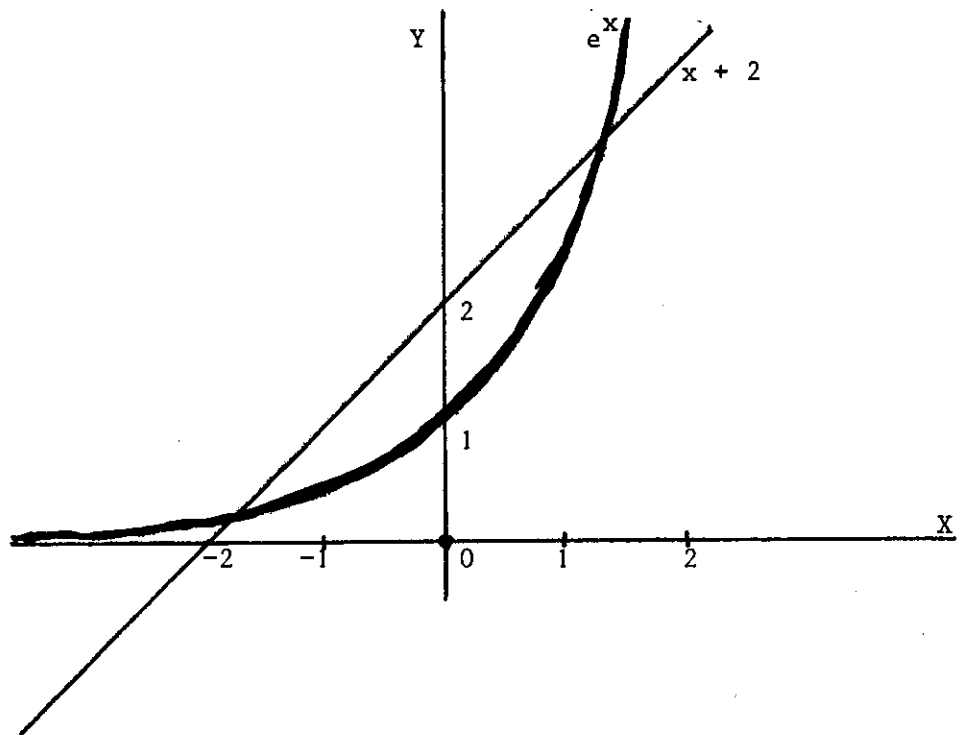
Bij eerste beschouwing blijkt al dat er twee oplossingen zijn één in  $[-2, -1]$  en één in  $[1, 2]$ .

$f(x) = e^x - 2$  is een contractie van  $[-2, -1]$ , want:

(a) als  $-2 \leq x \leq -1$  dan is  $-2 \leq f(x) \leq -1$  (ga na!)

(b) voor  $x_1$  en  $x_2$  in  $[-2, -1]$  is  $f(x_1) - f(x_2) = e^{x_1} - e^{x_2} = e^d(x_1 - x_2)$  wegens de middelwaardestelling, waarbij  $d$  tussen  $x_1$  en  $x_2$  is gelegen, dus  $e^{-2} \leq e^d \leq e^{-1}$ . Hieruit volgt

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq e^{-1} |x_1 - x_2| < \frac{2}{5} |x_1 - x_2|.$$



We passen nu de contractiestelling toe:

$$x_0 := -1$$

$$x_1 = f(x_0) = e^{-1} - 2 = -1,632$$

$$x_2 = f(x_1) = e^{-1,632} - 2 = -1,805$$

$$x_3 = f(x_2) = e^{-1,805} - 2 = -1,835$$

$$x_4 = f(x_3) = e^{-1,835} - 2 = -1,840$$

$$x_5 = f(x_4) = e^{-1,840} - 2 = -1,841 .$$

Volgens de foutenschatting is

$$|x_5 - \xi| < \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} |x_5 - x_4| = \frac{2}{3} \cdot 10^{-3} .$$

(Twee opmerkingen: we spraken niet over afrondfouten; de foutenschatting kan aanzienlijk verscherpt worden). Voor het vinden van de oplossing van  $x + 2 = e^x$  in  $[1,2]$  schrijven we de vergelijking als  $x = \log(x + 2)$ . We merken op dat  $f(x) = \log(x + 2)$  een contractie is van  $[1,2]$ : wederom volgens de middelwaardstelling is

$$|\log(x_1 + 2) - \log(x_2 + 2)| = \frac{1}{d + 2} |x_1 - x_2| \quad \text{met } 1 < d < 2$$

dus

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{3} |x_1 - x_2| .$$

Iteratie volgens de contractiestelling levert:

$$\begin{aligned} x_0 &:= 1 \\ x_1 &= \log 3 = 1,131 \\ x_2 &= \log 3,131 = 1,141 \\ x_3 &= \log 3,141 = 1,145 \\ x_4 &= \log 3,145 = 1,146 \\ x_5 &= \log 3,146 = 1,146 . \end{aligned}$$

Zonder meer decimalen is het proces hiermede afgelopen.

### 11.3. De methode van Picard

Dit is een iteratieve methode om benaderingen te vinden van de oplossing  $y(x)$  van

$$y' = f(x,y) , \quad y(a) = b .$$

We herschrijven eerst het probleem: gelijkwaardig met het gestelde probleem is het vinden van een oplossing  $y(x)$  van de volgende integraalvergelijking:

$$y(x) = b + \int_a^x f(t,y(t))dt .$$

Als  $y_0(x)$  een benadering is van de oplossing dan kan het zijn dat

$$y_1(x) := b + \int_a^x f(t,y_0(t))dt$$

een betere benadering is. Iteratie van de genomen stap betekent nu:

$$y_2(x) := b + \int_a^x f(t, y_1(t)) dt .$$

Algemeen:

$$y_{N+1}(x) := b + \int_a^x f(t, y_N(t)) dt .$$

Het kan zijn dat de rij functies  $y_0(x)$ ,  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , ... convergeert naar een oplossing van de uitgangsvergelijking.

We gaan niet op de theorie in maar bespreken één voorbeeld.

$$y' = x + y^2, \quad y(0) = 0 .$$

Beginnen we met  $y_0(x) \equiv 0$  dan:

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x (t + (y_0(t))^2) dt = \int_0^x t dt = \frac{1}{2} x^2$$

$$y_2(x) = \int_0^x (t + \frac{1}{4} t^4) dt = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{20} x^5$$

$$\begin{aligned} y_3(x) &= \int_0^x (t + \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{20} t^7 + \frac{1}{400} t^{10}) dt = \\ &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{20} x^5 + \frac{1}{160} x^8 + \frac{1}{4400} x^{11}, \text{ enz.} \end{aligned}$$

Opgave: Behandel de vergelijking  $y' = x + y^2$ ,  $y(0) = 0$  ook met machtreeks-substitutie. Het stelsel vergelijkingen waaruit de coëfficiënten berekend worden vonden we in § 10.4 voorbeeld 2.

Contrôleer dat we dan vinden:

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{20} x^5 + \frac{1}{160} x^8 + \frac{7}{8800} x^{11} + \dots .$$

## Hoofdstuk 12. Fourierreeksen

Naast de partiële sommen van machtrekken waarmee men functies in de buurt van een punt (denk aan de Taylorreeks) kan benaderen, wil men soms ook benaderingen vinden die over een heel interval volgens een zeker criterium goed zijn. We zullen in dit laatste hoofdstuk kennismaken - zij het helaas zeer summier en met weglating van alle bewijzen - met een van de belangrijkste methoden die hiervoor ontwikkeld zijn.

### 12.1. Fouriercoëfficiënten

Opmerking: Alle functies die in dit hoofdstuk voorkomen hebben de eigenschap dat ze gedefinieerd zijn in intervallen en dat in elk inwendig punt  $x$  van het interval

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x + h) =: f(x + 0)$$

en

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x - h) =: f(x - 0)$$

bestaan. In de randpunten bestaan alleen eenzijdige limieten.

Bij zo'n functie  $f(x)$  definiëren we de functie " $f(x)$ " door:

$$"f(x)" = \frac{1}{2}(f(x + 0) + f(x - 0)) .$$

Als  $f(x)$  continu is, is derhalve " $f(x)$ " =  $f(x)$ . Voor niet continue functies is " $f(x)$ " in de sprongpunten juist het gemiddelde van de waarden aan "weerszijden" van de sprong.

Voorbeeld: Laat  $f(x)$  gedefinieerd zijn voor  $0 \leq x \leq 2$  door:

$$\begin{aligned} f(x) &= x && \text{als } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) &= 3 - x && \text{als } 1 < x \leq 2 , \end{aligned}$$

dan is " $f(1)$ " =  $3/2$ .

Definitie: Een functie  $f(x)$  heet periodiek met periode  $p$  ( $p > 0$ ) als voor alle  $x$  geldt:

$$f(x + p) = f(x) .$$

Voorbeelden:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  zijn periodiek met perioden  $2\pi$ ,  $4\pi$ ,  $6\pi$ , ...;  $\tan x$  bovendien met perioden  $\pi$ ,  $3\pi$ , ... .

Definitie: Een trigonometrische reeks is een uitdrukking:

$$\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) .$$

Een convergente trigonometrische reeks heeft als som een periodieke functie met periode  $2\pi$ . Laat  $f(x)$  nu gegeven zijn voor  $-\pi < x \leq \pi$ . We vragen nu of we  $f(x)$  voor kunnen stellen als som van een trigonometrische reeks.

Nu berekent men m.b.v. de integralen uit § 8.4.3 dat uit

$$S(x) = \alpha + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

volgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) dx = 2\pi\alpha$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos nx dx = \pi a_n \quad (n \geq 1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin nx dx = \pi b_n \quad (n \geq 1) .$$

We komen er nu toe te definiëren de Fouriercoëfficiënten van  $f(x)$ :

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad n = 1, 2, \dots .$$



De trigonometrische reeks met als coëfficiënten de Fouriercoëfficiënten van  $f(x)$  (met dien verstande dat  $a_0 = \frac{1}{2}a_0!$ ) heet de Fourierreeks van  $f(x)$ .

De hoofdstelling van de Fouriertheorie die we overigens niet precies zullen formuleren, laat staan bewijzen, zegt nu dat onder een aantal voorwaarden geldt:

$$1) \quad "f(x)" = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) ,$$

waarbij  $a_n$  en  $b_n$  de Fouriercoëfficiënten van  $f(x)$  zijn.

2) Voor  $[\alpha, \beta] \subset [-\pi, \pi]$  geldt:

$$\int_{\alpha}^{\beta} "f(x)" dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{2}a_0(\beta - \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{\alpha}^{\beta} \cos nxdx + b_n \int_{\alpha}^{\beta} \sin nxdx) .$$

3) Als  $f(x)$  differentieerbaar is op  $]-\pi, \pi]$  met een afgeleide die een convergente Fourierreeks heeft en als  $f(-\pi+0) = f(\pi-0)$  dan is:

$$"f'(x)" = \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx) .$$

De beweringen 2 en 3 drukken uit dat men de Fourierreeks onder zekere voorwaarden term voor term mag integreren dan wel differentiëren.

Opmerking: De som van de Fourierreeks is buiten  $]-\pi, \pi]$  een periodieke voortzetting met periode  $2\pi$  van " $f(x)$ ". Als de oorspronkelijke functie al periodiek met periode  $2\pi$  op de hele  $\mathbb{R}$  gedefinieerd was convergeert de Fourierreeks dan overal naar " $f(x)$ ".

Voorbeelden:

$$1) f(x) = x \quad -\pi < x \leq \pi .$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nxdx = 0 .$$

(Voor alle oneven functies zijn alle a's gelijk aan nul!)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{-x}{n} (\cos nx)' dx = \\ &= \frac{-2}{\pi n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \\ &= \frac{-2}{n} (-1)^n, \end{aligned}$$

zodat

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi).$$

Voor  $x = \pi$  merken we op dat  $f(\pi - 0) = \pi$ ;  $f(\pi + 0) = -\pi$  (van de periodieke voortzetting van  $f$ ) dus " $f(\pi)$ " = 0; ook de som van de reeks is 0 als  $x = \pi$ .

Als we voor  $x = \frac{\pi}{2}$  nemen, vinden we:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

(Vergelijk dit met § 9.4 voorbeeld 15.)

- 2)  $f(x) = x^2$  voor  $|x| \leq \pi$  en verder periodiek met periode  $2\pi$ . Dan is voor alle  $x$ :  $f(x) = "f(x)"$ .

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = 0 \quad n = 1, \dots$$

(Van elke even functie zijn alle b's gelijk aan nul!)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2.$$

Voor  $n \geq 1$  is

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2 \sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \\ &= \frac{4}{\pi n} \left[ \frac{x \cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{4}{n^2} (-1)^n . \end{aligned}$$

Vanwege de continuïteit van  $x^2$  geldt nu

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} , \quad -\pi \leq x \leq \pi .$$

Voor  $x = \pi$  resp.  $x = 0$  komt er:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

(zie § 9.5 voorbeeld 2).

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} c & \text{voor } -\pi < x < 0 \\ d & \text{voor } 0 \leq x \leq \pi . \end{cases}$$

$c$  en  $d$  zijn constanten. We berekenen de Fouriercoëfficiënten van  $f(x)$ :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} (\pi c + \pi d) = c + d$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} c \int_{-\pi}^0 \cos nx dx + \frac{1}{\pi} d \int_0^{\pi} \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} c \int_{-\pi}^0 \sin nx dx + \frac{1}{\pi} d \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{c-d}{\pi n} ((-1)^n - 1) .$$

Dus 
$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ even is} \\ \frac{-2(c-d)}{\pi n} & \text{als } n \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Als we nu de hoofdstelling toepassen vinden we:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(c+d) - \frac{2(c-d)}{\pi} \left[ \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right] = \\ = \begin{cases} c & \text{als } -\pi < x < 0 \\ d & \text{als } 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2}(c+d) & \text{als } x = 0, x = \pm \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

### 12.2. Fourierreeksen met periode 2L.

Als  $f(x)$  periode  $2L$  heeft kunnen we er door een substitutie een functie met periode  $2\pi$  van maken:

Als  $f(x)$  gedefinieerd is op  $[-L, L]$  en  $y := \frac{2\pi x}{2L} = \frac{\pi x}{L}$  dan is  $g(y) := f\left(\frac{Ly}{\pi}\right)$  gedefinieerd op  $[-\pi, \pi]$ .

Dus

$$\begin{aligned} f(x) = g(y) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny) = \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \end{aligned}$$

waarin

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos ny dy = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin ny dy = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx .$$

Voorbeelden:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 \leq x \leq 5 . \end{cases}$$

Zetten we  $f(x)$  periodiek voort dan ontstaat een functie met periode 10.  
De Fouriercoëfficiënten zijn:

$$a_n = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{3}{5} \int_0^5 \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \begin{cases} 0 & \text{als } n \neq 0 \\ 3 & \text{als } n = 0 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \sin \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{3}{5} \int_0^5 \sin \frac{n\pi x}{5} dx = -\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{n\pi} [\cos \frac{n\pi x}{5}]_0^5 = \\ = \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi} .$$

Voor de Fourierreeks geldt derhalve:

$$"f(x)" = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} = \\ = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{5} + \frac{1}{7} \sin \frac{7\pi x}{5} + \dots \right) .$$

2)  $f(x) = x^2$ ,  $0 < x \leq 2\pi$  en periodiek met periode  $2\pi$ . Bepaal de Fourierreeks van  $f(x)$ .

(i) Op  $[-\pi, \pi]$  wordt  $f(x)$  gegeven door:

$$f(x) = \begin{cases} (x + 2\pi)^2 & \text{voor } -\pi < x \leq 0 \\ x^2 & \text{voor } 0 < x \leq \pi . \end{cases}$$

En verder volgens § 12.1.

(ii) Omdat voor elke periodieke functie met periode  $2L$  geldt:

$$\int_a^{a+2L} g(x)dx = \int_0^{2L} g(x)dx = \int_{-L}^L g(x)dx ,$$

zijn in ons geval de Fouriercoëfficiënten van  $f(x)$  te berekenen uit;

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx .$$

Voor  $n = 0$  vinden we:  $a_0 = \frac{8\pi^2}{3}$ ; voor  $n \neq 0$  komt er uit  $a_n = \frac{4}{n^2}$ ;

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = -\frac{4\pi}{n} , \quad n \geq 1 .$$

Resultaat:

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right) , \quad 0 < x < 2\pi .$$

Voor  $x = 0$  en  $x = 2\pi$  is " $f(x)$ " =  $2\pi^2$ .

Merk op dat op  $0 < x < \pi$  de functie  $x^2$  dus als som van verschillende Fourierreeksen kan optreden: de bovenstaande reeks verschilt van die van voorbeeld 2 uit § 12.1.

3) Beschouw  $f(x) = x^2$  op  $0 < x \leq \pi$  maar nu periodiek met periode  $\pi$ . Ook nu kunnen we de Fourierreeks vinden uit:

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos 2nxdx , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin 2nxdx , \quad n = 1, 2, \dots .$$

We vinden:  $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$ .

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x^2}{2n} \sin 2nx + \frac{x}{2n^2} \cos 2nx - \frac{1}{4n^3} \sin 2nx \right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{2n},$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x^2}{2n} \cos 2nx + \frac{x}{2n^2} \sin 2nx + \frac{1}{4n^2} \cos 2nx \right]_{x=0}^{x=\pi} = -\frac{\pi}{n}.$$

Resultaat:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n} \cos 2nx - \frac{\pi}{n} \sin 2nx \right), \quad 0 < x < \pi.$$

Voor  $x = 0$  en  $x = \pi$  is "f(x)" =  $\frac{1}{2} \pi^2$ .

### 12.3. Sinusreeksen, cosinusreeksen

Beschouwen we de functie f(x) gedefinieerd door:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

en verder periodiek met periode  $2\pi$ . We bepalen de Fourierreeks. De functie is oneven dus alle  $a_n$  zijn nul

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{x^2 \cos nx}{n} + \frac{2x}{n^2} \sin nx + \frac{2 \cos nx}{n^3} \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ (-1)^{n+1} \frac{\pi^2}{n} + (-1)^n \frac{2}{n^3} - \frac{2}{n^3} \right] = \end{aligned}$$

Resultaat

$$x^2 = \frac{2(\pi^2 - 4)}{\pi} \sin x - \pi \sin 2x + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{27} \right] \sin 3x \dots$$

Vergelijken we dit resultaat met § 12.1 voorbeeld 2 en § 12.2 voorbeeld 3, dan komen we tot de volgende conclusie. Als we een functie, gegeven op het interval  $<0, a]$ , willen voorstellen door een Fourierreeks dan kunnen we deze functie periodiek met periode  $a$  voortzetten en dan de Fourierreeks bepalen. Deze bevat dan in het algemeen termen  $\cos \frac{2n\pi}{a} x$  en termen  $\sin \frac{2n\pi}{a} x$ . We kunnen ook: eerst  $f(x)$  als even functie voortzetten tot  $<-a, a]$  en daarna periodiek met periode  $2a$ . De Fourierreeks wordt dan een reeks in  $\cos \frac{n\pi}{a} x$ . Deze reeks heet de cosinusreeks van  $f(x)$ .

We kunnen eveneens  $f(x)$  oneven voortzetten tot  $<-a, a]$  en daarna periodiek met periode  $2a$ . Dan krijgen we een reeks in  $\sin \frac{n\pi}{a} x$ , de sinusreeks van  $f(x)$ .

Opmerking. Dat  $f(x)$  gegeven is op een interval  $<0, a]$  is volkomen willekeurig. Als het interval  $<c, d]$  geweest zou zijn dan passen we de verschuiving  $y := x - c$  toe  $g(y) := f(c + y)$  is dan op  $<0, d-c]$  gedefinieerd.

Nog enige voorbeelden:

1) Bepaal van  $f(x) = 1$  op  $0 < x < 2$  de sinusreeks en de cosinusreeks, en ook de Fourierreeks met periode 2.

Om de sinusreeks te verkrijgen zetten we  $f(x)$  voort tot een oneven functie, die we weer  $f(x)$  noemen.

De sinusreeks is dan de Fourierreeks van

$$f(x) := \begin{cases} -1 & -2 < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \end{cases} .$$

We vinden:

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{n\pi}{2} x dx = \int_0^2 \sin \frac{n\pi}{2} x dx = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) ,$$

dus  $b_n = \frac{4}{n\pi}$  als  $n$  oneven is en  $b_n = 0$  als  $n$  even is.



Resultaat:

$$1 = \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x + \frac{4}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{2} x + \frac{4}{5\pi} \sin \frac{5\pi}{2} x + \dots, \quad 0 < x < 2.$$

(Vullen we  $x = 1$  in dan krijgen we weer de reeks van Wallis.) De cosinusreeks is de Fourierreeks van  $f(x) = 1$  op  $[-2, 2]$ . Derhalve

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 dx = 2$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \cos \frac{n\pi}{2} x dx = \int_0^2 \cos \frac{n\pi}{2} x dx = 0.$$

Derhalve:  $1 = 1$ .

Voor de Fourierreeks met periode 2 berekenen we:

$$a_n = \int_0^2 \cos n\pi x dx$$

$$b_n = \int_0^2 \sin n\pi x dx$$

dus

$$a_0 = 2, \quad a_n = 0, \quad b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

en weer:  $1 = 1$ .

- 2) Bepaal de sinusreeks van  $f(x) = \cos x$  ( $0 < x < \pi$ ). We moeten bepalen de Fourierreeks van een functie, weer geheten  $f(x)$ , en gedefinieerd door:

$$f(x) = \begin{cases} -\cos x & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = 0, x = \pi \\ \cos x & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

We berekenen:

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0.$$

Voor  $n > 1$  is:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(n+1)x + \sin(n-1)x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n-1} \right] = \frac{2n}{\pi(n^2 - 1)} (1 + (-1)^n) . \end{aligned}$$

Voor oneven waarden van  $n$  is  $b_n$  gelijk nul.

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{\pi(4k^2 - 1)} \sin 2kx , \quad 0 < x < \pi .$$

Op analoge wijze berekent men de cosinusreeks van  $\sin x$  ( $0 < x < \pi$ ); dit is de Fourierreeks van  $|\sin x|$  ( $-\pi < x \leq \pi$ ). Het resultaat is:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4k^2 - 1)} \cos 2kx .$$

Deze laatste gelijkheid geldt zelfs voor alle waarden van  $x$ .

#### 12.4. Het isoperimetrisch probleem.

Omdat het optellen van de termen van een trigonometrische reeks fysisch neerkomt op superpositie van harmonische trillingen begrijpt men dat er vele belangrijke toepassingsgebieden zijn van de theorie der Fourierreeksen. In deze toepassingen gaat het meestal om het vinden van oplossingen van partiële differentiaalvergelijkingen, die tevens voldoen aan enige nevencondities.

In het huidige college is er geen tijd hieraan iets te doen.

Om toch een toepassing van Fourierreeksen te hebben bespreken we een van A. Hurwitz (1902) afkomstige behandeling van het isoperimetrische probleem. Dit probleem dat reeds in de oudheid de wiskundigen bezig hield heeft lang op zijn definitieve oplossing moeten wachten. Het probleem is, zoals bekend, het vinden van de vorm van de gesloten kromme met lengte  $\ell$  die de maximale oppervlakte omsluit. Reeds in de oudheid vermoedde men dat dit de cirkel zou zijn.

Analytisch kunnen we de kromme voorstellen door een parametervoorstelling:

$$x = x(s) , \quad y = y(s) , \quad 0 \leq s \leq \ell ,$$

waarbij de parameter  $s$  de booglengte tussen het beginpunt  $(x(0), y(0))$  en het punt  $(x(s), y(s))$  aangeeft.

Dat de kromme gesloten is betekent:

$$x(0) = x(\ell) , \quad y(0) = y(\ell) .$$

(Een touwtje ter lengte  $\ell$  ligt eerst langs de  $s$ -as, beginnend bij  $s = 0$ , en daarna in een lus in het vlak waarbij het punt dat eerst op  $s_0$  lag, nu op het punt  $(x(s_0), y(s_0))$  terecht komt.) We nemen de oriëntatie bovendien zó dat het omsloten oppervlak links ligt als we met oplopende  $s$  langs de kromme gaan.

We nemen aan dat de functies  $x(s)$  en  $y(s)$  afgeleiden hebben die in een Fourrierreeks ontwikkeld kunnen worden. (Men kan laten zien dat krommen waarvoor dit niet geldt zeker geen oppervlakte kunnen omsluiten die groter is dan de oppervlakte omsloten door krommen waarvoor dit wel geldt.)

Beschouwing van de volgende figuur maakt duidelijk dat de oppervlakte omsloten door de kromme  $K$  als integraal uitgedrukt kan worden:

$$\mathcal{O} = \int_0^{\ell} x(s)y'(s)ds .$$

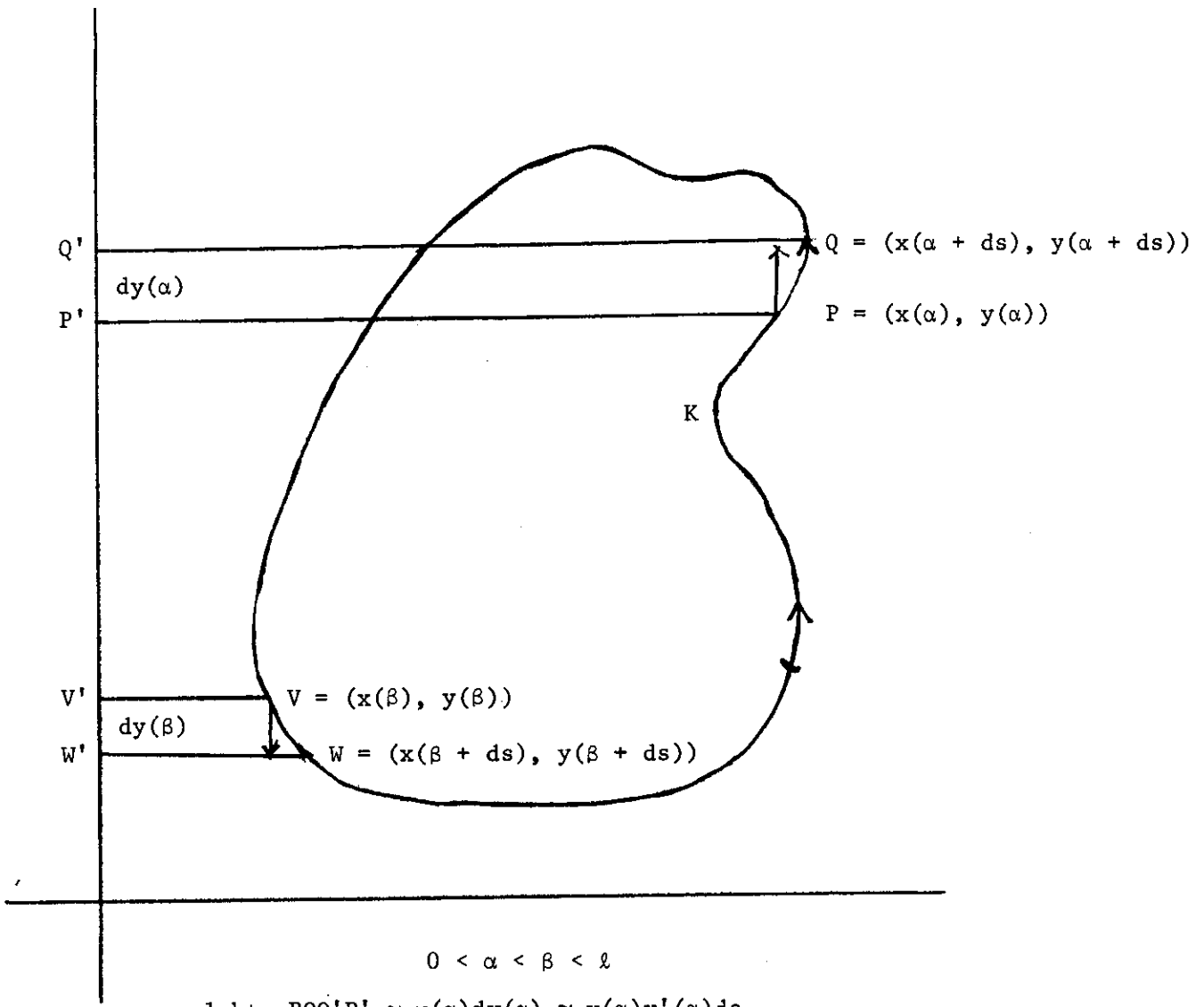
Volgens blz. 113 formule 8.3.2 geldt:

$$\ell = \int_0^{\ell} \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} ds .$$

Omdat  $s$  de booglengte voorstelt is echter  $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 1$  (ga na!).

Hieruit volgt:

$$\ell^2 = \ell \int_0^{\ell} ((x'(s))^2 + (y'(s))^2) ds .$$



$$0 < \alpha < \beta < l$$

oppervlakte  $PQQ'P' \approx x(\alpha)dy(\alpha) \approx x(\alpha)y'(\alpha)ds$

oppervlakte  $WVW'W' \approx x(\beta)(-dy(\beta)) \approx -x(\beta)y'(\beta)ds$  .

$$\mathcal{O} = \int_0^l x(s)y'(s)ds .$$

Laat  $x(x)$ ,  $x'(s)$ ,  $y(s)$  en  $y'(s)$  als Fourierreeksen geschreven kunnen worden zodanig dat:

$$x(s) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi ns}{\ell} + b_n \sin \frac{2\pi ns}{\ell} \right) ;$$

$$y(s) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_n \cos \frac{2\pi ns}{\ell} + \beta_n \sin \frac{2\pi ns}{\ell} \right) ;$$

$$x'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n \frac{2\pi n}{\ell} \cos \frac{2\pi ns}{\ell} - a_n \frac{2\pi n}{\ell} \sin \frac{2\pi ns}{\ell} \right) ;$$

$$y'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \beta_n \frac{2\pi n}{\ell} \cos \frac{2\pi ns}{\ell} - \alpha_n \frac{2\pi n}{\ell} \sin \frac{2\pi ns}{\ell} \right) .$$

We berekenen dan  $\mathcal{G}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \int_0^{\ell} xy' ds = \frac{1}{2}a_0 \int_0^{\ell} y'(s) ds + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\ell} \left( a_n \cos \frac{2\pi ns}{\ell} + b_n \sin \frac{2\pi ns}{\ell} \right) \left( \beta_k \frac{2\pi k}{\ell} \cos \frac{2\pi ks}{\ell} + \right. \\ &\left. - \alpha_k \frac{2\pi k}{\ell} \sin \frac{2\pi ks}{\ell} \right) ds . \end{aligned}$$

Nu is

$$\int_0^{\ell} y'(s) ds = y(\ell) - y(0) = 0 .$$

In de andere termen substitueren we  $t = \frac{2\pi s}{\ell}$  ; er komt:

$$\mathcal{G} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell}{2\pi} \cdot \frac{2\pi k}{\ell} \int_0^{2\pi} \left( a_n \cos nt + b_n \sin nt \right) \left( \beta_k \cos kt - \alpha_k \sin kt \right) dt .$$

Zoals uit de integralen van 8.4.3 blijkt (n.b.  $\int_0^{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi}$  in alle hier voorko-

mende gevallen) zijn alleen die termen ongelijk aan nul waarin  $n = k$ . Het re-

sultaat is  $\mathcal{G} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n \beta_n - b_n \alpha_n)$ . Om ook  $\ell^2$  uit te drukken in de Fourier-

coëfficiënten van  $x(s)$  en  $y(s)$ , substitueren we ook de Fourierreksen in de formule

$$\ell^2 = \ell \int_0^\ell ((x'(s))^2 + (y'(s))^2) ds .$$

We vinden:

$$\begin{aligned} \ell^2 = \ell \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{\ell} \cdot \frac{2\pi k}{\ell} \{ & \int_0^\ell (b_n \cos \frac{2\pi ns}{\ell} - a_n \sin \frac{2\pi ns}{\ell}) \\ & (b_k \cos \frac{2\pi ks}{\ell} - a_k \sin \frac{2\pi ks}{\ell}) ds + \\ & + \int_0^\ell (\beta_n \cos \frac{2\pi ns}{\ell} - \alpha_n \sin \frac{2\pi ns}{\ell}) (\beta_k \cos \frac{2\pi ks}{\ell} - \alpha_k \sin \frac{2\pi ks}{\ell}) ds \}. \end{aligned}$$

We substitueren weer  $t = \frac{2\pi s}{\ell}$ ; alle termen in de som met  $n \neq k$  zijn 0; op dezelfde manier als bij de berekening van  $\mathcal{O}$  vinden we:

$$\ell^2 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + \alpha_n^2 + \beta_n^2) .$$

We weten (-merk op hoe we er naar toe werken het vermoeden over de oplossing van het isoperimetrische probleem dat de oude grieken al hadden te bewijzen-) dat een cirkel met omtrek  $\ell$  als straal heeft  $\frac{\ell}{2\pi}$  en als oppervlakte  $\frac{\ell^2}{4\pi}$ .

We komen er daarom op het verschil  $\mathcal{O} - \frac{\ell^2}{4\pi}$  te beschouwen

$$\begin{aligned} \mathcal{O} - \frac{\ell^2}{4\pi} &= -\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [n^2 (a_n^2 + b_n^2 + \alpha_n^2 + \beta_n^2) - 2na_n \beta_n + 2nb_n \alpha_n] = \\ &= -\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(na_n - \beta_n)^2 + (nb_n + \alpha_n)^2 + (n^2 - 1)(\alpha_n^2 + \beta_n^2)] . \end{aligned}$$

Omdat elke term uit de som zelf een som van kwadraten en dus  $\geq 0$  is volgt hieruit

$$\mathcal{O} - \frac{\ell^2}{4\pi} \leq 0 ; \quad \mathcal{O} \leq \frac{\ell^2}{4\pi} .$$

De cirkel is dus een kromme die een maximale oppervlakte omsluit. Zijn er meer krommen waarvoor  $\mathcal{O} = \frac{\ell^2}{4\pi}$ ? Neen, want als  $\mathcal{O} - \frac{\ell^2}{4\pi} = 0$  dan zijn alle termen uit de reeks = 0. Voor  $n = 2, 3, \dots$  betekent dit

$$\alpha_2 = \beta_2 = a_2 = b_2 = 0, \quad \alpha_3 = \beta_3 = a_3 = b_3 = 0, \dots,$$

voor  $n = 1$  is de enige voorwaarde  $a_1 = \beta_1$ ;  $b_1 = -\alpha_1$ .

Noemen we

$$a_1 = \beta_1 =: a; \quad b_1 = -\alpha_1 =: b; \quad \frac{1}{2}a_0 =: p, \quad \frac{1}{2}\alpha_0 =: q$$

dan is de parametervoorstelling van de kromme:

$$x(s) = p + a \cos \frac{2\pi s}{\ell} + b \sin \frac{2\pi s}{\ell},$$

$$y(s) = q - b \cos \frac{2\pi s}{\ell} + a \sin \frac{2\pi s}{\ell}, \quad 0 \leq s \leq \ell.$$

Eliminatie van  $s$  levert:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2 + b^2,$$

zodat we inderdaad vinden dat  $K$  een cirkel is.

Het tellen van verzamelingen en afbeeldingen

Het aantal elementen van een verzameling A noteren we als  $\# A$ .

Stelling. Het aantal deelverzamelingen van A met  $\# A = n$  is  $2^n$ .

Stelling. Als  $\# A = n$ ,  $\# B = m$  dan is het aantal afbeeldingen van A in B gelijk aan  $m^n$ .

Voorbeeld. Er zijn  $3^{13}$  (= 1594323) manieren om de voetbaltoto in te vullen.

Definitie.  $n! := 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ ;  $0! := 1$ .

Stelling. Is  $\# A = n$  dan is het aantal één-éénduidige afbeeldingen van A op A gelijk aan  $n!$ . Het aantal mogelijke volgordes om n objecten te rangschikken is  $n!$ .

Voorbeeld. Het aantal mogelijke volgordes van de kaarten in een spel van 52 is  $52!$ . ( $52! > 2 \cdot 10^{67}$ ).

Stelling. Is  $\# A = n$ ,  $\# B = m$ ,  $m \geq n$  dan zijn er  $\frac{m!}{(m-n)!}$  één-éénduidige afbeeldingen van A in B.

Voorbeeld. Er zijn  $9!/4!$  (= 15120) getallen bestaande uit 5 verschillende cijfers uit de collectie 1,2,3,...,9.

Stelling. Het aantal deelverzamelingen met k elementen uit een verzameling met n elementen,  $n \geq k$ , is gelijk aan  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

Notatie.  $\frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$ ; binomiaalcoëfficiënten.

Voorbeeld.  $(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$ .  
Binomium van Newton.

Stelling.  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ , (Pascal; driehoek).



Voorbeeld. Er zijn  $\binom{12}{3} = 220$  manieren om een delegatie van 3 leden uit een vergadering van 12 te kiezen.

Stelling. Zij  $A = n$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  en laat  $k_1, k_2, \dots, k_m$  geheel en niet-negatief zijn met  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ , dan is het aantal afbeeldingen van A in B waarbij  $k_1$  elementen van A op  $b_1$ ,  $k_2$  elementen van A op  $b_2, \dots, k_m$  elementen van A op  $b_m$  worden afgebeeld gelijk aan  $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$ .

Voorbeeld. Er zijn  $\frac{52!}{(13!)^4}$  mogelijkheden om de kaarten van een bridgespel over de vier spelers te verdelen.

Voorbeeld. Het aantal mogelijkheden om van een rij met 10 huizen, 4 huisdeuren rood, 3 huisdeuren wit en 3 huisdeuren blauw te verven is  $\frac{10!}{4!3!3!} = 4200$ .

Formulelijst tentamen Wiskunde 27

1. Cartesische- Cylinder- Bolcoördinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y &= r \sin \varphi = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z &= z = \rho \cos \theta \\ dx dy dz &= r dr d\varphi dz = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi \end{aligned}$$

2. Reeksontwikkelingen

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned} \right\} -\infty < x < \infty$$

$$\left. \begin{aligned} (1+x)^d &= 1 + dx + \frac{d(d-1)}{2!} x^2 + \frac{d(d-1)(d-2)}{3!} x^3 + \dots \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \\ \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots \end{aligned} \right\} |x| < 1$$

3. Formule van Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(N)}(a)}{N!} (x-a)^N + \frac{f^{(N+1)}(a + \theta(x-a))}{(N+1)!} (x-a)^{N+1}, \\ &0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

4. Methode van Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

5. Goniometrische formules

$$2 \cos^2 nx = 1 + \cos 2nx$$

$$2 \sin^2 nx = 1 - \cos 2nx$$

$$2 \cos nx \cos mx = \cos(n + m)x + \cos(n - m)x$$

$$2 \cos nx \sin mx = \sin(n + m)x - \sin(n - m)x$$

$$-2 \sin nx \sin mx = \cos(n + m)x - \cos(n - m)x .$$

6. Fouriercoëfficiënten van een functie  $f(x)$  met periode  $2L$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$"f(x)" = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) .$$