

2257

Bekke 1 May



Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Wiskunde 17 en 27

voor eerstejaarsstudenten van de afdeling Bouwkunde

Syllabus van het college van prof. dr. S.T.M. Ackermans

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Afdeling Algemene Wetenschappen

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 17 en 27

Syllabus van het college van

Prof. Dr. S.T.M. Ackermans

voor eerstejaarsstudenten van de afdeling Bouwkunde

Cursusjaar 1976-1977

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

WISKUNDE 17 EN 27

Syllabus van het college voor
eerstejaarsstudenten van de afdeling Bouwkunde,
gegeven in het cursusjaar 1976-1977.

<u>Inhoudsopgave</u>	blz.
<u>Hoofdstuk 0. Inleiding</u>	1
0.1. Enige notaties	1
0.2. Getalverzamelingen	3
0.3. Bewijs uit het ongerijmde	4
0.4. Bewijs door volledige inductie	5
0.5. Afbeeldingen	7
0.6. Cyclometrische functies	13
0.7. Nog enige notaties	15
0.8. Kegelsneden	19
<u>Hoofdstuk 1. Een tweetal onderwerpen uit de discrete wiskunde</u>	22
1.1. Combinatoriek	22
1.2. Inleiding tot de grafentheorie	27
1.3. Bomen	32
1.4. Gerichtte grafen	36
1.5. Transportnetwerken	37
<u>Hoofdstuk 2. Differentiaal- en integraalrekening</u>	43
2.1. Eigenschappen van functies	43
2.2. Functielimieten voor $x \rightarrow \infty$	44
2.3. Functielimieten voor $x \rightarrow a$	45
2.4. Continuïteit	47
2.5. Differentieerbaarheid; bepaalde en onbepaalde integralen	49
2.6. Hogere afgeleiden; meetkundige betekenis van de tweede afgeleide; kromming	68
2.7. De hyperbolische functies	75
2.8. De formules van Taylor	79
2.9. Techniek van het integreren	82
2.10. Numerieke integratie	93

<u>Inhoudsopgave</u> (vervolg)	blz.
<u>Hoofdstuk 3. Differentiaalvergelijkingen</u>	99
3.1. Inleiding; meetkundige interpretatie van de eerste orde vergelijkingen	99
3.2. Scheiding van variabelen	104
3.3. Lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde	108
3.4. Lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten	111
<u>Hoofdstuk 4. Reeksen</u>	119
4.1. Enkele begrippen	119
4.2. Reeksen met uitsluitend niet-negatieve termen	125
4.3. Reeksen met zowel positieve als negatieve termen	130
4.4. Machtreeksen	133
4.5. Taylorreeksen	139
4.6. Numerieke sommatie	146
4.7. Fourierreeksen	150
<u>Hoofdstuk 5. Differentiaalrekening van vectorfuncties en van functies van meer dan één veranderlijke</u>	155
5.1. \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , omgevingen; limieten	155
5.2. Coördinatenstelsels in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3	158
5.3. Parametervoorstellingen van krommen	163
5.4. Hoogtekaart, continuïteit, van functies van meer dan één veranderlijke	168
5.5. Differentieerbaarheid van functies van twee of meer veranderlijken	173
5.6. Richtingsafgeleide en gradiënt	182
5.7. Partiële differentiaalvergelijkingen	185
5.8. Extrema	187
5.9. Extrema met nevenvoorwaarden; Lagrange multiplicatoren	191

<u>Inhoudsopgave</u> (vervolg)	blz.
<u>Hoofdstuk 6. Meervoudige integralen</u>	193
6.1. Definities en voorbeelden	193
6.2. Herhaalde integralen	198
6.3. Enkele formules voor lengte en oppervlak	211

Hoofdstuk 0. Inleiding

0.1. Enige notaties

0.1.1. Voor het aangeven van verzamelingen zullen we gebruik maken van de volgende symbolen:

\emptyset	de lege verzameling
\mathbb{N}	de verzameling der natuurlijke getallen, dit zijn de getallen 1,2,3,...
\mathbb{Z}	" " " gehele "
\mathbb{Q}	" " " rationale "
\mathbb{R}	" " " reële "

Verder gaan we de volgende symbolen uit de verzamelingenleer gebruiken:

\in	$a \in V$	a is een element van V
\notin	$a \notin V$	a is geen element van V
\subset	$A \subset B$	A is een deelverzameling van B
\supset	$A \supset B$	B is een deelverzameling van A
\cap	$A \cap B$	de doorsnede van A en B
\cup	$A \cup B$	de vereniging van A en B
\setminus	$A \setminus B$	het verschil van A met B
\times	$A \times B$	het cartesisch product van A en B , dus de verzameling van alle mogelijke paren (a,b) met eerste element a uit A en tweede element b uit B .

$A \times B \times C, A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ voor $n = 2,3,4,\dots$ worden analoog gedefinieerd.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wordt vaak afgekort tot \mathbb{R}^2 , $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tot \mathbb{R}^3 , enzovoort.

Eindige verzamelingen zullen we ook aangeven door, tussen accoladen, alle elementen op te schrijven.

Voorbeelden:

$\{1,2,5\}$, de verzameling bestaande uit de getallen 1, 2 en 5;

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ (dit is een voorbeeld van een niet-eindige verzameling).

Bij een gegeven verzameling A beschouwen we soms de deelverzameling B bestaande uit die elementen van A, die een bepaalde eigenschap α hebben.

Notatie: $B = \{a \in A \mid a \text{ heeft eigenschap } \alpha\}$.

Voorbeelden:

$\{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$, de verzameling van alle positieve reële getallen

$\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1}{2}x \in \mathbb{N}\}$, de verzameling van alle positieve even getallen.

Aan de logica ontleen we de volgende symbolen, die we slechts bij wijze van afkorting gebruiken:

- \wedge en
- \vee of (in de zin van: en/of)
- \neg niet
- \forall voor alle ...
- \exists er is ...
- $\exists!$ er is precies één ...

$A := B$ betekent dat A per definitie gelijk is aan B.

Met het teken \square geven we het einde van een bewijs aan.

0.1.2. Opgave. Ga na dat de volgende uitspraken juist zijn.

- 1) $\{2,3,4,5\} = \{3,5,2,4\}$
- 2) Het aantal elementen van de verzameling $\{2,3,7,3,1,2,3,4\}$ is 5.
- 3) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- 4) $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$
- 5) $\emptyset \subset \mathbb{R}$
- 6) $0 \notin \mathbb{N}$
- 7) $-3 \in \mathbb{Z}$
- 8) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$
- 9) $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 3\} = \{2\}$
- 10) Laat A, B en C willekeurige deelverzamelingen zijn van een vaste verzameling U. Dan geldt
 - a) $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$
 - b) $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$
 - c) $A \setminus B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
 - d) als $A \subset B$ en $B \subset C$, dan geldt $A \subset C$
 - e) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$
 - f) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

- 11) $\forall_{x \in \mathbb{R}} ((x - 1)(x + 1) = x^2 - 1)$
- 12) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} (y > x)$
- 13) $\neg \exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}} (y \leq x)$
- 14) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ is de cirkel om de oorsprong met straal 1 in \mathbb{R}^2
- 15) er bestaan verzamelingen A en B met $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq A \cup B$.

0.1.3. Gemakshalve zullen we een aantal slordigheden in de notaties begaan.

Zo schrijven we bijvoorbeeld $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in plaats van $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists_{m \in \mathbb{N}} (n = 2m)\}$, $\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ in plaats van $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, terwijl uitspraken als $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ bij afspraak steeds zullen betekenen:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} ((x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1) .$$

Spreken we over getallen, zonder aan te geven wat voor soort getallen, dan zijn reële getallen bedoeld.

0.2. Getalverzamelingen

0.2.1. Wanneer we de verzamelingen \mathbb{N} , \mathbb{Z} en \mathbb{Q} vergelijken, zien we: binnen \mathbb{N} kunnen we optellen en vermenigvuldigen, maar in het algemeen niet aftrekken, niet delen; binnen \mathbb{Z} kunnen we optellen, vermenigvuldigen en aftrekken, maar in het algemeen niet delen; binnen \mathbb{Q} kunnen we optellen, vermenigvuldigen, aftrekken en delen (behalve door 0). Bovendien is er in deze verzamelingen een volledige ordening volgens grootte: voor ieder tweetal elementen x en y geldt steeds hetzij $x < y$, hetzij $x = y$, hetzij $x > y$. De uitbreiding van \mathbb{N} naar \mathbb{Z} en verder naar \mathbb{Q} is zinvol, omdat we daardoor meer rekenoperaties onbeperkt kunnen gebruiken. De verdere uitbreiding naar \mathbb{R} heeft echter ook een andere reden: de verzameling der reële getallen bezit een eigenschap meer dan die der rationale getallen, en wel dat hij "volledig" is in een bepaalde zin. We kunnen daar in dit bestek niet nader op ingaan; we volstaan met de opmerking, dat de bedoelde "volledigheid" gevoelsmatig overeenkomt met het opvullen van de gehele getallenrechte, zonder nog ergens "gaatjes" achter te laten.

0.2.2. Vaak zullen we gebruik maken van verzamelingen van aaneengesloten reële getallen, zogenaamde intervallen. We onderscheiden de volgende typen intervallen: (a en b zijn reële getallen, $a < b$)

$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, notatie: (a,b)

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, notatie: $[a,b)$

$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, notatie: $(a,b]$

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, notatie: $[a,b]$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$, notatie: (a,∞)

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$, notatie: $[a,\infty)$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$, notatie: $(-\infty,b)$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$, notatie: $(-\infty,b]$

\mathbb{R} , ook wel genoteerd door $(-\infty,\infty)$.

De eerste vier van deze intervallen heten begrensd, de andere onbegrensd. De intervallen (a,b) , (a,∞) , $(-\infty,b)$ en $(-\infty,\infty)$ heten open intervallen; $[a,b]$, $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ en $(-\infty,\infty)$ heten gesloten intervallen.

In het vervolg zullen we bij het gebruiken van de notaties (a,b) , $[a,b)$, $(a,b]$ en $[a,b]$ steeds stilzwijgend aannemen dat $a < b$.

In deze inleiding bespreken we vervolgens een tweetal vaak voorkomende bewijsmethoden.

0.3. Bewijs uit het ongerijmde

0.3.1. Neem aan dat we een stelling van de volgende vorm willen bewijzen: "In een bepaalde situatie geldt, dat een of andere bewering B waar is". Soms kunnen we een bewijs hiervoor als volgt handig inkleden: Neem aan, dat B niet waar is. Toon vervolgens aan, dat deze aanname in die situatie tot een tegenspraak leidt. Dan moet de aanname dat B niet waar was onjuist geweest zijn, zodat B waar moet zijn.

0.3.2. Voorbeeld. Het getal $\sqrt{2}$ is niet rationaal: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Bewijs. Neem aan dat $\sqrt{2}$ rationaal is. Dan is $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ met $p \in \mathbb{N}$ en $q \in \mathbb{N}$. Hieruit volgt: $p^2 = 2q^2$. Ontbind nu het getal p^2 en het getal $2q^2$ in factoren. Dan heeft p^2 een even aantal of geen factoren 2, en $2q^2$ een oneven aantal factoren 2. De gelijkheid $p^2 = 2q^2$ is dus onmogelijk. Uit deze tegenspraak volgt: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

0.3.3. Voorbeeld. Wanneer voor twee getallen a en b geldt $\forall_{\epsilon > 0} (a < b + \epsilon)$, dan is $a \leq b$.

Bewijs. Stel $a > b$. Dan is $a - b > 0$. Kies voor ϵ het getal $\epsilon_1 = \frac{1}{2}(a - b)$, dan is $\epsilon_1 > 0$. Uit het gegeven, met $\epsilon = \epsilon_1$, volgt nu: $a - b < \epsilon_1$. Dus $a - b < \frac{1}{2}(a - b)$. Dit is onmogelijk, zodat de aanname $a > b$ onjuist is. Dus $a \leq b$. \square

0.4. Bewijs door volledige inductie

0.4.1. Wanneer we willen bewijzen, dat een bepaalde bewering $B(n)$ waar is voor alle natuurlijke getallen n , dan kunnen we dit als volgt doen:

- a) verifieer dat $B(1)$ waar is;
- b) bewijs dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ geldt: Als $B(n)$ waar is, dan is $B(n+1)$ waar.

Uit a) en b) volgt dat $B(n)$ waar is voor iedere $n \in \mathbb{N}$. Immers, $B(1)$ is waar, dus uit b) met $n=1$ weten we dat $B(2)$ waar is. Weer uit b), nu met $n=2$, volgt: $B(3)$ is waar. Hiermee krijgen we uit b): $B(4)$ is waar, dan $B(5)$ is waar, enzovoort.

Opmerking. De bewijsstap: "Als $B(n)$ waar is, dan is $B(n+1)$ waar" heet de inductiestap. De aanname dat $B(n)$ waar is tijdens het bewijs in de inductiestap heet de inductieveronderstelling.

0.4.2. Voorbeeld. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $n^2 + n$ is deelbaar door 2. We bewijzen dit met volledige inductie.

Bewijs.

- a) Voor $n = 1$ is $n^2 + n = 2$, dit is inderdaad deelbaar door 2.
- b) Laat n een natuurlijk getal zijn. Neem aan (inductieveronderstelling) dat $n^2 + n$ deelbaar is door 2. Er geldt: $(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 3n + 2 = n^2 + n + 2(n+1)$ en dit is dan dus ook deelbaar door 2.

Volgens het bewijsprincipe van volledige inductie geldt dan $n^2 + n$ is deelbaar door 2 voor alle $n \in \mathbb{N}$. \square

0.4.3. Voorbeeld. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Bewijs. Voor $n = 1$ is het linkerlid 1, het rechterlid $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$ zodat de bewering juist is voor $n = 1$. Zij $n \in \mathbb{N}$, neem aan dat $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$. We zullen bewijzen, dat dan ook geldt:

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Bewijs: $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = (n+1)(\frac{1}{2}n+1) =$
 $= \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$

Uit het principe van volledige inductie volgt het gestelde nu voor alle $n \in \mathbb{N}$. \square

0.4.4. Voorbeeld. We bewijzen de z.g. ongelijkheid van Bernoulli: Zij $h \in \mathbb{R}$, $h \geq -1$. Dan geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$: $(1+h)^n \geq 1+nh$.

Bewijs. Voor $n = 1$ geldt het gelijkteken. Als de ongelijkheid geldt voor n , d.w.z. als $(1+h)^n \geq 1+nh$, dan is

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh) =$$
$$= 1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h$$

zodat dan de ongelijkheid ook geldt voor $n+1$. Via volledige inductie geldt hij dus voor alle $n \in \mathbb{N}$. \square

0.4.5. Opgave. Bewijs, dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

0.4.6. Opmerking. Soms wil men een uitspraak $B(n)$ bewijzen niet voor alle natuurlijke getallen n , maar voor alle gehele getallen $n \geq N$, waarbij N een gegeven geheel getal is. Men kan dan analoog te werk gaan, waarbij dan in onderdeel a) uit 0.4.1 de juistheid van de bewering voor $n = N$ i.p.v. voor $n = 1$ wordt aangetoond, en in onderdeel b) de stap van n op $n+1$ voor $n \geq N$ bewezen wordt.

0.4.7. Voorbeeld. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 4$ geldt: $2^n \geq n^2$.

Bewijs: Voor $n = 4$ geldt het gelijkteken. Neem aan dat voor een $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 4$ geldt: $2^n \geq n^2$. Dan is

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \geq 2n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + 4n = \\ &= n^2 + 2n + 2n \geq n^2 + 2n + 8 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \end{aligned}$$

Via volledige inductie geldt de formule dus voor alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. □

0.5. Afbeeldingen

0.5.1. Definities. Laat A en B verzamelingen zijn. Een afbeelding f van A naar B - notatie $f: A \rightarrow B$ - is een voorschrift volgens hetwelk aan elk element van A precies één element van B wordt toegevoegd.

Is $b (\in B)$ het element dat aan $a (\in A)$ wordt toegevoegd, dan schrijven we $b = f(a)$. We noemen b het beeld van a .

A heet de definitieverzameling of het domein van f , notatie: $\text{DOM } f$.

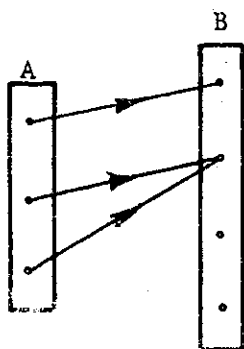
De afbeelding $f: A \rightarrow B$ is gelijk aan de afbeelding $g: C \rightarrow D$ indien:

- i) $A = C$;
- ii) $B = D$;
- iii) $f(a) = g(a)$ voor alle $a \in A$.

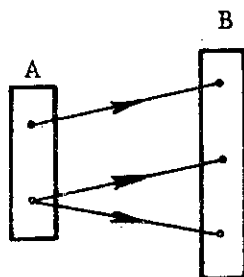
Notatie: $f = g$.

Gemakshalve spreekt men vaak over "de afbeelding f " i.p.v. over "de afbeelding $f: A \rightarrow B$ ".

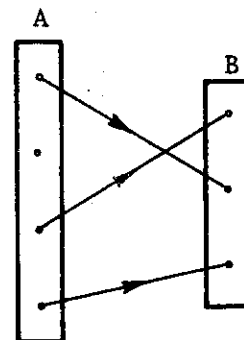
"Functie" is voor ons synoniem met "afbeelding".



afbeelding



geen afbeelding

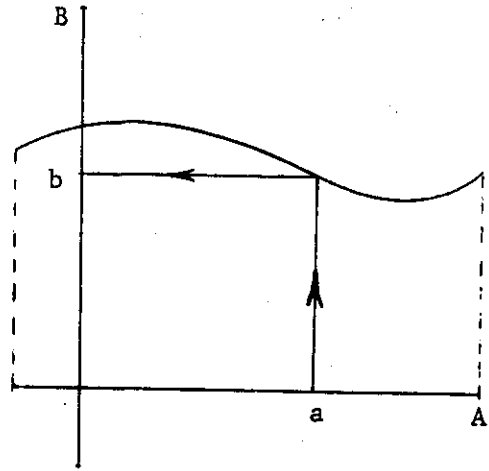
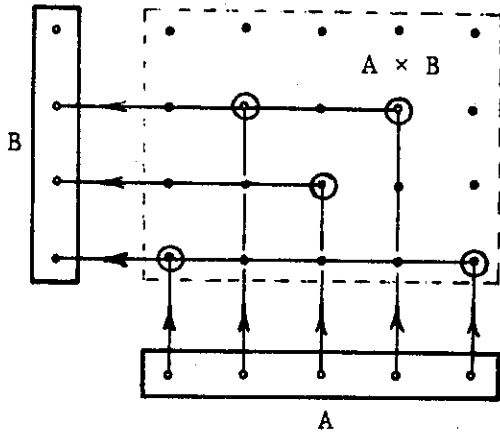


geen afbeelding

0.5.2. Bij een afbeelding $f: A \rightarrow B$ behoort een grafiek, dit is de volgende deelverzameling van het cartesisch product van A en B:

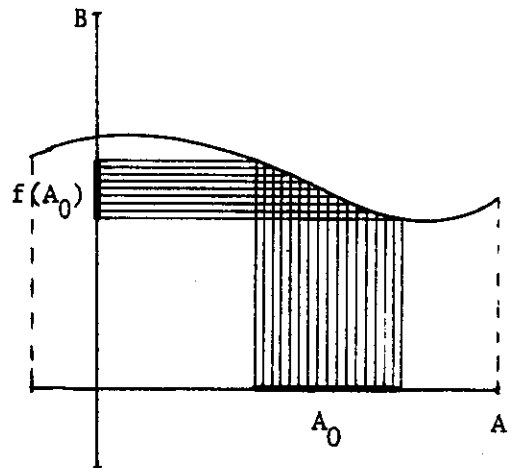
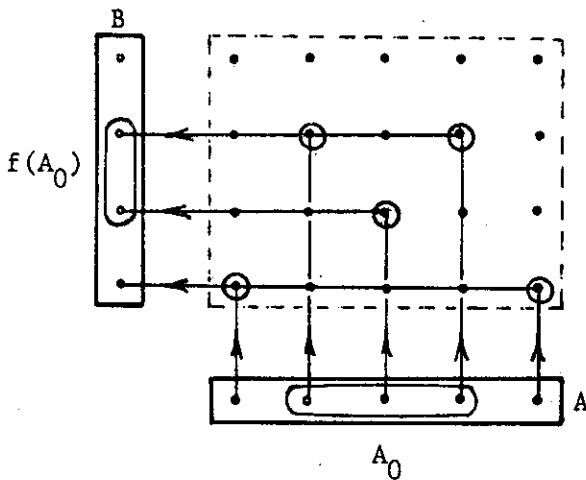
$$\{(x,y) \in A \times B \mid y = f(x)\} .$$

Het voorschrift in de afbeelding $f: A \rightarrow B$ kunnen we als volgt in de grafiek aflezen: zoek bij $a \in A$ het paar (a,b) uit de grafiek; b is dan het beeld van a .



0.5.3. Het beeld van een deelverzameling A_0 van A bij een afbeelding $f: A \rightarrow B$ is per definitie $\{f(x) \mid x \in A_0\}$.

Notatie: $f(A_0)$. Merk op dat $f(A_0) \subset B$.

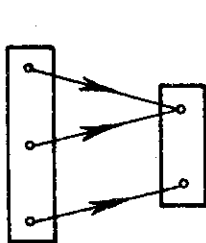


Een afbeelding $f: A \rightarrow B$ heet injectief (of één-éénduidig, ook wel een injec-tie) als voor alle $x \in A$, $y \in A$ met $x \neq y$ geldt: $f(x) \neq f(y)$. Anders gezegd: als voor alle $x \in A$, $y \in A$ geldt: uit $f(x) = f(y)$ volgt $x = y$.

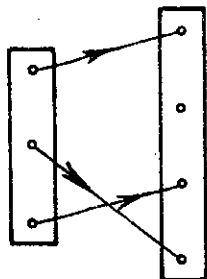
Een afbeelding $f: A \rightarrow B$ heet surjectief (ook wel een surjectie; f beeldt A op B af) als $f(A) = B$. Anders gezegd: als geldt

$$\forall_{b \in B} \exists_{a \in A} (f(a) = b) .$$

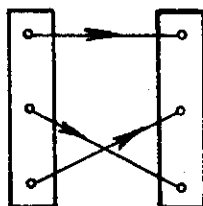
Een afbeelding die zowel injectief als surjectief is heet bijjectief, ook wel een bijjectie.



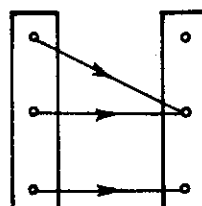
surjectief
niet injectief



injectief
niet surjectief

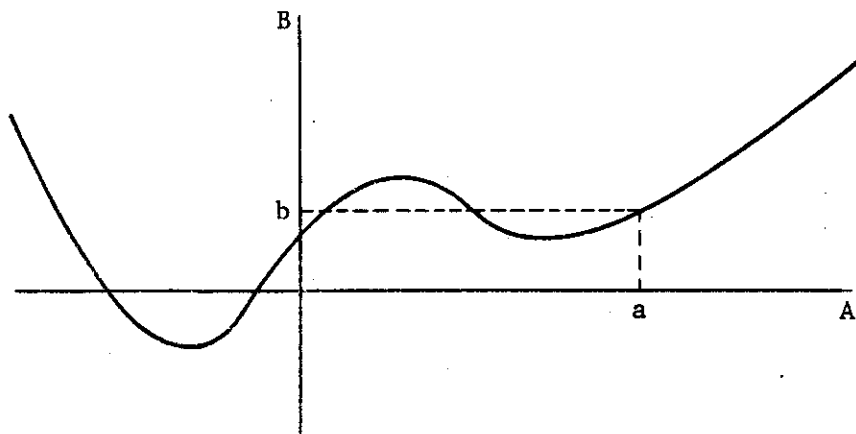


bijjectief



niet injectief
niet surjectief

0.5.4. Voor afbeeldingen $f: A \rightarrow B$ met $A \subset \mathbb{R}$ en $B \subset \mathbb{R}$ kan men de eigenschappen injectief, surjectief, bijjectief zijn in de grafiek herkennen:



We snijden de horizontale lijn met vergelijking $y = b$ met de grafiek van f ; dit doen we in gedachten voor iedere $b \in B$. Er geldt:

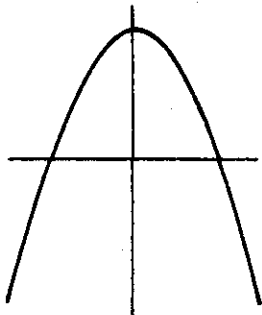
f is surjectief wanneer er steeds minstens één snijpunt is,

f is injectief wanneer er steeds hoogstens één snijpunt is,

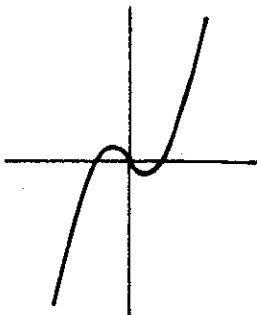
f is bijjectief wanneer er steeds precies één snijpunt is.

Merk op, dat uit de definitie van afbeelding reeds volgt, dat elke verticale lijn $x = a$ met $a \in A$ precies één snijpunt met de grafiek heeft.

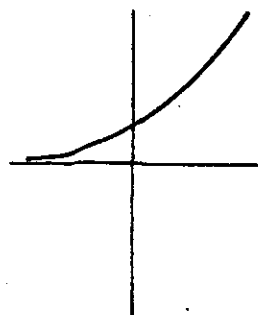
0.5.5. Voorbeelden.



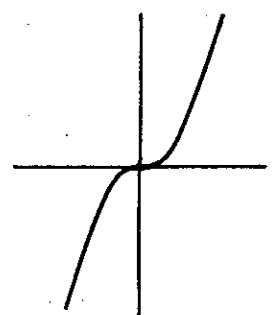
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met
 $f(x) = -x^2 + 1$
niet injectief
niet surjectief



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met
 $f(x) = x^3 - x$
niet injectief
wel surjectief



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met
 $f(x) = 2^x$
wel injectief
niet surjectief



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met
 $f(x) = x^3$
wel inj., wel surj
dus bijjectief

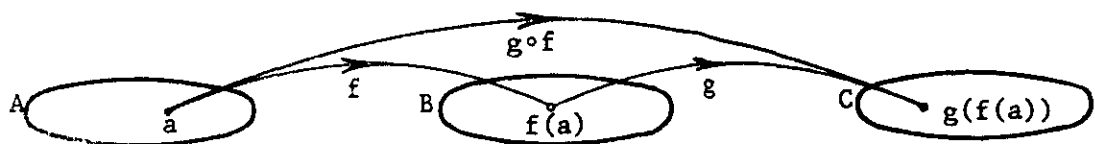
0.5.6. Opgave. Ga grafisch na of $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ al dan niet injectief, surjectief of bijjectief is, als f wordt gedefinieerd door

- a) $f(x) = \sin x$
- b) $f(x) = 2x + 3$
- c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$
- d) $f(x) = \ln(|x| + 1)$.

Dezelfde vraag voor $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ als f is gegeven door

- a) $f(x) = |x|$
- b) $f(x) = \frac{1}{2}|x|$
- c) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$
- d) $f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)$.

0.5.7. Samengestelde afbeelding. Laten A , B en C verzamelingen zijn en $f: A \rightarrow B$ en $g: B \rightarrow C$ afbeeldingen. De samengestelde afbeelding is dan de afbeelding $g \circ f: A \rightarrow C$, gedefinieerd door $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ voor alle $a \in A$.



Merk op dat niet hoeft te gelden $f(A) = B$.

0.5.8. Voorbeeld. $f: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$ met $f(x) = x^2 + 1$, $g: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ met $g(x) = \ln x$ dan $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ met $(g \circ f)(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Merk op, dat als $g \circ f$ gedefinieerd is, $f \circ g$ nog niet hoeft te bestaan.

Voorbeeld: $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow [2, 3]$. Wanneer toevallig zowel $f \circ g$ als $g \circ f$ bestaan, zijn deze in het algemeen niet aan elkaar gelijk. Voorbeeld: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = x^2$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $g(x) = 2x + 3$. Dan $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 3$ en $(f \circ g)(x) = (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

0.5.9. Opgave. Geef $g \circ f$ als:

a) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \ln x$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $g(x) = x + 1$.

b) $f: \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ met $f(x) = |x|$, $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ met $g(x) = \frac{1}{2}x$.

Geef $g \circ f$ en $f \circ g$ als:

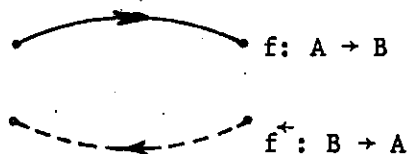
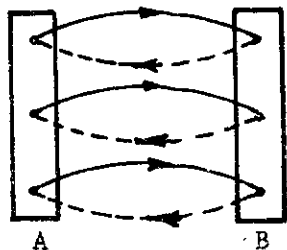
a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ met $f(x) = 2^{|x|}$, $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ met $g(x) = x^2$.

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ met $f(x) = x^2$, $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$g(x) = \begin{cases} \ln x & \text{als } x > 0, \\ 0 & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

0.5.10. Beschouw nu een bijectieve afbeelding $f: A \rightarrow B$. Daar f surjectief is, treedt ieder element van B als beeld op. Omdat f injectief is, geldt dat ieder element van B beeld is van ten hoogste één element van A . Dus ieder element van B is beeld van precies één element van A . Bij iedere $b \in B$ bestaat er zodoende één $a \in A$ met $f(a) = b$. Dit geeft ons een voorschrift, dus een afbeelding, van B naar A .

0.5.11. Definitie. Zij $f: A \rightarrow B$ een bijectie. Onder $f^{-1}: B \rightarrow A$ verstaan we die afbeelding waarvoor $f^{-1}(b) = a$ dan en slechts dan als $f(a) = b$. De afbeelding f^{-1} noemen we de inverse van f .



Geen dat een inverse afbeelding van een niet-bijectieve afbeelding niet zinvol gedefinieerd kan worden.

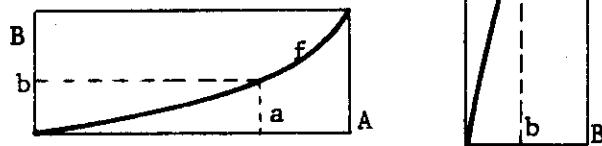
0.5.12. Voorbeeld. De afbeelding $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ met $f(x) = x + 5$ is bijectief. De inverse afbeelding is $f^{-1}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ met $f^{-1}(x) = x - 5$.

De bijectieve afbeelding $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ met $f(x) = 2^x$ heeft als inverse $f^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ met $f^{-1}(x) = {}^2\log x$. De bijectie $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ met $f(x) = x^2$ heeft als inverse $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ met $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

0.5.13. We beschouwen nu de grafiek van een bijectieve afbeelding $f: A \rightarrow B$ en die van zijn inverse $f^{-1}: B \rightarrow A$. De grafiek van f is $\{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\}$. De grafiek van f^{-1} is

$$\{(b, a) \in B \times A \mid f^{-1}(b) = a\} = \{(b, a) \in B \times A \mid f(a) = b\}.$$

We krijgen dus de grafiek van f^{-1} uit die van f door in alle paren (a, b) de coördinaten te verwisselen.

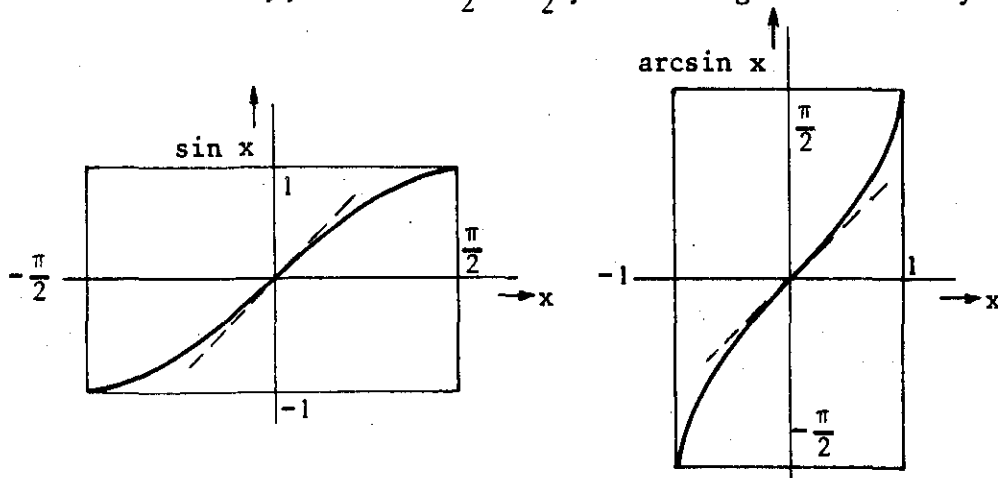


In $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kunnen we de verwisseling van de coördinaten zien als de spiegeling t.o.v. de lijn $y = x$.

0.5.14. Opgave. Schets de grafiek van de inverse afbeelding van $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ met $f(x) = 2^x$ resp. $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ met $g(x) = x^2$, uitgaande van de grafiek van f resp. g .

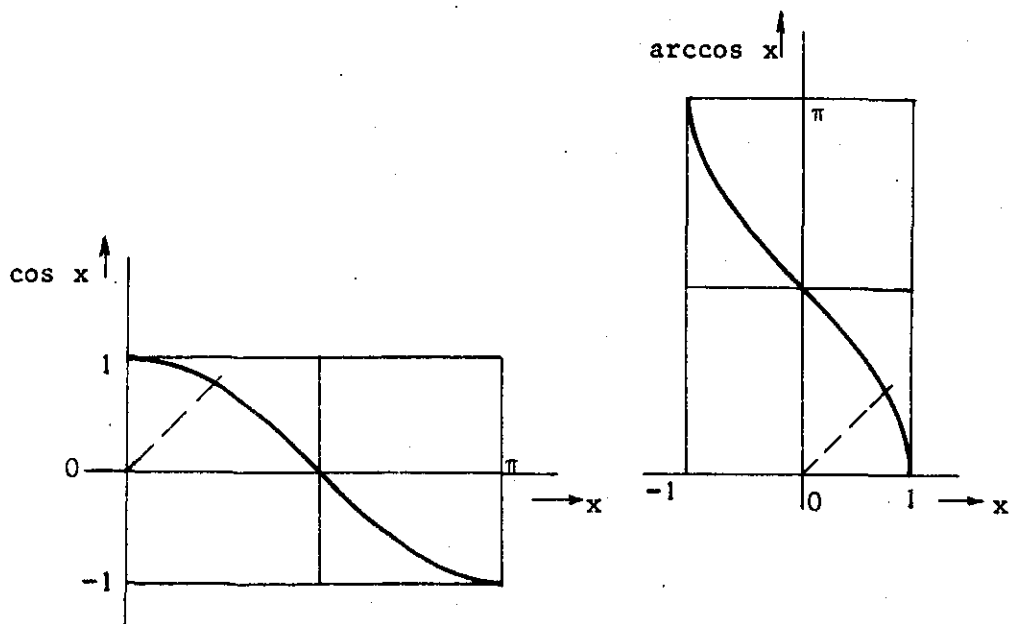
0.6. Cyclometrische functies

0.6.1. De afbeelding $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ met $f(x) = \sin x$ is bijectief. Zijn inverse afbeelding $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ heet de arcsinus, notatie: arcsin. Dus $\arcsin x$ is dié hoek y , tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$, waarvoor geldt dat $\sin y = x$.



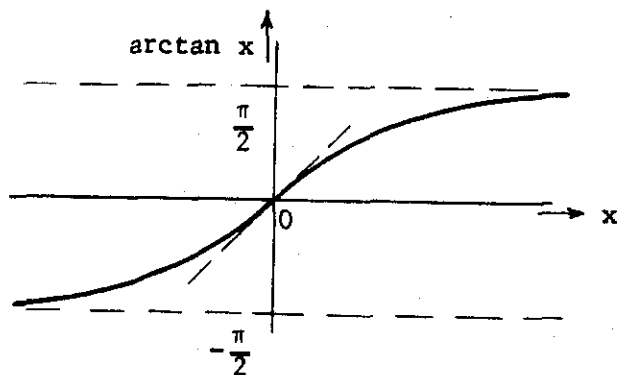
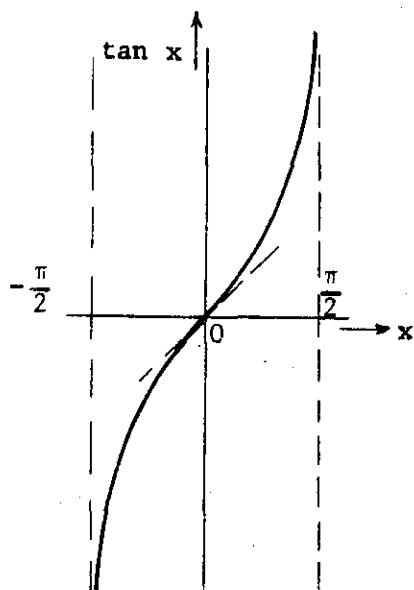
Merk op dat $\arcsin x$ slechts gedefinieerd is voor $-1 \leq x \leq 1$, en dat voor zijn functiewaarden geldt: $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$.

0.6.2. Voor de cosinus kunnen we hetzelfde doen, echter op een ander definitiegebied: $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ met $f(x) = \cos x$ is bijectief. De inverse afbeelding heet de arccosinus, notatie: arccos. Dus $\arccos x = y$ betekent $\cos y = x$ én $0 \leq y \leq \pi$.



Er geldt: $\arccos x$ is gedefinieerd slechts voor $-1 \leq x \leq 1$, terwijl $0 \leq \arccos x \leq \pi$.

0.6.3. De functie $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \tan x$ is bijjectief. Zijn inverse heet de arctangens, notatie: \arctan . Dus $\arctan x$ is dié hoek, tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$, waarvan de tangens gelijk is aan x .



De functie $\arctan x$ is gedefinieerd voor alle $x \in \mathbb{R}$; verder is $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$.

0.6.4. Voorbeelden.

- 1) Te berekenen: $\arcsin \frac{1}{2}$. Stel $\arcsin \frac{1}{2} = p$, dan is $\sin p = \frac{1}{2}$ en $-\frac{\pi}{2} \leq p \leq \frac{\pi}{2}$.
Dus $p = \frac{1}{6} \pi$.
- 2) Te berekenen: $\arccos(-\frac{1}{2})$. Stel $\arccos(-\frac{1}{2}) = q$, dan is $\cos q = -\frac{1}{2}$ en $0 \leq q \leq \pi$, dus $q = \frac{2}{3} \pi$.
- 3) Voor alle $x \in [-1, 1]$ geldt: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Bewijs: stel $\arcsin x = p$ en $\arccos x = q$, dan is

$$x = \sin p \text{ en } -\frac{\pi}{2} \leq p \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x = \cos q \text{ en } 0 \leq q \leq \pi,$$

ofwel

$$x = \sin(\frac{\pi}{2} - q) \text{ en } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - q \leq \frac{\pi}{2}.$$

Hieruit volgt $p = \frac{\pi}{2} - q$.

□

4) Te berekenen: $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$. Stel $\arctan \frac{1}{2} = p$ en $\arctan \frac{1}{3} = q$, dan is

$$\tan p = \frac{1}{2} \text{ en } -\frac{\pi}{2} < p < \frac{\pi}{2}, \text{ zelfs } 0 < p < \frac{\pi}{2}$$

$$\tan q = \frac{1}{3} \text{ en } -\frac{\pi}{2} < q < \frac{\pi}{2}, \text{ zelfs } 0 < q < \frac{\pi}{2}.$$

We zoeken $p + q$. Daar $\tan p$ en $\tan q$ bekend zijn, kunnen we $\tan(p + q)$ vinden:

$$\tan(p + q) = \frac{\tan p + \tan q}{1 - \tan p \tan q} = 1.$$

Omdat $0 < p + q < \pi$, is dus $p + q = \frac{\pi}{4}$.

0.6.5. In het vervolg zullen we vaak wat slordiger omgaan met het begrip afbeelding.

Met name spreken we hier af, dat we een afbeelding f die we slechts geven door een of andere formule, zullen beschouwen als een afbeelding van de verzameling van die waarden van x , waarvoor de formule zinvol is, naar \mathbb{R} .

Ook zullen we kortweg over de functie 2^x spreken in plaats van over de functie f met $f(x) = 2^x$.

Voorbeeld. De functie $\frac{1}{x}$ is een functie van $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ naar \mathbb{R} . $f(x) = \ln(x + 2)$ is een afbeelding van $(-2, \infty)$ naar \mathbb{R} . $\sin x$ is een afbeelding van \mathbb{R} naar \mathbb{R} .

0.7. Nog enige notaties

0.7.1. Van een eindig aantal getallen a_1, \dots, a_n noteren we het grootste door $\max(a_1, \dots, a_n)$ en het kleinste door $\min(a_1, \dots, a_n)$.

Voorbeeld. $\max(1, -3, 0, 2, 7) = 7$; $\min(1, -3, 0, 2, 7) = -3$; $\max(1, -1) = 1$;

$$\min(0, x^2 - x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0 \\ x^2 - x & \text{als } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{als } x \geq 1. \end{cases}$$

0.7.2. De absolute waarde van een getal x , notatie: $|x|$, definiëren we door:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0. \end{cases}$$

0.7.3. Opgave. Ga na, dat de volgende regels gelden:

a) $x^2 = |x|^2$

b) $\sqrt{x^2} = |x|$

c) $|xy| = |x||y|$

d) $-|x| \leq x \leq |x|$ en $-|x| \leq -x \leq |x|$

e) $|x| = \max(x, -x)$

f) $x^2 \leq y^2$ dan en slechts dan als $|x| \leq |y|$.

0.7.4. Eigenschap (driehoeksongelijkheid). Voor alle $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$ geldt:

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Bewijs. $-|ab| \leq ab \leq |ab|$, dus

$$-2|a||b| \leq 2ab \leq 2|a||b|.$$

Door optellen van $a^2 + b^2 (= |a|^2 + |b|^2)$:

$$|a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$$

$$(|a| - |b|)^2 \leq (a + b)^2 \leq (|a| + |b|)^2.$$

Worteltrekken levert met $\sqrt{x^2} = |x|$:

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|.$$

□

0.7.5. Het bewijzen van ongelijkheden vraagt vaak enige vaardigheid in het herkennen van kwadratische vormen. Bij wijze van voorbeeld behandelen we de volgende ongelijkheid, die zegt dat het rekenkundig gemiddelde minstens even groot is als het meetkundig gemiddelde: Voor alle $p > 0$ en $q > 0$ geldt

$$\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq}.$$

Bewijs. $(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 \geq 0$, dus $p+q \geq 2\sqrt{p}\sqrt{q}$ ofwel $\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{pq}$. □

0.7.6. Opgave. Bewijs dat voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

0.7.7. Laat a_1, a_2, \dots, a_n (niet noodzakelijk verschillende) getallen zijn. Voor hun som $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ voeren we de volgende notatie in:

$$\sum_{k=1}^n a_k.$$

Voorbeelden.

$$\sum_{k=1}^5 a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5;$$

$$\sum_{k=1}^2 a_k = a_1 + a_2; \quad \sum_{k=1}^1 a_k = a_1;$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = a_1 + a_2 + a_3; \quad \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{\ell=1}^n a_\ell.$$

Merk op dat de k in $\sum_{k=1}^n a_k$ slechts als hulpvariabele wordt gebruikt; de som hangt er niet van af.

Op dezelfde wijze definieert men

$$\sum_{k=2}^n a_k, \quad \sum_{k=0}^n b_k, \quad \sum_{k=-3}^n x_k, \quad \sum_{k=1}^n a_{2k}, \text{ enz.}$$

Voorbeelden.

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \sum_{k=2}^n a_k \quad \text{voor } n \geq 2 ;$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = \sum_{k=1}^n a_k ; \quad \sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^n a_{2k-1} + \sum_{k=1}^n a_{2k} ;$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} ; \quad \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} ; \quad \sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k ;$$

$$\sum_{k=1}^n a = na ,$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k .$$

0.7.8. Opgave. Bereken

$$\sum_{k=1}^3 (2k+1), \quad \sum_{k=0}^4 k, \quad \sum_{k=1}^7 1, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k, \quad \sum_{k=1}^n (k+1) - \sum_{k=1}^n k .$$

Met behulp van volledige inductie kunnen we vaak bewijzen, dat een som $\sum_{k=1}^n a_k$ een bepaalde waarde heeft.

0.7.9. Voorbeeld. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) ,$$

Bewijs. Voor $n = 1$ is de som $1.2.3 = 6$, het rechterlid is eveneens 6. Neem aan dat voor een $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) .$$

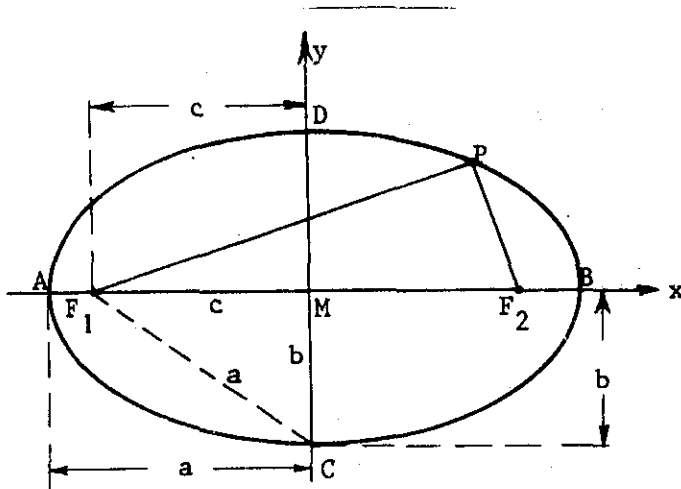
Dan is

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) = \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) + (n+1)(n+2)(n+3) = \\ &= \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) . \end{aligned}$$

Via volledige inductie geldt de formule nu voor alle $n \in \mathbb{N}$. □

0.8. Kegelsneden

0.8.1. Definitie. Laten a en c gegeven reële getallen zijn met $0 \leq c < a$. Laten F_1 en F_2 punten in het platte vlak zijn met een onderlinge afstand $2c$. De verzameling punten in het platte vlak, waarvan de som van de afstanden tot F_1 en tot F_2 gelijk is aan $2a$, heet de ellips met brandpunten F_1 en F_2 en halve lange as a . Het getal $\epsilon = \frac{c}{a}$ heet de excentriciteit van de ellips (merk op: $0 \leq \epsilon < 1$).



0.8.2. De lijn door F_1 en F_2 en de middelloodlijn van het lijnstuk F_1F_2 heten de hoofdassen van de ellips; hun snijpunt M heet het middeelpunt van de ellips. De ellips snijdt van de lijn door F_1 en F_2 een stuk af, groot $AB = AF_1 + AF_2 = 2a$. Van de andere as wordt een stuk CD afgesneden, groot $2b$ met $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Omdat $b \leq a$, wordt AB de lange as en CD de korte as van de ellips genoemd. Merk op dat voor $c = 0$, dus $F_1 = F_2$, de ellips overgaat in de cirkel om F_1 met straal a . Voor de cirkel is de excentriciteit $\epsilon = 0$.

0.8.3. Met gebruikmaking van de notaties als hierboven en van een assenstelsel als aangegeven in de figuur, heeft de ellips tot vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Bewijs. Zij P een punt met coördinaten (x, y) . De afstand van P tot F_1 is $\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$, die van P tot F_2 is $\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$. Volgens de definitie bestaat de ellips uit alle punten (x, y) met

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

ofwel

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

$$a^2(x + c)^2 + a^2y^2 = (a^2 + cx)^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

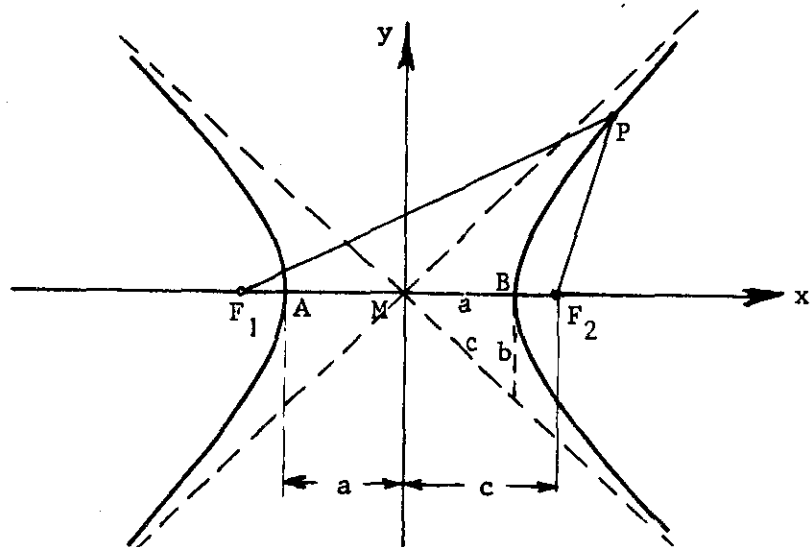
dus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Merk op dat in het geval van de cirkel geldt $b = a$, zodat de vergelijking dan wordt: $x^2 + y^2 = a^2$.

Opgave. Ga na, dat bij het kwadrateren in bovenstaand bewijs géén punten zijn ingevoerd.

0.8.4. Definitie. Laat a en c getallen zijn met $0 < a < c$. Laat F_1 en F_2 punten in het platte vlak zijn met onderlinge afstand $2c$. De verzameling punten, waarvan het (in absolute waarde genomen) verschil van de afstanden tot F_1 en F_2 gelijk is aan $2a$, heet de hyperbool met brandpunten F_1 en F_2 en halve as a . Het getal $\epsilon = \frac{c}{a}$ heet de excentriciteit van de hyperbool (N.b. $\epsilon > 1$).



0.8.5. De lijn door F_1F_2 en de middelloodlijn van F_1F_2 heten weer de hoofdassen, hun snijpunt M het middelpunt. De hyperbool snijdt de lijn door F_1 en F_2 in de punten A en B die een onderlinge afstand $2a$ hebben. Analoog als bij de ellips kan men de vergelijking opstellen. Met het geschetste assenstelsel is deze

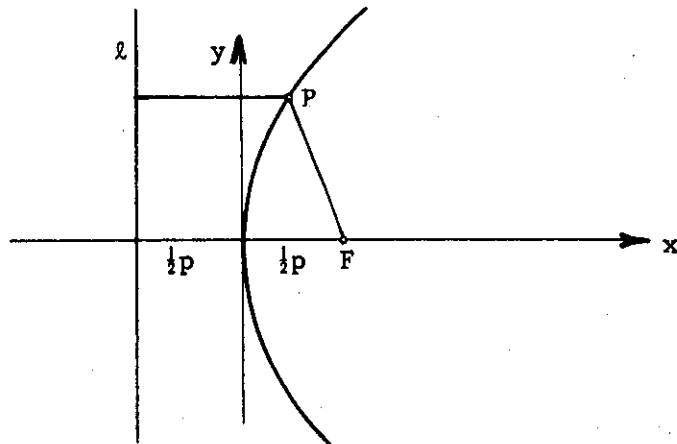
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ waarin } b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Snijden we de hyperbool met de lijn $y = px$, dan vinden we uit deze vergelijking

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} \right) = 1,$$

zodat er in het algemeen twee verschillende waarden voor x (met bijbehorende waarden voor $y = px$), voldoen. Maar voor $\frac{p^2}{b^2} \geq \frac{1}{a^2}$, dus voor $|p| \geq \frac{b}{a}$, zijn er geen snijpunten. De lijnen $y = \frac{b}{a}x$ en $y = -\frac{b}{a}x$ zijn asymptoten van de hyperbool.

- 0.8.6. Definitie. Laat in het platte vlak een lijn ℓ en een punt F met $F \notin \ell$ gegeven zijn; zij p de afstand van F tot ℓ . De verzameling van alle punten, die gelijke afstanden tot ℓ en tot F hebben, heet de parabool met brandpunt F en richtlijn ℓ . De excentriciteit van een parabool is per definitie gelijk aan 1.



- 0.8.7. Op een coördinatenstelsel als aangegeven in de figuur is de vergelijking van de parabool $y^2 = 2px$.

Bewijs. Zij P een punt met coördinaten (x, y) . De afstand van P tot ℓ is dan $x + \frac{1}{2}p$, de afstand van P tot F is $\sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2}$. De parabool bestaat dus uit alle punten (x, y) met

$$x + \frac{1}{2}p = \sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2}$$

ofwel

$$(x + \frac{1}{2}p)^2 = (x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2$$

$$2px = y^2.$$

□

Hoofdstuk 1. Een tweetal onderwerpen uit de discrete wiskunde

1.4. Combinatoriek

1.1.1. Definitie. Voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we $n!$ (spreek uit: n -faculteit) als volgt:
 $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Verder definiëren we $0! = 1$.

Dus $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, enz. Merk op dat $n! = n(n-1)!$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

1.1.2. Definitie. Laat V een eindige verzameling zijn. Een permutatie van V is een bijectieve afbeelding van V naar V .

1.1.3. Voorbeeld. We kunnen een permutatie aangeven door onder elkaar de elementen van V en hun beelden op te schrijven. Zo is $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$ de permutatie van $V = \{a, b, c, d\}$ waarbij a overgaat in b , b in d , c in zichzelf en d in a .

1.1.4. Wanneer we de elementen van V een bepaalde volgorde geven, dan geven hun beelden bij het toepassen van een permutatie een nieuwe volgorde. Ook de afbeelding, die de elementen van V op hun plaats laat, is een permutatie, de zg. identieke permutatie. Uitgaande van een vaste volgorde in V kan men een permutatie dus gegeven zien door de volgorde van de beelden van de elementen van V . Het woord "permutatie" wordt daarom vaak ook gebruikt in de zin van een "volgorde" van de elementen.

1.1.5. Voorbeeld. Alle permutaties van de verzameling $\{a, b, c\}$ zijn:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

1.1.6. Stelling. Zij $n \in \mathbb{N}$. Het aantal permutaties van een verzameling van n elementen is $n!$

Bewijs. Laat de verzameling zijn: $\{a_1, \dots, a_n\}$. Voor het beeld van a_1 zijn er n mogelijkheden. Na ieder van deze keuzen zijn er voor het beeld van a_2 nog $n-1$ mogelijkheden over. Zo doorgaand vinden we na iedere keuze voor de beelden van a_1, \dots, a_{n-2} nog 2 mogelijkheden voor het beeld van a_{n-1} , terwijl daarna het beeld van a_n vastligt. In totaal zijn er dus $n(n-1)\dots 2 \cdot 1 = n!$ mogelijke permutaties. \square

1.1.7. Voorbeeld. In een stok speelkaarten met 52 kaarten kunnen de kaarten op $52!$ verschillende volgorden liggen.

1.1.8. Opgave. Elke dag ontbijten er acht mensen op een rij op een bank. Ze besluiten elke dag in een andere volgorde te gaan zitten. Na hoeveel jaren zijn alle mogelijkheden uitgeput?

1.1.9. Definitie. Voor elk tweetal gehele getallen n en k met $0 \leq k \leq n$ definiëren we $\binom{n}{k}$ (spreek uit: n over k) als volgt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Deze getallen $\binom{n}{k}$ heten binomiaalcoëfficiënten.

Gevolg.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{n!} = 1; \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1; \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n;$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n.$$

In het algemeen is $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, want

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}.$$

1.1.10. Opgave.

a) Bereken $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{5}{4}$ en $\binom{5}{5}$.

b) Verifieer dat geldt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \quad \text{voor } 1 \leq k \leq n.$$

1.1.11. Stelling. Voor $n, k \in \mathbb{Z}$ met $0 \leq k \leq n-1$ geldt:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \quad (\text{Pascal})$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

□

1.1.12. Door van deze eigenschap en van $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, gebruik te maken, kunnen we snel een schema maken van alle $\binom{n}{k}$ voor n niet te groot.

		1			$n = 0$			$\binom{0}{0}$				
		1	1		$n = 1$			$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$			
		1	2	1	$n = 2$			$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$		
		1	3	3	1	$n = 3$		$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$	
		1	4	6	4	1	$n = 4$	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$
	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow		\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	
	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$		$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	

In iedere regel zetten we links en rechts een 1, verder is ieder getal de som van de twee getallen die er schuin boven staan. Dit schema heet de driehoek van Pascal.

1.1.13. Definitie. Laat n en k gehele getallen zijn met $0 \leq k \leq n$. Een combinatie van k elementen uit een verzameling V van n elementen is een deelverzameling van V met k elementen.

N.B. Bij een combinatie wordt dus niet op de volgorde van de elementen gelet.

1.1.14. Voorbeeld. Als $V = \{1, 2, 3, 4\}$, dan zijn alle combinaties van 3 elementen uit V :

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}.$$

1.1.15. Stelling. Zij $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ met $0 \leq k \leq n$. Het aantal combinaties van k elementen uit een verzameling V van n elementen is $\binom{n}{k}$.

Bewijs. De stelling is juist voor $k = 0$, daar de enig mogelijke deelverzameling met nulelementen de lege verzameling is. Als $k > 0$ (en dus ook $n > 0$) verloopt het bewijs als volgt: We tellen eerst het aantal manieren waarop we k elementen kunnen kiezen en een volgorde kunnen geven, dus het aantal manieren waarop we k plaatsen in een rij kunnen bezetten met elementen van V . Voor de eerste plaats zijn er n mogelijkheden, daarna voor de tweede plaats nog $n-1, \dots$, voor de k^e plaats $n-k+1$. In totaal $n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ mogelijkheden. Nu is iedere combinatie echter zo vaak geteld als hij gepermutreed kan worden, dus $k!$ maal. Het aantal combinaties is dus $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. \square

1.1.16. Opgave. Verifieer door natellen de juistheid van bovenstaande stelling voor $n = 5$ en $k = 3$.

1.1.17. Stelling. Voor $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k,$$

dus

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^3 + \dots + nx^{n-1} + x^n.$$

We lezen hierbij $x^0 = 1$, ook als $x = 0$.

Bewijs: Voor $n = 0$ staat links en rechts 1. Voor $n > 0$: Bij uitwerken van

$$(1 + x)^n = (1 + x)(1 + x) \dots (1 + x) \quad (n \text{ factoren})$$

krijgen we x^k door k maal een x en de overige $n - k$ maal een 1 te gebruiken uit de diverse factoren. Het aantal manieren waarop we x^k kunnen krijgen is dus het aantal manieren waarop we k factoren uit de n factoren kunnen nemen, dus het aantal deelverzamelingen van k elementen uit n elementen. Dit aantal is $\binom{n}{k}$, zodat de coëfficiënt van x^k na uitwerking $\binom{n}{k}$ moet zijn. Door sommatie volgt nu het gestelde. \square

1.1.18. Laat A een verzameling bestaande uit n elementen zijn ($n \in \mathbb{N}$). Een deelverzameling van A kunnen we karakteriseren door bij ieder element van A aan te geven of het al dan niet tot deze verzameling behoort. We kunnen dit anschouwelijk voorstellen door in n hokjes de woorden "ja" of "neen" in te vullen naar gelang de betrokken elementen van A tot deze deelverzameling behoren. Bij iedere deelverzameling behoort zo een rijtje van n woorden "ja" of "neen" en omgekeerd. Het totaal aantal mogelijke deelverzamelingen van A is dus het aantal mogelijke rijtjes "ja/neen"; dit is 2^n .

1.1.19. Het voorafgaande is ook als volgt in te zien. Er zijn $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ deelverzamelingen van resp. $0, 1, \dots, n$ elementen. In totaal dus

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

deelverzamelingen (neem $x = 1$ in 1.1.17).

1.1.20. Stelling (Binomium van Newton). Voor $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$ geldt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Bewijs. Als $a = 0$ staat er links en rechts b^n . Voor $a \neq 0$: Stel $x = \frac{b}{a}$, dan is volgens 1.1.17.

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k ,$$

dus

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{-k} b^k .$$

Na vermenigvuldiging met a^n is het bewijs voltooid. □

1.1.21. Opgave. Schrijf het binomium van Newton uit voor $n = 1, 2, 3, 4, 5$ en 6 . Gebruik desgewenst de driehoek van Pascal.

1.1.22. Opmerking. Het binomium van Newton kan ook als volgt met volledige inductie bewezen worden. Voor $n = 0$ en $n = 1$ is het gestelde evident. Laat de formule juist zijn voor $n \in \mathbb{N}$, d.w.z.

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Dan is

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= a(a + b)^n + b(a + b)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} = \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} = \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k . \end{aligned}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de relatie (uit 1.1.11)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} .$$
 □

1.2. Inleiding tot de grafentheorie

Een graaf bestaat uit een aantal punten (knopen) en een aantal verbindingen tussen die punten (takken). Voorbeelden zijn: hoekpunten en ribben van een kubus, hiërarchie in een bedrijf, goederenstroom in een fabriek, prioriteitschema van activiteiten in een proces, elektrisch schakelschema, chemische structuurformule, stadsplattegrond, telefoonnet, blokdiagram voor een computer.

Soms zijn de takken van een richting voorzien, bijv. in een prioriteitschema of een blokdiagram en bij eenrichtingsverkeer in een stadsplattegrond.

Precisering van het begrip vindt plaats door twee verzamelingen K (knopen) en T (takken) te kiezen. Bij elke tak horen twee knopen, al dan niet in een gegeven volgorde (gerichte of ongerichte graaf).

Een gerichte graaf is een tripel $\langle K, T, \varphi \rangle$, waarin K en T eindige verzamelingen zijn en $\varphi: T \rightarrow K \times K$ een afbeelding. Als $\varphi(t) = (b(t), e(t))$, dan heet $b(t)$ het beginpunt van t en $e(t)$ het eindpunt van t . Elementen van K heten knopen, elementen van T takken.

Een ongerichte graaf heeft een analoge definitie; alleen is het paar, dat door φ aan een tak t wordt toegevoegd een ongeordend paar. Men kan dan ook geen beginpunt en eindpunt onderscheiden, doch slechts twee randpunten van een tak.

Bij iedere gerichte graaf hoort een bijbehorende ongerichte graaf, die ontstaat door van de volgorde van $b(t)$ en $e(t)$ af te zien.

Een graaf wordt getekend door de knopen als stippen te tekenen en de takken als verbindingslijnen; bij een gerichte graaf worden deze takken van een pijl voorzien.

Het is toegestaan, dat tussen twee knopen meer dan één tak loopt, in dezelfde of tegengestelde richting.

Zelfde richting: takken t_1 en t_2 met $t_1 \neq t_2$ en toch $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$.

Tegengestelde richting: takken t_1 en t_2 met $b(t_2) = e(t_1)$, $b(t_1) = e(t_2)$.

Beginpunt en eindpunt van een tak mogen gelijk zijn: $b(t) = e(t)$ is toegestaan. Een dergelijke tak heet een lus.

Een gerichte graaf $\langle K, T, \varphi \rangle$ heet enkelvoudig, als uit $t_1 \neq t_2$ volgt $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ voor alle $t_1 \in T, t_2 \in T$ en als $b(t) \neq e(t)$ voor alle $t \in T$.

Let wel dat twee tegengesteld gerichte takken tussen dezelfde knopen wel zijn toegestaan bij een enkelvoudige gerichte graaf.

Een enkelvoudige ongerichte graaf heeft een analoge definitie: meer dan één tak tussen twee knopen evenals lussen zijn verboden.

Bij een enkelvoudige gerichte graaf is een tak vastgelegd door zijn beginpunt en eindpunt. Bij ieder geordend paar (x, y) van knopen hoort geen of één tak met beginpunt x en eindpunt y . We kunnen de graaf dus ook bepalen door een verzameling knopen en een verzameling paren knopen, nl. de verzameling van die paren, die verbonden zijn: $\langle K, T_1 \rangle$ met $T_1 \subset K \times K$. Er geldt dan nog: $(x, x) \notin T_1$, omdat een enkelvoudige gerichte graaf geen lussen heeft.

Een analoge bepaling is mogelijk bij een enkelvoudige ongerichte graaf.

$\langle K', T', \varphi' \rangle$ heet een deelgraaf van $\langle K, T, \varphi \rangle$, als $K' \subset K, T' \subset T$ en $\varphi'(t) = \varphi(t)$ voor alle $t \in T'$. De deelgraaf heet vol als

$$T' = \{t \mid t \in T \text{ en } \varphi(t) \in K' \times K'\}.$$

Voor iedere deelgraaf geldt uiteraard, dat $\varphi(t) \in K' \times K'$ voor alle $t \in T'$.

In een gerichte graaf heet een rij takken t_1, \dots, t_n , zodat $e(t_i) = b(t_{i+1})$ voor $i = 1, \dots, n-1$, een weg. $b(t_1)$ heet het beginpunt b van de weg, $e(t_n)$ heet het eindpunt e van de weg, n heet de lengte van de weg. De weg heet een weg van b naar e .

Als t_1, \dots, t_n onderling verschillend zijn, heet de weg een pad.

Als $e(t_1), \dots, e(t_{n-1})$ onderling verschillend zijn en ook verschillend van $b(t_1)$ en $e(t_n)$, heet de weg een boog. Als voor een boog geldt $b(t_1) = e(t_n)$, dan heet de boog een gesloten boog of een cykel of een kring.

Uiteraard is iedere boog een pad.

1.2.1. Stelling. Als er een weg van x naar y bestaat, dan bestaat er ook een boog van x naar y .

Het bewijs is eenvoudig (volledige inductie naar de lengte van de weg).

Bij ongerichte grafen worden de begrippen weg, pad en boog op analoge wijze gedefinieerd.

Een ongerichte graaf heet samenhangend als er voor ieder tweetal knopen a en b (met $a \neq b$) een weg van a naar b bestaat.

Een niet-samenhangende graaf bestaat uit een aantal samenhangende stukken, die componenten heten. Twee knopen behoren dan en slechts dan tot dezelfde component, als ze door een weg verbonden zijn. Een samenhangende graaf heeft één component.

Voor gerichte grafen worden de begrippen samenhangend en component voor de bijbehorende ongerichte graaf gedefinieerd. Het is zeer wel mogelijk, dat twee verschillende knopen a en b van een samenhangende gerichte graaf in de gerichte graaf niet door een weg verbonden zijn.

1.2.2. Het bepalen van de afstand tussen twee knopen in een enkelvoudige, samenhangende, gerichte graaf

Zij gegeven een enkelvoudige, samenhangende, gerichte graaf G . Verder zijn a en b een tweetal knopen van G . Als er een weg is van a naar b in de gerichte graaf, dan verstaat men onder de afstand van de knopen a en b de lengte van een kortste weg van a naar b . We noteren deze afstand met $\text{dist}(a,b)$. In het algemeen is $\text{dist}(a,b) \neq \text{dist}(b,a)$. Als er in de gerichte graaf geen weg is van a naar b , dan spreken we af dat $\text{dist}(a,b) = \infty$.

Een eenvoudige manier om de afstand te vinden tussen een knoop a van G en een willekeurige andere knoop van G die vanuit a bereikbaar is, is de volgende algoritme:

Nummer a met 0.

l^e slag: nummer de knopen, die afstand l vanuit a hebben, met l .

In het algemeen:

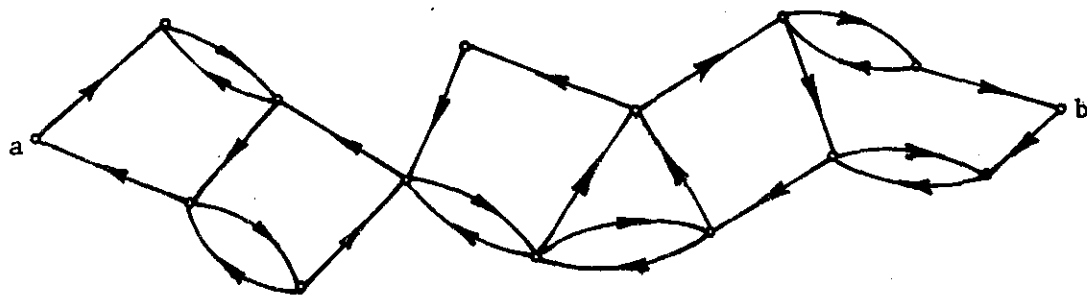
n^e slag: nummer de nog niet genummerde knopen, die afstand l vanuit een met $n-1$ genummerde knoop hebben, met n .

Als deze nummering is voltooid is het niet moeilijk een deelgraaf van G zonder kringen aan te geven, met dezelfde knopen als G en zo min mogelijk takken en waarin elke knoop die in G vanuit a bereikbaar is, nog steeds te bereiken is langs de kortste weg.

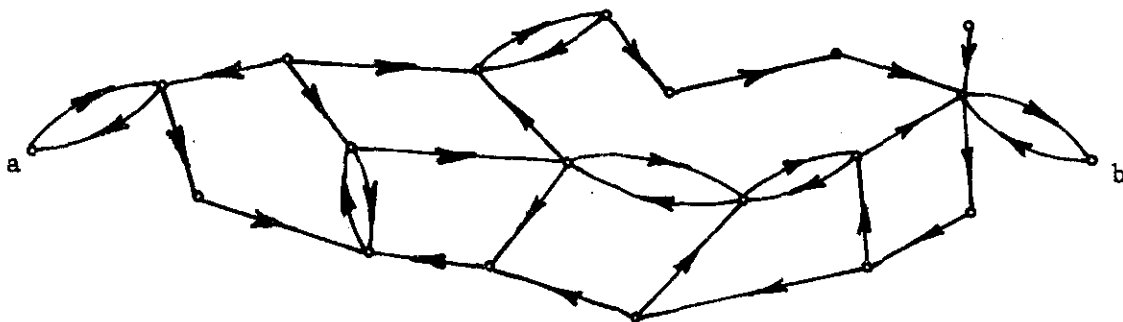
Opmerking. Voor de bepaling van de afstand tussen twee knopen in een enkelvoudige, samenhangende, ongerichte graaf kan een analoge algoritme gebruikt worden.

Voorbeelden. We voeren dit uit voor wegen van a naar b en voor wegen van b naar a in de nu volgende grafen.

1)

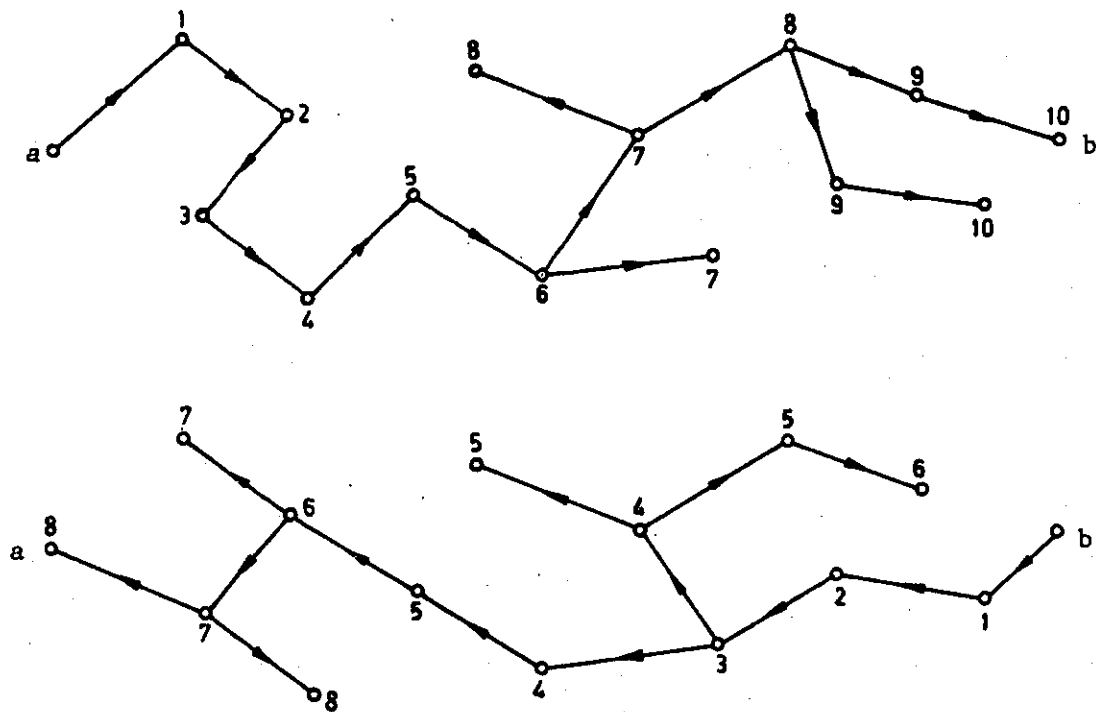


2)



Het resultaat is:

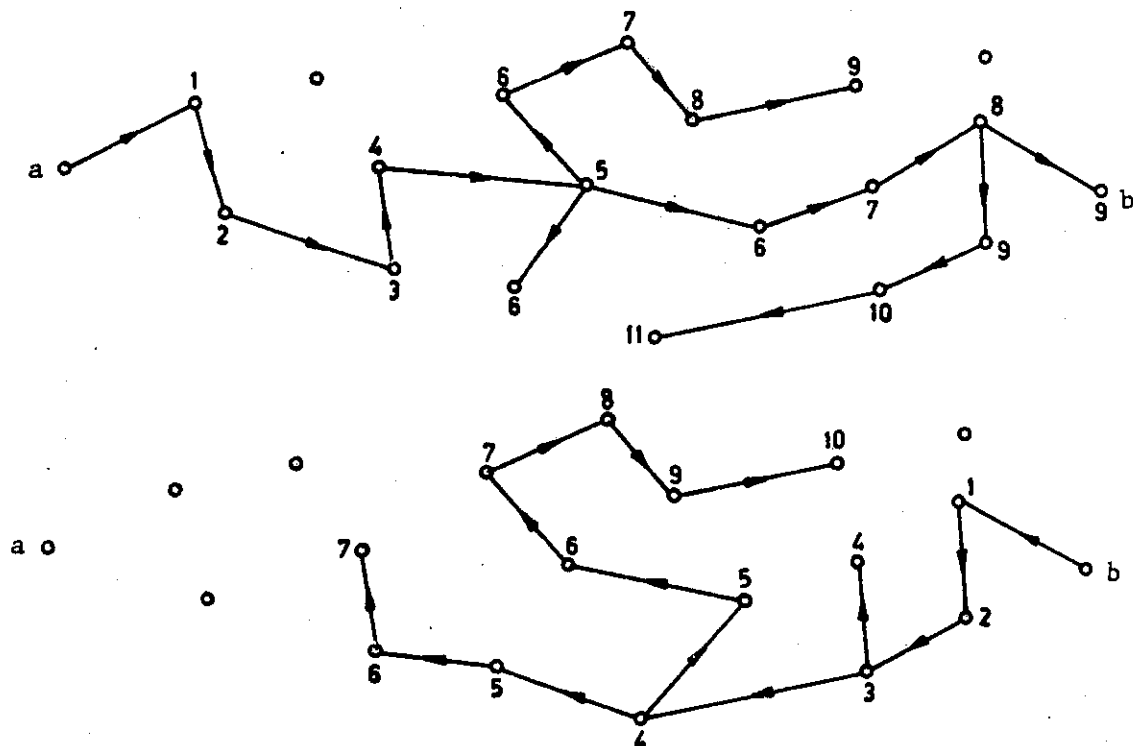
1)



dist (a,b) = 10

dist (b,a) = 8

2)



dist (a,b) = 9

a is niet bereikbaar vanuit b, dist(b,a) = ∞.

1.3. Bomen

Een ongerichte graaf zonder kringen heet een bos. Een samenhangende ongerichte graaf zonder kringen heet een boom.

1.3.1. Stelling. Elke component van een bos is een boom. Een bos (en dus ook een boom) is een enkelvoudige graaf.

Dit is evident.

Een knoop, waarin precies één tak uitkomt, heet een eindknoop.

1.3.2. Stelling. Iedere boom met twee of meer knopen heeft minstens twee eindknopen.

Bewijs. Als alle knopen van de boom eindknopen zijn, is de stelling juist. We mogen dus aannemen, dat de boom een knoop a bevat, die geen eindknoop is. We passen volledige inductie toe naar het aantal knopen n . Stel dat het aantal takken, dat van a uitgaat, k is, dan is $k \geq 2$, want $k = 0$ is onmogelijk, omdat de graaf samenhangend is en $n \geq 2$ en $k = 1$ is onmogelijk omdat a geen eindknoop is. Laat nu de knoop a en die k takken weg. De resterende graaf is een bos en de k andere randpunten van die k takken liggen in verschillende componenten, omdat er anders in de oorspronkelijke graaf een kring zou zijn geweest (verbinden via a). Elk van deze k componenten bevat tenminste één knoop, die eindknoop is in de oorspronkelijke boom. Immers als zo'n component uit slechts één knoop bestaat, dan is deze knoop in de oorspronkelijke boom slechts met a verbonden en dus een eindknoop. Als zo'n component tenminste twee knopen bevat, kunnen we op die component de inductieveronderstelling toepassen, omdat het aantal knopen zeker $< n$ is, en concluderen, dat deze component tenminste twee eindknopen bezit, waarvan er tenminste één in de oorspronkelijke boom niet met a verbonden is en dus daar ook een eindknoop is. Op deze wijze vinden we in de boom k eindknopen, hetgeen het bewijs van de stelling voltooit, omdat $k \geq 2$. □

1.3.3. Stelling. Iedere boom met n knopen heeft precies $n - 1$ takken.

Bewijs. We passen volledige inductie toe naar n . Het geval $n = 1$ is duidelijk. Als $n \geq 2$, is er een eindknoop a met aanliggende tak t . Laat a en t weg. De resterende graaf is weer een boom, omdat voor twee knopen x en y in die boom een pad in de oorspronkelijke boom, dat van x naar y loopt, de tak t niet bevat en dus een weg in de resterende graaf is. Volgens de inductieveronderstelling heeft de resterende boom $n - 2$ takken en de gegeven boom dus $n - 1$ takken. \square

1.3.4. Stelling. Een bos met n knopen en k componenten heeft $n - k$ takken.

1.3.5. Stelling. In een boom is ieder pad een boog. Als a en b verschillende knopen in een boom zijn, is er één en slechts één pad van a naar b .

Het bewijs van deze stellingen is eenvoudig; daarom laten we ze achterwege.

Een deelgraaf van een samenhangende, ongerichte graaf, die alle knopen van de oorspronkelijke graaf bevat en tevens een boom is, heet een skelet van die graaf.

1.3.6. Stelling. Iedere samenhangende, ongerichte graaf bezit een skelet.

Bewijs. We passen volledige inductie toe naar het aantal takken. Als de graaf geen kring bevat, is hij een boom en dus zijn eigen skelet. Als de graaf wel een kring bevat, is de deelgraaf, die ontstaat door één van de takken van een kring weg te laten, samenhangend. Immers een weg in de oorspronkelijke graaf, die de weggelaten tak bevat, kan vervangen worden door een weg in de deelgraaf met hetzelfde begin- en eindpunt, door telkens die tak te vervangen door de rest van de kring, waarvan hij deel uitmaakt. De deelgraaf is dus samenhangend en heeft een tak minder en bezit dus volgens inductieveronderstelling een skelet, dat uiteraard ook skelet van de oorspronkelijke graaf is. \square

Opmerking. Uit het bewijs volgt, dat men een skelet kan vinden door herhaaldelijk schrappen van een tak in een kring. Verder kan een graaf meer dan één skelet hebben.

1.3.7. Het bepalen van een optimale boom

Op een enkelvoudige, samenhangende, ongerichte graaf G is een afbeelding C gedefinieerd, die aan iedere deelgraaf g van G een geheel getal $C(g)$ toevoegt, genaamd de kostprijs van g . De kostprijs van een deelgraaf van G is de som van de kostprijzen van de tot de deelgraaf behorende takken. Laat de knopen van G zijn a_1, \dots, a_n . De kostprijzen van de takken van G kan men noteren in een driehoekig schema waarin in de eerste rij staan de kostprijzen van de takken $a_1 a_2, a_1 a_3, \dots, a_1 a_n$ als deze in G voorkomen en ∞ op de plaatsen waarvoor de corresponderende punten niet verbonden zijn.

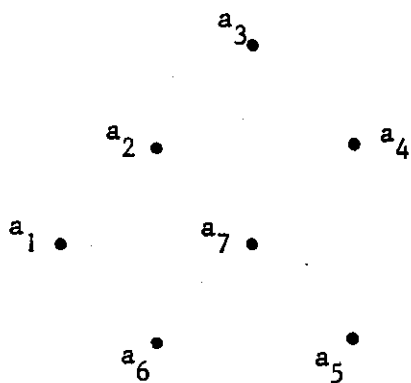
Op de tweede rij staan de kostprijzen van $a_2 a_3, \dots, a_2 a_n$ (eventueel ∞), enz. Voorbeelden van een dergelijk schema zijn de afstandstabellen die men in spoorboekjes en zakagenda's aantreft. (Evenals voor afstandstabellen gebruikt men i.p.v. het driehoekige schema vaak een vierkant met $0 \dots 0$ op de diagonaal en linksonder het gespiegelde van rechtsboven; precieser: op de plaats in de i^{de} rij en j^{de} kolom staat de kostprijs van $a_i a_j$ (of ∞) evenals op de plaats in de j^{de} rij en i^{de} kolom). Omgekeerd kan men uit het kostprijsschema de graaf reconstrueren.

Een eenvoudige methode om een samenhangende deelgraaf van G te vinden zonder kringen, die alle knopen van G bevat en minimale kostprijs heeft (optimale boom), is de volgende algoritme:

Maak allereerst een bos, dat slechts uit één tak van G bestaat en wel uit een tak van G met de laagste kostprijs. Voeg vervolgens telkens een tak toe aan het bos en wel een tak, die van de resterende takken van G de laagste kostprijs heeft en die géén kringen veroorzaakt.

De algoritme is afgelopen als alle knopen van G in het bos zijn opgenomen en het bos samenhangend is.

Beschouwen we als voorbeeld een graaf met zeven knopen gegeven door zijn kostprijsschema.



	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	8	9	10	11	3	8
a_2		4	∞	12	7	4
a_3			5	8	∞	6
a_4				9	9	7
a_5					13	9
a_6						∞

We brengen nu eerst de verbinding $a_1 a_6$ aan (kostprijs 3); daarna $a_2 a_3$ en $a_2 a_7$ (kostprijs 4); vervolgens $a_3 a_4$ (kostprijs 5), maar de in kostprijs nu volgende $a_3 a_7$ wordt niet aangebracht omdat daardoor een kring zou ontstaan; $a_4 a_7$ (kostprijs 7) wordt evenmin aangebracht; $a_2 a_6$ (kostprijs 7) wordt wel aangebracht; van de takken met kostprijs 8 (nl. $a_1 a_2$, $a_1 a_7$ en $a_3 a_5$) wordt alleen $a_3 a_5$ aangebracht; daarmee is een optimale boom bepaald. We geven in de volgende figuren 1, 2, 3, 4 opeenvolgende stappen aan.

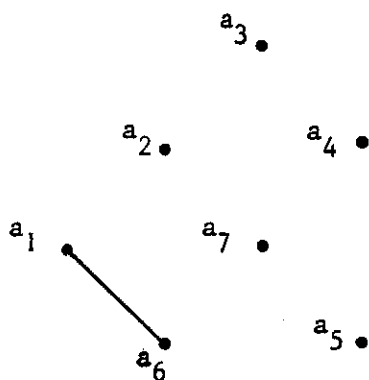


fig.1

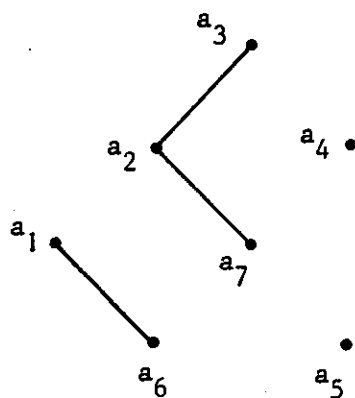


fig.2

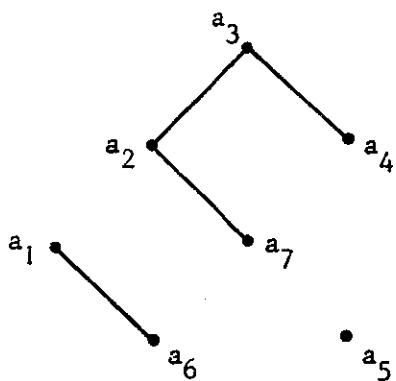


fig.3

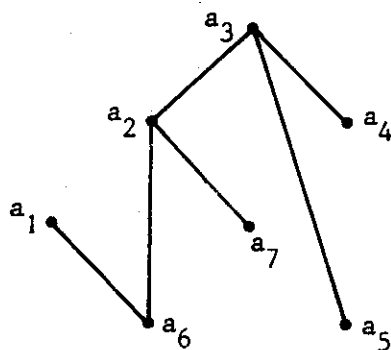


fig.4

In het algemeen zijn er meerdere optimale bomen mogelijk.

1.4. Gerichte grafen

In gerichte grafen is het vaak belangrijk dat kringen ontbreken. Zo zijn in prioriteitenschema's kringen ongewenst. We behandelen een criterium voor het ontbreken van kringen. Alvorens dit resultaat te geven, merken we het volgende op. Als een gerichte graaf geen kringen heeft, is iedere weg een boog en dus heeft iedere weg een lengte \leq totale aantal knopen $\text{min } 1$. We voeren nu de volgende definitie in.

Definitie. Als x een willekeurige knoop is van de beschouwde gerichte graaf zonder kringen, dan verstaan we onder de rang van x , aangegeven met $r(x)$, de lengte van een langste weg met eindpunt x .

1.4.1. Stelling. Voor een gerichte graaf zijn de volgende beweringen equivalent.

1) De knopen kunnen genummerd worden, dusdanig dat voor iedere tak t geldt:

$$\text{nummer van } b(t) < \text{nummer van } e(t).$$

2) Iedere niet-lege verzameling A van knopen bevat een knoop a , die geen eindpunt is van een tak met beginpunt in A .

3) De graaf bevat geen kringen.

Bewijs.

1 \Rightarrow 2. We denken de knopen genummerd als in 1) gegeven. Als A een niet-lege verzameling knopen is, kiezen we voor a de knoop in A met het laagste nummer. Van iedere tak met eindpunt a heeft het beginpunt een lager nummer en ligt dus niet in A .

2 \Rightarrow 3. Als de graaf een kring heeft, kiezen we voor A de verzameling der knopen, die in de kring voorkomen. Dan is iedere knoop in A eindpunt van een tak met beginpunt in A , in strijd met 2).

3 \Rightarrow 1. Nummer de knopen als volgt (vgl. bovenstaande definitie voor de rang van een knoop):

eerst de x met $r(x) = 0$ in willekeurige volgorde,

dan de x met $r(x) = 1$ in willekeurige volgorde, enz.

Dan geldt, dat uit $r(x) < r(y)$ volgt: nummer van $x <$ nummer van y . Neem nu een tak t . Er is een weg met lengte $r(b(t))$ en eindpunt $b(t)$. Voeg aan deze weg de tak t toe, dan ontstaat een weg met lengte $r(b(t)) + 1$ en eindpunt $e(t)$. Dus

$$r(b(t)) < r(b(t)) + 1 \leq r(e(t)) ,$$

$$\text{nummer van } b(t) < \text{nummer van } e(t) .$$

□

1.4.2. Het bepalen van de rang van de knopen van een graaf

Zij gegeven een enkelvoudige, gerichte graaf G zonder kringen. Zonder beperking van de algemeenheid nemen we verder aan dat de graaf samenhangend is.

De rang van de knopen van G kan als volgt bepaald worden:

- bepaal de knopen waarin géén takken binnenkomen; ken deze knopen de rang 0 toe,
- verwijder alle takken die uitgaan van een knoop met rang 0.

In het algemeen, als we tot en met knopen van rang $(n-1)$ gekomen zijn:

- bepaal de knopen die nog geen rangnummer hebben en waarin géén takken binnenkomen; ken deze knopen de rang n toe,
- verwijder alle takken die uitgaan van een knoop met rang n .

1.5. Transportnetwerken

We nemen een gerichte graaf en denken ons hierop een stroom, die in iedere tak een bepaalde waarde heeft. In de knopen mag geen opeenhoping ontstaan en geen produktie plaats vinden; daarom is de totale stroom in de naar de knoop toelopende takken gelijk aan de totale stroom in de van de knoop aflopende takken. Een uitzondering vormen twee knopen i (ingang) en u (uitgang). In i mag meer stroom in uitgaande takken zitten dan in de inkomende takken en in u omgekeerd.

We beschrijven de stroom met een functie f , die aan iedere tak een reëel getal toevoegt.

Als $\langle K, T, \varphi \rangle$ een gerichte graaf is, f een afbeelding, die aan iedere tak van de graaf een reëel getal toevoegt, $A \subset K$, $B \subset K$, dan stellen we

$$F(A, B) := \sum_{\substack{t \in T \\ b(t) \in A \\ e(t) \in B}} f(t) .$$

Als A uit één element x bestaat, schrijven we $F(x, B)$ en analoog in andere gevallen. Er geldt dan

$$F(A, B) = \sum_{x \in A} F(x, B) = \sum_{y \in B} F(A, y) = \sum_{\substack{x \in A \\ y \in B}} F(x, y) .$$

Als $\langle K, T, \varphi \rangle$ een gerichte graaf is, als $i \in K$ (ingang) en $u \in K$ (uitgang), dan heet een afbeelding f , die aan iedere tak een reëel getal toevoegt, een stroom als geldt:

$$F(x, K) - F(K, x) = 0 \text{ voor alle } x \in K \text{ met } x \neq i \text{ en } x \neq u.$$

1.5.1. Stelling. Voor een stroom f geldt:

$$F(i, K) - F(K, i) = F(K, u) - F(u, K) .$$

Deze grootheid noemen we de stroomsterkte v van de stroom.

Bewijs.

$$\begin{aligned} F(i, K) - F(K, i) &= F(i, K) - F(K, i) + \sum_{\substack{x \in K \\ x \neq i \\ x \neq u}} (F(x, K) - F(K, x)) = \\ &= F(K, K) - F(u, K) - F(K, K) + F(K, u) = F(K, u) - F(u, K) . \quad \square \end{aligned}$$

We nemen nu aan, dat elke tak t een zekere capaciteit $c(t)$ heeft en dat de stroom in zo'n tak niet groter kan zijn dan de capaciteit van de tak. Het is verder geen ernstige beperking van de algemeenheid als we de graaf enkelvoudig en samenhangend aannemen.

Definitie. Een transportnetwerk is een enkelvoudige, samenhangende, gerichte graaf met aangewezen knopen i (ingang) en u (uitgang) en een afbeelding c , die aan iedere tak t een reëel getal $c(t) > 0$ toevoegt, genaamd de capaciteit van t .

Een stroom f op een transportnetwerk heet een toegelaten stroom als voor alle takken t geldt:

$$0 \leq f(t) \leq c(t) .$$

We zoeken in een transportnetwerk toegelaten stromen met maximale stroomsterkte. Om deze te bestuderen voeren we het begrip snede in. Daartoe verdelen we de verzameling K der knopen in twee complementaire verzamelingen A en B , dusdanig dat $i \in A$ en $u \in B$. De bij deze verdeling behorende snede is de verzameling der takken met beginpunt in A en eindpunt in B . De capaciteit van de snede is de som van de capaciteiten van haar takken.

Stel $A \cup B = K$, $A \cap B = \emptyset$, $i \in A$, $u \in B$. Dan is

$$S(A,B) := \{t \mid t \in T, b(t) \in A, e(t) \in B\} \quad (\text{snede van } A \text{ en } B),$$

$$C(A,B) := \sum_{t \in S(A,B)} c(t) \quad (\text{capaciteit van snede}).$$

1.5.2. Stelling. Voor iedere toegelaten stroom met stroomsterkte v en iedere snede geldt:

$$v = F(A,B) - F(B,A) \leq C(A,B) .$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} v &= F(i,K) - F(K,i) = F(i,K) - F(K,i) + \sum_{\substack{x \in A \\ x \neq i}} (F(x,K) - F(K,x)) = \\ &= F(A,K) - F(K,A) = F(A,A) + F(A,B) - F(A,A) - F(B,A) = \\ &= F(A,B) - F(B,A) \leq F(A,B) \leq C(A,B) . \end{aligned} \quad \square$$

De ongelijkheid $v \leq C(A,B)$ geldt dus voor iedere toegelaten stroom en voor iedere snede en dus ook voor een snede met minimale capaciteit. Er is een stelling (*Ford-Fulkerson*), die zegt dat er een toegelaten stroom bestaat waarvan de stroomsterkte gelijk is aan de minimale capaciteit van een snede. Deze stroom heeft dan uiteraard maximale stroomsterkte. We bewijzen deze stelling niet, maar schetsen wel een algoritme om in een gegeven transportnetwerk een stroom met maximale stroomsterkte te vinden.

Laat een toegelaten stroom f gegeven zijn. Als er een boog van i naar u is, zodat op iedere tak t van die boog geldt: $c(t) - f(t) > 0$, dan kunnen we een toegelaten stroom verkrijgen door in alle takken van de boog de stroom met het minimum m van deze $c(t) - f(t)$ te vermeerderen. De stroomsterkte van deze nieuwe stroom f_1 is m groter dan de stroomsterkte van f . Op minstens één der takken van de beschouwde boog geldt $c(t) - f_1(t) = 0$. Zo'n tak heet verzadigd. Een boog van i naar u met minstens één verzadigde tak noemen we ook verzadigd.

Als alle bogen van i naar u verzadigd zijn, heet de stroom compleet. De stroomsterkte hoeft dan evenwel nog niet maximaal te zijn.

Stel nu dat er een boog in de bijbehorende ongerichte graaf van i naar u is, eventueel met tegenliggende takken (aangegeven met \leftarrow takken) in de gerichte graaf, waarvoor geldt:

$$\text{voor alle } \rightarrow \text{ takken: } c(t) - f(t) > 0 ,$$

$$\text{voor alle } \leftarrow \text{ takken: } f(t) > 0 .$$

Nemen we nu het minimum m van al deze $c(t) - f(t)$, resp. $f(t)$, en vermeerderen we de stroom met m op de \rightarrow takken van de boog en verminderen we de stroom met m op de \leftarrow takken van de boog, dan ontstaat een toegelaten stroom met een stroomsterkte, die m groter is dan de stroomsterkte van f .

We herhalen dit proces net zo lang tot het niet meer kan. We bespreken eerst twee voorbeelden.

1.5.3. Voorbeeld . $K = \{i, x_1, x_2, x_3, u\}$. De takken van de graaf zijn gegeven in de tweede kolom en hun capaciteiten in de eerste kolom van de volgende tabel.

c		f_1	f_2	f_3	f_4
6	$i \rightarrow x_1$	0	2	5	5
2	$i \rightarrow x_3$	0	0	0	2
2	$x_1 \rightarrow x_2$	0	2	2	2
3	$x_1 \rightarrow x_3$	0	0	3	3
10	$x_2 \rightarrow u$	0	2	2	2
6	$x_3 \rightarrow u$	0	0	3	5
	v	0	2	5	7

We beginnen met f_1 identiek nul. We zoeken bogen door de graaf en houden het mogelijk toe te voegen bedrag bij.

$$\begin{aligned} i &\rightarrow x_1 & 6 \\ x_1 &\rightarrow x_2 & 2 \\ x_2 &\rightarrow u & 2 . \end{aligned}$$

f_2 door verhoging langs boog met 2; $x_1 \rightarrow x_2$ verzadigd.

$$\begin{aligned} i &\rightarrow x_1 & 4 \\ x_1 &\rightarrow x_3 & 3 \\ x_3 &\rightarrow u & 3 . \end{aligned}$$

f_3 door verhoging langs boog met 3; $x_1 x_2$ en $x_1 x_3$ verzadigd.

$$\begin{array}{l} i \rightarrow x_3 \quad 2 \\ x_3 \rightarrow u \quad 2 . \end{array}$$

f_4 door verhoging langs boog met 2; $x_1 x_2$, $x_1 x_3$ en $i x_3$ verzadigd.

$$i \rightarrow x_1 \quad 1, \text{ breekt af.}$$

De stroomsterkte van f_4 is gelijk aan 7. Beschouw nu de complementaire verzamelingen $A = \{i, x_1\}$, $B = \{x_2, x_3, u\}$. We hebben

$$S(A, B) = \{ix_3, x_1x_2, x_1x_3\},$$

$$C(A, B) = 2 + 2 + 3 = 7.$$

Op grond van de stelling van Ford-Fulkerson volgt nu dat de stroomsterkte van f_4 maximaal is.

In dit voorbeeld is de gevonden complete stroom maximaal. In het volgende voorbeeld is dat niet zo.

1.5.4. Voorbeeld. $K = \{i, x_1, x_2, u\}$. Takken en capaciteiten staan in de tabel.

c		f_1	f_2	f_3	f_4
2	$i \rightarrow x_1$	0	2	2	2
5	$i \rightarrow x_2$	0	0	1	3
3	$x_1 \rightarrow x_2$	0	2	2	0
4	$x_1 \rightarrow u$	0	0	0	2
3	$x_2 \rightarrow u$	0	2	3	3
	v	0	2	3	5

$$\begin{array}{l} i \rightarrow x_1 \quad 2 \\ x_1 \rightarrow x_2 \quad 2 \\ x_2 \rightarrow u \quad 2 . \end{array}$$

f_2 door verhoging langs boog met 2; $i x_1$ verzadigd.

$$\begin{array}{l} i \rightarrow x_2 \quad 5 \\ x_2 \rightarrow u \quad 1 . \end{array}$$

f_3 door verhoging langs boog met 1; $i x_1$ en $x_2 u$ verzadigd.

De stroom f_3 is compleet, maar niet maximaal. Dit ziet men als volgt in.

$$\begin{array}{l} i \rightarrow x_2 \quad 4 \\ x_2 \leftarrow x_1 \quad 2 \\ x_1 \rightarrow u \quad 2 . \end{array}$$

f_4 door verhoging (resp. verlaging) langs boog met 2; i , x_1 en x_2 u verzadigd.

$i \rightarrow x_2$ 2, breekt af.

De stroomsterkte van f_4 is gelijk aan 5. Daar we een snede kunnen aangeven waarvoor de capaciteit gelijk is aan 5, volgt uit de stelling van Ford-Fulkerson dat de stroomsterkte van f_4 maximaal is.

We bewijzen niet, dat de algoritme altijd na een eindig aantal stappen afbreekt, doordat u niet bereikt kan worden. Als echter de algoritme afbreekt, dan trachten we in een laatste stap, uitgaande van i zoveel mogelijk knopen op voorgeschreven wijze te bereiken. We vinden dan een verzameling A van bereikte knopen, waarvoor geldt $i \in A$ en $u \notin A$. Laat B het complement van A t.o.v. K zijn, dan geldt $u \in B$. Voor de takken van A naar B geldt $c(t) - f(t) = 0$, voor de takken van B naar A geldt $f(t) = 0$. Als dat namelijk niet zo zou zijn, zouden we het toevoegen van takken hebben kunnen voortzetten. Nu geldt echter

$$v = F(A,B) - F(B,A) = C(A,B) .$$

We hebben dus een snede gevonden, waarvoor de stroomsterkte gelijk is aan de capaciteit van de snede. De stroomsterkte is dus inderdaad maximaal. We beschouwen de stand van zaken in de behandelde voorbeelden.

In voorbeeld 1.5.3 is $A = \{i, x_1\}$, $B = \{x_2, x_3, u\}$,

$$S(A,B) = \{i, x_3, x_1, x_2, x_1, x_3\} ,$$

$$C(A,B) = 2 + 2 + 3 = 7 .$$

In voorbeeld 1.5.4 is $A = \{i, x_2\}$, $B = \{x_1, u\}$,

$$S(A,B) = \{i, x_1, x_2, u\} ,$$

$$C(A,B) = 2 + 3 = 5 .$$

De algoritme levert dus niet alleen een stroom met maximale stroomsterkte, maar ook een snede met minimale capaciteit.

Hoofdstuk 2. Differentiaal- en integraalrekening

Dit hoofdstuk bevat een aantal onderwerpen uit de analyse, die een noodzakelijke aanvulling vormen van hetgeen op het V.W.O. behandeld is. We beginnen met een beknopte samenvatting van de V.W.O. stof, die voor dit hoofdstuk relevant is.

2.1. Eigenschappen van functies

In deze paragraaf releveren we een aantal eigenschappen van functies. Alle te beschouwen functies zullen de gedaante $f: A \rightarrow B$ hebben met $A \subset \mathbb{R}$ en $B \subset \mathbb{R}$.

2.1.1. Definitie. Een functie f heet begrensd op een verzameling $V \subset \text{DOM } f$, indien

$$\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in V (|f(x)| \leq M) .$$

Een functie f heet begrensd, indien f begrensd is op $\text{DOM } f$.

Voorbeelden. $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^{-x^2}$, $h(x) = \arctan x$, $l(x) = \sqrt{1-x^2}$ zijn voorbeelden van begrensde functies. De functie $f(x) = e^{-x}$ is begrensd op $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, de functie is echter niet begrensd op de gehele reële getallenrechte.

2.1.2. Definitie. Een functie f heet monotoon stijgend op $V \subset \text{DOM } f$, wanneer voor alle $x, y \in V$ met $x < y$ geldt: $f(x) < f(y)$. De functie f heet monotoon stijgend wanneer hij monotoon stijgend is op $\text{DOM } f$. Een functie f heet monotoon niet-dalend op $V \subset \text{DOM } f$, wanneer voor alle $x, y \in V$ met $x < y$ geldt: $f(x) \leq f(y)$; f heet monotoon niet-dalend wanneer f monotoon niet-dalend is op $\text{DOM } f$.

De begrippen monotoon dalend en monotoon niet-stijgend worden analoog gedefinieerd. Een functie heet monotoon wanneer hij monotoon stijgend, monotoon niet-dalend, monotoon niet-stijgend of monotoon dalend is.

Een functie heet strikt monotoon wanneer hij monotoon stijgend of monotoon dalend is. Merk op, dat een monotoon stijgende functie ook monotoon niet-dalend is, en een dalende functie ook niet-stijgend.

2.1.3. Voorbeelden.

1) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{als } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

is een monotoon niet-stijgende functie.

- 2) $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = \sin x$ is een monotoon stijgende functie.
- 3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) = x^2$ is monotoon dalend op $(-\infty, 0]$ en monotoon stijgend op $[0, \infty)$.

2.1.4. Definitie. Een functie f heeft een globaal maximum in $c \in \text{DOM } f$, indien $f(x) \leq f(c)$ voor alle $x \in \text{DOM } f$. Een functie f heeft een globaal minimum in $c \in \text{DOM } f$, indien $f(x) \geq f(c)$ voor alle $x \in \text{DOM } f$.

2.1.5. Voorbeelden.

- 1) $f(x) = x^2$ heeft een globaal minimum in 0; er is geen globaal maximum.
- 2) $f: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$ met $f(x) = \cos x$ heeft een globaal maximum zowel in 0 als in 2π en een globaal minimum in π .

2.1.6. Definitie. Een functie f heeft een locaal maximum in $c \in \text{DOM } f$, indien er een $\eta > 0$ bestaat zó dat $f(x) \leq f(c)$ voor alle $x \in \text{DOM } f$ met $x \in U_\eta(c)$ (voor de betekenis van $U_\eta(c)$ verwijzen we naar 2.3.1). Analoog wordt het begrip locaal minimum gedefinieerd. De lokale maxima en minima tesamen worden de extrema van de functie genoemd. (Merk op dat de globale maxima en minima hier ook toe behoren.)

2.2. Functielimieten voor $x \rightarrow \infty$

2.2.1. Definitie. Zij f een functie die gedefinieerd is voor alle $x > b$, waarbij $b \in \mathbb{R}$ (dus f is een functie met $\exists_{b \in \mathbb{R}} ((b, \infty) \subset \text{DOM } f)$). Zij $L \in \mathbb{R}$. We zeggen $f(x)$ gaat naar L voor $x \rightarrow \infty$ (notatie: $f(x) \rightarrow L (x \rightarrow \infty)$ of $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$) wanneer geldt: voor iedere $\epsilon > 0$ bestaat een $N \in \mathbb{R}$ zó dat voor alle $x > N$ geldt $f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$. Anders gezegd:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} \forall x > N (|f(x) - L| < \epsilon).$$

Voor functies die gedefinieerd zijn voor alle $x < a$, waarbij $a \in \mathbb{R}$, kan op analoge wijze het begrip $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ gedefinieerd worden.

2.2.2. Vanuit het V.W.O. zijn de volgende standaardlimieten bekend (hierbij zijn p en a vaste reële getallen):

Voor $p > 0$ is $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0$,

Voor $0 < a < 1$ is $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ (in het bijzonder $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$),

voor $p > 0$ is $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$,

(dus op den duur stijgt x^p veel sterker dan $\ln x$, hoe dicht p ook bij 0 ligt).

voor alle $p \in \mathbb{R}$ is $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$,

(dus op den duur stijgt e^x veel sterker dan x^p , hoe groot p ook is).

Merk op dat uit de laatste limieten ongelijkheden volgen, bijvoorbeeld

$\ln x < \sqrt{x}$ als x voldoende groot is,

$e^x > x^{1296}$ als x voldoende groot is.

Op een aantal van deze limieten komen we in hoofdstuk vier (4.5.2) terug.

2.3. Functielimieten voor $x \rightarrow a$

2.3.1. Definitie. Zij $\epsilon > 0$ en $a \in \mathbb{R}$. De ϵ -omgeving van a is het interval $(a - \epsilon, a + \epsilon)$; notatie: $U_\epsilon(a)$. Dus $U_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \epsilon\}$.

2.3.2. Definitie. Laat f een functie zijn en a een reëel getal, zo dat f gedefinieerd is tenminste op $U_\eta(a) \setminus \{a\}$ voor een of andere $\eta > 0$. Dan betekent $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, dat er voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in U_\delta(a) \setminus \{a\}$ geldt: $f(x) \in U_\epsilon(L)$. Anders geformuleerd: voor iedere $\epsilon > 0$ bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor alle x met $0 < |x - a| < \delta$ geldt: $|f(x) - L| < \epsilon$. Slordig uitgedrukt: dicht bij a (maar niet noodzakelijk in a zelf) liggen de functiewaarden dicht bij L .

2.3.3. Opmerkingen.

- 1) Merk op dat het voor de definitie van $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ irrelevant is of $a \in \text{DOM } f$ of $a \notin \text{DOM } f$, en dat, als $a \in \text{DOM } f$, het niet ter zake doet welke waarde $f(a)$ heeft.
- 2) Op welbekende wijze worden ook de oneigenlijke limieten $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ en $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ingevoerd. Geef zelf de definities.

2.3.4. Definitie. Laat f een functie zijn en a een reëel getal, zo dat f gedefiniëerd is tenminste op $(a, a + \eta)$ voor zekere $\eta > 0$. Dan betekent $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, dat er bij iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in (a, a + \delta)$ geldt $f(x) \in U_\epsilon(L)$. Deze limiet heet de rechterlimiet van f in a .

2.3.5. Definitie. Laat f een functie zijn en a een reëel getal, zo dat f gedefiniëerd is tenminste op $(a - \eta, a)$ voor zekere $\eta > 0$. Dan betekent $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, dat er bij iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zo dat voor alle $x \in (a - \delta, a)$ geldt $f(x) \in U_\epsilon(L)$. Deze limiet heet de linkerlimiet van f in a .

2.3.6. Uit het V.W.O. zijn de volgende eigenschappen bekend:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ dan en slechts dan als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ én $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.
- 2) als $f(x) \leq y(x) \leq g(x)$ voor $x \in U_\eta(a) \setminus \{a\}$ voor een $\eta > 0$, terwijl $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} y(x) = L$ (Insluitstelling).
- 3) als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M$.
- 4) als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} \lambda f(x) = \lambda L$.
- 5) als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LM$.
- 6) als $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, $M \neq 0$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$.
(Merk op dat uit $M \neq 0$ volgt dat $g(x) \neq 0$ in $U_\epsilon(a) \setminus \{a\}$ voor voldoende kleine positieve ϵ).
- 7) als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ en $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, $M \neq 0$, dan is $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.
- 8) als $f(x) \geq A$ in $U_\epsilon(a) \setminus \{a\}$ voor zekere $\epsilon > 0$, en $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, dan is $L \geq A$.
Evenzo met \leq in plaats van \geq .
- 9) als f monotoon niet-dalend is op $(a - \delta, a)$ voor zekere $\delta > 0$, terwijl $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, dan is $f(x) \leq L$ voor $a - \delta < x < a$. Is f monotoon niet-dalend op $(a, a + \delta)$ voor zekere $\delta > 0$ en geldt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, dan is $f(x) \geq L$ voor $a < x < a + \delta$. Soortgelijke uitspraken gelden voor monotoon niet-stijgende functies f .

- 10) $\lim_{x \rightarrow a} c = c$, $\lim_{x \rightarrow a} x = a$, $\lim_{x \rightarrow a} x^p = a^p$ voor $a > 0$, als $p > 0$ dan is $\lim_{x \rightarrow 0} x^p = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$, $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$, $\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a$ voor $a > 0$,
 $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$.
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Bovendien gelden 2) t/m 7) ook, indien overal \lim vervangen wordt door $\lim_{x \rightarrow a}$ of door $\lim_{x \rightarrow a}$.

2.3.7. Voorbeelden.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{x} = 2$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{1+1} = 1$.

2.4. Continuïteit

2.4.1. Definitie. f heet continu in $a \in \text{DOM } f$ indien voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zo dat voor alle $x \in \text{DOM } f$ met $x \in U_\delta(a)$ geldt: $f(x) \in U_\epsilon(f(a))$. Anders geformuleerd: voor alle $x \in \text{DOM } f$ met $|x - a| < \delta$ moet gelden $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Slordig gezegd: dicht bij a liggen alle functiewaarden dicht bij $f(a)$.

f heet continu op $V \subset \text{DOM } f$ indien f continu is in ieder punt van V .

f heet continu wanneer f continu is op $\text{DOM } f$.

In het vervolg van deze paragraaf beschouwen we slechts functies, die tot definitiegebied hebben een (al dan niet begrensd) interval, hiervan eventueel een eindig aantal punten uitgezonderd.

2.4.2 Stelling. Zij $a \in \text{DOM } f$. Er geldt: f is continu in a dan en slechts dan als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Hierbij moet \lim door \lim vervangen worden wanneer a linkereindpunt van $\text{DOM } f$ zou zijn, en door \lim bij rechteindpunt van $\text{DOM } f$.

Eewijs. Volgt direct uit de betrokken definities. □

2.4.3. Continuïteit van f in a kan nu ook als volgt gezien worden:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = f(\lim_{x \rightarrow a} x),$$

dus "limiet" en "functie" mogen verwisseld worden.

2.4.4. Voorbeelden. De functies $f(x) = c$, $f(x) = x$ en verder x^p , $\cos x$, $\sin x$, $\ln x$ en e^x zijn continu, zoals met 2.4.2 uit 2.3.6.10) volgt. De functie f met

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{voor } x \neq 0 \\ 1 & \text{voor } x = 0 \end{cases}$$

is continu.

De functies $f(x) = \frac{1}{x}$ en $f(x) = \tan x$ zijn continu.

De functie f met

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{als } x \geq 0 \end{cases}$$

is niet continu in 0, omdat $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ niet bestaat ($\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$).

2.4.5. Uit 2.3.6, 3) t/m 7), volgt dat som, veelvoud, product, omgekeerde en quotiënt van continue functies weer continue functies oplevert. Merk hierbij op dat het nul worden van $g(x)$ bij bijvoorbeeld het quotiënt $\frac{f(x)}{g(x)}$ geen probleem oplevert voor de uitspraak $\frac{f}{g}$ is continu. Is n.l. $g(a) = 0$, dan is $\frac{f(x)}{g(x)}$ niet gedefinieerd in a , dus $a \notin \text{DOM } \frac{f(x)}{g(x)}$, en bij continuïteit stellen we slechts eisen voor punten uit het domein.

2.4.6. Laat f een functie zijn die gedefinieerd is op een gesloten interval $[a, b]$ en die daar continu is. Op grond van het "vloeiend" verlopen van de grafiek is gevoelsmatig duidelijk dat f begrensd moet zijn en bovendien een globaal maximum en een globaal minimum moet hebben. Dit wordt geformuleerd in de volgende stelling. Deze stelling zullen we niet bewijzen.

2.4.7. Stelling (Weierstrass). Zij $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie. Dan heeft f een globaal maximum en een globaal minimum, d.w.z. er bestaan punten $c_1, c_2 \in [a, b]$ zodat $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ voor alle $x \in [a, b]$.

2.4.8. Opmerking. Als f niet continu is op $[a,b]$, dan hoeft f geen globaal maximum te hebben. Beschouw bijv. de functie f gedefinieerd op $[0,1]$ volgens

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{als } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{als } x = 1. \end{cases}$$

Dan heeft f geen maximum op $[0,1]$.

Ook als het interval begrensd maar niet gesloten is, kan men een voorbeeld geven van een continue functie die geen maximum heeft; $f(x) = \tan x$, gedefinieerd op $[0, \frac{1}{2}\pi)$, heeft geen maximum.

2.5. Differentieerbaarheid; bepaalde en onbepaalde integralen

2.5.1. Het begrip afgeleide

Allereerst enkele voorbeelden.

Uit de mechanica. Als een deeltje beweegt langs een rechte baan en de afgelegde weglengte gegeven wordt als functie van de tijd door $f(t)$, dan is de weglengte afgelegd tussen de tijdstippen t_0 en $t_0 + h$ (we nemen $h > 0$) gelijk aan:

$$f(t_0 + h) - f(t_0).$$

De gemiddelde snelheid over het tijdvak $[t_0, t_0 + h]$ is nu

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Merk op dat we $f(t_0 + h) - f(t_0)$ moeten uitdrukken in eenheden van lengte, h in eenheden van tijd. De zorg voor de keuze van zulke eenheden is de taak van de beoefenaars van het vakgebied, i.c. de natuurkunde, en niet van de wiskunde. Wij zullen onze aandacht slechts richten op getalwaarden en niet op het gekozen stelsel van eenheden.

Men definieert nu de snelheid ten tijde t_0 als:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Dit is een grootheid die van het grootste belang is voor een wiskundige beschrijving van het proces: de beweging van het deeltje. Het is een theoretische grootheid; wat gemeten kan worden is alleen een gemiddelde snelheid!

Bevolkingstoename. In dit voorbeeld zullen we wederom een limiet van een gemiddelde beschouwen.

Laat $y(t)$ de bevolking van een land op tijdstip t voorstellen, dan is de gemiddelde bevolkingstoename over het tijdsinterval $[t_0, t_0+h]$ gelijk aan:

$$\frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h}.$$

We definiëren de toename ten tijde t_0 door:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} =: y'(t_0).$$

Een goede beschrijving van een bevolkingsgroei wordt gegeven door de aanname dat de toename ten tijde t_0 , dus $y'(t_0)$, evenredig is met de bevolkingsgrootte ten tijde t_0 , dus:

$$\frac{y'(t_0)}{y(t_0)} = k,$$

waarbij k een constante is, onafhankelijk van t_0 .

Indien deze evenredigheidsconstante bekend is (bijv. doordat k berekend is uit het gemeten gedrag van de functie $y(t)$ tussen de jaren 1950 en 1970), dan stelt de differentiaalvergelijking

$$y'(t) = k y(t)$$

ons in staat de waarde van $y(t)$ voor de verre toekomst te berekenen (mits zich geen wijzigingen in het sociale patroon zullen voordoen die de aanname dat k onafhankelijk van de tijd is op losse schroeven zetten). We weten dat $y(t) = y(0)e^{kt}$ de oplossing is van bovenstaande differentiaalvergelijking.

Soortelijke warmte. Als $Q(T)$ de warmte is, nodig om een eenheid van massa van een zeker materiaal van temperatuur 0 op temperatuur T te brengen, dan is de warmte nodig om de temperatuur van T_0 op T_0+h te brengen: $Q(T_0+h) - Q(T_0)$. De limiet van de gemiddelde benodigde warmte:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(T_0+h) - Q(T_0)}{h}$$

wordt gedefinieerd als de soortelijke warmte bij temperatuur T_0 .

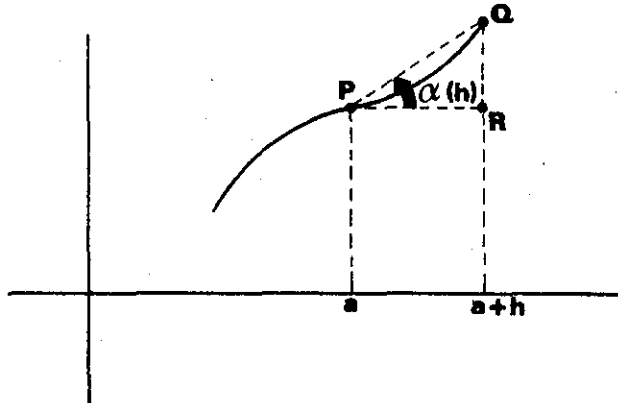
Definitie. Laat f gedefinieerd en reëelwaardig zijn in een omgeving van $a \in \mathbb{R}$.

De functie heet differentieerbaar in $x = a$ indien

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

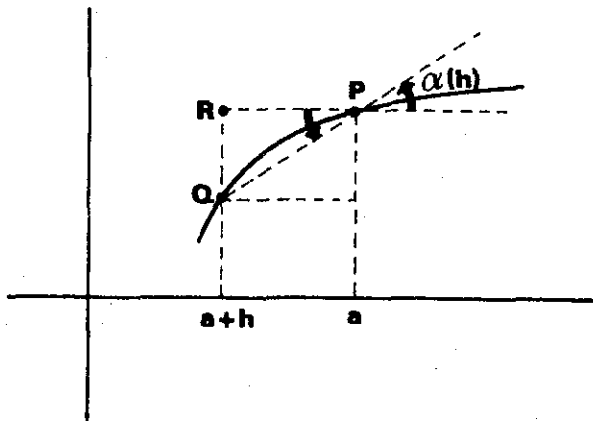
bestaat. Deze limiet heet de afgeleide van f in a ; notatie $f'(a)$ of $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}$.
Indien de afgeleide bestaat in elk punt van een verzameling V , dan heet f differentieerbaar in V ; de afgeleide $f'(x)$ is dan een functie gedefinieerd op V .

De afgeleide heeft een heel belangrijke meetkundige interpretatie: $f'(a)$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $(a, f(a))$ aan de grafiek van de functie f .



Zij $h > 0$; $P = (a, f(a))$, $Q = (a+h, f(a+h))$, $R = (a+h, f(a))$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \tan \alpha(h).$$



$$h < 0; \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \tan \alpha(h).$$

"f is differentieerbaar in $x = a$ " is dus gelijkwaardig met: de grafiek van f heeft een niet-verticale raaklijn in $(a, f(a))$.

De volgende stelling geeft ons een handzamere karakterisering van de afgeleide.

Stelling. Zij $f(x)$ gedefinieerd in een omgeving van a . f is dan en slechts dan differentieerbaar in $x = a$ indien er een getal A bestaat en een functie $\epsilon(h)$, gedefinieerd voor $h \neq 0$, zodanig dat:

$$f(a+h) - f(a) = Ah + h \epsilon(h)$$

met

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

Er geldt: $A = f'(a)$.

Bewijs (i). Laat f differentieerbaar in $x = a$ zijn. Definieer

$$\epsilon(h) := \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a),$$

dan geldt $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$, zodat aan de voorwaarden van de stelling voldaan is.

(ii). Als aan de voorwaarden van de stelling voldaan is, geldt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (A + \epsilon(h)) = A,$$

zodat f differentieerbaar is in $x = a$ met afgeleide A. □

Intuïtief drukt deze stelling uit dat differentieerbaarheid betekent dat $f(x)$ in eerste benadering een lineaire functie is:

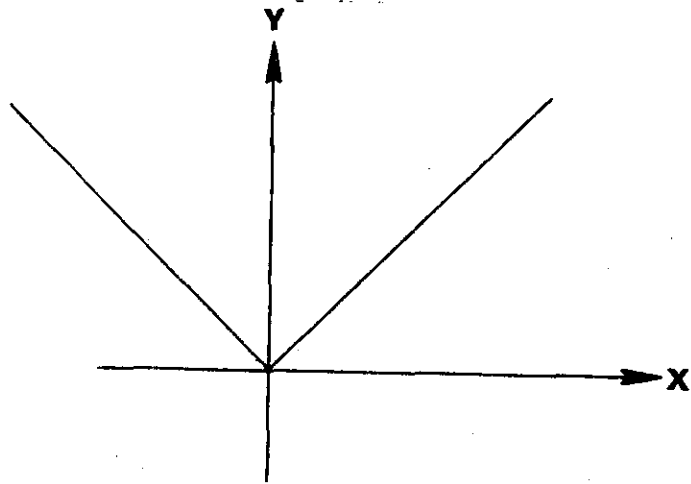
$$f(x) \approx f(a) + (x-a) f'(a).$$

Gevolg. Als f differentieerbaar is in $x = a$, dan is f continu in $x = a$.

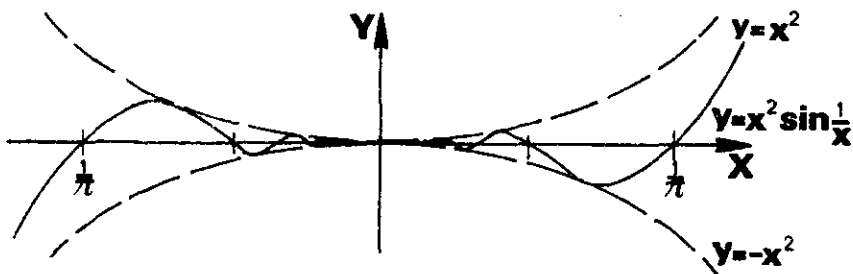
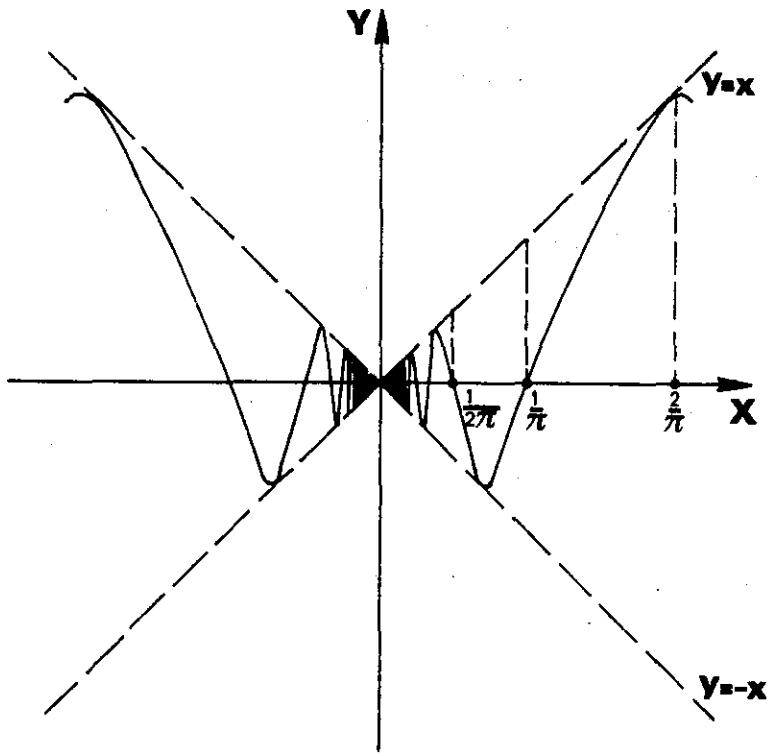
Bewijs. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a) \epsilon(x-a)) = f(a)$. □

Een continue functie behoeft daarentegen niet differentieerbaar te zijn. Om dit te illustreren beschouwen we het volgende

Voorbeeld. $f(x) = |x|$ is in $x = 0$ wel continu maar niet differentieerbaar.



Men bekijkt de volgende figuren die aannemelijk maken dat $x \sin \frac{1}{x}$ wel continu maar niet differentieerbaar is in $x = 0$, en dat $x^2 \sin \frac{1}{x}$ continu en differentieerbaar is in $x = 0$.



2.5.2. De techniek van het differentiëren

We geven in deze paragraaf twee reeksen stellingen die ons in staat zullen stellen van vele functies de afgeleiden te berekenen. De eerste reeks leert ons hoe de afgeleide te berekenen van sommen, producten, quotiënten, samengestelden en inversen van differentieerbare functies; deze formules heten

de regels van Leibniz (1646-1716). In de tweede reeks staan de afgeleiden van een aantal bekende functies (vgl. de tabel op p. 57).

Voor de volledigheid geven we de al van het V.W.O. bekende bewijzen nogmaals.

Regels van Leibniz.

1. Als $f(x)$ en $g(x)$ differentieerbaar zijn in $x = a$, dan is ook $f(x)+g(x)$ differentieerbaar in $x = a$ met afgeleide $f'(a)+g'(a)$.

$$\text{Dus } (f+g)' = f'+g'.$$

Bewijs. $f(a+h) - f(a) = hf'(a) + h\varepsilon_1(h)$ en $\varepsilon_1(h) \rightarrow 0$ als $h \rightarrow 0$,

$$g(a+h) - g(a) = hg'(a) + h\varepsilon_2(h) \text{ en } \varepsilon_2(h) \rightarrow 0 \text{ als } h \rightarrow 0.$$

Maar dan geldt ook

$$f(a+h) + g(a+h) - (f(a) + g(a)) = h(f'(a)+g'(a)) + h(\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h))$$

en

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h)) = 0.$$

2. Onder dezelfde aannamen als in 1 geldt: $f(x)g(x)$ is differentieerbaar in $x = a$ met afgeleide $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. Dus $(fg)' = f'g + fg'$.

Bewijs.

$$f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) = h(f'(a)g(a) + g'(a)f(a)) + h\varepsilon(h),$$

waarbij

$$\begin{aligned} \varepsilon(h) = & \varepsilon_1(h)g(a) + \varepsilon_2(h)f(a) + hf'(a)g'(a) + h\varepsilon_1(h)g'(a) + \\ & + h\varepsilon_2(h)f'(a) + h\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h). \end{aligned}$$

Derhalve geldt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Gevolg. $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$, enz.

3. Als f differentieerbaar is in $x = a$ en $f(a) \neq 0$, dan is $\frac{1}{f(x)}$ differentieerbaar in $x = a$ met afgeleide: $-\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$. Dus

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Bewijs.
$$\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{f(a)-f(a+h)}{f(a+h)f(a)} = \frac{-hf'(a)-h\epsilon_1(h)}{(f(a))^2+hf'(a)f(a)+h\epsilon_1(h)f(a)}$$

en

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\epsilon_1(h)}{(f(a))^2+hf'(a)f(a)+h\epsilon_1(h)f(a)} = 0; \text{ dus } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)} \right) = - \frac{f'(a)}{(f(a))^2}. \quad \square$$

4. Kettingregel. Zij $g(x)$ differentieerbaar in $x = a$; $g(a) =: b$; zij $f(x)$ differentieerbaar in $x = b$, dan is $(f \circ g)(x)$ differentieerbaar in $x = a$, met afgeleide $f'(b)g'(a)$.

Dus $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Bewijs. Zij

$$g(a+h) = g(a) + hg'(a) + h\epsilon_1(h) \quad \epsilon_1(h) \rightarrow 0 \text{ als } h \rightarrow 0,$$

$$f(b+k) = f(b) + kf'(b) + k\epsilon_2(k) \quad \epsilon_2(k) \rightarrow 0 \text{ als } k \rightarrow 0.$$

Definieer

$$k(h) := g(a+h) - g(a), \text{ dan is } \lim_{h \rightarrow 0} k(h) = k(0) = 0.$$

Dus

$$\begin{aligned} k(h) &= hg'(a) + h\epsilon_1(h) \text{ en} \\ f(g(a+h)) - f(g(a)) &= f(b+k(h)) - f(b) = \\ &= k(h) f'(b) + k(h) \epsilon_2(k(h)) = \\ &= hf'(b) g'(a) + h\epsilon(h), \end{aligned}$$

waarbij

$$\epsilon(h) = \epsilon_1(h) f'(b) + g'(a) \epsilon_2(k(h)) + \epsilon_1(h) \epsilon_2(k(h)),$$

zodat

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0. \quad \square$$

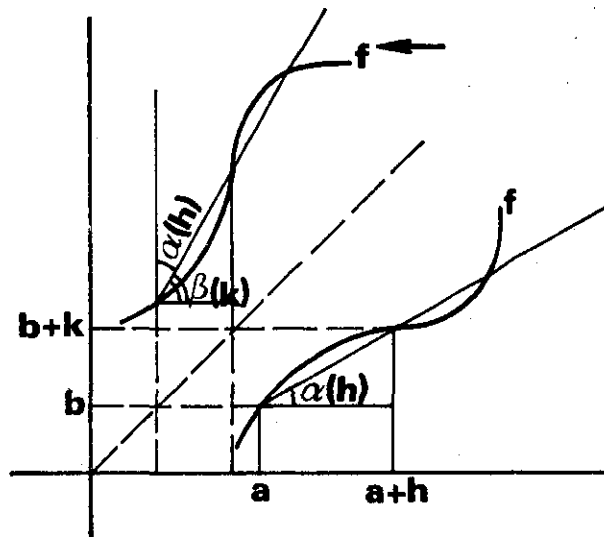
5. Is $f(x)$ differentieerbaar in $x = a$, $f'(a) \neq 0$ en bestaat f^\leftarrow , dan geldt (met $b := f(a)$): $f^\leftarrow(x)$ is differentieerbaar in $x = b$ met afgeleide

$$\frac{1}{f'(a)}.$$

Het bewijs van de differentieerbaarheid van f^\leftarrow laten we achterwege. De afgeleide bepalen we met de kettingregel uit $x = (f^\leftarrow \circ f)(x)$. We vinden dan $1 = (f^\leftarrow)'(b) f'(a)$.

Omdat de grafieken van f en f^+ uit elkaar ontstaan door spiegeling t.o.v. de lijn $y = x$, geldt, indien h en k samenhangen via de relatie $k = f(a+h) - f(a)$ of $h = f^+(b+k) - f^+(b)$, dat de hoeken $\alpha(h)$ en $\beta(k)$ elkaars complement zijn, dus dat

$$\tan\beta(k) = \frac{1}{\tan\alpha(h)}.$$



We geven nu een tabel van de afgeleiden van een aantal bekende functies. Volledigheidshalve zijn ook enkele functies opgenomen die pas in 2.7 geïntroduceerd zullen worden. Met \ln is steeds bedoeld de natuurlijke logaritme.

Tabel

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\int g(x)dx$	$g(x)$

(zie 2.7)

Met behulp van de voorafgaande regels voor het differentiëren en deze tabel van afgeleiden zijn we in staat om de afgeleiden van een groot aantal functies te berekenen.

2.5.3. Extrema

Een continue functie f gedefinieerd op een gesloten interval $[a,b]$, heeft volgens de in 2.4.7 genoemde stelling van Weierstrass op $[a,b]$ een globaal maximum en een globaal minimum. Een belangrijke stelling die het zoeken naar extrema vergemakkelijkt is de volgende.

Stelling. Zij f gedefinieerd op $[a,b]$. Als f een lokaal extremum (vgl. 2.1.6) heeft in $c \in (a,b)$ en f is differentieerbaar in c , dan is $f'(c) = 0$.

Bewijs. Onderstel dat f in c een lokaal maximum heeft. Dan is er een omgeving U van c zodat $f(x) \leq f(c)$ voor alle $x \in U$. Daaruit volgt voor de afgeleide in c :

$$f'(c) = \lim_{x \downarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 ,$$

en tevens

$$f'(c) = \lim_{x \uparrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 .$$

Dus $f'(c) = 0$. Voor een lokaal minimum is het bewijs analoog. □

Volgens deze stelling is " $f'(c) = 0$ " een nodige voorwaarde opdat een (differentieerbare) functie f een lokaal extremum heeft in c . De voorwaarde is echter niet voldoende zoals blijkt uit het volgende tegenvoorbeeld: voor de functie $f(x) = x^3$ is $f'(0) = 0$, maar f heeft geen extremum in 0.

Is de functie f continu op $[a,b]$, dan zijn alleen de randpunten a,b , de punten waarin f niet differentieerbaar is en de punten waarin de afgeleide f' gelijk is aan nul, kandidaten voor extrema. Zij $f'(c) = 0$, dan is met behulp van het teken van de afgeleide in een omgeving U van c vast te stellen of f in c een extremum heeft. Als $f'(x) > 0$ voor $x \in U$ en $x < c$ en $f'(x) < 0$ voor $x \in U$ en $x > c$, dan heeft f in c een lokaal maximum; als $f'(x) < 0$ voor $x \in U$ en $x < c$ en $f'(x) > 0$ voor $x \in U$ en $x > c$, dan heeft f in c een lokaal minimum; zie ook 2.5.6.

2.5.4. Stelling (Rolle). Zij f continu op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b) .
Als $f(a) = f(b)$, dan is er een $\xi \in (a,b)$ met $f'(\xi) = 0$.

Bewijs. Als $f(x) = f(a)$ voor alle $x \in [a,b]$, dan kunnen we voor ξ ieder getal uit (a,b) nemen. Anders gebruiken we de in 2.4.7. vermelde stelling van Weierstrass.

Als $f(x_1) > f(a)$ voor zekere $x_1 \in (a,b)$, dan heeft f een globaal maximum in een punt $\xi \in (a,b)$, en $f'(\xi) = 0$. Als $f(x_1) < f(a)$ voor zekere $x_1 \in (a,b)$, dan heeft f een globaal minimum in een punt $\xi \in (a,b)$, en $f'(\xi) = 0$. \square

2.5.5. Stelling (middelwaardestelling). Zij f continu op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b) , dan is er een $\xi \in (a,b)$ zodat $f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)$.

Bewijs. Zij $\psi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ de functie, gegeven door

$$\psi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a).$$

Dan is ψ continu op $[a,b]$ en differentieerbaar op (a,b) . Voorts geldt dat $\psi(a) = \psi(b) = f(a)$, dus volgens stelling 2.5.4 is er een $\xi \in (a,b)$ met

$$0 = \psi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

2.5.6. Gevolgen. Als $f'(x) > 0$ voor alle $x \in (a,b)$, dan is f monotoon stijgend op (a,b) . Als $f'(x) < 0$ voor alle $x \in (a,b)$, dan is f monotoon dalend op (a,b) . Als $f'(x) = 0$ voor alle $x \in (a,b)$, dan is f een constante op (a,b) .

Immers, zij $a < x_1 < x_2 < b$, dan is er een $\xi \in (x_1, x_2)$ zodat $f(x_2) = f(x_1) + f'(\xi)(x_2 - x_1)$. In de drie gevallen zal dan gelden resp. $f(x_2) > f(x_1)$, $f(x_2) < f(x_1)$, $f(x_2) = f(x_1)$.

2.5.7. De bepaalde integraal

We zullen het begrip bepaalde integraal introduceren aan de hand van een voorbeeld. Een fabriek loost afvalwater in een meer. In het afvalwater bevindt zich een verontreinigende stof. De hoeveelheid van deze verontreiniger geloosd ten tijde t is $f(t)$. Hoeveel heeft de fabriek in totaal aan afvalstof geloosd tussen de tijdstippen $t = a$ en $t = b$ ($a < b$)?

Het is principeel onmogelijk continu metingen te verrichten. Wat men zal doen is het tijdsbestek verdelen in een aantal intervallen door keuze van deelpunten: $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, in ieder tijdsintervalletje éénmaal

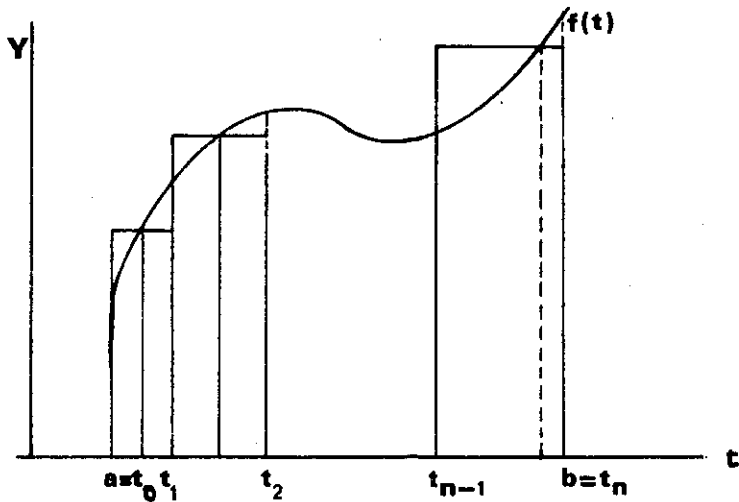
een meting verrichten, en vervolgens aannemen dat de afvallozing over het gehele intervalletje gelijk is aan de ene gemeten waarde. Stel dat de meettijden zijn $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ met $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$ ($i = 1, \dots, n$). Als benadering van de totale hoeveelheid geloosd vuil zal men dan opgeven:

$$f(\xi_1)(t_1 - t_0) + f(\xi_2)(t_2 - t_1) + \dots + f(\xi_n)(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

We zullen dit noteren als $S(D, R_D)(f)$ en spreken van de Riemann-som van f bij de verdeling $D: a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ en tussenpunten $R_D: \xi_1, \dots, \xi_n$ met $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$ ($i = 1, \dots, n$). De diameter van D is: $\delta(D) := \max_{i=1, \dots, n} (t_i - t_{i-1})$.

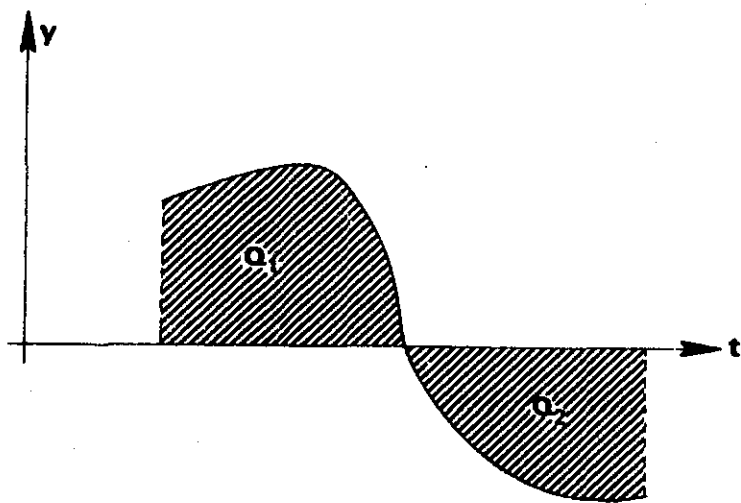
$S(D, R_D)(f)$ zal een betere benadering worden van de gezochte totale hoeveelheid afval als we verdelingen beschouwen die fijner en fijner worden, d.w.z. als $\delta(D) \rightarrow 0$. Als nu " $\lim_{\delta(D) \rightarrow 0} S(D, R_D)(f)$ " bestaat, onafhankelijk van de gekozen verdelingen en tussenpunten, dan heet deze limiet de bepaalde integraal van f over $[a, b]$.

Notatie: $\int_a^b f(t) dt.$



Als de integraal $\int_a^b f(t)dt$ bestaat noemen we f integreerbaar over $[a,b]$. Zonder bewijs merken we op dat als f continu is op $[a,b]$ de integraal bestaat. Bovendien vermelden we dat iedere integreerbare functie begrensd is, d.w.z. dat er een getal M bestaat zodat $|f(t)| \leq M$ voor alle $t \in [a,b]$. Als numerieke benadering van de integraal kunnen we steeds een Riemann-som nemen. In het figuurtje opp. 60 ($f(t)$ is daar > 0) zien we dat de Riemann-som een

som van oppervlakten van een aantal rechthoekjes is, zodat we $\int_a^b f(t)dt$ de "oppervlakte" tussen de t -as, de grafiek van $f(t)$ en de lijnen $t = a$ en $t = b$ kunnen noemen. Is $f(t) \leq 0$ op $[a,b]$, dan is $\int_a^b f(t)dt$ juist het tegengestelde van deze oppervlakte: In het hieronder getekende geval is $\int_a^b f(t)dt = Q_1 - Q_2$, waarin Q_1 en Q_2 de oppervlakten van de beide gearceerde vlakdelen zijn.



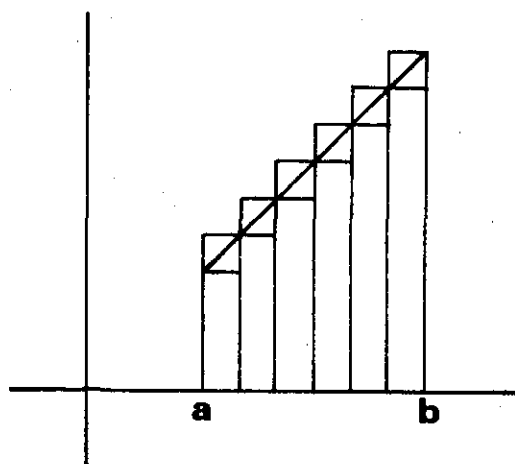
We noemen nog een tweetal voorbeelden: De kracht werkend op een punt varieert met de afgelegde rechte weg: $K = K(s)$. Dan is de arbeid, verricht bij de beweging van A naar B:

$$\int_{s_A}^{s_B} K(s)ds.$$

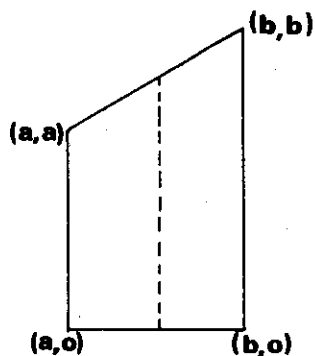
Het volume verkregen door wenteling van de grafiek van $f(t)$ om de t -as is

$$\int_a^b \pi(f(t))^2 dt.$$

We zullen nu berekenen: $\int_a^b t dt.$



Verdeel $[a,b]$ in n gelijke delen. We kunnen nu gemakkelijk de grootste en kleinste Riemann-som opschrijven en zien dat beide naar dezelfde limiet naderen als $n \rightarrow \infty$. Op grond van de insluitstelling (vgl. 2.3.6) is dit dan ook de limiet voor elke rij Riemann-sommen behorend bij verdelingen van $[a,b]$ in n gelijke delen. We gebruiken het feit dat we weten dat de integraal bestaat omdat de functie $f(t) = t$ continu is, en we kiezen onze tussenpunten handig, d.w.z. in het midden van ieder interval.



Nu is $\xi_i(t_i - t_{i-1})$ juist gelijk aan de oppervlakte van het trapezium met "hoogte" $t_i - t_{i-1}$ en middenparallel ξ_i . Voor elke verdeling D is de Riemann-som met tussenpunten midden tussen de deelpunten dus gelijk aan de oppervlakte van het trapezium met hoekpunten: $(a,0)$, $(b,0)$, (b,b) en (a,a) .

Dus

$$\int_a^b t dt = \frac{1}{2}(a+b)(b-a) = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2.$$

We geven nu bondig een opsomming van een aantal eigenschappen van $\int_a^b f(t)dt$

(we nemen steeds aan dat alle opgeschreven integralen bestaan).

I $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$ ("het doet er niet toe hoe de veranderlijke heet").

II $\int_a^b f(t)dt$ heeft alleen zin als $a \leq b$, n.b. $\int_a^a f(t)dt = 0$.

We definiëren voor $b < a$: $\int_a^b f(t)dt := - \int_b^a f(t)dt$.

III $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$ voor alle a, b en c .

IV $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$ (λ, μ constant).

V Als $a \leq b$ en $f(t) \leq g(t)$ voor alle $t \in [a, b]$, dan is $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

(Deze eigenschap is alleen juist als $a \leq b$).

VI Voor de functie $f(t) \equiv 1$ vinden we $\int_a^b dt = b-a$.

VII Zij $|f(t)| \leq M$ voor $t \in [a, b]$. Door combinatie van IV, V en VI vinden we dat voor $a \leq b$ geldt

$$-M(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

en dus

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq M|b-a|,$$

welke laatste ongelijkheid ook juist is als $b < a$.

VIII Als $a \leq b$, dan geldt

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Zoals bekend is er een methode om bepaalde integralen te berekenen die heel veel eenvoudiger is dan het bepalen van limieten van Riemann-sommen. Daarop gaan we nu in.

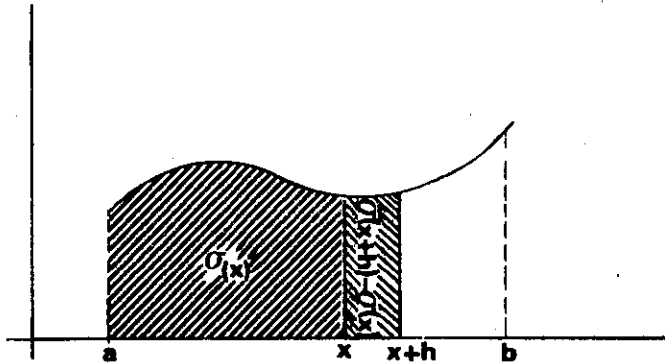
2.5.8. De hoofdstelling der integraalrekening

Zij $f(t)$ integreerbaar over $[a,b]$, dan is voor $x \in [a,b]$ door

$$\mathcal{O}(x) := \int_a^x f(t)dt$$

een functie gedefinieerd.

Stelling. $\mathcal{O}(x)$ is continu.



Bewijs. Er bestaat een M zodat $|f(t)| \leq M$ op $[a,b]$. Voor een willekeurige $c \in [a,b]$ geldt

$$|\mathcal{O}(x) - \mathcal{O}(c)| = \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt \right| = \left| \int_c^x f(t)dt \right| \leq M|x - c| .$$

Dus $\lim_{x \rightarrow c} \mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(c)$. □

Stelling. Als f continu is, dan is $\mathcal{O}(x)$ differentieerbaar met $\mathcal{O}'(x) = f(x)$.

Bewijs. We definiëren $\varepsilon(h) := \frac{\mathcal{O}(x+h) - \mathcal{O}(x)}{h} - f(x)$, dan is

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt. \text{ Bij ieder getal } \varepsilon_1 > 0 \text{ bestaat er een omgeving}$$

van x zodat $|f(t) - f(x)| < \epsilon_1$ voor elke t in die omgeving. Als we $|h|$ zo klein nemen dat het interval $[x - |h|, x + |h|]$ geheel binnen die omgeving ligt, dan is $|\epsilon(h)| \leq \frac{1}{|h|} \epsilon_1 |h| = \epsilon_1$, dus $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$. \square

Hoofdstelling. Als f continu is en $F' = f$, dan is

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) .$$

Bewijs. $\mathcal{O}'(x) = f(x) = F'(x)$, dus $(\mathcal{O} - F)'(x) = 0$. Toepassing van de middelwaardestelling levert nu dat $\mathcal{O} - F$ constant is.

Derhalve

$$\int_a^b f(t)dt = \mathcal{O}(b) = \mathcal{O}(b) - \mathcal{O}(a) = F(b) - F(a) . \quad \square$$

Voorbeeld. $\int_0^\pi \sin t dt$. We nemen $F(t) = -\cos t$, dan zien we

$$\int_0^\pi \sin t dt = [-\cos t]_{t=0}^{t=\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 2.$$

2.5.9. De onbepaalde integraal

Zij f een continue functie. We vragen naar $\{F \mid F' = f\}$. Deze verzameling

is niet leeg, immers $\mathcal{O}(x) = \int_a^x f(t)dt$ is er een element van. Alle paren

functies uit deze verzameling hebben een constant verschil; men krijgt, uitgaande van één element, alle andere elementen door optelling van een willekeurige constante.

Definitie. De onbepaalde integraal (notatie $\int f(t)dt$) is een verzameling functies, waarvan alle elementen dezelfde afgeleide hebben, nl. $f(t)$.

De tabel in 2.5.2 kan worden gebruikt om een aantal onbepaalde integralen aan te geven.

In hetgeen nu volgt is C een willekeurige constante.

De volgende eigenschappen volgen direct uit de overeenkomstige regels van Leibniz.

$$I \quad \int (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx .$$

$$II \quad \int (f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) dx = f(x)g(x) + C .$$

We kunnen deze formule ook schrijven als

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx .$$

Deze formule staat bekend als de formule der partiële integratie.

$$III \quad \int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + C .$$

Deze formule is aanleiding tot de methode der substitutie bij het bepalen van onbepaalde integralen.

Opmerking. Wij wijzen op de handige notatie die ontstaat door $g'(x)dx$ te schrijven als $dg(x)$. De formule der partiële integratie krijgt hiermee de vorm

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x) .$$

Voorbeelden.

$$I \quad \int \frac{x^4+1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{7/2}+x^{-1/2}) dx = \int x^{7/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \frac{2}{9} x^{9/2} + 2x^{1/2} + C .$$

$$II \quad \int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int x(\sin 2x)' dx = \frac{1}{2} \int x d \sin 2x = \\ = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \\ = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C .$$

$$III \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2)'}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) = \\ = -\sqrt{1-x^2} + C .$$

Men dient erop te letten dat bij substitutie in bepaalde integralen ook de grenzen meegenomen moeten worden.

Voorbeeld.

$$\int_1^3 (2t+5)^2 dt = \frac{1}{2} \int_7^{11} g^2 dg \quad \text{als } g(t) = 2t + 5 .$$

Evenals voor het differentiëren en elke andere wiskundige vaardigheid, geldt voor integreren dat men de techniek slechts onder de knie kan krijgen door oefening. Bij het berekenen van onbepaalde integralen komt als plezierige bijkomstigheid, dat er een steeds werkende, meestal tamelijk eenvoudige, controle-mogelijkheid is. Men kan nl. het gevonden resultaat differentiëren en moet dan de functie onder het integraalteken terugvinden.

2.5.10. Oneigenlijke integralen

Behalve $\int_a^b f(x)dx$ gebruiken we ook vaak $\int_a^\infty f(x)dx$. Per definitie betekent dit $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^k f(x)dx$. We zeggen dan ook i.p.v. $\int_a^\infty f(x)dx$ bestaat, dat de oneigenlijke integraal $\int_a^\infty f(x)dx$ convergeert.

Voorbeelden:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k \frac{dx}{x^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1,$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k \frac{dx}{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \ln k; \text{ deze limiet bestaat niet.}$$

Terloops vermelden we dat men op analoge wijze te werk gaat als $f(x)$ niet begrensd mocht zijn op (a,b) .

Als voorbeeld kan dienen

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} 2(1 - \sqrt{\delta}) = 2.$$

2.6. Hogere afgeleiden; meetkundige betekenis van de tweede afgeleide; kromming

We zullen de differentiaalrekening in twee richtingen uitbreiden. Allereerst zullen we ons in dit hoofdstuk bezighouden met hogere afgeleiden en hun toepassingen; later zullen we spreken over functies van meer dan een veranderlijke (hoofdstuk vijf).

2.6.1. Hogere afgeleiden

Bij een voor alle x differentieerbare functie $f(x)$ hebben we in 2.5.1 de afgeleide $\frac{df}{dx} = f'(x)$ ingevoerd. Deze afgeleide is zelf weer een functie van x ; het kan zijn dat deze functie weer differentieerbaar is.

We noemen $\frac{d f'(x)}{dx}$ de tweede afgeleide van f en noteren deze als $f''(x)$.

We kunnen dit soms herhalen: de afgeleide van $f''(x)$ heet de derde afgeleide van f , notatie $f'''(x)$.

Verdere notaties:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x) = f^{(2)}(x).$$

Algemeen:

$$\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x).$$

Voorbeeld. Als $f(x) = \ln x$, dan geldt $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, \dots ,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}.$$

Historisch overgeleverd is de vaak gebruikte gewoonte om de afgeleiden met punten i.p.v. met accenten aan te geven, als de veranderlijke waarnaar gedifferentieerd wordt de tijd voorstelt. Zo schrijft men, als $y(t)$ een functie van de tijd is,

$$\dot{y} := \frac{dy}{dt}; \quad \ddot{y} := \frac{d^2 y}{dt^2};$$

(men spreekt \dot{y} uit als y flux; \ddot{y} als y dubbel flux).

Zonder bewijs vermelden we het volgende, intuïtief duidelijke, feit:
zoals differentieerbaarheid betekent dat in de buurt van $x = a$ geldt

$$f(x) \approx f(a) + (x-a) f'(a),$$

zo kunnen we met de tweede afgeleide een betere benadering in de buurt van $x = a$ vinden nl.:

$$f(x) \approx f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a).$$

De functie $d(x) := f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)$ heeft de eigenschappen

$$\begin{cases} d(a) = f(a), \\ d'(a) = f'(a), \\ d''(a) = f''(a). \end{cases}$$

In de volgende paragraaf zullen we dit formuleren als: $f(x)$ en $d(x)$ hebben in $x = a$ dezelfde kromming (naast dezelfde waarde en dezelfde richting).

Een heel belangrijk voorbeeld van het gebruik van een tweede afgeleide is het begrip versnelling uit de mechanica. In 2.5.1 zagen we, dat als een deeltje langs een rechte baan beweegt en de afgelegde weg als functie van de tijd gegeven wordt door $f(t)$, de snelheid ten tijde t gedefinieerd is als $f'(t)$.

Nu is $\frac{f'(t_0+h) - f'(t_0)}{h}$ de gemiddelde snelheidstoename over het tijdvak

$[t_0, t_0+h]$. De limiet hiervan voor $h \rightarrow 0$ is per definitie de versnelling ten tijde t_0 ; derhalve is de versnelling gelijk aan $f''(t)$.

Deze opmerking stelt ons in staat de bekende tweede wet van Newton: "kracht = massa \times versnelling" op te schrijven als een differentiaalvergelijking:

$$K(t) = m f''(t).$$

(Anders dan in het tweede voorbeeld van 2.5.1 hebben we nu te maken met een differentiaalvergelijking waarin de tweede afgeleide van de gezochte functie $f(t)$ voorkomt.)

We behandelen twee voorbeelden.

a) $K(t) = K$, een constante onafhankelijk van de tijd.

We vinden dan voor de afgelegde weg

$$f''(t) = \frac{K}{m},$$

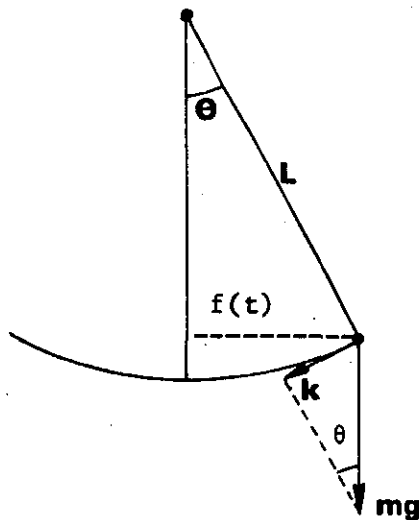
$$f'(t) = \frac{K}{m} t + C,$$

$$f(t) = \frac{1}{2} \frac{K}{m} t^2 + C t + D,$$

waarin C en D constanten zijn die we kunnen interpreteren als $C = f'(0)$, $D = f(0)$, d.w.z. C en D hebben de betekenis van de snelheid en de plaatscoördinaat ten tijde $t = 0$.

b) We beschouwen $f(t)$ als de uitwijking uit een evenwichtstoestand van een deeltje met massa m .

Laten we aannemen dat het deeltje naar zijn evenwichtstoestand wordt teruggetrokken door een kracht die evenredig is met de uitwijking, d.w.z. $K = -\alpha f(t)$ met $\alpha > 0$.



Een slinger wordt voor kleine uitwijkingen goed benaderd door bovenstaande beschrijving. De naar de evenwichtsstand drijvende kracht is de tangentiële component van de zwaartekracht mg

$$K = -mg \sin \vartheta \approx -\frac{mg}{L} \vartheta L$$

waarbij ϑL ongeveer de uitwijking is.

De tweede wet van Newton levert ons

$$-\alpha f(t) = m f''(t)$$

of
$$f''(t) + a^2 f(t) = 0,$$

waarbij $a^2 := \frac{\alpha}{m} > 0$. In hoofdstuk drie zullen we zien dat de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking (d.w.z. alle functies $f(t)$ die voldoen aan $f''(t) + a^2 f(t) = 0$) is

$$f(t) = A \cos at + B \sin at = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(at + \varphi), \quad (1)$$

waarbij

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos \varphi,$$

terwijl A en B constanten zijn. Gewoonlijk schrijft men (1) in de vorm

$$f(t) = C \sin(at + \varphi),$$

waarbij

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} > 0;$$

dit is een zuiver sinusvormige trilling met amplitude C en een fase op $t = 0$ van φ .

2.6.2. De betekenis van de tweede afgeleide

In 2.5.6 hebben we ons beziggehouden met de betekenis van het tekenverloop van $f'(x)$ voor het gedrag van de functie. Nu zullen we enige aandacht schenken aan het tekenverloop van $f''(x)$.

Als de eerste afgeleide positief is, is de functie stijgend.

Als de tweede afgeleide positief is, dan is (wegens $f''(x) = (f'(x))'$) de eerste afgeleide toenemend; de raaklijn aan de grafiek draait dus naar boven en de grafiek van f zelf is hol naar boven. In plaats van hol naar boven zegt men ook wel convex.

Als de tweede afgeleide negatief is, is de grafiek van de functie bol naar boven. In plaats van bol naar boven zegt men ook wel concaaf.

Schema.

Als $f''(x) > 0$, dan is $f'(x)$ toenemend en $f(x)$ is convex.

Als $f''(x) < 0$, dan is $f'(x)$ afnemend en $f(x)$ is concaaf.

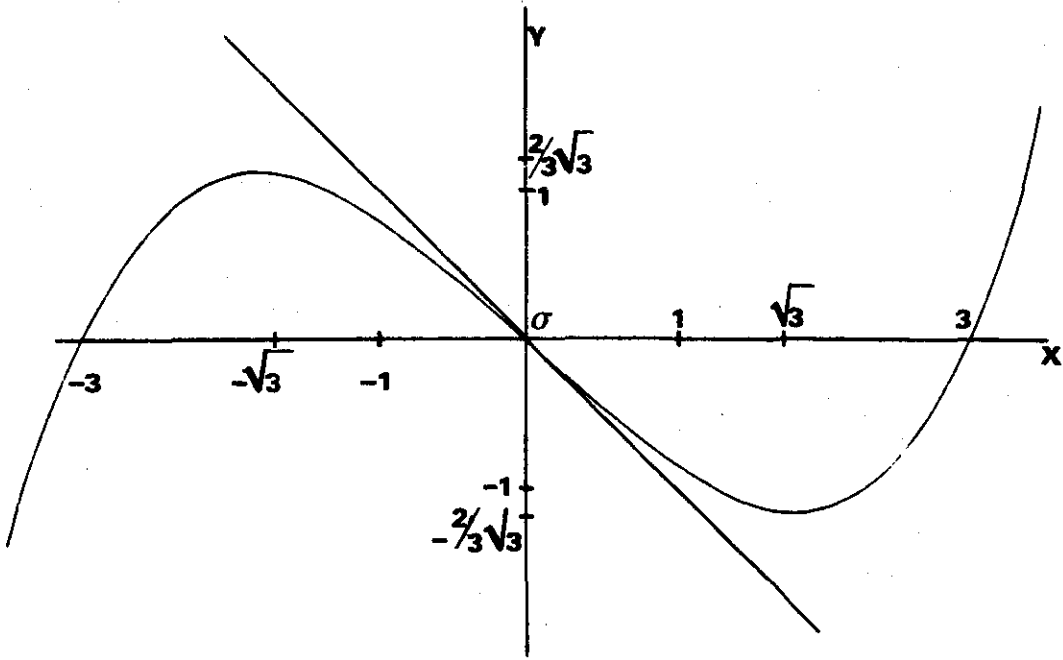
Als f'' van teken wisselt in $x = a$, dan heeft f' een extremum in $x = a$ en f zelf een buigpunt, dat is een punt waar de raaklijn de grafiek snijdt in die zin dat de punten van de grafiek links en rechts van $x = a$ aan verschillende kanten van de raaklijn liggen.

Voorbeeld. $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x,$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1,$$

$$f''(x) = \frac{2}{3}x.$$

Bij $x = 0$ treedt een buigpunt op, voor $x > 0$ is de functie convex, voor $x < 0$ is hij concaaf. Verdere details: lokale extrema in $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$; nulpunten in $x = 0, -3, 3$; richting van de buigpuntsraaklijn is -1 .



Het belang van de tweede afgeleide is dat deze een maat is voor het gekromd zijn van een grafiek.

We zullen dit nu in een meer expliciete vorm beschrijven.

Als we twee functies $f(x)$ en $g(x)$ beschouwen waarvoor geldt:

$$\begin{cases} f(a) = g(a), \\ f'(a) = g'(a), \end{cases}$$

dan betekent dit dat de beide functies in hun snijpunt bij $x = a$ dezelfde richting hebben.

Bij iedere functie is er in ieder punt een rechte met dezelfde richting, nl. de raaklijn. De vergelijking hiervan is:

$$y = f(a) + (x - a)f'(a).$$

(De beschouwing is op triviale wijze uit te breiden voor verticale raaklijnen.)

We zullen zeggen dat de grafieken van twee functies $f(x)$ en $g(x)$ in $x = a$ dezelfde kromming hebben indien:

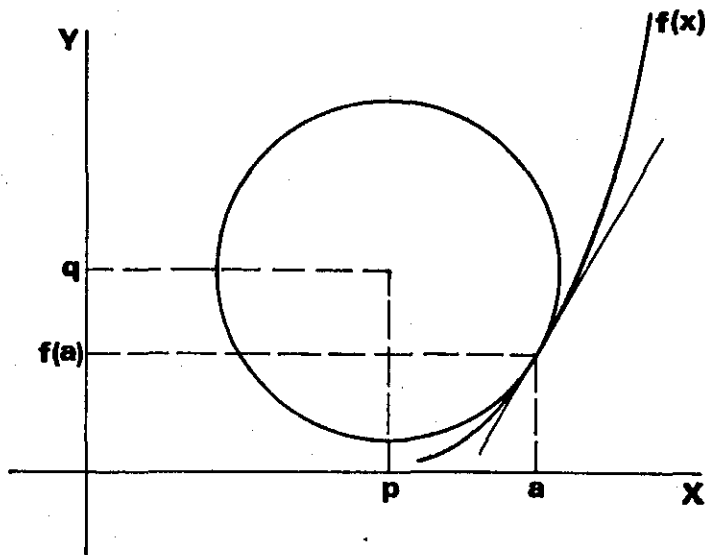
$$\begin{cases} f(a) = g(a), \\ f'(a) = g'(a), \\ f''(a) = g''(a). \end{cases}$$

Bij nette functies is er in ieder punt een cirkel die dezelfde kromming heeft (het zal duidelijk zijn dat een gedeelte van de cirkel in de buurt van het snijpunt steeds als grafiek van een functie te schrijven is, desnoods met verwisseling van de x - en y -coördinaat). Deze cirkel heet de

kromtecirkel van $f(x)$ in $x = a$. De straal van deze cirkel heet de kromtestraal; het middelpunt heet het kromtemiddelpunt.

We zullen nu een formule afleiden voor de kromtestraal (de nu volgende berekening is tevens een bewijs voor het bestaan van de kromtecirkel!). Gemakshalve nemen we daarbij aan dat $f(x)$ in $x = a$ een niet-verticale raaklijn heeft.

Laat de vergelijking van de kromtecirkel zijn $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. De opgave is dan p , q en r te bepalen; in het bijzonder gaat het daarbij om de bepaling van r .



Omdat we verondersteld hebben dat $f'(a) < \infty$ is, is de cirkel in de buurt van het punt $(a, f(a))$ de grafiek van een functie $y = g(x)$.

In de buurt van $x = a$ geldt dus:

$$(x-p)^2 + (g(x)-q)^2 = r^2.$$

We differentiëren tweemaal en vinden

$$\begin{aligned} 2(x-p) + 2(g(x)-q) g'(x) &= 0, \\ 2 + 2(g'(x))^2 + 2(g(x)-q) g''(x) &= 0. \end{aligned}$$

We willen nu voldoen aan:
$$\begin{cases} g(a) = f(a), \\ g'(a) = f'(a), \\ g''(a) = f''(a), \end{cases}$$

d.w.z. dat p , q en r moeten voldoen aan

$$\begin{aligned} (a-p)^2 + (f(a)-q)^2 &= r^2, \\ (a-p) + (f(a)-q) f'(a) &= 0, \\ 1 + (f'(a))^2 + (f(a)-q) f''(a) &= 0. \end{aligned}$$

Als $f''(a) \neq 0$ vinden we

$$(f(a)-q) = - \frac{1+(f'(a))^2}{f''(a)},$$

$$(a-p) = \frac{f'(a)(1+(f'(a))^2)}{f''(a)}$$

$$\text{en dus } r^2 = \frac{(1+(f'(a))^2)^3}{(f''(a))^2}, \quad r = \frac{(1+(f'(a))^2)^{3/2}}{|f''(a)|}.$$

Als $f''(a) = 0$, zouden we vinden $r = \infty$ het kromtemiddelpunt ligt dan "in het oneindige" en de raaklijn en de grafiek hebben dezelfde kromming.

Het getal $\frac{1}{r} = \frac{|f''(a)|}{(1+(f'(a))^2)^{3/2}}$ heet ook wel de kromming van $f(x)$ in $x = a$.

Als de kromme $y = f(x)$ convex is, ligt de kromtecirkel boven de kromme ($f''(a) > 0$; $f(a) < q$); bij een concave kromme liggen de kromtecirkels beneden de kromme.

We kunnen het kromtemiddelpunt ook aldus vinden :

Neem de normaal op de kromme (d.w.z. de normaal op de raaklijn) in $(a, f(a))$ en ook in $(a+h, f(a+h))$. Laat M_h het snijpunt van de beide normalen zijn. Het kromtemiddelpunt is nu $\lim_{h \rightarrow 0} M_h$; (de limiet in de zin van de afstand in het

vlak). We laten het aan de lezer over dit te verifiëren.

De kromming treedt op bij de beschrijving van buiging van balken. Als de doorbuiging klein is, kan men afschuiving verwaarlozen en de hypothese van Bernoulli aanvaarden dat een doorsnede loodrecht op de balkas na buiging nog vlak is en loodrecht staat op de doorgebogen balkas. Men probeert dan een uitdrukking te vinden voor de zg. elastische lijn (dit is de kromme die aangeeft de vorm na buiging van die vezel in de balklengterichting die niet ten gevolge van de buiging verlengd of verkort is). Als $y = y(x)$ de vergelijking van de elastische lijn is, dan leidt men in de mechanica af dat:

$$\frac{y''(x)}{(1+(y'(x))^2)^{3/2}} = A(x),$$

waarbij $A(x)$ een bekende, veelal eenvoudige, functie is van de plaats.

Uit deze ingewikkelde differentiaalvergelijking kan men proberen $y = y(x)$ op te lossen. In het geval dat $|y'(x)| \ll 1$ kan men volstaan met het oplossen van de eenvoudige differentiaalvergelijking

$$y''(x) = A(x).$$

2.7. De hyperbolische functies

2.7.1. Definitie. De functies sinushyperbolicus, cosinushyperbolicus en tangenshyperbolicus zijn voor alle $x \in \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Zoals $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ is, zo is $\{(\cosh t, \sinh t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ een tak van de hyperbool $x^2 - y^2 = 1$.

Dit verklaart de naam van de nieuw geïntroduceerde functies.

Het is niet moeilijk de grafieken te tekenen. Allerlei eigenschappen (vgl. ook de figuur op p. 76) zijn direct uit de definities af te leiden. We sommen er een aantal op.

(i) $\cosh 0 = 1, \sinh 0 = 0, \tanh 0 = 0;$

(ii) \cosh is een even functie, die convex is;

(iii) \sinh en \tanh zijn oneven en monotoon stijgend.

Zoals reeds opgemerkt is, geldt $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$. Voorts geldt $e^x = \cosh x + \sinh x$. Daarnaast zijn er somformules die mooier maar onbelangrijker zijn dan in de goniometrie, bijv.

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

Voor de afgeleiden geldt:

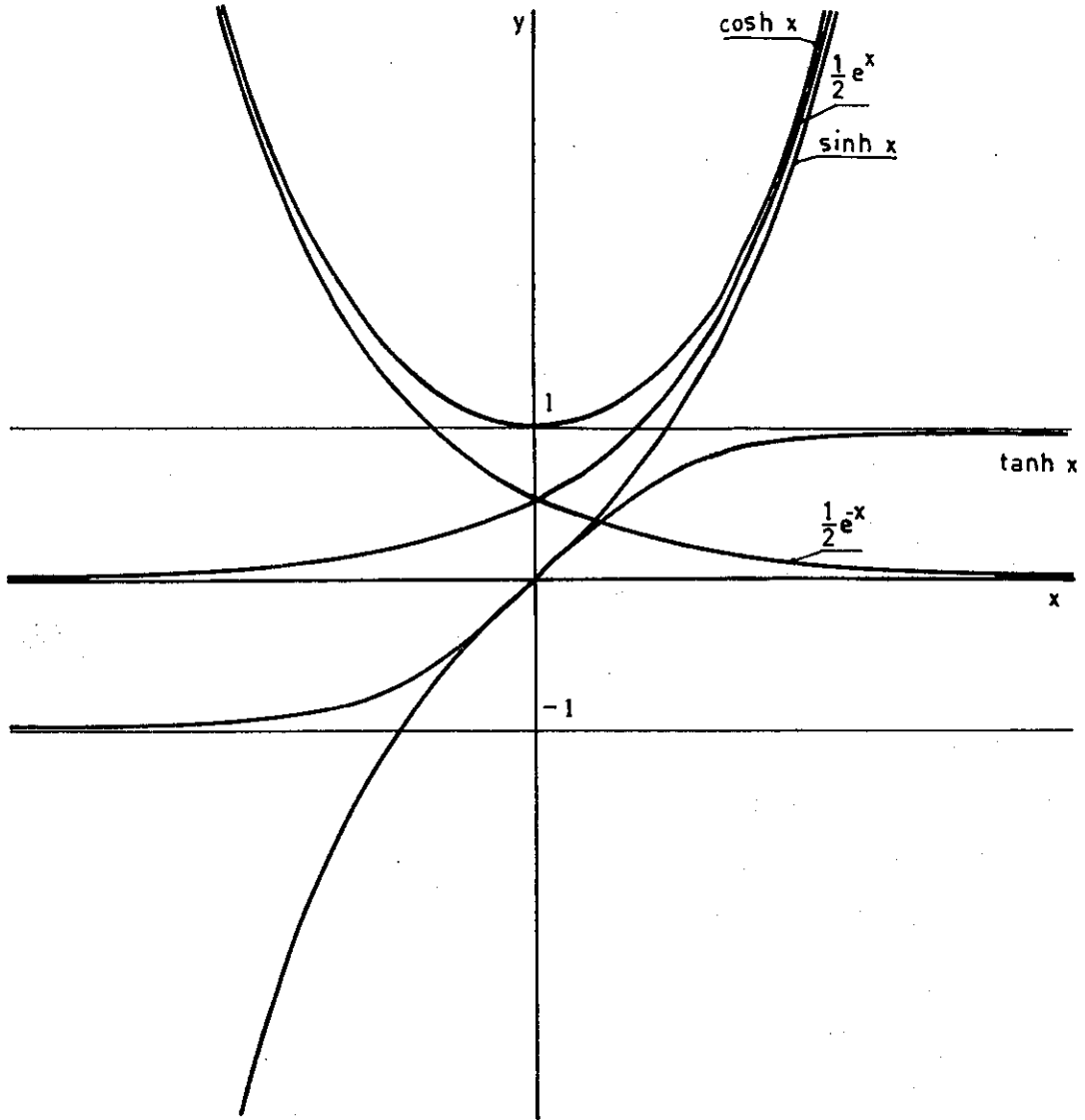
$$(\cosh x)' = \sinh x,$$

$$(\sinh x)' = \cosh x,$$

$$(\tanh x)' = (\cosh x)^{-2}.$$

Tenslotte merken we op dat $\cosh x > \sinh x$ voor alle x en dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = +1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1.$$



27.2. De inverse functie van sinh

De functie \sinh beeldt \mathbb{R} één-éénduidig op \mathbb{R} af; \sinh heeft dus een op \mathbb{R} gedefinieerde inverse. Deze kunnen we eenvoudig bepalen; immers uit $y = \sinh x$ volgt

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Hieruit volgt

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad (\text{omdat } e^x > 0)$$

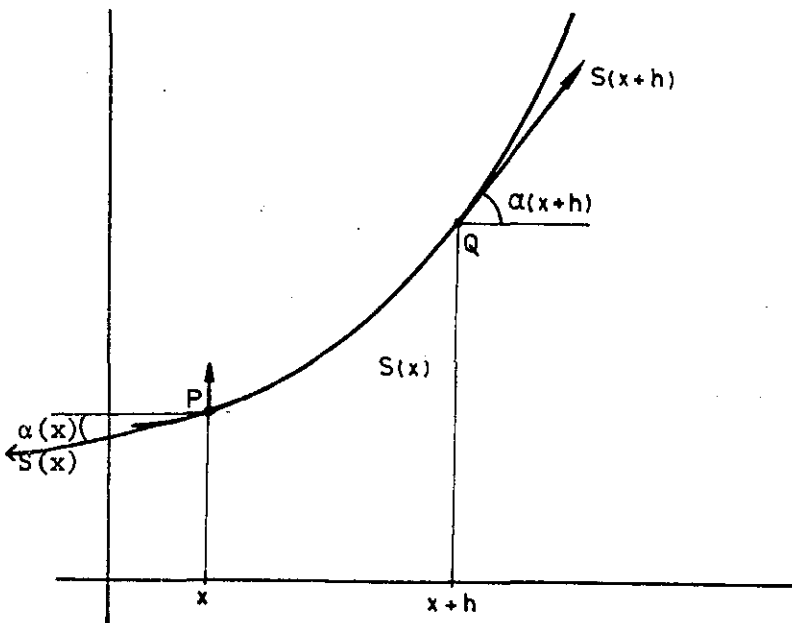
en tenslotte

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \text{ voor alle reële } y.$$

De afgeleide van deze inverse functie is $\frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}$.

We vinden zo ook een onbepaalde integraal, namelijk:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) + C.$$



2.7.3. Voorbeeld (kettinglijn).

Beschouw een aan zijn eindpunten opgehangen, vrij hangende ketting, die zich slechts onder invloed van zijn eigen gewicht bevindt. Welke kromme zal de hangende ketting volgen?

Laat deze kromme de grafiek zijn van $y(x)$ (vgl. bovenstaande figuur). Laat $\alpha(x)$ de hoek van de raaklijn in $(x, y(x))$ aan de grafiek met de positieve x -as zijn.

Is $S(x)$ de spanning in de ketting in $(x, y(x)) =: P$ en $S(x+h)$ die in $(x+h, y(x+h)) =: Q$, dan geldt voor de horizontale en verticale componenten:

$$S(x+h)\cos \alpha(x+h) - S(x)\cos \alpha(x) = 0 ,$$

$$S(x+h)\sin \alpha(x+h) - S(x)\sin \alpha(x) = \sigma \cdot \text{lengte kettingstuk PQ},$$

waarin σ het gewicht per lengteeenheid van de homogene ketting is.

Hieruit volgt:

$$(S(x)\cos \alpha(x))' = 0,$$

$$(S(x)\sin \alpha(x))' = \sigma \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{lengte kettingstuk PQ}}{h} = \frac{\sigma}{\cos \alpha(x)} .$$

Uit de eerste vergelijking volgt $S(x)\cos \alpha(x) = C$; ingevuld in de tweede geeft d

$$(C \tan \alpha(x))' = \frac{\sigma}{\cos \alpha(x)} = \sigma \sqrt{1 + (\tan \alpha(x))^2} ,$$

want

$$|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2} .$$

Dus

$$\frac{\sigma}{C} = \frac{(\tan \alpha(x))'}{\sqrt{1 + (\tan \alpha(x))^2}} .$$

Volgens 2.7.2 is nu

$$\ln(\tan \alpha(x) + \sqrt{1 + (\tan \alpha(x))^2}) = \frac{\sigma}{C} x + D = \frac{\sigma}{C} (x - a) ,$$

$$\tan \alpha(x) = \sinh \frac{\sigma}{C} (x - a) = y'(x) ,$$

$$y(x) = \cosh \frac{\sigma}{C} (x - a) + A .$$

De grafiek van cosh heet daarom wel kettinglijn.

2.7.4. Voorbeeld (Hangbrug; contrast met 2.7.3). Beschouw een kabel met verwaarloosbaar gewicht en een daaraan opgehangen wegdek met gewicht σ per horizontaal gemeten lengteeenheid. Welke kromme zal de kabel volgen?

We introduceren $y(x)$, $\alpha(x)$ en $S(x)$ als in 2.7.3.

Ontbinding van de spanning in zijn horizontale en verticale componenten levert

$$S(x+h)\cos \alpha(x+h) - S(x)\cos \alpha(x) = 0$$

$$S(x+h)\sin \alpha(x+h) - S(x)\sin \alpha(x) = \sigma h.$$

Dus $(S(x)\cos \alpha(x))' = 0$, $(S(x)\sin \alpha(x))' = \sigma$.

Uit de eerste differentiaalvergelijking volgt $S(x)\cos \alpha(x) = C$. Hiervan gebruikmakend vinden we m.b.v. de tweede differentiaalvergelijking daarna

$$(C \tan \alpha(x))' = \sigma,$$

$$y' = \tan \alpha(x) = \frac{\sigma}{C} x + D =: \frac{\sigma}{C} (x - a),$$

$$y = \frac{\sigma}{2C} (x - a)^2 + B.$$

Dit is de vergelijking van een parabool met verticale as.

2.8. De formule van Taylor

2.8.1. Stelling: Als $p(x)$ een veelterm is van graad $\leq N$, en a is een vast getal, dan geldt:

$$\begin{aligned} p(x) = p(a) + \frac{(x-a)}{1!} p'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} p''(a) + \dots \\ \dots + \frac{(x-a)^N}{N!} p^{(N)}(a). \end{aligned} \quad (1)$$

Bewijs: Noem $x - a = h$, dan is $p(x) = p(a + h)$ een veelterm in h van graad $\leq N$, dus

$$p(a + h) = A_0 + A_1 h + \dots + A_N h^N.$$

Neem $h = 0$; dan vinden we $A_0 = p(a)$.

Differentieer naar h :

$$p'(a + h) = A_1 + 2A_2 h + \dots + NA_N h^{N-1}.$$

Neem weer $h = 0$; er komt dan $A_1 = p'(a)$.

Nogmaals naar h differentiëren levert

$$p''(a + h) = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3 h + \dots + N(N-1)A_N h^{N-2}.$$

Voor $h = 0$ krijgen we $p''(a) = 2A_2$.

Wederom differentiëren levert

$$p'''(a+h) = 2.3A_3 + \dots + N(N-1)(N-2)A_N h^{N-3}.$$

Voor $h = 0$ volgt

$$p'''(a) = 2.3.A_3, \quad \text{enz.} \quad \square$$

Formule (1) heet de formule van Taylor voor veeltermen. Voor willekeurige functies als e^x , $\sin x$, $\cos x$ geldt deze formule niet. Om toch een soortgelijke voorstelling te krijgen, definiëren we voor een willekeurige functie $f(x)$ de restterm $R_N(x,a)$ door:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ \dots + \frac{(x-a)^N}{N!} f^{(N)}(a) + R_N(x,a). \quad (2)$$

De gedaante van $R_N(x,a)$ wordt beschreven door de volgende stelling. Als in (2) voor $R_N(x,a)$ de uitdrukking (3) wordt ingevuld, dan heet (2) de formule van Taylor.

2.8.2. Stelling (Taylor). Er bestaat een $\theta \in (0,1)$ zodat in (2) geldt:

$$R_N(x,a) = \frac{(x-a)^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+1)}(a + \theta(x-a)). \quad (3)$$

Opmerking. Men kan (3) herformuleren als:

$$R_N(x,a) = \frac{(x-a)^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi),$$

waarbij ξ een punt is op de X-as tussen a en x .

Het is ook duidelijk dat de stelling van Taylor een generalisatie is van de middelwaardestelling 2.5.5. Het bewijs van de stelling van Taylor kan zonder erg veel moeite uit dat van de middelwaardestelling worden afgeleid; we laten het echter achterwege. We wijzen er op dat de stelling van Taylor ook een rol speelt bij beschouwingen in 2.6.1, p. 69 bovenaan.

Voorbeelden.

1) De functie $f(x) = e^x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op \mathbb{R} met $f^{(k)}(x) = e^x$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n = 0, 1, 2, \dots$ is er een $\theta \in (0, 1)$ zodat

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}.$$

Nu is $e^{\theta x} > 0$, dus voor alle $x > 0$ geldt

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

2) De functie $f(x) = \sin x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op \mathbb{R} met afgeleiden $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$ enzovoort. Met volledige inductie kan men bewijzen dat algemeen geldt $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{1}{2}n\pi)$, dus $f^{(2k)}(0) = 0$ en $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$ is er een $\theta \in (0, 1)$ zodat

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + 0 x^{2n} + R_{2n}(x, 0),$$

waarin

$$R_{2n}(x, 0) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(\theta x + (n + \frac{1}{2})\pi) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x.$$

Neem $n = 4$; voor $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ geldt dan

$$\sin x > x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

3) De functie $f(x) = \cos x$ is willekeurig vaak differentieerbaar op \mathbb{R} met afgeleiden $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f^{(3)}(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$ enzovoort. Ook hier kan men met volledige inductie bewijzen dat algemeen geldt $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{1}{2}n\pi)$, dus $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ en $f^{(2k+1)}(0) = 0$ voor $k = 0, 1, 2, \dots$. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n = 0, 1, 2, \dots$ is er een $\theta \in (0, 1)$ zodat

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + 0 \cdot x^{2n+1} + R_{2n+1}(x, 0),$$

waarin

$$R_{2n+1}(x, 0) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\theta x + (n+1)\pi) = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta x.$$

4) De functie $f(x) = \ln(1+x)$ is willekeurig vaak differentieerbaar op $(-1, \infty)$ met (vgl. p. 34)

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$ is er een $\theta \in (0,1)$ zodat

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Hieruit volgt dat voor $x > 0$ geldt

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

Opmerking. De beschouwingen van deze paragraaf worden in 4.5 voortgezet.

2.9. Techniek van het integreren

In deze paragraaf bespreken we grotendeels aan de hand van voorbeelden enige kunstgrepen en methoden voor het berekenen van onbepaalde en bepaalde integralen. Veelvuldig zullen we daarbij de notatie $dg(x) := g'(x)dx$ gebruiken, vgl. p.

2.9.1. De volgende formules zijn door differentiëren direct te bewijzen.

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 \quad ; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad ; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad ; \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C \quad ; \quad \int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\tan \frac{1}{2}x| + C.$$

2.9.2. Herhaalde partiële integratie

Voorbeeld 1. $I = \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} \int \cos bx d(e^{ax}) =$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx,$$

$$J := \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a} \int \sin bx d(e^{ax}) =$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx .$$

Dus $I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I$, waaruit volgt

$$I = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C ,$$

$$J = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C .$$

Zo is, voor $a > 0$,

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{-a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \Big|_0^N \right] = \frac{a}{a^2 + b^2} .$$

Voorbeeld 2. Bereken $\int e^{-x} x^n \, dx =: I_n$.

$$I_n = \int e^{-x} x^n \, dx = - \int x^n d(e^{-x}) = -x^n e^{-x} + n \int e^{-x} x^{n-1} \, dx =$$

$$= -x^n e^{-x} + n I_{n-1} .$$

Dit is een zg. recurrente betrekking voor I_n .

Zo is bijv.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-x^n e^{-x} \Big|_0^N \right] + n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} \, dx = n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} \, dx =$$

$$= n(n-1) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-2} \, dx =$$

$$= n(n-1) \dots 2 \int_0^{\infty} e^{-x} x \, dx = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 \int_0^{\infty} e^{-x} \, dx = \dots$$

$$= n! \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} \Big|_0^N \right] = n!$$

Voorbeeld 3. Bereken $\int (1+x^2)^{-n} \, dx =: J_n$. We hebben $J_1 = \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$.

Verder geldt

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \\
 &= \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{xd(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \arctan x + \frac{1}{2} \int xd\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \\
 &= \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C.
 \end{aligned}$$

De berekening van J_n ($n > 2$) is analoog:

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx = J_{n-1} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n} = \\
 &= J_{n-1} - \frac{1}{2} \int \frac{xd(1+x^2)}{(1+x^2)^n} = J_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \int xd\left(\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\right) = \\
 &= J_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} J_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Aldus volgt

$$J_n = \frac{2n-3}{2(n-1)} J_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

Zo hebben we een recurrente betrekking gekregen, die ons in staat stelt om J_n te berekenen, daar J_1 bekend is.

Opmerking. Probeer de zojuist gevonden recurrente betrekking ook af te leiden m.b.v. de substitutie $x = \tan \varphi$ (vgl. 2.9.5).

2.9.3. Rationale integrand, splitsing in partiële breuken

Voorbeeld 1.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{7x-1}{x^2-2x+5} dx &= \frac{7}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx + 6 \int \frac{dx}{x^2-2x+5} = \\
 &= \frac{7}{2} \int \frac{d(x^2-2x+5)}{x^2-2x+5} + 6 \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \\
 &= \frac{7}{2} \ln(x^2-2x+5) + 3 \int \frac{d(\frac{1}{2}(x-1))}{[\frac{1}{2}(x-1)]^2+1} = \\
 &= \frac{7}{2} \ln(x^2-2x+5) + 3 \arctan \frac{1}{2}(x-1) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Voorbeeld 2. } \int \frac{7x-1}{(x^2-2x+5)^2} dx &= \frac{7}{2} \int \frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2} dx + 6 \int \frac{dx}{[(x-1)^2+4]^2} = \\ &= \frac{7}{2} \int \frac{d(x^2-2x+5)}{(x^2-2x+5)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{d(\frac{1}{2}(x-1))}{\{[\frac{1}{2}(x-1)]^2+1\}^2} = \\ &= -\frac{7}{2(x^2-2x+5)} + \frac{3}{4} \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \end{aligned}$$

waarin we $t = \frac{1}{2}(x-1)$ gesteld hebben.

Voor de laatste integraal verwijzen we naar 2.9.2, voorbeeld 3.

$$\text{Uitkomst : } \frac{3}{8} \arctan \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3x-17}{4(x^2-2x+5)} + C.$$

Alle integralen van rationale functies zijn te herleiden tot de volgende vijf grondtypen:

- $\int p(x)dx$, waarbij $p(x)$ een polynoom is.
- $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$
- $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \quad (n \neq 1).$
- $\int \frac{Px+Q}{x^2+px+q} dx$ met positief definitieve noemer x^2+px+q , d.w.z. $p^2-4q < 0.$

De integraal is te herleiden tot

$$\frac{1}{2}P \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + (Q - \frac{1}{2}pP) \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2}.$$

De eerste integraal is gelijk aan $\frac{1}{2}P \ln(x^2+px+q)$; de tweede integraal is te herleiden tot een arctan-functie na de substitutie $t = (q - \frac{1}{4}p^2)^{-\frac{1}{2}}(x + \frac{1}{2}p).$

- $\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} dx$ met positief definitieve noemer x^2+px+q en $n > 1.$

De integraal is te herleiden tot

$$\frac{1}{2}P \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx + (Q - \frac{1}{2}pP) \int \frac{dx}{[(x + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2]^n}.$$

De eerste integraal is direct te berekenen, terwijl de tweede integraal door de substitutie $t = (q - \frac{1}{4}p^2)^{-\frac{1}{2}}(x + \frac{1}{2}p)$ overgaat in $\int (t^2+1)^{-n} dt$, welke in 2.9.2, voorbeeld 3, behandeld is.

We beschouwen nu algemeen de integraal met rationale integrand:

$$\int \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n} dx =: \int \frac{T(x)}{N(x)} dx .$$

De berekening van de integraal geschiedt in vier stappen .

Stap 1 : Zorg, door deling, dat $m := \text{gr}(T) < n := \text{gr}(N)$ ($\text{gr}(T)$ duidt de graad van $T(x)$ a

Stap 2 : Ontbind de noemer $N(x)$ in reële factoren van de eerste graad en reële positief definitieve factoren van de tweede graad.

Stap 3 : Schrijf $T(x)/N(x)$ als de som van een aantal breuken, waarvan de noemers zijn de eerstegraadsfactoren van $N(x)$, de definitieve tweedegraadsfactoren van $N(x)$, of machten daarvan. De teller van deze breuken is constant in geval de noemer een eerstegraadsfactor is of een macht daarvan; de teller is van de eerste graad in geval de noemer een tweedegraadsfactor is of een macht daarvan. Deze herleiding van de integrand $T(x)/N(x)$ heet splitsing in partiële breuken. Zonder bewijs vermelden we dat een dergelijke splitsing altijd mogelijk is.

Stap 4 : Integreer de afzonderlijke partiële breuken; de betreffende integralen behoren tot de vijf genoemde grondtypen.

Voorbeeld 3.
$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^3 + x - x + 1}{x^2 + 1} dx = \int x dx - \int \frac{x-1}{x^2 + 1} dx =$$
$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{dx}{x^2 + 1} =$$
$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan x + C.$$

Voorbeeld 4.
$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} =$$
$$= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

Voorbeeld 5.
$$\int \frac{x-1}{3x^2 + 5x - 2} dx = \int \frac{x-1}{(3x-1)(x+2)} dx..$$

Schrijf nu $\frac{x-1}{(3x-1)(x+2)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{x+2}$, dan is

$$x - 1 \equiv A(x+2) + B(3x-1),$$

$$1 = A + 3B, -1 = 2A - B, \text{ dus } A = -\frac{2}{7}, B = \frac{3}{7}.$$

De integraal wordt nu

$$-\frac{2}{7} \int \frac{dx}{3x-1} + \frac{3}{7} \int \frac{dx}{x+2} = -\frac{2}{21} \ln |3x-1| + \frac{3}{7} \ln |x+2| + C.$$

Voorbeeld 6. $\int \frac{x+1}{x(x+5)^2} dx$. We merken op dat de noemer van de integrand een meervoudige eerstegraadsfactor bevat.

De breuksplitsing verloopt dan als volgt:

$$\frac{x+1}{x(x+5)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} + \frac{D}{(x+5)^2},$$

$$x + 1 \equiv A(x^2 + 10x + 25) + B(x^2 + 5x) + Dx,$$

dus

$$A + B = 0, 10A + 5B + D = 1, 25A = 1,$$

$$A = \frac{1}{25}, B = -\frac{1}{25}, D = \frac{4}{5}.$$

De integraal wordt

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x(x+5)^2} dx &= \frac{1}{25} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{25} \int \frac{dx}{x+5} + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{(x+5)^2} = \\ &= \frac{1}{25} \ln |x| - \frac{1}{25} \ln |x+5| - \frac{4}{5(x+5)} + C. \end{aligned}$$

Voorbeeld 7. $\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + 3x + 5} dx = \int \frac{2x^2 + x + 1}{(x+1)(x^2 - 2x + 5)} dx$.

De breuksplitsing verloopt nu als volgt:

$$\frac{2x^2 + x + 1}{(x+1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + D}{x^2 - 2x + 5},$$

$$2x^2 + x + 1 \equiv A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + D)(x+1),$$

dus

$$A + B = 2, -2A + B + D = 1, 5A + D = 1,$$

$$A = \frac{1}{4}, B = \frac{7}{4}, D = -\frac{1}{4}.$$

De integraal wordt

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{7x-1}{x^2-2x+5} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{7}{8} \ln(x^2-2x+5) + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}(x-1) + C ;$$

hierbij hebben we gebruik gemaakt van voorbeeld 1 uit deze paragraaf.

Voorbeeld 8. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$. In dit geval bevat de noemer van de integrand een

meervoudige tweedegraadsfactor.

De breuksplitsing verloopt nu als volgt:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} ,$$

$$1 \equiv A(x^4+2x^2+1) + (Bx+D)(x^3+x) + (Ex+F)x ,$$

dus (vgl. de coëfficiënten van x^4, x^3, \dots, x^0)

$$A + B = 0, D = 0, 2A + B + E = 0, D + F = 0, A = 1,$$

$$A = 1, B = E = -1, D = F = 0.$$

De integraal wordt

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C .$$

2.9.4. Goniometrische integralen

De integraal $\int R(\sin x, \cos x)dx$, waarin R een rationale functie voorstelt, is door de substitutie $\tan \frac{1}{2}x = t$ te herleiden tot een integraal met rationale integrand. Immers, er geldt (ga dit na):

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} .$$

$$\begin{aligned} \text{Voorbeeld 1. } \int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1-t}{1+t}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 4 \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = \\ &= -2 \int t d\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = -\frac{2t}{1+t^2} + 2 \arctan t + C_1 = -\sin x + x + C. \end{aligned}$$

Hoewel deze methode feilloos werkt, is zij meestal zeer omslachtig en is het aan te bevelen om haar slechts toe te passen wanneer alle andere middelen zijn uitgeput. Die andere middelen zijn:

- (i) eenvoudige substitutie;
- (ii) gebruik van goniometrische formules;
- (iii) graad verlagen door overgang op $\sin 2x$, $\cos 2x$;
- (iiii) substitutie $\tan x = t$.

$$\text{Voorbeeld 2. } \int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x} dx = x - \sin x + C.$$

$$\text{Voorbeeld 3. } \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = - \int \frac{d(1 + \cos x)}{1 + \cos x} = - \ln(1 + \cos x) + C.$$

$$\begin{aligned} \text{Voorbeeld 4. } \int \sin px \sin qx dx &= \frac{1}{2} \int \cos(p-q)x dx - \frac{1}{2} \int \cos(p+q)x dx = \\ &= \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} + C, \end{aligned}$$

mits $p \neq q$ en $p \neq -q$ is (Onderzoek zelf de gevallen $p = q$ en $p = -q$).

$$\begin{aligned} \text{Voorbeeld 5. } \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} &= \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} \tan^2 x + 1} \frac{dx}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{ab} \int \frac{d\left(\frac{a}{b} \tan x\right)}{\frac{a^2}{b^2} \tan^2 x + 1} = \frac{1}{ab} \arctan \left[\frac{a}{b} \tan x\right] + C. \end{aligned}$$

(Eigenlijk hebbenwe hier de substitutie $\tan x = t$ toegepast.)

In het volgende voorbeeld blijkt dat de substitutie $\tan \frac{1}{2}x = t$ ook wel eens meevalt.

Voorbeeld 6.
$$\int \frac{dx}{1+2 \cos x} = \int \frac{1}{1 + \frac{2(1-t^2)}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{dt}{3-t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\int \frac{dt}{\sqrt{3}-t} + \int \frac{dt}{\sqrt{3}+t} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \tan \frac{1}{2}x}{\sqrt{3} - \tan \frac{1}{2}x} \right| + C.$$

Voorbeeld 7.
$$\int \cos^4 x \, dx = \frac{1}{4} \int (1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1+2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx =$$

$$= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

Voorbeeld 8.
$$\int \cos^5 x \, dx = \int \cos^4 x \cos x \, dx = \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) =$$

$$= \int (1-2 \sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

Voorbeeld 9.
$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} dx =$$

$$= \int \tan^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \tan^2 x d(\tan x) + \int d(\tan x) = \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x + C.$$

2.9.5. Integrand $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

De integraal $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$, waarin R een rationale functie voorstelt, is door kwadraat afsplitsen te herleiden tot een van de volgende drie typen:

- $\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx$; verdere herleiding door de substitutie $x = \sin \varphi$.
- $\int R(x, \sqrt{x^2-1}) dx$; verdere herleiding door de substitutie $x = \frac{1}{\cos \varphi}$.
- $\int R(x, \sqrt{x^2+1}) dx$; verdere herleiding door de substitutie $x = \tan \varphi$.

N.B. Let op het teken wanneer wortels worden getrokken.

We beperken ons tot het geven van enige voorbeelden van bepaalde integralen.

Voorbeeld 1. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$

Substitueer $x = \sin \varphi$ en neem φ zó, dat het integratie-interval $0 \leq x \leq 1$ overgaat in $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$. Op dit interval geldt $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi} = \cos \varphi$.

De integraal wordt dan

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right] \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$

De integraal is te interpreteren als de oppervlakte van een kwart cirkel met straal 1.

Voorbeeld 2. $\int_a^\infty \frac{dx}{x^4 \sqrt{a^2+x^2}} \quad (a > 0).$

Substitueer $x = a \tan \varphi$ en neem φ zó, dat het interval $a \leq x < \infty$ overgaat in $\frac{1}{2}\pi \leq \varphi < \pi$.

De integraal wordt dan

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{dx}{x^4 \sqrt{a^2+x^2}} &= \frac{1}{a^4} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^4 \varphi} d\varphi = \frac{1}{a^4} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{(1-\sin^2 \varphi) d(\sin \varphi)}{\sin^4 \varphi} = \\ &= \frac{1}{a^4} \left[-\frac{1}{3 \sin^3 \varphi} + \frac{1}{\sin \varphi} \right] \Big|_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} = \frac{2 - \sqrt{2}}{3a^4}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 3. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+4x}} = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+4)\sqrt{(x+2)^2-4}}.$

Substitueer $x+2 = 2/\cos \varphi$ en neem φ zó, dat het interval $0 \leq x < \infty$ overgaat in $0 \leq \varphi < \frac{1}{2}\pi$.

De integraal wordt dan

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{2 \cos \varphi + 2} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{4 \cos^2 \frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{4} \tan \frac{1}{2}\varphi \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{4}.$$

2.9.6. De formule van Wallis

Vaak kan men bepaalde integralen herleiden tot integralen van de vorm

$$I_{m,n} := \int_0^{\pi/2} (\cos x)^m (\sin x)^n dx$$

waarbij m en n niet-negatieve gehele getallen zijn.

Door gebruik te maken van $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$ en partiële integratie kan men bewijzen dat geldt

$$I_{m,n} = \frac{(m-1)(m-3)(m-5) \dots (n-1)(n-3)(n-5) \dots}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4) \dots} \begin{cases} \pi/2 & \text{als } m \text{ en } n \text{ beide even zijn} \\ 1 & \text{in de andere drie gevallen} \end{cases}$$

(elk van de drie rijen factoren eindigt met 1 of 2).

Deze formule voor $I_{m,n}$ heet de formule van Wallis.

Voorbeelden:

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^6 dx = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} = \frac{5}{32} \pi \quad (m = 6, n = 0),$$

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^7 dx = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{16}{35} \quad (m = 0, n = 7),$$

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^4 (\sin x)^5 dx = \frac{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{8}{315} \quad (m = 4, n = 5),$$

2.10. Numerieke integratie

2.10.1. De Riemann-integraal $\int_a^b f(x)dx$ is niet altijd in gesloten vorm te berekenen.

Zo kunnen we bijvoorbeeld $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ niet bepalen omdat er geen elementaire functie blijkt te bestaan die primitieve functie is van e^{-x^2} . We bespreken daarom nu enige numerieke integratiemethoden voor de berekening van een benadering van $\int_a^b f(x)dx$. We beperken ons daarbij tot twee eenvoudige integratieformules, namelijk de rechthoekregel en de trapeziumregel. Voor beide regels zullen we onderzoeken tot wat voor fout zij leiden, in vergelijking met de werkelijke waarde van $\int_a^b f(x)dx$.

2.10.2. Men kan bewijzen (wij zullen dat hier niet doen) dat voor een continue functie f op $[a,b]$ geldt

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a) \quad \text{voor zekere } \xi \in (a,b).$$

Een voor de hand liggende benadering van ξ is het midden van het interval $[a,b]$, dus $\frac{a+b}{2}$. We krijgen dan de rechthoekregel:

$$\int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b - a) + E_r, \quad (1)$$

waarin E_r de (werkelijk gemaakte) fout voorstelt die optreedt wanneer we $\int_a^b f(x)dx$ door $f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b - a)$ benaderen. De invloed van (afroondings)fouten bij het berekenen van de functiewaarden van f laten we buiten beschouwing.

Merk op, dat als $f(x) \geq 0$ de integraal $\int_a^b f(x)dx$ wordt benaderd door de oppervlakte van de rechthoek met basis $b - a$ en hoogte $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Men kan bewijzen dat voor tweemaal continu differentieerbare functies f geldt:

$$E_r = \frac{1}{24} (b - a)^3 f''(\eta) \quad \text{voor zekere } \eta \in [a, b]. \quad (2)$$

2.10.3. Een voor de hand liggend alternatief is een benadering van $\int_a^b f(x) dx$ door de oppervlakte van het rechthoekig trapezium met basis $b - a$ en zijden $f(a)$ en $f(b)$. We krijgen dan de trapeziumregel

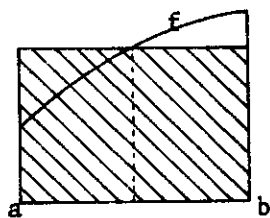
$$\int_a^b f(x) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a) + E_t, \quad (1)$$

waarin E_t de fout is die bij de benadering van $\int_a^b f(x) dx$ door $\frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a)$ gemaakt wordt.

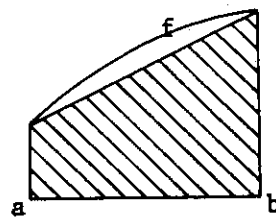
Voor tweemaal continu differentieerbare functies f geldt

$$E_t = -\frac{1}{12} (b - a)^3 f''(\zeta) \quad \text{voor zekere } \zeta \in [a, b]. \quad (2)$$

2.10.4. Opmerking. Wanneer we weten dat E_r en ook E_t , de volgende vorm heeft: $C(b - a)^p f^{(q)}(\xi)$ voor zekere $\xi \in [a, b]$, dan kunnen we de precieze uitdrukking ervoor afleiden.



rechthoekregel



trapeziumregel

Het is duidelijk, dat bij de rechthoekregel de integraal benaderd wordt door de integraal van een constante functie (namelijk $f(\frac{a+b}{2})$) en bij de trapeziumregel door de integraal van een lineaire functie (namelijk $f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$). Uit meetkundige overwegingen blijkt direct, dat

beide regels exact zijn (dit is: fout 0 hebben) als f een lineaire functie is. Hieruit volgt dat $q \geq 2$ is voor beide regels. Met $f(x) = x^2$ vinden we voor de rechthoekregel

$$E_r = \int_a^b x^2 dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 (b-a) = \frac{1}{12}(b-a)^3$$

en voor de trapeziumregel

$$E_t = \int_a^b x^2 dx - \frac{a^2 + b^2}{2} (b-a) = -\frac{1}{6}(b-a)^3.$$

Hieruit volgt voor de rechthoekregel

$$q = 2, p = 3, C = \frac{1}{24}$$

en voor de trapeziumregel

$$q = 2, p = 3, C = -\frac{1}{12}$$

waarmee de formules (2) van 2.10.2 en 2.10.3 zijn ontstaan.

2.10.5. We mogen verwachten, dat we in het algemeen een betere benadering voor $\int_a^b f(x)dx$ zullen krijgen wanneer we het integratie-interval $[a,b]$ verdelen in een aantal deelintervallen en voor ieder van die deelintervallen de rechthoekregel of trapeziumregel toepassen. In het nu volgende passen we een verdeling toe in n deelintervallen met dezelfde lengte $h = \frac{b-a}{n}$, dus in de deelintervallen $[a, a+h], [a+h, a+2h], \dots, [a+(n-1)h, b]$. Ter afkorting schrijven we f_0 voor $f(a)$, $f_{\frac{1}{2}}$ voor $f(a + \frac{1}{2}h)$, f_1 voor $f(a+h)$, in het algemeen f_t voor $f(a+th)$. We vinden zo de samengestelde rechthoekregel:

$$\int_a^b f(x)dx = h[f_{1/2} + f_{3/2} + \dots + f_{n-(1/2)}] + E_R(h) \tag{1}$$

en de samengestelde trapeziumregel

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}h[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n] + E_T(h) . \tag{2}$$

Merk op dat de samengestelde rechthoekregel een benadering voor de integraal geeft met een Riemann-som. Is f tweemaal continu differentieerbaar, dan geldt

$$E_R(h) = \frac{1}{24} h^3 (f''(\eta_1) + \dots + f''(\eta_n)) \quad (3)$$

waar $\eta_j \in [a + (j-1)h, a + jh]$ ($j = 1, \dots, n$) en

$$E_T(h) = -\frac{1}{12} h^3 (f''(\zeta_1) + \dots + f''(\zeta_n)) \quad (4)$$

waar $\zeta_j \in [a + (j-1)h, a + jh]$ ($j = 1, \dots, n$).

Als m en M het minimum en het maximum van f'' op $[a, b]$ zijn, dan is dus (met $nh = b - a$)

$$\frac{1}{24} (b-a)h^2 m \leq E_R(h) \leq \frac{1}{24} (b-a)h^2 M$$

en

$$-\frac{1}{12} (b-a)h^2 M \leq E_T(h) \leq -\frac{1}{12} (b-a)h^2 m .$$

Wanneer we voldoende weten van de functie f , kunnen we hiermee grenzen voor de gemaakte fout vinden. Het is duidelijk, dat deze grenzen dicht bij 0 liggen wanneer h voldoende klein, dus het aantal deelintervallen voldoende groot, gekozen wordt.

2.10.6. Voorbeeld. We berekenen π met behulp van numerieke integratie van $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$.

We delen het integratieinterval $[0, 1]$ op in 1, 2, 4, 8 en 16 deelintervallen. We schrijven $R(h)$ en $T(h)$ voor de benadering met de rechthoekregel en de trapeziumregel bij deelintervallen ter lengte h . Daar

$$\left(\frac{4}{1+x^2}\right)'' = \frac{24x^2 - 8}{(1+x^2)^3}$$

is $m = -8$ and $M = 2$ zodat de grenzen voor de fout zijn: $-\frac{1}{3} h^2$ en $\frac{1}{12} h^2$ voor $E_R(h)$, $-\frac{1}{6} h^2$ en $\frac{2}{3} h^2$ voor $E_T(h)$.

h	$R(h)$	$-\frac{1}{3} h^2$	$\frac{1}{12} h^2$	$T(h)$	$-\frac{1}{6} h^2$	$\frac{2}{3} h^2$
1	3,200 000	-0,33	0,083	3,000 000	-0,17	0,67
0,5	3,162 353	-0,083	0,021	3,100 000	-0,042	0,17
0,25	3,146 801	-0,021	0,0052	3,131 176	-0,010	0,042
0,125	3,142 895	-0,0052	0,0013	3,138 988	-0,0026	0,010
0,0625				3,140 942	-0,00065	0,0026

We kunnen concluderen dat $3,1402 < \pi < 3,1436$; vergelijk dit met de exacte waarde $3,14159265 \dots$

2.10.7. In de praktijk zijn de grenzen voor de gemaakte fout, zoals hierboven beschreven, in de regel zeer pessimistisch: de werkelijke fout is veel kleiner dan op grond van de grootte van de grenzen aangenomen mag worden. Bovendien is in de praktijk veelal te weinig van de functie f bekend, om van f'' het minimum m en het maximum M te kunnen geven. In de praktische numerieke wiskunde wordt daarom een andere methode gevolgd. Deze methode leidt voor voldoende "nette" functies tot een realistische schatting van de fout: een benadering van de numerieke waarde van de fout, die in vele gevallen de juiste orde van grootte heeft. Deze realistische schatting van de fout kan dan gebruikt worden ter correctie van de verkregen benadering voor de waarde van de integraal. De "netheid" die vereist is voor de nu te behandelen methode is, dat de tweede afgeleide f'' slechts langzaam varieert, d.w.z. op ieder deelinterval constant geacht mag worden.

2.10.8. We behandelen het verkrijgen van een realistische schatting van de fout bij de samengestelde trapeziumregel. De hiermee verkregen benadering voor de integraal $I = \int_a^b f(x)dx$ bij n deelintervallen ter lengte $h = \frac{b-a}{n}$ is

$$T(h) = \frac{1}{2}h[f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n] .$$

We verdubbelen nu het aantal deelintervallen en krijgen

$$T(\frac{1}{2}h) = \frac{1}{2}h[f_0 + 2f_{1/2} + 2f_1 + 2f_{3/2} + \dots + 2f_{n-1} + 2f_{n-(1/2)} + f_n] .$$

Merk op dat $T(\frac{1}{2}h) = \frac{1}{2}(T(h) + R(h))$, zodat we voor het berekenen van $T(\frac{1}{2}h)$ nadat $T(h)$ al bekend is, kunnen volstaan met het berekenen van $R(h)$. Uit 2.10.5, formule (4) volgt dat

$$E_T(h) = -\frac{1}{12} h^3 (f''(\zeta_1) + \dots + f''(\zeta_n)) = -\frac{1}{12} h^2 (b-a) \frac{f''(\zeta_1) + \dots + f''(\zeta_n)}{n}$$

en

$$E_T(\frac{1}{2}h) = -\frac{1}{12} (\frac{1}{2}h)^2 (b-a) \frac{f''(\zeta_1') + f''(\zeta_1'') + \dots + f''(\zeta_n') + f''(\zeta_n'')}{2n} ,$$

waar $\zeta_j, \zeta_j', \zeta_j'' \in [a + (j-1)h, a + jh]$.

Indien we f'' per deelinterval $[a + (j-1)h, a + jh]$ vrijwel constant mogen onderstellen, krijgen we

$$E_T(h) \approx 4E_T(\frac{1}{2}h) .$$

Wegens

$$I = T(h) + E_T(h) = T(\frac{1}{2}h) + E_T(\frac{1}{2}h) ,$$

is

$$T(\frac{1}{2}h) - T(h) = E_T(h) - E_T(\frac{1}{2}h) \approx 3E_T(\frac{1}{2}h)$$

zodat

$$E_T(\frac{1}{2}h) \approx \frac{1}{3}(T(\frac{1}{2}h) - T(h)) .$$

Een vermoedelijk betere schatting voor de integraal is dus

$$T^*(\frac{1}{2}h) = T(\frac{1}{2}h) + \frac{1}{3}(T(\frac{1}{2}h) - T(h)) .$$

2.10.9. Opmerking. Men kan afleiden dat deze $T^*(\frac{1}{2}h)$ samenvalt met de samengestelde integratieformule die men verkrijgt door op elk deelinterval de functie f te benaderen door een parabool. Deze integratieformule heet de Simpsonregel.

2.10.10. Voorbeeld. We berekenen nogmaals π via $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$.

h	T(h)	$\frac{1}{3}(T(\frac{1}{2}h) - T(h))$	$T^*(\frac{1}{2}h)$
1	3,000 000	0,033 333	3,133 333
0,5	3,100 000	0,010 392	3,141 568
0,25	3,131 176	0,002 604	3,141 592
0,125	3,138 988	0,000 651	3,141 593
0,0625	3,140 942		

Vergelijk weer met de waarde 3,14159265 ... voor π . Vergelijk ook de verkregen nauwkeurigheid met die in 2.10.6.

Hoofdstuk 3. Differentiaalvergelijkingen

Wij zijn in het V.W.O. en ook in het vorige hoofdstuk af en toe op differentiaalvergelijkingen gestuit. In dit hoofdstuk geven we een systematische behandeling van enige van de eenvoudigste gevallen.

3.1. Inleiding; meetkundige interpretatie van de eerste orde vergelijkingen

Een gewone differentiaalvergelijking van de eerste orde is een relatie van de vorm

$$y' = f(x,y) . \quad (1)$$

Hierbij is f een functie van twee variabelen, die aan elke (x,y) uit een verzameling in \mathbb{R}^2 een reëel getal $f(x,y)$ toevoegt. De verzameling waarop $f(x,y)$ is gedefinieerd zullen we aangeven met $\text{DOM } f$. Een functie $y(x)$ gedefinieerd en differentieerbaar op een interval (a,b) heet een oplossing van (1) op (a,b) , als $(x,y(x)) \in \text{DOM } f$ en $y'(x) = f(x,y(x))$ geldt voor alle $x \in (a,b)$. Op analoge wijze noemen we

$$y^{(n)} = f(x,y',y'',\dots,y^{(n-1)})$$

een gewone differentiaalvergelijking van de n-de orde.

Voorbeelden. 1) $y' = -y/x$. Alle functies van de vorm $y(x) = C/x$, waarbij C een willekeurige constante is, zijn oplossing op $(0,\infty)$ en op $(-\infty,0)$.

2) De functies $\sin x$ en $\cos x$ zijn op \mathbb{R} oplossingen van de tweede orde differentiaalvergelijking $y'' = -y$.

3) De vergelijking van Van der Pol (1927)

$$y'' - \mu(1-y^2)y' + y = 0$$

heeft als oplossing onder andere $y(x) = 0$ voor alle x . Er bestaan ook andere oplossingen van deze vergelijking, maar deze zijn niet in een eenvoudige gesloten vorm weer te geven (althans als $\mu \neq 0$).

Een differentiaalvergelijking van de vorm

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = f(x)$$

heet een lineaire differentiaalvergelijking. De functies $a_n(x), \dots, a_0(x)$ heten de coëfficiënten. Als deze constant zijn en $a_n \neq 0$, dan spreken we van een n-de orde lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.

Als $f(x) = 0$ voor alle x , dan heet de vergelijking homogeen, anders inhomogeen. De differentiaalvergelijking uit voorbeeld 1) is dus lineair homogeen van de eerste orde, met niet-constante coëfficiënten. De vergelijking uit voorbeeld 2) is lineair homogeen van de tweede orde met constante coëfficiënten. De vergelijking van Van der Pol uit voorbeeld 3) is niet lineair (in dit geval spreekt men niet over homogeen of inhomogeen en over al dan niet constante coëfficiënten).

Het blijkt dat een differentiaalvergelijking in het algemeen vele oplossingen heeft. Vaak kan men alle oplossingen van een eerste orde vergelijking aangeven in één formule, waarin y behalve van x ook van een parameter C afhangt:

$$y = \varphi(x, C) .$$

We zeggen dan dat deze formule de algemene oplossing van (1) voorstelt. Indien we voor C een bepaalde waarde substitueren, dan vinden we een zg. particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking.

De differentiaalvergelijking (1) wordt vaak vergezeld door een zg. beginvoorwaarde van de vorm $y(a) = y_0$, waaraan de oplossing moet voldoen. Door deze voorwaarde wordt in het algemeen de parameter C vastgelegd.

Bij een differentiaalvergelijking van de n-de orde hangt de algemene oplossing van n parameters af:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) .$$

Deze parameters kunnen worden vastgelegd door het voorschrijven van n beginvoorwaarden $y(a) = y_0, y'(a) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = y_{n-1}$.

Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde laten een eenvoudige meetkundige interpretatie toe. Door de vergelijking wordt in ieder punt $(x_0, y_0) \in \text{DOM } f$ een richting gedefinieerd, nl. die van de rechte door (x_0, y_0) met richtingscoëfficiënt $f(x_0, y_0)$. Men kan in elk punt $(x_0, y_0) \in \text{DOM } f$ een lijntje of pijltje tekenen dat deze richting heeft.

Op deze manier is het vlak (voorzover de differentiaalvergelijking is gedefinieerd) bezaaid met pijltjes. We spreken daarom van een richtingsveld behorend bij de differentiaalvergelijking $y' = f(x, y)$.

Een functie $y(x)$ is een oplossing als de grafiek in ieder punt een raaklijn heeft waarvan de richting samenvalt met de richting van het richtingsveld in dat punt.

We kunnen ook zeggen: de grafiek raakt in elk punt aan het richtingsveld. Vanuit deze meetkundige beschouwingwijze wordt het duidelijk waarom men veelal krommen die overal aan het richtingsveld raken (zg. integraalkrommen) als oplossingen beschouwt (zie voorbeeld 4). Bovendien breidt men het richtingsveld uit met verticale richtingen (zie ook voorbeeld 4). Van groot nut bij het bepalen van het richtingsveld zijn de meetkundige plaatsen van punten met een gelijke richting, de zg. isoklinen. De vergelijking van de isokline van de richting waarvan de tangens C is, is $f(x,y) = C$. We besluiten deze paragraaf met een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 4. $y' = -\frac{x}{y}$; we zien dat $y \neq 0$ moet zijn. Dan volgt $2yy' = -2x$, dus door integratie vinden we

$$y^2 = -x^2 + C.$$

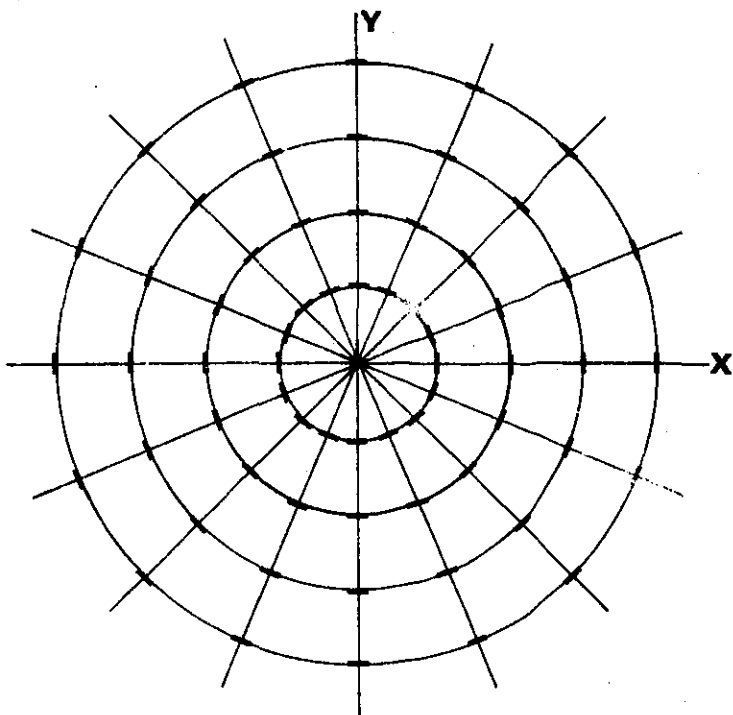
De constante C is ≥ 0 want $C = x^2 + y^2$. Met een zeer gebruikelijke slordigheid zegt men wel dat de oplossing een stelsel concentrische cirkels is: $x^2 + y^2 = C$.

Als men werkelijk functies als oplossingen aan wil geven, dan kan men bijv. op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ twee functies geven: $y = \sqrt{1-x^2}$ en $y = -\sqrt{1-x^2}$ die beide op $(-1,1)$ aan de differentiaalvergelijking voldoen.

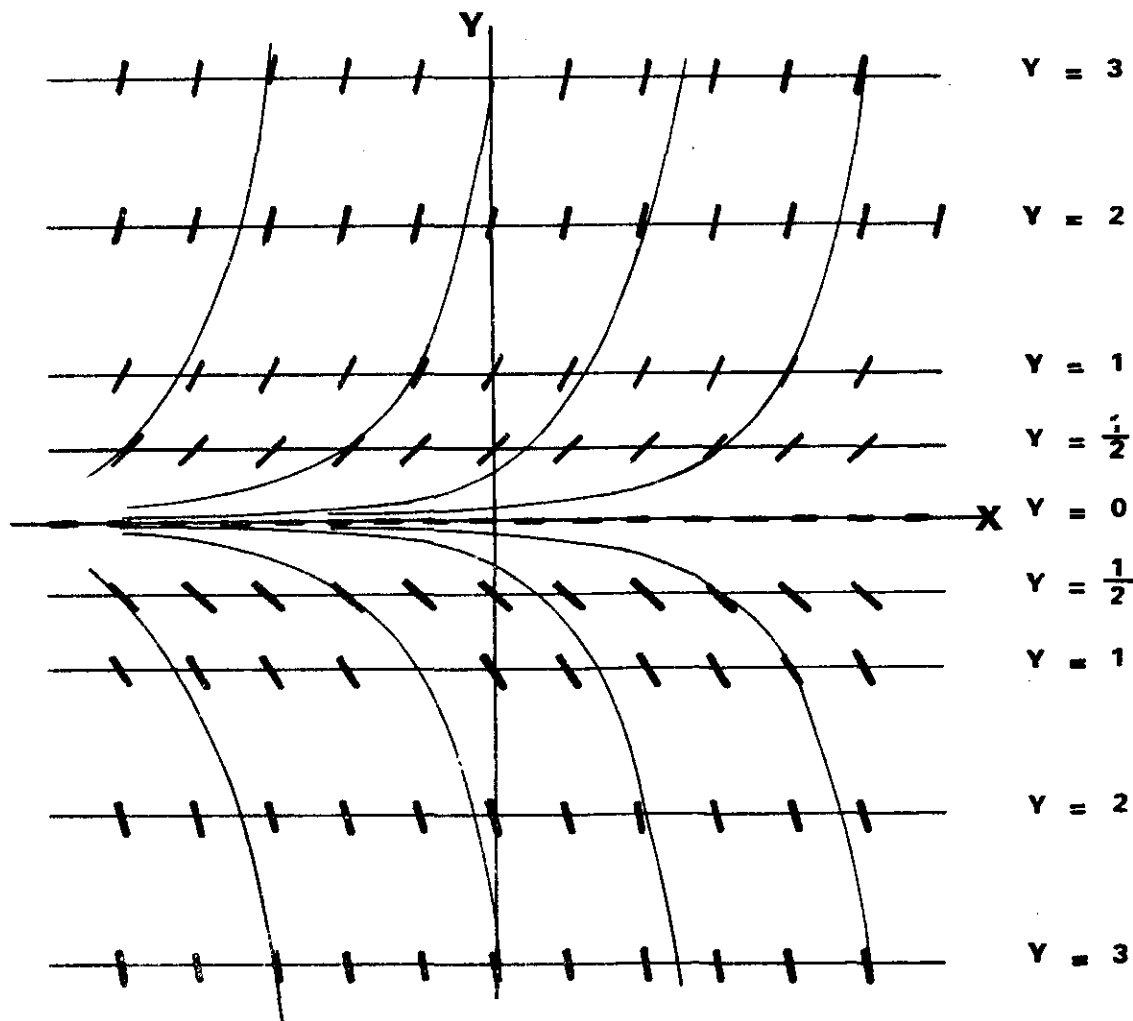
In dit voorbeeld is de vergelijking van de isokline met richting C : $-\frac{x}{y} = C$, dus $y = -\frac{1}{C}x$, een rechte door \mathcal{O} met richting loodrecht op de richting van het veld in zijn punten. We merken apart op dat het richtingsveld horizontaal is in punten van de y -as en verticaal in punten van de x -as ($y = 0$).

Van $y' = -\frac{x}{y}$ zijn dus de isoklinen rechten door de oorsprong; integraalkrommen zijn cirkels met de oorsprong als middelpunt.

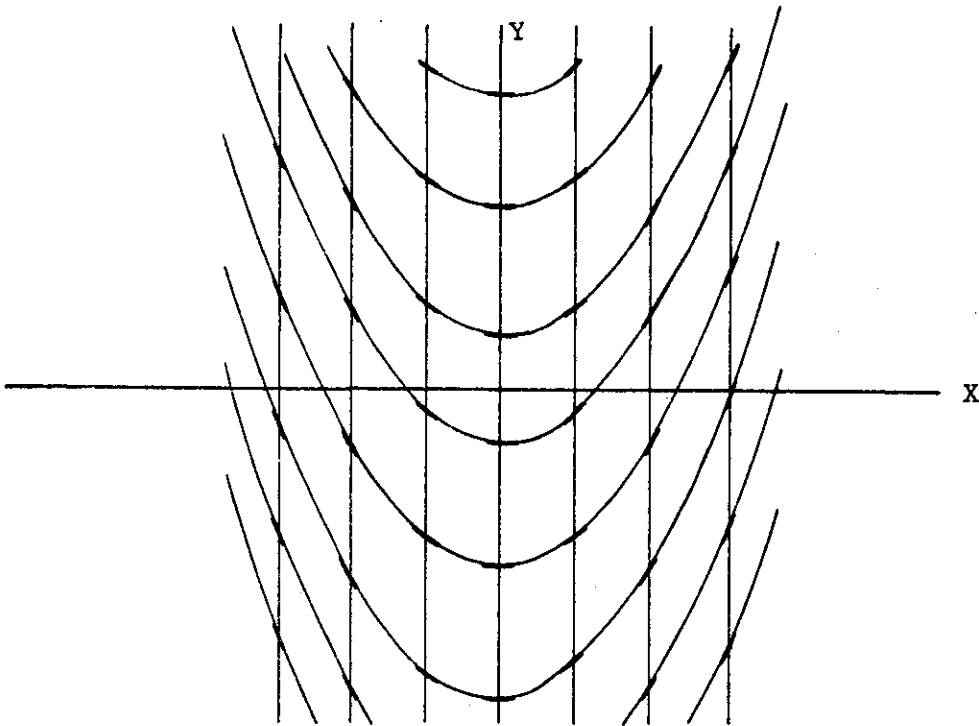
Voor de figuur verwijzen we naar de volgende bladzijde.



Voorbeeld 5. We nemen $y' = 2y$. Isoklinen zijn horizontale rechten; integraalkrommen hebben de vergelijking $y(x) = y(0)e^{2x}$ (vgl. onderstaande figuur). Zouden we hetzelfde willen doen voor $y' = -2y$, dan vinden we een plaatje dat uit het onderstaande ontstaat door aan de y-as te spiegelen. Integraalkrommen zijn nu: $y(x) = y(0)e^{-2x}$, dus $y(x) \rightarrow 0$ als $x \rightarrow \infty$ en $y(x) \rightarrow \pm\infty$ als $x \rightarrow -\infty$.



Voorbeeld 6. $y' = 2x$.

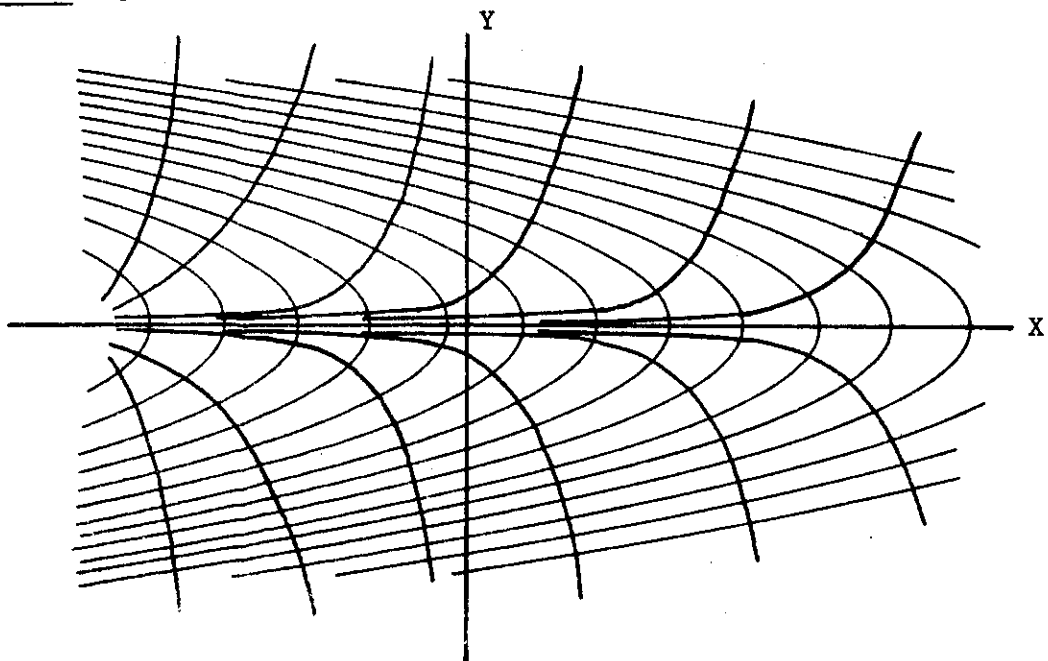


Isoklinen zijn verticale rechten; integraalkrommen hebben de vergelijking $y = x^2 + y_0$.

Voorbeeld 7. $y' = -\frac{1}{y}$ heeft als oplossingen $y^2 = -2x + C$ (2)

$y' = y$ heeft als oplossingen $y = De^x$. (3)

Door elk punt van het vlak gaat een kromme van de familie (2) en van de familie (3). Deze beide krommen snijden elkaar in dat punt onder een rechte hoek. Men zegt daarom dat de families (2) en (3) elkaars orthogonale trajectoriën zijn.



Voorbeeld 8. Gevraagd de orthogonale trajectoriën van de familie parabolen:

$$y = cx^2, \quad -\infty < c < \infty.$$

We willen dus alle krommen hebben die in elk van hun punten loodrecht staan op de door dat punt gaande parabool.

Oplossing. De raaklijnrichtingen van de parabolen volgen door differentiëren. We hebben $y' = 2cx = \frac{2y}{x}$. Voor de orthogonale trajectoriën geldt dus:

$$y' = \frac{-x}{2y}.$$

De oplossingen van deze laatste vergelijking zijn:

$$2y^2 = -x^2 + C, \quad C \geq 0,$$

een familie ellipsen.

Opgave. In elk van de voorbeelden 4, 5 en 6 (en ook in voorbeeld 1) waren de isoklinen rechte lijnen. Dit is in het algemeen uiteraard niet het geval. Teken het richtingsveld van

$$y' + 2xy = x.$$

In 3.2 en 3.3 bespreken we twee typen van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. De te bespreken theorie in 3.2 hebben we ongemerkt al in enkele voorbeelden gebruikt. In 3.4 worden hogere orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten aan de orde gesteld.

3.2. Scheiding van variabelen

Een differentiaalvergelijking van het type

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{1}$$

kunnen we schrijven als

$$g(y)y' = f(x). \tag{2}$$

Zij G een onbepaalde integraal van g en F een onbepaalde integraal van f , dus

$$G(y) = \int g(y)dy, F(x) = \int f(x)dx .$$

Voor een oplossing $y(x)$ van (2) geldt dan volgens de kettingregel:

$$\frac{d}{dx} G(y(x)) = G'(y(x))y'(x) = g(y(x))y'(x) = f(x) = F'(x) ,$$

zodat

$$G(y(x)) = F(x) + C . \quad (3)$$

Door deze vergelijking is $y(x)$ impliciet als functie van x gegeven.

Gewoonlijk gaat men bij het oplossen van (1) op de volgende formele manier te werk. Men schrijft

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} ,$$

waaruit volgt

$$g(y)dy = f(x)dx , \quad (4)$$

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx ,$$

$$G(y) = F(x) + C .$$

Hoewel (4) alleen formele betekenis heeft zien we door vergelijken met (3), dat op deze manier toch het juiste resultaat wordt gevonden.

Een differentiaalvergelijking van de vorm

$$y'(x) = f(x)h(y) \quad (5)$$

wordt van de gedaante (1) als we $g(y) := 1/h(y)$ stellen. Hierbij nemen we dan aan dat $h(y) \neq 0$ is. Als voor zekere y_0 geldt $h(y_0) = 0$, dan is de constante functie $y(x) = y_0$ een oplossing van (5). Deze oplossing wordt niet teruggevonden als men de vergelijking op de hierboven beschreven wijze oplost. Daarom moet deze oplossing apart worden vermeld.

Voorbeelden.

1) $xy' - y = 0$.

We delen door xy ; dit geeft

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} .$$

Dan volgt na integratie

$$\ln |y| = \ln |x| + C ,$$

$$|y| = e^C |x| .$$

Let wel, dat $y \equiv 0$ (d.w.z. $y = 0$ voor alle x) ook een oplossing is, die we hebben duisterd omdat we door y hebben gedeeld. Derhalve vinden we als algemene oplossing

$$y = Dx ,$$

waarbij D een willekeurige constante is.

- 2) $y' = 1 + y^2$ heeft als algemene oplossing $y = \tan(x+C)$. Merk op dat geen enkele oplossing over een interval met een lengte groter dan π is gedefinieerd, hoewel de differentiaalvergelijking overal is gedefinieerd.
- 3) Laat het aantal individuen van een bepaalde (dieren- of planten-) soort in een gegeven milieu op het tijdstip t gegeven worden door $p(t)$. Een eenvoudig model van het verloop van $p(t)$ als functie van t krijgen we, als we veronderstellen dat de relatieve groei een positieve constante is:

$$\dot{p}(t)/p(t) = \lambda .$$

(N.B. Differentiatie naar t , in het bijzonder als t de tijd voorstelt, geeft men vaak aan door een punt in plaats van een accent.)

Dit levert de differentiaalvergelijking

$$\dot{p}(t) = \lambda p(t) ,$$

die volgens bovenstaande methode kan worden opgelost. We vinden

$$p(t) = Ce^{\lambda t} .$$

We zien dat de populatie "exponentieel" toeneemt. Gewoonlijk zal echter tengevolge van overbevolking de relatieve groei afnemen als de populatie toeneemt. Een eenvoudig model daarvoor is

$$\dot{p}(t)/p(t) = a - bp(t) ,$$

waarbij a en b positieve constanten zijn. Dan is

$$\dot{p}(t) = ap(t) - bp^2(t) .$$

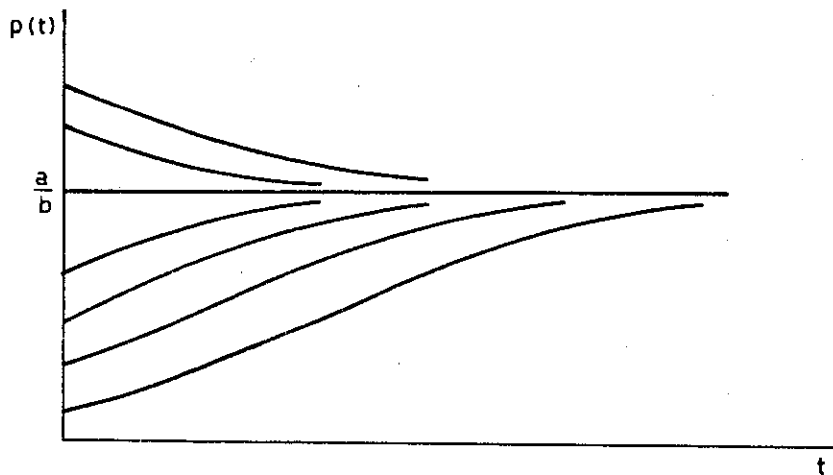
De oplossing van deze differentiaalvergelijking wordt als volgt gevonden:

$$\int \frac{dp}{ap - bp^2} = \int dt ,$$

$$\frac{1}{a} \ln \frac{p}{a - bp} = t + C ,$$

$$p(t) = \frac{a}{b + De^{-at}} ,$$

waarbij $D (= + e^{-aC})$ een willekeurige constante is. De waarde $D = 0$ correspondeert met de constante oplossing $p(t) = a/b$, die we in bovenstaande afleiding hebben verduisterd. In de navolgende figuur zijn een aantal integraalkrommen geschetst.



Merk op dat $\dot{p} < 0$ als $p > a/b$ en $\dot{p} > 0$ als $p < a/b$. We zien dat in de stationaire toestand de populatie gelijk is aan a/b .

- 4) Een kapitaal staat uit tegen een constante rente $p\%$. Het beginkapitaal (op tijdstip $t = 0$) is K_0 . Op het tijdstip t is de kapitaalsgroei evenredig met het kapitaal, i.e.

$$\dot{K} = uK .$$

De oplossing is $K(t) = K_0 e^{\mu t}$. We kunnen μ bepalen uit

$$K(1) - K(0) = K_0 e^{\mu} - K_0 = K_0 \cdot \frac{P}{100} ,$$

dus

$$\mu = \ln(1 + p/100) < p/100 \quad (\text{vgl. p. 82, 4e regel van boven}).$$

- 5) De snelheid van desintegratie van een radioactieve stof is evenredig met de aanwezige hoeveelheid. Als dus $y(t)$ de op het tijdstip t aanwezige hoeveelheid radioactieve stof is, dan geldt

$$-\dot{y} = \lambda y .$$

De oplossing is $y(t) = y(0)e^{-\lambda t}$; λ heet de desintegratieconstante. De halfwaardetijd $T_{\frac{1}{2}}$ berekent men uit $y(T_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}y(0)$, dus $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

3.3. Lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde

We beginnen met de homogene lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde:

$$y'(x) + f(x)y(x) = 0 . \tag{1}$$

Deze vergelijking kunnen we oplossen d.m.v. scheiding van variabelen:

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx ,$$

$$\ln |y| = -\int f(x)dx + C_1 ,$$

waaruit volgt

$$y(x) = C \exp(-\int f(x)dx) . \tag{2}$$

Zij nu $u(x)$ een willekeurige niet-triviale oplossing van (1), dus een functie van de vorm (2). De algemene oplossing van (1) is dan te schrijven als

$$y(x) = Cu(x) , \tag{3}$$

waarbij C een willekeurige constante is.

Beschouw nu de inhomogene vergelijking

$$y' + f(x)y = g(x) . \quad (4)$$

Deze differentiaalvergelijking zullen we oplossen met de methode van variatie van constanten. Vervang daartoe de constante C in (3) door een functie $c(x)$ en zoek een oplossing van (4) van de vorm

$$y(x) = c(x)u(x) . \quad (5)$$

Als we (5) in (4) substitueren en daarbij gebruiken dat $u'(x) + f(x)u(x) = 0$, dan vinden we

$$y' = c'u + cu' = -fcu + g ,$$

dus

$$c'u = g, \quad c' = g/u , \quad (6)$$

waaruit we $c(x)$ kunnen bepalen door integratie.

Merk op dat $u(x) \neq 0$ voor alle waarden van $x \in \text{DOM } f$ (zie (2)). Daarom is het geen beperking te veronderstellen, dat de oplossing $y(x)$ van (4) van de gedaante (5) is. Alle oplossingen van (4) zijn zo te schrijven.

We vinden de algemene oplossing van (4) door voor $c(x)$ de algemene oplossing van (6) te nemen. De algemene oplossing van (6) is van de gedaante

$$c(x) = c_0(x) + C ,$$

zodat de algemene oplossing van (4) wordt gegeven door

$$y(x) = c_0(x)u(x) + Cu(x) . \quad (7)$$

3.3.1. Stelling. De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking (4) is gelijk aan een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking (nl. $c_0(x)u(x)$) plus de algemene oplossing van de homogene vergelijking (1).

Voorbeelden.

$$1) y' - \frac{x+1}{x} y = x - x^2 .$$

De bijbehorende homogene vergelijking

$$y' - \frac{x+1}{x} y = 0$$

heeft als oplossing

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x+1}{x} dx ,$$

$$\ln|y| = x + \ln|x| + C ,$$

$$y = Dxe^x .$$

De oplossing $y = 0$ correspondeert met $D = 0$. We kiezen $u(x) = xe^x$.
Zoek nu een oplossing van de inhomogene vergelijking van de vorm

$$y(x) = c(x)u(x) = c(x)xe^x .$$

Na substitutie in de inhomogene vergelijking vinden we

$$c'(x)xe^x + c(x)(e^x + xe^x) - \frac{x+1}{x} c(x)xe^x = x - x^2 ,$$

waaruit volgt

$$c'(x) = \frac{x-x^2}{xe^x} = (1-x)e^{-x} ,$$

$$c(x) = \int (1-x)e^{-x} dx = xe^{-x} + C .$$

De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking luidt nu

$$y(x) = x^2 + Cxe^x ,$$

waarbij C een willekeurige reële constante is.

- 2) Voor de differentiaalvergelijking $y' + 2xy = x$ uit de opgave van 3.1 vinden we als algemene oplossing

$$y(x) = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2} ,$$

waarbij C een willekeurige constante is.

3.4. Lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

3.4.1. Vergelijkingen van de eerste orde. De vergelijking

$$y' - ay = f \tag{1}$$

waarin a een constante is, laat zich oplossen met de methode uit 3.3. We vinden als algemene oplossing: $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$, waarbij y_p een particuliere oplossing is van (1) en y_h de algemene oplossing van de bijbehorende homogene vergelijking $y' - ay = 0$ is. Er volgt dat $y_h(x) = Ce^{ax}$, waarbij C een willekeurige constante is.

Vaak is het eenvoudiger om een particuliere oplossing y_p te bepalen door "proberen", in plaats van met de methode uit 3.3. Zo kan men in geval $f = b = \text{constant}$, ook voor y een constante functie proberen. Substitutie van $y = \alpha$ in (1) levert $\alpha = -b/a$, dus $y_p = -b/a$ (als $a \neq 0$). Op analoge wijze kan men ook voor andere rechterleden f geschikte functies y_p proberen als particuliere oplossing van (1). Een en ander is samengevat in de volgende tabel.

In deze tabel zijn $p(x)$ en $q(x)$ polynomen; $gr\ p$ duidt de graad van p aan. Als men op deze manier een particuliere oplossing y_p gevonden heeft, luidt de algemene oplossing van (1): $y(x) = y_p + Ce^{ax}$.

$f(x)$	vorm van $y_p(x)$
$p(x), gr(p) = n, a \neq 0$	$q(x), gr(q) = n$
$p(x), gr(p) = n, a = 0$	$xq(x), gr(q) = n$
$b_1 \sin x + b_2 \cos x$	$\beta_1 \sin x + \beta_2 \cos x$
$e^{bx}, b \neq a$	αe^{bx}
e^{ax}	$x e^{ax}$
$p(x)e^{bx}, gr(p) = n, b \neq a$	$q(x)e^{bx}, gr(q) = n$
$p(x)e^{ax}, gr(p) = n$	$xq(x)e^{ax}, gr(q) = n$

3.4.2. Vergelijkingen van hogere orde

Lineaire differentiaalvergelijkingen van hogere orde met constante coëfficiënten hebben de algemene gedaante:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) ,$$

waarbij de coëfficiënten a_1, \dots, a_n niet van x afhangen.

In dit stadium beschikken we niet over voldoende kennis van de algebra om de theorie van het oplossen van deze vergelijkingen afdoende te behandelen. Wij wijzen op de analogie met 3.4.1 en beperken ons thans tot differentiaalvergelijkingen van de orde twee.

Vanwege het feit dat de meeste toepassingen processen beschrijven die in de tijd verlopen, noemen we de onafhankelijk veranderlijke t in plaats van x en gebruiken we de flux notatie.

De vergelijking kan dan geschreven worden als:

$$\ddot{y} + 2a \dot{y} + by = f(t). \quad (1)$$

Vergelijkingen waarin $f(t) \equiv 0$ heten homogeen.

$$\ddot{y} + 2a \dot{y} + by = 0 \quad (2)$$

heet de bij (1) behorende homogene vergelijking.

Er gelden nu de zeer belangrijke eigenschappen (ga dit zelf na):

- a) Als $y_1(t)$ en $y_2(t)$ oplossingen zijn van (1), dan is $y_1(t) - y_2(t)$ een oplossing van (2).
- b) Is $y_1(t)$ een oplossing van (1), dan is elke oplossing van (1) te schrijven als $y_1(t) + y_0(t)$, waarbij $y_0(t)$ een oplossing is van (2).
- c) Zijn $y_1(t)$ en $y_2(t)$ oplossingen van (2), dan is ook $C y_1(t) + D y_2(t)$ een oplossing van (2), waarbij C en D willekeurige constanten zijn.

Op grond van a) en b) zullen we om de algemene oplossing van (1) te vinden, kunnen volstaan met het opsporen van de algemene oplossing van (2) en het zoeken van een (zg. particuliere) oplossing van (1). Ook hier geldt dus de belangrijke stelling 3.3.1.

We hebben intuïtief het idee dat de algemene oplossing van (2) twee niet door elkaar te vervangen constanten moet bevatten. Zonder dit te preciseren zien we m.b.v. c) dat we daarom klaar zijn met het oplossen van (2) als we twee niet in elkaar uit te drukken oplossingen $y_1(t)$ en $y_2(t)$ gevonden hebben.

De vergelijking $\dot{y} + ay = 0$ heeft als oplossing $y(t) = C e^{\lambda t}$, waarbij $\lambda + a = 0$. Dit leidt ons er toe ook in het geval van (2) te proberen oplossingen te vinden die e-machten zijn.

Wil $y = e^{\lambda t}$ een oplossing van (2) zijn, dan moet gelden:

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0. \tag{3}$$

(3) heet de bij (1) behorende karakteristieke vergelijking.

Of deze reële oplossingen heeft wordt bepaald door het teken van de discriminant $\Delta := 4a^2 - 4b$.

Stelling.

(i) Als $a^2 > b$, dan heeft (2) als algemene oplossing

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

waarbij

$$\lambda_1, \lambda_2 = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$$

de wortels van (3) zijn.

(ii) Als $a^2 = b$, dan heeft (2) als algemene oplossing

$$C_1 e^{-at} + C_2 t e^{-at},$$

waarbij $-a$ de enige wortel van (3) is.

(iii) Als $a^2 < b$, dan heeft (2) als algemene oplossing

$$e^{-at} (C_1 \sin \sqrt{b-a^2} t + C_2 \cos \sqrt{b-a^2} t).$$

We kunnen door differentiëren zonder moeite nagaan dat alles wat in de stelling een oplossing genoemd wordt het ook is; we merken op dat er steeds in de aangegeven oplossingen twee verschillende constanten voorkomen. We laten het bewijs dat we inderdaad alle oplossingen van (2) hebben achterwege.

Voor het vinden van een particuliere oplossing van de vergelijking (1), (de inhomogene vergelijking) zijn geen algemene regels te geven. Men krijgt wel enige routine in het proberen van een goede gissing door het oplossen van vraagstukken. Men zie ook de tabel uit 3.4.1, waaruit blijkt dat de vorm van een particuliere oplossing vaak samenhangt met de vorm van het rechterlid van de inhomogene vergelijking.

We beperken ons hier tot enige voorbeelden die van groot belang zijn voor de toepassingen. Het is nl. zo dat vergelijking (1) de beschrijving is van een grote klasse van trillingen in de mechanica en de natuurkunde.

We beschouwen een lichaam met massa m , dat een rechtlijnige beweging uitvoert onder werking van drie krachten:

- a) een elastische kracht, gericht naar een evenwichtstoestand, 0, en evenredig met de uitwijking: $-ey$ ($e > 0$);
- b) een wrijvingskracht, evenredig met de snelheid en tegengesteld gericht: $-w \dot{y}$ ($w > 0$),
- c) een uitwendige kracht: $g(t)$.

Op grond van de tweede wet van Newton (kracht = massa \times versnelling) geldt nu:

$$m \ddot{y} = -w \dot{y} - e y + g(t),$$

$$\ddot{y} + \frac{w}{m} \dot{y} + \frac{e}{m} y = \frac{1}{m} g(t),$$

en dit is vergelijking (1) met $a = \frac{w}{2m}$, $b = \frac{e}{m}$ (dus $a > 0$, $b > 0$) en $f(t) = \frac{1}{m} g(t)$.

Ook het eerder besproken voorbeeld van een slinger (p. 70) wordt in goede benadering beschreven door een vergelijking van type (1), waarbij bovendien wrijving nog mede in rekening gebracht zou kunnen worden.

Is de uitwendige kracht $g(t) \equiv 0$, dan spreken we van een vrije beweging; anders van een gedwongen beweging. Het getal a heet de dempingscoëfficiënt. De beweging heet ongedempt wanneer $a = 0$. De vrije ongedempte beweging is dus de harmonische trilling (zuiver sinusvormige trilling) die we al in 2.6.1 beschreven, want uit

$$\ddot{y} + by = 0 \quad (b > 0)$$

volgt:

$$y = C_1 \sin \sqrt{b} t + C_2 \cos \sqrt{b} t = C \sin(\sqrt{b} t + \varphi).$$

We bekijken enkele gevallen.

1) We beginnen met op te merken dat als (3) een of twee reële wortels heeft, deze negatief zijn (omdat in de fysische betekenis $a > 0$, $b > 0$ is).

De vrije beweging is dan aperiodiek en gaat naar nul omdat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-t} = 0.$$

Neem als voorbeeld

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \sin t.$$

De homogene vergelijking luidt

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0.$$

De karakteristieke vergelijking heeft de vorm $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$;

de wortels zijn

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2.$$

De algemene oplossing van de homogene vergelijking is:

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}.$$

Om een particuliere oplossing te vinden, proberen we α en β zó te bepalen dat $y_1(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t$ aan de inhomogene vergelijking voldoet.

Met

$$\dot{y}_1 = \alpha \cos t - \beta \sin t,$$

$$\ddot{y}_1 = -\alpha \sin t - \beta \cos t,$$

volgt

$$\ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_1 = (-\alpha - 3\beta + 2\alpha) \sin t + (-\beta + 3\alpha + 2\beta) \cos t.$$

Om aan de vergelijking te voldoen moeten α en β dus zodanig worden gekozen dat geldt

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta = 1, \\ 3\alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

Dus $\alpha = \frac{1}{10}$, $\beta = -\frac{3}{10}$.

Als algemene oplossing van ons probleem vinden we

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{10} \sin t - \frac{3}{10} \cos t.$$

Elke functie die aan de differentiaalvergelijking voldoet, is dus te verkrijgen door een speciale keuze van C_1 en C_2 .

Om de oplossing van het probleem eenduidig vast te leggen

moet meer gegeven zijn; bijv. de uitwijking en de snelheid op het tijdstip

$t = 0$: $y(0)$ en $y'(0)$ (we noemen dit de beginvoorwaarden).

Er volgt

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 - \frac{3}{10}, \\ y'(0) = -C_1 - 2C_2 + \frac{1}{10}; \end{cases}$$

hieruit kunnen we C_1 en C_2 oplossen en uitdrukken in $y(0)$ en $y'(0)$.

Is bijv. $y(0) = y'(0) = 0$, dan is $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = -\frac{1}{5}$.

Omdat $\frac{1}{10} \sin t - \frac{3}{10} \cos t = \frac{1}{10} \sqrt{10} \sin(t-\varphi)$, waarbij $\cos \varphi = \frac{1}{10} \sqrt{10}$, $\sin \varphi = +\frac{3}{10} \sqrt{10}$, zien we dat de beweging voor grote t ongeveer periodiek is met dezelfde periode als de uitwendige kracht en een fasevertraging van $\varphi \approx 71^\circ 24'$.

- 2) We bekijken nu een geval waar de karakteristieke vergelijking geen reële wortels heeft. We nemen weer een periodieke sinusvormige uitwendige kracht.

In $\ddot{y} + 2a \dot{y} + by = A \sin \omega t$ is dan $b-a^2 > 0$; stel $p^2 := b-a^2$ met $p > 0$.

De algemene oplossing van de homogene vergelijking is dan (vgl. iii) van p. 11

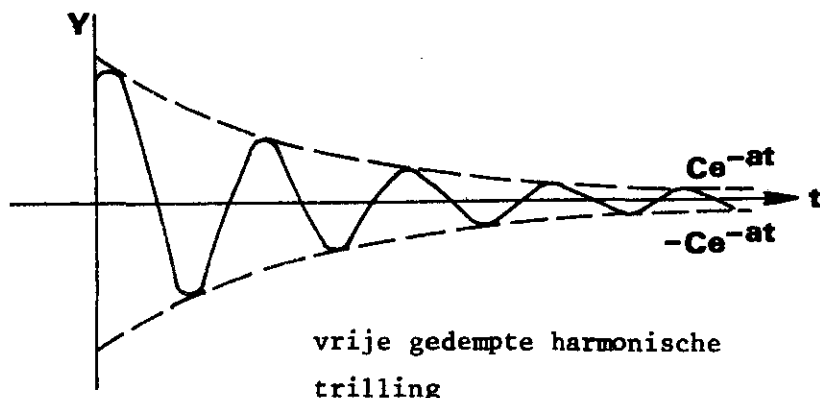
$$y(t) = C_1 e^{-at} \sin pt + C_2 e^{-at} \cos pt$$

en dit kunnen we schrijven als

$$y(t) = C e^{-at} \sin(pt + \varphi),$$

een harmonische trilling met periode $\frac{2\pi}{p}$ waarvan de amplitude $C e^{-at}$ exponentieel afneemt (Immers, we veronderstellen dat $a > 0$).

We schetsen de uitwijking van deze zg. vrije gedempte harmonische trilling.



We nemen aan dat $a \neq 0$ (het vinden van een particuliere oplossing in het geval $a = 0$ (geen demping) en $\omega = p$ wordt behandeld op p. 117, onderaan, en p. 118).

We proberen nu α en β zó te bepalen dat $y_1(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t$ aan de inhomogene vergelijking voldoet; beter nog proberen we B en δ (met $B > 0$ en $-\pi \leq \delta < \pi$) te vinden zó dat $y_1(t) = B \sin(\omega t + \delta)$ aan de differentiaalvergelijking voldoet.

Dan moet gelden

$$\begin{aligned}
 -B\omega^2 \sin(\omega t + \delta) + 2aB\omega \cos(\omega t + \delta) + b B \sin(\omega t + \delta) &= A \sin \omega t, \\
 B(b - \omega^2)(\sin \omega t \cos \delta + \cos \omega t \sin \delta) + 2aB\omega(\cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta) &= \\
 &= A \sin \omega t.
 \end{aligned}$$

De coëfficiënt van $\cos \omega t$ in het linkerlid moet gelijk aan nul zijn, die van $\sin \omega t$ moet gelijk aan A zijn. We vinden

$$\sin \delta = \frac{-2a\omega}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + 4a^2 \omega^2}}, \quad \cos \delta = \frac{b - \omega^2}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + 4a^2 \omega^2}},$$

waaruit δ te berekenen is (merk op dat $\sin \delta < 0$, dus $-\pi < \delta < 0$: de fase blijft achter) en

$$B = \frac{A}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + 4a^2 \omega^2}} \quad (\text{amplitude van de gedwongen beweging}). \quad (4)$$

In de algemene oplossing

$$y(t) = B \sin(\omega t + \delta) + C e^{-at} \sin(pt + \varphi)$$

zijn C en φ willekeurige constanten. Omdat $a > 0$, gaat e^{-at} naar 0 als $t \rightarrow \infty$. Voor grote waarden van t is de oplossing dus ongeveer:

$$y(t) = B \sin(\omega t + \delta),$$

een zuiver sinusvormige trilling met dezelfde frequentie als de uitwendige kracht en een achterstand in fase.

We bekijken de amplitude (4) van de gedwongen beweging.

Deze is afhankelijk van ω . We gaan na voor welke waarden van ω de amplitude maximaal is. Daartoe moet $(b - \omega^2)^2 + 4a^2 \omega^2$ minimaal zijn; dit is het geval voor $\omega^2 = b - 2a^2$. De maximale B is dan:

$$B_{\max} = \frac{A}{2ap}.$$

Als de damping gering is (a klein), kan B_{\max} zeer groot zijn; men spreekt van resonantie tussen uitwendige kracht en het trillende systeem.

Indien de damping afwezig is ($a = 0$) wordt resonantie zeker catastrofaal, omdat de amplitude van de gedwongen beweging dan naar oneindig nadert.

We bekijken dit geval speciaal wanneer $b = \omega^2$. De differentiaalvergelijking heeft dan de vorm

$$\ddot{y} + \omega^2 y = A \sin \omega t. \quad (5)$$

We proberen nu $y_p(t) = Bt \sin(\omega t + \delta)$ en vinden als oplossing:

$$y_p = -\frac{A}{2\omega} t \cos \omega t.$$

De algemene oplossing van (5) is dus

$$y(t) = -\frac{A}{2\omega} t \cos \omega t + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

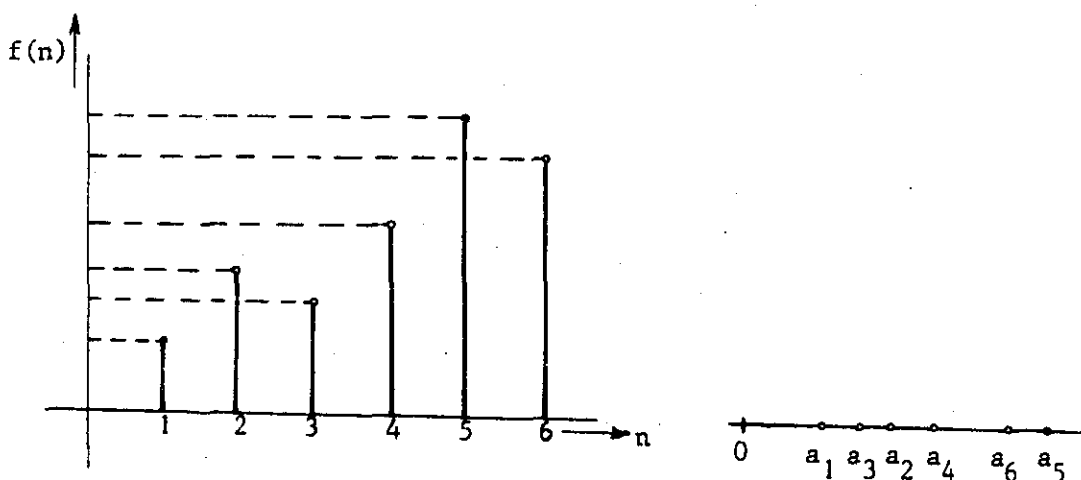
Hoofdstuk 4. Reeksen

4.1. Enkele begrippen

4.1.1. Definitie. Een oneindige rij reële getallen (kortweg: rij) is een afbeelding van \mathbb{N} naar \mathbb{R} .

4.1.2. Laat $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ een rij zijn; stel $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$. We kunnen de afbeelding f dan vastleggen door zijn beelden a_1, a_2, a_3, \dots te geven. Vaak noteren we een rij daarom met a_1, a_2, a_3, \dots ; afkortingen met dezelfde betekenis zijn $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ en (a_n) . De getallen a_i heten de elementen van de rij.

In de praktijk denken we bij een rij in de regel niet direct aan een afbeelding f van \mathbb{N} naar \mathbb{R} , maar aan de beelden ervan, dus aan een genummerde serie punten a_n op de reële getallenrechte.



4.1.3. Voorbeelden. $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$, dus $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$; $a_n = \frac{1}{n}$
 $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$, dus $-1, +1, -1, +1, -1, +1, \dots$; $a_n = (-1)^n$
 $(\frac{1}{n^2})_{n=1}^{\infty}$, dus $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$; $a_n = \frac{1}{n^2}$.

4.1.4. Opgave. Zij (a_n) de rij met

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(-n+1) & \text{voor } n \text{ oneven,} \\ \frac{1}{2}n & \text{voor } n \text{ even.} \end{cases}$$

Geef de verzameling van de elementen van deze rij.

4.1.5. Definitie. We zeggen dat de elementen van een rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ op den duur (afgekort: o.d.d.) een bepaalde eigenschap α hebben, wanneer er een getal $N \in \mathbb{R}$ bestaat, zó, dat voor alle natuurlijke getallen n met $n > N$ geldt, dat a_n de eigenschap α heeft. Gelijkwaardig hiermee is: a_n heeft op den duur eigenschap α indien er slechts eindig veel natuurlijke getallen n zijn, zó, dat a_n de eigenschap α niet heeft.

4.1.6. Voorbeelden.

- 1) $\ln n > 1000$ o.d.d. (namelijk voor $n > e^{1000}$).
- 2) $\frac{1}{n} \in (-\frac{1}{100}, \frac{1}{100})$ o.d.d. (namelijk voor $n > 100$).
- 3) Voor iedere $\delta > 0$ geldt: $\frac{1}{n} \in (-\delta, \delta)$ o.d.d. (namelijk voor $n > \frac{1}{\delta}$).
- 4) Het is niet waar, dat $(-1)^n > 0$ o.d.d.
- 5) Voor iedere $a > 0$ geldt $e^n > n^a$ o.d.d.
- 6) Voor iedere $b > 0$ geldt $\ln n < n^b$ o.d.d.

4.1.7. Definitie. Laat (a_n) een rij en a een reëel getal zijn. De rij (a_n) convergeert naar a (notatie: $a_n \rightarrow a$) wanneer voor iedere $\epsilon > 0$ geldt:

$$a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \text{ o.d.d.}$$

Equivalente formuleringen:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} \forall n > N (a_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon))$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} \forall n > N (|a_n - a| < \epsilon).$$

Slordig gezegd: een rij (a_n) convergeert naar a wanneer voor grote n geldt, dat a_n zeer dicht bij a ligt.

4.1.8. Voorbeelden.

1) De rij (a_n) met $a_n = \frac{10n + 6}{2n + 1}$ convergeert naar $a = 5$.

Werkwijze: We beschouwen de ongelijkheid $|a_n - a| < \epsilon$ en trachten hieruit n op te lossen. Op klad werken we dit als volgt uit:

$$\left| \frac{10n + 6}{2n + 1} - 5 \right| = \left| \frac{1}{2n + 1} \right| = \frac{1}{2n + 1}; \frac{1}{2n + 1} < \epsilon,$$

$$2n + 1 > \frac{1}{\epsilon}, n > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right).$$

Aan de hand van het gevonden resultaat wordt met een schijnbaar slim gekozen getal N begonnen met het

Bewijs. Zij $\epsilon > 0$ willekeurig. Neem hierbij $N = \frac{1}{\epsilon}(\frac{1}{\epsilon} - 1)$. Voor iedere $n > N$ geldt dan $n > \frac{1}{\epsilon}(\frac{1}{\epsilon} - 1)$, dus $2n + 1 > \frac{1}{\epsilon}$, dus $\frac{1}{2n + 1} < \epsilon$, dus $|\frac{1}{2n + 1}| < \epsilon$, dus $|\frac{10n + 6}{2n + 1} - 5| < \epsilon$ zodat $|a_n - a| < \epsilon$ voor $n > N$. \square

2) De rij $(\frac{n^2 + 2 \sin n}{2n^3 + 5n + 1})$ convergeert naar 0.

Werkwijze: Daar het te moeilijk is om de ongelijkheid $|a_n - a| < \epsilon$ op te lossen, gaan we eerst schatten:

$$\left| \frac{n^2 + 2 \sin n}{2n^3 + 5n + 1} \right| < \frac{n^2 + 2}{2n^3 + 5n + 1} < \frac{n^2 + 2}{2n(n^2 + 2)} = \frac{1}{2n},$$

dus $\left| \frac{n^2 + 2 \sin n}{2n^3 + 5n + 1} \right| < \epsilon$ geldt zeker als $\frac{1}{2n} < \epsilon$, dus als $n > \frac{1}{2\epsilon}$.

Het eigenlijke bewijs wordt analoog aan 1) geformuleerd.

4.1.9. Eindig veel getallen a_1, \dots, a_N hebben een som, zeg S_N . Dus

$$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N = \sum_{n=1}^N a_n.$$

Beschouw nu een oneindige rij getallen a_1, a_2, a_3, \dots en vorm de rij van de zgn. partiële sommen:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,$$

$$S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N, \dots$$

De uitdrukking

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad (* \sum_{n=1}^{\infty} a_n)$$

noemen we een (oneindige) reeks; de N^{de} partiële som S_N is dus de som van de eerste N termen uit de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

4.1.10. Definitie: Als $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ bestaat en gelijk is aan S , dan heet de oneindige reeks $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ convergent met som S ; als $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ niet bestaat, dan heet de reeks divergent en dan heeft hij geen som.

Voorbeelden.

1) $1 + r + r^2 + \dots$; $a_n = r^{n-1}$; $S_N = \frac{1 - r^N}{1 - r}$ voor $r \neq 1$. De oneindige meetkundige reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ is convergent als $|r| < 1$ met som $S = \frac{1}{1 - r}$ en is divergent als $|r| \geq 1$.

2) $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$; $a_n = 1$; $S_N = N \rightarrow \infty$ als $N \rightarrow \infty$. De reeks is divergent.
 $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$; $a_n = (-1)^{n-1}$; S_N is afwisselend 0 en 1, heeft dus geen limiet. De beschouwde reeks is divergent.

- 3) Beschouw de oneindige rekenkundige reeks $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$; $a_n = n$;
 $S_N = \frac{1}{2}N(N + 1) \rightarrow \infty$ als $N \rightarrow \infty$. De reeks is divergent.
- 4) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$; $a_n = \frac{1}{n}$, de z.g. harmonische reeks. Deze is divergent omdat $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$, i.h.a. $\sum_{n=2^{k+1}}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$. Dus $S_{2^{k+1}} > \frac{(k+1)}{2}$. Hieruit volgt $S_N \rightarrow \infty$ als $N \rightarrow \infty$.
- 5) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots$; $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; $S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$;
 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 1$. De reeks is dus convergent en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Een van de eerste doeleinden die we nastreven is stellingen te bewijzen die ons in staat stellen tot convergentie of divergentie van een reeks te besluiten op grond van direct te controleren eigenschappen van de termen a_n en met omzeiling van het vaak moeizame uitrekenen van de partiële sommen S_N . Een voorbeeld van zo'n stelling is de volgende.

4.1.11. Stelling: Als de reeks $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ convergent is, dan is $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = 0$.

Bewijs: $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{N-1} = S$,

dus

$$a_N = S_N - S_{N-1} \rightarrow S - S = 0 \quad \text{als} \quad N \rightarrow \infty. \quad \square$$

Opmerking: We kunnen deze stelling alleen gebruiken om van sommige reeksen de divergentie te bewijzen: als nl. a_N niet tot 0 nadert als $N \rightarrow \infty$, dan is de reeks divergent. (Zie voorbeelden 2 en 3.) Het omgekeerde van de stelling ("als $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = 0$, dan is $\sum a_n$ convergent") geldt niet, zoals blijkt uit het voorbeeld van de harmonische reeks (voorbeeld 4).

Zonder bewijs vermelden we nog een aantal eenvoudige resultaten.

Stelling: Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent zijn, dan is ook $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ convergent en voor zijn som geldt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Stelling: Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent is, dan is voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ ook $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)$ convergent en

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Stelling: Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent is, dan is voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ met $\lambda \neq 0$ de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)$ divergent.

We zullen bij het convergentieonderzoek gebruik maken van de volgende plausible (maar op ons niveau van fundering van het begrip "reële getallen" niet te bewijzen) uitspraak over rijen reële getallen.

4.1.13. Stelling: (Van de begrensde monotone rij). Als $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$ en $a_n \leq M$ voor elke n , dan bestaat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{en} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq M .$$

Opmerking: Er geldt een analoge uitspraak voor monotoon niet-stijgende rijen: Als $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ en $a_n \geq M$, dan bestaat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{en} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq M .$$

We bespreken in deze paragraaf nog één voorbeeld (vgl. stelling 4.3.2).

Voorbeeld 6.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots; a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Nu geldt:

$$S_1 > S_3 > S_5 > \dots > 0,$$

$$S_2 < S_4 < S_6 < \dots < 1.$$

Wegens de zojuist vermelde stelling bestaan de limieten

$$S_o := \lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N-1} \quad \text{en} \quad S_e := \lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N}.$$

Omdat $|S_{2N} - S_{2N-1}| = \frac{1}{2N}$, zijn S_o en S_e gelijk en convergeert de reeks.

Noemen we

$$S_o = S_e = S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

dan blijkt bovendien dat $|S - S_N| < \frac{1}{N+1}$. Later (4.4.4, voorbeeld 12) zullen we bewijzen dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

We besluiten deze paragraaf met enige opmerkingen.

Als we in een convergente (divergente) reeks een eindig aantal termen wijzigen, dan is de zo gevormde reeks weer convergent (divergent); hetzelfde geldt voor het toevoegen of weglaten van eindig veel termen. (Opgave: bewijs dit!)

In het voorafgaande hebben we de termen van de reeks a_1, a_2, \dots genoemd. Soms is het handiger (zie 4.4) de nummering van de termen met 0 te beginnen:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

4.2. Reeksen met uitsluitend niet-negatieve termen

We maken eerst een opmerking vooraf. Alle reeksen in deze paragraaf hebben niet-negatieve termen; alle stellingen gelden dan ook alleen voor reeksen met niet-negatieve termen.

4.2.1. Stelling: Een reeks met niet-negatieve termen is convergent dan en slechts dan als de rij van de partiële sommen begrensd is.

Bewijs: De rij van de partiële sommen is monotoon niet dalend, zodat het te bewijzen eendirecte toepassing is van de stelling van de begrensde monotone rij (vgl. p. 123). □

4.2.2. Stelling: (Vergelijkingsstelling)

- 1) Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert en $b_n \leq a_n$ voor alle n , dan is ook $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent.
- 2) Als $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergeert en $d_n \geq c_n$ voor alle n , dan is ook $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergent.

Bewijs:

- 1) Als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, dan zijn de partiële sommen van $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ begrensd door S want voor alle $N \in \mathbb{N}$ geldt

$$b_1 + \dots + b_N \leq a_1 + \dots + a_N \leq S.$$

- 2) Als $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergeert dan betekent dit dat de partiële sommen naar ∞ naderen (c_n is immers ≥ 0).

Omdat $d_1 + \dots + d_N \geq c_1 + \dots + c_N$ geldt dat de partiële sommen van $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ eveneens naar ∞ naderen, dus $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ is divergent. □

Voorbeelden.

- 1) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$ is divergent, omdat $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent is.
- 2) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ is convergent, want $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}$, $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3}$, $\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3 \cdot 4} \dots$
 en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ is convergent (4.1, voorbeeld 5).

Als op den duur $a_n \leq b_n$, dan noemen we $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ een majorant van $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wordt een minorant van $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ genoemd. Aangezien convergentie/divergentie niet beïnvloed wordt door de begintermen van de reeks kunnen we de vergelijkingstelling herformuleren als: "een reeks met een convergente majorant is zelf convergent; een reeks met een divergente minorant is zelf divergent". (Bewijs deze herformulering.)

De beide volgende resultaten zijn belangrijk voor het convergentie onderzoek van reeksen met niet-negatieve termen. In 4.4 zullen ze in een iets andere vorm nogmaals geformuleerd worden.

Stelling: (Convergentiekenmerk van Cauchy). Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ bestaat, dan is $\sum a_n$ convergent als $\ell < 1$ en divergent als $\ell > 1$. (N.B. Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ niet bestaat of gelijk is aan 1, dan kan geen conclusie getrokken worden.)

Bewijs.

- (i) Laat $\ell < 1$, dan is $\ell < \frac{1}{2}(\ell + 1) < 1$. Op den duur (zeg voor $n \geq N$) is dan $\sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{2}(\ell + 1) =: d$, dus $a_n < d^n$. $\sum a_n$ heeft een convergente meetkundige reeks als majorant en is dus convergent.
- (ii) Laat $\ell > 1$, dan is op den duur $\sqrt[n]{a_n} > 1$, dus $a_n > 1$ en het is niet zo dat $a_n \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$: $\sum a_n$ is divergent. □

Stelling: (Convergentiekenmerk van d'Alembert). Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ bestaat, dan is $\sum a_n$ convergent als $\ell < 1$ en divergent als $\ell > 1$ (N.B. Zie Boven).

Bewijs.

- (i) Laat $\ell < 1$, dan is $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ op den duur (zeg voor $n \geq N$) kleiner dan $d := \frac{1}{2}(\ell + 1)$. Dus $a_{N+1} < da_N$, $a_{N+2} < da_{N+1} < d^2 a_N$, ..., $a_{N+k} < d^k a_N$, ...; algemeen geldt voor $n > N$ dat $a_n < d^n \frac{a_N}{d^N}$. $\sum a_n$ heeft een convergente meetkundige reeks als majorant en is dus convergent.
- (ii) Als $\ell > 1$, dan is a_{n+1} op den duur groter dan a_n en dan is het niet zo dat $a_n \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$: $\sum a_n$ is divergent. □

Voor het toepassen van de vergelijkingsstelling zijn twee dingen nodig: allereerst moeten we vooraf een idee hebben of de reeks convergeert dan wel divergeert, omdat we anders niet weten of we naar een majorant of een minorant moeten zoeken. Ten tweede moeten we de beschikking hebben over reeksen waarvan we al weten of ze convergeren of divergeren om ze als vergelijkingsmateriaal te kunnen gebruiken.

Voor het eerste helpt ervaring, voor het tweede de volgende stelling

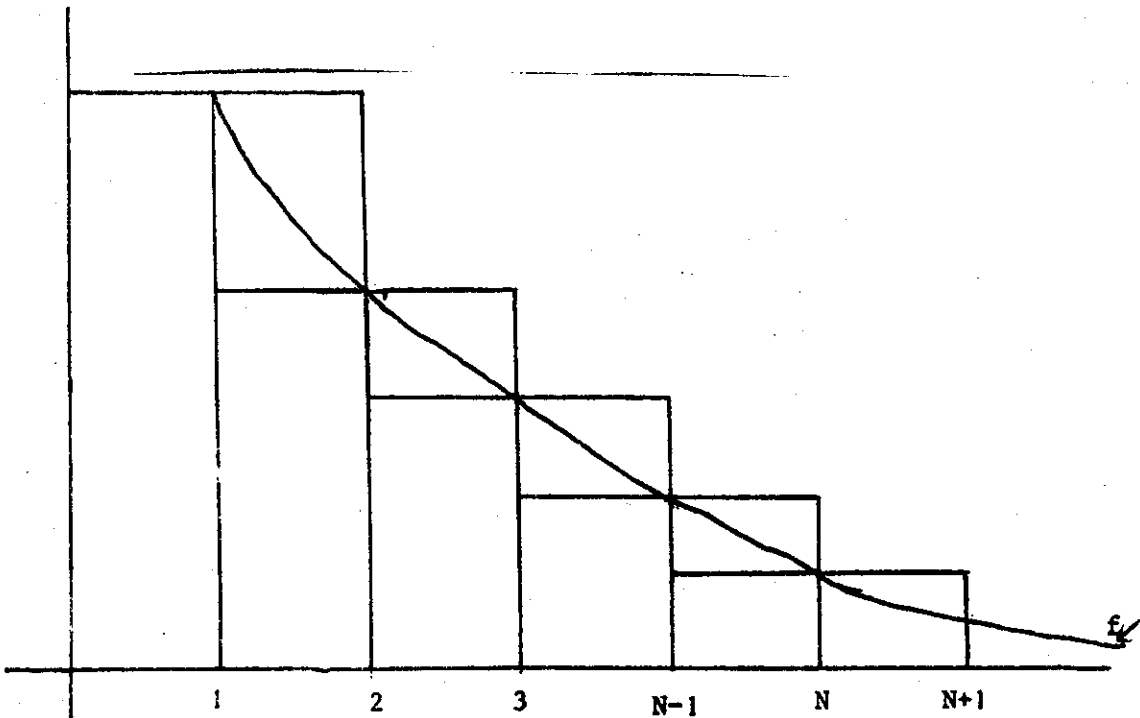
4.2.3. Stelling: (Integraalkenmerk). Laat $f(x)$ een continue, monotoon dalende, niet-negatieve functie zijn op $[1, \infty)$, dan is $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ dan en slechts dan convergent als $\int_1^{\infty} f(x)dx := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N f(x)dx$ bestaat.

Bewijs: (zie figuur). Als we wederom $f(1) + f(2) + \dots + f(N) =: S_N$ noemen en $I_N := \int_1^N f(x)dx$, dan zijn de rijen S_1, S_2, S_3, \dots en I_1, I_2, I_3, \dots beide monotoon niet dalend. De begrenstheid (en dus convergentie) van een van beide heeft de begrenstheid van de andere tot gevolg omdat

$$I_{N+1} \leq S_N \leq f(1) + I_N,$$

d.w.z.

$$\int_1^{N+1} f(x)dx \leq f(1) + f(2) + \dots + f(N) \leq f(1) + \int_1^N f(x)dx .$$



Met behulp van de terminologie uit 2.5.10 kunnen we ook zeggen: $\sum f(n)$ convergeert dan en slechts dan als $\int_1^{\infty} f(x) dx$ bestaat.

Voorbeelden:

3) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ is convergent omdat

$$\int_1^N \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{N} \rightarrow 1 \quad \text{als } N \rightarrow \infty.$$

4) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$ is divergent omdat

$$\int_1^N \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{N} - 1) \rightarrow \infty \quad \text{als } N \rightarrow \infty.$$

5) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ is divergent omdat

$$\int_1^N \frac{dx}{x} = \ln N \rightarrow \infty \quad \text{als } N \rightarrow \infty.$$

4.2.4. Stelling: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ is convergent als $p > 1$ en divergent als $p \leq 1$.

Bewijs: Als $p > 0$, dan is $\frac{1}{x^p}$ een continue, monotoon dalende, niet-negatieve functie op $[1, \infty)$. Voor $p > 0$, $p \neq 1$ is

$$\int_1^N \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} (N^{1-p} - 1) \rightarrow \frac{1}{p-1} \quad \text{voor } p > 1.$$

Dus

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

is convergent voor $p > 1$.

Voor het geval $p = 1$ verwijzen we naar voorbeeld 5. Als $p \leq 0$, dan is het niet zo $\frac{1}{n^p} \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$, dus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ is divergent. □

De reeksen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ worden, naast de meetkundige reeksen, het meest gebruikt in de vergelijkingstelling.

We besluiten deze paragraaf met nog enkele voorbeelden.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2n}$ is convergent. Immers, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} = 1$ (vgl. 2.2.2). Dus op den duur is

$$\sin \frac{1}{2n} < 2 \frac{1}{2n} .$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n}$ is convergent en volgens de vergelijkingstelling is $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2n}$

dus ook convergent.

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ is divergent. Immers, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ dus, op den duur is

$$\sin \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \frac{1}{n} .$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ is divergent en volgens de vergelijkingstelling is $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ dus

ook divergent.

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ is convergent, want $\frac{1}{1+n^2} < \frac{1}{n^2}$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is convergent. We

kunnen deze reeks ook behandelen met het integraalmerk. We moeten dan laten

zien dat $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ bestaat.

Nu is

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} (\arctan N - \arctan 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} .$$

4.3. Reeksen met zowel positieve als negatieve termen

4.3.1. Definitie: Een reeks heet alternerend, indien zijn termen beurtelings positief en negatief zijn.

Een alternerende reeks kan steeds geschreven worden als $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ (als de eerste term positief is) of als $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ (als de eerste term negatief is), waarbij dan $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

4.3.2. Stelling: (kenmerk van Leibniz). Als voor een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ geldt:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is alternerend,

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$,

3) $|b_{n+1}| \leq |b_n|$ o.d.d. ,

dan is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent.

Bewijs. Daar een convergente reeks convergent blijft wanneer we aan het begin van de reeks een aantal termen toevoegen, mogen we in het bewijs aannemen dat $|b_{n+1}| \leq |b_n|$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Omdat convergentie ook behouden blijft wanneer de gehele reeks met -1 vermenigvuldigd wordt, mogen we ons bovendien beperken tot het geval waarin de eerste term positief is. We moeten dus de convergentie aantonen van een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ met $a_n > 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ en $a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Voor de partiële sommen

$$S_N = \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} a_n$$

geldt

$$S_{2N-1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2N-3} - a_{2N-2}) + a_{2N-1} \geq 0,$$

zodat de rij (S_{2N-1}) naar beneden begrensd is. Ook is

$$S_{2N+1} - S_{2N-1} = -a_{2N} + a_{2N+1} \leq 0,$$

zodat de rij (S_{2N-1}) monotoon niet-stijgend is. Uit beide resultaten volgt, dat (S_{2N-1}) convergent is (zie 4.1.13). Stel $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N-1}$. Wegens

$S_{2N} = S_{2N-1} - a_{2N}$ en $\lim_{N \rightarrow \infty} a_{2N} = 0$ is dan ook $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N} = S$, zodat de rij (S_N) convergeert. Dit houdt in, dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ convergeert. \square

4.3.3. Opmerking. Voor het in het bewijs beschouwde geval geldt, dat de rij (S_{2N-1}) monotoon niet-stijgend is met limiet S . Schrijven we $S = S_{2N-1} + R$, dan is dus $R \leq 0$. Ook geldt

$$R = -a_{2N} + (a_{2N+1} - a_{2N+2}) + (a_{2N+3} - a_{2N+4}) \dots \geq -a_{2N},$$

zodat R inligt tussen 0 en $-a_{2N}$.

De rij (S_{2N}) is monotoon niet-dalend (ga na) met limiet S . Schrijven we nu $S = S_{2N} + R$, dan is $R \geq 0$ terwijl tevens

$$R = a_{2N+1} - a_{2N+2} + a_{2N+3} - \dots = a_{2N+1} - (a_{2N+2} - a_{2N+3}) - \dots \leq a_{2N+1}.$$

R ligt dus in tussen 0 en a_{2N+1} .

Voor N zowel oneven als even geldt zodoende $S = S_N + R$, waarbij R tussen 0 en $(-1)^N a_{N+1}$ inligt. Anders gezegd: breekt men een reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, met

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ en $a_{n+1} \leq a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, af na N termen, dan krijgt men een benadering S_N voor de som S met een fout R die tussen 0 en de eerstvolgende term inligt.

4.3.4. Voorbeeld. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ is convergent.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ is convergent; voor zijn som S geldt $S = \sum_{n=1}^9 \frac{(-1)^n}{n^3} + R$ met

$$0 < R < \frac{1}{10^3}.$$

We beschouwen nu het algemene geval van reeksen met zowel positieve als negatieve termen.

4.3.5. Definitie: De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heet absoluut convergent indien $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergent is.

4.3.6. Stelling: Een reeks die absoluut convergent is, is convergent.

Bewijs: Laat $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergent zijn. We moeten bewijzen dat dan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert, d.w.z. dat $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ naar een limiet nadert als $N \rightarrow \infty$.

We definiëren:

$$P_N := \sum_{n=1}^N |a_n| .$$

Dan is P_N monotoon niet dalend en krachtens het gegeven is de rij (P_N) convergent zeg $(P_N) \rightarrow P$. Beschouw

$$Q_N = (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \dots + (a_N + |a_N|) = S_N + P_N .$$

Nu is Q_N monotoon niet dalend, terwijl de rij (Q_N) tevens begrensd is, daar

$$Q_N \leq (|a_1| + |a_1|) + (|a_2| + |a_2|) + \dots + (|a_N| + |a_N|) = 2P_N \leq 2P ;$$

dus $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_N$ bestaat.

Omdat $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N$ bestaat en $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N$ bestaat, bestaat ook

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} (Q_N - P_N) .$$

□

Opmerkingen:

- 1) Het is niet zo dat elke convergente reeks ook absoluut convergeert. Als voorbeeld nemen we $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$, waarvan we in 4.1, voorbeeld 6, aangetoond hebben dat deze convergeert, terwijl $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ divergeert (4.1, voorbeeld 4).

2) Het onderzoek naar absolute convergentie kan geschieden met de hulpmiddelen uit 4.2. Het onderzoek naar convergentie van reeksen met niet uitsluitend positieve termen is in het algemeen zeer lastig. In het geval van een alternerende reeks hebben we stelling 4.3.2 tot onze beschikking. Voor onze doeleinden zal het verder bijna steeds voldoende zijn slechts de absolute convergentie te onderzoeken.

4.4. Machtreeksen

Een oneindige reeks heet een machtreeks in x als hij luidt:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots; \quad (1)$$

hierin zijn a_0, a_1, a_2, \dots reële getallen.

De $(N+1)^e$ term van de machtreeks is $a_N x^N$; de eerste term $a_0 x^0$ lezen we als a_0 . Merk op dat elke partiële som een veelterm is

$$a_0 + a_1x + \dots + a_N x^N.$$

We zullen zien dat machtreeksen als voorstellingen van een grote klasse functies gebruikt kunnen worden. Allereerst onderzoeken we het convergentiegedrag voor verschillende waarden van x .

4.4.1. Stelling: Als de machtreeks convergeert voor $x = \xi$, dan convergeert de machtreeks absoluut voor elke x met $|x| < |\xi|$.

Bewijs: Voor $\xi = 0$ valt er niets te bewijzen. Stel dus $\xi \neq 0$. Daar $\sum a_n \xi^n$ convergeert, is $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \xi^n = 0$. Op den duur is dus $|a_n \xi^n| < 1$. Maar dan is voor voldoende grote n

$$|a_n x^n| = |a_n \xi^n| \cdot \left| \frac{x}{\xi} \right|^n < \left| \frac{x}{\xi} \right|^n.$$

Voor elke x in $(-|\xi|, |\xi|)$ heeft $\sum |a_n x^n|$ dus een convergente meetkundige reeks als majorant; voor zulke x is $\sum |a_n x^n|$ dus convergent. \square

Gevolg: Voor een machtreeks zijn er dus drie mogelijkheden:

- 1) De machtreeks convergeert alleen voor $x = 0$.
- 2) Er is een getal $R > 0$ zó dat de machtreeks absoluut convergeert voor alle $x \in (-R, R)$ en divergeert voor $|x| > R$.
- 3) De machtreeks convergeert voor alle x .

Het getal R in het geval 2) heet de convergentiestraal van de machtreeks; in de gevallen 1) en 3) zeggen we ook wel dat de machtreeks convergentiestraal 0 , resp. ∞ heeft.

Voorbeelden:

1) $1 + x + 2x^2 + (3!)x^3 + (4!)x^4 + \dots$

Deze machtreeks heeft convergentiestraal 0 ; als $x \neq 0$ is $m|x| > 1$ voor voldoende grote m , zodat $(n!)|x|^n \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$.

2) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

Deze machtreeks is een meetkundige reeks met reden x ; $R = 1$, want er is convergentie voor $|x| < 1$ en divergentie voor $|x| > 1$.

3) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Deze reeks convergeert voor elke waarde van x , dus $R = \infty$. Om de absolute convergentie te bewijzen, merken we op dat:

$$\frac{|x|^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{|x|^{n-1}} = \frac{|x|}{n} \rightarrow 0 \quad \text{als } n \rightarrow \infty,$$

zodat de convergentie volgt uit het convergentiekenmerk van d'Alembert (4.2.2).

We merken op dat voor $|x| = R$ ($R > 0$) in het algemeen niets gezegd kan worden. Dit blijkt uit de volgende drie voorbeelden.

4) $1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots$

Deze reeks convergeert absoluut voor $|x| \leq 1$ (dit volgt uit eerdere resultaten) en divergeert voor $|x| > 1$ (als $|x| > 1$ gaat $\frac{|x|^n}{n^2}$ niet naar 0 als $n \rightarrow \infty$, omdat $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{|x|^n} = |x| \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} > 1$ op den duur). We

hebben dus $R = 1$ en de reeks convergeert tevens voor $x = R$ en $x = -R$.

5) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

Meetkundige reeks; deze convergeert voor $|x| < 1$ en divergeert voor $|x| \geq 1$. Dus $R = 1$ en de reeks divergeert voor $x = R$ en $x = -R$.

6) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

Deze reeks convergeert absoluut voor $|x| < 1$ (omdat $\frac{|x|^n}{n} < |x|^n$) en divergeert voor $|x| > 1$. Hier is dus $R = 1$, en we bewezen eerder dat de reeks divergeert voor $x = R$ en convergeert voor $x = -R$.

Opgave. Onderzoek het gedrag van $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$.

De waarde van de convergentiestraal is vaak niet meteen te zien. We bewijzen nu twee stellingen die in wezen herformuleringen zijn van de laatste twee stellingen uit 4.2.2.

We beschouwen daarbij nog steeds de machtreks (1).

4.4.2. Stelling: (Cauchy). Als voor de coëfficiënten a_n uit (1) geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell,$$

dan is de convergentiestraal van (1) gelijk aan $\frac{1}{\ell}$.

Bewijs: Als $|x| < \frac{1}{\ell}$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$ en volgens 4.2, voorbeeld 3, convergeert $\sum |a_n x^n|$. Als $|x| > \frac{1}{\ell}$, dan is op den duur $\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$, dus $a_n x^n$ nadert niet naar 0 en $\sum a_n x^n$ is divergent. \square

Opgave: Ga na dat bovenstaande stelling ook juist is voor $\ell = 0$ en $\ell = \infty$.

4.4.3. Stelling: (d'Alembert). Als voor de coëfficiënten a_n uit (1) geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell,$$

dan is de convergentiestraal van (1) gelijk aan $\frac{1}{\ell}$.

Bewijs: Als $|x| < \frac{1}{\ell}$, dan is $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} < 1$ en volgens het convergentiekenmerk van d'Alembert (4.2.2), convergeert $\sum |a_n x^n|$. Als $|x| > \frac{1}{\ell}$, dan is op den duur $\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} > 1$, zodat $a_n x^n$ niet naar 0 nadert en $\sum a_n x^n$ divergeert. \square

Opmerking: Ook deze stelling heeft zin voor $\ell = 0$ en $\ell = \infty$.

Voorbeelden:

7) $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 3^n) x^n$. Dan is $\sqrt[n]{(2^n + 3^n)} \rightarrow 3$ als $n \rightarrow \infty$. Volgens stelling 4.4.2 van Cauchy geldt dus dat de convergentiestraal gelijk is aan $1/3$.

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} x^n$. Dan is $\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ als $n \rightarrow \infty$. Volgens stelling 4.4.3 van d'Alembert geldt dus dat de convergentiestraal gelijk is aan 1.

Opmerking: We zullen veelvuldig te maken krijgen met machtreeksen die een van (1) verschillende vorm hebben.

Voorbeeld:

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$. We vonden reeds dat deze reeks convergeert voor $|x-2| \leq 1$, dus $1 \leq x \leq 3$, en divergeert voor alle andere waarden van x .

We beschouwen nu een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

voor waarden van x die voldoen aan $|x| < R$.

Voor elke x uit het interval $(-R, R)$ heeft de machtreeks een som; noemen we deze $S(x)$, dan is $S(x)$ dus een functie op $(-R, R)$. Als voorbeeld vermelden we de reeds eerder genoemde meetkundige reeks $1 + x + x^2 + \dots = S(x) = \frac{1}{1-x}$. De nu volgende stelling is van groot belang; we zullen het bewijs ervan evenwel achterwege moeten laten.

4.4.4. Hoofdstelling: Laat $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ convergentiestraal $R > 0$ hebben, dan geldt:

1) $S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ is continu en differentieerbaar op $(-R, R)$.

2) $S'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$ voor $-R < x < R$.

3) $\int_0^x S(t)dt = a_0x + \frac{1}{2} a_1x^2 + \frac{1}{3} a_2x^3 + \dots$ voor $-R < x < R$.

4) De machtreeksen voor $S'(x)$ en $\int_0^x S(t)dt$, die volgens 2) en 3) door termsgewijze differentiatie resp. integratie ontstaan zijn, hebben dezelfde convergentiestraal R als de reeks voor $S(x)$.

5) Als de machtreeks ook convergeert voor $x = R$, dan is $S(x)$ continu op $[0, R]$.

We zullen ons in 4.5 bezighouden met de vraag welke functies als som van een machtreeks kunnen worden voorgesteld.

Voorbeelden:

10) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$ voor $|x| < 1$.

Deze formule ontstaat nl. door termsgewijze differentiatie van

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

11) Als we bovenstaande meetkundige reeks termsgewijze integreren komt er:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x) \quad \text{voor } |x| < 1.$$

12) Eveneens volgt uit $1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}$ dat

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{voor } |x| < 1.$$

(Terzijde: uit bewering 5) van de hoofdstelling volgt dat dit ook nog goed is voor $x = 1$, dus $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, zie 4.1, voorbeeld 6.)

13) $\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.5} + \dots$ heeft convergentiestraal $R = 1$. We proberen de som te bepalen door uit te gaan van:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = -\ln(1-x) \quad \text{voor } |x| < 1.$$

Integreren levert:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \dots &= - \int_0^x \ln(1-t) dt = \\ &= -x \ln(1-x) + x + \ln(1-x). \end{aligned}$$

De te bepalen som is dus voor $x \neq 0$, $|x| < 1$ gelijk aan $-\ln(1-x) + 1 + \frac{\ln(1-x)}{x}$; voor $x = 0$ is de som 0.

14) Bepaal de som van $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{10}}{10} \dots$. Deze reeks is voor $|x| < 1$ te schrijven als

$$\begin{aligned} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \dots - \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^9}{9} \dots = \\ = -\ln(1-x) + \frac{1}{3} \ln(1-x^3). \end{aligned}$$

15) We bespreken nog een belangrijk voorbeeld.

Beschouw:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

De machtreeks heeft convergentiestraal $R = 1$. (Bewijs dit bijvoorbeeld m.b.v. d'Alemberts stelling toegepast op een machtreeks in x^2 .)

Als we termgewijze differentiëren vinden we:

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots = \frac{1}{1+x^2}, \quad |x| < 1,$$

dus

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x, \text{ voor } |x| < 1.$$

Er volgt

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x| < 1.$$

Deze reeks convergeert ook voor $|x| = 1$. (Ga dit na).

Nemen we $x = 1$, dan vinden we de beroemde (maar onpractische) gelijkheid

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \quad (\text{Wallis}).$$

4.5. Taylorreeksen

4.5.1. In 2.8 bespraken we de formule van Taylor. Als $R_N(x,a) \rightarrow 0$ voor $N \rightarrow \infty$, dan kunnen we $f(x)$ schrijven als de som van een convergente machtreeks in $(x-a)$. Deze reeks heet de Taylorreeks. In het speciale geval $a = 0$ spreekt men ook wel over de MacLaurinreeks.

Uit $\sum_0^\infty a_n x^n = \sum_0^\infty b_n x^n$ op een open interval rond $x = 0$ volgt $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, \dots, a_N = b_N, \dots$. Een functie heeft dus ten hoogste één convergente MacLaurinreeks.

De voorbeelden 1 t/m 4 uit 2.8.2 leveren ons nu de volgende machreeksen.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{voor } |x| < 1$$

(zie ook 4.4, voorbeeld 12).

Een andere belangrijke MacLaurinreeks is die van $f(x) = (1+x)^d$, waarbij d een willekeurige constante is.

Als d een natuurlijk getal is, is $R_N(x,0) = 0$ voor $N \geq d$. De MacLaurinreeks breekt dan af.

Laat d nu niet een natuurlijk getal zijn. We berekenen:

$$f'(x) = d(1+x)^{d-1}, \quad f'(0) = d,$$

$$f''(x) = d(d-1)(1+x)^{d-2}, \quad f''(0) = d(d-1),$$

$$f'''(x) = d(d-1)(d-2)(1+x)^{d-3}, \quad f'''(0) = d(d-1)(d-2),$$

$$f^{(4)}(x) = d(d-1)(d-2)(d-3)(1+x)^{d-4}, \quad f^{(4)}(0) = d(d-1)(d-2)(d-3).$$

Men kan bewijzen dat voor $|x| < 1$ de restterm naar nul nadert als $N \rightarrow \infty$.

Voor $|x| < 1$ hebben we dus de MacLaurinreeks:

$$(1+x)^d = 1 + \frac{d}{1!} x + \frac{d(d-1)}{2!} x^2 + \frac{d(d-1)(d-2)}{3!} x^3 + \\ + \frac{d(d-1)(d-2)(d-3)}{4!} x^4 + \dots$$

Vanwege het grote belang is het nuttig de belangrijkste reeksontwikkelingen van buiten te kennen. Dit zijn de reeksen voor e^x , $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^d$, $\ln(1+x)$ en $\arctan x$. Van deze hebben de reeksen van e^x , $\sin x$ en $\cos x$ convergentiestraal ∞ ; die van $(1+x)^d$, $\ln(1+x)$ en $\arctan x$ hebben convergentiestraal 1.

Bij het opstellen van reeksontwikkelingen maakt men vaak met profijt gebruik van het feit dat men machtreeksen als veeltermen kan vermenigvuldigen. We geven dit resultaat zonder bewijs.

Stelling:

Zij $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$

en

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots,$$

dan is

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \\ + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \dots + \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n + \dots$$

Voorbeelden:

1) $\frac{e^x}{1+x} = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \dots$

Deze ontwikkeling geldt voor $|x| < 1$.

2) De ontwikkeling van $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in de vorm van een machtreeks krijgen we door in de Mac-

Laurinreeks voor $(1+x)^d$ te nemen $d = -\frac{1}{2}$ en x door $-x^2$ te vervangen. Dit levert

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + (-\frac{1}{2})(-x^2) + (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\frac{1}{2!}(-x^2)^2 + \\ + (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\frac{1}{3!}(-x^2)^3 + (-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})\frac{1}{4!}(-x^2)^4 + \dots \\ = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8 + \dots \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Een toepassing van de hoofdstelling 4.4.4 geeft (ga dit na):

$$\arcsin x = \int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

3) In eerste benadering geldt in de buurt van $x = 0$: $(1 + x)^d \approx 1 + dx$, dus
bijv. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$. We hebben

4) Ontwikkel $\frac{1}{4+x^2}$. We hebben

$$\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{-1} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{64} + \dots\right);$$

deze ontwikkeling is geldig voor $|x| < 2$.

5) Voor $x > 1$ geldt:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^3} + \frac{3}{8} \frac{1}{x^5} + \frac{5}{16} \frac{1}{x^7} + \dots$$

Dit is een machtreeks in $\frac{1}{x}$. Voor $x < -1$ geldt

$$(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} - \frac{3}{8x^5} - \frac{5}{16x^7} - \dots$$

6) Als gevraagd wordt de Taylorreeks van e^x rond $x = \ln 2$ staan ons twee
wegen open.

(i) $e^x = e^{\ln 2} e^{x - \ln 2} = 2e^t$ met $t = x - \ln 2$, zodat uit

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots$$

volgt

$$e^x = 2 \left\{ 1 + (x - \ln 2) + \frac{(x - \ln 2)^2}{2!} + \frac{(x - \ln 2)^3}{3!} + \dots \right\}.$$

(ii) Uit de formule van Taylor volgt, daar

$$\left. \frac{d^n}{dx^n} e^x \right|_{x=\ln 2} = e^{\ln 2} = 2,$$

dat

$$e^x = 2 + 2(x - \ln 2) + 2 \frac{(x - \ln 2)^2}{2!} + 2 \frac{(x - \ln 2)^3}{3!} + \dots$$

7) Ontwikkel $\sin x$ rond $x = \frac{\pi}{4}$.

(i) $f(x) = \sin x$; $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$;
 $f^{(4)}(x) = \sin x$. Er volgt

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}; f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}; f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}; f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}; f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Dit levert

$$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \left(1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{4!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + \dots \right).$$

(ii) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}$.

Met $t := x - \frac{\pi}{4}$ krijgen we

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sin t + \cos t) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots + 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(1 + t - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right).$$

8) Het loont vaak een eenvoudige uitdrukking van de te ontwikkelen functie te zoeken.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} \cos x \sin x &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) = \\ &= x - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{5!}\right)x^5 - \dots \end{aligned}$$

Veel eenvoudiger is het echter op te merken dat

$$\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \left\{ 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \dots \right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4.5.2. Toepassing van reeksontwikkelingen bij het bepalen van limieten

In deze en de volgende sectie gaan we nader in op de behandeling van een tweetal limieten die we reeds in 2.2.2 vermeld hebben.

We behandelen eerst een tweetal voorbeelden:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7}{e^x} = 0$, want voor positieve x is

$$0 < \frac{x^7}{e^x} = \frac{x^7}{1 + x + \dots + \frac{x^8}{8!} + \dots} < \frac{x^7}{\frac{x^8}{8!}} = \frac{8!}{x} \rightarrow 0 \quad \text{als } x \rightarrow \infty.$$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, want voor $x > 1$ is

$$0 < \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{e^{\frac{1}{2} \ln x}} = \frac{\ln x}{1 + \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{8} \ln^2 x + \dots} < \frac{8}{\ln x} \rightarrow 0 \quad \text{als } x \rightarrow \infty.$$

In beide gevallen passen we verder de insluitstelling toe.

4.5.3. Stelling:

i) Voor elk reëel getal p geldt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0.$$

ii) Voor elk reëel getal $\alpha > 0$ geldt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

Bewijs:

i) Als $p \leq 0$ is de bewering triviaal. Zij daarom $p > 0$. Laat q een natuurlijk getal zijn dat groter is dan p , dan is voor $x > 0$

$$e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^q}{q!} + \dots > \frac{x^q}{q!}.$$

Nu volgt

$$0 < \frac{x^p}{e^x} < \frac{x^p}{\frac{x^q}{q!}} = \frac{q!}{x^{q-p}} \rightarrow 0 \quad \text{als } x \rightarrow \infty, \text{ omdat } q - p > 0 \text{ is.}$$

Het eerste deel van de stelling volgt nu uit de insluitstelling.

ii) In analogie met voorbeeld 2 brengen we bewering ii) terug tot i) volgens

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^{\alpha \ln x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\alpha e^t} = 0$$

als $t = \alpha \ln x$; merk op dat $t \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow \infty$ omdat $\alpha > 0$. □

We behandelen nog een aantal voorbeelden:

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1.$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln t}{t} = 0 \quad \text{als } t = \frac{1}{x}.$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots) = 1.$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x}{2!} + \dots) = 1.$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 - \sin(x^3))^4}{(1 - \cos(x^2))^9} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^3 - x^3 + \frac{x^9}{3!} - \frac{x^{15}}{5!} + \dots]^4}{[1 - 1 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^8}{4!} + \dots]^9} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\frac{1}{3!} - \frac{x^6}{5!} + \dots]^4}{[\frac{1}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots]^9} = \frac{(\frac{1}{6})^4}{(\frac{1}{2})^9} = \frac{2^5}{3^4}.$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^2}{2} + \dots}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \dots}{x}.$$

Conclusie: deze limiet bestaat niet.

Opmerking. Vergelijk deze paragraaf 4.5 met 2.8, pp. 79-82.

4.6. Numerieke sommatie

4.6.1. De som S van een convergente reeks $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is niet altijd in gesloten vorm te berekenen. Evenwel, elke partiële som $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$ is te gebruiken als numerieke benadering voor S . Bij deze benadering maken we een fout, de zg. afbreekfout E , bepaald door $S = S_N + E$. Merk op, dat $E = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$. Aan de hand van voorbeelden introduceren we vier methoden om grenzen voor de afbreekfout te geven:

- a) Maak gebruik van een expliciete formule voor E . In het geval van een Taylorreeks bijv. kan de formule voor de restterm (zie 2.8.2) als zodanig gebruikt worden.
- b) Vergroot de termen van de reeks $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ zodanig dat er een meetkundige reeks ontstaat.
- c) Vergelijk $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ met een integraal.
- d) In het geval van een alternerende reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ en $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, geldt: E ligt in tussen 0 en de eerstvolgende term, dus tussen 0 en $(-1)^N a_{N+1}$ (zie 4.3.3).

4.6.2. Voorbeelden.

1) We berekenen e door de reeks $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ af te breken na de term $\frac{1}{6!}$. We krijgen met behulp van 2.8.2, voorbeeld 1)

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{e^\theta}{5040} \quad \text{met } 0 < \theta < 1.$$

Daar $e^\theta < e < 3$ is dus

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$$

met een afbreekfout E waarvoor geldt

$$0 < E < \frac{3}{5040} < 0,0006.$$

2) Bereken $\ln 0,9$.

Met behulp van de reeksontwikkeling voor $\ln(1 + x)$ (zie 4.4.4) volgt

$$\ln \frac{9}{10} = \ln(1 - \frac{1}{10}) = - \left[\frac{1}{10} + \frac{1}{2 \cdot 10^2} + \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{4 \cdot 10^4} + \dots \right].$$

Breek de reeks af na de tweede term dan vinden we als benadering:

$\ln 0,9 \approx -\frac{1}{10} - \frac{1}{200}$ met afbreekfout E te schatten volgens

$$|E| = \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{4 \cdot 10^4} + \dots < \frac{1}{3} \left[\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \dots \right] = \frac{1}{2700}.$$

- 3) Bereken een benadering voor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Breek de reeks af na N termen dan geldt voor de afbreekfout (vergelijk 4.2.3)

$$E = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \int_N^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{N^2}.$$

Neem bijvoorbeeld $N = 5$, dan volgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125}$$

met een afbreekfout E waarvoor geldt: $0 < E < 0,02$.

- 4) Uit de reeksontwikkeling voor $\arctan x$ (zie 4.4.4) volgt

$$\arctan \frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{5 \cdot 10^5} - \frac{1}{7 \cdot 10^7} + \dots$$

Bij afbreken na de derde term is $-\frac{1}{7} \cdot 10^{-7} \leq E \leq 0$ op grond van 4.3.3.

4.6.3. Doorgaans wordt de benadering S_N voor S in decimale vorm berekend, door iedere term uit S_N af te ronden op een bepaald aantal decimalen en vervolgens op te tellen. Bij afronden van iedere term op k decimalen maken we per term een afrondingsfout die hoogstens $\frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$ is in absolute waarde. Bij N termen krijgen we zodoende een som B van N afrondingsfouten, waarvoor geldt $|B| \leq N \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$. Teneinde B klein te houden, gebruikt men (vooral bij grote N) wat meer decimalen dan het aantal waarin we het eindantwoord wensen op te geven. De verkregen som van de afgeronde termen wordt daarom uiteindelijk nog eens afgerond op zeg p decimalen ($p < k$) waarbij nog een afrondingsfout A met $|A| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-p}$ gemaakt wordt. De totale afrondingsfout is in absolute waarde hoogstens

$$|A| + |B| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-p} + N \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}.$$

De totale fout T in het eindantwoord bestaat uit de afbreekfout E en de totale afrondingsfout; dit geeft

$$|T| \leq |E| + |A| + |B|.$$

4.6.4. In 4.6.2, voorbeeld 1, geeft afronden van de termen op 4 decimalen en afronden van het eindantwoord op 3 decimalen het volgende beeld:

$$e \approx 1,0000 + 1,0000 + 0,5000 + 0,1667 + 0,0417 + 0,0083 + 0,0014 \\ = 2,7181 \approx 2,718$$

met hierin een totale fout T waarvoor geldt

$$|T| \leq |E| + |A| + |B| \leq \\ \leq 0,0006 + 0,0005 + 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,0001 < 0,0015 .$$

Ga na, dat het laten staan van het eindantwoord in 4 decimalen niet zinvol is. Ga ook na dat berekenen van de afzonderlijke termen in 3 decimalen een grotere totale fout zou opleveren.

4.6.5. Afspraak. Zij S de som van een convergente reeks. De berekening van S met een fout van ten hoogste α zal als volgt worden uitgevoerd:

- 1) Breek de reeks af na een voldoende aantal termen; hierbij krijgen we een afbreekfout E.
- 2) Bereken van iedere term uit het overgehouden beginstuk de decimale vorm en rond af tot op k decimalen. Hierbij krijgen we een som van afrondingsfouten B. Neem k voldoende groot.
- 3) Rond de verkregen uitkomst voor de som van het beginstuk van de reeks af op een geschikt aantal decimalen. Hierbij ontstaat een afrondingsfout A.
- 4) Zorg ervoor, dat $|E| + |A| + |B| < \alpha$.

4.6.6. Voorbeelden.

- 1) Bereken een benadering voor $\sin \frac{1}{10}$ door de reeksontwikkeling voor $\sin \frac{1}{10}$ na twee termen af te breken. We vinden

$$\sin \frac{1}{10} \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{3! \cdot 10^3} ,$$

met een afbreekfout E waarvoor $0 < E < \frac{1}{5! \cdot 10^5} < 10^{-7}$. Het is dus redelijk het eindantwoord in 7 decimalen op te geven. Om de fout B niet nodeloos groot te maken, berekenen we de afzonderlijke termen in 8 decimalen (waren er bijvoorbeeld 20 termen geweest, dan hadden we 9 decimalen kunnen nemen). Dit geeft

$$\sin \frac{1}{10} \approx 0,10000000 - 0,00016667 = 0,09983333 \approx 0,0998333$$

met $|A| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-7}$ en $|B| \leq 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-8} = 10^{-8}$. Voor de totale fout T geldt nu: $|T| < 1,6 \cdot 10^{-7}$. Dus: $\sin \frac{1}{10} \approx 0,0998333$ met een fout van ten hoogste $1,6 \cdot 10^{-7}$.

- 2) Ga uit van de betrekking $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (vgl. 0.6.4). Met behulp van de reeksontwikkeling voor $\arctan x$ (zie 4.4.4) volgt

$$\frac{1}{4} \pi = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right) + \frac{1}{5} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^5\right) - \frac{1}{7} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{3}\right)^7\right) + \dots$$

Breek de reeks af na de derde term, dan vinden we als benadering voor π :

$$\pi \approx 2 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

met een afbreekfout die in absolute waarde kleiner is als

$$\frac{4}{7} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{3}\right)^7\right) = 0,0047 \dots < 5 \cdot 10^{-3}.$$

Schrijven we

$$\begin{aligned} \pi &\approx 2,0000 + 1,3333 - 0,1667 - 0,0494 + 0,0250 + 0,0033 = \\ &= 3,1455 \approx 3,146, \end{aligned}$$

dan vinden we afrondingsfouten A en B met $|A| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$ en $|B| \leq 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} = 0,3 \cdot 10^{-3}$. Het resultaat wordt $\pi \approx 3,146$ met een fout hoogstens $6 \cdot 10^{-3}$.

4.6.7. Voor de praktische berekening van logaritmen is de reeksontwikkeling van $\ln(1+x)$ (zie 4.4.4) niet erg geschikt, omdat de reeks alleen snel convergeert voor kleine waarden van $|x|$.

Door aftrekken van de reeksen

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots,$$

volgt

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right],$$

geldig voor $|x| < 1$. Stel hierin $x = \frac{1}{2y+1}$, dan vinden we

$$\ln\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 2\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \dots\right],$$

geldig voor $y > 0$. De laatste reeksontwikkeling is zeer geschikt om logaritmen te berekenen.

4.6.8. Voorbeeld. Met de hierboven afgeleide reeksontwikkeling volgt met $y = 1$

$$\ln 2 \approx 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5}\right]$$

met een afbrekfout E die te schatten is volgens

$$0 < E = 2\left[\frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \dots\right] < \frac{2}{7}\left[\frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^9} + \dots\right] = \frac{1}{4 \cdot 3^5 \cdot 7} < 1,5 \cdot 10^{-4}.$$

Nu is

$$\ln 2 \approx 0,66667 + 0,02469 + 0,00165 \approx 0,6930$$

met een totale fout van ten hoogste

$$1,5 \cdot 10^{-4} + 0,5 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} < 2,2 \cdot 10^{-4}.$$

4.7. Fourierreeksen

Een Taylorreeks rond $x = a$ heeft het nadeel dat de convergentie langzamer wordt naarmate x verder van a verwijderd is. Soms is het nodig een functie over een heel interval redelijk goed te benaderen met iets handelbaars. Een methode om dat te bereiken is gebruik te maken van Fourierreeksen, waarmee we hier heel vluchtig kennis zullen maken.

We beschouwen een functie f waarvoor $(-\pi, \pi] \subset \text{DOM } f$; (andere intervallen kunnen we door een substitutie van de vorm $y = ax + b$ overvoeren in $(-\pi, \pi]$, $[-\pi, \pi]$ of $(-\pi, \pi)$; de waarde in een enkel punt is voor ons nu van geen belang).

We proberen f op het interval $(-\pi, \pi]$ te schrijven als de som van een zg. trigonometrische reeks:

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots = \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \end{aligned}$$

We gaan aan alle vragen van theoretische aard voorbij. We zullen slechts aangeven hoe de coëfficiënten α , a_i , b_i bepaald kunnen worden.

Als we aannemen dat integratie en sommatie verwisseld mogen worden, dan vinden we

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx) = 2\pi\alpha.$$

Dus

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx .$$

Als we gebruik maken van de formules:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2 dx = \pi \quad (n \geq 1) ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 dx = \pi \quad (n \geq 1) ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0 \quad (n \geq 1, m \geq 1, m \neq n) ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad (n \geq 1, m \geq 1, m \neq n) ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0 \quad (n \geq 1, m \geq 1) ,$$

(die direct volgen uit:

$$(\cos nx)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2nx)$$

$$(\sin nx)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)$$

$$\begin{aligned}\cos nx \cos mx &= \frac{1}{2}(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x) \\ \sin nx \sin mx &= \frac{1}{2}(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) \\ \cos nx \sin mx &= \frac{1}{2}(\sin(n+m)x - \sin(n-m)x),\end{aligned}$$

dan vinden we

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \\ &= \alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx) \\ &= \pi a_k.\end{aligned}$$

Dus

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx.$$

Evenzo volgt

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Deze a_k, b_k ($k = 1, \dots$) alsmede $a_0 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\alpha$ heten de Fourier-coëfficiënten van f .

De Fourierreeks van f wordt nu als volgt gedefinieerd:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

We vermelden dat voor een groot aantal functies de zo gevonden Fourierreeks inderdaad convergeert en dat de som voor $x \in (-\pi, \pi)$ gelijk is aan $f(x)$. Als $\lim_{x \rightarrow -\pi} f(x) = f(\pi)$, dan is de som voor $x = \pi$ tevens gelijk aan $f(\pi)$.

Voorbeelden:

1) $f(x) = x, \quad -\pi < x \leq \pi.$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

(Voor een oneven functie zijn alle a's gelijk aan nul!)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{-2}{\pi n} \int_0^{\pi} x d(\cos nx) = \\ &= \frac{-2}{\pi n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \\ &= \frac{-2}{n} (-1)^n. \end{aligned}$$

Er geldt

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi).$$

Als we voor $x = \frac{\pi}{2}$ nemen, vinden we:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

(Vergelijk dit met 4.4.4, voorbeeld 15.)

2) $f(x) = x^2$ voor $|x| \leq \pi.$

Nu is:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

(Voor een even functie zijn alle b's gelijk aan nul!)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2.$$

Voor $n \geq 1$ is

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \\ &= \frac{4}{\pi n} \left[\frac{x \cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{4}{n^2} (-1)^n . \end{aligned}$$

Er geldt nu

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} , \quad -\pi \leq x \leq \pi .$$

Voor $x = \pi$, resp. $x = 0$, komt er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} .$$

Hoofdstuk 5. Differentiaalrekening van vectorfuncties en van functies van meer dan één veranderlijke

5.1. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, omgevingen; limieten

We zullen in deze paragraaf het limietbegrip dat we in het V.W.O. in \mathbb{R} hebben leren kennen uitbreiden tot:

$$\mathbb{R}^2 := \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

en

$$\mathbb{R}^3 := \{(x,y,z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}.$$

Het getallenpaar (x,y) , resp. getallentripel (x,y,z) , wordt opgevat als de kentallen van een vector. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ zijn dan vectorruimten. In deze ruimten kiezen we voorlopig als vaste bases,

$$\mathbb{R}^2 : \underline{e}_1 = (1,0), \underline{e}_2 = (0,1)$$

$$\mathbb{R}^3 : \underline{e}_1 = (1,0,0), \underline{e}_2 = (0,1,0), \underline{e}_3 = (0,0,1).$$

De kentallen van de vectoren stemmen dan overeen met de componenten t.o.v. de orthogonale bases $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} \subset \mathbb{R}^2, \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \subset \mathbb{R}^3$.

In \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 is een afstand gedefinieerd die met de stelling van Pythagoras eenvoudig berekend kan worden:

is $\underline{a} = (a_1, a_2), \underline{b} = (b_1, b_2)$, dan is de afstand van \underline{a} tot \underline{b} in \mathbb{R}^2 :

$$d(\underline{a}, \underline{b}) := \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2};$$

is $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3), \underline{d} = (d_1, d_2, d_3)$, dan is de afstand van \underline{c} tot \underline{d} in \mathbb{R}^3 :

$$d(\underline{c}, \underline{d}) := \sqrt{(c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2 + (c_3 - d_3)^2}.$$

Merk op dat deze afstand voldoet aan de zg. driehoeksongelijkheid:

$$d(\underline{a}, \underline{b}) \leq d(\underline{a}, \underline{c}) + d(\underline{c}, \underline{b}).$$

$d(\underline{a}, \underline{0}) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ noteren we als $|\underline{a}|$, de lengte van \underline{a} .

Dan is $d(\underline{a}, \underline{b}) = |\underline{a} - \underline{b}|$.

Open verzamelingen in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3

Definitie. Zij $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ (of $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$) en $\delta > 0$, dan heet

$$B(\underline{a}, \delta) := \{ \underline{x} \mid d(\underline{a}, \underline{x}) < \delta \}$$

de open bol (schijf, bal) met middelpunt \underline{a} en straal δ .

Het begrip open bol is een analogon in \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 van het begrip open interval uit \mathbb{R} .

In \mathbb{R} is het gebruikelijk een verzameling V open te noemen, indien er bij elke $a \in V$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat $(a - \delta, a + \delta) \subset V$. We gaan nu analoog te werk.

5.1.1. Definitie. Een verzameling $V \subset \mathbb{R}^2$ (of $V \subset \mathbb{R}^3$) heet open indien bij elke $\underline{a} \in V$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat $B(\underline{a}, \delta) \subset V$.

Gelijkwaardige formulering: V is open als V een vereniging is van open ballen.

5.1.2. Definitie. Is V open en $\underline{a} \in V$, dan heet V een omgeving van \underline{a} .

Stelling. Een open bol is een open verzameling.

Bewijs. Zij $\underline{b} \in B(\underline{a}, \delta)$, dan is $d(\underline{a}, \underline{b}) < \delta$. Nu is: $\delta_1 := \delta - d(\underline{a}, \underline{b}) > 0$. We zullen laten zien dat $B(\underline{b}, \delta_1) \subset B(\underline{a}, \delta)$. Is $\underline{c} \in B(\underline{b}, \delta_1)$ dan is $d(\underline{b}, \underline{c}) < \delta_1$ en derhalve $d(\underline{a}, \underline{c}) \leq d(\underline{a}, \underline{b}) + d(\underline{b}, \underline{c}) < d(\underline{a}, \underline{b}) + \delta_1 = \delta$, dus $\underline{c} \in B(\underline{a}, \delta)$. \square

(Opmerking. Dankzij deze stelling zijn we niet in terminologische moeilijkheden, hoewel we het woord open op verschillende wijzen geïntroduceerd hebben.)

Voorbeelden van open verzamelingen:

$$\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4 \} ,$$

$$\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \} ,$$

$$V(\underline{a}, \delta) := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - a_1| < \delta, |x_2 - a_2| < \delta \} , \underline{a} \in \mathbb{R}^2, \delta > 0 ,$$

$$V(\underline{a}, \delta) := \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1 - a_1| < \delta, |x_2 - a_2| < \delta, |x_3 - a_3| < \delta \} , \underline{a} \in \mathbb{R}^3, \delta > 0$$

Bevat een verzameling W een omgeving \mathcal{O} van \underline{a} , ($\underline{a} \in \mathcal{O} \subset W$), dan heet \underline{a} een inwendig punt van W .

5.1.3. Stelling:

- 1) \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 en \emptyset zijn open.
- 2) De doorsnede van twee open verzamelingen is open.
- 3) Is $\underline{a} \neq \underline{b}$, dan zijn er open verzamelingen U en V met $\underline{a} \in U$, $\underline{b} \in V$,
 $U \cap V = \emptyset$.
- 4) W is dan en slechts dan open als bij elke $\underline{a} \in W$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat $V(\underline{a}, \delta) \subset W$.

Bewijs. De bewijzen zijn niet moeilijk; we volstaan met enkele opmerkingen.

- 2) Als $\underline{a} \in V \cap W$ en $B(\underline{a}, \delta_1) \subset V$, $B(\underline{a}, \delta_2) \subset W$, dan is $B(\underline{a}, \min\{\delta_1, \delta_2\}) \subset V \cap W$.
- 3) Als $\underline{a} \neq \underline{b}$, dan is $B(\underline{a}, \frac{1}{2}d(\underline{a}, \underline{b})) \cap B(\underline{b}, \frac{1}{2}d(\underline{a}, \underline{b})) = \emptyset$.
- 4) $B(\underline{a}, \delta) \subset V(\underline{a}, \delta) \subset B(\underline{a}, \delta\sqrt{k})$ ($\underline{a} \in \mathbb{R}^k$, $k = 2, 3$, $\delta > 0$). □

5.1.4. Definitie: Een verzameling $W \subset \mathbb{R}^2$ of $W \subset \mathbb{R}^3$ heet gesloten indien $\mathbb{R}^2 \setminus W$ resp. $\mathbb{R}^3 \setminus W$ open is.

Voorbeelden: \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , \emptyset , $\{\underline{x} \mid d(\underline{a}, \underline{x}) \leq \delta\}$ zijn gesloten.

Definitie: Een verzameling U heet begrensd indien er een $M > 0$ bestaat zó dat $U \subset B(\underline{0}, M)$.

Voorbeelden: $B(\underline{a}, \delta)$, $V(\underline{a}, \delta)$ zijn begrensd.

Rijen punten in \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3

5.1.5. Definitie: $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n = \underline{a}$ in \mathbb{R}^2 (of \mathbb{R}^3) betekent dat voor elke omgeving U van \underline{a} er een natuurlijk getal N bestaat met de eigenschap dat $\underline{a}_n \in U$ voor elke $n > N$ (\underline{a}_n ligt o.d.d. in U ; vgl. 4.1.5).

Zij $\underline{a}_n = (a_{n1}, a_{n2})$, $\underline{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ of $\underline{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3})$, $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.

5.1.6. Stelling. De volgende beweringen zijn gelijkwaardig:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n = \underline{a}$.

2) Voor elke $\epsilon > 0$ geldt $\underline{a}_n \in B(\underline{a}, \epsilon)$ o.d.d.

3) Voor elke $\epsilon > 0$ geldt $\underline{a}_n \in V(\underline{a}, \epsilon)$ o.d.d.

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{a}_n - \underline{a}) = \underline{0}$.

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\underline{a}_n, \underline{a}) = 0$.

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n1} = a_1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n2} = a_2$ (en $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n3} = a_3$).

Het bewijs van deze stelling is niet moeilijk; we laten het achterwege.

Definitie: Een rij (\underline{a}_n) heet begrensd indien $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots\}$ een begrensde verzameling is.

5.2. Coördinatenstelsels in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3

Tot nu toe hebben we meestal de analytische meetkunde bedreven met cartesische coördinaten in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 (x, y resp. x, y, z). Als men problemen bestudeert met "cirkel- of bolsymmetrie", dan zijn andere coördinaten vaak handiger.

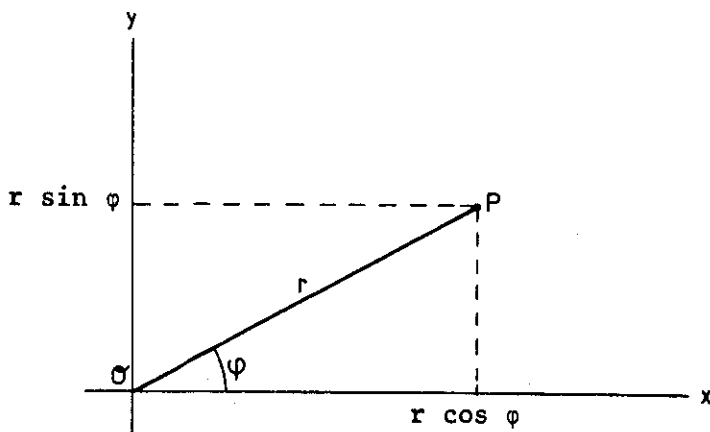
5.2.1. Poolcoördinaten in \mathbb{R}^2

We leggen een punt P in het vlak vast door zijn afstand tot $\mathcal{O} = (0, 0)$ en door de hoek die de verbindingslijn $\mathcal{O}P$ maakt met de positieve x -as (vgl. p. 159). De afstand heet gewoonlijk r , de hoek φ ; uit de aard van de keuze volgt dat $r \geq 0$, dat φ onbepaald is in \mathcal{O} en dat in andere punten φ slechts bepaald is tot op veelvoud van 2π ((r, φ) en $(r, \varphi + 2\pi)$ is het zelfde punt).

\mathcal{O} noemt men wel de pool, de positieve x -as de poolas, r de voerstraal van P en φ het argument van P .

Het verband tussen cartesische coördinaten (x,y) en poolcoördinaten (r,φ) is

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$



Voor problemen waarin cirkelsymmetrie voorkomt zijn poolcoördinaten erg handig. De cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ heeft als vergelijking in poolcoördinaten: $r = a$.

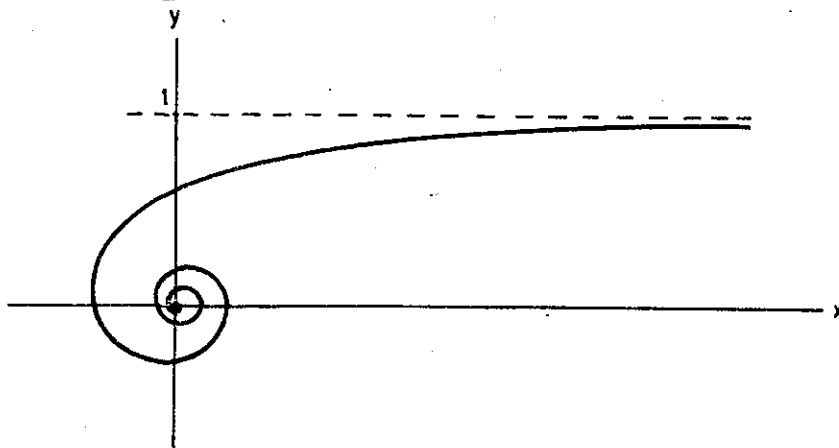
Krommen $r = \text{constant}$ zijn cirkels om O ; krommen $\varphi = \text{constant}$ zijn half-rechten door O (O zelf uitgezonderd).

Een vergelijking $r = r(\varphi)$ stelt in het algemeen een kromme voor.

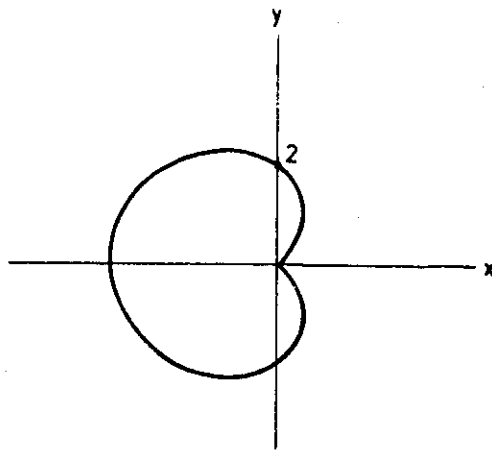
We geven enkele voorbeelden:

a) $r = \frac{1}{\varphi}$; $\varphi > 0$.

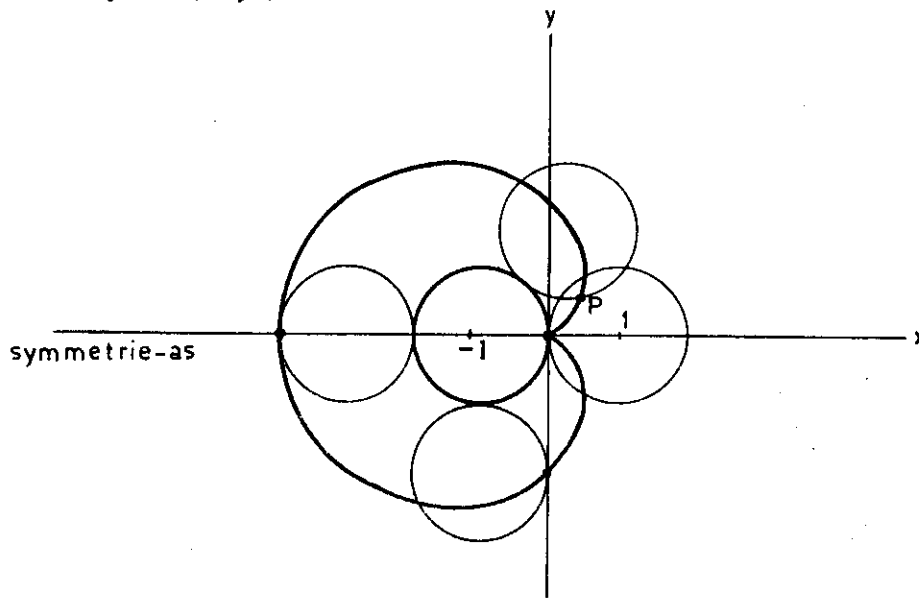
We zien dat $r \rightarrow \infty$ als $\varphi \rightarrow 0$, maar daar $y = r \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{\varphi}$, geldt $y \rightarrow 1$ als $\varphi \rightarrow 0$; er is dus een horizontale asymptoot $y = 1$. De kromme heet hyperbolische spiraal.



b) $r = 2(1 - \cos \varphi)$. De kromme heet cardioïde.



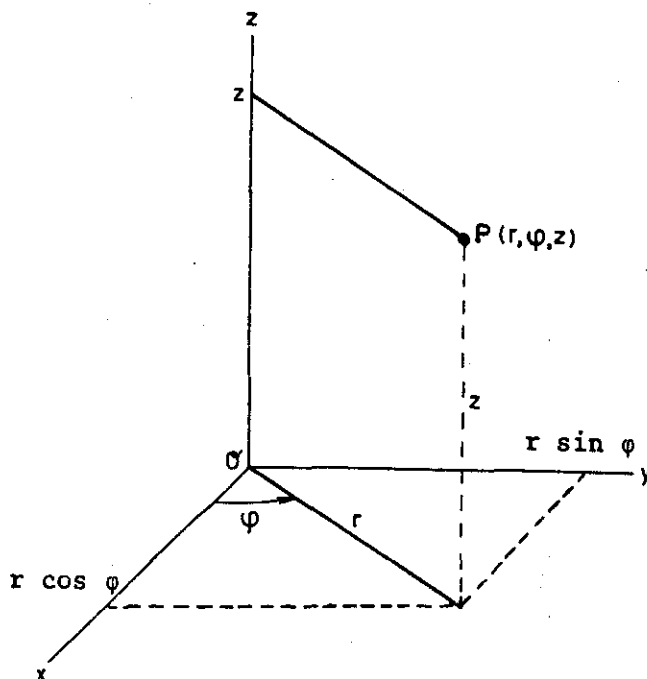
De kromme ontstaat (zie figuur) als de baan van het punt P op de rechter cirkel, als deze cirkel (met straal 1) zonder slip langs de vaste cirkel met middelpunt $(-1,0)$ en straal 1 rolt.



In cartesische coördinaten is de vergelijking van de cardioïde:
 $(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$, hetgeen veel ingewikkelder is.

5.2.2. Cylindercoördinaten in \mathbb{R}^3

Deze zijn de uitbreiding van poolcoördinaten in het (x,y) -vlak met een z -coördinaat.



De cylindercoördinaten van P zijn (r, φ, z) ; de samenhang met cartesische coördinaten is:

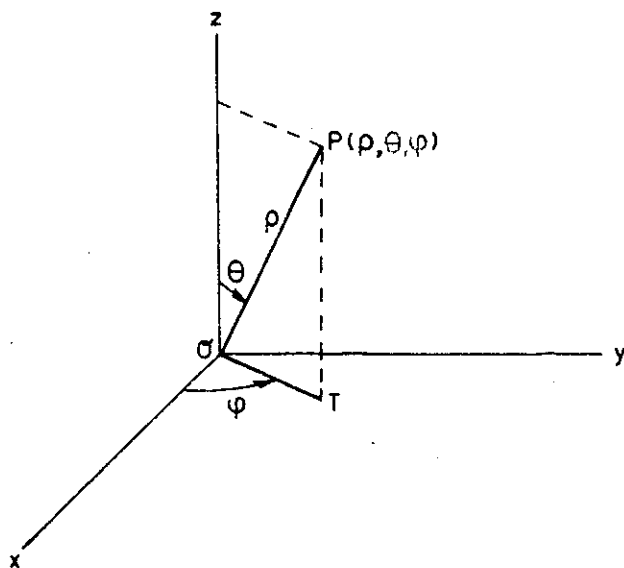
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi , \\ y = r \sin \varphi , \\ z = z . \end{cases}$$

Cylindercoördinaten zijn gemakkelijk bij meetkundige figuren die axiale symmetrie hebben (omwentelingsfiguren!).

De cylinder $x^2 + y^2 = a^2$ heeft als vergelijking in cylindercoördinaten: $r = a$. De kegel $z^2 = x^2 + y^2$ heeft als vergelijking $z^2 = r^2$, $z = \pm r$.

5.2.3. Bolcoördinaten in \mathbb{R}^3

Voor figuren met een punt van symmetrie (bolsymmetrie) zijn de volgende coördinaten erg handig.



Een punt P in \mathbb{R}^3 wordt bepaald door: afstand ρ tot \mathcal{O} , hoek θ van $\mathcal{O}P$ met de positieve z -as, hoek φ van de projectie van $\mathcal{O}P$ op het (x,y) -vlak met de positieve x -as.

Krachtens definitie is $\rho \geq 0$, θ tussen 0 en π te nemen en φ bepaald tot op veelvoud van 2π . Voor \mathcal{O} is θ noch φ bepaald; voor de andere punten op de z -as is $\theta = 0$ of $\theta = \pi$ en φ onbepaald.

De samenhang met cartesische coördinaten is

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi , \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi , \\ z = \rho \cos \theta . \end{cases}$$

Uit de bekende eigenschappen van een rechthoekige driehoek volgt namelijk $\overline{\mathcal{O}T} = \rho \sin \theta$, $\overline{PT} = \rho \cos \theta$ (zie figuur).

$\rho = \text{constant}$ is de vergelijking van een bol om \mathcal{O} .

$\varphi = \text{constant}$ is de "helft" van een vlak door de z -as.

$\theta = \text{constant}$ is een halve kegel (uitgezonderd de top \mathcal{O}) met de z -as als as.

5.3. Parametervoorstellingen van krommen

5.3.1. Vectorfuncties

Een vectorfunctie f van één reële variabele is een afbeelding $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$, waarbij $A \subset \mathbb{R}$. A heet de definitieverzameling van f ; notatie $\text{DOM } f$.

In deze paragraaf beperken we ons tot de gevallen $n = 2$ en $n = 3$. Een vectorfunctie f is dan een afbeelding, waarbij aan elke $t \in \text{DOM } f \subset \mathbb{R}$ een vector $f(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ resp. $f(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ wordt toegevoegd. De functies $x(t), y(t)$ resp. $x(t), y(t), z(t)$ heten de componentfuncties of componenten van $f(t)$.

Voorbeelden. 1) $f: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2)$, $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$.

3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

5.3.2. Parametervoorstelling van krommen. Kies in \mathbb{R}^2 resp. \mathbb{R}^3 het gebruikelijke assenstelsel. De verzameling

$$S := \{f(t) \mid t \in \text{DOM } f\}$$

heet een kromme. Indien deze kromme in een vlak ligt spreken we van een vlakke kromme, anders van een ruimtekromme.

De functie $f(t)$ heet een parametervoorstelling van de kromme S , met parameter t .

De functie f uit voorbeeld 1 is een parametervoorstelling van de cirkel met middelpunt 0 en straal 1 . Immers, de kromme bestaat uit alle punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x = \cos t$, $y = \sin t$ voor zekere $t \in [0, 2\pi)$. Na eliminatie van t volgt $x^2 + y^2 = 1$, d.i. de vergelijking van de cirkel met middelpunt 0 en straal 1 . Dezelfde functie f met $\text{DOM } f$ beperkt tot $[0, \pi]$, is een parametervoorstelling van een halve cirkel met middelpunt 0 en straal 1 . Deze halve cirkel is ook de grafiek van de reële functie $y = \sqrt{1-x^2}$. De parametervoorstelling voor de halve cirkel is dus te herleiden tot een voorstelling door middel van een reële functie. Voor de volledige cirkel als boven is een dergelijke herleiding niet mogelijk.

Opgave. Toon aan, dat $f(t) = (a + r \cos t, b + r \sin t)$ met $r > 0$ een parametervoorstelling is van de cirkel met middelpunt (a, b) en straal r .

De functie \underline{f} uit voorbeeld 2 is een parametervoorstelling van een rechte. Deze rechte wordt ook beschreven door de vergelijking $a_2x - a_1y = a_2b_1 - a_1b_2$, zoals volgt door eliminatie van t uit de vergelijkingen $x = a_1t + b_1$, $y = a_2t + b_2$.

De functie \underline{f} uit voorbeeld 3 is een parametervoorstelling van een zg. schroeflijn. Deze schroeflijn bestaat uit alle punten $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ met $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ voor zekere $t \in \mathbb{R}$. Na eliminatie van t volgt dat de schroeflijn ook beschreven wordt door de twee vergelijkingen $x = \cos z$, $y = \sin z$. Elimineer z , dan is duidelijk dat de schroeflijn ligt op de cilinder met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$.

Voorbeeld 4. De functie $\underline{f} : [0, 2\pi) \in \mathbb{R}^2$ gegeven door $\underline{f}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ met $a > 0$, $b > 0$, is een parametervoorstelling van een ellips. Immers, de kromme bestaat uit alle punten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ met $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ voor zekere $t \in [0, 2\pi)$. Na eliminatie van t volgt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, d.i. de vergelijking van een ellips.

Uit de parametervoorstelling volgt dat de ellips ontstaat door de y -coördinaten van de punten van de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ te vermenigvuldigen met b/a of ook door de x -coördinaten van de punten van de cirkel $x^2 + y^2 = b^2$ te vermenigvuldigen met a/b .

Voorbeeld 5. De baan van een massapunt is te beschrijven door een parametervoorstelling, waarbij de tijd t als parameter wordt gebruikt.

Beschouw bijv. de beweging van een massapunt langs de cirkel met middelpunt O en straal r . Op het tijdstip $t = 0$ zal het massapunt zich bevinden in het punt $(r, 0)$. De beweging geschiedt met constante hoeksnelheid ω . De positie van het massapunt op het tijdstip t wordt dan gegeven door: $x = r \cos \omega t$, $y = r \sin \omega t$. De functie $\underline{f}(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ is een parametervoorstelling van de baan van het massapunt.

Indien we de omlooptijd $2\pi/\omega$ als tijdseenheid kiezen, dan wordt de parametervoorstelling van de baan: $\underline{f}(\tau) = (r \cos 2\pi\tau, r \sin 2\pi\tau)$, met parameter $\tau = \omega t/2\pi$.

We definiëren nu de begrippen continuïteit en differentieerbaarheid voor een vectorfunctie.

5.3.3. Definitie. Zij $\underline{f} : \text{DOM } \underline{f} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven door $\underline{f}(t) = (x(t), y(t))$.
 \underline{f} heet continu in $a \in \text{DOM } \underline{f}$ als de componenten x, y continu zijn in a .
 \underline{f} heet continu op een verzameling $V \subset \mathbb{R}$ als \underline{f} continu is in elk punt van V .
 \underline{f} heet continu als \underline{f} continu is op $\text{DOM } \underline{f}$.

5.3.4. Definitie. Zij $\underline{f} : \text{DOM } \underline{f} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven door $\underline{f}(t) = (x(t), y(t))$.
Zij a inwendig punt van $\text{DOM } \underline{f}$ dan heet \underline{f} differentieerbaar in a als de componenten x, y differentieerbaar zijn in a ; $\underline{f}'(a) := (x'(a), y'(a))$ heet de afgeleide van \underline{f} in a .
 \underline{f} heet differentieerbaar op een interval $I \subset \mathbb{R}$ als \underline{f} differentieerbaar is in elk punt van I .

De definities van continuïteit en differentieerbaarheid voor een vectorfunctie $\underline{f} : \text{DOM } \underline{f} \rightarrow \mathbb{R}^3$ zijn analoog.

In plaats van $\underline{f}'(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ gebruikt men ook vaak de notaties $\dot{\underline{f}}(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$.

5.3.5. Raaklijn. Beschouw een vectorfunctie $\underline{f} : \text{DOM } \underline{f} \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeven door $\underline{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, waarbij $\text{DOM } \underline{f}$ een interval zal zijn.
Laat \underline{f} differentieerbaar zijn in $a \in \text{DOM } \underline{f}$, dan zijn de componenten x, y, z , differentieerbaar in a . Volgens 2.5.1 geldt dan:

$$\begin{aligned}x(a+h) &= x(a) + \dot{x}(a)h + h\rho(h), \\y(a+h) &= y(a) + \dot{y}(a)h + h\sigma(h), \\z(a+h) &= z(a) + \dot{z}(a)h + h\tau(h),\end{aligned}$$

voor alle h in een omgeving V van 0 , en

$$\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \sigma(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0.$$

In een omgeving van a is $\underline{f}(t)$ dan lineair benaderbaar door de functie

$$\underline{\ell}(t) := \underline{f}(a) + \dot{\underline{f}}(a)(t-a).$$

Indien $\dot{\underline{f}}(a) \neq \underline{0}$, dan is $\underline{\ell}$ een parametervoorstelling van een rechte: de raaklijn aan de kromme in het punt $\underline{f}(a)$. De richtingsvector van deze raaklijn is $\dot{\underline{f}}(a) = (\dot{x}(a), \dot{y}(a), \dot{z}(a)) \neq \underline{0}$. Als $\dot{x}(a) = 0$, dan is de raaklijn evenwijdig aan het (y, z) -vlak; analoge uitspraken gelden indien $\dot{y}(a) = 0$ resp. $\dot{z}(a) = 0$.

Beschouw vervolgens een vlakke kromme gegeven door de parametervoorstelling $\underline{f}(t) = (x(t), y(t))$. Op dezelfde manier vinden we dan: als \underline{f} differentieerbaar is in a met afgeleide $\dot{\underline{f}}(a) = (\dot{x}(a), \dot{y}(a)) \neq 0$, dan heeft de kromme een raaklijn in het punt $\underline{f}(a)$ met richtingsvector $\dot{\underline{f}}(a)$. Als $\dot{x}(a) = 0$ is de raaklijn evenwijdig aan de y -as, als $\dot{y}(a) = 0$ is de raaklijn evenwijdig aan de x -as.

Zoals we reeds op p. 163 opgemerkt hebben, is de parametervoorstelling van een vlakke kromme soms te herleiden tot een voorstelling door middel van een reële functie $g(x)$ i.e. de kromme is de grafiek van $y = g(x)$. We geven hierover de volgende stelling.

5.3.6. Stelling. Zij de vectorfunctie $\underline{f}(t) = (x(t), y(t))$ differentieerbaar met continue afgeleide in een omgeving van het punt a en zij $\dot{x}(a) \neq 0$. Dan bestaat er een omgeving V van a en een reële functie $g(x)$ gedefinieerd in $x(V)$, zodat de kromme $\{\underline{f}(t) \mid t \in V\}$ de grafiek is van $y = g(x)$. De afgeleide van $g(x)$ in $x(a)$ wordt gegeven door

$$\frac{dg}{dx}(x(a)) = \frac{\dot{y}(a)}{\dot{x}(a)}.$$

Bewijs. De afgeleide $\dot{x}(t)$ is continu op een omgeving van a en $\dot{x}(a) \neq 0$. Daaruit volgt dat er een omgeving V van a bestaat zodat of $\dot{x}(t) > 0$ voor alle $t \in V$ of $\dot{x}(t) < 0$ voor alle $t \in V$. Volgens 2.5.6 is $x(t)$ dan strikt monotoon op V . De functie $x(t)$ heeft nu een inverse functie, aan te geven door $t(x)$, met afgeleide $\frac{dt}{dx}(x(a)) = \frac{1}{\dot{x}(a)}$. (vgl. p. 55).

Substitueer $t(x)$ in de component $y(t)$, dan ontstaat de samengestelde functie $y(t(x)) =: g(x)$, gedefinieerd in $x(V)$. Het is duidelijk dat de grafiek van $y = g(x)$ juist overeenstemt met de kromme $\{\underline{f}(t) \mid t \in V\}$.

De afgeleide van $g(x) = y(t(x))$ in $x(a)$ is te bepalen met de kettingregel:

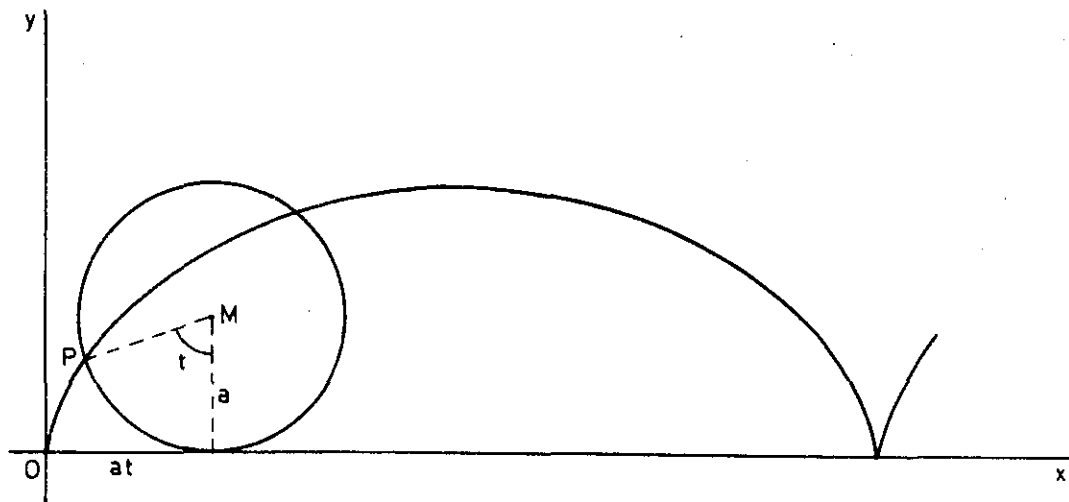
$$\frac{dg}{dx}(x(a)) = \frac{dy}{dt}(a) \frac{dt}{dx}(x(a)) = \frac{\dot{y}(a)}{\dot{x}(a)}. \quad \square$$

Opmerking. In vervolg op 5.3.6 zijn ook de tweede en hogere afgeleiden van $g(x)$ in $x(a)$ te bepalen. Zo volgt eenvoudig met behulp van de kettingregel (ga dit na) dat

$$\frac{d^2g}{dx^2}(x(a)) = \frac{\ddot{y}(a)\dot{x}(a) - \dot{y}(a)\ddot{x}(a)}{[\dot{x}(a)]^3},$$

waarin $\ddot{x}(a)$, resp. $\ddot{y}(a)$ de tweede afgeleide van $x(t)$, resp. $y(t)$ in a is.

Voorbeeld 6. Cycloïde.



Een cirkel met middelpunt M en straal a rolt over de x -as. Beschouw de kromme beschreven door het punt P dat zich oorspronkelijk in \mathcal{O} bevindt. Deze kromme heet cycloïde.

Neem als parameter de hoek t tussen de voerstraal MP en de verticaal. Uit de figuur is eenvoudig af te lezen dat de coördinaten van P worden gegeven door $(at - a \sin t, a - a \cos t)$. Hiermee hebben we tevens een parameter-
voorstelling van de cycloïde gevonden, nl. $\underline{f}(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$.

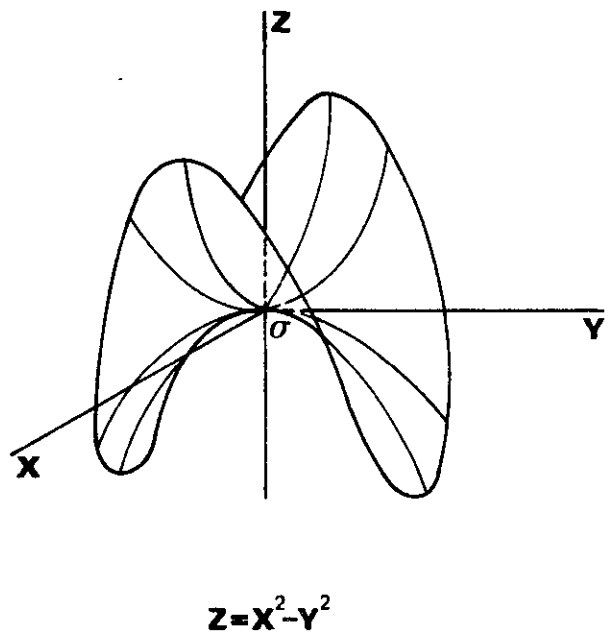
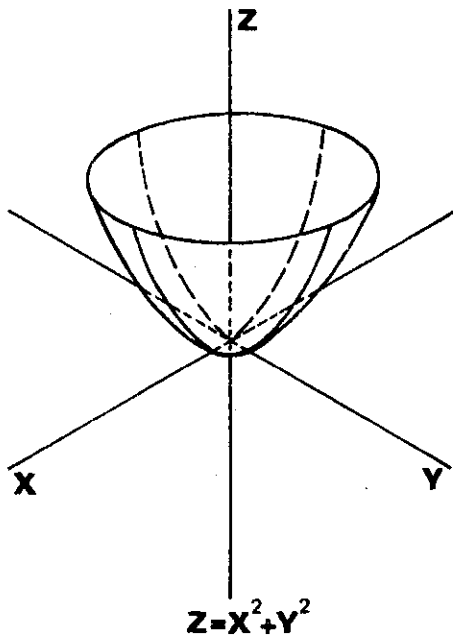
Opgave. Bepaal de punten van de cycloïde waar de raaklijn evenwijdig is aan één van de assen. Bewijs dat de raaklijn in $f(t)$ aan de cycloïde gaat door het punt $(at, 2a)$.

5.4. Hoogtekaart, continuïteit, van functies van meer dan één veranderlijke

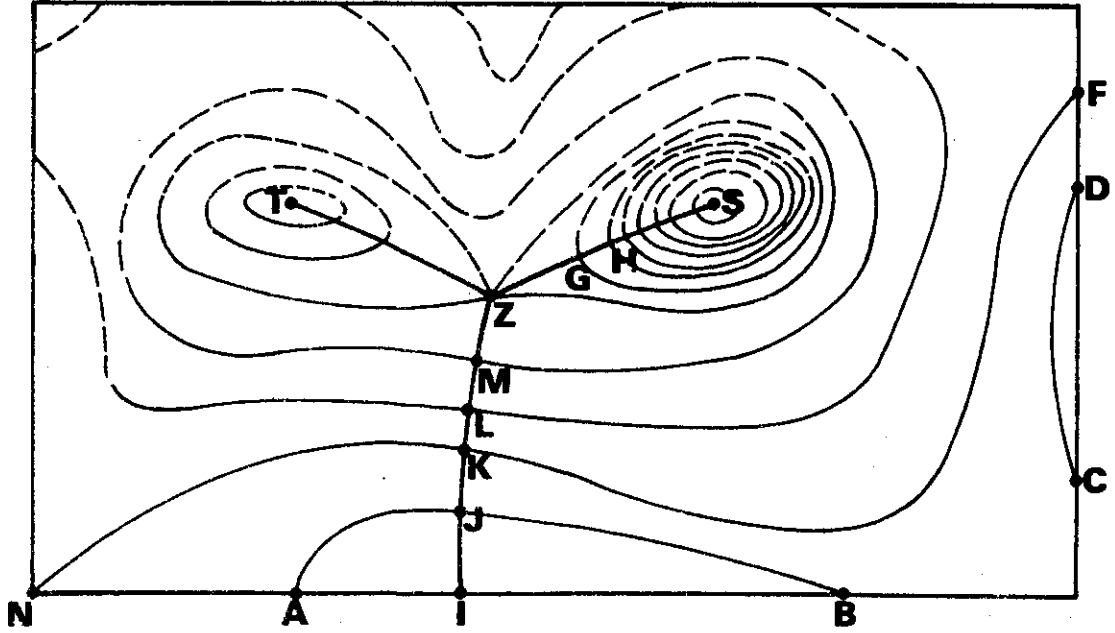
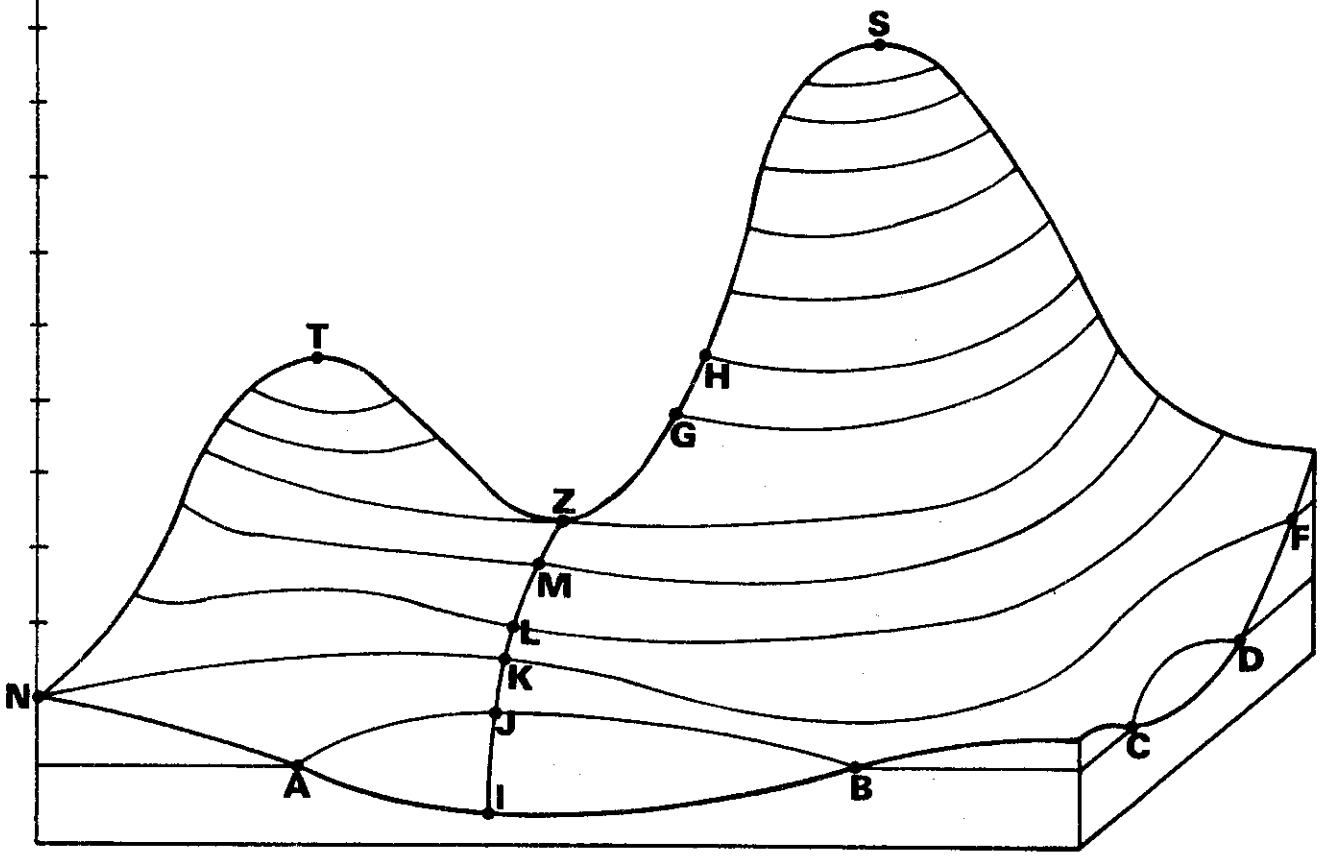
5.4.1. We hebben op het V.W.O. continuïteit bestudeerd van functies van één reële veranderlijke. We zullen in dit hoofdstuk de theorie uitbreiden tot reële functies van meer reële veranderlijken.

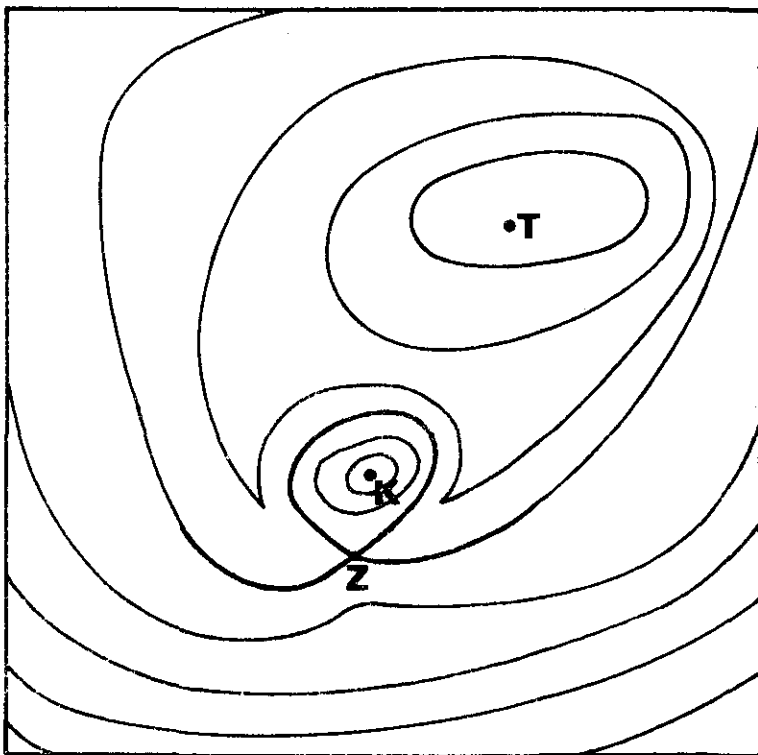
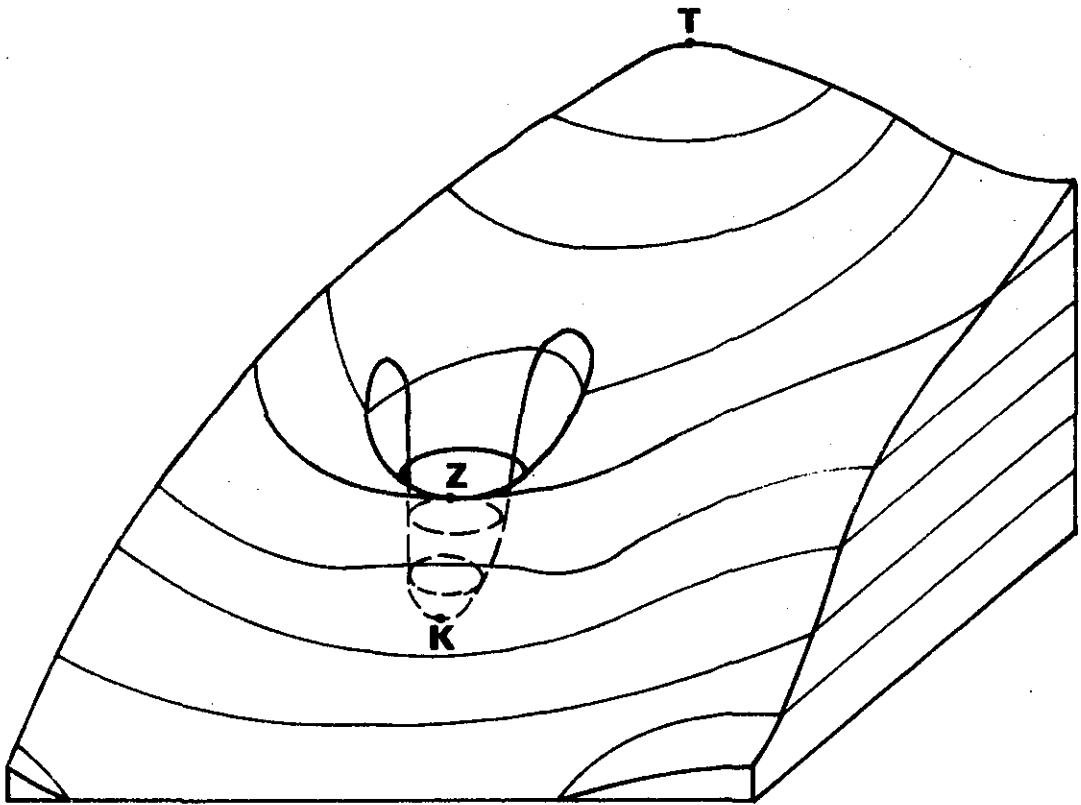
Om de notatie simpel te houden zullen we ons bijna steeds beperken tot functies van twee veranderlijken, $z = f(x,y)$; bij de overgang naar drie of meer veranderlijken zijn geen essentieel andere begrippen nodig.

Als men van een functie $z = f(x,y)$ een "grafiek" zou willen tekenen dan wordt dat een oppervlak in \mathbb{R}^3 . We geven een schets van een tweetal van dergelijke grafieken.

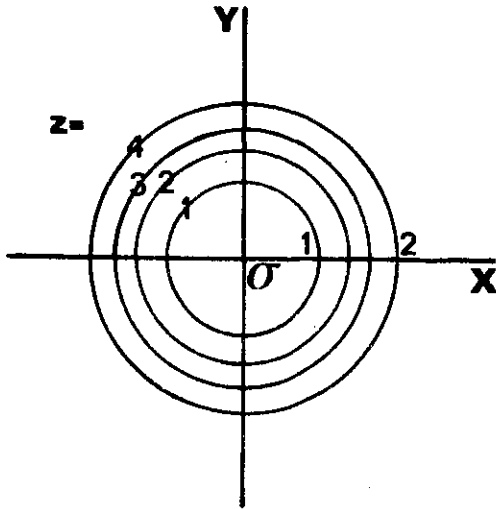


Vanwege het lastige tekenen, maken we meestal een zg. hoogtekaart, d.w.z. we tekenen in het platte vlak een aantal krommen, waarop de functie constant is (vgl. pp. 169-170). Dergelijke krommen noemen wij hoogtelijnen of niveaulijnen. Deze wijze van voorstellen is volledig analoog aan wat in de topografie gebruikelijk is.

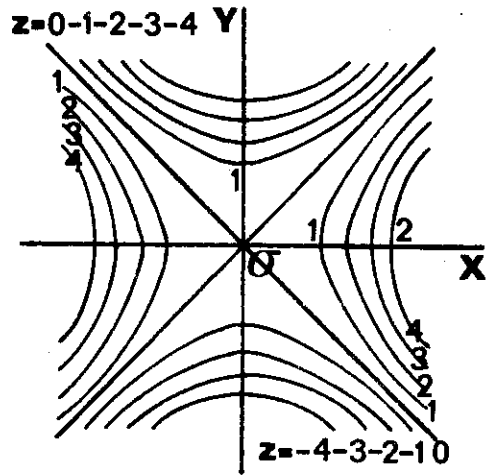




Voor de voorbeelden op p. 168 waarvan we de grafieken wel getekend hebben, zien de hoogtekaarten er aldus uit.



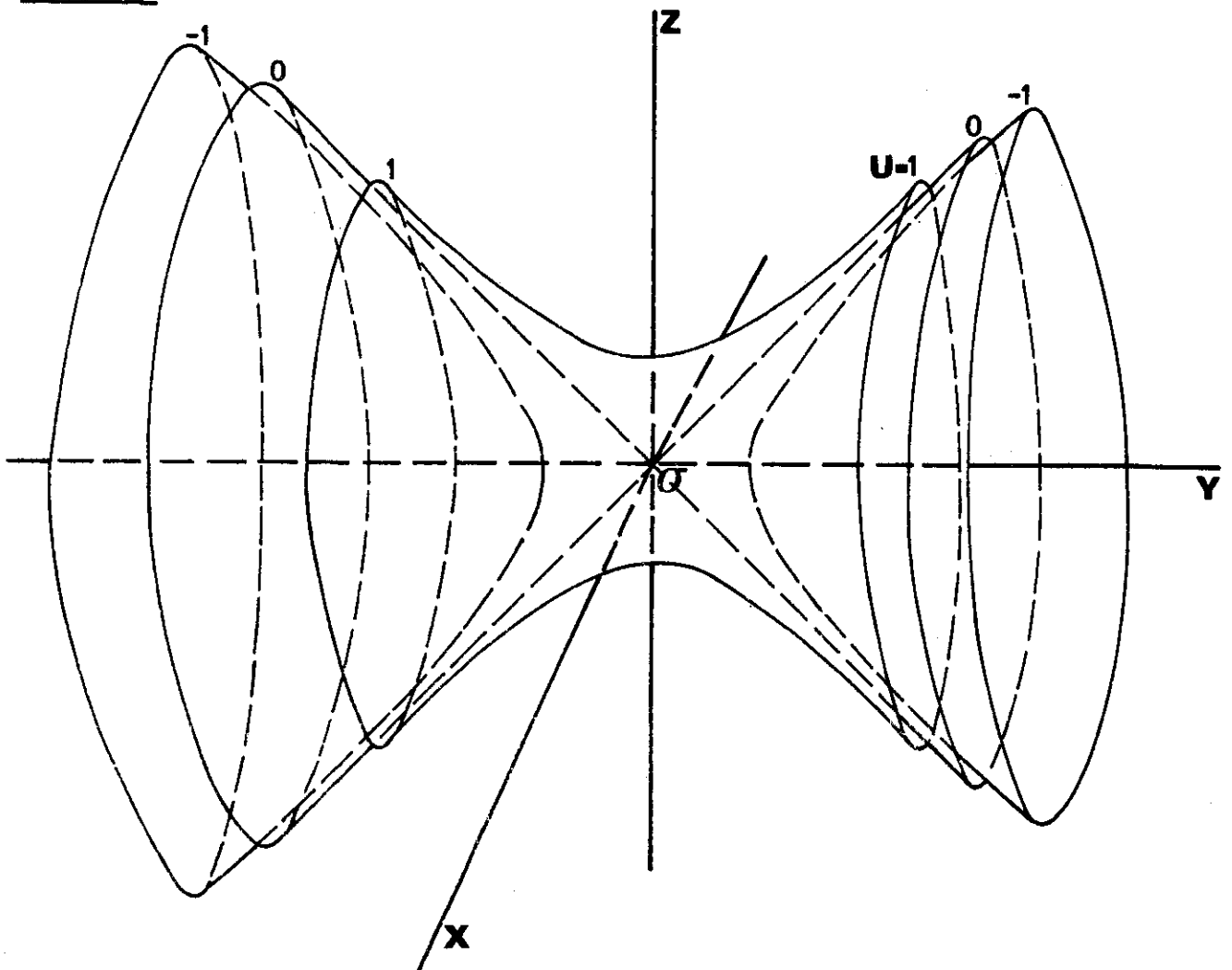
$$z = x^2 + y^2$$



$$z = x^2 - y^2$$

Analoog aan de hoogtelijnen op een hoogtekaart, zou men $u = f(x, y, z)$ kunnen voorstellen door een stelsel van niveaувlakken.

Voorbeeld: $u = x^2 - y^2 + z^2$.



5.4.2. Definitie. Een functie $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij $V \subset \mathbb{R}^2$ (of $V \subset \mathbb{R}^3$), heet continu in $\underline{a} \in V$, indien er bij elke omgeving \mathcal{O} van $f(\underline{a})$ in \mathbb{R} een omgeving U van \underline{a} in \mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^3) bestaat zó dat $f(U \cap V) \subset \mathcal{O}$.

Wegens definitie 5.1.1 en stelling 5.1.3 kunnen we deze definitie naar believen op de volgende beide wijzen interpreteren.

$f(x,y)$ is continu in het punt (a,b) indien er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat:

$$|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$$

voor alle (x,y) uit het definitiegebied met

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

of:

dezelfde bewering maar met $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ vervangen door:

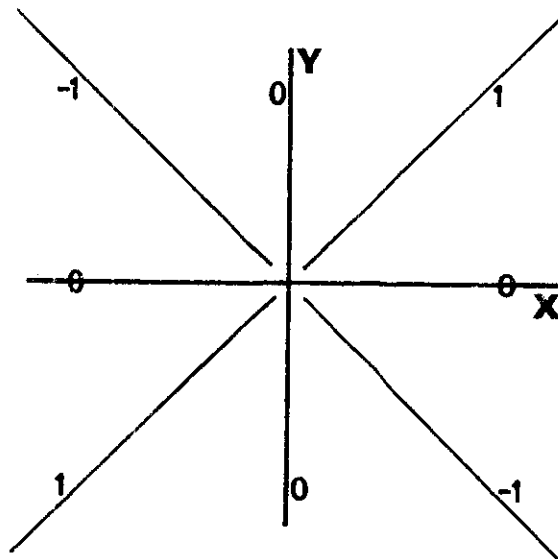
$$|x-a| < \delta \text{ en } |y-b| < \delta.$$

De gebruikelijke eigenschappen (som van continue functies is continu, e.d.) blijven geldig. (ga dit na). Het is belangrijk dat men discontinuïteiten leert vinden uit de hoogtekaart.

Voorbeeld:

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

De functie is voor alle x en y gedefinieerd. We tekenen (een gedeelte van) de hoogtekaart.



In elke omgeving van de oorsprong komt dus zowel de waarde 1 als de waarde -1 voor: de functie is in $(0,0)$ niet continu!

Alle andere hoogtelijnen zijn rechten met vergelijkingen $y=ax$, steeds met uitzondering van het punt $(0,0)$; de waarde op zo'n rechte is $\frac{2a}{1+a^2}$ (een getal tussen -1 en 1).

Daarentegen is de functie

$$\begin{cases} g(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ g(0,0) = 0, \end{cases}$$

wel continu in $(0,0)$; immers,

$$|g(x,y) - g(0,0)| = \left| \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |x y| \leq |x y| \leq \varepsilon$$

voor bijvoorbeeld $|x| \leq \sqrt{\varepsilon}$, $|y| \leq \sqrt{\varepsilon}$; daarbij is ε een willekeurig positief getal. Met behulp van het vorige voorbeeld kunnen we ook schrijven:

$$|g(x,y) - g(0,0)| = \left| \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right| = \frac{1}{2} x^2 |f(x,y)| \leq \varepsilon$$

en het is gemakkelijk in te zien (vgl. ook de hoogtekaart van f) dat f begrensd is ($-1 \leq f(x,y) \leq 1$).

5.5. Differentieerbaarheid van functies van twee of meer veranderlijken

Meetkundig zal differentieerbaarheid van $f(x,y)$ in het punt (a,b) betekenen dat het oppervlak $z = f(x,y)$ in het punt $(a,b, f(a,b))$ een niet-verticaal raakvlak heeft. We generaliseren de karakterisering van differentieerbaarheid zoals gegeven in 2.5.1.

5.5.1. Definitie. Zij $f(x,y)$ gedefinieerd in een omgeving van (a,b) .

f is differentieerbaar in (a,b) indien er getallen A en B en een functie $\varepsilon(h,k)$, gedefinieerd voor $(h,k) \neq (0,0)$, bestaan, zodanig dat:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \sqrt{h^2 + k^2} \varepsilon(h,k)$$

en

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h,k) = 0.$$

Hierbij moet $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)}$ begrepen worden in de zin van 5.1.5.

Om de betekenis te achterhalen van de getallen A en B in deze definitie nemen we achtereenvolgens $k = 0$ en $h = 0$.

Met $k = 0$ volgt

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h};$$

met $h = 0$ volgt

$$B = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k},$$

d.w.z. A is de afgeleide van de functie $f(x, b)$ in $x = a$ (omdat b vast is, is dit een functie van x alleen), B is de afgeleide van $f(a, y)$ in $y = b$.

We noemen deze afgeleiden, waarbij slechts één van de argumenten varieert, partiële afgeleiden. We gebruiken de notaties:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} =: \frac{\partial}{\partial x} f(a, b) =: \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) =: f_x(a, b);$$

evenzo

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} =: \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) =: \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) =: f_y(a, b).$$

De meetkundige betekenis van partiële afgeleiden blijkt uit de volgende beschouwing:

$z = f(x, y)$ stelt een oppervlak voor dat gaat door $P = (a, b, f(a, b))$.

Als we dit doorsnijden met het vlak $y = b$ is de doorsnijdingsfiguur een kromme; $f_x(a, b)$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan deze kromme in P (en uiteraard in het vlak $y = b$).

Evenzo is $f_y(a, b)$ de raaklijnrichting in P van de doorsnijdingskromme van het vlak $x = a$ met het oppervlak $z = f(x, y)$.

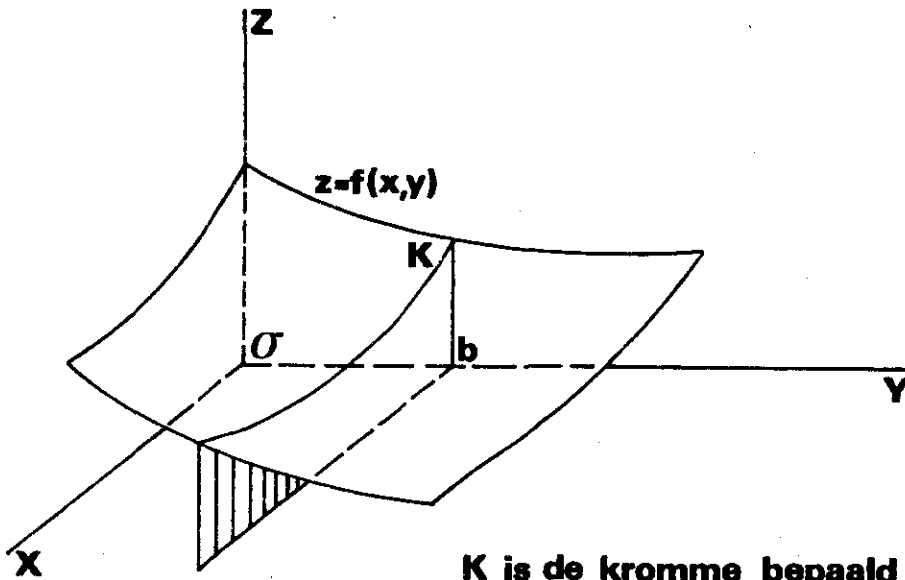
Eveneens ziet men meetkundig in dat de vergelijking van het vlak door beide raaklijnen (dat tevens het raakvlak in P aan het oppervlak is, als tenminste het oppervlak in P een raakvlak heeft) als vergelijking heeft:

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b). \quad (1)$$

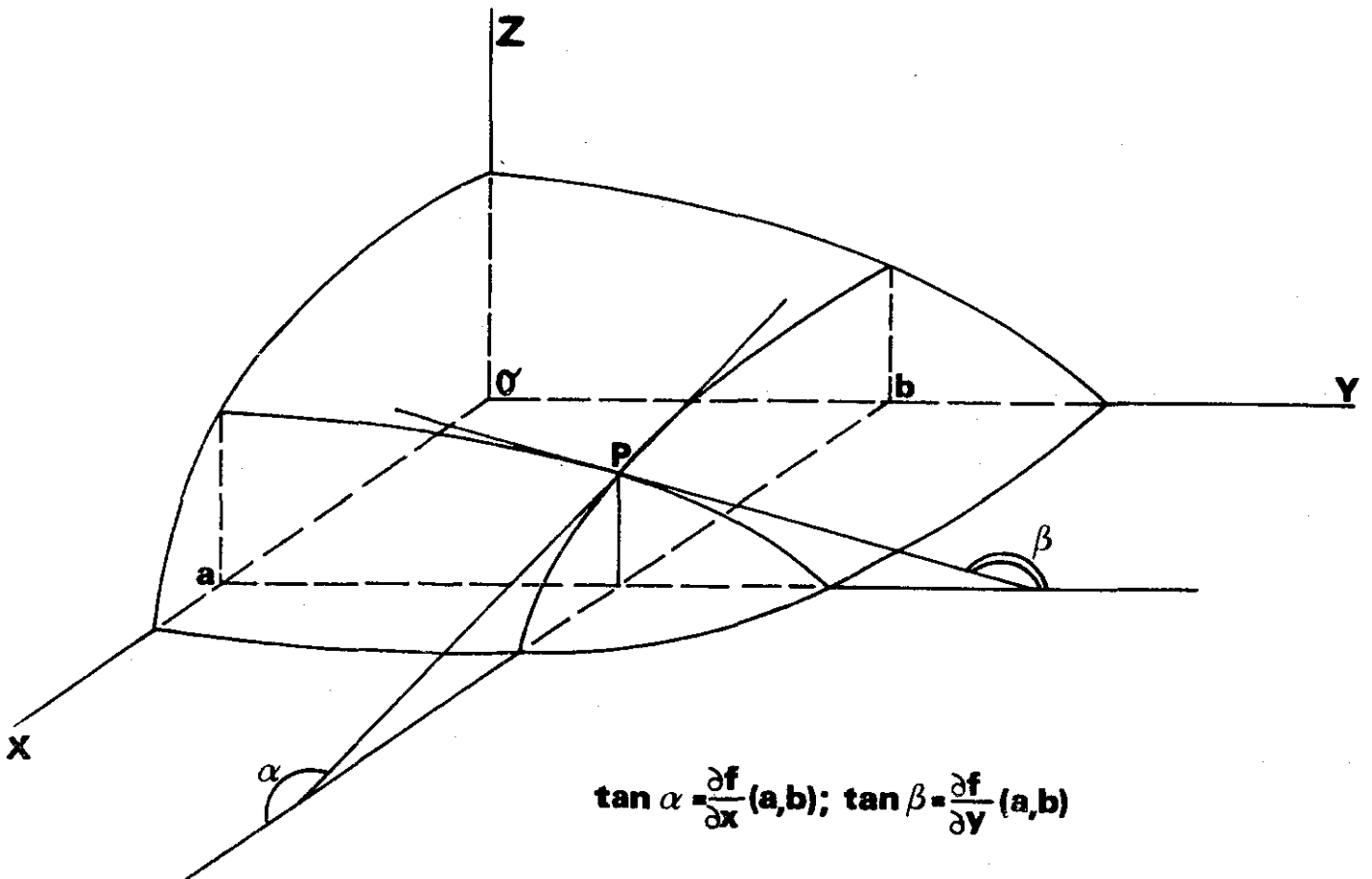
Zo zien we dat differentieerbaarheid inhoudt dat de functiewaarden in de buurt van (a, b) "goed" benaderd worden door de overeenkomstige waarden van een eerstegraadfunctie.

Elke rechte door $P = (a, b, f(a, b))$ in het vlak (1) is een raaklijn aan het oppervlak. Als $S = (a+h, b+k, f(a+h, b+k))$ en $Q = (a+h, b+k, f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k)$ dan is Q in (1) en S op het oppervlak. Het verschil van de tangenten van de hoeken die PS en PQ met het xy -vlak maken is $|\varepsilon(h, k)|$. Omdat dit naar 0 nadert als $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, raakt PQ aan het oppervlak.

De situatie is getekend in de volgende figuren.



K is de kromme bepaald door: $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=b \end{cases}$



$$\tan \alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b); \tan \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

Als we na partiële differentiatie het punt (a,b) laten variëren, krijgen we functies van x en y: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, meestal kortweg f_x , f_y of $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ genoteerd.

Het berekenen van partiële afgeleiden gaat geheel met de techniek van het differentiëren die we reeds kennen; we beschouwen alle veranderlijken, behalve die waarnaar gedifferentieerd wordt, als constanten.

Voorbeeld:

$$f(x,y) = \ln(1+x^2+y^4)$$

We hebben

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2+y^4} \cdot 2x, \quad f_x(1,1) = 2/3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y^3}{1+x^2+y^4}, \quad f_y(1,1) = 4/3.$$

En (vgl. (1), p. 174)

$$f(1+h, 1+k) - f(1,1) \approx \frac{2}{3}h + \frac{4}{3}k.$$

(De uitdrukking $\frac{2}{3}h + \frac{4}{3}k$ wordt wel de totale differentiaal van f in (1,1) genoemd; het is een functie van twee veranderlijken, nl. h en k.)

Opmerkingen.

5.5.2. Evenals in 2.5.1 volgt uit de definitie van differentieerbaarheid in (a,b) niet alleen het bestaan van de partiële afgeleiden in (a,b), maar ook dat f in (a,b) continu is (ga dit na).

Men zij er op bedacht dat uit het bestaan van de partiële afgeleiden nog niet volgt dat f differentieerbaar is. Voor het op p. 172 bekeken voorbeeld:

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad (x,y) \neq (0,0);$$

$$f(0,0) = 0$$

geldt:

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, doch f is in (0,0) niet continu, dus zeker niet differentieerbaar in (0,0).

5.5.3. Partiële afgeleiden zijn in het algemeen weer functies van x en y; deze kunnen vaak zelf weer partieel gedifferentieerd worden. We bekijken alleen de notaties.

Als we hebben $f(x,y)$ met eerste partiële afgeleiden: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ dan noteren we

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =: f_{xx}(x,y) =: f_{xx} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} =: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} =: f_{xy}(x,y) =: f_{xy} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =: f_{yx}(x,y) =: f_{yx} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} =: \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =: f_{yy}(x,y) =: f_{yy} .$$

Als de tweede partiële afgeleiden continu zijn, geldt steeds dat $f_{xy} = f_{yx}$ (het bewijs laten we achterwege), zodat de tweede partiële afgeleiden onafhankelijk zijn van de volgorde waarin de differentiaties worden uitgevoerd.

Met het voorbeeld: $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^4)$ vinden we:

$$f_{xx} = \frac{2(1-x^2+y^4)}{(1+x^2+y^4)^2} , \quad f_{xy} = f_{yx} = \frac{-8xy^3}{(1+x^2+y^4)^2} ,$$

$$f_{yy} = \frac{12y^2(1+x^2)-4y^6}{(1+x^2+y^4)^2} .$$

Dus:

$$f_{xx}(1,1) = \frac{2}{9} , \quad f_{xy}(1,1) = f_{yx}(1,1) = -\frac{8}{9} , \quad f_{yy}(1,1) = \frac{20}{9} .$$

5.5.4. Evenals in 2.6.1, p. 69 kunnen we naast de benadering van "functie door raakvlak" nl.

$$f(x,y) \approx f(a,b) + (x-a) f_x(a,b) + (y-b) f_y(a,b) ,$$

een betere benadering in de buurt van (a,b) vinden door als benaderende functie er een te nemen die in (a,b) niet alleen de waarde en eerste partiële afgeleiden met f gemeen heeft, maar waarvan ook alle tweede partiële afgeleiden in (a,b) met die van f overeenstemmen. We krijgen dan (als $f_{yx} = f_{xy}$):

$$f(x,y) \approx f(a,b) + (x-a) f_x(a,b) + (y-b) f_y(a,b) + \\ + \frac{1}{2}(x-a)^2 f_{xx}(a,b) + (x-a)(y-b) f_{xy}(a,b) + \frac{1}{2}(y-b)^2 f_{yy}(a,b) .$$

Men kan ook voor functies van meer veranderlijken een formule als die van Taylor (vgl.(2.8.1)) afleiden.

5.5.5. Zonder de (overigens standaard-) bewijzen uit te schrijven, vermelden we nog enige toepassingen van de kettingregel.

Als $z = f(x,y)$; $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, dan is $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ ook een functie van t .

Er geldt:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = f_x \cdot \dot{x} + f_y \cdot \dot{y}.$$

Is bijvoorbeeld $z = xy$ en is $x = x(t)$, $y = y(t)$, dan is

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} (x(t) y(t)) = \dot{x}(t) y(t) + x(t) \dot{y}(t).$$

Het volgende voorbeeld laat ons het belang zien van een duidelijk onderscheid in de notaties $\frac{dz}{dt}$ en $\frac{\partial z}{\partial t}$:

Door $z = x+y^2$, $y = \ln x$ is z gegeven als functie van x en y , maar ook als functie van x (nl. $z = x + (\ln x)^2$). Er geldt nu:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{2 \ln x}{x}.$$

Een ander gebruik van de kettingregel is het volgende:

Als $z = f(x,y)$; $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, dan is $z = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ dus ook een functie van u en v .

Nu geldt:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

In andere notatie:

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u; \quad z_v = z_x x_v + z_y y_v.$$

Als voorbeeld nemen we het geval waarin x en y zeer bekende functies zijn van twee veranderlijken die r en φ heten (zie 5.2.1).

Als $z = f(x,y)$; $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, dan is

$$\frac{\partial z}{\partial r} = f_x \cdot \cos \varphi + f_y \cdot \sin \varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -f_x \cdot r \cdot \sin \varphi + f_y \cdot r \cdot \cos \varphi.$$

5.5.6. Zonder enige essentieel nieuwe ideeën te introduceren is de voorafgaande theorie uit te breiden tot functies van drie of meer veranderlijken. Veel in de praktijk voorkomende fysische problemen bevatten vier veranderlijken, waarvan drie de coördinaten in de ruimte, x , y , z , zijn en de vierde de tijd, t . In het algemeen zal men proberen, bijvoorbeeld door het gebruiken van symmetrie-argumenten, het aantal veranderlijken in een probleem zo klein mogelijk te laten zijn.

5.5.7. Een toepassing van het partieel differentiëren is het differentiëren van zg. impliciet gegeven functies (dat we overigens zonder het te vermelden in 2.6.2 al gedaan hebben).

Door een vergelijking $F(x,y) = 0$ kan voor sommige waarden y als functie van x beschouwd worden. Zo zijn door $x^2 + y^2 - 1 = 0$ de functies $y_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $y_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$ bepaald (beide op $[-1,1]$), terwijl de vereniging van de grafieken van $y_1(x)$ en $y_2(x)$ de verzameling is van alle punten die aan $x^2 + y^2 - 1 = 0$ voldoen. We zeggen dat de functies $y_1(x)$ en $y_2(x)$ door $x^2 + y^2 - 1 = 0$ impliciet gegeven zijn. Vaak is het handig over de afgeleiden van dergelijke impliciet gegeven functies te beschikken zonder ze eerst expliciet te maken (d.w.z. zonder ze te schrijven als $y_1(x) = \dots$, enz.). Dit differentiëren van impliciete functies is niets anders dan het toepassen van de kettingregel op

$$F(x, y(x)) = 0.$$

We krijgen: $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'(x) = 0.$

Uit $x^2 + y^2 - 1 = 0$ volgt: $2x + 2y y' = 0$, dus $y' = -x/y$. (Controleer dat $y_1(x)$ en $y_2(x)$ hieraan voldoen op $(-1, 1)$).

We bespreken nog een voorbeeld namelijk de kromme met vergelijking $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. We proberen de punten op de kromme te vinden waar de raaklijn horizontaal is.

Daar $3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0$, volgt

$$y' = \frac{y-x^2}{y^2-x}.$$

Horizontale raaklijnen kunnen dus optreden als $y = x^2$, d.w.z. in verband met de oorspronkelijke vergelijking als $x^6 = 2x^3$ dus voor $x = 0$ en $x = \sqrt[3]{2}$. Het punt $(0,0)$ is een bijzonder punt omdat daar ook $y^2 - x = 0$.

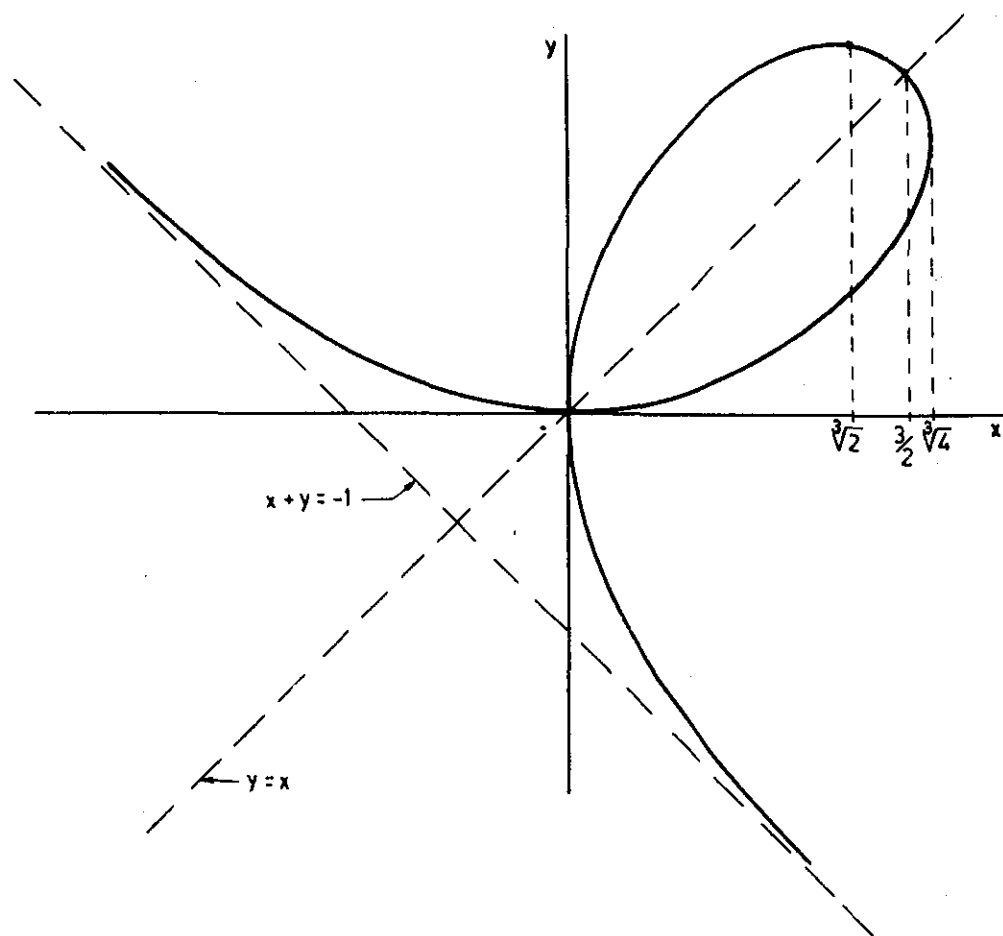
Het andere punt is $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$.

We merken op dat er symmetrie is, d.w.z. als kanshebbers voor verticale raaklijnen vinden we weer $(0,0)$ en ook $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$. Om de grafiek te kunnen tekenen gebruiken we deze symmetrie en snijden de kromme met lijnen loodrecht op de symmetrie-as: $y = -x+p$.

We krijgen $x^2(3p+3) - 3xp(p+1) + p^3 = 0$. Voor $p = -1$ is er geen snijpunt, voor $p = 0$ is $(0,0)$ een dubbel snijpunt terwijl uit de discriminant:

$3p^2(p+1)(3-p)$ blijkt dat er slechts snijpunten optreden voor $-1 < p \leq 3$.

De grafiek is nu na enig gepuzzel te tekenen; de kromme heet folium van Descartes. Deze kromme heeft een scheve asymptoot $x + y = -1$.



De methode van het differentiëren van impliciet gegeven functies kan uitgebreid worden tot meer variabelen en tot meer vergelijkingen.

5.5.8. De vergelijking $F(x,y,z) = 0$ beschrijft een oppervlak in \mathbb{R}^3 . Door deze vergelijking is z impliciet gegeven als functie van x en y : $z = z(x,y)$. De partiële afgeleiden $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ kunnen we vinden door partiële differentiatie van

$$F(x,y,z(x,y)) = 0$$

onder toepassing van de kettingregel

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z},$$

mits $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Voorbeeld. Beschouw de vergelijking $x - e^y \sin z = 0$. Partieel differentiëren naar x en naar y geeft

$$1 - e^y \cos z \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$-e^y \sin z - e^y \cos z \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

waaruit volgt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^y \cos z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\sin z}{\cos z} = - \tan z,$$

mits $\cos z \neq 0$.

5.5.9. Het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

beschrijft een kromme in \mathbb{R}^3 .

Men kan y en z als impliciet gegeven functies van x beschouwen en vragen naar de afgeleiden $y'(x)$ en $z'(x)$.

Differentiatie naar x levert

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0, \end{cases}$$

waaruit y' en z' zijn op te lossen, mits $\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial G}{\partial y} \neq 0$ is.

Voorbeeld. Beschouw het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5, \\ xy + yz = 2. \end{cases}$$

Bereken $y'(x)$, $z'(x)$ en $z''(x)$ in $(x,y,z) = (0,1,2)$.

Differentiatie naar x levert

$$2x + 2yy' + 2zz' = 0 \quad \text{en} \quad y + (x+z)y' + yz' = 0.$$

In $(0,1,2)$ wordt dit

$$2y'(0) + 4z'(0) = 0 \quad \text{en} \quad 1 + 2y'(0) + z'(0) = 0,$$

met als oplossing $y'(0) = -2/3$ en $z'(0) = 1/3$.

Nogmaals differentiëren geeft

$$\begin{cases} 1 + (y')^2 + yy'' + (z')^2 + zz'' = 0, \\ y' + (x+z)y'' + (1+z')y' + y'z' + yz'' = 0. \end{cases}$$

Invullen van $(x,y,z) = (0,1,2)$ en van de bekende waarden van $y'(0)$ en $z'(0)$ geeft twee vergelijkingen voor $y''(0)$ en $z''(0)$, waaruit volgt $z''(0) = -44/27$.

5.6. Richtingsafgeleide en gradiënt

We brengen de definitie van het inwendig product $(\underline{a}, \underline{b})$ van twee vectoren \underline{a} en \underline{b} in herinnering. In \mathbb{R}^2 is $(\underline{a}, \underline{b}) = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2$, in \mathbb{R}^3 is $(\underline{a}, \underline{b}) = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, waarbij φ de hoek tussen de vectoren is en $\underline{a} = (a_1, a_2)$ resp. (a_1, a_2, a_3) , $\underline{b} = (b_1, b_2)$ resp. (b_1, b_2, b_3) . Twee vectoren \underline{a} en \underline{b} staan loodrecht op elkaar dan en slechts dan als $(\underline{a}, \underline{b}) = 0$.

In \mathbb{R}^3 is $n_1(x-a) + n_2(y-b) + n_3(z-c) = 0$ de vergelijking van een vlak V door (a,b,c) en met $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ als normaalvector d.w.z. \underline{n} staat loodrecht op vlak V . Dit laatste is in te zien door de vergelijking in de vorm $(\underline{n}, \underline{x}-\underline{a}) = 0$ te schrijven met $\underline{x} = (x,y,z)$ en $\underline{a} = (a,b,c)$.

In \mathbb{R}^2 is analoog $n_1(x-a) + n_2(y-b) = 0$ de vergelijking van een rechte ℓ met $\underline{n} = (n_1, n_2)$ als normaalvector, d.w.z. \underline{n} staat loodrecht op de rechte ℓ .

5.6.1. Gradient. Zij f een reële functie van n veranderlijken, differentieerbaar in $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, dan verstaan we onder $\text{grad } f(\underline{a})$ de vector uit \mathbb{R}^n

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{a}) \right).$$

In onze beschouwingen is $n = 2$ of $n = 3$.

Opmerking. In plaats van $\text{grad } f$ gebruikt men ook de notatie ∇f .

5.6.2. Richtingsafgeleide. Zij f een reële functie van n veranderlijken ($n \leq 3$), gedefinieerd in een omgeving van \underline{a} en $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{y}$ een parametervoorstelling van een rechte door \underline{a} met richtingsvector \underline{y} . Kies $|\underline{y}| = 1$, dan is $|t|$ de afstand van \underline{x} tot \underline{a} . We beschouwen de samengestelde functie $g(t) = f(\underline{a} + t\underline{y})$. Als g een afgeleide heeft in $t = 0$, met andere woorden, als

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{a} + t\underline{y}) - f(\underline{a})}{t}$$

bestaat, dan noemen we $g'(0)$ de richtingsafgeleide van f in \underline{a} in de richting van \underline{y} .

Merk op dat $f_x(\underline{a})$, $f_y(\underline{a})$ en $f_z(\underline{a})$ richtingsafgeleiden zijn in de richting van de coördinaatassen.

5.6.3. Stelling: Zij f differentieerbaar in \underline{a} , dan bestaat de richtingsafgeleide van f in \underline{a} in een willekeurige richting \underline{v} ($|\underline{v}| = 1$) en is gelijk aan $(\text{grad } f(\underline{a}), \underline{v})$.

Bewijs. Dit is een onmiddellijk gevolg van de kettingregel. □

Opgave. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zij gedefinieerd door

$$f(\underline{x}) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{voor } \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \text{voor } \underline{x} = \underline{0}. \end{cases}$$

a) Bewijs dat f_x en f_y overal bestaan.

b) Heeft f , behalve f_x en f_y , nog andere richtingsafgeleiden in $(0,0)$?

5.6.4. Meetkundige interpretatie. We beschouwen de differentieerbare functie $f(x,y,z)$.

Door het punt $\underline{a} = (a,b,c)$ gaat het niveauvlak met vergelijking

$$f(x,y,z) = f(a,b,c). \quad (1)$$

De vergelijking van het raakvlak aan het niveauvlak in het punt \underline{a} kunnen we opstellen door op te merken dat door de vergelijking (1) z impliciet als functie van x en y is gegeven. We nemen aan dat $f_z(\underline{a}) \neq 0$.

Volgens 5.5.1 is de vergelijking van het raakvlak

$$z - c = \frac{\partial z}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial z}{\partial y}(a,b)(y-b). \quad (2)$$

Uit (1) bepalen we door impliciet differentiëren $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$. Dit geeft

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a,b) = -\frac{f_x(\underline{a})}{f_z(\underline{a})}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(a,b) = -\frac{f_y(\underline{a})}{f_z(\underline{a})}.$$

Invullen in (2) geeft tenslotte voor het raakvlak de vergelijking:

$$f_x(\underline{a})(x-a) + f_y(\underline{a})(y-b) + f_z(\underline{a})(z-c) = 0.$$

Uit de vergelijking volgt dat de vector $\text{grad } f(\underline{a})$ loodrecht op het niveauvlak in \underline{a} staat. De richtingsafgeleide in \underline{a} in de richting \underline{y} is $(\text{grad } f(\underline{a}), \underline{y}) = |\text{grad } f(\underline{a})| \cos \varphi$, als φ de hoek is tussen \underline{y} en $\text{grad } f(\underline{a})$. De richtingsafgeleide is dus maximaal als $\varphi = 0$, d.w.z. in de richting van $\text{grad } f(\underline{a})$. De vector $\text{grad } f(\underline{a})$ geeft dus aan in welke richting f het sterkst toeneemt. Loodrecht op $\text{grad } f(\underline{a})$ is de richtingsafgeleide nul; dit geldt dus voor richtingen in het raakvlak aan het niveauvlak.

Niveauvlakken snijden elkaar uiteraard niet.

Krommen loodrecht op alle niveauvlakken heten orthogonale trajectoriën; de raaklijn aan de orthogonale trajectorie door \underline{a} heeft richtingsvector $\text{grad } f(\underline{a})$.

Voor $n = 2$ geldt een analoge meetkundige interpretatie. We hebben dan te maken met niveaulijnen in \mathbb{R}^2 in plaats van met niveauvlakken. De raaklijn in $\underline{a} = (a,b)$ aan de niveaulijn $f(x,y) = f(a,b)$ wordt gegeven door de vergelijking

$$f_x(\underline{a})(x-a) + f_y(\underline{a})(y-b) = 0.$$

Voorbeeld. $f(x,y) = xy$. Niveaulijnen zijn orthogonale hyperbolen met x -as en y -as als asymptoten.

Wegens $\text{grad } f(x,y) = (y,x)$ geldt voor de orthogonale trajectoriën:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x \end{aligned} \right\};$$

er volgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

met als oplossingen $x^2 - y^2 = C$; dat zijn orthogonale hyperbolen met $y = x$ en $y = -x$ als asymptoten.

5.7. Partiële differentiaalvergelijkingen

In hoofdstuk drie bespraken we een belangrijke toepassing van het differentiëren van functies van één veranderlijke. Als toepassingen van het differentiëren van functies van meer veranderlijken zijn eveneens differentiaalvergelijkingen van essentieel belang. Daarnaast is een heel belangrijke toepassing van de differentiaalrekening het bepalen van extrema (zie 5.8 en 5.9).

Differentiaalvergelijkingen met partiële afgeleiden, z.g. partiële differentiaalvergelijkingen zijn voor de toegepaste wiskunde van het allergrootste belang. Het oplossen is echter in het algemeen zeer moeilijk; een en ander valt dan ook buiten het bestek van deze syllabus. Veelal zal men voor iedere vergelijking ad hoc een oplossing moeten vinden; Fourierreeksen zijn daarbij een machtig hulpmiddel. We vermelden alleen enkele voorbeelden van partiële differentiaalvergelijkingen.

- a) De warmte-vergelijking. Beschouwen we een lichaam waarvan niet alle punten dezelfde temperatuur hebben. Zij $u(x,y,z,t)$ de temperatuur op tijdstip t in het punt (x,y,z) , dan is onder zekere veronderstellingen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

waarin C een positieve constante is; uit deze vergelijking volgen alle mogelijke temperatuurverdelingen.

- b) De uitwijking $u(x,t)$ van een trillende, homogeen veronderstelde, snaar langs de x -as ten tijde t in het punt met coördinaat x voldoet aan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (C > 0).$$

Talrijke andere verschijnselen leiden tot dezelfde vergelijking. Golfvoortplanting in drie dimensies voldoet aan:

$$u_{tt} = C(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).$$

- c) De vergelijking van Laplace.

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0.$$

Deze vergelijking, ook wel geheten potentiaalvergelijking (omdat de tijd-onafhankelijke elektrische potentiaal er aan voldoet), speelt een rol in tal van problemen. Wij zien uit voorbeeld a) dat stationaire (d.w.z. tijd onafhankelijke) temperatuurverdelingen er aan voldoen. Oplossingen van de vergelijking van Laplace heten harmonische functies.

5.8. Extrema

We beschouwen functies van twee of drie variabelen. Locale, respectievelijk globale, extrema worden gedefinieerd analoog als bij functies van één variabele (vgl. 2.1.4 en 2.1.6).

Een belangrijke rol speelt de volgende stelling, die we niet zullen bewijzen.

5.8.1. Stelling (Weierstrass). Zij $V \subset \mathbb{R}^n$ een begrensde en gesloten verzameling en zij $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ continu op V , dan heeft f op V een globaal maximum en een globaal minimum.

Inwendige punten van de definitieverzameling van f waar f differentieerbaar is en $\text{grad } f = \underline{0}$ heten stationaire punten.

5.8.2. Stelling. Als f een extremum heeft in een inwendig punt \underline{a} van de definitieverzameling van f en als f differentieerbaar is in \underline{a} , dan is $\text{grad } f(\underline{a}) = \underline{0}$, d.w.z. \underline{a} is een stationair punt.

Bewijs. Kies een richting \underline{v} met $|\underline{v}| = 1$. De samengestelde functie $g(t) := f(\underline{a} + t\underline{v})$ heeft in $t = 0$ een extremum en is daar differentieerbaar met $g'(0) = (\text{grad } f(\underline{a}), \underline{v})$. Volgens 2.5.3 is dan $(\text{grad } f(\underline{a}), \underline{v}) = 0$. Omdat dit geldt voor elke richting \underline{v} , is $\text{grad } f(\underline{a}) = \underline{0}$. \square

Voorbeelden. 1) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $\text{grad } f(x,y) = (2x, 2y)$.

Het enige stationaire punt is $(0,0)$. In dit punt heeft f een globaal minimum met functiewaarde 0.

2) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ heeft geen stationaire punten, maar wel een globaal minimum in $(0,0)$. Daar de partiële afgeleiden van f in $(0,0)$ niet bestaan, is f in $(0,0)$ niet differentieerbaar.

3) $f(x,y) = xy$; $\text{grad } f(x,y) = (y,x)$.

Het enige stationaire punt is $(0,0)$, maar f heeft in dat punt geen extremum.

Immers, $f(0,0) = 0$ en $f(x,y) > 0$ in het eerste en derde kwadrant en $f(x,y) < 0$ in het tweede en vierde kwadrant. We noemen het punt $(0,0)$ een zadelpunt.

Samenvattend kan men zeggen dat een functie f op een verzameling V extrema kan hebben:

- a) in inwendige punten van V die stationaire punten van f zijn,
- b) in inwendige punten van V waar f niet differentieerbaar is,
- c) in punten van V die niet inwendig zijn (randpunten van V).

Voorbeeld 4. Bepaal de extrema van $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ op de verzameling
 $V := \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

V is begrensd en gesloten en f is continu, dus volgens 5.8.1 moet f een globaal maximum en een globaal minimum hebben op V . Inwendige punten zijn de punten met $x^2 + y^2 < 1$. Omdat $\text{grad } f(x,y) = (-2x, -2y)$, is $(0,0)$ het enige stationaire punt en $f(0,0) = 1$. Voor de randpunten van V (de punten met $x^2 + y^2 = 1$) is $f(x,y) = 0$ en voor de inwendige punten is $f(x,y) > 0$.

Conclusie. In elk punt van de rand heeft f een globaal minimum (waarde 0); er moet ook een globaal maximum zijn dat niet op de rand kan liggen; er is slechts één stationair punt nl. $(0,0)$, dus in $(0,0)$ heeft f een globaal maximum (waarde

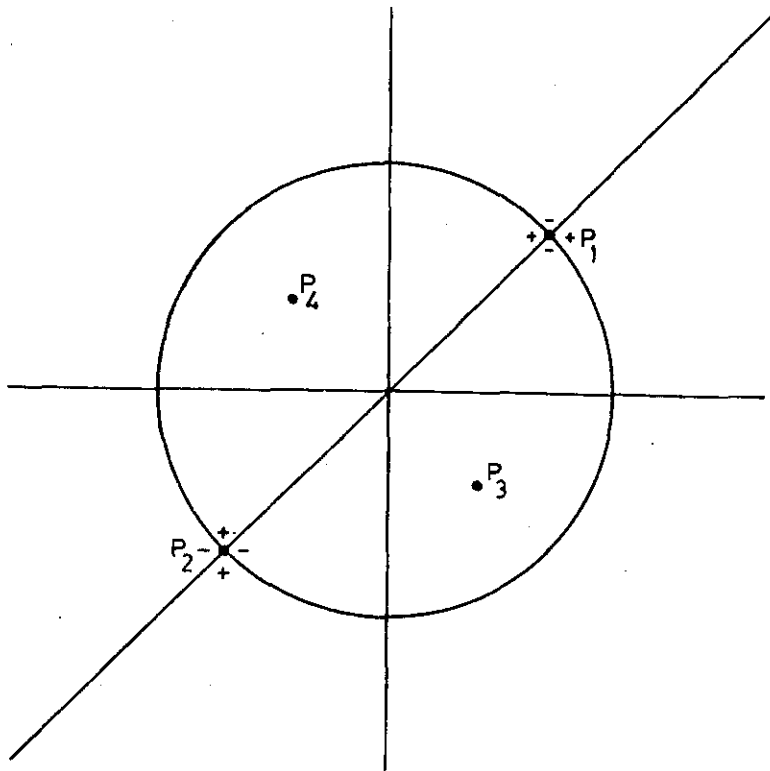
Voorbeeld 5. Bepaal de extrema van $f(x,y) = (x-y)(x^2+y^2-1)$ in \mathbb{R}^2 .

Nu is $\text{grad } f(x,y) = (3x^2 - 2xy + y^2 - 1, -x^2 + 2xy - 3y^2 + 1)$.

Er zijn vier stationaire punten:

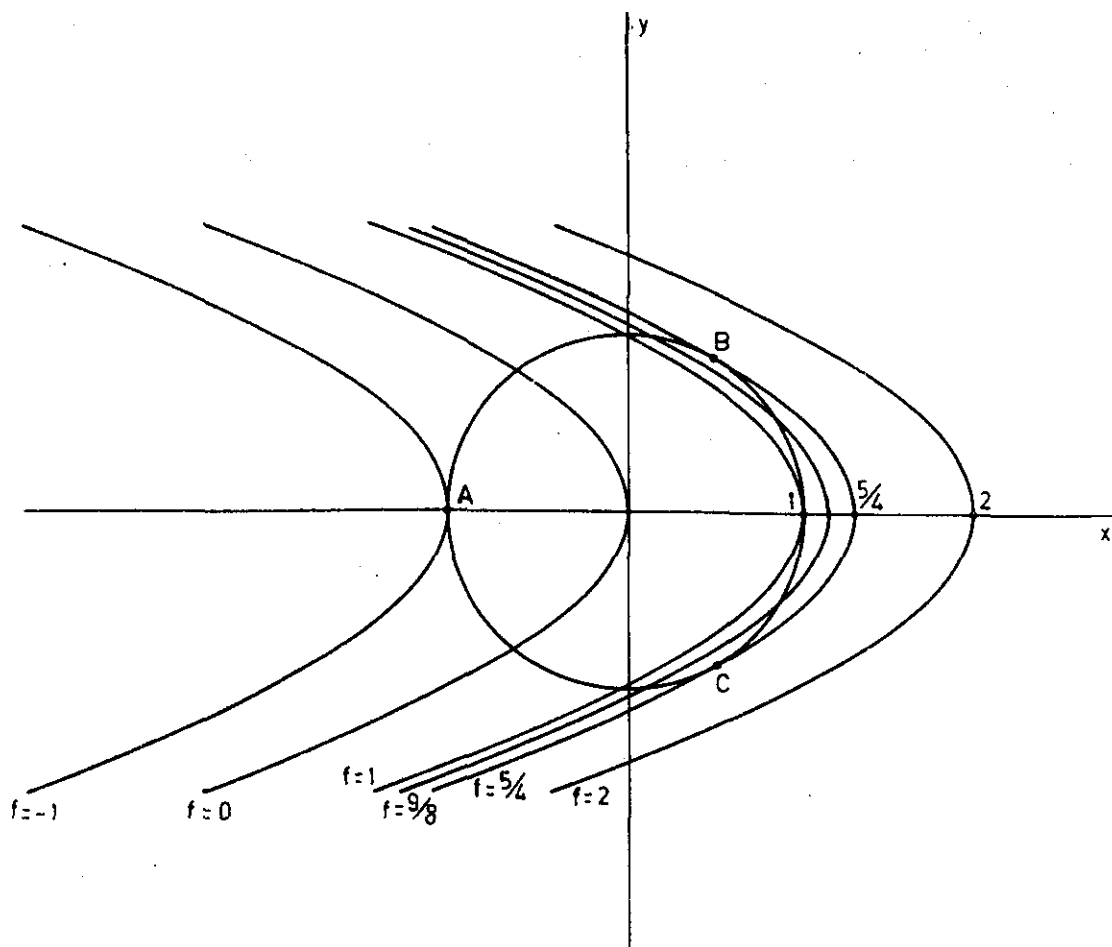
$$P_1 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), P_2 = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \text{ functiewaarde } 0;$$

$$P_3 = \left(\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{6}\sqrt{6}\right), P_4 = \left(-\frac{1}{6}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6}\right), \text{ functiewaarde } \frac{2}{9}\sqrt{6}.$$



In de hoogtekaart zijn de nul-niveaulijnen (nullijnen) getekend, die het vlak in vier gebieden verdelen waar f tekenvast is. De tekenverdeling is ook aangegeven in de hoogtekaart. Hieruit blijkt onmiddellijk dat P_1 en P_2 zadelpunten zijn. Beschouw $V := \{(x,y) \mid x \leq y \text{ en } x^2 + y^2 \leq 1\}$. Op V is $f(x,y) \geq 0$ en op de rand van V is $f(x,y) = 0$. Aangezien V begrensd en gesloten is, moet f dus een maximum hebben in het inwendige van V ; de enige kandidaat is P_4 , dus P_4 is globaal maximum t.o.v. V . Het punt P_4 is t.o.v. de gehele \mathbb{R}^2 slechts een lokaal maximum. Evenzo is P_3 een lokaal minimum.

Voorbeeld 6. Bepaal de extrema van $f(x,y) = x + y^2$ op de verzameling $V := \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Beschouw eerst de inwendige punten van V , dat zijn punten met $x^2 + y^2 < 1$. Daar $\text{grad } f(x,y) = (1, 2y) \neq (0,0)$ zijn er geen stationaire punten in het inwendige van V . Aangezien V begrensd en gesloten is en f continu, moeten de globale extrema op de rand gezocht worden. We tekenen de hoogtekaart.



We zien direct dat het globale minimum van f de waarde -1 heeft en aangenomen wordt in $(-1, 0)$. Om de beide globale maxima te bepalen zoeken we een getal c zó, dat de parabool $x + y^2 = c$ raakt aan de cirkel $x^2 + y^2 = 1$. De voorwaarde waaraan c moet voldoen is dan dat de vierkantsvergelijking $x^2 - x + c = 1$ een tweevoudige wortel heeft. Met de discriminant volgt dan $1 - 4(c-1) = 0$, dus $c = 5/4$. De tweevoudige wortel is $x = \frac{1}{2}$. Het globale maximum wordt dus aangenomen in de punten $(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \sqrt{3})$; de waarde is $5/4$.

We merken op dat het probleem de extrema te bepalen van $f(x, y) = x + y^2$ op de verzameling $W := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, dus op de rand van V , een andere oplossing heeft. Op W geldt $y^2 = 1 - x^2$ en $-1 \leq x \leq 1$; substitutie in $f(x, y)$ geeft $f(x, y(x)) = -x^2 + x + 1$ en $-1 \leq x \leq 1$. Deze functie heeft voor $x = \frac{1}{2}$ een globaal maximum met waarde $5/4$. Er zijn randminima voor $x = -1$, waarde -1 en ook voor $x = 1$, waarde 1 . De functie $f(x, y) = x + y^2$ heeft dus op W de volgende extrema: globale maxima met waarde $5/4$ in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \sqrt{3})$ en $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{3})$,

een globaal minimum met waarde -1 in $(-1,0)$ en een lokaal minimum met waarde $+1$ in $(1,0)$. Als we de extrema van $f(x,y)$ op V bepalen, dan voldoet het lokale minimum niet; op de doorsnede van de x -as en V , d.w.z. op $\{(x,0) \mid -1 \leq x \leq 1\}$, heeft f in $(1,0)$ een globaal maximum want $f(x,0) = x \leq 1 = f(1,0)$.

Als we dus van een functie de extrema op de rand van V bepaald hebben (bijv. door eliminatie zoals in dit voorbeeld of met de methode van 5.9), dan kunnen we niet blindelings deze extrema ook tot extrema van f op V verklaren.

5.9. Extrema met nevenvoorwaarden; Lagrange multiplicatoren

Beschouw het volgende probleem. Zoek de extrema van $f(x,y)$, waarbij alleen die punten in aanmerking komen die voldoen aan $g(x,y) = 0$.

De volgende stelling geeft een nodige voorwaarde voor een extremum.

Stelling. Als f een extremum heeft onder de nevenvoorwaarde $g(x,y) = 0$ in een punt \underline{a} waar f en g differentieerbaar zijn en waar $\text{grad } g(\underline{a}) \neq \underline{0}$, dan is er een getal λ zodat geldt

$$\text{grad } f(\underline{a}) + \lambda \text{ grad } g(\underline{a}) = \underline{0}.$$

We bewijzen de stelling niet.

Meetkundig is de stelling als volgt plausibel te maken. De nevenvoorwaarde $g(x,y) = 0$ is de vergelijking van een kromme K in \mathbb{R}^2 . Heeft f in het punt $\underline{a} \in K$ een extremum, dan raakt de niveaulijn van f in \underline{a} aan de kromme K , de raaklijnen vallen dan samen evenals de normalen en dat betekent dat de vector $\text{grad } f(\underline{a})$ een veelvoud van $\text{grad } g(\underline{a})$ is.

Men gebruikt de stelling aldus.

Los x , y en λ op uit de vergelijkingen

$$\begin{cases} g(x,y) = 0, \\ f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0, \\ f_y(x,y) + \lambda g_y(x,y) = 0. \end{cases}$$

Is (x_0, y_0, λ_0) een oplossing van dit stelsel vergelijkingen, dan kan er in (x_0, y_0) een extremum optreden. In punten waar $\text{grad } g = \underline{0}$ is de methode niet toepasbaar; zulke punten komen dus ook voor extrema in aanmerking en dienen apart onderzocht te worden.

Dit is de multiplicatorenmethode van Lagrange (λ heet de multiplicator).

Voorbeeld. Bepaal de extrema van $f(x,y) = x + y^2$ onder de nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 = 1$ (vgl. voorbeeld 6).

Los op

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ 1 + 2\lambda x = 0, \\ 2y + 2\lambda y = 0. \end{cases}$$

Oplossing:

$$\lambda = -\frac{1}{2}; (x,y) = (1,0); f(1,0) = 1,$$

$$\lambda = \frac{1}{2}; (x,y) = (-1,0); f(-1,0) = -1,$$

$$\lambda = -1; (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\right); f\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 5/4.$$

Met behulp van de stelling van Weierstrass concluderen we tot globale maxima in $(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3})$, een globaal minimum in $(-1,0)$ en een lokaal minimum in $(1,0)$ (ga dit na).

Men kan de multiplicatorenmethode uitbreiden tot functies van meer variabelen en meer nevenvoorwaarden.

Bijvoorbeeld: zoek extrema van $f(x,y,z)$ onder de voorwaarden $g(x,y,z) = 0$ en $h(x,y,z) = 0$. Dit leidt tot het oplossen van x, y, z, λ_1 en λ_2 uit het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} g = 0, h = 0, \\ f_x + \lambda_1 g_x + \lambda_2 h_x = 0, \\ f_y + \lambda_1 g_y + \lambda_2 h_y = 0, \\ f_z + \lambda_1 g_z + \lambda_2 h_z = 0. \end{cases}$$

Hoofdstuk 6. Meervoudige integralen

We zullen in dit hoofdstuk een uitbreiding geven van het begrip $\int_a^b f(t) dt$

dat we in hoofdstuk 2 invoerden. De uitbreiding bestaat er in dat we het interval $[a,b]$ vervangen door andere soorten verzamelingen. De behandeling zal volkomen intuïtief zijn. En passant zullen we onze techniek voor het berekenen van integralen met diverse nuttige substituties uitbreiden.

6.1. Definities en voorbeelden

Allereerst moeten we invoeren het begrip 1-, 2- of 3-dimensionaal gebied. De algemene definitie is lastig; we volstaan met voorbeelden.

1-dimensionale gebieden: $[a,b]$ in \mathbb{R} ; $[a,\infty)$ in \mathbb{R} ;
een stuk van een kromme in \mathbb{R}^2 of \mathbb{R}^3 .

2-dimensionale gebieden: een cirkelschijf, een massieve veelhoek in \mathbb{R}^2 ;
een stuk oppervlak in \mathbb{R}^3 .

3-dimensionale gebieden: een massieve bol, een massief veelvlak,
een willekeurig lichaam in \mathbb{R}^3 .

We zullen nu algemeen het begrip $\int_G f$ invoeren: de bepaalde integraal over

een gebied G . Als dit gebied 2- of 3-dimensionaal is, spreken we van een meervoudige integraal.

De wijze van werken is als in hoofdstuk 2. We proberen het gebied te verdelen in kleine elementaire gebiedjes, die we brokken noemen. Voor deze elementaire gebiedjes (in hoofdstuk 2 waren dat de deelintervallen van een verdeling) is een maat (in hoofdstuk 2 de lengte) gedefinieerd. Van tweedimensionale brokken is de maat de oppervlakte; van driedimensionale brokken is het de inhoud. De maat van een elementair gebiedje E geven we aan met $\mu(E)$. Bij een verdeling van een gebied G (het gebied zal niet steeds precies gelijk zijn aan de vereniging van de elementaire gebiedjes; als het na limietovergang maar goed is, zijn we tevreden), nemen we in ieder elementair deelgebiedje E_i een punt P_i , en berekenen de Riemann-som:

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \mu(E_i),$$

waarbij E_1, \dots, E_n de elementaire gebiedjes zijn waarin we G "verdeeld" hebben, en P_i het in E_i gekozen punt is; $f(P_i)$ is de waarde van de functie f in P_i .

Indien nu de Riemann-sommen voor steeds fijnere verdelingen een limiet hebben (die onafhankelijk moet zijn van de gekozen verdelingen en tussenpunten enz.), dan noemen we dit de integraal van f over het gebied G .

Een notatie is $\int_G f d\mu$; ook wel $\iint_G f d\mu$ of $\iiint_G f d\mu$ als G 2- of 3-dimensionaal

is. Maar we zullen meestal andere notaties gebruiken. Voor nette functies (bijv. continue) en nette gebieden (niet te wilde begrenzingsen e.d.)

bestaat $\int_G f d\mu$.

We bekijken enkele soorten 2- en 3-dimensionale brokken en berekenen hun maat (ten naaste bij; het is voldoende een getal te hebben dat met de maat d.i. oppervlakte of inhoud overeenkomt als de afmetingen naar nul naderen).

Tweedimensionale brokken

a) In \mathbb{R}^2 is de rechthoek $\{(x, y) \mid x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\}$, met $\Delta x := x_2 - x_1$ en $\Delta y := y_2 - y_1$, een brok E met maat

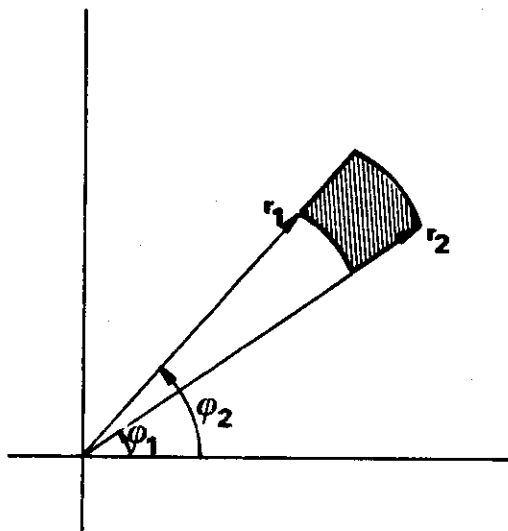
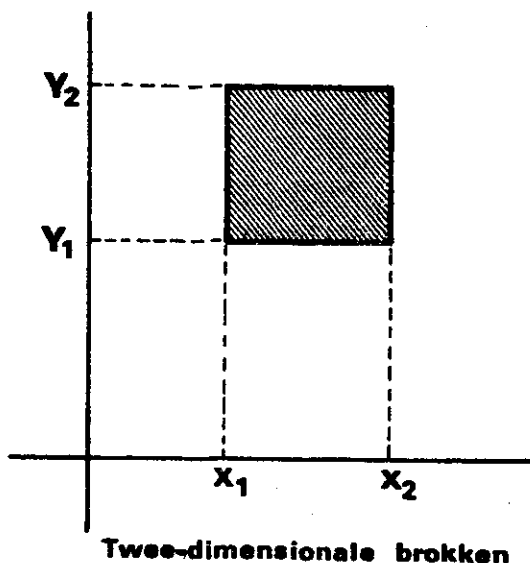
$$\mu(E) = \Delta x \Delta y.$$

Daarbij is verondersteld dat Δx en Δy klein zijn. Als deze brokken gebruikt worden schrijft men $\int_G f d\mu =: \iint_G f(x, y) dx dy$.

b) In \mathbb{R}^2 is het sectorstuk (poolcoördinaten) $:= \{(r, \varphi) \mid r_1 < r < r_2, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$ als $\Delta r := r_2 - r_1$ en $\Delta \varphi := \varphi_2 - \varphi_1$ klein zijn, een brok met maat $\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)(r_2^2 - r_1^2)$. Als r een getal tussen r_1 en r_2 voorstelt is dit ongeveer:

$$r \Delta r \Delta \varphi.$$

We noteren: $\int_G f d\mu =: \iint_G f(r, \varphi) r dr d\varphi$.



Driedimensionale brokken

- c) Een recht balkje met kleine ribbenlengten Δx , Δy en Δz is een brok met maat $\Delta x \Delta y \Delta z$.

Notatie van de meervoudige integraal:

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx dy dz.$$

- d) Een wigstuk in cylindercoördinaten: $\{(r, \varphi, z) \mid r_1 < r < r_2, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2, z_1 < z < z_2\}$ is, als $\Delta r := r_2 - r_1$, $\Delta \varphi := \varphi_2 - \varphi_1$, $\Delta z := z_2 - z_1$ klein zijn, een brok met maat ongeveer $r \Delta r \Delta \varphi \Delta z$ (r is weer een getal tussen r_1 en r_2).

Notatie: $\iiint_G f(r, \varphi, z) \, r dr d\varphi dz.$

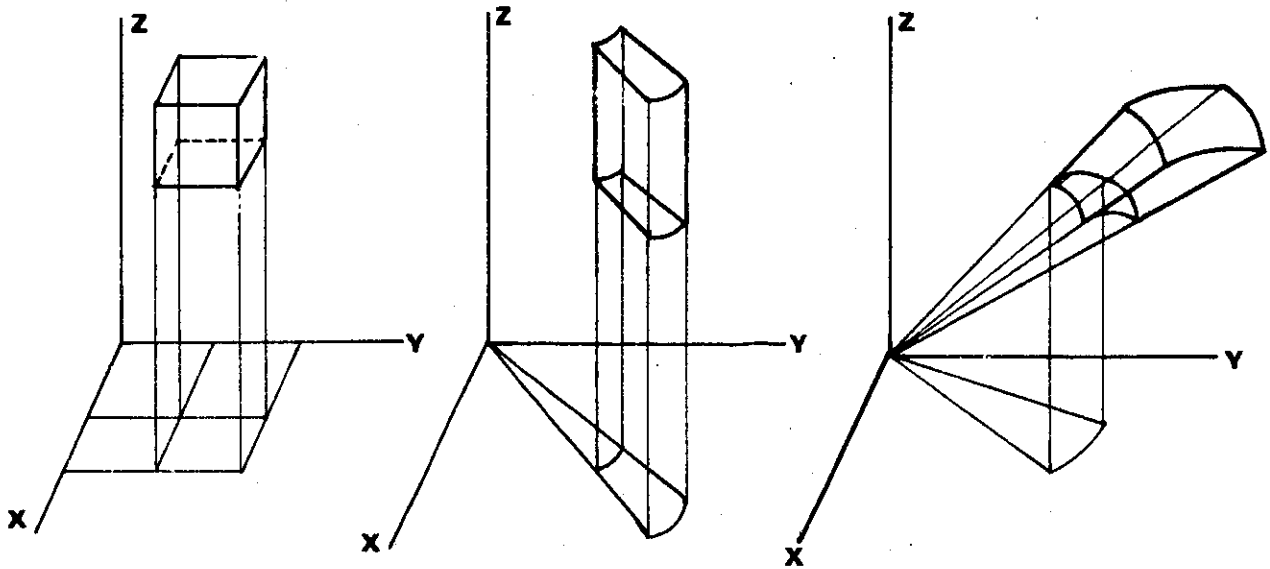
- e) Een blokachtig stuk in bolcoördinaten:

$\{(\rho, \varphi, \theta) \mid \rho_1 < \rho < \rho_2, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2, \theta_1 < \theta < \theta_2\}$ is, als $\Delta \rho := \rho_2 - \rho_1$, $\Delta \varphi := \varphi_2 - \varphi_1$; $\Delta \theta := \theta_2 - \theta_1$ klein zijn, een brok, die bij benadering is een balkje met zijden $\Delta \rho$, $\rho_1 \Delta \theta$ en $\rho_1 \sin \theta_1 \Delta \varphi$. Als ρ een getal tussen ρ_1 en ρ_2 , θ een getal tussen θ_1 en θ_2 voorstelt, is de maat van deze brok bij benadering

$$\rho^2 \sin \theta \, \Delta \rho \, \Delta \theta \, \Delta \varphi.$$

Notatie:

$$\iiint_G f(\rho, \varphi, \theta) \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi.$$



Drie-dimensionale brokken

Voor de bepaalde integraal $\int_G f \, d\mu$ gelden de eigenschappen I, IV, V, VI

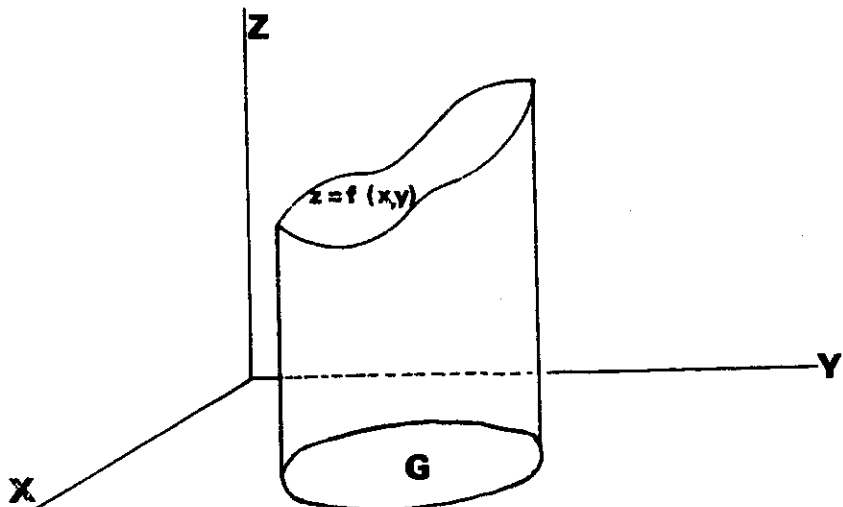
en VII, die we in 2.5.7 voor de integraal over een interval formuleerden, nog steeds, mits we maar overal lengte door maat vervangen.

Voorbeelden van meervoudige integralen:

- 1) Zij G een schijf in \mathbb{R}^2 met massadichtheid $f(x,y) \geq 0$ dan is de totale massa

$$\iint_G f(x,y) \, dx \, dy = \iint_G f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, r \, dr \, d\varphi.$$

De integraal stelt ook voor het volume van het lichaam in \mathbb{R}^3 begrensd door G , het oppervlak $z = f(x,y)$ en de cylinder op de rand van G .



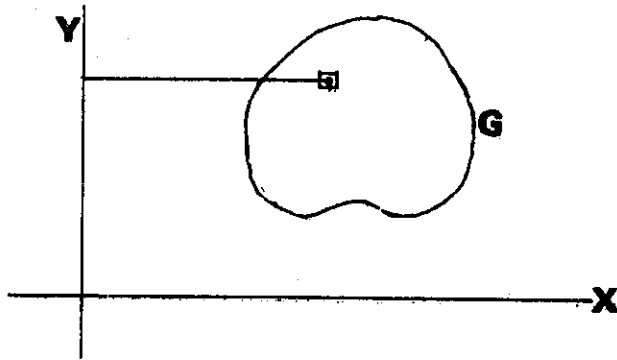
- 2) Zij G een lichaam in \mathbb{R}^3 met een massadichtheid $f(x,y,z)$; zij $\bar{f}(r,\varphi,z) := f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ en $\bar{\bar{f}}(\rho,\varphi,\theta) := f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta)$, dan is de totale massa:

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x,y,z) dx dy dz &= \iiint_G \bar{f}(r,\varphi,z) r dr d\varphi dz = \\ &= \iiint_G \bar{\bar{f}}(\rho,\varphi,\theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

De inhoud van G is:

$$\iiint_G dx dy dz = \iiint_G r dr d\varphi dz = \iiint_G \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Nu volgen enkele voorbeelden uit de mechanica.



- 3) Het statisch moment van schijf G met massadichtheid $f(x,y)$ t.o.v. de y -as is

$$\iint_G x f(x,y) dx dy.$$

- 4) Het traagheidsmoment t.o.v. de z -as van een lichaam L met massadichtheid $f(x,y,z)$ is:

$$\iiint_L (x^2 + y^2) f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_L r^2 \bar{f}(r,\varphi,z) r dr d\varphi dz.$$

- 5) Het traagheidsmoment t.o.v. het vlak $z = 0$ van een lichaam L met massadichtheid $f(r,\varphi,z)$ is:

$$\iiint_L z^2 f(r,\varphi,z) r dr d\varphi dz.$$

6) Uit de momentenstelling volgt voor de coördinaten van het zwaartepunt (ξ, η, ζ) van een lichaam L met massadichtheid $f(x, y, z)$:

$$M \xi = \iiint_L x f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

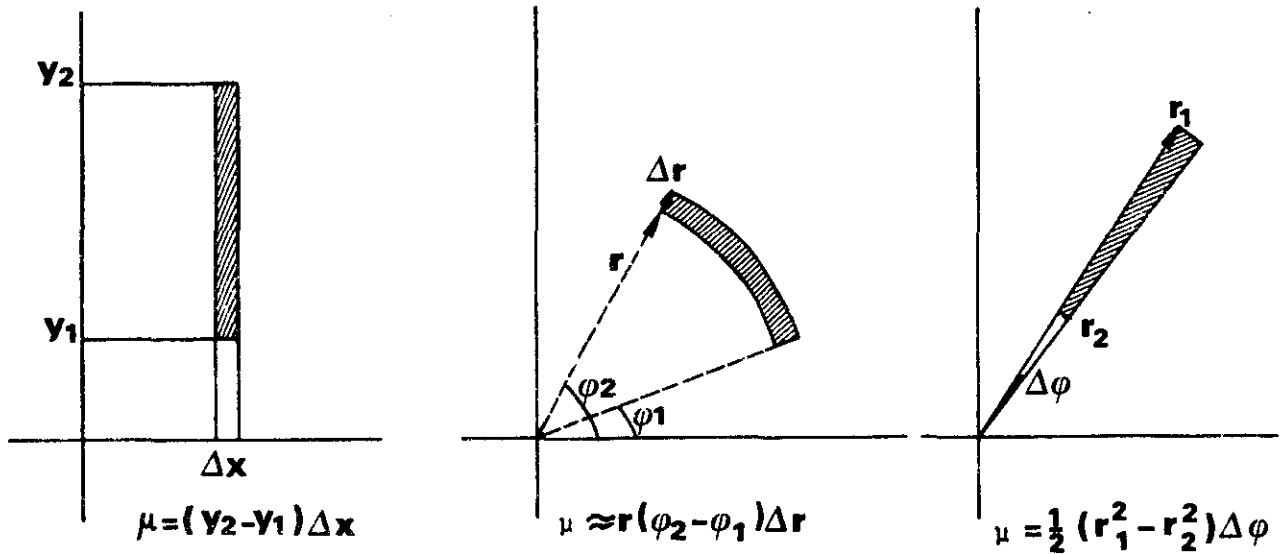
$$M \eta = \iiint_L y f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

$$M \zeta = \iiint_L z f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

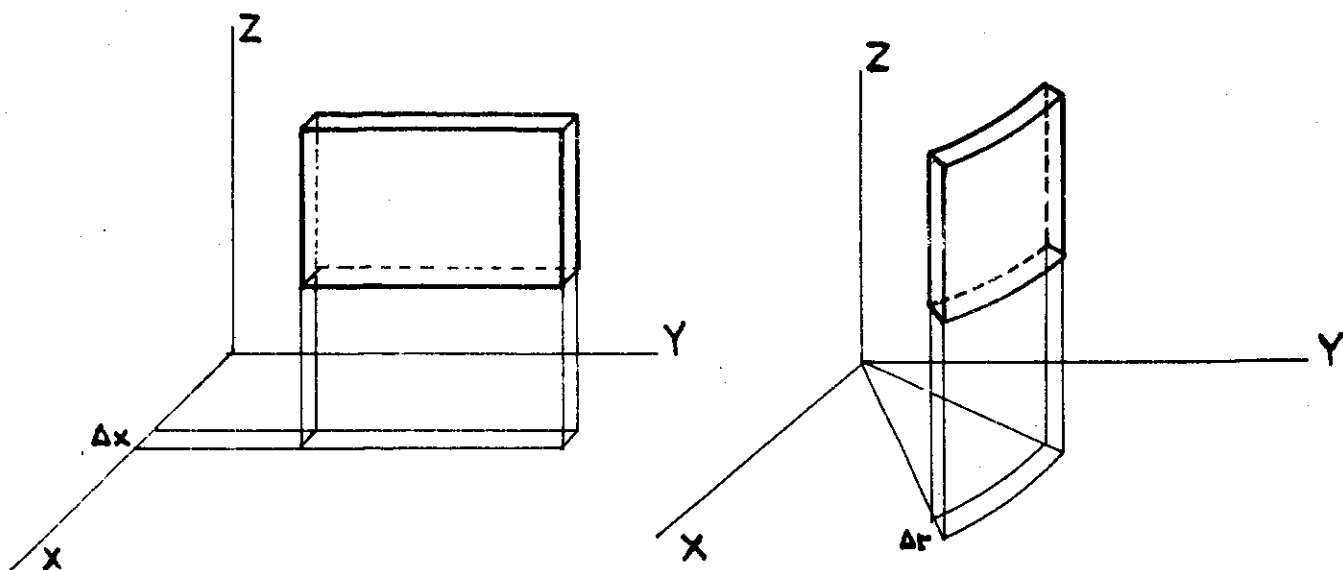
waarbij M de totale massa van L is, dus $M = \iiint_L f(x, y, z) \, dx dy dz$.

6.2. Herhaalde integralen

Met alle formules uit 6.1 zijn we nog niet in staat om iets uit te rekenen. We zullen een methode bespreken om integralen als in 6.1 uit te rekenen door herhaald gebruik te maken van de hoofdstelling (2.5.8). Daartoe beschouwen we ook gebiedjes waarvan maar één afmeting klein is; deze noemen we repen. Voorbeelden van tweedimensionale repen in \mathbb{R}^2 met hun maat:



In \mathbb{R}^3 kunnen we verschillende soorten driedimensionale repen aangeven; we volstaan nu met twee voorbeelden:



$$\mu = (y_2 - y_1)(z_2 - z_1) \Delta x ;$$

$$\mu \approx r(\varphi_2 - \varphi_1)(z_2 - z_1) \Delta r$$

De berekening van meervoudige integralen zullen wij nu terugbrengen tot de berekening van een aantal enkelvoudige integralen. Daartoe verdelen wij het gebied G niet in brokken, doch in gelijksoortige repen. Aan elke reep kennen wij toe de functiewaarde $\int_{\text{reep}} f$. De berekening geschiedt dan met behulp van de volgende enigszins vaag geformuleerde, maar wel plausible stelling.

Stelling. $\int_G f = \int_{\text{over alle repen in } G} \left[\int_{\text{will. reep}} f \right]$.

Deze stelling drukt uit, dat men de integraal van f over G niet alleen als limiet van een som van bijdragen van een verdeling in brokken, maar ook als limiet van een som van bijdragen van een verdeling in repen kan beschouwen, waarbij de bijdrage over een reep zelf weer als limiet van een som te beschouwen is. Wij lichten dit op twee manieren toe voor de dubbelintegraal

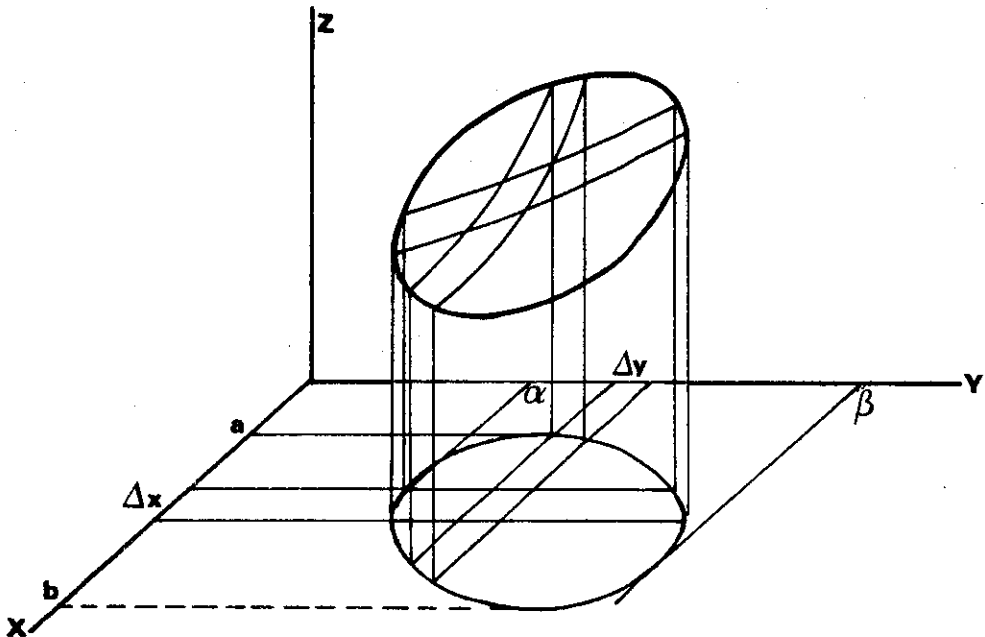
$$\iint_G f(x,y) dx dy .$$

le interpretatie. Interpreteer de dubbelintegraal als de inhoud van de door de grafiek van $f(x,y)$ afgeknotte cylinder boven de schijf G in het xOy -vlak, waarbij wij ons G ingesloten denken door de krommen

$$y = y_1(x) \text{ en } y = y_2(x),$$

die gedefinieerd zijn voor $a \leq x \leq b$. Verdeel G in repen evenwijdig aan de y -as met breedte Δx , dan is de integraal van $f(x,y)$ over zo'n reep, dus de inhoud van de plak boven de reep

$$\int_{\text{reep}} f \approx \Delta x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy .$$



Deze integraal is afhankelijk van de x -coördinaat van de reep. Vervolgens integreren wij over x , dus over de repen, en komen zo tot

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy \right] .$$

Wanneer wij ons het gebied G ingesloten denken door de krommen

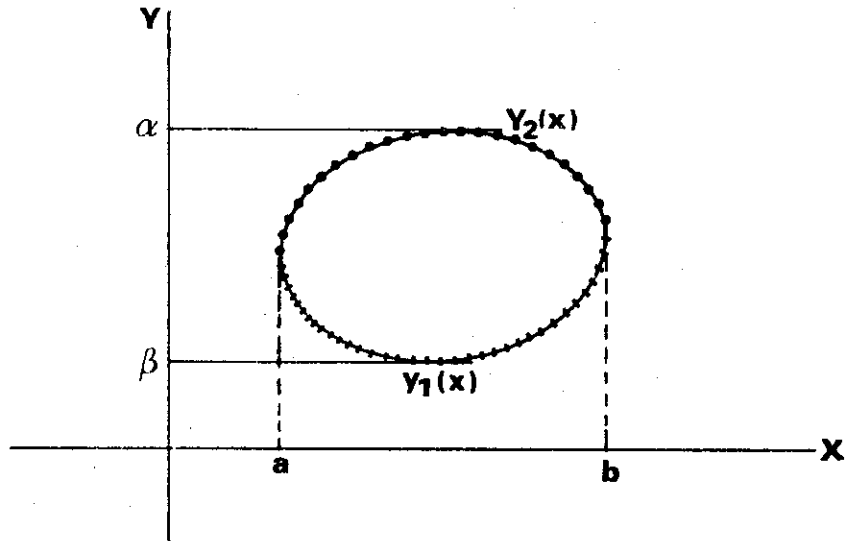
$$x = x_1(y) \text{ en } x = x_2(y) ,$$

die gedefinieerd zijn voor $\alpha \leq y \leq \beta$, en wanneer wij G verdelen in repen

evenwijdig aan de x-as met breedte Δy , dan krijgen wij op analoge wijze

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx \right].$$

De dubbelintegraal is dus op twee manier herleid tot een herhaalde integraal, die op de gewone wijze kan worden berekend.



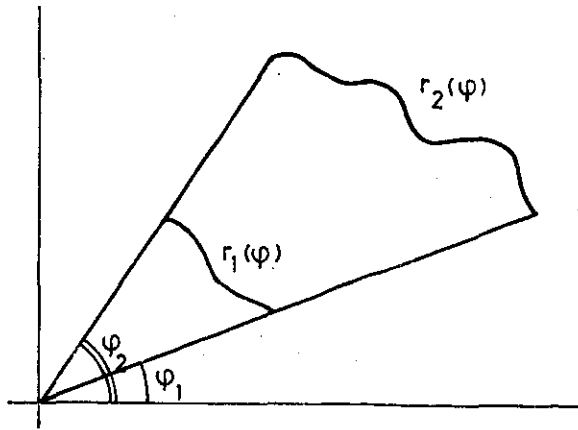
2e interpretatie. Interpreteer de dubbelintegraal als de totale massa van de schijf G met massadichtheid $f(x,y)$. Dan is $\int f$ de totale massa van de reep

reep. Ook hier vindt men als de herleiding van dubbelintegraal tot herhaalde integraal:

$$\iint_G f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx.$$

Is het gebied G begrensd door de in poolcoördinaten gegeven lijnen $\varphi = \varphi_1$ en $\varphi = \varphi_2$ en de krommen $r = r_1(\varphi)$, $r = r_2(\varphi)$ (zie figuur), dan is

$$\begin{aligned} \iint_G f(x,y) dx dy &= \iint_G f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \end{aligned}$$

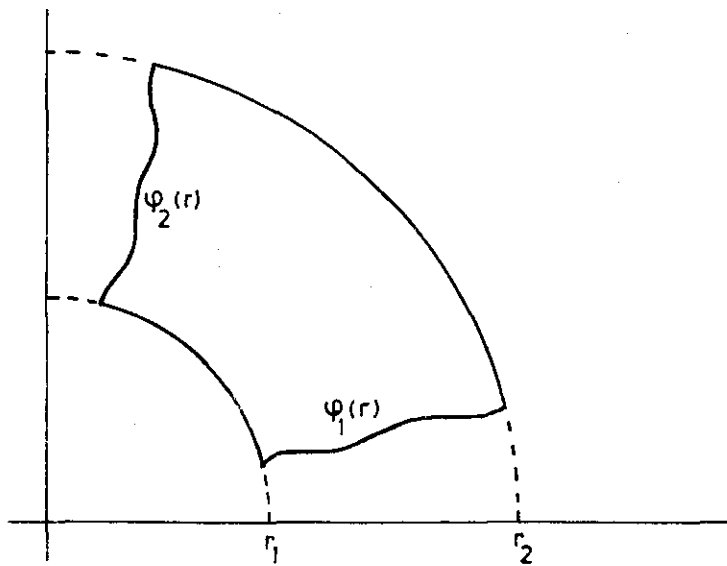


Evenzo:

$$\iint_G f(xy) dx dy = \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi,$$

in het geval dat G bepaald wordt door de ongelijkheden

$$r_1 \leq r \leq r_2, \quad \varphi_1(r) \leq \varphi \leq \varphi_2(r) \quad (\text{zie figuur}).$$



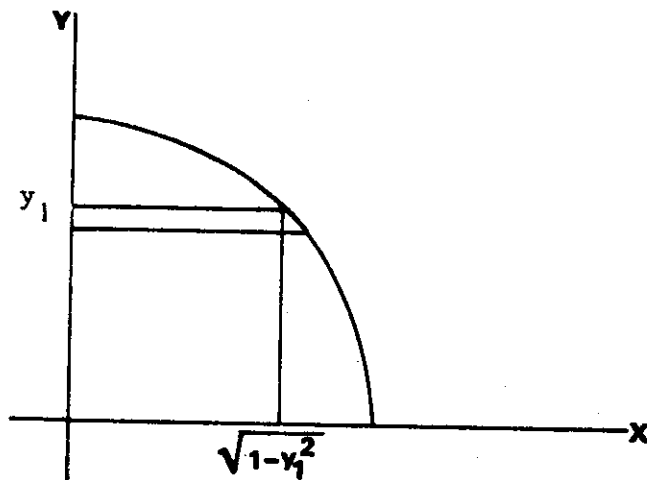
We bespreken een groot aantal voorbeelden.

Voorbeeld 1.

$$\iint_G xy^2 dx dy \text{ met } G : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1. \text{ Antwoord: } 0 \text{ (ga dit na).}$$

Voorbeeld 2. Zij G het kwart in eerste kwadrant van $x^2 + y^2 \leq 1$.

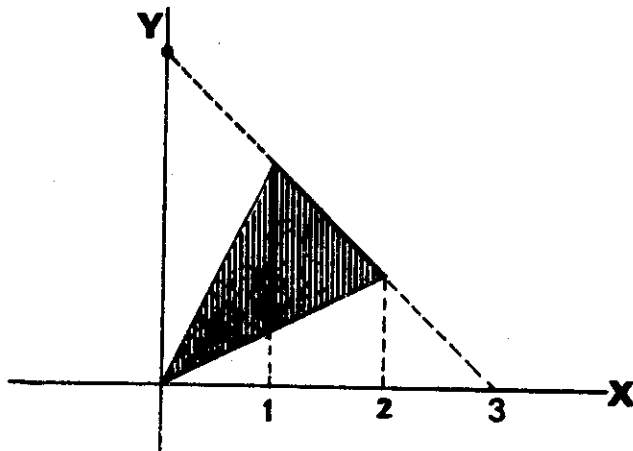
$$\text{Gevraagd wordt } \iint_G e^{x^2+y^2} xy dx dy.$$



Verdeel G in repen evenwijdig aan de x-as. Dan

$$\begin{aligned} \iint_G e^{x^2+y^2} xy dx dy &= \int_0^1 y e^{y^2} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x e^{x^2} dx = \int_0^1 y e^{y^2} dy \cdot \frac{1}{2}(e^{1-y^2} - 1) = \\ &= \frac{1}{2}e \int_0^1 y dy - \frac{1}{4} \int_0^1 e^{y^2} dy^2 = \frac{1}{4}e - \left(\frac{1}{4}e - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 3. Zij G de driehoek die in het xOy-vlak wordt ingesloten door de rechten $y = 2x$, $2y = x$, $x + y = 3$.



Om $\iint xy dx dy$ over dit gebied te berekenen verdelen wij G eerst door de rechte $x = 1$ in twee gebieden G_1 en G_2 , die wij elk in repen evenwijdig aan de y-as verdelen.

$$\begin{aligned}
 \iint_G &= \iint_{G_1} + \iint_{G_2} = \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{2x} xydy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} xydy = \\
 &= \int_0^1 xdx \cdot \frac{1}{2}(4x^2 - \frac{1}{4}x^2) + \int_1^2 xdx \cdot \frac{1}{2}[(3-x)^2 - \frac{1}{4}x^2] = \\
 &= \frac{15}{8} \int_0^1 x^3 dx + \frac{1}{8} \int_1^2 (3x^3 - 24x^2 + 36x) dx = \frac{13}{8} .
 \end{aligned}$$

Behandelen we dit voorbeeld met poolcoördinaten, dan vinden we:

$$\begin{aligned}
 \iint_G xydx dy &= \iint_G r^3 \cos \varphi \sin \varphi dr d\varphi = \\
 &= \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\arctan 2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{3(\cos \varphi + \sin \varphi)^{-1}} r^3 dr = \\
 &= \frac{81}{4} \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\arctan 2} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi = \frac{81}{4} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{t}{(t+1)^4} dt = \\
 &= \frac{81}{4} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{(t+1)^3} - \frac{1}{(t+1)^4} \right) dt = \frac{13}{8} ,
 \end{aligned}$$

waarbij we $t = \tan \varphi$ gesubstitueerd hebben.

Voorbeeld 4. Gevraagd $\int_0^\pi dx \int_0^{\pi/2} \sin(x+y)e^{\sin y} dy$.

De binnenste integraal is zeer moeilijk. Wij schrijven de herhaalde integraal eerst als dubbelintegraal over het gebied G : de rechthoek $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Vervolgens verdelen wij G in repen evenwijdig aan de x -as, dan

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi/2} f(x,y) dy &= \iint_G f(x,y) dx dy = \int_0^{\pi/2} dy \int_0^{\pi} f(x,y) dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} dy \cdot e^{\sin y} \int_0^{\pi} \sin(x+y) dx = - \int_0^{\pi/2} e^{\sin y} dy [\cos(\pi+y) - \cos y] = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{\sin y} \cos y dy = 2 [e^{\sin \frac{\pi}{2}} - e^0] = 2(e-1). \end{aligned}$$

Voorbeeld 5. Gevraagd $\int_0^{\infty} y^5 dy \int_{y^2}^{\infty} \frac{dx}{1+x^8}$.

Daar de binnenste integraal zeer moeilijk is, schrijven wij eerst een dubbel-integraal. Het gebied G is het gebied boven de x-as, dat rechts van de parabool $y^2 = x$ ligt. Dit gebied verdelen wij in repen evenwijdig met de y-as, dan

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y^5 dy \int_{y^2}^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} &= \iint_G \frac{y^5}{1+x^8} dx dy = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} \int_0^{\sqrt{x}} y^5 dy = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} \cdot \frac{1}{6} x^3 = \frac{1}{24} \int_0^{\infty} \frac{dx^4}{1+x^8} = \frac{1}{24} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{24} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{48}, \end{aligned}$$

waarbij: $x^4 = t = \tan \varphi$.

Voorbeeld 6. We berekenen de voor de statistiek uiterst belangrijke integraal

$$I := \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Nu is

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_G e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \\
 &= \iint_G e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4},
 \end{aligned}$$

waarbij G het eerste kwadrant voorstelt.

Dus

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \text{ of } \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1.$$

Voorbeeld 7. Gevraagd $\iint_G \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^2}$ over G: $4x^2 + y^2 \geq 1$.

Wij voeren poolcoördinaten in. De vergelijking van de ellips $4x^2 + y^2 = 1$ in poolcoördinaten is $r^2(4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1$. De integraal gaat over in

$$\begin{aligned}
 \iint_G \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^2} &= \iint_G \frac{r dr d\varphi}{r^4} = 4 \iint_{\frac{1}{4}G} \frac{dr d\varphi}{r^3} = \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^3} = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \left[-\frac{1}{r^2} \right]_1^{\infty} = \\
 &\quad \frac{1}{\sqrt{4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} (4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{5\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Voorbeeld 8. Gevraagd de inhoud die wordt ingesloten door de cilindrs $x^2 + y^2 = 1$ en $x^2 + z^2 = 1$. Wij beschouwen het lichaam als de cylinder op $x^2 + y^2 = 1$ in het xOy -vlak, die wordt afgeknot door de grafiek van $z = \sqrt{1-x^2}$. De gevraagde inhoud is dus

$$8 \iint_G \sqrt{1-x^2} dx dy,$$

waarbij G het eerste kwadrant van $x^2 + y^2 \leq 1$ is.

Verdeel G in repen evenwijdig aan de y -as, dan volgt

$$8 \iint_G \sqrt{1-x^2} dx dy = 8 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = 8 \int_0^1 (1-x^2) dx = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

Voorbeeld 9. Gevraagd de inhoud van het lichaam dat wordt bepaald door

$$0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq z^2 - x^2 - y^2.$$

Dit lichaam blijkt te zijn een kegel met σ als top en de z -as als as (vgl. p. 140).

De grondcirkel is de cirkel in $z = 1$, die als projectie op het xOy -vlak heeft de cirkel $x^2 + y^2 = 1$.

Noem deze projectie G , dan is de gevraagde inhoud (als functies worden $z = 1$ en $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ beschouwd):

$$\begin{aligned} & \iint_G 1 \cdot dx dy - \iint_G \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy = \pi - \iint_G r \cdot r dr d\varphi = \\ & = \pi - 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \pi - 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \pi \quad (= \text{oppervlakte "grondvlak"} \times \frac{1}{3} \text{ hoogte}). \end{aligned}$$

Door de stelling van deze paragraaf (vgl. p.178) toe te passen op een drievoudige integraal vinden we:

$$\iiint_G f d\mu = \int_{\text{over alle repen in } G} \left[\iint_{\text{willekeurige reep}} f d\mu \right].$$

Op de binnenste integraal passen we de stelling nogmaals toe. Het resultaat kan beschreven worden als volgt.

G zij het gebied in \mathbb{R}^3 . Op G zij gedefinieerd $f(x,y,z)$. Laat G liggen tussen en geraakt worden door de vlakken $x = a$ en $x = b$, beide dus loodrecht op de x -as.

Breng aan een willekeurig vlak loodrecht op de x -as en laat de doorsnede van dit vlak met G liggen tussen en geraakt worden door de vlakken

$$y = y_1(x) \quad \text{en} \quad y = y_2(x).$$

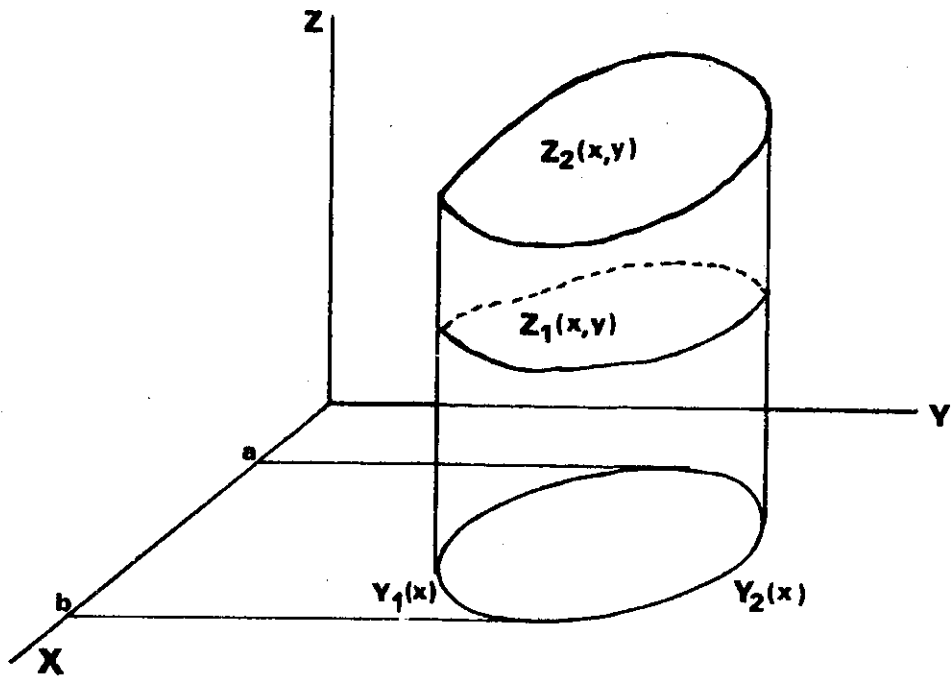
Breng aan een willekeurige verticale rechte in het willekeurige vlak en laat deze rechte de doorsnede met G snijden in de punten

$$z = z_1(x,y) \quad \text{en} \quad z = z_2(x,y).$$

Dan is

$$\iiint_G f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz.$$

Een soortgelijke formule geldt voor andere volgorden en andere coördinaatssystemen (cylindercoördinaten, bolcoördinaten).



Voorbeeld 10. Gevraagd $\iiint \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$ over het gebied G in het eerste octant dat wordt begrensd door de coördinaatvlakken en het vlak $x+y+z = 1$.

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3} &= \int_{x=0}^1 dx \int_{y=0}^{1-x} dy \int_{z=0}^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{-1}{2(x+y+z+1)^2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} = \\ &= -\frac{1}{8} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(x+y+1)^2} = \\ &= -\frac{1}{8} \int_0^1 (1-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\frac{-1}{x+y+1} \right]_{y=0}^{y=1-x} = \\ &= -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right] = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 11. Gevraagd $\iiint \frac{yz}{x^2} dx dy dz$ over de oneindig lange balk, die wordt beschreven door $0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, 1 \leq x$.

$$\iiint \frac{yz}{x^2} dx dy dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x^2} \int_0^1 y dy \int_0^1 z dz = \frac{1}{4}.$$

Voorbeeld 12. Gevraagd het traagheidsmoment t.o.v. de z-as van de homogene kubus $|x| \leq h, |y| \leq h, |z| \leq h$.

$$\begin{aligned} T &= \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_{-h}^h dz \int_{-h}^h dy \int_{-h}^h (x^2 + y^2) dx = \\ &= 2h \int_{-h}^h dy \left(\frac{2}{3} h^3 + 2hy^2 \right) = \frac{16}{3} h^5. \end{aligned}$$

Voorbeeld 13. Gevraagd $\iiint \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ over $G: |z| \geq 3$.

1e manier: met cylindercoördinaten $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$.
Dan volgt

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{r dr d\varphi dz}{(z^2 + r^2)^2} &= 2 \int_3^\infty dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^2} = \\ &= -2\pi \int_3^\infty dz \left[\frac{1}{z^2 + r^2} \right]_{r=0}^{r=\infty} d\varphi = 2\pi \int_3^\infty \frac{dz}{z^2} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

2e manier: met bolcoördinaten $x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta$.

Nu hebben we

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\rho}{\rho^4} &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{3/\cos \theta}^\infty \frac{\sin \theta}{\rho^2} d\rho = \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \left[-\frac{1}{\rho} \right]_{3/\cos \theta}^\infty = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 14. Gevraagd het traagheidsmoment t.o.v. de z-as van het lichaam G, dat door het vlak $z = x$ wordt afgesneden van de omwentelingsparaboloïde $x^2 + y^2 = z$. Wij voeren cylindercoördinaten in; dan is de vergelijking van het vlak $z = r \cos \varphi$ en van de paraboloïde $z = r^2$.

Voor de projectie van de snijfiguur geldt $r = \cos \varphi$.

$$\begin{aligned} T &= \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint r^3 dr d\varphi dz = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^3 dr \int_{r^2}^{r \cos \varphi} dz = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} dr [r^4 \cos \varphi - r^5] = \frac{1}{15} \int_0^{\pi/2} \cos^6 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{96} \text{ (zie 2.9.6).} \end{aligned}$$

Stelling van Guldin. De inhoud van een omwentelingslichaam is gelijk aan het product van de oppervlakte van een meridiaandoorsnede en de lengte van de baan die het zwaartepunt van de meridiaandoorsnede bij de wenteling aflegt.

Bewijs. Stel dat het omwentelingslichaam L ontstaat door wenteling om de z-as van de in het xOz-vlak gelegen schijf G. Wij gebruiken cylindercoördinaten.

$$\text{Inhoud} = \iiint_L dx dy dz = \iiint_L r dr d\varphi dz = 2\pi \iint_G r dr dz = 2\pi \iint_G x dx dz .$$

Voor de x-coördinaat ξ van het zwaartepunt van G geldt

$$\xi \iint_G dx dz = \iint_G x dx dz ,$$

dus

$$\text{Inhoud} = 2\pi \xi \cdot \text{Opp. G.}$$

Voorbeeld 15. Gevraagd de inhoud van het lichaam, begrensd door

$$[\sqrt{x^2 + y^2} - a]^2 + z^2 = b^2 , \quad (a > b > 0)$$

Uit het onderzoek van de doorsnede met $x = 0$ en met $z = 0$ blijkt, dat het lichaam een torus is. De inhoud is dus

$$2\pi a \cdot \pi b^2 = 2\pi^2 ab^2 .$$

6.3. Enkele formules voor lengte en oppervlak

Naast de reeds behandelde voorbeelden kunnen we, uitgaande van hetzelfde beginsel van verdelingen in brokken en limietovergang, formules afleiden voor de lengte van gebogen krommen en voor de oppervlakte van ronde oppervlakken. Formules voor de lengte van een kromme zijn uiteraard geen eenvoudige integralen.

6.3.1. De lengte van de kromme met vergelijking $y = f(x)$ tussen de punten $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$ met $a < b$:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx .$$

6.3.2. Is $x = x(t)$, $y = y(t)$ een parametervoorstelling van een kromme, dan is de lengte tussen

$(x(\alpha), y(\alpha))$ en $(x(\beta), y(\beta))$ met $\alpha < \beta$:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt .$$

6.3.3. Is $r = r(\varphi)$ de vergelijking van een kromme in poolcoördinaten, dan is de lengte tussen $(\varphi_1, r(\varphi_1))$ en $(\varphi_2, r(\varphi_2))$ met $\varphi_1 < \varphi_2$:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + (r(\varphi))^2} d\varphi .$$

6.3.4. Is $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ een parametervoorstelling van een kromme in poolcoördinaten, dan is de lengte tussen

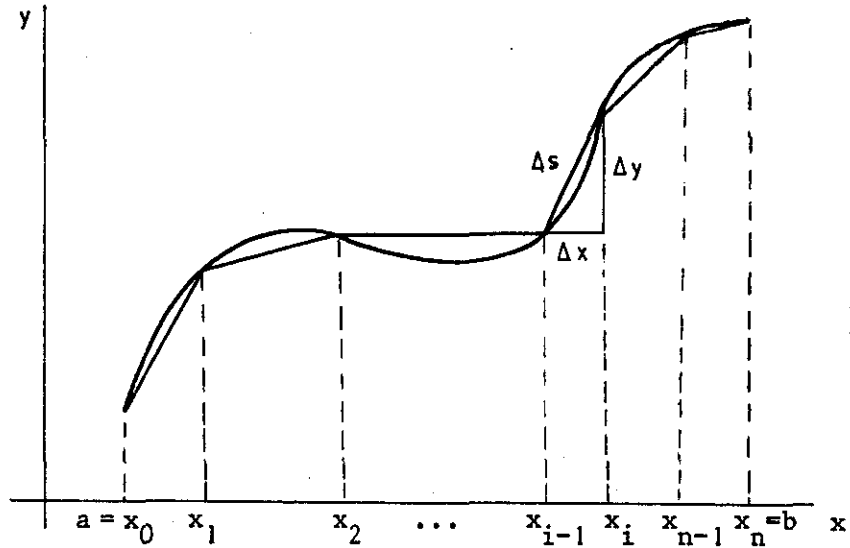
$(\varphi(\alpha), r(\alpha))$ en $(\varphi(\beta), r(\beta))$:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\varphi})^2} dt ,$$

waarbij $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ en $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$.

Men kan de juistheid van de formules 6.3.1 t/m 6.3.4 inzien door de lengte langs de kromme te benaderen door de lengte van een aantal koorden en de stelling van Pythagoras toe te passen.

Dit alles wordt gesuggereerd door de volgende figuur.



Dus

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 ,$$

$$\Delta s = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x .$$

Beschouw:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i .$$

Limietovergang levert:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad \text{dit is formule (6.3.1) .}$$

Schrijft men, uitgaande van $(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$,

$$\Delta s = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \Delta t ,$$

dan leidt dit via sommeren en limietovergang tot

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} dt \quad \text{dit is formule (6.3.2) .}$$

Past men deze formule toe met de speciale parametervoorstelling

$$\begin{cases} x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi , \\ y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi , \end{cases}$$

waar φ de parameter is, dan vindt men formule 6.3.3.

Passen we 6.3.2 toe op de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \varphi(t) , \\ y(t) = r(t) \sin \varphi(t) , \end{cases}$$

dan volgt 6.3.4.

Toepassing van de driedimensionale versie van de stelling van Pythagoras levert op dezelfde manier het volgende resultaat.

6.3.5. Is $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ een parametervoorstelling van een kromme in \mathbb{R}^3 , dan is de lengte tussen

$(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ en $(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} dt .$$

Voorbeelden

1) De lengte van één boog van de cycloïde: (5.3 voorbeeld 6)

$$\begin{cases} x(t) = at - a \sin t \\ y(t) = a - a \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

is $8a$.

Immers $\dot{x} = a(1 - \cos t)$, $\dot{y} = a \sin t$. Toepassing van formule 6.3.2 geeft

$$s = \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 4a \int_0^{\pi} \sin u du = 8a ,$$

waarbij $u = \frac{1}{2}t$.

- 2) De lengte van de cardioïde (5.2.1) $r = 2(1 - \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, volgt met behulp van 6.3.3:

$$\dot{r} = 2 \sin \varphi; s = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \varphi} \, d\varphi = 16 .$$

- 3) De lengte van een winding van de schroeflijn $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, $z = b\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ is gelijk aan $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$. (Behalve met 6.3.5 is dit ook met elementaire stereometrie in te zien.)

- 4) De lengte van het stuk van de parabool $y = \frac{1}{2}x^2$ gelegen tussen $x = 0$ en $x = 1$ is

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \left. x\sqrt{x^2 + 1} \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx = \\ &= \sqrt{2} - s + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{2} - s + \left. \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right|_0^1 = \\ &= \sqrt{2} - s + \ln(1 + \sqrt{2}) \quad (\text{vgl. p. 82}). \end{aligned}$$

Dus

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) .$$

- 5) Proberen we de lengte van de ellips $x(\varphi) = a \cos \varphi$, $y(\varphi) = b \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, te berekenen, dan stuiten we op de integraal

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \, d\varphi .$$

Deze integraal, een zg. elliptische integraal, is niet in gesloten vorm te berekenen. De waarden van elliptische integralen zijn in tabellenboeken op te zoeken.

6.3.6. We berekenen de eenvoudige formule voor de vlakke oppervlakte van het gebied G bepaald door $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $0 \leq r \leq r(\varphi)$ en vinden (vgl. p. 180, onderaan)

$$\mathcal{O} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (r(\varphi))^2 d\varphi . \quad (1)$$

Voorbeelden

6) Het oppervlak binnen de cardioïde $r = 2(1 - \cos \varphi)$ (vgl. p. 139) is

$$2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = 6\pi .$$

7) Gevraagd de oppervlakte \mathcal{O} van de lemniscaat, die in poolcoördinaten de vergelijking $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ heeft. (In rechthoekige coördinaten is de vergelijking $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$).

Wij kunnen de grafiek tekenen na opgemerkt te hebben dat er symmetrie t.o.v. de x-as en t.o.v. de y-as bestaat, en dat $\sqrt{\cos 2\varphi}$ slechts betekenis heeft als

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{en} \quad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4} .$$

Dus

$$\mathcal{O} = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2 .$$

8) Gevraagd de oppervlakte \mathcal{O} van de lus van het folium van Descartes (zie 5.5.7), waarvan de vergelijking in rechthoekige, resp. in poolcoördinaten luidt

$$x^3 + y^3 = 3xy \quad \text{resp.} \quad r = \frac{3 \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} .$$

Formule (1) levert

$$\mathcal{O} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{9 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi .$$

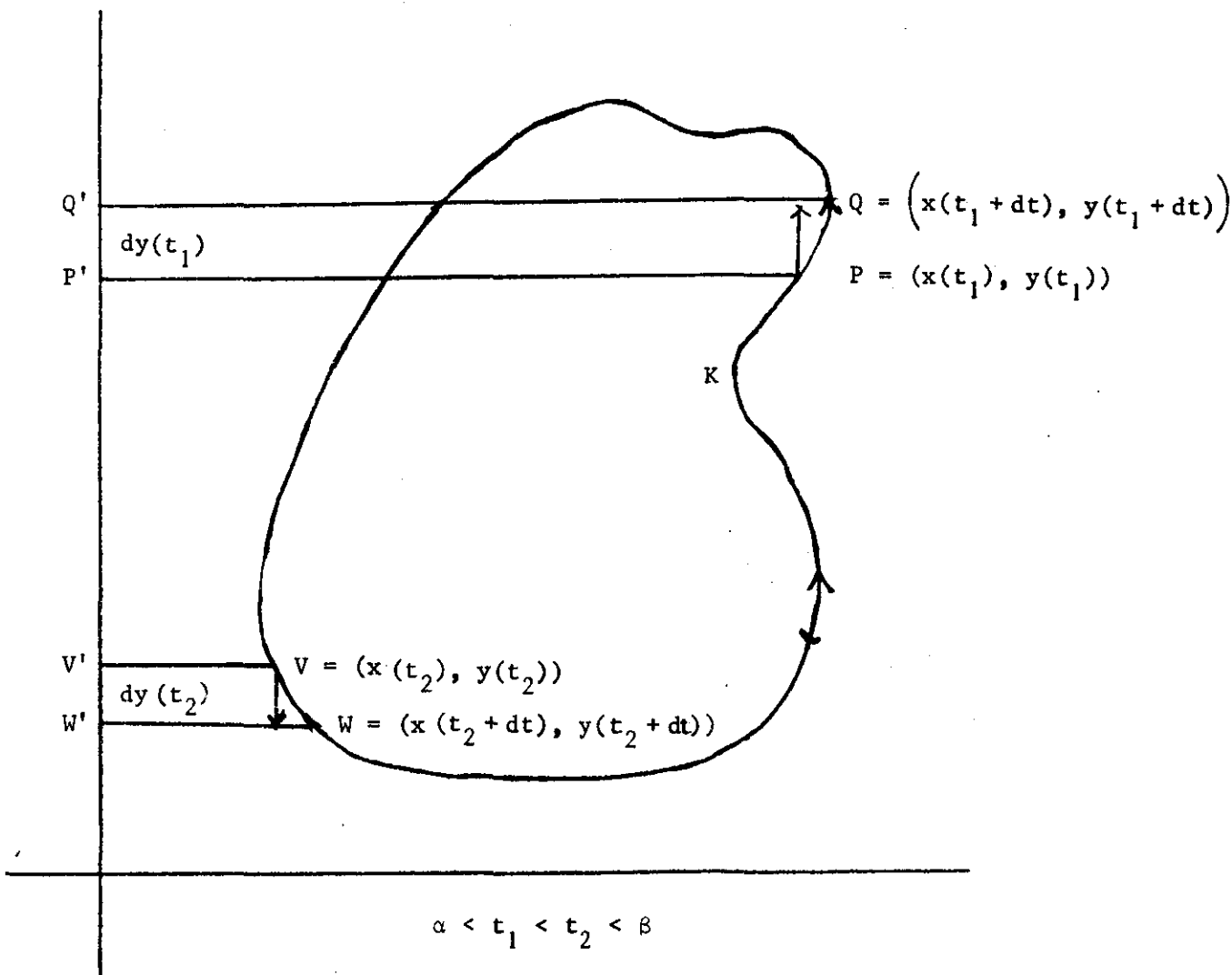
Met de substitutie $t = \tan \varphi$ vinden we

$$\mathcal{O} = \frac{9}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(t^3 + 1)^2} = \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{d(t^3 + 1)}{(t^3 + 1)^2} = \frac{3}{2} .$$

6.3.7. Als $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, een gesloten kromme voorstelt (d.w.z. $x(\alpha) = x(\beta)$, $y(\alpha) = y(\beta)$), die voor toenemende t in positieve zin doorlopen wordt (d.w.z. men heeft het binnengebied aan de linkerhand als men de kromme in de zin van toenemende t doorloopt), dan is de omsloten oppervlakte:

$$\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt = - \int_{\alpha}^{\beta} x'(t)y(t)dt .$$

De eerste formule wordt plausibel gemaakt met de volgende schets.



oppervlakte $PQQ'P' \approx x(t_1)dy(t_1) \approx x(t_1)y'(t_1)dt$
 oppervlakte $WVV'W' \approx x(t_2)(-dy(t_2)) \approx -x(t_2)y'(t_2)dt .$

$$\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt .$$

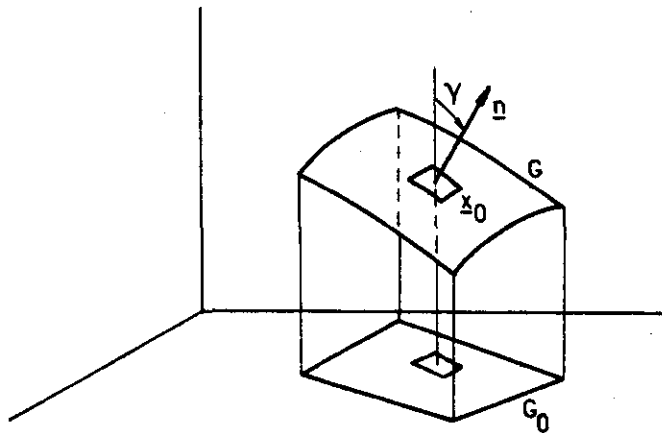
Voorbeeld 9. Het oppervlak van de ellips $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$ is met deze formule:

$$\sigma = \int_0^{2\pi} a \cos \varphi \cdot b \sin \varphi \, d\varphi = \pi ab .$$

6.3.8. Is G het oppervlak $z = f(x,y)$ waarbij $(x,y) \in G_0$, dan is de oppervlakte van G :

$$\sigma = \iint_{G_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dx dy .$$

De volgende beschouwing leidt ons tot dit resultaat.



Zij $\underline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in G$ en neem aan dat f differentieerbaar is. Dan wordt het raakvlak V aan G in \underline{x}_0 gegeven door

$$(z - z_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

oftewel $(\underline{n}, \underline{x} - \underline{x}_0) = 0$, waar $\underline{n} := (-f_x, -f_y, 1)$ (afgeleiden genomen in (x_0, y_0)). De vector \underline{n} staat dus loodrecht op G . De hoek γ die deze vector met de positieve z -as maakt voldoet aan $\cos \gamma = 1/\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$. Laat nu E_0 een brok in G_0 zijn en laat $(x_0, y_0) \in E_0$. Met E_0 correspondeert een brok $E := \{(x, y, z) \in G \mid (x, y) \in E_0\}$ van G en een brok

$E_r := \{(x, y, z) \in V \mid (x, y) \in E_0\}$ van V . Men kan laten zien dat de oppervlakte van E_r een benadering is voor de oppervlakte van E . De oppervlakte

van E_r is gelijk aan $\frac{\mu(E_0)}{\cos \gamma}$. Derhalve vinden we, als $\mu(E_0) = \Delta x \Delta y$:

$$\mu(E) \approx \mu(E_r) \approx \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \Delta x \Delta y.$$

Voorbeeld 10. Gevraagd de oppervlakte σ van de kegel $z^2 = x^2 + y^2$, die binnen de cylinder $x^2 + y^2 = 2x$ ligt.

Voor $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ is $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, dus

$$\sigma = 2 \iint_{G_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = 2 \iint_{G_0} \sqrt{2} dx dy = 2\sqrt{2} \pi.$$

6.3.9. Gaat men in 6.3.8. op cylindercoördinaten over (dan is $z = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$), dan vindt men

$$\sigma = \iiint_{G_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} r dr d\varphi.$$

(Ga dit na.)

Voorbeeld 11. De oppervlakte van de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ is met $G_0 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$2 \iiint_{G_0} \sqrt{1 + \frac{r^2}{1-r^2}} r dr d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 4\pi \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_0^1 = 4\pi$$

Voorbeeld 12. We berekenen de oppervlakte van de torus $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$ ($a > b > 0$) (zie 6.2, voorbeeld 15).

In cylindercoördinaten luidt de vergelijking

$$(r - a)^2 + z^2 = b^2.$$

Impliciet differentiëren levert

$$2(r - a) + 2z \frac{\partial z}{\partial r} = 0,$$

dus

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \frac{(r-a)^2}{b^2 - (r-a)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0.$$

Voor de oppervlakte vinden we

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a-b}^{a+b} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} r dr &= 4\pi b \int_{a-b}^{a+b} (b^2 - (r-a)^2)^{-\frac{1}{2}} r dr = \\ &= 4\pi ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi + 4\pi b^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \psi d\psi = 4\pi^2 ab, \end{aligned}$$

waarbij we de substitutie $r = a + b \sin \psi$ gebruikt hebben.