TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN
Afdeling Algemene Wetenschappen
Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken

bij het college

WISKUNDE 17

Najaarssemester 1976

2276 Bibl/Mag

Technische Hogeschool Eindhoven

Onderafdeling der Wiskunde

Vraagstukken bij het college Wiskunde 17

Dictaatnr. 2.276 Prijs f 2,-

TECHNISCHE HOGESCHOOL EINDHOVEN

Onderafdeling der Wiskunde

VRAAGSTUKKEN BIJ HET COLLEGE WISKUNDE 17

najaarssemester 1976

Inhoudsbeschrijving

Vraagstukken bij het college Wiskunde 17

najaarssemesterjaar 1976

JdG, 12 Juli 2005

week 1

§§0.1-0.4 (Notaties, getalverzamelingen, bewijs uit het ongerijmde, volledige inductie).

1. Geef in verzamelingsnotatie de volgende verzamelingen:
   a) de verzameling van de reële getallen, waarvan het kwadraat een natuurlijk getal is;
   b) de verzameling van de kwadraten van de natuurlijke getallen;
   c) de punten in $\mathbb{R}^2$ met gehele coördinaten, waarvan de afstand tot (0,0) gelijk is aan $\sqrt{3}$;
   d) het inwendige van een kubus in $\mathbb{R}^3$ met hoekpunten (1,1,1), (-1,1,1), (-1,-1,1), (1,-1,1), (1,-1,-1), (1,1,-1), (-1,1,-1) en (-1,-1,-1).

2. Schets de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$.
   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \vee y \leq x\}$;
   b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \wedge 16x^2+y^2 \leq 4\}$;
   c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| \leq 1\}$;
   d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z \geq 0 \wedge 0 \leq x \leq 1 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$.

3. Bepaal de rationale oplossingen van de vergelijking

$$(2x^2-x-1)\ (x^3-2x) = 0.$$

4. Bewijs dat ${}^2\log 3$ irrationaal is.

5. Bewijs dat er geen grootste rationaal getal is dat kleiner is dan 1.

6. Bewijs met volledige inductie:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2}n(n+1) \qquad (n \in \mathbb{N})$;

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \qquad (n \in \mathbb{N})$.

7. Bewijs met volledige inductie:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

8. Bewijs dat

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}\qquad (n\in\mathbb{N}).$$

9. Bewijs dat de n^e-afgeleide van de functie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ met $f(x) = x\,e^x$ gelijk is aan $f^{(n)}(x) = (x+n)\,e^x$.

10. $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}$ met $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ heeft als n^e-afgeleide

$$f^{(n)}(x)=\tfrac{1}{2}(n!)\left\{\frac{1}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right\};$$

hierbij is $n! := 1.2.3.\ldots.n$.
Bewijs dit.

11. Gegeven is de functie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ met $f(x) = x^2\log x$.
Bepaal de n^e-afgeleide van f.

12. Bewijs dat de som van drie opeenvolgende derdemachten van natuurlijke getallen deelbaar is door 9.

13. De torens van Hanoi:
We beschikken over drie staven A, B en C die, bevestigd op een voetstuk, vertikaal omhoog staan. Staaf A is voorzien van n schijven ($n \in \mathbb{N}$) met in het midden een gat en met een afnemende diameter (de grootste schijf ligt onder).
   a) Bewijs dat het mogelijk is de hele toren schijven naar staaf B te verplaatsen, door slechts één schijf tegelijk te verplaatsen van de ene naar een andere staaf waarbij geen schijf op een kleinere wordt gelegd.
   b) Bewijs dat het mogelijk is aan de onder a) genoemde opdracht te voldoen door niet meer dan $2^{n-1}-1$ keer een schijf te verplaatsen.

week 2

§§0.5-0.6 (Afbeeldingen, cyclometrische functies).

1. Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f(x) = x^3-3x$.
   Schets de grafiek van de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met resp. $g(x) =$
   a) $f(x)$, c) $3f(x)$, e) $f(3+x)$,
   b) $f(-x)$, d) $f(3x)$, f) $3+f(x)$.

2. $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{1-x}$.
   a) Bereken $(f+g)(4)$, $(f\circ g)(4)$, $(g\circ f)(4)$.
   b) Welke reële getallen behoren niet tot het definitiegebied van $f\circ g$, resp. $g\circ f$?

3. Gegeven zijn de volgende afbeeldingen van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$:

   $f(x) = x+2$; $g(x) = x^3-3x$; $h(x) = (x-1)(x+2)$.

   Ga van ieder van deze afbeeldingen na of ze injectief, surjectief of bijectief zijn en bepaal zo mogelijk de bijbehorende inverse.

4. Ga grafisch na of de functie $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ injectief, surjectief of bijectief is in de volgende gevallen:

   a) $f(x) = \tan \frac{\pi}{2}x$;

   b) $f(x) = \dfrac{1}{\sin \frac{\pi}{2} x}$, $f(0) = 0$;

   c) $f(x) = \cot \pi x$, $f(0) = 0$;

   d) $f(x) = e^{x+|x|}$;

   e) $f(x) = \ln(x+1)$.

5. Kies intervallen A en B zodanig dat de functie $f : A \to B$ een inverse heeft in de volgende gevallen.
   a) $f(x) = x^2+2x+3$;
   b) $f(x) = x^2$;
   c) $f(x) = e^x$;
   d) $f(x) = \sin x$;
   e) $f(x) = \cos x$;
   f) $f(x) = \tan x$.
   Schets tevens de grafieken van f en $\overleftarrow{f}$.

6. Bepaal

   a) $\arcsin(-\frac{1}{2}\sqrt{3})$;

   b) $\arctan(\sqrt{3})$;

   c) $\arccos(1)$;

   d) $\arcsin(\frac{\pi}{4})$;

   e) $\arctan(10)$.

7. Geef de oplossingen van de volgende vergelijkingen met behulp van cyclometrische functies:

   a) $\sin x = \frac{1}{4}$; b) $\cos x = \frac{1}{4}$; c) $\tan x = \frac{1}{4}$.

8) Bewijs de volgende gelijkheden (gebruik daarbij bijvoorbeeld een schets van een rechthoekige driehoek).

   a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ $\quad (x \in [0,1])$;

   b) $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$ $\quad (x \in [0,1])$.

9. Bewijs met behulp van differentiëren:

   a) $\arctan x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$;

   b) $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ $\quad (\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\})$.

10. Bereken

    $\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13}$;

    $\arccos \frac{3}{5} + \arccos \frac{5}{13}$.

11. De inverse van $f : A \to B$ is $g : B \to A$; hierbij zijn A en B deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.

    Dan geldt $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ voor $x \in A \cap B$.

    a) Ga dit na voor

       (i) $f(x) = x^2$;

       (ii) $f(x) = \tan x$.

    b) Bereken $\arctan(\tan x)$ voor $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

<u>week 3</u>

§§0.7-0.8; §1.1

(Σ-notatie, ongelijkheden, kegelsneden, combinatoriek, binomium van Newton).

1. Onderzoek de juistheid van de volgende uitspraken:

a) $\sum_{i=1}^{12} a_i = a_1+a_2+\sum_{k=3}^{12} a_k$;

b) $\sum_{k=1}^{n} 1 = 1$;

c) $\sum_{k=1}^{n} 2 = 2n$;

d) $(\sum_{k=1}^{3} a_k)^2 = \sum_{k=1}^{3} a_k^2$;

e) $\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$;

f) $\sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{s=1}^{5} a_{s+5} = \sum_{k=1}^{10} a_k$;

g) $\sum_{k=1}^{3} \sum_{s=1}^{2} (a_k+b_s) = \sum_{s=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} (a_k+b_s)$;

h) $\sum_{k=1}^{3} \sum_{s=1}^{2} a_k.b_s = \sum_{s=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} a_k.b_s$.

2. Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de volgende ongelijkheden gelden:

a) $|x+7| < |x|+9$;

b) $|x+7| < |x|-5$.

3. Bewijs dat

$$|x^4 - x^3 + 3x^2 + x + 2| < 40 \quad \text{voor} \quad |x| < 2.$$

4. Bewijs dat

$$|x^3 + x^2 + 1| > 899 \quad \text{voor} \quad |x| > 10.$$

5. Bewijs dat

$$\left|\frac{x-4}{x^2+16}\right| \leq \left|\frac{1}{|x|-4}\right| .$$

6. Bepaal de coefficient van x^4 in de ontwikkeling van

a) $(3x+5)^{12}$;

b) $(2x^2+\frac{1}{3x})^5$;

c) $(x^2+x+2)^7$.

7. Bereken

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

8. Bewijs:

a) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ $\qquad (n \in \mathbb{N}\ ,\ k \in \mathbb{N})$;

b) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n.2^{n-1}$ $\quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

9. a) Op hoeveel verschillende manieren kan uit zeven personen een commissie van vier leden samengesteld worden?
b) Op hoeveel verschillende manieren kan uit zeven personen een commissie bestaande uit een voorzitter, een vice-voorzitter, een secretaris en een penningmeester samengesteld worden?

10. Tien ingenieurs moeten naar drie congressen, waarbij resp. twee, drie en vijf personen aanwezig moeten zijn. Op hoeveel manieren kunnen de taken verdeeld worden als de data van de congressen samenvallen?
En op hoeveel manieren is dit mogelijk als er twintig ingenieurs zijn?

11. Uit vijf ingenieurs en zeven sociologen moet een commissie gevormd worden, bestaande uit twee ingenieurs en drie sociologen.
Op hoeveel verschillende manieren kan dit gedaan worden als:

a) elke ingenieur en elke sociolooog in deze commissie opgenomen kan worden;

b) een bepaalde ingenieur lid moet worden van deze commissie;

c) een bepaalde ingenieur en een bepaalde socioloog niet samen lid mögen zijn van deze commissie.

12. In de voetbaltoto moet U de uitslagen voorspellen van 13 wedstrijden. De uitslag van de wedstrijd wordt aangegeven
    met een 1 (wanneer de thuisspelende club wint),
    met een 2 (wanneer de uitspelende club wint),
    met een 3 (bij een gelijkspel).
    Op hoeveel manieren kan de voetbaltoto worden ingevuld?

13. Het invullen van een lottoformulier bestaat uit het aankruisen van 6 verschillende getallen in een kolom van 41 verschillende getallen.
    a) Op hoeveel manieren kan een lottoformulier ingevuld worden?
    b) De uitslag wordt gegeven door 6 verschillende getallen van de voorgeschreven 41. Hoeveel kolommen zijn er met de eigenschap dat precies 3 van de aangekruiste getallen overeenstemmen met de uitslag?

14. Stel de vergelijking op van de hyperbool met brandpunten (a,a) en (-a,-a), en met de eigenschap dat voor ieder punt P op de kromme geldt dat de absolute waarde van het verschil van de afstanden van het punt P tot de brandpunten gelijk is aan 2a $(a>0)$.

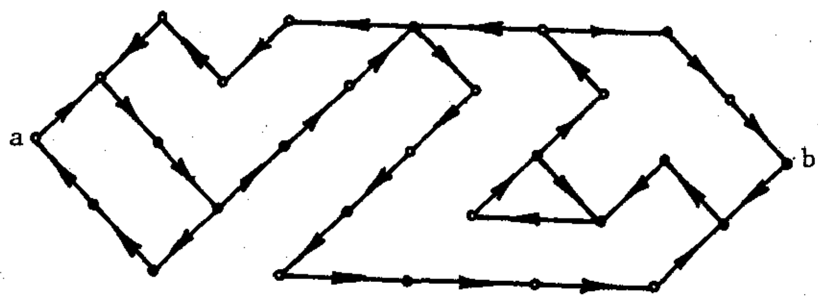
15. Bepaal de lengte van een zijde van het ingeschreven vierkant van de ellips $x^2+3y^2 = 27$, waarvan de zijden evenwijdig met de assen lopen.

16. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de parabool $y^2 = 6x$, die met de positieve x-as een hoek $\frac{\pi}{4}$ maakt.

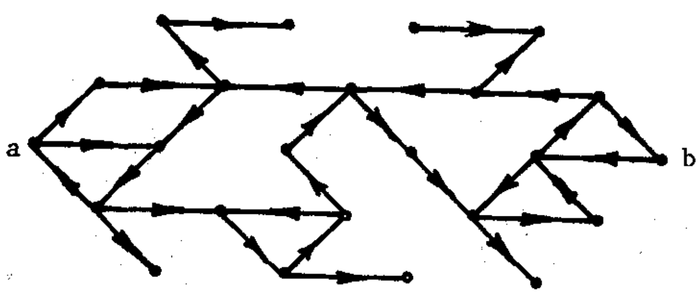
week 4

§§1.2-1.4 (Inleiding grafentheorie, algoritme voor de afstand tussen twee knopen, bomen, algoritme voor optimale boom, gerichte grafen, bepaling van de rang van een knoop).

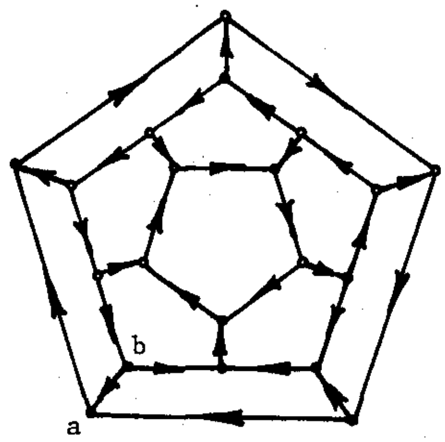
1. Bepaal in de volgende enkelvoudige, samenhangende, gerichte grafen G_1, G_2, G_3, G_4 de afstand van knoop a naar knoop b en de afstand van knoop b naar knoop a. Teken voorts een deelgraaf G_i' van G_i $(i = 1,2,3,4)$ met de volgende eigenschappen:
   (i) G_i' bevat geen kringen;
   (ii) de knopen van G_i' zijn dezelfde als de knopen van G_i;
   (iii) het aantal takken van G_i' is zo klein mogelijk;
   (iv) elke knoop van G_i die vanuit a bereikbaar is, is in G_i' nog steeds vanuit a bereikbaar en wel langs de kortste weg.



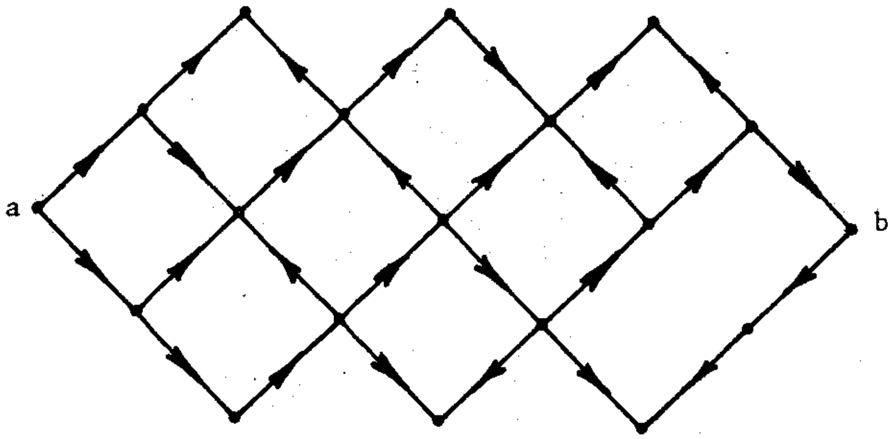
G_1



G_2

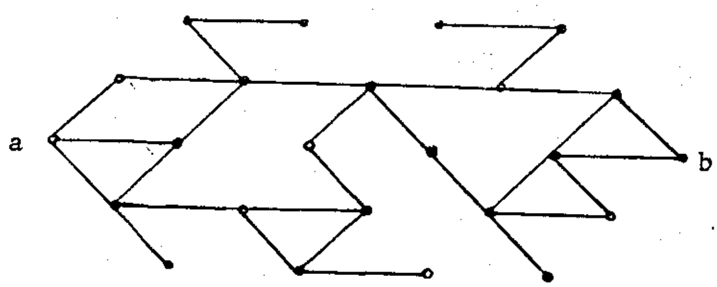


G_3

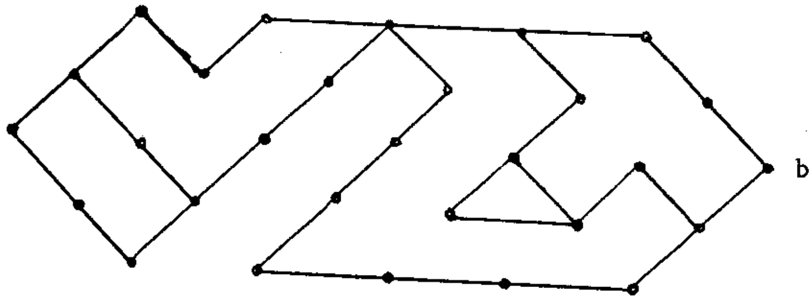


G_4

2. Bepaal in de volgende enkelvoudige, samenhangende, ongerichte grafen G_1, G_2 de afstand van knoop a naar knoop b. Teken voorts een skelet van G_i $(i = 1,2)$ met de eigenschap dat elke knoop van dit skelet bereikbaar is vanuit knoop a langs de kortste weg.

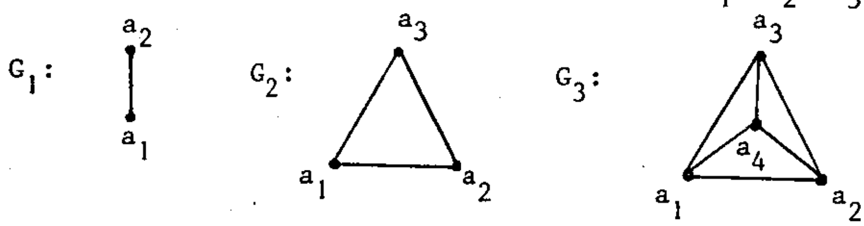


G_1



G_2

3. Gegeven zijn de volgende ongerichte grafen G_1, G_2, G_3.



(i) Bepaal het aantal skeletten van G_1.

(ii) Bepaal het aantal skeletten van G_2.

(iii) Bepaal het aantal skeletten van G_3.

Als het kostprijsschema van G_3 gegeven wordt door

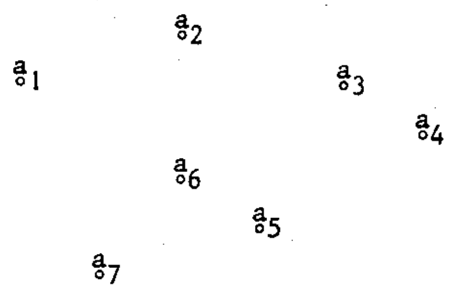
	a_2	a_3	a_4
a_1	2	7	3
a_2		3	6
a_3			1

,

bepaal dan een skelet van G_3 met minimale kostprijs (optimale boom).

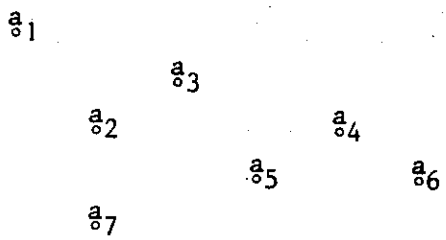
4. Bepaal van de onderstaande grafen, die met behulp van bijgaand kostprijs-schema gegeven zijn, een optimale boom.

a)



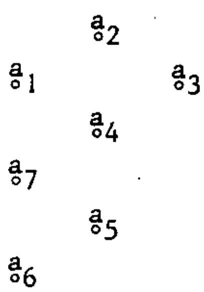
	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	4	10	9	∞	5	∞
a_2		11	12	6	4	13
a_3			7	9	∞	10
a_4				9	9	9
a_5					2	∞
a_6						9

b)



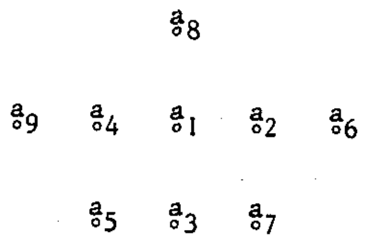
	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	9	10	∞	11	12	∞
a_2		2	11	6	8	6
a_3			6	5	8	∞
a_4				3	8	4
a_5					7	2
a_6						∞

c)



	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	9	10	5	12	∞	5
a_2		11	8	13	11	∞
a_3			4	∞	10	9
a_4				10	9	8
a_5					1	2
a_6						3

5. Een ongerichte graaf is gegeven met behulp van bijgaand kostprijsschema.



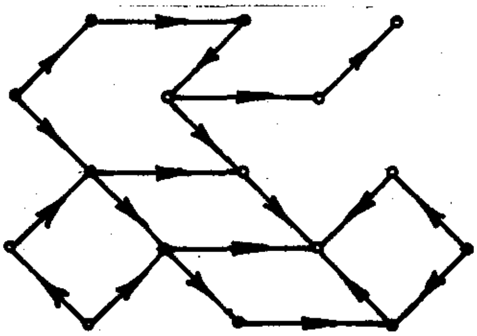
	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	1	2	2	4	2	6	2	3
a_2		2	4	3	1	5	2	6
a_3			3	2	4	1	2	6
a_4				1	3	5	4	1
a_5					2	5	3	1
a_6						5	6	3
a_7							4	2
a_8								3

(i) Bepaal een optimale boom van deze graaf. Bepaal verder in deze boom de goedkoopste weg van knoop a_2 naar knoop a_7.

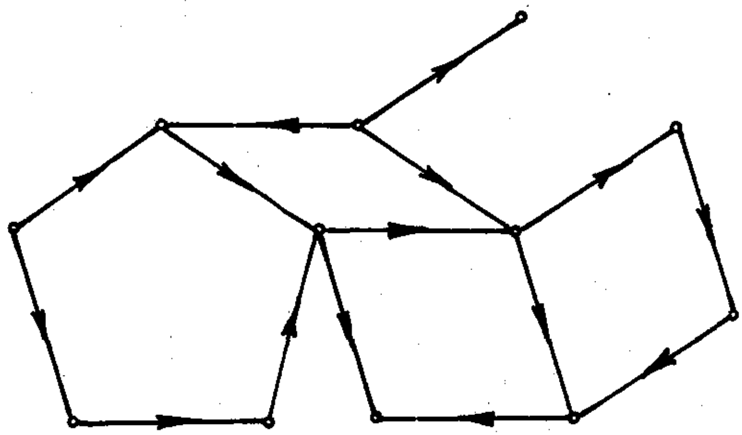
(ii) Bepaal de goedkoopste weg van knoop a_2 naar knoop a_7.

6. Nummer de knopen in de volgende gerichte grafen zodanig, dat voor elke tak t geldt: nummer b(t) < nummer e(t).

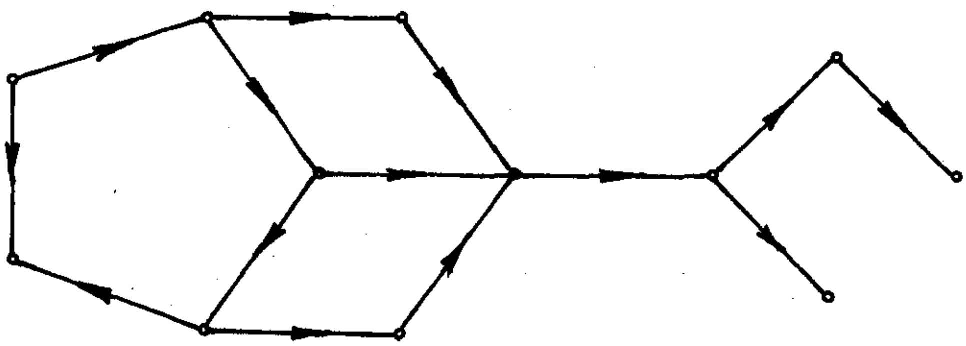
a)



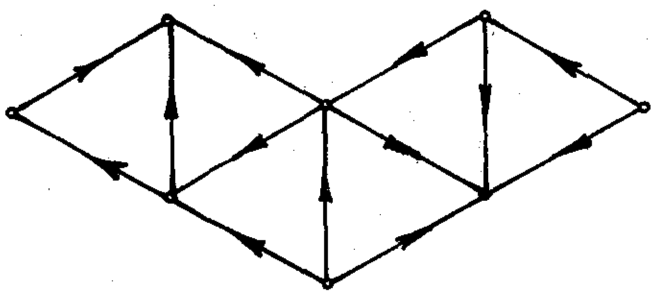
b)



c)



d)

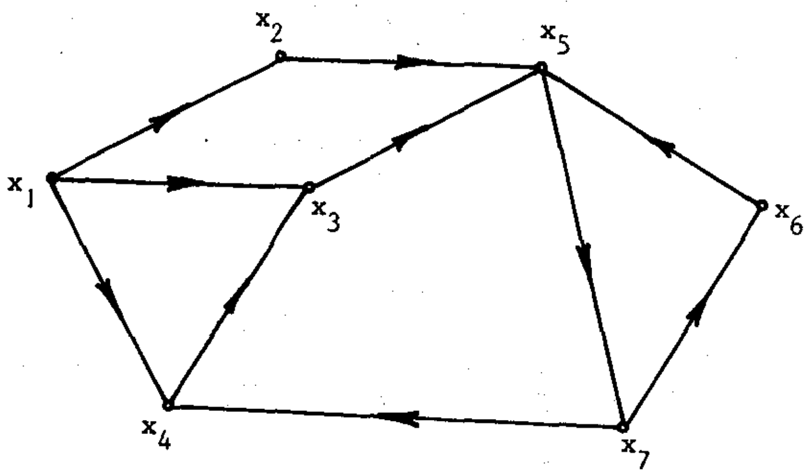


Bevatten bovenstaande grafen kringen? (vgl. stelling 1.4.1, p. 36 van de syllabus wiskunde 17 en 27.)

7. Gegeven zijn een viertal gerichte grafen G_1, G_2, G_3, G_4.
   (i) Bepaal van elke graaf G_i de knopen met eindige rang.
   (ii) Bepaal van elke graaf G_i de rang van de knopen, die een eindige rang hebben.
   (iii) Geef verder, zo mogelijk, in elk van de vier grafen een kring aan.

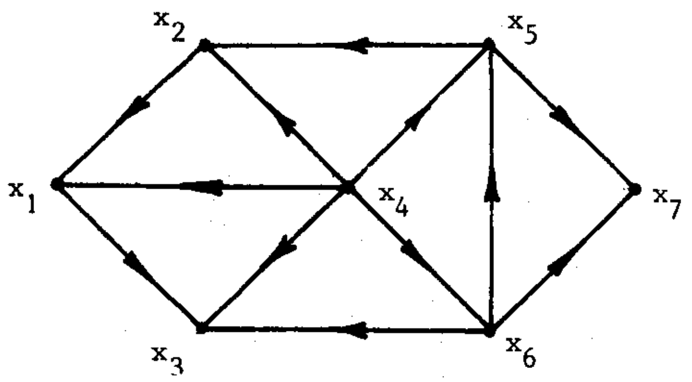
a)

G_1:



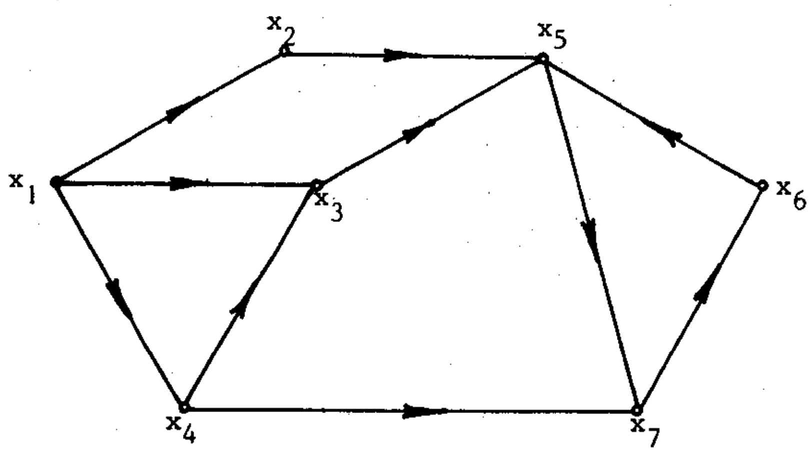
b)

G_2:



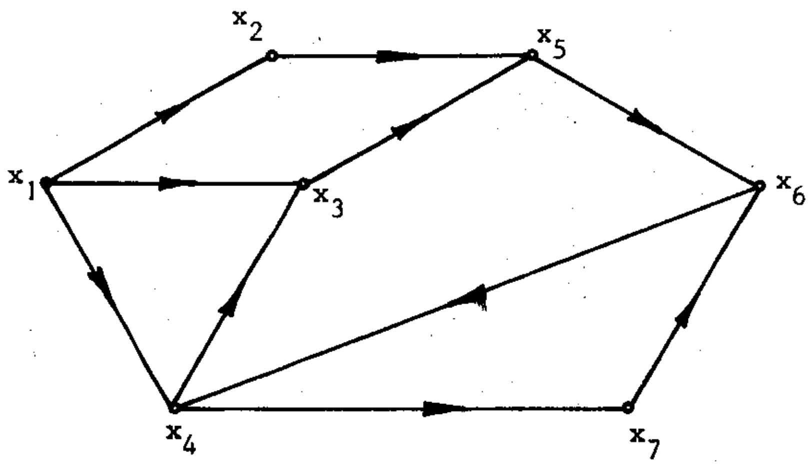
c)

G_3:

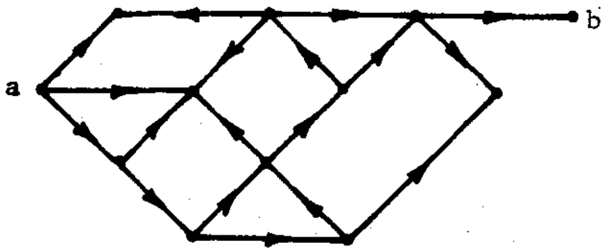


d)

G_4:



8. Gegeven is de volgende graaf

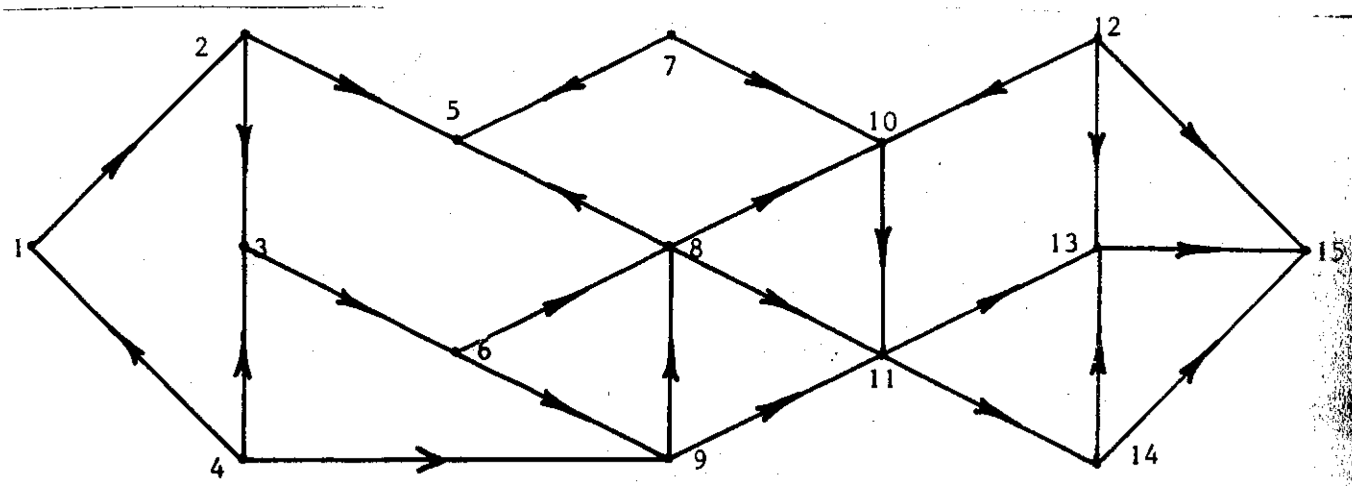


(i) Nummer de knopen zodanig dat voor elke tak t geldt:

nummer b(t) < nummer e(t).

(ii) Bepaal de lengte van de kortste weg tussen a en b.

9. Gegeven is de volgende gerichte graaf



(i) Bepaal de wegen met minimale lengte van knoop 1 naar knoop 15.

(ii) Onderzoek of het mogelijk is in deze gerichte graaf een nummering van de knopen aan te brengen, zodanig dat voor elke tak t geldt:

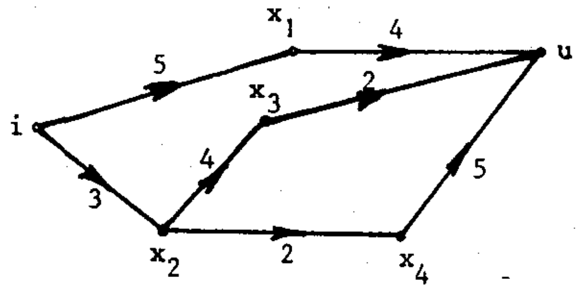
nummer b(t) < nummer e(t).

Indien een dergelijke nummering bestaat, geef deze dan aan. Indien een dergelijke nummering niet bestaat, geef dan aan waarom dat niet het geval is.

week 5

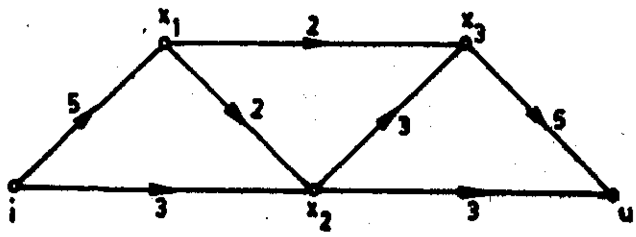
§1.5 (Transportnetwerken, stelling van Ford-Fulkerson).

1. Gegeven is het volgende transportnetwerk



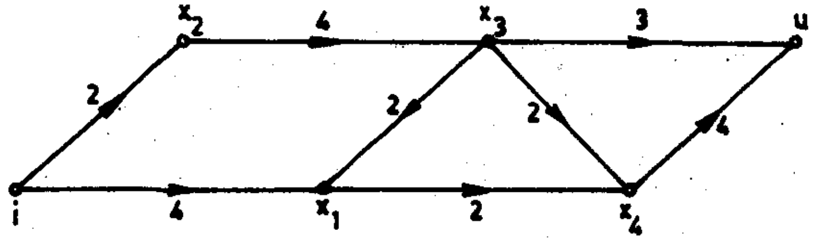
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

2. Gegeven is het volgende transportnetwerk



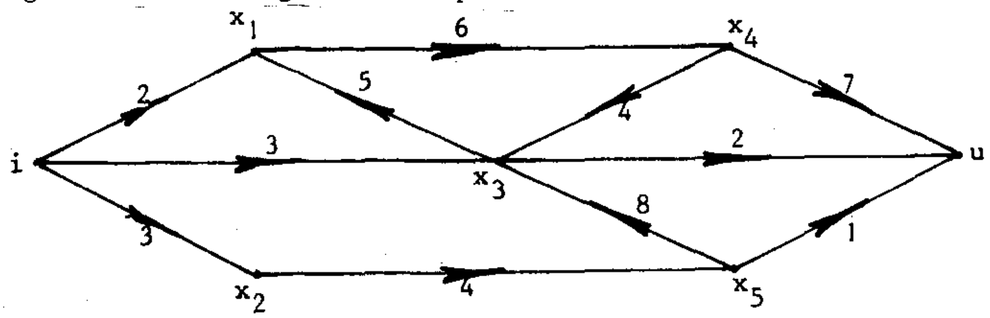
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

3. Gegeven is het volgende transportnetwerk



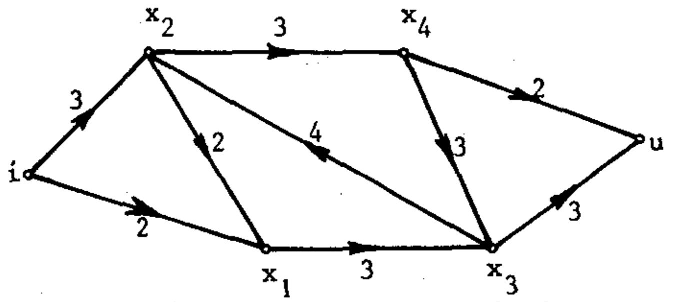
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

4. Gegeven is het volgende transportnetwerk



De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

5. Gegeven is het volgende transportnetwerk



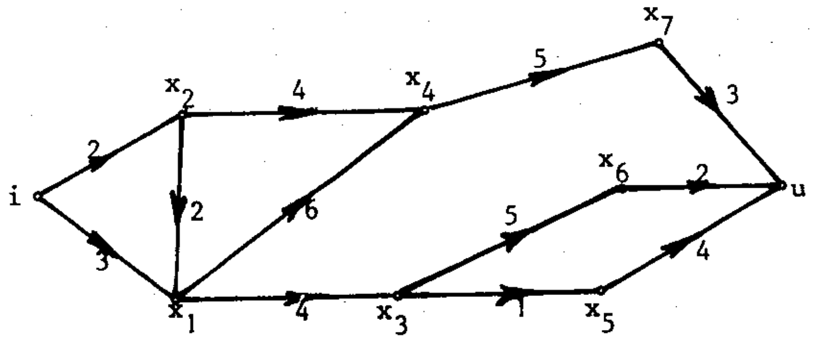
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
(i) Geef in een boomstructuur alle bogen in de gerichte graaf aan, die van i naar u lopen.

Met behulp van de algoritme, beschreven op pp. 39-40 van de syllabus wiskunde 17 en 27, heeft men een toegelaten stroom f op het netwerk geconstrueerd, die we aangeven m.b.v. het volgende schema.

c		f
2	ix_1	1
3	ix_2	3
3	x_1x_3	3
2	x_2x_1	2
3	x_2x_4	1
4	x_3x_2	0
3	x_3u	3
3	x_4x_3	0
2	x_4u	1

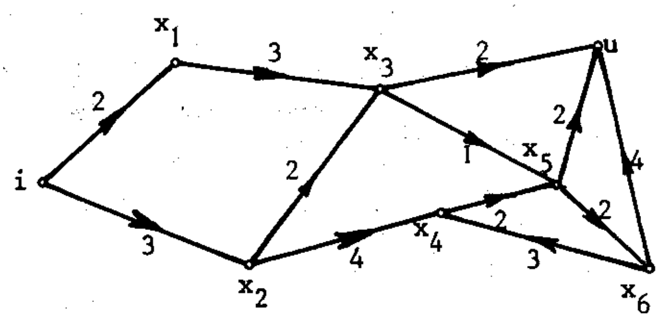
Verifieer dat de stroom f compleet is en geef een en ander aan in de boomstructuur, zoals gevonden onder (i). Is de stroomsterkte van f maximaal? Zo nee, construeer dan, uitgaande van de stroom f, een toelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

6. Gegeven is het volgende transportnetwerk



De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.
Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

7. Gegeven is het volgende transportnetwerk



De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.

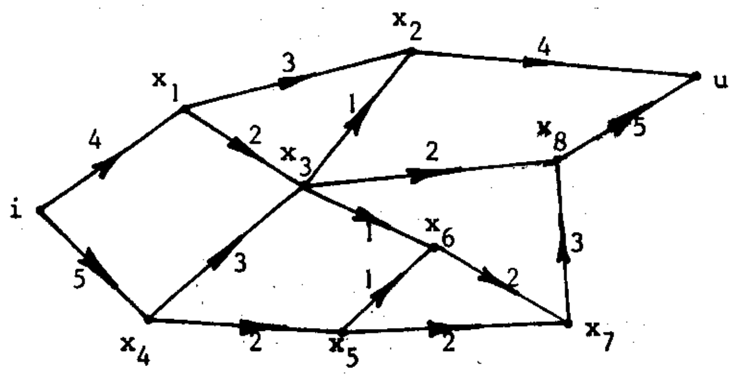
(i) Geef in een boomstructuur alle bogen in de gerichte graaf aan, die van i naar u lopen.

Met behulp van de algoritme, beschreven op pp. 39-40 van de syllabus wiskunde 17 en 27, heeft men een toegelaten stroom f op het netwerk geconstrueerd, die we aangeven m.b.v. het volgende schema.

c		f
2	ix_1	1
3	ix_2	3
3	x_1x_3	1
2	x_2x_3	2
4	x_2x_4	1
1	x_3x_5	1
2	x_3u	2
2	x_4x_5	1
2	x_5x_6	0
2	x_5u	2
3	x_6x_4	0
4	x_6u	0

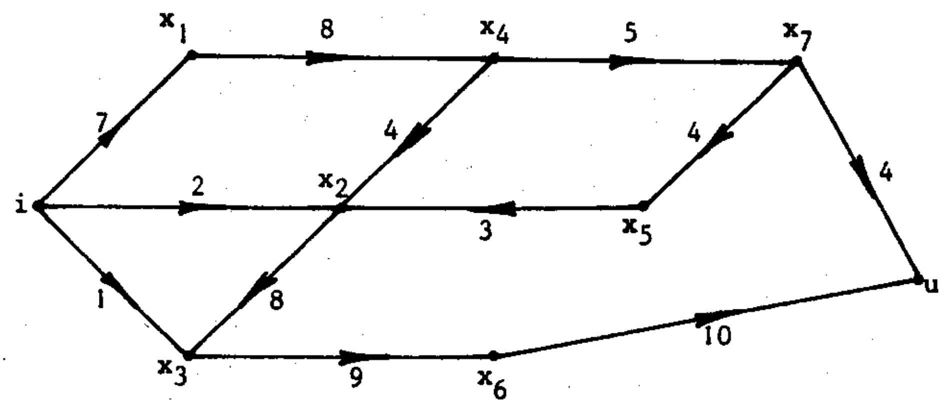
Verifieer dat de stroom f compleet is en geef een en ander aan in de boomstructuur, zoals gevonden onder (i). Is de stroomsterkte van f maximaal? Zo nee, construeer dan, uitgaande van de stroom f, een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

8. Gegeven is het volgende transportnetwerk



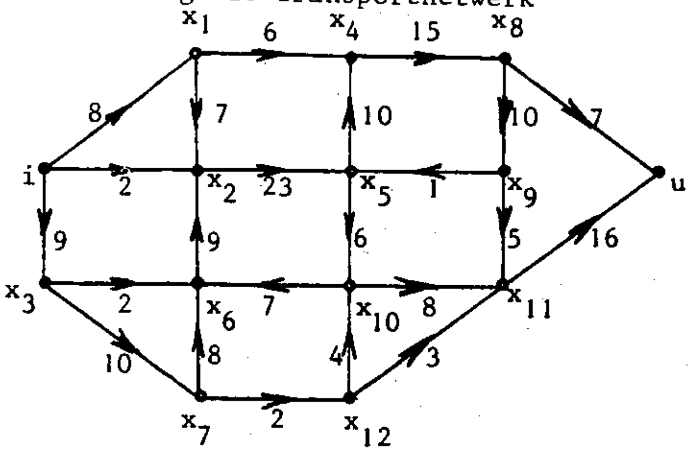
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan. Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

9. Gegeven is het volgende transportnetwerk



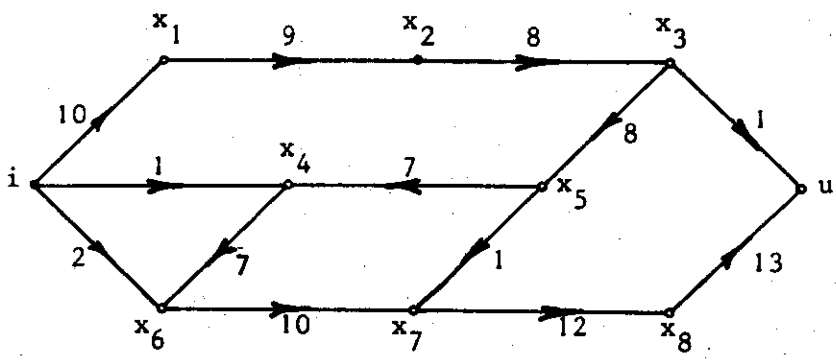
De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan. Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

10. Gegeven is het volgende transportnetwerk



De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan. Bepaal een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

11. Gegeven is het volgende transportnetwerk



De cijfers bij de pijlen geven de capaciteiten van de takken aan.

(i) Geef in een boomstructuur alle bogen in de gerichte graaf aan, die van i naar u lopen.

Met behulp van de algoritme, beschreven op pag. 39-40 van de syllabus wiskunde 17 en 27, heeft men een toegelaten stroom f op het netwerk geconstrueerd, die we aangeven m.b.v. het volgende schema.

c		f
10	ix_1	8
1	ix_4	0
2	ix_6	2
9	x_1x_2	8
8	x_2x_3	8
8	x_3x_5	8
1	x_3u	0
7	x_4x_6	7
7	x_5x_4	7
1	x_5x_7	1
10	x_6x_7	9
12	x_7x_8	10
13	x_8u	10

Verifieer dat de stroom f compleet is en geef een en ander aan in de boomstructuur, zoals gevonden onder (i). Is de stroomsterkte van f maximaal? Zo nee, construeer dan, uitgaande van de stroom f, een toegelaten stroom met maximale stroomsterkte en een snede met minimale capaciteit.

week 6

§§2.1-2.5 (Eigenschappen van functies, functielimieten, continuiteit, differentieerbaarheid.)

Bereken, zo mogelijk, de volgende limieten:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

3. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x} -x)$.

4. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$.

5. $\lim_{x\downarrow 0} \sqrt{x}^{\,x}$.

6. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.

7. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$.

8. $\lim_{x\to 0} \frac{x^4+3x^2}{x^5+3x^3+2x^2}$.

9. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-5x^2+4x}$

10. $\lim_{x\to 0} \frac{(2+x)^{10}-2^{10}}{x}$.

11. $\lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}}{x}$

12. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arcsin x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \sin\pi x \ \sin \dfrac{\pi}{x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

18. $\lim\limits_{x\downarrow 0} \sin x \ln x$.

19. Onderzoek de continuiuteit van de functies f als

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ $(x \neq 1)$,

$f(1) = 1.$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$ $(x \neq 1,\ x \neq -2)$,

$f(1) = 4,$
$f(-2) = 0.$

20. De functie f is als volgt gegeven:

$f(x) = 2x+b^2$ voor $x < 0$,
$f(x) = x+b$ voor $x > 0$,
$f(0) = 0.$

a) Voor welke b bestaat $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

b) Voor welke b is f continu?

21. De functie f is als volgt gegeven:

$$f(x) = 2x+b \text{ voor } x < 0,$$

$$f(x) = \frac{a}{x-3} \text{ voor } 0 \le x \le 2,$$

$$f(x) = x^2 - x+b \text{ voor } x > 2.$$

Gevraagd wordt a en b zodanig te bepalen dat f continu is.

22. Onderzoek de differentieerbaarheid in $x = 0$ van de functies f, wanneer

a) $f(x) = x^3$; c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

b) $f(x) = |x|$; d) $f(x) = x|x|$.

23. De functie f wordt gedefinieerd door

$$f(x) = (1-x) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} .$$

Bereken $f'(1)$.

24. De functie f is als volgt gegeven:

$$f(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \quad (x < 0),$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(x) = x \ln x \quad (x > 0).$$

Bepaal, indien mogelijk, $f'(0)$.

25. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is als volgt gegeven:

$$f(x) = e^{x - \frac{1}{|x|}} \quad (x \neq 0),$$

$$f(0) = 0.$$

Toon aan dat f differentieerbaar is in $x = 0$.
Bepaal de afgeleide van f voor alle $x \in \mathbb{R}$.

26. Zij $f(x) = -5x^2 + 20x + 2$ voor $x \in \mathbb{R}$.
Bereken de lineaire benadering van $f(0,98)$ rond 1.

week 7

§2.5 (Techniek van het differentiëren, schetsen van grafieken, integraalrekening).

1. Bereken de afgeleiden van de volgende functies (voor zover deze afgeleiden bestaan):

a) $\left(\frac{4-x^2}{4+x^2}\right)^2$;

b) $\sin^2 \frac{1}{2}x$;

c) $\frac{\sin^2(x^2+6)}{4}$;

d) $\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$;

e) $\ln |x + \sqrt{x^2+q}|$;

f) ${}^{10}\log x$;

g) $\frac{10^x}{x^{10}}$;

h) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

i) $\sqrt[x]{x}$;

j) $\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \frac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$;

k) $\frac{2}{3}\arctan x + \frac{1}{3}\arctan \frac{x}{1-x^2}$;

l) $\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

m) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

n) $\ln \left| \cos x - \frac{1}{\cos x} \right|$;

o) $\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$;

p) $xe^x \ln x$;

q) $\frac{1}{2}e^x (x \sin x - x \cos x + \cos x)$;

r) $\ln \left(\frac{1-\cos mx}{1+\cos mx}\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. Schets de grafieken van de volgende functies:

a) $f(x) = \frac{x-2}{x^2}$;

b) $f(x) = \frac{x^3}{x-12}$;

c) $f(x) = xe^x$;

d) $f(x) = x^{-2}\, e^x$;

e) $f(x) = \frac{x^2-3}{e^x}$;

f) $f(x) = x \ln x$;

g) $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$.

Bepaal de volgende integralen:

3. $\int \frac{x^3+1}{x\sqrt{x}}\,dx$.

4. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

5. $\int x(1+x)^{10}dx$.

6. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$.

7. $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

8. $\int \frac{1}{x \ln x}\,dx$.

9. $\int \sqrt{4-\sqrt{x}}\,dx$.

10. $\int x^2 \cos x\,dx$.

11. $\int e^x \sin 2x\,dx$.

12. $\int x^2 \ln x\,dx$.

13. $\int x^{-2} \ln x\,dx$.

14. $\int \arcsin x\,dx$.

Bereken de volgende integralen:

15. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$.

16. $\int_{1}^{e} \ln^2 x\,dx$.

<u>week 8</u>

§§2.5-2.6 (Vervolg integraalrekening, oneigenlijke integralen, hogere afgeleiden, buigpunten).

Bereken de volgende integralen:

1. $\int_0^1 2x \arctan x \, dx$.

2. $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

3. $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \arcsin x \, dx$.

Bereken, zo mogelijk, de volgende integralen:

4. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

5. $\int_2^\infty \left(\frac{dx}{x \ln x}\right)$.

6. $\int_0^\infty \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+10}\right) dx$.

7. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$.

8. $\int_0^1 \ln x \, dx$.

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$.

10. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$.

11. $\int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x}\right) dx.$

12. Gegeven is dat de functie f continu is. De functie F wordt gedefinieerd door

$$F(x) = x \int_0^x f(t)\ dt.$$

Bewijs dat

$$F(x) - xF'(x) + x^2 f(x) = 0.$$

13. a) Bereken $\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin x\ dx$

en

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\ dx\ .$$

b) Gegeven is dat de functies f en g continu zijn op het interval $[-a,a]$, $a \in \mathbb{R}$. f is een even functie d.w.z. $f(x) = f(-x)$ voor alle $x \in [-a,a]$, g is een oneven functie d.w.z. $g(-x) = -g(x)$ voor alle $x \in [-a,a]$.

Bewijs dat

(i) $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2 \int_0^a f(x)dx;$

(ii) $\int_{-a}^{a} g(x)\ dx = 0.$

14. Bereken voor $a > 0$ de oppervlakte van de figuur, die wordt ingesloten door de grafieken van de functies f en g, waarbij

$$f(x) = \frac{a^3}{x^2+a^2} \quad \text{en} \quad g(x) = \frac{x^2}{2a}\ .$$

15. De functie $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = e^{\frac{\pi}{2}-x} \sin x\ .$$

Bepaal de buigpunten en schets de grafiek van f.

16. Schets de grafiek van de functie f gedefinieerd door

$$f(x) = x^4 e^x.$$

Bepaal in het bijzonder de buigpunten.
Bereken de oppervlakte van de figuur, die wordt ingesloten door de grafiek van f en de negatieve x-as.

17. Bereken de tweede afgeleide van de volgende functies:

a) $f(x) = e^{-x} \cos x$;

b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$;

c) $f(x) = x^3(\ln x)^2$;

d) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

week 9

§§ 2.6-2.8 (Kromtestraal, hyperbolische functies, stelling van Taylor).

1. Bepaal de kromtestraal en het kromtemiddelpunt van de kromme met vergelijking
$$y = \ln \frac{1}{\cos x}$$
in $x = 0$.

2. In welk punt is de grafiek van e^x het sterkst gekromd? Bepaal de kromming in dat punt.

3. a) Geef de vergelijking van de kromtecirkel van de grafiek van de functie f gedefinieerd door
$$f(x) = x^2$$
in $x = 1$.
   b) Eveneens van de functie g gedefinieerd door
$$g(x) = e^x$$
in $x = 0$.

4. Bewijs de volgende formules:
   a) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$;
   b) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$.

5. Bepaal de afgeleide van $\log \cosh x$.

6. Bereken $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ met behulp van de substitutie $x = \cosh t$.

7. Schets de grafiek van $\cosh(x^2-x)$.

8. Bereken de kromming in een punt van de grafiek van de functie $\cosh x$.

9. Zij f de inverse functie van $\cosh x$ op $[0,\infty)$. Bepaal de definitieverzameling van f. Toon aan dat $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

10. Zij $g : \mathbb{R} \to (-1,1)$ en $g(x) = \tanh x$. Toon aan dat $\overleftarrow{g}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

11. Geef de Taylor ontwikkeling tot en met de term van de vierde graad en de restterm van

    a) $\sin x^2$ rond 0;

    b) $\cos x$ rond $\frac{\pi}{4}$;

    c) $\ln(4+x)$ rond 2.

12. Bewijs:

    a) $e^x > 1+x+\frac{1}{2}x^2$ voor $x \in (0,\infty)$;

    b) $e^x < 1+x+\frac{1}{2}x^2$ voor $x \in (-\infty,0)$.

13. Bepaal de Taylor-ontwikkeling tot en met de derde term en de restterm van $\cosh x$ rond 0.

    Bewijs dat de restterm niet-negatief is voor elke x.

    Geef met behulp van de gevonden ontwikkeling een ondergrens voor cosh 10.

14. Bewijs:

    a) $x - \frac{1}{6}x^3 < \sin x < x$ voor $x \in (0,\infty)$;

    b) $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ voor $x \in (0,\infty)$.

15. Geef de Taylor-ontwikkeling tot en met de vierde term en de restterm voor $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ rond 0.

16. Geef de Taylor-ontwikkeling tot en met de vierde term en de restterm voor $\sqrt{x}$ rond 1.

    Bewijs dat $|R_3| < \frac{1}{20}$ voor $x \in (\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

    Bereken vervolgens $\sqrt{5}$ in één decimaal nauwkeurig.

week 10

§2.9 (Techniek van het integreren, partiële integratie, breuksplitsing).

1. Bepaal $\int x \cos^3 x \, dx$.

2. Geef een recurrente betrekking voor $\int x^n \sin x \, dx$ $(n = 0,1,2,..)$.

3. Geef een recurrente betrekking voor $\int_0^\infty e^{-x^2} x^n \, dx$.

   (zie voor n = 0 de syllabus wiskunde 17 en 27, p. 205, voorbeeld 6).
   Bereken vervolgens daarmee $\int_0^\infty e^{-x^2} x^7 \, dx$.

4. Geef een recurrente betrekking voor $\int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} \, dx$ $(n = 0,1,2,..)$.
   Bereken vervolgens de integraal voor $n = 8$.

5. Geef een recurrente betrekking voor $\int x^n \ln x \, dx$ $(n = 0,1,2,...)$.

   Bepaal de volgende integralen:

6. $\int \frac{dx}{(2x+5)^5}$.

7. $\int \frac{dx}{4x^2-20x+29}$.

8. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1} \, dx$.

9. $\int \frac{x^3}{(x+1)(x^2-4)} \, dx$.

10. $\int \frac{dx}{(x^2-1)(x-1)}$.

11. $\int \frac{dx}{(2x^2+2x+1)^2}$.

12. $\int \frac{x^3+4x^2-x+3}{(x-2)(x^2+1)^2} \, dx$.

13. $\int \frac{x^2+9x+29}{(x-4)(x^2+2x+3)} \, dx$.

14. $\int \frac{x\,dx}{(7x^2+1)^2}$.

15. $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,dx.$

16. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx.$

<u>week 11</u>

§§2.9-2.10 (Vervolg techniek van het integreren, goniometrische integralen, formule van Wallis, numerieke integratie).

Bepaal de volgende integralen:

1. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

2. $\int \frac{\sin x}{\cos x(1-\cos x)}\, dx$.

3. $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$.

4. $\int (1+\tan x)^2\, dx$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

6. $\int \frac{dx}{2-\sin x}$.

7. $\int \frac{dx}{1+\tan x}$.

8. $\int \frac{\sin x \cos x}{\cos 2x - \sin 2x}\, dx$.

9. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\, dx$.

10. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+4x+9}}$.

Bereken de volgende integralen:

11. $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\, dx$.

12. $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx.$

13. $\int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

14. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{(1+x^2)^{5/2}}.$

15. $\int_2^\infty \frac{\sqrt{x^2-1}-x}{x^2-1}\,dx.$

16. $\int_0^{3/2} \sqrt{4x^2+9}\,dx.$

17. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx.$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^4 x\,dx.$

19. $\int_0^{\pi} \sin^7 x\cos^6 x\,dx;$

$\int_0^{\pi} \sin^6 x\cos^7 x\,dx.$

20. $\int_0^{2\pi} \sin^4 x\,dx.$

21. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 x\cos^5 x\,dx.$

22. a) Bereken schattingen voor de integraal $\int_{10}^{12} x^3dx$ met behulp van de (samengestelde) trapeziumregel.
Gebruik als stapgrootte achtereenvolgens $h = 2$ en $h = 1$. Als de bijbehorende trapeziumsommen worden aangegeven met $T(2)$ en $T(1)$, bereken dan

$$T^*(1) = T(1) + \frac{1}{3}(T(1) - T(2))$$

(vgl. sectie 2.10.8 van de syllabus wiskunde 17 en 27). Vergelijk de uitkomst van $T^*(1)$ met de exacte waarde van de gegeven integraal.

b) Voer analoge berekeningen uit voor de integraal $\int_{10}^{12} x^4dx.$

week 12

§3.1 (Inleiding differentiaalvergelijkingen, richtingsveld, isoklinen, orthogonale trajectoriën).

1. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$xy' - 2y = 1-2y'.$$

a) Schets enkele isoklinen.

b) Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking.

c) Bepaal de oplossing waarvoor geldt $y(1) = 1$.

2. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$x^2y' + y^2 = 0.$$

a) Schets de isokline door het punt (2,2).

b) Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking.

c) Schets de integraalkrommen door de punten (2,2) en (-2,2).

3. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = 2^{x-y}.$$

a) Schets het bijbehorende richtingsveld.

b) Bepaal met dit richtingsveld de integraalkromme door het punt (1,1).

4. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = -xy.$$

a) Schets het bijbehorende richtingsveld.

b) Teken de isoklinen door de punten (2,1), (1,2) en (1,0).

c) Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking.

d) Bepaal de integraalkrommen door de punten (0,2), (3,4) en (1,1).

e) Bewijs dat de punten (x_1,y_1) en $(-x_1,y_1)$ op dezelfde integraalkromme liggen.

f) Bepaal de orthogonale trajectoriën van de verzameling integraalkrommen.

5. Bepaal de orthogonale trajectoriën van het stelsel hyperbolen met vergelijking

$$x^2 - y^2 = C.$$

6. Bepaal de orthogonale trajectoriën van het stelsel ellipsen met vergelijking

$$x^2 + 4y^2 = C.$$

7. Bepaal de krommen met de volgende eigenschap:

   in ieder punt (x,y) van de kromme gaat de raaklijn aan de kromme door het punt $(kx,0)$; hierbij is k een constante met $k < 1$.

8. Bepaal de krommen met de volgende eigenschap:

   de driehoek PQR, waarbij P een willekeurig punt op de kromme is, Q de projectie van P op de x-as is en R het snijpunt van de raaklijn in P aan de kromme met de x-as is, heeft oppervlakte 1.

Week 13

§§3.2-3.3 (Scheiding van variabelen, lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde).

Bepaal de algemene oplossing van de volgende differentiaalvergelijkingen:

1. $xyy' - xy' - 2y = 0$.

2. $xy^2 + x - (yx^2+y)y' = 0$.

3. $y' + xy = x$.

4. $y' + xe^{-x}y = 2x\,e^{-x}$.

5. $y' + y \sin x = \sin x$.

6. $xy' + y = \sin x$.

7. $y'\cos x + y \sin x = 1$.

8. $y' = -\dfrac{y - \ln x}{x \ln x}$.

9. $y' + (1+\frac{1}{x})y = x\,e^{-x}$.

10. $y' + (1-\frac{1}{x})y = x+x^2$.

11. $y' + y = 1$.

12. $y' + y = e^{-x}$.

13. $y' - y = x\,e^{x}$.

14. Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y' - xy = e^{-x}(x+1).$$

Voor welke beginwaarde $y(0)$ is de oplossing begrensd op het interval $[0,\infty)$?

15. Een kamer is 4 meter lang, 3 meter breed en 2,5 meter hoog. In een der ramen is een ventilator aangebracht, die per seconde 0,1 kubieke meter lucht afzuigt. Tegelijkertijd komt eenzelfde hoeveelheid zuivere lucht de kamer binnen (door deuren, ramen,enz.). Op het ogenblik dat de ventilator wordt aangezet is het verontreinigingspercentage van de lucht in de kamer 2%. We veronderstellen, dat de lucht in de kamer homogeen van samenstelling blijft.
Na hoeveel tijd is het verontreinigingspercentage van de lucht teruggebracht tot 0,5%?

16. Een motteballetje verliest massa door verdamping met een snelheid die evenredig is met de grootte van zijn oppervlak. Na 75 dagen heeft het balletje nog maar $\frac{8}{27}$ deel van het oorspronkelijke gewicht.
Na hoeveel dagen is het balletje geheel verdwenen?

week 14

§3.4 (Lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde met constante coëfficiënten).

1. $\ddot{y} - 5\dot{y} + 6y = 0$.

2. $\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 0$.

3. $\ddot{y} + 4y = 0$.

4. $\ddot{y} + \dot{y} + y = 0$.

5. $\ddot{y} - y = 3$.

6. $\ddot{y} - y = t+5$.

7. $\ddot{y} - y = e^{2t}$.

8. $\ddot{y} - y = \sin t$.

9. $\ddot{y} - y = e^{-t}$.

10. $\ddot{y} - y = t\,e^{-t}$.

11. $\ddot{y} + \dot{y} = 1+e^{-t}$.

12. $\ddot{y} + y = t^2$.

13. $\ddot{y} + y = \cos t$.

14. $\ddot{y} + y = t^2 + \cos t$.

15. $y'' - 4y' + 4y = x\,e^{2x} + 1$.

16. $y'' - a^2 y = e^x$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.

17. $y'' + (1+a)y' + ay = e^{-x}$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.

Los de volgende differentiaalvergelijkingen op:

18. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = x^2, \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = 0. \end{cases}$